

Федеральное агентство по образованию  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра комплексной информационной безопасности  
электронно-вычислительных систем (КИБЭВС)

**В.А. Бейнарович**

# **ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебник для вузов

*Издание второе, переработанное и дополненное*

*Рекомендовано Сибирским региональным  
учебно-методическим центром  
высшего профессионального образования  
для межвузовского использования  
в качестве учебного пособия для студентов  
специальности 210202 «Проектирование и  
технология электронно-вычислительных средств»*

Томск 2012

**УДК 681.51**

**Б 41**

**Бейнарович В.А.** Основы автоматике и системы автоматического управления: Учебник для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. – Томск: В-Спектр, 2012. – 352 с. – ISBN 978-5-91191-259-8.

В учебнике изложены методы и средства построения и расчета систем автоматике и автоматического управления технологическими процессами в технических объектах управления, соответственно требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования РФ к объему и содержанию учебной дисциплины «Основы автоматике и системы автоматического управления» при подготовке специалистов по направлению 210200 «Проектирование и технология электронных средств», включающему специальность 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» и специальность 210202 «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств».

Учебник предназначен для студентов и специалистов указанных специальностей, но может быть полезен студентам и специалистам других специальностей при изучении основ автоматике и систем автоматического управления.

**Рецензенты:**

**Обрусник В.П.**, заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук, профессор кафедры «Промышленная электроника» Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники;

**Бекишев Р.Ф.**, доктор технических наук, профессор кафедры «Электропривод и электрооборудование» Томского политехнического университета.

*Учебное пособие подготовлено к изданию и отпечатан тираж  
на средства инновационной образовательной программы  
«Разработка и внедрение в практику системы подготовки специа-  
листов,  
обеспечивающей генерацию новой массовой волны предпринимате-  
лей  
наукоемкого бизнеса» в рамках приоритетного национального  
проекта "Образование"»*

© Бейнарович В.А. , 2012

© ТУСУР, кафедра КИБЭВС, 2012

**Томск 2012**



## ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном мире автоматика и системы автоматического управления (САУ) составляют основу эффективного управления любыми *технологическими процессами* (ТП) целенаправленного преобразования энергии, вещества и информации для получения требуемых продуктов или результатов во всех сферах деятельности человека от домашнего быта до космических технологий. Значит, каждому специалисту в своей деятельности необходимо иметь определенные знания и умение использовать современные методы и средства автоматизации и автоматического управления для эффективной реализации существующих технологий и создания новых высоких технологий.

Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования Российской Федерации (ГОС ВПО РФ) при подготовке дипломированных специалистов по направлению 210200 «Проектирование и технология электронных средств», включающему специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» и 210202 «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств», предусмотрено изучение дисциплины «Основы автоматизации и системы автоматического управления» в составе следующих разделов: основы теории линейных непрерывных и дискретных систем управления; линейные системы управления при случайных воздействиях; нелинейные системы управления; основы теории оптимальных систем управления; датчики управляемых величин; исполнительные устройства автоматизации; включение ЭВМ в контур управления; устройства связи с объектом управления; обработка информации с датчиков; фильтрация, экстраполяция, интерполяция сигналов; режим реального времени управления; распределенные системы и локальные вычислительные сети в управлении; инструментальные средства АСУ; типовые модели систем массового обслуживания; анализ эффективности управления техническими средствами. Изучение данной дисциплины дает будущим специалистам по проектированию и технологии электронных приборов, устройств и систем знание и умение использования методов, технических средств и систем автоматического управления технологическими процессами их промышленного производства и эффективной эксплуатации.

Информацию для изучения указанных в ГОС ВПО РФ разделов дисциплины «Основы автоматизации и системы автоматического управления» можно найти в том или ином виде в многочисленной литературе по технической кибернетике, теории управления, элементам и

устройствам автоматики, управляющим и вычислительным системам, теории массового обслуживания и т. д. Однако для успешного изучения всех разделов дисциплины за установленное в ГОС ВПО РФ учебное время необходим единый учебник по дисциплине «Основы автоматики и системы автоматического управления» для студентов направления 210200, которого до настоящего времени нет.

В предлагаемом данном учебнике для студентов, обучающихся по направлению 210200, изложены основные понятия, элементы теории и расчета систем управления, примеры расчетов и контрольные вопросы по всем разделам дисциплины «Основы автоматики и системы автоматического управления», соответственно ГОС ВПО РФ.

Учебник состоит из введения, восьми разделов, заключения и списка использованной литературы. Во введении излагаются основные понятия и определения в автоматике и теории управления, и приводится классификация САУ. В первом и втором разделах рассматриваются основы теории линейных непрерывных и линейных дискретных САУ. В третьем разделе рассматривается работа САУ при случайных воздействиях. В четвертом и пятом разделах излагаются основы теории нелинейных и теории оптимальных САУ. В шестом и седьмом разделах рассматриваются датчики управляемых величин и исполнительные устройства автоматики. В восьмом разделе рассматриваются системы управления с использованием ЭВМ. Заключение содержит рекомендации по расширению и углублению изучения новейших методов построения и исследования систем автоматического управления с использованием искусственного интеллекта.

При создании данного учебника для подготовки инженеро-технологов по производству и эксплуатации электронных средств, не являющихся прямыми специалистами по автоматике и автоматического управления, большое значение уделялось объяснениям физического смысла, доступности изложения и примерам практического применения учебного материала, выбранного из необъятной информации по теории и средствам автоматического управления. При этом автор использовал личный многолетний научно-педагогический опыт преподавания данной дисциплины в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) и многочисленные литературные источники.

Замечания и рекомендации по данному учебнику просьба направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40. ТУСУР, учебно-методический отдел.

## ВВЕДЕНИЕ

С возникновением материального производства как совокупности создаваемых человеком *технологических процессов* (ТП) целенаправленного преобразования вещества, энергии и информации для получения требуемого продукта или результата, появились *задачи управления всеми процессами* на основе преобразования информации [1, 4].

В любом ТП выполняются целенаправленные действия, называемые *рабочими операциями* – создающими требуемый продукт или результат (например, перемещение груза роботом), *вспомогательными операциями* – создающими условия для нормального выполнения рабочих операций (например, захват и освобождение груза роботом) и *операциями управления* рабочими и вспомогательными операциями во времени и в пространстве изменений координат системы [1, 4, 6].

В начале развития производства все операции ТП выполнял человек, используя свои физические силы и интеллектуальные способности. Затем человек стал создавать *механизмы*, заменяющие его физический труд использованием сил ветра и напора воды, сил животных, паровых и электрических двигателей. *Механизация ТП* освободила человека от физической работы, но не от *управления ТП* [4, 6].

С развитием и усложнением *технологий* (совокупностей определенных ТП), повышением скорости и точности выполнения рабочих и вспомогательных операций, человек стал создавать измерительные приборы, дающие ему *информацию* о ходе ТП и состоянии *объекта управления* (ОУ) для повышения качества *ручного управления* ТП. С ускорением ТП и увеличением объема необходимой информации для управления ТП, человек не успевал обеспечивать ручное управление ТП и стал создавать *системы автоматического управления* (САУ), в которых информация о ходе ТП используется для *автоматического управления ТП* без участия человека, обеспечивая *автоматизацию ТП*. Автоматизация ТП частично или полностью освобождает человека от выполнения *интеллектуальной работы* по непосредственному управлению ТП, обеспечивая физически недостижимые для человека быстроту, точность и оптимальность выполнения операций управления ТП с учетом изменяющихся условий работы САУ [1, 4, 6, 9, 10].

Наука о закономерностях управления процессами в живой и неживой природе называется *кибернетикой*, где в качестве ОУ рассматриваются живые организмы, коллективы людей, машины и другие ОУ, для управления которыми используется *информация* о результатах их функционирования по *принципу обратной связи*. Наука о ме-

тодах и средствах автоматического управления техническими ОУ называется *технической кибернетикой* [1, 4, 6, 7, 9, 11, 12].

Методической основой кибернетики является *теория управления*, а технической кибернетики – *теория автоматического управления*, которая оперирует *математическими моделями* элементов и САУ, рассматривает их *информационные связи* друг с другом и с окружающей средой и решает *задачи анализа и синтеза САУ*. *Анализ САУ* заключается в определении и количественной оценке *свойств САУ* с заданной структурой и известными параметрами элементов и внешних воздействий. *Синтез САУ* заключается в определении *необходимой структуры и параметров элементов САУ* для получения *заданных свойств САУ* при заданных воздействиях. Теория управления определяет *три основных свойства САУ: устойчивость* (работоспособность); *инвариантность* (нечувствительность САУ к вариациям возмущающих воздействий); *робастность* (грубость САУ, малая чувствительность свойств САУ к вариациям параметров ее математической модели). Для САУ важны и такие свойства, как надежность, срок службы, масса и габариты, стоимость, эксплуатационные расходы и другие, определяемые энергетическими и экономическими показателями САУ, которые не рассматриваются теорией управления [1, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

*Автоматикой* называется отрасль науки и техники, охватывающая совокупность методов и технических средств автоматического управления всеми операциями по осуществлению ТП в технических ОУ без непосредственного участия человека-оператора. Термин «автоматика» образован от греческих слов «ауто» (сам) и «матос» (усиление, самоусиление, самодействие) [4, 6, 9, 10].

В *системах автоматического управления (САУ)* все операции управления выполняются автоматическими устройствами и поэтому САУ могут нормально работать без участия человека. В *автоматизированных системах управления (АСУ)* часть операций управления выполняют автоматические устройства, а другую часть операций управления выполняет человек-оператор, без участия которого АСУ работать не могут [1, 4, 6, 9, 10].

### **Контрольные вопросы**

- 1) Что называется технологическим процессом (ТП)? Примеры.
- 2) Что называется механизацией ТП и автоматизацией ТП? Примеры.
- 3) Что называется кибернетикой и технической кибернетикой?
- 4) Какие свойства САУ относятся к основным в теории управления?
- 5) Что называется анализом и синтезом САУ? Примеры.

## В1. Основные понятия и определения в автоматике

САУ одной выходной величиной  $y(t)$  состоит из *объекта управления* (ОУ) и *устройства управления* (УУ) и имеет задающее  $g(t)$  и возмущающее  $f(t)$  входные воздействия (рис. В1) [1, 4, 6, 9].

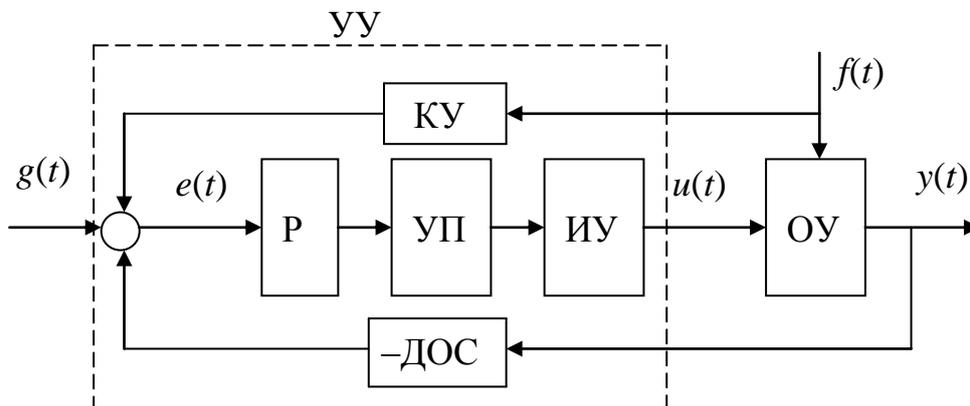


Рис. В1. Система автоматического управления

**Объект управления (ОУ)** в САУ выполняет рабочие операции осуществления ТП. Для этого выходной величиной  $y(t)$  ОУ необходимо управлять по заданному закону  $g(t)$  – *алгоритму функционирования ОУ и всей САУ* за счет формирования *управляющего воздействия*  $u(t)$  на ОУ для достижения *цели управления* – равенства  $y(t) = g(t)$ .

Наиболее часто в САУ реализуется один из трех основных алгоритмов функционирования: *стабилизация* заданного значения выходной величины, *программное управление* выходной величиной, *следящее управление* выходной величиной по произвольно изменяющемуся заданию. Вместе с основным алгоритмом функционирования в САУ могут дополнительно реализовываться *алгоритмы оптимального и адаптивного функционирования*, обеспечивающие наилучшие режимы работы ОУ и всей САУ по определенным показателям – *критериям качества* (по максимальному быстродействию, максимальной производительности, минимальным затратам энергии и др.).

**Устройство управления (УУ)** выполняет целенаправленные операции управления ТП, формируя *управляющее воздействие*  $u(t)$  на ОУ по определенному закону – *алгоритму управления ОУ* для достижения цели управления – обеспечения равенства  $y(t) = g(t)$  или допустимой ошибки управления  $g(t) - y(t) \leq e(t)_{\text{дон}}$  при наличии *возмущающих воздействий*  $f(t)$ , отклоняющих  $y(t)$  от заданного значения  $g(t)$ .

УУ могут строиться по трем основным принципам управления. *Принцип разомкнутого управления*  $u(t) = K \cdot g(t)$  позволяет строить ус-

*тойчивые разомкнутые САУ*, имеющие самую низкую точность управления из-за влияния возмущений  $f(t)$ . *Принцип компенсации возмущающего воздействия  $f(t)$*  (управление по возмущению) с введением компенсирующего устройства КУ (рис. В1), добавляющего к задающему сигналу  $g(t)$  противодействующую составляющую влияния возмущения  $f(t)$  на выходную величину  $y(t)$ , позволяет строить *устойчивые разомкнутые САУ* с уменьшенным влиянием  $f(t)$  на  $y(t)$ . *Принцип обратной связи* (принцип отклонения, управление по ошибке) с введением в САУ датчика отрицательной обратной связи ДОС (рис. В1) позволяет создавать *замкнутые САУ*, обеспечивающие высокую точность управления выходной величиной  $y(t)$  при полной или частичной компенсации ошибки управления  $e(t)=g(t)-y(t)$ , независимо от причин ее возникновения. Однако введение обратной связи в замкнутой САУ создает возможность потери ее динамической устойчивости. Несмотря на этот недостаток, все высокоточные САУ строятся по принципу обратной связи с возможной дополнительной компенсацией основного возмущающего воздействия и принятием мер для обеспечения устойчивости САУ.

В УУ часто используются *линейные алгоритмы управления*: пропорциональный  $u(t)=K \cdot e(t)$ , интегральный  $u(t)=K \int e(t) dt$ , пропорционально-интегральный  $u(t)=K[e(t)+\int e(t) dt]$ , пропорционально-дифференциальный  $u(t)=K[e(t)+de(t)/dt]$ , пропорционально-интегрально-дифференциальный  $u(t)=K[e(t)+\int e(t) dt+de(t)/dt]$ . Введение в  $u(t)$  интегральной составляющей от ошибки управления повышает точность САУ, устраняя или снижая установившуюся ошибку. Введение дифференциальной составляющей от ошибки управления ускоряет (форсирует) переходные процессы, повышая быстродействие САУ.

В УУ алгоритм управления формируется в регуляторе Р (рис. В1), который обычно реализуется с использованием операционных усилителей или микроЭВМ. Для усиления сигнала от регулятора Р в УУ вводятся усилитель-преобразователь УП и исполнительное устройство ИУ (например, электродвигатель), непосредственно воздействующее на объект управления ОУ. УУ в целом выполняет функции *регулятора* по отношению к *объекту управления* ОУ.

Автоматика может обеспечивать следующие **основные формы автоматизации процессов управления** [1, 4, 6, 9, 10, 22–27]:

- 1) автоматическая сигнализация о ходе ТП и состоянии ОУ;
- 2) автоматическое дистанционное управление ТП или ОУ;
- 3) автоматическая защита от развития аварийных режимов, автоматическая блокировка работы при неправильных действиях пер-

сонала или системы управления, автоматический контроль работоспособности САУ и ОУ, автоматическая диагностика качества функционирования устройств или всей САУ;

4) автоматическое управление ТП или ОУ.

САУ представляется графически ее *функциональной, алгоритмической и конструктивной* структурами (структурными схемами).

**Функциональная структура САУ** определяет состав функциональных блоков, выполняющих определенные функции: получение текущей информации (датчики), формирование управляющего воздействия (регулятор) и т.д. Каждый функциональный блок изображается на схеме прямоугольником с соответствующим обозначением, а связи между блоками и с внешней средой обозначаются линиями со стрелкой, указывающей направление передачи воздействий.

**Алгоритмическая структура САУ** представляет собой *математическую модель САУ*, состоящую из однонаправленных звеньев и связей звеньев друг с другом и с окружающей средой. Каждое звено изображается прямоугольником, в котором записывается операторная функция передачи  $W(p)$  или ее обозначение, приведенное в приложении. Связи звеньев между собой и с внешней средой обозначаются линиями со стрелкой, указывающей направление передачи сигналов или физических воздействий.

**Конструктивная структура САУ** определяет состав ее конструктивных элементов и связей их друг с другом и с внешней средой, которая представляется графически в виде *принципиальной конструктивной схемы* с использованием стандартных изображений. В системах электроавтоматики конструктивная структура представляется *принципиальной электрической схемой* из элементов и электрических цепей их соединений.

### Контрольные вопросы

1. Какие алгоритмы функционирования часто используются в САУ?
2. Что такое устройство управления (УУ) и алгоритм управления в САУ?
3. Как строят САУ по принципу разомкнутого управления?
4. Как строят САУ по принципу компенсации возмущающего воздействия?
5. Как строят САУ по принципу обратной связи?
6. Какие линейные алгоритмы управления используются в замкнутых САУ?
7. Какие свойства замкнутой САУ дает введение интегральной и дифференциальной составляющих от ошибки управления в алгоритм управления?
8. Укажите основные формы автоматизации процессов управления в САУ.
9. Как представляются САУ функциональными, алгоритмическими и конструктивными структурами (структурными схемами)?

## В2. Классификация САУ

Разнообразие САУ по назначению, принципам построения, принципам действия, характеристикам ОУ и УУ, способам получения и передачи информации и другим признакам исключает возможность осуществления их всеобъемлющей классификации. Поэтому существует много частных классификаций САУ по разным групповым признакам. Наиболее общей является классификация САУ по математическим методам описания процессов управления дифференциальными уравнениями по следующим признакам [1, 4, 6, 9].

- 1) По виду уравнений, описывающих процессы управления:
  - а) класс линейных систем управления;
  - б) класс нелинейных систем управления.
- 2) Каждый класс систем управления делится на подклассы:
  - а) системы с постоянными параметрами (описываются уравнениями с постоянными коэффициентами);
  - б) системы с переменными параметрами (описываются уравнениями с переменными коэффициентами);
  - в) системы с распределенными параметрами (описываются уравнениями в частных производных);
  - г) системы с запаздыванием (описываются уравнениями с запаздывающим аргументом).
- 3) По характеру передачи сигналов управления различают:
  - а) непрерывные (аналоговые) системы управления;
  - б) дискретные системы управления (импульсные и цифровые);
  - в) релейные системы управления.
- 4) По характеру процессов в системе управления различают:
  - а) детерминированные системы (имеют определенные параметры и определенные процессы);
  - б) стохастические системы (имеют случайные параметры и случайные процессы).
- 5) По характеру функционирования САУ делятся на четыре типа:
  - а) обыкновенные САУ (имеют полную начальную информацию);
  - б) адаптивные САУ (имеют неполную начальную информацию, автоматически восполняемую в процессе работы системы);
  - в) терминальные САУ (решают задачу достижения заданного состояния системы в конечный момент времени, до которого процесс управления может идти произвольно с оптимизацией по другим критериям);

г) интеллектуальные САУ – это САУ, способные к «пониманию» ситуации и обучению, в которых решаются задачи управления сложными нестационарными ОУ с использованием механизма получения, хранения и системной обработки знаний (информации) об ОУ, возмущениях, состоянии внешней среды и условиях работы САУ для реализации своих функций управления на основе применения современных информационных технологий обработки знаний (информации) – искусственных нейронных сетей, нечеткой логики и других технологий [4, 6, 12, 14, 17].

Классификация САУ по используемым принципам управления приведена в таблице В1 [4, 6].

Таблица В1.

	Признаки классификации САУ	Принципы управления
1	Степень использования информации об объекте управления.	С обратной связью; без обратной связи.
2	Степень использования информации о возмущающих воздействиях.	С компенсацией возмущений; комбинированный – с обратной связью по управляемой величине и компенсацией возмущений.
3	Степень использования информации о параметрах и структуре объекта управления.	Адаптивное (беспоисковое, поисковое, с идентификацией); с переменной структурой; неадаптивное.
4	Степень определенности преобразований координат в системе управления.	Детерминированное; стохастическое.
5	Вид математической модели преобразований координат в системе управления.	Линейное; нелинейное (релейное, логическое и другое).
6	Вид управляющих воздействий.	Аналоговое (непрерывное); дискретное (прерывистое, импульсное, цифровое).
7	Степень участия в управлении человека-оператора.	Ручное; автоматизированное (АСУ); автоматическое (САУ).

Для замкнутых САУ важна их классификация на статические и астатические САУ. В *статических САУ* по окончании переходного процесса выходная величина принимает установившееся значение, зависящее от возмущающего воздействия  $f$ , что создает неустранимую статическую ошибку управления  $e = g - y \neq 0$ . В *астатических САУ* при наличии возмущающего воздействия  $f$  по окончании переходного

процесса ошибка управления устраняется либо уменьшается до очень малых величин. В *адаптивных САУ* осуществляется непрерывная самонастройка параметров регулятора и структуры САУ для обеспечения требуемого высокого качества управления.

По виду функциональной схемы и сложности ОУ различают:

*одноконтурные САУ* с одной регулируемой величиной и одним каналом обратной связи; *многоконтурные одномерные САУ* с одной регулируемой величиной, одним каналом главной обратной связи и несколькими каналами местных обратных связей; *многоконтурные многомерные САУ* с несколькими регулируемыми величинами и несколькими каналами главных обратных связей при возможном наличии и каналов местных обратных связей [4, 6].

Многоконтурные многомерные САУ в свою очередь подразделяются на: *многоконтурные несвязанные САУ*, в которых УУ (регуляторы) не связаны между собой вне ОУ; *многоконтурные связанные САУ*, в которых УУ (регуляторы) связаны между собой вне ОУ; *многоконтурные зависимые САУ*, в которых изменение одной регулируемой величины приводит к изменению других регулируемых величин; *многоконтурные независимые САУ*, в которых изменение одной регулируемой величины не приводит к изменению других регулируемых величин; *многоконтурные автономные связанные САУ*, в которых изменение одной регулируемой величины не приводит к изменению других регулируемых величин; *многоконтурные неавтономные связанные САУ*, в которых изменение одной регулируемой величины ведет к изменению других регулируемых величин [4, 6].

Для САУ также важна классификация и проектирование элементов САУ по энергетическим признакам, поскольку в теории управления учитываются только *информационные составляющие процессов*, которые физически содержат и *энергетические составляющие*, определяющие мощность, коэффициент полезного действия, массу и габариты, надежность, стоимость и другие свойства САУ [1, 6, 12].

### **Контрольные вопросы**

1. Почему классификация САУ по признакам математического описания процессов управления получается наиболее общей?
2. Какие различия имеют детерминированные и стохастические САУ?
3. Какие САУ называются статическими и астатическими?
4. Какие САУ называются одноконтурными, многоконтурными одномерными, многоконтурными многомерными?
5. Почему при проектировании САУ необходимо учитывать как информационную, так и энергетическую составляющие процессов управления?

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

## 1.1. Математические модели САУ

Для математического описания САУ по ее функциональной схеме (рис. В1) определяется состав ее отдельных звеньев, связанных друг с другом и с внешней средой. Основными формами представления операторов преобразования входных переменных  $g(t)$  и  $f(t)$  в переменные выхода  $y(t)$  в конечномерных линейных непрерывных стационарных детерминированных моделях звеньев и САУ являются: *дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Происходящие в каждом звене процессы описываются *линейными дифференциальными уравнениями* зависимости выходной величины  $x_2(t)$  от входного воздействия  $x_1(t)$ . Эти уравнения называются *математическими моделями звеньев* и для звеньев разной физической природы составляются по законам соответствующей науки (механики, электротехники, термодинамики и др.), нелинейные уравнения линеаризуются. Совокупность уравнений (математических моделей) взаимосвязанных звеньев САУ образуют систему уравнений САУ, называемую *математической моделью САУ* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения**, являющиеся математическими моделями звеньев и САУ, могут быть записаны (для уравнения второго порядка) в классической (1.1.1), символической (1.1.2) или операторной (1.1.3) форме в виде [3]:

$$a_0 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 x_2(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t); \quad (1.1.1)$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_2(t) = (b_0 p + b_1) x_1(t); \quad (1.1.2)$$

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) X_2(p) = K(\tau p + 1) X_1(p), \quad (1.1.3)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $T_2^2 = \frac{a_0}{a_2}$ ;  $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$ ;  $K = \frac{b_1}{a_2}$ ;  $\tau = \frac{b_0}{b_1}$ .

Параметры  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $\tau$  называются *постоянными времени*, измеряемыми в секундах;  $K = x_2/x_1$  называется коэффициентом передачи,

имеющим размерность  $|x_2|/|x_1|$  и характеризующим крутизну статической характеристики модели в установившихся режимах работы.

Для описания модели САУ обычно используется три способа:

1) *поэлементное описание САУ* с учетом взаимодействия каждого звена с другими звеньями и с внешней средой, при этом модель САУ описывается системой дифференциальных уравнений, учитывающих все параметры звеньев, входные и выходные величины (координаты) процессов управления, что обеспечивает возможность физической интерпретации всех процессов управления;

2) *системное описание САУ* представляется одним уравнением, которое получается из поэлементного описания САУ методом подстановок для исключения промежуточных координат процесса управления и учитывает только зависимость выходного процесса (выходной величины) САУ от входного процесса (входной величины) при утрате возможностей физической интерпретации процессов управления, происходящих внутри САУ;

3) *векторно-матричное описание САУ* в пространстве переменных состояния системы, позволяющее учитывать все параметры и переменные величины (координаты) САУ и вести расчеты с применением ЭВМ при возможности физической интерпретации происходящих процессов управления в САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Передаточные функции** или **операторные функции передачи (ОФП)**, являются важнейшими математическими описаниями звеньев и САУ, получающимися из дифференциальных уравнений в операторной форме при нулевых начальных условиях (1.1.3) в виде отношения изображений по Лапласу переменных выхода и входа, которые широко применяются в операторно-структурном методе расчета САУ с использованием алгоритмических структурных схем [1, 4, 6, 9, 11]:

$$W(p) = \frac{L\{x_2(t)\}}{L\{x_1(t)\}} = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K(\tau p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (1.1.4)$$

**Временными характеристиками** звена или САУ являются переходная функция  $h(t)$  и функция веса  $w(t)$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].

*Переходной функцией (переходной характеристикой)*  $h(t)=x_2(t)$  звена или САУ называется реакция на единичное ступенчатое входное воздействие  $x_1(t)=I[t]$  при нулевых начальных условиях.

*Функцией веса (весовой функцией, импульсной переходной характеристикой)*  $w(t)=x_2(t)$  звена или САУ называется реакция на еди-

ничное импульсное входное воздействие  $x_1(t)=\delta(t)$  (дельта-функцию или функцию Дирака) при нулевых начальных условиях. Дельта-функция или функция Дирака получается при дифференцировании единичной ступенчатой функции  $\delta(t)=d1[t]/dt$ , при этом  $\delta(t)=0$  в любой момент времени  $t$ , кроме  $t=0$ , где величина импульса стремится к бесконечности при бесконечно малой продолжительности импульса, а площадь импульса равна единице  $\int\delta(t)dt=1$ . Функция веса  $w(t)$  связана с переходной функцией  $h(t)$  дифференцированием  $w(t)=dh(t)/dt$ .

**Частотными характеристиками** звеньев и САУ называются зависимости от частоты  $\omega$  значений амплитуды  $A_2(\omega)$  и фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  выходной величины  $x_2(t)=A_2(\omega)\sin(\omega t+\varphi)$  в установившихся режимах работы при единичном синусоидальном входном воздействии  $x_1(t)=A_1\sin\omega t=1\sin\omega t$  и изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  [1, 4, 6, 9, 11].

Основной частотной характеристикой звена или САУ является *амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) (частотная передаточная функция, комплексный коэффициент передачи)  $W(j\omega)$* , которая получается из передаточной функции (ОФП)  $W(p)$  звена или САУ при замене  $p=j\omega$  и изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Например, для звена с ОФП (1.1.4) выражение АФХ запишется

$$W(j\omega)=\frac{K(\tau j\omega+1)}{T_2^2(j\omega)^2+T_1j\omega+1}=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.1.5)$$

где  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  – вещественная и мнимая составляющие вектора  $W(j\omega)$ ;  $A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$  – *амплитудная частотная характеристика (АЧХ)*;  $\varphi(\omega)=\arctg[V(\omega)/U(\omega)]$  – *фазовая частотная характеристика (ФЧХ)*.

В расчетах САУ часто используются *логарифмические частотные характеристики*. *Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ)* звена или САУ строится в прямоугольной системе координат, где по оси ординат в линейном масштабе указывается величина ЛАЧХ в децибелах

$$L(\omega)=20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega), \quad (1.1.6)$$

а по оси абсцисс в логарифмическом масштабе указывается частота  $\omega$  в 1/с (при этом равномерные изменения частоты в 10 раз представляются декадами). Децибел равен 1/10 бела. Бел равен десятичному ло-

гарифму отношения мощностей на выходе и входе звена или пропорциональному мощностям отношению квадратов напряжений, токов, скоростей или других физических величин ( $1\text{бел}=\lg P_2/P_1=\lg U_2^2/U_1^2$ ). Поэтому в (1.2.2) множитель  $20=2\cdot 10$ , где 2 отражает логарифмирование квадрата отношения выходной и входной величин, а 10 – перевод белов в децибелы. *Логарифмическая фазовая частотная характеристика* (ЛФЧХ)  $\varphi(\omega)=\arctg[V(\omega)/U(\omega)]$  звена или САУ строится по оси ординат в линейном масштабе, где указывается угол фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  в радианах или градусах, а по оси абсцисс указывается частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе в 1/с, как в ЛАЧХ.

### Контрольные вопросы

1. Как разбивается САУ на звенья для математического описания?
2. Какие основные формы преобразования входных переменных в переменные выхода используются в математических моделях САУ?
3. Что называется передаточной функцией или ОФП звена или САУ?
4. Что представляют собой временные характеристики звена или САУ?
5. Что представляют собой частотные характеристики звена или САУ?
6. Как строятся логарифмические частотные характеристики?

## 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

При огромном физическом разнообразии звеньев САУ, количество их математических моделей ограничено числом типовых линейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы независимо от их физической природы. Поэтому различные звенья представляются в САУ *типовыми динамическими звеньями*, математические модели которых описываются линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка (таблица 1.2.1) [1, 4, 6, 9, 11].

Типовые динамические звенья делятся на четыре группы по виду зависимости выходной величины  $x_2$  от входного воздействия  $x_1$  в *установившихся режимах работы*: 1) *позиционные* – выходная величина пропорциональна входному воздействию  $x_2=Kx_1$ ; 2) *интегрирующие* – выходная величина пропорциональна интегралу от входного воздействия  $x_2=K \int x_1 dt$ ; 3) *дифференцирующие* – выходная величина пропорциональна первой производной по времени от входного воздействия  $x_2=K dx_1/dt$ ; 4) *запаздывающие* – выходная величина равна входной величине, сдвинутой в текущем времени на время запаздывания  $\tau$   $x_2=x_1(t-\tau)$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].

В *переходных режимах работы* динамические свойства звеньев и САУ определяются их *временными и частотными характеристиками* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Передаточные функции, переходные и весовые функции, амплитудно-фазовые характеристики (АФХ), амплитудные частотные характеристики (АЧХ), фазовые частотные характеристики (ФЧХ), логарифмические амплитудные (ЛАЧХ) и фазовые (ЛФЧХ) частотные характеристики типовых динамических звеньев приведены в таблице 1.2.1 [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Пример 1.2.1.** Рассмотрим методику получения временных и частотных характеристик на примере позиционного апериодического (инерционного) звена первого порядка (таблица 1.2.1, п. 2), имеющего передаточную функцию

$$W(p) = X_2(p)/X_1(p) = K/(1+pT). \quad (1.2.1)$$

Дифференциальное уравнение процесса управления получается из (1.2.1)

$$Tdx_2(t)/dt + x_2(t) = Kx_1(t), \quad (1.2.2)$$

где  $T$  – постоянная времени звена;  $K$  – коэффициент передачи звена.

Переходная функция звена  $h(t)=x_2(t)$  получается в виде суммы общего и частного решений дифференциального уравнения (1.2.2) при нулевых начальных условиях и подаче на вход единичного ступенчатого воздействия  $x_1(t)=1[t]$

$$h(t) = x_2(t) = Ce^{pt} + x_2(t \rightarrow \infty) = K \cdot 1[t](1 - e^{-t/T}), \quad (1.2.3)$$

где  $p = -1/T$  – корень характеристического уравнения  $Tp + 1 = 0$ ;  $C = -K \cdot 1[t]$  – постоянная интегрирования при нулевых начальных условиях.

Весовая функция звена определяется дифференцированием  $h(t)$  по времени

$$w(t) = dh(t)/dt = d\{K \cdot 1[t](1 - e^{-t/T})\} = K \cdot 1[t]e^{-t/T}/T. \quad (1.2.4)$$

Частотная передаточная функция или амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) звена из (1.2.1) при  $p=j\omega$  запишется в виде

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{K\omega T}{T^2\omega^2 + 1} = U(\omega) - jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.2.5)$$

и при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  имеет вид полуокружности с радиусом  $K/2$ , расположенной в четвертом квадранте комплексной плоскости (таблица 1.2.1, п. 2).

Амплитудная  $A(\omega)$  и фазовая  $\varphi(\omega)$  частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) определяются из (1.2.5) и имеют вид, приведенный в таблице 1.2.1, п. 2

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (1.2.6)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg \omega T. \quad (1.2.7)$$

Из (1.2.6) при  $\omega=0$   $A(\omega)=K$ , при  $\omega=1/T$   $A(\omega)=K \cdot \sqrt{2}$ , при  $\omega=\infty$   $A(\omega)=0$ . Из (1.2.7) фазовый сдвиг при изменении частоты от 0 до  $\infty$  изменяется от  $0^\circ$  до минус  $90^\circ$  и при  $\omega=1/T$  составляет  $\varphi(\omega) = -45^\circ$ .

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) получается на основании логарифмирования АЧХ из выражения (1.2.6), в результате чего получается уравнение ЛАЧХ, описываемое выражением

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}. \quad (1.2.8)$$

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

## 1.1. Математические модели САУ

Для математического описания САУ по ее функциональной схеме (рис. В1) определяется состав ее отдельных звеньев, связанных друг с другом и с внешней средой. Основными формами представления операторов преобразования входных переменных  $g(t)$  и  $f(t)$  в переменные выхода  $y(t)$  в конечномерных линейных непрерывных стационарных детерминированных моделях звеньев и САУ являются: *дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Происходящие в каждом звене процессы описываются *линейными дифференциальными уравнениями* зависимости выходной величины  $x_2(t)$  от входного воздействия  $x_1(t)$ . Эти уравнения называются *математическими моделями звеньев* и для звеньев разной физической природы составляются по законам соответствующей науки (механики, электротехники, термодинамики и др.), нелинейные уравнения линеаризуются. Совокупность уравнений (математических моделей) взаимосвязанных звеньев САУ образуют систему уравнений САУ, называемую *математической моделью САУ* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения**, являющиеся математическими моделями звеньев и САУ, могут быть записаны (для уравнения второго порядка) в классической (1.1.1), символической (1.1.2) или операторной (1.1.3) форме в виде [3]:

$$a_0 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 x_2(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t); \quad (1.1.1)$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_2(t) = (b_0 p + b_1) x_1(t); \quad (1.1.2)$$

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) X_2(p) = K(\tau p + 1) X_1(p), \quad (1.1.3)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $T_2^2 = \frac{a_0}{a_2}$ ;  $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$ ;  $K = \frac{b_1}{a_2}$ ;  $\tau = \frac{b_0}{b_1}$ .

Параметры  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $\tau$  называются *постоянными времени*, измеряемыми в секундах;  $K = x_2/x_1$  называется коэффициентом передачи,

имеющим размерность  $|x_2|/|x_1|$  и характеризующим крутизну статической характеристики модели в установившихся режимах работы.

Для описания модели САУ обычно используется три способа:

1) *поэлементное описание САУ* с учетом взаимодействия каждого звена с другими звеньями и с внешней средой, при этом модель САУ описывается системой дифференциальных уравнений, учитывающих все параметры звеньев, входные и выходные величины (координаты) процессов управления, что обеспечивает возможность физической интерпретации всех процессов управления;

2) *системное описание САУ* представляется одним уравнением, которое получается из поэлементного описания САУ методом подстановок для исключения промежуточных координат процесса управления и учитывает только зависимость выходного процесса (выходной величины) САУ от входного процесса (входной величины) при утрате возможностей физической интерпретации процессов управления, происходящих внутри САУ;

3) *векторно-матричное описание САУ* в пространстве переменных состояния системы, позволяющее учитывать все параметры и переменные величины (координаты) САУ и вести расчеты с применением ЭВМ при возможности физической интерпретации происходящих процессов управления в САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Передаточные функции или операторные функции передачи (ОФП)**, являются важнейшими математическими описаниями звеньев и САУ, получающимися из дифференциальных уравнений в операторной форме при нулевых начальных условиях (1.1.3) в виде отношения изображений по Лапласу переменных выхода и входа, которые широко применяются в операторно-структурном методе расчета САУ с использованием алгоритмических структурных схем [1, 4, 6, 9, 11]:

$$W(p) = \frac{L\{x_2(t)\}}{L\{x_1(t)\}} = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K(\tau p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (1.1.4)$$

**Временными характеристиками** звена или САУ являются переходная функция  $h(t)$  и функция веса  $w(t)$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].

*Переходной функцией (переходной характеристикой)  $h(t)=x_2(t)$*  звена или САУ называется реакция на единичное ступенчатое входное воздействие  $x_1(t)=I[t]$  при нулевых начальных условиях.

*Функцией веса (весовой функцией, импульсной переходной характеристикой)  $w(t)=x_2(t)$*  звена или САУ называется реакция на еди-

ничное импульсное входное воздействие  $x_1(t)=\delta(t)$  (дельта-функцию или функцию Дирака) при нулевых начальных условиях. Дельта-функция или функция Дирака получается при дифференцировании единичной ступенчатой функции  $\delta(t)=d1[t]/dt$ , при этом  $\delta(t)=0$  в любой момент времени  $t$ , кроме  $t=0$ , где величина импульса стремится к бесконечности при бесконечно малой продолжительности импульса, а площадь импульса равна единице  $\int\delta(t)dt=1$ . Функция веса  $w(t)$  связана с переходной функцией  $h(t)$  дифференцирования  $w(t)=dh(t)/dt$ .

**Частотными характеристиками** звеньев и САУ называются зависимости от частоты  $\omega$  значений амплитуды  $A_2(\omega)$  и фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  выходной величины  $x_2(t)=A_2(\omega) \sin(\omega t+\varphi)$  в установившихся режимах работы при единичном синусоидальном входном воздействии  $x_1(t)=A_1 \sin \omega t=1 \sin \omega t$  и изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  [1, 4, 6, 9, 11].

Основной частотной характеристикой звена или САУ является *амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) (частотная передаточная функция, комплексный коэффициент передачи)  $W(j\omega)$* , которая получается из передаточной функции (ОФП)  $W(p)$  звена или САУ при замене  $p=j\omega$  и изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Например, для звена с ОФП (1.1.4) выражение АФХ запишется

$$W(j\omega)=\frac{K(\tau j\omega+1)}{T_2^2(j\omega)^2+T_1 j\omega+1}=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.1.5)$$

где  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  – вещественная и мнимая составляющие вектора  $W(j\omega)$ ;  $A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$  – *амплитудная частотная характеристика (АЧХ)*;  $\varphi(\omega)=\arctg[V(\omega)/U(\omega)]$  – *фазовая частотная характеристика (ФЧХ)*.

В расчетах САУ часто используются *логарифмические частотные характеристики*. *Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ)* звена или САУ строится в прямоугольной системе координат, где по оси ординат в линейном масштабе указывается величина ЛАЧХ в децибелах

$$L(\omega)=20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega), \quad (1.1.6)$$

а по оси абсцисс в логарифмическом масштабе указывается частота  $\omega$  в 1/с (при этом равномерные изменения частоты в 10 раз представляются декадами). Децибел равен 1/10 бела. Бел равен десятичному ло-

гарифму отношения мощностей на выходе и входе звена или пропорциональному мощностям отношению квадратов напряжений, токов, скоростей или других физических величин ( $1\text{бел}=\lg P_2/P_1=\lg U_2^2/U_1^2$ ). Поэтому в (1.2.2) множитель  $20=2\cdot 10$ , где 2 отражает логарифмирование квадрата отношения выходной и входной величин, а 10 – перевод белов в децибелы. *Логарифмическая фазовая частотная характеристика* (ЛФЧХ)  $\varphi(\omega)=\arctg[V(\omega)/U(\omega)]$  звена или САУ строится по оси ординат в линейном масштабе, где указывается угол фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  в радианах или градусах, а по оси абсцисс указывается частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе в 1/с, как в ЛАЧХ.

### Контрольные вопросы

7. Как разбивается САУ на звенья для математического описания?
8. Какие основные формы преобразования входных переменных в переменные выхода используются в математических моделях САУ?
9. Что называется передаточной функцией или ОФП звена или САУ?
10. Что представляют собой временные характеристики звена или САУ?
11. Что представляют собой частотные характеристики звена или САУ?
12. Как строятся логарифмические частотные характеристики?

## 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

При огромном физическом разнообразии звеньев САУ, количество их математических моделей ограничено числом типовых линейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы независимо от их физической природы. Поэтому различные звенья представляются в САУ *типовыми динамическими звеньями*, математические модели которых описываются линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка (таблица 1.2.1) [1, 4, 6, 9, 11].

Типовые динамические звенья делятся на четыре группы по виду зависимости выходной величины  $x_2$  от входного воздействия  $x_1$  в *установившихся режимах работы*: 1) *позиционные* – выходная величина пропорциональна входному воздействию  $x_2=Kx_1$ ; 2) *интегрирующие* – выходная величина пропорциональна интегралу от входного воздействия  $x_2=K \int x_1 dt$ ; 3) *дифференцирующие* – выходная величина пропорциональна первой производной по времени от входного воздействия  $x_2=K dx_1/dt$ ; 4) *запаздывающие* – выходная величина равна входной величине, сдвинутой в текущем времени на время запаздывания  $\tau$   $x_2=x_1(t-\tau)$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].

В *переходных режимах работы* динамические свойства звеньев и САУ определяются их *временными и частотными характеристиками* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Передаточные функции, переходные и весовые функции, амплитудно-фазовые характеристики (АФХ), амплитудные частотные характеристики (АЧХ), фазовые частотные характеристики (ФЧХ), логарифмические амплитудные (ЛАЧХ) и фазовые (ЛФЧХ) частотные характеристики типовых динамических звеньев приведены в таблице 1.2.1 [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Пример 1.2.1.** Рассмотрим методику получения временных и частотных характеристик на примере позиционного апериодического (инерционного) звена первого порядка (таблица 1.2.1, п. 2), имеющего передаточную функцию

$$W(p) = X_2(p)/X_1(p) = K/(1 + pT). \quad (1.2.1)$$

Дифференциальное уравнение процесса управления получается из (1.2.1)

$$Tdx_2(t)/dt + x_2(t) = Kx_1(t), \quad (1.2.2)$$

где  $T$  – постоянная времени звена;  $K$  – коэффициент передачи звена.

Переходная функция звена  $h(t) = x_2(t)$  получается в виде суммы общего и частного решений дифференциального уравнения (1.2.2) при нулевых начальных условиях и подаче на вход единичного ступенчатого воздействия  $x_1(t) = 1[t]$

$$h(t) = x_2(t) = Ce^{pt} + x_2(t \rightarrow \infty) = K \cdot 1[t](1 - e^{-t/T}), \quad (1.2.3)$$

где  $p = -1/T$  – корень характеристического уравнения  $Tp + 1 = 0$ ;  $C = -K \cdot 1[t]$  – постоянная интегрирования при нулевых начальных условиях.

Весовая функция звена определяется дифференцированием  $h(t)$  по времени

$$w(t) = dh(t)/dt = d\{K \cdot 1[t](1 - e^{-t/T})\} = K \cdot 1[t]e^{-t/T}/T. \quad (1.2.4)$$

Частотная передаточная функция или амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) звена из (1.2.1) при  $p = j\omega$  запишется в виде

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{K\omega T}{T^2\omega^2 + 1} = U(\omega) - jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.2.5)$$

и при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  имеет вид полуокружности с радиусом  $K/2$ , расположенной в четвертом квадранте комплексной плоскости (таблица 1.2.1, п. 2).

Амплитудная  $A(\omega)$  и фазовая  $\varphi(\omega)$  частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) определяются из (1.2.5) и имеют вид, приведенный в таблице 1.2.1, п. 2

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (1.2.6)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg \omega T. \quad (1.2.7)$$

Из (1.2.6) при  $\omega = 0$   $A(\omega) = K$ , при  $\omega = 1/T$   $A(\omega) = K \cdot \sqrt{2}$ , при  $\omega = \infty$   $A(\omega) = 0$ . Из (1.2.7) фазовый сдвиг при изменении частоты от 0 до  $\infty$  изменяется от  $0^\circ$  до минус  $90^\circ$  и при  $\omega = 1/T$  составляет  $\varphi(\omega) = -45^\circ$ .

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) получается на основании логарифмирования АЧХ из выражения (1.2.6), в результате чего получается уравнение ЛАЧХ, описываемое выражением

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}. \quad (1.2.8)$$

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

## 1.1. Математические модели САУ

Для математического описания САУ по ее функциональной схеме (рис. В1) определяется состав ее отдельных звеньев, связанных друг с другом и с внешней средой. Основными формами представления операторов преобразования входных переменных  $g(t)$  и  $f(t)$  в переменные выхода  $y(t)$  в конечномерных линейных непрерывных стационарных детерминированных моделях звеньев и САУ являются: *дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Происходящие в каждом звене процессы описываются *линейными дифференциальными уравнениями* зависимости выходной величины  $x_2(t)$  от входного воздействия  $x_1(t)$ . Эти уравнения называются *математическими моделями звеньев* и для звеньев разной физической природы составляются по законам соответствующей науки (механики, электротехники, термодинамики и др.), нелинейные уравнения линеаризуются. Совокупность уравнений (математических моделей) взаимосвязанных звеньев САУ образуют систему уравнений САУ, называемую *математической моделью САУ* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения**, являющиеся математическими моделями звеньев и САУ, могут быть записаны (для уравнения второго порядка) в классической (1.1.1), символической (1.1.2) или операторной (1.1.3) форме в виде [3]:

$$a_0 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 x_2(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t); \quad (1.1.1)$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_2(t) = (b_0 p + b_1) x_1(t); \quad (1.1.2)$$

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) X_2(p) = K(\tau p + 1) X_1(p), \quad (1.1.3)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $T_2^2 = \frac{a_0}{a_2}$ ;  $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$ ;  $K = \frac{b_1}{a_2}$ ;  $\tau = \frac{b_0}{b_1}$ .

Параметры  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $\tau$  называются *постоянными времени*, измеряемыми в секундах;  $K = x_2/x_1$  называется коэффициентом передачи,

имеющим размерность  $|x_2|/|x_1|$  и характеризующим крутизну статической характеристики модели в установившихся режимах работы.

Для описания модели САУ обычно используется три способа:

1) *поэлементное описание САУ* с учетом взаимодействия каждого звена с другими звеньями и с внешней средой, при этом модель САУ описывается системой дифференциальных уравнений, учитывающих все параметры звеньев, входные и выходные величины (координаты) процессов управления, что обеспечивает возможность физической интерпретации всех процессов управления;

2) *системное описание САУ* представляется одним уравнением, которое получается из поэлементного описания САУ методом подстановок для исключения промежуточных координат процесса управления и учитывает только зависимость выходного процесса (выходной величины) САУ от входного процесса (входной величины) при утрате возможностей физической интерпретации процессов управления, происходящих внутри САУ;

3) *векторно-матричное описание САУ* в пространстве переменных состояния системы, позволяющее учитывать все параметры и переменные величины (координаты) САУ и вести расчеты с применением ЭВМ при возможности физической интерпретации происходящих процессов управления в САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Передаточные функции** или **операторные функции передачи (ОФП)**, являются важнейшими математическими описаниями звеньев и САУ, получающимися из дифференциальных уравнений в операторной форме при нулевых начальных условиях (1.1.3) в виде отношения изображений по Лапласу переменных выхода и входа, которые широко применяются в операторно-структурном методе расчета САУ с использованием алгоритмических структурных схем [1, 4, 6, 9, 11]:

$$W(p) = \frac{L\{x_2(t)\}}{L\{x_1(t)\}} = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K(\tau p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (1.1.4)$$

**Временными характеристиками** звена или САУ являются переходная функция  $h(t)$  и функция веса  $w(t)$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].

*Переходной функцией (переходной характеристикой)*  $h(t)=x_2(t)$  звена или САУ называется реакция на единичное ступенчатое входное воздействие  $x_1(t)=I[t]$  при нулевых начальных условиях.

*Функцией веса (весовой функцией, импульсной переходной характеристикой)*  $w(t)=x_2(t)$  звена или САУ называется реакция на еди-

ничное импульсное входное воздействие  $x_1(t)=\delta(t)$  (дельта-функцию или функцию Дирака) при нулевых начальных условиях. Дельта-функция или функция Дирака получается при дифференцировании единичной ступенчатой функции  $\delta(t)=d1[t]/dt$ , при этом  $\delta(t)=0$  в любой момент времени  $t$ , кроме  $t=0$ , где величина импульса стремится к бесконечности при бесконечно малой продолжительности импульса, а площадь импульса равна единице  $\int\delta(t)dt=1$ . Функция веса  $w(t)$  связана с переходной функцией  $h(t)$  дифференцированием  $w(t)=dh(t)/dt$ .

**Частотными характеристиками** звеньев и САУ называются зависимости от частоты  $\omega$  значений амплитуды  $A_2(\omega)$  и фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  выходной величины  $x_2(t)=A_2(\omega)\sin(\omega t+\varphi)$  в установившихся режимах работы при единичном синусоидальном входном воздействии  $x_1(t)=A_1\sin\omega t=1\sin\omega t$  и изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  [1, 4, 6, 9, 11].

Основной частотной характеристикой звена или САУ является *амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) (частотная передаточная функция, комплексный коэффициент передачи)  $W(j\omega)$* , которая получается из передаточной функции (ОФП)  $W(p)$  звена или САУ при замене  $p=j\omega$  и изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Например, для звена с ОФП (1.1.4) выражение АФХ запишется

$$W(j\omega)=\frac{K(\tau j\omega+1)}{T_2^2(j\omega)^2+T_1j\omega+1}=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.1.5)$$

где  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  – вещественная и мнимая составляющие вектора  $W(j\omega)$ ;  $A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$  – *амплитудная частотная характеристика (АЧХ)*;  $\varphi(\omega)=\arctg[V(\omega)/U(\omega)]$  – *фазовая частотная характеристика (ФЧХ)*.

В расчетах САУ часто используются *логарифмические частотные характеристики*. *Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ)* звена или САУ строится в прямоугольной системе координат, где по оси ординат в линейном масштабе указывается величина ЛАЧХ в децибелах

$$L(\omega)=20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega), \quad (1.1.6)$$

а по оси абсцисс в логарифмическом масштабе указывается частота  $\omega$  в 1/с (при этом равномерные изменения частоты в 10 раз представляются декадами). Децибел равен 1/10 бела. Бел равен десятичному ло-

гарифму отношения мощностей на выходе и входе звена или пропорциональному мощностям отношению квадратов напряжений, токов, скоростей или других физических величин ( $1\text{бел}=\lg P_2/P_1=\lg U_2^2/U_1^2$ ). Поэтому в (1.2.2) множитель  $20=2\cdot 10$ , где 2 отражает логарифмирование квадрата отношения выходной и входной величин, а 10 – перевод белов в децибелы. *Логарифмическая фазовая частотная характеристика* (ЛФЧХ)  $\varphi(\omega)=\text{arctg}[V(\omega)/U(\omega)]$  звена или САУ строится по оси ординат в линейном масштабе, где указывается угол фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  в радианах или градусах, а по оси абсцисс указывается частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе в 1/с, как в ЛАЧХ.

### Контрольные вопросы

13. Как разбивается САУ на звенья для математического описания?
14. Какие основные формы преобразования входных переменных в переменные выхода используются в математических моделях САУ?
15. Что называется передаточной функцией или ОФП звена или САУ?
16. Что представляют собой временные характеристики звена или САУ?
17. Что представляют собой частотные характеристики звена или САУ?
18. Как строятся логарифмические частотные характеристики?

## 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

При огромном физическом разнообразии звеньев САУ, количество их математических моделей ограничено числом типовых линейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы независимо от их физической природы. Поэтому различные звенья представляются в САУ *типовыми динамическими звеньями*, математические модели которых описываются линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка (таблица 1.2.1) [1, 4, 6, 9, 11].

Типовые динамические звенья делятся на четыре группы по виду зависимости выходной величины  $x_2$  от входного воздействия  $x_1$  в *установившихся режимах работы*: 1) *позиционные* – выходная величина пропорциональна входному воздействию  $x_2=Kx_1$ ; 2) *интегрирующие* – выходная величина пропорциональна интегралу от входного воздействия  $x_2=K \int x_1 dt$ ; 3) *дифференцирующие* – выходная величина пропорциональна первой производной по времени от входного воздействия  $x_2=K dx_1/dt$ ; 4) *запаздывающие* – выходная величина равна входной величине, сдвинутой в текущем времени на время запаздывания  $\tau$   $x_2=x_1(t-\tau)$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].

В *переходных режимах работы* динамические свойства звеньев и САУ определяются их *временными и частотными характеристиками* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Передаточные функции, переходные и весовые функции, амплитудно-фазовые характеристики (АФХ), амплитудные частотные характеристики (АЧХ), фазовые частотные характеристики (ФЧХ), логарифмические амплитудные (ЛАЧХ) и фазовые (ЛФЧХ) частотные характеристики типовых динамических звеньев приведены в таблице 1.2.1 [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Пример 1.2.1.** Рассмотрим методику получения временных и частотных характеристик на примере позиционного апериодического (инерционного) звена первого порядка (таблица 1.2.1, п. 2), имеющего передаточную функцию

$$W(p) = X_2(p)/X_1(p) = K/(1+pT). \quad (1.2.1)$$

Дифференциальное уравнение процесса управления получается из (1.2.1)

$$Tdx_2(t)/dt + x_2(t) = Kx_1(t), \quad (1.2.2)$$

где  $T$  – постоянная времени звена;  $K$  – коэффициент передачи звена.

Переходная функция звена  $h(t)=x_2(t)$  получается в виде суммы общего и частного решений дифференциального уравнения (1.2.2) при нулевых начальных условиях и подаче на вход единичного ступенчатого воздействия  $x_1(t)=1[t]$

$$h(t) = x_2(t) = Ce^{pt} + x_2(t \rightarrow \infty) = K \cdot 1[t](1 - e^{-t/T}), \quad (1.2.3)$$

где  $p = -1/T$  – корень характеристического уравнения  $Tp + 1 = 0$ ;  $C = -K \cdot 1[t]$  – постоянная интегрирования при нулевых начальных условиях.

Весовая функция звена определяется дифференцированием  $h(t)$  по времени

$$w(t) = dh(t)/dt = d\{K \cdot 1[t](1 - e^{-t/T})\} = K \cdot 1[t]e^{-t/T}/T. \quad (1.2.4)$$

Частотная передаточная функция или амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) звена из (1.2.1) при  $p=j\omega$  запишется в виде

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{K\omega T}{T^2\omega^2 + 1} = U(\omega) - jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.2.5)$$

и при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  имеет вид полуокружности с радиусом  $K/2$ , расположенной в четвертом квадранте комплексной плоскости (таблица 1.2.1, п. 2).

Амплитудная  $A(\omega)$  и фазовая  $\varphi(\omega)$  частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) определяются из (1.2.5) и имеют вид, приведенный в таблице 1.2.1, п. 2

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (1.2.6)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg \omega T. \quad (1.2.7)$$

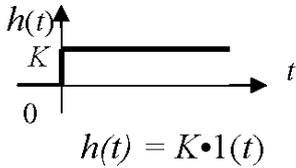
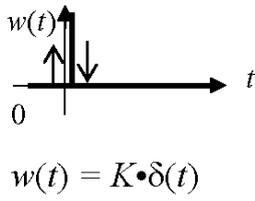
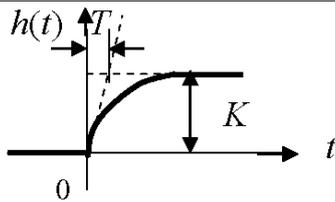
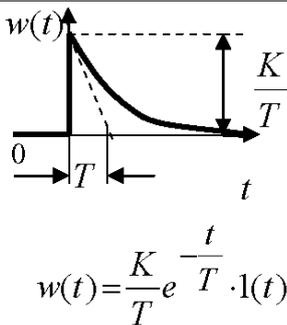
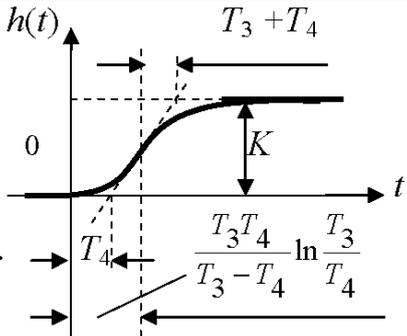
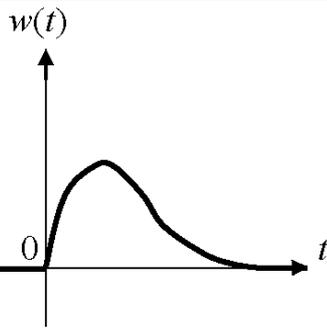
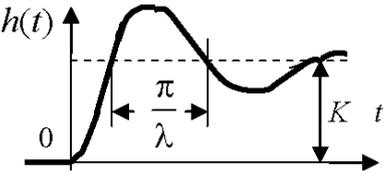
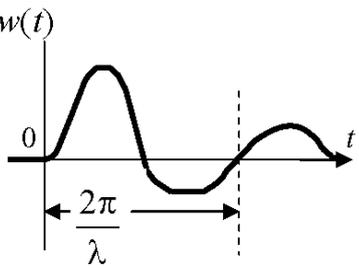
Из (1.2.6) при  $\omega=0$   $A(\omega)=K$ , при  $\omega=1/T$   $A(\omega)=K \cdot \sqrt{2}$ , при  $\omega=\infty$   $A(\omega)=0$ . Из (1.2.7) фазовый сдвиг при изменении частоты от 0 до  $\infty$  изменяется от  $0^\circ$  до минус  $90^\circ$  и при  $\omega=1/T$  составляет  $\varphi(\omega) = -45^\circ$ .

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) получается на основании логарифмирования АЧХ из выражения (1.2.6), в результате чего получается уравнение ЛАЧХ, описываемое выражением

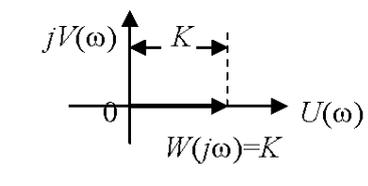
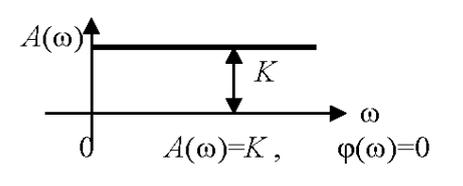
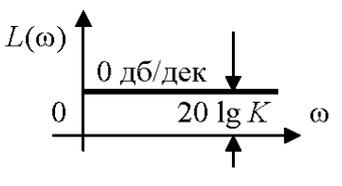
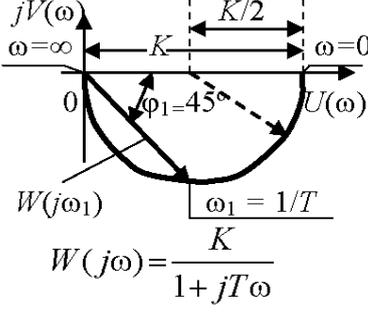
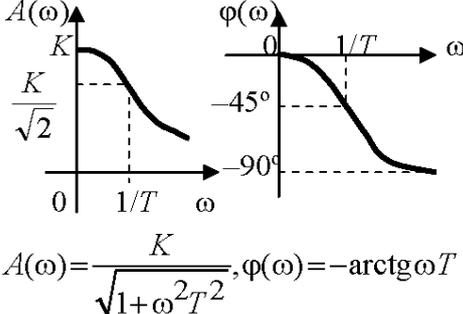
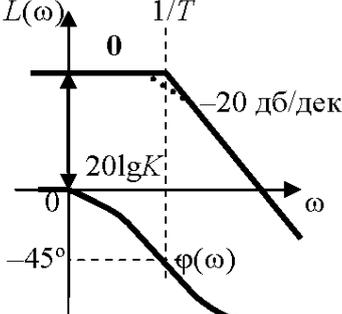
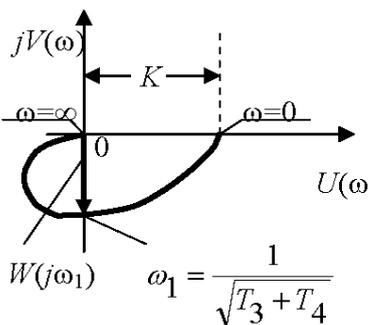
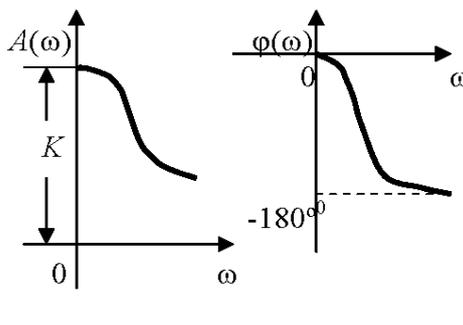
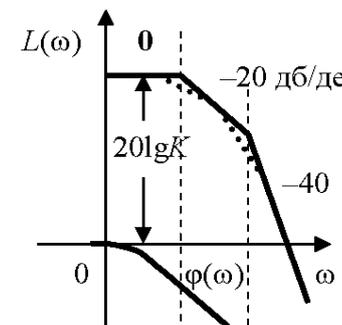
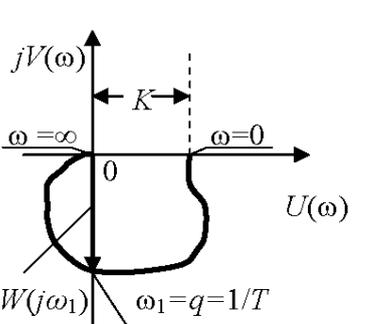
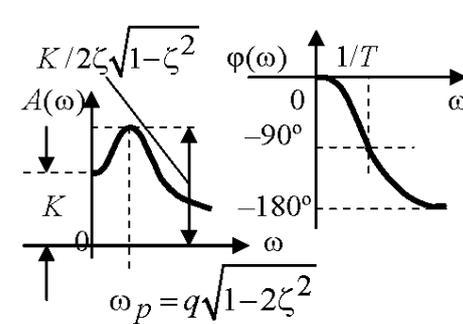
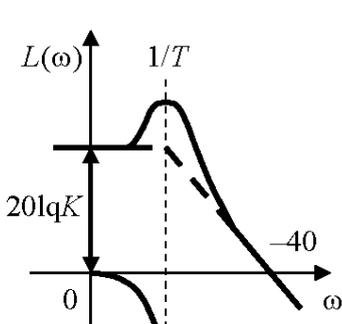
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}. \quad (1.2.8)$$



## Характеристики типовых динамических звеньев

Тип звена и его передаточная функция	Временные характеристики позиционных звеньев	
	Переходная функция $h(t)$	Функция веса $w(t)$
1. Безынерционное $W(p) = K$	 $h(t) = K \cdot 1(t)$	 $w(t) = K \cdot \delta(t)$
2. Аperiodическое 1-го порядка $W(p) = \frac{K}{1+Tp}$	 $h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$
3. Аperiodическое 2-го порядка $W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{K}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$  $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ $(T_1 > 2T_2; T_3 > T_4)$	 $h(t) = K \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{K}{T_3 - T_4} \left( e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t)$
4. Колебательное $W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1} = \frac{K}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta}{q} p + 1}$ $q = 1/T$	 $h(t) = K \left[ 1 - e^{-\gamma t} \left( \cos \lambda \cdot t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda \cdot t \right) \right] \cdot 1(t); p_{1,2} = -\zeta q \pm jq \sqrt{1 - \zeta^2} = -\gamma \pm j\lambda..$	 $w(t) = \frac{Kq^2}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot 1(t)$

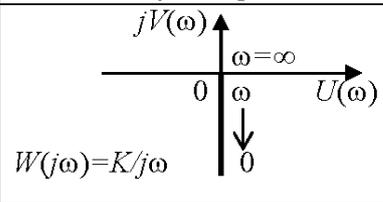
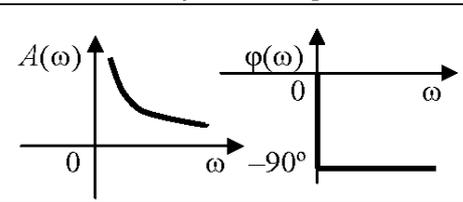
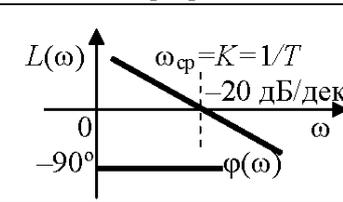
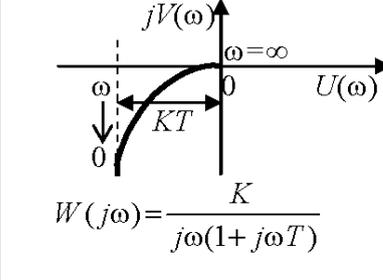
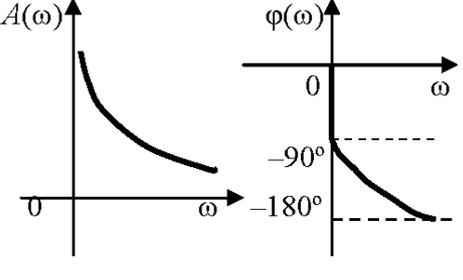
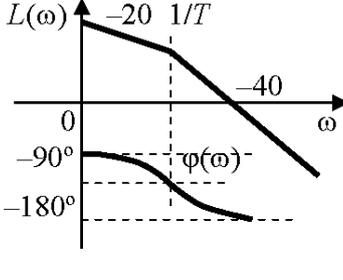
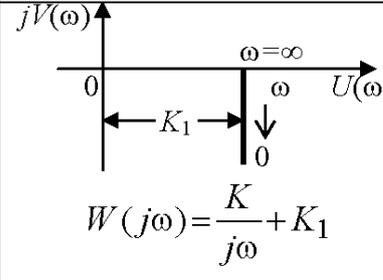
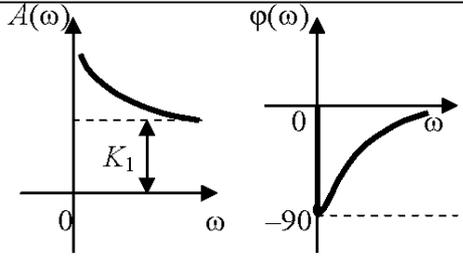
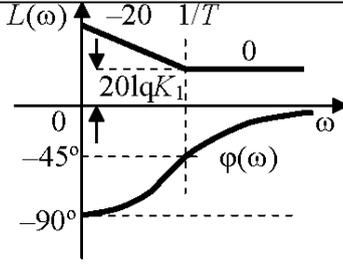
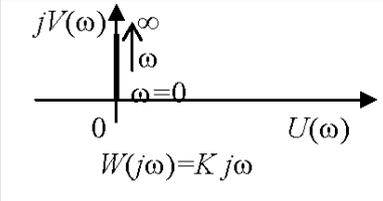
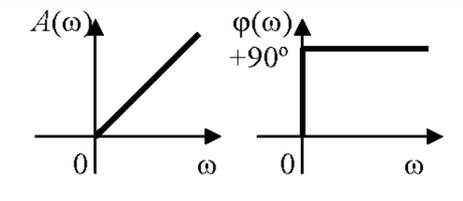
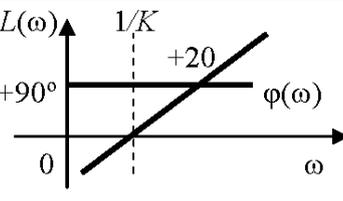
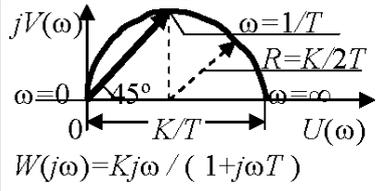
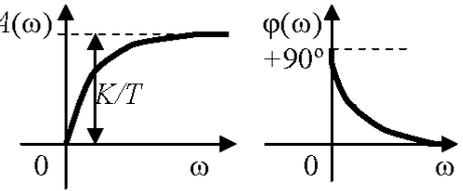
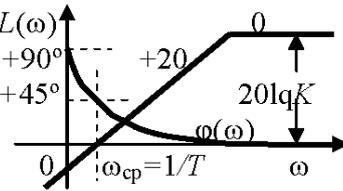
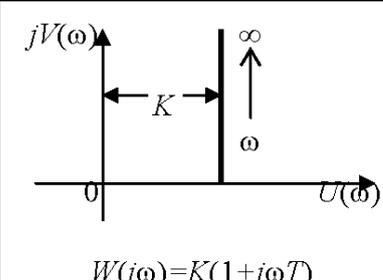
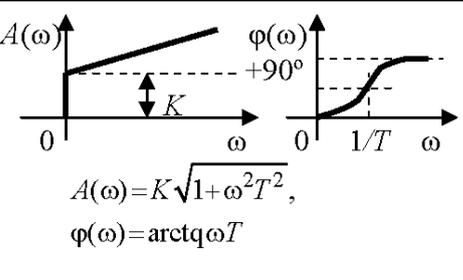
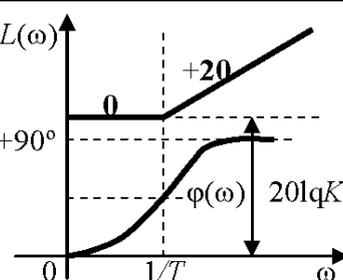
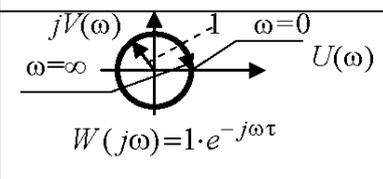
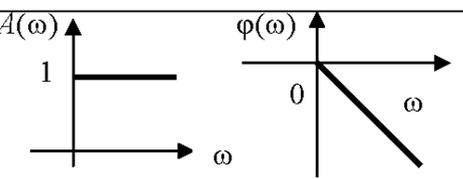
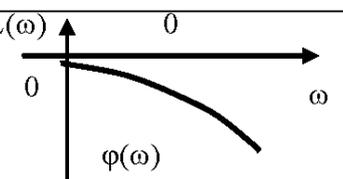
**Частотные характеристики позиционных звеньев**

Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
 <p><math>W(j\omega) = K</math></p>	 <p><math>A(\omega) = K, \quad \varphi(\omega) = 0</math></p>	 <p><math>0 \text{ дБ/дек}</math> <math>20 \lg K</math></p>
 <p><math>W(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}</math></p>	 <p><math>A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T</math></p>	 <p><math>20 \lg K</math> <math>-20 \text{ дБ/дек}</math> <math>\varphi(\omega)</math></p>
 <p><math>W(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}</math></p>	 <p><math>A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4</math></p>	 <p><math>20 \lg K</math> <math>-20 \text{ дБ/дек}</math> <math>-40</math> <math>\varphi(\omega)</math> <math>-\pi</math></p>
 <p><math>W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega 2\zeta T - \omega^2 T^2}</math></p>	 <p><math>A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta T}{1 - \omega^2 T^2}</math></p>	 <p><math>20 \lg K</math> <math>1/T</math> <math>-40</math> <math>\varphi(\omega)</math> <math>-180^\circ</math></p>

**Частотные характеристики интегрирующих звеньев**

Тип звена и его передаточная функция	Временные характеристики интегрирующих звеньев	
	Переходная функция	Функция веса
5. Идеальное. $W(p) = K / p, \quad K = 1 / T$	$h(t) = K t \cdot 1(t)$	$w(t) = K \cdot 1(t)$
6. С замедлением $W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$	$h(t) = K [t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})] \cdot 1(t)$	$w(t) = K (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$
7. Изодромное $W(p) = \frac{K}{p} + K_1 = \frac{K(1+Tp)}{p},$ $T = K_1 / K$	$h(t) = (Kt + K_1) \cdot 1(t)$	$w(t) = K \cdot 1(t) + K_1 \delta(t)$
<b>Временные характеристики дифференцирующих звеньев</b>		
8. Идеальное $W(p) = K p$	$h(t) = K \delta(t)$	$w(t) = K \cdot d\delta/dt$
9. С замедлением $W(p) = \frac{Kp}{1+Tp}$	$h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$	$w(t) = \frac{K}{T} \delta(t) - \frac{K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$
10. Форсирующее $W(p) = K(1+Tp)$	$h(t) = K [T\delta(t) + 1] \cdot 1(t)$	$w(t) = K [\delta(t) + T d\delta/dt]$
<b>Временные характеристики звена запаздывания на постоянное время <math>\tau</math></b>		
11. Запаздывающее $W(p) = e^{-\tau p}$	$h(t) = 1(t - \tau)$	$w(t) = \delta(t - \tau)$

### Частотные характеристики интегрирующих звеньев

Частотные характеристики интегрирующих звеньев			
Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая		Логарифмические
 <p><math>W(j\omega) = K/j\omega</math></p>			
 <p><math>W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)}</math></p>			
 <p><math>W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} + K_1</math></p>			
Частотные характеристики дифференцирующих звеньев			
 <p><math>W(j\omega) = K j\omega</math></p>			
 <p><math>W(j\omega) = K j\omega / (1+j\omega T)</math></p>			
 <p><math>W(j\omega) = K(1+j\omega T)</math></p>	 <p><math>A(\omega) = K\sqrt{1+\omega^2 T^2}</math>, <math>\varphi(\omega) = \arctan \omega T</math></p>		
Частотные характеристики звена запаздывания на постоянное время $\tau$			
 <p><math>W(j\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega\tau}</math></p>			

ЛАЧХ, построенная по уравнению (1.2.8), имеет две асимптоты:

а) при частотах  $\omega < 1/T$  в (1.2.8)  $\omega^2 T^2 \ll 1$ , тогда  $\omega^2 T^2 + 1 \approx 1$  и асимптота ЛАЧХ

$L(\omega)_A = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx 20 \lg K - 0$  представляется горизонтальной прямой;

б) при частотах  $\omega > 1/T$  в (1.2.10)  $\omega^2 T^2 \gg 1$ , тогда  $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx \omega T$  и асимптота ЛАЧХ  $L(\omega)_B = 20 \lg K - 20 \lg \omega T$  представляется прямой линией с наклоном минус 20 децибел на декаду (Дб/дек) относительно оси абсцисс.

Эти асимптоты сопрягаются при частоте сопряжения  $\omega_c = 1/T$ . При этой частоте асимптотическая ЛАЧХ имеет превышение коэффициента передачи по сравнению с непрерывной точной ЛАЧХ на величину

$$\Delta L(\omega_c) = 20 \lg K - \left( 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 T^2 + 1} \right) = 3,01 \text{ дБ}, \quad (1.2.11)$$

которой в расчетах, ввиду малости, можно пренебречь и считать, что асимптотическая ЛАЧХ состоит из горизонтальной и наклонной прямых, образованных отрезками асимптот *A* и *B*, сопрягающихся при  $\omega_c = 1/T$  (таблица 1.2.1, п.2).

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ) имеет такое же расчетное выражение (1.2.7) как и ФЧХ, но строится *совместно* с ЛАЧХ звена или САУ в логарифмическом масштабе частот и в линейном масштабе угла фазового сдвига, измеряемого в радианах или угловых градусах.

Использование логарифмических характеристик позволяет значительно упростить расчеты САУ, поскольку *ЛАЧХ и ЛФЧХ САУ получают простым суммированием ЛАЧХ и ЛФЧХ последовательно соединенных звеньев*.

Аналогичным путем получают временные и частотные характеристики других типовых звеньев САУ, математические модели которых представлены линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

Линеаризация дифференциальных уравнений обычно осуществляется способом их разложения в степенной ряд Тейлора с отбрасыванием членов выше второго порядка [1, 4, 6, 9, 11, 12].

### Контрольные вопросы

1. Какие звенья называются типовыми?
2. Как типовые звенья делятся на четыре основных класса?
3. Какие характеристики называются временными и как они получаются?
4. Какие характеристики называются частотными и как они получаются?
5. Как получаются амплитудно-фазовые характеристики (АФХ)?
6. Какой физический смысл имеют амплитудные и фазовые частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) и как они получаются?
7. Как получаются логарифмические частотные характеристики ЛАЧХ и ЛФЧХ типовых звеньев и всей САУ и как они строятся?

### 1.3. Преобразование структурных схем САУ

Изображение САУ в виде совокупности однонаправленных типовых звеньев с указанием связей между ними и с внешней средой называется *структурной схемой САУ* (алгоритмической структурной схемой или просто структурой САУ), которая является графической интерпретацией описания математической модели САУ операторными функциями передачи (ОФП). Данный способ составляет сущность *структурного метода* представления САУ различной физической природы, который дает наглядное представление взаимосвязи элементов, звеньев и частей САУ и позволяет оценивать основные свойства переходных и установившихся процессов в САУ [1, 4, 6, 9, 11].

На структурных схемах САУ (рис. 1.3.1) каждое звено обозначается прямоугольником, в котором записывается ОФП звена или ее обозначение. Входные воздействия обозначаются стрелками, направленными в звено, выходные величины – стрелками, направленными из звена. Сумматоры обозначаются кружком, в который направлены стрелки суммируемых величин (вычитаемые величины обозначаются с минусом около стрелки), а результирующая величина обозначается стрелкой, выходящей из кружка. В однонаправленных звеньях отсутствует влияние выходной величины на входное воздействие. Устройства САУ, в которых имеется обратная связь, представляется в структурной схеме контуром с обратной связью. Например, на рис. 1.3.1 контур с обратной связью состоит из звена  $W_2(p)$  прямой связи, звена  $W_5(p)$  отрицательной обратной связи и сумматора, в котором сигнал  $x_8(p)$  отрицательной обратной связи уменьшает входное воздействие  $x_3(p)$  на звено  $W_2(p)$  до значения  $x_4(p)$ . Структурная схема составляется по функциональной схеме САУ с учетом математического описания процессов управления, происходящих в звеньях САУ.

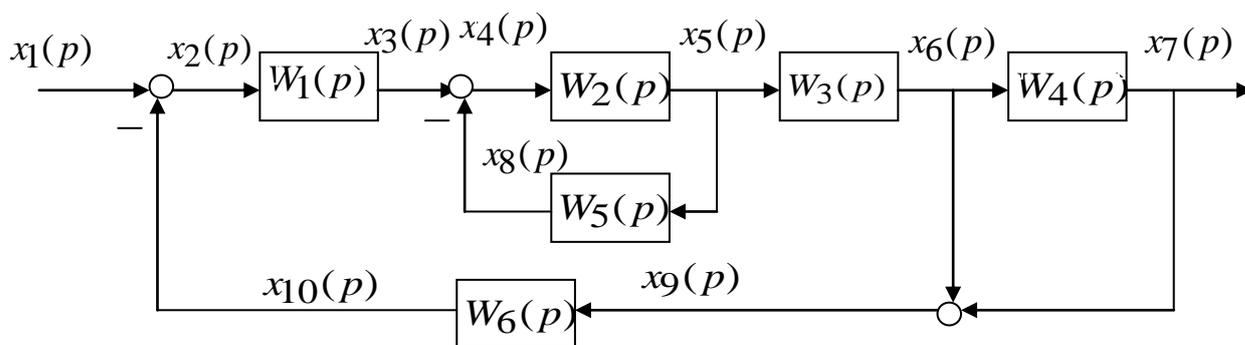
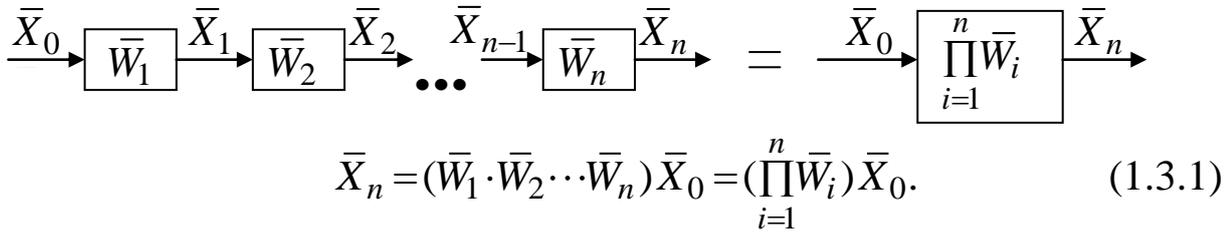


Рис. 1.3.1. Структурная схема САУ

Используются следующие *основные правила эквивалентных преобразований структурных схем* без изменений ОФП САУ.

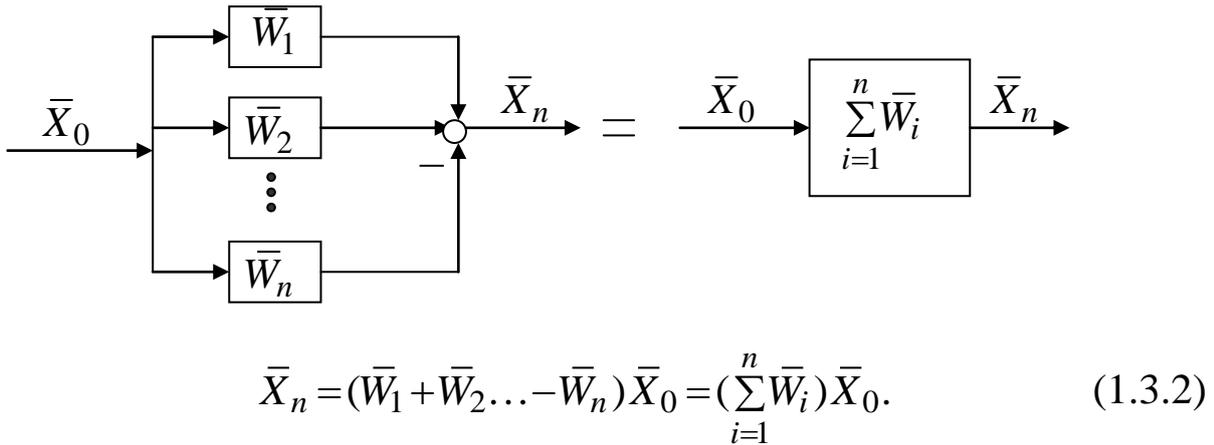
### 1. Преобразование последовательно соединенных звеньев



$$\bar{X}_0 \rightarrow \boxed{\bar{W}_1} \rightarrow \bar{X}_1 \rightarrow \boxed{\bar{W}_2} \rightarrow \bar{X}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{X}_{n-1} \rightarrow \boxed{\bar{W}_n} \rightarrow \bar{X}_n = \bar{X}_0 \rightarrow \boxed{\prod_{i=1}^n \bar{W}_i} \rightarrow \bar{X}_n$$

$$\bar{X}_n = (\bar{W}_1 \cdot \bar{W}_2 \cdot \dots \cdot \bar{W}_n) \bar{X}_0 = \left( \prod_{i=1}^n \bar{W}_i \right) \bar{X}_0. \quad (1.3.1)$$

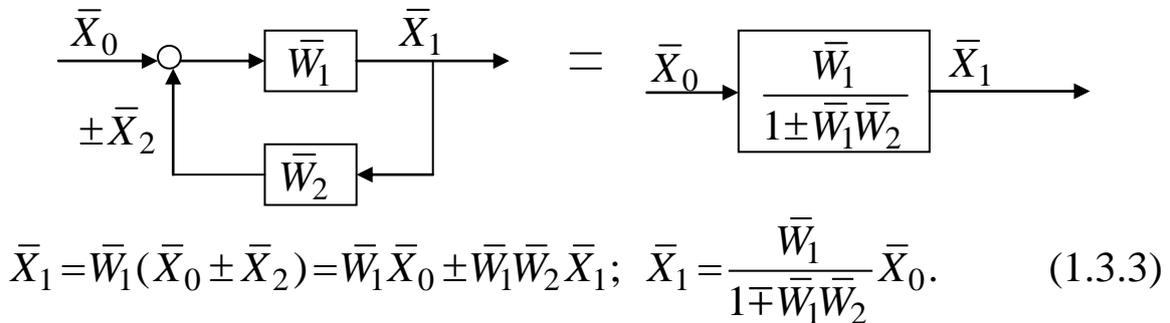
### 2. Преобразование параллельно соединенных звеньев



$$\bar{X}_0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{\bar{W}_1} \\ \boxed{\bar{W}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\bar{W}_n} \end{cases} \rightarrow \bar{X}_n = \bar{X}_0 \rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n \bar{W}_i} \rightarrow \bar{X}_n$$

$$\bar{X}_n = (\bar{W}_1 + \bar{W}_2 + \dots + \bar{W}_n) \bar{X}_0 = \left( \sum_{i=1}^n \bar{W}_i \right) \bar{X}_0. \quad (1.3.2)$$

### 3. Правило преобразования контура с обратной связью

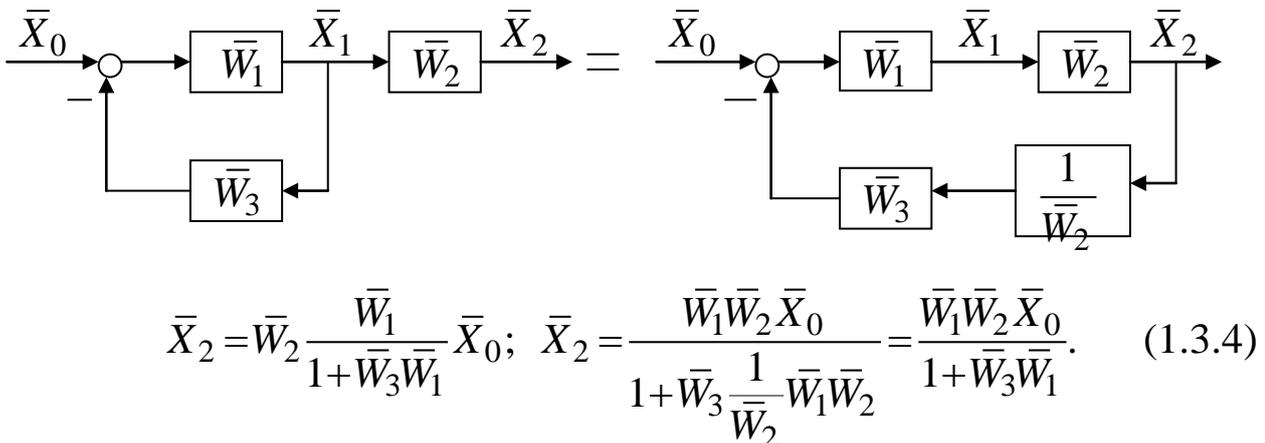


$$\bar{X}_0 \rightarrow \pm \bar{X}_2 \rightarrow \boxed{\bar{W}_1} \rightarrow \bar{X}_1 \rightarrow \boxed{\bar{W}_2} \rightarrow \pm \bar{X}_2 = \bar{X}_0 \rightarrow \boxed{\frac{\bar{W}_1}{1 \pm \bar{W}_1 \bar{W}_2}} \rightarrow \bar{X}_1$$

$$\bar{X}_1 = \bar{W}_1 (\bar{X}_0 \pm \bar{X}_2) = \bar{W}_1 \bar{X}_0 \pm \bar{W}_1 \bar{W}_2 \bar{X}_1; \quad \bar{X}_1 = \frac{\bar{W}_1}{1 \mp \bar{W}_1 \bar{W}_2} \bar{X}_0. \quad (1.3.3)$$

### 4. Правила переноса узла разветвления сигнала:

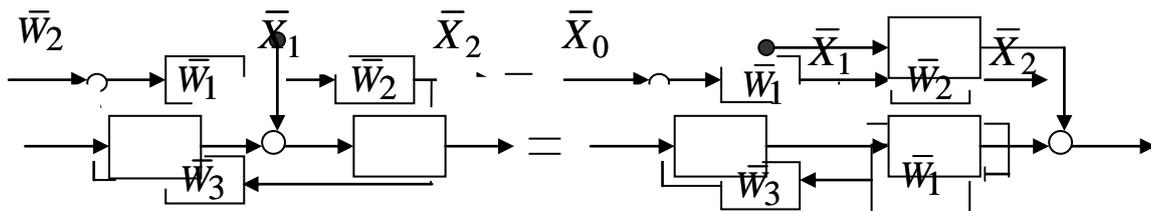
#### а) по направлению распространения сигналов



$$\bar{X}_0 \rightarrow \boxed{\bar{W}_1} \rightarrow \bar{X}_1 \rightarrow \boxed{\bar{W}_2} \rightarrow \bar{X}_2 \rightarrow \boxed{\bar{W}_3} \rightarrow \pm \bar{X}_2 = \bar{X}_0 \rightarrow \boxed{\bar{W}_1} \rightarrow \bar{X}_1 \rightarrow \boxed{\bar{W}_2} \rightarrow \bar{X}_2 \rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{W}_2}} \rightarrow \boxed{\bar{W}_3} \rightarrow \pm \bar{X}_2$$

$$\bar{X}_2 = \bar{W}_2 \frac{\bar{W}_1}{1 + \bar{W}_3 \bar{W}_1} \bar{X}_0; \quad \bar{X}_2 = \frac{\bar{W}_1 \bar{W}_2 \bar{X}_0}{1 + \bar{W}_3 \frac{1}{\bar{W}_2} \bar{W}_1 \bar{W}_2} = \frac{\bar{W}_1 \bar{W}_2 \bar{X}_0}{1 + \bar{W}_3 \bar{W}_1}. \quad (1.3.4)$$

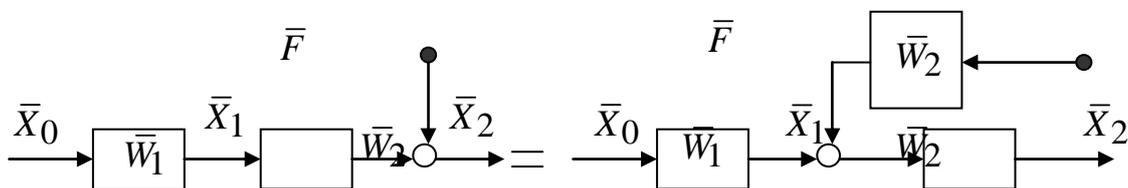
б) против направления распространения сигналов



$$\bar{X}_2 = \frac{\bar{W}_1 \bar{W}_2}{1 + \bar{W}_1 \bar{W}_2 \bar{W}_3} \bar{X}_0; \quad \bar{X}_2 = \bar{W}_2 \frac{\bar{W}_1}{1 + \bar{W}_1 \bar{W}_2 \bar{W}_3} \bar{X}_0. \quad (1.3.5)$$

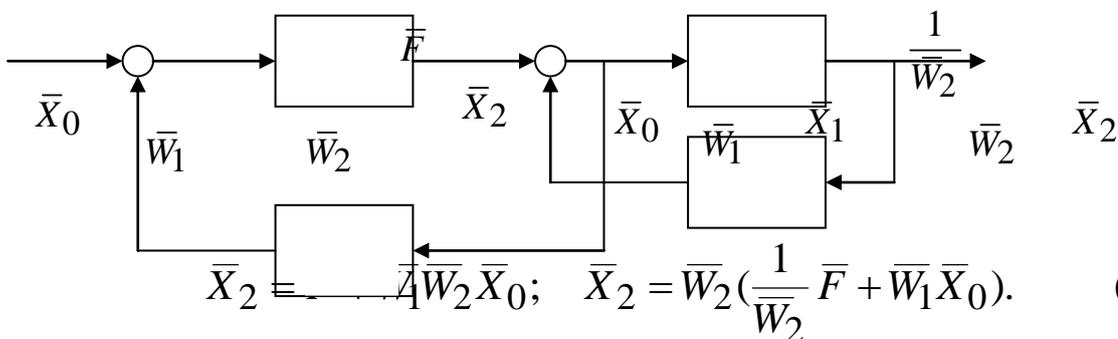
5. Правила переноса сумматора сигналов:

а) по направлению распространения сигналов



$$\bar{X}_2 = \bar{W}_2 (\bar{F} + \bar{W}_1 \bar{X}_0); \quad \bar{X}_2 = \bar{W}_2 \bar{F} + \bar{W}_2 \bar{W}_1 \bar{X}_0. \quad (1.3.6)$$

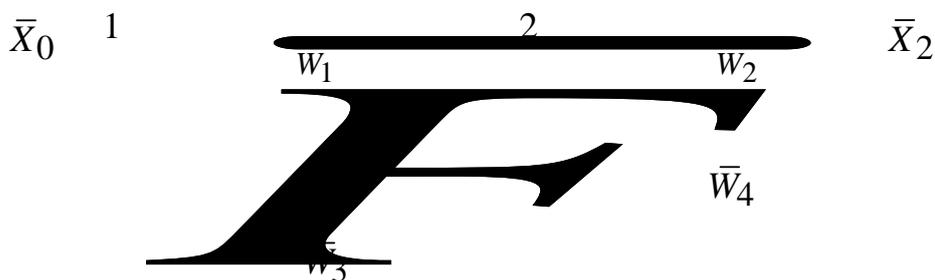
б) против направления распространения сигналов



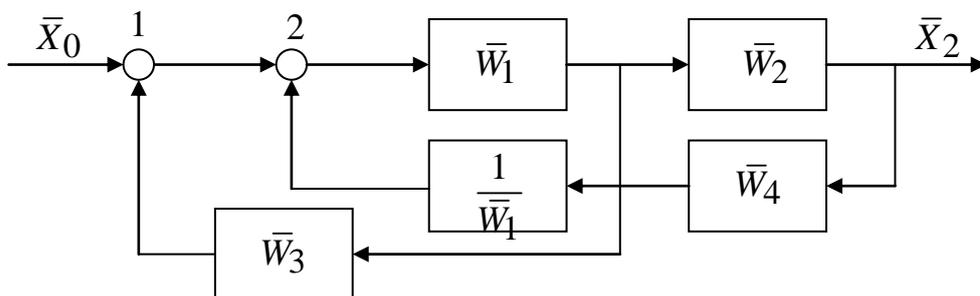
$$\bar{X}_2 = \frac{1}{\bar{W}_2} \bar{F} + \bar{W}_1 \bar{X}_0; \quad \bar{X}_2 = \bar{W}_2 \left( \frac{1}{\bar{W}_2} \bar{F} + \bar{W}_1 \bar{X}_0 \right). \quad (1.3.7)$$

6. Правила перестановки сумматоров в структурных схемах с перекрещивающимися обратными связями для выделения явно выраженных замкнутых контуров управления.

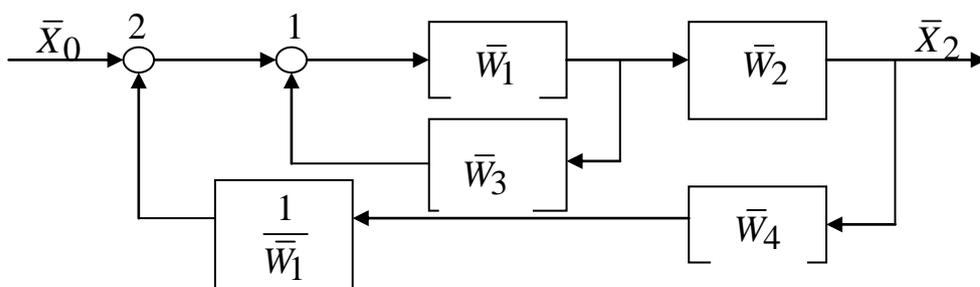
Перестановка сумматоров выполняется в два этапа. Например, в структурной схеме



а) на первом этапе преобразования сумматоры совмещают в ближайшем к входу канале по правилу 5,б



б) на втором этапе преобразования сумматоры переставляют местами в совмещенном канале так, чтобы образовались явно выраженные замкнутые контуры с обратной связью, которые преобразуются по правилу 3.



### Контрольные вопросы

1. Как составляется алгоритмическая структурная схема САУ?
2. Как осуществляются эквивалентные преобразования структурных схем САУ без изменения их ОФП?
3. Запишите ОФП последовательно соединенных звеньев.
4. Запишите ОФП параллельно соединенных звеньев.
5. Запишите эквивалентную ОФП контура с обратной связью.
6. Запишите условия эквивалентного переноса узла разветвления сигнала по направлению распространения сигналов в САУ от входа к выходу.
7. Запишите условия эквивалентного переноса узла разветвления сигнала против направления распространения сигналов в САУ.
8. Запишите условия эквивалентного переноса сумматора по направлению распространения сигналов в САУ.
9. Запишите условия эквивалентного переноса сумматора против направления распространения сигналов в САУ.
10. Как преобразуют структурные схемы САУ с перекрещивающимися обратными связями?

## 1.4. Передаточные функции замкнутых САУ

На рис. В1 на стр. 7 приведена типовая функциональная схема одномерной линейной замкнутой САУ, имеющая одну выходную управляемую величину  $y(t)$  и два входных воздействия, задающее  $g(t)$  и возмущающее  $f(t)$ , что часто встречается на практике. Для таких САУ для каждого входного воздействия составляются отдельные передаточные функции (ОФП), как отношение изображений по Лапласу переменных выхода и входа, для частных случаев отсутствия других входных воздействий. На основании каждой полученной ОФП исследуется устойчивость и качество процессов управления при типовых входных воздействиях, а при необходимости учета одновременного влияния нескольких входных воздействий переходный процесс в САУ определяется суммой переходных процессов от каждого воздействия по принципу суперпозиции в линейных САУ [1, 4, 6, 9].

Для получения передаточных функций замкнутой САУ, необходимо по функциональной схеме САУ (рис. В1) составить алгоритмическую структурную схему САУ с выделенным каналом влияния возмущающего воздействия  $f(t)$  на выходную управляемую величину  $y(t)$  (рис. 1.4.1), где обозначено:  $g(t)$ ,  $f(t)$ ,  $y(t)$  – задающая, возмущающая, управляемая величины;  $G(p)$ ,  $F(p)$ ,  $Y(p)$  – их изображения по Лапласу;  $W(p)$ ,  $H(p)$  – ОФП каналов влияния задающего и возмущающего воздействий на управляемую величину;  $W_{oc}(p)$ ,  $y_{oc}(t)$ ,  $Y_{oc}(p)$  – ОФП цепи обратной связи, сигнал обратной связи и его изображение по Лапласу;  $e(t) = g(t) - x_{oc}(t)$ ,  $E(p)$  – текущее значение сигнала ошибки управления и его изображение по Лапласу [1, 4, 6, 9, 11, 12].

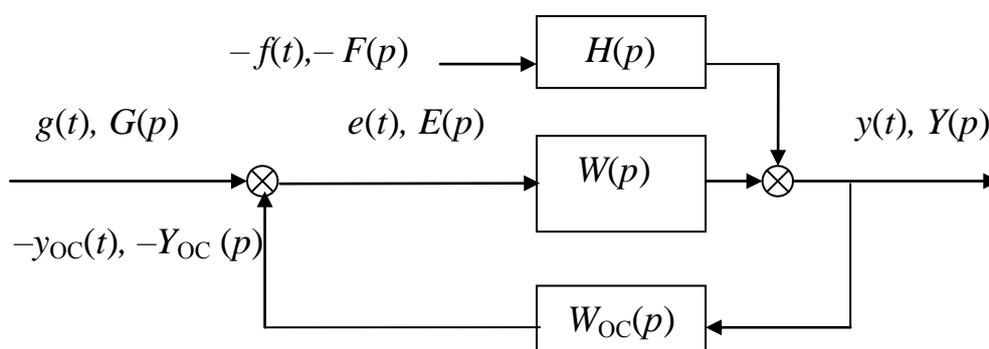


Рис. 1.4.1. Структура САУ с выделенным каналом возмущения

Алгоритмическая структура САУ получается на основе правил эквивалентных преобразований структурных схем. При учете не-

скольких возмущающих воздействий, для каждого из них выделяется отдельный канал влияния на управляемую величину. В решении задач анализа и синтеза САУ обычно используются следующие три типовых передаточных функции замкнутой САУ с выделенным каналом влияния возмущения  $f(t)$  на выходную величину  $y(t)$ .

1. *Передаточная функция замкнутой САУ по задающему воздействию  $g(t)$  (при отсутствии возмущающих воздействий  $f(t)=0$ ):*

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{W(p)}{1 + W_{OC}(p)W(p)}. \quad (1.4.1)$$

2. *Передаточная функция замкнутой САУ по ошибке  $e(t)$  (при отсутствии возмущающего воздействия  $f(t)=0$ ):*

$$\begin{aligned} \Phi_e(p) &= \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{G(p) - W_{OC}(p)Y(p)}{G(p)} = 1 - W_{OC}(p)\Phi(p) = \\ &= 1 - W_{OC}(p) \frac{W(p)}{1 + W_{OC}(p)W(p)} = \frac{1}{1 + W_{OC}(p)W(p)}. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

3. *Передаточная функция замкнутой САУ по возмущающему воздействию  $f(t)$  (при отсутствии задающего воздействия  $g(t)=0$ ):*

$$\Phi_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{F(p)} \frac{F(p)H(p)}{1 + W_{OC}(p)W(p)} = \frac{H(p)}{1 + W_{OC}(p)W(p)}. \quad (1.4.3)$$

Все три передаточные функции замкнутой САУ имеют одинаковые характеристические уравнения, что указывает на идентичность динамических свойств САУ по любому каналу управления.

### Контрольные вопросы

1. Как построить структурную схему САУ для исследования процессов управления по каждому входному воздействию в отдельности и при одновременном воздействии нескольких входных величин?

2. Как получить ОФП замкнутой САУ по задающему воздействию?

3. Как получить ОФП замкнутой САУ по ошибке регулирования?

4. Как получить ОФП замкнутой САУ по возмущающему воздействию?

5. Как оценить качество процесса управления в САУ при одновременном влиянии задающего и возмущающего воздействий?

## 1.5. Анализ одномерных САУ

Анализ САУ с заданной структурой и известными параметрами (рис. В1, рис. 1.4.1) состоит в изучении их общесистемных свойств и условий выполнимости требуемых функций соответственно цели управления. Анализ САУ должен дать оценки выполнения следующих основных безусловных требований к САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12]:

1) *устойчивость САУ* – собственное свойство САУ самой приходиться в установившееся состояние после завершения переходных процессов, что определяет работоспособность САУ;

2) *точность САУ* – определяется величиной ошибки управления  $e(t)=g(t)-y(t)$  в установившихся (стационарных) режимах работы;

3) *инвариантность САУ к возмущающим воздействиям и ковариантность с задающим воздействием* – также характеризует точность управления в установившихся (стационарных) режимах и определяется независимостью (инвариантностью) установившихся значений управляемой величины  $y(t)$  и ошибки управления  $e(t)=g(t)-y(t)$  от изменений (вариаций) возмущающего воздействия  $f(t)$  и независимостью установившегося значения ошибки управления  $e(t)=g(t)-y(t)$  от величины задающего воздействия  $g(t)$  вследствие совпадения, близости (ковариантности) переменных величин  $y(t)=g(t)$ ;

4) *качество переходных процессов в САУ* – определяется степенью близости процесса изменения управляемой выходной величины  $y(t)$  задающему типовому воздействию  $g(t)=1[t]$ ;

5) *робастность САУ* – определяется малой чувствительностью свойств САУ (показателей устойчивости, точности и других свойств) от небольших отклонений (вариаций) собственных параметров элементов САУ от расчетных значений ее математической модели в реальных условиях функционирования.

### 1.5.1. Динамическая устойчивость САУ

При работе в САУ чередуются установившиеся и переходные процессы. Установившийся процесс характеризуется постоянством задающего  $g(t)=\text{const}$  и возмущающего  $f(t)=\text{const}$  внешних воздействий и выходной управляемой величины  $y(t)=\text{const}$  (рис. В1). Изменение внешних воздействий вызывает процесс перехода САУ в другое установившееся состояние – переходный процесс, который описывается решением дифференциального уравнения САУ в виде суммы общего и частного решений [1, 4, 6, 9, 11, 12]

$$y(t) = y_C(t) + y_B(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t} + y_{\text{уст}}(t) = y_{\text{пер}}(t) + y_{\text{уст}}(t), \quad (1.5.1)$$

где  $y_C(t)$  – собственное (свободное) движение САУ, переходная составляющая  $y_{\text{пер}}(t)$ , определяемые в виде суммы экспонент из общего решения однородного дифференциального уравнения САУ при правой части, равной нулю;

$y_B(t)$  – вынужденное движение, равное установившемуся значению выходной управляемой величины  $y_{\text{уст}}(t)$ , определяемые из дифференциального уравнения САУ при  $t \rightarrow \infty$ ;

$C_i$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;  $p_i$  – корни характеристического уравнения замкнутой САУ

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (1.5.2)$$

При исчезновении внешних воздействий в САУ возникает только переходной процесс собственного (свободного) движения  $y_C(t)$  к нулевому равновесию, т. е. переходная составляющая  $y_{\text{пер}}(t)$ .

*Динамической устойчивостью* или *устойчивостью по начальным условиям* (по Ляпунову) называется собственное свойство САУ возвращаться в состояние начального нулевого равновесия после затухания всех составляющих свободных движений, вызванных ненулевыми начальными условиями. Динамическая устойчивость САУ определяется по виду переходного процесса собственного (свободного) движения САУ к состоянию начального нулевого равновесия, зависящего только от собственных свойств САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12].

В зависимости от вида корней характеристического уравнения (1.5.2) переходный процесс свободного движения САУ по (1.5.1) может быть: *затухающим аperiodическим*, если все корни действительные отрицательные; *затухающим колебательным*, если все действительные корни и вещественные части всех комплексно-сопряженных корней отрицательные; *расходящимся аperiodическим*, если из действительных корней хотя бы один положительный; *расходящимся колебательным*, если хотя бы один из комплексно-сопряженных корней имеет положительную вещественную часть; *незатухающим колебательным*, если хотя бы один комплексно-сопряженный корень имеет нулевую вещественную часть.

Работоспособны только САУ с затухающими переходными процессами, обладающие динамической устойчивостью, о которой можно судить по расположению корней характеристического уравнения на комплексной плоскости – в устойчивых САУ все корни располагаются в левой полуплоскости [1, 4, 6, 9, 11, 12]. Такие САУ называются *статическими*, поскольку имеют ошибку в установившихся

(статических) режимах работы. Границей устойчивости САУ на комплексной плоскости корней является ось мнимых чисел. Поэтому, с учетом возможных отклонений параметров САУ от расчетных значений, корни должны располагаться на некотором расстоянии слева от мнимой оси, которое характеризует *запас устойчивости* САУ.

В *астатических* (не статических) САУ установившаяся ошибка отсутствует, в характеристическом уравнении отсутствует свободный член и имеется один или несколько нулевых действительных корней, расположенных в начале координат комплексной плоскости (т. е. на мнимой оси). Из-за наличия нулевых корней астатические САУ неустойчивы по управляемой величине, но устойчивы по ее первой производной, и поэтому называются *нейтрально устойчивыми по управляемой величине*, которая может принимать любые установившиеся значения при нулевой скорости ее изменения [1, 4, 6, 9, 11, 12].

В *структурно неустойчивых* САУ при любых параметрах нельзя достичь устойчивости без изменения структуры. Например, контур с положительной обратной связью структурно неустойчив, поскольку в характеристическом уравнении имеется отрицательный свободный член, который дает положительный корень и бесконечно возрастающий переходный процесс в САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Для оценки устойчивости САУ по коэффициентам характеристического уравнения, без вычисления корней характеристического уравнения и без решения дифференциального уравнения переходного процесса в САУ, разработаны так называемые *алгебраические (аналитические)* и *частотные (геометрические) критерии устойчивости САУ* [1, 4, 6, 9, 11, 12].

### Контрольные вопросы

1. Поясните понятие динамической устойчивости САУ?
2. Как рассчитать переходный процесс собственного движения САУ?
3. Как вычислить корни характеристического уравнения и как они влияют на собственное движение САУ к состоянию нулевого равновесия?
4. Как располагаются корни характеристического уравнения на комплексной плоскости корней устойчивых статических САУ? Что характеризует расстояние от мнимой оси до ближайшего отрицательного корня?
5. Как располагаются корни на комплексной плоскости корней астатических САУ?

### 1.5.2. Критерий устойчивости Гурвица

Для оценки устойчивости замкнутой САУ по ее характеристическому уравнению вида (1.5.2) разработаны алгебраические критерии

Рауса, Гурвица, Шур-Кона, Льенара-Шипара, Джури-Бланшара, различающиеся по форме [1, 4, 6, 9, 11, 12]. Например, Раус в 1877 г. предложил критерий устойчивости в алгоритмической форме, а Гурвиц в 1895 г. – в более удобной определительной форме.

*Критерий устойчивости Гурвица* формулируется так: для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  все диагональные определители матрицы Гурвица (1.5.3) были положительны.

Для неустойчивой САУ определитель Гурвица имеет отрицательное значение, а на границе устойчивости САУ – равен нулю.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} > 0, (a_0 > 0). \quad (1.5.3)$$

Диагональные определителями матрицы Гурвица ( $n \times n$ ):

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

С использованием критерия Гурвица и других аналитических критериев можно строить границы устойчивости и выделять *области устойчивости* в пространстве коэффициентов характеристического уравнения или параметров САУ.

К недостаткам критерия Гурвица относится трудность вычисления аналитической связи между параметрами и устойчивостью в САУ выше пятого порядка ( $n > 5$ ) из-за того, что одни и те же параметры САУ одновременно входят в несколько коэффициентов характеристического уравнения. В таких случаях можно использовать алгебраические критерии Рауса, Льенара-Шипара, Шур-Кона с расчетами на ЭВМ и применением пакетов прикладных программ [4, 6, 11, 12].

**Пример 1.5.1.** Исследуем по критерию Гурвица устойчивость замкнутой САУ с единичной обратной связью, если ее ОФП в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (1.5.4)$$

Разомкнутая САУ неустойчива из-за бесконечного возрастания выходной величины, т. к. характеристическое уравнение имеет нулевой корень  $p_1 = 0$ .

Передаточная функция САУ в замкнутом состоянии запишется в виде

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K}{p(T_1p+1)(T_2p+1)+K}. \quad (1.5.5)$$

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + \delta + K = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0. \quad (1.5.6)$$

Вычислим определители Гурвица по (1.5.3) для уравнения (1.5.6)

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1+T_2 & K & 0 \\ T_1T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_1+T_2 & K \end{bmatrix} > 0; \quad (1.5.7)$$

$$\Delta_1 = a_1 = T_1 + T_2 > 0; \quad (1.5.8)$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1+T_2 & K \\ T_1T_2 & 1 \end{bmatrix} = (T_1+T_2) - KT_1T_2 > 0; \quad (1.5.9)$$

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 = K\Delta_2 = K(T_1+T_2 - KT_1T_2) > 0. \quad (1.5.10)$$

Из полученных определителей Гурвица условие устойчивости замкнутой САУ определяется неравенством (1.5.9), которое можно записать в виде

$$K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (1.5.11)$$

Неравенство (1.5.11) выражает условие отсутствия нулевых и правых корней в характеристическом уравнении (1.5.6) замкнутой САУ и позволяет исследовать устойчивость САУ в трехмерном пространстве параметров  $K$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ . Для наглядности результаты исследований обычно представляются на плоскости в виде семейства зависимостей двух параметров при различных постоянных значениях третьего параметра.

### Контрольные вопросы

1. Как формулируется критерий устойчивости Гурвица?
2. Как вычислить определитель Гурвица и определить устойчивость САУ по ее характеристическому уравнению  $0,1p^4 + 0,5p^3 + p^2 + 5p + 10 = 0$ ?
3. Как найти критическое значение коэффициента характеристического уравнения  $a_4$ , зависящего от коэффициента передачи САУ, на границе устойчивости САУ с использованием критерия Гурвица?
4. По каким правилам раскрывается определитель любого порядка?
5. Какие достоинства и недостатки имеет критерий устойчивости Гурвица?

### 1.5.3. Критерий устойчивости Михайлова

Для САУ высокого порядка разработаны частотные критерии оценки устойчивости САУ по геометрическому виду их частотных характеристик. Это частотные критерии устойчивости Михайлова, Найквиста, логарифмический критерий [1, 4, 6, 9, 11, 12].

*Критерий устойчивости Михайлова* имеет три формулировки:

1) для устойчивости замкнутой САУ  $n$ -го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор  $D(j\omega)$  кривой Михайлова (1.5.12) при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  повернулся на комплексной плоскости на угол  $\varphi(\omega) = n\pi/2$  (рис. 1.5.1);

2) для устойчивости замкнутой САУ  $n$ -го порядка необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова (1.5.12), начинаясь на положительной вещественной полуоси комплексной плоскости при частоте  $\omega=0$ , последовательно проходила бы против часовой стрелки через все  $n$  квадрантов, уходя в бесконечность в последнем  $n$ -м квадранте при  $\omega \rightarrow \infty$  (рис. 1.5.1);

3) для устойчивости замкнутой САУ  $n$ -го порядка в кривой Михайлова (1.5.12) на комплексной плоскости при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  должны  $n$  раз последовательно чередоваться (перемежаться) нули мнимой  $V(\omega)=0$  и вещественной  $U(\omega)=0$  частей характеристического вектора  $D(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$  (рис. 1.5.1).

Характеристическое уравнение замкнутой САУ можно представить в виде  $D(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+..+a_{n-1}p+a_n=a_0(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)=0$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни характеристического уравнения. Заменив  $p=j\omega$ , получим выражение для характеристического вектора  $D(j\omega)$  замкнутой САУ в виде произведения  $n$  векторов-сомножителей, аргументы которых при перемножении суммируются

$$D(j\omega)=a_0(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\dots=U(\omega)+jV(\omega)=D(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.5.12)$$

При изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  каждый вектор-сомножитель  $(j\omega-p_i)$  в (1.5.12) повернется на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки, если корень  $p_i$  левый. При этом вектор  $D(j\omega)$  по (1.5.12) повернется на угол  $n\pi/2$  против часовой стрелки, если все корни  $p_i$  левые. Если хотя бы один корень правый или нулевой, то угол поворота вектора  $D(j\omega)$  будет меньше  $n\pi/2$ , что укажет на неустойчивость САУ. Конец вектора  $D(j\omega)$  по (1.5.12) при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  описывает на комплексной плоскости годограф, называемый *кривой Михайлова* (рис. 1.5.1).

Для устойчивых САУ  $n$ -го порядка кривые Михайлова имеют вид расходящихся спиралей, начинающихся на положительной вещественной полуоси и уходящих в бесконечность в  $n$ -квадранте комплексной плоскости (непрерывные линии на рис. 1.5.1). При четной степени  $n$  характеристического уравнения кривая Михайлова стремится к бесконечности параллельно действительной оси  $U(\omega)$ , при нечетной – параллельно мнимой оси  $jV(\omega)$ .

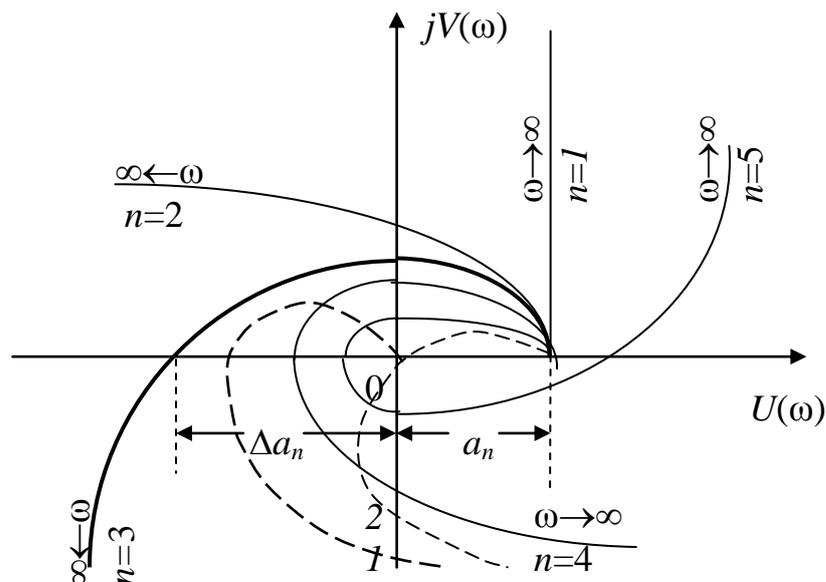


Рис. 1.5.1. Кривые Михайлова для замкнутых САУ

На границе аperiodической устойчивости САУ в характеристическом уравнении отсутствует свободный член и имеется нулевой корень, а кривая Михайлова начинается из начала координат комплексной плоскости (пунктирная линия 1 на рис. 1.5.1). На границе колебательной устойчивости САУ в характеристическом уравнении имеется пара чисто мнимых корней и кривая Михайлова при  $\omega=0$  начинается на положительной вещественной полуоси, но затем при увеличении частоты пересекает начало координат комплексной плоскости (пунктирная линия 2 на рис. 1.5.1).

Свободный член  $a_n$  характеристического уравнения выражает коэффициент передачи и точность САУ. Изменение величины  $a_n$  не изменяет форму кривой Михайлова, но вызывает ее сдвиг вдоль оси  $U(\omega)$ , что позволяет определить *запас устойчивости*  $\Delta a_n$  по увеличению  $a_n$  до выхода САУ на границу колебательной устойчивости. При этом кривая Михайлова (толстая линия на рис. 1.5.1) сдвинется вправо и пройдет через начало координат комплексной плоскости.

**Пример 1.5.2.** Исследуем устойчивость замкнутой САУ с использованием критерия Михайлова, если ее характеристическое уравнение имеет вид

$$D(p)=0,01p^4+0,1p^3+0,5p^2+2p+5=0. \quad (1.5.13)$$

Характеристический вектор из (1.5.13) при  $p=j\omega$  запишется в виде

$$D(j\omega)=(0,01\omega^4-0,5\omega^2+5)+j\omega(2-0,1\omega^2)=U(\omega)+jV(\omega). \quad (1.5.14)$$

По (1.5.14) кривая Михайлова при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  представляется таблицей 1.5.3 и имеет вид, показанный на рис. 1.5.2.

Таблица 1.5.3

$\omega$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	5	0
1	4,51	1,9
2	3,16	3,2
3	1,39	3,3
3,72	0	2,297
4	-0,44	1,6
4,47	-1	0
5	-1,25	-2,5
6,015	0	-9,73
7	4,5	-20,3
8	13,96	-35,2
:	:	:
$\infty$	$\infty$	$-\infty$

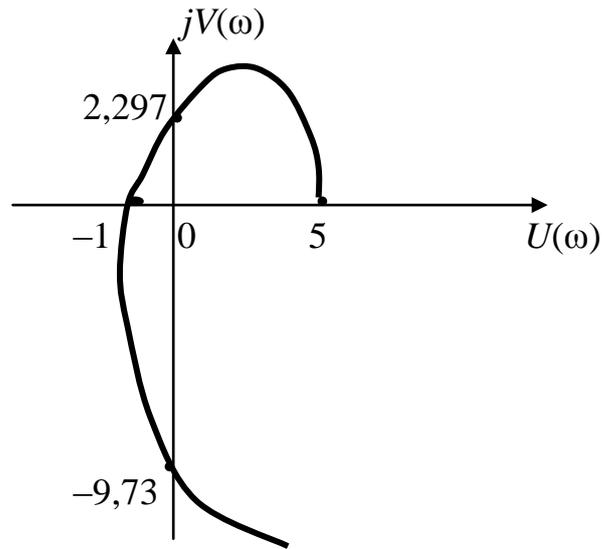


Рис. 1.5.2

Рассмотренная САУ четвертого порядка устойчива, поскольку выполняются условия устойчивости по любой из трех формулировок критерия устойчивости Михайлова. Запас устойчивости по увеличению свободного члена характеристического уравнения  $\Delta a_n=1$ . При увеличении свободного члена от исходного значения  $a_n=5$  до  $a_n=6$  кривая Михайлова пройдет через начало координат комплексной плоскости и САУ окажется на границе колебательной неустойчивости, т. е. станет неработоспособной, неустойчивой.

### Контрольные вопросы

1. Нарисуйте кривые Михайлова для САУ третьего и пятого порядков?
2. В каких САУ кривая Михайлова начинается из начала координат?
3. Как определить запас устойчивости по коэффициенту  $a_n$ ?

### 1.5.4. Критерий устойчивости Найквиста

В 1932 г. Найквист определил связь устойчивости замкнутых статических САУ с видом их амплитудно-фазовых характеристик (АФХ) в разомкнутом состоянии. В 1938 г. Михайлов обобщил эту связь и на астатические САУ.

Общий для статических и астатических САУ критерий устойчивости Найквиста формулируется так: для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы АФХ ее разомкнутой цепи при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не охватывала точку  $(-1, j_0)$  на комплексной плоскости (рис. 1.5.3); при этом для астатических САУ, имеющих порядок астатизма  $\nu$ , АФХ разомкнутой цепи при  $\omega=0$  должна дополняться дугой бесконечно большого радиуса, начинающейся на положительной вещественной полуоси и проходящей по часовой стрелке через  $\nu$  квадрантов [1, 4, 6, 9, 11, 12].

Вид АФХ разомкнутой цепи статических САУ (имеющих порядок астатизма  $\nu=0$ ) и астатических САУ (имеющих порядок астатизма  $\nu=1,2,3$ ), устойчивых в замкнутом состоянии, показан на рис. 1.5.3.

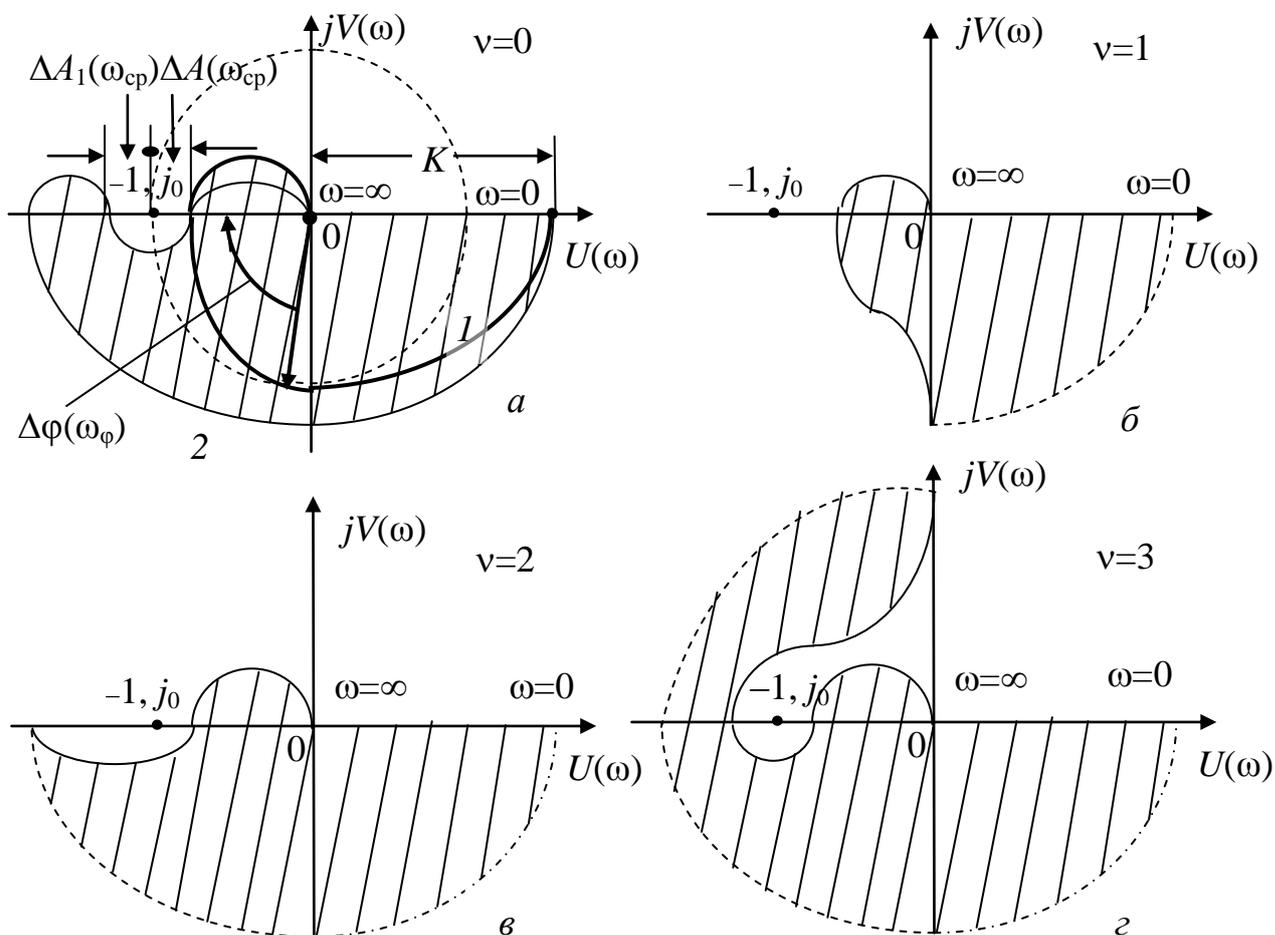


Рис. 1.5.3. АФХ разомкнутых САУ, устойчивых в замкнутом состоянии

Замкнутая САУ будет находиться на границе устойчивости, если АФХ ее разомкнутой цепи проходит через точку  $(-1, j_0)$ .

На рис. 1.5.3, а цифрой 1 обозначена АФХ разомкнутой цепи абсолютно устойчивой замкнутой САУ, которая не охватывает точку  $(-1, j_0)$  при любом уменьшении коэффициента передачи  $A(\omega_{cp})$ , а цифрой 2 обозначена АФХ разомкнутой цепи условно устойчивой замкнутой САУ, не охватывающая точку  $(-1, j_0)$  только при определенных условиях увеличения или уменьшения коэффициента передачи  $A(\omega_{cp})$ . Запас устойчивости по увеличению модуля коэффициента передачи на частоте  $\omega_{cp}$  определяется величиной  $\Delta A(\omega_{cp})$ , а по уменьшению – величиной  $\Delta A_1(\omega_{cp})$ .

Запас устойчивости по допустимому увеличению запаздывания по фазе  $\Delta\varphi(\omega_\varphi)$  выходного сигнала определяется углом, на который может дополнительно повернуться единичный вектор  $A(\omega_\varphi)=1$  АФХ

$A(\omega_\varphi)e^{j\varphi(\omega)}$  до попадания в точку  $(-1, j_0)$ , что соответствует выходу замкнутой САУ на границу устойчивости. Исходное положение этого единичного вектора определяется точкой пересечения АФХ с единичной окружностью при частоте  $\omega_\varphi$ , показанной пунктирной линией на рис. 1.5.3, а.

Достоинством критерия Найквиста является возможность использования как расчетных, так и экспериментально полученных АФХ разомкнутой цепи САУ при любой степени их дифференциального уравнения [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Пример 1.5.3.** Исследовать устойчивость замкнутой САУ по критерию Найквиста, если ее разомкнутая цепь описывается ОФП

$$W(p) = K/p(1+pT_1)(1+pT_2). \quad (1.5.15)$$

Из (1.5.15) при  $p=j\omega$  получается АФХ разомкнутой цепи САУ в виде

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \cdot \frac{-j(1-j\omega T_1)(1-j\omega T_2)}{-j(1-j\omega T_1)(1-j\omega T_2)} = \\ &= -\frac{K(T_1+T_2)}{(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)} - j \frac{K(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)} = U(\omega) + jV(\omega). \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Для устойчивости замкнутой САУ АФХ ее разомкнутой цепи, построенная по (1.5.16) при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  и дополненная в четвертом квадранте дугой бесконечно большого радиуса при  $\omega=0$ , не должна охватывать точку  $(-1, j_0)$ . В (1.5.15) характеристическое уравнение разомкнутой цепи САУ имеет один нулевой корень  $p_1=0$  и ее АФХ соответствует замкнутой САУ с астатизмом первого порядка  $\nu=1$  (рис. 1.5.3, б). При  $\omega=0$  АФХ начинается при  $U(0) = -K(T_1+T_2)$  и  $V(0) = -\infty$ , а с увеличением частоты до  $\infty$  значения  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  уменьшаются до нуля. САУ будет устойчива, если АФХ пересекает вещественную ось правее точки  $(-1)$  при частоте  $\omega_{cp}$ , где  $V(\omega_{cp})=0$ , а  $[-U(\omega_{cp})] < [-1]$ .

Частоту  $\omega_{cp}$  определим из (1.5.16) по условию  $V(\omega_{cp})=1-\omega_0^2 T_1 T_2=0$ , откуда  $\omega_{cp}=(T_1 T_2)^{-1/2}$ . Подставив значение  $\omega_{cp}$  в выражение  $|U(\omega_{cp})| < 1$  в (1.5.16), получим условие устойчивости САУ в виде

$$U(\omega_0) = \frac{K(T_1+T_2)}{(1+\omega_0^2 T_1^2)(1+\omega_0^2 T_2^2)} = \frac{K(T_1+T_2)}{\left(1+\frac{T_1^2}{T_1 T_2}\right) \left(1+\frac{T_2^2}{T_1 T_2}\right)} = \frac{K}{\left(\frac{T_2+T_1}{T_2}\right) \frac{1}{T_1}} < 1 \quad (1.5.17)$$

или в виде неравенства  $K < (1/T_1 + 1/T_2)$ . Такие же результаты были получены в примере 1.5.1 при исследовании динамической устойчивости данной САУ с использованием критерия Гурвица.

### Контрольные вопросы

1. Как формулируется критерий устойчивости Найквиста?
2. Какой вид имеют АФХ разомкнутых статических и астатических САУ?

4. Как по АФХ определить запасы устойчивости по модулю и по фазе?  
 5. Какой вид имеют АФХ условно устойчивых САУ? Как определить для них максимальное и минимальное значения коэффициента передачи разомкнутой САУ по условиям устойчивости замкнутой САУ?

### 1.5.5. Логарифмический критерий устойчивости

Устойчивость САУ удобно анализировать по логарифмическим амплитудной  $L(\omega)$  и фазовой  $\varphi(\omega)$  частотным характеристикам (ЛАЧХ и ЛФЧХ) их разомкнутой цепи, построенным в общей логарифмической шкале частот (рис. 1.5.4).

По критерию Найквиста для устойчивости замкнутой САУ необходимо, чтобы АФХ ее разомкнутой цепи  $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  не охватывала точку  $(-1, j_0)$  на комплексной плоскости при частоте среза  $\omega_{ср}$ , на которой модуль  $A(\omega_{ср}) < 1$  при  $\varphi(\omega_{ср}) = -180^\circ$  (рис. 1.5.3).

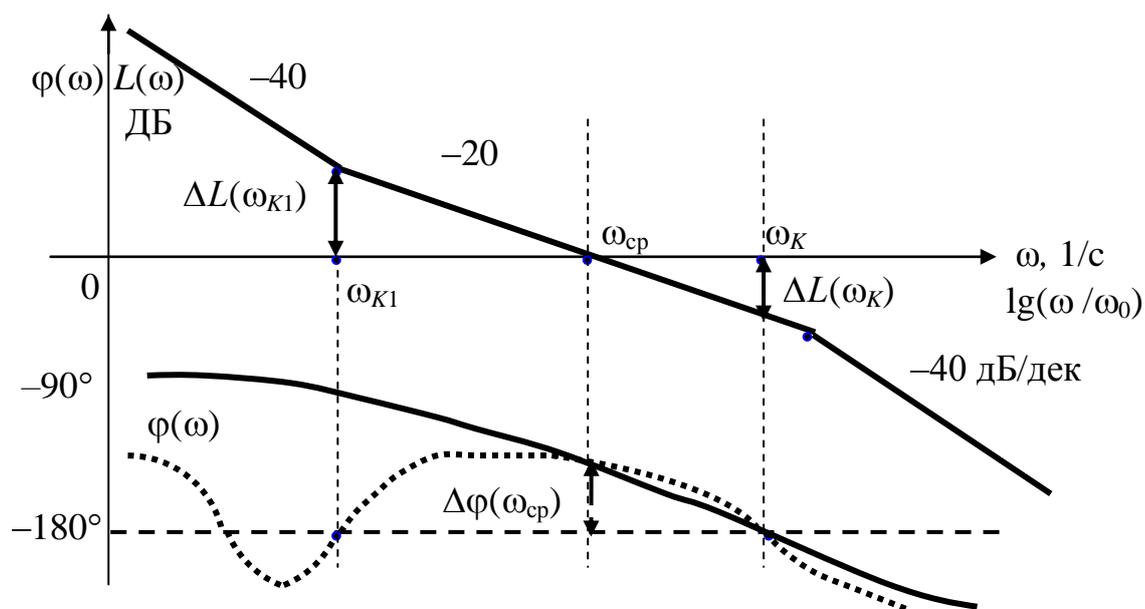


Рис. 1.5.4. ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ

*Логарифмический критерий устойчивости формулируется так: для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы в ее разомкнутой цепи запаздывание по фазе  $\varphi(\omega_{ср})$  не достигало минус  $180^\circ$  на частоте среза ЛАЧХ при  $L(\omega_{ср}) = 20\lg A(\omega_{ср}) = 0$  или чтобы при фазовом запаздывании  $\varphi(\omega_K) = -180^\circ$  величина ЛАЧХ была бы меньше нуля  $L(\omega_K) = 20\lg A(\omega_K) < 0$  [1, 4, 6, 9, 11, 12].*

На рис. 1.5.4 приведены ЛАЧХ и ЛФЧХ (сплошная кривая) разомкнутой цепи абсолютно устойчивой замкнутой САУ и показаны запасы ее устойчивости по фазовому запаздыванию  $\Delta\varphi(\omega_{ср})$  и по увеличению модуля  $\Delta L(\omega_K)$ . Для условно устойчивой САУ с ЛФЧХ (то-

чечная кривая), которая может пересекать линию  $\varphi(\omega) = -180^\circ$  четное число раз в области частот  $\omega < \omega_{\text{ср}}$ , показан запас устойчивости по уменьшению модуля  $\Delta L(\omega_{k1})$  до нуля, т.е. до границы устойчивости при  $A(\omega_k) = 1$  по АФХ разомкнутой САУ (рис. 1.5.3, а).

**Пример 1.5.4.** Определить устойчивость замкнутой САУ с использованием логарифмического критерия устойчивости, если передаточная функция ее разомкнутой цепи имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+pT_1)(1+pT_2)} = \frac{1}{pT_{\text{и}}} \cdot \frac{1}{1+pT_1} \cdot \frac{1}{1+pT_2}. \quad (1.5.18)$$

По (1.5.18) разомкнутая САУ состоит из трех типовых звеньев с единичными коэффициентами передачи – интегрирующего с постоянной времени  $T_{\text{и}} = 1/K$  и двух апериодических (инерционных) первого порядка с постоянными времени  $T_1$  и  $T_2$ . Выражения для ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ запишутся

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \omega T_{\text{и}} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}; \quad (1.5.19)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2. \quad (1.5.20)$$

По (1.5.19) и (1.5.20) строим ЛАЧХ и ЛФЧХ. Из  $L(\omega) = 0$  находим частоту среза  $\omega_{\text{ср}}$  и по ЛФЧХ определяем устойчивость САУ по  $[-\varphi(\omega_{\text{ср}})] < [-180^\circ]$  и запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_{\text{ср}})$  (рис. 1.5.4). Для частоты  $\omega_k$  (рис. 1.5.4) при  $\varphi(\omega_k) = -180^\circ$  по ЛАЧХ для этой частоты определяем запас устойчивости  $\Delta L(\omega_k)$  по уменьшению модуля коэффициента передачи САУ  $A(\omega_k)$  до 1 при  $L(\omega_k) = 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Как формулируется логарифмический критерий устойчивости САУ?
2. Как строятся точные и асимптотические ЛАЧХ разомкнутых САУ?
3. Как строятся ЛФЧХ разомкнутых САУ?
4. Как определяются запасы устойчивости по увеличению модуля  $\Delta L(\omega)$  и по увеличению запаздывания по фазе  $\Delta\varphi(\omega)$  в абсолютно устойчивых САУ?
5. Как определяется запас устойчивости по уменьшению модуля  $\Delta L(\omega)$  в условно устойчивых САУ?

### 1.5.6. Качество САУ

Качество САУ оценивается по ошибке управления  $e(t) = g(t) - y(t)$  по четырем группам критериев качества [1, 4, 6, 9, 11, 12].

1. *Критерии точности* САУ определяются установившейся ошибкой при ступенчатых  $g(t) = A \cdot 1[t]$ , линейных  $g(t) = Vt$ , квадратичных  $g(t) = at^2/2$  или моногармонических  $g(t) = A \sin \omega t$  воздействиях с неизменными значениями величин  $A, V, a$ . К точности САУ также относятся оценки степени инвариантности и ковариантности САУ.

2. *Критерии устойчивости* САУ включают оценки запаса устойчивости, которые ограничивают возможность повышения точно-

сти САУ за счет увеличения коэффициента передачи, что приближает САУ к границе устойчивости.

3. *Критерии качества переходных процессов* включают количественные оценки показателей формы переходного процесса выходной переменной  $y(t)$  при обработке единичных ступенчатых входных задающего  $g(t)$  или возмущающего  $f(t)$  воздействий, характеризующих *величину перерегулирования, время затухания переходного процесса, количество колебаний* и другие показатели.

4. *Комплексные критерии качества САУ* включают оценки *обобщенных свойств САУ*, одновременно учитывающих точность и динамические свойства. К таким критериям относятся частотные, корневые и интегральные оценки качества процесса управления.

Оценки качества САУ можно получить из расчетных и экспериментальных переходных или частотных характеристик с использованием прямых или косвенных методов. Прямые методы оценивают качества САУ непосредственно по графикам переходных процессов. Косвенные методы оценивают качество переходных процессов в САУ по определенным косвенным частотным, корневым и интегральным показателям, связанным с параметрами САУ [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Прямые показатели качества переходного процесса** отработки ступенчатого задающего воздействия характеризуются (рис. 1.5.5):

1) *относительной установившейся ошибкой управления*

$$\Delta y^д = \frac{y_{зад} - y_{вых.у}}{y_{зад}} = \frac{\Delta y}{y_{зад}}; \quad (1.5.21)$$

2) *временем переходного процесса  $t_{пп}$* , характеризующим *быстродействие САУ* и определяемым по вхождению выходной величины в зону пятипроцентных отклонений от установившегося значения;

3) *относительной величиной перерегулирования*, характеризующим запас устойчивости САУ, который считается достаточным, если перерегулирование не превышает 0,1–0,3, редко до 0,5–0,7

$$\sigma^д = \frac{y_{вых.м} - y_{вых.у}}{y_{вых.у}}; \quad (1.5.22)$$

4) *числом колебаний управляемой величины* в переходном процессе, характеризующим запас устойчивости САУ, как и величина перерегулирования, обычно допускается 1–2 колебания, редко – до 4-х.

Допустимые границы переходного процесса могут быть заданы грубо (пунктирные линии) или более точно (штрих-пунктирные линии) на рис. 1.5.5 [1, 4, 6, 9, 11, 12].

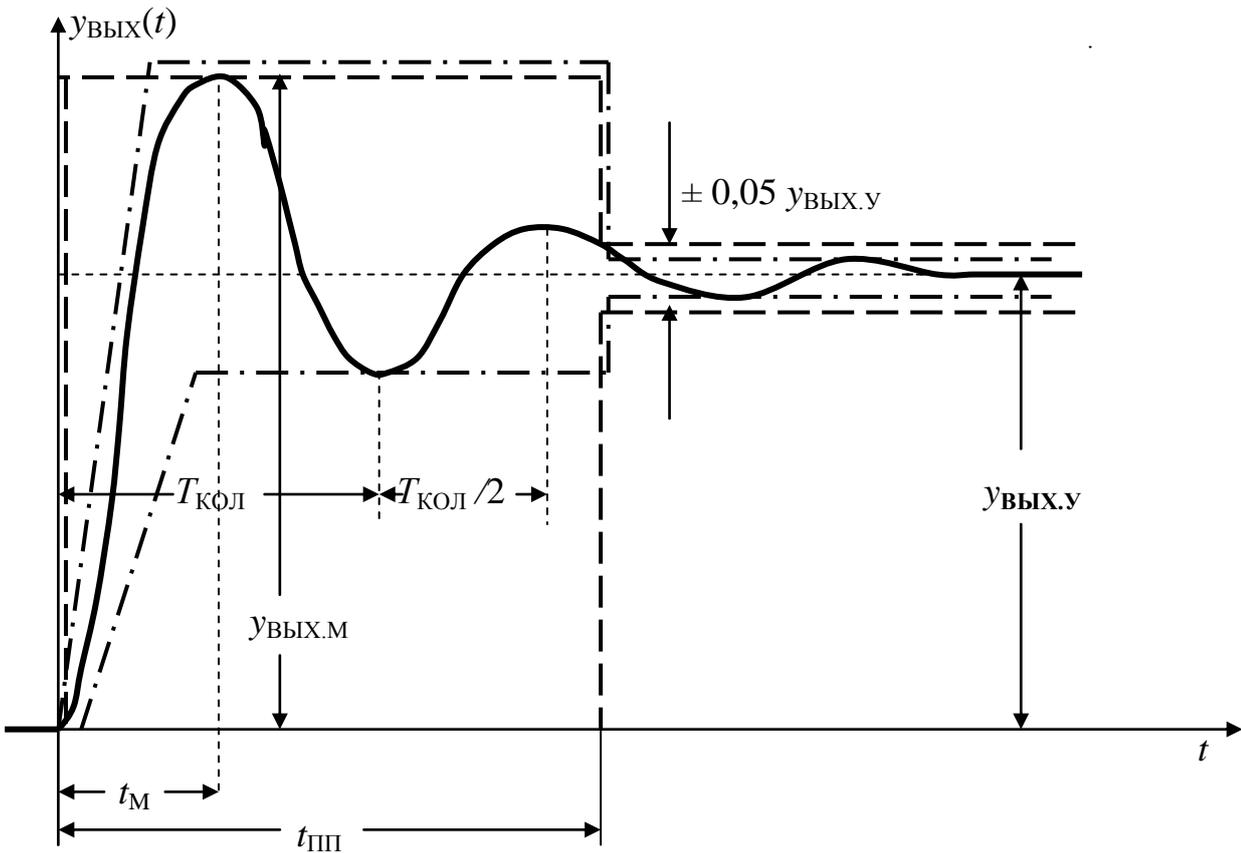


Рис. 1.5.5. Прямые показатели качества переходного процесса

### Контрольные вопросы

1. Какие типовые входные воздействия используются при определении точности управления выходной величиной в САУ?
2. Какие показатели качества переходного процесса характеризуют точность, быстродействие, устойчивость САУ?
3. Как задаются допустимые границы переходного процесса в САУ?

### 1.5.7. Точность САУ

Точность САУ *при типовых воздействиях* (рис. 1.4.1) определяется установившейся ошибкой  $e_{\text{уст}}$ , наиболее просто вычисляемой по теореме о конечном значении функции ошибки [1, 4, 6, 9, 11, 12]

$$\begin{aligned}
 e_{\text{уст}} = e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \Phi_e(p) G(p) + p \sum_{i=1}^k \Phi_{f_i}(p) F_i(p) \right] = \\
 &= \left[ \frac{p G(p)}{1 + W_{\text{OC}}(p) W(p)} \right]_{p=0} + \left[ \frac{p \sum_{i=1}^k H_i(p) F_i(p)}{1 + W_{\text{OC}}(p) W(p)} \right]_{p=0}, \quad (1.5.23)
 \end{aligned}$$

где  $\Phi_e(p)$  – ОФП по ошибке (1.4.2);  $\Phi_{fi}(p)$  – ОФП по  $i$ -му возмущающему воздействию (1.4.3);  $W(p)$  – ОФП прямого канала САУ;  $H_i(p)$  – ОФП канала влияния на выходную величину  $i$ -го возмущающего воздействия;  $W_{oc}(p)$  – ОФП цепи обратной связи;  $G(p)$  и  $F_i(p)$  – изображения задающего и возмущающих типовых воздействий:  $g(t)=A \cdot 1[t]$ ,  $G(p)=A/p$ ;  $g(t)=Vt$ ,  $G(p)=V/p^2$ ;  $g(t)=at^2/2$ ,  $G(p)=a/p^3$ .

При синусоидальном воздействии  $g(t)=g_m \sin \omega_{\Delta} t$  установившаяся ошибка в САУ также изменяется по синусоидальному закону и амплитуда ошибки определяется из ОФП по ошибке в виде [1, 4, 6, 12]

$$\Delta x_m = \frac{g_m}{[1+W(j\omega_{\Delta})]} \approx \frac{g_m}{[W(j\omega_{\Delta})]} = \frac{g_m}{A(\omega_{\Delta})}, \quad (1.5.24)$$

где  $A(\omega_{\Delta})$  – коэффициент передачи разомкнутой САУ при частоте  $\omega_{\Delta}$ . Поскольку  $\Delta x_m \ll g_m$  и  $W(j\omega_{\Delta}) \gg 1$ , то замена в (1.5.24) выражения  $[1+W(j\omega_{\Delta})]$  на  $[W(j\omega_{\Delta})]$  не вносит заметных погрешностей.

Из (1.5.24) можно определить необходимую величину  $A(\omega_{\Delta})$  разомкнутой САУ для ограничения ошибки на допустимом уровне  $\Delta x_{m, \text{доп}}$  при максимально допустимых значениях скорости  $\Omega_{m, \text{доп}}$  и ускорения  $\varepsilon_{m, \text{доп}}$  изменения амплитуды  $g_m$  гармонического воздействия

$$\Omega(t) = \frac{d(g_m \sin \omega_{\Delta} t)}{dt} = g_m \omega_{\Delta} \cos \omega_{\Delta} t = \Omega_m \cos \omega_{\Delta} t, \quad (1.5.25)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{d\Omega(t)}{dt} = -g_m \omega_{\Delta}^2 \sin \omega_{\Delta} t = -\varepsilon_m \sin \omega_{\Delta} t. \quad (1.5.26)$$

Из (1.5.25) и (1.5.26)  $g_m = \Omega_m / \omega_{\Delta} = \varepsilon_m / \omega_{\Delta}^2$ ,  $\omega_{\Delta} = \varepsilon_m / \Omega_m$  и  $g_m = \Omega_m^2 / \varepsilon_m$ .

При максимально допустимых значениях скорости  $\Omega_{m, \text{доп}}$  и ускорения  $\varepsilon_{m, \text{доп}}$  синусоидального воздействия с частотой  $\omega_{\Delta M} = \varepsilon_{m, \text{доп}} / \Omega_{m, \text{доп}}$  допустимая ошибка  $\Delta x_{m, \text{доп}}$  не будет превышена, если в (1.5.24) коэффициент передачи  $A(\omega_{\Delta M})$  разомкнутой САУ будет не менее [1, 9, 12]

$$A(\omega_{\Delta M}) \geq \frac{g_{m, \text{доп}}}{\Delta x_{m, \text{доп}}} = \frac{\Omega_{m, \text{доп}}^2}{\varepsilon_{m, \text{доп}} \cdot \Delta x_{m, \text{доп}}}. \quad (1.5.27)$$

При этом коэффициент передачи  $L(\omega_{\Delta M})$  (точка  $A_K$ ) на ЛАЧХ разомкнутой САУ (рис. 1.5.6) согласно (1.5.27) должен быть не меньше

$$L(\omega_{\Delta M}) = 20 \lg A(\omega_{\Delta M}) \geq 20 \lg \left( \frac{\Omega_{m, \text{доп}}^2}{\varepsilon_{m, \text{доп}} \cdot \Delta x_{m, \text{доп}}} \right). \quad (1.5.28)$$

В реальных режимах работы САУ амплитуды скорости  $\Omega_M$  и ускорения  $\varepsilon_M$  изменяются и для ограничения ошибки на допустимом уровне коэффициент передачи  $L(\omega_\Omega)$  при любой частоте  $\omega_\Omega = \varepsilon_M / \Omega_M$  должен быть не меньше требуемого по (1.5.28). Для этого на графике ЛАЧХ по (1.5.28) строится *запретная зона* (рис. 1.5.6), которую должна обходить выше и правее ЛАЧХ разомкнутой САУ [1, 6, 12].

Если при  $\Omega_M = \Omega_{M, \text{доп}} = \text{const}$  ускорение уменьшается  $\varepsilon_M \leq \varepsilon_{M, \text{доп}}$ , то частота  $\omega_\Omega = \varepsilon_M / \Omega_{M, \text{доп}} \leq \omega_{\text{ЭМ}}$  также уменьшается, а необходимое значение коэффициента передачи  $L(\omega_\Omega)$  по (1.5.28) увеличивается по прямой от точки  $A_K$  на 20 децибел на декаду (рис. 1.5.6). Продолжение этой прямой (пунктирная линия) пересекает ось частот при  $L(\omega_1) = 0$  и  $A(\omega_1) = 1$ . При этом из (1.5.28) величина ускорения  $\varepsilon_1 = \Omega_{M, \text{доп}}^2 / \Delta x_{M, \text{доп}}$  и величина частоты  $\omega_1 = \varepsilon_1 / \Omega_{M, \text{доп}} = \Omega_{M, \text{доп}} / \Delta x_{M, \text{доп}} = K_\Omega$ , где  $K_\Omega$  – требуемая добротность САУ по скорости.

Если при максимально допустимом ускорении  $\varepsilon_M = \varepsilon_{M, \text{доп}} = \text{const}$  будет уменьшаться скорость  $\Omega_M \leq \Omega_{M, \text{доп}}$ , то частота  $\omega_\Omega = \varepsilon_{M, \text{доп}} / \Omega_M$  будет увеличиваться, а необходимое значение коэффициента передачи по (1.5.28) будет уменьшаться по прямой от точки  $A_K$  на 40 децибел при увеличении частоты на каждую декаду (рис. 1.5.6). При этом ЛАЧХ пересекает ось частот при значениях  $L(\omega_0) = 0$  и  $A(\omega_0) = 1$ , что позволяет из (1.5.28) получить равенство  $\Omega_{M0}^2 = \varepsilon_{M, \text{доп}} \cdot \Delta x_{M, \text{доп}}$ . С использованием этого равенства определяется значение частоты  $\omega_0$  (рис. 1.5.6)

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon_{M, \text{доп}}}{\Omega_{M0}} = \frac{\varepsilon_{M, \text{доп}}}{\sqrt{\varepsilon_{M, \text{доп}} \cdot \Delta x_{M, \text{доп}}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{M, \text{доп}}}{\Delta x_{M, \text{доп}}}} = \sqrt{K_\varepsilon},$$

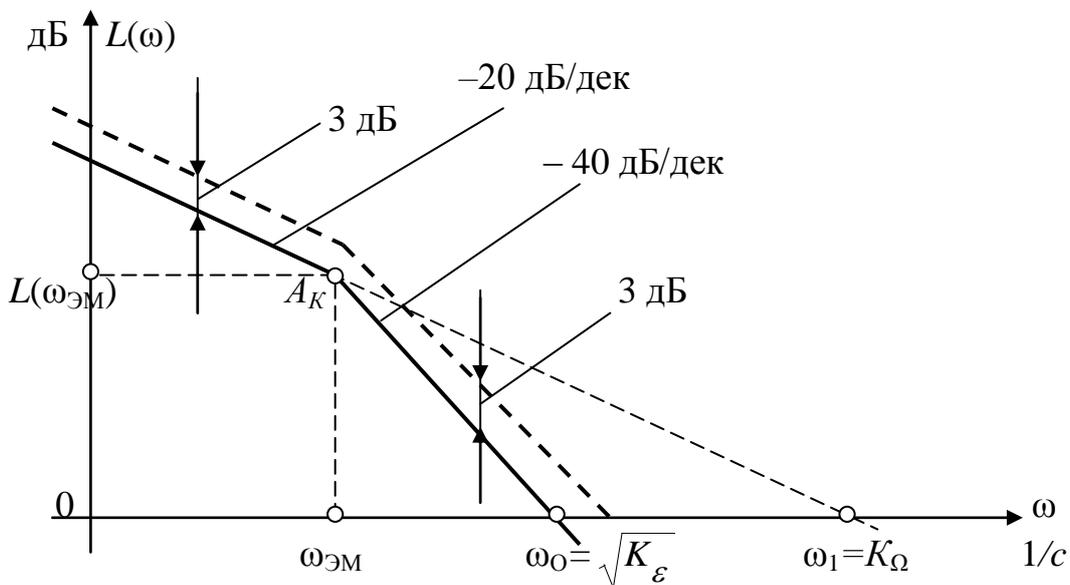


Рис. 1.5.6. Построение запретной зоны для ЛАЧХ разомкнутой САУ

Поскольку точная ЛАЧХ проходит на 3 дБ ниже асимптотической ЛАЧХ в точке  $A_K$  при частоте  $\omega_{ЭМ}$  (рис. 1.5.6), то запретную зону для ЛАЧХ разомкнутой САУ по условиям ограничения ошибки необходимо поднять на 3 дБ (пунктирная линия на рис. 1.5.6).

**При произвольно заданном воздействии во времени  $g(t)$**  в замкнутой САУ с передаточной функцией по ошибке

$$\Phi_e(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{\mu_n p^n + \mu_{n-1} p^{n-1} + \dots + \mu_1 p + \mu_0}, \quad (1.5.29)$$

величина установившейся ошибки может быть вычислена *методом коэффициентов ошибки* из разложения ОФП по ошибке (1.5.29) в степенной ряд Тейлора в виде [1, 4, 6, 9, 11, 12]

$$\begin{aligned} \Phi_e(p) = & [\Phi_e(p)]_{p=0} + \left[ \frac{d\Phi_e(p)}{1!dp} \right]_{p=0} p + \left[ \frac{d^2\Phi_e(p)}{2!dp^2} \right]_{p=0} p^2 + \dots \\ & \dots + \left[ \frac{d^i\Phi_e(p)}{i!dp^i} \right]_{p=0} p^i = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots + C_i p^i; \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

$$E(p) = C_0 G(p) + C_1 p G(p) + C_2 p^2 G(p) + \dots + C_i p^i G(p); \quad (1.5.31)$$

$$e(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + C_i \frac{d^i g(t)}{dt^i}, \quad (1.5.32)$$

где  $C_0, C_1, \dots, C_i$  – коэффициенты ошибки;  $C_0 g(t) = e_0$  – ошибка по положению (по постоянной составляющей);  $C_1 [dg(t)/dt] = e_1$  – ошибка по скорости (по первой производной);  $C_2 [d^2 g(t)/dt^2] = e_2$  – ошибка по ускорению (по второй производной);  $C_i [d^i g(t)/dt^i] = e_i$  – ошибки по  $i$ -м производным от входного воздействия  $g(t)$ .

Из (1.5.29) и (1.5.30) получается уравнение связи параметров САУ и коэффициентов ошибки

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots = (C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots)(\mu_0 + \mu_1 p + \mu_2 p^2 + \dots). \quad (1.5.33)$$

На основании (1.5.33) коэффициенты ошибки можно определить из ОФП по ошибке (1.5.29) простым непрерывным делением обращенного числителя на обращенный знаменатель [1, 4, 6, 9, 11, 12].

**Пример 1.5.5.** Определить установившуюся ошибку в замкнутой САУ (рис. 1.4.1) при  $g(t) = A \cdot 1[t]$  и  $f(t) = F \cdot 1[t]$ , если ОФП канала (цепи) обратной связи  $W_{oc}(p) = 1$ , ОФП канала прямой связи  $W(p) = K(1 + pT_1)/p(1 + pT_2)$ , ОФП выделен-

ного канала влияния возмущающего воздействия  $f(T)$  на выходную величину  $H(p)=1/pT_M$ .

Подставив исходные данные в формулу (1.5.23), получим

$$e_{\text{уст}} = \left[ \frac{p(A/p)}{1+1 \frac{K(1+pT_1)}{p(1+pT_2)}} \right]_{p=0} + \left[ \frac{p(1/pT_M)(F/p)}{1+1 \frac{K(1+pT_1)}{p(1+pT)}} \right]_{p=0} = 0 + \frac{F}{KT_M}. \quad (1.5.34)$$

Ошибка по задающему воздействию отсутствует, поскольку САУ имеет астатизм первого порядка. Ошибка по возмущающему воздействию имеет постоянное значение, прямо пропорциональное возмущению  $F$  и обратно пропорциональное коэффициенту передачи  $K$  и постоянной времени  $T_M$ .

**Пример 1.5.6.** Для следящей САУ построить запретную зону для ЛАЧХ при допустимой ошибке  $\Delta x_{\text{м.доп}}=5$  угловых минут, максимальной скорости  $\Omega_{\text{м.доп}}=2,5$  рад/с и максимальном ускорении  $\varepsilon_{\text{м.доп}}=5$  рад/с<sup>2</sup>.

При работе САУ с максимальными значениями скорости и ускорения эквивалентная частота синусоидального задающего воздействия имеет значение  $\omega_{\text{ЭМ}}=\varepsilon_{\text{м.доп}}/\Omega_{\text{м.доп}}=5/2,5=2$  с<sup>-1</sup>. Допустимая угловая ошибка (в радианах) равна  $\Delta x_{\text{м.доп}}=5$  ( $2\pi/360 \cdot 60$ ) =  $1,45 \cdot 10^{-3}$  рад.

ЛАЧХ САУ в контрольной точке  $A_K$  (рис. 1.5.6) при частоте  $\omega_{\text{ЭМ}}=2$  с<sup>-1</sup> по (1.5.28) должна иметь значение не менее

$$L(\omega_{\text{ЭМ}}) = 20 \lg \frac{\Omega_{\text{м.доп}}^2}{\varepsilon_{\text{м.доп}} \cdot \Delta x_{\text{м.доп}}} = 20 \lg \frac{2,5^2}{5 \cdot 1,45 \cdot 10^{-3}} = 58,7 \text{ дБ}. \quad (1.5.35)$$

При этом добротность САУ по скорости должна быть не менее

$$K_{\Omega} = \Omega_{\text{м.доп}} / \Delta x_{\text{м.доп}} = 2,5 / 1,45 \cdot 10^{-3} = 1724 \text{ с}^{-1},$$

а добротность САУ по ускорению – не менее

$$K_{\varepsilon} = \varepsilon_{\text{м.доп}} / \Delta x_{\text{м.доп}} = 5 / 1,45 \cdot 10^{-3} = 3448 \text{ с}^{-2}.$$

Запретную зону ЛАЧХ (рис. 1.5.6) можно построить проведением от контрольной точки  $A_K$  прямой линии с наклоном  $-20$  дБ/дек влево (в сторону уменьшения частот от  $\omega_{\text{ЭМ}}=2$  с<sup>-1</sup>) и второй прямой линии с наклоном  $-40$  дБ/дек вправо (в сторону увеличения частот от  $\omega_{\text{ЭМ}}=2$  с<sup>-1</sup>).

Запретную зону ЛАЧХ (рис. 1.5.6) можно также построить на частотах  $\omega_{\Omega} \leq \omega_{\text{ЭМ}}$  продолжением прямой, соединяющей контрольную точку  $A_K$  с точкой на оси частот при частоте  $\omega_1=K_{\Omega}=1724$  с<sup>-1</sup>, а на частотах  $\omega_{\varepsilon} \geq \omega_{\text{ЭМ}}$  – соединением контрольной точки  $A_K$  с точкой на оси частот при частоте  $\omega_0 = \sqrt{K_{\varepsilon}} = \sqrt{3448} = 58,7$  с<sup>-1</sup>.

Запретную зону для ЛАЧХ следует поднять на 3 дБ (пунктирные линии на рис. 1.5.6) и в контрольной точке  $A_K$  получим  $L(\omega_{\text{ЭМ}})=58,7+3=61,7$  дБ.

**Пример 1.5.7.** Определить установившиеся значения ошибок управления по задающим воздействиям  $g_1(t)=20+2t$  и  $g_2(t)$  и  $g_2(t)=15+10t-2t^2$  в замкнутой САУ с единичной обратной связью, если ОФП разомкнутой САУ имеет вид  $W(p)=K/p(1+pT_1)(1+pT_2)$ , где  $K=100 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1=0,1 \text{ с}$ ,  $T_2=0,02 \text{ с}$ .

Определим передаточную функцию замкнутой САУ по ошибке

$$\Phi_e(p) = \frac{1}{1+K/p(1+pT_1)(1+pT_2)} = \frac{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p}{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p+K}. \quad (1.5.36)$$

При использовании метода коэффициентов ошибки величина установившейся ошибки определяется по выражению (1.5.29). Для двух законов изменения задающего воздействия их производные выше второго порядка равны нулю. Поэтому для вычисления ошибки по (1.5.29) достаточно найти три первых коэффициента ошибки. Определим коэффициенты ошибки делением обращенного числителя на обращенный знаменатель из ОФП по ошибке в (1.5.36)

$$\frac{p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3}{p+K^{-1}p^2+(T_1+T_2)K^{-1}p^3+T_1T_2K^{-1}p^4} \dots \left| \frac{K+p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3}{0p^0+K^{-1}p^1+[(T_1+T_2)K-1]K^{-2}p^2+\dots} \right.$$

Найденные таким способом коэффициенты ошибки имеют следующие значения:  $C_0=0$ ,  $C_1=1/K=0,01 \text{ с}$ ,  $C_2=[(T_1+T_2)K-1]K^{-2}=0,0011 \text{ с}^2$ .

По (1.5.32) получаем следующие значения установившихся ошибок при первом и втором задающих воздействиях:

$$e_{1\text{уст}} = C_0(20+2t) + C_1 \frac{d(20+2t)}{dt} = 0 \cdot (20+2t) + 0,01 \cdot 2 = 0,02; \quad (1.5.37)$$

$$\begin{aligned} e_{2\text{уст}} &= C_0(15+10t-2t^2) + C_1(10-4t) - C_2 \cdot 4 = \\ &= 0(15+10t-2t^2) + 0,01(10-4t) - 0,0011 \cdot 4 = 0,0956 - 0,04t. \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

При первом задающем воздействии в установившейся ошибке отсутствует составляющая ошибки по положению (от постоянной составляющей задающего воздействия), а составляющая ошибки по скорости изменения задающего воздействия (по его первой производной) имеет неизменное значение 0,02 рад потому, что САУ обладает астатизмом первого порядка (имеет один интегратор в разомкнутой цепи САУ).

При втором задающем воздействии установившаяся ошибка состоит из суммы постоянной составляющей 0,0956 рад от скорости изменения задающего воздействия (по его первой производной) и неограниченно возрастающей составляющей ошибки 0,04·t рад·с от ускорения изменения задающего воздействия (по его второй производной). Для устранения ошибки по положению, скорости и ускорению изменяющихся задающих воздействий САУ должна обладать астатизмом третьего порядка, т.е. иметь в разомкнутой цепи САУ три астатических звена (три интегратора).

### Контрольные вопросы

1. Какую структурную схему имеет САУ с обратной связью и выделенным каналом влияния возмущения на выходную регулируемую величину?
2. Как записать для замкнутой САУ формулу определения установившейся ошибки по теореме о конечном значении функции ошибки?
3. Какие ОФП имеют разомкнутые статические и астатические САУ?
4. По какому принципу определяется коэффициент передачи в разомкнутой САУ, необходимый для ограничения ошибки на заданном уровне?
5. Как из ОФП замкнутой САУ по ошибке определить коэффициенты ошибки и записать формулу зависимости ошибки от времени?

### 1.5.8. Инвариантность САУ

Под *инвариантностью САУ* понимается независимость некоторых её выходных переменных от входных воздействий. Теорию инвариантности развивали Г.В. Щипанов, Н.Н. Лузин, Б.Н. Петров, В.С. Кулебакин и другие [1, 6, 12].

В САУ управляемая переменная выхода  $y(t)$  в общем случае зависит как от задающего  $g(t)$ , так и от возмущающего  $f(t)$  воздействий. В инвариантных САУ управляемая переменная выхода  $y(t)$  должна быть инвариантной (независимой) по отношению к возмущающему воздействию  $f(t)$  и ковариантной (согласованной, совпадающей) с задающим воздействием  $y(t) \approx g(t)$  [1, 6, 12].

САУ является *инвариантной по отношению к возмущающему воздействию  $f(t)$* , если после завершения переходного процесса выходная величина  $y(t)$  и ошибка управления  $e(t)=g(t)-y(t)$  не зависят от возмущающего воздействия  $f(t)$ .

САУ является *инвариантной по отношению к задающему воздействию  $g(t)$* , если после завершения переходного процесса ошибка управления  $e(t)=g(t)-y(t)$  не зависит от задающего воздействия  $g(t)$ . При этом выходная величина  $y(t)$  должна быть *ковариантна* с задающим воздействием  $g(t)$ , что означает их близость (совпадение)  $y(t) \approx g(t)$ , а значит отсутствие или малое значение ошибки управления.

В инвариантных следящих САУ обычно реализуются условия ковариантности, а в системах подавления возмущений и стабилизации выходной величины  $y(t)$  – *условия инвариантности*.

Изображение по Лапласу переменной выхода линейной САУ, при наличии задающего и возмущающего воздействий и нулевых начальных условиях, определяется из операторного уравнения [12]

$$Y(p) = W_g(p)G(p) + W_f(p)F(p). \quad (1.5.39)$$

Основным в теории инвариантности является случай, когда о входных воздействиях нет никакой информации (в том числе статистического характера). Поэтому для инвариантности САУ необходимо в (1.5.39) обеспечить равенство нулю  $W_f(p)=0$ , а для обеспечения ковариантности – равенство единице  $W_g(p)=1$ .

Рассмотрим условия инвариантности САУ для ошибки управления  $e(t)$  при одном входном воздействии  $g(t)$  или  $f(t)$  [6]. Предположим, что операторная функция передачи по ошибке  $\Phi_e(p)$  (1.4.2) описывается в общем случае уравнением

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)E(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)G(p), \quad (1.5.40)$$

а изображение по Лапласу ошибки управления при нулевых начальных условиях представляется в виде

$$E(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \cdot \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (1.5.41)$$

где  $\Phi_e(p) = E(p)/G(p) = B(p)/A(p)$  – передаточная функция САУ по ошибке;  $G(p) = R(p)/Q(p)$  – изображение по Лапласу входного воздействия, которое может быть любой функцией времени.

Решение неоднородного уравнения (1.5.40) запишется в виде

$$e(t) = e_{\text{своб}}(t) + e_{\text{вын}}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} + \sum_{i=1}^l C_i e^{p_i t}, \quad (1.5.42)$$

где  $p_k$  – корни уравнения  $A(p)=0$ ;  $p_i$  – корни уравнения  $Q(p)=0$ .

Установившееся значение вынужденной составляющей ошибки  $e_{\text{вын}}(t)$  по (1.5.42) будет тождественно равно нулю в таких случаях [6].

1) Если  $R(p)=0$ , то  $e_{\text{вын}} \equiv 0$ . Тривиально. Отсутствует воздействие.

2) Если  $B(p)=0$ , то  $e_{\text{вын}} \equiv 0$ , что соответствует *абсолютной инвариантности* САУ по отношению к входному воздействию, которое может быть любой функцией времени. Под абсолютной инвариантностью понимается полная независимость вынужденных движений от входных воздействий. При этом условии в САУ не будет ни переходной, ни установившейся составляющих ошибки при любых ограниченных входных воздействиях. Но могут быть свободные движения при ненулевых начальных условиях. В следящих САУ условие

$B(p)=0$  означает равенство нулю передаточной функции по ошибке, следовательно  $\Phi(p)=1$  и частотная характеристика  $\Phi(j\omega)=1$  при  $0 \leq \omega \leq \infty$  должна иметь бесконечную полосу пропускания частот, что реализовать принципиально невозможно.

3) Равенство нулю  $e_{\text{вын}}(t)=0$  будет наблюдаться по (1.5.41) для таких входных функций  $R(p)/Q(p)$ , изображения которых имеют все полюсы [корни уравнения  $Q(p)$ ] совпадающими с нулями передаточной функции  $B(p)/A(p)$  [корнями уравнения  $B(p)$ ]. Данный случай соответствует так называемой *частичной* или *селективной* (выборочной) инвариантности САУ к входным воздействиям определенного вида (в виде степенных функций, в виде суммы экспонент с заданными постоянными времени и т. п.).

Условия абсолютной инвариантности при равенстве нулю установившейся ошибки управления  $e_{\text{вын}}(t)=0$  и равенстве нулю передаточной функции  $W_f(p)=0$  в (1.5.39) удается реализовать довольно редко. Обычно добиваются условий инвариантности до  $\varepsilon$  – ограниченной величины модуля  $|W_f(p)| < \varepsilon$  или ограниченной величины вынужденной составляющей ошибки управления  $e_{\text{вын}}(t) < \varepsilon$ .

Всё вышеизложенное об инвариантности САУ справедливо для асимптотически устойчивых систем, в которых свободные и вынужденные переходные составляющие со временем затухают и после завершения переходного процесса остается только установившаяся вынужденная составляющая процесса.

*Селективная инвариантность* в САУ наиболее часто обеспечивается относительно постоянного воздействия, вынужденная составляющая ошибки управления от которого определяется по теореме о конечном значении оригинала по формуле (1.5.23). При наличии ошибки достигается селективная инвариантность до  $\varepsilon$ , при отсутствии ошибки достигается селективная абсолютная инвариантность и САУ называют *астатической* по воздействию и его производным.

Для построения инвариантных САУ используются методы комбинированного управления, последовательной или параллельной компенсации воздействий, обратной связи [1, 6, 12].

**Комбинированное управление** заключается в одновременном использовании *замкнутого управления* по отклонению выходной величины  $y(t)$  от входного воздействия и *разомкнутого управления* по этому входному воздействию (рис. 1.5.7) [1, 6, 12].

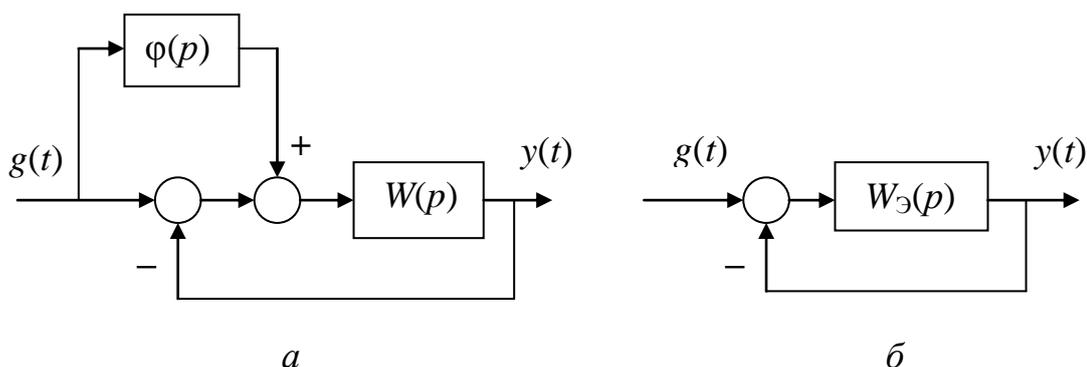


Рис. 1.5.7. Комбинированная САУ

Эквивалентная передаточная функция САУ по (рис.1.5.7) будет

$$\Phi_3(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{[1 + \varphi(p)]W(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p)}. \quad (1.5.43)$$

Передаточная функция по ошибке получится в виде

$$\Phi_e(p) = 1 - \Phi_3(p) = \frac{1 - \varphi(p)W(p)}{1 + W(p)}. \quad (1.5.44)$$

Условие абсолютной инвариантности по ошибке  $e_{\text{вын}}(t) = 0$  от воздействия  $g(t)$  выполняется для комбинированной САУ (рис. 1.5.7) при  $\Phi_e(p) = 0$ , что по (1.5.44) требует обеспечить равенство  $\varphi(p) = 1/W(p)$ . Разложив правую часть равенства в ряд по возрастающим степеням  $p$ , получим изображение по Лапласу необходимой функции [6]

$$\varphi(p) = a_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots \quad (1.5.45)$$

Для обеспечения абсолютной инвариантности САУ в канал разомкнутого управления необходимо вводить входное воздействие, его первую и высшие производные, что практически не реализуемо из-за возрастания помех при многократном дифференцировании входного сигнала. Поэтому все работоспособные САУ обладают инвариантностью до  $\varepsilon$  или селективной инвариантностью [6].

**Последовательная компенсация** заключается в установке между источником воздействия и ОУ компенсатора с необходимой передаточной функцией  $W_K(p)$  по отношению к  $W_{\text{ОУ}}(p)$  [12]. Для абсолютной инвариантности к возмущению  $f(t)$  нужно получить  $W_K(p)W_{\text{ОУ}}(p) = 0$ ,

что практически недостижимо. Изменениями конструкции ОУ можно частично ослабить возмущающие воздействия. Так, для уменьшения сил трения можно улучшить смазку или применить подшипники на воздушной или магнитной подвеске, для уменьшения сил веса можно применить принцип рычага и так далее. Для обеспечения ковариантности  $y(t) \approx g(t)$  нужно иметь  $W_K(p)W_{Oy}(p)=1$ , что реализуется только приближенно. Поскольку для  $W_K(p)W_{Oy}(p)=1$  САУ должна быть устойчивой, иметь бесконечную полосу равномерного пропускания частот и регулятор с передаточной функцией, где степень числителя выше степени знаменателя для компенсации инерционности ОУ [12].

**Параллельная компенсация** является наиболее эффективным средством обеспечения инвариантности САУ к основному возмущению  $f(t)$  на ОУ, если это измеряемое возмущение [12]. Параллельная компенсация основана на принципе дуальности (двухканальности), предложенном Б.Н. Петровым. По этому принципу возмущение  $f(t)$  воздействует на выходную величину  $y(t)$  по естественному каналу через ОУ и по искусственному компенсирующему каналу через регулятор САУ (рис. 1.5.8). При идентичности передаточных функций обоих каналов осуществляется полная компенсация возмущения, что соответствует абсолютной инвариантности САУ к возмущению  $f(t)$ .

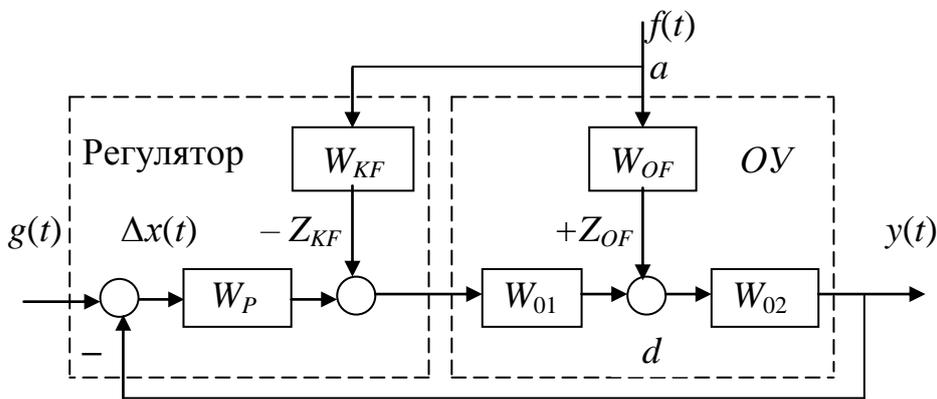


Рис. 1.5.8. Инвариантная САУ с параллельной компенсацией

САУ (рис. 1.5.8) можно описать операторным уравнением:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \frac{W_{O2}(p)[W_{OF}(p) - W_{KF}(p)W_{O1}(p)]}{1 + W_p(p)W_{O1}(p)W_{O2}(p)} f(t) + \\
 & \frac{W_p(p)W_{O1}(p)W_{O2}(p)}{1 + W_p(p)W_{O1}(p)W_{O2}(p)} g(t) = W_F(p)f(t) + W_G(p)g(t),
 \end{aligned}
 \tag{1.5.46}$$

где  $W_{OF}(p)$ ,  $W_{01}(p)$ ,  $W_{02}(p)$  – операторы элементов объекта управления (ОУ);  $W_{KF}(p)$ ,  $W_P(p)$  – операторы элементов регулятора;  $W_F(p)$ ,  $W_G(p)$  – операторы, преобразующие возмущение  $f(t)$  и задающее воздействие  $g(t)$  в выходную управляемую величину  $y(t)$ .

Для инвариантности САУ к возмущению  $f(t)$  нужно в (1.5.46) обеспечить равенство нулю оператора  $W_F(p)$ , т. е. обеспечить равенство нулю числителя передаточной функции по возмущению

$$W_{02}(p)[W_{OF}(p) - W_{KF}(p)W_{01}(p)] \equiv 0. \quad (1.5.47)$$

Тождество (1.5.47) представляет собой условие *абсолютной инвариантности* САУ и является *первой формой инвариантности* по своей значимости, поскольку при этом не накладывается никаких ограничений на возмущающее воздействие  $f(t)$  [1, 6, 12].

В выражении (1.5.47) оператор  $W_{02}(p) \neq 0$  определяется процессами в ОУ и не может быть равен нулю. Следовательно, для реализации абсолютной инвариантности САУ в первой форме необходимо обеспечить равенство нулю передаточной функции между точками  $a$  и  $d$  на структурной схеме (рис. 1.5.8)  $W_{ad}(p) = W_{OF}(p) - W_{KF}(p)W_{01}(p) = 0$ . Для этого по принципу дуальности нужно обеспечить симметрию каналов за счет выбора ОФП устройства  $W_{KF}(p)$  регулятора в компенсирующем канале по условию  $W_{KF}(p) = W_{OF}(p)/W_{01}(p)$ .

При компенсации возмущения  $f(t)$  выходная величина  $y(t)$  в САУ не зависит от  $f(t)$  и получить информацию о возмущающем воздействии  $f(t)$  путем измерения выходной величины  $y(t)$  нельзя. Поэтому для реализации инвариантности в первой форме в САУ необходимо иметь возможность измерения возмущения  $f(t)$ .

**Пример 1.5.8.** Обеспечить частичную (селективную) инвариантность следящей системы по задающему воздействию и скорости его изменения (т. е. отсутствие ошибок по положению и по скорости) с использованием метода комбинированного управления, если САУ имеет следующую структуру [1].

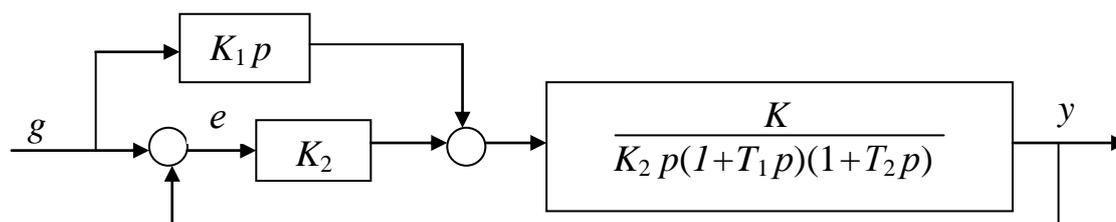


Рис. 1.5.9. Следящая система

Эквивалентная передаточная функция замкнутой САУ по ошибке будет:

$$E(p) = G(p) - Y(p); Y(p) = \frac{K[K_1 p G(p) + K_2 E(p)]}{K_2 p(1+T_1 p)(1+T_2 p)} = \frac{K[T_0 p G(p) + E(p)]}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}, T_0 = \frac{K_1}{K_2};$$

$$E(p) = G(p) - \frac{K[T_0 p G(p) + E(p)]}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}; \hat{O}_{\hat{a}}(\delta) = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 - T_0 K)p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + K}.$$

Ошибки по положению нет, поскольку САУ имеет один интегратор в разомкнутой цепи и поэтому обладает астатизмом первого порядка. Ошибки по скорости не будет при  $T_0 K = 1$ , т. е. при выборе отношения коэффициентов  $K_1/K_2 = T_0 = 1/K$ , что придает САУ астатизм второго порядка.

### 1.5.9. Качество переходного процесса

Качество переходного процесса в САУ оценивают по *прямым показателям* переходного процесса  $y(t)$  (рис. 1.5.5) или по *косвенным показателям* частотных, корневых или интегральных оценок переходного процесса при обработке единичного ступенчатого задающего  $g(t)$  или возмущающего  $f(t)$  воздействия. Соответственно *прямые методы расчетов* основаны на решении (интегрировании) дифференциального уравнения переходного процесса и его построении, а *косвенные методы расчетов* основаны на определении частотных, корневых или интегральных приближенных оценок качества переходного процесса без расчета кривой переходного процесса [1, 4, 6, 9, 12].

В САУ переходные процессы изменения выходной величины  $y(t)$  описываются дифференциальными уравнениями вида

$$D(p)y(t) = B(p)g(t) + C(p)f(t), \quad (1.5.48)$$

где  $g(t)$  и  $f(t)$  – задающее и возмущающее воздействия;  $D(p)$  – характеристический полином, определяющий собственные свойства САУ;  $B(p)$  – полином, определяющий влияние  $g(t)$  на  $y(t)$ ;  $C(p)$  – полином, определяющий влияние  $f(t)$  на  $y(t)$ :

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0; \quad (1.5.49)$$

$$B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} + b_m, \quad m < n; \quad (1.5.50)$$

$$C(p) = c_0 p^q + c_1 p^{q-1} + c_2 p^{q-2} + \dots + c_{q-1} p + c_q, \quad q < n. \quad (1.5.51)$$

В линейных САУ переходные процессы от разных воздействий рассчитывают отдельно и суммируют по принципу суперпозиции.

### Контрольные вопросы

1. Какие оценки называются прямыми показателями качества САУ?
2. В чем заключаются прямые и косвенные методы расчетов показателей качества переходных процессов?
3. Как записать в общем виде дифференциальное уравнение замкнутой САУ с учетом влияния задающего и возмущающего воздействий?
4. Какие свойства САУ определяются характеристическим уравнением?
5. Как определяют качество переходных процессов от разных воздействий и от совместных воздействий?

#### 1.5.9.1. Классический метод расчета переходного процесса

При единичном ступенчатом задающем воздействии  $g(t)=1(t)$  дифференциальное уравнение переходного процесса (1.5.48) будет

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \cdot 1(t). \end{aligned} \quad (1.5.52)$$

Переходный процесс описывается полным решением уравнения (1.5.52) в виде суммы частного решения (вынужденного движения)  $y_B(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  и общего решения (свободного движения)  $y_C(t)$  однородного уравнения (1.5.52) при равенстве нулю правой части [1, 4, 6]

$$y(t) = y_B(t) + y_C(t) = \frac{b_m}{a_n} \cdot 1[t] + \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (1.5.53)$$

где  $p_i$  – корни характеристического уравнения (1.5.49),  $C_i$  – постоянные интегрирования,  $n$  – порядок характеристического уравнения.

Постоянные интегрирования  $C_i$  в (1.5.53) определяются из  $n$  алгебраических уравнений, полученных дифференцированием уравнения (1.5.53) по времени  $n-1$  раз с учетом начальных значений выходной величины и ее первой, второй и других производных по времени из (1.5.52) при  $t=0$ :  $y(0)=y_0$ ,  $y^1(0)=y_0^1$ ,  $y^2(0)=y_0^2$ , ...,  $y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}$  [1].

При расчетах переходного процесса необходимо различать «начальные условия слева»  $y_{-0}$  (до приложения ступенчатого воздействия) при  $t=-0$  и «начальные условия справа»  $y_{+0}$  (сразу после прило-

жения ступенчатого воздействия) при  $t=+0$ . Начальные условия слева при  $t=-0$  всегда принимаются нулевыми  $y_{-0}=0, y'_{-0}=0, y''_{-0}=0$  и т.д. Начальные условия справа при  $t=+0$  определяются из дифференциального уравнения (1.5.52) и для выходной величины  $y(t)$  и ее первых  $(n-m-1)$  производных начальные условия слева и справа равны [1]:

$$y_{+0} = y_{-0}, y'_{+0} = y'_{-0}, y''_{+0} = y''_{-0}, \dots, y^{(n-m-1)}_{+0} = y^{(n-m-1)}_{-0}. \quad (1.5.54)$$

Для остальных начальных условий выполняются следующие соотношения [1], которые показывают, что только при  $m=0$  в уравнении (1.5.52) начальные условия одинаковые при  $t=+0$  и  $t=-0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{+0}^{(n-m)} = y_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1, \\ y_{+0}^{(n-m+1)} = y_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_1}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} \left[ y_{+0}^{(n-m)} - y_{-0}^{(n-m)} \right], \\ y_{+0}^{(n-m+2)} = y_{-0}^{(n-m+2)} + \frac{b_2}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_2}{a_0} \left[ y_{+0}^{(n-m)} - y_{-0}^{(n-m)} \right] - \dots \\ - \frac{a_1}{a_0} \left[ y_{+0}^{(n-m+1)} - y_{-0}^{(n-m+1)} \right], \\ \dots, \\ y_{+0}^{(n-1)} = y_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_{m-1}}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_{m-1}}{a_0} \left[ y_{+0}^{(n-m)} - y_{-0}^{(n-m)} \right] - \dots \\ \dots - \frac{a_1}{a_0} \left[ y_{+0}^{(n-2)} - y_{-0}^{(n-2)} \right]. \end{array} \right. \quad (1.5.55)$$

Для расчета переходного процесса от возмущающего воздействия  $f(t)=I(t)$  в (1.5.52) вместо  $B(p)$  из (1.5.50) берется  $C(p)$  из (1.5.51).

**Пример 1.5.9.** Найти переходную функцию САУ при задающем воздействии  $g(t)=I(t)$  и нулевых начальных условиях, если дифференциальное уравнение переходного процесса имеет вид  $(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)y(t) = (b_0 p + b_1)g(t)$ , где коэффициенты имеют значения  $a_0=0,05 \text{ с}^2; a_1=0,4 \text{ с}; a_2=1; b_0=0,5 \text{ с}; b_1=1$ .

Из дифференциального уравнения переходного процесса установившееся значение при  $t \rightarrow \infty$  (частное решение уравнения) равно

$$y_{уст} = \frac{b_m}{a_n} g_0 = \frac{b_1}{a_2} \cdot 1 = \frac{1}{1} = 1.$$

Характеристическое уравнение  $0,05 p^2 + 0,4 p + 1 = 0$  имеет два комплексно сопряженных корня  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -4 \pm j^2$ . Общее решение (свободное движение) имеет вид

$$y_c(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}.$$

Начальные условия слева (при  $t = -0$ ) нулевые:  $y_{-0} = 0$ ,  $y'_{-0} = 0$ .

Начальные условия справа (при  $t = +0$ ) при степенях дифференциального уравнения  $n=2$  и  $m=1$  определяются из (1.5.54) в виде  $y_{+0} = y_{-0} = 0$  и из (1.5.55) при  $n-m=2-1$  в виде

$$y'_{+0} = y'_{-0} + g_0 \frac{b_0}{a_0} = y'_{-0} + 1 \frac{0,5}{0,05} = 0 + 1 \cdot 10 = 10 c^{-1}.$$

Полное решение дифференциального уравнения

$$y(t) = y_{уст} + y_c(t) = 1 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}.$$

С учетом начальных условий справа, т.е. сразу после приложения ступенчатого воздействия, из полного решения дифференциального уравнения при  $t = +0$  получим

$$\begin{aligned} y(0) = y_{+0} &= 1 + C_1 + C_2 = 0; \\ y'(0) = y'_{+0} &= p_1 C_1 + p_2 C_2 = 10. \end{aligned}$$

Подставив из первого условия  $C_2 = -1 - C_1$  во второе, получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{10 + p_2}{p_1 - p_2} = \frac{10 + (-4 - j2)}{(-4 + j2) - (-4 - j2)} = \frac{6 - j2}{j4} \cdot \frac{-j}{-j} = -0,5 - j1,5; \\ C_2 &= -1 - C_1 = -1 + 0,5 + j1,5 = -0,5 + j1,5. \end{aligned}$$

Из полного решения дифференциального уравнения, с учетом постоянных интегрирования и корней, получим выражение переходной функции

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + (-0,5 - j1,5) e^{(-4 + j2)t} + (-0,5 + j1,5) e^{(-4 - j2)t} = \\ &= 1 - e^{-4t} [0,5(e^{j2t} + e^{-j2t}) + j1,5(e^{j2t} - e^{-j2t})] = 1 - e^{-4t} (0,5 \cdot 2 \cos 2t + \\ &+ j1,5 \cdot 2 j \sin 2t) = 1 - e^{-4t} (\cos 2t - 3 \sin 2t). \end{aligned}$$

Полученная переходная функция описывает процесс увеличения выходной величины от нуля до единицы. Время переходного процесса  $t_{III}$  определяется временем затухания экспоненты  $e^{-4t}$  от 1 при  $t=0$  до значения  $0,05 = e^{-4t_{III}}$ , соответствующего окончанию переходного процесса, и составляет  $t_{III} = 0,75$  сек.

### Контрольные вопросы

1. Как представляется переходная функция при единичном воздействии?
2. Как определяется вынужденная составляющая переходной функции?
3. Как определяется собственная составляющая переходной функции?

### 1.5.9.2. Операторный метод расчета переходного процесса

При операторном методе расчета дифференциальное уравнение переходного процесса представляют в виде изображения по Лапласу, находят корни характеристического полинома и по формулам Хевисайда вычисляют математическое описание переходного процесса [1].

Если изображение переходного процесса по Лапласу имеет вид

$$Y(p) = \frac{B(p)}{D(p)}G(p) + \frac{C(p)}{D(p)}F(p) + \frac{N(p)}{D(p)}, \quad (1.5.56)$$

где  $Y(p)$ ,  $G(p)$ ,  $F(p)$  – изображения выходной величины, задающего и возмущающего воздействий;  $D(p)$  – характеристический полином;  $B(p)$ ,  $C(p)$  – полиномы влияния задающего и возмущающего воздействий;  $N(p)$  – полином учета ненулевых начальных условий при  $t=0$ :

$$\begin{aligned} y(0) = y_0; \quad y^1(0) = y_1; \quad y^{11}(0) = y_2; \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}; \\ N(p) = a_0 y_0 p^{n-1} + (a_0 y_1 + a_1 y_0) p^{n-2} + \dots + (a_0 y_{n-2} + \\ + a_1 y_{n-3} + \dots + a_{n-3} y_1 + a_{n-2} y_0) p + (a_0 y_{n-1} + a_1 y_{n-2} + \\ + a_2 y_{n-3} + \dots + a_{n-3} y_2 + a_{n-2} y_1 + a_{n-1} y_0), \end{aligned} \quad (1.5.57)$$

то переходный процесс  $x(t)$  определяется из (1.5.56) суммой составляющих, которые рассчитываются отдельно, а затем суммируются. Каждая составляющая в (1.5.56) рассчитывается в зависимости от *типа корней* характеристического уравнения  $D(p)=0$  по соответствующим формулам Хевисайда [1, 4, 6, 9, 12].

1. При отсутствии нулевых и кратных корней – по формуле

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{D^1(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{i=1}^n \frac{C(s_i)}{D^1(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{i=1}^n \frac{N(s_i)}{D^1(s_i)} e^{s_i t}, \quad (1.5.58)$$

где  $s_i$  – корни характеристического уравнения  $D(p)=0$ , значения которых подставляются в полиномы (1.5.56);  $D^1(s_i)$  – первая производная от полинома  $D^1(p)=dD(p)/dp$ , где  $p$  заменяется значением корней  $s_i$ .

2. При одном нулевом корне и отсутствии кратных корней

$$y(t) = \left[ \frac{B(0)}{D_0(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{B(s_i) \cdot e^{s_i t}}{s_i \cdot D_0^1(s_i)} \right] + \left[ \frac{C(0)}{D_0(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{C(s_i) e^{s_i t}}{s_i D_0^1(s_i)} \right] + \left[ \frac{N(0)}{D_0(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{N(s_i) e^{s_i t}}{s_i D_0^1(s_i)} \right], \quad (1.5.59)$$

где значения постоянных величин  $D_0(0)$ ,  $B(0)$ ,  $C(0)$ ,  $N(0)$  получаются из соответствующих полиномов в (1.5.56) при  $p=s_1=0$ .

3. При комплексно-сопряженных корнях каждая составляющая переходного процесса для каждого комплексно-сопряженного корня  $s_i = -\alpha_i \pm j\beta_i$  вычисляется отдельно, а затем суммируется с другими составляющими. Каждая отдельная составляющая переходного процесса, например, от задающего воздействия  $g(t)$ , соответствующая корню  $s_i = -\alpha_i \pm j\beta_i$ , вычисляется по формуле [1, 6, 12]

$$\begin{aligned} y_{gi}(t) &= \frac{B(-\alpha_i + j\beta_i)}{D^1(-\alpha_i + j\beta_i)} e^{(-\alpha_i + j\beta_i)t} + \frac{B(-\alpha_i - j\beta_i)}{D^1(-\alpha_i - j\beta_i)} e^{(-\alpha_i - j\beta_i)t} = \\ &= (U_i + jV_i) e^{-\alpha_i t} e^{j\beta_i t} + (U_i - jV_i) e^{-\alpha_i t} e^{-j\beta_i t} = \\ &= (A_i e^{j\varphi_i}) e^{-\alpha_i t} e^{j\beta_i t} + (A_i e^{-j\varphi_i}) e^{-\alpha_i t} e^{-j\beta_i t} = \\ &= A_i e^{-\alpha_i t} \left[ e^{j(\beta_i t + \varphi_i)} + e^{-j(\beta_i t + \varphi_i)} \right] = A_i e^{-\alpha_i t} 2 \cos(\beta_i t + \varphi_i), \end{aligned} \quad (1.5.60)$$

где  $A_i = \sqrt{U_i^2 + V_i^2}$ ;  $\varphi_i = \arctg(V_i/U_i)$ .

**Пример 1.5.10.** Рассчитать переходную функцию САУ по задающему воздействию при нулевых начальных условиях и единичном задающем воздействии  $g(t)=1(t)$ , если операторное уравнение САУ  $D(p)Y(p)=B(p)G(p)$  имеет вид

$$(0,0016p^3 + 0,06p^2 + 0,54p + 13)X(p) = 12G(p) = 12 \cdot \frac{1}{p}. \quad (1.5.61)$$

Характеристическое уравнение из (1.5.61) получается в виде

$$D(p) = p \cdot D_0(p) = p(0,0016p^3 + 0,06p^2 + 0,54p + 13) = 0, \quad (1.5.62)$$

его корни имеют значения  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = -34,5c^{-1}$ ,  $s_{2,3} = (-1,5 \pm j15,3)c^{-1}$ .

Производная от  $D_0(p)$  по  $p$  из (1.5.62) определяется выражением

$$D_0^1(p) = dD_0(p)/dp = 0,0048p^2 + 0,12p + 0,54. \quad (1.5.63)$$

По формуле (1.5.59) вычисляем оригинал переходной функции

$$y(t) = \frac{B(0)}{D_0(0)} + \frac{B(s_1)e^{s_1t}}{s_1D_0^1(s_1)} + \frac{B(s_2)e^{s_2t}}{s_2D_0^1(s_2)} + \frac{B(s_3)e^{s_3t}}{s_3D_0^1(s_3)} = \quad (1.5.64)$$

$$= 0,923 - 0,1646e^{-34,5t} + 0,876e^{-1,5t} \cos(15,3 \cdot 57,3t + 149,5^\circ).$$

Для приведения слагаемых аргумента косинуса к одинаковой размерности в градусах, в аргументе косинуса угловая скорость  $\beta = 15,3$  рад/с умножена на  $57,3^\circ$  в радиане.

По (1.5.64) можно рассчитать и построить график переходного процесса и определить его показатели качества – время переходного процесса  $t_{\text{ПП}} = 1,57$ с, перегулирование  $\sigma = 0,59$ , ошибку регулирования в установившемся режиме  $\Delta y = 1 - y(t = \infty) = 1 - 0,923 = 0,077$  или 7,7% и другие. Погрешность расчетов можно оценить по начальному значению процесса: при  $t = 0$  должно быть  $y(t = 0) = 0$ , а по (1.5.64) получается  $y(t = 0) = 0,923 - 0,1646 + 0,876 \cos 149,5^\circ = 0,0036$ , что составляет от установившегося значения  $0,0036 / 0,923 = 0,0039$  или 0,39%.

### Контрольные вопросы

1. Как записать операторное уравнение САУ с учетом задающего и возмущающего воздействий при ненулевых начальных условиях?
2. Как записать переходный процесс с использованием формулы Хевисайда при отсутствии нулевых и кратных корней в характеристическом уравнении САУ?
3. Как записывается формула Хевисайда при наличии одного нулевого корня в характеристическом уравнении САУ?
4. Как записывается формула Хевисайда для расчета переходного процесса от каждой пары комплексно-сопряженных корней?

### 1.5.9.3. Частотные оценки качества переходного процесса

Косвенный метод приближенных частотных оценок показателей качества переходных процессов в замкнутых САУ по их частотным характеристикам основан на *обратном преобразовании Фурье* [1, 6]

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.5.65)$$

где  $H(j\omega) = \Phi(j\omega)G(j\omega) = [P(\omega) + jQ(\omega)]G(j\omega)$  – частотная переходная функция замкнутой САУ, которая получается из изображения по Лапласу переходной функции  $H(p) = \Phi(p)G(p)$  после замены  $p = j\omega$ .

По вещественной частотной характеристике (ВЧХ)  $P(\omega)$  замкнутой САУ можно приближенно оценить следующие показатели качества переходного процесса при ступенчатом воздействии [1, 6, 12].

1) Установившееся значение переходного процесса определяется на основании соотношения  $y_{уст} = y(t)_{t \rightarrow \infty} = P(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = P(0)$ .

2) Время переходного процесса  $t_{пп}$  оценивается по частоте  $\omega_0$ , при которой модуль ВЧХ уменьшается до 5% от начального значения  $|P(\omega_0)| \approx 0,05P(0)$  при этом  $\frac{\pi}{\omega_0} \leq t_{пп} \leq \frac{4\pi}{\omega_0}$ .

3) Перерегулирование  $\sigma$  не превышает 18% при отсутствии экстремума  $P(\omega) \leq P(0)$  в положительной части ВЧХ.

4) При наличии экстремума  $P_M(\omega) > P(0)$  в положительной части ВЧХ перерегулирование будет  $\sigma \leq [1,18P_M(\omega) - P(0)]/P(0)$ .

5) Вид переходного процесса будет монотонным при непрерывно уменьшающейся ВЧХ. Наличие на ВЧХ пика  $P(\omega_p)$  указывает на присутствие в переходном процессе медленно затухающих колебаний с частотой  $\omega_p$ . Разрыв ВЧХ на частоте  $\omega_p$  указывает на наличие в САУ незатухающих колебаний с частотой  $\omega_p$  и неустойчивость САУ.

По логарифмическим амплитудной и фазовой частотным характеристикам (ЛАЧХ и ЛФЧХ) разомкнутой цепи САУ можно приближенно оценить следующие показатели качества переходного процесса в замкнутой САУ при ступенчатом воздействии [1, 4, 6, 12].

1) Время  $t_{пп}$  переходного процесса  $\frac{\pi}{\omega_{ср}} \leq t_{пп} \leq \frac{\pi}{\omega_{ср}} + \frac{2}{\omega_{1Н}}$ , где

$\omega_{ср}$  – частота среза ЛАЧХ,  $\omega_{1Н}$  – ближайшая к частоте среза более низкая частота сопряжения асимптот ЛАЧХ.

2) Время достижения максимального значения выходной регулируемой величины в переходном процессе  $t_M \approx \pi/\omega_{ср}$ .

3) Величина перерегулирования  $\sigma \approx 1 - \sin \Delta\varphi(\omega_{ср})$ , где  $\Delta\varphi(\omega_{ср})$  – запас устойчивости по фазе по ЛФЧХ при частоте среза.

4) Пересечение ЛАЧХ оси частот с наклоном  $-20$  дБ/дек указывает на близость свойств замкнутой САУ к свойствам апериодического звена первого порядка.

Вид ЛАЧХ разомкнутой цепи САУ в низкочастотной области характеризует показатели установившихся режимов работы замкнутой САУ (точность, порядок астатизма). Вид ЛАЧХ и ЛФЧХ в области частоты среза характеризует качество переходного процесса (быстродействие, перерегулирование) и запас устойчивости по фазе. Вид

ЛАЧХ и ЛФЧХ в области высоких частот характеризует запас устойчивости по модулю.

### Контрольные вопросы

1. Какие показатели переходного процесса характеризуют значения  $P(0)$ ,  $P_{\text{МАКС}}(\omega)/P(0)$ ,  $\omega_0$  на ВЧХ замкнутой САУ?

2. Какие показатели переходного процесса в замкнутой САУ характеризуют значения частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$  и запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_{\text{ср}})$  по ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой цепи САУ?

#### 1.5.9.4. Корневые оценки качества переходного процесса

Косвенный метод корневых оценок качества переходных процессов основан на зависимости формы переходного процесса от расположения на комплексной плоскости корней характеристического уравнения ОФП замкнутой САУ [1, 4, 6, 9, 12].

1. *Степень устойчивости*  $\eta$  является первой корневой оценкой качества переходного процесса, которая определяется по расстоянию  $\eta$  на комплексной плоскости от мнимой оси до ближайшего левого корня характеристического уравнения (рис. 1.5.10). Величина  $\eta$  фактически характеризует быстродействие САУ поскольку определяет время  $t_{\text{пп}}$  затухания переходного процесса для самой медленной составляющей с наименьшим значением корня характеристического уравнения. Другие левые корни, более удаленные от мнимой оси, определяют более быстро затухающие составляющие процесса.

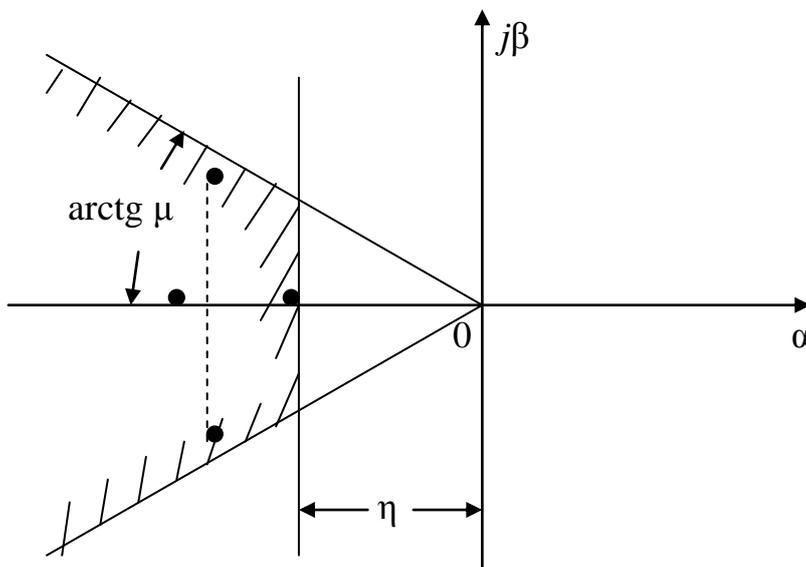


Рис. 1.5.10. Построение разрешенной области расположения корней на комплексной плоскости

Самая медленная составляющая затухающего переходного процесса, соответствующая наименьшему действительному корню, описывается экспонентой  $y(t)=y_0e^{-\eta t}$ , а для комплексно-сопряженных корней  $\lambda=(-\eta \pm j\beta)$  – уравнением  $y(t)=y_0e^{-\eta t}\sin(\beta t+\varphi)$ . Время  $t_{\text{пн}}$  затухания переходного процесса от  $y_0$  до  $0,05y_0$  (т. е. на 95%) определяется из условия  $y_0 e^{-\eta t_{\text{пн}}}=0,05y_0$ , откуда  $\eta t_{\text{пн}} \cdot \ln e = \ln 0,05 = -3$  и  $t_{\text{пн}}=3/\eta$ .

2. *Колебательность переходного процесса*  $\mu=|\beta|/|\alpha|$  характеризует быстроту затухания амплитуды колебаний за каждый период и является второй корневой оценкой качества переходных процессов. Каждой паре комплексно-сопряженных корней  $(-\alpha_i \pm j\beta_i)$  характеристического уравнения устойчивой замкнутой САУ соответствует составляющая колебательного затухающего переходного процесса  $y_i(t)=y_{0i}e^{-\alpha_i t}\sin(\beta_i t+\varphi_i)$ , имеющая период колебаний  $T_i=2\pi/\beta_i$ . За время каждого периода колебаний амплитуда колебаний от значения  $y_{1Ai}=y_{0i}e^{-\alpha_i t}$  затухает до  $y_{2Ai}=y_{0i}e^{-\alpha_i(t+T_i)}=y_{0i}e^{-\alpha_i t}e^{-2\pi/\mu_i}$ .

Затуханием за период называется относительное уменьшение амплитуды колебаний  $\xi_i = \frac{y_{1Ai} - y_{2Ai}}{y_{1Ai}} = 1 - \frac{y_{2Ai}}{y_{1Ai}} = 1 - e^{-2\pi/\mu_i}$ . Чем больше колебательность  $\mu_i = \beta_i/\alpha_i$ , тем медленнее затухает переходный процесс. Составляющая переходного процесса с наибольшей колебательностью определяет для всей САУ относительное затухание  $\xi$  и запас устойчивости по уменьшению  $\xi$  до нуля, что соответствует незатухающим колебаниям, т.е. потере устойчивости САУ.

Ограничения колебательности  $\mu$  и степени устойчивости  $\eta$  по заданным требованиям к показателям качества переходного процесса в замкнутой САУ позволяют строить на комплексной плоскости корней разрешенную область (подштрихована на рис. 1.5.10), в которой должны располагаться корни характеристического уравнения замкнутой САУ.

3. *Диаграмма Вышнеградского* представляет корневые оценки качества переходных процессов в замкнутых САУ третьего порядка с характеристическим уравнением  $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$  или в нормированном виде  $q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0$  с введением параметров Вышнеградского  $q = p \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}$ ,  $A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}$ ,  $B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$ .

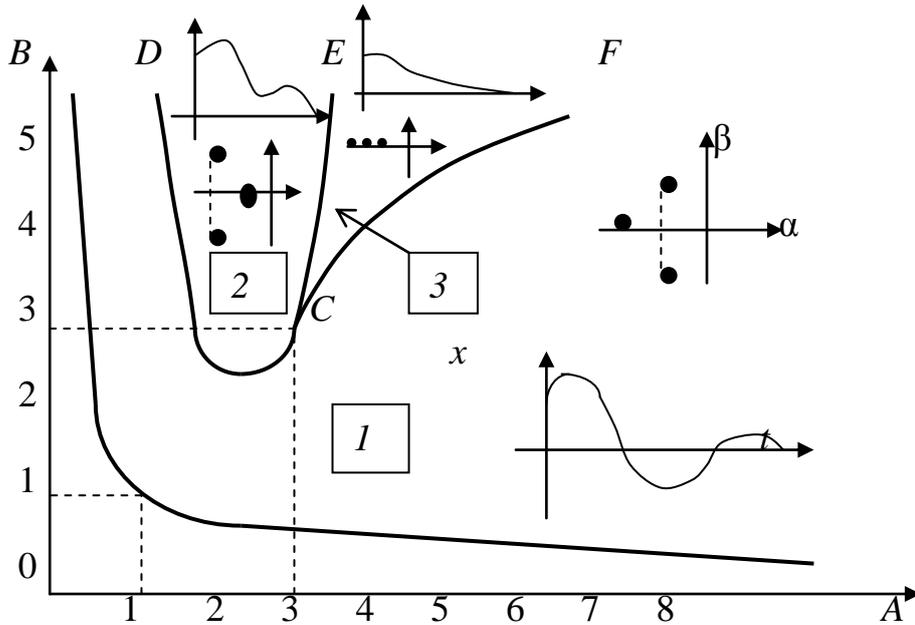


Рис. 1.5.11. Вид диаграммы Вышнеградского

Параметры  $A$  и  $B$  образуют на диаграмме Вышнеградского (рис. 1.5.11) границу устойчивости САУ в виде равнобокой гиперболы, которая описывается по критерию Гурвица уравнением  $AB-1=0$ . Область устойчивости, где выполняется условие  $AB>1$ , расположена правее и выше равнобокой гиперболы. Область устойчивости разделяется граничными линиями  $CD$ ,  $CE$ ,  $CF$  на три подобласти 1, 2, 3 с тремя разными типами размещения трех корней характеристического уравнения  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  на комплексной плоскости и тремя разными типами затухающих переходных процессов выходной величины  $y(t)$ . В точке  $C$ , где  $A=B=3$ , характеристическое уравнение принимает вид  $(q+1)^3=0$  и все три корня равны  $q_1=q_2=q_3=-1$ . Для других значений параметров  $A$  и  $B$  возможны три варианта разновидности корней:

1) один корень вещественный  $q_1=\lambda$  и два комплексносопряженных корня  $q_{1,2}=\alpha\pm j\beta$  при  $\alpha<\lambda$  (область 1 на рис. 1.5.11) формируют затухающий колебательный процесс с изменением знака  $y(t)$ , поскольку колебания затухают медленнее апериодической составляющей;

2) то же, что и в п.1, но при  $\alpha>\lambda$  (область 2 на рис. 1.5.11) формируют монотонный затухающий колебательный процесс без изменения знака  $y(t)$ , поскольку колебания затухают быстрее апериодической составляющей;

3) все три корня действительные и расположены на вещественной отрицательной полуоси комплексной плоскости корней (область 3 на

рис. 1.5.11) формируют затухающий переходный процесс, состоящий из суммы трех экспонент и не имеющий перерегулирования.

На диаграмму Вышнеградского также можно нанести линии равной степени устойчивости  $\eta_i = \text{const}$  для оценки времени затухания переходного процесса, линии равного затухания  $\xi_i = \text{const}$  и линии равной колебательности  $\mu_i = \text{const}$ , которые характеризуют затухание колебаний и запас устойчивости САУ.

### Контрольные вопросы

1. Как определяется степень устойчивости для замкнутой САУ и какой показатель качества переходного процесса она характеризует?
2. Как определяется колебательность переходного процесса и как колебательность связана с показателями качества переходного процесса, затуханием колебаний и устойчивостью САУ?
3. Какой вид имеет диаграмма Вышнеградского и как характеризуются на ней четыре области параметров Вышнеградского  $A$  и  $B$ ?

### 1.5.9.5. Интегральные оценки качества переходного процесса

Интегральные оценки позволяют одним числом (значением интеграла) оценить качество переходного процесса по площади ошибки управления  $x(t)$ , что сразу учитывает величину ошибки и время затухания переходного процесса при отработке ступенчатого воздействия (рис. 1.5.12) [1, 6]. При этом отклонение выходной величины (динамическая ошибка)  $x(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t) - x_{\text{УСТ}}$  отсчитывается от установившегося значения  $x_{\text{УСТ}}$  без учёта статической ошибки регулирования, принимаемой равной нулю (при учёте статической ошибки интегральная оценка возрастала бы во времени до бесконечности). Это допущение не вносит заметных погрешностей в интегральные оценки, поскольку динамическая ошибка за время переходного процесса изменяется от 100% до статической ошибки, составляющей в статических САУ доли или единицы процентов и отсутствующей в астатических САУ.

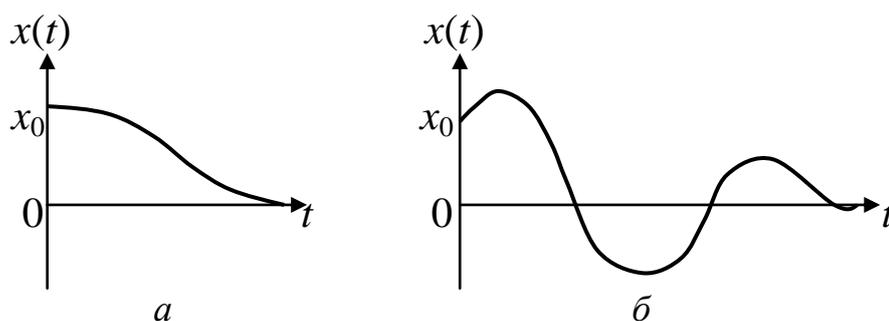


Рис. 1.5.12. Монотонный и колебательный процессы отработки отклонения регулируемой величины от заданного значения

Для монотонных переходных процессов (рис. 1.5.6, а) используется *простая интегральная оценка*  $I_1 = \int_0^{\infty} x(t)dt$ , которая определяется

из изображения переходного процесса по Лапласу  $X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$

на основе зависимости  $I_1 = \int_0^{\infty} x(t)dt = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} X(p)$  [1].

Простая интегральная оценка  $I_1$  не пригодна для колебательных переходных процессов (рис. 1.5.6, б), поскольку положительные и отрицательные площади ошибки вычитаются, что искажает оценку качества процесса управления. Поэтому для оценки качества колебательных и любых других переходных процессов используют *квадратичную интегральную оценку*  $I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t)dt$  [1, 4, 11, 12].

Для вычисления квадратичной интегральной оценки можно использовать теорему Парсеваля, позволяющую заменить интегрирование произведения двух функций во времени интегрированием в частотной области произведения их изображений по Лапласу [1, 11]

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t)dt = \int_0^{\infty} x(t) \cdot x(t)dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(p) \cdot X(-p)dp, \quad (1.5.66)$$

$$X(p) = [1 - \Phi(p)] \frac{x_0}{p} - X_{y0} \approx [1 - \Phi(p)] \frac{x_0}{p} = \frac{C(p)}{D(p)} =$$

где

$$= \frac{c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_m p^m}{d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots + d_n p^n}, \quad n > m, \quad (1.5.67)$$

$X(p)$  – изображение переходного процесса;  $\Phi(p)$  – передаточная функция замкнутой САУ по задающему воздействию  $x_0 \cdot 1(t)$ .

Если изображение  $X(p)$  представляется дробно-рациональной функцией вида (1.5.67), то квадратичная интегральная оценка вычисляется с использованием таблицы интегралов

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(p)}{D(p)} \cdot \frac{C(-p)}{D(-p)} dp. \quad (1.5.68)$$

В САУ, имеющих многочлен  $D(p)$   $n$ -порядка, квадратичные интегральные оценки для первых трех степеней имеют значения [11]:

$$\begin{aligned} \text{при } n=1 \quad I_{21} &= \frac{c_0^2}{2d_0d_1}; & \text{при } n=2 \quad I_{22} &= \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}; \\ \text{при } n=3 \quad I_{23} &= \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}. \end{aligned} \quad (1.5.69)$$

Метод интегральных оценок обычно используется для сравнения качества переходных процессов в разных замкнутых САУ и оптимизации параметров САУ по критерию минимизации квадратичной интегральной оценки.

**Пример 1.5.11.** Определить оптимальное значение коэффициента передачи  $K_0$  в замкнутой САУ с единичной обратной связью при отработке единичного ступенчатого воздействия  $x_0(t)=1(t)$ , если разомкнутая цепь САУ имеет ОФП

$$W(p) = \frac{K_0}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}.$$

Изображение по Лапласу динамической ошибки по (1.5.67) будет

$$X(p) = \frac{1}{1+W(p)} \frac{1}{p} = \frac{1+(T_1+T_2)p+T_1T_2p^2}{K_0+p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3} = \frac{c_0+c_1p+c_2p^2}{d_0+d_1p+d_2p^2+d_3p^3}.$$

Квадратичная интегральная оценка при  $n=3$  по (1.5.69) будет

$$I_{23} = \frac{(T_1T_2)^2 K_0 + [(T_1+T_2)^2 - 2T_1T_2]K_0T_1T_2 + (T_1+T_2)T_1T_2}{2K_0T_1T_2[(T_1+T_2) - K_0T_1T_2]} = \frac{U}{V}.$$

Оптимальное значение  $K_0$  определится из равенства нулю частной производной по коэффициенту передачи  $\partial I_{23}/\partial K_0=0$  из дроби  $I_{23}$  в виде

$$\frac{\partial I_{23}}{\partial K_0} = \frac{V \frac{\partial U}{\partial K_0} - U \frac{\partial V}{\partial K_0}}{V^2} = \frac{[2K_0(T_1+T_2) - 2K_0^2T_1T_2][(T_1+T_2)^2 - T_1T_2] - \{K_0[(T_1+T_2)^2 - T_1T_2] + T_1+T_2\} \times [2(T_1+T_2) - 4K_0T_1T_2]}{[2K_0(T_1+T_2) - 2K_0^2T_1T_2]^2}.$$

Из равенства нулю числителя оптимальное значение  $K_0$  будет

$$K_0 = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{2T_2} - \frac{T_1}{4T_2} - \frac{T_2}{4T_1} - \frac{1}{4}.$$

Например, при  $T_1=0,1$  с и  $T_2=0,01$  с оптимальное значение  $K_0=52,3$  с<sup>-1</sup> при минимальной величине квадратичной интегральной оценки ошибки  $I_{23}=0,12$ .

### Контрольные вопросы

1. Что отражают и как записываются простая и квадратичная интегральные оценки качества переходных процессов?
2. Почему при расчетах интегральных оценок качества переходных процессов не учитывается статическая ошибка регулирования?
3. Как вычислить простые и квадратичные интегральные оценки качества переходного процесса без расчета кривой переходного процесса?
4. Как можно использовать интегральные оценки переходного процесса для оптимизации выбора параметров САУ?

#### 1.5.10. Чувствительность систем управления

В системах автоматического управления (САУ) реальные значения параметров (коэффициентов передачи, постоянных времени, сопротивлений, индуктивностей и др.) практически всегда отличаются от расчетных (номинальных) значений. Это обусловлено *технологическим разбросом параметров элементов САУ* до  $\pm(10\div 20)\%$  при их промышленном изготовлении, а также *эксплуатационными уходами параметров элементов* от первоначальных значений вследствие изменений нагрузки, нагрева, старения и влияния других воздействий. Например, температурный коэффициент сопротивления обмоток из медного провода равен 0,04 на градус и при нагреве на  $50^{\circ}$  их сопротивление увеличивается на 20%, что настолько же изменяет электромагнитную и электромеханическую постоянные времени двигателей и характеристики процессов управления.

Степень влияния *вариаций* (малых изменений) параметров на статические и динамические характеристики процессов управления называется *чувствительностью САУ*. Нечувствительность САУ к вариациям определенного параметра называется *грубостью САУ* по данному параметру. Чем меньше чувствительность САУ к вариациям параметров, тем выше стабильность статических и динамических характеристик САУ. Таким образом, *чувствительность оценивает качество САУ* относительно стабильности статических и динамических характеристик САУ.

Количественные оценки чувствительности САУ определяются *функциями чувствительности* различных характеристик САУ к вариациям параметров.

*Функции чувствительности временных характеристик САУ* представляют собой частные производные  $i$ -й координаты  $x_i$  системы по вариации  $j$ -го параметра  $\alpha_j$   $u_{ij} = [\partial x_i / \partial \alpha_j]^0$  или частные производ-

ные от используемого критерия качества (например, интегральной оценки  $I$ ) по  $j$ -му параметру  $\alpha_j$   $U_j = [\partial I / \partial \alpha_j]^0$ , где нулевой индекс сверху обозначает, что частные производные должны браться при расчетных (не варьированных, исходных, номинальных) значениях параметров.

Если показатель качества характеристик САУ выражается не функцией времени, а числом (временем переходного процесса, величиной перерегулирования, квадратичной интегральной оценкой и др.), то  $u_{ij}$  называется *коэффициентом чувствительности*.

*Исходной системой* называют САУ, у которой все параметры равны расчетным (номинальным) значениям и не имеют вариаций. В такой САУ происходит так называемое *основное* или *исходное движение* координат  $x_i(t, 0)$ .

*Варьированной системой* называют САУ, в которой произошли вариации (малые изменения) определенных параметров. В такой САУ происходит *варьированное движение* координат  $x_i(t, \alpha)$ .

Разность движения в варьированной (измененной) САУ и движения в исходной САУ образует *дополнительное движение*, которое называется *параметрической погрешностью* или *параметрической ошибкой системы*  $\Delta x_i(t, \alpha) = x_i(t, \alpha) - x_i(t, 0)$ .

Пусть исходная САУ описывается совокупностью нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [1, 9]

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (1.5.70)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – координаты системы  $n$ -го порядка;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  – не варьированные (расчетные) значения параметров  $\alpha_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ).

При мгновенных вариациях параметров  $\Delta \alpha_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ), если они не вызывают изменения порядка уравнений (1.5.70), то варьированное движение будет описываться совокупностью уравнений [1, 9]

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{F}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta \alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta \alpha_m), \quad (i=1, \dots, n). \quad (1.5.71)$$

Дополнительное движение координат или параметрическая ошибка САУ определится из разности

$$\Delta x_i(t, \Delta \alpha) = \tilde{x}_i(t, \Delta \alpha) - x_i(t, 0), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1.5.72)$$

Вследствие малости изменений (вариаций) параметров, дополнительное движение (1.5.72) по каждой  $i$ -й координате можно представить в первом приближении в виде разложения в ряд Тейлора с учетом только первых членов ряда

$$\begin{aligned}\Delta x_i(t, \Delta \alpha) &= \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \cdot \Delta \alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \cdot \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \cdot \Delta \alpha_m = \\ &= u_{i1} \cdot \Delta \alpha_1 + u_{i2} \cdot \Delta \alpha_2 + \dots + u_{im} \cdot \Delta \alpha_m,\end{aligned}\quad (1.5.73)$$

где  $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = u_{ij}$  – функции чувствительности.

Функции чувствительности временных характеристик САУ можно найти из решений *уравнений чувствительности*, которые получаются при дифференцировании уравнений движения исходной системы (1.5.70) по варьируемому параметру

$$\frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j}.\quad (1.5.74)$$

Изменяя в левой части уравнения (1.5.74) порядок дифференцирования с учетом  $u_{ij} = [\partial x_i / \partial \alpha_j]^0$ , получим уравнения чувствительности

$$\frac{d \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)}{dt} = \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} u_{1j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} u_{2j} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} u_{nj} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j}.\quad (1.5.75)$$

Решение уравнений чувствительности (1.5.75) дает функции чувствительности  $u_{ij}(t)$ , определяющие количественное влияние вариаций параметров на временные характеристики САУ (переходную функцию, функцию веса и др.). Однако уравнения (1.5.75) обычно оказываются сложными и решения их затруднительно. Поэтому для определения чувствительности применяются различные косвенные методы и структурные модели чувствительности САУ.

Так, дополнительное движение (параметрическую ошибку) в САУ при вариации одного из параметров на величину  $\alpha$  и заданном входном воздействии  $g(t)$ ,  $G(p)$  можно определить с использованием структурного метода по передаточным функциям измененной (варьируемой) и исходной САУ. Разложим ОФП варьированной САУ в ряд Тейлора

$$W(p, \alpha) = W(p, 0) + \left[ \frac{\partial W(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 W(p, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots,\quad (1.5.76)$$

где  $W(p, \alpha)$  и  $W(p, 0)$  – ОФП варьированной (измененной) САУ и исходной САУ, в которой все параметры имеют расчетные (номинальные) значения. В первом приближении (с учетом только линейных членов ряда Тейлора) изменение ОФП САУ, вызванное изменением

одного из параметров на малую величину  $\alpha$ , можно представить разностью

$$\Delta W(p, \alpha) = W(p, \alpha) - W(p, 0) \approx \left[ \frac{\partial W(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha. \quad (1.5.77)$$

Тогда приближенное выражение дополнительного движения (параметрической ошибки) системы определяется на основе обратного преобразования Лапласа в виде

$$\Delta x(t, \alpha) = L^{-1} \{ \Delta W(p, \alpha) \cdot G(p) \} = L^{-1} \left\{ \alpha \left[ \frac{\partial W(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} G(p) \right\}, \quad (1.5.78)$$

а функция чувствительности по параметру  $\alpha$  будет

$$u_{ij} = \left[ \frac{\partial \Delta x(t, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right]_{\alpha_j=0} = L^{-1} \left\{ \left[ \frac{\partial W(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right]_{\alpha_j=0} G(p) \right\}. \quad (1.5.79)$$

Используя метод суперпозиции, по (1.5.79) можно определить функции чувствительности временных характеристик САУ по всем варьируемым (изменяемым) параметрам.

Определение функций и коэффициентов чувствительности САУ по показателям качества упрощается в связи с отсутствием необходимости использования для этого дифференциальных уравнений. Например, функции чувствительности амплитудных частотных характеристик  $A(\omega)$  и фазовых частотных характеристик  $\varphi(\omega)$  определяются простым дифференцированием их выражений по варьируемому параметру  $\alpha$

$$u_{Aj}(\omega, \alpha_j) = \frac{\partial A(\omega, \alpha_j)}{\partial \alpha_j}; \quad u_{\varphi j}(\omega, \alpha_j) = \frac{\partial \varphi(\omega, \alpha_j)}{\partial \alpha_j}; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.5.80)$$

Отклонения частотных характеристик от исходных значений определяются простым суммированием

$$\Delta A(\omega, \alpha) = \sum_{j=1}^m u_{Aj}(\omega, \alpha_j) \cdot \Delta \alpha_j; \quad \Delta \varphi(\omega, \alpha) = \sum_{j=1}^m u_{\varphi j}(\omega, \alpha_j) \Delta \alpha_j. \quad (1.5.81)$$

**Пример 1.5.12.** При единичном входном воздействии определить параметрическую ошибку и функцию чувствительности временных характеристик в САУ относительно вариаций  $\alpha$  постоянной времени  $(T+\alpha)$ , если ОФП варьированной САУ эквивалентна апериодическому звену

$$W(p, \alpha) = \frac{K}{1 + p(T + \alpha)}. \quad (1.5.82)$$

Найдем частную производную ОФП варьированной САУ по изменению параметра  $\alpha$

$$\left[ \frac{\partial W(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \left[ \frac{\partial \left( \frac{K}{1 + pT + p\alpha} \right)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial \left( \frac{K}{1 + pT} \right)}{\partial \alpha} = \frac{-pK}{(1 + pT)^2}. \quad (1.5.83)$$

Дополнительное движение или параметрическая ошибка в САУ по (1.5.78) запишется в виде

$$\Delta x(t, \alpha) = L^{-1} \left\{ \alpha \left[ \frac{\partial W(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} G(p) \right\} = L^{-1} \left\{ \alpha \frac{-pK}{(1 + pT)^2} \frac{1}{p} \right\} = -\frac{\alpha K t}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (1.5.84)$$

а функция чувствительности временных характеристик САУ по параметру  $\alpha$  из (1.5.79) с учетом (1.5.84) запишется в виде

$$u_{\alpha} \Delta x = \frac{\partial \Delta x(t, \alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{Kt}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (1.5.85)$$

Из (1.5.85) видно, что функция чувствительности является функцией времени и монотонно уменьшается с некоторого момента времени. При этом дополнительное движение (параметрическая ошибка) в рассматриваемой САУ также уменьшается и вариации постоянной времени не приводят к потере устойчивости САУ. Такую САУ называют *грубой по параметру  $\alpha$* .

**Пример 1.5.13.** Функции чувствительности временных характеристик САУ можно также получить дифференцированием известной функции времени выходной регулируемой величины системы управления.

Например, для САУ с ОФП, соответствующей ОФП апериодического звена второго порядка, выходная величина при ступенчатом входном воздействии  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  описывается дифференциальным уравнением в символической форме

$$x(t) = \frac{K}{(1 + pT_3)(1 + pT_4)} g(t), \quad (1.5.86)$$

решение которого дает временную функцию выходной величины в виде

$$x(t) = Kg_0 \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t). \quad (1.5.87)$$

Для получения функции чувствительности временных характеристик САУ, например, по параметру  $T_3$ , необходимо продифференцировать (1.5.87) по этому параметру

$$u_{T_3}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial T_3} = Kg_0 \frac{[(T_3 - T_4)t - T_3 T_4] e^{-\frac{t}{T_3}} - T_3 T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}}{T_3(T_3 - T_4)^2} \cdot 1(t). \quad (1.5.88)$$

Дополнительное движение (параметрическая ошибка) в САУ при вариации параметра  $T_3$  получается затухающей во времени функцией

$$\Delta x(t, T_3) = u_{T_3}(t) \cdot \Delta T_3. \quad (1.5.89)$$

**Пример 1.5.14.** Определим чувствительность частотных характеристик СУ из примера 1.5.12 по параметру  $T$  при ОФП

$$W(p) = \frac{K}{1 + pT}. \quad (1.5.90)$$

Амплитудная частотная характеристика САУ

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (1.5.91)$$

Фазовая частотная характеристика САУ

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \omega T. \quad (1.5.92)$$

Функции чувствительности по (1.5.80) определяются выражениями

$$u_{AT}(\omega) = \frac{\partial A(\omega)}{\partial T} = \frac{-KT\omega^2}{(1 + \omega^2 T^2)^{3/2}}; \quad (1.5.93)$$

$$u_{\varphi T}(\omega) = \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial T} = \frac{\omega}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (1.5.94)$$

Отклонения (параметрические ошибки, дополнительные движения) частотных характеристик САУ по параметру  $T$  по (1.5.81) запишутся

$$\Delta A(\omega, T) = u_{AT}(\omega) \cdot \Delta T = \frac{-KT\omega^2 \cdot \Delta T}{(1 + \omega^2 T^2)^{3/2}}; \quad (1.5.95)$$

$$\Delta \varphi(\omega, T) = u_{\varphi T}(\omega) \cdot \Delta T = \frac{\omega \cdot \Delta T}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (1.5.96)$$

### Контрольные вопросы

1. Почему в реальных САУ параметры элементов отличаются от расчетных (номинальных) значений?

2. Что называется чувствительностью характеристик или показателей качества САУ к малым изменениям (вариациям) параметров элементов САУ? Что называется грубостью САУ по конкретному параметру?

3. Что называется исходным, варьированным (измененным) и дополнительным движениями координат или показателей качества САУ? Что называется параметрической погрешностью или параметрической ошибкой системы управления?

4. Как математически выражаются функции чувствительности временных характеристик САУ и коэффициенты чувствительности показателей качества САУ к вариациям (малым изменениям) параметров САУ?

5. Как из уравнений исходных движений (исходного состояния) САУ получаются уравнения чувствительности?

6. Как из уравнений чувствительности получаются функции чувствительности САУ по конкретным параметрам?

## 1.6. Синтез линейных САУ

### 1.6.1. Задачи синтеза САУ

При анализе САУ решаются задачи определения характеристик САУ с известными структурой и параметрами, а при синтезе САУ решаются обратные задачи определения структуры и параметров элементов САУ для получения заданных характеристик САУ с учетом алгоритма функционирования и свойств объекта управления.

Задачи синтеза алгоритмической структуры (математической модели) и определения параметров элементов САУ решаются с использованием методов теории автоматического управления, что называется *аналитическим конструированием САУ* [1, 6, 9, 11]. Задачи синтеза функциональной (технической) структуры САУ заключаются в выборе необходимых типовых промышленно изготавливаемых элементов автоматики для реализации сконструированной алгоритмической структуры САУ [1, 22–27].

Практически задачи синтеза САУ решают в следующем порядке.

1. На основании требований к САУ выбирают функционально необходимые при любой структуре  *типовые энергетические элементы* (исполнительное устройство ИУ, усилитель-преобразователь УП, источники питания, датчики и другие элементы), образующие  *неизменяемую часть структуры САУ* (рис. 1.6.1).

2. По заданным требованиям к САУ и техническим расчетам выбирают *тип структуры управления*: разомкнутая, разомкнутая с компенсацией по возмущению, замкнутая, замкнутая с компенсацией по возмущению, статическая, астатическая, инвариантная.

3. Для выбранной структуры САУ ее неизменяемую часть дополняют *изменяемой частью*, состоящей из функционально необходимых типовых элементов управления с неизвестными параметрами (задающее устройство ЗУ, сумматор, регулятор Р, устройства согласования УС и другие элементы) (рис. 1.6.1).

4. По заданным требованиям к САУ с учетом алгоритмической структуры неизменяемой части и функционально обозначенной структуры изменяемой части осуществляют синтез алгоритмической структуры всей САУ и определяют *алгоритмическую структуру изменяемой части и параметры ее элементов*.

5. По найденной алгоритмической структуре изменяемой части САУ осуществляют *реализацию изменяемой части* из типовых элементов автоматики с требуемыми параметрами.

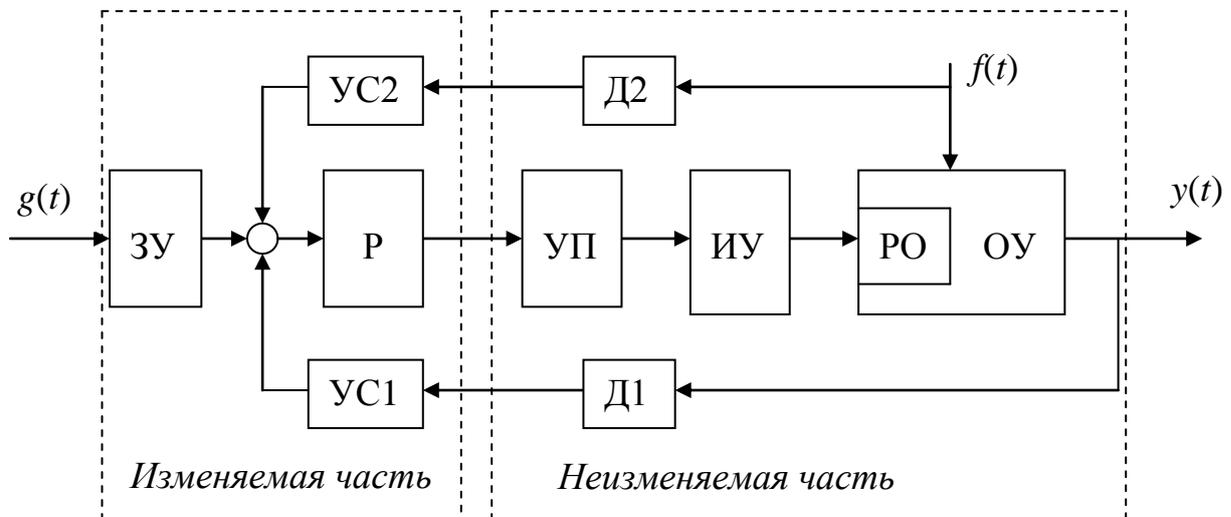


Рис. 1.6.1. Обобщенная структура САУ с компенсацией возмущения

Получение алгоритмической и функциональной структурных схем САУ является результатом *полного синтеза САУ*.

После завершения полного синтеза проводят анализ САУ на соответствие полученных характеристик заданным требованиям. При необходимости проводят корректировку или повторный синтез САУ.

При требовании оптимальности управления синтез САУ включает решение задач оптимизации САУ методами *аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР)* [1, 6, 11, 12, 13, 18].

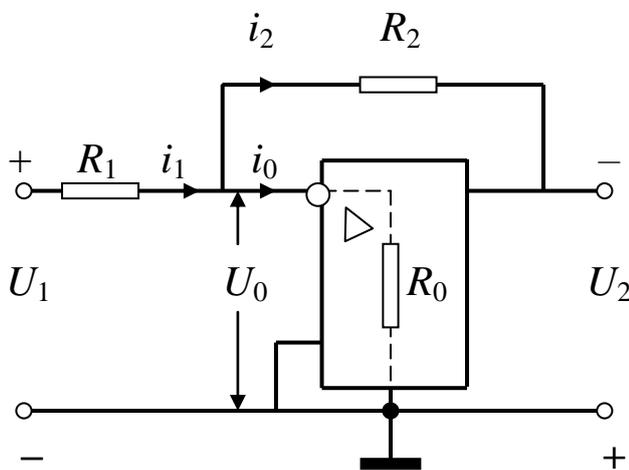
## Контрольные вопросы

1. Что называется синтезом САУ?
2. В чем заключается теоретический и технический синтез САУ?
3. Зачем в САУ при синтезе выделяют неизменяемую и изменяемую части?
4. В каком порядке осуществляется полный синтез САУ?

### 1.6.2. Реализация регуляторов в САУ

В непрерывных САУ управляющие воздействия формируются по требуемым алгоритмам управления  $U_2(t)=f[U_1(t)]$  регуляторами на операционных полупроводниковых усилителях (ОПУ), программируемых включением в их схемы необходимых внешних резисторов и конденсаторов [1, 23–26]. В линейных САУ обычно применяются пять типовых линейных алгоритмов управления [1, 4], которые реализуются соответствующими регуляторами и инверторами на ОПУ.

1. *Пропорциональный регулятор* (П–Р) формирует алгоритм пропорционального управления  $U_2(t)=KU_1(t)$  и реализуется по схеме (рис. 1.6.2), процессы в которой приближенно описываются системой следующих уравнений:



$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = \frac{-U_2}{U_0}; \quad (1.6.1) \\ i_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_1}; \quad (1.6.2) \\ i_2 = \frac{U_0 - U_2}{R_2}; \quad (1.6.3) \\ i_0 = \frac{U_0}{R_0} = i_1 - i_2. \quad (1.6.4) \end{array} \right.$$

Рис. 1.6.2.

Из (1.6.1)–(1.6.4) последовательно получают уравнения

$$\frac{U_0}{R_0} = \frac{U_1 - U_0}{R_1} - \frac{U_0 - U_2}{R_2}; \quad U_0(R_1R_2 + R_0R_1 + R_0R_2) = U_1R_0R_2 + U_2R_0R_1;$$

$$U_2 = -K_0 U_0 = -K_0 \frac{U_1 R_0 R_2 + U_2 R_0 R_1}{R_1 R_2 + R_0 R_1 + R_0 R_2} \cdot \frac{1/R_0 R_1}{1/R_0 R_1} = -K_0 \frac{U_1 \frac{R_2}{R_1} + U_2}{\frac{R_2}{R_0} + 1 + \frac{R_2}{R_1}};$$

$$U_2 \left( \frac{R_2}{R_0} + 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + K_0 U_2 = -K_0 U_1 \frac{R_2}{R_1}; \quad U_2 = \frac{-K_0 \frac{R_2}{R_1} U_1}{\left( \frac{R_2}{R_0} + 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + K_0}. \quad (1.6.5)$$

В знаменателе уравнения (1.6.5) собственный коэффициент усиления  $K_0$  операционных усилителей имеет значения от 1300 до 80000 и более, что в 100 и более раз превышает сумму слагаемых в круглых скобках (обычно  $R_2/R_0 < 3$ , а  $R_2/R_1 < 10$ ). Поэтому слагаемое в круглых скобках в знаменателе уравнения (1.6.5) можно принять равным нулю, поскольку оно практически не влияет на величину выходного напряжения  $U_2$ . Тогда коэффициент передачи пропорционального регулятора  $K_{\text{П-Р}}$  и его операторную функцию передачи  $W(p)_{\text{П-Р}}$  можно записать в виде

$$K_{\text{П-Р}} = \frac{U_2}{U_1} \cong \frac{R_2}{R_1}; \quad W_{\text{П-Р}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \cong \frac{R_2(p)}{R_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (1.6.6)$$

2. *Интегральный регулятор* (И-Р) (рис. 1.6.3) формирует алгоритм управления в виде  $U_2(t) = K_{\text{И}} \int U_1(t) dt$ , который обеспечивает астатизм САУ (отсутствие установившейся ошибки) [1]. Процессы в регуляторе И-Р на ОПУ описываются ОФП в виде

$$W_{\text{И-Р}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{1/pC_2}{R_1} = \frac{1}{pR_1C_2} = \frac{1}{pT_{\text{И}}}. \quad (1.6.7)$$

3. *Пропорционально-интегральный регулятор* (ПИ-Р) (рис. 1.6.4), называемый *изодромным звеном*, формирует алгоритм управления  $U_2(t) = K_{\text{П}} U_1(t) + K_{\text{И}} \int U_1(t) dt$ , обеспечивает астатизм САУ и имеет ОФП в виде

$$W_{\text{ПИ-Р}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{R_2 + \frac{1}{pC_2}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} \left( 1 + \frac{1}{pC_2 R_2} \right) = K_{\text{Р}} \frac{pT_{\text{И}} + 1}{pT_{\text{И}}}. \quad (1.6.8)$$

4. Пропорционально-дифференциальный регулятор (ПД-Р) (рис. 1.6.5), называемый форсирующим звеном, формирует алгоритм пропорционально-дифференциального управления выходной величиной

$U_2(t) = K_{\text{П}}U_1(t) + K_{\text{Д}} \frac{dU_1(t)}{dt}$ , обеспечивает форсирование (ускорение во времени) переходных процессов в САУ и имеет ОФП

$$W_{\text{ПД-Р}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{R_2}{R_1 \cdot \frac{1}{pC_1} \left/ \left( R_1 + \frac{1}{pC_1} \right) \right.} = \frac{R_2}{R_1} (pR_1C_1 + 1) = K_{\text{Р}}(pT_{\text{Д}} + 1). \quad (1.6.9)$$

5. Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-Р) (рис. 1.6.6) формирует алгоритм управления  $U_2(t) = K_{\text{П}}U_1(t) + K_{\text{И}} \int U_1(t) dt + K_{\text{Д}} \frac{dU_1(t)}{dt}$ , обеспечивает форсирование переходных процессов и астатизм САУ и имеет ОФП в виде

$$W_{\text{ПИД-Р}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{R_2 + \frac{1}{pC_2}}{R_1 \cdot \frac{1}{pC_1} \left/ \left( R_1 + \frac{1}{pC_1} \right) \right.} = \frac{R_2}{R_1} \frac{pR_2C_2 + 1}{pR_2C_2} (pR_1C_1 + 1) = K_{\text{ПИД-Р}} \frac{1 + pT_{\text{И}}}{pT_{\text{И}}} (1 + pT_{\text{Д}}).$$

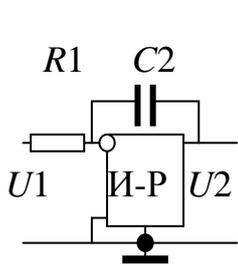


Рис. 1.6.3

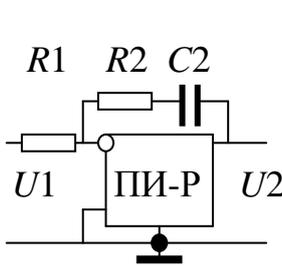


Рис. 1.6.4.

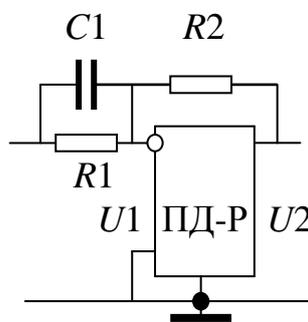


Рис. 1.6.5.

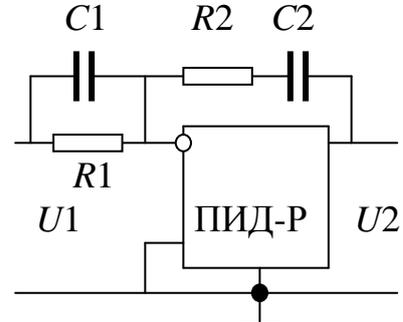


Рис. 1.6.6.

### 1.6.3. Синтез алгоритмических структур САУ

Рассмотрим синтез наиболее простых алгоритмических структур: разомкнутой, разомкнутой с компенсацией по возмущению, замкнутой, замкнутой с компенсацией по возмущению [1, 4, 6, 9, 12, 18, 24].

1. *Синтез разомкнутых алгоритмических структур САУ* сводится к определению ОФП регулятора  $W_P(p) = W_{Ж}(p)/W_0(p)$  для получения желаемой ОФП САУ  $W_{Ж}(p)$  при известной ОФП  $W_0(p)$  неизменяемой части САУ (рис. 1.6.7, нижняя часть). Желаемая ОФП САУ формируется по требованиям к свойствам САУ. *Идеальная структура разомкнутой САУ* получается при  $W_{Ж}(p) = 1$  и отсутствии возмущающих воздействий, если ОФП регулятора равна обратной ОФП неизменяемой части САУ. Включение последовательно с инерционным ОУ регулятора с ОФП в виде обратной модели ОУ называется *методом компенсации инерционности объекта управления*. Для компенсации инерционности ОУ регулятор должен содержать столько последовательно включенных дифференцирующих элементов, сколько инерционных звеньев имеется в ОУ. Такой регулятор пропускает и усиливает высокочастотные помехи, искажающие процесс управления. Для подавления помех можно поставить на входе сглаживающий фильтр  $\Phi$ , но это повышает инерционность САУ. Скомпенсировать все инерционности ОУ и получить САУ с бесконечной полосой пропускания частот невозможно. Поэтому обычно компенсируют одну-две наибольшие инерционности ОУ. Разомкнутые САУ имеют самую низкую точность управления, но обладают динамической устойчивостью и максимальной простотой, а значит высокой надежностью и низкой стоимостью.

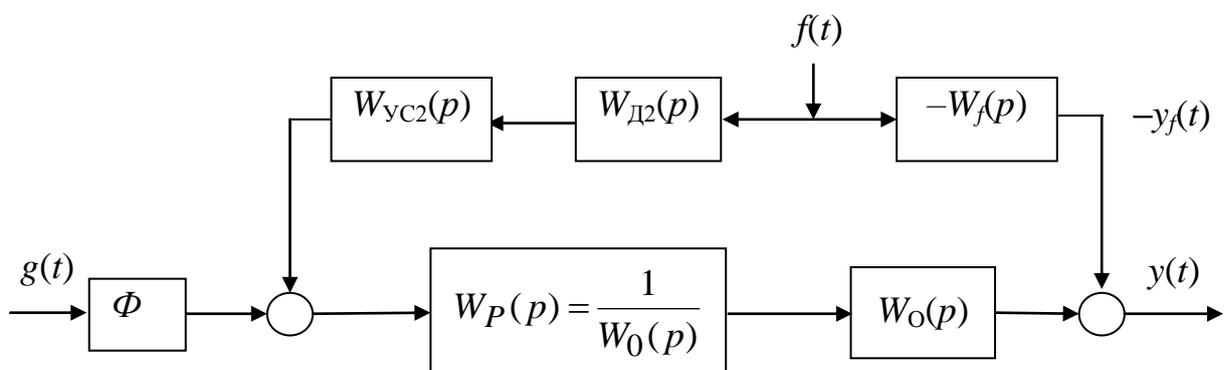


Рис. 1.6.7. Структура идеальной разомкнутой САУ с компенсацией возмущающего воздействия

2. Синтез разомкнутых алгоритмических структур с компенсацией возмущения обеспечивает в САУ инвариантность по возмущению, т. е. отсутствие влияния возмущающего воздействия  $f(t)$  на выходную величину  $y(t)$ . Для этого на вход идеальной разомкнутой САУ подается с обратным знаком компенсирующее воздействие, равное составляющей выходной регулируемой величины  $y_f(t)$  от действия возмущения  $f(t)$  по структуре (рис. 1.6.7). Условие инвариантности САУ по возмущающему воздействию  $f(t)$  реализуется в виде ОФП  $W_{yc2}(p) = W_f(p)/W_{д2}(p)$ , где  $W_f(p)$  – ОФП канала влияния  $f(t)$  на регулируемую величину, а  $W_{д2}(p)$  – ОФП датчика Д2 величины возмущающего воздействия  $f(t)$ .

Разомкнутые структуры с компенсацией возмущения имеют все недостатки и достоинства разомкнутых структур с дополнительным достоинством отсутствия влияния возмущения  $f(t)$  на регулируемую величину  $y(t)$ . Введение компенсации по возмущению  $f(t)$  изменяет задающее воздействие  $g(t)$ , но не превращает САУ в замкнутую систему, поскольку возмущение  $f(t)$  не зависит от процессов в САУ.

3. Синтез замкнутых алгоритмических структур в САУ (рис. 1.6.1) без учета влияния возмущающего воздействия  $f(t)$  заключается в определении ОФП регулятора  $W_p(p)$  для получения желаемой ОФП замкнутой САУ  $\Phi_{ж}(p)$  с учетом ОФП неизменяемой части  $W_o(p)$  и коэффициента  $K_{ос}$  цепи обратной связи

$$W_p(p) = \frac{\Phi_{ж}(p)}{W_o(p)[1 - K_{ос}\Phi_{ж}(p)]}. \quad (1.6.11)$$

Определение желаемой ОФП замкнутой САУ  $\Phi_{ж}(p)$  для получения требуемых характеристик САУ производится с использованием методов теории автоматического управления.

Замкнутые САУ действуют по принципу отрицательной обратной связи по цепи Д1 и УС1 (рис. 1.6.1). В сумматоре из заданного значения  $g(t)$  непрерывно вычитается измеренное значение выходной величины  $y(t)$  и полученный сигнал ошибки  $e(t) = g(t) - K_{ос} y(t)$  воздействует на регулятор и управляемый объект в направлении устранения ошибки независимо от причин ее возникновения.

В замкнутых САУ обеспечивается высокая точность и стабильность характеристик по сравнению с разомкнутыми САУ. Однако введение обратной связи приводит к появлению проблемы динамической устойчивости САУ – в замкнутой САУ при некоторых условиях

возможна потеря динамической устойчивости и работоспособности. Введение обратных связей также приводит к усложнению САУ, но только замкнутые САУ способны обеспечивать высокие требования к точности и качеству автоматического управления процессами.

4. *Синтез замкнутых структур САУ с компенсацией возмущающего воздействия* проводится для достижения самой высокой точности работы САУ за счет применения *комбинированного управления* по управляющему (задающему) или возмущающему воздействиям. Комбинированное управление заключается в создании в САУ противодействующих цепей влияния управляющего или возмущающего воздействия на ошибку управления с целью устранения или ослабления этого влияния, это называется *инвариантностью по управлению* или *инвариантностью по возмущению*. Инвариантность по управлению соответствует совпадению (равенству) выходной величины и управляющего воздействия и поэтому также называется *ковариантностью по управлению*. В САУ всегда стремятся получить полную или частичную инвариантность (независимость) ошибки управления от возмущающих и задающего воздействий.

*Инвариантность по возмущению* реализуется в САУ противодействующими цепями отрицательного воздействия  $f(t)$  на выходную величину  $y(t)$  через ОФП  $W_f(p)$  и положительного воздействия  $f(t)$  на  $y(t)$  через элементы Д2, УС2 (рис. 1.6.7) и замкнутый контур САУ с отрицательной обратной связью (рис. 1.6.1). Процессы в таких САУ описываются операторным уравнением

$$Y(p) = [G(p) + F(p)W_{Д2}(p)W_{УС2}(p)] \times \frac{W_P(p)W_O(p)}{1 + W_{OC}(p)W_P(p)W_O(p)} - W_f(p)F(p). \quad (1.6.12)$$

Из (1.6.12) условие инвариантности САУ по возмущению будет

$$W_{УС2}(p) = W_f(p) \frac{1 + W_{OC}(p)W_P(p)W_O(p)}{W_{Д2}(p)W_P(p)W_O(p)}. \quad (1.6.13)$$

*Инвариантность по управлению* (по отсутствию ошибки от задающего воздействия) достигается введением в структуру САУ дополнительных каналов воздействия задающей величины на выходную регулируемую величину с целью устранения или уменьшения ошибки регулирования по управлению (рис. 1.6.8).

В структуре САУ с комбинированным управлением по задающему воздействию (рис. 1.6.8, *а*) полная компенсация ошибки (полная инвариантность по управлению) достигается при  $W_K(p)=1/W(p)$ . Это соответствует совмещению структуры идеальной разомкнутой системы с ОФП  $W_K(p)W(p)=1$  по каналу  $G(p) \rightarrow W_K(p) \rightarrow W(p) \rightarrow Y(p)$  и структуры замкнутой системы по каналу  $G(p) \rightarrow W(p) \rightarrow Y(p)$  с обратной связью. При отсутствии возмущений  $f(t)=0$  ошибка в такой САУ будет равна нулю. Появление возмущений вызовет возникновение ошибки, которая будет обрабатываться замкнутой системой. Введение дифференцирующих звеньев в  $W_K(p)=1/W(p)$  для компенсации инерционностей затрудняет применение комбинированного управления из-за возрастания влияния помех. Поэтому обычно применяется только однократное и редко двукратное дифференцирование для компенсации наибольших инерционностей, что обеспечивает частичную инвариантность САУ по управлению.

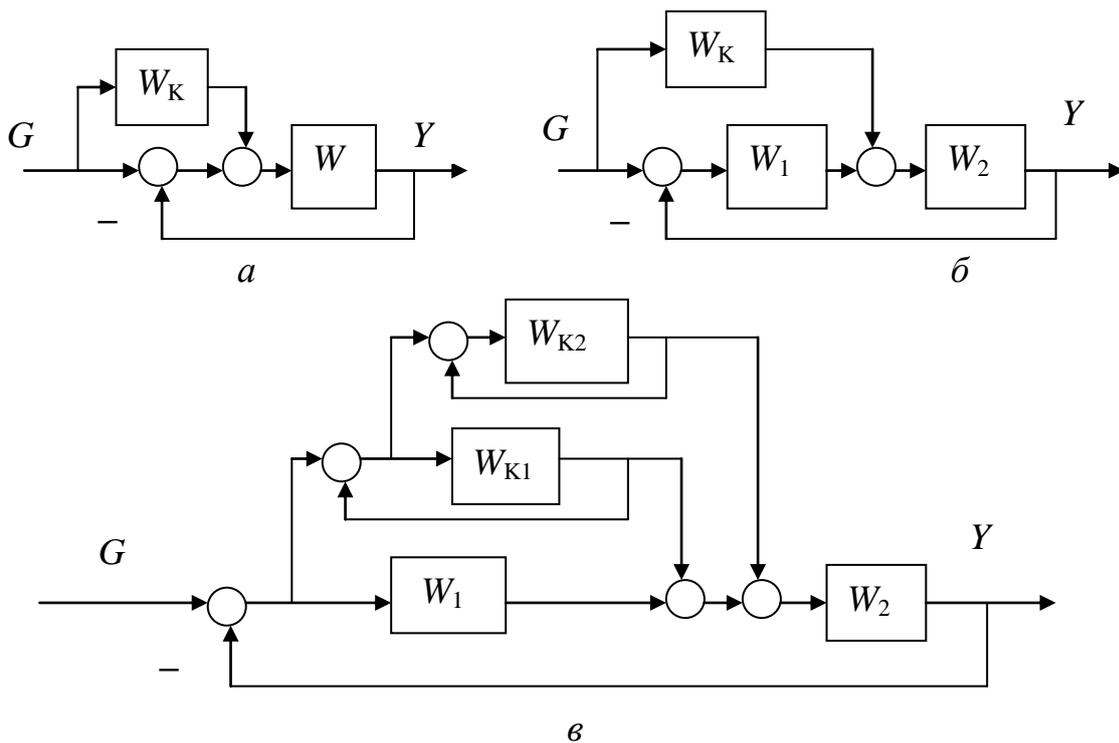


Рис. 1.6.8. Структуры инвариантных по управлению САУ с компенсацией ошибки по задающему воздействию

В структуре САУ (рис. 1.6.8, *б*) частичная инвариантность по управлению обеспечивается за счет компенсации инерционности ОУ. ОФП САУ по ошибке  $\Phi_{Ke}(p)=[1-W_K(p)W_2(p)]/[1+W_1(p)W_2(p)]$  уменьшается, но возрастает необходимая мощность для компенсации инерционности в ОУ.

В структуре САУ (рис. 1.6.3, в) можно получить очень высокую точность управления без нарушения устойчивости за счет введения совокупности замкнутых систем компенсации при условии устойчивости исходной системы и замкнутых устройств компенсации. Воспроизведение задающего воздействия в таких САУ осуществляется по методу последовательных приближений (итераций). Первая итерация реализуется в исходной САУ с ОФП  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$ , вторая – в САУ с ОФП  $W_{K1}(p)$  и  $W_2(p)$ , третья – в САУ с ОФП  $W_{K1}(p)$ ,  $W_{K2}(p)$  и  $W_2(p)$  и т. д. В исходной САУ ОФП по ошибке будет

$$\Phi_e(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (1.6.14)$$

В инвариантной САУ с тремя итерациями ОФП по ошибке будет

$$\Phi_{K\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p) + W_2(p) \left[ \frac{W_{K1}(p)}{1 + W_{K1}(p)} + \frac{W_{K2}(p)}{[1 + W_{K2}(p)] \cdot [1 + W_{K1}(p)]} \right]}. \quad (1.6.15)$$

Из (1.6.14) и (1.6.15) видно, что введение компенсирующих устройств уменьшает ошибку и с увеличением числа ступеней итераций ошибка все более уменьшается. При этом порядок астатизма инвариантной САУ равен сумме порядков астатизма исходной системы и системы компенсирующего устройства.

**Пример 1.6.1.** Оценить влияние коррекции по задающему воздействию в САУ со структурой (рис. 1.6.3,б) при  $W_K(p) = p/K_V$ , если  $W_1(p) = 1/(1 + pT_1)$  и  $W_2(p) = K_V/p(1 + pT_2)$ .

ОФП замкнутой исходной САУ, имеющей астатизмом первого порядка

$$\Phi(p) = \frac{K_V}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2) + K_V}. \quad (1.6.16)$$

ОФП по ошибке в исходной САУ

$$\Phi_e(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1T_2p^3}{K_V + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1T_2p^3}. \quad (1.6.17)$$

Делением числителя на знаменатель из (1.6.17) находим первые три коэффициента ошибки:  $C_0 = 0$ ;  $C_1 = 1/K_V$ ;  $C_2 = (1/K_V)(T_1 + T_2 - 1/K_V)$ .

ОФП замкнутой скорректированной САУ будет

$$\Phi_K(p) = \Phi(p) \left[ 1 + \frac{W_K(p)}{W_1(p)} \right] = \frac{T_1 p^2 + p + K_V}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_V}. \quad (1.6.18)$$

ОФП по ошибке для скорректированной САУ будет

$$\Phi_{Ke}(p) = 1 - \Phi_K(p) = [p^2(T_1 T_2 p + T_2)] / [T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_V]. \quad (1.6.19)$$

При определении коэффициентов ошибки делением числителя на знаменатель из (1.6.19) получим равными нулю два первых коэффициента ошибки, поскольку в числителе равны нулю свободный член и коэффициент при первой степени  $p$ . Введение коррекции в виде дифференцирующего звена повышает порядок астатизма с первого до второго без нарушения устойчивости САУ, поскольку характеристическое уравнение системы не изменилось.

### Контрольные вопросы

1. В какой последовательности обычно проводится синтез САУ?
2. Какие четыре типовых структуры используются в САУ?
3. Как реализовать метод компенсации инерционности ОУ в САУ?
4. Как реализовать условия инвариантности по возмущению в САУ?
5. Как реализовать условия инвариантности по управлению в САУ?

### 1.6.4. Синтез систем подчиненного регулирования

Для управления объектами, в которых выходная управляемая величина, ее первая и вторая производные по времени являются существенными управляемыми координатами, успешно применяются оптимизированные САУ, построенные по *принципу последовательной коррекции* или так называемому *принципу подчиненного регулирования* [1, 4, 24].

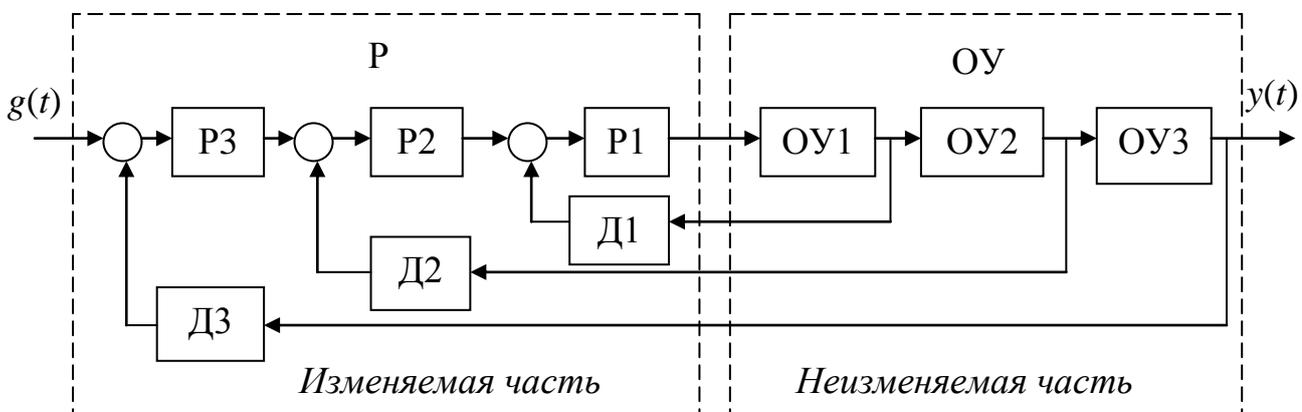


Рис. 1.6.9. Структура системы подчиненного регулирования

В системах подчиненного регулирования (рис. 1.6.9) объект управления ОУ представляется последовательно соединенными

звеньями ОУ1, ОУ2, ОУ3, выходной величиной каждого из которых управляют отдельные последовательно соединенные регуляторы Р1, Р2, Р3, образующие замкнутые контуры с ОУ1, ОУ2, ОУ3 посредством датчиков обратной связи Д1, Д2, Д3. Регуляторы соединяются последовательно так, что выход одного является входом для другого. При этом образуется система подчиненного регулирования, где каждый внутренний замкнутый контур (например, контур из Р1 и ОУ1) входит в качестве эквивалентного объекта управления (ЭОУ1) в состав соответствующего внешнего контура (из Р2, ЭОУ1 и ОУ2) и подчиняется его процессам управления.

Преимущества систем подчиненного регулирования состоят в простоте оптимизации регуляторов, в простоте и независимости ограничения каждой координаты, в широких возможностях применения унифицированных устройств управления, в упрощении и ускорении диагностики и наладки САУ. К недостаткам относится некоторая потеря быстродействия САУ из-за последовательной передачи воздействия ошибки на ОУ через контуры управления, а не сразу на ОУ. Поэтому в таких САУ применяется не более трех контуров управления (по положению, скорости и ускорению). Небольшая потеря быстродействия вполне оправдывается преимуществами систем подчиненного регулирования, что объясняет их массовое применение.

*Синтез систем подчиненного регулирования* заключается в последовательной оптимизации каждого контура регулирования в структуре (рис. 1.6.9), начиная с внутреннего контура Р1 и ОУ1, посредством *определения структуры и параметров регулятора*, превращающего замкнутый контур в *колебательное звено с малой постоянной времени* на основе метода компенсации инерционности.

ОФП колебательного звена с коэффициентом передачи  $K=1$

$$W_K(p) = \frac{1}{T_K^2 p^2 + 2\xi T_K p + 1}, \quad (1.6.20)$$

где  $T_K$  – постоянная времени,  $\xi$  – коэффициент затухания колебаний.

Из анализа ЛАЧХ, АЧХ и переходной функции колебательного звена (таблица 1.2.1, п. 4) следует, что постоянство модуля коэффициента передачи  $A(\omega)=1$  в наиболее широкой полосе частот от 0 до  $\omega_0$  обеспечивается при коэффициенте затухания колебаний  $\xi=0,707$ . Переходная функция колебательного звена при  $\xi=0,707$  имеет переуправление  $\sigma=0,043$ , время первого достижения выходной вели-

чиной установившегося значения  $t_p = 4,7 T_K$  (которое можно принять за время переходного процесса поскольку перерегулирование 4,3% входит в зону  $\pm 5\%$  отклонений при окончании переходного процесса), время затухания переходного процесса  $t_{ПП} = 9T_\mu$ . При  $\xi < 0,707$  частота  $\omega_0$  уменьшается из-за возрастания резонансного пика, а перерегулирование, колебательность и время переходного процесса увеличиваются. При  $\xi > 0,707$  частота  $\omega_0$  также уменьшается из-за уменьшения модуля  $A(\omega)$ , а переходный процесс становится апериодическим, но все более затянутым во времени.

Эти свойства колебательного звена используются для оптимизации ОФП замкнутых контуров при синтезе систем подчиненного регулирования в виде критерия *технического оптимума* [24]. Условия технического оптимума (называемого также *модульным оптимумом*) заключаются в приближении АЧХ замкнутого контура к форме прямоугольника с максимальной полосой пропускания частот.

Для этого ОФП регулятора синтезируется так, чтобы ОФП разомкнутой цепи контура  $W_{РМО}(p)$  представлялась последовательно соединенными апериодическим звеном с малой некомпенсируемой постоянной времени  $T_\mu$  и интегрирующим звеном с постоянной времени  $aT_\mu$  с единичными коэффициентами передачи, а другие инерционности были скомпенсированы

$$W_{РМО}(p) = \frac{1}{1 + pT_\mu} \cdot \frac{1}{paT_\mu}. \quad (1.6.21)$$

Тогда ОФП замкнутого контура, оптимизированного *по техническому (модульному) оптимуму* будет

$$W_{ЗМО}(p) = \frac{W_{РМО}(p)}{1 + W_{РМО}(p)} = \frac{1}{aT_\mu^2 p^2 + aT_\mu p + 1}. \quad (1.6.22)$$

Из сравнения коэффициентов в (1.6.22) и (1.6.20) при  $\xi = 0,707$  получается  $aT_\mu^2 = T_K^2$  или  $T_K = T_\mu \sqrt{a}$ , а  $aT_\mu = 2\xi T_K = 2 \cdot 0,707 T_\mu \sqrt{a}$ , откуда  $\sqrt{a} = 2 \cdot 0,707 = 1,414 = \sqrt{2}$ . Следовательно, для настройки замкнутого контура на *модульный оптимум* (МО) значение коэффициента  $a = 2$ . При  $a > 2$  затухание  $\xi > 0,707$  и переходные процессы становятся апериодическими, затянутыми во времени. При  $a < 2$  затухание  $\xi < 0,707$  и

перерегулирование, колебательность, время переходных процессов возрастают относительно оптимальных значений.

Быстродействие контура определяется постоянной времени  $T_\mu$ , которая может быть неограниченно малой. Практически в ОФП каждого оптимизируемого контура компенсируют инерционность двух–трех звеньев с наибольшими постоянными времени, а меньшие инерционности не учитывают, хотя на процессы они влияют. Это обусловлено невозможностью создания САУ с бесконечно широкой полосой пропускания частот за счет бесконечного уменьшения  $T_\mu$ . Поэтому при выборе  $T_\mu$  за ее значение обычно принимают наименьшую постоянную времени уже имеющегося в контуре инерционного элемента, что упрощает структуру регулятора. При синтезе внешнего контура внутренний замкнутый оптимизированный контур для упрощения расчетов представляется приближенно эквивалентным инерционным звеном первого порядка, без учета других составляющих.

Настройка на модульный оптимум (МО) придает замкнутому контуру и всей САУ *астатизм первого порядка*, соответствующий отсутствию установившейся ошибки по задающему воздействию.

Для получения *астатизма второго порядка* (отсутствия установившихся ошибок по задающему воздействию и по скорости его изменения) в разомкнутую цепь оптимизированного по МО контура вводится второй интегратор с постоянной времени  $4T_\mu$ , а для обеспечения устойчивости контура с двумя интеграторами дополнительно вводится форсирующее (пропорционально–дифференциальное) звено с такой же постоянной времени  $4T_\mu$ . В результате ОФП разомкнутой цепи контура приобретает вид, соответствующий настройке на так называемый *симметричный оптимум* (СО)

$$W_{PCO}(p) = \frac{1}{2T_\mu p(1+pT_\mu)} \cdot \frac{1}{4T_\mu p} \cdot (1+4T_\mu p). \quad (1.6.23)$$

Асимптотические ЛАЧХ разомкнутого контура с коэффициентом передачи  $K=1$  при настройке на модульный оптимум по (1.6.21) (рис. 1.6.10, а) и на симметричный оптимум по (1.6.23) (рис. 1.6.10, б) имеют одинаковые значения частоты среза  $\omega_c = 1/2T_\mu$  и частоты сопряжения  $\omega_2 = 1/T_\mu$ , но при настройке на симметричный оптимум в ЛАЧХ появляется еще частота сопряжения  $\omega_1 = 1/4T_\mu$  и ЛАЧХ приобретает симметричный вид, что привело к названию настройки на «симметричный оптимум» (СО). Повышение крутизны ЛАЧХ на низ-

кочастотном участке до 40 дБ/дек обеспечивает *астатизм второго порядка* – отсутствие ошибки по задающему воздействию и скорости его изменений (по первой производной по времени).

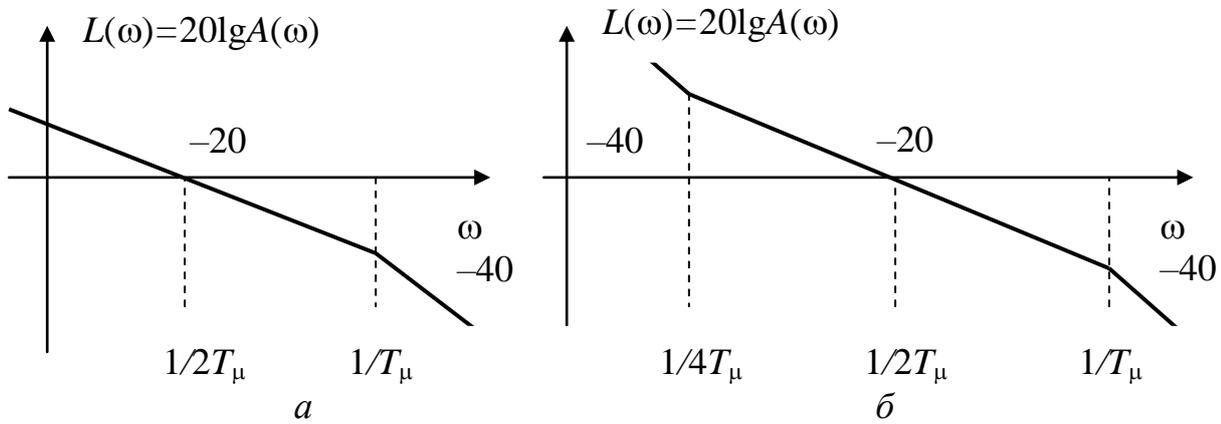


Рис. 1.6.10. ЛАЧХ разомкнутого контура САУ

Переходная характеристика замкнутого контура с настройкой на симметричный оптимум (СО) имеет перерегулирование  $\sigma=0,43$ , время первого достижения установившегося значения  $t_p=3,1T_\mu$  и время затухания переходного процесса  $t_{ПП}=15T_\mu$ .

При оптимизации нескольких контуров (рис. 1.6.9) некомпенсируемая постоянная времени каждого внешнего контура увеличивается в 2 раза по отношению к  $T_\mu$  внутреннего контура. Это ограничивает целесообразность применения систем подчиненного регулирования при числе контуров больше трех.

**Пример 1.6.2.** Синтезировать алгоритмическую структуру изменяемой части системы подчиненного регулирования скорости двигателя в тиристорном электроприводе с астатизмом второго порядка. Двигатель имеет ОФП якорной цепи  $W_{яц}(p)=K_{яц}/(1+pT_{яц})$ ,  $K_{яц}=2$  1/Ом,  $T_{яц}=0,02$  с; ОФП механической части  $W_M(p)=C_M/pJ$ ,  $C_M=0,69$  Нм/А,  $J=0,02$  кгм<sup>2</sup>; ОФП тиристорного преобразователя  $W_{ТП}(p)=K_{ТП}/(1+pT_{ТП})$ ,  $K_{ТП}=22$ ,  $T_{ТП}=0,01$  с; максимально допустимые значения тока  $I_{ЯМ}=22,7$  А и скорости  $\Omega_M=314$  1/с.

Для ограничения тока и скорости двигателя на максимально допустимых значениях САУ должна иметь отдельные регуляторы тока и скорости, т.е. система должна быть двухконтурной (рис. 1.6.11).

Выберем для построения регуляторов операционные усилители, в которых максимальное значение выходного напряжения ограничивается на уровне 10 вольт. Тогда для заданных ограничений тока и скорости необходимые значения коэффициентов передачи датчиков тока и скорости должны иметь значения

$$K_{ДТ} = U_{ЗТ\max} / I_{ЯМ} = 10/22,7 = 0,44 \text{ В/А}, \quad (1.6.24)$$

$$K_{ДС} = U_{ЗС\max} / \Omega_M = 10/314 = 0,032 \text{ Вс}. \quad (1.6.25)$$

САУ должна иметь астатизм второго порядка, значит внешний контур скорости нужно настраивать на симметричный оптимум, а для внутреннего контура тока можно выбрать настройку на модульный оптимум.

Настройка контура тока по модульному оптимуму заключается в выборе ОФП разомкнутого контура тока по желаемой ОФП (1.6.21) при  $a=2$

$$W_{РТ}(p) \cdot W_{ТП}(p) \cdot W_{ЯЦ}(p) \cdot K_{ДТ} = \frac{1}{2T_{\mu}p(1+pT_{\mu})}, \quad (1.6.26)$$

откуда ОФП оптимального регулятора тока при выборе  $T_{\mu}=T_{ТП}$  определится

$$\begin{aligned} W_{РТ}(p) &= \frac{(1+pT_{ТП})(1+pT_{ЯЦ})}{2T_{\mu}p(1+pT_{\mu})K_{ТП}K_{ЯЦ}K_{ДТ}} = \frac{1+pT_{ЯЦ}}{2T_{ТП}pK_{ТП}K_{ЯЦ}K_{ДТ}} \frac{T_{ЯЦ}}{T_{ЯЦ}} = \\ &= \frac{T_{ЯЦ}}{2T_{ТП}K_{ТП}K_{ЯЦ}K_{ДТ}} \frac{1+pT_{ЯЦ}}{pT_{ЯЦ}} = K_{РТ} \frac{1+pT_{РТ}}{pT_{РТ}}, \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

где  $T_{РТ}=T_{ЯЦ}=0,02$  с – постоянная времени пропорционально-интегрального регулятора тока, а его коэффициент передачи

$$K_{РТ} = \frac{T_{ЯЦ}}{2T_{ТП}K_{ТП}K_{ЯЦ}K_{ДТ}} = \frac{0,02}{2 \cdot 0,01 \cdot 22 \cdot 2 \cdot 0,44} = 0,05165. \quad (1.6.28)$$

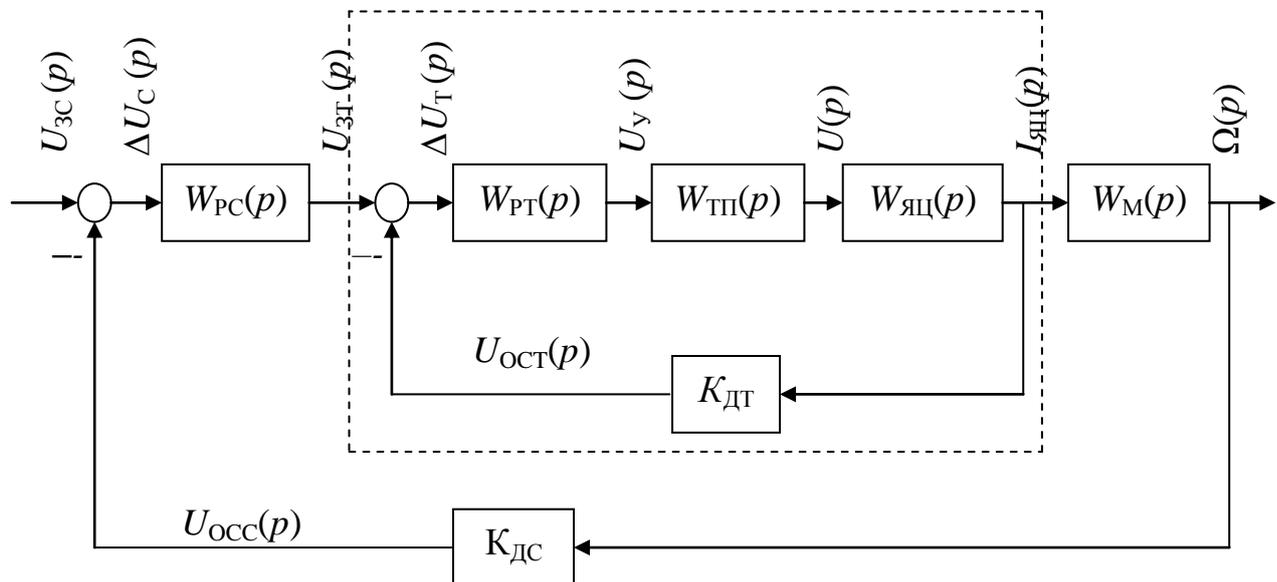


Рис. 1.6.11. Алгоритмическая структурная схема САУ

В схеме ПИ-регулятора тока на операционном усилителе (рис. 1.6.12) выберем конденсатор  $C$  емкостью  $10$  мкФ, затем определим величину сопротивления  $R_2 = T_{ПИ-Р} / C = 0,02 / 10 \cdot 10^{-6} = 2000$  Ом =  $2$  кОм и величину сопротивления  $R_1 = R_2 / K_{ПИ-Р} = 2000 / 0,05165 \approx 40$  кОм.

Для перехода к оптимизации внешнего контура скорости найдем приближенную ОФП эквивалентного оптимизированного замкнутого контура тока

$$W_{KT}(p) = \frac{W_{PT}(p)W_{ТП}(p)W_{ЯЦ}(p)}{1+W_{PT}(p)W_{ТП}(p)W_{ЯЦ}(p)K_{ДТ}} \approx \frac{2,273}{0,02p+1}. \quad (1.6.29)$$

Настройка контура скорости по критерию симметричного оптимума состоит в выборе ОФП разомкнутого контура скорости по условию (1.6.23)

$$W_{РС}(p) \cdot W_{KT}(p) \cdot W_{М}(p) \cdot K_{ДС} = \frac{1+4T_{с\mu}p}{2T_{с\mu}p(1+pT_{с\mu}) \cdot 4T_{с\mu}p}, \quad (1.6.30)$$

откуда ОФП регулятора скорости при выборе  $T_{с\mu}=2T_{\mu}=2 \cdot 0,01=0,02$  с будет

$$\begin{aligned} W_{РС}(p) &= \frac{1+4T_{с\mu}p}{2T_{с\mu}p(1+pT_{с\mu})4T_{с\mu}p} \frac{1}{W_{KT}(p)} \frac{1}{W_{М}(p)} \frac{1}{K_{ДС}} = \\ &= \frac{1+4 \cdot 0,02p}{2 \cdot 0,02p(1+0,02p) \cdot 4 \cdot 0,02p} \frac{1+0,02p}{2,273} \frac{0,02p}{0,69} \frac{1}{0,032} = \\ &= 9,96 \frac{1+0,08p}{0,08p} = K_{РС} \frac{1+pT_{РС}}{pT_{РС}}. \end{aligned} \quad (1.6.31)$$

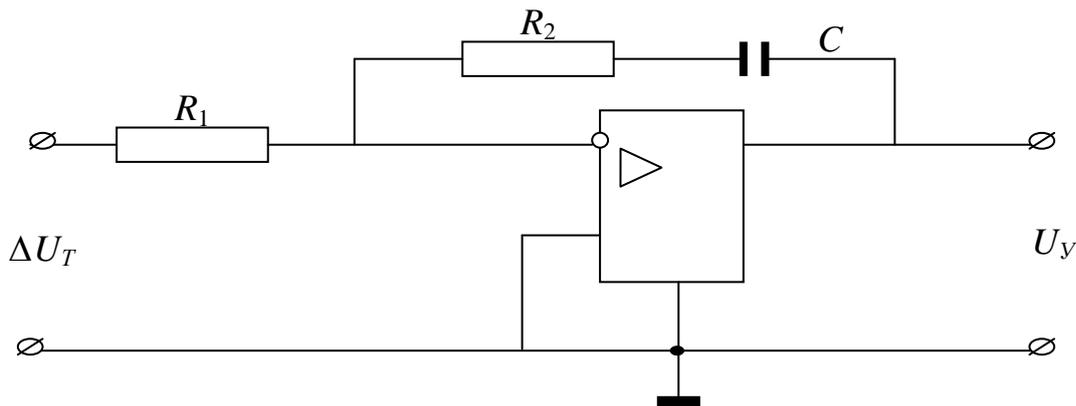


Рис. 1.6.12. Схема ПИ-регулятора на операционном усилителе

Выбираем ПИ-регулятор скорости (рис. 1.6.12) с  $K_{РС}=10$  и  $T_{РС}=0,08$  с при  $C=2$  мкФ,  $R_2=T_{РС}/C=0,08/2 \cdot 10^{-6}=40$  кОм,  $R_1=R_2/K_{РС}=40/10=4$  кОм.

Синтезированная САУ имеет астатизм второго порядка, следовательно, в системе отсутствуют ошибки управления по задающему воздействию и по скорости изменения задающего воздействия (по его первой производной).

### Контрольные вопросы

1. Как строится структура систем подчиненного регулирования?
2. Какие регуляторы могут компенсировать инерционности ОУ?
3. Почему  $\xi=0,707$  является оптимальным коэффициентом затухания?
4. Как выбирается ОФП разомкнутого контура при настройке на МО?
5. Как определяется ОФП регулятора для настройки контура на МО?
6. Для чего и как вводится настройка на симметричный оптимум (СО)?
7. Как учитывается внутренний контур при синтезе внешнего контура?
8. Достоинства и недостатки систем подчиненного регулирования?

### 1.6.5. Частотный метод синтеза САУ

Частотный метод синтеза САУ основан на использовании асимптотических характеристик разомкнутой одноконтурной САУ и состоит из следующих операций [1, 4, 9, 11, 24].

1. Построение асимптотической ЛАЧХ  $L(\omega)_{OY}$  неизменяемой части САУ, включающей УП, ИУ, ОУ, Д1, УС1 (рис. 1.6.1).

2. Формирование желаемой асимптотической ЛАЧХ  $L(\omega)_{Ж}$  разомкнутой САУ по требованиям к проектируемой САУ.

3. Формирование корректирующей асимптотической ЛАЧХ регулятора САУ методом вычитания  $L(\omega)_P = L(\omega)_{Ж} - L(\omega)_{OY}$ .

4. Техническая реализация регулятора с ЛАЧХ  $L(\omega)_P$ .

5. Проведение поверочного расчёта САУ для определения соответствия полученных характеристик САУ заданным требованиям.

Формирование желаемой ЛАЧХ целесообразно проводить на основе выбора одной из типовых ЛАЧХ (рис. 1.6.13) [1, 4, 9, 11], наиболее близкой к ЛАЧХ исходной неизменяемой части САУ.

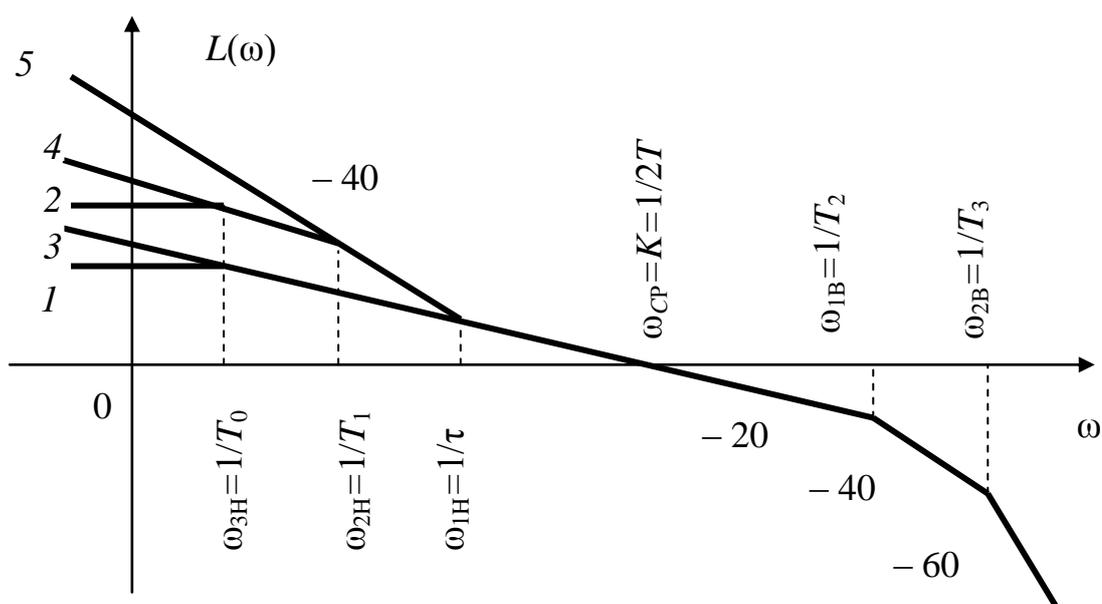


Рис. 1.6.13. Варианты типовых ЛАЧХ

Низкочастотная часть ЛАЧХ определяет точность САУ в установившихся режимах работы. Для ограничения ошибки по заданию (1.5.23) на допустимом уровне  $\Delta = (x_{ЗАД} - x_{ВЫХ}) / x_{ЗАД} = 1 / (1 + K)$  используются статические САУ с ЛАЧХ типа 1 или 2 с  $K \geq (1/\Delta) - 1$ . Для исключения ошибки по заданию и ограничения ошибки по скорости его изменения используются САУ с астатизмом первого порядка, имеющие ЛАЧХ типа 3 или 4. Для исключения ошибок по заданию и скорости его изменения и ограничения ошибки по ускорению изменения

задающего воздействия используются САУ с астатизмом второго порядка, имеющие ЛАЧХ типа 5. С учетом требуемых значений добротности по скорости  $K_V$  и ускорению  $K_E$  низкочастотная часть желаемой ЛАЧХ должна строиться выше и правее запретной зоны для ЛАЧХ (рис. 1.6.14).

Среднечастотная часть ЛАЧХ (рис. 1.6.14) определяет устойчивость САУ и качество переходного процесса. Частота среза определяется по формуле  $\omega_{CP} \geq b\pi / t_{ПП}$  [1, 4, 9, 24] в зависимости от заданного времени переходного процесса  $t_{ПП}$  и перерегулирования  $\sigma^{\%}$  (рис. 1.6.15, а) [24]. Вид переходного процесса приближается к реакции апериодического звена, оптимизированного по модульному оптимуму, если ЛАЧХ пересекает ось частот при  $\omega_{CP}$  с наклоном  $-20$  дБ/дек и продолжаться в обе стороны от  $\omega_{CP}$  до  $\omega_{1H}$  и  $\omega_{1B}$  при  $L(\omega_{1H}) = |L(\omega_{1B})|$  не меньше указанного в номограмме (рис. 1.6.15, б) [1].

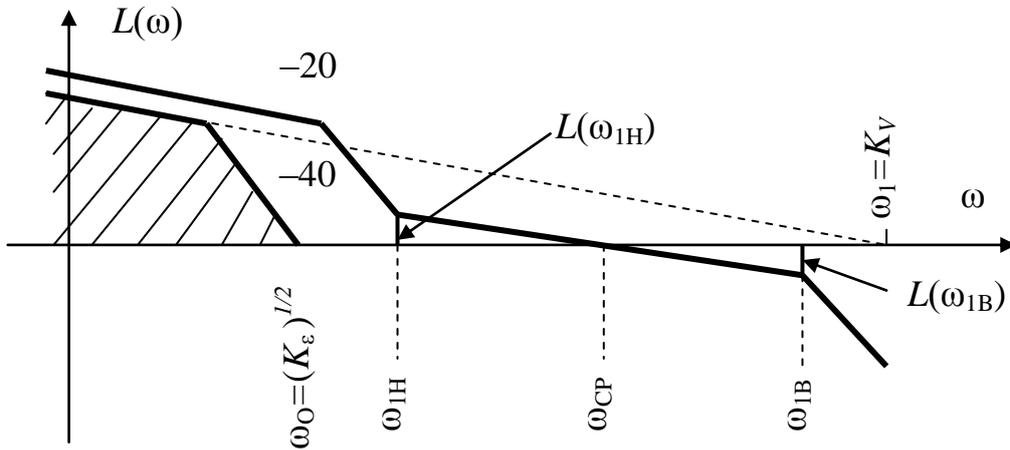


Рис. 1.6.14. Вид ЛАЧХ с учетом запретной зоны

При построении желаемой ЛАЧХ типа 4 (рис. 1.6.14) первая *низкочастотная асимптота* проводится с наклоном  $-20$  дБ/дек и пересекает ось частот при  $\omega_1 = K_V$  ( $K_V$  – заданная добротность по скорости). *Среднечастотная асимптота* с наклоном  $-20$  дБ/дек должна пересекать ось частот при  $\omega_{CP}$  и проходить влево и вправо до  $\omega_{1H}$  и  $\omega_{1B}$ , при которых модуль  $L(\omega_{1H}) = |L(\omega_{1B})|$  должен иметь необходимую величину в зависимости от требуемого запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi^{\circ}$  и допустимого перерегулирования  $\sigma^{\%}$ , определяемую по номограмме (рис. 1.6.15, б) [1, 24]. Среднечастотная и низкочастотная асимптоты сопрягаются асимптотами с наклоном, кратном  $\pm 20$  дБ/дек при условии обхода запретной области ЛАЧХ, построенной по заданным значениям добротности по скорости  $K_V$  и ускорению  $K_E$ .

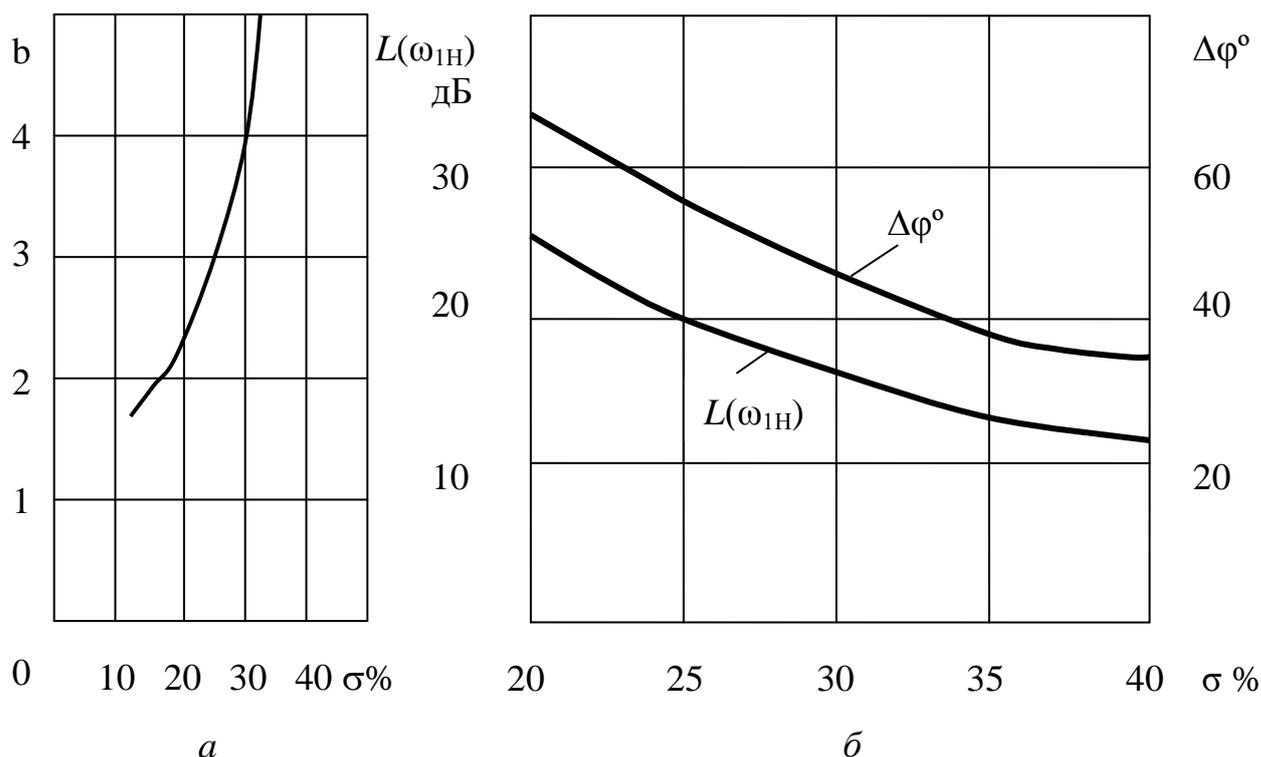


Рис. 1.6.15. Номограммы для выбора частоты среза  $\omega_{ср}$  и модуля  $L(\omega_{1H})$  в зависимости от заданных значений перерегулирования  $\sigma\%$  и запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi^\circ$

ЛАЧХ регулятора или корректирующего устройства (изменяемой части САУ) определяется вычитанием ЛАЧХ неизменяемой части САУ из желаемой ЛАЧХ, что быстрее и удобнее производить графическим методом. При этом ЛАЧХ регулятора будет состоять из асимптот с наклоном, равном нулю или кратном  $\pm 20$  дБ/дек, что упрощает реализацию регулятора с использованием типовых устройств управления и операционных усилителей. Для подъема запретной зоны ЛАЧХ на 3 дБ (рис. 1.5.6) на рис. 1.6.14 нужно увеличить в  $\sqrt{2}$  раз  $\omega_1 = \sqrt{2}K_V = \sqrt{2}(v_1 / \Delta g_1)$  и  $\omega_0 = \sqrt{\sqrt{2}K_\varepsilon} = \sqrt{\sqrt{2}(\varepsilon_1 / \Delta g_1)}$ , где  $v_m$  и  $\varepsilon_m$  – максимально допустимые скорость и ускорение изменения  $g(t)$ ,  $\Delta g_{м.доп} = [g(t) - g_{OC}(t)] / g(t)$  – максимально допустимая ошибка.

**Пример 1.6.3.** Синтезировать корректирующее устройство в САУ, обеспечивающей добротности по скорости  $K_V = 250$  1/с и по ускорению  $K_\varepsilon = 50$  1/с<sup>2</sup>, при длительности переходного процесса  $T_{Пп} \leq 0,5$  с и перерегулировании  $\sigma\% \leq 30\%$ , если неизменяемая часть САУ имеет ОФП в виде

$$W(p) = \frac{200}{p(1 + 0,1p)(1 + 0,003p)}. \quad (1.6.32)$$

Строим асимптоты запретной области для ЛАЧХ (как на рис. 1.6.14) с учетом её подъема на 3 дБ при требуемых добротностях по скорости (с наклоном  $-20$  дБ/дек при  $\omega_1 = \sqrt{2}K_V = 1,41 \cdot 250 = 352 \text{ с}^{-1}$ ) и по ускорению (с наклоном  $-40$  дБ/дек при  $\omega_0 = \sqrt{\sqrt{2}K_E} = \sqrt{1,41 \cdot 50} = 8,4 \text{ с}^{-1}$ ). Эти асимптоты пересекаются при частоте  $\omega_{\text{Э}} = K_E/K_V = 50/250 = 0,2 \text{ с}^{-1}$  (рис. 1.6.16).

По (1.6.32) строим ЛАЧХ неизменяемой части САУ  $L_0(\omega)$  (рис. 1.6.16). ЛАЧХ  $L_0(\omega)$  заходит в запретную зону, поэтому для достижения заданной точности нужно повысить коэффициент передачи с  $K=200 \text{ с}^{-1}$  до  $K_V=352 \text{ с}^{-1}$ . Строим первую асимптоту желаемой ЛАЧХ с наклоном  $-20$  дБ/дек по границе запретной области, пересекающую ось частот при частоте  $\omega_1 = K_V = 352 \text{ с}^{-1}$ .

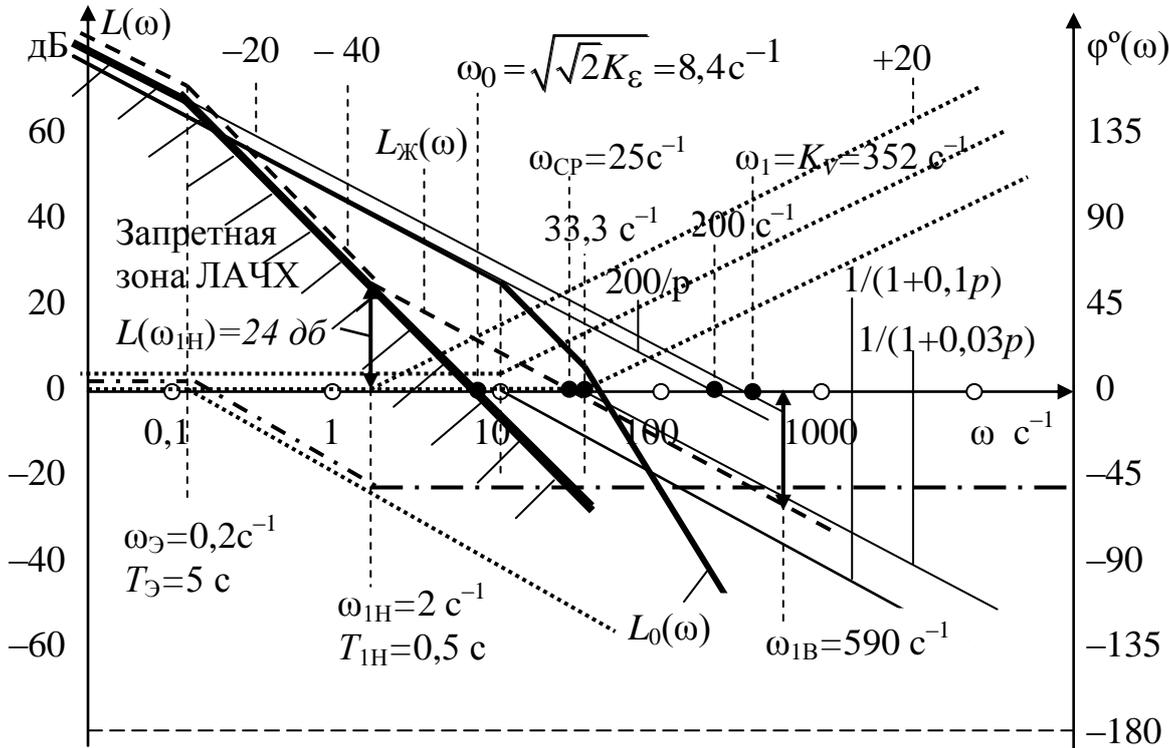


Рис. 1.6.16. Синтез ЛАЧХ САУ.

Определяем частоту среза желаемой среднечастотной ЛАЧХ по формуле  $\omega_{\text{ср}} \geq b\pi/t_{\text{пн}} = 4 \cdot 3,14/0,5 = 25 \text{ с}^{-1}$  по заданному перерегулированию 30% ( $b=4$  по номограмме рис. 1.6.15, а) и времени переходного процесса  $t_{\text{пн}} \leq 0,5 \text{ с}$ .

Строим среднечастотную асимптоту желаемой ЛАЧХ (пунктирная линия) при  $\omega_{\text{ср}} = 25 \text{ с}^{-1}$  с наклоном  $-20$  дБ/дек до её пересечения с запретной зоной при частоте  $\omega_{1\text{H}} = 2 \text{ с}^{-1}$  и модуле  $L(\omega_{1\text{H}}) \approx 24$  дБ, больше минимально необходимого  $L(\omega_{1\text{H}}) \approx 16$  дБ для  $\sigma\% = 30\%$  и  $\Delta\varphi = 45^\circ$  по номограмме (рис. 1.6.15, б).

При  $\omega_{\text{ср}} = 25 \text{ с}^{-1}$  строим желаемую ЛАЧХ САУ  $L_{\text{ж}}(\omega)$  (пунктирная линия), проходящую от  $\omega_{1\text{H}}$  до  $\omega_{1\text{B}}$  и подбираем четыре типовых корректирующих ЛАЧХ (точечные линии) (рис. 1.6.16), преобразующих исходную ЛАЧХ  $L_0(\omega)$  в желаемую ЛАЧХ  $L_{\text{ж}}(\omega)$  за счет введения корректирующего устройства с ОФП  $W_{\text{кy}}(p)$ , дополняющей ОФП исходной неизменяемой части САУ  $W(p)$  с увеличением коэффициента передачи в 1,76 раза для достижения  $K=352$ .

$$W_{\text{Ж}}(p) = W_{\text{КУ}}(p) \times W(p) = \frac{1}{1+5p} \cdot (1+0,5p) \cdot 1,76(1+0,1p) \cdot (1+0,03p) \times \\ \times \frac{200}{p(1+0,1p)(1+0,03p)} = \frac{352(1+0,5p)}{p(1+5p)} = \frac{352}{p} \cdot \frac{1}{1+5p} (1+0,5p). \quad (1.6.33)$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ желаемой САУ, состоящей из интегрирующего, апериодического и форсирующего звеньев (1.6.33), представляются в виде

$$L_{\text{Ж}}(\omega) = 20\lg 352 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1+(5\omega)^2} + 20\lg \sqrt{1+(0,5\omega)^2}; \quad (1.6.34)$$

$$\varphi^\circ(\omega) = -90^\circ - \arctg 5\omega + \arctg 0,5\omega. \quad (1.6.35)$$

Из (1.6.33) и (1.6.35) видно, что при выбранном способе формирования желаемой ЛАЧХ заданная САУ всегда устойчива, поскольку запаздывание по фазе не может достичь минус  $180^\circ$  при любом повышении частоты.

Из условия  $L_{\text{Ж}}(\omega_{\text{ср}}) = 0$  по (1.6.34) уточним значение частоты среза для ЛАЧХ скорректированной САУ. При выбранной минимальной частоте среза  $\omega_{\text{ср}} = 25 \text{ с}^{-1}$  это условие не выполняется. По формуле  $\omega \geq b\pi/tj \text{ } j$  и номограмм на рис. 1.6.15 следует, что частоту среза можно только увеличивать. Проведя исследование по формуле (1.6.34), получаем частоту среза  $35 \text{ с}^{-1}$ , при которой условие  $L_{\text{Ж}}(35) \approx 0$  выполняется, а повышение частоты среза уменьшает перерегулирование и время переходного процесса.

$$L_{\text{Ж}}(35) = 20\lg 352 - 20\lg 35 - 20\lg \sqrt{1+(5 \cdot 35)^2} + 20\lg \sqrt{1+(0,5 \cdot 35)^2} = \\ = 20 \cdot 2,546 - 20 \cdot 1,544 - 20 \cdot 2,243 + 20 \cdot 1,243 = 50,92 - 30,88 - 44,86 + \\ + 24,86 = 75,78 - 75,74 \approx 0.$$

При уточненной частоте среза  $35 \text{ с}^{-1}$  по (1.6.35) фазовое запаздывание

$$\varphi^\circ(35) = -90^\circ - \arctg 5 \cdot 35 + \arctg 0,5 \cdot 35 = -90^\circ - 89,7^\circ + 86,7^\circ = -93^\circ.$$

Запас устойчивости по фазе составляет  $\Delta\varphi^\circ = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$ .

Выбираем схему построения корректирующего устройства (рис. 1.6.17) в виде последовательно соединенных двух ПД-регуляторов на операционных усилителях (1.6.10) (рис. 1.6.5) и интегрирующего пассивного RC-звена [1], реализующих передаточную функцию  $W_{\text{КУ}}(p)$  в ОФП САУ  $W_{\text{Ж}}(p)$  (1.6.33)

$$W_{\text{КУ}}(p) = 1,76(1+0,1p) \cdot 1(1+0,03p) \cdot \frac{1+0,5p}{1+5p} = \\ = \frac{R_{12}}{R_{11}}(1+T_{11}p) \cdot \frac{R_{22}}{R_{21}}(1+T_{21}p) \cdot \frac{1+T_{32}p}{1+T_{31}p}, \quad (1.6.36)$$

где

$$R_{12} = 176 \text{ кОм}; R_{11} = 100 \text{ кОм}; T_{11} = R_{11}C_{11} = 100 \text{ кОм} \cdot 1,0 \text{ мкФ} = 0,1 \text{ с};$$

$$R_{22} = R_{21} = 300 \text{ кОм}; T_{21} = R_{21}C_{21} = 300 \text{ кОм} \cdot 0,1 \text{ мкФ} = 0,03 \text{ с};$$

$$T_{32} = R_{32} \cdot C_{32} = 50 \text{ кОм} \cdot 10,0 \text{ мкФ} = 0,5 \text{ с}; T_{31} = (R_{31} + R_{32})C_{32} = (450 + 50)10 = 5 \text{ с}.$$

ПД-регулятор с ОПФ  $1,76(1+0,1p)$  повышает коэффициент передачи САУ в 1,76 раза до значения  $K=352$  и компенсируют инерционность апериодического звена  $1/(1+0,1p)$  в неизменяемой части САУ.

Второй ПД-регулятор с ОПФ  $1(1+0,03p)$  компенсирует инерционность звена с ОПФ  $1/(1+0,03p)$  в неизменяемой части САУ.

Корректирующее RC-устройство с ОПФ  $(1+0,5p)/(1+5p)$  образует корректирующую ЛАЧХ (штрих-пунктирная линия на рис. 1.6.16), которая формирует сопряжение низкочастотной и среднечастотной частей желаемой ЛАЧХ САУ с наклоном  $-40$  дБ/дек по границе запретной области на участке частот от  $\omega_{\text{Э}}$  до  $\omega_{1\text{Н}}$ . При  $\omega \geq \omega_{1\text{Н}}$  ЛАЧХ этого корректирующего RC-устройства представляется

горизонтальной асимптотой с  $L(\omega) = 20 \lg \frac{R_{32}}{R_{31} + R_{32}} = 20 \lg \frac{T_{32}}{T_{31}} = \text{const}$  [1], обеспе-

чивающей формирование среднечастотной асимптоты желаемой ЛАЧХ САУ с наклоном  $-20$  дБ/дек (пунктирная линия на рис. 1.6.16) до любой большой частоты  $\omega > \omega_{\text{СР}}$ . Фазовая частотная характеристика корректирующего RC-устройства представляется зависимостью  $\varphi(\omega) = \arctg \omega T_{32} - \arctg \omega T_{31}$  и никогда не может достигать минус  $90^\circ$ .

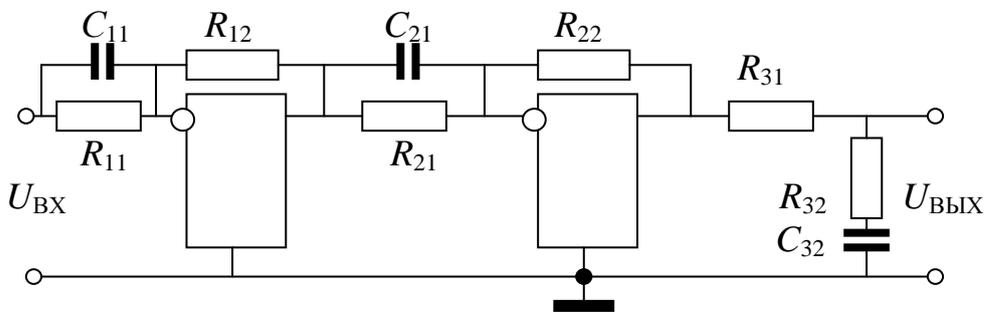


Рис. 1.6.17. Схема корректирующего устройства

### Контрольные вопросы

1. На каком принципе основан частотный метод синтеза САУ?
2. Из каких операций (этапов) состоит синтез САУ частотным методом?
3. Какой вид имеют ЛАЧХ статических САУ и астатических САУ с астатизмом первого и второго порядка?
4. По каким требованиям выбирается частота среза  $\omega_{\text{СР}}$  ЛАЧХ и значения модуля  $L(\omega_{1\text{Н}}) = |L(\omega_{1\text{В}})|$  при  $\omega_{1\text{Н}} < \omega_{\text{СР}} < \omega_{1\text{В}}$ ?
5. Как строится запретная зона для ЛАЧХ по допустимым значениям ошибки, скорости и ускорения?

## 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ САУ

### 2.1. Классификация дискретных САУ

*Дискретными (прерывистыми)* называют САУ, в которых хотя бы один элемент в контуре управления преобразует непрерывный сигнал  $x(t)$  в прерывистый сигнал во времени [1, 2, 6, 9, 12, 15].

Преобразование непрерывного сигнала в дискретный (прерывистый) сигнал называется *дискретизацией* при определенном способе дискретной модуляции. *Дискретная модуляция* заключается в фиксации (запоминании) в определенном виде мгновенного значения непрерывного сигнала  $x(t)$  в дискретные моменты времени  $t=nT$ . Операция дискретизации называется *квантованием*, которую осуществляют импульсные или релейные элементы и аналого-цифровые преобразователи (АЦП), преобразующие непрерывный сигнал  $x(t)$  в дискретный сигнал  $x[nT]$ .

К дискретным (прерывистым) системам относятся импульсные, релейные и релейно-импульсные (цифровые) САУ. В *импульсных САУ* квантование сигнала  $x(t)$  производится по времени с  $T=\text{const}$  (рис. 2.1.1, а), в *релейных САУ* – по достижении сигналом  $x(t)$  одного из заданных уровней (рис. 2.1.1, б), в *релейно-импульсных (цифровых) САУ* – по времени с  $T=\text{const}$  и по уровню с равномерным распределением уровней по двоичной, десятичной или иной системе счисления (рис. 2.1.1, в) [1, 6, 9, 12, 15].

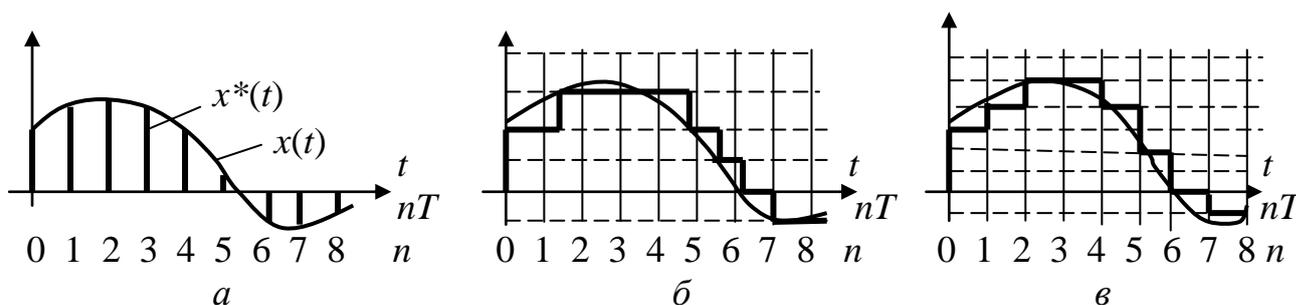


Рис. 2.1.1. Способы модуляции (квантования) сигналов

Практически к дискретным САУ относят только импульсные и цифровые САУ, расчет которых ведется методами теории дискретных систем управления, а релейные САУ относят к непрерывным системам с нелинейностями релейного типа, расчет которых ведется методами теории непрерывных нелинейных систем управления [1, 9].

В дискретных САУ используются следующие способы дискретной модуляции непрерывного входного сигнала  $x(t)$ .

1) *Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)* (рис. 2.1.2, а) осуществляется импульсным элементом, при которой амплитуда каждого импульса  $x^*_A(t)$  при  $\gamma = \text{const}$  в момент начала очередного периода квантования  $nT$  при  $T = \text{const}$  равна или пропорциональна входному непрерывному сигналу  $x^*(t) = x(nT)$ , а полярность импульса соответствует полярности входного сигнала. При этом совокупность ординат импульсов  $x(nT)$ , называемых *дискретам* исходной непрерывной функции  $x(t)$  при  $t = nT$ , образует *решетчатую функцию времени*  $x^*(t) = x[nT] = x[n]$ . Дискреты от функции  $x(t)$  можно также получить для смещенных моментов времени  $t = nT + \Delta T$  при  $\Delta T = \text{const}$ . При этом из  $x(t)$  образуется *смещенная решетчатая функция времени*  $x^*(t, \varepsilon) = x[nT, \Delta T] = x[n, \varepsilon]$ , которая определяет значения  $x(t)$  внутри периодов квантования  $nT$ .

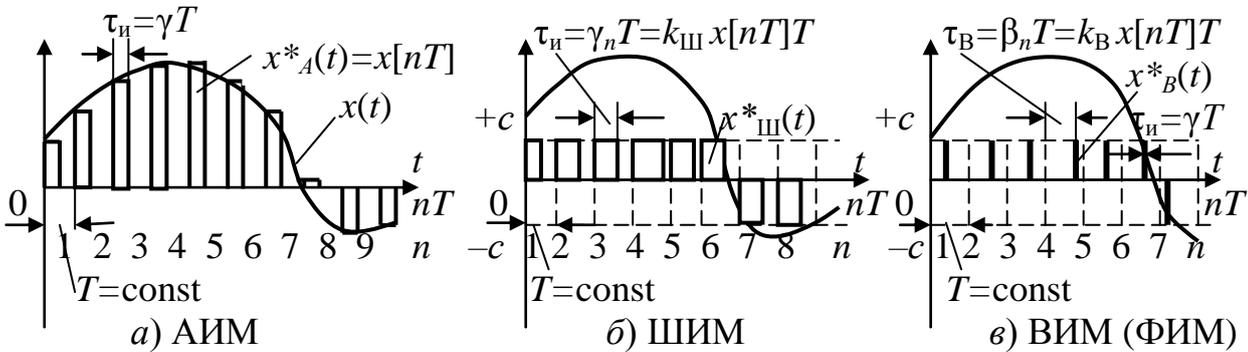


Рис. 2.1.2. Способы импульсной модуляции

2) *Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)* (рис. 2.1.2, б) осуществляется переключениями импульсного элемента (ИЭ) так, что в начале каждого периода квантования  $nT$  на выходе ИЭ формируется импульс с постоянной амплитудой  $\pm c$ , ширина (продолжительность) которого пропорциональна входному сигналу  $\tau_n = \gamma_n T = k_{III} x[nT] \cdot T$ . Выбор коэффициента  $k_{III}$  дает ширину импульсов, не превышающую период квантования  $\tau_n = \gamma_n T < T$  при наибольшем входном сигнале  $x(t)$ .

3) *Время-импульсная модуляция (ВИМ)* (рис. 2.1.2, в), называемая также *фазо-импульсной модуляцией (ФИМ)*, осуществляется переключениями ИЭ так, что на выходе ИЭ формируются короткие импульсы с длительностью  $\tau_u = \gamma T$  (при  $\gamma \ll 1$ ) и постоянной амплитудой  $\pm c$  с запаздыванием (сдвигом) от начала каждого периода квантования  $nT$  на время  $\tau_B = \beta_n T = k_B x[nT] \cdot T$ , пропорциональное значению входного сигнала  $x(t)$  в начале периода квантования при  $t = nT$ . При соответствующем выборе коэффициента  $k_B$  время запаздывания не

превышает период квантования  $\tau_B = \beta_n T < T$  при наибольших значениях входного сигнала  $x(t)$ .

4) *Кодоимпульсная модуляция* (рис. 2.1.1, в), называемая *кодированием* непрерывного сигнала  $x(t)$ , осуществляется *аналого-цифровыми преобразователями* (АЦП) посредством одновременного квантования непрерывного входного сигнала  $x(t)$  по времени с периодом  $T = \text{const}$  и по уровню, который фиксируется в начале каждого периода  $t = nT$  в виде многоразрядного цифрового кода определенного числа  $x(t) = x[nT] = kh[nT]$ . Знак числа (+ или -) обозначается отдельным (знаковым) разрядом. Величина числа  $kh$  представляется произведением размера (цены)  $h$  единицы младшего разряда квантования сигнала по уровню на количество  $k$  уровней квантования (рис. 2.1.1, в). Количество уровней  $k$  квантуемого сигнала принимается равным ближайшему к текущему значению входного сигнала  $x(t)$  в момент начала очередного периода квантования  $nT$ :  $(k+1)$  при  $x[nT] \geq (k+0,5)h$  или  $(k-1)$  при  $x[nT] \leq (k-0,5)h$  и запоминается на весь очередной период квантования.

В *импульсных САУ* дискретные сигналы на выходе импульсного элемента имеют *информационную* и *энергетическую* составляющие и их воздействие на усилитель и другие непрерывные элементы САУ вызывает ответные реакции отработки этих воздействий.

В *цифровых САУ* дискретные кодоимпульсные сигналы на выходе АЦП представляются серией импульсов в виде параллельного или последовательного кода. Однако эти сигналы содержат *только информационную* составляющую и *не имеют энергетической* составляющей, а поэтому не могут воздействовать на усилители и другие непрерывные элементы САУ. Наполнение кодоимпульсных сигналов энергетической составляющей осуществляют *цифро-аналоговые преобразователи* (ЦАП), на выходе которых получается непрерывный выходной сигнал ступенчатой формы, который вызывает ответные реакции усилителей и других непрерывных элементов САУ.

САУ, в которых сопряжение управляющих ЭВМ и микропроцессорных устройств управления с непрерывными элементами осуществляется с использованием АЦП и ЦАП, называются *цифро-аналоговыми САУ*.

Цифро-аналоговые САУ практически строят по двум основным функциональным структурным схемам [2].

1) *САУ с центральной управляющей ЭВМ* – применяются для управления в реальном времени многочисленными, но достаточно инерционными технологическими процессами, в которых процессор

ЭВМ в режиме прерываний успевает обслуживать поочередно все каналы управления (в доменном и сталеплавильном производстве, в теплоэнергетических и химико-технологических комплексах и т.п.).

2) САУ с автономными управляющими микро-ЭВМ, которые называются микроконтроллерами, обеспечивают в каждом контуре автономное управление. В таких децентрализованных САУ управление в реальном времени осуществляется без прерываний и без применения длинных линий связи, поскольку микроконтроллеры располагаются вблизи обслуживаемых объектов. САУ с децентрализованным микроконтроллерным управлением имеют низкую стоимость и высокую надежность и обычно строятся по следующим схемам [2]:



Рис. 2.1.3. Одноконтурные САУ с микроЭВМ

1) САУ с микроЭВМ вне контура управления, которая осуществляет так называемое супервизорное управление с формированием в ЭВМ только задающего воздействия (рис. 2.1.3, а);

2) САУ с микроЭВМ в контуре управления, которая выполняет функции цифрового регулятора САУ (рис. 2.1.3, б);

3) САУ с микроЭВМ в контуре управления, которая выполняет функции управляющего цифрового устройства (рис. 2.1.3, в).

В первой структуре микроЭВМ только формирует задающее воздействие для САУ (или нескольких САУ). При этом ЭВМ не влияет на устойчивость и качество управления в САУ. Во второй и третьей структурах микроЭВМ, ЦАП и АЦП участвуют в процессах управления и их характеристики влияют на работу САУ.

Квантование сигнала по уровню при кодоимпульсной модуляции обуславливает нелинейность цифровых САУ. Однако, при большом числе разрядов и малом периоде квантования, дискретную величину  $x^*(t)=x^*[nT]$  можно считать близкой к непрерывной величине  $x(t)$  (рис. 2.1.1, в). При этом нелинейную кодоимпульсную модуляцию (рис. 2.1.1, в) можно заменить линейной амплитудно-импульсной модуляцией при  $\gamma=1$  (рис. 2.1.2, а). Если при этом алгоритм вычислений в ЭВМ  $u[nT]=f\{x[nT]\}$  (рис. 2.1.3, б) будет линейным, то такую САУ можно рассчитывать как линейную импульсную САУ при  $\gamma=1$ . При нелинейном алгоритме вычислений в ЭВМ, САУ будет сложной нелинейной импульсной системой [1, 2, 15].

Дискретные САУ с непрерывной выходной частью, содержащей инерционные звенья, постоянные времени которых на порядок и более превышают период квантования дискретных сигналов и полностью подавляют их прохождение на выход САУ, могут рассчитываться без учета дискретности квантования сигналов как обычные линейные или нелинейные непрерывные САУ. В таких случаях дискретная часть САУ представляется безынерционными звеньями с соответствующими статическими характеристиками (коэффициентами передачи) по усредненным значениям их входных и выходных величин [15].

### Контрольные вопросы

1. Как осуществляется квантование входного непрерывного сигнала в импульсных, релейных и релейно-импульсных (цифровых) системах?
2. Что называется дискретами и решетчатой функцией сигнала?
3. Почему САУ, содержащие ЭВМ, строятся как цифро-аналоговые?
4. Свойства САУ с центральной ЭВМ и с автономными микро-ЭВМ?
5. По каким структурам строят одноконтурные САУ с управляющей ЭВМ?
6. При каких условиях цифровые САУ могут рассматриваться как линейные импульсные системы с амплитудно-импульсной модуляцией?
7. В каких случаях дискретные САУ могут рассматриваться как обыкновенные линейные или нелинейные непрерывные системы управления?

## 2.2. Математическое описание дискретных САУ

Процессы в дискретных САУ могут рассчитываться как непрерывные процессы  $x(t)$  без учета дискретизации сигналов, либо как дискретные процессы  $x^*[nT]$  в дискретном времени  $t=nT$  [1, 2, 15].

Расчет дискретных САУ без учета дискретизации сигналов возможен при периоде квантования  $T \ll 0,1T_{0y}$  – постоянной времени инерционного звена непрерывной выходной части (объекта управления) САУ, служащей фильтром низких частот и полностью подавляющей сигналы с частотой квантования. При этом расчет САУ ведется методами теории непрерывных систем управления [1, 4, 6, 9].

Во всех других случаях дискретные САУ должны рассчитываться как импульсные системы с учетом дискретизации сигналов и представлением процессов в дискретном времени с использованием методов теории импульсных систем управления [1, 2, 9, 11, 12, 15, 18].

### 2.2.1. Модель импульсного элемента

Основным звеном дискретных САУ является *импульсный элемент* (ИЭ), который преобразует непрерывный сигнал  $x(t)$  в последовательность импульсов  $x^*(t)$  той или иной формы (рис. 2.1.2). Поскольку импульсы имеют малую длительность  $\tau_{И} \ll T_{\min}$ , где  $T_{\min}$  – наименьшая из постоянных времени в передаточной функции  $W_H(p)$  инерционной непрерывной выходной части САУ), то можно считать, что информация передается *не формой, а площадью импульсов* [2, 15]. Тогда для расчетов САУ в модели ИЭ можно выбирать любую форму выходных импульсов, имеющих одинаковую площадь с выходными импульсами реального ИЭ. Обычно выбирают модель идеального ИЭ с выходными импульсами в виде *дельта-функций Дирака* формирующих решетчатую функцию на выходе ИЭ [2, 15]

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \cdot \delta(t - nT), \quad (2.2.1)$$

полагая, что изменение высоты (амплитуды) импульсов  $x[nT]$  обозначает пропорциональное изменение площади импульсов.

Если необходимо учитывать форму импульсов, то модель ИЭ в виде (2.2.1) дополняется включением после ИЭ *формирователя импульсов (экстраполятора)*, формирующего из  $\delta$ -импульсов решетчатой функции выходного сигнала ИЭ реальные импульсы прямоугольной, треугольной или иной формы. Для этого формирователь должен

иметь импульсную переходную функцию, совпадающую с формой выходных импульсов реального ИЭ [1, 2, 6, 9, 12, 15].

При *прямоугольной форме* реальных импульсов на выходе ИЭ с амплитудно-импульсной модуляцией (рис. 2.1.2, а) формирователь должен иметь импульсную переходную функцию, представляемую двумя ступенчатыми функциями времени (рис. 2.2.1) [15]

$$K_{\Phi}(t) = 1[t] - 1[t - \tau_{И}]. \quad (2.2.2)$$

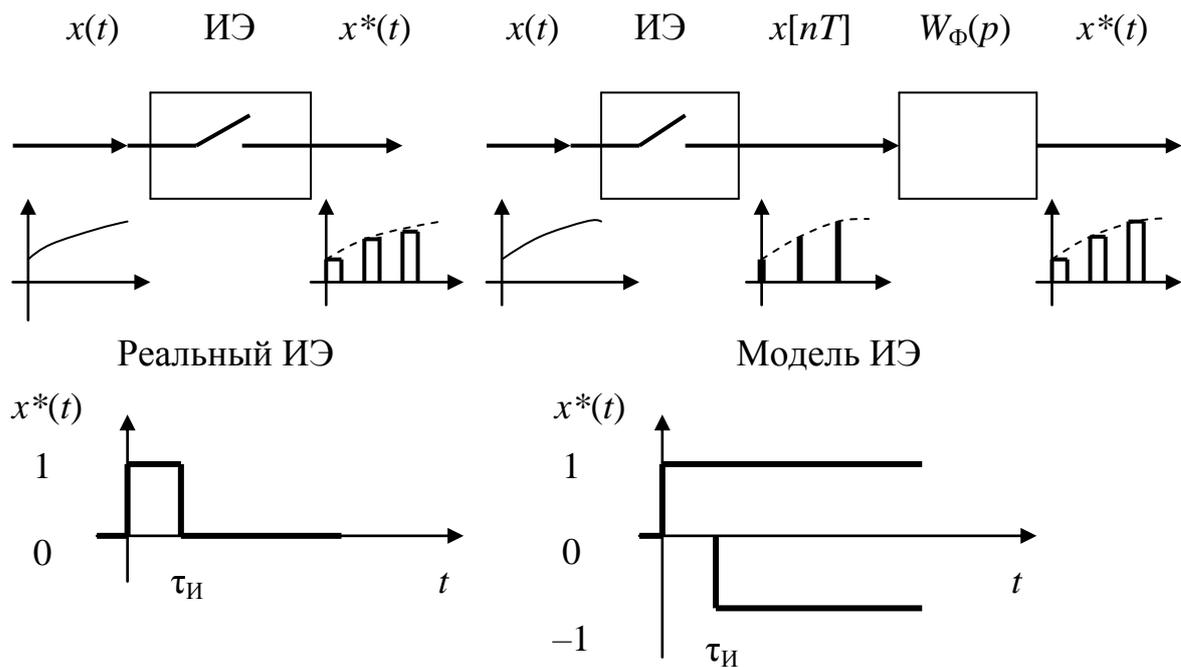


Рис. 2.2.1. Модель формирования прямоугольных импульсов

Операторная функция передачи формирователя прямоугольных импульсов и всей математической модели ИЭ из (2.2.2) при использовании преобразований Лапласа и теоремы сдвига будет [15]

$$\begin{aligned} W_{\Phi}(p) &= L\{K_{\Phi}(t)\} = L\{1[t] - 1[t - \tau_{И}]\} = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\tau_{И}p} = \frac{1 - e^{-\tau_{И}p}}{p}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Таким образом, модель ИЭ с АИМ представляется последовательно включенными идеальным ИЭ (квантователем) с импульсными выходными сигналами в виде решетчатой функции (2.2.1) и формирователем импульсов (экстраполятором) с ОФП (2.2.3).

В САУ с цифровыми ЭВМ сопряжение ЭВМ с непрерывными частями САУ осуществляется с помощью АЦП и ЦАП (рис. 2.2.2). Дискретные сигналы информации формируются в АЦП с постоянным

периодом квантования, как и в ИЭ импульсных САУ, но информация передается различными способами.

В импульсных САУ на выходе ИЭ формируется решетчатая функция из импульсов, амплитуда и площадь которых пропорциональна входной величине  $x(t)$  в дискретные моменты  $t=nT$  и содержит энергетическую составляющую. Такие импульсы, воздействуя на непрерывную часть САУ, вызывают ее ответную реакцию в виде импульсного переходного процесса.

В САУ с ЭВМ сигналы на выходе АЦП и выходе ЭВМ также представляются решетчатой функцией, но состоящей из импульсов кода, не содержащих энергетической составляющей и поэтому не способных воздействовать на непрерывную часть САУ. Сигналы от ЭВМ могут воздействовать на непрерывную часть САУ только через ЦАП, выполняющий функцию формирователя импульсов и наполняющий решетчатую функцию энергетической составляющей.

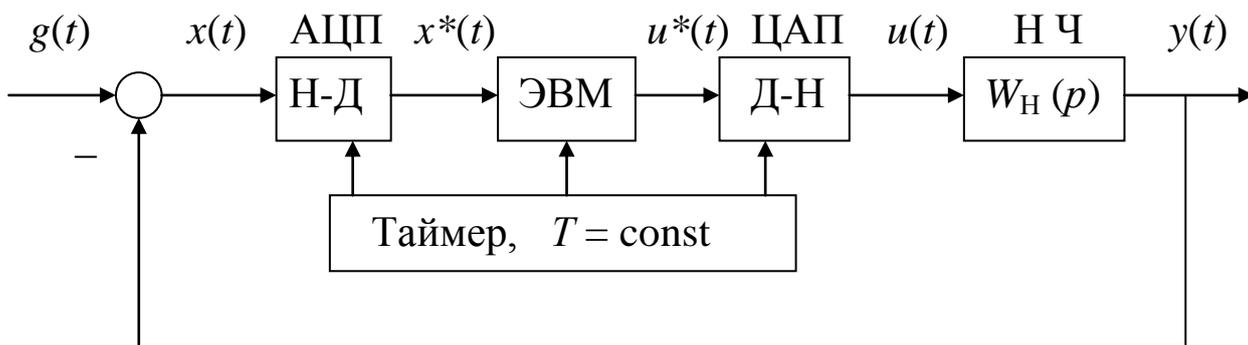


Рис. 2.2.2. Структура цифро-аналоговой САУ с ЭВМ

Другая особенность САУ с ЭВМ заключается в квантовании непрерывного сигнала  $x(t)$  по времени  $x^*(t)=x^*[nT]$  и по уровню  $x^*(t)=kh[nT]$ . Шаг квантования по времени  $T$  определяется быстродействием ЭВМ и сложностью алгоритма обработки информации. Шаг квантования по уровню определяется числом разрядов кода. Поэтому САУ с ЭВМ относятся к нелинейным системам с релейно-импульсной модуляцией. Однако при большом числе разрядов эффект от релейного ступенчатого квантования сигналов по уровню можно не учитывать и приближенно представлять ЭВМ чисто импульсным устройством. В этом случае САУ с ЭВМ при линейных алгоритмах обработки информации можно представлять *линейной импульсной моделью* (рис. 2.2.2), содержащей непрерывную выходную часть  $W_H(p)$ , непрерывно-дискретные устройства (АЦП и ЦАП) и чисто импульсное устройство (ЭВМ) [2, 12, 15]. Если ЭВМ должна выполнять нелинейные преобразования сигналов информации (ум-

ножение, возведение в степень, тригонометрические преобразования и т. п.), то в таких случаях ЭВМ должна представляться релейно-импульсным устройством и для расчетов САУ с ЭВМ необходимо использовать методы теории нелинейных релейно-импульсных САУ [1, 2, 15, 20].

### Контрольные вопросы

1. Какие свойства имеют сигналы на выходе ИЭ и на выходе АЦП?
2. Почему выходные сигналы ЭВМ не могут воздействовать на усилители и другие элементы непрерывной части САУ?
3. Почему в САУ с ЭВМ можно не учитывать квантование по уровню?

### 2.2.2. Дискретно-разностные уравнения САУ

В дискретных САУ управляющие сигналы  $x^*(t)=x[nT]$  представляются решетчатыми функциями времени, значения которых определены только для моментов времени  $t=nT$  (рис. 2.2.3).

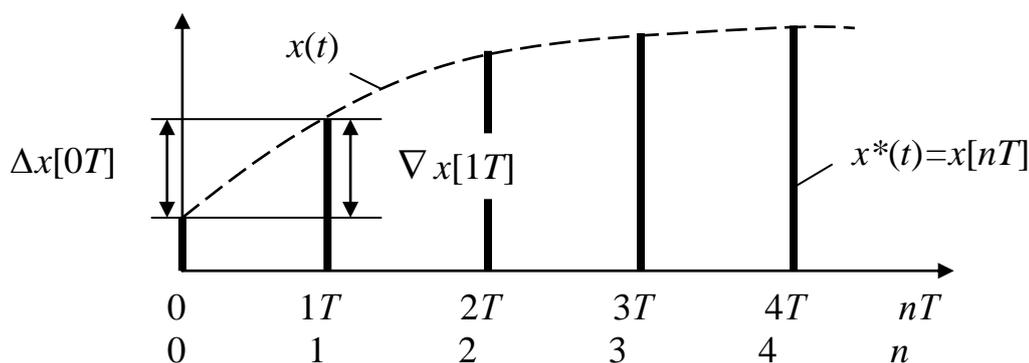


Рис. 2.2.3. Решетчатая функция сигнала

Непрерывная функция  $x(t)$ , совпадающая с вершинами дискретной решетчатой функции  $x[nT]$ , называется *огibaющей решетчатой функцией*. Каждой решетчатой функции соответствует множество огибающих (ступенчатая, треугольная, гармоническая и др.), но используется в расчетах единственная *основная огибающая функция*, которая совпадает с вершинами дискретной и получается в результате решения дифференциального уравнения наименьшего порядка. Например, решетчатой функции  $x[nT]=e^{-anT}$  соответствуют огибающая  $x_1(t)=e^{-at}$  и огибающая  $x_2(t)=e^{-at}(\cos\omega t+b\sin\omega t)$ . Основной огибающей будет первая огибающая, полученная из решения дифференциального уравнения первого порядка, тогда как вторая огибающая получается из решения дифференциального уравнения второго порядка.

Аналогом первой производной от основной огибающей решетчатой функции является либо *первая прямая разность* (*прямая разность первого порядка*) – разность будущего и текущего значений решетчатой функции  $x[nT]$  (рис. 2.2.3)

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n], \quad (2.2.4)$$

либо *первая обратная разность* текущего и прошлого значений решетчатой функции (используется в САУ с ЦВМ, имеющих память)

$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]. \quad (2.2.5)$$

Аналогом второй производной от основной огибающей решетчатой функции являются *вторые разности* (*разности второго порядка*): *вторая прямая разность* будущего и текущего значений первых прямых разностей

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] = x[n+2] - 2x[n+1] + x[n] \quad (2.2.6)$$

или *вторая обратная разность* текущего и прошлого значений первых обратных разностей

$$\nabla^2 x[n] = \nabla x[n] - \nabla x[n-1] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]. \quad (2.2.7)$$

Третьи и последующие разности определяются аналогично.

Аналогом интеграла от основной огибающей функции в пределах от 0 до  $t$  для решетчатой функции  $x[n]$  являются *неполная сумма* ее дискрет (без учета последней дискреты функции)

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} x[m] = \sum_{v=1}^n x[n-v] \quad (2.2.8)$$

и *полная сумма* (с учетом последней дискреты функции)

$$\sigma_0[n] = \sigma[n] + x[n] = \sum_{m=0}^n x[m] = \sum_{v=0}^n x[n-v]. \quad (2.2.9)$$

Аналогами дифференциальных уравнений непрерывных огибающих функций для дискретных систем, описанных решетчатыми функциями, являются *дискретно-разностные уравнения* (*уравнения в конечных разностях*). При использовании обратных разностей неоднородные линейные дискретно-разностные уравнения имеют вид

$$b_0 \nabla^m y[n] + b_1 \nabla^{m-1} y[n] + \dots + b_{m-1} \nabla y[n] + b_m y[n] = g[n], \quad (2.2.10)$$

или с учетом замены приращений значениями дискрет

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{m-1} y[n-(m-1)] + a_m y[n-m] = g[n]. \quad (2.2.11)$$

Коэффициенты уравнения (2.2.11) определяются по формуле [1]

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (2.2.12)$$

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!} \quad (2.2.13)$$

где  $k=0, 1, 2, \dots, m$  – порядковый номер коэффициента в уравнении (2.2.11);  $v=0, 1, 2, \dots, m$  – порядковый номер коэффициента в уравнении (2.2.10);  $b_v$  – значения коэффициентов в уравнении (2.2.10).

Дискретно-разностные уравнения можно получить и при использовании прямых разностей.

Дискретно-разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения дискрет  $y[n]$  при  $n=1, 2, 3, \dots$  для заданных начальных значений  $y[n-m], y[n-m+1], \dots, y[n-1]$  с использованием уравнения (2.2.11).

Общее решение однородного дискретно-разностного уравнения (2.2.11) при нулевой правой части выражает свободное (собственное) движение в дискретной САУ. При некрратных корнях характеристического уравнения, получаемого из (2.2.11) в виде

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0, \quad (2.2.14)$$

свободное движение в дискретной САУ представляется уравнением

$$y[n] = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_m\lambda_m^n = \sum_{i=1}^m C_i\lambda_i^n, \quad (2.2.15)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_m$  – постоянные коэффициенты, определяемые из начальных условий;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  – корни уравнения (2.2.14).

Из (2.2.15) вытекает *условие устойчивости* дискретной системы, определяющее затухание свободных движений в САУ, которое обеспечивается при модуле всех корней характеристического уравнения (2.2.14) меньших единицы  $|\lambda_i| < 1, i = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Для использования дискретно-разностных уравнений в расчетах импульсных САУ необходимо знание теории разностных уравнений. Практически удобнее использовать для расчетов импульсных САУ *дискретные преобразования Лапласа* или *Z-преобразования*, позволяющих вести расчеты подобно расчетам непрерывных САУ.

### Контрольные вопросы

1. Что называется основной огибающей решетчатой функции?
2. Как вычисляются первые, вторые и последующие прямые и обратные разности непрерывных огибающих решетчатых функций?
3. Какой вид имеют дискретно-разностные уравнения САУ?
4. Как из дискретно-разностного уравнения САУ определить характеристическое уравнение, его корни и уравнение свободного движения САУ?
5. Как определить динамическую устойчивость дискретной САУ по уравнению ее свободного движения?

### 2.2.3. Дискретные преобразования

Для непрерывных функций времени  $f(t)$  преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.2.16)$$

Для решетчатых функций времени  $f[nT]$  при  $t=nT$  *дискретное преобразование Лапласа* определяется формулой [1, 2, 9, 12, 15]

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-pnT}, \quad (2.2.17)$$

а для смещенных решетчатых функций  $f[n, \varepsilon]$ , где  $t=nT+\Delta T=(n+\varepsilon)T$ ,

$$F^*(p, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon]e^{-pnT}. \quad (2.2.18)$$

В формулах (2.2.16)–(2.2.18) комплексная величина  $p=c+j\omega$ , где  $c$  – абсцисса абсолютной сходимости. Если  $c<\infty$ , то ряд, определяемый формулами, сходится и преобразуемой функции соответствует определенное изображение. В (2.2.17) и (2.2.18) изображение решетчатой функции зависит от величины  $e^{pT}=z$ , что позволяет получить более широко применяемые  $Z$ -изображения решетчатых функций

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad (2.2.19)$$

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon]z^{-n}. \quad (2.2.20)$$

В таблице 2.2.1 приведены  $Z$ -изображения решетчатых функций для наиболее часто используемых производящих непрерывных функций и их обыкновенных преобразований по Лапласу [1, 2, 20].

### 2.2.4. Свойства дискретных преобразований

Приведем некоторые свойства  $Z$ -преобразований, часто используемые при расчетах дискретных САУ.

1. *Свойство линейности* – изображение линейной комбинации решетчатых функций равно линейной комбинации их изображений

$$f[n] = \sum_{v=1}^N c_v f_v[n], \quad (2.2.21)$$

$$F[z] = \sum_{\nu=1}^N c_{\nu} f_{\nu}(z). \quad (2.2.22)$$

## 2. Конечное значение решетчатой функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (2.2.23)$$

## 3. Начальное значение решетчатой функции

$$f[0] = \lim_{n \rightarrow 0} f[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (2.2.24)$$

## 4. Разложение в ряд Лорана. Из выражения (2.2.19) следует

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} = f[0] + f[1]z^{-1} + \dots + f[k]z^{-k} + \dots .$$

Разложив изображение  $F(z)$  в ряд Лорана

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_k z^{-k} + \dots ,$$

и сравнивая два полученных ряда между собой, можно установить, что  $c_0 = f[0]$ ,  $c_1 = f[1]$ ,  $c_2 = f[2]$ , ...,  $c_k = f[k]$ .

Для дробно-рациональных функций удобно получать разложение в ряд Лорана делением числителя на знаменатель [1, 2, 20].

### Контрольные вопросы

1. Что можно получить из таблицы изображений решетчатых функций?
2. Свойства линейности  $z$ -изображений решетчатых функций?
3. Как определить конечное значение решетчатой функции  $f[n]$  по  $F(z)$ ?
4. Как определить начальное значение решетчатой функции  $f[0]$  по  $F(z)$ ?
5. Как получить из  $F(z)$  оригинал решетчатой функции  $f[n]$  с использованием разложения  $F(z)$  в ряд Лорана?

## Изображения решетчатых функций

Таблица 2.2.1

Производящая непрерывная функция: оригинал      преобразование Лапласа		Несмещённая решетчатая функция $t=nT$	Z – преобразование несмещённое $t=nT$		смещённое на $\varepsilon$ $t=nT+\Delta T=(n+\varepsilon)T$
1	2	3	4	5	
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$	–	$\delta_0[n]$	1	0	
$1(t) - 1(t - T)$	$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$	$-\Delta 1[n] = \nabla 1[n - 1]$	1	1	
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1[n]$	$\frac{z}{z - 1}$	$\frac{z}{z - 1}$	
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$nT$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$	$Tz \left[ \frac{\varepsilon}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2} \right]$	

1	2	3	4	5
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[ \frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{2\varepsilon}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{(nT)^3}{3!}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{3!(z-1)^4}$	$\frac{T^3 z}{3!} \left[ \frac{\varepsilon^3}{z-1} + \frac{3\varepsilon^2}{(z-1)^2} + \frac{3\varepsilon(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4} \right]$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$	$\frac{zd^\varepsilon}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^\varepsilon}{z-d}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zd}{(z-d)^2}$	$\frac{zd^\varepsilon \varepsilon}{z-d} + \frac{zd^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2}$
$\frac{t^2}{2!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!} e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)d^2}{2!(z-d)^3}$	$\frac{zd^\varepsilon \varepsilon^2}{2!(z-d)} + \frac{zd^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2} + \frac{z(z+d)d^{\varepsilon+2}}{2!(z-d)^3}$

1	2	3	4	5
$\sin \pi \frac{t}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\sin \pi n = 0$	0	$\frac{z \sin \pi \varepsilon}{z+1}$
$\cos \pi \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\cos \pi n = (-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos \pi \varepsilon}{z+1}$
$\sin \frac{\pi t}{2T}$	$\frac{0,5\pi T^{-1}}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\sin \frac{\pi}{2} n$	$\frac{z}{z^2 + 1}$	$\frac{z^2 \sin \frac{\pi}{2} \varepsilon + z \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon}{z^2 + 1}$
$\cos \frac{\pi t}{2T}$	$\frac{p}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\cos \frac{\pi}{2} n$	$\frac{z^2}{z^2 + 1}$	$\frac{z^2 \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon - z \sin \frac{\pi}{2} \varepsilon}{z^2 + 1}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\sin \beta n T$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin(1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$

Продолжение таблицы 2.2.1

1	2	3	4	5
$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos\beta nT$	$\frac{z^2 - z\cos\beta T}{z^2 - 2z\cos\beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos\varepsilon\beta T - z\cos(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2z\cos\beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha nT} \sin\beta nT$	$\frac{zd \sin\beta T}{z^2 - 2zd \cos\beta T + d^2}$	$zd^\varepsilon \frac{z \sin\varepsilon\beta T + d \sin(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2zd \cos\beta T + d^2}$
$e^{-\alpha t} \cos\beta t$	$\frac{p}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha nT} \cos\beta nT$	$\frac{z^2 - zd \cos\beta T}{z^2 - 2zd \cos\beta T + d^2}$	$zd^\varepsilon \frac{z \cos\varepsilon\beta T - d \cos(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2zd \cos\beta T + d^2}$

### 2.2.5. Передаточные функции дискретных САУ

В импульсных САУ (рис. 2.2.4) импульсный элемент ИЭ преобразует непрерывный сигнал ошибки  $x(t)$  в решетчатую функцию  $x[n]$

$$x[n] = x(t) \cdot \delta(t - nT), \quad (2.2.25)$$

а экстраполятор  $W_{\text{Э}}(p)$  и непрерывная часть  $W_{\text{Н}}(p)$  являются *импульсным фильтром* ИФ с приведенной ОФП  $W_{\text{П}}(p) = W_{\text{Э}}(p)W_{\text{Н}}(p)$ , преобразующим решетчатую функцию  $x[n]$  в непрерывный выходной сигнал  $y(t)$ . Экстраполятор запоминает величину дискреты в начале каждого периода квантования, преобразуя решетчатую функцию в ступенчатый сигнал, а непрерывная инерционная часть САУ усредняет (сглаживает) ступенчатый сигнал, подавляя колебания [1, 6, 9, 11, 12].

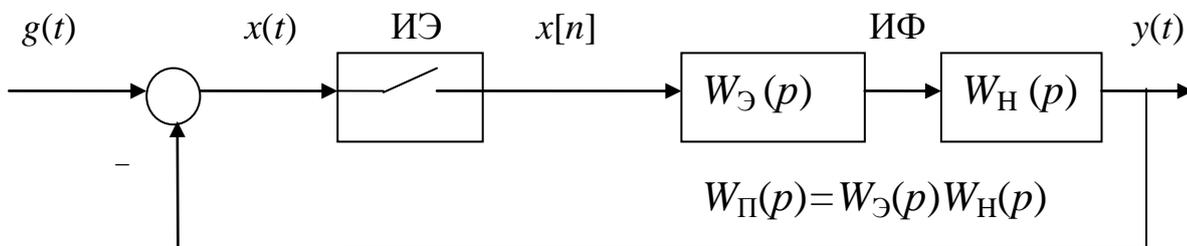


Рис. 2.2.4. Линейная импульсная САУ

#### 2.2.5.1. Передаточные функции разомкнутых САУ

Приведенная ОФП импульсного фильтра и всей разомкнутой САУ (из рис. 2.2.4), при формировании прямоугольных импульсов в экстраполяторе нулевого порядка с ОФП (2.2.3), имеет вид [1, 9, 12]

$$W_{\text{П}}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_{\text{Э}}(p)W_{\text{Н}}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_{\text{Н}}(p). \quad (2.2.26)$$

При этом зет-функция передачи (ЗФП)  $W(z)$  импульсного фильтра и всей разомкнутой САУ определяется выражением [1, 11, 12]

$$W(z) = Z\{W_{\text{П}}(p)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} W_{\text{Н}}(p)\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{\text{Н}}(p)}{p}\right\}, \quad (2.2.27)$$

где  $W_{\text{П}}(p) = W_{\text{Э}}(p) \cdot W_{\text{Н}}(p)$  является ОФП *всей цепи разомкнутой САУ* от выхода ИЭ до выхода САУ, включая датчик обратной связи. Это обусловлено тем, что в импульсных САУ с одним ИЭ приведенная ЗФП  $W_{\text{П}}(z)$  *не равна произведению ЗФП последовательно соединенных звеньев*  $W_{\text{П}}(z) \neq \prod W_i(z)$ , как в непрерывных САУ [1, 11]. ЗФП па-

раллельно соединенных звеньев можно суммировать, но перемножать ЗФП последовательно соединенных звеньев можно только при наличии на их входах собственных импульсных элементов (либо преобразователей АЦП и ЦАП в системах с ЭВМ), поскольку приведенная весовая функция  $w_{\Pi}(t) \neq w_{\Xi}(t) \cdot w_{\text{Н}}(t)$  [1, 11].

В САУ с амплитудно-импульсной модуляцией ИЭ сам формирует прямоугольные импульсы с амплитудой  $x[n]$  и длительностью  $\tau_{\text{И}} = \gamma T$  при  $\gamma \leq 1$  (рис. 2.1.2, а), которые способны непосредственно воздействовать на непрерывную часть САУ и экстраполятор не нужен. При этом изображение единичных импульсов по Лапласу будет [1]

$$F_{\text{И}}(p) = \int_0^{\gamma T} 1 \cdot e^{-pt} dt = \left. -\frac{e^{-pt}}{p} \right|_0^{\gamma T} = \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p}, \quad (2.2.28)$$

а ЗФП разомкнутой САУ (рис. 2.2.4) запишется в виде [1]

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p} \cdot W_{\text{Н}}(p) \right\} = Z \left\{ \frac{W_{\text{Н}}(p)}{p} \right\} \cdot z^{-1} \cdot Z_{\varepsilon} \left\{ \frac{W_{\text{Н}}(p)}{p} \right\}, \quad (2.2.29)$$

где  $\varepsilon = 1 - \gamma$ .

**Пример 2.2.1.** Определить ЗФП  $W(z)$  разомкнутой импульсной САУ, содержащей ИЭ с периодом квантования  $T = 0,1$  с, экстраполятор нулевого порядка и непрерывную часть с ОПФ  $W_{\text{Н}}(p) = K/p(1 + pT_{\text{Н}})$  при  $K = 100$  с<sup>-1</sup>,  $T_{\text{Н}} = 0,5$  с.

По (2.2.27)  $W(z) = (1 - z^{-1})Z\{W_{\text{Н}}(p)/p\} = (1 - z^{-1})Z\{K/p^2(1 + pT_{\text{Н}})\}$ . Для определения  $Z$ -изображения дроби в фигурных скобках разложим ее методом неопределенных коэффициентов на сумму дробей, имеющих  $Z$ -изображения по таб. 2.2.1

$$\frac{K}{p^2(1 + pT_{\text{Н}})} = K \left( \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{1 + pT_{\text{Н}}} \right) = K \left( \frac{1}{p^2} - \frac{T_{\text{Н}}}{p} + \frac{T_{\text{Н}}^2}{1 + pT_{\text{Н}}} \right). \quad (2.2.30)$$

В результате, по (2.2.27) с использованием таблицы 2.2.1, получим

$$W(z) = K \frac{z-1}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_{\text{Н}}z}{z-1} + \frac{T_{\text{Н}}z}{z-d} \right] = \frac{0,76z + 42,4}{(z-1)(z-0,135)}, \quad (2.2.31)$$

где  $\alpha = 1/T_{\text{Н}} = 2$  с<sup>-1</sup>;  $d = e^{-\alpha T} = e^{-2 \cdot 0,1} = 0,135$ .

### 2.2.5.2. Передаточные функции замкнутых САУ

В разомкнутой импульсной САУ (из рис. 2.2.4) с ЗФП  $W(z)$  импульсного фильтра  $z$ -изображение выходной величины  $y(t)$  будет

$$Y(z) = W(z) \cdot X(z), \quad (2.2.32)$$

где  $X(z)$  –  $z$ -изображение решетчатой функции сигнала ошибки  $x(n)$ .

При замыкании цепи обратной связи  $z$ -изображение сигнала ошибки в замкнутой САУ определяется разностью  $z$ -изображений задающего воздействия  $G(z)$  и выходной величины  $Y(z)$

$$X(z) = G(z) - Y(z). \quad (2.2.33)$$

Подставив (2.2.33) в (2.2.32), получим зависимости

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} G(z) = \Phi(z) \cdot G(z), \quad (2.2.34)$$

$$X(z) = \frac{1}{1+W(z)} G(z) = \Phi_e(z) \cdot G(z), \quad (2.2.35)$$

где  $\Phi(z)$  и  $\Phi_e(z)$  – зет-функции передачи замкнутой САУ по задающему воздействию и по ошибке.

Условием применимости формул (2.2.34) и (2.2.35) является требование завершения переходных процессов в течение одного периода квантования  $T$  или равенства нулю приведенной весовой функции при  $t=0$ , т.е.  $w_{\Pi}(t)_{t=0}=0$  [1]. Для этого в САУ с формированием в ИЭ бесконечно коротких  $\delta$ -импульсов числитель передаточной функции непрерывной части  $W_H(p)$  должен по крайней мере иметь степень на два меньше степени знаменателя, а в САУ с конечной длительностью импульсов на выходе ИЭ достаточно иметь разность степеней не меньше единицы [1].

### 2.2.5.3. Передаточные функции по возмущению

В импульсных САУ влияние возмущений можно учитывать только при их воздействии на вход импульсного элемента ИЭ вместе с сигналом ошибки. Если внешнее возмущение  $f(t)$  приложено не на входе ИЭ (рис. 2.2.5), то его влияние учитывается добавлением эквивалентного воздействия к сигналу ошибки на входе ИЭ. При этом по правилам преобразований структурных схем возмущение  $f(t)$ , имеющее изображение по Лапласу  $F(p)$ , переносится на вход ИЭ и учитывается эквивалентным воздействием  $F_1(p)=W_2(p) \cdot F(p)$ , имеющим  $z$ -изображение эквивалентного возмущения на входе ИЭ в виде [1]

$$F_1(z) = Z\{W_2(p) \cdot F(p)\}. \quad (2.2.36)$$

Возмущения в разомкнутой САУ учитывается воздействием на вход ИЭ сигнала  $E_1(z) = -F_1(z) = -Z\{W_2(p)F(p)\}$ , а в замкнутой САУ

(рис. 2.2.5) – изменением выходной величины  $Y(z)$  на величину ошибки от эквивалентного возмущающего воздействия  $F_1(z)$  [1]

$$Y_1(z) = -E_1(z) = \frac{-F_1(z)}{1+W(z)} = \frac{-Z\{W_2(p)F(p)\}}{1+W(z)}. \quad (2.2.37)$$

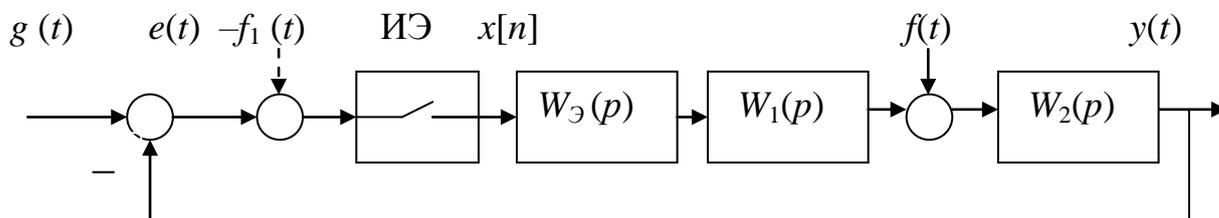


Рис. 2.2.5. Учет возмущений в импульсных САУ

#### 2.2.5.4. Передаточные функции САУ с ЭВМ

ЭВМ с АЦП на входе и ЦАП на выходе обычно используется в цифро-аналоговых САУ (рис. 2.2.2) в качестве цифрового регулятора (рис. 2.1.3, б). В таких САУ АЦП преобразует с периодом дискретизации  $T$  при частоте квантования  $\omega_d = 1/T$  непрерывный сигнал ошибки  $e(t)$  в решетчатую функцию последовательности кодоимпульсных сигналов ошибки  $e^*(t) = e[nT]$ , ЭВМ соответственно заданному алгоритму обрабатывает последовательность импульсов сигнала ошибки  $e^*(t)$  и вычисляет решетчатую функцию последовательности выходных кодоимпульсных сигналов управления  $u^*(t) = u[nT]$ , которую ЦАП преобразует в непрерывный управляющий сигнал  $u(t)$  ступенчатой формы, воздействующий на непрерывную выходную часть САУ. При этом на входе ЭВМ имеется АЦП, содержащий импульсный элемент с частотой квантования  $T$ , а на входе непрерывной части САУ (на выходе ЭВМ) имеется ЦАП, также содержащий импульсный элемент с частотой квантования  $T$ . В этих случаях ЗФП последовательно соединенных звеньев равна их произведению [1, 2, 9, 11, 12].

**Передаточная функция АЦП** определяется процессом преобразования непрерывного сигнала ошибки  $e(t)$  в решетчатую функцию кодоимпульсных сигналов ошибки  $e^*(t)$  с периодом квантования  $T$  (рис. 2.1.1, в), аналогично преобразованиям сигналов в экстраполяторе с ОФП [1, 2, 9, 11, 12]

$$W_{\text{АЦП}}(p) = (1 - e^{-pT}) / p. \quad (2.2.38)$$

Z-преобразование от (2.2.38) по таблице 2.2.1 равно единице

$$W_{\text{АЦП}}(z) = Z\{(1 - e^{-pT}) / p\} = 1. \quad (2.2.39)$$

Важным для САУ с ЭВМ является выбор периода квантования  $T$  или частоты  $\omega_D = 2\pi/T$  дискретизации сигнала ошибки. Для преобразования быстро изменяющегося сигнала ошибки  $e(t)$  частоту дискретизации следует выбирать наибольшей, а период дискретизации – наименьшим. Однако период квантования не может быть меньше, чем время переработки в ЭВМ сигнала ошибки  $e^*(t)$  в управляющий сигнал  $u^*(t)$  по требуемому алгоритму управления. Поступающий в ЭВМ сигнал обновляется в начале каждого периода квантования и его обработка в ЭВМ должна завершаться в течение одного периода квантования, иначе будет накапливаться запаздывание и работоспособность САУ нарушится.

Выбор частоты дискретизации  $\omega_D = 2\pi/T$  по условиям отсутствия потери информации при преобразовании в АЦП непрерывного входного сигнала  $e(t)$  в кодоимпульсный выходной сигнал  $e^*(t)$  основан на следующих положениях [2]. Из теории непрерывных САУ известно, что если сигнал  $e(t)$  имеет преобразование Лапласа  $E(p)$ , то при замене в нем  $p = j\omega$  из  $E(p)$  получается преобразование Фурье  $E(j\omega)$ , описывающее спектр частот сигнала  $x(t)$  в виде  $E(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , где  $A(\omega) = |E(j\omega)|$  и  $\varphi(\omega) = \arg E(j\omega)$  – амплитудный и фазовый частотные спектры. В импульсных системах преобразование Фурье  $E^*(j\omega)$  дискретного сигнала  $e^*(t)$  представляется суммой смещенных спектров частот непрерывного квантуемого сигнала  $e(t)$  и частот, кратных частоте квантования  $k\omega_D$  ( $k=0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ) [2, 15]

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j\omega - jk\omega_D), \quad (2.2.40)$$

где  $E(j\omega)$  – спектр частот непрерывного входного квантуемого сигнала  $e(t)$  с диапазоном частот от  $-\omega_X$  до  $+\omega_X$  (рис. 2.2.6, а).

При квантовании непрерывного сигнала амплитуды всех гармоник уменьшаются в  $T$  раз, что позволяет представлять АЦП в частотной области безынерционным звеном с коэффициентом передачи  $1/T$ .

Спектр частот непрерывного входного сигнала АЦП  $E(j\omega)$  (рис. 2.2.6, а) существенно отличается от спектра частот выходного дискретного сигнала  $E^*(j\omega)$  (рис. 2.2.6, б), содержащего как основную составляющую частот входного сигнала  $E(j\omega)$  при  $k=0$ , так и дополнительные составляющие с частотами, кратными частоте квантования  $k\omega_D$  (при  $k=\pm 1, \pm 2, \dots$ ), возникающие в процессе квантования входного сигнала. Дополнительные частотные составляющие от квантования сигнала  $e(t)$  не искажают форму спектра частот основной составляющей, если ширина спектра частот входного квантуемого сигнала

$-\omega_X \leq \omega \leq \omega_X$  меньше ширины спектра частот основной составляющей в диапазоне частот  $-0,5\omega_D \leq \omega \leq 0,5\omega_D$  (рис. 2.2.6, б) [2, 15].

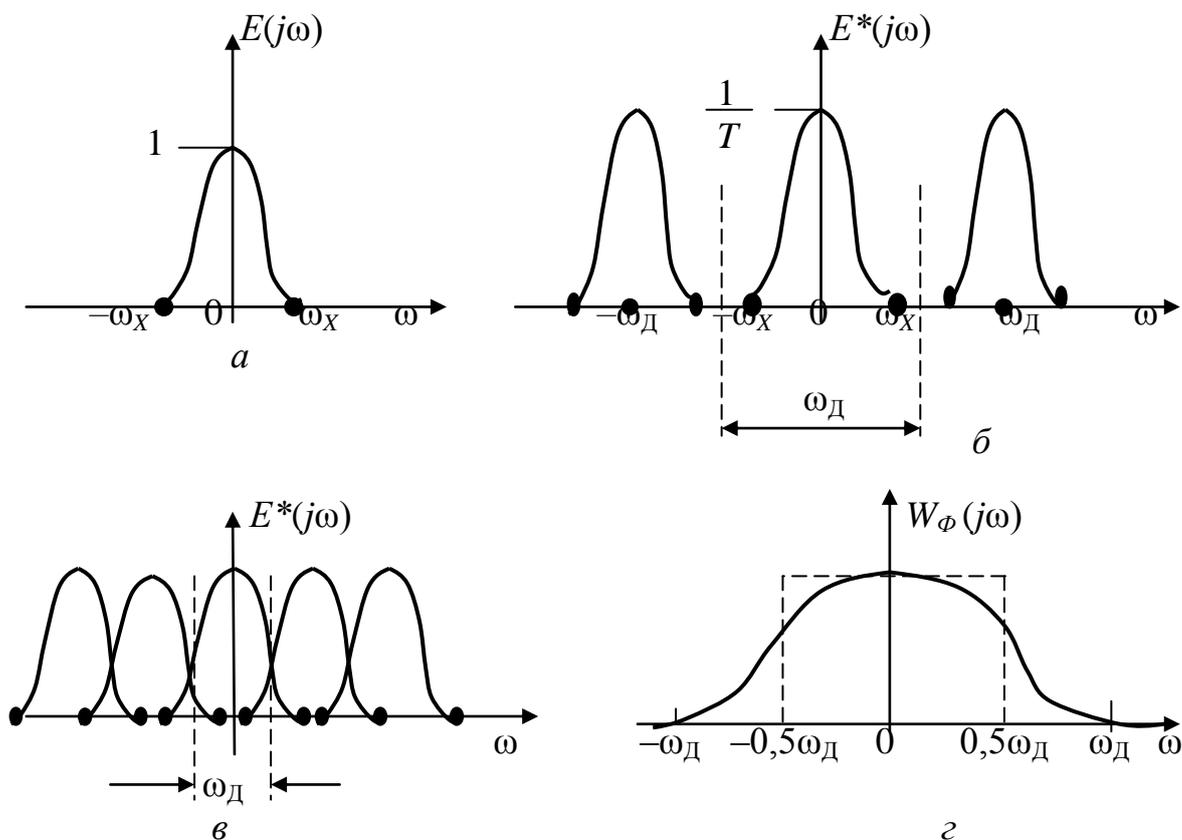


Рис. 2.2.6. Амплитудные спектры сигналов при квантовании

Если частота квантования  $\omega_D$  мала и спектр частот входного непрерывного квантуемого сигнала выходит за границы основного диапазона шириной  $\omega_D$ , то в основном диапазоне частот спектр входного сигнала  $E(j\omega)$  искажается прилегающими субгармоническими составляющими (рис. 2.2.6, в) и в дискретном выходном сигнале  $e^*(t) = e[nT]$  возникают ошибки в линейности преобразования входного сигнала  $e(t)$ . Для исключения ошибок преобразования непрерывных сигналов в дискретные и обратно частота дискретизации должна быть в два раза выше полосы частот квантуемого непрерывного сигнала [2, 15].

При выборе минимально допустимой частоты квантования  $\omega_D$  за частоту  $\omega_X$  можно принимать полосу пропускания частот непрерывной части САУ (рис. 2.2.6, г), определяемой по уменьшению выходной величины на 3 дБ или увеличению ее фазового запаздывания до  $-90^\circ$  при подаче на вход САУ синусоидального сигнала с постоянной амплитудой и возрастающей частотой от 0 до  $\omega_X$ . Поскольку спектр сигналов на краях диапазона уменьшается постепенно, то на практике значение  $\omega_X$  обычно определяют по уменьшению амплитудного спек-

тра на (5–10)% от максимального значения, а частоту дискретизации выбирают с большим запасом  $\omega_D = (5–10) \omega_X$ .

**Передающая функция ЭВМ** описывает процесс преобразования кодоимпульсного входного сигнала ошибки  $e^*(t)=e[nT]$  в кодоимпульсный выходной сигнал управления  $u^*(t)=u[nT]$  по заданному алгоритму (рис. 2.2.2). Если алгоритм обработки включает только линейные операции (дифференцирование, интегрирование, суммирование и др.), то ЭВМ работает как *линейный цифровой фильтр*, точно описываемый зет-функцией передачи  $D(z)$  [2, 15]. Поскольку ЭВМ имеет запоминающие устройства, то в алгоритме могут учитываться текущие значения входного сигнала  $e[nT]$ ,  $m$  прошлых его значений  $e[(n-\mu)T]$  и  $q$  прошлых значений выходного сигнала  $u[(n-\nu)T]$  [2, 15]

$$u[nT] \cdot \delta(t-nT) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} e[(n-\mu)T] \cdot \delta[t-(n-\mu)T] - \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} u[(n-\nu)T] \cdot \delta[t-(n-\nu)T], \quad (2.2.41)$$

где  $b_{\mu}$  ( $\mu=0,1,2,\dots,m$ ),  $a_{\nu}$  ( $\nu=1,2,\dots,q$ ) – постоянные коэффициенты, определяемые заданным алгоритмом работы ЭВМ. Выполнив над алгоритмом (2.2.41) обычное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях с учетом теоремы запаздывания, получим операторное уравнение [15]

$$U^*(p) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} E^*(p) \cdot e^{-\mu Tp} - \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} U^*(p) \cdot e^{-\nu Tp}, \quad (2.2.42)$$

откуда операторная функция передачи ЭВМ, как некоторого производного цифрового фильтра, запишется в виде [15]

$$D(p) = \frac{U^*(p)}{E^*(p)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} e^{-\mu Tp}}{1 + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} e^{-\nu Tp}}. \quad (2.2.43)$$

Из (2.2.43) после замены  $e^{Tp} = z$  получается зет-функция передачи (ЗФП) ЭВМ в виде [15]

$$D(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{-\mu}}{1 + \sum_{\nu=1}^q a_{\nu} z^{-\nu}}. \quad (2.2.44)$$

ЭВМ в САУ часто используются в качестве цифрового регулятора, выполняющего функции пропорционального, интегрального, пропорционально-интегрального, пропорционально-дифференциального либо пропорционально-интегрально-дифференциального линейного регулятора, реализующего линейные операции масштабирования, суммирования, интегрирования и дифференцирования сигналов аналогично ОФП  $W(p)$  типовых регуляторов на операционных усилителях в непрерывных САУ (стр. 76–79).

Рассмотрим получение ЗФП  $D(z)$  ЭВМ на примере реализации типового ПИД-Р с ОФП, которую можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \frac{1 + pT_I}{pT_I} (1 + pT_D) = K_{II} + \frac{K_I}{p} + K_D p, \quad (2.2.45)$$

где  $K_{II} = K_p(1 + T_D/T_I)$ ,  $K_I = K_p/T_I$ ,  $K_D = K_p T_D$ .

Из (2.2.45) следует, что ЭВМ должна выполнить операции

$$u(t) = K_{II}e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (2.2.46)$$

Операции масштабирования входного сигнала учитываются просто умножением на постоянный множитель  $U_{II}(z) = K_{II}E(z)$ .

Численное интегрирование в ЭВМ можно осуществить многими методами, из которых простейшим является метод Эйлера или правило прямоугольников [18]. Интеграл от  $e(t)$  аппроксимируется площадью прямоугольников (рис. 2.2.7, а). При  $t = (n+1)T$  значение интеграла равно его значению  $u_{II}[nT]$  при  $t = nT$  плюс площадь прямоугольника  $T \cdot e[(n+1)T]$  [18]:

$$u_{II}[(n+1)T] = u_{II}[nT] + T \cdot e[(n+1)T]. \quad (2.2.47)$$

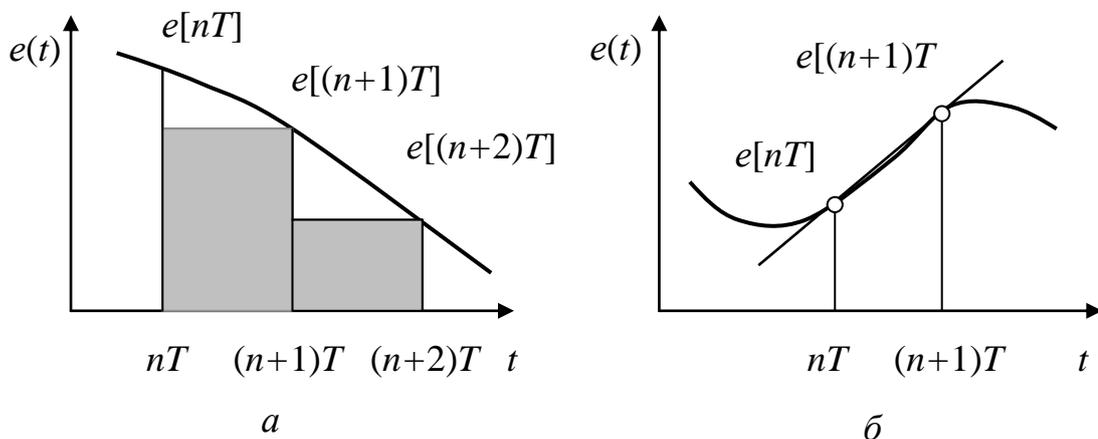


Рис. 2.2.7. Численное интегрирование и дифференцирование

Применив к уравнению (2.2.47)  $z$ -преобразование, получим:

$$z[U_{\text{И}}(z) - u_{\text{И}}(0)] = U_{\text{И}}(z) + Tz[X(z) - x(0)]. \quad (2.2.48)$$

Полагая начальные условия нулевыми, получим из (2.2.48) [18]:

$$U_{\text{И}}(z) = \frac{Tz}{z-1} X(z). \quad (2.2.49)$$

Численное дифференцирование можно выполнить по методу, в котором значение производной от  $e(t)$  в момент  $t=(n+1)T$  определяется наклоном прямой линии, проведенной через точки  $e[nT]$  и  $e[(n+1)T]$  (рис. 2.2.7, б). При этом процедура дифференцирования описывается разностным уравнением [18]:

$$u_{\text{Д}}[(n+1)T] = \frac{e[(n+1)T] - e[nT]}{T}. \quad (2.2.50)$$

Применив к (2.2.50)  $z$ -преобразование, получим:

$$U_{\text{Д}}(z) = \frac{z-1}{Tz} X(z), \quad (2.2.51)$$

откуда видно, что ЗФП при численном дифференцировании обратна ЗФП интегратора, реализующего алгоритм Эйлера. Другим методам численного интегрирования и дифференцирования соответствуют другие передаточные функции [18].

В итоге цифровой ПИД-регулятор преобразует входной сигнал ошибки в управляющее воздействие по алгоритму [18]:

$$U(z) = D(z)E(z) = \left[ K_{\text{П}} + K_{\text{И}} \frac{Tz}{z-1} + K_{\text{Д}} \frac{z-1}{Tz} \right] E(z). \quad (2.2.52)$$

Полученные соотношения позволяют определять ЗФП для всех других типовых регуляторов по их ОФП в аналоговом виде.

**Передаточная функция ЦАП** определяется процессом преобразования кодоимпульсного выходного сигнала ЭВМ  $u^*(t) = u[nT]$  в непрерывный выходной электрический сигнал  $u(t)$  ступенчатой формы для воздействия на непрерывную часть САУ (рис. 2.2.2).

Неточность получения непрерывного сигнала  $u(t)$  из дискретного сигнала  $u[nT]$  обусловлена отсутствием информации о значениях этого сигнала внутри периодов квантования  $T$ . Поэтому ЦАП обычно работают по принципу удержания на интервале периода квантования  $T$  выходной величины, равной значению входного сигнала в начале периода  $T$  (рис. 2.2.8, а). Такой ЦАП называется *экстраполятором с фиксацией на период* или *экстраполятором нулевого порядка*, имеющим ОФП [1, 2, 15, 18]

$$W(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (2.2.53)$$

В ЦАП также используются *полиномиальные экстраполяторы*, называемые *экстраполяторами на время  $\tau_e$* , обеспечивающие более точное восстановление непрерывной величины  $u(t)$  по ее дискретным значениям  $u[nT]$  на основе учета текущего и прошлых дискретных значений входного сигнала. Такие устройства по значению дискретного входного сигнала  $u[nT]$  в начале текущего периода должны рассчитывать будущие значения входного непрерывного сигнала внутри периода  $u[n(T + \tau_e)]$  и в момент времени  $t = nT + \tau_e$  выдавать эти значения. Поэтому они называются экстраполяторами на время  $\tau_e$  и формируют выходной сигнал по алгоритму [15]

$$u_e(t) = u^*(t + \tau_e), \quad t = nT, \quad 0 < \tau_e < T. \quad (2.2.54)$$

Выполнив над (2.2.54) обычное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях и учтя теорему запаздывания, получим

$$U_e(p) = U^*(p)e^{-\tau_e p}. \quad (2.2.55)$$

Из (2.2.55) ОФП экстраполятора на время  $\tau_e$  должна иметь вид

$$W_e(p) = \frac{U_e(p)}{U^*(p)} = e^{-\tau_e p}. \quad (2.2.56)$$

Формула (2.2.56) описывает *идеальный экстраполятор на время  $\tau_e$* , точная реализация которого невозможна, поскольку он должен определять будущие значения сигнала.

Выполним тождественное преобразование ОФП (2.2.56) [15]

$$W_e(p) = e^{\tau_e p} = 1 - (1 - e^{-\tau_e p}) = \left[ 1 - (1 - e^{-Tp}) \right]^{\frac{\tau_e}{T}} \quad (2.2.57)$$

и разложим (2.2.57) в ряд по формуле бинома Ньютона [15]

$$W_e(p) = 1 + \frac{1 - e^{-Tp}}{T} \tau_e + \frac{(1 - e^{-Tp})^2 (T - \tau_e) \tau_e}{T^2} + \dots, \quad 0 < \tau_e < T. \quad (2.2.58)$$

Ограничив ряд (2.2.58) конечным числом членов, получим ОФП семейства *приближенных полиномиальных экстраполяторов*, которые описываются полиномами нулевого, первого, второго и следующих порядков. Экстраполяторы этого семейства тем точнее восстанавливают непрерывный сигнал внутри периода квантования по его дискретным значениям в начале периодов, чем выше их порядок [2, 15].

*Экстраполятор нулевого порядка (ЭНП)* (рис. 2.2.8, а) удерживает на интервале периода начальное значение импульса и имеет ОФП

$$W_{e0}(p) = \frac{U_e(p)}{U^*(p)} = 1, \quad 0 < \tau_e < T. \quad (2.2.59)$$

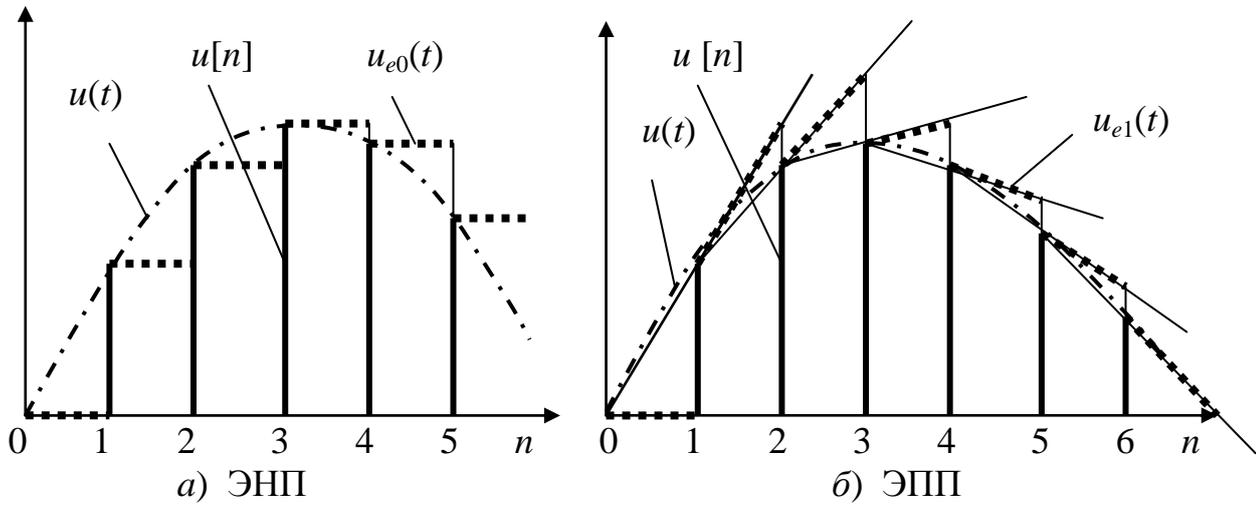


Рис. 2.2.8. Принцип действия экстраполяторов

Экстраполятор первого порядка (ЭПП) (рис. 2.2.8, б) имеет передаточную функцию, получаемую из (2.2.58) в виде

$$W_{e1}(p) = 1 + \frac{1 - e^{-Tp}}{T} \tau_e, \quad 0 < \tau_e < T, \quad (2.2.60)$$

а выходная величина ЭПП на интервале от  $nT$  до  $(n+1)T$  будет [15]

$$u_{e1}(nT + \tau_e) = u(nT) + \{u(nT) - u(n-1)T\} \tau_e / T, \quad 0 < \tau_e < T. \quad (2.2.61)$$

Форма выходных сигналов ЭПП учитывает значения дискрет текущего  $u(nT)$  и предыдущего  $u[(n-1)T]$  периодов квантования (рис. 2.2.8, б), поэтому выходная величина  $u_{e1}(t)$  в ЭПП ближе к входному непрерывному сигналу  $u(t)$ , чем в ЭНП (рис. 2.2.8, а).

Экстраполяторы второго порядка учитывают начальные значения текущего и двух предыдущих входных импульсов и т. д. [15].

**Передаточные функции САУ с ЭВМ** (рис. 2.2.2) в разомкнутом состоянии представляются моделью (рис. 2.2.9) [2, 15].

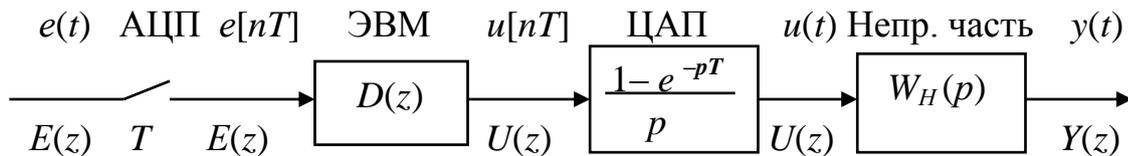


Рис. 2.2.9. Модель разомкнутой САУ с ЭВМ

Если ЭВМ имеет ЗФП  $D(z)$ , то ЗФП разомкнутой САУ можно записать в виде зависимости выходной величины  $Y(z)$  от входного воздействия – ошибки управления  $E(z) = G(z) - Y(z)$  [2, 15]

$$W(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = D(z) \cdot Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_H(p) \right\} = D(z) \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\}. \quad (2.2.62)$$

Из (2.2.62)  $Y(z) = W(z)E(z) = W(z)[G(z) - Y(z)]$ , откуда ЗФП замкнутой САУ по задающему воздействию и по ошибке будут [1, 2, 12, 15]

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{W(z)}{1+W(z)}; \quad \Phi_X(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{1}{1+W(z)}. \quad (2.2.63)$$

### 2.2.5.5. Частотные передаточные функции

*Частотные передаточные функции* дискретной САУ  $W(e^{j\omega T})$  получается при введении в ЗФП  $W(z)$  подстановки  $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$  [1, 2, 12, 15]. При этом амплитудно-фазовая, амплитудная, фазовая и другие частотные характеристики будут трансцендентными периодическими функциями безразмерной частоты  $\bar{\omega} = \omega T$  с периодом повторения  $k \cdot 2\pi/T$ , где  $k$  – целое число,  $T$  – период квантования. Изменение частоты  $\bar{\omega}$  от  $-\pi/T$  до  $+\pi/T$  в дискретных САУ соответствует изменению частоты  $\omega$  в непрерывных САУ от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Частотную передаточную функцию дискретной САУ можно представить в комплексной форме в виде суммы вещественной и мнимой частей. Согласно свойствам дискретного преобразования Фурье, вещественная частотная характеристика будет четной функцией частоты  $\omega$ , а мнимая – нечетной. Поэтому, аналогично исследованию непрерывных САУ, для дискретных САУ достаточно исследовать их свойства только при реальных значениях частоты в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \infty$ , что соответствует изменениям частоты в пределах  $0 \leq \omega \leq \pi/T$ .

Более удобными для исследования дискретных САУ являются *псевдочастотные характеристики*, в частности, логарифмические псевдочастотные характеристики [1, 2, 12, 15]. Для их получения применяется  $w$ -преобразование, при помощи которого окружность единичного радиуса  $\exp(j\omega T)$  отображается на мнимую ось комплексной плоскости величины  $w$ . Для этого в ЗФП  $W(z)$  вводится подстановка  $z = (1+w)/(1-w)$ , откуда получается выражение

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos\omega T + j\sin\omega T - 1}{\cos\omega T + j\sin\omega T + 1} = jtg \frac{\omega T}{2} = j\lambda \frac{T}{2}, \quad (2.2.62)$$

где  $\lambda = 2tg(\omega T/2)/T$  – абсолютная псевдочастота в  $1/c$  [1, 2, 12, 15].

При использовании псевдочастоты частотные характеристики дискретных систем подобны частотным характеристикам непрерывных систем, поскольку при изменении круговой частоты в пределах  $0 \leq \omega \leq \pi/T$  псевдочастота изменяется в пределах  $0 \leq \lambda < \infty$ . При ма-

ных частотах  $\omega < 2/T$  псевдочастота практически совпадает с обычной круговой частотой  $\lambda \approx \omega$ , что позволяет по низкочастотной части характеристик определять точностные показатели дискретных систем с использованием методов, применяемых для непрерывных систем [2].

**Пример 2.2.2.** Найдем частотную передаточную функцию импульсного фильтра дискретной САУ (рис. 2.2.4) при разомкнутой цепи обратной связи, если приведенная зет-функция передачи импульсного фильтра имеет вид [1]

$$W_{II}(z) = \frac{\gamma T k}{T_H} \cdot \frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-T/T_H}, \quad (2.2.63)$$

где  $\gamma T$  – длительность импульсов в периодах квантования  $T$ ,  $T_H$  и  $k$  – постоянная времени и коэффициент передачи непрерывной части САУ. Введем в (2.2.63) подстановку  $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$ . В результате получим частотную передаточную функцию импульсного фильтра с периодом  $\omega_0 = 2\pi/T$

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{\gamma T k}{T_H} \cdot \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T}{(\cos \omega T + j \sin \omega T) - d}. \quad (2.2.64)$$

Выделим в (2.2.64) вещественную и мнимую части АФХ

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega T}) &= \frac{\gamma T k}{T_H} \cdot \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T}{(\cos \omega T - d) + j \sin \omega T} \cdot \frac{(\cos \omega T - d) - j \sin \omega T}{(\cos \omega T - d) - j \sin \omega T} = \\ &= \frac{\gamma T k}{T_H} \cdot \frac{(1 - d \cos \omega T) - j d \sin \omega T}{1 - 2d \cos \omega T + d^2}. \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

Модуль выражения (2.2.65) представляет собой амплитудную частотную характеристику  $A(\omega)$ , а аргумент – фазовую частотную характеристику  $\varphi(\omega)$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(e^{j\omega T})| = \frac{\gamma T k}{T_H} \sqrt{\frac{(1 - d \cos \omega T)^2 + (d \sin \omega T)^2}{(1 - 2d \cos \omega T + d^2)^2}} = \\ &= \frac{\gamma T k}{T_H} \sqrt{\frac{1 - 2d \cos \omega T + d^2 (\cos^2 \omega T + \sin^2 \omega T)}{(1 - 2d \cos \omega T + d^2)^2}} = \frac{\gamma T k}{T_H \sqrt{1 - 2d \cos \omega T + d^2}}; \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(e^{j\omega T}) = \operatorname{arctg} \frac{-d \sin \omega T}{1 - d \cos \omega T}. \quad (2.2.67)$$

Аналогично получают частотные характеристики замкнутой системы из  $\Phi(z) = W(z)/[1+W(z)]$  и частотные характеристики замкнутой САУ по ошибке  $\Phi_X(z) = 1/[1+W(z)]$ . Трансцендентность и периодичность повторения частотных характеристик импульсных САУ затрудняют их практическое использование для анализа и синтеза САУ.

### Контрольные вопросы

1. Как представить структурную схему импульсной САУ с единичной обратной связью и ее ОФП в разомкнутом и замкнутом состоянии?
2. Как получить ЗФП по задающему воздействию и ЗФП по ошибке в замкнутой импульсной САУ с единичной обратной связью?

3. Как учитывается внешнее возмущающее воздействие на непрерывную часть в импульсных САУ?
4. По каким условиям выбирается частота квантования в АЦП ?
5. Как представляются процессы преобразования информации в ЭВМ, ее ОФП и ЗФП при работе в САУ в качестве типового регулятора?
6. Как получается ЗФП ЭВМ, при реализации ОФП регулятора?
7. Какую функцию выполняет ЦАП? Какую ОФП имеет ЦАП нулевого порядка, работающий по принципу «удержания» информации?
8. Как работают полиномиальные ЦАП первого порядка?
9. Как получить ЗФП разомкнутой и замкнутой САУ с ЭВМ, выполняющей функции регулятора?
10. Как получаются частотные характеристики дискретных САУ?

### 2.3. Устойчивость дискретных САУ

Устойчивость замкнутых дискретных САУ определяется по виду корней характеристического уравнения  $M(z)=1+W(z)=0$ , являющегося полиномом знаменателя в ЗФП замкнутой САУ [1, 2, 15, 20]

$$\Phi(z) = \frac{B(z)}{M(z)}. \quad (2.3.1)$$

Дискретная САУ устойчива, если *все корни располагаются внутри окружности единичного радиуса* на комплексной  $z$ -плоскости (рис. 2.3.1, а) [1, 15]. Для характеристического полинома  $M(z)=z+A=0$  условием устойчивости САУ будет  $|A|<1$ . Для характеристического полинома второго порядка  $M(z)=z^2+Az+B=0$  при вычислении корней получаются три условия устойчивости:  $1+A+B>0$ ;  $1-A+B>0$ ;  $B<1$ .

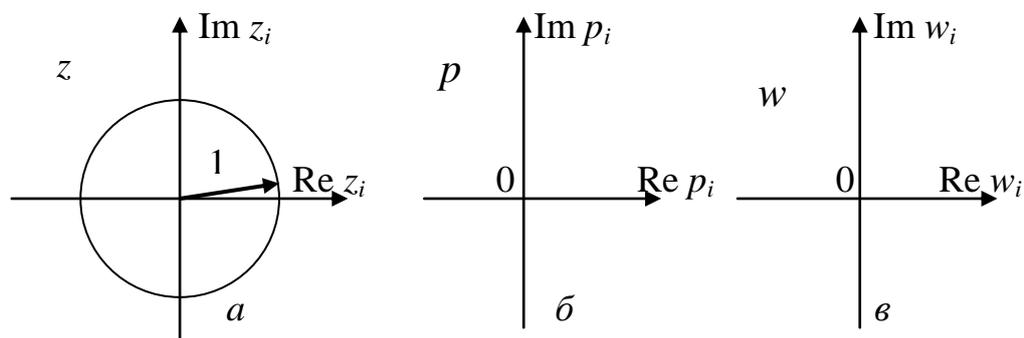


Рис. 2.3.1. Границы устойчивости дискретной САУ

Для полиномов  $M(z)=0$  более высоких порядков поиск корней затрудняется. Решение этой задачи облегчает использование так называемого *преобразования Мебиуса* или  $w$ -преобразования [2, 9, 15]

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad (2.3.2)$$

которое получается при замене аргумента  $z$  сложным аргументом  $w$  на основе дробно-линейного преобразования из (2.3.2) в виде

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (2.3.3)$$

При введении  $w$ -преобразования (2.3.3) в полином  $M(z)=0$  получается полином  $M(w)=0$  и граница устойчивости дискретной САУ на плоскости корней  $z_i$  в виде единичной окружности (рис. 2.3.1, а) преобразуется в мнимую ось на комплексной плоскости корней  $w_i$  (рис. 2.3.1, в), где вся левая полуплоскость будет областью устойчивости, аналогично непрерывным САУ (рис. 2.3.1, б). Это позволяет исследовать устойчивость дискретных САУ с характеристическим полиномом  $M(w)=0$  по критериям устойчивости линейных непрерывных САУ.

Граница устойчивости на плоскости  $z$ -корней (рис. 2.3.1, а) описывается уравнением единичной окружности

$$z = 1 \cdot e^{j\omega T}, \quad (2.3.4)$$

где  $T$  – период квантования;  $\omega$  – угловая частота входного сигнала.

При подстановке (2.3.4) в (2.3.2) граница устойчивости в виде единичной окружности на плоскости корней  $z_i$  преобразуется в границу устойчивости в виде мнимой оси на плоскости корней  $w_i$

$$\begin{aligned} w(j\omega T) &= \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos\omega T + j\sin\omega T - 1}{\cos\omega T + j\sin\omega T + 1} = \\ &= \frac{[(\cos\omega T - 1) + j\sin\omega T][(\cos\omega T + 1) - j\sin\omega T]}{(\cos\omega T + 1)^2 + j\sin^2\omega T} = \\ &= \frac{2j\sin\omega T}{2\cos\omega T + 2} = j \frac{\sin\omega T}{\cos\omega T + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\bar{\lambda} = j \frac{T}{2} \lambda, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

где  $\bar{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$  – относительная псевдочастота;  $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \frac{2}{T} \bar{\lambda}$  – абсолютная псевдочастота.

При изменении  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  аргумент  $z$  по (2.3.4) пробегает по верхней полуокружности границы устойчивости на плоскости корней  $z_i$  от +1 до -1 (рис. 2.3.1, а), а аргумент  $w$  по (2.3.5) пробегает по мнимой оси – границе устойчивости САУ на плоскости корней  $w_i$  от  $j0$  до  $j\infty$  (рис. 2.3.1, в). Таким образом, исследование устойчивости дискретных САУ при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  соответствуют оценке устойчивости в диапазоне изменения частоты от 0 до  $\infty$ .

### 2.3.1. Дискретный аналог критерия Гурвица

Для оценки устойчивости замкнутой дискретной САУ с использованием аналога алгебраического критерия устойчивости Гурвица характеристический полином  $M(z)=0$  из ЗФП замкнутой САУ представляется в виде  $M(w)=0$  путем замены  $z=(1+w)/(1-w)$  по (2.3.3)

$$M(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n;$$

$$M(w) = a_0 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^n + a_1 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left( \frac{1+w}{1-w} \right) + a_n = 0. \quad (2.3.6)$$

Умножив все члены уравнения  $M(w)=0$  на  $(1-w)^n$ , получим

$$M(w) = a_0 w^n + a_{1w} w^{n-1} + a_{2w} w^{n-2} + \dots + a_{nw} = 0. \quad (2.3.7)$$

По характеристическому уравнению (2.3.7) определяется устойчивость по критерию Гурвица: в устойчивой САУ все коэффициенты, определитель Гурвица и его диагональные миноры должны быть положительными. Исследование влияния параметров САУ на ее устойчивость проводится по коэффициентам уравнения (2.3.7) с последующим пересчетом на коэффициенты уравнения  $M(z)=0$ .

### 2.3.2. Дискретный аналог критерия Михайлова

Для исследования устойчивости замкнутой дискретной САУ с использованием дискретного аналога частотного критерия устойчивости Михайлова, нужно определять изменения положения вектора характеристического полинома  $M(z)=0$  по отношению к границе устойчивости – окружности единичного радиуса  $z=e^{j\omega T}$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $2\pi/T$ , где  $T$  – период квантования [15].

Разложим  $M(z)=0$  на сомножители

$$M(z) = \mu_n z^n + \mu_{n-1} z^{n-1} + \dots + \mu_0 = \mu_n (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n) = 0; \quad (2.3.8)$$

$$M(e^{j\omega T}) = \mu_n (e^{j\omega T} - \lambda_1)(e^{j\omega T} - \lambda_2) \dots (e^{j\omega T} - \lambda_n) = 0, \quad (2.3.9)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – корни характеристического уравнения  $M(z)=0$ .

Разностный вектор  $(e^{j\omega T} - \lambda_1)$  в (2.3.9), вершина которого скользит по единичной окружности, повернется на угол  $2\pi$ , если корень  $\lambda_1$  расположен внутри единичной окружности и угол поворота будет равен нулю, если корень расположен за пределами единичной окружности. При изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  и от  $\pi/T$  до  $2\pi/T$  наблюдается полная симметрия углов поворота разностных векторов, поэтому

достаточным является исследование при изменении частоты от 0 до  $\pi/T$ , при котором суммарный угол поворота характеристического вектора  $M(e^{j\omega T})$  для устойчивых САУ должен быть равен  $n\pi$ .

При использовании критерия Михайлова для дискретных САУ в  $M(z)=0$  вводится подстановка  $z=e^{j\omega T}=\cos\omega T+j\sin\omega T$  и получается уравнение кривой Михайлова в виде

$$M(e^{j\omega T})=\mu_n(\cos\omega T+j\sin\omega T)^n + \mu_{n-1}(\cos\omega T+j\sin\omega T)^{n-1} + \dots + \mu_0. \quad (2.3.10)$$

Для преобразования (2.3.10) к виду, необходимому для построения кривой Михайлова, используется формула Муавра [2]

$$(\cos\alpha+j\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+j\sin n\alpha. \quad (2.3.11)$$

Из (2.3.10) с учетом (2.3.11) получается выражение характеристического вектора замкнутой дискретной САУ в виде

$$M(e^{j\omega T})=M(\omega T)=X(\omega T)+jY(\omega T). \quad (2.3.12)$$

По (2.3.12) строится годограф, вычерчиваемый концом характеристического вектора при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$ , называемый кривой Михайлова. Для устойчивости дискретной САУ угол поворота характеристического вектора должен быть  $n\pi$ , а кривая Михайлова должна обойти против часовой стрелки  $2n$  квадрантов.

### 2.3.3. Дискретный аналог критерия Найквиста

Устойчивость замкнутой дискретной САУ с единичной обратной связью можно определить по ЗФП разомкнутой САУ с использованием дискретного аналога критерия Найквиста-Михайлова либо логарифмических псевдочастотных характеристик. В обоих случаях для устойчивости замкнутой САУ ее АФХ в разомкнутом состоянии САУ не должна охватывать точку  $(-1, j0)$  на комплексной плоскости, а запаздывание по фазе в логарифмических характеристиках не должно достигать  $-180^\circ$  при единичном коэффициенте передачи [1, 2, 15].

При использовании ЗФП  $W(z)$  разомкнутой САУ ее АФХ становится периодической функцией с периодом  $2\pi/T$ . Например, если разомкнутая САУ состоит из импульсного элемента, экстраполятора нулевого порядка и интегратора и имеет ЗФП

$$W(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{k}{p} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{k}{p^2} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{kTz}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1}, \quad (2.3.13)$$

то АФХ, получаемая при подстановке  $z = e^{j\omega T}$  в (2.3.13), будет описываться выражением

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega T}) &= \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{kT}{\cos\omega T + j\sin\omega T - 1} = \\ &= \frac{kT(\cos\omega T - 1 + j\sin\omega T)}{(\cos\omega T - 1)^2 + j\sin^2\omega T} = \frac{kT(\cos\omega T - 1) - jkT\sin\omega T}{\cos^2\omega T - 2\cos\omega T + 1 + \sin^2\omega T} = \quad (2.3.14) \\ &= -\frac{kT}{2} - j\frac{kT}{2} \frac{\sin\omega T}{1 - \cos\omega T} = -\frac{kT}{2} - j\frac{kT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}. \end{aligned}$$

АФХ (2.3.14) разомкнутой дискретной САУ является трансцендентной функцией, неудобной для расчетов. Поэтому вводится понятие *псевдочастотных характеристик*, получаемых из передаточных функций  $W(z)$  при использовании  $w$ -преобразования и применения соотношения (2.3.3). В таком случае из (2.3.13) при подстановке (2.3.3) получим  $w$ -функцию передачи в виде

$$W(w) = \frac{kT}{z-1} = \frac{kT}{[(1+w)/(1-w)] - 1} = kT \frac{1-w}{2w}. \quad (2.3.15)$$

После введения в (2.3.15) подстановки  $w = j\lambda T/2$  из (2.3.5), получим выражение *амплитудно-фазовой псевдочастотной характеристики* (АФПЧХ) для разомкнутой САУ с ЗФП  $W(z)$  (2.3.13) в виде

$$W^*(\lambda) = \frac{kT}{2} \frac{1 - j\frac{T}{2}\lambda}{j\frac{T}{2}\lambda} = -\frac{kT}{2} - j\frac{k}{\lambda}, \quad (2.3.16)$$

где  $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$  – абсолютная псевдочастота (2.3.5).

*Амплитудная псевдочастотная характеристика* (АПЧХ) будет

$$A^*(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{kT}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2} = k \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}. \quad (2.3.17)$$

*Логарифмическая амплитудная псевдочастотная характеристика* (ЛАПЧХ) будет

$$L^*(\lambda) = 20 \lg A^*(\lambda) = 20 \lg k \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}. \quad (2.3.18)$$

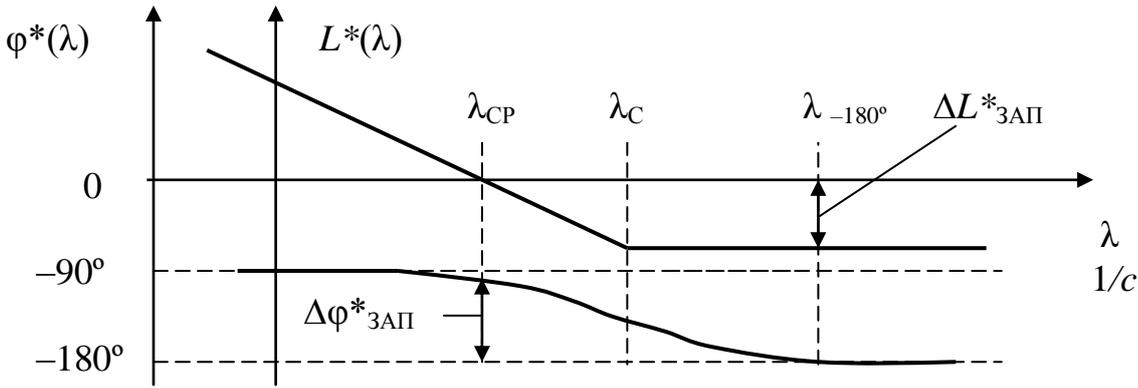


Рис. 2.3.2. Логарифмические псевдочастотные характеристики

ЛАПЧХ по (2.3.18) представляется двумя асимптотами: 1) с наклоном  $-20$  дБ/дек  $L_1^*(\lambda) = 20 \lg \frac{k}{\lambda}$  при  $\lambda \leq \frac{2}{T}$ ; 2) горизонтальной  $L_2^*(\lambda) = 20 \lg \frac{k}{2}$  при  $\lambda \geq \frac{2}{T}$ . Эти асимптоты сопрягаются при частоте  $\lambda_c = 2/T$ . Частота среза определяется из равенства нулю выражения (2.3.18) или равенства единице АПЧХ по (2.3.17), откуда

$$\lambda_{CP} = \sqrt{\frac{4k^2}{4 - k^2 T^2}}. \quad (2.3.19)$$

Фазовая псевдочастотная характеристика (ФПЧХ) из (2.3.16)

$$\varphi^*(\lambda) = \arctg \frac{-1/\lambda}{-T/2} = \arctg \frac{-2}{-\lambda T}. \quad (2.3.20)$$

Фазовое запаздывание изменяется от  $-90^\circ$  при низшей псевдочастоте  $\lambda \rightarrow 0$  до  $-180^\circ$  при высшей псевдочастоте  $\lambda \rightarrow \infty$ , при частоте среза  $\lambda_c = 2/T$  запаздывание по фазе составляет  $-135^\circ$ .

Устойчивость замкнутых дискретных САУ определяется по логарифмическим псевдочастотным характеристикам так же, как и для непрерывных САУ. При псевдочастоте среза ЛАПЧХ угол фазового запаздывания  $\varphi^*(\lambda_{CP})$  не должен достигать минус  $180^\circ$ . Запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi^*(\lambda_{CP})$  определяется на частоте среза, а запас устойчивости по модулю  $\Delta L^*(\lambda_{-180^\circ})$  определяется на частоте, при которой фазовое запаздывание достигает минус  $180^\circ$  (рис. 2.3.2), аналогично тому, как это делалось для непрерывных САУ.

### Контрольные вопросы

1. Как определить устойчивость замкнутой дискретной САУ по корням характеристического полинома ЗФП  $\Phi(z)$ ?
2. Как определить устойчивость замкнутой дискретной САУ с использованием дискретного аналога алгебраического критерия Гурвица?
3. Как по характеристическому уравнению замкнутой дискретной САУ определить устойчивость с использованием аналога критерия Михайлова?
4. Как определить устойчивость замкнутой дискретной САУ по ее АФХ  $W(j\omega)$  в разомкнутом состоянии по критерию Найквиста-Михайлова?
5. Как получить ЛАПЧХ и ЛФПЧХ разомкнутой дискретной САУ и определить по ним устойчивость замкнутой дискретной САУ?

## 2.4. Качество дискретных САУ

### 2.4.1. Анализ качества САУ

Анализ качества дискретных САУ, аналогично непрерывным САУ, заключается в определении прямых или косвенных показателей качества процессов управления при отработке типовых входных воздействий в САУ с заданными структурой и параметрами (рис. 2.2.2, рис. 2.2.4).

Прямые показатели качества процесса управления (вид и время переходного процесса, перерегулирование, число колебаний) определяются в дискретных САУ, аналогично непрерывным САУ (рис. 1.5.1), по огибающей решетчатой функции выходной регулируемой величины  $y[n]$  при единичном входном воздействии  $g[n]=1[n]$ , которое имеет  $z$ -изображение  $G(z)=z/(z-1)$ . Для построения переходного процесса находят  $z$ -изображение выходной величины  $Y(z)$ , по  $Y(z)$  вычисляют и строят решетчатую функцию  $y[n]$  с помощью таблицы 2.2.1 после разложения  $Y(z)$  на простые дроби, либо путем разложения  $Y(z)$  в ряд Лорана делением числителя на знаменатель с единичным коэффициентом при старшем члене. По огибающей решетчатой функции  $y[n]$  определяют прямые показатели качества переходного процесса, считая что переходный процесс заканчивается, когда выходная регулируемая величина  $y[n]$  входит в зону 5% отклонений от установившегося значения [1, 12, 15].

Косвенные показатели качества дискретных САУ (установившаяся ошибка, запасы устойчивости по модулю и фазе и др.) определяются без вычисления переходного процесса  $y[n]$ .

Установившаяся ошибка наиболее просто определяется с использованием теоремы о конечном значении решетчатой функции ошибки  $x[n]$  [1, 2, 12, 15]

$$x_{уст} = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \Phi_x(z) G(z), \quad (2.4.1)$$

где  $\Phi_x(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{1}{1+W(z)} = 1 - \Phi(z)$  – ЗФП по ошибке замкнутой

САУ,  $W(z)$  – ЗФП разомкнутой САУ,  $\Phi(z)$  – ЗФП замкнутой САУ.

По (2.4.1) определяется установившаяся ошибка в замкнутых статических САУ, имеющих астатизм нулевого порядка при отсутствии нулевых полюсов  $(z-1)$  в знаменателе ЗФП  $W(z)$  разомкнутой САУ.

В астатических САУ с астатизмом первого порядка в ЗФП разомкнутой САУ имеется один нулевой полюс  $W(z) = W_{01}(z)/(z-1)$ . В этом случае при входном воздействии  $g[n] = g_0 \cdot 1[n] + g_1 \cdot n$  установившаяся ошибка по (2.4.1) определится в виде [12, 15]

$$x_{уст1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + \frac{W_{01}(z)}{z-1}} \left[ \frac{g_0 z}{z-1} + \frac{g_1 z T}{(z-1)^2} \right] = \frac{T g_1}{W_{01}(z=1)}, \quad (2.4.2)$$

где  $T$  – период квантования импульсных сигналов в САУ.

Из (2.4.2) следует, что в САУ с астатизмом первого порядка статическая ошибка отсутствует, а ошибка по скорости изменения задающего воздействия имеет определенное значение. При этом показателем качества САУ является независимая от величины входного воздействия добротность по скорости  $K_V = g_1 / x_{уст1} = W_{01}(z=1)$ , чем выше добротность по скорости, тем меньше ошибка и выше качество САУ.

В астатических САУ с астатизмом второго порядка в ЗФП разомкнутой САУ имеется два нулевых полюса  $W(z) = W_{02}(z)/(z-1)^2$  и при входном воздействии  $g[n] = g_0 \cdot 1[n] + g_1 \cdot n + g_2 \cdot n^2/2$  по (2.4.1) установившаяся ошибка определится выражением [15]

$$x_{уст2} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + \frac{W_{02}(z)}{(z-1)^2}} \left[ \frac{g_0 z}{z-1} + \frac{g_1 z T}{(z-1)^2} + \frac{g_2 z T^2 (z+1)}{2(z-1)^3} \right] = \frac{T^2 g_2}{W_{02}(1)}. \quad (2.4.3)$$

Из (2.4.3) следует, что в САУ с астатизмом второго порядка отсутствуют статическая ошибка и ошибка по скорости, а ошибка по ускорению имеет определенное значение. При этом показателем ка-

чества САУ является независимая от величины входного воздействия добротность по ускорению  $K_\varepsilon = g_2/x_{уст2} = W_{02}(z=1)/T^2$ .

Метод коэффициентов ошибки являются еще одним методом оценки качества дискретных САУ. Коэффициенты ошибки определяются из разложения ЗФП по ошибке в ряд Тейлора при  $z=1$  в виде [1, 15]

$$\Phi_x[z] = \Phi_x[1] + (z-1) \frac{\partial \Phi_x[1]}{\partial z} + (z-1)^2 \frac{\partial^2 \Phi_x[1]}{2! \partial z^2} + (z-1)^3 \frac{\partial^3 \Phi_x[1]}{3! \partial z^3} + \dots \quad (2.4.4)$$

С учетом (2.4.4)  $z$ -изображение ошибки запишется в виде

$$X[z] = \Phi_x[z] \cdot G[z] = \left\{ \Phi_x[1] + (z-1) \frac{\partial \Phi_x[1]}{\partial z} + (z-1)^2 \frac{\partial^2 \Phi_x[1]}{2! \partial z^2} + \right. \\ \left. + (z-1)^3 \frac{\partial^3 \Phi_x[1]}{3! \partial z^3} + \dots \right\} G[z] = \left\{ c_0 + (z-1)c_1 + (z-1)^2 c_2 + \dots \right\} G[z]. \quad (2.4.5)$$

Раскрывая в (2.4.5) фигурные скобки и используя при переходе от изображений  $G[z]$  к оригиналу  $g[n]$  приближенную замену аналогового дифференцирования процедурой деления первой разности на период квантования  $T$  по методу дискретного дифференцирования [15]

$$Z\{p^k\} \approx \left[ \frac{z-1}{T} \right]^k, \quad (2.4.6)$$

получим величину установившейся ошибки в виде [15]

$$x_{уст} = x[n] = c_0 \cdot g[n] + c_1 \cdot \Delta g[n-1] + \frac{c_2}{2!} \cdot \Delta^2 g[n-2] + \\ + \frac{c_3}{3!} \cdot \Delta^3 g[n-3] + \dots = c_0 g[n] + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{k!} \Delta^k g[n-k]. \quad (2.4.7)$$

В (2.4.7) составляющие ошибки выражены в зависимости от текущих значений величины, скорости (разности первого порядка), ускорения (разности второго порядка) и старших производных (разностей старших порядков) дискретного входного воздействия  $g[n]$ . Коэффициенты  $c_k$  между этими значениями входного воздействия и составляющими (компонентами) ошибки называются коэффициентами ошибки: по положению (позиционная ошибка)

$$c_0 = \Phi_x[1] = \frac{1}{1+W[1]},$$

по скорости (по первой производной от задания)

$$c_1 = T\Phi'_x[1] = TW'[1]/\{1+W[1]\}^2,$$

по ускорению

$$c_2 = \frac{T^2}{2!}\Phi''_x[1] = T^2 \frac{2W'^2[1] + (1+W[1])W''[1]}{2!(1+W[1])^3}$$

и так далее.

В астатических дискретных САУ порядок астатизма  $\nu$  определяется числом равных нулю последовательных коэффициентов ошибки, начиная с  $c_0$ . Поскольку коэффициенты ошибки рассматриваются при значении аргумента  $z=1$ , то для обращения в нуль коэффициентов ошибки в правых частях этих формул должны находиться сомножители  $(z-1)^\nu$ . При этом ЗФП разомкнутой САУ будет  $W[z] = W_0[z]/(z-1)^\nu$ , а ЗФП по ошибке будет иметь вид

$$\Phi_x[z] = \frac{1}{1+W_0[z]/(z-1)^\nu} = \frac{(z-1)^\nu}{(z-1)^\nu + W_0[z]}. \quad (2.4.8)$$

Из (2.4.8) видно, что в разомкнутую цепь астатической САУ должны входить элементы алгоритма ЭВМ, образующие в знаменателе  $W(z)$  полюсы  $(z-1)^\nu$ , либо  $\nu$  интегрирующих звеньев, помимо интегрирующего элемента импульсного ключа.

Из (2.4.7) с учетом (2.4.8) при  $\nu=0$  и  $z=1$  ошибка будет

$$x_{уст0} = \Phi_x[1] \cdot g_0 = \frac{1}{1+W_0[1]} \cdot g_0 = \frac{g_0}{1+K_0}. \quad (2.4.9)$$

При  $\nu=1$  и  $z=1$  из тех же формул получим скоростную ошибку

$$x_{уст1} = T \frac{\partial \Phi_x[1]}{\partial z} \Delta g[n-1] = T \left\{ \frac{(z-1) + W_0[z] - (z-1)(1+W'_0[z])}{\{z-1+W_0[z]\}^2} \right\}_{z=1}. \quad (2.4.10)$$

$$\cdot \Delta g[n-1] = T \frac{W_0[1]}{W_0^2[1]} \Delta g[n-1] = \frac{T}{W_0[1]} \Delta g[n-1] = \frac{\Delta g[n-1]}{K_V},$$

где  $\Delta g[n-1]$  – скорость изменения входного воздействия (разность первого порядка),  $K_V$  – добротность САУ по скорости.

При  $\nu=2$  и  $z=1$  таким же способом получим ошибку по ускорению

$$x_{уст2} = T^2 \frac{\partial^2 \Phi_x[1]}{2! \partial z^2} \Delta^2 g[n-2] = \frac{\Delta^2 g[n-2]}{K_\varepsilon}, \quad (2.4.11)$$

где  $\Delta^2 g[n-2]$  – ускорение входного воздействия (разность второго порядка),  $K_\varepsilon$  – добротность САУ по ускорению.

Коэффициенты ошибки также можно определить из разложения дробно-рациональной функции ЗФП по ошибке  $\Phi_x(z)$  в степенной ряд непрерывным делением обращенного числителя на обращенный знаменатель. Например, ЗФП по ошибке для замкнутой САУ из интегратора и двух инерционных звеньев может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Phi_x(z) &= \frac{T_1 T_2 z^3 + (T_1 + T_2) z^2 + z}{T_1 T_2 z^3 + (T_1 + T_2) z^2 + z + K} = 0z^0 + \frac{1}{K} z^1 + \\ &+ \left( \frac{T_1 + T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right) z^2 + \left( \frac{T_1 T_2}{K} - 2 \frac{T_1 + T_2}{K^2} + \frac{1}{K^3} \right) z^3 + \dots = \quad (2.4.12) \\ &= C_0 z^0 + C_1 z^1 + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \dots, \end{aligned}$$

где значения  $C_0 = c_0$ ;  $C_1 = c_1$ ;  $C_2 = \frac{c_2}{2!}$ ;  $C_3 = \frac{c_3}{3!}$  и т. д. определяют коэффициенты ошибки по положению, скорости, ускорению и т. д.

### 2.4.2. Синтез дискретных САУ

Синтез дискретных САУ заключается в определении структуры и параметров САУ, обеспечивающих получение заданных показателей качества управления выходной величиной  $y[n]$ . Для этого могут использоваться аналитические и частотные методы синтеза дискретных САУ. При проектировании САУ обычно решается задача локального синтеза алгоритма управления, реализуемого регулятором на ЭВМ или микроконтроллере, представляющим собой изменяемую часть САУ, при заданных свойствах неизменяемой непрерывной части САУ, включающей объект управления, исполнительное, усильтельное, измерительное (датчик) и другие устройства (рис. 1.6.1). Аналитические методы синтеза алгоритма управления позволяют определить ЗФП регулятора, обеспечивающего получение желаемого переходного процесса в замкнутой САУ при заданной передаточной функции неизменяемой непрерывной части САУ. Синтез алгоритма управления может производиться по желаемой весовой или переходной функции замкнутой САУ [15].

Желаемая весовая функция дискретной САУ представляется в виде решетчатой функции последовательности выходных импульсов,  $z$ -изображение которой совпадает с ЗФП замкнутой САУ  $\Phi[z]$

$$\Phi[z] = y_0 z^0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + y_3 z^{-3} + \dots + y_n z^{-n}. \quad (2.4.13)$$

Особенность дискретных САУ состоит в том, что можно задавать конечное число шагов  $n$  в желаемом переходном процессе  $y[n]$ .

Более удобно задавать не весовую функцию, а желаемую переходную функцию  $H[z]$ , т. е. желаемый выходной переходный процесс

$$H[z] = h_0 z^0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \dots + h_n z^{-n}. \quad (2.4.14)$$

Поскольку при единичном ступенчатом воздействии  $g[n] = 1[n]$

$$H[z] = \Phi[z] \frac{z}{z-1}, \quad (2.4.15)$$

пересчет переходной функции в весовую производится по формуле [15]

$$\Phi[z] = (1 - z^{-1})H[z] = h_0 z^0 + (h_1 - h_0)z^{-1} + (h_2 - h_1)z^{-2} + \dots + h_n z^{-(n+1)}. \quad (2.4.16)$$

По желаемой ЗФП замкнутой САУ (2.4.16) определяется желаемая ЗФП приведенной разомкнутой дискретной САУ

$$W[z] = \Phi[z] / \{1 - \Phi[z]\}. \quad (2.4.17)$$

Желаемую ЗФП приведенной разомкнутой системы (2.4.17) необходимо объединить с ЗФП импульсного ключа (импульсного дифференциатора)  $W_{И}[z] = Z\{1/p\} = z/(z-1)$ . Тогда объединенная желаемая ЗФП разомкнутой САУ запишется в виде

$$W_{П1}[z] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\Phi[z]}{1 - \Phi[z]}. \quad (2.4.18)$$

Объединенная желаемая ЗФП разомкнутой САУ (2.4.18) реализуется произведением синтезируемой ЗФП алгоритма управления  $W_{АЛГ}[z]$  и ЗФП неизменяемой непрерывной аналоговой части САУ  $W_{Н}[z]$

$$W_{П1}[z] = W_{АЛГ}[z] \cdot W_{Н}[z] = W_{АЛГ}[z] \cdot Z\{W_{Н}(p)/p\}. \quad (2.4.19)$$

Из (2.4.19) с учетом (2.4.18) определяется ЗФП алгоритма управления, обеспечивающего желаемый выходной переходный процесс

$$W_{АЛГ}[z] = \frac{W_{П1}[z]}{Z\{W_{Н}(p)/p\}} = \frac{z\Phi[z]}{(z-1)(1-\Phi[z]) \cdot Z\{W_{Н}(p)/p\}}. \quad (2.4.20)$$

Полученный алгоритм управления (2.4.20) позволяет реализовать пошаговое описание работы ЭВМ, либо реализовать аналоговый регулятор с ОФП  $W_{АЛГ}(p) = Z^{-1}\{W_{АЛГ}[z]\}$ .

Если желаемый выходной процесс задан конечным рядом (2.4.13) или (2.4.16) и синтез алгоритма управления реализован без упрощающих приближений, то проверку синтезированной САУ на устойчивость можно не проводить. В противном случае проверка САУ на устойчивость необходима.

Частотные методы синтеза дискретных САУ по сравнению с аналитическими методами синтеза дают более широкие возможности варьирования параметров настройки регулятора в рекомендуемой зоне.

Предпосылки для частотного синтеза возникают уже при оценке устойчивости замкнутой дискретной САУ по частотной характеристике ее разомкнутой цепи и выборе запасов устойчивости по фазе и амплитуде, характеризующих удаленность от точки  $(-1, j0)$ . Увеличение запаса устойчивости обычно достигается введением в разомкнутый контур опережения по фазе. Корректирующее воздействие для перевода фактической частотной характеристики в желаемую можно вводить или в дискретной форме в виде алгоритма управляющей ЭВМ, или в аналоговой форме в виде корректирующего звена. Алгоритм ЭВМ входит в общую ЗФП разомкнутого контура дискретной САУ как сомножитель (2.4.19) и поэтому он легко отделяется при синтезе. Отделение при синтезе корректирующего звена от остальных звеньев аналоговой части дискретной САУ может производиться только приближенно, поскольку ЗФП является единой для всей аналоговой части САУ.

При проектировании наиболее часто используются следующие методы частотного синтеза САУ [15]:

- 1) синтез алгоритма управления на основе задаваемого ограничения показателя колебательности  $M$  замкнутой САУ;
- 2) синтез аналогового корректирующего звена по желаемой дискретной частотной характеристике на основе метода обратного  $z$ -преобразования;
- 3) анализ и синтез дискретных САУ с использованием псевдо-частотных характеристик разомкнутой системы.

Синтез дискретных САУ с использованием псевдо-частотных характеристик представляется более предпочтительным, поскольку позволяет одновременно решать задачи обеспечения устойчивости и качества САУ при четкой интерпретации результатов расчета.

Псевдо-частотные характеристики получаются из ЗФП разомкнутой дискретной САУ  $W[z]$  при введении  $w$ -преобразования

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (2.4.21)$$

При этом синтез частотных характеристик дискретной САУ переводится из области угловой частоты  $\omega$  в область абсолютной псевдочастоты  $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$  и ЗФП  $W[z]$  представляется в виде

$$W\{j\lambda\} = W\left\{\frac{1 + j2\lambda/T}{1 - j2\lambda/T}\right\}. \quad (2.4.22)$$

Синтез желаемой псевдочастотной характеристики по (2.4.22) удобнее проводить по логарифмическим псевдочастотным характеристикам (2.3.18) и (2.3.20), изменяя  $\lambda$  от 0 до  $\infty$ . Абсолютная псевдочастота  $\lambda$  при малых частотах близка к угловой частоте  $\omega$

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{\omega T}{2} = \omega. \quad \text{Это позволяет в низкочастотной области вести}$$

расчет дискретных САУ по обычным ЛАЧХ и ЛФЧХ приведенной непрерывной части САУ. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе по псевдочастотным логарифмическим характеристикам определяют качество дискретной САУ и должны составлять от 6 до 20 дБ по амплитуде и от  $30^\circ$  до  $60^\circ$  по фазе.

При частотном синтезе рассматриваются результаты внешнего синусоидального воздействия на дискретную САУ в виде

$$g(t) = a_P \sin \omega_P t; \quad g[n] = a_P \sin \omega_P nT = a_P \sin \bar{\omega}_P n, \quad \bar{\omega}_P = \omega_P T. \quad (2.4.23)$$

Частота  $\omega_P$  и амплитуда  $a_P$  внешнего воздействия определяются максимально допустимой скоростью  $\dot{g}_{\max}$  и максимально допустимым ускорением  $\ddot{g}_{\max}$  входного воздействия  $g(t)$ , при которых

$$\omega_P = \ddot{g}_{\max} / \dot{g}_{\max}; \quad a_P = \dot{g}_{\max}^2 / \ddot{g}_{\max}. \quad (2.4.24)$$

По заданной допустимой ошибке  $x_{\text{доп}}$  и известным значениям  $\omega_P$  и  $a_P$  определяется необходимая величина модуля частотной характеристики разомкнутой САУ в комплексной или логарифмической форме

$$|W(j\omega_P)| \geq \frac{a_P}{x_{\text{доп}}}; \quad L|W(j\omega_P)| \geq 20 \lg \frac{a_P}{x_{\text{доп}}}. \quad (2.4.25)$$

Синтезированная частотная передаточная функция  $W(j\omega_P)$  реализуется подбором параметров алгоритма управляющей ЭВМ или регулятора, включаемых в канале ошибки (рис. 2.2.2, рис. 2.2.4).

Для получения желаемых частотных характеристик в дискретную САУ могут вводиться непрерывные корректирующие устройства, импульсные или цифровые корректирующие фильтры.

**Пример 2.4.1.** Определить прямые показатели качества переходного процесса в замкнутой дискретной САУ с единичной обратной связью при единичном ступенчатом входном воздействии, если ЗФП разомкнутой цепи  $W(z)=KT/(z-1)$ .

$$\text{ЗФП замкнутой САУ будет } \Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{KT/(z-1)}{1+KT/(z-1)} = \frac{KT}{z-1+KT}.$$

При единичном входном воздействии  $z$ -изображение выходной величины будет  $Y(z) = \Phi(z) \cdot G(z) = \frac{KT}{z-1+KT} \cdot \frac{z}{z-1}$ . Вычислить решетчатую функцию

переходного процесса  $y[n]$  можно с помощью таблицы 2.2.1 или разложения  $Y(z)$  в ряд Лорана. Чтобы воспользоваться таблицей 2.2.1, нужно разложить  $Y(z)$

$$\text{на простые дроби } Y(z) = \frac{KTz}{(z-1+KT)(z-1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-1+KT} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-d}.$$

По таблице 2.2.1 находим решетчатую функцию выходной величины

$$y[n] = Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-d}\right] = 1[n] - d^n = 1[n] - (1-KT)^n.$$

Если воспользоваться разложением  $Y(z)$  в ряд Лорана делением числителя на знаменатель с единичным коэффициентом при старшей производной, то получим

$$Y(z) = \frac{KTz}{z^2 + (KT-2)z + (1-KT)} = 0 \cdot z^0 + KT \cdot z^{-1} - \\ -KT(KT-2) \cdot z^{-2} + KT[(KT-2)^2 - (1-KT)] \cdot z^{-3} + \dots$$

Например, при  $KT=1,5$  получается решетчатая функция переходного процесса

$$y[n] = 0z^0 + 1,5z^{-1} + 0,75z^{-2} + 1,125z^{-3} + 0,9375z^{-4} + \dots$$

На рис. 2.4.1 показан вид переходных процессов при значениях параметра  $KT=0,5$  (кривая 1),  $KT=1$  (кривая 2),  $KT=1,5$  (кривая 3).

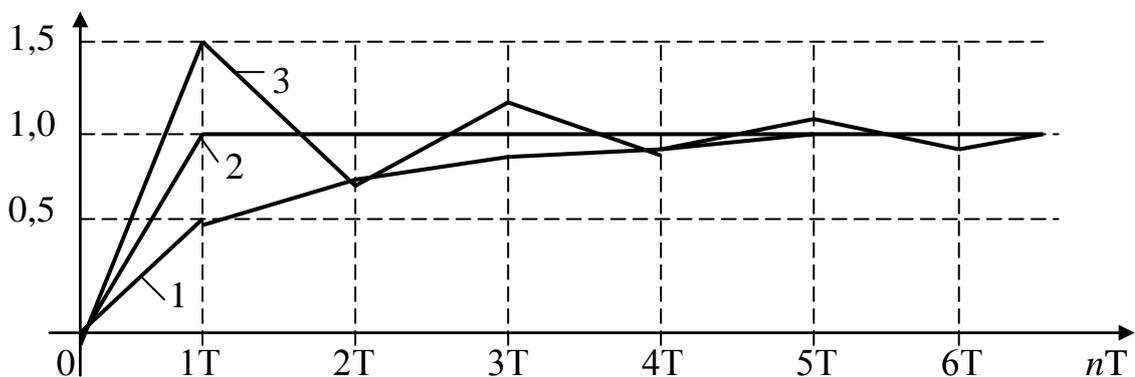


Рис. 2.4.1. Переходные процессы в дискретной САУ

Переходный процесс при  $KT=1$  без перерегулирования заканчивается за  $t_{\text{пп}}=T$ ; при  $KT<1$  – время переходного процесса возрастает; при  $KT>1$  появляется перерегулирование и увеличение времени переходного процесса.

**Пример 2.4.2.** Определить установившуюся ошибку, коэффициенты ошибки и добротность в замкнутой дискретной САУ при внешнем входном воздействии  $g[n] = 1[n] + n + n^2/2$ , если ЗФП ее разомкнутой цепи имеет один нулевой полюс  $W(z) = \frac{1+z}{(z-1)(z^2+2z+3)}$ . По таблице 2.2.1  $z$ -изображение входного воздействия будет

$$g[z] = Z\{1[nT]\} + Z\{nT\} + Z\left\{\frac{(nT)^2}{2}\right\} = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}.$$

Установившуюся ошибку можно определить по теореме о конечном значении

$$\begin{aligned} x_{уст} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\Phi_x(z)G(z) = \left| (z-1) \frac{1}{1+W(z)} G(z) \right|_{z=1} = \\ &= \left| \frac{(z-1)^2(z^2+2z+3)}{(z-1)(z^2+2z+3)+1+z} \left( \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3} \right) \right|_{z=1} = 0 + 3T + \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, статическая ошибка в САУ равна нулю, скоростная ошибка  $x_{СК} = 3T$  при добротности по скорости  $K_V = 1/3T$ , а ошибка по ускорению возрастает до бесконечности. Эти результаты соответствуют САУ с астатизмом первого порядка при наличии в  $W(z)$  одного нулевого полюса  $(z-1)=0$ .

Коэффициенты ошибки проще всего определять из ЗФП по ошибке  $\Phi_x(z)$  делением обращенного числителя на обращенный знаменатель

$$\Phi_x(z) = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{(z-1)(z^2+2z+3)}{(z-1)(z^2+2z+3)+1+z} = \frac{\zeta^3 + 4\zeta^2 + 6\zeta}{\zeta^3 + 4\zeta^2 + 7\zeta + 2}.$$

В приведенном уравнении для удобства деления числителя на знаменатель введена замена переменной  $z = \zeta + 1$ ,  $z - 1 = \zeta$  и в результате получается

$$\Phi_x(\zeta) = \frac{6\zeta + 4\zeta^2 + \zeta^3}{2 + 7\zeta + 4\zeta^2 + \zeta^3} = 0\zeta^0 + 3\zeta^1 - 8,5\zeta^2 + 24\zeta^3 + \dots$$

Значения коэффициентов ошибки будут

$$c_0 = 0; \quad c_1 = 3; \quad c_2 = -8,5 \cdot 2! = -17; \quad c_3 = 24,25 \cdot 3! = 145,5; \dots$$

Для определения составляющих ошибки необходимо найти первую, вторую и последующие разности входного процесса:

$$g[n] = 1[n] + n + n^2/2 = a_0 + a_1 n + a_2 n^2; \quad a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 0,5;$$

$$\Delta g[n-1] = g[n] - g[n-1] = \{a_0 + a_1 n + a_2 n^2\} - \{a_0 + a_1(n-1) + a_2(n-1)^2\} = a_1 - a_2 + 2a_2 n;$$

$$\Delta^2 g[n-2] = \Delta\{\Delta g[n-1]\} = \Delta\{a_1 - a_2 + 2a_2(n-1)\} = 2a_2.$$

Разности  $\Delta^3 g[n-3]$  и более высокого порядка равны нулю.

По (2.4.7) установившаяся ошибка выражается формулой

$$\begin{aligned} x_{уст} &= c_0 g[n] + c_1 \Delta g[n-1] + \frac{c_2}{2!} \Delta^2 g[n-2] = 0 \cdot g[n] + c_1 (a_1 - a_2 + 2a_2 n) - \\ &- 8,5(2a_2) = 3(1 - 0,5 + 2 \cdot 0,5n) - 8,5(2 \cdot 0,5) = 3n - 7. \end{aligned}$$

Следовательно, в рассматриваемой дискретной САУ при заданном входном воздействии статическая ошибка отсутствует, скоростная ошибка имеет постоянное значение  $x_{СК}=7$ , а ошибка по ускорению неограниченно возрастает во времени  $x_{УСК}=3n$ , что согласуется с расчетом по теореме о конечном значении функции ошибки.

### Контрольные вопросы

1. Как определяются прямые показатели качества переходных процессов?
2. Как определить установившуюся ошибку и добротность в статических и астатических САУ по теореме о конечном значении функции ошибки?
3. Как определяется ошибка в САУ по коэффициентам ошибки?
4. Как найти коэффициенты ошибки из ЗФП по ошибке замкнутой САУ?
5. В чем заключается принцип синтеза алгоритма управления в САУ по заданной весовой или переходной функции?
6. В чем заключается принцип частотного синтеза дискретной САУ с использованием псевдочастотных характеристик?

### 3. РАБОТА САУ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

#### 3.1. Характеристики случайных воздействий

В непрерывных и дискретных САУ на процессы управления влияют детерминированные управляющие и возмущающие воздействия, а также случайные внешние и внутренние воздействия [1, 15].

Внешние случайные воздействия порождаются влиянием внешней среды в виде случайных входных сигналов, электромагнитных помех, изменений нагрузки, напряжения электропитания и т. д.

Внутренние случайные воздействия возникают при работе собственных устройств в САУ вследствие случайных переключений цепей, коммутации тока в электрических машинах, выпрямителях и других преобразователях, а также вследствие случайных искажений информации, шумов в датчиках, усилителях и других элементах САУ.

Случайными называются величины и процессы, значения которых во времени в каждом отдельном случае определить невозможно. Некоторые случайные величины и процессы подчиняются *статистическим закономерностям*, основанным на оценках вероятности их реализации (осуществления). Такие величины и процессы называются *стохастическими* и описываются *статистическими (вероятностными) характеристиками*. Случайные величины и процессы, не подчиняющиеся статистическим закономерностям, называются *хаотическими* (беспорядочными) [1, 15].

Анализ и синтез САУ, работающих при случайных стохастических воздействиях, изучается *статистической динамикой систем управления*, которая является составной частью теории управления и в то же время относится к общей теории случайных процессов [1, 15].

В данном разделе рассматриваются задачи оценки и минимизации влияния случайных стохастических воздействий на точность (ошибки) линейных одномерных САУ с постоянными параметрами.

Каждое случайное воздействие на САУ называется *реализацией случайной функции*. Совокупность множества реализаций случайной функции называется самой *случайной функцией*, зависящей от определенного аргумента функции. Случайные функции, для которых аргументом (независимой переменной) является время, называются *случайными процессами* [1]. Случайный процесс  $x(t)$  включает совокупность множества реализаций случайного процесса, группирующихся вокруг *среднего значения случайного процесса*  $\bar{x}$ . При постоянном среднем значении  $\bar{x} = \text{const}$  случайный процесс называется

стационарным и его статистические (вероятностные) характеристики не зависят от времени (рис. 3.1.1, а). При изменении среднего значения  $\tilde{x}(t)$  во времени случайный процесс называется *нестационарным* и его характеристики зависят от времени (рис. 3.1.1, б) [1].

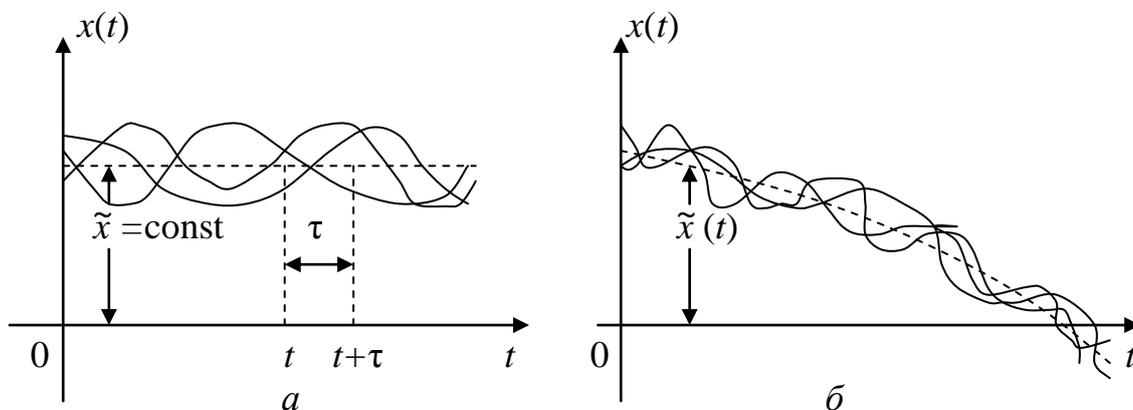


Рис. 3.1.1. Стационарный и нестационарный случайные процессы

**Вероятностные характеристики дискретных воздействий** определяются законом распределения случайной дискретной величины. Например, при случайном стационарном (не зависящим от времени) процессе бросания симметричного оцифрованного шестигранника выпадение любой из шести цифр от  $x_1=1$  до  $x_6=6$  будет при каждом эксперименте *случайным событием*. При повторении этого эксперимента бесконечное число раз  $n \rightarrow \infty$  частота события выпадения каждой из шести цифр называется *вероятностью события*. При этом вероятность событий характеризуется *равномерным (равновероятностным) законом распределения* случайной величины  $x_i$  в интервале чисел  $1 \leq x_i \leq 6$  (3.1.1) и невероятным в интервале  $1 > x_i > 6$  (рис. 3.1.2, а)

$$P_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_i}{n} = \frac{1}{6}, \quad (3.1.1)$$

при выполнении обязательного очевидного условия  $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x) = 1$ .

Примером закона распределения случайной дискретной величины в аналитической форме является *закон Пуассона* (рис. 3.1.2, б) [1]

$$P(x) = \frac{\lambda}{x!} e^{-\lambda}, \quad (3.1.2)$$

где  $P(x)$  – вероятность принятия случайной величиной значения  $x$ ;  $\lambda$  – среднее значение случайной величины при числе опытов  $n \rightarrow \infty$ .

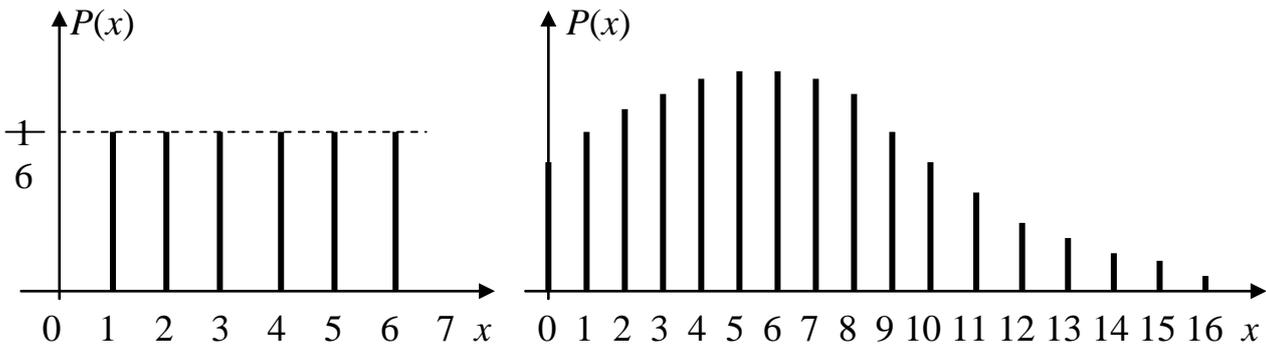


Рис. 3.1.2. Законы распределения случайной дискретной величины

*Интегральным законом распределения  $F(x)$  или функцией распределения  $F(x)$  случайной дискретной величины называется вероятность того, что текущее значение  $\xi$  случайной величины примет значение, меньшее чем значение  $x$*

$$F(x) = P_x(\xi < x) = \sum_0^x P(x), \quad (3.1.3)$$

где  $F(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$  [1]. Например, для равновероятностного закона распределения  $P(x)$  случайной дискретной величины  $x$  при бесконечном бросании оцифрованного шестигранника (рис. 3.1.2, а), интегральный закон распределения (функция распределения)  $F(x)$  по (3.1.3) будет так характеризовать вероятность принятия случайной величиной возможных значений  $\xi$ , меньших значения  $x$  (рис. 3.1.3, а): при  $\xi < x=1$  вероятность  $F(x)=0$  (нет цифр меньше 1); при  $\xi < x=2$   $F(x)=1/6$ ; при  $\xi < x=3$   $F(x)=2/6$ ; при  $\xi < x=4$   $F(x)=3/6$ ; при  $\xi < x=5$   $F(x)=4/6$ ; при  $\xi < x=6$   $F(x)=5/6$ ; при  $\xi < x=7$   $F(x)=1$  (любая из шести).

Функция распределения дискретной случайной величины, изменяющейся от 0 до  $\infty$  по закону Пуассона (3.1.2), по (3.1.3) будет иметь вид бесконечной лестницы (рис. 3.1.3, б) до  $F(x)=1$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Законы распределения полностью характеризуют случайные дискретные воздействия на САУ, но для расчетов используются следующие более простые *осредненные характеристики случайных величин*, выражающиеся обыкновенными неслучайными числами [1].

*Среднее значение  $\tilde{x}$  или математическое ожидание  $M[x]$  случайной дискретной величины*

$$\tilde{x} = M[x] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i. \quad (3.1.4)$$

Для примера бросания оцифрованного шестигранника среднее значение  $\tilde{x} = \sum_{i=1}^6 x_i P_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$ .

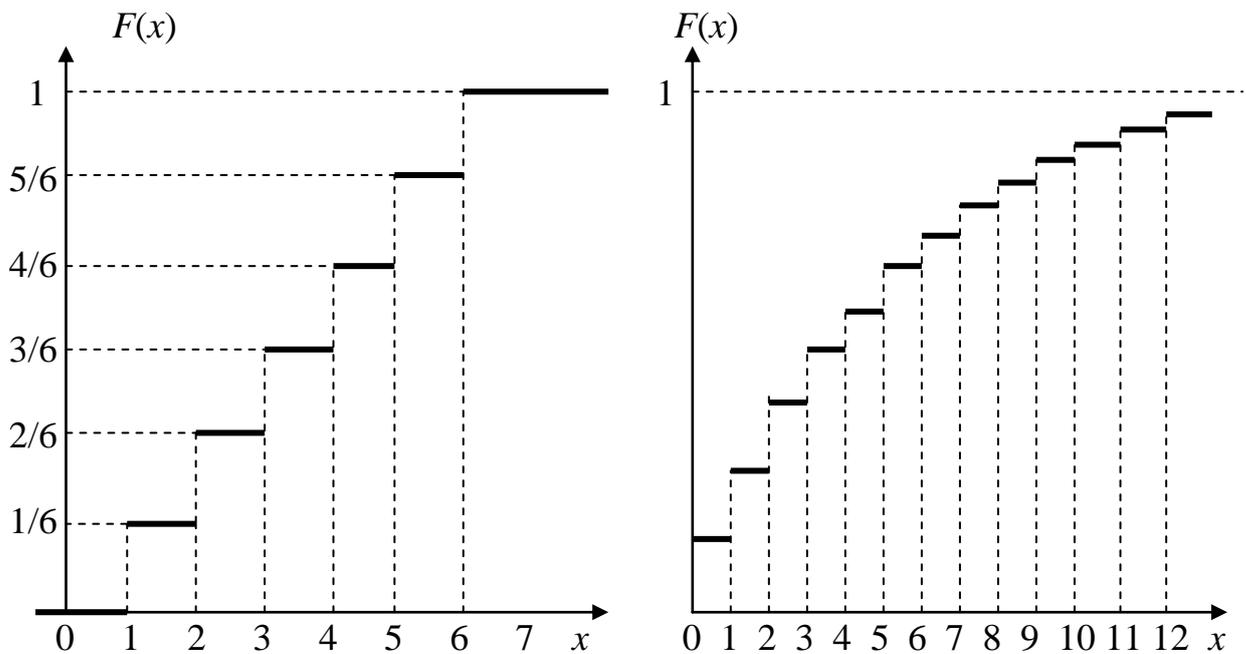


Рис. 3.1.3. Примеры интегральных законов распределения (функций распределения) дискретных случайных величин

*Момент  $m$ -го порядка* случайной величины выражает обобщенные понятия средних значений случайной величины

$$\overline{x^m} = M[x^m] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^m P_i. \quad (3.1.5)$$

Например, *момент нулевого порядка* при  $m=0$  выражает условие для (3.1.1) и всегда равен единице. *Момент первого порядка* выражает среднее значение случайной величины по (3.1.4). *Момент второго порядка* выражает среднее значение квадрата случайной величины

$$M[x^2] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P_i = \overline{x^2}. \quad (3.1.6)$$

Характеристикой рассеяния случайной дискретной величины  $x$  от ее среднего значения  $\tilde{x}$  является случайная величина отклонения  $x - \tilde{x}$ . *Средним отклонением  $\Delta$*  называется среднее значение абсолютной величины отклонения (обыкновенное число)

$$\Delta = M[|x - \tilde{x}|] = \overline{|x - \tilde{x}|} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - \tilde{x}| P_i. \quad (3.1.7)$$

Для примера бросания оцифрованного шестигранника

$$\Delta = \sum_{i=1}^6 |x_i - \tilde{x}| P_i = [|1 - 3,5| + |2 - 3,5| + |3 - 3,5| + \dots + |6 - 3,5|] \frac{1}{6} = 1,5.$$

*Дисперсией* называется средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения. Дисперсия совпадает с моментом второго порядка случайной дискретной величины

$$D = M[(x - \tilde{x})^2] = \overline{(x - \tilde{x})^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \tilde{x})^2 P_i. \quad (3.1.8)$$

Для примера бросания оцифрованного шестигранника

$$D = \sum_{i=1}^6 (x_i - \tilde{x})^2 P_i = [(1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + \dots + (6 - 3,5)^2] \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

*Среднеквадратичное отклонение* случайной величины от ее среднего значения

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\overline{x^2} - (\tilde{x})^2}. \quad (3.1.9)$$

Для примера бросания шестигранника  $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{35/12} = 1,7$ .

**Вероятностные характеристики случайных непрерывных воздействий**, которые могут принимать любые значения в интервале  $a \leq x \leq b$  или все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , представляются *функциями распределения* (интегральными законами распределения) для случайной непрерывной величины в виде непрерывной кривой  $F(x)$  при  $a \leq x \leq b$  (рис. 3.1.4, а) или при  $-\infty \leq x \leq +\infty$  (рис. 3.1.4, б) [1].

Вероятность равенства  $\xi = x_1$  бесконечно мала. Вероятность того, что  $\xi$  окажется между значениями  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 3.1.4, б) будет [1]

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (3.1.10)$$

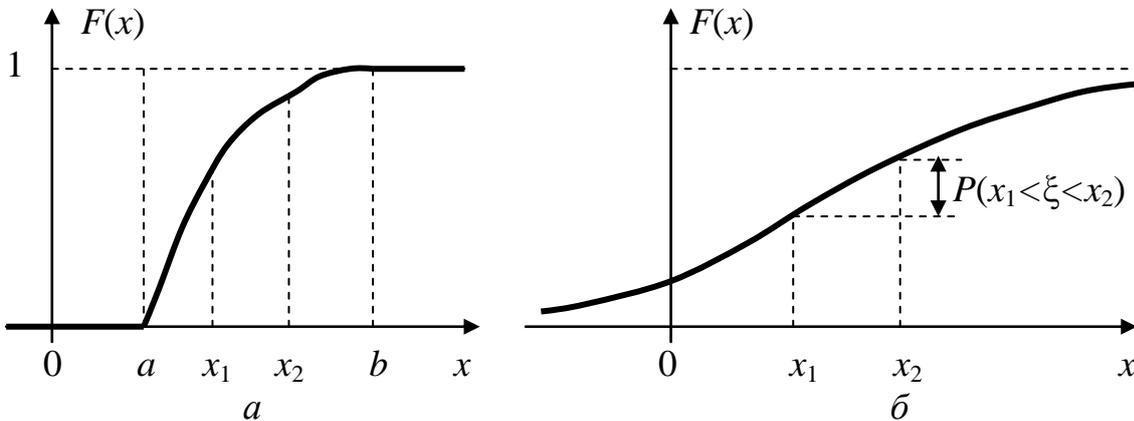


Рис. 3.1.4. Функции распределения (интегральные законы распределения) для случайных непрерывных величин

Вероятность того, что случайная величина находится между значениями  $x$  и  $(x+dx)$ , определится из выражения (3.1.10) в виде [1]

$$P(x < \xi < x + dx) = dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} dx = w(x) \cdot dx, \quad (3.1.11)$$

где величина  $\frac{dF(x)}{dx} = w(x)$  называется *плотностью вероятности*.

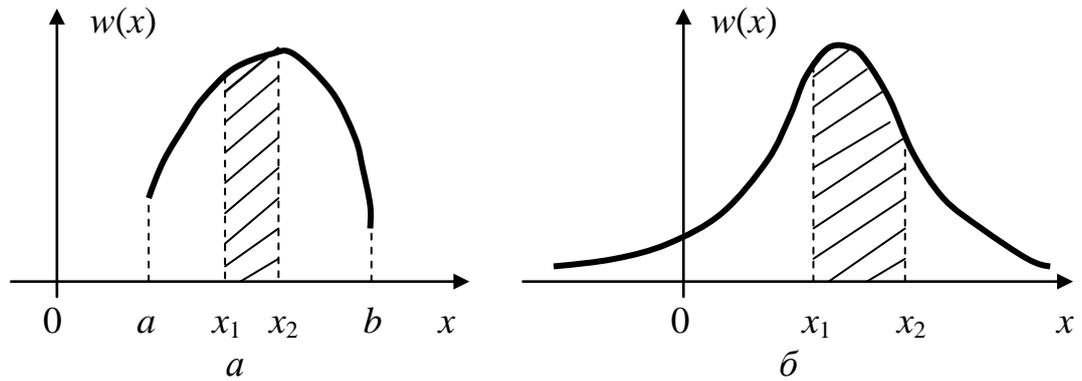


Рис. 3.1.5. Дифференциальные законы распределения для случайных непрерывных величин.

Закон распределения для случайной непрерывной величины, в отличие от дискретной, задается в виде значений *плотности вероятности*  $w(x)$ , называемой *дифференциальным законом распределения*. На рис. 3.1.5 показаны дифференциальные законы распределения  $w(x)$  для двух вариантов функции распределения  $F(x)$ , приведенных на рис. 3.1.4 [1].

Вероятность того, что случайная величина содержится между значениями  $x_1$  и  $x_2$  определяется интегрированием выражения (3.1.11) и геометрически выражается заштрихованной площадью на рис. 3.1.5

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx. \quad (3.1.12)$$

Между значениями интегрального (рис. 3.1.4) и дифференциального (рис. 3.1.5) законов распределения имеется зависимость [1]

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (3.1.13)$$

При  $x \rightarrow \infty$  по (3.1.13) площадь под кривой  $w(x)$  равна единице, как и сама функция распределения

$$F(x = \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1. \quad (3.1.14)$$

*Среднее значение (математическое ожидание)* случайной непрерывной величины соответствует моменту первого порядка [1]

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot w(x) dx. \quad (3.1.15)$$

*Среднее значение квадрата* по множеству возможных значений случайной непрерывной величины может быть вычислено по интегральному выражению, соответствующему моменту второго порядка при  $t=2$ , аналогичному выражению (3.1.5) для дискретных величин,

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x) dx. \quad (3.1.16)$$

*Дисперсия* равна значению квадрата отклонения случайной непрерывной величины от ее среднего значения

$$D = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \tilde{x})^2 w(x) dx = \overline{x^2} - (\tilde{x})^2. \quad (3.1.17)$$

На рис. 3.1.4 и рис. 3.1.5 показаны примеры произвольных законов распределения случайных непрерывных величин. В практике расчетов САУ применяются наиболее подходящие для каждого случая  **типовые законы распределения**  случайных непрерывных величин [1]. Рассмотрим два наиболее часто применяемых из них.

1. *Закон равномерного распределения* случайной величины на интервале  $a \leq x \leq b$  характеризуется постоянной плотностью вероятности  $w(x)$  и равномерно возрастающей функцией распределения  $F(x)$  (рис. 3.1.6, а) [1]. Плотность вероятности с учетом (3.1.14) будет равна

$$F(x) = \int_a^b w(x) \cdot dx = 1 = \int_a^b c \cdot dx = c(b-a), \quad w(x) = c = 1/(b-a). \quad (3.1.18)$$

Среднее значение по множеству (математическое ожидание) случайной величины по (3.1.15) будет равно

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx = \int_a^b x \cdot c dx = \frac{b+a}{2}. \quad (3.1.19)$$

Среднее значение квадрата случайной величины по (3.1.16) (момент второго порядка) будет равно  $\overline{x^2} = \int_a^b x^2 c dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$ .

Дисперсия случайной величины по (3.1.17) будет равна

$$D = \sigma^2 = \tilde{x}^2 - (\tilde{x})^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднеквадратичное отклонение случайной величины от ее среднего значения из (3.1.17) будет равно  $\sigma = \sqrt{D} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ .

2. *Нормальный закон распределения* случайной непрерывной величины (*закон Гаусса*) (рис. 3.1.6, б) записывается в виде [1]

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\tilde{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.1.20)$$

где  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение, а  $\tilde{x}$  – среднее значение (математическое ожидание) случайной величины.

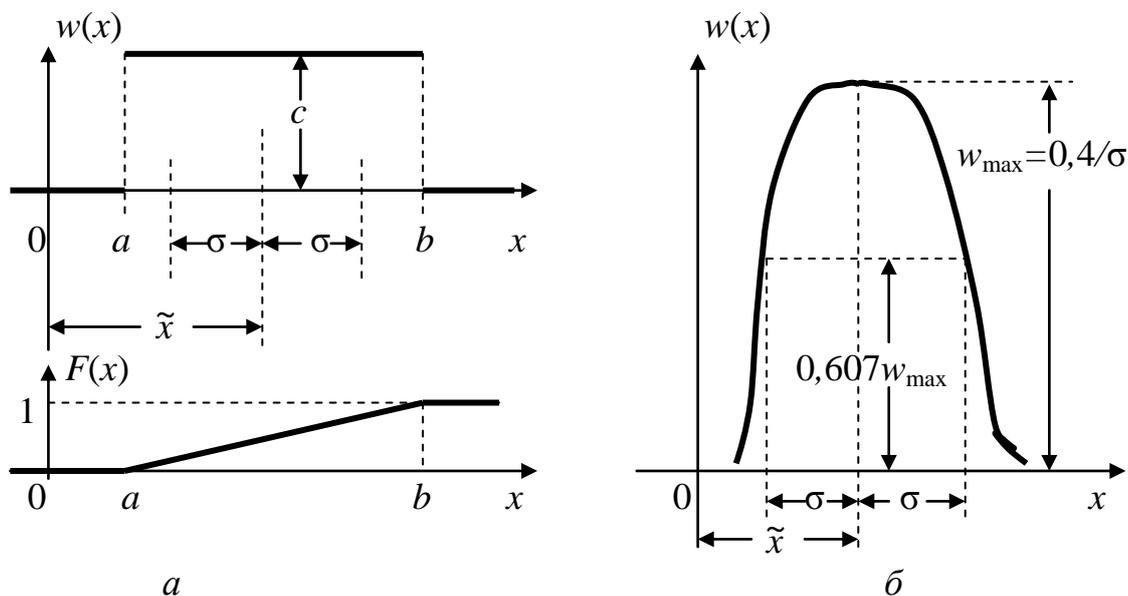


Рис. 3.1.6. Вид равномерных и нормальных законов распределения случайных непрерывных величин

Нормальный закон распределения обычно используется, когда случайная величина состоит из суммы независимых воздействий, что часто встречается на практике. Расчеты систем с использованием нормального закона распределения производятся с помощью специально разработанных таблиц [1].

### Контрольные вопросы

1. Какие случайные величины называют стохастическими и хаотическими?
2. Чем вызваны случайные внешние и внутренние воздействия на САУ?
3. Что называют случайным стационарным и нестационарным процессом?
4. Что называется законом распределения случайной величины?
5. Какой физический смысл имеют следующие основные характеристики случайных величин, используемые в расчетах САУ: математическое ожидание, дисперсия, плотность вероятности случайного процесса?
6. Какой вид имеют типовые законы равномерного распределения и нормального распределения непрерывных случайных величин?

### 3.2. Стационарные случайные процессы

Стационарные случайные процессы имеют независимые от времени статистические характеристики и очень важное свойство *эргодичности* – равенства средних по множеству и средних по времени значений статистических характеристик случайных величин [1, 15]

$$\bar{x}(t) = \overline{x(t)}; \quad \bar{x}^2(t) = \overline{x^2(t)}. \quad (3.2.1)$$

В (3.2.1) среднее значение по множеству  $\bar{x}(t)$  определяется по (3.1.15), а среднее значение по времени  $\overline{x(t)}$  определяется за время наблюдения от  $-T$  до  $+T$  по одной из реализаций (рис. 3.2.1) в виде

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \quad (3.2.2)$$

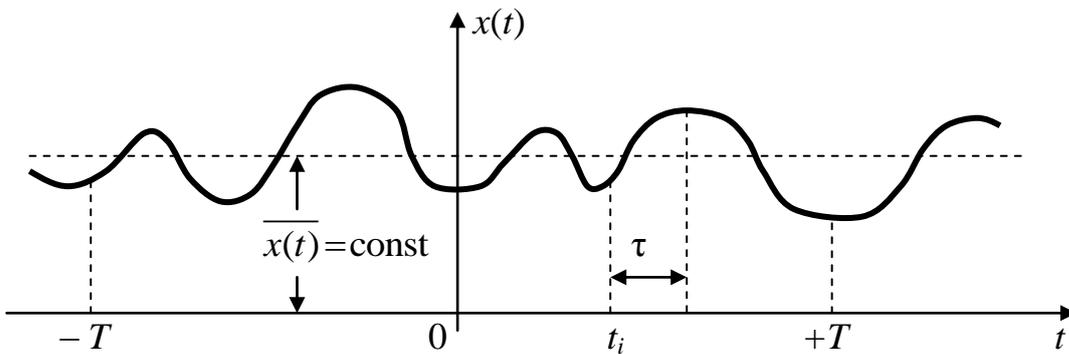


Рис. 3.2.1. Одна из реализаций стационарного случайного процесса

Среднее значение квадрата  $\bar{x}^2(t)$  по множеству определяется по (3.1.16), а среднее значение квадрата по времени – по выражению

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt. \quad (3.2.3)$$

Универсальной характеристикой стационарного случайного процесса (рис. 3.2.1) является **корреляционная (автокорреляционная) функция**, равная среднему по времени произведению двух значений величин  $x(t)$  и  $x(t+\tau)$  на интервале наблюдения от  $-T$  до  $+T$  в любые два момента времени, отличающихся на небольшой интервал  $\tau$

$$K(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot x(t+\tau) dt. \quad (3.2.4)$$

При  $\tau=0$  из выражения (3.2.4) получается

$$K(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = \overline{x^2} = \bar{x}^2, \quad (3.2.5)$$

т.е. при  $\tau=0$  корреляционная функция равна среднему значению квадрата случайного процесса по времени и по множеству.

Часто в САУ входное воздействие состоит из суммы полезного сигнала  $g(t)$  и сигнала помехи  $f(t)$ . Корреляционную функцию  $K_0(\tau)$  для сигнала  $x_0(t)=g(t)+f(t)$  можно по (3.2.4) найти по выражению

$$K_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [g(t) + f(t)] \cdot [g(t + \tau) + f(t + \tau)] dt = \quad (3.2.6)$$

$$= K_g(\tau) + K_{gf}(\tau) + K_{fg}(\tau) + K_f(\tau),$$

где  $K_{gf}(\tau)$ ,  $K_{fg}(\tau)$  – взаимные корреляционные функции

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{gf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} g(t) \cdot f(t + \tau) dt; \\ K_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot g(t + \tau) dt. \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

Если процессы не зависят друг от друга, то взаимная корреляция отсутствует и взаимные корреляционные функции равны нулю.

По корреляционным функциям с учетом эргодичности стационарных случайных процессов легко определяются их основные статистические характеристики: среднее значение (момент первого порядка)  $\tilde{x} = \bar{x} = \sqrt{K(\infty)}$ ; среднеквадратичное значение (момент второго порядка)  $\tilde{x}^2 = \bar{x}^2 = K(0)$ ; дисперсия  $D = K(0) - K(\infty)$ ; среднеквадратичное отклонение  $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{K(0) - K(\infty)}$ .

Корреляционные функции обладают универсальностью и используются для расчетов различных случайных процессов, но эти расчеты обычно оказываются достаточно сложными [1]. Поэтому для расчетов стационарных случайных процессов проще использовать **спектральную плотность** случайного процесса, которая представляет собой величину, пропорциональную средней мощности случайного процесса в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  [1].

Энергия любого случайного процесса определяется интегральной зависимостью от квадрата переменной случайной величины во времени. Поскольку САУ описываются дифференциальными уравнениями, случайные процессы в САУ должны рассматриваться на бесконечно малых интервалах времени, на которых величина энергии будет бесконечно мала и стремиться к нулю. Поэтому при расчетах процессов в САУ удобнее оперировать не с энергией, а со средней мощностью процесса во времени, получаемой делением энергии всего процесса на время наблюдения процесса. Для этого используется

*энергетическая форма интеграла Фурье*, преобразующего функцию  $x(t)$  в ее изображение Фурье  $F(j\omega)$  в частотной области и обратно [1]

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.2.8)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2.9)$$

Если взять квадрат модуля изображения Фурье, проинтегрировать его по всем частотам и разделить на  $2\pi$ , то получим выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot F(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-j\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.2.10)$$

где квадрат модуля  $|F(j\omega)|^2$  представлен произведением сопряженных величин  $F(j\omega)$  и  $F(-j\omega)$ , а  $F(j\omega)$  заменено по формуле (3.2.8) [1].

Изменив порядок интегрирования в (3.2.10), получим [1]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right]. \quad (3.2.11)$$

В (3.2.11) выражение в квадратных скобках по (3.2.9) есть исходная функция  $x(t)$  и тогда из (3.2.11) получается *формула Релея*, соответствующая *энергетической форме интеграла Фурье* [1]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt. \quad (3.2.12)$$

Правая часть в (3.2.12) характеризует энергию процесса  $x(t)$ .

*Средняя мощность процесса  $x(t)$*  за время наблюдения от  $-T$  до  $+T$  получается из (3.2.12) делением энергии на время  $2T$  в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t)]^2 dt = \overline{x^2(t)}. \quad (3.2.13)$$

Последнее равенство в (3.2.13) подставлено из (3.2.3).

Если в (3.2.13) обозначить

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F(j\omega)|^2 = S(\omega), \quad (3.2.14)$$

то формулу (3.2.13) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \overline{x^2} = D. \quad (3.2.15)$$

Величина  $S(\omega)$  называется *спектральной плотностью мощности* или просто *спектральной плотностью* стационарного случайного процесса  $x(t)$ , численно равной его дисперсии или среднему квадрату по времени и по множеству (вследствие эргодичности).

Важным свойством спектральной плотности  $S(\omega)$  стационарного случайного процесса является ее однозначная взаимосвязь с корреляционной функцией  $K(\tau)$  процесса, которая получается с помощью прямого и обратного преобразования Фурье в виде [1, 15]

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3.2.16)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.2.17)$$

При воздействиях на САУ двух взаимосвязанных стационарных процессов  $g(t)$  и  $f(t)$  с корреляционными функциями  $K_{gf}(\tau)$ ,  $K_{fg}(\tau)$  их взаимные спектральные плотности определяются формулами [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{gf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{gf}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ S_{fg}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{fg}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

Вычисление спектральной плотности по (3.2.14) затруднено необходимостью предельного перехода, проще использовать формулы (3.2.16) и (3.2.18) для определения  $S(\omega)$  случайного процесса по его корреляционной функции  $K(\tau)$ .

Для случайного стационарного процесса вид графика спектральной плотности  $S(\omega)$  определяется выбором **типового закона**, аналогично выбору закона распределения плотности вероятности  $w(x)$  [1]. Так, для случайного процесса типа «белый шум» с ограниченной спектральной плотностью вид закона  $S(\omega)$  аналогичен закону  $w(x)$  (рис. 3.1.6, а) при  $S(\omega) = c$ ,  $a = -\omega_0$ ,  $b = +\omega_0$ ; вид закона нормального распределения  $S(\omega)$  аналогичен закону Гаусса (рис. 3.1.6, б) и т. д.

Зависимость  $S(\omega)$  отражает характер изменений случайной величины  $x(t)$  во времени – чем шире спектр частот случайного сигнала, тем быстрее изменяется  $x(t)$  во времени и наоборот. Вид графика  $S(\omega)$  случайного процесса  $x(t)$  также связан с видом графика корреляционной функции  $K(\tau)$  – более «широкому» графику  $S(\omega)$  соответствует более «узкий» график  $K(\tau)$  и наоборот [1]. В [1, 15] и другой литературе приведены таблицы соответствия  $S(\omega)$  значениям  $K(\tau)$  для разных типовых случайных процессов, основанные на двустороннем преобразовании Фурье, а также методические указания по использованию этих таблиц при расчетах процессов в САУ.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается эргодичность стационарных случайных процессов?
2. Что называется корреляционной функцией случайного процесса?
3. Для чего используются взаимные корреляционные функции?
4. Какой физический смысл имеет спектральная плотность процесса?
5. Какой вид имеет  $S(\omega)$  с равномерным и нормальным распределением?
6. Как связана  $S(\omega)$  с быстротой изменения случайного процесса?
7. Какая взаимозависимость имеется между графиками  $S(\omega)$  и  $K(\tau)$ ?

### 3.3. Оценка влияния случайных воздействий на САУ

Оценка влияния на САУ случайных воздействий обычно заключается в определении установившихся значений выходной величины и ошибки регулирования, вызванных этими воздействиями, а также в оптимизации параметров и структуры САУ по критерию минимизации ошибки регулирования от случайных воздействий [1, 15].

Если входное воздействие  $x_{вх}(t)$  на линейную САУ является стационарным случайным процессом (рис. 3.1.1, *а*), то выходная величина  $x_{вых}(t)$  и ошибка регулирования  $\varepsilon(t) = x_{вх}(t) - x_{вых}(t)$  также будут стационарными случайными процессами. При этом расчеты стационарных случайных процессов проводятся на основе использования их спектральных плотностей  $S(\omega)$  и корреляционных функций  $K(\tau)$ .

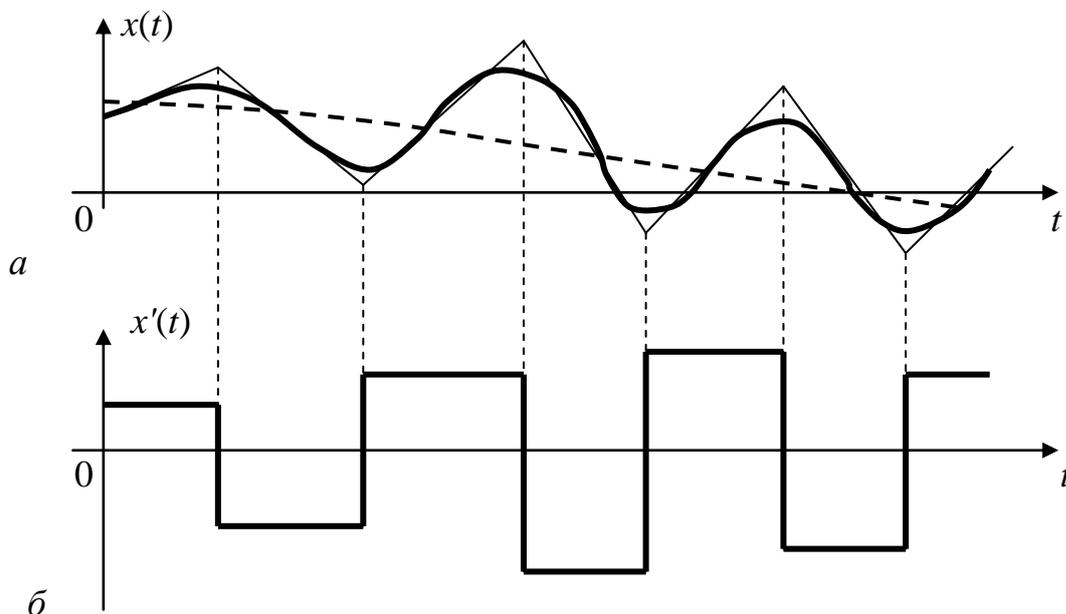


Рис. 3.3.1. Замена нестационарного случайного процесса стационарным

Если входное воздействие  $x_{вх}(t)$  является нестационарным случайным процессом (рис. 3.1.1, *б*), то используется приближенный метод расчета. Для этого кривую  $x_{вх}(t)$  нестационарного процесса

(рис. 3.3.1, а) приближенно заменяют участками, на которых скорость изменения  $x_{\text{вх}}'(t) = dx_{\text{вх}}(t)/dt = \text{const}$  (рис. 3.3.1, б). Полученный процесс  $x_{\text{вх}}'(t)$  уже является стационарным случайным процессом относительно скорости изменения входного воздействия и по нему можно рассчитать влияние на САУ рассматриваемого случайного воздействия.

Рассмотрим влияние стационарных случайных воздействий на замкнутую САУ с единичной обратной связью (рис. 3.3.2), имеющую частотную передаточную функцию разомкнутой цепи  $W(j\omega)$ . Выходная величина  $y(t)$  и ошибка регулирования  $\varepsilon(t)$  в САУ определяются задающим  $g(t)$  и возмущающим  $f(t)$  воздействиями, корреляционные функции и спектральные плотности которых заданы.

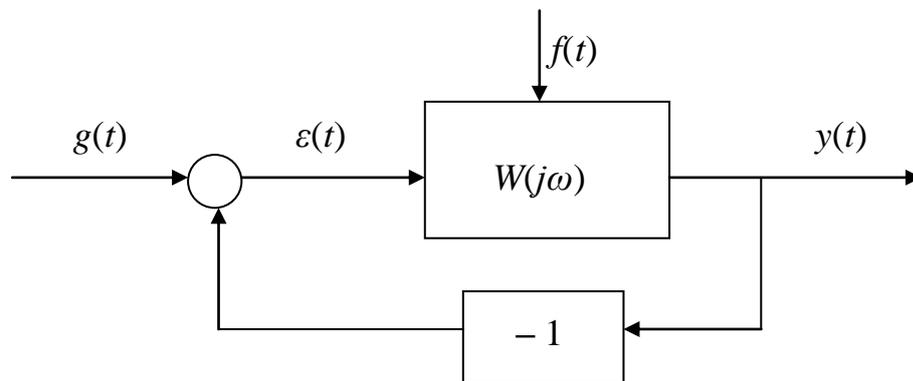


Рис. 3.3.2. Структурная схема замкнутой САУ

**Прохождение случайного сигнала через САУ.** Рассмотрим три возможных случая условий работы САУ.

**1.** При воздействии на САУ задающего случайного сигнала  $g(t)$  и отсутствии возмущающего воздействия  $f(t)=0$ , изображения Фурье процессов на входе  $F_g(j\omega)$  и выходе  $F_y(j\omega)$  САУ связаны через частотную передаточную функцию  $\Phi(j\omega)$  замкнутой САУ [1]

$$F_y(j\omega) = \Phi(j\omega) \cdot F_g(j\omega). \quad (3.3.1)$$

Из (3.2.14), после подстановки  $F_y(j\omega)$  по (3.3.1), получим

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_y(j\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\Phi(j\omega) \cdot F_g(j\omega)|^2 = \\ &= |\Phi(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_g(j\omega)|^2 = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

По найденной спектральной плотности  $S_y(\omega)$  выходного случайного процесса по (3.2.15) определяется среднее значение его квадрата и дисперсия и, с учетом формулы (3.3.2), получается выражение

$$\begin{aligned} \overline{y^2} = D_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega = \\ &= S_g(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} d\omega = S_g(\omega) \cdot I_n, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

где частотная функция передачи замкнутой САУ представлена дробным выражением  $\Phi(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$ , а значение интеграла  $I_n$  вычисляется по таблице интегралов [1]. По дисперсии определяется среднее значение выходной величины  $\bar{y} = \sqrt{D} = \sqrt{\overline{y^2}}$ . Из (3.2.17) определяется корреляционная функция выходного процесса  $K_y(\tau)$  по спектральной плотности  $S_y(\omega)$ , полученной из (3.3.2).

Интеграл  $I_n$  в (3.3.3) можно представить в упрощенном виде [1]

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\omega) d\omega}{A(j\omega) \cdot A(-j\omega)}, \quad (3.3.4)$$

где  $A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n;$  (3.3.5)

$$C(j\omega) = b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_{n-1}. \quad (3.3.6)$$

В (3.3.4) в числителе все члены с нечетной степенью  $\omega$  дают при интегрировании нуль, поскольку знаменатель является четной функцией  $\omega$  [1]. Поэтому по (3.3.6) в числителе исключены члены с нечетной степенью  $\omega$ . Все корни полинома  $A(j\omega)$  в устойчивой САУ расположены в верхней комплексной полуплоскости вследствие того, что использована подстановка  $p=j\omega$ , а множитель  $j$  означает поворот вектора комплексного числа на угол  $\pi/2$  и левая комплексная полуплоскость становится верхней комплексной полуплоскостью.

Интеграл  $I_n$  при любом порядке  $n$  знаменателя  $A(j\omega)$  функции  $W(j\omega)$  устойчивой САУ может быть представлен в виде [1]

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (3.3.7)$$

где  $\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix},$  (3.3.8)

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.3.9)$$

Интегралы такого вида вычислены до  $n=7$  и приведены в таблице интегралов в приложении 2 в [1] и другой литературе.

**2.** При отсутствии задающего сигнала  $g(t)=0$  и наличии воздействия помехи в виде стационарного случайного процесса  $f(t)$  с спектральной плотностью  $S_f(\omega)$  все расчеты по п.1 повторяются с заменой частотной передаточной функции замкнутой САУ по задающему воздействию  $\Phi(j\omega)=Y(j\omega)/G(j\omega)$  на передаточную функцию замкнутой САУ по возмущающему воздействию  $\Phi_f(j\omega)=Y(j\omega)/F(j\omega)$ .

**3.** В общем случае, когда на линейную САУ воздействуют два стационарных случайных процесса  $g(t)$  и  $f(t)$ , между которыми отсутствует взаимосвязь (взаимная корреляция равна нулю), спектральная плотность общего выходного случайного процесса по (3.3.2) будет

$$S_{ygf}(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (3.3.10)$$

где  $\Phi(j\omega)$  и  $\Phi_f(j\omega)$  – частотные передаточные функции замкнутой САУ по задающему  $g(t)$  и возмущению  $f(t)$  воздействиям, а  $S_g(\omega)$  и  $S_f(\omega)$  – их спектральные плотности. По найденной из (3.3.10) спектральной плотности выходного процесса по (3.3.3) определяется его дисперсия, среднее квадратичное значение и среднее значение [1].

**Расчет установившихся ошибок.** Для САУ (рис. 3.3.2) обычно определяют только среднеквадратичные ошибки, вызванные стационарными случайными процессами задающего  $g(t)$  и возмущающего  $f(t)$  воздействий. Рассмотрим три возможных случая.

**1.** Если на САУ действует только задание  $g(t)$ , а возмущение отсутствует  $f(t)=0$ , то спектральная плотность ошибки по (3.3.2) будет

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega), \quad (3.3.11)$$

где частотная передаточная функция замкнутой САУ по ошибке

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{1}{1+W(j\omega)} = 1 - \Phi(j\omega), \quad (3.3.12)$$

$\Phi(j\omega)$  – передаточная функция САУ по задающему воздействию.

Интегрирование спектральной плотности ошибки (3.3.11) по всем частотам по формуле (3.3.3) позволяет вычислить среднеквадратичную ошибку от воздействия задающего случайного процесса [1]

$$\varepsilon_{ск} = \sqrt{\varepsilon^2} = \sqrt{D_\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega}. \quad (3.3.13)$$

2. При действии на САУ (рис 3.3.2) только стационарного случайного процесса  $f(t)$  со спектральной плотностью  $S_f(\omega)$  при отсутствии задающего сигнала  $g(t)=0$ , все расчеты по п. 1 повторяются при замене передаточной функции по ошибке от задающего воздействия (3.3.12) на передаточную функцию по ошибке от возмущающего воздействия  $\Phi_{\varepsilon f}(j\omega)=E(j\omega)/F(j\omega)$ . В частном случае, когда помеха приложена на входе САУ, передаточная функция по ошибке будет такой же как от действия задающего сигнала.

3. В случае, когда задающее воздействие  $g(t)$  и воздействие помехи  $f(t)$  представляют собой независимые друг от друга стационарные случайные процессы с спектральными плотностями  $S_g(\omega)$  и  $S_f(\omega)$ , вычисление среднего значения квадрата ошибки производится по (3.3.3) отдельно для каждого воздействия, а затем ошибки суммируются.

**Параметрическая оптимизация САУ по критерию минимума среднеквадратичной ошибки** заключается в оптимизации (уточнении) величины какого-либо изменяемого параметра (коэффициента передачи, постоянной времени регулятора или корректирующего элемента) в САУ с известной структурой и известными параметрами с целью минимизации среднего значения квадрата ошибки по (3.2.3)

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (3.3.14)$$

Выбор критерия оптимизации в виде минимизации среднего квадрата ошибки обусловлен простотой ее расчета и универсальностью применения в различных режимах работы САУ.

Решение задачи нужно проводить в следующем порядке.

Во первых необходимо определить от действия каких стационарных случайных процессов с заданными статистическими характеристиками следует минимизировать квадратичную ошибку.

Во вторых следует определить по (3.3.13) зависимость суммарного среднего значения квадратичной ошибки  $\overline{\varepsilon^2}$  от случайных воздействий с учетом передаточной функции САУ.

В третьих нужно выбрать изменяемый параметр САУ (например, коэффициент передачи  $K$ ), оптимизацией которого достигается минимум среднего значения квадрата ошибки  $\overline{\varepsilon^2}$ .

При математической сложности определения оптимизируемого параметра, можно приближенно найти наилучшее значение  $K$  численным методом перебора, вычисляя значения  $\overline{\varepsilon^2} = f(K)$  до получения минимума ошибки. Изменять оптимизируемый параметр можно только при сохранении устойчивости и качества управления в САУ.

**Оптимизация САУ по критерию минимума среднего квадрата ошибки** является вариационной задачей и сводится к отысканию оптимальной частотной передаточной функции  $\Phi_{\text{опт}}(j\omega)$ , минимизирующей средний квадрат ошибки при воздействии на замкнутую САУ стационарных случайных процессов задающего сигнала  $g(t)$  и сигнала помехи  $f(t)$ , образующих входной сигнал  $\varphi(t)=g(t)+f(t)$ .

Решение этой задачи основано на преобразовании в САУ полезного задающего сигнала  $g(t)$  в его желаемое воспроизведение  $h(t)$  на выходе САУ по определенной заданной или выбранной формуле в виде преобразований Лапласа непрерывных функций времени [1]

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(p) \cdot \mathcal{L}[g(t)], \quad (3.3.15)$$

где  $H(p)$  – оператор, формирующий изображение по Лапласу желаемого воспроизведения  $h(t)$  из изображения по Лапласу задающего сигнала  $g(t)$ . При  $H(p)=1$  получается простое воспроизведение с так называемым оптимальным сглаживанием (имеет место в следящих системах с ограниченной полосой пропускания частот), при  $H(p)=p$  получается преобразование идеального дифференцирования, при  $H(p)=1/p$  получается идеальное интегрирование и т. д. [1].

Ошибка регулирования в САУ образуется из разности желаемого выходного процесса  $h(t)$  от задающего сигнала  $g(t)$  и реального выходного процесса  $y(t)$  от действия общего сигнала  $\varphi(t)=g(t)+f(t)$

$$\varepsilon(t) = h(t) - y(t). \quad (3.3.16)$$

Выходная величина САУ представляется формулой [1, 15]

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) \cdot w(\tau) d\tau, \quad (3.3.17)$$

где  $w(t)$  – весовая функция замкнутой САУ.

Подставляя (3.3.17) в (3.3.16), а полученное значение ошибки  $\varepsilon(t)$  в (3.3.14), получим выражение среднего квадрата ошибки в виде

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ h(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) \cdot w(\tau) d\tau \right]^2 dt. \quad (3.3.18)$$

Задача состоит в том, чтобы найти оптимальную частотную передаточную функцию замкнутой САУ, связанную с оптимальной весовой функцией преобразованием Фурье [1]

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) = \int_0^{\infty} w_{\text{опт}}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.3.19)$$

таким образом, чтобы минимизировать значение ошибки  $\overline{\varepsilon^2}$ . В результате преобразований выражения (3.3.18), с введением корреляционных функций по (3.2.4) и спектральных плотностей по (3.2.16) при

замене нижнего предела интегрирования  $-\infty$  на 0 (поскольку в реальных САУ при  $t < 0$   $w(t) = 0$ ), получается оптимальная передаточная функция (3.3.19), соответствующая оптимальной весовой функции, являющейся решением интегрального уравнения Винера–Хопфа [1]

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.3.20)$$

где 
$$\psi(j\omega) \cdot \psi^*(j\omega) = |\psi(j\omega)|^2 = S_{\varphi}(\omega). \quad (3.3.21)$$

В частном случае, когда оператор  $H(p) = 1$  (случай оптимального сглаживания в следящей системе), получается  $h(t) = g(t)$ ,  $S_{\varphi}(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) + S_{gf}(\omega) + S_{fg}(\omega)$ ,  $S_{h\varphi}(\omega) = S_{g\varphi}(\omega) = S_g(\omega) + S_{gf}(\omega)$ .

В этом случае решение (3.3.20) можно представить в виде

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)}. \quad (3.3.22)$$

Числитель в (3.3.22) определяется из анализа выражения [1]

$$\frac{S_{g\varphi}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{\omega + \alpha_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{e_i}{\omega + \gamma_i}, \quad (3.3.23)$$

где из (3.3.20)  $S_{h\varphi}(\omega) = S_{g\varphi}(\omega)$  и в (3.3.23)  $\eta_i$  – полюсы  $S_{g\varphi}(\omega)$ , расположенные в верхней комплексной полуплоскости,  $(-\alpha_i)$  – полюсы  $S_{g\varphi}(\omega)$ , расположенные в нижней комплексной полуплоскости (причем полюсы предполагаются простыми), а  $\gamma_i$  – нули  $\psi^*(j\omega)$ .

При этом числитель в (3.3.22) представляется выражением

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i}. \quad (3.3.24)$$

В САУ с полученной  $\Phi_{\text{опт}}(j\omega)$  теоретический минимум среднего квадрата ошибки будет иметь значение

$$\overline{\varepsilon^2}_{\text{min}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ S_g(\omega) - |\Phi_{\text{опт}}(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) \right\} d\omega. \quad (3.3.25)$$

**Пример 3.1.** Найти оптимальные по минимуму среднего квадрата ошибки частотную и операторную функции передачи замкнутой САУ (рис. 3.3.2), на задающий вход которой воздействуют стационарные случайные процессы полезного сигнала  $g(t)$  и сигнала помехи  $f(t)$  со спектральными плотностями  $S_g(\omega) = 2\mu D / (\mu^2 + \omega^2)$  и  $S_f(\omega) = N = \text{const}$ , причем корреляция между ними отсутствует  $S_{gf}(\omega) = S_{fg}(\omega) = 0$ .

1) Определим спектральную плотность суммарного входного сигнала

$$S_{\varphi}(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} + N = \frac{2\mu D + N\mu^2 + N\omega^2}{\mu^2 + \omega^2} =$$

$$= (2\mu D + N\mu^2) \frac{1 + \frac{N}{2\mu D + N\mu^2} \omega^2}{\mu^2 + \omega^2} = A \frac{1 + a^2 \omega^2}{\mu^2 + \omega^2} = A \frac{(1 + ja\omega)(1 - ja\omega)}{(\mu + j\omega)(\mu - j\omega)}, \quad (3.3.26)$$

где  $A = 2\mu D + N\mu^2$ ,  $a^2 = \frac{N}{2\mu D + N\mu^2} = \frac{N}{A}$ .

2) Будем искать оптимальную частотную передаточную функцию замкнутой САУ в форме (3.3.22) для случая  $H(p)=1$ , соответствующего обычной следящей системе с оптимальным сглаживанием

$$\Phi(j\omega) = B(j\omega) / \psi(j\omega). \quad (3.3.27)$$

3) Знаменатель в (3.3.27) определится по (3.3.21) с учетом (3.3.26) в виде

$$\psi(j\omega) = \sqrt{S_\varphi(\omega)} = \sqrt{A} \frac{1 + ja\omega}{\mu + j\omega}. \quad (3.3.28)$$

Сопряженное значение знаменателя из (3.3.28) будет

$$\psi^*(j\omega) = \sqrt{A} \frac{1 - ja\omega}{\mu - j\omega}. \quad (3.3.29)$$

4) Для определения  $B(j\omega)$  в (3.3.27) рассмотрим выражение (3.3.23)

$$\begin{aligned} \frac{S_{g\varphi}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} &= \frac{S_g(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} = \frac{2\mu D}{(\mu + j\omega)(\mu - j\omega)} = \\ &= \frac{2\mu D}{\sqrt{A} \frac{1 - ja\omega}{\mu - j\omega}} = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \frac{1}{(1 - ja\omega)(\mu + j\omega)} = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \left( \frac{a}{1 + a\mu} \cdot \frac{1}{1 - ja\omega} + \frac{1}{1 + a\mu} \cdot \frac{1}{\mu + j\omega} \right). \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

В (3.3.30) методом неопределенных коэффициентов дробь второго порядка разложена на сумму дробей первого порядка с легко определяемыми полюсами

$$\frac{1}{(1 - ja\omega)(\mu + j\omega)} = \frac{K}{1 - ja\omega} + \frac{C}{\mu + j\omega} = \frac{a}{(1 + a\mu)(1 - ja\omega)} + \frac{1}{(1 + a\mu)(\mu + j\omega)},$$

где  $K(\mu + j\omega) + C(1 - ja\omega) = 1$ ;  $K\mu + C = 1$ ,  $Kj\omega - Cja\omega = 0$ ;  $K = a/(1 + a\mu)$ ;  $C = 1/(1 + a\mu)$ .

5) Отбросив в (3.3.30) первое слагаемое, соответствующее полюсу в нижней полуплоскости, находим числитель оптимальной передаточной функции

$$B(j\omega) = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{(1 + a\mu)(\mu + j\omega)}. \quad (3.3.31)$$

6) Оптимальная частотная передаточная функция в форме (3.3.22), с учетом выражений (3.3.31) и (3.3.28), получится в виде

$$\Phi_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \frac{1}{(1 + a\mu)(\mu + j\omega)} \cdot \frac{\mu + j\omega}{\sqrt{A} \frac{1 + ja\omega}{\mu + j\omega}} = \frac{2\mu D}{A(1 + a\mu)} \frac{1}{1 + ja\omega}. \quad (3.3.32)$$

7) Оптимальная операторная функция передачи (ОФП) будет иметь вид

$$\Phi_{\text{опт}}(p) = \frac{2\mu D}{A(1+a\mu)} \frac{1}{1+ap}. \quad (3.3.33)$$

Полученная оптимальная передаточная функция легко реализуется. При получении сложных оптимальных передаточных функций их следует рассматривать как идеальные, к которым следует стремиться при реализации САУ.

**Пример 3.2.** Вычислить средний квадрат ошибки на выходе замкнутой САУ (рис. 3.3.2) при подаче на вход САУ полезного детерминированного задающего сигнала  $g(t)$  зашумленного сигналом помехи в виде белого шума  $f(t)$ , имеющего спектральную плотность  $S_f(\omega) = \gamma_f^2 = \text{const}$ .

Передаточная функция разомкнутой цепи САУ имеет вид

$$W(p) = \frac{K_1 K_2}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}. \quad (3.3.34)$$

Передаточная функция замкнутой САУ будет иметь вид

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K_1 K_2}{p(1+pT_1)(1+pT_2) + K_1 K_2}. \quad (3.3.35)$$

Заменив в (3.3.35)  $p=j\omega$ , получаем частотную передаточную функцию

$$\Phi(j\omega) = \frac{K_1 K_2}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = \frac{B_3(j\omega)}{A_3(j\omega)}. \quad (3.3.36)$$

По формуле (3.3.3) квадрат среднего значения ошибки на выходе САУ от случайного сигнала помехи на входе САУ определяется выражением

$$\overline{\varepsilon_f^2} = S_f(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = S_f(\omega) \cdot I_3. \quad (3.3.37)$$

Интеграл в (3.3.37) по (3.3.4) и (3.3.7) определяется выражением

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B_3(j\omega)|^2}{|A_3(j\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_3(\omega) d\omega}{|A_3(j\omega)|^2} = \frac{1}{2a_0} \frac{M_3}{\Delta_{3-1}}, \quad (3.3.38)$$

где из (3.3.36) по (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) и (3.3.9) получаются выражения

$$A_3(j\omega) = j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + K_1 K_2 = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3; \quad (3.3.39)$$

$$B_3(\omega) \approx |B_3(j\omega)|^2 = |K_1 K_2|^2 = b_0 \omega^{2 \cdot 3 - 2} + b_1 \omega^{2 \cdot 3 - 4} + b_2 \omega^{2 \cdot 3 - 6}, \quad (3.3.40)$$

$$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = K_1^2 K_2^2;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = b_2 (a_0 a_1 - a_2 \cdot 0) = b_2 a_0 a_1; \quad (3.3.41)$$

$$\Delta_{n-1} = \Delta_{3-1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3. \quad (3.3.42)$$

Подставляя  $M_3$  и  $\Delta_2$  в (3.3.38), найдем значение интеграла

$$I_3 = \frac{1}{2a_0} \frac{M_3}{\Delta_{3-1}} = \frac{1}{2a_0} \frac{b_2 a_0 a_1}{a_1 a_2 - a_0 a_3} = \frac{1}{2T_1 T_2} \frac{K_1^2 K_2^2 T_1 T_2 (T_1 + T_2)}{(T_1 + T_2) \cdot 1 - T_1 T_2 K_1 K_2}. \quad (3.3.43)$$

Подставляя  $I_3$  в (3.3.37), найдем квадрат среднего значения ошибки

$$\overline{\varepsilon_f^2} = S_f(\omega) \cdot I_3 = \gamma_f^2 \frac{K_1^2 K_2^2 T_1 T_2 (T_1 + T_2)}{T_1 + T_2 - T_1 T_2 K_1 K_2}. \quad (3.3.44)$$

Если полезный сигнал  $g(t)$  на входе САУ также является стационарным случайным процессом, то аналогичным путем определяется среднее значение квадрата ошибки  $\overline{\varepsilon_g^2}$  на выходе САУ от воспроизведения сигнала  $g(t)$ , а общая ошибка определяется суммой  $\overline{\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon_g^2} + \overline{\varepsilon_f^2}$ .

**Пример 3.3.** Определим среднее значение квадрата ошибки в замкнутой САУ (рис. 3.3.2) от воздействия задающего сигнала  $g(t)$ , который является нестационарным случайным процессом (рис. 3.3.1).

В этом случае среднее значение квадрата ошибки вычисляется относительно производной от сигнала  $g(t)$  в виде  $g'(t) = dg(t)/dt$ , который уже становится стационарным случайным процессом с соответствующей спектральной плотностью, например,  $S_{g'}(\omega) = N = \text{const}$ . Спектральную плотность процесса  $g'(t)$  можно определить по его корреляционной функции, получаемой при обработке кривой этого процесса во времени [2].

Передаточная функция по ошибке замкнутой САУ (рис. 3.3.2), с параметрами из примера 3.2, определится по (3.3.12) в виде

$$\Phi_{\varepsilon g}(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+pT_1)(1+pT_2)}{p(1+pT_1)(1+pT_2) + K_1 K_2}. \quad (3.3.45)$$

Поделив выражение (3.3.45) на  $p$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi'_{g\varepsilon}(p) &= \frac{\Phi_{\varepsilon g}(p)}{p} = \frac{E(p)}{pG(p)} = \frac{1}{p} \frac{p(1+pT_1)(1+pT_2)}{p(1+pT_1)(1+pT_2) + K_1 K_2} = \\ &= \frac{(1+pT_1)(1+pT_2)}{p(1+pT_1)(1+pT_2) + K_1 K_2} = \frac{B(p)}{A(p)}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Среднее значение квадрата ошибки по (3.3.3) с учетом (3.3.4) – (3.3.6) определяется выражением

$$\overline{\varepsilon_g'^2} = S_{g'}(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi'_{g\varepsilon}(j\omega)|^2 d\omega = N \cdot I_3'. \quad (3.3.47)$$

Вычисление интеграла  $I_3'$  в (3.3.47) по выражениям (3.3.7)–(3.3.9) с учетом (3.3.46) запишется в виде

$$\begin{aligned} I_3' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi'_{g\varepsilon}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2) + K_1 K_2} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_1^2 T_2^2 \omega^4 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + 1}{|T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + K_1 K_2|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega) d\omega}{|A(j\omega)|^2} = \\ &= \frac{1}{2a_0} \cdot \frac{M_3}{\Delta_{n-1}} = \frac{1}{2a_0} \cdot \frac{M_3}{\Delta_{3-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

Определим значения коэффициентов в знаменателе и числителе выражения (3.3.48) для вычисления интеграла по формулам (3.3.7) – (3.3.9)

$A_3(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + K_1 K_2 = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3$ ,  
 где  $a_0 = T_1 T_2$ ,  $a_1 = T_1 + T_2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = K_1 K_2$ ;

$$B_3(\omega) \approx |B_3(j\omega)|^2 = T_1^2 T_2^2 \omega^4 + (T_1 + T_2)\omega^2 + 1 = b_0 \omega^4 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^0,$$

где  $b_0 = T_1^2 T_2^2$ ,  $b_1 = T_1 + T_2$ ,  $b_2 = 1$ .

Значения коэффициентов в формуле (3.3.48) рассчитываются по выражениям (3.3.8) и (3.3.9)

$$M_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = b_0 \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = b_0 a_2 a_3 - a_0 b_1 a_3 + a_0 a_1 b_2; \quad (3.3.49)$$

$$\Delta_{n-1} = \Delta_{3-1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3. \quad (3.3.50)$$

С учетом полученных выражений, среднее значение квадрата ошибки по формуле (3.3.47) запишется в виде

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_g'^2} &= N \frac{1}{2a_0} \frac{M_3}{\Delta_{3-1}} = N \frac{1}{2T_1 T_2} \frac{T_1^2 T_2^2 K_1 K_2 - T_1 T_2 (T_1^2 + T_2^2) K_1 K_2 + T_1 T_2 (T_1 + T_2)}{(T_1 + T_2) - T_1 T_2 K_1 K_2} = \\ &= N \frac{K_1 K_2 (T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2) + (T_1 + T_2)}{2(T_1 + T_2 - T_1 T_2 K_1 K_2)}. \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

### Контрольные вопросы

1. Как оценивают влияние на САУ случайных воздействий?
2. На основе каких статистических характеристик стационарных случайных процессов внешних воздействий ведутся расчеты их влияния на САУ?
3. Как преобразуется нестационарный случайный процесс для исследования его влияния на работу САУ?
4. Как получить частотную функцию передачи  $\Phi(j\omega)$  замкнутой САУ?
5. Как связаны спектральные плотности стационарного случайного процесса на входе  $S_g(\omega)$  и выходе  $S_y(\omega)$  в замкнутой САУ с частотной передаточной функцией  $\Phi(j\omega)$ ?
6. Как определить среднее значение квадрата выходной величины в замкнутой САУ по спектральной плотности входного процесса  $S_g(\omega)$  и частотной передаточной функции  $\Phi(j\omega)$  САУ?
7. Как определить частотную передаточную функцию замкнутой САУ по ошибке  $\Phi_\varepsilon(j\omega)$  по частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  разомкнутой цепи САУ и по частотной передаточной функции  $\Phi(j\omega)$  замкнутой САУ?
8. В каком порядке проводится параметрическая оптимизация САУ с целью минимизация среднеквадратичной ошибки от воздействия стационарного случайного процесса изменения входной величины?
9. Как определить среднеквадратичную ошибку в замкнутой САУ с передаточной функцией по ошибке  $\Phi_\varepsilon(j\omega)$  от стационарного случайного процесса входного воздействия, имеющего спектральную плотность  $S_g(\omega)$ ?
10. В чем заключается и в каком порядке проводится оптимизация САУ по критерию минимума среднего квадрата ошибки при входном воздействии стационарного случайного процесса, состоящего из суммы задающего сигнала  $g(t)$  и возмущающего сигнала помехи  $f(t)$ ?

## 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ

### 4.1. Особенности нелинейных САУ

САУ называется *нелинейной*, если имеет хотя один *нелинейный элемент* (НЭ), который описывается нелинейным уравнением (обладает нелинейной характеристикой) [1, 9, 13, 15]. Строго говоря, все реальные САУ являются нелинейными из-за естественных ограничений возрастания выходного значения напряжения, мощности, скорости и других физических величин, а также нелинейностей их взаимозависимостей (насыщение, люфт, зона нечувствительности и др.).

По виду нелинейного уравнения «вход-выход» НЭ делятся на безынерционные (статические) и инерционные (динамические).

*Безынерционные (статические) НЭ* мгновенно реагируют на входное воздействие  $x$  соответственно статической нелинейной характеристике выходной величины  $y=F(x)$ , которая может быть непрерывной или релейной (рис. 4.1.1, а), типа ограничение (рис. 4.1.1, в), типа люфт (рис. 4.1.1, з), однозначной или неоднозначной. В последнем случае (гистерезисные петли) величина  $y$  зависит от входной величины  $x$  и от направления ее изменения (рис. 4.1.1, б).

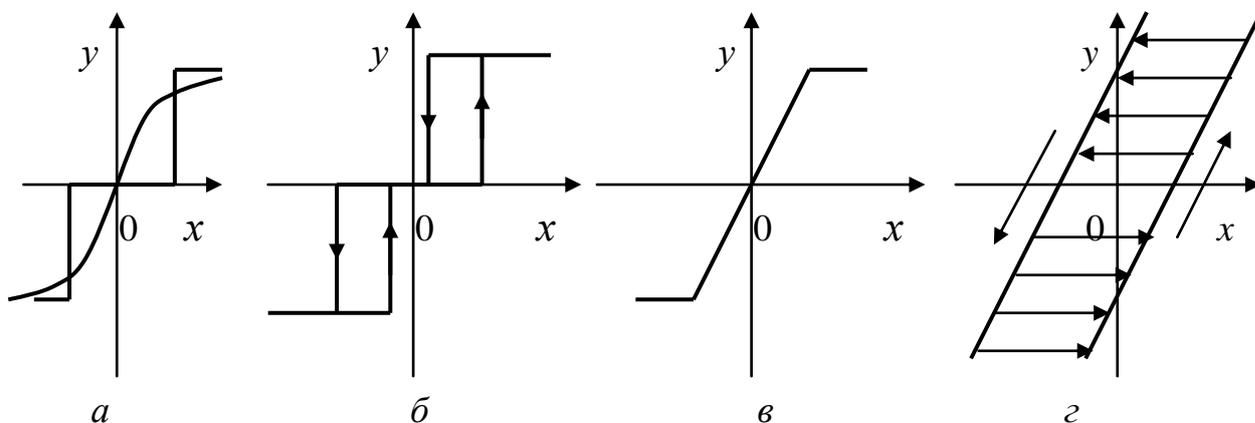


Рис. 4.1.1. Характеристики нелинейных элементов

*Инерционные (динамические) НЭ* описываются дифференциальным уравнением зависимости выходной величины  $y$  от входной величины  $x$  и ее производных, например,  $y=F(x, dx/dt)$ .

В САУ также используются *особые нелинейности* (множительное звено, элементы с переключаемой структурой или параметрами, элементы логического типа и т.п.), улучшающие качество САУ и обеспечивающие оптимальное и адаптивное управление процессами.

Присутствие нелинейностей обычно ухудшает качество работы линейных САУ – увеличиваются ошибки управления, ухудшается устойчивость и т.д. Однако, в некоторых случаях нелинейности вводят

в САУ специально – для ограничения тока или скорости двигателя на заданном уровне, для достижения максимального быстродействия САУ за счет применения релейного регулятора, для улучшения свойств САУ за счет введения нелинейных корректирующих устройств и т. д. [1, 9, 13, 15].

Нелинейные САУ отличаются от линейных САУ тем, что к ним неприменим принцип суперпозиции (наложения), а переходные процессы и динамическая устойчивость зависят от величины и формы внешних воздействий. Поэтому для нелинейных САУ существуют понятия «устойчивость в малом», «устойчивость в большом», «устойчивость в целом» соответствующих устойчивости САУ только при малых, больших или любых начальных внешних воздействиях. Особенностями нелинейных САУ также является возможность возникновения в них установившихся рабочих режимов автоколебаний, т.е. устойчивых собственных колебаний с постоянной амплитудой, не превышающей допустимого значения при отсутствии внешних колебательных воздействий [1, 9, 13, 15].

Для упрощения расчетов структуру нелинейных САУ путем эквивалентных структурных преобразований стараются представить в виде одноконтурной, с последовательно соединенными нелинейным звеном  $F(x)$  и линейной динамической частью  $W(p)$  [1, 13, 15]. Структурные преобразования нелинейных САУ проводят при неизменности входных воздействий нелинейных элементов.

При исследованиях нелинейных САУ обычно решают задачи оценки влияния нелинейностей на процессы в САУ с линейной частью или задачи анализа и синтеза нелинейных САУ, которые специально проектируются как нелинейные.

### Контрольные вопросы

1. Почему возникают нелинейности в САУ?
2. Какие нелинейности относятся к статическим, динамическим и особым?
3. Для чего нелинейности могут специально вводиться в САУ?
4. Какие основные отличия и особенности имеют нелинейные САУ по отношению к линейным САУ?
5. Какие две основные задачи обычно решаются при исследованиях нелинейных САУ?
6. Какие условия следует выполнять при эквивалентных преобразованиях структурных схем САУ, содержащих нелинейный элемент?

## 4.2. Методы исследования нелинейных САУ

Поскольку общие аналитические методы решения нелинейных дифференциальных уравнений отсутствуют, то при анализе и синтезе нелинейных САУ используются приближенные методы решения практических задач. Эти методы можно разделить на две группы [15]: 1) методы, основанные на приближенном решении нелинейных дифференциальных уравнений (методы «припасовывания», фазовых траекторий, точечных преобразований, графо-аналитические, частотный В.М. Попова, численные, моделирования); 2) методы, использующие линеаризацию нелинейных характеристик звеньев САУ с последующим применением хорошо разработанных методов анализа и синтеза линейных САУ (методы малого параметра, гармонического баланса, статистической линеаризации). Рассмотрим часто используемые для расчетов переходных процессов в нелинейных САУ методы припасовывания, фазовых траекторий, гармонической линеаризации.

**Метод припасовывания** [1, 13, 15] заключается в том, что нелинейная характеристика заменяется несколькими линейными участками и на каждом участке решается система линейных дифференциальных уравнений САУ. Полученные решения припасовывают (сшивают), принимая конечные значения решения и его производных на предыдущем участке за начальные условия решения на последующем участке. Метод характеризуется громоздкостью расчетов.

**Пример 4.1.** Исследовать методом припасовывания переходный процесс в нелинейной системе (рис. 4.2.1) при условиях:  $x_1(0)=0,01$ ;  $x_2(0)=0$  [7].

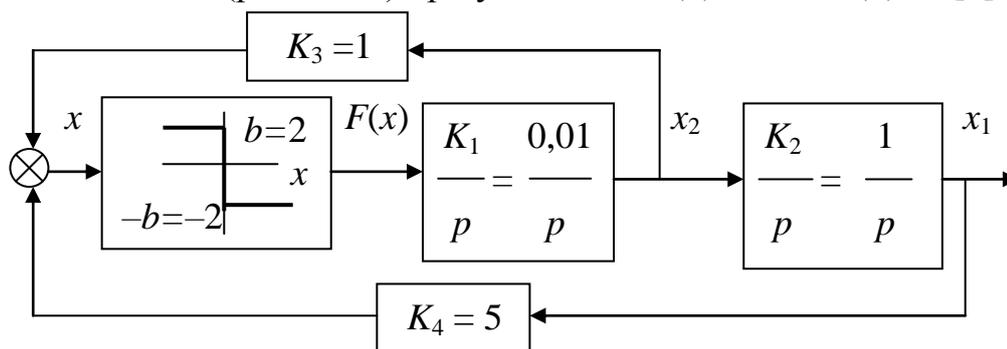


Рис. 4.2.1. Нелинейная САУ

Из схемы получается следующая система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = K_2 x_2; \\ \dot{x}_2 = K_1 F(x); \\ x = K_4 x_1 + K_3 x_2. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

В зависимости от знака координаты  $x$  система уравнений (4.2.1), описывающая движения САУ, распадается на две линейные системы уравнений:

$$\text{при } x < 0 \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = K_2 x_2; \\ \dot{x}_2 = K_1 b; \end{cases} \quad (4.2.2)$$

$$\text{при } x > 0 \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = K_2 x_2; \\ \dot{x}_2 = -K_1 b. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Проинтегрировав вторые уравнения в (4.2.2) и (4.2.3), получим

$$x_2 = K_1 b t + c_1 \quad \text{при } x < 0; \quad (4.2.4)$$

$$x_2 = -K_1 b t + c_2 \quad \text{при } x > 0. \quad (4.2.5)$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий. Подставляя значения  $x_2$  из (4.2.4) и (4.2.5) в первые уравнения систем (4.2.2) и (4.2.3) и интегрируя полученные уравнения, получаем выражения

$$x_1 = K_1 K_2 b t^2 / 2 + K_2 c_1 t + c_3 \quad \text{при } x < 0; \quad (4.2.6)$$

$$x_1 = -K_1 K_2 b t^2 / 2 + K_2 c_2 t + c_4 \quad \text{при } x > 0. \quad (4.2.7)$$

Уравнения (4.2.4) – (4.2.7) являются уравнениями искомого переходного процесса. Построение переходного процесса производится по (4.2.4) и (4.2.6) при  $x < 0$  и по (4.2.5) и (4.2.7) при  $x > 0$ . Начальное движение определяется знаком координаты  $x(0)$  при  $t=0$ . Подставив численные значения параметров и начальных условий в третье уравнение системы (4.2.1), получим

$$x(0) = K_4 x_1(0) + K_3 x_2(0) = 5 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0 = 0,05 > 0.$$

Поскольку  $x(0) > 0$ , то для построения переходного процесса на первом участке нужно использовать уравнения (4.2.5) и (4.2.7). Из (4.2.5) и (4.2.7) при  $t=0$  определяем постоянные интегрирования  $c_2 = x_2(0) = 0$ ,  $c_1 = x_1(0) = 0,01$ .

Уравнения движения на первом участке переходного процесса будут

$$x_2(t) = -0,02t; \quad (4.2.8)$$

$$x_1(t) = -0,01t^2 + 0,01. \quad (4.2.9)$$

Движение по уравнениям (4.2.8) и (4.2.9) будут продолжаться до изменения знака координаты  $x$  в момент времени  $t_1$  при

$$x = K_4 x_1 + K_3 x_2 = 5(-0,01t_1^2 + 0,01) - 1 \cdot 0,02t_1 = 0, \quad \text{откуда } t_1 = 0,82 \text{ сек.}$$

Значения  $x_1$  и  $x_2$  в конце первого участка будут по (4.2.8) и (4.2.9)

$$x_1(t_1) = -0,01t_1^2 + 0,01 = 0,00328; \quad (4.2.10)$$

$$x_2(t_1) = -0,02t_1 = -0,0164. \quad (4.2.11)$$

Эти значения будут начальными для второго участка переходного процесса. Подставляя значения  $x_1$  и  $x_2$  из (4.2.10) и (4.2.11) в (4.2.6) и (4.2.4) и полагая в них  $t=0$  (начав расчет процесса на втором участке), находим  $c_3 = 0,00328$  и  $c_1 = -0,0164$  для второго участка. Уравнения (4.2.6) и (4.2.4) для второго участка

$$x_1 = 0,01t^2 - 0,0164t + 0,00328; \quad x_2 = 0,02t - 0,0164. \quad (4.2.12)$$

Подставляя уравнения из (4.2.12) в третье уравнение системы (4.2.1) и приравнявая его нулю, находим момент переключения  $t_2$  в конце второго этапа  $x = K_4 x_1 + K_3 x_2 = 5(0,01t_2^2 - 0,0164t_2 + 0,00328) + 1(0,02t_2 - 0,0164) = 0; t_2 = 1,24 \text{ сек.}$

Подставляя  $t_2$  в уравнения (4.2.12), находим значения в конце второго этапа  $x_1(t_2) = -0,00168$ ;  $x_2(t_2) = 0,0084$ , которые являются начальными для третьего этапа расчета переходного процесса. На участке  $t_1 - t_2$  координата  $x_1$  изменяется по параболе и достигает экстремума в момент времени, при котором ее производная  $\dot{x}_1 = 0,02t - 0,0164 = 0$ , откуда  $t_{э2} = 0,82$  сек. Находим из (4.2.12) максимум координаты  $x_1(t_{э2}) = 0,01 \cdot 0,82^2 - 0,0164 \cdot 0,82 + 0,00328 = -0,0034$ .

Далее построение переходного процесса производится в том же порядке.

**Метод фазовых траекторий** основан на представлении движения системы в *фазовом пространстве* и анализе совокупности фазовых траекторий и особых точек без непосредственного интегрирования ее нелинейных дифференциальных уравнений [1, 13, 15].

Для исследования нелинейной САУ методом фазовых траекторий все звенья САУ, допускающие линеаризацию, описываются линейными уравнениями, а одно (реже – два или несколько) существенно нелинейных звеньев описываются нелинейными уравнениями.

В общем случае система нелинейных дифференциальных уравнений САУ в нормальной форме записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i[x_1, x_2, \dots, x_n, t; g(t); f(t)], \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (4.2.13)$$

где  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) – координаты состояния САУ;  $g(t)$ ,  $f(t)$  – внешние задающее и возмущающее воздействия;  $t$  – текущее время.

Для анализа собственных свойств САУ (анализа переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными значениями координат при отсутствии внешних воздействий), уравнения (4.2.13) для стационарных систем (с постоянными параметрами) принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.2.14)$$

Значения координат  $x_i$  можно представить в виде координат точки  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в  $n$ -мерном пространстве, которое называется *фазовым пространством*. Точку  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют *изображающей точкой*, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы, называют *фазовой траекторией*.

Каждой совокупности начальных условий  $x_i(0)$  соответствует единственное решение системы дифференциальных уравнений, только одна начальная точка и единственная фазовая траектория в фазовом пространстве. Ряду совокупностей начальных условий соответствует семейство непересекающихся фазовых траекторий, которое называется *фазовым портретом системы*.

Метод фазовых траекторий наиболее удобен для исследования систем второго порядка, так как их фазовые траектории располагаются на одной фазовой плоскости двух переменных. Фазовый портрет этих систем можно построить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его. При этом в качестве переменных, откладываемых по осям абсцисс и ординат фазовой плоскости, обычно выбирают регулируемую величину  $x$  и скорость ее изменения  $y=x'$  (или ошибку системы  $\varepsilon$  и скорость ее изменения  $\varepsilon'$ ). Тогда свободные движения в САУ второго порядка с уравнением  $\ddot{x} + F_1(x)\dot{x} + F_2(x) = 0$  можно описать двумя уравнениями первого порядка

$$y = \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -F_1(x)y - F_2(x), \quad (4.2.15)$$

откуда, исключая время, получаем дифференциальное уравнение фазовой траектории системы

$$\frac{dy}{dx} = -F_1(x) - \frac{F_2(x)}{y}. \quad (4.2.16)$$

Интегрирование уравнения (4.2.16) дает уравнение фазовой траектории в явном виде

$$y = F(x) + C, \quad (4.2.17)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования из начальных условий.

Точки *равновесного состояния* системы определяются нулевыми значениями скорости изменения координат  $dx/dt = 0$ ,  $dy/dt = 0$ , что создает неопределенность в правой части уравнения (4.2.16) (деление на  $y=0$ ). Поэтому точки равновесного состояния системы являются так называемыми *особыми точками* на фазовой плоскости.

Обычно фазовые траектории на фазовой плоскости строят для свободных движений системы, однако их можно строить и для вынужденных движений при известном задающем воздействии.

Фазовая траектория и переходный процесс однозначно соответствуют друг другу на каждом элементарном участке на основании соотношения  $y = dx/dt \approx \Delta x / \Delta t$ . На рис. 4.2.2 показаны характерные фазовые траектории для свободных движений в САУ второго порядка, соответствующие затухающему, расходящемуся и незатухающему колебательным переходным процессам.

Из анализа кривых на рис. 4.2.2 вытекают следующие правила построения фазовых траекторий:

1) в верхней фазовой полуплоскости изображающая точка всегда движется слева направо в сторону увеличения координаты  $x$ , поскольку скорость ее изменения положительна  $y = x' > 0$ ;

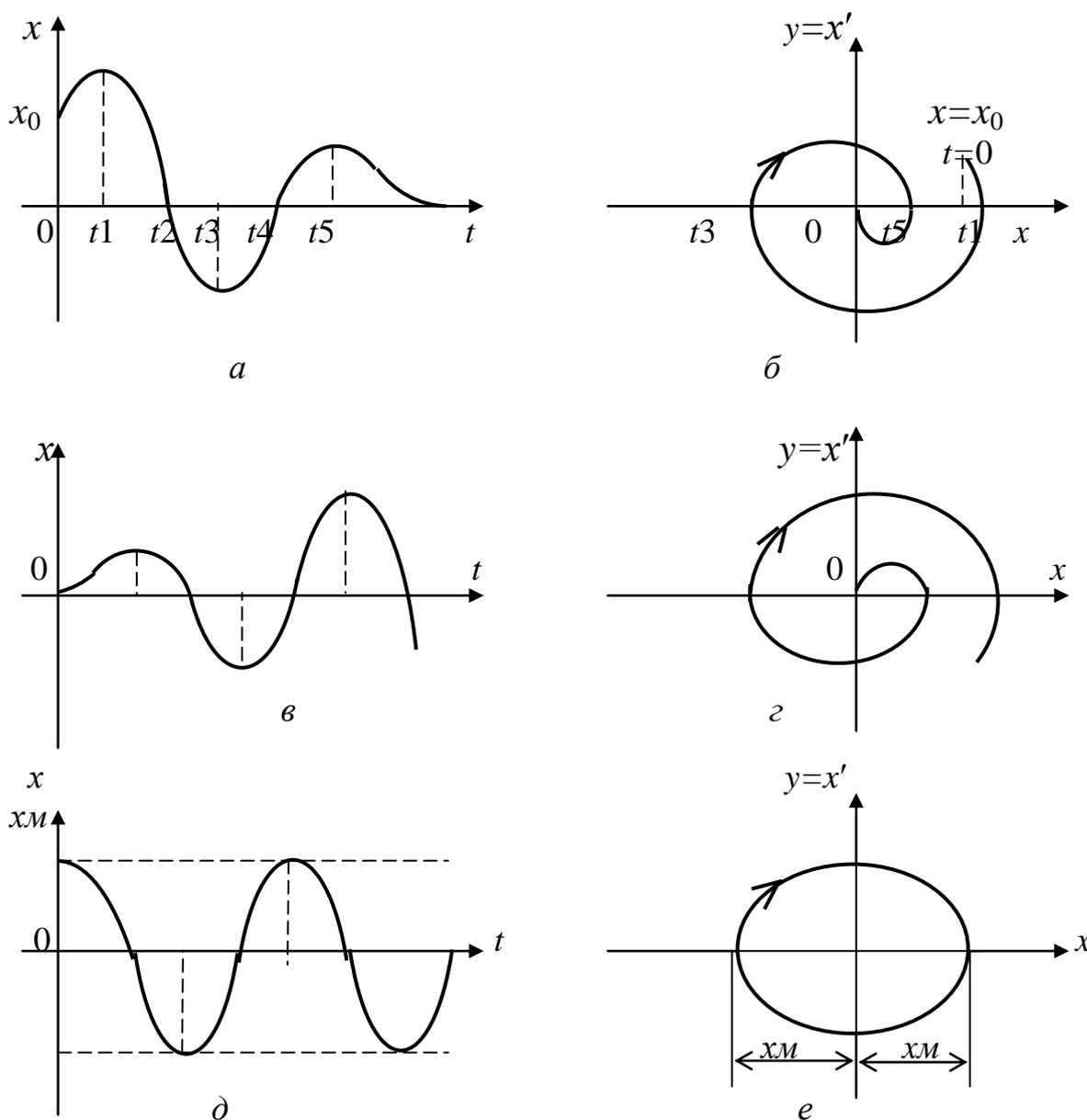


Рис. 4.2.2. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы второго порядка

2) в нижней фазовой полуплоскости, наоборот, изображающая точка всегда движется справа налево;

3) фазовые траектории всегда пересекают ось абсцисс  $x$  под прямым углом, так как при этом скорость  $y = x' = 0$ , а величина  $x$  имеет максимальное или минимальное значения;

4) затухающий колебательный процесс изображается на фазовой плоскости в виде спиралевидной кривой, сходящейся к точке положения равновесия, а монотонный – в виде кривой, монотонно приближающейся к точке равновесия;

5) расходящийся колебательный процесс изображается в виде расходящейся спиралевидной кривой, а монотонный – в виде монотонно удаляющейся кривой;

б) автоколебательный периодический процесс изображается на фазовой плоскости в виде замкнутой кривой, называемой *предельным циклом*, которую изображающая точка пробегает за время одного периода колебаний.

Фазовый портрет нелинейной САУ, обладающей кусочно-линейной или разрывной нелинейной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями. Линии, отделяющие на фазовой плоскости одну область от другой, называются *линиями переключения*. В точках пересечения фазовыми траекториями линий переключения происходит излом траекторий из-за изменения правой части уравнения (4.2.16).

Фазовые траектории обычно строят *методом изоклин*, не требующим интегрирования уравнения (4.2.16). *Изоклиной* называют геометрическое место точек фазовой плоскости, в которых фазовые траектории имеют одинаковый угол наклона  $\operatorname{tg}\alpha = c = dy/dx = \operatorname{const}$ .

Уравнение линии изоклины получается из (4.2.16) в виде

$$y = -F_2(x) / [c + F_1(x)], \quad (4.2.18)$$

в любой точке которой фазовые траектории имеют одинаковый угол наклона  $dy/dx = c = \operatorname{const}$ . Задавая различные значения  $c = \operatorname{const}$ , рассчитывают по (4.2.18) и наносят на фазовую плоскость семейство изоклин, на каждой из которых строят под углом  $\operatorname{tg}\alpha = c = \operatorname{const}$  серию параллельных отрезков прямых, касательных к фазовым траекториям (рис. 4.2.3). На изоклине, совпадающей с осью абсцисс  $x$ , параллельные отрезки касательных направлены строго вертикально, что соответствует нулевой скорости движения изображающих точек  $y=0$ .

Построение фазовой траектории (рис. 4.2.3) начинается из точки  $A$ , соответствующей начальным условиям, например  $x_0 = A$ ;  $y_0 = 0$ . Тогда, по указанным выше правилам, движение изображающей точки в нижней фазовой полуплоскости направлено влево. Из точки  $A$ , расположенной на изоклине  $c_5$  (т. е. на оси  $x$ ), проводим до пересечения с соседней изоклиной  $c_4$  две прямые:  $AB$  параллельно отрезкам, нанесенным на изоклину  $c_5$  (на ось  $x$ ) и  $AC$  параллельно отрезкам, нанесенным на изоклину  $c_4$ . Поделив пополам отрезок  $BC$  на изоклине  $c_4$ , соединяем точку  $A$  с серединой отрезка  $BC$  в точке  $D$ . Линия  $AD$  примерно соответствует отрезку фазовой траектории. Аналогично строим отрезок фазовой траектории между изоклинами  $c_4$  и  $c_3$  и т. д.

Получаемая фазовая траектория (рис. 4.2.3) имеет вид свертывающейся спирали, следовательно, переходный процесс в системе колебательный затухающий. При других начальных условиях получаются другие фазовые траектории, не пересекающиеся с построенными для данных начальных условий.

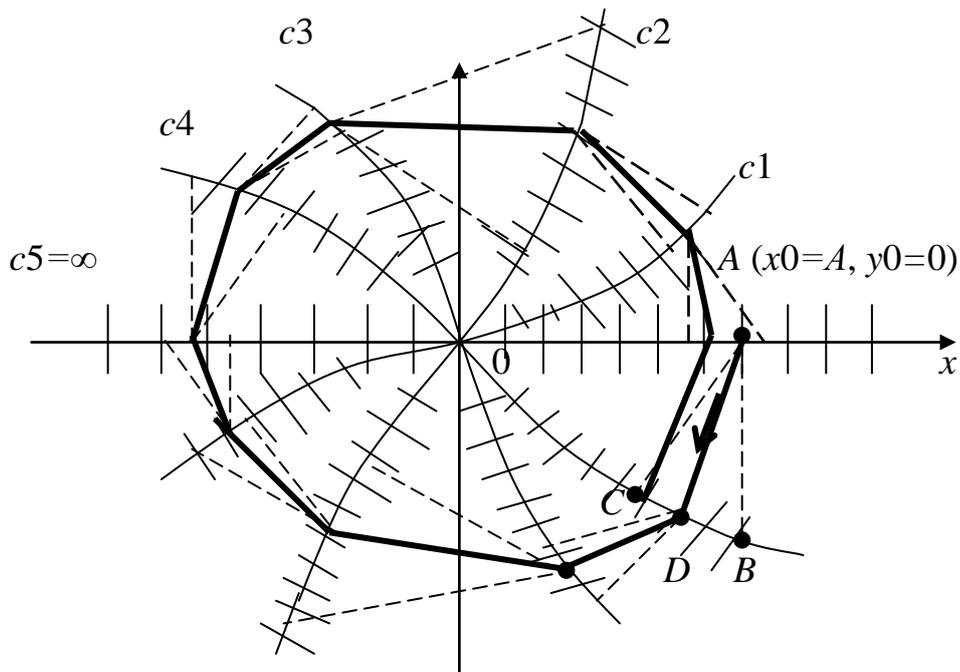


Рис. 4.2.3. Построение фазовых траекторий методом изоклин

Фазовый портрет нелинейной САУ позволяет определить: 1) все возможные устойчивые и неустойчивые режимы работы САУ; 2) устойчивость САУ и границы устойчивости; 3) автоколебания и их амплитуду; 4) тип переходных процессов (апериодический или колебательный) и области начальных условий их возникновения; 5) переходный процесс для любых начальных условий; 6) величину перерегулирования при любом ступенчатом входном воздействии.

Удобство метода фазовых траекторий состоит в том, что вся совокупность переходных процессов в САУ при любых начальных условиях представляется в виде единого «фазового портрета» на фазовой плоскости. Недостатком является ограниченность анализа системами второго порядка.

**Пример 4.2.** Исследовать методом фазовых траекторий процесс отработки ошибки управления в нелинейной следящей САУ с реальным усилителем с насыщением (с ограничением) (рис. 4.2.4).

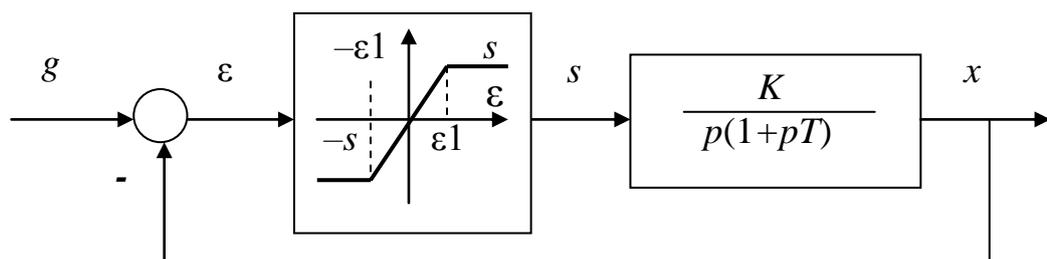


Рис. 4.2.4. Нелинейная следящая система

ОФП замкнутой САУ по ошибке имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{G(p)} = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+pT)}{p(1+pT)+K_Y K}, \quad (4.2.19)$$

или

$$(Tp^2 + p + K_Y K)\varepsilon(p) = (Tp^2 + p)G(p). \quad (4.2.20)$$

При исследовании свободного движения при  $G(p)=0$  из (4.2.20) получаем дифференциальное уравнение переходного процесса при работе усилителя на линейном участке характеристики

$$T \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} + K \cdot K_Y \varepsilon = 0, \quad (4.2.21)$$

которое определяет фазовые траектории САУ в линейной зоне при  $-\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ .

При выходе усилителя за пределы линейной зоны его выходной сигнал будет иметь постоянное значение и дифференциальные уравнения переходного процесса из (4.2.20) запишутся в виде

$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_1 \quad T \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} = -KS; \quad (4.2.22)$$

$$\text{при } \varepsilon \leq -\varepsilon_1 \quad T \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} = KS. \quad (4.2.23)$$

Обозначив  $\varepsilon=x$  и разделив уравнения (4.2.21), (4.2.22), (4.2.23) на  $d\varepsilon/dt=dx/dt=y$ , получим дифференциальные уравнения фазовых траекторий для трех областей фазовой плоскости:

$$\text{при } -\varepsilon_1 < \varepsilon < +\varepsilon_1 \quad T \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{K_Y K x}{y}; \quad (4.2.24)$$

$$\text{при } \varepsilon \geq +\varepsilon_1 \quad T \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{KS}{y}; \quad (4.2.25)$$

$$\text{при } \varepsilon \leq -\varepsilon_1 \quad T \frac{dy}{dx} = -1 + \frac{KS}{y}. \quad (4.2.26)$$

Фазовый портрет строим по методу изоклин (рис. 4.2.5). Вертикальные линии переключения, которые разделяют фазовую плоскость на три области и на которых производится «сшивание» фазовых траекторий, проходят через значения  $+x_1 = +\varepsilon_1$  и  $-x_1 = -\varepsilon_1$ . Изоклины для линейной зоны на основании уравнения (4.2.24) представляются наклонными лучами, проходящими через начало координат и определяющимися уравнениями

$$y = -K_Y K x / (T \cdot c + 1); \quad dy/dx = c = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.2.27)$$

Изоклины для правой нелинейной зоны при  $x > \varepsilon_1$  на основании (4.2.25) описываются уравнениями

$$y = -KS / (T \cdot c + 1); \quad dy/dx = c = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.2.28)$$

Изоклины для левой нелинейной зоны при  $x < -\varepsilon_1$  на основании (4.2.26) описываются уравнениями

$$y = KS / (T \cdot c + 1); \quad dy/dx = c = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.2.29)$$

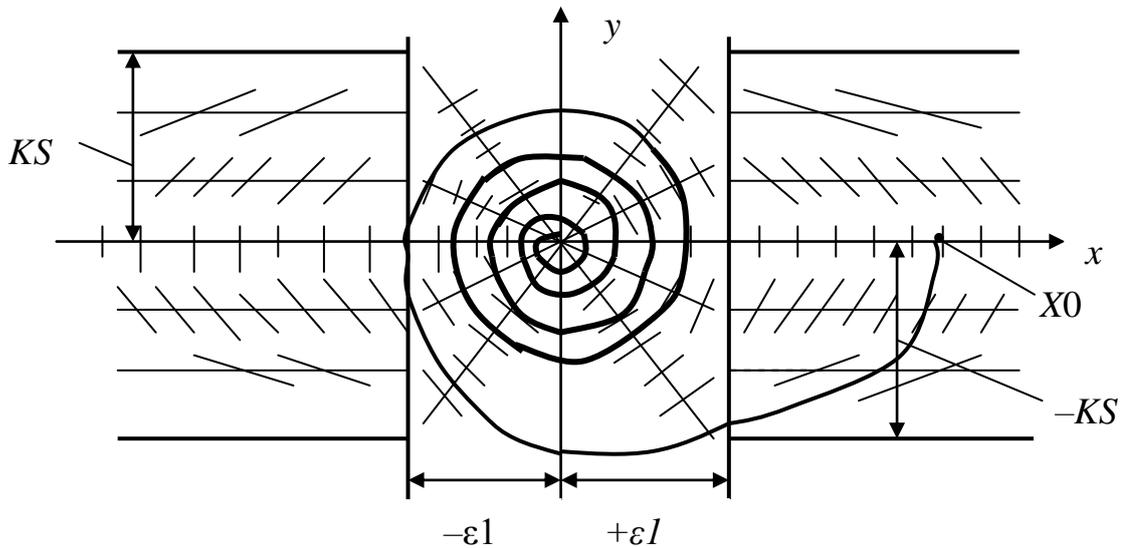


Рис. 4.2.5. Фазовый портрет процессов в САУ

Из уравнений (4.2.28) и (4.2.29) следует, что изоклины в нелинейных зонах насыщения параллельны оси абсцисс, поскольку переменная  $x$  в этих уравнениях отсутствует, но фазовые траектории пересекают изоклины под разными углами от  $0$  до  $90^\circ$  соответственно изменениям  $\operatorname{tg}\alpha=c$  от  $\infty$  до  $0$ . Изоклина, совпадающая с осью абсцисс, соответствует значениям  $c=\infty$ ,  $\alpha=90^\circ$ , а изоклины с  $c=0$ ,  $\alpha=0$  на основании (4.2.28) и (4.2.29) проводятся на уровнях  $+KS$  и  $-KS$ .

Чем больше построено изоклин, тем точнее получается фазовый портрет для САУ. В примере приняты начальные условия  $y_0=0$ ,  $x_0=X_0$ , а параметры САУ – соответствующими затухающему колебательному процессу.

**Пример 4.3.** Исследовать процессы в САУ из примера 4.2 (рис. 4.2.4) при замене усилителя с насыщением на релейный регулятор с нелинейной релейной характеристикой  $S(\varepsilon)=S \cdot \operatorname{sign} \varepsilon$  (рис. 4.2.6, а).

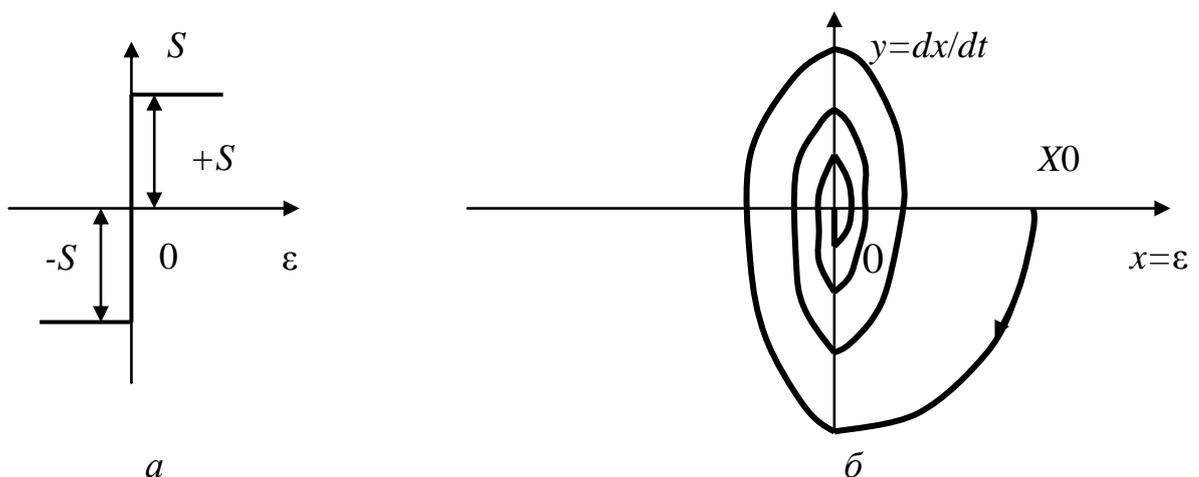


Рис. 4.2.6. Процессы в САУ с релейным регулятором

При этом свободное движение в САУ определяется уравнением

$$T \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} = -KS \cdot \operatorname{sign} \varepsilon; \quad (4.2.30)$$

$$\text{при } \varepsilon=x>0 \quad T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -KS; \quad (4.2.31)$$

$$\text{при } \varepsilon=x<0 \quad T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = KS. \quad (4.2.32)$$

Границей перехода от уравнения (4.2.31) к (4.2.32) является линия  $\varepsilon=x=0$ , т.е. ось ординат  $y$ , которая является также и линией переключения релейного регулятора. Уравнения изоклин в правой полуплоскости при  $\varepsilon=x>0$  имеет вид (4.2.28), в левой при  $\varepsilon=x<0$  вид (4.2.29).

**Метод гармонической линеаризации** (метод гармонического баланса) относится к приближенным методом исследования нелинейных САУ любого порядка [1, 13, 15]. При этом для исследования нелинейных САУ используются частотные методы теории линейных САУ на основе гипотезы фильтра низких частот линейной части САУ и предположения о гармоническом характере свободных движений нелинейных САУ.

Сущность метода гармонической линеаризации (гармонического баланса) заключается в замене нелинейного элемента (НЭ) с характеристикой  $y=F(x, x)$  эквивалентным линейным звеном с коэффициентом передачи  $K_H(a, \omega)$  (рис. 4.2.7, а), величина которого (угол наклона на рис. 4.2.7, а) зависит от амплитуды  $a$  и частоты  $\omega$  автоколебаний входной величины  $x(t)$  (рис. 4.2.7, в). В режиме автоколебаний в замкнутой САУ *условием эквивалентности* такой замены служит равенство амплитуд и фаз выходного гармонического сигнала эквивалентного линейного звена и первой гармоники выходного сигнала НЭ, которое называется *гармоническим балансом*. При этом предполагается, что сигнал на входе НЭ является синусоидальным. Такое предположение справедливо, если линейная часть САУ имеет достаточно большую инерционность и не пропускает высшие гармоники, т.е. обладает свойствами *фильтра низких частот* (рис. 4.2.7, г).

При подаче на вход НЭ сигнала  $x(t)=a\sin\omega t$  на выходе НЭ появится периодический сигнал  $y(t)$ , форма которого будет зависеть от вида нелинейности  $y=F(x, x)$ . Например, на выходе НЭ с нелинейностью типа «идеальное реле» образуется периодический сигнал прямоугольной формы (рис. 4.2.7, б). В общем случае несинусоидальный периодический сигнал на выходе НЭ можно разложить в ряд Фурье

$$y(t) = F[a\sin\omega t] = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (4.2.33)$$

где 
$$A_0 = \frac{\omega^{2\pi/\omega}}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(asin\omega t) dt, \quad (4.2.34)$$

$$A_n = \frac{\omega^{2\pi/\omega}}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(asin\omega t) \cos n\omega t dt, \quad (4.2.35)$$

$$B_n = \frac{\omega^{2\pi/\omega}}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(asin\omega t) \sin n\omega t dt. \quad (4.2.36)$$

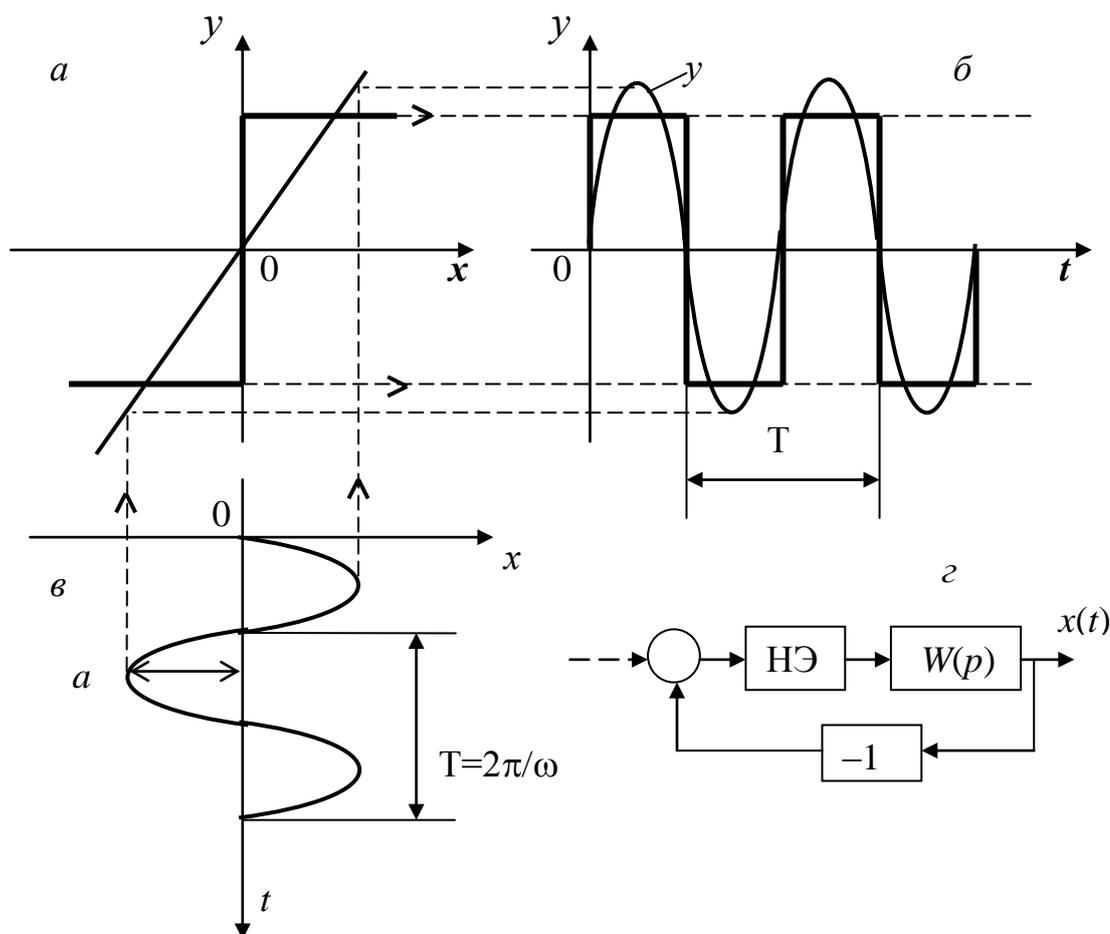


Рис. 4.2.7. Преобразование гармонического сигнала нелинейным элементом

В НЭ с однозначной симметричной нелинейностью относительно начала координат при синусоидальном входном сигнале в выходном периодическом сигнале отсутствуют постоянная составляющая и фазовое запаздывание. В НЭ с неоднозначной симметричной нелинейностью (например, типа люфт) в выходном сигнале также нет постоянной составляющей, но имеется фазовое запаздывание. В НЭ с неоднозначной несимметричной нелинейностью (например, типа реле со смещением и петлей гистерезиса) в выходном сигнале имеются постоянная составляющая и фазовое запаздывание.

На основе свойства фильтра низких частот линейной части САУ считают, что на входе НЭ действуют только синусоидальные сигналы

первой гармоники, имеющие при симметричных автоколебаниях вид

$$x(t) \approx a \sin \omega t, \quad (4.2.37)$$

а при несимметричных автоколебаниях – вид

$$x \approx x^0 + x^* = x^0 + a \sin \omega t, \quad (4.2.38)$$

где  $x^0$  – постоянная составляющая.

Выходную величину НЭ можно определять графически, как на рис. 4.2.7, либо аналитически – по формуле (4.2.33). При этом задача сводится к определению частоты  $\omega$  и амплитуды  $a$  в случае симметричных автоколебаний, либо частоты  $\omega$ , амплитуды  $a$  и постоянной составляющей  $x^0$  в случае несимметричных автоколебаний.

При исследованиях нелинейных САУ в первом приближении в (4.2.33) учитывают только первую гармонику выходной величины НЭ

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \quad (4.2.39)$$

и нелинейное звено заменяют гармонически линейризованным эквивалентным звеном с определенным коэффициентом передачи (рис. 4.2.7). При необходимости влияние высших гармоник на амплитуду и частоту первой гармоники выходной величины эквивалентного линейного звена можно учитывать дополнительно [1].

При *симметричных автоколебаниях* на выходе НЭ нет постоянной составляющей  $A_0=0$  и коэффициенты отношения амплитуд первых гармоник выходной и входной величин НЭ имеют вид

$$\frac{B_1}{a} = q(a), \quad \frac{A_1}{a} = q'(a). \quad (4.2.40)$$

Тогда выходная величина НЭ из (4.2.39) запишется в виде

$$y(t) = q(a) a \sin \omega t + q'(a) a \cos \omega t. \quad (4.2.41)$$

Поскольку входная величина НЭ  $x(t)$  связана соотношениями

$$a \sin \omega t = x; \quad a \cos \omega t = \frac{px}{\omega}, \quad \left( p = \frac{d}{dt} \right); \quad (4.2.42)$$

то из (4.2.41) связь выходной и входной величин НЭ имеет вид

$$y = F(x) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x = K_H(q, q') \cdot x, \quad (4.2.43)$$

где, при  $\omega t = \psi$ , согласно (4.2.40), (4.2.35), (4.2.36), получим значения

$$q = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.2.44)$$

$$q' = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (4.2.45)$$

Операция преобразования входной величины НЭ в его выходную величину в виде (4.2.43) называется *гармонической линейризацией нелинейности*, а коэффициенты  $q$  и  $q'$  называются *коэффициентами гармонической линейризации*.

Гармонически линейризованная передаточная функция НЭ на основании (4.2.43) будет иметь вид

$$W_H(a, p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p. \quad (4.2.46)$$

Амплитудно-фазовая характеристика гармонически линейризованного статического НЭ из (4.2.46) при  $p = j\omega$  получается в виде

$$W_H(a) = q(a) + jq'(a), \quad (4.2.47)$$

т.е. зависит только от амплитуды и не зависит от частоты сигнала на входе НЭ, в отличие от линейных звеньев.

Динамические нелинейности  $F(x, px)$ , зависящие от скорости изменения сигнала на входе НЭ, имеют коэффициенты  $q$  и  $q'$ , а значит и характеристики  $W_H(j\omega)$ , зависящие от его амплитуды  $a$  и частоты  $\omega$ .

Существуют также нелинейности, для которых  $q$ ,  $q'$  и  $W_H$  не зависят от амплитуды, а зависят только от частоты. Такие гармонически линейризованные нелинейности называются *псевдолинейными*.

При *несимметричных автоколебаниях* на выходе НЭ в результате гармонической линейризации при входном воздействии (4.2.38) выходная величина НЭ представляются в виде

$$y = F(x) = F^0(x^0, a) + \left[ q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^*, \quad (4.2.48)$$

где

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi, \quad (4.2.49)$$

$$q = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.2.50)$$

$$q' = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (4.2.51)$$

$$x^* = a \sin \omega t.$$

Из (4.2.48) видно, что выходная величина НЭ содержит постоянную и периодическую составляющие, каждая из которых зависит от обоих составляющих входного сигнала  $x^0$  и  $a$ . Это является принципиальным отличием нелинейного звена от линейного и обуславливает неприменимость принципа суперпозиции для НЭ (у линейных

звеньев по принципу суперпозиции каждая составляющая входа дает свою составляющую выхода).

При вычислении коэффициентов гармонической линеаризации по формулам (4.2.44), (4.2.45) нужно учитывать, что при симметричных нелинейностях интеграл от 0 до  $2\pi$  можно заменить суммой двух интегралов от 0 до  $\pi$ , а для симметричных относительно начала координат безгистерезисных нелинейностей при вычислении  $q(a)$  интеграл от 0 до  $2\pi$  равен четырем интегралам от 0 до  $\pi/2$  [2].

Для типовых нелинейностей расчетные формулы коэффициентов гармонической линеаризации приводятся в [2, 4, 10, 13] и др.

**Пример 4.4.** Вычислить коэффициенты гармонической линеаризации для НЭ с идеальной релейной характеристикой (рис. 4.2.6, а).

Данная нелинейность однозначна и симметрична

$$F(x) = S \operatorname{sign} x = \begin{cases} +S & \text{при } x > 0; \\ -S & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4.2.52)$$

При этом коэффициент  $q'(a)=0$ , а общий коэффициент гармонической линеаризации  $K_H(q, q')=q(a)$  определяется только по формуле (4.2.44) в виде

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin \psi \, d\psi = \frac{1}{a\pi} \left[ \int_0^{\pi} S \sin \psi \, d\psi + \int_0^{\pi} (-S)(-\sin \psi) \, d\psi \right] = \\ &= \frac{2S}{a\pi} \int_0^{\pi} \sin \psi \, d\psi = \frac{2S}{a\pi} [(-\cos \pi) - (-\cos 0)] = -\frac{2S}{a\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{4S}{a\pi}, \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

где  $\psi = \omega t$ .

Аналогично находятся выражения коэффициентов гармонической линеаризации для других нелинейностей. Например, для характеристики типа *реле с зоной нечувствительности*  $\pm b$  (рис. 4.1.1, а)

$$K_H(q, q') = q(a) = \frac{4S}{a\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad q'(a) = 0; \quad (4.2.54)$$

для нелинейности с насыщением при  $a > b = S/k$ , где  $k$  – коэффициент передачи на линейном участке (рис. 4.1.1, в)

$$K_H(q, q') = q(a) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad q'(a) = 0; \quad (4.2.55)$$

при  $a < b$  характеристика линейна и  $q(a) = k$ ; для двухпозиционного реле с симметричной характеристикой и петлей гистерезиса шириной  $\pm b$  при  $a > b$  и выходном сигнале  $\pm S$

$$K_H(q, q') = q(a) = \frac{4S}{a\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \frac{4Sb}{a^2\pi\omega} p, \quad (q' = 0); \quad (4.2.56)$$

для характеристики люфт с зазором  $\pm b$  и наклоном  $k$  (рис. 4.1.1, з)

$$q(a) = \frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right)} \right],$$

$$q'(a) = -\frac{4kb}{a\pi} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \text{ при } a \geq b; \quad (4.2.57)$$

$$K_H(q, q') = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p.$$

### Контрольные вопросы

1. Как делятся методы исследования нелинейных САУ на две группы?
2. На каком принципе основан метод припасовывания?
3. На каком принципе основан метод фазовых траекторий?
4. Что называется фазовым портретом нелинейной системы?
5. Что называется изоклинами и как по ним строят фазовую траекторию?
6. На каком принципе основан метод гармонической линеаризации?
7. Какая операция называется гармонической линеаризацией НЭ?
8. Как получить операторную передаточную функцию (ОФП) НЭ?
9. Как получить амплитудно-фазовую характеристику НЭ?

## 4.3. Устойчивость нелинейных САУ

### 4.3.1. Понятие устойчивости нелинейных САУ

Понятие устойчивости в нелинейных САУ оказывается более сложным, чем в линейных САУ. Впервые понятие и основные теоремы устойчивости нелинейных систем в 1892 г. сформулировал основоположник теории устойчивости русский ученый А.М. Ляпунов [1, 9, 13, 15].

Для определения устойчивости нелинейной САУ предположим, что ее состояние описывается системой дифференциальных уравнений

$$dy_i/dt = F_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.3.1)$$

Из совокупности возможных решений уравнений (4.3.1) при разных начальных условиях выберем одно решение  $y_i^*(t)$  с начальными условиями  $y_i^*(t_0)$ , которое по терминологии А.М. Ляпунова примем за невозмущенное движение, а всякое другое движение  $y_i(t)$  с другими начальными условиями  $y_i(t_0)$  будем называть возмущенным движением.

Обычно за невозмущенное движение выбирается расчетное движение системы в рабочем режиме, а возмущенные движения появляются при изменении начальных условий или внешних воздействий.

Устойчивость удобнее рассматривать, используя уравнения в отклонениях процесса  $y_i(t)$  от невозмущенного движения  $y_i^*(t)$  [13]

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i^*(t), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.3.2)$$

Тогда система уравнений возмущенного движения в отклонениях

$$dx_i/dt = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (4.3.3)$$

а невозмущенное движение в отклонениях будет иметь все  $x_i^*(t) = 0$ .

В фазовом пространстве в координатах отклонений  $x_i(t)$  с добавленной осью времени  $t$  отклонение невозмущенного движения  $x^*(t) = 0$  представляется прямой линией, совпадающей с осью времени  $t$ , а отклонение возмущенного движения  $x_i(t)$  имеет определенную фазовую траекторию (рис. 4.3.1).

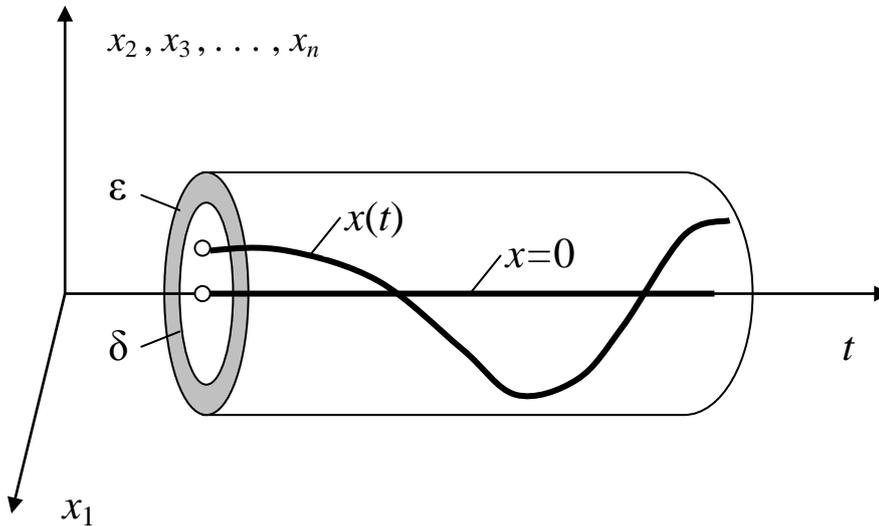


Рис. 4.3.1. Фазовые траектории системы в отклонениях

Невозмущенное движение называется *устойчивым по Ляпунову*, если, задав в фазовом пространстве координат системы трубку сколь угодно малого  $n$ -мерного сечения  $\varepsilon > 0$ , можно подобрать такую область начальных условий  $\delta(\varepsilon) > 0$  для всех возмущенных движений  $x_i(t)$ , что при изменении  $t_0 \leq t \leq \infty$  они не выйдут из заданной трубки  $\varepsilon$ .

Аналитически понятие устойчивости формулируется так: невозмущенное движение называется *устойчивым по Ляпунову*, если для всякого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что при

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.3.4)$$

при движении системы при всех значениях  $t \leq t_0$  выполняется условие

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.3.5)$$

Невозмущенное движение неустойчиво, если условие (4.3.5) не выполняется хотя бы для одной из координат  $x_i(t)$ .

Если (4.3.4) и (4.3.5) выполняются и все  $x_i(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*. Если  $x_i(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  после любых начальных отклонений, то система называется *устойчивой в целом*. САУ с *абсолютной устойчивостью* обладают асимптотической устойчивостью в целом при любом из типов нелинейностей определенного класса.

Для определения устойчивости автоколебаний вводится понятие *орбитальной устойчивости* САУ. При этом в фазовом пространстве автоколебания представляются замкнутой кривой, называемой *предельным циклом*, которую обегает изображающая точка за время одного периода колебаний.

В нелинейных системах, в отличие от линейных, устойчивость равновесия не означает устойчивости всех процессов, поскольку свойства нелинейной системы изменяются при изменении координат состояния системы. Например, нелинейная САУ второго порядка при наличии предельного цикла имеет устойчивость в состоянии равновесия, но оказывается неустойчивой при больших начальных воздействиях, выходящих за границу предельного цикла, т. е. САУ устойчива в малом и неустойчива в большом.

### 4.3.2. Исследование устойчивости методами Ляпунова

*Первый метод Ляпунова* основан на линеаризации нелинейного уравнения движения системы с разложением нелинейных функций в ряд Тейлора и учетом только членов первого порядка [1, 13, 15].

Представим уравнения движения системы в виде

$$dx_i/dt = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.3.6)$$

где  $a_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Линейные уравнения первого приближения из (4.3.6) будут

$$dx_i/dt = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.3.7)$$

Для этих случаев А.М. Ляпунов доказал следующие теоремы [1, 13, 15].

**Теорема 1.** *Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения (4.3.7) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение нелинейной системы асимптотически устойчиво при любых членах высших порядков в уравнениях возмущенного движения (4.3.6).*

**Теорема 2.** *Невозмущенное движение неустойчиво, если среди корней характеристического уравнения первого приближения (4.3.7) хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть.*

**Теорема 3.** *Если характеристическое уравнение системы первого приближения (4.3.7) имеют нулевые корни, то устойчивость нелинейной системы должна определяться с учетом членов высших порядков в разложении уравне-*

ния возмущенного движения в ряд Тейлора, что требует дополнительных исследований.

Данные теоремы Ляпунова позволяют исследовать устойчивость нелинейной САУ методами теории линейных систем. Однако эти методы применимы только к системам с гладкими нелинейностями.

**Второй (прямой) метод Ляпунова** более универсален и не требует решения дифференциальных уравнений [1, 13, 15]. Метод позволяет выявить достаточные условия устойчивости на основе качественной теории уравнений и совместного использования уравнений движения системы в фазовом пространстве и специальной функции Ляпунова  $V(x)$ .

Функции Ляпунова  $V(x)$  являются аналогами потенциальных функций в потенциальном поле фазовых координат системы  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , выражающих потенциальную энергию, достигающую минимума в начале координат. Функция  $V(x)$  называется *знакоопределенной*, если в рассматриваемой области, содержащей начало координат, сохраняет один и тот же знак и обращается в нуль только в начале координат (например, при  $n=3$  это  $V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2$ ). Знакоопределенная функция  $V(x)$  может быть *положительно определенной* или *отрицательно определенной*. Если функция  $V(x)$  сохраняет один и тот же знак, но обращается в нуль не только в начале координат, то такая функция называется *знакопостоянной* (положительной или отрицательной). Например, при  $n=3$   $V = (x_1 - x_2)^2 + cx_3^2$  обращается в нуль при  $x_2 = -x_1$  и при  $x_3 = 0$ . Наконец, функция  $V(x)$  называется *знакопеременной*, если она в рассматриваемой области не сохраняет один и тот же знак (например, функция  $V = x_1 + x_2 + x_3$ ).

При исследовании устойчивости нелинейных САУ прямым методом Ляпунова изучается поведение функции  $V(x)$  вдоль фазовых траекторий, определяемых уравнениями движения. Если функция  $V(x)$  имеет отрицательную производную во времени  $(dV/dt) < 0$ , то с возрастанием времени она убывает и фазовая траектория пересекает поверхности убывающего уровня функции  $V(x)$  по направлению к началу координат. Это соответствует устойчивой системе.

Для этих случаев А.М. Ляпунов сформулировал следующие теоремы [1, 15].

**Теорема 1.** Если существует знакоопределенная функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , полная производная которой по времени  $dV/dt$  в силу дифференциальных уравнений является знакопостоянной функцией противоположного с  $V(x)$  знака, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 2. Если существует знакоопределенная функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , полная производная которой по времени в силу дифференциальных уравнений является знакоопределенной функцией противоположного с  $V(x)$  знака, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Если существует знакопостоянная функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , полная производная которой по времени в силу дифференциальных уравнений является знакопостоянной функцией одинакового с  $V(x)$  знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема 4. Если существует знакоопределенная функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , полная производная по времени которой в силу дифференциальных уравнений является знакопостоянной, или тождественно равной нулю функцией, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 5. Если существует функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы, допускающая бесконечно малый высший предел, а производная которой представляет знакоопределенную функцию противоположного с  $V$  знака, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Приведенные теоремы дают только достаточные, но не необходимые условия устойчивости или неустойчивости САУ и не указывают пути нахождения подходящих функций  $V$ , в чем состоит основная трудность применения данного метода.

**Пример 4.5.** Определим устойчивость нелинейной САУ, описываемой дифференциальным уравнением  $\ddot{y} + k\dot{y} + k_1(\dot{y})^3 + y = 0$  [15].

Обозначим  $x_1 = y$ ;  $\dot{x}_1 = \dot{y}$  и получим уравнения в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = kx_2 - k_1x_2^3 - x_1. \end{cases} \quad (4.3.8)$$

Выберем функцию Ляпунова в виде  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ , поскольку ее производная по времени после подстановки выражений  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  из дифференциальных уравнений (4.3.8) САУ  $dV/dt = -2(kx_2^2 + k_1x_2^4)$  отрицательна и равна нулю только в начале координат. Кривые  $V = \text{const}$  являются окружностями с центром в начале координат, а отрицательный знак производной  $dV/dt$  указывает на приближение фазовой траектории к началу координат с течением времени, что по теореме 2 соответствует асимптотически устойчивой нелинейной системе.

### 4.3.3. Исследование устойчивости методом В.М. Попова

Обширный класс нелинейных САУ имеет структуру из линейной части и нелинейного элемента (рис. 4.2.4) с различными нелинейными статическими характеристиками класса  $y = F(x)$ , расположенными в заданном угле  $\arctg k$  (рис. 4.3.2, а). Разнообразие и нестабильность нелинейных характеристик в таких САУ приводят к необходимости

их абсолютной устойчивости, при которой достигается асимптотическая устойчивость в целом при любой нелинейности внутри заданного класса нелинейностей. Однако сложность решения этой задачи долгое время ограничивала возможности ее практической реализации.

В 1960 г. румынский ученый В.М. Попов предложил использовать метод частотных характеристик для решения задачи абсолютной устойчивости нелинейных САУ с однозначной статической нелинейностью  $F(x)$  любого вида, расположенной в угловом секторе между осью абсцисс и прямой с угловым коэффициентом  $k$  (рис. 4.3.2, а) [1, 13, 15].

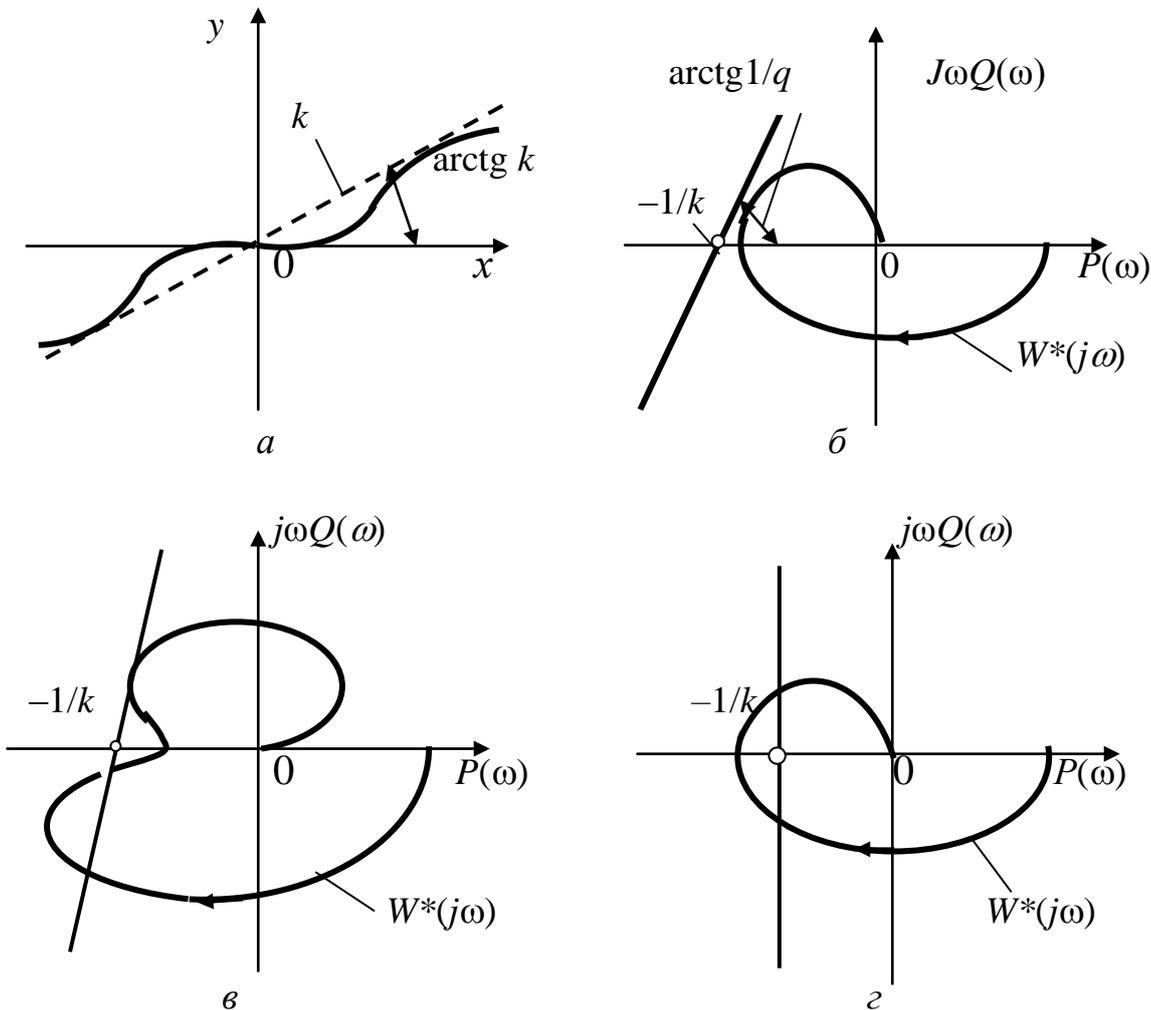


Рис. 4.3.2. Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова

Пусть в нелинейной САУ линейная часть имеет  $W(p)=P(p)/Q(p)$ , где характеристическое уравнение  $Q(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+ \dots+a_{n-1}p+a_n=0$  имеет все левые корни и не более двух нулевых корней  $a_0=0$  и  $a_1=0$ , а однозначная нелинейность не выходит за пределы заданного угла  $\arctg k$

$$0 < y = F(x) < kx; \quad F(x=0) = 0. \tag{4.3.9}$$

Для таких САУ В.М. Попов сформулировал следующую теорему: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число  $q$ , при котором при всех  $\omega \geq 0$  вещественная часть функции

$$\operatorname{Re}[(1+j\omega q)W(j\omega)+1/k] > 0, \quad (4.3.10)$$

где  $W(j\omega)$  – АФХ линейной части САУ, получаемой из  $W(p)$  при  $p=j\omega$ .

На границе устойчивости, при  $X=\operatorname{Re}[W(j\omega)]$ ;  $Y=\omega\operatorname{Im}[W(j\omega)]$ , из (4.3.10) получим уравнение прямой Попова  $X-qY+1/k=0$ , проходящей через точку  $(-1/k; j0)$  с наклоном  $1/q$ .

При наличии одного нулевого корня также требуется, чтобы  $\operatorname{Im}W(j\omega) \rightarrow -\infty$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , а при двух нулевых корнях требуется, чтобы  $\operatorname{Re}W(j\omega) \rightarrow -\infty$  при  $\omega \rightarrow 0$ , а  $\operatorname{Im}W(j\omega) < 0$  при малых значениях  $\omega$ .

Удобная графическая интерпретация теоремы В.М. Попова получается при введении модифицированной АФХ линейной части САУ [1, 15]

$$W^*(j\omega) = P^*(\omega) + jQ^*(\omega) = P(\omega) + j\omega T_0 Q(\omega), \quad (4.3.11)$$

где  $T_0=1$  сек – нормирующий множитель [1].

В этом случае из теоремы В.М. Попова получается следующая формулировка критерия устойчивости: для абсолютной устойчивости нелинейной системы с одним безынерционным нелинейным элементом, нелинейная характеристика которого лежит в секторе  $(0, k)$  (рис. 4.3.2, а), достаточно, чтобы на плоскости модифицированной частотной характеристики  $W^*(j\omega)$  через точку  $(-1/k, 0)$  можно было провести прямую Попова так, чтобы характеристика  $W^*(j\omega)$  лежала справа от этой прямой [15].

На рис. 4.3.2, б показан случай, когда критерий удовлетворяется, а на рис. 4.3.2, в, г – случаи, когда критерий не удовлетворяется.

Графические формулировки критерия устойчивости В.М. Попова требуют чтобы АФХ линейной части САУ не охватывала точку  $(-1/k, j0)$  на комплексной плоскости, аналогично частотному критерию Найквиста-Михайлова для линейных САУ, по которому АФХ не должна охватывать точку  $(-1, j0)$ .

Достоинства метода В.М. Попова состоят в простоте графической формы его применения при любой сложности линейной части САУ и численно заданных коэффициентах; при возможности использования только экспериментально снятой характеристики  $W(j\omega)$  линейной части САУ, которую нужно перестроить в  $W^*(j\omega)$ ; при неизвестной нелинейности и известных лишь пределах угла, в котором она располагается.

**Пример 4.6.** Определим методом В.М. Попова абсолютную устойчивость равновесия нелинейной САУ, состоящей из трехпозиционного релейного элемента (рис. 4.3.3, а) с параметрами  $b=1$ ,  $c=8$  и линейной части с АФХ

$$W(j\omega) = \frac{k_{\text{Л}} e^{-j\omega\tau}}{1+j\omega T} = \frac{k_{\text{Л}}(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)}{1+j\omega T}, \quad (4.3.12)$$

где  $k_{\text{Л}} = 0,25$ ;  $\tau = 0,1$  с;  $T = 10$  с.

Представим АФХ (4.3.12) в комплексной алгебраической форме

$$W(j\omega) = \frac{k_{\text{Л}}(\cos\omega\tau - \omega T \sin\omega\tau)}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k_{\text{Л}}(\sin\omega\tau + \omega T \cos\omega\tau)}{1+\omega^2 T^2}. \quad (4.3.13)$$

Соответственно (4.3.11) модифицированная АФХ (рис. 4.3.3, б) запишется

$$W^*(j\omega) = \frac{0,25(\cos 0,1\omega - 10\omega \sin 0,1\omega)}{1+100\omega^2} - j\omega \frac{0,25(\sin 0,1\omega + 10\omega \cos 0,1\omega)}{1+100\omega^2}. \quad (4.3.14)$$

Нелинейная характеристика (рис. 4.3.3, а) располагается внутри сектора, ограниченного прямой с наклоном  $k=c/b=8/1=8$ , проходящей через начало координат под углом  $\alpha = \arctg k = \arctg 8 = 82,8^\circ$ . Модифицированная АФХ, построенная по формуле (4.3.14), имеет вид, представленный на рис. 4.3.3, б. Для самого неблагоприятного случая из (4.3.10) при  $q \rightarrow 0$  ( $\arctg 1/q \rightarrow 90^\circ$ ) проводим вертикальную прямую 1 через точку с координатами  $(-1/k = -1/8 = -0,125; j0)$ , которая не пересекается с  $W^*(j\omega)$  (АФХ располагается справа от этой прямой). Следовательно, равновесие нелинейной САУ при данных параметрах *абсолютно устойчиво*.

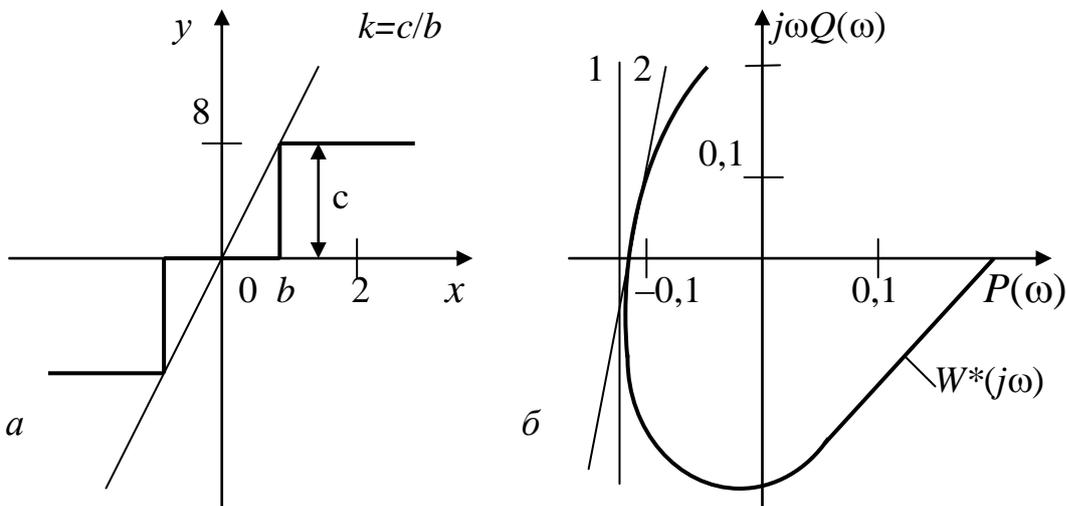


Рис. 4.3.3. Определение абсолютной устойчивости

Рассмотренный метод также позволяет решать обратные задачи определения допустимых по условиям абсолютной устойчивости изменений параметров нелинейности. Например, для определения допустимого уменьшения зоны нечувствительности  $b_{\text{д}}$ , приводящего к повышению крутизны  $k$ , проведем касательную 2 к характеристике  $W^*(j\omega)$ , которая отражает границу устойчивости САУ при уменьшении значения модуля  $1/k$ . Касательная 2 пересекает действительную ось комплексной плоскости в точке  $1/k_{\text{д}} \approx -0,117$ . Следовательно граница увеличения углового коэффициента  $k_{\text{д}} = 1/0,117 \approx 8,55$ ; а для минимальной

зоны нечувствительности  $b_d = c/k_d = 8/8,55 \approx 0,936$ . При  $b < 0,936$  состояние равновесия системы будет неустойчивым.

#### 4.3.4. Алгебраический метод анализа автоколебаний

Для исследования возможности возникновения устойчивых автоколебаний в нелинейной САУ и определения их амплитуды можно воспользоваться критерием Гурвица [13, 15]. Для этого безынерционный нелинейный элемент заменяется усилительным звеном с *гармонически линеаризованным коэффициентом передачи*  $J(A)$ , зависящим от амплитуды  $A$  входного сигнала, и на основе методов теории линейных САУ составляется характеристическое уравнение линеаризованной замкнутой САУ. Из коэффициентов этого уравнения составляются определители Гурвица, которые будут функциями амплитуды автоколебаний. Приравнявая определители Гурвица нулю и решая полученные алгебраические уравнения, находится граница устойчивости САУ. Из уравнения границы устойчивости определяется амплитуда возможных автоколебаний.

Для проверки устойчивости автоколебаний следует дать приращение рассчитанной амплитуде возможных автоколебаний. Если при увеличении амплитуды определители Гурвица становятся положительными, а при уменьшении – отрицательными, то в нелинейной САУ имеют место *устойчивые автоколебания*. Это объясняется тем, что при увеличении амплитуды колебаний условия устойчивости САУ выполняются и амплитуда колебаний уменьшается, пока не станет равной амплитуде автоколебаний. При уменьшении амплитуды колебаний САУ становится неустойчивой и амплитуда колебаний возрастает до амплитуды автоколебаний.

Если увеличение амплитуды колебаний приводит к невыполнению условий устойчивости, то в САУ будут расходящиеся колебания.

Если уменьшение амплитуды колебаний приводит к выполнению условий устойчивости, то в САУ будут затухающие колебания.

**Пример 4.7.** Определим возможность возникновения автоколебаний и их амплитуду в нелинейной САУ, содержащей НЭ с зоной нечувствительности  $a = \pm 4$  В и единичным коэффициентом наклона линейной части ( $tg\alpha = 1$ ), если характеристическое уравнение линеаризованной замкнутой САУ, где НЭ представлен безынерционным звеном с *гармоническим коэффициентом передачи*  $J(A)$ , имеет вид

$$M(p, A) = 0,05p^3 + 1,05p^2 + [1 + 10J(A)]p + 100 = 0. \quad (4.3.15)$$

Гармонический коэффициент передачи  $J(A)$  нелинейного элемента (НЭ) представляет собой отношение первой гармонической составляющей на выходе НЭ  $y_1 = C_1 \exp j(\omega t + \psi_1)$  к гармоническому сигналу на входе НЭ  $x = A \exp j\omega t$ , выраженных в комплексной форме

$$J(A) = \frac{C_1 e^{j(\omega t + \psi_1)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{C_1 \cos \psi_1 + j C_1 \sin \psi_1}{A}, \quad (4.3.16)$$

или

$$J(A) = q(A) + j\dot{q}(A), \quad (4.3.17)$$

где  $C_1 = \sqrt{B_1^2 + D_1^2}$  – амплитуда первой гармонической составляющей на выходе НЭ  $y_1 \approx B_1 \sin \omega t + D_1 \cos \omega t$ ;  $\psi_1 = \arctg D_1/B_1$  – сдвиг фазы первой гармоники нелинейным элементом;  $q(A)$  и  $\dot{q}(A)$  – коэффициенты гармонической линеаризации НЭ.

Для безынерционных НЭ гармонический коэффициент передачи зависит только от амплитуды  $q(A)$ , поскольку  $\dot{q}(A) = 0$ .

Для определения гармонического коэффициента передачи НЭ с зоной нечувствительности найдем амплитуду первой гармоники выходного сигнала

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\psi) \sin \psi d\psi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.3.18)$$

где  $\psi = \omega t$ .

Из-за наличия у НЭ зоны нечувствительности  $\pm a$  синусоидальный сигнал на выходе НЭ будет отсутствовать  $y(\psi) = 0$  в пределах  $0 < \psi < \beta$ , где  $\beta = \arcsin(a/A)$ , а в пределах  $\beta \leq \psi \leq \pi/2$  его амплитуда будет срезана  $y(\psi) = \operatorname{tg} \alpha (A \sin \psi - a)$ , где  $\alpha$  – угол наклона линейной части характеристики. В результате из (4.3.18) получим

$$C_1 = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\pi} \left[ \int_{\beta}^{\pi/2} A \sin^2 \psi d\psi - a \int_0^{\pi/2} \sin \psi d\psi \right] = A \left[ 1 - \frac{2\beta + \sin 2\beta}{\pi} \right] \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.3.19)$$

Тогда гармонический коэффициент передачи НЭ с зоной нечувствительности определится формулой

$$J(A) = \frac{C_1}{A} = \left[ 1 - \frac{2\beta + \sin 2\beta}{\pi} \right] \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.3.20)$$

На практике для удобства исследований может использоваться нормированный гармонический коэффициент передачи, который является не функцией амплитуды  $A$ , а функцией относительной амплитуды  $A/a$ , т. е. отношения амплитуды к параметру нелинейности при постоянном наклоне линейной части нелинейной характеристики  $\operatorname{tg} \alpha = 1$

$$J(A/a) = 1 - (2\beta + \sin 2\beta)/\pi = J(A)/\operatorname{tg} \alpha, \quad (4.3.21)$$

где  $\beta = \arcsin(a/A)$ .

Из характеристического уравнения линеаризованной замкнутой САУ (4.3.15) на основании критерия Гурвица для системы третьего порядка находим уравнение для границы устойчивости

$$\Delta_2 = [1 + 10J(A)]1,05 - 0,05 \cdot 100 = 0. \quad (4.3.22)$$

Из (4.3.22) гармонический коэффициент передачи  $J(A) = 0,3762$ .

По (4.3.20) при приближенной замене  $\sin 2\beta \approx 2\beta$  ввиду малости  $\beta$

$$J(A) = \left[ 1 - \frac{2\beta + \sin 2\beta}{\pi} \right] \operatorname{tg} \alpha \approx \left[ 1 - \frac{2\beta + 2\beta}{\pi} \right] \cdot 1 = 0,3762. \quad (4.3.23)$$

вычисляется значение  $\beta \approx 0,5$ .

Тогда из выражения  $\beta = \arcsin(a/A) = 0,5$  найдется значение  $(a/A) = \sin \beta = \sin 0,5 = 0,48$  и, при  $a = 4 \text{ В}$ , амплитуда автоколебаний  $A = a/0,48 = 4/0,48 = 8,33 \text{ В}$ .

Для определения устойчивости автоколебаний с амплитудой  $A = 8,33 \text{ В}$  дадим приращение амплитуде, например, пусть  $A = 9,6 \text{ В}$ . При этом значение величины  $\beta = \arcsin(a/A) = \arcsin(4/9,6) = 0,43$ , а гармонический коэффициент передачи по (4.3.23) примет значение

$$J(A) = \left[ 1 - \frac{2 \cdot 0,43 + \sin 2 \cdot 0,43}{3,14} \right] \cdot 1 = 0,485. \quad (4.3.24)$$

Подставив  $J(A) = 0,485$  в уравнение для границы устойчивости (4.3.22), определяем, что САУ стала устойчивой (определитель  $\Delta_2 > 0$ ). Это значит, что колебания с амплитудой  $9,6 \text{ В}$  будут затухающими, пока их амплитуда не уменьшится до амплитуды автоколебаний  $A = 8,33 \text{ В}$ .

Если дать отрицательное приращение амплитуде автоколебаний, то все произойдет наоборот – САУ станет неустойчивой и возникнет процесс возрастающих колебаний, до достижения амплитуды автоколебаний  $A = 8,33 \text{ В}$ . *Значит в САУ автоколебания с  $A = 8,33 \text{ В}$  устойчивы.*

### Контрольные вопросы

1. Почему устойчивость нелинейных САУ труднее определять, чем устойчивость линейных САУ?
2. Какие движения в САУ называют невозмущенными и возмущенными?
3. Как понимать устойчивость САУ «в малом», «в большом», «в целом»?
4. В чем состоит принцип первого метода Ляпунова на основе линеаризации?
5. В чем состоит принцип второго (прямого) метода Ляпунова? Какой физический смысл имеют функции Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ?
6. Что называется абсолютной устойчивостью нелинейной САУ?
7. Как используется частотный метод В.М. Попова для исследования абсолютной устойчивости САУ с нелинейностью любого типа одного класса?
8. Как определяется угловой сектор  $k$  нелинейности в методе В.М. Попова?
9. В чем заключается алгебраический метод анализа автоколебаний в нелинейной САУ с использованием критерия Гурвица?
10. Как представляется нелинейное безынерционное звено гармоническим коэффициентом передачи  $J(A)$ , зависящим от амплитуды  $A$  входного сигнала?
11. Как получить характеристическое уравнение замкнутой САУ с нелинейным звеном  $J(A)$ ?
12. Как определяется амплитуда и устойчивость автоколебаний по алгебраическому методу с использованием критерия Гурвица?

#### 4.4. Качество нелинейных САУ

Качество нелинейных САУ оценивается такими же показателями, что и линейных САУ: установившейся ошибкой, временем переходного процесса, перерегулированием, колебательностью. Но в нелинейных САУ эти показатели зависят от величины внешнего воздействия, вызвавшего переходный процесс. Поэтому качество нелинейных САУ в каждом конкретном случае исследуется тем или иным приближенным методом [1, 9, 13, 15].

В случае, когда нелинейности не оказывают существенного влияния на процессы в САУ, можно в первом приближении исследовать качество и построить переходный процесс без учета нелинейностей, а затем оценить влияние нелинейностей с использованием методов численных расчетов и провести необходимую коррекцию САУ.

Для приближенной оценки качества САУ любого порядка с учетом нелинейности обычно используется метод гармонической линеаризации или методы численного интегрирования.

##### 4.4.1. Оценка качества методом гармонической линеаризации

Рассмотрим оценку качества САУ с симметричной характеристикой нелинейного элемента (НЭ) по изменениям затухания  $\xi$  и частоты  $\omega$  симметричного колебательного переходного процесса свободного движения при начальном отклонении  $a_0$  (рис. 4.4.4, в) [1, 13].

В линейных САУ колебательный процесс при  $\xi = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$

$$x(t) = a_0 e^{\xi t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.4.1)$$

При  $\xi < 0$  САУ устойчива, при  $\xi > 0$  САУ неустойчива, при  $\xi = 0$  в САУ происходят незатухающие колебания с постоянной амплитудой.

В нелинейных САУ изменяются частота  $\omega(t)$  и затухание  $\xi(t)$  во время колебательного переходного процесса, представляемого в виде

$$x = a \sin \psi, \quad (4.4.2)$$

где  $\frac{da}{dt} = a\xi$ ,  $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ ,  $\psi = \int_0^t \omega dt + \psi_0$ , причем искомыми неизвестными

будем считать медленно изменяющиеся величины  $\xi$  и  $\omega$ . Здесь текущее значение амплитуды  $a$  (рис. 4.4.4, в) определяется дифференциальной зависимостью  $da/dt = a\xi$ . В частном случае при  $\xi = \text{const}$  из  $da/a = \xi dt$  получается  $a = a_0 e^{\xi t}$  как в линейной системе. В нелинейной системе при  $\xi = f(t)$  из  $da/a = \xi dt$  текущее значение амплитуды

$a = a_0 e^{\int \xi dt}$ , т.е. огибающая колебаний (рис. 4.4.4, в) состоит из элементарных отрезков экспонент с изменяющимся показателем  $\xi$ , характеризующим быстроту затухания или расхождения колебаний. Если  $da/dt < 0$  при  $\xi < 0$  – колебания затухают, если  $da/dt > 0$  при  $\xi > 0$  – колебания возрастают.

Нелинейные колебания выходной величины НЭ можно разложить в ряд Фурье и по методу гармонической линейаризации с учетом только первой гармоники получить коэффициенты гармонической линейаризации НЭ. Но при изменяющихся во времени значениях частоты  $\omega$  и затухания  $\xi$  колебаний формулы гармонической линейаризации выходной величины НЭ имеют отличия от рассмотренных ранее.

Если величина  $\xi$  не мала, то, считая амплитуду  $a$  переменной величиной, продифференцировав выражение (4.4.2) получим [1, 13]

$$dx/dt = a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi. \quad (4.4.3)$$

Из (4.4.2) и (4.4.3) найдем соотношения

$$\sin \psi = \frac{x}{a}; \quad \cos \psi = \frac{1}{a\omega} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\xi x}{a\omega}. \quad (4.4.4)$$

Выходная величина НЭ с симметричной характеристикой  $F(x)$  в первом приближении представляется первой гармоникой в виде

$$x_{НЭ} = a_1 \sin \psi + b_1 \cos \psi, \quad (4.4.5)$$

или, с учетом (4.4.4), в виде

$$x_{НЭ} = \frac{a_1}{a} x + b_1 \left( \frac{1}{a\omega} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\xi}{a\omega} x \right), \quad (4.4.6)$$

где амплитуды составляющих первой гармоники [1, 13]

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad (4.4.7)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (4.4.8)$$

Записав (4.4.6) в операторной форме, получим уравнение

$$X_{НЭ}(p) = q(a)X(p) + q_1(a) \frac{p}{\omega} X(p) - q_1(a) \frac{\xi}{\omega} X(p), \quad (4.4.9)$$

где  $q(a) = a_1/a$  и  $q_1(a) = b_1/a$  – гармонические коэффициенты линейаризации НЭ.

Из (4.4.9) ОФП гармонически линейаризованного НЭ с симметричной нелинейностью запишется в виде

$$W_{НЭ}(p, a) = q(a) + q_1(a) \left( \frac{p}{\omega} - \frac{\xi}{\omega} \right). \quad (4.4.10)$$

В общем случае ОФП НЭ (4.4.10) зависит от трех переменных: амплитуды  $a$ , частоты  $\omega$  и затухания  $\xi$ . При  $|\xi| \ll \omega$  слагаемое  $\xi/\omega$  в (4.4.10) является малой величиной и переходный процесс свободного движения приближается к периодическому, а при  $\xi=0$  в САУ устанавливаются автоколебания.

Для оценки качества переходного процесса в САУ можно использовать характеристическое уравнение замкнутой линеаризованной САУ, составленное по структурной схеме, в которой НЭ представлен ОФП по (4.4.10)

$$A(p) + B(p) \left[ q(a) + \frac{p - \xi}{\omega} q_1(a) \right] = 0, \quad (4.4.11)$$

где  $A(p)$  и  $B(p)$  – полиномы (операторы) линейной части САУ.

При колебательном переходном процессе корни  $p = \xi \pm j\omega$  с изменяющимися  $\xi$  и  $\omega$  находят из (4.4.11) при замене  $p$  на  $\xi + j\omega$  [1, 13]

$$A(\xi + j\omega) + B(\xi + j\omega) [q(a) + j q_1(a)] = 0. \quad (4.4.12)$$

При высокой степени характеристического уравнения (4.4.11), выражение (4.4.12) целесообразно разложить в ряд по степеням  $j\omega$  при больших  $\xi$  или по степеням  $\xi$  при малых  $\xi$  и не учитывать в расчетах члены второго и выше порядков. Уравнение (4.4.12) содержит три неизвестных величины  $\xi$ ,  $\omega$ ,  $a$ , характеризующих качество нелинейного колебательного переходного процесса свободного движения в нелинейной САУ при разных начальных условиях. Соотношения этих трех величин представляются графически в виде так называемых *диаграмм качества затухания нелинейных колебаний* [1, 13].

Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний строятся по уравнению (4.4.12) для заданной нелинейной САУ. Выделив в (4.4.12) вещественную и мнимую части, получим два уравнения

$$X(a, \omega, \xi) = 0; \quad Y(a, \omega, \xi) = 0. \quad (4.4.13)$$

Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний (рис. 4.4.1) обычно строятся в зависимости от общего коэффициента передачи  $k$  или другого выбираемого параметра САУ, который входит в уравнения (4.4.13). Если из одного уравнения (4.4.13) выразить частоту  $\omega$  через  $a$ ,  $\xi$ ,  $k$  в виде  $\omega = f_1(a, \xi, k)$  и подставить это выражение в другое уравнение (4.4.13), то коэффициент передачи  $k$  определится в виде  $k = f_2(a, \xi)$ . Придавая величине  $\xi$  различные значения, получим зависимости  $k = f_3(a)$  в виде семейства линий при  $\xi = \text{const}$  (рис. 4.4.1,

а). Аналогично, используя уравнения (4.4.13), находим  $\xi=f_4(a, \omega, k)$  и определяем  $k=f_5(a, \omega)$ , по которому строим семейство линий  $k=f_6(a)$  при разных  $\omega=\text{const}$  (рис. 4.4.1, б).

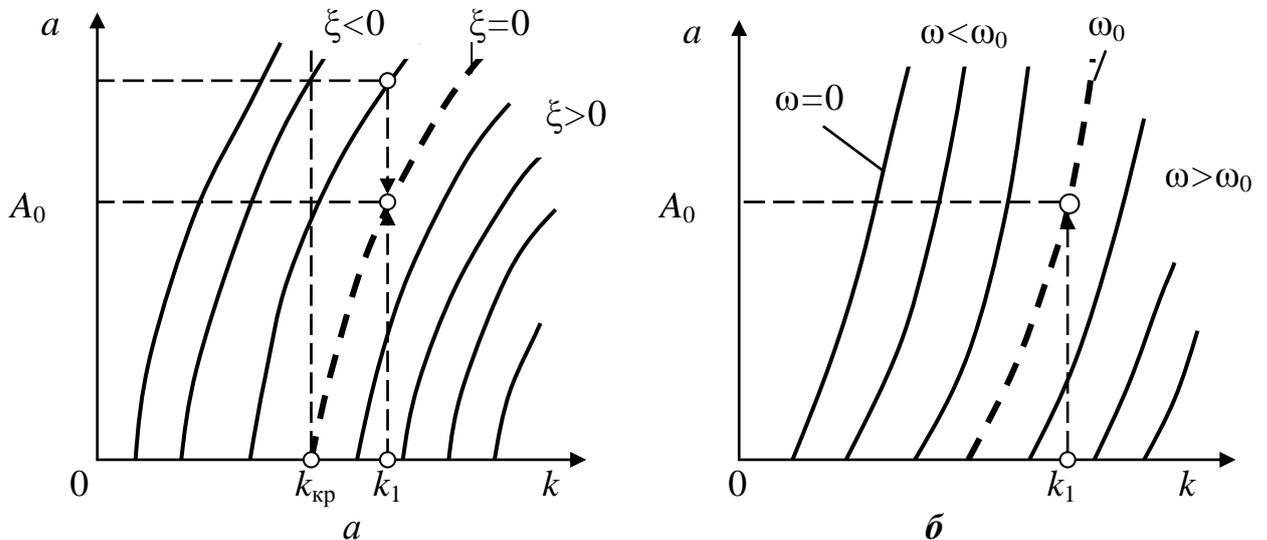


Рис. 4.4.1. Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний

Диаграммы качества характеризуют переходный процесс в нелинейной САУ. Пунктирная линия  $\xi=\text{const}=0$  на диаграмме  $k(a, \xi)$  (рис. 4.4.1, а) соответствует наличию автоколебаний, амплитуда  $a$  которых зависит от коэффициента передачи  $k$ . Вертикальная пунктирная линия, проведенная через критическое значение коэффициента передачи  $k_{\text{кр}}$ , разделяет диаграмму  $k(a, \xi)$  на левую область затухающих колебаний (область устойчивости САУ) при  $k < k_{\text{кр}}$  и правую область автоколебаний при  $k > k_{\text{кр}}$ . Линии  $\xi=\text{const} < 0$  при  $k < k_{\text{кр}}$  соответствуют затухающим колебаниям в устойчивой нелинейной САУ. При  $k > k_{\text{кр}}$  при любых начальных значениях  $a_0$  колебания будут изменяться до установления автоколебаний на линии  $\xi=0$ . Например, при  $k_1 > k_{\text{кр}}$  в любых случаях в конце переходного процесса установится амплитуда автоколебаний  $a=A_0$ , что показано стрелками. Частота автоколебаний  $\omega_0$  определяется из диаграммы  $k(a, \omega)$  (рис. 4.4.1, б) по линии  $\omega=\text{const}$ , соответствующей коэффициенту передачи  $k_1$  и амплитуде автоколебаний  $a=A_0(k_1)$ , определенной по диаграмме  $k(a, \xi)$  (рис. 4.4.1, а).

Протеканию переходного процесса во времени от начального состояния до установившегося состояния соответствует движение точек по вертикалям  $k=\text{const}$  на диаграммах (а) и (б) на рис. 4.4.1, поскольку амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  колебаний изменяются, а коэффициент передачи  $k$  остается постоянным.

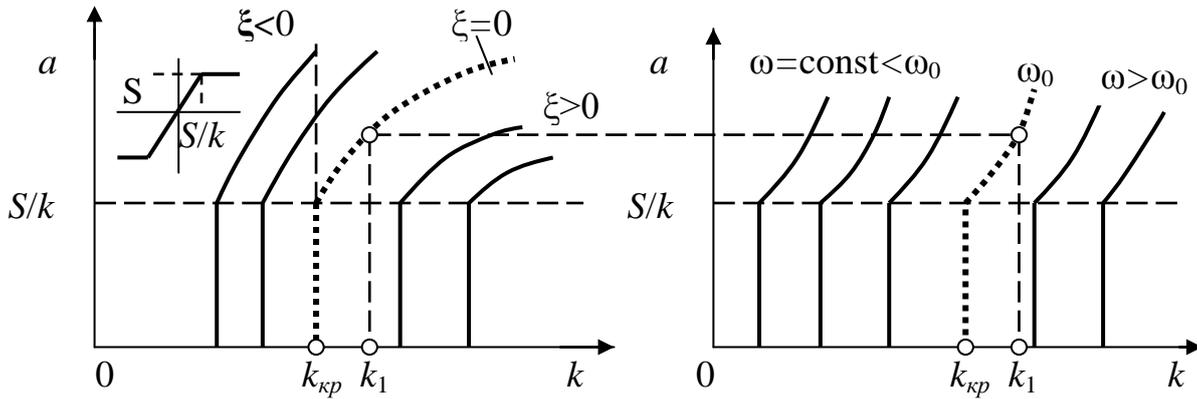


Рис. 4.4.2. Диаграммы затухания колебаний в САУ с насыщением

В линейных САУ значения  $\xi$  и  $\omega$  в переходном процессе не изменяются и поэтому на диаграммах качества затухания линейных колебаний линии  $\xi = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$  приобретают вид вертикальных прямых. Следовательно, в САУ с НЭ типа насыщения при амплитудах входного сигнала  $a < S/k$ , где  $k$  – коэффициент передачи на линейной части характеристики, а  $S$  – уровень насыщения, линии  $\xi = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$  будут иметь вид вертикальных прямых, а в зоне насыщения при  $a > S/k$  линии  $\xi = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$  будут искривляться (рис. 4.4.2). При  $k_1 > k_{кр}$  в нелинейной САУ устанавливаются автоколебания с амплитудой  $a = S/k_1$  и частотой  $\omega_1$  при  $\xi = 0$  (рис. 4.4.2). Если такая амплитуда колебаний допустима, то переходный процесс считается устойчивым и САУ работает с коэффициентом передачи больше критического, обеспечивая повышенную точность регулирования, что недостижимую в линейной САУ.

Используя приближенные формулы, можно по диаграммам качества определить время  $t_{ПП}$  затухания амплитуды колебаний от начального  $a_0$  до установившегося  $a_K$  значений, величину перерегулирования в относительных единицах  $|x_m/a_0|$  и число колебаний  $m$  за время переходного процесса [13]

$$t_{ПП} \approx (1/\xi_0) \ln(a_K/a_0); \quad (4.4.14)$$

$$|x_m/a_0| \approx \exp(\pi\xi_0/\omega_0); \quad (4.4.15)$$

$$m \approx (\omega_0/2\pi\xi_0) \ln(a_K/a_0), \quad (4.4.16)$$

где  $\xi_0$  и  $\omega_0$  – средние значения затухания и частоты между точкой начального и конечного состояний САУ в переходном процессе, определяемых по диаграммам качества;  $a_K$  – величина конечного значения амплитуды в переходном процессе.

Для затухающих переходных процессов, заканчивающихся автоколебаниями, величина  $a_K = A_0$  (рис. 4.4.1,  $a$ ), а для затухающих до нуля колебательных процессов рекомендуется принимать  $a_K \approx 0,05a_0$ .

Если начальное положение точки на диаграмме (рис. 4.4.1, б) находится на линии  $\omega=0$  или левее этой линии, то переходный процесс будет монотонным (без колебаний) и формулы (4.4.14)–(4.4.16) использовать нельзя. Монотонные процессы в нелинейных САУ исследуются численными методами или методами моделирования.

*Построение переходного процесса* свободного движения в нелинейной САУ с использованием диаграмм качества затухания колебаний осуществляется следующим образом.

Введем некоторый показатель переходного процесса, характеризующий затухание огибающей амплитуд колебаний

$$T(a) = |1/\xi(a)|. \quad (4.4.17)$$

Если на отдельном участке переходного процесса  $\xi=\text{const}$ , то  $T(a)=\text{const}$  и огибающая амплитуд  $a(t)$  изменяется по экспоненте при

$$da/dt = -a/T(a). \quad (4.4.18)$$

Для построения переходного процесса сначала нужно построить графики зависимостей  $\xi(a)$ ,  $\omega(a)$ ,  $a(t)$  и  $\omega(t)$  при выбранном  $k_1=\text{const}$ .

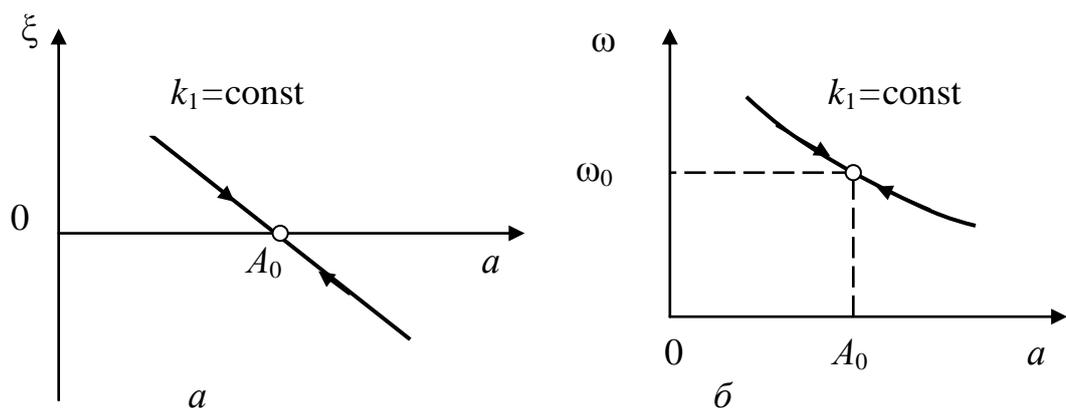


Рис. 4.4.3. Зависимости  $a$ ,  $\xi$ ,  $\omega$  при  $k=\text{const}$

Кривая  $\xi(a)$  (рис. 4.4.3, а) строится по диаграмме (рис.4.4.1, а), а кривая  $\omega(a)$  (рис. 4.4.3, б) – по диаграмме (рис. 4.4.1, б).

График огибающей амплитуд  $a(t)$  (рис. 4.4.4, а) вычисляется по кривой затухания  $\xi(a)$  (рис. 4.4.3, а), которое определяет угол наклона касательной к кривой  $a(t)$ . Если при  $t=0$  задано начальное значение  $a_0$ , то по кривой  $\xi(a)$  (рис. 4.4.3, а) находим  $\xi(a_0)$ , по (4.4.17) вычисляем  $T(a_0)$  и строим первый треугольник на диаграмме  $a(t)$ (рис. 4.4.4, а). Считая, что в течение времени  $0,25T(a_0)$  касательная практически совпадает с кривой  $a(t)$ , находим следующую точку  $a_1$ . Далее по  $a_1$  находим  $\xi(a_1)$  по кривой  $\xi(a)$ , по (4.4.17) определяем  $T(a_1)$  и строим второй треугольник и т. д. В результате получим кривую огибающей амплитуд  $a(t)$  с конечной амплитудой автоколебаний  $a_K$  (рис. 4.4.4, а, в).

По значениям  $a(t)$  из (рис. 4.4.4, а) находим значения  $\omega(a)$  по

(рис. 4.4.3, б) и строим  $\omega(t)$  (рис. 4.4.4, б).

Начальное значение амплитуды  $a_0$  при затухающих колебаниях в устойчивых САУ всегда соответствует начальной фазе  $\psi_0 = \pi/2 = 90^\circ$ . Для построения колебательного процесса  $x(t)$  (рис. 4.4.4, в) нужно построить огибающие амплитуд  $a(t)$  и определить моменты времени перехода  $x(t)$  через нуль и достижения амплитудных значений.

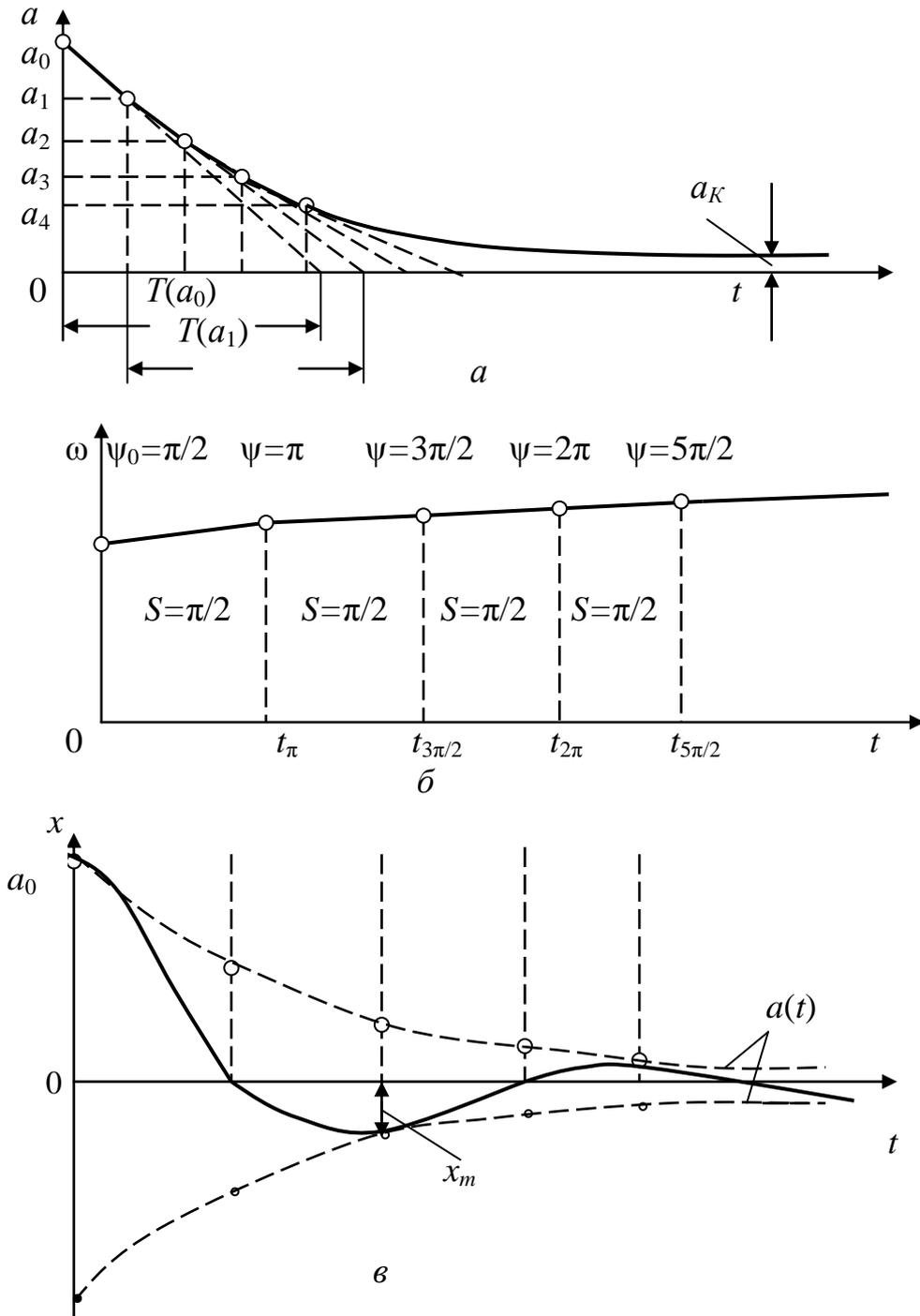


Рис. 4.4.4. Построение переходного процесса в САУ

Для этого на основании (4.4.2) запишем

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t \omega(t) dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^t \omega(t) dt. \quad (4.4.19)$$

Из (4.4.19) видно, что указанные характерные моменты времени определяются значениями интеграла от  $\omega(t)$ , равного площади  $S$  под кривой  $\omega(t)$ . При этом приращение площади между указанными характерными точками переходного процесса всегда равно  $S=\pi/2$ , а интервалы времени уменьшаются из-за повышения частоты  $\omega(t)$  (рис. 4.4.4, б), что указывает на нелинейность процесса  $x(t)$ . Определение характерных моментов времени  $t_\psi$  производится до значения  $a(t)=a_K$ , соответствующего окончанию переходного процесса, где  $a_K$  – амплитуда автоколебаний или  $a_K=0,05a_0$  при затухающем процессе.

По начальному значению  $a_0$ , огибающим амплитуд  $a(t)$  и найденным характерным моментам времени для заданной САУ строится приближенная кривая переходного процесса свободного движения  $x(t)$  с увеличивающимся во времени показателем затухания амплитуд и уменьшающимся периодом колебаний (рис. 4.4.4, в).

Если внешнее воздействие заменить начальными условиями, то по диаграммам качества можно построить эквивалентный переходный процесс  $x(t)$  отработки заданного внешнего воздействия.

#### 4.4.2. Оценка качества методами численного интегрирования

Численные методы расчета основаны на приближенной замене нелинейного дифференциального уравнения уравнением в приращениях, представляющим собой рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять процессы последовательно точка за точкой. Эти вычисления обычно выполняются на ЭВМ с использованием математических пакетов *Mathcad* с решениями дифференциальных уравнений численными методами Эйлера либо Рунге-Кутты четвертого порядка.

**Метод Эйлера** применим для численных расчетов любых САУ. При этом в дифференциальных уравнениях в форме Коши символ дифференцирования  $d/dt$  заменяется символом приращения  $\Delta$ , а полученные уравнения в приращениях решаются относительно приращений  $\Delta x_i$  при  $\Delta t = \text{const}$ . В конце каждого интервала  $\Delta t$  начальное значение  $x_i^0$  и приращение  $\Delta x_i$  суммируются и принимаются за начальное значение для следующего интервала  $x_i^0 + \Delta x_i = x_{i+1}^0$ . Нелинейные параметры на каждом интервале расчета принимаются равными их значениям в конце предыдущего интервала, т.е. определяются по началь-

ному значению  $x_i^0$ . Поскольку приращение  $\Delta x_i$  определяется площадью трапеции вместо интеграла, то ошибка интегрирования пропорциональна квадрату шага  $\Delta t$ , что требует уменьшения  $\Delta t$  и увеличения числа шагов расчета. Поэтому метод Эйлера является очень простым при подготовке к расчетам, но достаточно трудоемким при проведении расчетов в САУ с многочисленными обратными связями и нелинейностями. Поэтому расчеты проводятся на ЭВМ.

**Метод Рунге–Кутты четвертого порядка** дает более высокую точность, чем метод Эйлера, вследствие введения поправок в расчет.

Если САУ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с начальными значениями  $x_i(t_0)=x_{i0}$  при  $t=t_0$

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \text{ где } i=1, 2, \dots, n, \quad (4.4.20)$$

то, интегрируя (4.4.20), получим в конце каждого  $k$ -го шага  $\Delta t=h$

$$x_i(t_{k+1}) = x_{ik} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt = x_{ik} + \Delta x_{ik}. \quad (4.4.21)$$

Задача расчета переходного процесса состоит в последовательном вычислении приращений  $\Delta x_{ik}$  на  $k$ -интервалах времени  $\Delta t=h$ . Интеграл в (4.4.21) по методу Рунге–Кутты четвертого порядка вычисляется приближенно по формуле:

$$\Delta x_{ik} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt = \frac{1}{6} \left[ \Delta x_{ik}^{(1)} + 2\Delta x_{ik}^{(2)} + 2\Delta x_{ik}^{(3)} + \Delta x_{ik}^{(4)} \right], \quad (4.4.22)$$

где 
$$\Delta x_{ik}^{(1)} = h \cdot f_i(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, t_k); \quad (4.4.23)$$

$$\Delta x_{ik}^{(2)} = h \cdot f_i\left(x_{ik} + \frac{\Delta x_{ik}^{(1)}}{2}, \dots, t_k + \frac{h}{2}\right); \quad (4.4.24)$$

$$\Delta x_{ik}^{(3)} = h \cdot f_i\left(x_{ik} + \frac{\Delta x_{ik}^{(2)}}{2}, \dots, t_k + \frac{h}{2}\right); \quad (4.4.25)$$

$$\Delta x_{ik}^{(4)} = h \cdot f_i\left(x_{ik} + \frac{\Delta x_{ik}^{(3)}}{2}, \dots, t_k + h\right). \quad (4.4.26)$$

По методу Эйлера принято  $\Delta x_{ik} = h \cdot f_i(x_{ik}, t_k) = \Delta x_{ik}^{(1)}$ , т. е. в отличие от (4.4.22) равное первому приближению по методу Рунге–Кутты. В методе Рунге–Кутты введены поправки в расчет координат в середине интервалов  $\Delta t/2=h/2$ , что повышает точность. Для расчетов используются стандартные программы *Mathcad* для ЭВМ.

### 4.4.3. Методы компенсации влияния нелинейностей

Для уменьшения или устранения влияния нелинейностей на процессы в САУ могут применяться четыре группы методов [13].

**1) Методы улучшения конструкции нелинейных элементов.** Тщательная обработка деталей и усложнение конструкции редукторов с введением безлюфтовых передач позволяют устранить или уменьшить влияние люфта. Повышение запаса мощности усилителей расширяет линейный диапазон их работы и уменьшает влияние насыщения. Увеличение коэффициента усиления уменьшает влияние зоны нечувствительности. Но при этом возрастает стоимость САУ.

**2) Методы изменения линейной части САУ.** Изменениями параметров и структуры линейной части САУ так, чтобы характеристики  $W_{\text{Л}}(j\omega)$  и  $W_{\text{НЭ}}(A)$  не пересекались и условия гармонического баланса не выполнялись, можно обеспечить отсутствие автоколебаний.

Введение в САУ отрицательной обратной связи  $W_{\text{ОС}}(j\omega)$ , охватывающей последовательно соединенные линейный элемент с  $W(j\omega)$  и нелинейный элемент с коэффициентом передачи  $J(A)$ , образует эквивалентное звено с частотной передаточной функцией

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega) \cdot J(A)}{1 + W(j\omega) \cdot J(A) \cdot W_{\text{ОС}}(j\omega)}. \quad (4.4.27)$$

Можно так подобрать параметры  $W_{\text{ОС}}(j\omega)$ , чтобы в рабочем диапазоне частот выполнялось условие  $|W(j\omega)J(A)W_{\text{ОС}}(j\omega)| \gg 1$ . Тогда по (4.4.27)  $\Phi(j\omega) \approx 1/W_{\text{ОС}}(j\omega)$  и эквивалентная характеристика не зависит от нелинейности, что часто применяется на практике.

**3) Компенсация нелинейностей.** Этот метод заключается во введении в САУ корректирующих устройств, компенсирующих нелинейности характеристик НЭ и образующих линейную САУ.

*Компенсация с введением обратных нелинейностей* реализуется включением модели  $W_{\text{М}}(p) = [1 - J(A)] \cdot W_{2\text{М}}(p)$  в маломощный контур обратной связи (рис. 4.4.5, а), где  $J(A)$  – гармонически линеаризованный коэффициент передачи НЭ, а  $W_{2\text{М}}(p)$  – модель реального элемента с  $W_2(p)$  в основной цепи САУ. В схеме реализации этого метода (рис. 4.4.5, б) используется датчик главной обратной связи.

Характеристическое уравнение для САУ (рис. 4.4.5) имеет вид

$$1 + W_1(p)W_2(p)J(A) + W_1(p)[1 - J(A)]W_{2\text{М}}(p) = 0. \quad (4.4.28)$$

При  $W_{2\text{М}}(p) = W_2(p)$  характеристическое уравнение превращается в линейное  $1 + W_1(p)W_2(p) = 0$  и влияние нелинейности устраняется.

Но нелинейность  $1-J(A)$  не всегда удается реализовать и эффективность компенсации зависит от стабильности линейной части САУ.

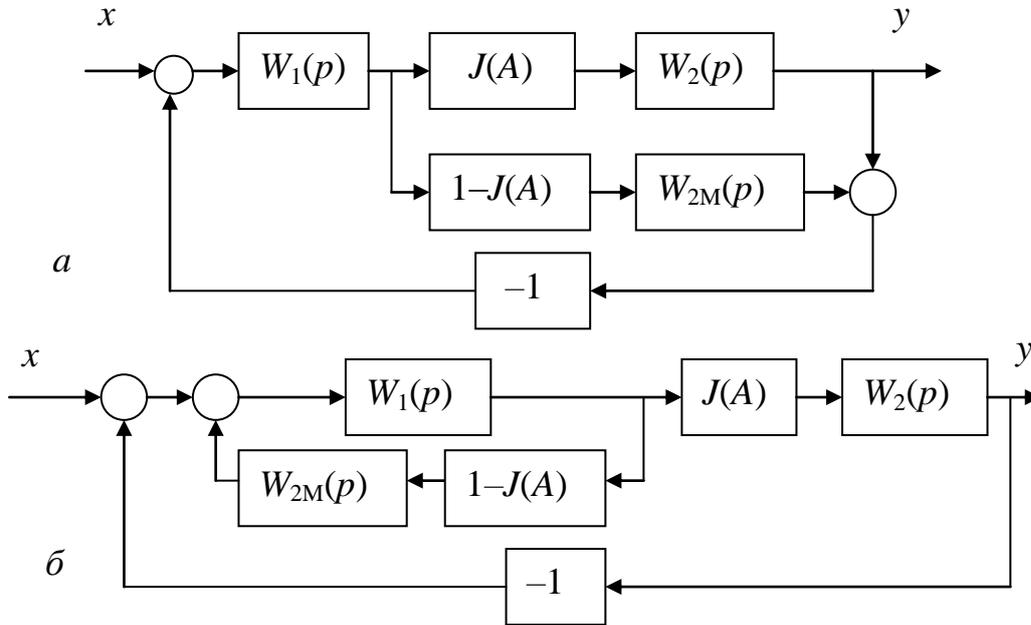


Рис. 4.4.5. Схемы компенсации нелинейности

Компенсация с применением форсирующих устройств осуществляется следующим образом (рис. 4.4.6). Параллельно НЭ с коэффициентом передачи  $J(A)$  включается линейный элемент с коэффициентом передачи  $K_{ЛЭ}$ , их выходные сигналы сравниваются и через форсирующий элемент с  $W_3(p)$  подаются на вход САУ. Если  $z_2 > z_1$ , то на вход САУ поступает отрицательный компенсирующий сигнал, уменьшающий  $z_2$ . Если  $z_2 < z_1$ , то на вход САУ поступает положительный сигнал, увеличивающий  $z_2$ . В результате обеспечивается равенство  $z_2 = z_1$  и НЭ работает как линейное звено с коэффициентом  $K_{ЛЭ}$ .

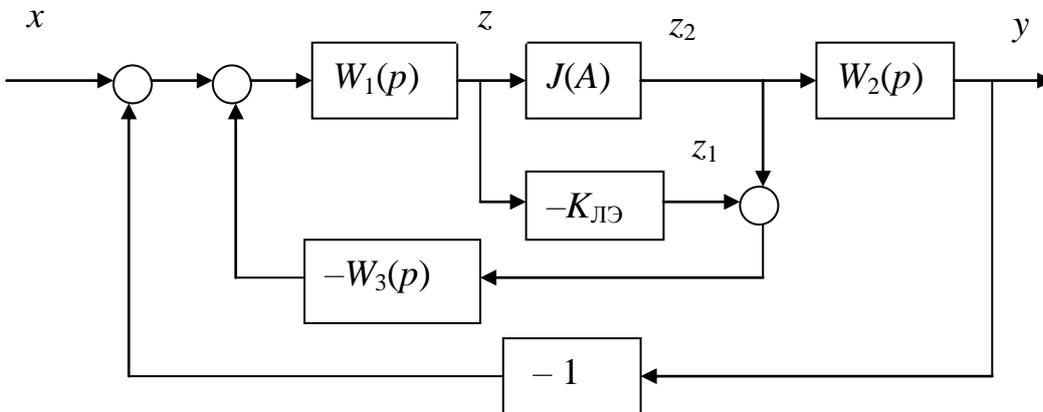


Рис. 4.4.6. Схема компенсации с форсирующим устройством

Реализация таких САУ затруднена неточностью дифференцирования сигнала звеном  $W_3(p)$  и нестабильностью параметров САУ.

**4) Вибрационная линейаризация** заключается в подаче на вход маломощных НЭ, наряду с полезным сигналом, периодических сигналов вибрации небольшой амплитуды. При этом среднее значение выходной величины НЭ будет пропорционально полезному сигналу, а сигнал вибрации будет задерживаться инерционной частью САУ. Для этого частота вибрации должна минимум на порядок превышать частоту полосы пропускания САУ. Вибрационная линейаризация эффективно используется для нелинейностей типа насыщения, нечувствительности, сухого трения, люфта, релейных характеристик.

#### **Контрольные вопросы**

1. Как оценивается качество нелинейных САУ?
2. Каков принцип гармонической линейаризации НЭ?
3. Как получить диаграммы качества затухания нелинейных колебаний?
4. Как по диаграммам качества затухания нелинейных колебаний получают кривую переходного процесса?
5. В чем состоит принцип расчета переходных процессов в нелинейных САУ численными методами Эйлера и Рунге-Кутты?
6. Каковы принципы устранения или уменьшения влияния нелинейностей на процессы в САУ улучшением конструкции НЭ, изменением линейной части САУ, введением обратной нелинейности, введением вибрационной линейаризации?

## 5. ОПТИМАЛЬНЫЕ САУ

### 5.1. Общие сведения

Понятие оптимальности САУ означает обеспечение наилучших результатов управляемого процесса в определенном смысле, оцениваемых величиной критерия оптимальности [1, 9, 15]. Критерии оптимальности выражают экстремальные (минимальные или максимальные) показатели качества функционирования оптимальных САУ (ОСАУ) в виде аналитической оценки, определяемой интегральными функциями от функций входных и выходных координат объекта управления (ОУ) во времени, называемых функционалами качества

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt, \quad (5.1.1)$$

где  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор выходных фазовых координат ОУ;  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  – вектор управляющего воздействия на ОУ (рис. 5.1.1);  $t_0, t_k$  – время начала и конца процесса управления [1, 9, 15].

Функционал качества  $J(u)$  в конкретных ОСАУ может иметь разный физический смысл – время переходного процесса, затраченная энергия, ошибка управления и т. д. Соответственно этому ОСАУ разделяются на следующие четыре основных класса [1, 9, 15].

1) ОСАУ, оптимальные по быстродействию, обеспечивают переход ОУ в фазовом пространстве координат из начального состояния в заданное за наименьшее время  $T$  при заданных ограничениях на управляющие воздействия и минимуме функционала качества

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^{t_k} dt = t_k - t_0 = T = \min. \quad (5.1.2)$$

2) ОСАУ, оптимальные по расходу ресурсов, обеспечивают перевод ОУ из начального состояния в заданное при минимальных затратах ресурсов, определяемых минимумом функционала качества

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^m c_i |u_i(t)| dt = \min, \quad (5.1.3)$$

где  $c_i$  – коэффициенты связи скорости расхода ресурсов с управляющими воздействиями.

3) ОСАУ с минимальной энергией управления называют системы, которые при переводе ОУ из начального состояния в заданное состояние обеспечивают минимум функционала качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt = \min. \quad (5.1.4)$$

4) *ОСАУ с минимальными потерями управления* называются системы с минимальным отклонением координат от желаемых значений. В частности к ним относятся следующие системы с минимальными среднеквадратичными ошибками воспроизведения задающего воздействия, обеспечивающие минимум функционала качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} [x(t) - x_0(t)]^2 dt = \min. \quad (5.1.5)$$

Задачи синтеза ОСАУ делятся на два класса [15]:

1) оптимизация программы управления  $u(t)$ , переводящего ОУ из начального состояния в заданное, которые реализуются разомкнутыми ОСАУ без учета фазовых координат ОУ (рис. 5.1.1, а);

2) формирование оптимального управления  $u$  в функции фазовых координат ОУ в замкнутых ОСАУ – задачи *аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР)* (рис. 5.1.1, б).

Синтез оптимальной САУ (ОСАУ) в общем случае включает решение следующих задач [15]: 1) определение математической модели ОУ (например, в виде системы дифференциальных уравнений); 2) определение цели управления (например, в виде граничных условий); 3) выбор критерия оптимальности; 4) оценка внутренних и внешних ограничений; 5) выбор оптимального алгоритма управляющего устройства; 6) реализация управляющего устройства, осуществляющего выбранный оптимальный алгоритмом его работы.

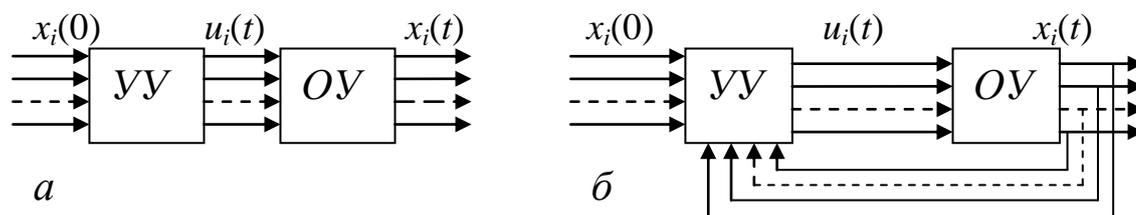


Рис. 5.1.1. Схемы разомкнутой и замкнутой ОСАУ

Возможны детерминированная и стохастическая постановки задач синтеза ОСАУ. Детерминированные задачи синтеза ОСАУ при задании всех воздействий и параметров ОУ регулярными функциями, решаются методами вариационного исчисления. Задачи синтеза ОСАУ в стохастической постановке при случайных воздействиях и параметрах ОУ решаются методами статистической динамики [9, 15].

Синтез оптимального регулятора в ОСАУ средствами математического анализа с целью отыскания *аналитической функции* связи управляющего воздействия  $u_i(t)$  с управляемой выходной координатой  $x_i(t)$  ОУ, доставляющей экстремум критерию оптимальности  $J$ , называется *аналитическим конструированием оптимального регулятора (АКОР)* (рис. 5.1.1, б).

Для синтеза ОСАУ обычно используются три основных метода: классическое вариационное исчисление с использованием уравнения Эйлера, принцип максимума, динамическое программирование.

### Контрольные вопросы

1. Что называется оптимальностью САУ и критериями оптимальности?
2. Какие показатели САУ оцениваются критериями оптимальности?
3. По каким признакам оптимальности классифицируются ОСАУ?
4. Какие задачи включает синтез ОСАУ?
5. Методы синтеза ОСАУ при регулярных и стохастических воздействиях?
6. Задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов?
7. Какие три основных метода применяются для синтеза ОСАУ при регулярных (детерминированных) воздействиях?

## 5.2. Вариационный метод синтеза ОСАУ

Вариационное исчисление представляет собой раздел математики, изучающий поиск функций, при которых некоторые величины, зависящие от этих функций, достигают максимума или минимума.

Рассмотрим синтез ОСАУ вариационным методом с использованием уравнения Эйлера [9] с целью поиска оптимальных управлений  $u_j$  выходными координатами  $x_i(t)$  ОУ, доставляющей экстремум функционалу (критерию оптимальности) типа

$$J = \int_0^T G(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt, \quad (5.2.1)$$

при заданных граничных условиях  $x_i(0) = x_i^0, x_i(T) = x_i^1 (i=1, \dots, n)$ .

В подынтегральное выражение (5.2.1) не входят производные выше первой от координат  $x_j$ . Если не наложено никаких ограничений, то  $x_i$  и  $u_j$  принадлежат открытым областям этих величин.

Решение задачи в этом случае дают *уравнения Эйлера*, записанные для всех координат ОУ и всех управлений, входящих в (5.2.1):

$$G'_x - \frac{d}{dt} G'_{\dot{x}} = 0, \quad (5.2.2)$$

где  $G'$  – частные производные от подинтегральной функции (5.2.1) по соответствующим переменным. Это решение определяет пучок интегральных кривых (*экстремалей*)  $x_i(t)$ , из которых необходимо выбрать траекторию, проходящую через заданные начальную и конечную точки. При этом функции  $x_i$  должны принадлежать к классу функций  $C_{2m}$ , имеющих  $2m$  непрерывных производных. В рассматриваемом случае в (5.2.1)  $m=1$  и функции  $x_i$  должны иметь две непрерывные производные.

Кроме того, для минимизации функционала (5.2.1) должно выполняться условия  $G''_{\dot{x}_i \dot{x}_i} \geq 0$  и  $G''_{\dot{u}_j \dot{u}_j} \geq 0$ . Эти условия аналогичны требованию положительности второй производной в точке минимума функции  $J=f(x)$ .

Однако при синтезе ОСАУ необходимо учитывать ограничения:

1) ограничения на фазовые координаты и управления

$$|x_i| \leq x_{i\max} \quad (i=1, \dots, n), \quad |u_j| \leq u_{j\max} \quad (j=1, \dots, k); \quad (5.2.3)$$

2) ограничения типа голономных уравнений связей

$$G_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0 \quad (k=1, \dots, l); \quad (5.2.4)$$

3) ограничения в виде дифференциальных уравнений связей

$$G_k(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; \dots) = 0 \quad (k=1, \dots, l); \quad (5.2.5)$$

4) изопериметрические ограничения в виде функционалов

$$I_k = \int_{t_0}^{t_1} G_k(t, x_1, \dots, x_n) dt \leq a_k \quad (k=1, \dots, l). \quad (5.2.6)$$

С учетом ограничений, например, в виде уравнений связей (5.2.5), представляющих собой уравнение свободного движения ОУ в виде

$$\varphi_i[x(t), \dot{x}(t)] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.2.7)$$

в уравнениях Эйлера (5.2.2) вместо функции  $G$  используется функция

$$F = G[x(t), \dot{x}(t)] + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i[x(t), \dot{x}(t)], \quad (5.2.8)$$

где  $\lambda_i(t)$  – множители Лагранжа, подлежащие определению.

Функция  $x(t)$  и множители Лагранжа  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  находятся из системы  $(n+1)$  уравнений – это уравнение Эйлера для функции (5.2.8) и  $n$  уравнений связи (5.2.7). Такая задача на условный экстремум называется *общей задачей Лагранжа*.

Если условия, которым подчинены искомые функции  $x(t)$ , заданы не в виде уравнений связи (5.2.5), а в виде определенных интегралов

$$\int_0^T K_i[x(t), \dot{x}(t)] dt = Q_i, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.2.9)$$

где  $Q_i$  – заданные величины, то для решения задачи также составляется вспомогательная функция

$$F = G[x(t), \dot{x}(t)] + \sum_{i=1}^n \lambda_i K_i[x(t), \dot{x}(t)], \quad (5.2.10)$$

где  $\lambda_i$  – неопределенные множители Лагранжа, не зависящие от времени. Вариационная задача при условиях в виде интеграла (5.2.9) называется *изопериметрической задачей*. В такой задаче для определения функции  $x(t)$  и множителей  $\lambda_i$  используются, как и в общей задаче Лагранжа, уравнение Эйлера для вспомогательной функции (5.2.10) и  $n$  уравнений связи (5.2.9).

Возможности решения задач оптимального управления классическим методом вариационного исчисления с использованием уравнения Эйлера ограничены следующими обстоятельствами: 1) задача оптимизации сводится к решению дифференциального уравнения ОСАУ, которое часто является нелинейным и не имеет решения в общем виде; 2) искомое управляющее воздействие должно относиться к неограниченным функциям, что в реальных ОСАУ неосуществимо; 3) если подынтегральная функция критерия оптимальности является линейной функцией от  $t$ ,  $x$ ,  $\dot{x}$ , то уравнение Эйлера составить не удастся, хотя решение задачи может существовать. Поэтому в практике для синтеза ОСАУ чаще используют принцип максимума и метод динамического программирования [9].

**Пример 5.1.** Определим с использованием уравнения Эйлера оптимальный по минимуму затрат энергии закон управления током  $u$  электродвигателя, если уравнение ОУ  $d^2y/dt^2 = u$  ( $y$  – угловое положение вала двигателя), граничные условия по скорости нулевые  $\dot{y}(0) = \dot{y}(T) = 0$ , а заданный угол поворота вала

$$\alpha_0 = \int_0^T \dot{y}(t) dt.$$

Введем обозначения:  $y = y_1$ ,  $dy_1/dt = \dot{y} = y_2$ .

Тогда можно записать

$$\dot{y}_2 = u, \quad (5.2.11)$$

$$y_2(0) = y_2(T) = 0, \quad (5.2.12)$$

$$\int_0^T y_2(t) dt = \alpha_0. \quad (5.2.13)$$

Функционал (критерий качества), который нужно минимизировать при оптимизации по минимуму затрат энергии управления, согласно (5.1.4) и с учетом (5.2.11), имеет вид

$$J = \int_0^T u^2(t) dt = \int_0^T (\dot{y}_2)^2 dt. \quad (5.2.14)$$

Получили изопериметрическую задачу минимизации функционала (5.2.14) при условии, что интеграл типа (5.2.9) имеет заданное значение (5.2.13).

В функционале (5.2.14) подынтегральная функция  $G = (\dot{y}_2)^2$ . В интеграле типа (5.2.9) с учетом уравнения ОУ (5.2.11)  $K_1 = y_2$ .

Образует вспомогательную функцию по (5.2.10) в виде

$$F = G + \lambda_1 K_1 = (\dot{y}_2)^2 + \lambda_1 y_2, \quad (5.2.15)$$

где  $\lambda_1$  – неопределенный множитель Лагранжа.

Составим уравнение Эйлера по (5.2.2) для вспомогательной функции (5.2.15), обозначив

$$G'_x = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial(\lambda_1 y_2)}{\partial y} = F_{y_2} = \lambda_1; \quad (5.2.16)$$

$$G'_x = \frac{\partial[(\dot{y}_2)^2]}{\partial(\dot{y}_2)} = F_{\dot{y}_2} = 2\dot{y}_2; \quad (5.2.17)$$

$$\frac{d}{dt} G'_x = \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_2} = 2\ddot{y}_2. \quad (5.2.18)$$

По (5.2.4) с учетом (5.2.14)–(5.2.16) уравнение Эйлера будет

$$F_{y_2} - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_2} = \lambda_1 - 2\ddot{y}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{y}_2 = \lambda_1/2. \quad (5.2.19)$$

Первое интегрирование уравнения (5.2.19) согласно (5.2.11) дает закон изменения оптимального управляющего воздействия

$$u(t) = \dot{y}_2 \frac{\lambda_1}{2} t + C_1. \quad (5.2.20)$$

Повторно интегрируя (5.2.19), найдем оптимальный переходный процесс

$$y_2(t) = \frac{\lambda_1}{4} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (5.2.21)$$

Для определения трех неизвестных  $\lambda_1, C_1, C_2$  в уравнении (5.2.21) используем два уравнения для граничных условий  $\dot{y}(0) = 0$  и  $\dot{y}(T) = 0$  и равенство (5.2.11). Подставив в (5.2.21)  $t=0$  и учитывая, что  $y_2(0) = 0$  в соответствие с (5.2.12), находим  $C_2 = 0$ .

Подставляя в (5.2.21)  $t=T$  и учитывая, что  $y_2(T) = 0$  в соответствие (5.2.12), получим первое уравнение для определения  $\lambda_1$  и  $C_1$ :

$$\frac{\lambda_1}{4} T^2 + C_1 T = 0. \quad (5.2.22)$$

Интегрируя (5.2.21) в пределах  $0 \leq t \leq T$  и учитывая равенство (5.2.13), получим второе уравнение для определения  $\lambda_1$  и  $C_1$

$$\alpha_0 = \int_0^T y_2(t) dt = \frac{\lambda_1}{12} T^3 + \frac{C_1}{2} T^2. \quad (5.2.23)$$

Решая совместно (5.2.22) и (5.2.23) относительно  $\lambda_1$  и  $C_1$ , находим

$$\lambda_1 = -\frac{24\alpha_0}{T^3}, \quad C_1 = \frac{6\alpha_0}{T^2}. \quad (5.2.24)$$

Учитывая (5.2.24) и  $C_2 = 0$ , из (5.2.22) и (5.2.23) получим уравнения для оптимальных процессов (рис. 5.2.1) в виде

$$\left. \begin{aligned} u^*(t) &= \frac{6\alpha_0}{T^2} - \frac{12\alpha_0}{T^3} t; \\ y^*(t) &= \frac{6\alpha_0}{T^2} t - \frac{6\alpha_0}{T^3} t^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.25)$$

На рис. 5.2.1 приведены графики оптимальных процессов: ток  $u^*(t)$  должен изменяться по линейному закону, а скорость двигателя  $y^*(t)$  – по параболе.

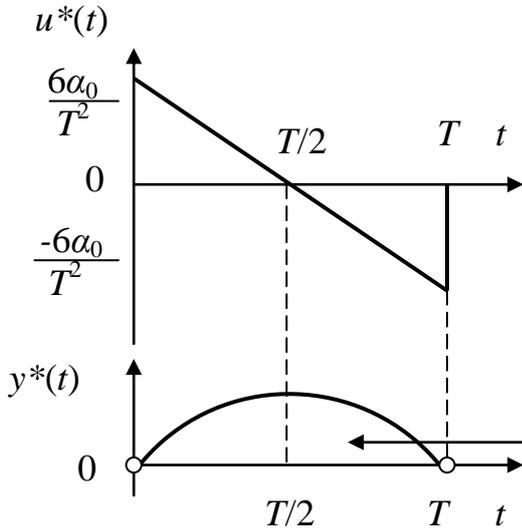


Рис. 5.2.1. Оптимальные процессы

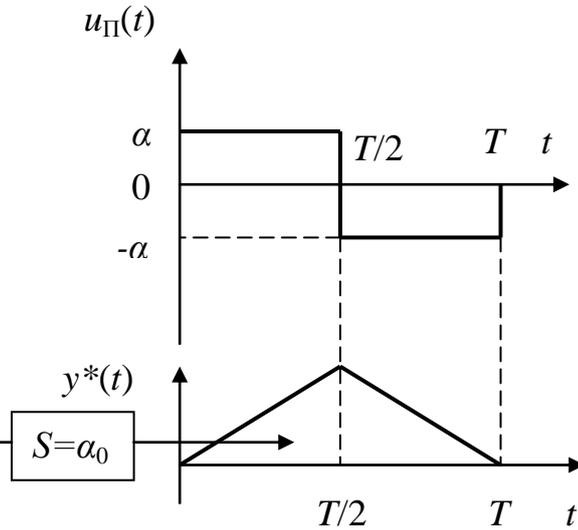


Рис. 5.2.2. Процессы с постоянным ускорением

Оптимальность полученного управления можно оценить сравнением затрат энергии с процессом отработки такого же угла поворота при часто применяемом оптимальном по быстрдействию законе управления с прямоугольной диаграммой тока при постоянных значениях тока разгона и торможения двигателя (рис. 5.2.2). Угол поворота вала двигателя при прямоугольной диаграмме тока определяется интегралом, из выражения которого можно найти ток  $u_{П}(t) = \alpha$

$$\alpha_0 = 2 \int_0^{T/2} y^*(t) dt = 2 \int_0^{T/2} \alpha t dt = \frac{\alpha T^2}{4}, \quad \alpha = \frac{4\alpha_0}{T^2}. \quad (5.2.26)$$

Ток двигателя при прямоугольной диаграмме описывается уравнениями

$$u_{\Pi}(t) = \begin{cases} +\frac{4\alpha_0}{T^2} & \text{при } 0 \leq t \leq T/2; \\ -\frac{4\alpha_0}{T^2} & \text{при } T/2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (5.2.27)$$

Подставив (5.2.25) и (5.2.27) в минимизируемый функционал (5.2.14), находим затраты энергии при оптимальной и прямоугольной диаграммах тока

$$J^* = \int_0^T [u^*(t)]^2 dt = \frac{12\alpha_0^2}{T^3}; \quad J_{\Pi} = \int_0^T [u_{\Pi}(t)]^2 dt = \frac{16\alpha_0^2}{T^3}. \quad (5.2.28)$$

Степень оптимальности определяется соотношением затрат энергии  $\chi = J_{\Pi}/J^* = 16/12 = 1,33$ , т.е. при отработке заданного угла поворота вала двигателя при прямоугольной диаграмме тока требуется затратить энергии на 33% больше, чем при полученной оптимальной диаграмме тока.

### Контрольные вопросы

1. Что является предметом изучения вариационного исчисления?
2. Какие ограничения обычно учитываются при синтезе ОСАУ?
3. Какие трудности имеет синтез ОСАУ с использованием классического вариационного исчисления с использованием уравнения Эйлера?

## 5.3. Синтез с использованием принципа максимума

Принцип максимума, разработанный в России в 1956–1960 г.г. Л.С. Понтрягиным с сотрудниками, дает более широкие возможности для синтеза ОСАУ по сравнению с классическими методами вариационного исчисления [9, 15]. Геометрическую интерпретацию принципа максимума Л.С. Понтрягина рассмотрим на примере задачи перевода в фазовом пространстве изображающей точки из некоторого начального состояния  $0$  в заданное конечное состояние  $K$  за минимальное время [9]. Вокруг конечной точки можно построить поверхности, называемые *изохронами*, являющиеся геометрическим местом точек с одинаковым минимальным временем перехода в конечную точку  $K$ . Оптимальная по быстрдействию траектория движения *должна быть максимально близка нормалям к изохронам*, поскольку всякое другое движение увеличивает время процесса. Математически это значит, что на всей траектории движения *скалярное произведение вектора скорости  $v = dy/dt$  на вектор  $\psi = -\text{grad } t_B$ , обратный градиенту времени перехода в конечную точку, должно быть максимальным  $H = (\psi \cdot v) = \max$  (скалярное произведение векторов равно произведению из модулей на косинус угла между ними).*



относительно основной системы уравнений (5.3.8) некоторую вспомогательную функцию, называемую функцией Гамильтона

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot f_i(u, y, t). \quad (5.3.9)$$

Функция (5.3.9) позволяет составить сопряженную к основной системе (5.3.7) систему дифференциальных уравнений вспомогательных величин, удовлетворяющих условиям

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i=0,1,2,\dots,n). \quad (5.3.10)$$

Если в (5.3.10) подставить функцию  $H$  (5.3.9), то получим

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{k=0}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k(u, y, t)}{\partial y_i} \quad (i=0,1,2,\dots,n). \quad (5.3.11)$$

Из (5.3.8)  $dy_i/dt = f_i(u, y, t)$  и из (5.3.9)  $dH/d\psi_i = f_i(u, y, t)$ , следовательно

$$dy_i/dt = \partial H / \partial \psi_i \quad (i=0,1,2,\dots,n), \quad (5.3.12)$$

т. е. уравнения (5.3.12) эквивалентны уравнениям (5.3.8).

Если уравнения (5.3.10) и (5.3.12) записать совместно, то можно отметить симметрию в этой системе уравнений, называемых *канонически сопряженными*

$$\left. \begin{aligned} d\psi_i/dt &= -\partial H / \partial y_i; \\ dy_i/dt &= \partial H / \partial \psi_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.13)$$

*Основная теорема (принцип максимума)* формулируется так [2]: если  $u(t)$  – оптимальное управление, а  $y(t)$  – оптимальная траектория, то существует такая ненулевая непрерывная функция  $\psi(t)$  с координатами  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ , соответствующая  $u(t)$  и  $y(t)$  в силу равенства (5.3.10), при которой функция  $H$  в любой момент времени достигает максимального значения по  $u$ , что является необходимым, но недостаточным условием оптимальности.

Оптимальное управление  $u(t)$  находят в следующем порядке.

1) Записывают уравнения ОУ первого порядка (5.3.8), дополняемые уравнением первого порядка для функционала (5.3.6).

2) Составляют функцию Гамильтона  $H$  (5.3.9).

3) Определяют значение  $u$ , максимизирующее функцию  $H$ , из системы уравнений

$$\partial H / \partial u_j = 0 \quad (j=1,2,\dots,r). \quad (5.3.14)$$

Если максимум  $H$  достигается на границе допустимой области управлений  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ , то для некоторых  $j$  равенство (5.3.14) может не выполняться при ненулевой функции  $\psi(t)$ .

В уравнениях (5.3.14) для вычисления  $u(t)$  содержится  $(2n+r+2)$  неизвестных:  $(n+1)$  функций  $y_i(t)$ ,  $(n+1)$  функций  $\psi_i(t)$ ,  $r$  функций  $u_j(t)$ . Для их определения имеются  $r$  уравнений из (5.3.14),  $(n+1)$  уравнений исходной системы из (5.3.8), осталось составить  $(n+1)$  уравнений для функций  $\psi_i(t)$  вида (5.3.10).

4) Составляют уравнения (5.3.10) для поиска функций  $\psi_i(t)$ .

5) Из совместного решения  $(2n+r+2)$  уравнений находится оптимальное управление  $u(t)$ .

Принцип максимума позволяет вариационную задачу определения оптимального управления  $u(t)$ , доставляющего экстремум функционалу качества  $J$ , заменить более простой задачей поиска параметра  $u(t)$ , доставляющего максимум вспомогательной функции  $H(u)$ .

**Пример 5.2.** Решим с помощью принципа максимума задачу оптимального по быстрдействию управления ОУ с уравнением  $\ddot{y}=u$  при ограничении на управление  $|u| \leq 1$ .

Введем обозначения  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$  и составим уравнения первого порядка для ОУ:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = u. \quad (5.3.15)$$

Функционалом качества (критерием оптимальности) является минимальное время переходных процессов  $J = T = \int_0^T 1 dt$ , поэтому дифференциальное уравнение для функционала (5.3.6) имеет вид

$$\dot{y}_0 = 1. \quad (5.3.16)$$

Добавив (5.3.16) к (5.3.15), получим исходную систему дифференциальных уравнений первого порядка для ОУ

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_0 &= 1, \\ \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= u. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.17)$$

Составим функцию Гамильтона  $H$  по (5.3.9)

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 \cdot y_2 + \psi_2 \cdot u. \quad (5.3.18)$$

Максимальное значение  $H$  из (5.3.18) получается при максимальной величине слагаемого  $\psi_2(t) \cdot u = \max_{|u| \leq 1}$ . Значение  $u$ , соответствующее максимуму  $H(u)$ , можно найти по точке перегиба, где

$$\partial H / \partial u = \partial \psi_2(t) \cdot u / \partial u = \psi_2(t) = 0, \quad (5.3.19)$$

поскольку  $u$  не может быть равным нулю. Однако в формулировке принципа максимума требуется существование ненулевой функции  $\psi(t)$ , т. е. не допускается равенства  $\psi_2(t)=0$  для всех  $t$ . Следовательно, оптимальное значение  $u$ , максимизирующее функцию  $H$ , нужно выбирать на допустимых границах значений  $u$ . В данном примере при  $\psi_2(t)>0$  нужно выбирать  $u=+1$ , а при  $\psi_2(t)<0$  выбирать  $u=-1$ . Этот закон управления записывается с помощью функции  $\text{sign}$ :

$$u = \text{sign} \psi_2(t). \quad (5.3.20)$$

Для определения функций  $\psi_i(t)$  составим уравнения типа (5.3.10)

$$\left. \begin{aligned} d\psi_0/dt &= -\partial H/\partial y_0 = 0; \\ d\psi_1/dt &= -\partial H/\partial y_1 = 0; \\ d\psi_2/dt &= -\partial H/\partial y_2 = -\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.21)$$

Решения уравнений (5.2.1) получаются в виде

$$\psi_0 = \text{const} = C_0; \quad \psi_1 = \text{const} = C_1; \quad \psi_2 = C_2 - C_1 t. \quad (5.3.22)$$

Подставляя (5.3.22) в (5.3.20), получим оптимальное управление в виде

$$u = \text{sign}(C_2 - C_1 t). \quad (5.3.23)$$

Поскольку функция  $\psi_2(t) = C_2 - C_1 t$  на всем интервале процесса управления  $0 \leq t \leq T$  может изменить знак только один раз, то оптимальное управление (5.3.23) является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения  $+1$  или  $-1$  и имеющей не более двух интервалов постоянства (рис. 5.2.2).

### Контрольные вопросы

1. Геометрическая интерпретация принципа максимума Понтрягина?
2. Как дифференциальное уравнение  $n$ -порядка представить системой дифференциальных уравнений первого порядка?
3. Как составляется функция Гамильтона  $H$  по уравнениям ОУ?
4. По какому принципу определяется оптимальное управление  $u(t)$ ?

## 5.4. Метод динамического программирования

В 1956–1960 г.г. в США Р. Беллман с сотрудниками разработали метод решения вариационных задач, названный ими динамическим программированием [9, 15]. Метод динамического программирования (МДП) представляет собой дискретный вариант многошагового процесса поиска оптимального управления, удобный для реализации на ЭВМ. МДП основан на *принципе оптимальности*, суть которого состоит в том, что поиск оптимума на каждом шаге не зависит от предыдущего состояния системы и определяется только ее состоянием в текущий момент времени.

Рассмотрим применение МДП в задаче оптимального по быстродействию управления  $u_i$  переходом из фазового состояния  $y_0$  в фазовое состояние  $y_k$  ОУ, описываемого уравнениями первого порядка

$$\dot{y}_i = f_i(y, u). \quad (5.4.1)$$

Положим, что для любой точки  $y$  существует оптимальное управление  $u(t)$ , под действием которого ОУ попадет в заданную точку  $y_k$ . Обозначим время оптимального переходного процесса  $T(y)$ , быстрее которого переход невозможен. Если  $T(y) = \text{const}$ , то это уравнение определит в фазовом пространстве геометрическое место точек  $y(y_1, y_2, \dots, y_N)$  вокруг точки  $y_k$ , из которых время оптимального перехода в  $y_k$  постоянно. Такие геометрические места точек называются *изохронами*.

Введем функцию  $S(y)$  вместо функции  $T(y)$ , отличающуюся от нее только обратным знаком

$$S(\bar{y}) = -T(\bar{y}). \quad (5.4.2)$$

Положим, что функция  $S(y)$  непрерывна и всюду, кроме точки  $y_k$ , имеет непрерывные частные производные  $\partial S / \partial y_1, \dots, \partial S / \partial y_N$ .

Если ОУ начал движение из точки  $y_0$  в момент времени  $t_0$  по произвольной фазовой траектории, то до попадания в некоторую точку  $y(t)$  было затрачено время  $(t - t_0)$ . Но если дальше ОУ от точки  $y(t)$  будет двигаться к заданной точке  $y_k$  по оптимальной траектории, то на движение будет затрачено время  $T[y(t)]$ . В итоге на переход из  $y_0$  в  $y_k$  будет затрачено время  $(t - t_0) + T[y(t)]$  (рис. 5.4.1, а). Но поскольку оптимальное время движения от  $y_0$  до  $y_k$  равно  $T[y(t_0)]$ , то

$$T[y(t_0)] \leq (t - t_0) + T[y(t)]. \quad (5.4.3)$$

Заменив функцию  $T$  через  $S$  на основании (5.4.2) и разделив обе части неравенства (5.4.3) на положительную величину  $(t - t_0)$ , получим  $\frac{S[y(t)] - S[y(t_0)]}{t - t_0} \leq 1$  или, переходя к пределу при  $t \rightarrow t_0$ , найдем

$$\frac{d}{dt} S[y(t)]_{t=t_0} \leq 1. \quad (5.4.5)$$

Производная в (5.4.5) существует, поскольку функции  $S(y)$  и  $y(t)$  дифференцируемы, и вычисляется по формуле полной производной

$$\frac{d}{dt} S[y(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial y_i} \dot{y}_i(t). \quad (5.4.6)$$

Так как движение ОУ описывается системой уравнений первого порядка (5.4.1), то неравенство (5.4.5) при  $t = t_0$  можно записать

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\bar{y}_0)}{\partial y_i} f_i(\bar{u}_0, \bar{y}_0) \leq 1. \quad (5.4.7)$$

Точки  $y_0$  и  $u_0$  в (5.4.7) были произвольными, поэтому и для любой точки  $y$  фазового пространства и любой точки  $u$  области управления также выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\bar{y})}{\partial y_i} f_i(\bar{u}, \bar{y}) \leq 1. \quad (5.4.8)$$

Уравнение оптимальной траектории движения ОУ от  $y_0$  до  $y_k$  за время  $t_k = t_0 + T(y_0)$  находится по уравнениям ОУ  $\dot{y}_i = f_i(u, y)$ . Движение от точки  $y_0$  до точки  $y(t)$  осуществляется за время  $(t - t_0)$ , а движение от точки  $y(t)$  до точки  $y_k$  – за время  $T[y(t)]$ . Поскольку время движения от  $y_0$  до  $y_k$  по оптимальной траектории равно  $T[y(t_0)]$ , то можно записать

$$T[\bar{y}(t_0)] = (t - t_0) + T[\bar{y}(t)]. \quad (5.4.9)$$

Равенство (5.4.9) служит формальной записью *принципа оптимальности*, являющегося основополагающим в МДП.

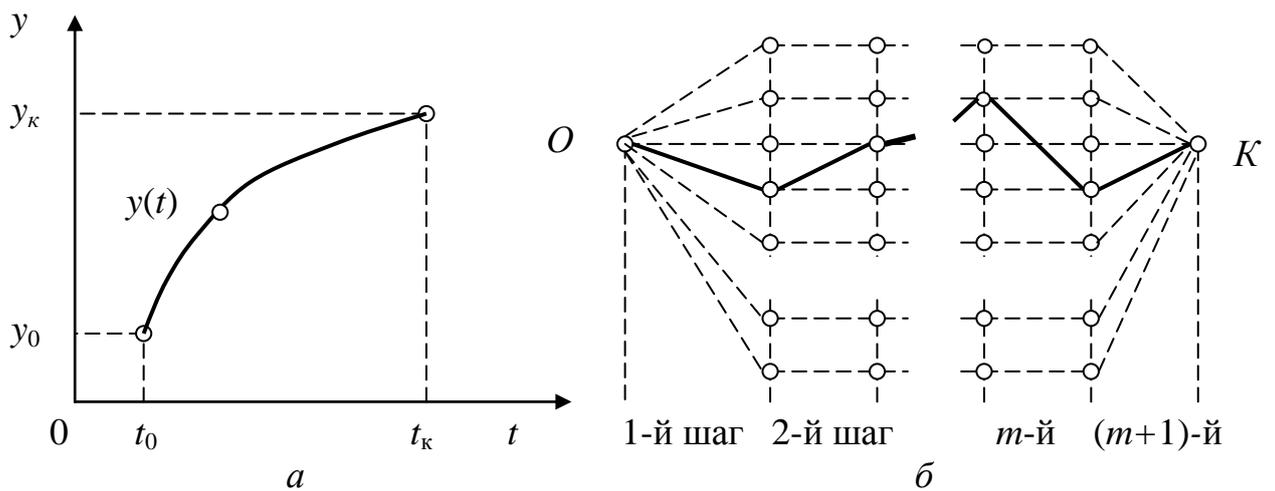


Рис. 5.4.1. Оптимальные траектории движения

Заменяя в (5.4.9)  $T$  на  $-S$ , получим  $S[\bar{y}(t)] = S[\bar{y}(t_0)] + t - t_0$ , из которого, дифференцируя по времени, находим оптимум

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S[\bar{y}(t)]}{\partial y_i} \cdot f_i[\bar{y}(t), \bar{u}(t)] = 1. \quad (5.4.10)$$

Введем обозначение

$$H(\bar{u}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[\bar{y}(t)]}{\partial y_i} f_i[\bar{y}(t), \bar{u}(t)], \quad (5.4.11)$$

с учетом которого запишем соотношения (5.4.8) и (5.4.10) в виде:

$$\begin{cases} H(\bar{u}, \bar{y}) \leq 1 & \text{— для произвольного допустимого процесса;} \\ H(\bar{u}, \bar{y}) = 1 & \text{— для оптимального допустимого процесса.} \end{cases}$$

Сопоставляя эти условия, запишем очевидный максимум

$$\max_{u \in \Omega} H(u, y) = 1 \quad (5.4.12)$$

или с учетом обозначения (5.4.11) получим уравнение Беллмана

$$\max_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[y]}{\partial y_i} f_i(y, u) = 1 \quad (5.4.13)$$

для любой точки траектории  $y \neq y_k$  при управлении  $u$  в области допустимых значений  $\Omega$ .

При решении задачи процесс перемещения ОУ в фазовом пространстве разделяется на  $N$  равных участков (шагов) малой длины  $\Delta$  и на каждом из них проводится последовательная оптимизация, начиная с последнего. При этом время переходного процесса  $T = N \cdot \Delta$ , а дифференциальные уравнения (5.4.1) заменяются конечно-разностными уравнениями

$$(y_{m+1} - y_m) / \Delta = f_1(y_m, u_m), \quad (5.4.14)$$

или

$$y_{m+1} = y_m + \Delta \cdot f_1(y_m, u_m) = y_m + f(y_m, u_m), \quad (5.4.15)$$

где  $f(y_m, u_m) = \Delta \cdot f_1(y_m, u_m)$  при начальном условии  $y(t_0) = y_0$ .

Функционал (критерий оптимальности) при этом взамен интеграла представляется суммой

$$J = \sum_{m=1}^{N-1} f(y_m, u_m) + \phi[y(N)], \quad (5.4.16)$$

где  $\phi[y(N)] = \phi_1[y(N \cdot \Delta)] = \phi_1[y(T)]$ .

Необходимо найти последовательность дискретных значений управляющего воздействия  $u$ , минимизирующих сумму (5.4.16) функций  $(N-1)$  переменных. МДП позволяет свести эту операцию к последовательности минимизации функций одного переменного. Для этого расчет движения ведется от конца процесса ( $t=T$ ) к его началу ( $t=t_0$ ) (рис. 5.4.1). Эффективность МДП можно показать на примере перевода ОУ за  $(m+1)$  шагов во времени (по горизонтали) из начального положения  $O$  в заданное положение  $K$  в дискретной ОСАУ, где каждое из  $m$  положений ОУ имеет  $q$  вариантов (по вертикали) (рис. 5.4.1, б) [6]. Требуется выбрать такую траекторию движения ОУ из  $q^m$  возможных вариантов, которая минимизирует критерий оптимальности  $J$  (5.4.16). По МДП для каждой исходной  $q$ -точки последнего шага  $(m+1)$  согласно принципу оптимальности находится минимальное приращение критерия оптимальности  $\Delta J_{\min(m+1)}$ , например, соответствующее перемещению ОУ из точки 4 (считая сверху вниз) в заданное положение  $K$  (толстая линия на рис. 5.4.1, б). Затем для каждой исходной  $q$ -точки  $m$ -шага находится приращение  $\Delta J_{(m)}$  и выбирается точка с минимальным приращением  $\Delta J_{\min(m)}$  (например, точка 2),

сумма  $\Delta J_{\min(m)} + \Delta J_{\min(m+1)}$  дает приращение критерия качества за два шага:  $m$  и  $m+1$ . Далее эти операции производятся на  $(m-1)$ ,  $(m-2)$  и других шагах до начальной точки  $O$ . В результате определяется оптимальная траектория движения ОУ, доставляющая минимум критерию качества (толстая линия на рис. 5.4.1, б). Так задача минимизации критерия качества путем нахождения  $m$  переменных последовательностей управляющего воздействия  $u$ , каждая из которых может иметь  $q$  значений, сводится к последовательному решению более простой задачи нахождения оптимума функции одной переменной  $u$ , имеющей  $q$  значений. Например, при  $m=q=10$  выбор из  $10^{10}$  вариантов сводится к 10 последовательным операциям выбора из 10 вариантов каждый [9].

**Пример 5.3.** Решим методом динамического программирования задачу оптимального по быстрдействию управления ОУ с уравнением  $\dot{y} = u$  при ограничении на управление  $|u| \leq 1$ .

Система уравнений первого порядка для ОУ при обозначениях  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 = f_1(y, u), \\ \dot{y}_2 &= u = f_2(y, u). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.17)$$

Подставив уравнение ОУ (5.4.17) в уравнение Беллмана (5.4.13)

$$\max_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{\partial S(y_1, y_2)}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S(y_1, y_2)}{\partial y_2} u \right\} = 1, \quad (5.4.18)$$

получим закон оптимального управления в виде

$$u = \text{sign} \frac{\partial S(y_1, y_2)}{\partial y_2}. \quad (5.4.19)$$

По (5.4.19) оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию, принимающую предельные значения  $\pm 1$ , а моменты переключения определяются поведением функции  $\frac{\partial S[y(t)]}{\partial y_2}$ . Далее необходи-

мо определить функцию  $S(y_1, y_2)$  или выражение для изохрон  $T(y_1, y_2) = -S(y_1, y_2)$ .

Для этого рассмотрим фазовую плоскость  $(y_1, y_2)$  оптимальной системы, где конечная точка движения ОУ расположена в начале координат, через которую проходит линия переключения, а начинается движение из точки  $y_0$  с координатами  $a, b$ , расположенной выше линии переключения (рис. 5.4.2, а). Движение изображающей точки в фазовом пространстве при  $u = -1$  из точки  $y_0$  до линии переключения для системы второго порядка происходит по параболе с уравнением  $1/2 y_2^2 = -y_1 + C$ , т.е.  $1/2 b^2 = -a + C$ , откуда  $C = a + 1/2 b^2$ . Тогда парабола, проходящая через точку  $y_0$  имеет уравнение

$$y_1 = -1/2 y_2^2 + a + 1/2 b^2. \quad (5.4.20)$$

Точка переключения  $M$  определяется точкой пересечения параболы с линией переключения, уравнение которой для системы второго порядка

$$y_1 = 1/2 y_2^2. \quad (5.4.21)$$

Для определения точки пересечения  $M$  нужно решить уравнения (5.4.20) и (5.4.21) совместно. Вычитая (5.4.21) из (5.4.20), найдем  $y_2^2 = a + 1/2b^2$ , откуда  $y_2 = \pm\sqrt{a + 1/2b^2}$ . Для точки  $M$  следует взять знак минус, так как она расположена ниже оси абсцисс

$$y_{2M} = -\sqrt{a + 1/2b^2}. \quad (5.4.22)$$

Поскольку при движении от точки  $y_0$  до точки  $M$  управление  $u = -1$ , то уравнение движения  $\dot{y}_2 = -1$ , интегрируя которое, получим время движения  $(t_0 - t)$  и момент переключения  $t$

$$y_{2M} - b = \int_{t_0}^t \dot{y}_2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t (-1) d\tau = t_0 - t. \quad (5.4.23)$$

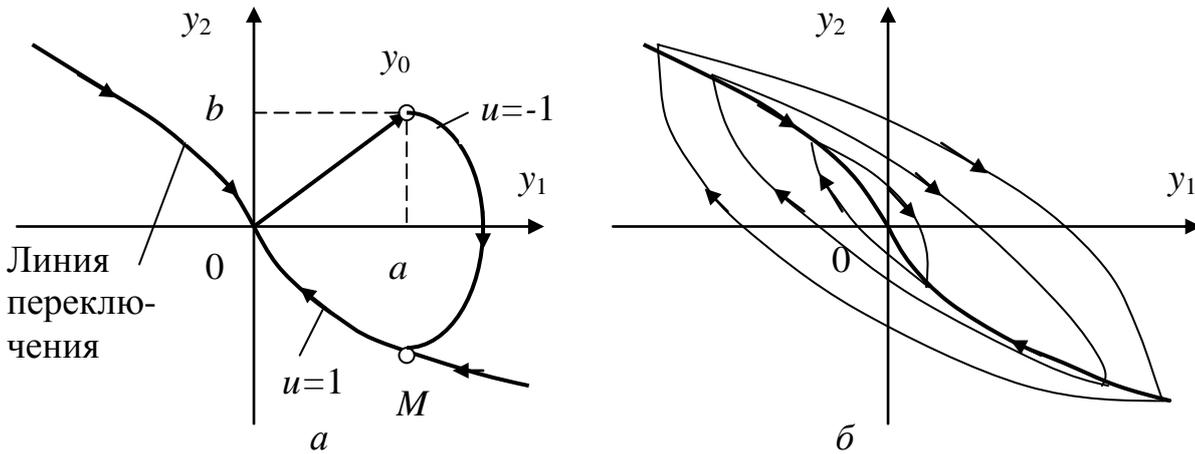


Рис. 5.4.2. Траектории движений системы

Аналогично при движении от точки  $M$  до начала координат при  $u = +1$  уравнение движения будет  $\dot{y}_2 = +1$  и время движения будет

$$y_{2M} - 0 = \int_t^{t_k} \dot{y}_2(\tau) d\tau = \int_t^{t_k} (+1) d\tau = t_k - t, \quad (5.4.24)$$

где  $t_k$  – момент окончания процесса. Вычитая (5.4.23) из (5.4.24) и подставляя  $y_{2M}$  из (5.4.22), найдем время переходного процесса

$$T(y_0) = t_k - t_0 = b + 2\sqrt{a + 1/2b^2}. \quad (5.4.25)$$

Формула (5.4.25) справедлива для точек  $y_0$ , расположенных выше или на линии переключения. Для точек, расположенных ниже или на линии переключения можно рассмотреть точку с координатами  $-a, -b$ , симметричную точке  $y_0$  относительно начала координат. Заменяя в (5.4.25)  $a$  на  $-a$  и  $b$  на  $-b$ , получим

$$T(y_0) = -b + 2\sqrt{-a + 1/2b^2}. \quad (5.4.26)$$

Учитывая, что  $T(y_0) = -S(y_0)$ , а также заменяя для произвольных точек  $y_0$   $a = y_1, b = y_2$ , получим уравнения

$$S(y_1, y_2) = \begin{cases} -y_2 - 2\sqrt{y_1 + 1/2 y_2^2}, & \text{при } y_2 \text{ выше линии переключения;} \\ y_2 - 2\sqrt{-y_1 + 1/2 y_2^2}, & \text{при } y_2 \text{ ниже линии переключения.} \end{cases} \quad (5.4.27)$$

Семейство изохрон для разных значений  $T(y_0) = -S(y_0)$  ( $T=1,2,3$ ) показаны на рис. 5.4.2, б. Подставляя найденное выражение  $S(y_1, y_2)$  из (5.4.27) в закон оптимального управления (5.4.19), получаем решение оптимальной задачи.

Однако функция  $S(y_1, y_2)$  определяется различными формулами (5.4.25) и (5.4.26), поэтому следует убедиться, что функция  $S(y_1, y_2)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные  $dS/dy_i$ , так как уравнение Беллмана (5.4.13) получено при этих условиях. Анализ формул (5.4.25) и (5.4.26) показывает, что на линии переключения эти формулы совпадают и поэтому функция  $S(y_0)$  оказывается непрерывной на всей фазовой плоскости. Анализ формул (5.4.25) и (5.4.26) на предмет их дифференцируемости показывает, что вне линии переключения функция  $T(y_0)$  определяется одной из формул и легко дифференцируется по  $a$  и  $b$ . Но на линии переключения функция  $T(y_1, y_2)$  не имеет непрерывных производных по  $a$  и  $b$ . Определим, например, производные на линии переключения в точке  $M$  (рис 5.4.2, а). По (5.4.25) производные будут

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial a} \right|_M &= \left. \frac{1}{\sqrt{a + 1/2 b^2}} \right|_{a_M, b_M} = -\frac{1}{b_M}; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial b} \right|_M &= \left. 1 + \frac{b}{\sqrt{a + 1/2 b^2}} \right|_{a_M, b_M} = 1 + \frac{b_M}{-b_M} = 0, \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

а производные в этой же точке  $M$  по (5.4.26), учитывая, что  $a_M = 1/2 b_M^2$ , будут

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial a} \right|_M &= \left. \frac{-1}{\sqrt{-a + 1/2 b^2}} \right|_{a_M, b_M} = -\infty; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial b} \right|_M &= \left. -1 + \frac{-1}{\sqrt{-a + 1/2 b^2}} \right|_{a_M, b_M} = -\infty. \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

Итак в точке  $M$  частные производные функции  $T(y_1, y_2) = -S(y_1, y_2)$  претерпевают бесконечный разрыв. Это значит, что применять уравнение Беллмана нельзя и решение оптимальных задач в общем виде методом Беллмана не всегда выполнимо. Но решение данной задачи существует и легко обеспечивается методом динамического программирования с использованием ЭВМ.

Метод динамического программирования очень эффективно используется в цифровых системах оптимального управления, описываемых конечно-разностными уравнениями.

### Контрольные вопросы

1. На каком «принципе оптимальности» основан метод динамического программирования Беллмана?
2. Как определяется оптимальное управление в дискретных ОСАУ по методу динамического программирования с применением ЭВМ?

## 6. ДАТЧИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН

### 6.1. Назначение и классификация датчиков

Для построения САУ объектами управления (ОУ) используются следующие средства автоматики: задающие и сравнивающие устройства; усилительно-преобразовательные, корректирующие и исполнительные устройства; измерительно-преобразовательные устройства (датчики); вспомогательные устройства (источники питания, коммутационная аппаратура и др.) [27, 28, 31, 32, 33, 34].

*Датчики управляемых величин* (измерительно-преобразовательные устройства) преобразуют измеряемые физические величины в электрические сигналы информации для работы САУ, не воспринимаемые органами чувств человека. Разнообразие датчиков определяет *кадастр измеряемых величин*, содержащий более 2000 наименований, разделенных на 8 групп. Это датчики: 1) пространства и времени (размер, площадь, объем, время, скорость, ускорение, частота, плоский угол); 2) механических величин (масса, сила, момент, давление, энергия, мощность, вязкость); 3) электрических и магнитных величин (электрические напряжение, ток, сопротивление, емкость, магнитный поток, индуктивность и др.); 4) тепловых величин (температура, тепловой поток и др.); 5) относительных величин (коэффициент полезного действия, кислотность, соленость, влажность и др.); 6) световых величин (освещенность, яркость и др.); 7) акустических величин (звуковое давление и др.); 8) величин излучения (мощность излучения, доза излучения, облученность и др.).

Классификация датчиков может проводиться по различным признакам, например, по следующим трем основным признакам.

1. По *способу получения выходного сигнала* датчики делятся на **параметрические** и **генераторные**. В параметрических датчиках, питающихся от источника энергии, используются изменения их параметров при изменении входного сигнала, вследствие чего изменяется их выходная величина. В генераторных датчиках энергия входного сигнала преобразуется в энергию выходного сигнала.

2. По *виду входной измеряемой величины* различают датчики **положения, скорости, давления, температуры, электрического тока, электрического напряжения** и других физических величин САУ.

3. По *принципу действия* различают следующие типы датчиков: **резистивные** (электроконтактные, потенциометрические, фоторезисторные, тензорезисторные, терморезисторные и др.), **электромаг-**

**нитные** (индуктивные, трансформаторные, индуктосины, вращающиеся трансформаторы, сельсины и др.), **магнитоиндукционные** (тахогенераторы постоянного и переменного тока и др.), **электростатические** (конденсаторные, емкостные редуктосины, емкостные фазовращатели и др.), **фотоэлектрические** (фотоимпульсные, растровые, кодовые и др.), **магнитоэлектрические** (магнитодиоды, магнитотранзисторы, датчики Холла и др.), датчики других принципов действия.

**Свойства датчиков** обуславливают предельно достижимые характеристики САУ (поскольку ошибки датчиков невозможно компенсировать) и оценивают по следующим характеристикам:

1) **статическая характеристика**  $y=f(x)$  – зависимость выходной величины  $y$  от входной величины  $x$  в установившихся режимах;

2) **чувствительность** (коэффициент передачи)  $S=\Delta y/\Delta x$  – отношение приращений выходной и входной величин;

3) **погрешность** – наибольшее отклонение выходной величины при повторяющихся одинаковых значениях входной величины;

5) **динамические характеристики** – оценки переходного процесса изменения выходной величины  $y(t)$  при скачкообразном или гармоническом изменении входной величины  $x(t)$ , представляемые передаточными функциями или частотными характеристиками датчиков.

Свойства датчиков также характеризуются показателями надежности, диапазоном изменений входного и выходного сигналов, уровнем шумов на выходе, массогабаритными показателями.

Стандартные датчики изготавливаются промышленностью с *естественными выходными сигналами*, соответствующими их принципу действия, и с *унифицированными выходными сигналами*, формируемыми в дополнительных нормирующих преобразователях естественных выходных сигналов в унифицированные сигналы постоянного или переменного тока, или давление сжатого воздуха, изменяющиеся от минимума до максимума в стандартных пределах, независимо от типа датчика.

### Контрольные вопросы

1. Какие технические средства автоматики используются в САУ?
2. Какое назначение имеют датчики измеряемых величин в САУ?
3. Как классифицируют датчики по виду измеряемой величины?
4. Как классифицируют датчики по принципу действия?
5. Что представляет собой статические характеристики датчиков?
6. Что называется чувствительностью и погрешностью датчиков?
7. Как оцениваются динамические свойства датчиков?

## 6.2. Датчики положения

Датчики положения используются в САУ для измерения положения и перемещений объектов управления (ОУ), а также для преобразования в электрические сигналы перемещений чувствительных элементов в датчиках силы, давления, температуры и других типов.

Датчики любого типа делятся на *реверсивные (двухтактные)* и *нереверсивные (однотактные)*. В реверсивных датчиках знак (полярность) или фаза выходного сигнала изменяются на противоположные при отклонении измеряемой величины от нулевого положения в разные стороны, а в *нереверсивных* – не изменяются.

**Резистивные датчики положения** преобразуют входное перемещение чувствительного элемента в изменение сопротивления одного или нескольких резисторов в электрической схеме, что приводит к изменению выходного напряжения датчика.

*Электроконтактные датчики* являются резистивными преобразователями релейного действия, преобразующими небольшое перемещение подвижной части подпружиненного механического устройства с двумя устойчивыми состояниями в мгновенное замыкание или размыкание электрических контактов. Электроконтактные датчики применяются в САУ для ограничения различных физических величин. Например, для ограничения перемещений ОУ (в путевых и конечных выключателях в лифтах, подъемных кранах, станках и др.) или ограничения температуры (в электроутюгах, холодильниках и др.) В САУ также широко применяются магнитоуправляемые герметические контакты (герконы) и бесконтактные ключи на транзисторах и симисторах, обеспечивающие высокое быстродействие и износостойчивость таких датчиков.

**Резистивные потенциометрические датчики положения (ПДП)** преобразуют положение подвижного токосъемного контакта (движка) в выходное напряжение датчика. По конструкции ПДП могут быть ступенчатыми (ламельными) и непрерывными, линейными, угловыми и многооборотными (с перемещением движка по спиральному потенциометру), *нереверсивными* (с получением выходного сигнала с движка и одного из концов потенциометра) и *реверсивными* (с получением выходного сигнала с движка и средней точки потенциометра). В САУ обычно используются проволочные ПДП непрерывного типа с линейной зависимостью выходного напряжения от углового или линейного перемещения движка. Сопротивлением в таких ПДП служит проволока из константана, манганина, нихрома диаметром 0,03 –

0,4 мм, равномерно намотанная в один ряд на каркасы в виде стержня, кольца или изогнутой по спирали ленты, по зачищенной поверхности витков которой скользит токосъемник из двух–трех упругих проволочек или пластинок. Достоинства проволочных ПДП: простота конструкции, малые габариты и вес, высокая точность и стабильность статических характеристик, работа на постоянном и переменном токе, малое переходное сопротивление контакта токосъемника, малый температурный коэффициент сопротивления (ТКС), малая стоимость. Недостатки проволочных ПДП: скользящий контакт; изменение погрешности при перемещении движка и изменении нагрузки; небольшой коэффициент и ступенчатость (из-за витков) преобразования; электроэрозия при искрении в токосъемнике; наличие шумов; ограничение частоты питания до 1кГц из-за возрастания индуктивности и емкости обмотки проволоки; низкая износостойчивость.

Недостатки проволочных ПДП привели к созданию и ограниченному применению в САУ ПДП с проводящей пластмассой, имеющих более высокую разрешающую способность, низкий уровень шумов, малую индуктивность и емкость, высокую частоту напряжения питания, но имеющих также более низкую точность и стабильность, более высокие температурный коэффициент сопротивления (ТКС) и переходное сопротивление в точке контакта с токосъемником по сравнению с проволочными ПДП.

Для обеспечения бесконтактности и высокой износостойчивости ПДП также разработаны *фотоэлектрические ПДП* (ФПДП), где резистивный слой и прозрачный токопроводящий слой разделены полупроводниковой пленкой, в которой в точке воздействия узкой полосы светового луча образуются фотоэлектроны, создающие электрическое соединение проводящего и резистивного слоев, аналогично контакту подвижного токосъемника в проволочном ПДП. При перемещении луча света вдоль ФПДП обеспечивается его бесконтактное функционирование, а реверсивность обеспечивается выводением потенциала средней точки резистивного слоя. ФПДП имеют низкий уровень шумов и практически неограниченную скорость перемещения светового токосъемника. Однако из-за сложности световодного устройства, низких показателей точности, температурной стабильности и выходной мощности при высоком переходном сопротивлении в месте воздействия светового потока ФПДП не нашли практического применения.

**Электромагнитные датчики положения преобразуют изменения положения подвижного ферромагнитного сердечника датчи-**

**ка в изменения выходного напряжения при питании от источника переменного тока с неизменным напряжением [27, 28, 32].**

*Нереверсивные индуктивные датчики положения (НИДП)* преобразуют изменение положения подвижного ферромагнитного сердечника датчика в изменение его индуктивности, тока и выходного напряжения при питании от источника переменного тока с неизменным напряжением (рис. 6.2.1). По конструкции НИДП выполняются с изменением воздушного зазора (рис. 6.2.1, а) для измерений положения в рабочей зоне до 0,1–1,0 мм; с изменением площади сечения магнитопровода (рис. 6.2.1, б) для измерений положения в рабочей зоне до 5–8 мм; плунжерного типа (рис. 6.2.1, в) для измерений положения в рабочей зоне до 50 мм. Питание НИДП осуществляется от сети промышленной частоты 50 Гц или от источника повышенной частоты (400–1000 Гц), что позволяет уменьшить массу и габариты датчика. НИДП и другие индуктивные датчики представляются в САУ безынерционными звеньями. Недостатки НИДП: наличие выходного напряжения при нулевом положении сердечника (рис. 6.2.1, г), низкая чувствительность, нечувствительность к изменению направления перемещения сердечника от среднего положения, наличие электромагнитной силы, стремящейся сдвинуть сердечник в нулевое положение, что требует применения противодействующих пружин, усложняющих устройство ИДП. Указанные недостатки отсутствуют в реверсивных (двухтактных) индуктивных датчиках положения.

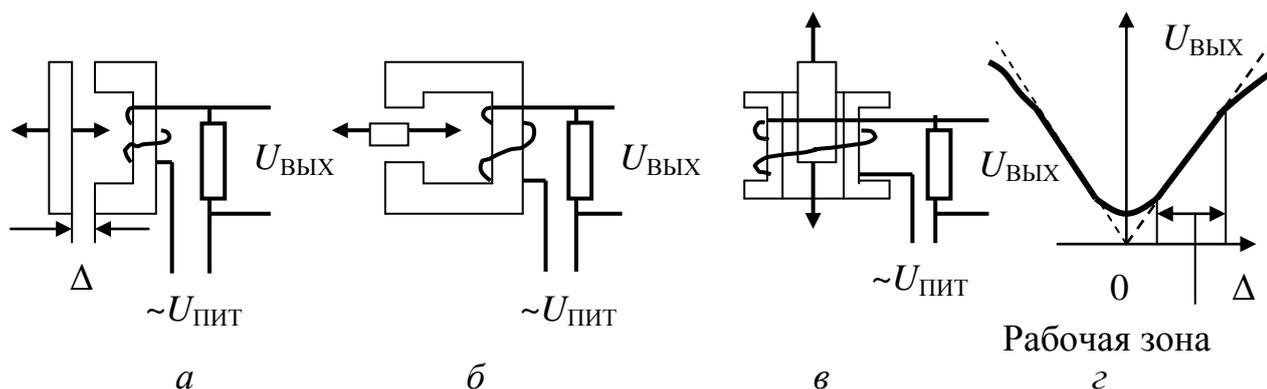


Рис. 6.2.1. Нереверсивные индуктивные датчики положения

*Реверсивные индуктивные датчики положения (РИДП)* преобразуют положение подвижного ферромагнитного сердечника в магнитной системе, состоящей из двух одинаковых НИДП, в суммарное выходное напряжение (рис. 6.2.2). Обмотки РДИД включаются по дифференциальной (рис. 6.2.2, а) или мостовой (рис. 6.2.2, б) схемам. При среднем положении сердечника РДИД индуктивности обмоток оди-

наковы и выходное напряжение равно нулю. При смещении сердечника из среднего положения индуктивность одной из обмоток увеличивается, а другой уменьшается. Это вызывает появление выходного напряжения, величина которого зависит от смещения сердечника  $\Delta$  от среднего положения, а фаза определяется направлением этого смещения – в фазе или противофазе к напряжению питания (рис. 6.2.2, в).

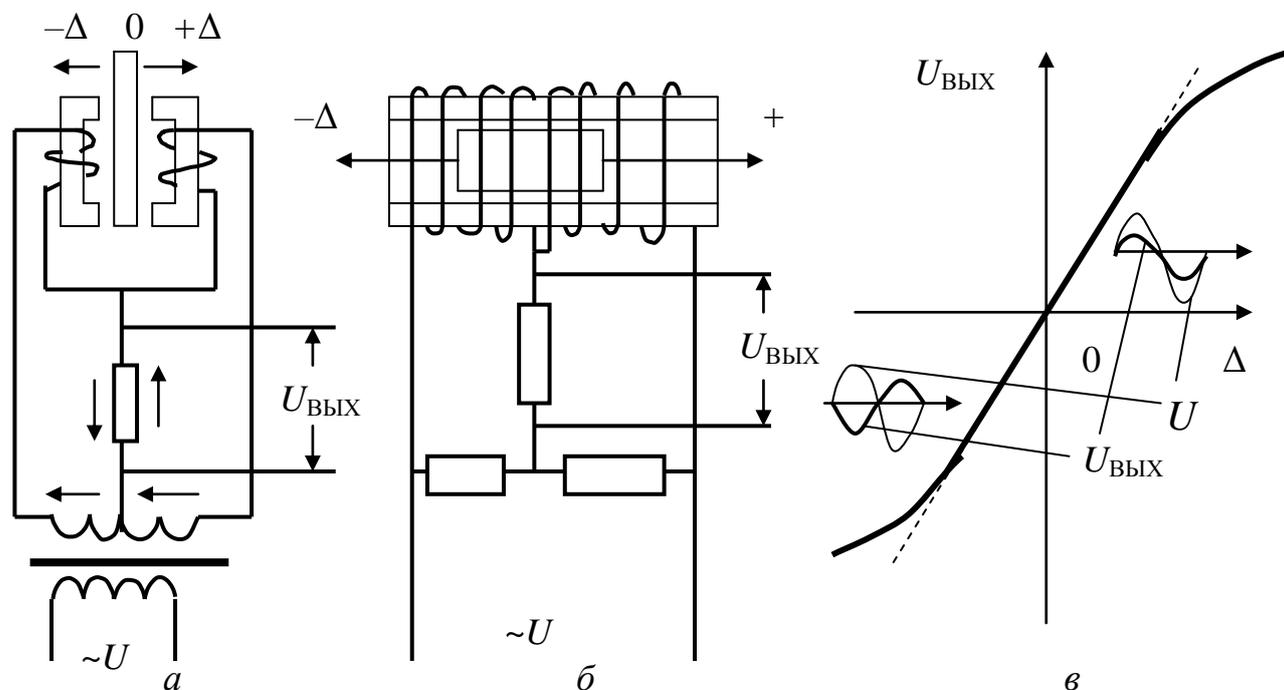


Рис. 6.2.2. Реверсивные индуктивные датчики положения

*Трансформаторные датчики положения* (ТДП) преобразуют положение подвижного сердечника (якоря) датчика в выходное напряжение  $U_{ВЫХ}$ , амплитуда которого зависит от величины, а фаза – от направления смещения якоря от среднего положения (рис. 6.2.3). В ТДП линейного (рис. 6.2.3, а) и углового (рис. 6.2.3, б) положения две одинаковых первичных обмотки возбуждения, расположенные на крайних стержнях ТПД с Ш-образным магнитопроводом, создают при среднем положении якоря одинаковые магнитные потоки, которые в среднем сердечнике направлены встречно и в выходной вторичной обмотке ТПД, расположенной на среднем стержне, напряжение равно нулю. При отклонении якоря ТДП от среднего положения равенство магнитных потоков нарушается и во вторичной обмотке создается выходное напряжение  $U_{ВЫХ}$ .

В ТДП плунжерного типа (рис. 6.2.3, в) катушки обмоток размещены концентрично в двух секциях симметричного цилиндрического магнитопровода с общим подвижным цилиндрическим сердечником (якорем). Две половины обмотки возбуждения питаются от источника

переменного тока с напряжением  $U$  и включаются последовательно и согласно, создавая в левой и правой половинах магнитопровода ТПД одинаковые магнитные потоки при среднем положении якоря. Две половины вторичной обмотки также включаются последовательно, но встречно и поэтому в среднем положении якоря выходное напряжение ТДП равно нулю. При отклонении якоря от среднего положения появляется выходное напряжение, амплитуда которого пропорциональна величине отклонения, а фаза изменяется на  $180^\circ$  относительно напряжения питания в зависимости от направления отклонения.

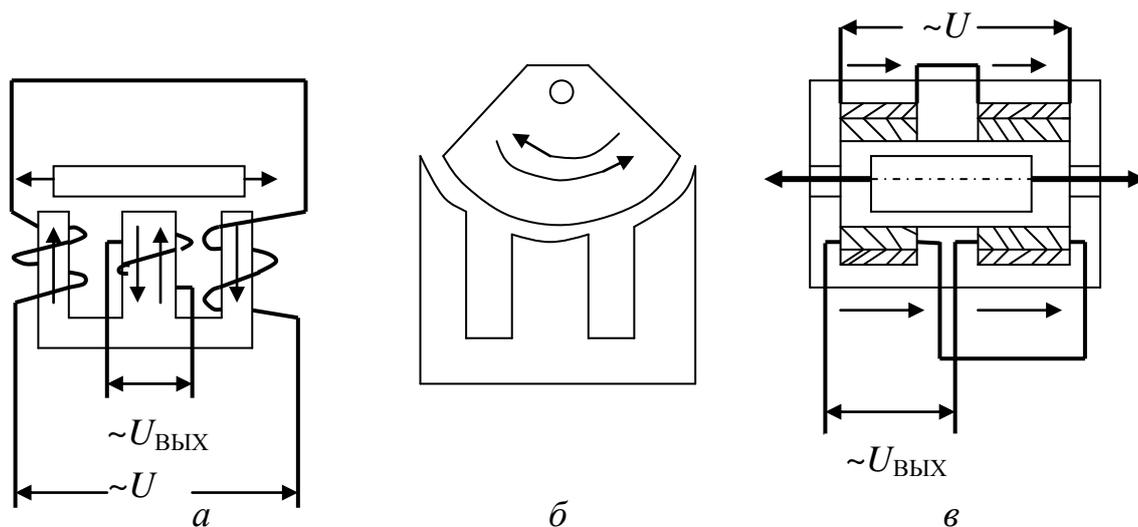


Рис. 6.2.3. Трансформаторные датчики положения

*Индуктосины* (ИС) преобразуют изменения линейного или углового положения взаимодействующих обмоток в изменения амплитуды и фазы выходного напряжения. Конструктивно ИС представляет собой многополюсный воздушный трансформатор с печатными обмотками, расположенными на пластинах из изоляционного материала. На двух параллельных пластинах напротив друг друга с воздушным зазором  $0,1-0,5$  мм располагаются однофазная обмотка и две отдельных секции двухфазной обмотки, размещенных со сдвигом на  $90^\circ$  (рис. 6.2.4). Все печатные обмотки ИС имеют одинаковый шаг  $\lambda$  расположения витков (например,  $\lambda=2$  мм), но секции двухфазной обмотки смещены на любое целое число шагов плюс четверть шага, т.е. на  $N\lambda+\lambda/4$  шагов, составляющих сдвиг  $\pi/2$ . Однофазная обмотка располагается на неподвижной пластине (статоре) и ее длина равна максимальному измеряемому перемещению, а две секции двухфазной обмотки располагаются на подвижной пластине (роторе), механически соединенным с перемещающимся объектом управления, положение которого требуется измерять (рис. 6.2.4, б). Токовые выводы от подвижных обмоток выполняются гибкими проводниками.

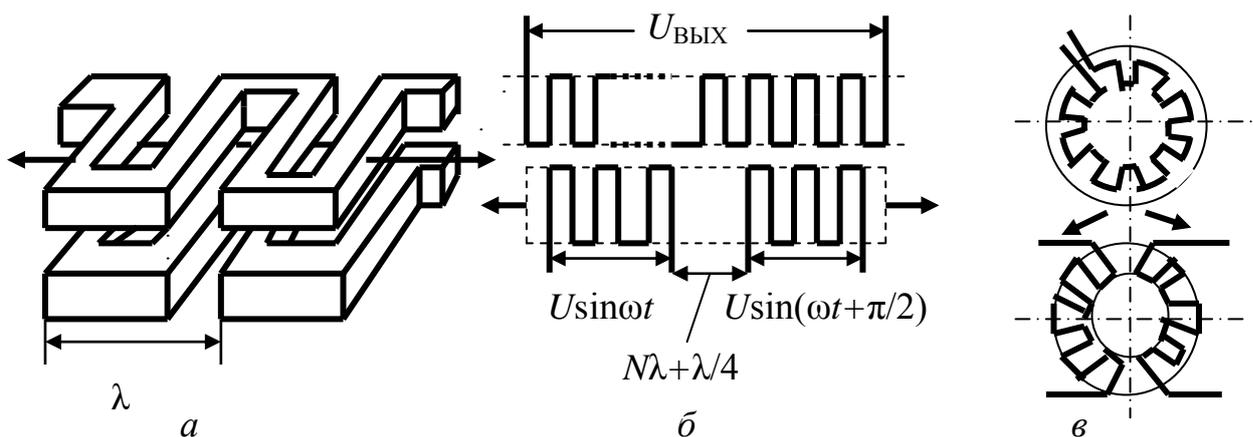


Рис. 6.2.4. Схемы обмоток индуктосинов

Однофазные вращающиеся трансформаторы (ВТ) преобразуют угловое положение ротора в выходное напряжение, амплитуда и фаза которого зависят от положения ротора (рис. 6.2.6).

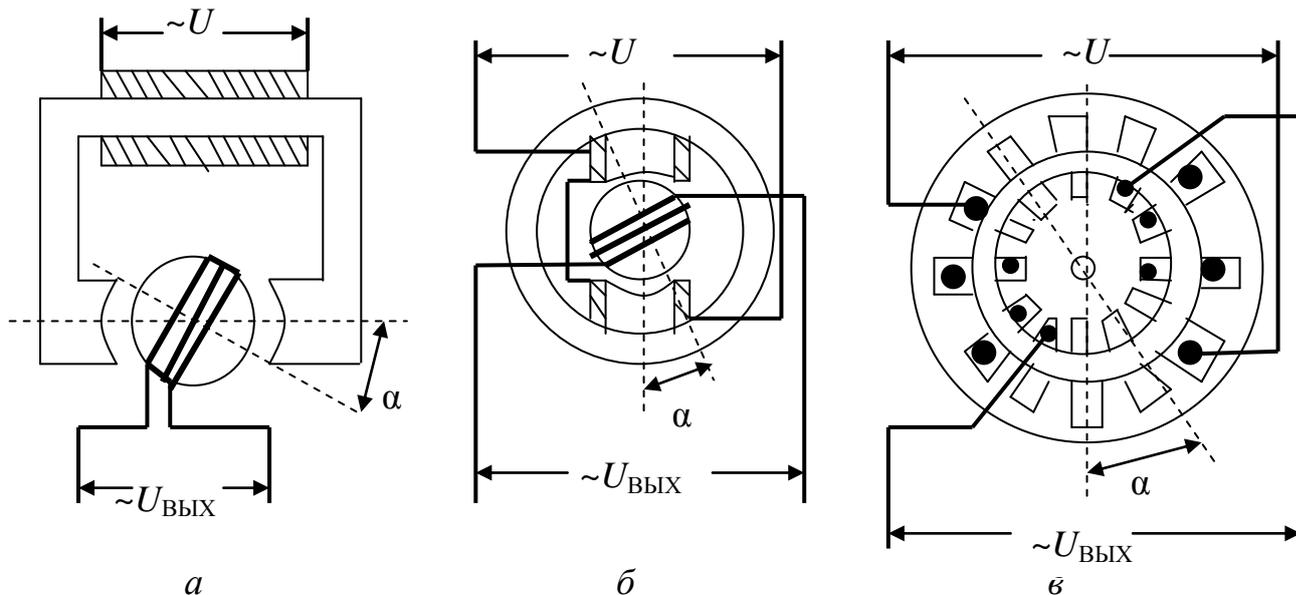


Рис. 6.2.5. Вращающиеся трансформерные датчики положения

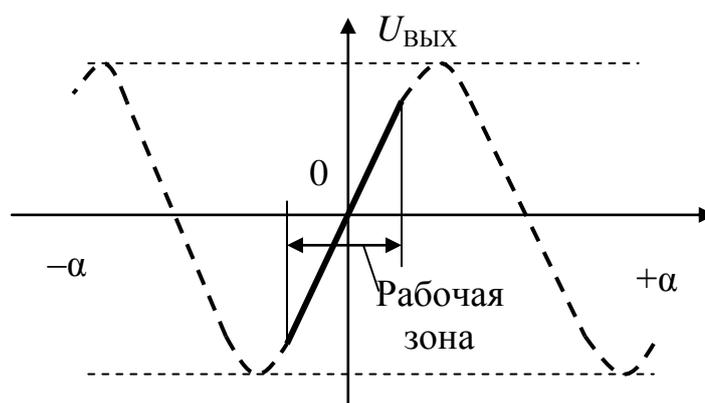


Рис. 6.2.6. Статическая характеристика однофазных ВТ

ВТ представляют собой электрическую микромашину, состоящую из неподвижного статора и вращающегося ротора, на которых размещены статорная и роторная однофазные обмотки (рис. 6.2.5). ВТ имеют явнополюсную (рис. 6.2.5, а, б) или неявнополюсную (рис. 6.2.5, в) конструкции. Выводы от обмотки вращающегося ротора в ВТ осуществляются через контактные кольца и щетки или бесконтактно через кольцевой трансформатор, а при ограниченных углах поворота ротора ВТ – через спиральные пружинки.

Синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы (СКВТ) преобразуют угловое положение ротора в амплитуду и фазу двух квадратурных выходных напряжений (рис. 6.2.7, в – верхняя часть).

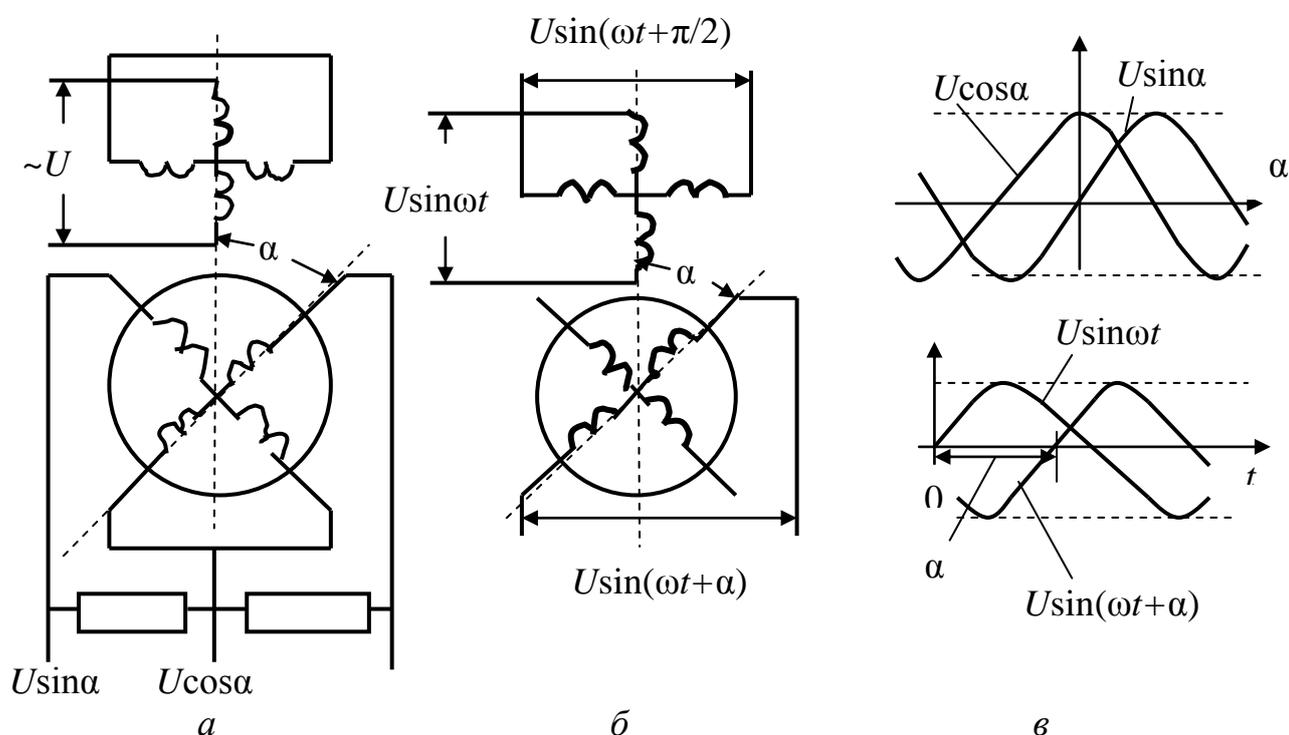


Рис. 6.2.7. Синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы

СКВТ имеют такую же конструкцию, как неявнополюсные ВТ (рис. 6.2.5, в), но в СКВТ в пазах статора и ротора размещено по две одинаковых обмотки, магнитные оси которых расположены под углом  $90^\circ$ , что позволяет при однофазном питании обмотки возбуждения получить два выходных напряжения, изменяющихся в функции синуса и косинуса от угла поворота ротора (рис. 6.2.7, а).

При разных схемах включения обмоток СКВТ могут работать в режимах синусно-косинусного трансформатора (рис. 6.2.7, а); фазовращателя (рис. 6.2.7, б), используемого в системах ЧПУ в качестве датчика положения; индикаторной системы дистанционной передачи угловых координат  $\alpha = \beta$  (рис. 6.2.8, а); трансформаторной следящей

системы  $\alpha-\beta=\Delta U$  (рис. 6.2.8, б); линейного вращающегося трансформатора, дающего  $U_{\text{ВЫХ}}$ , линейно зависящее от угла  $\alpha$  в диапазоне  $\pm 60^\circ$  (рис. 6.2.6); преобразователей координат в системах суммирования, перевода декартовой системы в полярную систему и т.д.

*Сельсины* (СС) представляют собой индукционные электрические микромашины переменного тока, состоящие из неподвижного статора и вращающегося ротора, которые преобразуют угловое положение ротора относительно статора в выходное напряжение. Обычно СС используются в сельсин-индикаторных системах дистанционной передачи угловых координат (рис. 6.2.8, а) и в сельсин-трансформаторных следящих системах дистанционного управления угловым положением ОУ (рис. 6.2.8, б).

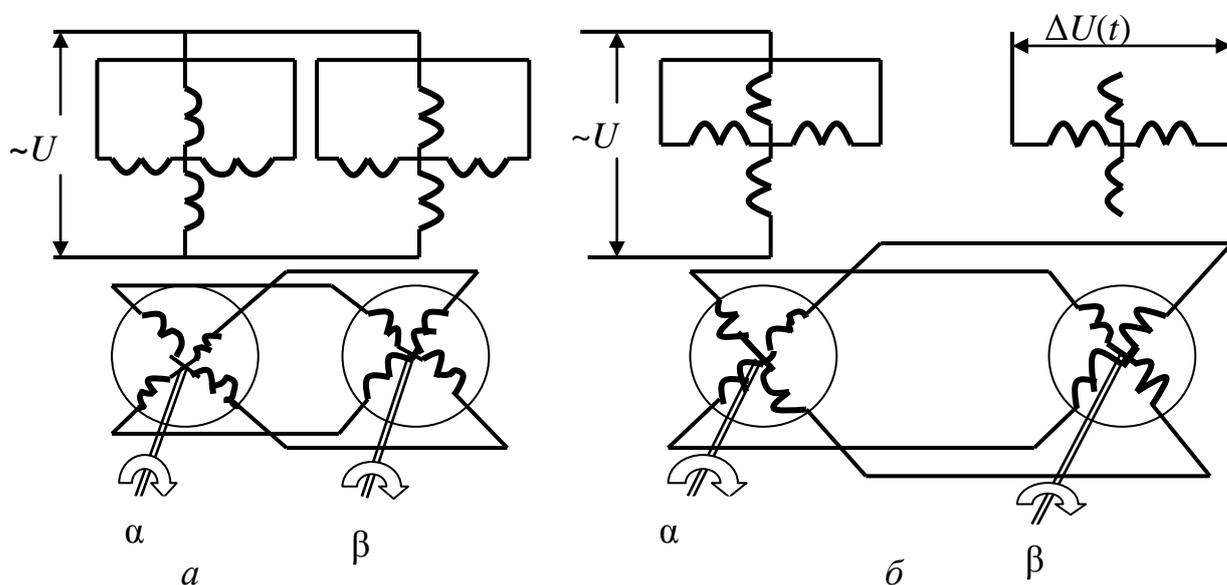


Рис. 6.2.8. Индикаторная и трансформаторная схемы с СКВТ

Устройство и действие СС аналогичны СКВТ, только СС имеют однофазную обмотку возбуждения и трехфазную обмотку синхронизации, расположенные на статоре и на роторе. Дифференциальные СС имеют трехфазные обмотки на статоре и на роторе и используются для дистанционного суммирования угловых координат от двух однофазных СС, трехфазные обмотки которых подключаются к трехфазным обмоткам статора и ротора дифференциального СС.

По конструкции токоподвода к обмоткам ротора СС делятся на контактные и бесконтактные. В контактных СС обмотки ротора питаются через контактные кольца на роторе и неподвижные подпружиненные щетки на статоре (рис. 6.2.9, а).

В бесконтактных СС обмотка ротора питается через кольцевой трансформатор с воздушным зазором, одна из обмоток которого расположена на статоре, а другая – на роторе (рис. 6.2.7, б). В бескон-

тактных СС конструкции Иосифьяна-Свечарника две полуобмотки возбуждения, расположенные на статоре, создают магнитный поток вдоль ферромагнитного ротора, разделенного немагнитопроводящей прокладкой из пластмассы (рис. 6.2.9, в). В результате магнитный поток возбуждения в статоре поворачивается на угол поворота ротора.

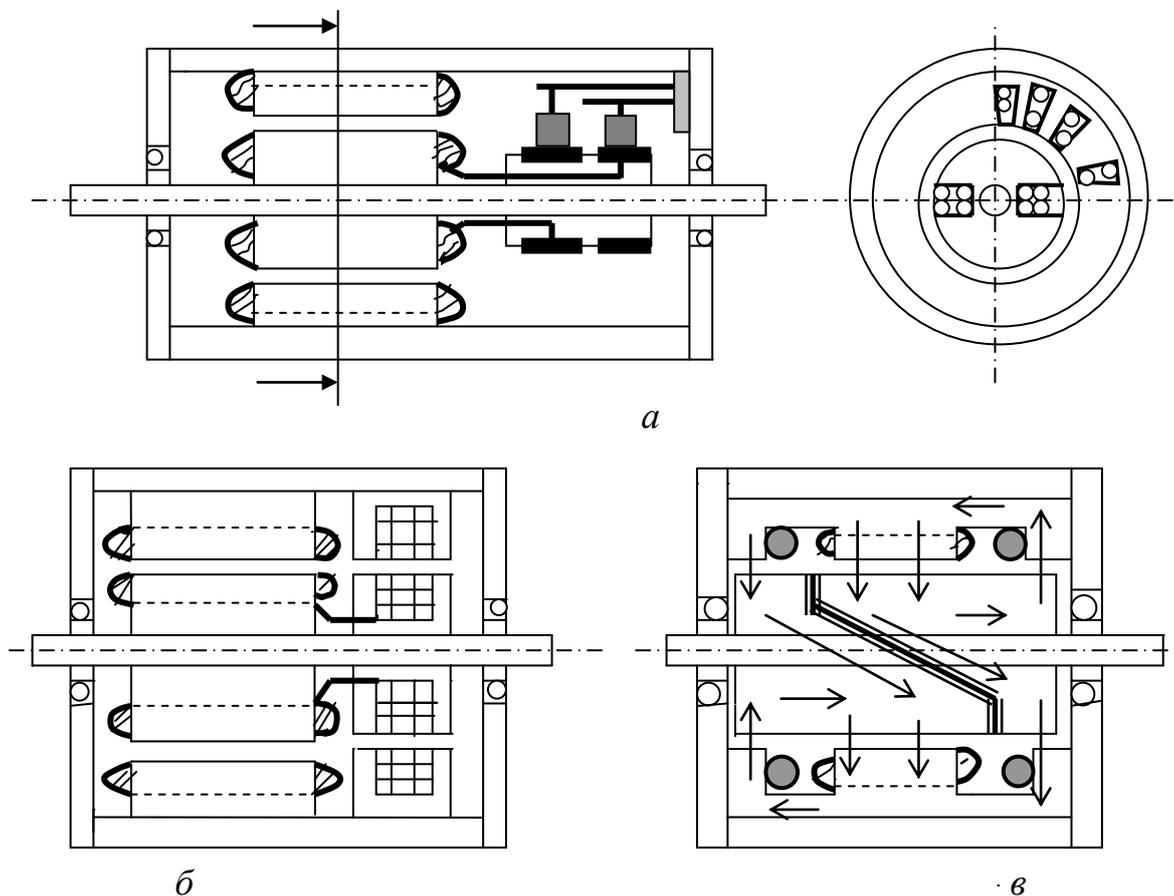


Рис. 6.2.9. Схемы конструкций сельсинов

В двухканальных сельсин-индикаторных и сельсин-трансформаторных системах используется по два сельсина-датчика и два сельсина-приемника в канале грубого и канале точного отсчетов.

В сельсин-индикаторных системах (рис. 6.2.10, а) вал СС-датчика грубого отсчета (СД-ГО) соединен с объектом измерений и через повышающий редуктор с валом СС-датчика точного отсчета (СД-ТО). Передаточное число редуктора выбирается так, чтобы один оборот СД-ТО соответствовал повороту СД-ГО на один градус. Тогда по шкале грубого отсчета считывается число полных градусов, а по шкале точного отсчета – число угловых минут.

В сельсин-трансформаторных следящих системах (рис. 6.2.10, б) вал СД-ГО соединяется с задающим устройством  $\alpha_{зАД}$  и через повышающий редуктор с валом СД-ТО, а вал СС-приемника грубого отсчета (СП-ГО) соединяется с валом объекта управления и через такой

же повышающий редуктор с валом СС-приемника точного отсчета (СП-ТО). Выходные напряжения СП-ГО и СП-ТО суммируются и результирующий сигнал формируется диодным устройством синхронизации (селектором) каналов.

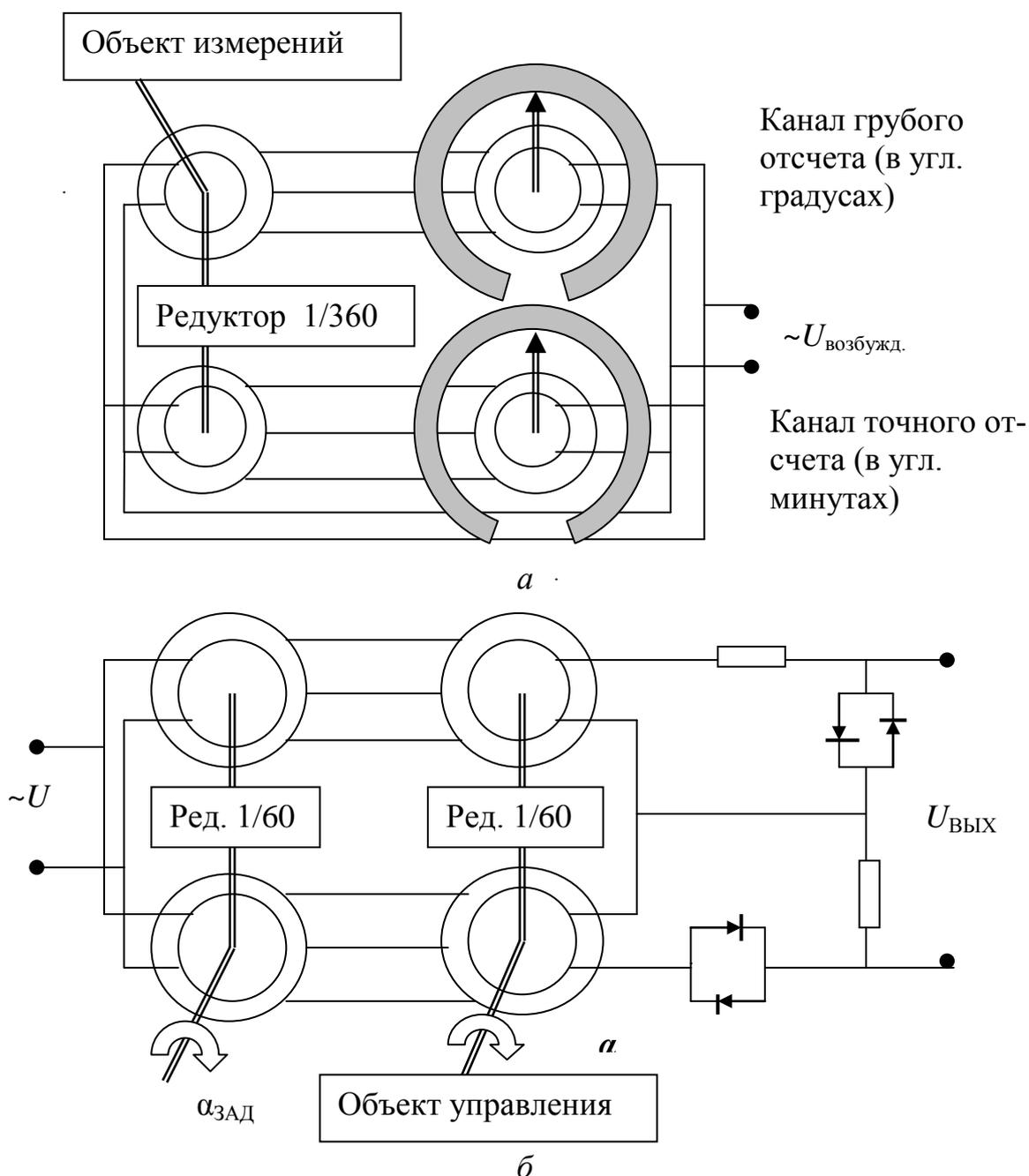


Рис. 6.2.10. Двухканальные сельсинные системы

При больших углах рассогласования ( $\alpha_{\text{ЗАД}} - \alpha$ ) результирующий сигнал на выходе селектора каналов определяется большим выходным напряжением СП-ГО, которое превышает величину прямого напряжения отпираания последовательно включенных диодов.

При малых углах рассогласования ( $\alpha_{\text{ЗАД}} - \alpha$ ) выходное напряжение СП-ГО становится меньше напряжения отпираания последовательно

включенных диодов и на выходе селектора каналов действует только выходное напряжение СП-ТО, имеющее повышенную в передаточное число редуктора крутизну статической характеристики и ограниченную амплитуду на уровне прямого падения напряжений на параллельно включенных диодах на выходе канала точного отсчета.

Селекторы каналов могут строиться и по другим схемам. Полученное на выходе селектора каналов напряжение рассогласования поступает на исполнительный следящий привод, который поворачивает объект управления и связанные с ним сельсины-приемники грубого и точного отсчета до устранения рассогласования.

Электромагнитные датчики положения по сравнению с потенциометрическими датчиками имеют более высокие показатели чувствительности, разрешающей способности, термостабильности, мощности выходного сигнала, возможности построения двухотсчетных (нониусных) систем прецизионной точности. Недостатками электромагнитных датчиков являются трудность получения нулевого выходного напряжения в нулевом положении датчика, действие электромагнитных сил, ограниченность диапазона линейности коэффициента преобразования и его зависимость от частоты.

**Емкостные датчики положения** (ЕДП) преобразуют изменения положения пластин (обкладок) конденсатора в изменения его емкости и выходного напряжения (рис. 6.2.11). Емкость  $C$  (пФ) плоского конденсатора определяется расстоянием  $\Delta$  (см) между пластинами (рис. 6.2.11, *a*), площадью  $S$  (см<sup>2</sup>) перекрытия пластин (рис. 6.2.11, *б, в, г*) и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (пФ/см) диэлектрика между пластинами (рис. 6.2.11, *д, е*)  $C = \varepsilon S / \Delta$ .

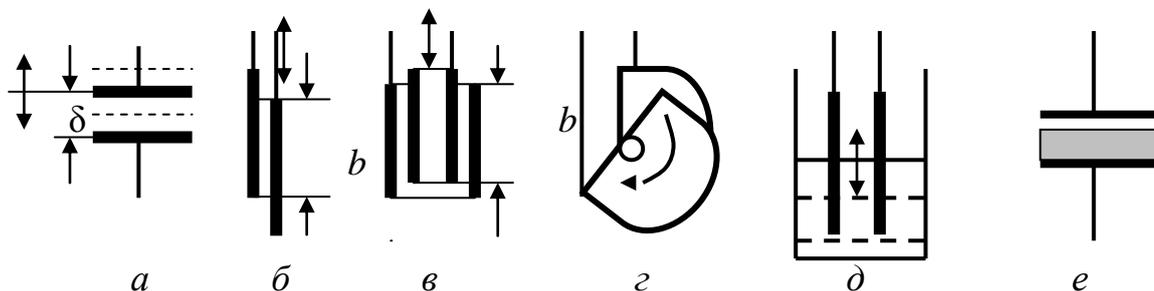


Рис. 6.2.11. Емкостные датчики положения

ЕДП с изменением расстояния  $\Delta$  между пластинами конденсатора (рис. 6.2.11, *a*) имеют нелинейную статическую характеристику и самую высокую чувствительность при малых значениях  $\Delta$ , применяются для измерения малых перемещений (до 1 мм).

Емкостные датчики линейного и углового положения (перемещения) с изменением площади  $S$  перекрытия электродов имеют линейные статические характеристики как при плоских электродах (рис. 6.2.11, б, г), так и при цилиндрических электродах (рис. 6.2.11, в) и используются для измерения перемещений больше 1 мм.

Емкостные датчики имеют высокую чувствительность, простоту конструкции, малые габариты и массу, отсутствие подвижных токосъемных контактов, практическую безынерционность. Недостатками емкостных датчиков являются малая мощность выходного сигнала, нестабильность характеристик при изменениях параметров окружающей среды, влияние паразитных емкостей.

**Фотоэлектрические датчики положения** (ФДП) преобразуют измеряемое положение объекта управления (ОУ) в электрические сигналы в двоичном коде для систем числового программного управления (ЧПУ) [27, 28, 32]. ФДП действуют по принципу модуляции освещенности фоточувствительных элементов в функции измеряемой величины. По принципу формирования выходного сигнала ФДП делятся на *импульсные* (накопительные) и *кодовые* (ФДП считывания).

**Импульсные датчики положения** (ИФДП) преобразуют перемещение ОУ в унитарный код, т.е. в последовательность импульсов, число которых пропорционально перемещению ОУ. В ИФДП (рис. 6.2.12) между источником света ИС (лампа накаливания или светодиод) и фотоприемником ФП (фотодиод, фоторезистор или фототранзистор) размещены неподвижная индикаторная диафрагма и перемещающийся вместе с ОУ измерительный элемент, изготовленные из стекла, на которых лазерным способом нанесены непрозрачные риски так, что ширина риски равна расстоянию между рисками. Для круговых ИФДП на измерительном диске наносится от 45 до 5400 рисок (рис. 6.2.12, а). Для линейных ИФДП риски наносятся с шагом до 0,02–0,001 мм на всей длине измерительной линейки, равной максимальному перемещению ОУ (рис. 6.2.12, б).

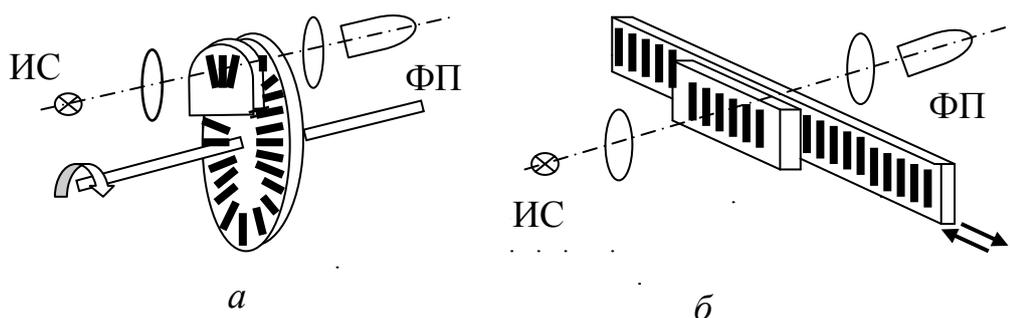


Рис. 6.2.12. Фотоимпульсные датчики перемещений

ИФДП называются инкрементными датчиками (безразличными, нечувствительными к направлению и величине перемещений) поскольку они преобразуют величину перемещения в унитарный код, т.е. в последовательность импульсов фототока, число которых равно числу шагов перемещения ОУ от точки начала отсчета. Для определения измеряемого положения ОУ инкрементные ИФДП необходимо дополнять устройствами для подсчета числа импульсов, определения направления перемещения и фиксации нулевой точки начала отсчета. Такие ИФДП *накапливающего типа* используются в системах ЧПУ.

Для определения направления перемещений ОУ в ИФДП устанавливают вторую индикаторную диафрагму и вторую пару источника света ИС2 и фотоприемника ФП2, сдвинутые на расстояние  $(m+1/4)\lambda$  относительно первой диафрагмы и первой пары источника света ИС1 и фотоприемника ФП1 (где  $\lambda$  – шаг разметки датчика,  $m$  – любое целое число шагов) и используют логическую схему разделения фотоимпульсов от прямых и обратных перемещений измерительного элемента (диска или линейки) (рис. 6.2.13).

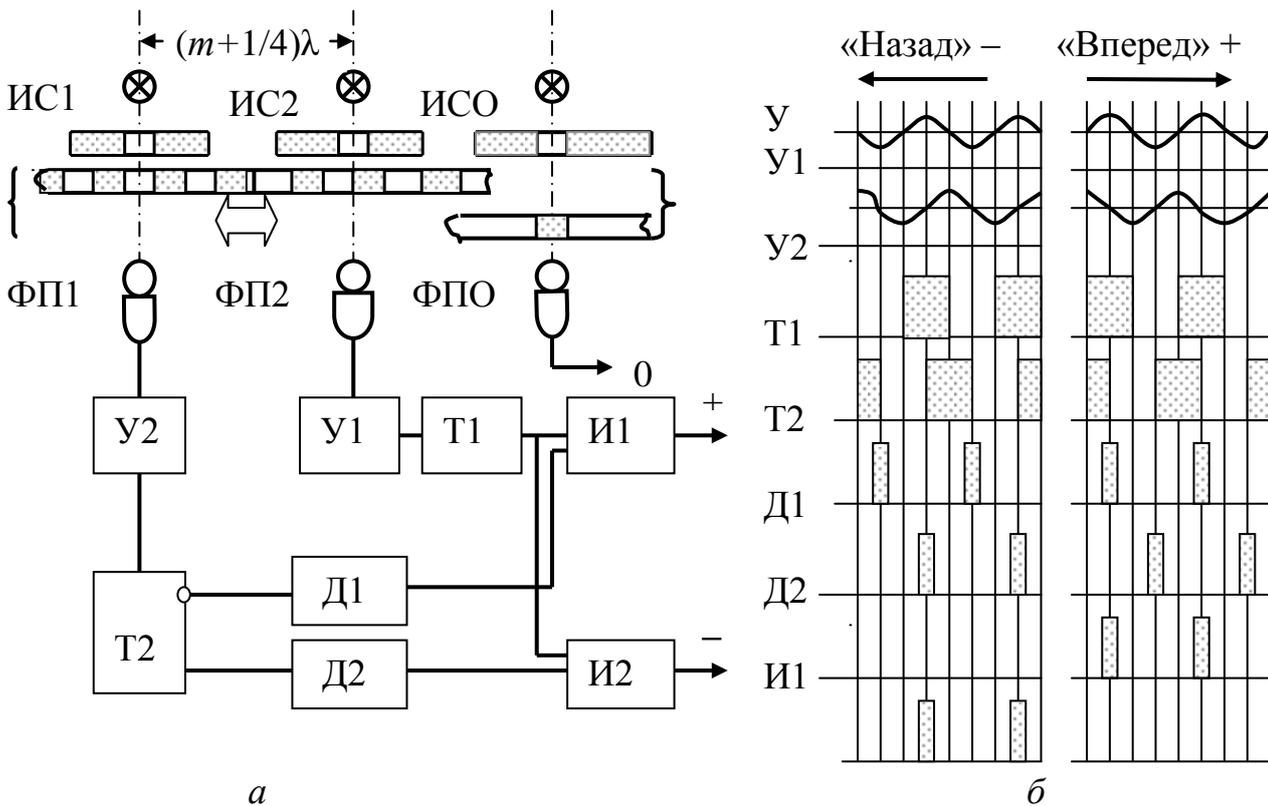


Рис. 6.2.13. Фотоимпульсный датчик

Процесс разделения фотоимпульсов от прямых и обратных перемещений измерительного элемента в схеме (рис. 6.2.13, а) поясняется диаграммами напряжений (рис. 6.2.13, б) на выходах усилителей У1 и У2, триггеров Шмитта Т1 и Т2, дифференцирующих элементов Д1 и

Д2, выходных импульсов схемы разделения на элементах совпадения И1 и И2, соответствующих движениям ОУ в направлениях «вперед» и «назад» через каждую четверть шага  $\lambda/4$ . Полученные импульсы +И1 и –И2 подаются на суммирующий и вычитающий входы реверсивного счетчика в системе ЧПУ, на выходе которого будет формироваться текущее положение ОУ в виде целого положительного или отрицательного числа шагов  $\lambda$  от начальной точки отсчета.

Определение начальной (нулевой) точки отсчета в ИФДП осуществляется отдельной парой источника света ИСО и фотоприемника ФПО в момент появления на их оптической оси единственной нулевой риски, расположенной на отдельной дорожке измерительного элемента (диска или линейки) (рис. 6.2.13, а). В нулевой точке отсчета обнуляется счетчик импульсов в системе ЧПУ, с этой операции всегда начинается работа системы ЧПУ с импульсным ФДП.

К разновидностям импульсных ФДП также относятся *растровые* и *муаровые* ИФДП, в которых для модуляции светового потока между осветителем и фотоприемником используются растровые, дифракционные и интерференционные неподвижная индикаторная и перемещающаяся измерительная решетки, имеющие более мелкий шаг периодической структуры, чем при нанесении лазерных полосок.

ИФДП накопительного типа обладают высокой точностью, быстродействием, простотой и надежностью, малой массой и габаритами, но имеют принципиальный недостаток – возможность накопления ошибки измерения положения ОУ из-за восприятия импульсных помех как фотоимпульсов и занесения их в счетчик пройденного пути.

*Кодовые фотоэлектрические датчики положения* (КФДП), называемые датчиками считывания, являются декрементными преобразователями линейного или углового положения кодовой маски, связанной с положением ОУ, относительно неподвижных фотосчитывающих устройств в параллельный код положения (рис. 6.2.14).

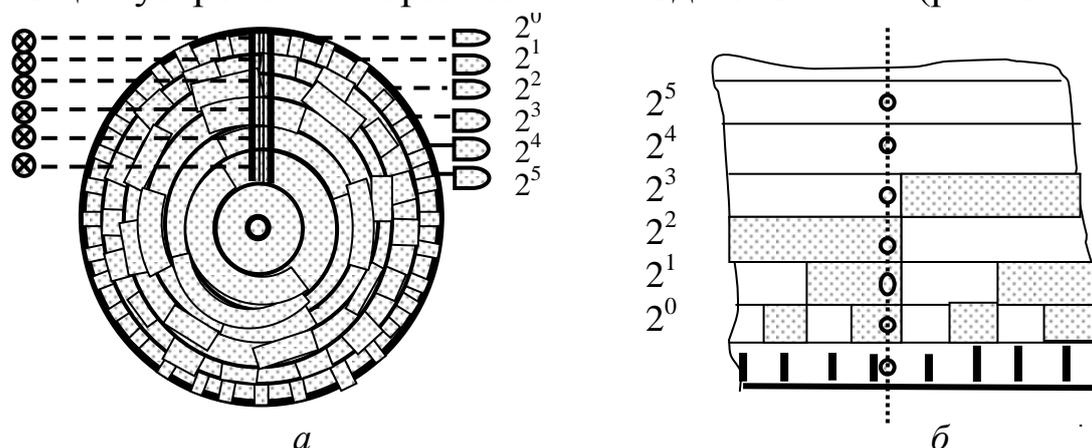


Рис. 6.2.14. Кодовый диск и кодовая линейка КФДП

При непосредственном считывании исключаются накопление ошибки считывания и влияние помех, информация о положении ОУ получается одновременно с включением питания КФДП без каких-либо подготовительных и дополнительных операций.

КФДП имеют стеклянный кодовый диск (или кодовую линейку) с числом дорожек, равным числу разрядов кода положения (рис. 6.2.14). Каждая дорожка состоит из прозрачных и непрозрачных частей, выражающих цифры 1 и 0 соответствующего разряда кода положения. На самой длинной наружной дорожке кодового диска размещается код младшего разряда, определяющий разрешающую способность КФДП. С одной стороны кодового диска (или линейки) устанавливаются источники света, а с противоположной стороны – светонепроницаемая диафрагма со щелью или отверстиями и панель, на которой против каждой разрядной дорожки расположен отдельный фотоприемник. При расположении перед фотоприемником прозрачной части разрядной дорожки его фототок имеет максимальное значение, при непрозрачной – минимальное, что воспроизводится в виде логических 1 и 0 кода данного разряда. Считывание осуществляется одновременно по всем разрядам в параллельном коде.

Недостатком КФДП является нечеткость считывания информации на границах смежных светлых и темных участков кодовых дорожек, что может привести к очень значительным ошибкам. Для исключения ошибок считывания, превышающих цену единицы младшего разряда, используют дискретизацию считывания, или V-образный способ считывания, или дорожки с циклическим кодом.

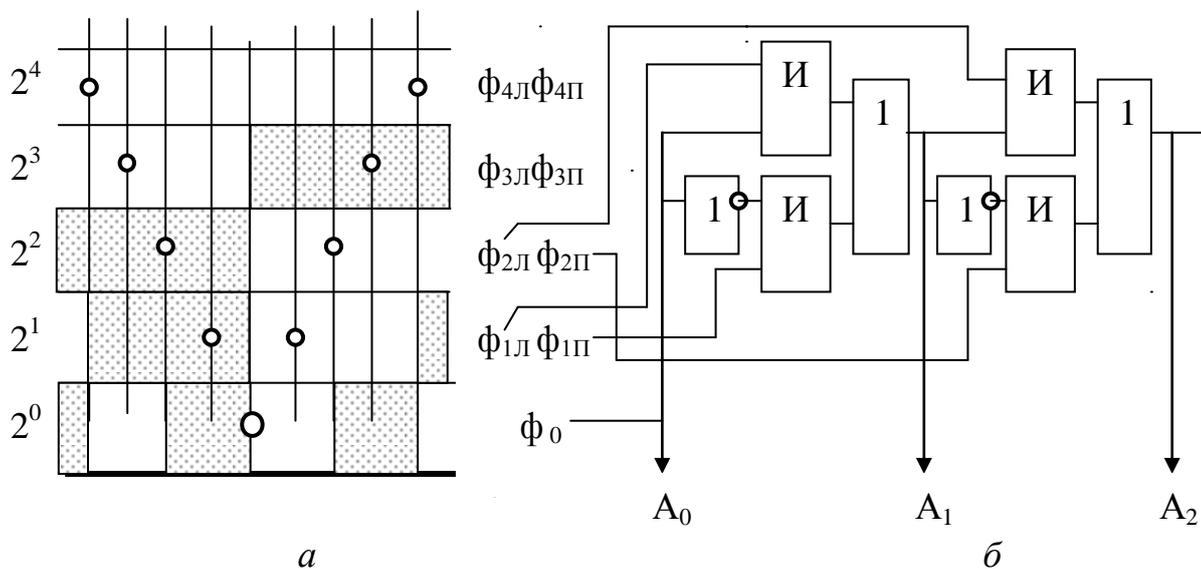


Рис. 6.2.15. V-образный способ считывания информации в КФДП

При дискретизации считывания информации в КФДП устанавливаются дополнительные источники света и фотоприемник устройства синхронизации считывания, а на кодовых дисках и линейках на дополнительной отдельной внешней дорожке точно посередине светлых и темных участков младшего разряда наносятся лазерным способом узкие линии (риски) синхронизации считывания (рис. 6.2.14, б). При прохождении линий синхронизации под фотоприемником устройства синхронизации происходит считывание информации с кодовых дорожек, при других положениях информация сохраняется неизменной. Дискретизация считывания уменьшает, но не исключает вероятность возникновения ошибок воспроизведения.

Более радикальным является V-образный способ считывания информации. В этом случае на дорожке младшего разряда устанавливается один фотоприемник, а на дорожках всех других разрядов – по два фотоприемника со сдвигом на полшага дискретности младшего разряда вправо и влево по отношению к фотоприемнику предыдущего разряда (рис. 6.2.15, а). Считывание кодовых комбинаций с правых и левых фотоприемников осуществляется с помощью логической схемы (рис. 6.2.15, б) по алгоритму: если в предыдущем младшем разряде считан код 1, то в последующем старшем разряде информация считывается с левого фотоприемника; если считан код 0 – то с правого фотоприемника. При таком V-образном способе считывания положения ошибка не будет превышать единицы младшего разряда.

На рис. 6.2.15 предполагается, что  $A_0, A_1, A_2$  и т.д. являются кодами первого (младшего), второго, третьего и последующих разрядов считываемого кода положения, непрозрачный участок кодовой маски считывается в виде 1, а прозрачный – в виде 0. В изображенном на рисунке положении код младшего разряда  $A_0$  определен нечетко. При считывании кода второго разряда  $A_1$  при  $A_0=1$  в логической схеме на выход  $A_1$  пройдет сигнал 1 с левого фотоприемника  $\phi_{1Л}$  и не пройдет сигнал 0 с правого фотоприемника  $\phi_{1П}$  и т. д. В результате погрешность считывания в КФДП не превысит цены младшего разряда, равной его разрешающей способности.

Циклический код (например, код Грея) строится таким образом, что при перемещении кодового диска или кодовой линейки на единицу младшего разряда происходит изменение кода положения только в одном из разрядов и поэтому при нечеткости считывания кода в любом разряде ошибка не превышает единицы младшего разряда.

### Контрольные вопросы

1. Устройство и свойства потенциометрических датчиков положения.
2. Устройство и характеристики индуктивных датчиков положения.
3. Устройство и характеристики трансформаторных датчиков положения.
4. Устройство и характеристики индуктосинов. Их достоинства и недостатки.
5. Устройство и характеристики вращающихся трансформаторов. Их достоинства и недостатки.
6. Устройство и характеристики синусно-косинусных вращающихся трансформаторов (СКВТ). Их достоинства и недостатки.
7. Принцип действия и схемы включения обмоток СКВТ в одноканальных индикаторных и трансформаторных системах дистанционного управления.
8. Принцип действия и схемы включения обмоток СКВТ в двухканальных индикаторных системах управления с механической редукцией.
9. Принцип действия и схемы включения обмоток СКВТ в двухканальных трансформаторных следящих системах с механической редукцией.
10. Устройство и характеристики контактных и бесконтактных сельсинов. Их достоинства и недостатки.
11. Принцип действия и схемы включения обмоток сельсинов в одноканальных индикаторных и трансформаторных системах дистанционного управления.
12. Принцип действия и схемы включения обмоток сельсинов в двухканальных индикаторных системах дистанционного управления.
13. Принцип действия и схемы включения обмоток сельсинов в двухканальных трансформаторных следящих системах. Работа диодного селектора каналов.
14. Устройство и принцип действия емкостных датчиков положения. Достоинства и недостатки емкостных датчиков положения.
15. Устройство и принцип действия фотоимпульсных круговых и линейных датчиков положения. Их достоинства и недостатки.
16. Как определяется направление и величина перемещения и положение объекта управления в системах с фотоимпульсным датчиком?
17. Устройство и принцип действия кодовых фотодатчиков положения. Их достоинства и недостатки.
18. В чем заключается метод уменьшения ошибок считывания в кодовых фотодатчиках способом дискретизации считывания?
19. В чем заключается способ V-образного считывания информации в кодовых фотодатчиках с целью уменьшения ошибок считывания?
20. Почему применение циклических кодов записи информации в кодовых фотодатчиках обеспечивает ошибку считывания не выше младшего разряда?

### 6.3. Датчики скорости

Датчики скорости (ДС) движения ОУ делятся на генераторные и параметрические, декрементные и инкрементные [27, 28, 29, 30, 32]. В *генераторных* ДС скорость непосредственно преобразуется в генерируемый электрический сигнал (тахогенераторы, мостовые ДС электродвигателей, импульсные ДС). В *параметрических* ДС скорость преобразуется в изменения параметров ДС, которые затем преобразуются в электрический сигнал информации о скорости (центробежные ДС, импульсные ДС с модуляцией емкости конденсатора, импульсные фотоэлектрические ДС с модуляцией светового потока). В *декрементных* ДС выходной сигнал определяет величину и направление скорости (например, тахогенераторы), в *инкрементных* ДС выходной сигнал определяет только величину скорости без указания направления движения (например, центробежные ДС).

**Магнитоэлектрические тахогенераторы постоянного тока (ТГП)** – это электрические микромашины с возбуждением от постоянных магнитов (рис. 6.3.1), не требующие электропитания.

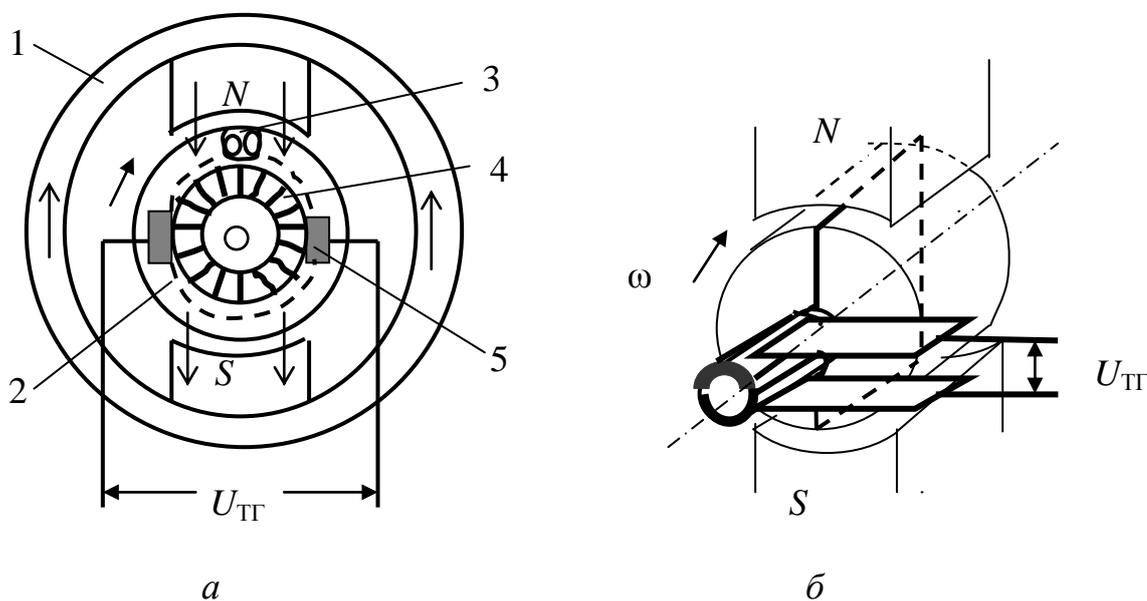


Рис. 6.3.1. Магнитоэлектрический тахогенератор

ТГП содержат неподвижный статор 1 с одной или несколькими парами полюсов из постоянных магнитов, вращающийся цилиндрический якорь 2 с пазами 3 и коллектором 4, щеточное устройство с угольно-графитовыми щетками 5, прижимаемыми пружинками к коллектору. В пазах якоря 2 располагается обмотка, выводы которой соединены с ламелями (изолированными друг от друга медными пла-

стинками) коллектора 4 и через контакты с угольно-графитовыми щетками соединяются с выходными клеммами ТГП.

При вращении якоря со скоростью  $v$  в магнитном поле  $\Phi$  в его обмотке индуцируется ЭДС  $e=c\Phi v$ , где  $c$  – коэффициент пропорциональности. В каждой секции обмотки якоря индуцируется переменная ЭДС (при прохождении проводников то под северным, то под южным полюсами), поэтому в ТГП используется механический выпрямитель – коллектор со щетками. Щетки устанавливаются над пластинами коллектора так, чтобы осуществлялось переключения секций обмотки якоря в моменты изменения в них направления ЭДС, т.е. при переходе ЭДС через нулевые значения. На рис. 6.3.1, б упрощенно показан один виток секции обмотки якоря, подключенный к двум пластинам коллектора, и две щетки в виде двух пластин, контактирующих с ламелями коллектора. При вращении якоря с коллектором происходит переключение (коммутация) секций так, что на выходе ТГП всегда сохраняется неизменная полярность выходного напряжения при неизменном направлении вращения якоря ТГП.

Обмотка якоря ТГП укладывается в пазах якоря в верхнем (непрерывные линии) и нижнем (пунктирные линии) слоях. Развернутая схема петлевой обмотки якоря четырехполюсного ТГП с числом пазов  $Z=14$  показана на рис. 6.3.2.

**Электромагнитные тахогенераторы постоянного тока (ТГЭ)** идентичны ТГП, но вместо постоянных магнитов имеют обмотку возбуждения, что требует стабилизировать ток возбуждения ТГЭ.

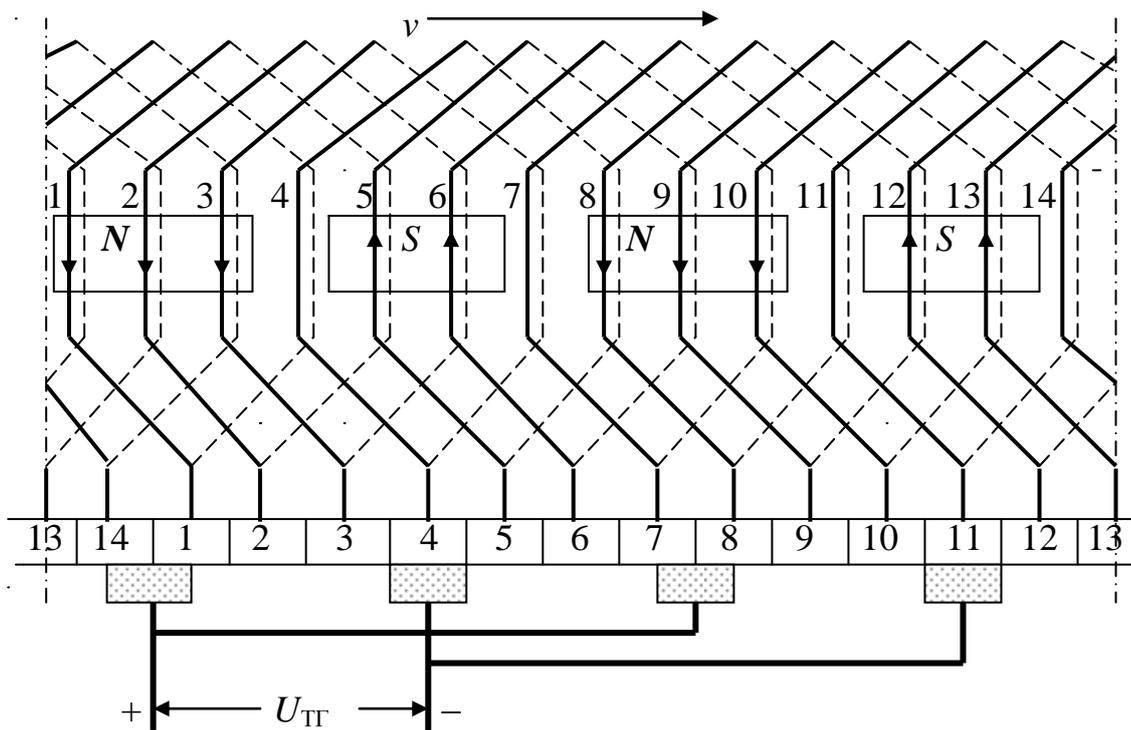


Рис. 6.3.2. Развернутая схема петлевой обмотки якоря

**Тахометрические мостовые датчики скорости** двигателей постоянного тока с возбуждением от постоянных магнитов представляют собой мостовую схему, в одно плечо которой включен якорь двигателя, а в три другие – резисторы, уравнивающие мост при неподвижном якоре  $R_1/R_2=R_{\Pi}/R_{\text{Я}}$  (рис. 6.3.3, а). Напряжение  $U_C$  пропорционально ЭДС и скорости двигателя.

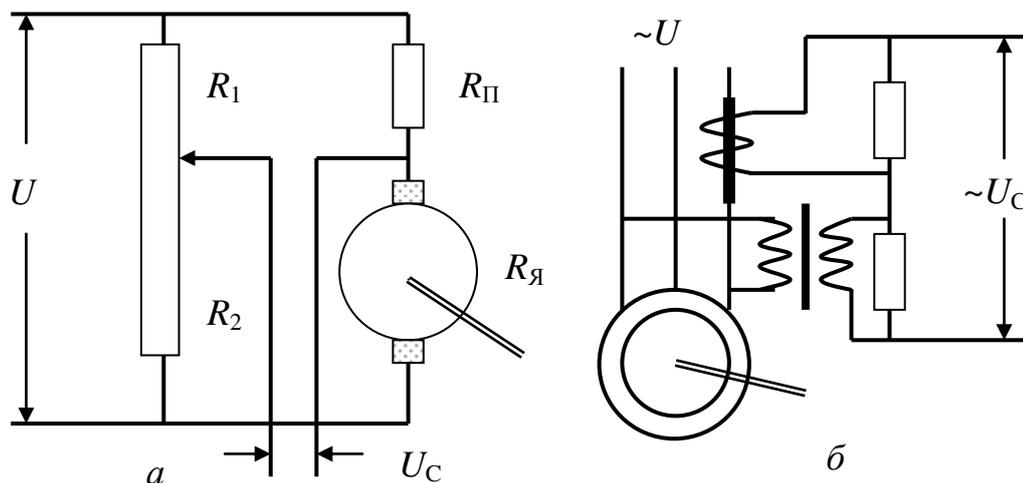


Рис. 6.3.3. Тахометрические мостовые датчики скорости двигателей

Аналогичные мостовые датчики используются и для измерения скорости двигателей переменного тока, например, по схеме контроля скорости вращения асинхронных двигателей (рис. 6.3.3, б).

**Импульсные магнитоэлектрические датчики скорости** действуют по принципу электромагнитной индукции и состоят из одного или нескольких постоянных магнитов, перемещающихся относительно неподвижной катушки с обмоткой, в которой при этом индуцируются импульсы ЭДС (рис. 6.3.4). Период  $T$  генерации импульсов ЭДС точно определяет скорость движения магнитов. Такие ДС являются инкрементными, нечувствительными к направлению движения. Для определения направления скорости можно установить две неподвижные катушки с обмотками, очередность появления импульсов в них во времени укажет направление движения.

По такому же принципу строятся **импульсные ДС с магниточувствительными элементами** (герконы, датчики Холла, магниторезисторы, магнитодиоды, магнитотранзисторы, магнитотиристоры).

**Асинхронные тахогенераторы (АТГ)** (рис. 6.3.5, а) имеют статор с пазами, в которых расположена двухфазная обмотка, и немагнитный вращающийся ротор в виде стакана из алюминиевого сплава. Для минимизации воздушного зазора в магнитной системе АТГ внутри стакана ротора устанавливается неподвижный тороидальный сер-

дечник. Две фазные обмотки АТГ располагаются на статоре под углом  $90^\circ$  (рис. 6.3.5, б). Одна из них (обмотка возбуждения – ОВ) питается от источника переменного напряжения, а с другой (генераторной обмотки – ОГ) снимается выходное напряжение  $U_{ТГ}$ , амплитуда которого пропорциональна скорости вращения ротора, частота равна частоте питания, а фаза определяет направление вращения ротора АТГ.

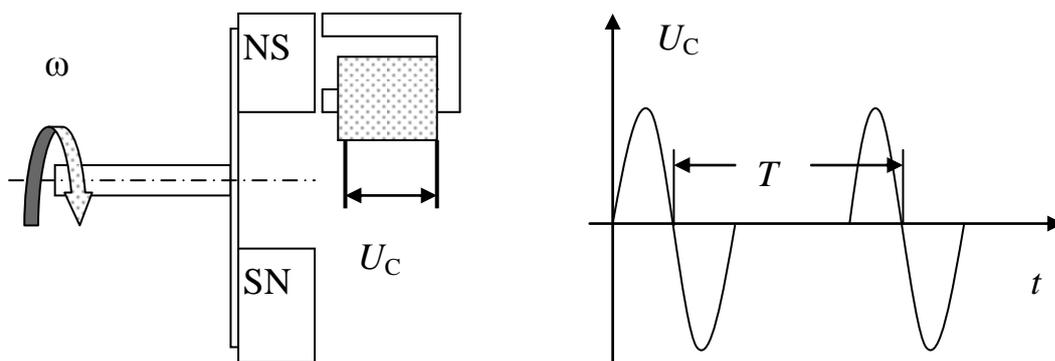


Рис. 6.3.4. Магнитоэлектрический импульсный датчик скорости

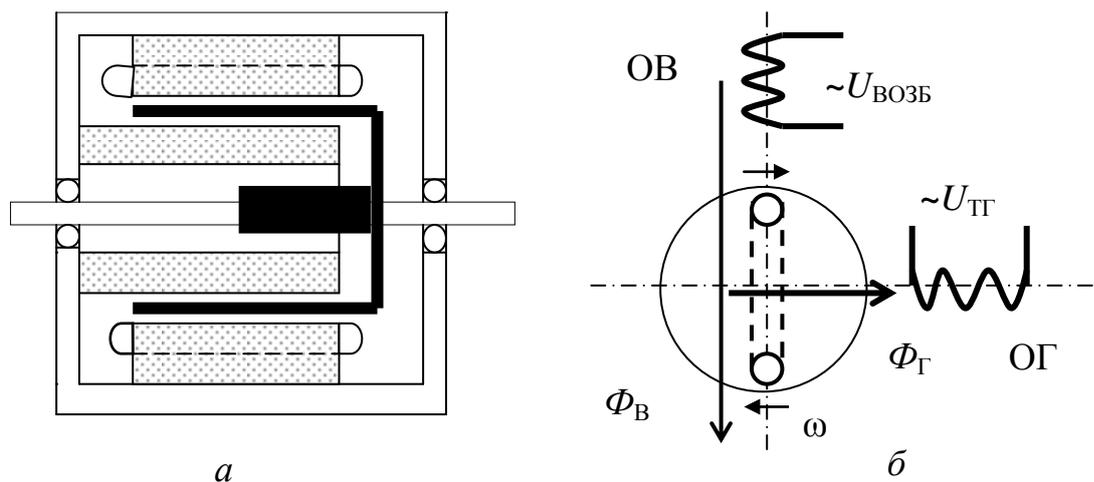


Рис. 6.3.5. Асинхронный тахогенератор

При неподвижном роторе пульсирующий магнитный поток  $\Phi_B$  обмотки возбуждения ОВ действует по продольной оси АТГ и трансформаторная ЭДС в генераторной обмотке ОГ, расположенной по поперечной оси АТГ, практически равна нулю.

При вращении ротора АТГ в верхней и нижней частях ротора, пересекающих пульсирующий магнитный поток  $\Phi_B$  наводятся трансформаторная ЭДС и ЭДС вращения, имеющие частоту напряжения питания ОВ. Амплитуда ЭДС вращения пропорциональна произведению магнитного потока  $\Phi_B$  на скорость вращения ротора. Направление ЭДС вращения определится по правилу правой руки: в верхней части ротора ЭДС вращения будет направлена вглубь рисунка, а в

нижней части ротора из глубины рисунка. Под действием переменной ЭДС вращения в короткозамкнутом контуре ротора (показан одним витком) возникает переменный ток, создающий в АТГ поперечный пульсирующий магнитный поток  $\Phi_r$ , индуцирующий в неподвижной генераторной обмотке выходную ЭДС  $U_{ТГ}$ , амплитуда которой пропорциональна скорости вращения ротора, частота равна частоте напряжения возбуждения, а фаза относительно напряжения возбуждения (в фазе или противофазе) определяет направление вращения.

**Центробежные датчики скорости (ЦДС)** относятся к первым в истории автоматическим устройствам. Чувствительным элементом в ЦДС является *центробежный маятник* в виде шарнирно подвешенных к оси вращения грузов, при вращении оси центробежные силы, преодолевая силы тяжести (или натяжения пружин), отодвигают грузы от оси вращения, вызывая подъем нижней подвижной опоры грузов с повышением скорости вращения (рис. 6.3.6, а).

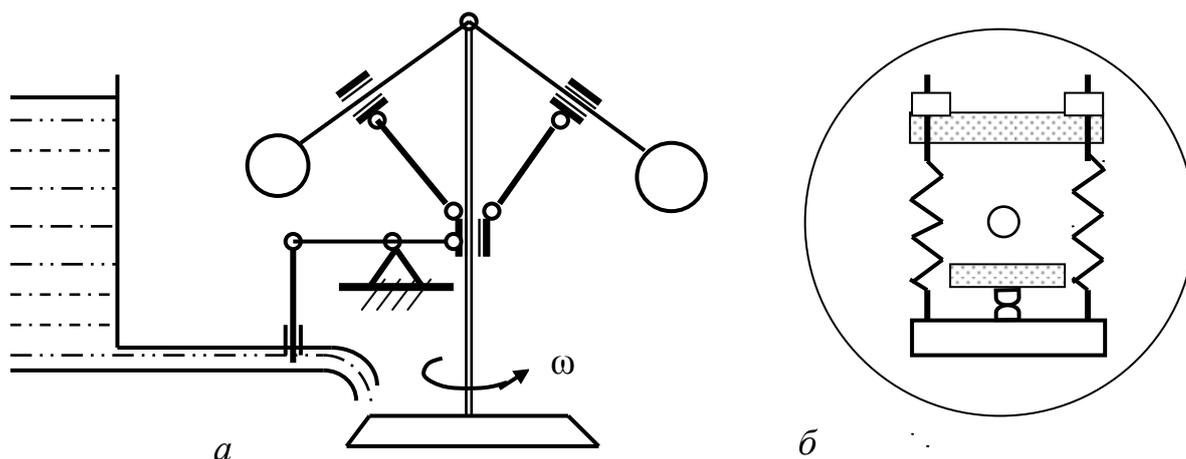


Рис. 6.3.6. Центробежный регулятор скорости и центробежное реле максимальной скорости

Развиваемое в ЦДС усилие подъема нижней опоры грузов может оказаться достаточным для прямого воздействия на регулирующий орган ОУ (например, на задвижку водовода). Тогда ЦДС могут использоваться в качестве *регуляторов прямого действия*, осуществляющих, например, стабилизацию скорости вращения водяной турбины. В САУ информация о величине скорости в виде перемещения нижней опоры грузов преобразуется в электрический сигнал с помощью соответствующих датчиков положения.

Принцип действия ЦДС также используется в центробежных *реле максимальной скорости* (рис. 6.3.6, б), в которых превышение максимальной скорости вращения приводит к разрыву электрического контакта между зачерненными пластинками, установленными не-

подвижно на изоляционном диске, вращающемся с контролируемой скоростью. При скорости выше максимальной центробежная сила преодолевает силу натяжения двух пружин и оттягивает белый грузик, размыкая контакт, что является сигналом о превышении максимальной скорости. Регулированием натяжения пружин с помощью гаек на верхней опоре регулируется величина максимальной скорости размыкания контакта, который выводится от зачерненных пластин через контактные кольца и скользящие щетки.

*Импульсные фотоэлектрические ДС* устроены аналогично импульсным фотоэлектрическим датчикам положения (рис. 6.2.12). Скорость определяется по частоте импульсов тока фотоприемника, а направление скорости определяется с помощью разделения импульсов от прямого и обратного направлений вращения (рис. 6.2.13).

### Контрольные вопросы

1. Назначение и классификация датчиков скорости (ДС) на генераторные и параметрические, инкрементные и декрементные?
2. Как можно получить информацию о текущей скорости движения с использованием информации о текущем положении ОУ?
3. Устройство и работа магнитоэлектрических тахогенераторов (ТГП)?
4. Как можно получить информацию о величине ускорения от тахогенератора постоянного тока?
5. Принцип действия мостовых ДС коллекторных электродвигателей?
6. Принцип действия импульсных ДС с постоянными магнитами?
7. Устройство, принцип действия и характеристики асинхронных ТГ?
8. Принцип действия импульсных ДС с модуляцией магнитного потока?
9. Принцип действия импульсных параметрических ДС?
10. Устройство, принцип действия и особенности центробежных ДС?
11. Устройство и принцип действия реле максимальной скорости?
12. Устройство и принцип действия импульсных фотоэлектрических ДС?

## 6.4. Датчики электрических величин

Датчики электрических величин преобразуют ток, напряжение, мощность и другие управляемые величины электрической энергии в электрические сигналы информации для работы САУ [28, 29, 31, 32].

Классификация датчиков электрических величин производится по различным признакам. По принципу измерений тока и напряжения, на которых основаны измерения всех других электрических величин, в САУ обычно используются датчики двух основных типов:

- 1) резисторные датчики с измерением падения напряжения от протекания тока на резисторе (шунте) или резисторном делителе;
- 2) электромагнитные датчики, основанные на измерении магнитного поля, создаваемого измеряемым током или напряжением.

**Резисторные датчики тока и напряжения** строят с использованием высокоточных измерительных шунтов и делителей напряжения, изготовленных из манганина или константана с высокой термостабильностью сопротивления.

При бестрансформаторном электропитании САУ от промышленной сети переменного тока резисторные датчики электрических величин, кроме общепринятых характеристик, рассмотренных в разделе 6.1, должны обеспечивать так называемую гальваническую развязку – отсутствие электрического контакта между цепями сигналов информации об измеряемых электрических величинах и силовой электрической цепью САУ. Это требование обусловлено тем, что силовая цепь САУ при отсутствии разделительного трансформатора потенциально связана с промышленной сетью электропитания, имеющей заземленную нейтраль и напряжение 220 В относительно земли, что может привести к поражению людей и повреждению устройств управления. Гальваническая развязка обеспечивается передачей электрических сигналов информации через трансформаторы, конденсаторы, оптроны (светодиод – фотодиод). В цепях постоянного тока для гальванической развязки приходится применять достаточно сложные датчики с преобразованием сигналов информации постоянного тока по принципу модуляции-демодуляции с передачей сигналов информации на переменном токе.

**Датчики постоянного тока с магнитодиодами** и гальванической развязкой через поперечный к магнитодиоду магнитный поток, создаваемый измеряемым постоянным током и изменяющий прямое сопротивление магнитодиода, устроены проще датчиков с модуляцией-демодуляцией. Магнитодиоды по сравнению с обычными диодами имеют толстую (порядка нескольких миллиметров) базу с повышенным прямым сопротивлением, соизмеримым с прямым сопротивлением  $p-n$ -перехода при отсутствии магнитного поля. При появлении и возрастании поперечного магнитного потока все больше искривляется и удлиняется путь носителей через базу магнитодиода и все меньше носителей достигают  $p-n$ -перехода, прямое сопротивление магнитодиода возрастает и ток через магнитодиод при неизменном напряжении питания уменьшается.

В датчиках постоянного тока с магнитодиодами (рис. 6.4.1) гальваническая развязка обеспечивается двумя тороидальными трансформаторами, надетыми на токоведущий провод, в разрез каждого из которых поперек магнитного потока помещены одинаковые магнитодиоды и вставки из постоянных магнитов для определения направления измеряемого тока. При отсутствии измеряемого тока потенциометром R506 балансируется мостовая схема датчика. При увеличении тока одного направления для одного из магнитодиодов магнитный поток от измеряемого тока суммируется с потоком от постоянных магнитов, а для другого – вычитается. При изменении направления измеряемого тока магнитодиоды работают в обратном порядке. Возникающий дисбаланс прямых сопротивлений магнитодиодов изменяет входное напряжение операционного усилителя A501 и на его выходе формируется положительное или отрицательное напряжение, пропорциональное измеряемому току и его направлению.

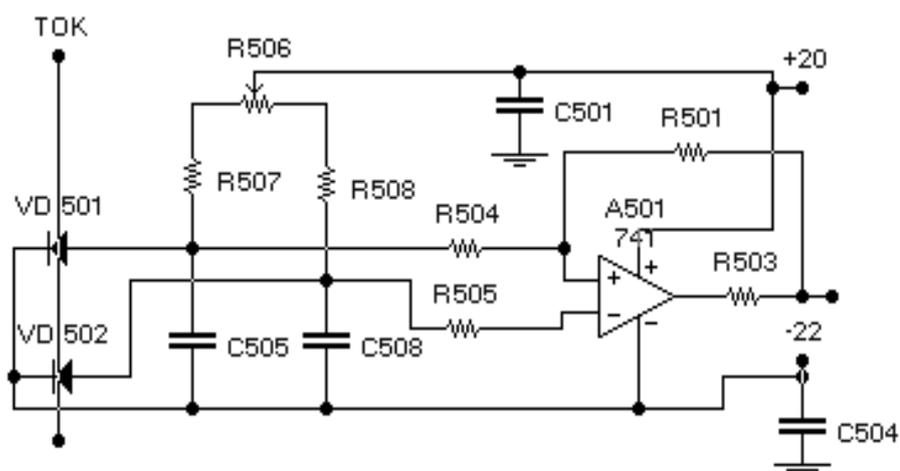


Рис. 6.4.1. Датчик тока на магнитодиодах

**Датчики переменного тока с трансформаторами** используются для измерений переменного тока в САУ и обеспечения гальванической развязки. Первичная обмотка трансформатора включается в цепь измеряемого тока или напряжения, а в цепи вторичной обмотки устанавливается стабильный резистор, с которого снимается напряжение, пропорциональное измеряемому току или напряжению. В САУ информацию о переменном токе часто используют в виде выпрямленного и отфильтрованного от высших гармоник напряжения постоянного тока. Например, в электроприводе «Мезоматик» датчик тока выполнен на двух трансформаторах, мостовом выпрямителе с низкочастотным фильтром (R64, R65, C10) и защитой операционного усилителя при бросках тока на стабилитроне VD3 (рис. 6.4.2, а).

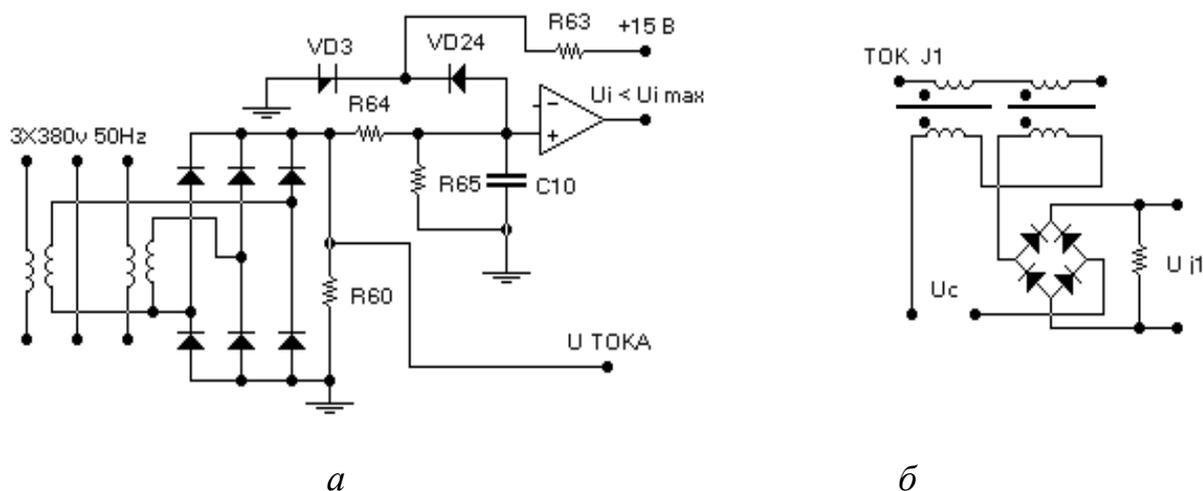


Рис. 6.4.2. Датчики тока с трансформаторами

В качестве датчика выпрямленного тока часто используется так называемый **трансформатор постоянного тока** (ТПТ), который является нереверсивным магнитным усилителем с подавленными четными гармониками (рис.6.4.2, б). ТПТ имеет два магнитопровода на каждом из которых расположены первичная и вторичная обмотки. Первичные обмотки, по которым протекает измеряемый выпрямленный ток  $J_1$ , включены согласно-последовательно, а вторичные обмотки – встречно-последовательно. Вторичные обмотки подключены к сети питания  $U_C$ , а ток  $J_2$  выпрямляется и проходит по сопротивлению нагрузки ТПТ, создавая выходное напряжение датчика тока  $U_{J1}$ , пропорциональное измеряемому току  $J_1$ , поскольку в ТПТ всегда соблюдается равенство ампервитков намагничивания  $J_2 W_2 = J_1 W_1$ .

Трансформаторы тока (ТТ) также используются в разнообразных датчиках тока автоколебательного принципа действия. Схема такого датчика тока, действующего по принципу **магнитного компаратора**, представлена на рис. 6.4.3. На ферритовом тороидальном магнитопроводе ТТ, охватывающем токопровод с измеряемым током, намотана выходная обмотка ТТ, индуктивность  $L1$  которой изменяется в функции суммы намагничивающих ампервитков, создаваемых измеряемым током и током выходной обмотки  $L1$ . Индуктивность  $L1$  и конденсатор  $C1$  образуют колебательный контур, подключаемый транзисторными ключами  $K1$  и  $K2$  поочередно к положительному  $+15$  и отрицательному  $-15$  напряжениям питания под управлением триггера  $D1$ . Например, при открытии транзистора  $K1$  ток в обмотке  $L1$  нарастает под действием положительного напряжения. В момент достижения насыщения магнитопровода ТТ резко изменяется напряжение на выходной обмотке ТТ и дифференцирующая цепочка  $C1R1$

вызывает переключение триггера D1 и переключение ключей. Полярность приложенного напряжения меняется и начинается перемагничивание сердечника ТТ в другом направлении. При достижении насыщения вновь происходит переключение и т. д. Частота переключений выбирается порядка 30 кГц. На резисторе R2 образуется высокочастотный сигнал, промодулированный по амплитуде постоянной составляющей, пропорциональной измеряемому току в шине ТТ. Полученный сигнал подается на интегратор D2, где полностью подавляются высокочастотные составляющие и формируется выходное напряжение  $U_{\text{ТОКА}}$  точно соответствующее измеряемому току, проходящему по токопроводу через тороид магнитопровода ТТ.

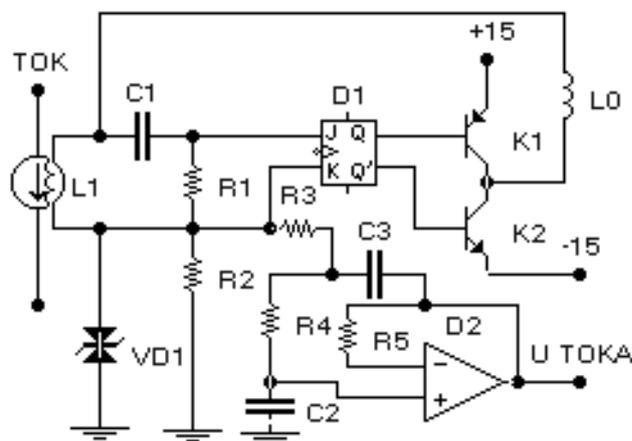


Рис. 6.4.3. Датчик тока по принципу магнитного компаратора

### Контрольные вопросы

- 1) Какое назначение имеют датчики электрических величин и требование обеспечения гальваноразвязки?
- 2) Как действуют датчики по принципу «модуляции-демодуляции»?
- 3) Принцип действия датчиков постоянного тока с магнитодиодами.
- 4) Устройство и принцип действия датчиков выпрямленного тока с трансформаторами постоянного тока?
- 5) Устройство и принцип действия датчика постоянного тока по схеме магнитного компаратора?

## 6.5. Датчики технологических параметров

Для управления текущими значениями различных технологических параметров используются соответствующие датчики. Рассмотрим четыре основных группы датчиков движущей силы или момента, давления, температуры, расхода жидкости или газа [28, 29, 32].

1) *Датчики силы и момента сил* строятся с использованием чувствительных силоизмерительных элементов в виде упругих механических пластин, валов, пружин и измерителей их упругой деформации в виде тензочувствительных магнитострикционных, пьезоэлектрических или полупроводниковых приборов.

*Датчики с тензорезисторными проволочными преобразователями* состоят из чувствительных упругих механических элементов и тензорезисторных проволочных преобразователей (ТПП) их упругой деформации в электрический сигнал. ТПП представляют собой тонкую проволоку из нихрома, константана, элинвара или других термостабильных материалов диаметром от 15 до 60 мкм, изогнутую в виде змеевика, обклеенного с двух сторон тонкой бумагой или пропускающей клей пленкой. ТПП прочно приклеивают к деформирующейся поверхности силоизмерительного упругого элемента так, чтобы при его упругой деформации происходило упругое растяжение или сжатие проволоки в ТПП по длине (рис. 6.5.1).

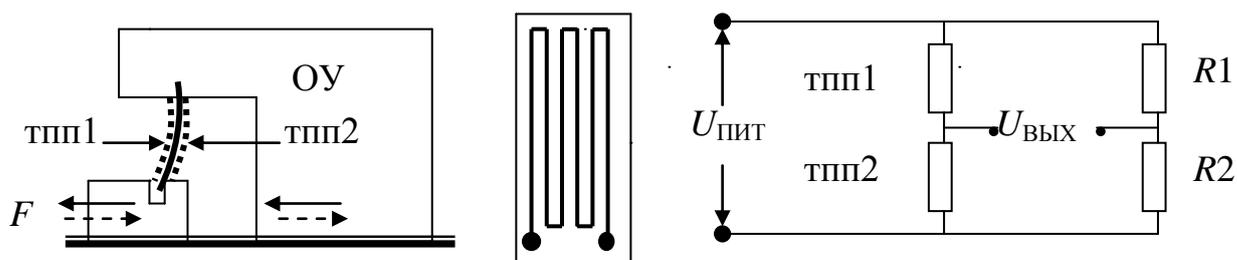


Рис. 6.5.1. Тензорезисторный датчик силы

При растяжении ТПП длина проволоки увеличивается, сечение уменьшается и сопротивление увеличивается, а при сжатии – наоборот. В пределах упругой деформации проволоки в ТПП сопротивление и  $U_{\text{ВЫХ}}$  изменяются по линейной зависимости.

*Датчики момента сил* содержат чувствительный упругий элемент (тонкий вал, витую пружину и т.п.), работающий на скручивание, и его угловая упругая деформация (разница в угловых положениях начала и конца упругого элемента) преобразуется в электрический сигнал. Обычно на упругий элемент надевают жесткую трубу,

закрепленную на одном конце упругого элемента, а на втором конце устанавливают любой датчик углового перемещения, который измеряет угол рассогласования свободных концов трубы и упругого элемента и формирует сигнал о величине крутящего момента. При вращении вала датчик подключается через контактные кольца и щетки.

*Тензочувствительные датчики силы с магнитострикционными преобразователями* действуют по принципу изменения магнитной проницаемости сердечников из железоникелевых сплавов (например, пермаллоя) при давлении на них внешней силы. В магнитострикционных сердечниках при продольном сжатии возникает упругая деформация, расширение петли гистерезиса и уменьшение ее крутизны, что приводит к уменьшению магнитной проницаемости сердечника, индуктивности и взаимоиндукции его обмоток. Недостатки магнитострикционных преобразователей (нелинейность статических характеристик и влияние на них температуры) вызывают необходимость введения компенсации в устройстве датчиков.

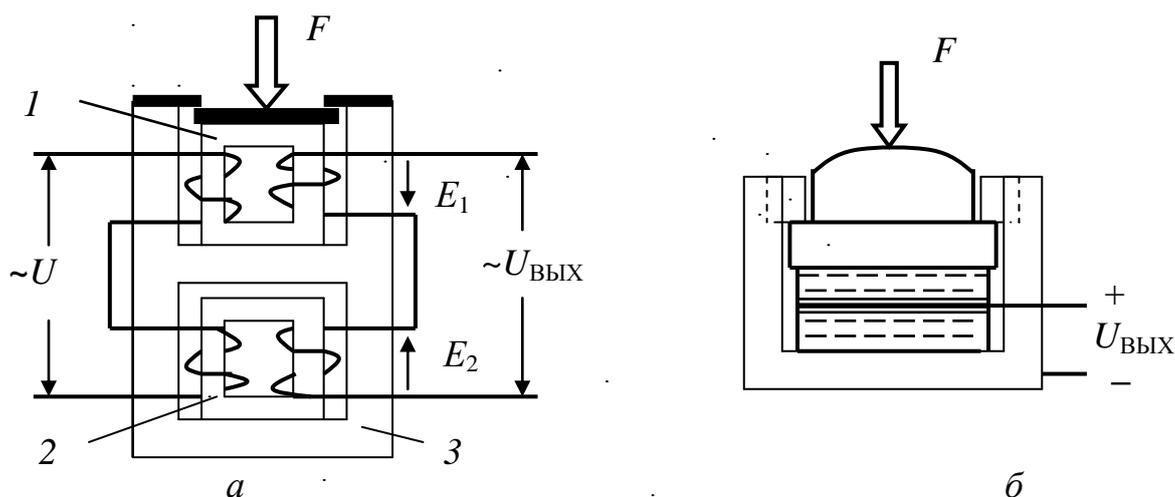


Рис. 6.5.2. Схемы устройства датчиков силы

В компенсационном магнитострикционном датчике силы (рис. 6.5.2, а) чувствительным элементом является О-образный магнитострикционный сердечник 1 из никель-цинкового феррита, на который давит измеряемая сила  $F$ . Второй такой же сердечник 2, не несущий давления силы, используется для создания компенсационной ЭДС  $E_2$ . Первичные обмотки сердечников 1 и 2 соединены последовательно и питаются напряжением с частотой 5–10 кГц, вторичные обмотки включены встречно и  $U_{\text{ВЫХ}}=0$  при отсутствии давления  $F=0$  на сердечник 1. При увеличении силы давления на сердечник 1 его магнитная проницаемость и величина ЭДС  $E_1$  уменьшаются, а выходное напряжение датчика увеличивается  $U_{\text{ВЫХ}}=(E_2-E_1)>0$ .

*Тензочувствительные пьезоэлектрические датчики* основаны на использовании прямого пьезоэлектрического эффекта, состоящего в том, что при давлении на некоторые кристаллические тела, называемые пьезоэлектриками, на поперечных гранях этих тел возникают электрические заряды, т.е. ЭДС постоянной полярности. Если не сжимать, а растягивать пьезоэлектрик, то ЭДС изменяет полярность. Пьезоэлектрики также обладают обратным пьезоэффектом – от воздействия ЭДС пьезоэлементы упруго расширяются или сжимаются в зависимости от полярности ЭДС. Пьезоэлектриками являются некоторые кристаллы (например, кварц и сегнетова соль), а также специальные пьезокерамические материалы (например, титанат бария). Интенсивность прямого и обратного пьезоэффекта зависит от направления механической силы или электрического поля относительно осей кристалла. В практике используют пьезоэлементы в виде прямоугольных или круглых пластинок, цилиндров и колец, вырезанных с учетом осей кристаллов. Пьезоэлектрический датчик силы (рис. 6.5.2, б) содержит два пьезоэлемента, повернутых так, что на разделяющей их прокладке из металлической фольги образуются положительные заряды относительно металлического корпуса при давлении силы  $F$  на плунжер датчика. Пьезоэлементы включены параллельно, что вдвое повышает мощность выходного электрического сигнала, но из-за большого внутреннего сопротивления кристаллов для получения достаточного выходного тока применяют электронные усилители с высоким входным сопротивлением.

*Пьезоэлектрические датчики крутящего момента* содержат один или два пьезодатчика силы, установленных между полумуфтами первичного и вторичного валов, через которые передается момент сил. По измеряемой силе и известному радиусу его установки определяется величина крутящего момента.

*Тензоэлектрические полупроводниковые датчики* преобразуют в электрические сигналы силы давления на тензорезисторы, тензодиоды, тензотранзисторы, тензотиристоры.

*Тензорезисторы* изготавливают из кремния и других полупроводниковых материалов. Основной параметр тензорезистора – коэффициент тензочувствительности  $K_R = (\Delta R/R) : (\Delta l/l)$ , достигающий до сотен (где  $R$  – сопротивление,  $l$  – длина тензорезистора). У полупроводников  $n$ -типа коэффициент тензочувствительности отрицательный (при увеличении давления сопротивление уменьшается), а у полупроводников  $p$ -типа – положительный. Тензорезисторы характеризуются предельно допустимой упругой деформацией, которую нельзя превышать для избежания их разрушения.

*Тензодиоды* изменяют свои вольтамперные характеристики при действии давления, вызывающего деформацию диода и изменение высоты потенциального барьера в *n-p*-переходе. Коэффициент тензочувствительности у тензодиодов достигает сотен и даже тысяч.

*Тензотранзисторы* изменяют свои вольтамперные характеристики под действием давления. В зависимости от того, к какой области тензотранзистора приложено давление, его возрастание приводит к уменьшению или увеличению тока транзистора.

В *тензотиристорах* с увеличением давления на базовый электрод, выполняющий функции управляющего электрода, увеличивается ток эмиттера и понижается напряжение включения тиристора.

**2) Датчики давления** (манометры) преобразуют измеряемое давление жидкостей, паров и газов в ОУ в сигналы информации для САУ. По своему устройству датчики давления делятся на две группы. К первой группе относятся датчики с *чувствительными упругими механическими элементами* (диафрагмами, сильфонами и др.), отделяющими полость измеряемого давления от окружающей среды, упругая деформация которых преобразуется датчиками перемещений в сигналы для САУ. Ко второй группе относятся датчики давления, в которых *чувствительные элементы* располагаются непосредственно в среде с измеряемым давлением и преобразуют оказываемое на них давление в сигналы информации для САУ.

*Диафрагменные (мембранные) датчики давления* (рис. 6.5.3, а) действуют по принципу упругой деформации диафрагмы (мембраны) под влиянием разности давлений среды внутри и снаружи датчика. Деформация диафрагмы вызывает небольшие перемещения  $h$  выходного стержня, преобразуемые любым датчиком перемещений в электрический сигнал информации о давлении.

*Сильфонные датчики* (рис. 6.5.3, б) по принципу действия и конструкции аналогичны диафрагменным, но вместо диафрагмы в них используются сильфоны, представляющие собой замкнутую упругую гофрированную трубку, у которой положение подвижной стенки  $h$  может изменяться на более значительную величину, чем в диафрагменных датчиках. Перемещения  $h$  подвижной стенки сильфона преобразуется любым датчиком перемещений в электрический сигнал информации для САУ.

*Пружинные манометрические датчики* действуют на основе использования упругой деформации пружин из пустотелых трубок некруглого сечения под действием разности давлений внутри и снаружи трубки, преобразуемой в электрические сигналы датчиками перемещений.

В манометрических датчиках с *трубчатой пружиной Бурдона* в виде пустотелой трубки эллипсоидного сечения, запаянной с одной стороны (трубка Бурдона) (рис. 6.5.3, в), при подаче давления внутрь трубки она разгибается (раскручивается). Угол раскручивания свободного конца трубчатой пружины в пределах упругой деформации линейно зависит от разности давлений.

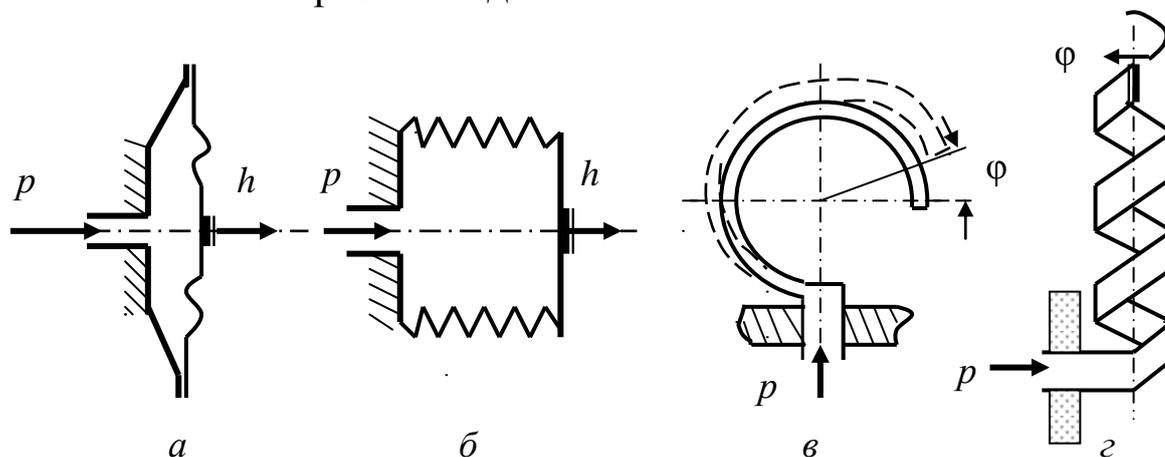


Рис. 6.5.3. Упругие чувствительные элементы манометрических датчиков давления

В манометрических датчиках с *трубчатой геликоидальной пружиной* (рис. 6.5.3, г), которую можно рассматривать как ряд последовательно соединенных трубчатых пружин Бурдона, геликоидальные пружины обычно имеют от 2,5 до 7 витков и угол раскручивания  $\varphi$  до  $60^\circ$ , пропорциональный давлению.

*Пьезоэлектрические* и *магнестрикционные датчики* давления устроены аналогично рассмотренным выше датчикам силы, только в датчиках давления (манометрах) давление на чувствительный элемент осуществляет сама измеряемая среда (жидкость или газ) без применения каких-либо диафрагм или других устройств.

**3) Датчики температуры** в САУ действуют по принципам измерения *теплового расширения, электрической проводимости, термо-ЭДС* в нагреваемых телах.

Тепловое расширение тел, жидкостей или газов используется в дилатометрических, биметаллических и манометрических датчиках.

*Дилатометрические датчики температуры (термометры)* действуют по принципу измерения разности линейного расширения двух тел из разных материалов, соединенных одним концом так, что расстояние между свободными концами тел указывает величину температуры.

*Ртутно-контактные датчики* являются простейшими дилатометрическими датчиками с двумя или несколькими контактами, введенными в стеклянный капилляр ртутного термометра (рис. 6.5.4, а).

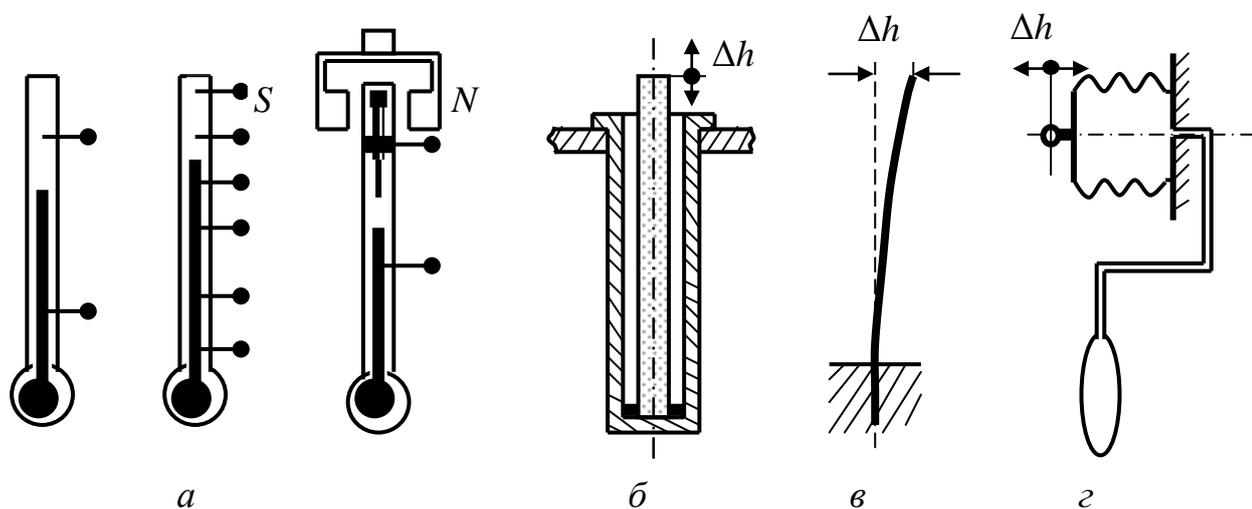


Рис. 6.5.4. Датчики температуры

В датчике с устанавливаемой температурой замыкания контакта металлическая проволочка контактного электрода расположена внутри герметичного капилляра и соединена с вращающимся в неподвижной гайке винтом, железная головка которого имеет прямоугольную форму якорька. При вращении подковообразного постоянного магнита, расположенного снаружи капилляра, якорек головки винта вращается и винт вместе с проволочкой контактного электрода поднимается или опускается по резьбе, изменяя температуру замыкания контакта. Ртутно-контактные датчики используют для измерения температур от 0 до 300 °С при напряжении до 4–6 В и токе до 1 А.

*Дилатометры*, состоящие из трубки и стержня с разными коэффициентами линейного расширения, соединенных на одном конце (рис. 6.5.4, б), создают перемещения  $\Delta h$  свободного конца стержня относительно неподвижно закрепленного конца трубки в функции температуры. При перемещении  $\Delta h$  стержня дилатометра относительно его трубки под действием температурного расширения развиваются большие силы, способные передвигать любые преобразователи перемещений в электрические сигналы. Дилатометры из металлов применяются для измерения температур от –200 до +500 °С.

*Биметаллические датчики температуры* (БДТ) действуют на основе использования разности линейного расширения двух пластин из разных металлов, сваренных по всей соприкасающейся поверхности и неподвижно закрепленных одним концом (рис. 6.5.4, в). При увеличении температуры нагрева БДТ его свободный конец все больше из-

гибается в сторону пластины с меньшим коэффициентом линейного расширения, развивая сравнительно большие усилия, достаточные для переключения контактных устройств электроавтоматики или перемещения подвижных частей датчиков положения, вырабатывающих электрические сигналы о температуре для САУ.

Нагрев БДТ можно производить прямым методом помещения БДТ в среду с измеряемой температурой (например, в поток нагреваемого воздуха в фене) или на нагреваемый объект (например, в электроустье), либо косвенным методом с использованием нагревателей, по которым протекает электрический ток или теплоноситель, нагревающий ОУ (например, ток двигателя протекает через нагреватель, который имитирует температуру нагрева двигателя).

БДТ изготавливают из пластин металлов с наибольшей разницей коэффициентов теплового расширения (например, инвар–латунь, инвар–нержавеющая сталь и др.) и используют для измерения температуры от  $-100$  до  $+300$  °С.

*Манометрические датчики температуры (МДТ)*, называемые *манометрическими термометрами*, действуют по принципу измерения давления газа, пара или жидкости в замкнутой полости при изменении их температуры (рис. 6.5.4, з). В МДТ чувствительный элемент (например, сильфон) соединен капиллярной трубкой с термобаллоном, помещенном в ОУ с измеряемой температурой. В жидконаполненных МДТ используется ртуть, метиловый спирт или ксилол. В паронаполненных МДТ баллон частично заполняется жидкостью с низкой температурой кипения (эфиром, бензолом, ацетоном), а капилляр и чувствительный элемент заполняются парами этой жидкости. В газонаполненных МДТ вся полость заполняется инертным газом (азотом, гелием). Повышение температуры вызывает расширение жидкости, пара или газа и изменение давления, приводящее к перемещению  $\Delta h$  подвижной части чувствительного элемента, которое преобразуется в электрический сигнал датчиком перемещения.

*Датчики температуры электрической проводимости*, называемые *термометрами сопротивления*, действуют на основе зависимости электрического сопротивления проводников из металлов или полупроводниковых материалов от температуры нагрева.

*Платиновые термометры сопротивления* изготавливают из платиновой проволоки диаметром 0,05–0,07 мм. Сопротивления платиновых термометров при 0 °С равны 46 ом или 100 ом, диапазон измерений от  $-200$  до  $+500$  °С.

*Медные термометры сопротивления* изготавливают из медной проволоки диаметром 0,1 мм. Стандартные сопротивления медных термометров при 0 °С равны 53 Ом или 100 Ом, диапазон измерений от –50 до +180 °С.

*Терморезисторные датчики температуры* строятся на основе использования полупроводниковых терморезисторов с сильной зависимостью сопротивления от температуры. Терморезисторы из оксидов металлов имеют отрицательный ТКС (при повышении температуры их сопротивление уменьшается) и называются *термисторами*. Терморезисторы, имеющие в некотором диапазоне температур положительный ТКС, называются *позисторами*. Терморезисторы имеют ТКС в 10–15 раз выше, чем у платины и меди, и могут изготавливаться в виде стержней, пластин, дисков, шайб или бусинок очень малых размеров. Основным недостатком терморезисторов – нелинейность статических характеристик.

*Датчики температуры с использованием термо-ЭДС* изготавливаются в виде двух проводников из разных материалов, образующих термопары (ТП), в которых возникает термо-ЭДС при разности температур мест соединений (спаев) их концов. Один из спаев ТП помещается в ОУ с измеряемой температурой и называется “горячим спаем”, а другие концы проводников ТП присоединяются к измерительному усилителю термо-ЭДС и называются “холодным спаем”, имеющим температуру окружающей среды. Чувствительность в милливольтгах на градус составляет в ТП: платина-селен 900; платина-кремний 440; платина-германий 300; платина-нихром 25; платина-железо 18,5; платина-медь (серебро, золото) 6,5. Диапазон температур применения ТП составляет от –273 до +500 °С для ТП медь-константан; до +750 °С для ТП железо-константан; до +1200 °С для ТП хромель-алюмель; до +1450 °С для ТП платинородий-платина; до +3000 °С для специальных вольфрам-танталовых ТП.

**4) Датчики расхода жидкостей и газов** (расходомеры) преобразуют количество вещества, проходящее через данное сечение трубопровода в единицу времени (расход вещества), в сигнал для САУ.

Расходомеры делятся на *объемные* (измеряют расход по объему, например, в кубических метрах в секунду) и *массовые* (измеряют расход по массе, весу вещества, например, в килограммах в секунду).

*Объемные расходомеры* делятся на тахометрические, тепловые, индукционные и расходомеры скоростного напора.

*Тахометрические расходомеры* измеряют объемный расход вещества по вращению вертушки, помещенной в движущийся по тру-

бопроводу поток вещества (рис. 6.5.6, *a*). Скорость вращения вертушки определяет скорость движения потока вещества в трубе с известным сечением, т.е. объемный расход вещества, а число оборотов вертушки – общий объем вещества за время измерения. Информация о вращении вертушки передается в САУ с помощью датчиков угловой скорости или других преобразователей.

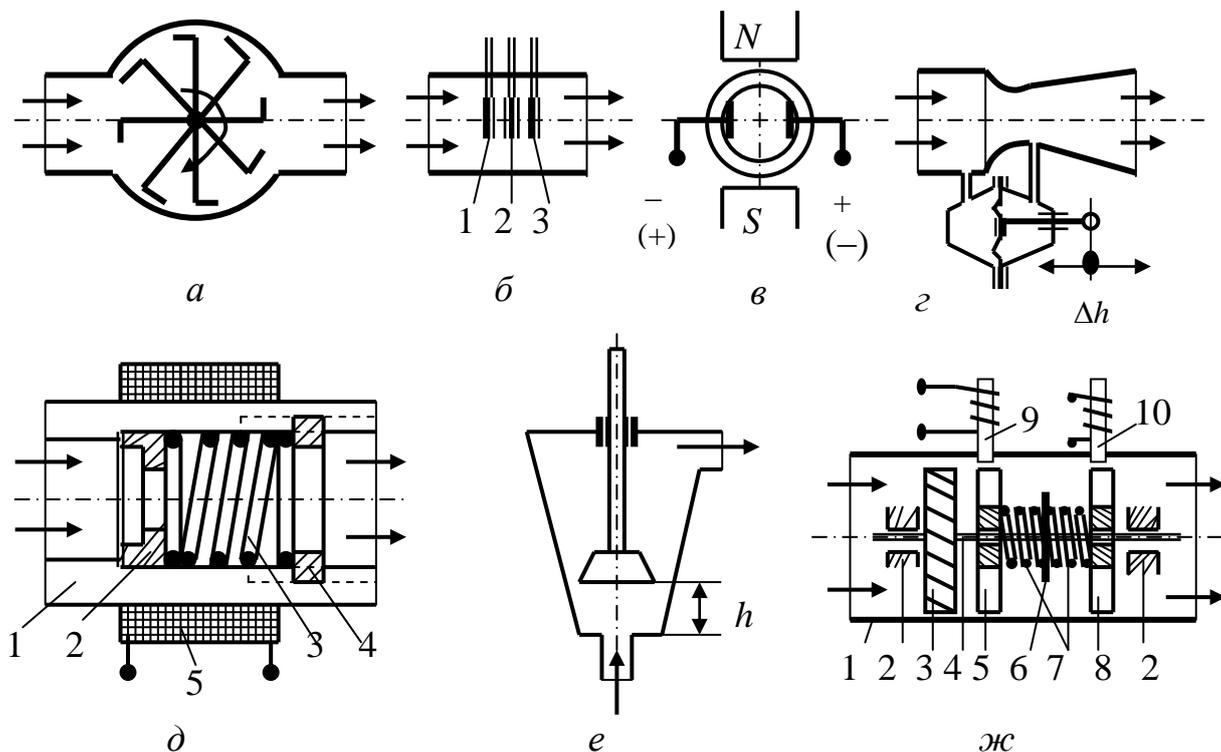


Рис. 6.5.6. Схемы устройства расходомеров

*Тепловые расходомеры* действуют на основе измерения скорости потока вещества либо по охлаждению нагреваемого тела движущимся потоком вещества (*в термоанемометрических расходомерах*), либо по переносу тепловой энергии между двумя точками, расположенными вдоль потока вещества (*в калориметрических расходомерах*).

*Термоанемометрические расходомеры (термоанемометры)* изготавливаются двух типов – с совмещенными и с отдельными нагревателями и измерителями нагрева.

В термоанемометрах с совмещенным нагревателем и измерителем в поток вещества погружают термоэлемент в виде платиновой, вольфрамовой или никелевой проволоочки, который выполняет функции и нагревателя, и измерителя. Термоэлемент включается в одно из плеч электрического измерительного моста и нагревается до температуры выше температуры потока вещества. Скорость потока вещества измеряется по уменьшению сопротивления охлаждаемого потоком термоэлемента при стабилизированном токе нагрева.

В термоанемометрах с отдельными нагревателем и измерителем в поток вещества погружается нагреватель в виде тонкой проволоки, через которую протекает стабилизированный ток нагрева, и расположенная рядом термопара, которая измеряет температуру нагревателя и соответствующую ей скорость потока вещества.

*Калориметрические расходомеры* (КМР) изготавливаются трех типов: 1) с подводом постоянной мощности электропитания к нагревателю и измерением температуры нагрева потока вещества вблизи от нагревателя, зависящей от скорости потока; 2) с постоянной температурой нагрева потока и измерением необходимой мощности электропитания нагревателя, зависящей от скорости потока; 3) с периодическим во времени повышением и понижением температуры нагревателя и измерением времени запаздывания сигнала от измерителя, зависящего от скорости потока и расстояния от нагревателя до измерителя.

КМР первого типа (рис. 6.5.6, б) имеют нагреватель 2 и два измерителя температуры 1 и 3, расположенные до и после нагревателя на близком расстоянии вдоль потока. Уравнение теплового баланса без учета отвода тепла через стенки расходомера имеет вид

$$q = kI^2 = Qc_p(t_2 - t_1), \quad (6.5.1)$$

где  $q$  – расход тепла на нагрев потока вещества, дж/сек (вт);  $k$  – тепловой эквивалент электроэнергии;  $I$  – ток нагревателя, А;  $Q$  – расход вещества, кг/сек;  $c_p$  – теплоемкость вещества при данном давлении и температуре, дж/градус;  $t_1$  и  $t_2$  – температуры потока до и после нагревателя, град. Из (6.5.1) следует, что при прочих равных условиях расход вещества обратно пропорционален разности температур.

*Индукционные расходомеры* (ИР) (рис. 6.5.6, в) измеряют расход токопроводящего вещества по величине ЭДС, наводимой между двумя электродами, установленными в потоке вещества, текущего по немагнитному (керамическому, стеклянному или пластмассовому) патрубку в магнитном поле, направленном перпендикулярно к оси патрубка. При круглом сечении патрубка в ИР величина ЭДС равна  $E = B d v_{\text{ср}}$ , где  $E$  – ЭДС, В;  $B$  – индукция магнитного поля, Тл;  $v_{\text{ср}}$  – средняя по сечению скорость потока вещества, м/сек;  $d$  – внутренний диаметр патрубка, м. ИР позволяют измерять с высокой точностью расходы веществ, которые не могут измеряться другими методами (расплавленные металлы и сплавы; угольные, цементные, асбестовые,

кремнеземные и другие пульпы; агрессивные и радиоактивные жидкости; электролиты и др.).

*Расходомеры скоростного напора* измеряют расход по величине скорости потока, определяемой по перепаду давлений, усилий или перемещений, возникающих на теле, внесенном в поток вещества. Расходомеры скоростного напора делятся на манометрические расходомеры и расходомеры обтекания.

В *манометрических расходомерах* (МР) расход определяется по перепаду (разности) давлений до и после суживающей поток диафрагмы с отверстием в виде шайбы, насадки Долла, насадки Вентури или трубки Пито. Разность давлений в МР измеряют дифференциальными манометрическими датчиками, в которых упругие перемещения диафрагмы преобразуются в электрические сигналы датчиками перемещений. В МР с насадкой Вентури (рис. 6.5.6, *з*) перемещение диафрагмы дифманометра определяет разность давления, а, следовательно, скорость потока и расход вещества.

В *расходомерах обтекания* (РО) чувствительным элементом является тело, воспринимающее динамическое давление обтекающего его потока и воздействующее на измерительный элемент. В РО обтекаемое тело может иметь разную форму (диафрагма с отверстием, стержень, конус и др.), а воздействующее на него усилие может измеряться любым тензометрическим датчиком.

В *расходомерах обтекания с подвижной диафрагмой* (рис. 6.5.6, *д*) в немагнитном корпусе 1 расположена железная диафрагма 2, поджимаемая немагнитной (пластмассовой или бронзовой) пружиной 3, сжатие которой регулируется завинчиванием шайбы 4. Под действием перепада давления диафрагма сжимает пружину и перемещается на определенную величину, зависящую от скорости потока и расхода вещества. Перемещение диафрагмы изменяет индуктивность катушки датчика 5, формирующего выходной сигнал расходомера.

В *расходомерах обтекания с постоянным перепадом давления* изменяется не перепад давления, а площадь суживающегося отверстия в вертикальной конусной трубке с поплавком, который поднимается под действием потока вещества, поступающего под избыточным давлением снизу (рис. 6.5.6, *е*). Поплавок поднимается до положения  $h$ , при котором его вес уравнивается силой давления потока вещества снизу при определенной площади кольцевого зазора между

поплавком и конусной трубкой, соответствующей определенному расходу вещества.

**Измерения массового расхода вещества** с известной неизменной плотностью (удельным весом) производятся объемными расходомерами. Для измерения массового расхода вещества с изменяющейся плотностью используются массовые расходомеры.

*Инерциальные массовые расходомеры* измеряют массовой (весовой) расход вещества (например, в килограммах в секунду), придавая потоку вещества дополнительные вращательные или колебательные движения и определяя возникающие при этом инерциальные силы Кориолиса  $F_C = 2mV_1V_2$ , возникающие при одновременном поступательном (линейном) и вращательном (угловом) движениях массы вещества  $m$  со скоростями  $V_1$  и  $V_2$ . По виду источника энергии для создания дополнительных движений массовые расходомеры делятся на два класса: расходомеры с электроприводом и расходомеры с приводом от потока вещества. Показания массовых расходомеров не должны зависеть от вязкости, температуры, скорости и других параметров потока вещества. Однако в некоторых типах расходомеров вязкость вещества влияет на показания расходомера, что требует применения специальных методов компенсации.

В практике наибольшее распространение получили массовые расходомеры, называемые *турборасходомерами*, в которых потоку вещества придается дополнительное вращательное движение.

В турборасходомерах с приводом от потока вещества и полной компенсацией влияния вязкости на результаты измерений расхода (рис. 6.5.6, *ж*) в цилиндрическом корпусе 1 на подшипниках 2 установлена спиральная крыльчатка 3 привода расходомера, вращающаяся с переменной скоростью под воздействием изменяющегося потока вещества. Вал 4 крыльчатки привода с помощью закрепленного на нем диска 6 вращает через идентичные упругие элементы (пружины) 7 две одинаковых прямолопастных измерительных крыльчатки 5 и 8.

При вращении на обе измерительные крыльчатки 5 и 8 одновременно действует момент сил вязкого трения, что приводит к отсутствию их углового смещения друг к другу. Однако под действием момента  $M$  от сил инерции вращения массы вещества, проходящего через расходомер, который пропорционален величине массового (весового) расхода, крыльчатки 5 и 8 смещаются на определенный угол относительно друг друга. Измерение этого угла смещения крыльча-

ток и пропорционального ему массового расхода вещества, проходящего через расходомер, производится импульсными индуктивными датчиками 9 и 10 по фазовому сдвигу импульсов от прохождения под датчиками лопастей одинаковых по геометрии крыльчаток 5 и 8.

### **Контрольные вопросы**

1. Как действуют датчики силы и момента с упругими механическими элементами и преобразователями упругой деформации в электрические сигналы?
2. Как действуют датчики силы и момента сил с пьезоэлементами, тензорезисторами, тензодиодами, тензотранзисторами, тензотиристорами?
3. Устройство диафрагменных, сильфонных и пружинных датчиков давления? Как получают от них электрические сигналы информации?
4. Устройство и принцип действия пьезоэлектрических и магнитострикционных датчиков давления?
5. Устройство ртутно-контактных, дилатометрических и биметаллических датчиков температуры?
6. Устройство манометрических датчиков температуры?
7. Устройство платиновых и медных, термоэлектрических и полупроводниковых термисторных датчиков температуры?
8. Устройство и принцип действия тахометрических, тепловых и индукционных объемных расходомеров?
9. Устройство и принцип действия манометрических объемных расходомеров с суживающими поток вещества насадками?
10. Устройство и принцип действия объемных расходомеров обтекания с подвижной диафрагмой и индуктивным выходным датчиком?
11. Устройство и принцип действия расходомеров с постоянным перепадом давления с конусной трубкой и поплавком?
12. Устройство инерциального массового (весового) турборасходомера с приводом от потока и двумя измерительными крыльчатками?

## 7. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

### 7.1. Назначение и классификация

Исполнительные устройства (ИУ) в САУ преобразуют энергию источников питания в механические управляющие воздействия на объекты управления (ОУ) для реализации заданных алгоритмов функционирования ОУ и всей САУ [27, 28, 29, 30, 31, 34]. Комплектные ИУ, содержащие регулятор, преобразователь энергии питания, двигатель, датчики обратных связей и другие элементы, называются сервомеханизмами [34]. По виду используемой энергии ИУ могут быть электрическими, гидравлическими, пневматическими и комбинированными.

*Электрические ИУ* состоят из управляемых электрических преобразователей (управляемых устройств электропитания) и электро-механических преобразователей (электродвигателей, электромагнитных муфт, электромеханизмов).

*Гидравлические и пневматические ИУ* состоят из неуправляемых источников энергии сжатой жидкости или газа (воздуха), устройств управления и исполнительных двигателей. Источники энергии (насосы или компрессоры) накачивают под давлением жидкость (масло) или газ (воздух) в ресиверы, из которых сжатая жидкость или сжатый газ через трубопроводы и устройства управления с регулирующими клапанами поступает в исполнительные двигатели возвратнопоступательного движения типа «поршень-цилиндр» или вращательного движения типа «вертушки», «пропеллера» и др.

*Комбинированные ИУ и сервомеханизмы* (электروهидравлические, электропневматические, пневмогидравлические) строятся с использованием соответствующих элементов. Обычно в управляющей части комбинированных ИУ используются электрические или пневматические управляющие устройства, а в исполнительной силовой части – гидродвигатели или пневмодвигатели.

В зависимости от режимов работы ОУ в САУ различают кратковременный, повторно-кратковременный и длительный режимы работы ИУ во времени, что определяет нагрев двигателей и требования к выбору их мощности, статических и динамических характеристик. ИУ являются самым мощным оконечным звеном САУ и их свойства во многом определяют статические и динамические характеристики всей САУ в любых режимах работы.

## 7.2. Электрические исполнительные устройства

Электрические исполнительные устройства в САУ строятся на основе использования двигателей постоянного тока, двигателей переменного тока, электрических шаговых двигателей, электромагнитных исполнительных устройств с электромагнитными муфтами и тяговыми электромагнитами [27, 28, 29, 30, 31, 34].

**Исполнительные двигатели постоянного тока** (ДПТ) широко применяются в САУ вследствие их большого диапазона плавного регулирования скорости  $\Omega$  при малых потерях энергии и больших вращающих моментах  $M$ , высоких показателей быстродействия, коэффициента полезного действия, надежности. Принцип действия ДПТ основан на выталкивании проводника с током из магнитного поля по правилу левой руки: если магнитное поле  $\Phi$  направить в ладонь левой руки, а четыре вытянутых пальца направить вдоль проводника по направлению тока  $I_{я}$ , то отогнутый большой палец укажет направление выталкивающей силы  $F = kI_{я}\Phi$ . Конструкция ДПТ аналогична конструкции тахогенераторов постоянного тока (раздел 6.3). ДПТ изготавливаются с электромагнитным возбуждением от обмоток возбуждения и с возбуждением от постоянных магнитов. ДПТ с электромагнитным возбуждением подразделяются на двигатели независимого, последовательного и смешанного возбуждения (рис. 7.2.1, а, б, в).

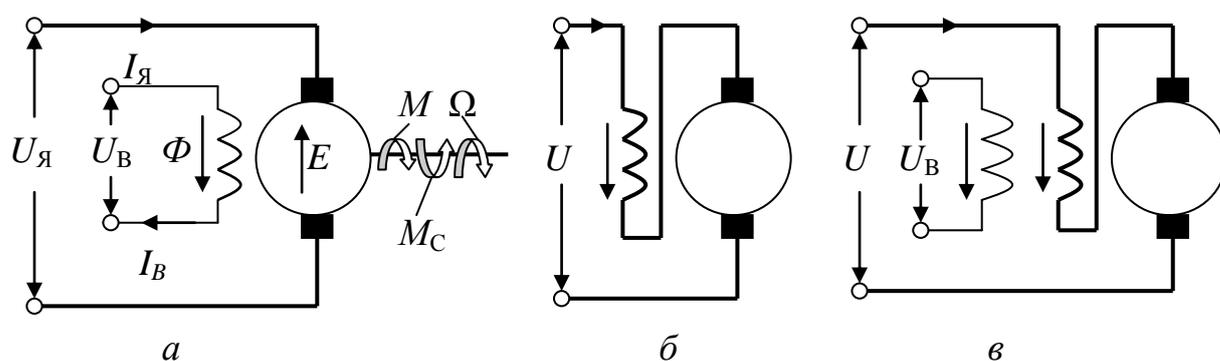


Рис. 7.2.1. Схемы двигателей постоянного тока

1) ДПТ независимого возбуждения (рис. 7.2.1, а) является электромеханическим преобразователем, процессы в котором описываются уравнениями электрического и механического равновесия. При составлении этих уравнений вводятся допущение о линеаризация кривой намагничивания двигателя в окрестностях рабочей точки и допущения о бесконечно большой мощности источников напряжений  $U_{я}$  и  $U_B$ , отсутствии влияния реакции тока якоря  $I_{я}$  на магнитный по-

ток  $\Phi$  и бесконечно малом падении напряжения на коллекторно-щеточном контакте двигателя. В уравнениях равновесия все переменные представляются суммами установившихся значений и текущих отклонений от них

$$\begin{aligned} U_{\text{я}} &= U_{\text{я0}} + \Delta U_{\text{я}}(t); \quad U_{\text{в}} = U_{\text{в0}} + \Delta U_{\text{в}}(t); \quad E = E_0 + \Delta E(t); \\ I_{\text{я}} &= I_{\text{я0}} + \Delta I_{\text{я}}(t); \quad I_{\text{в}} = I_{\text{в0}} + \Delta I_{\text{в}}(t); \quad \Phi = \Phi_0 + \Delta \Phi(t); \\ \Omega &= \Omega_0 + \Delta \Omega(t); \quad M = M_0 + \Delta M(t); \quad M_{\text{с}} = M_{\text{с0}} + \Delta M_{\text{с}}(t). \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Из разложения нелинейной функции кривой намагничивания в ряд Тейлора с учетом только линейных членов ряда получим

$$\Phi(i_{\text{в}}) = \Phi_0(I_{\text{в0}}) + \frac{\partial \Phi_0(I_{\text{в0}})}{\partial I_{\text{в0}}} \frac{\Delta I_{\text{в}}}{1!} + \dots \approx k_0 I_{\text{в0}} + k_1 \Delta I_{\text{в}}. \quad (7.2.2)$$

Тогда уравнения электрического и механического равновесия для ДПТ запишутся в виде

$$\begin{aligned} U_{\text{в0}} + \Delta U_{\text{в}} &= (I_{\text{в0}} + \Delta I_{\text{в}})R_{\text{в}} + L_{\text{в}}(d\Delta I_{\text{в}}/dt); \\ U_{\text{я0}} + \Delta U_{\text{я}} &= (I_{\text{я0}} + \Delta I_{\text{я}})R_{\text{я}} + L_{\text{я}}(d\Delta I_{\text{я}}/dt) + (E_0 + \Delta E); \\ M_0 + \Delta M &= M_{\text{с0}} + \Delta M_{\text{с}} + J(d\Delta \omega/dt), \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

где ЭДС вращения и вращающий момент ДПТ можно представить без учета слагаемых второго порядка малости в виде

$$\begin{aligned} E_0 + \Delta E &= C_{\text{Е}}(\Phi_0 + \Delta \Phi)(\Omega_0 + \Delta \Omega) = C_{\text{Е}}\Phi_0\Omega_0 + C_{\text{Е}}\Phi_0\Delta \Omega + \\ &+ C_{\text{Е}}\Omega_0\Delta \Phi + C_{\text{Е}}\Delta \Phi\Delta \Omega \approx C_{\text{Е}}\Phi_0\Omega_0 + C_{\text{Е}}\Phi_0\Delta \Omega + C_{\text{Е}}\Omega_0\Delta \Phi; \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

$$\begin{aligned} M + \Delta M &= C_{\text{М}}(\Phi_0 + \Delta \Phi)(I_{\text{я0}} + \Delta I_{\text{я}}) = C_{\text{М}}\Phi_0 I_{\text{я0}} + C_{\text{М}}\Phi_0 \Delta I_{\text{я}} + \\ &+ C_{\text{М}}I_{\text{я0}}\Delta \Phi + C_{\text{М}}\Delta \Phi I_{\text{я}} \approx C_{\text{М}}\Phi_0 I_{\text{я0}} + C_{\text{М}}\Phi_0 \Delta I_{\text{я}} + C_{\text{М}}I_{\text{я0}}\Delta \Phi, \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

где  $\Phi_0 = k_0 I_{\text{в0}}$ ;  $\Delta \Phi = k_1 \Delta I_{\text{в}}$ ;  $I_{\text{в0}} = U_{\text{в0}}/R_{\text{в}}$ ;  $\Delta I_{\text{в}} = \Delta U_{\text{в}}/R_{\text{в}}$ .

Статические характеристики ДПТ независимого возбуждения из (7.2.3) с учетом (7.2.4) и (7.2.5) при  $\Delta U_{\text{я}} = 0$ ;  $\Delta U_{\text{в}} = 0$ ;  $\Delta M_{\text{с}} = 0$  будут

$$\Omega_0 = \frac{R_{\text{в}}U_{\text{я0}}}{C_{\text{Е}}k_0U_{\text{в0}}} - \frac{R_{\text{в}}^2R_{\text{я}}M_{\text{с0}}}{C_{\text{Е}}C_{\text{М}}k_0^2U_{\text{в0}}^2} = \Omega_{\text{ОХХ}} - k_{\Omega}M_{\text{с0}}. \quad (7.2.6)$$

Уравнение (7.2.6) описывает механическую характеристику ДПТ, связывающую установившиеся значения регулируемой скорости  $\Omega_0$  с управляющими напряжениями  $U_{\text{я0}}$  и  $U_{\text{в0}}$  и моментом нагрузки  $M_{\text{с0}}$ . Первое слагаемое выражает скорость идеального холостого хода  $\Omega_{\text{ОХХ}}$  при отсутствии нагрузки  $M_{\text{с0}} = 0$ , а второе слагаемое выражает отклонение скорости от  $\Omega_{\text{ОХХ}}$  на величину  $k_{\Omega}M_{\text{с0}}$ . В двигательном режиме момент нагрузки  $M_{\text{с0}}$  противодействует моменту двигателя  $M$  и скорости вращения, что учтено знаком минус в (7.2.6). В генераторном тормозном режиме момент нагрузки  $M_{\text{с0}}$  направлен согласно

с моментом  $M$  и скоростью двигателя, поэтому в уравнение (3.2.6) значение  $M_{CO}$  подставляется со знаком минус, что ведет к повышению скорости  $\Omega_0$  относительно  $\Omega_{OXX}$ .

При изменении знака  $U_Y$  или  $U_B$  изменяются направления движущего момента  $M$  и скорости  $\Omega_0$  (двигатель реверсируется).

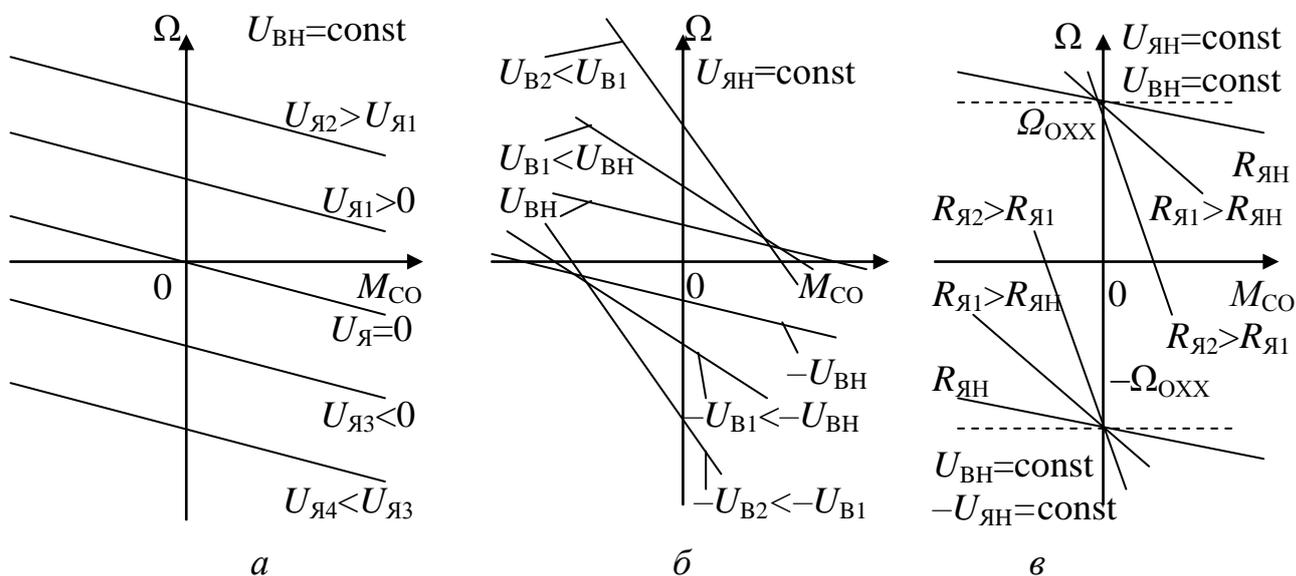


Рис. 7.2.2. Механические характеристики двигателя независимого возбуждения

Механические характеристики ДПТ по (7.2.6) в виде графических зависимостей скорости  $\Omega$  от нагрузки  $M_{CO}$  при разных значениях управляющих напряжений  $U_Y$  или  $U_B$  располагаются симметрично относительно начала координат (рис. 7.2.2, а, б). При параметрическом уменьшении скорости ДПТ добавочным увеличением сопротивления  $R_Y$  якорной цепи и неизменных значениях  $U_Y$  и  $U_B$  механические характеристики по (7.2.6) становятся мягкими (рис. 7.2.2, в).

В первом и третьем квадрантах механических характеристик (рис. 7.2.2, а) ДПТ работает в двигательном режиме, преобразуя потребляемую из сети мощность  $P=U_Y I_Y+U_B I_B$  в механическую мощность на валу ДПТ  $N=M\Omega$ . Во втором и четвертом квадрантах механических характеристик (рис. 7.2.2, а) ДПТ работает в генераторном (тормозном) режиме, преобразуя потребляемую механическую мощность с вала машины  $N=M_{CO}\Omega$ , где  $M_{CO}$  движущий момент, создаваемый ОУ (например, от веса опускаемого груза в подъемном кране) в электрическую мощность  $P=U_Y \cdot (-I_Y)$ , генерируемую в сеть.

Механические характеристики ДПТ (7.2.6) также определяют и его *регулировочные характеристики*, представляющие собой зависимости регулируемой величины скорости  $\Omega$  от управляющих воздействий  $U_Y$  или  $U_B$  при разных заданных нагрузках  $M_{CO}$ .

Сравнение механических характеристик ДПТ (рис. 7.2.2) показывает, что из трех способов регулирования скорости лучшим является изменение напряжения  $U_{\text{я}}$  на обмотке якоря (рис. 7.2.2, а), который называется *управлением по якорю*. Он обеспечивает наиболее высокую точность и стабильность регулирования скорости ДПТ при изменениях момента нагрузки на валу двигателя.

В расчетах, наряду с механическими характеристиками двигателя, используются *электромеханические характеристики*, представляющие собой зависимости скорости вращения  $\Omega$  от тока якоря  $I_{\text{я}}$ .

ДПТ последовательного и смешанного возбуждения (рис. 7.2.1) широко применяются в тяговых электроприводах, но в позиционных и следящих САУ они не получили распространения из-за нелинейности характеристик и сложности реверсивного управления объектами.

*Динамические характеристики* ДПТ независимого возбуждения получаются из (7.2.3) в виде *операторного уравнения динамики* в отклонениях от установившегося режима работы

$$(T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2 + T_{\text{М}}p + 1)\Delta\Omega(p) = \frac{\Delta U_{\text{я}}(p)}{C_{\text{Е}}\Phi_{\text{О}}} - \frac{T_{\text{М}}}{J}(1 + T_{\text{я}}p)\Delta M_{\text{С}}(p) - \frac{C_{\text{Е}}\Phi_{\text{О}}\Omega_{\text{О}} - (1 + T_{\text{я}}p)R_{\text{я}}I_{\text{яО}}}{C_{\text{Е}}\Phi_{\text{О}}^2 R_{\text{В}}(1 + T_{\text{В}}p)} k_1 \Delta U_{\text{В}}(p), \quad (7.2.7)$$

где  $T_{\text{я}} = L_{\text{я}}/R_{\text{я}}$  – электромагнитная постоянная времени цепи якоря;  $T_{\text{В}} = L_{\text{В}}/R_{\text{В}}$  – электромагнитная постоянная времени обмотки возбуждения;  $T_{\text{М}} = JR_{\text{я}} / C_{\text{М}}C_{\text{Е}} (\Phi_{\text{О}})^2$  – электромеханическая постоянная времени двигателя;  $J$  – момент инерции, приведенный к валу двигателя.

Из операторного уравнения (7.2.7) можно получить *передаточные функции ДПТ независимого возбуждения* в отклонениях от установившегося режима для следующих типовых частных случаев:

1) по напряжению якоря  $\Delta U_{\text{я}} \neq 0$  (при  $\Delta U_{\text{В}} = 0$  и  $\Delta M_{\text{С}} = 0$ )

$$W_{\text{я}}(p) = \frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U_{\text{я}}(p)} = \frac{1/C_{\text{Е}}\Phi_{\text{О}}}{T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2 + T_{\text{М}}p + 1}; \quad (7.2.8)$$

2) по напряжению возбуждения  $\Delta U_{\text{В}} \neq 0$  (при  $\Delta U_{\text{я}} = 0$  и  $\Delta M_{\text{С}} = 0$ )

$$W_{\text{В}}(p) = \frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U_{\text{В}}(p)} = -k_1 \frac{C_{\text{Е}}\Phi_{\text{О}}\Omega_{\text{О}} - R_{\text{я}}I_{\text{яО}}(1 + T_{\text{я}}p)}{C_{\text{Е}}\Phi_{\text{О}}^2 R_{\text{В}}(1 + T_{\text{В}}p)(T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2 + T_{\text{М}}p + 1)}; \quad (7.2.9)$$

3) по моменту нагрузки  $\Delta M_{\text{С}} \neq 0$  (при  $\Delta U_{\text{я}} = 0$  и  $\Delta U_{\text{В}} = 0$ )

$$W_{\text{М}}(p) = \frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta M_{\text{С}}(p)} = -\frac{T_{\text{М}}(1 + T_{\text{я}}p)}{J(T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2 + T_{\text{М}}p + 1)}. \quad (7.2.10)$$

В переходных процессах при управлении по якорю, математическая модель ДПТ независимого возбуждения представляется динамическим звеном второго порядка (7.2.8). При  $T_M \geq 4T_{\text{я}}$  ДПТ представляется двумя последовательно соединенными апериодическими звеньями первого порядка, при  $T_M \leq 4T_{\text{я}}$  – колебательным звеном.

При управлении по возбуждению переходные процессы в ДПТ представляются сложным звеном третьего порядка (7.2.9) с отрицательным коэффициентом передачи, что соответствует уменьшению скорости при увеличении напряжения возбуждения.

В переходных процессах, вызванных изменением момента нагрузки, ДПТ при  $T_M \leq 4T_{\text{я}}$  представляется последовательно соединенными колебательным и форсирующим звеньями (7.2.10), а при  $T_M \geq 4T_{\text{я}}$  – апериодическим звеном первого порядка с постоянной времени  $T_M$ . Отрицательный знак передаточной функции указывает на уменьшение скорости двигателя при увеличении момента нагрузки.

2) *Бесколлекторные двигатели постоянного тока* (БДПТ) не имеют скользящих щеточно-коллекторных контактов, что является основным недостатком ДПТ, ведущим к возникновению искрения и радиопомех, необходимости ограничения тока, быстрому износу щеток, трудностям применения ДПТ во взрывоопасных и космических условиях и др. В БДПТ щеточно-коллекторный узел, механически коммутирующий ток в секциях обмотки якоря ДПТ по мере поворота якоря относительно полюсов возбуждения, заменен бесконтактным полупроводниковым коммутатором, который управляется датчиком угла поворота вала двигателя.

БДПТ состоит из двигателя Д, полупроводникового коммутатора К и датчика углового положения ротора ДПР (рис. 7.2.3, а). В БДПТ (рис. 7.2.3, б) секции 1, 2, 3 обмотки якоря двигателя расположены в пазах неподвижного статора 4 и подключены к полупроводниковому коммутатору К, а на вращающемся роторе 5 установлен постоянный магнит возбуждения NS и датчик углового положения ротора ДПР.

В приведенном на схеме (рис. 7.2.3, б) положении ротора и ДПР открыт транзистор VT1 и через секцию 1 обмотки протекает постоянный ток, создающий магнитное поле NS статора, указанное стрелкой. Взаимодействие магнитных полей статора и ротора создает вращающий момент  $M$ , направленный на рис. 7.2.3, б против часовой стрелки (северные полюсы ротора и статора отталкиваются, а южный полюс ротора и северный полюс статора притягиваются). Вращающий момент  $M$ , преодолевая момент сопротивления движению, поворачивает ротор против часовой стрелки. При выходе ротора из 120-градусной

зоны включения секции 1 обмотки якоря датчик ДПР выключит транзистор VT1 и включит транзистор VT2, что приведет к скачкообразному повороту магнитного поля статора на  $120^\circ$  и повторению процесса вращения ротора двигателя при коммутации секций по алгоритму 1–2–3–1. Для изменения направления вращения ротора меняют местами подключение транзисторов VT2 и VT3 к датчику ДПР, что изменяет алгоритм коммутации секций на обратный 1–3–2–1.

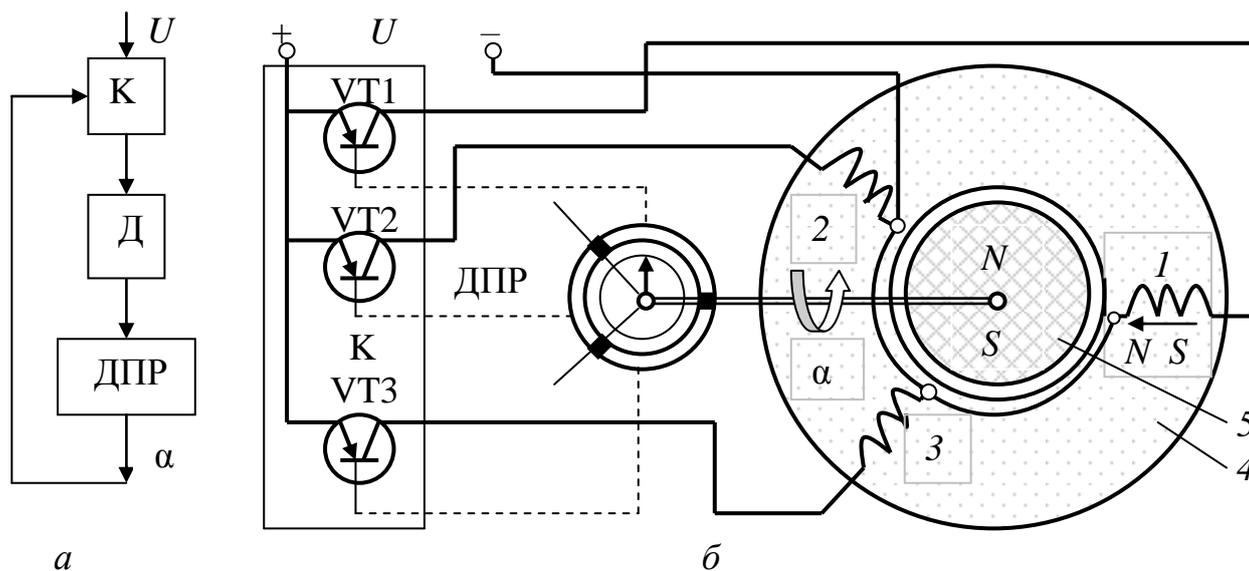


Рис. 7.2.3. Бесколлекторный двигатель постоянного тока

На рис. 7.2.3, б обмотка БДПТ состоит из трех секций, соединенных в звезду и переключающихся по простейшей нереверсивной схеме однополупериодной  $120^\circ$ -градусной коммутации. В реверсивных схемах двухполупериодной коммутации ДПР дает информацию об угле поворота ротора через каждые  $60^\circ$  или  $30^\circ$  и токи протекают по всем трем секциям в разных направлениях в течение полного оборота ротора, обеспечивая более плавное вращение магнитного поля статора. Это повышает использование и к.п.д. двигателя и уменьшает пульсации момента и скорости, но усложняет и удорожает коммутатор, так как количество силовых транзисторов и элементов управления удваивается. Бесконтактные датчики положения ротора (ДПР) строятся на основе использования индуктивных, трансформаторных, фотоэлектрических чувствительных элементов или датчиков Холла.

Скорость вращения БДПТ регулируется изменением напряжения питания  $U$  (рис. 7.2.3) от дополнительного управляемого выпрямителя или изменением напряжения, подводимого к обмоткам двигателя, с широтно-импульсным управлением вентильными ключами коммутатора при постоянном напряжении питания  $U$ . При питании

БДПТ от управляемого выпрямителя, обеспечивающего работу в выпрямительном и инверторном режимах, статические и динамические характеристики БДПТ идентичны характеристикам ДПТ независимого возбуждения (рис. 3.2.2, а).

3) *Комплектные электроприводы постоянного тока* промышленного назначения с питанием от сети переменного тока строятся по схеме «тиристорный преобразователь-ДПТ» (рис. 7.2.4, а) или по схеме «выпрямитель-транзисторный инвертор-ДПТ» (рис. 7.2.4, б).

На рис. 3.2.4 обозначены: М – обмотка якоря двигателя с возбуждением от постоянных магнитов; BR – тахогенератор постоянного тока с возбуждением от постоянных магнитов; VT – управляемые полупроводниковые приборы (тиристоры или транзисторы); VD – полупроводниковые диоды; Т – силовой трансформатор; В – неуправляемый выпрямитель.

В реверсивном тиристорном электроприводе (рис. 7.2.4, а) обеспечивается стабилизация заданной скорости двигателя с использованием тахогенератора BR для обратной связи по скорости и автоматическое регулирование тока якоря с использованием датчика тока ДТ.

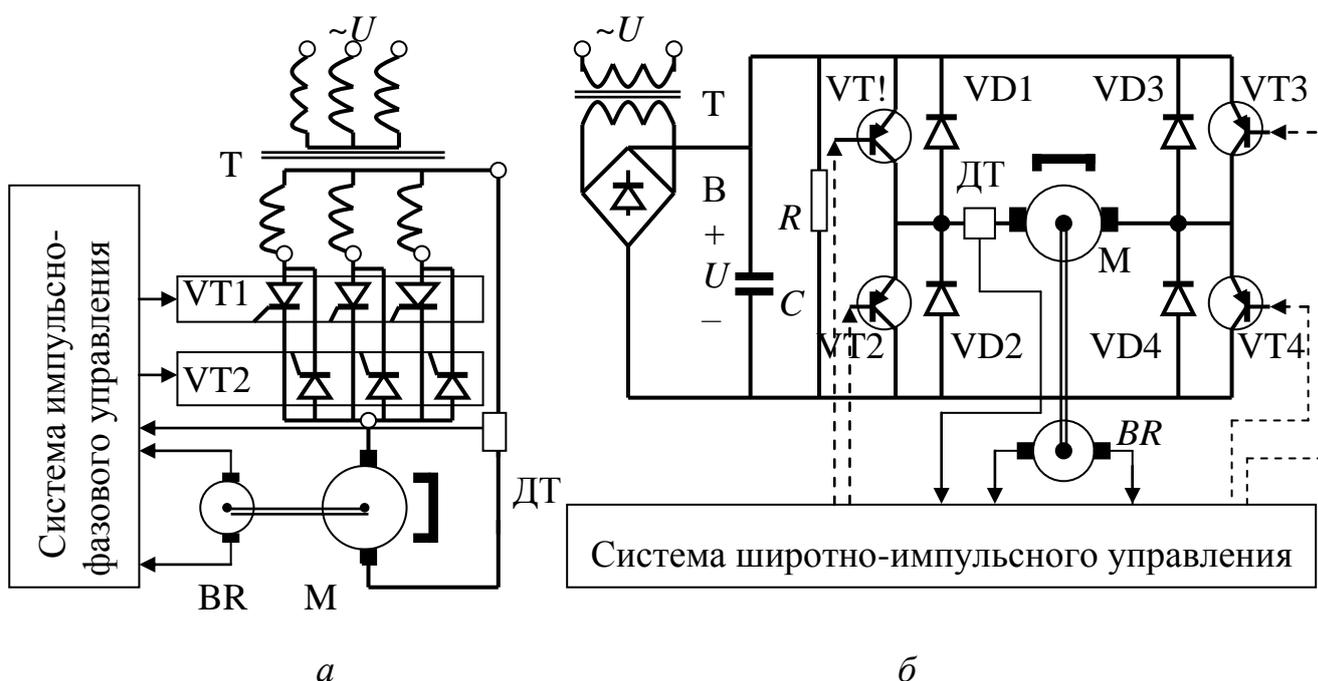


Рис. 7.2.4. Комплектные электроприводы постоянного тока

Реверсивный тиристорный преобразователь с импульсно-фазовым управлением тиристорами реверсивных групп VT1 и VT2, выполненный по трехфазной нулевой трансформаторной схеме, обеспечивает работу двигателя во всех четырех квадрантах характеристик (рис. 7.2.2, а), в том числе и в тормозных режимах с рекупера-

цией (возвратом) энергии торможения в питающую сеть переменного тока.

В реверсивном электроприводе с широтно-импульсным управлением транзисторами инвертора, выполненного по однофазной мостовой схеме с питанием от выпрямителя В (рис. 7.2.4, б), обеспечивается стабилизация заданной скорости в первом и третьем квадрантах механических характеристик (рис. 7.2.2, а) с использованием тахогенератора ВР и регулирование тока двигателя с датчиком тока ДТ. Но рекуперативное торможение двигателя в данной схеме невозможно поскольку диодный выпрямитель В не передает энергию в обратном направлении. Возможно только динамическое торможение двигателя с рассеиванием энергии торможения на резисторе  $R$  и накоплением в конденсаторе  $C$ , который при этом заряжается до напряжения выше выходного напряжения выпрямителя В.

**Исполнительные двигатели переменного тока** обычно используются в автоматике в виде двухфазных или трехфазных асинхронных двигателей и шаговых электродвигателей.

1) *Двухфазные асинхронные двигатели (ДАД)* имеют неподвижный шихтованный статор 1 с двухфазной обмоткой в пазах и вращающийся полый либо короткозамкнутый ротор 3 (рис. 7.2.5). Обмотки возбуждения ОВ и управления ОУ создают магнитные потоки  $\Phi_B$  и  $\Phi_U$ , сдвинутые на  $90^\circ$ , образующие вращающийся в расточке статора результирующий магнитный поток. Для уменьшения воздушного зазора внутри полого ротора 3 установлен неподвижный сердечник 5 из электротехнической стали с отверстием для вала 4.

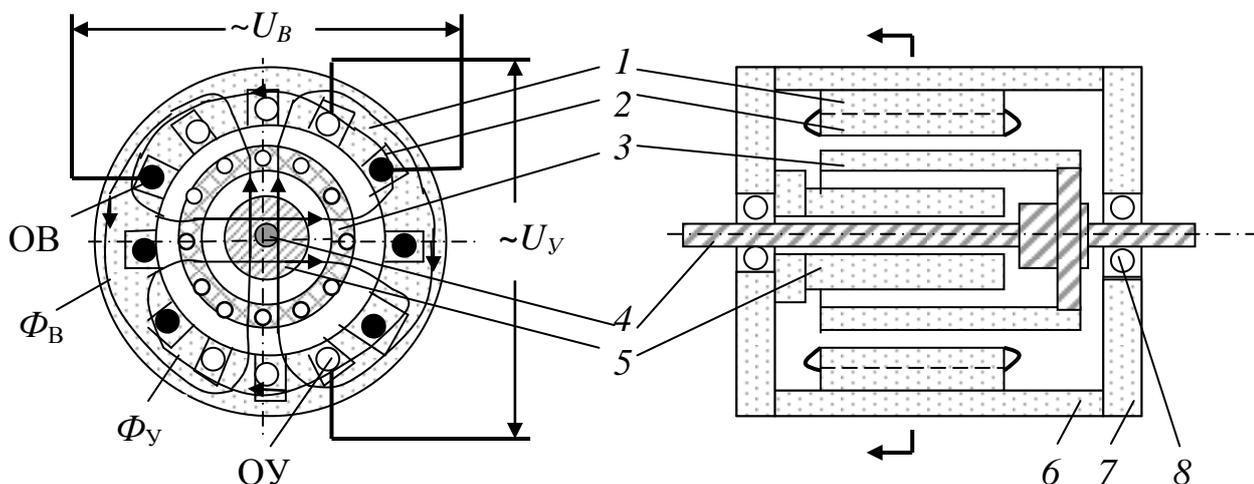


Рис. 7.2.5. Двухфазный асинхронный двигатель с полым немагнитным ротором

Полый ротор 3 имеет вид стакана из алюминиевого сплава, а короткозамкнутый ротор выполнен в виде цилиндра из электротехнической стали с пазами, в которых находятся стержни короткозамкнутой на торцах ротора обмотки.

При подаче на ОВ и ОУ напряжений  $U_B$  и  $U_Y$ , сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ , вращающееся с синхронной скоростью магнитное поле статора пересекает стержни короткозамкнутой обмотки или стенки полого ротора, имеющие очень малое сопротивление, и наводит в них токи. В результате взаимодействия токов ротора с магнитным полем статора возникает вращающий момент  $M_D$ , который, преодолевая момент нагрузки  $M_C$ , вращает ротор ДАД вслед за вращением магнитного поля статора, но с меньшей несинхронной скоростью, отсюда название «асинхронный двигатель».

Управление моментом и скоростью вращения ДАД может осуществляться амплитудным, фазовым или амплитудно-фазовым способами (рис. 7.2.6, а, б, в).

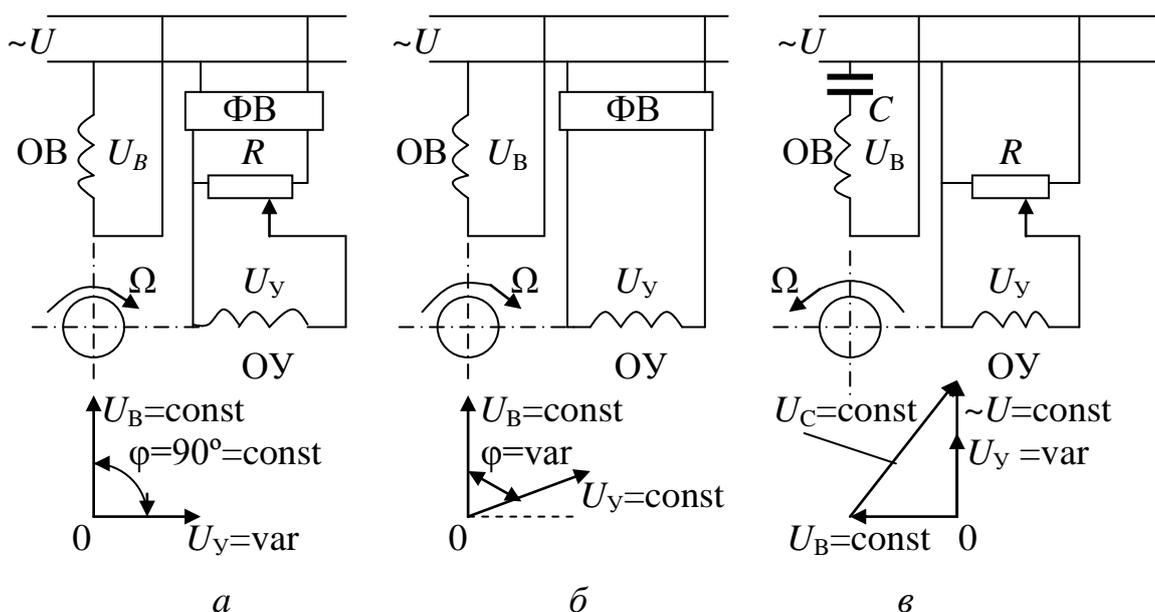


Рис. 7.2.6. Способы управления двухфазными асинхронными двигателями

При амплитудном управлении (рис. 7.2.6, а) ОВ питается напряжением  $U_B = \text{const}$ , а напряжение  $U_Y$  питания ОУ, сдвинутое по фазе относительно  $U_B$  на угол  $\varphi = -\pi/2$ , изменяется по амплитуде от нуля до максимума, что приводит к изменению скорости ДАД от нуля до максимального значения.

При фазовом управлении (рис. 7.2.6, б) амплитуды напряжений  $U_B$  и  $U_Y$  не изменяются, а фаза между ними регулируется от 0 до  $90^\circ$ , что приводит к изменению вращающего момента и скорости ДАД от нуля до наибольшего значения.

При амплитудно-фазовом управлении (рис. 7.2.6, в) скорость ДАД регулируются от нуля до наибольших значений изменением амплитуды напряжения  $U_Y$  при создании фазового сдвига между напряжениями  $U_Y$  и  $U_B$  за счет включения конденсатора  $C$  в цепь ОВ.

Для изменения направления вращения (реверса) ДАД нужно изменить направление тока в одной из обмоток ОВ или ОУ (или поменять местами выводы обмотки). В САУ обычно используется амплитудное управление моментом и скоростью АД, осуществляемое автоматическими устройствами.

*Статические свойства* ДАД представляются регулировочными и механическими характеристиками в функции  $\alpha = U_Y / U_B$  (рис. 7.2.7).

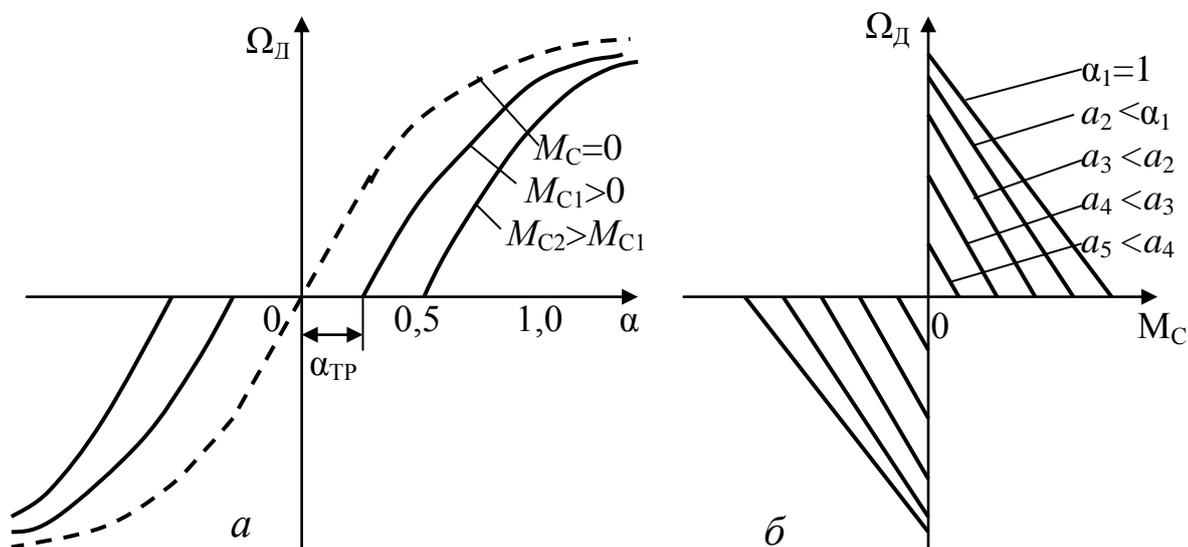


Рис. 7.2.7. Регулировочная и механическая характеристики двухфазного асинхронного двигателя

*Динамические свойства* ДАД в первом приближении представляются апериодическим звеном первого порядка.

2) *Трехфазные асинхронные двигатели* (ТАД) имеют статор и короткозамкнутый или фазный ротор подобно двухфазным АД с короткозамкнутым ротором (рис. 7.2.5, а). Но в ТАД на статоре имеется не две, а три обмотки, смещенные на  $120^\circ$ , как в БДПТ (рис. 7.2.3, б), а ротор может иметь короткозамкнутую или фазную обмотку, выполненную по трехфазной нулевой схеме с тремя выводами через контактные кольца и неподвижные токосъемные щетки. Статорные обмотки ТАД питаются трехфазным напряжением и создают магнитное поле, вращающееся с синхронной скоростью  $\Omega_1$  и индуцирующее ток в обмотке ротора. Взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем статора создает вращающий момент в направлении

вращения магнитного поля статора и ротор ТАД будет вращаться с установившейся скоростью  $\Omega_D$  при скольжении  $S=(\Omega_1-\Omega_D)/\Omega_1$ .

*Статические характеристики* ТАД получаются из анализа упрощенной схемы замещения одной фазы двигателя (рис. 7.2.8, а), выражающей уравнения электрического равновесия. На схеме обозначены:  $U_1$  – фазное напряжение питания;  $I_1, I_\mu, I_2^I$  – фазные токи статора, намагничивания, ротора;  $x_1, x_\mu, x_2^I$  – фазные индуктивные сопротивления статора, намагничивания, ротора;  $R_1, R_2^I$  – фазные активные сопротивления статора и ротора;  $S$  – скольжение.

Модуль тока фазы ротора как функция параметров ТАД определяется по закону Ома в комплексной форме в виде [30]

$$I_2^I = \frac{U_1}{\sqrt{(R_1 + R_2^I/S)^2 + x_k^2}}, \quad (7.2.11)$$

где  $x_k = x_1 + x_2^I$  – индуктивное сопротивление короткого замыкания.

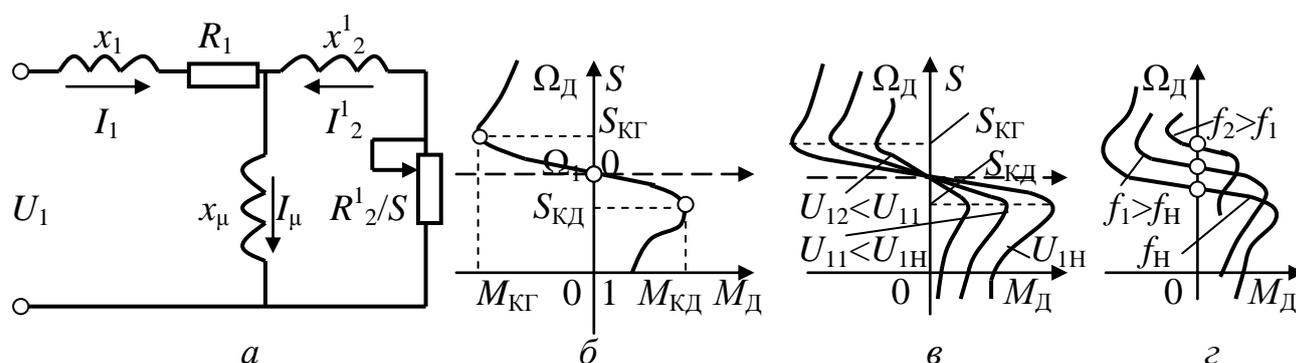


Рис. 7.2.8. Характеристики трехфазных АД

Активная электромагнитная мощность, передаваемая через воздушный зазор в ротор ТАД от трех фаз и равная произведению момента двигателя  $M_D$  и синхронной скорости вращения магнитного поля статора  $\Omega_1$ , представляется в виде

$$P_{12} = 3(I_2^I)^2 (R_2^I/S) = \frac{3U_1^2 (R_2^I/S)}{(R_1 + R_2^I/S)^2 + x_k^2} = M_D \Omega_1. \quad (7.2.12)$$

Из (7.2.12) уравнение механической характеристики ТАД

$$M_D(S) = \frac{3U_1^2 R_2^I}{\Omega_1 S \left[ (R_1 + R_2^I/S)^2 + x_k^2 \right]}. \quad (7.2.13)$$

Из анализа (7.2.13) максимальные (критические) значения момента двигателя  $M_k(S_k)$  соответствуют двум значениям скольжения

$$S_k = \pm R_2^I / \sqrt{R_1^2 + x_k^2}, \quad (7.2.14)$$

подставляя (7.2.14) в (7.2.13), получим выражение критического момента (где плюс – двигательный режим, а минус – генераторный)

$$M_k(S_k) = \frac{3U_1^2}{2\Omega_1 \left[ R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + x_k^2} \right]}. \quad (7.2.15)$$

При подстановке (7.2.14) и (7.2.15) в (7.2.13), получим уравнение механической характеристики ТАД в виде так называемой уточненной формулы Клосса (рис. 7.2.8, б)

$$M_D = \frac{2M_k(1 + \alpha S_k)}{S/S_k + S_k/S + 2\alpha S_k}, \quad \text{где } \alpha = R_1/R_2^I. \quad (7.2.16)$$

В практических расчетах часто используется упрощенная формула Клосса (7.2.16) при  $\alpha=0$ .

В САУ, исходя из (7.2.13), используются два способа регулирования момента и скорости вращения ТАД с короткозамкнутым ротором: фазовое управление изменением напряжения  $U_1$  (рис. 7.2.8, в) и частотное управление изменением синхронной скорости  $\Omega_1$  (рис. 7.2.8, г). Фазовое управление ТАД может применяться только в замкнутых САУ, а частотное управление применяется как в разомкнутых, так и в замкнутых САУ.

*Динамические характеристики* электропривода с ТАД при управлении скоростью изменением напряжения  $U_1$  на статорных обмотках (рис. 7.2.9) определяются на основании (7.2.13) выражением

$$M_D = \frac{2M_k \Omega_1 S_k (\Omega_1 - \Omega_D) U_1}{(\Omega_1 - \Omega_D)^2 + S_k^2 \Omega_D^2}. \quad (7.2.17)$$

После линеаризации уравнения (7.2.17) динамические процессы в замкнутой САУ с ТАД (рис. 7.2.9, а), содержащей усилитель  $У$  с коэффициентом передачи  $k_y$ , тиристорный преобразователь  $\Pi$  с коэффициентом передачи  $k_\Pi$  и тахогенератор  $ВР$  с коэффициентом передачи  $k_C$ , приближенно описываются уравнениями динамики в отклонениях от установившегося режима в окрестностях любой рабочей точки механической характеристики (7.2.17). Соответственно структурной схеме САУ с ТАД (рис. 7.2.10) переходные процессы описываются дифференциальным уравнением в отклонениях в виде [31]:

$$\beta T_M \frac{d\Delta\Omega_D}{dt} + (\beta + k_C k_y k_\Pi k_M) \Delta\Omega_D = \Delta U_3 k_y k_\Pi k_M - \Delta M_C, \quad (7.2.18)$$

где  $\beta = \Delta M_D / \Delta\Omega_D$  – модуль жесткости механической характеристики в разомкнутой системе электропривода;  $T_M = J_\Sigma / \beta$  – электромеханиче-

ская постоянная времени электропривода;  $J_{\Sigma}$  – момент инерции, приведенный к валу двигателя;  $k_M = \Delta M_D / \Delta U_1$  – коэффициент передачи двигателя по напряжению;  $\Delta U_1 = (\Delta U_3 - k_C \Omega_D) k_Y k_{\Pi}$  – приращение фазного напряжения двигателя (по первой гармонике).

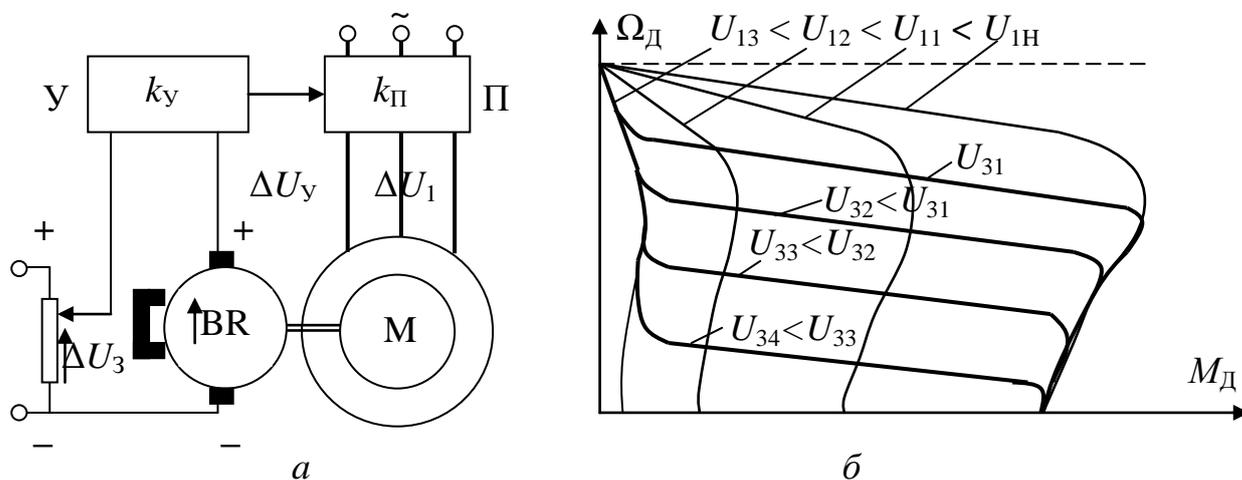


Рис. 7.2.9. Система электропривода с ТАД

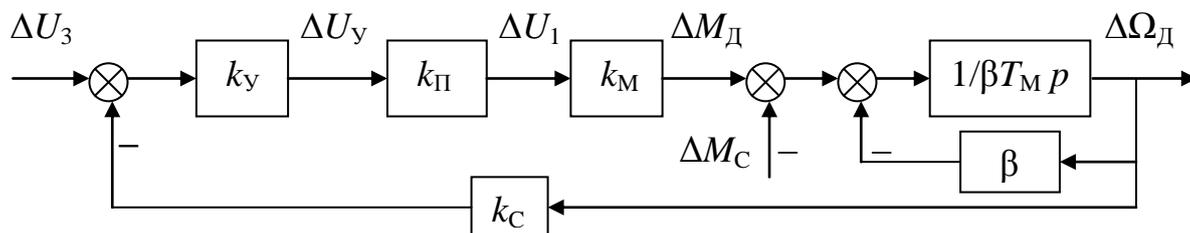


Рис. 7.2.10. Структурная схема электропривода с ТАД

Динамические свойства частотно-регулируемых электроприводов с ТАД исследуются приближенными методами, поскольку их нелинейные механические характеристики (рис. 7.2.8, *з*) выражаются очень сложными уравнениями при использовании частотного и частотно-токового управления при одновременном автоматическом регулировании момента, скорости, напряжения и тока [30, 31].

3) *Шаговые электродвигатели (ШД)* используются в дискретных САУ, где управление движениями ОУ формируется в виде импульсов унитарного кода, обеспечивающих перемещения на один постоянный шаг, отсюда название «шаговый двигатель». Отработка одного шага осуществляется ШД с некоторой погрешностью, но и отработка нескольких шагов будет иметь ту же погрешность, т.е. ошибка не накапливается. Поэтому САУ с ШД можно строить по разомкнутому

принципу управления без датчиков обратной связи по положению при отсутствии возможности пропуска отработки шагов.

В САУ обычно применяются ШД с активным ротором с постоянными магнитами (ШДА) и реактивные ШД с пассивным ротором специальной формы (ШДР) [29, 30, 34].

ШДА (рис. 7.2.11, *а*) по конструкции подобен бесколлекторному двигателю постоянного тока БДПТ (вентильному двигателю). Ротор ШДА представляет собой постоянный магнит, а статор состоит из пластин электротехнической стали имеет от 3 до 8 явно выраженных полюсов, на которых располагаются обмотки управления, соединенные в звезду с выводом общей точки.

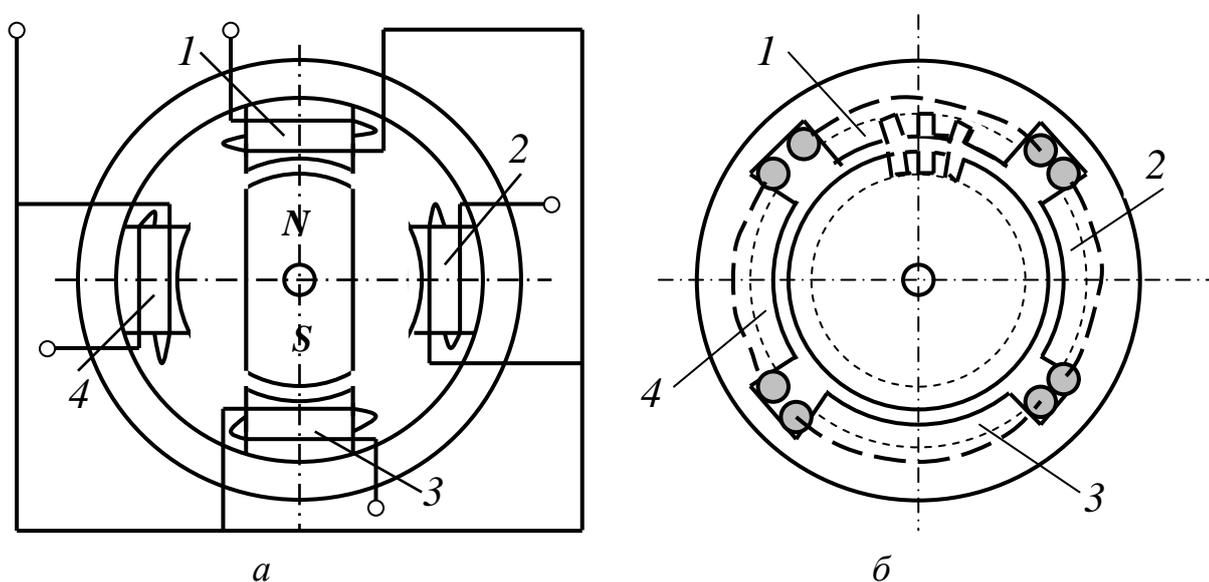


Рис. 7.2.11. Шаговые двигатели

При отсутствии тока в обмотках, ротор ШДА фиксируется в очередном положении полюсов ротора напротив полюсов статора моментом магнитных сил, составляющим примерно 10% от максимального момента ШДА. При последовательной поочередной подаче импульсов тока прямоугольной формы на обмотки 2-3-4-1 или 4-3-2-1 ротор четырехполюсного ШДА будет осуществлять повороты с шагом  $\pm 90^\circ$ .

ШДР (рис. 7.2.11, *б*) имеет статор и ротор, шихтованные из пластин электротехнической стали. На статоре четырехполюсного ШДР имеются полюсы 1-2-3-4, охваченные фазными обмотками, соединенными в звезду с выводом общей точки (как в ШДА). Пассивный ротор ШДР имеет  $z_R$  зубцов с шагом  $\alpha$ , а на полюсах статора имеются зубцовые зоны также с шагом  $\alpha$ , смещенные вместе с полюсами друг от друга на угол  $2\pi/mz_R$  (в четырехполюсных ШДР при  $m=4$  смеще-

ния между соседними полюсами составляют  $1/4$  шага  $\alpha$ ). Если в каком-то положении ротора его зубцы расположены соосно с зубцами полюса 1 статора (рис. 7.2.11, б), то переключение тока из обмотки полюса 1 в обмотку полюса 2 приведет к повороту м.д.с. статора на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Возникший при этом реактивный момент повернет ротор на  $1/4$  часть углового шага  $\alpha$  в положение наибольшей магнитной проводимости относительно возбужденного полюса 2. При подаче очередных импульсов тока на обмотки полюсов 3, 4, 1 м.д.с. статора совершит полный оборот, а ротор ШДР повернется на угол  $\alpha$  одного зубцового деления, т.е. на четыре одиночных шага.

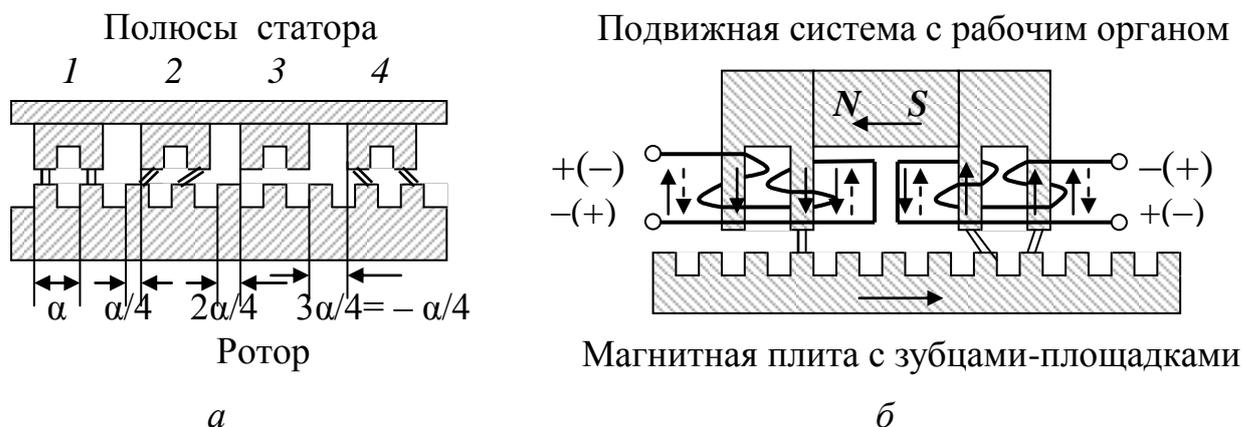


Рис. 7.2.12. Принцип действия линейных ШДР

По такому же принципу действуют линейные ШДР (рис. 7.2.12, а) в САУ возвратно-поступательными движениями ОУ с максимально упрощенной кинематикой.

В высокотехнологичных производствах вычислительной и другой сложной техники применяются плоские ШД (рис. 3.2.12, б), осуществляющие точные перемещения по двум линейным координатам без кинематических связей. Плоский ШД состоит из магнитной плиты с симметрично расположенными в координатной плоскости зубцами-площадками и подвижной головки с двумя полюсными системами, оси перемещений которых над магнитной плитой взаимно перпендикулярны. Головка перемещается на воздушной подушке. Каждая полюсная система обеспечивает движение за счет коммутации тока в двух последовательно соединенных обмотках разделенного надвое левого и правого полюсного наконечника. Постоянный магнит  $NS$  создает в полюсной системе магнитный поток, проходящий через полюсные наконечники, зубцы-площадки и магнитную плиту. Обмотки на левой и правой половинах полюсных наконечников создают

противоположно направленные магнитные поля относительно поля постоянного магнита  $NS$ .

На рис. 3.2.12, б показано положение при отключенном питании обмоток правого полюсного наконечника и включенном питании обмоток левого полюсного наконечника напряжением прямой полярности  $\pm$ , при котором магнитный поток проходит через правую половину левого полюсного наконечника. Если отключить питание обмоток левого полюсного наконечника и включить питание обмоток правого полюсного наконечника напряжением прямой полярности  $\pm$ , то в левой половине правого полюсного наконечника магнитный поток станет равным нулю, а в правой – увеличится и головка переместится влево на один шаг, равный  $1/4$  зубцового деления магнитной плиты. При включении напряжения обратной полярности ( $\pm$ ) на обмотки правого полюсного наконечника головка переместится на один шаг вправо.

Для надежной отработки ШД импульсов управления без пропуска шагов, частота импульсов управления не должна превышать частоту приемистости ШД, которая определяется временем переходного процесса отработки единичного шага. Момент нагрузки ШД не должен превышать  $25 \div 50\%$  от  $M_{\text{МАХ}}$ .

Точность ШД зависит от величины шага на импульс  $\varphi = 360^\circ / kpt$ , где  $k=1 \div 4$  – коэффициент, зависящий от вида коммутации обмоток статора;  $p$  – число пар полюсов активного ротора в ШДА или число зубцов  $p=z_R$  пассивного ротора в ШДР;  $t$  – число полюсов статора или сумма числа полюсов многостаторного ШД. В ШДА минимальный шаг на импульс составляет  $9-15^\circ$ , в ШДР –  $1-2^\circ$ , т.к. ширина зуба не может быть меньше 1 мм. При этом статическая ошибка составляет примерно  $\pm(0,08 \div 0,16)$  от единичного шага ШД.

В переходных режимах из-за электромагнитного запаздывания токов динамическая ошибка в ШД может достигать трехкратной статической ошибки без выпадения двигателя из синхронизма [31].

**Исполнительные электромагнитные устройства** могут строиться на основе использования электромагнитных муфт (ЭММ) или ходовых электромагнитов (ХЭМ) [27, 29, 31, 34].

**Электромагнитные муфты** (ЭММ) имеют ведущую и ведомую полумуфты и электромагнитную систему с обмоткой возбуждения (рис. 3.2.13). Ведущая полумуфта соединяется с валом ведущего двигателя с нерегулируемой скоростью  $\Omega_1$ , а ведомая полумуфта соединяется с валом ОУ с регулируемой скоростью вращения  $\Omega_2$ . Управ-

ляющим воздействием является ток в обмотке возбуждения ЭММ, а управляемой величиной является момент  $M_2 \leq M_1$ , передаваемый на вал ведомой полумуфты и ОУ, в результате чего изменяется скорость  $\Omega_2 \leq \Omega_1$ . Следовательно, ЭММ является управляемым понижающим трансформатором механической мощности  $M_2 \Omega_2 \leq M_1 \Omega_1$  с изменением скольжения  $S = 1 - \Omega_2 / \Omega_1$ . При этом мощность скольжения  $\Delta P = P_1 - P_2 = M_1 \Omega_1 - M_2 \Omega_2$  выделяется в ЭММ в виде ее нагрева.

ЭММ по сравнению с электродвигателями имеют меньшую инерционность, меньший вес, меньший расход меди, меньшую стоимость и обеспечивают создание простых регулируемых приводов с использованием дешевых нерегулируемых асинхронных двигателей.

По принципу действия различают ЭММ с механической связью с передачей момента вращения за счет механического трения (фрикционные и порошковые ЭММ) или механического зацепления (зубчатые и кулачковые ЭММ) и ЭММ с магнитной связью с передачей момента вращения за счет взаимодействия магнитного поля ведущего вращающегося индуктора и тока ведомого якоря, как в асинхронных двигателях (асинхронные ЭММ) или как в ШДА и ШДР (асинхронно-синхронные, синхронные и гистерезисные ЭММ).

1) *Электромагнитные фрикционные муфты* (ЭМФМ) бывают дисковыми или порошковыми. В ЭМФМ момент передается за счет трения между элементами ведущей и ведомой полумуфт под воздействием электромагнитной силы, создаваемой обмоткой управления. Токоподвод к обмотке управления в ЭМФМ может быть контактным через вращающиеся контактные кольца и неподвижные щетки или бесконтактным при неподвижно расположенной обмотке и передаче магнитного потока через воздушный кольцевой зазор.

**Однодисковые ЭМФМ** (рис. 7.2.13, а) состоят из полумуфт 5 и 6 из стали или чугуна, расположенных на валах 3 и 9, и кольцевой обмотки управления 1, размещенной на полумуфте 5 и получающей ток через контактные кольца 2 и щетки 4. Полумуфта 6 может немного перемещаться по шлицам 8 вдоль вала 9 и постоянно отжимается слабой пружиной 7 в правое крайнее положение для исключения трения с полумуфтой 5 при отсутствии тока в обмотке управления 1. При подаче постоянного тока в обмотку управления 1 полумуфта 6 притягивается к полумуфте 5, сжимая пружину 7. Момент сухого трения между полумуфтами 5 и 6 увеличивается с повышением тока в обмотке управления ЭМФМ, вплоть до отсутствия скольжения полумуфт относительно друг друга. Питание обмотки управления постоянным током необходимо для исключения нагрева массивных полу-

муфт ЭМФМ вихревыми токами. Для устранения магнитного прилипания полумуфт при отсутствии тока в обмотке управления на полумуфте 5 установлена кольцевая немагнитная прокладка 10 из бронзы или текстолита.

**Электромагнитные зубчатые (кулачковые) муфты (ЭМЗМ)** устроены аналогично однодисковым ЭМФМ (рис. 7.2.13, а), но имеют на соприкасающихся поверхностях полумуфт 5 и 6 венцы сцепления с одинаковыми по размеру зубьями (или кулачками). ЭМЗМ называются муфтами сцепления, поскольку они работают по принципу реле (включено–выключено) без скольжения между полумуфтами.

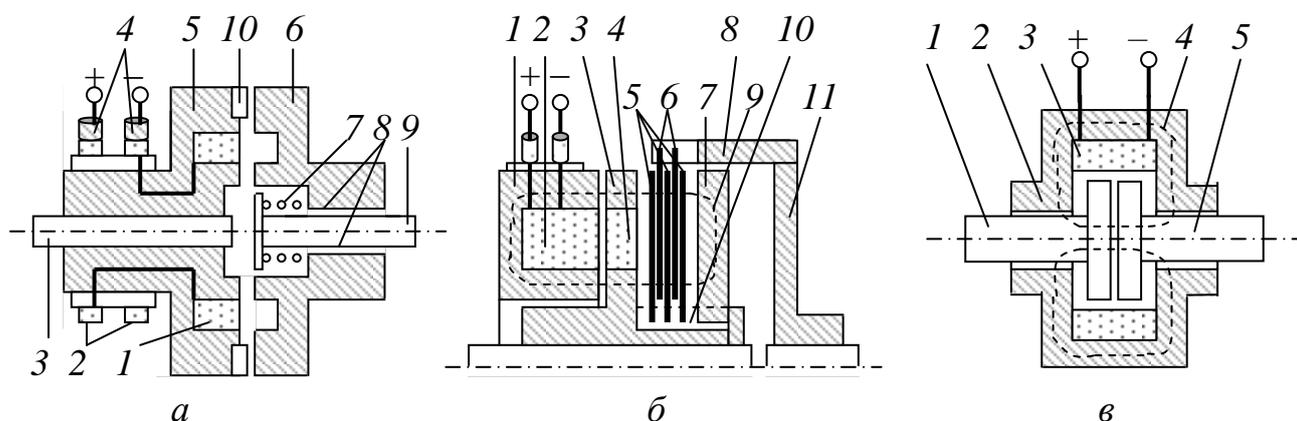


Рис. 3.2.13. Схемы электромагнитных фрикционных муфт

Многодисковые ЭМФМ с бесконтактным токоподводом (рис. 7.2.13, б) состоят из неподвижного корпуса 1 с кольцевой обмоткой управления 2, ведущей полумуфты 3 с немагнитной вставкой 4, стальными фрикционными дисками 5 и якорем 7, ведомой полумуфты 11 со стальными фрикционными дисками 6, передающими момент трения на полумуфту 11 через поводок 8. Якорь 5 и диски 4 могут немного перемещаться по шлицам 10 вдоль оси ведущего вала, а диски 6 – вдоль оси ведомого вала по прорези поводка 8. Расцепление пакета фрикционных дисков при отключении питания обмотки управления ЭМФМ обеспечивается упругими крайними стальными дисками 5 с “жесткой” волной по их плоскости.

При вращении ведущей полумуфты 3 и питания обмотки управления 2 ЭМФМ постоянным током (рис. 7.2.13, б) магнитный поток 9 преодолевает воздушные зазоры, притягивает якорь 7 и сжимает диски 5 и 6, между которыми создается момент трения  $M_2$ , передаваемый на ведомую полумуфту 11 выходного вала. Регулирование тока в обмотке управления позволяет в некоторых пределах регулировать передаваемый момент трения и скорость вращения на выходе ЭМФМ.

Однодисковые и многодисковые ЭМФМ также используются в качестве тормозных муфт, предназначенных для остановки (стопорения) двигателей и вращающихся механизмов. В тормозных муфтах ведомая часть механически неподвижна.

Электромагнитные порошковые муфты (ЭМПМ) относятся к фрикционным муфтам вязкого трения, обеспечивающим более широкий диапазон регулирования момента и скорости по сравнению с ЭМФМ. ЭМПМ действуют на основе изменения физических свойств ферромагнитной массы из смеси 80÷85% порошка карбонильного железа с жидким маслом или порошком талька или графита, которая заполняет пространство между ведущей и ведомой полумуфтами, под влиянием магнитного поля. ЭМПМ (рис. 7.2.13, в) состоит из неподвижного чугунного или стального корпуса 2, кольцевой обмотки управления 3, стальных ведущей и ведомой полумуфт 1 и 5 с дисками, между которыми имеется небольшой зазор. Зазор между дисками и весь внутренний объем ЭМПМ заполнен ферромагнитной массой. При вращении ведущей полумуфты 1 и отсутствии магнитного поля на ведомую полумуфту 5 передается небольшой вращающий момент от перемешивания ферромагнитной массы. С появлением и усилением магнитного поля частицы железа располагаются все более плотными цепочками вдоль силовых магнитных линий, что приводит как бы к загустеванию ферромагнитной массы и усилению трения между ведущим и ведомым дисками полумуфт 1 и 5. Регулирование тока в обмотке управления 3 изменяет магнитный поток 4 в ЭМПМ и величину момента трения, передаваемого на ведомую полумуфту 5 и скорость ее вращения.

2) Электромагнитные муфты скольжения (ЭМС) действуют по принципу асинхронного двигателя (рис. 7.2.5). ЭМС состоят из двух полумуфт, на ведущей из которых расположен индуктор (аналог статора) с обмоткой возбуждения, а на ведомой – якорь (аналог ротора). В отличие от асинхронного двигателя в ЭМС обмотка возбуждения питается постоянным током и создает магнитное поле неподвижное относительно индуктора (статора). Якорь в ЭМС может быть выполнен с обмоткой (короткозамкнутой, фазной, с токопроводящей гильзой) или без обмотки (гладкий, зубчатый, в виде стакана).

Взаимодействие вращающегося магнитного потока от индуктора, расположенного на ведущей полумуфте ЭМС, с якорем, расположенным на ведомой полумуфте, создается вращающий момент, увлекающий якорь в направлении вращения индуктора. Величина передаваемого момента и скорость вращения регулируется изменением тока

в обмотке возбуждения. При этом механическая характеристика ЭМС определяется по формуле Клосса (7.2.16).

Ходовые электромагниты (ХЭМ) преобразуют управляющие воздействия в виде тока в обмотках управления ХЭМ в механические воздействия на объект управления в виде движущей силы или дискретного перемещения регулирующего органа ОУ (рис. 7.2.14).

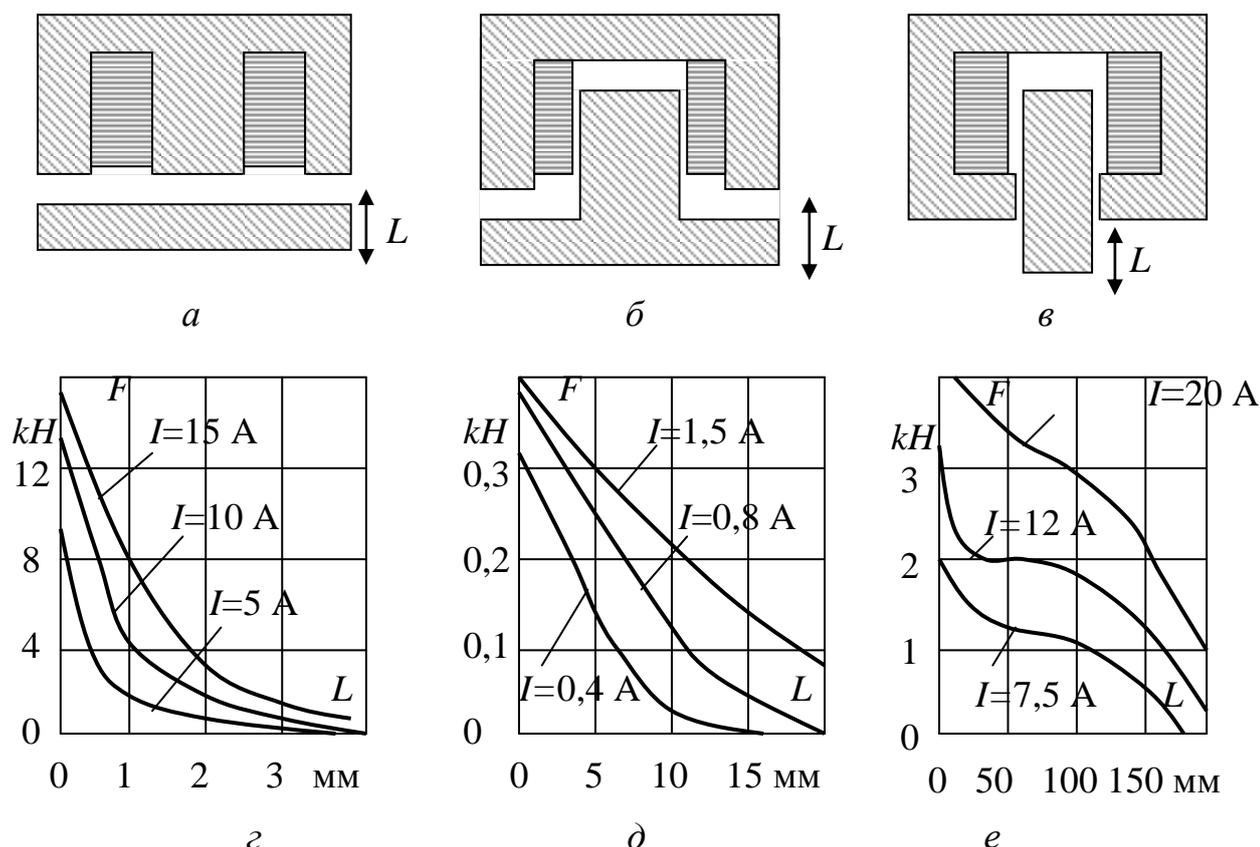


Рис. 7.2.14. Форма магнитопроводов и тяговые характеристики электромагнитов

Электромагнитные исполнительные элементы оказывают непосредственное воздействие на ОУ, преобразуя сигнал управления в усилия или перемещения. В автоматике в качестве электромагнитных исполнительных элементов обычно используются соленоидные механизмы с ходовыми электромагнитами (ХЭМ).

ХЭМ состоят из магнитной системы с подвижным якорем и обмотки управления переменного или постоянного тока (рис. 7.2.14). В зависимости от хода якоря  $L$ , тягового усилия  $F$  и конструкции различают короткоходовые ХЭМ с ходом якоря  $3 \div 4$  мм (рис. 7.2.14, а, з), среднеходовые ХЭМ с ходом якоря до  $15 \div 20$  мм (рис. 7.2.14, б, д) и длинноходовые ХЭМ с ходом якоря до  $150 \div 200$  мм (рис. 7.2.14, в, е).

### Контрольные вопросы

1. Какие электрические исполнительные устройства используются в САУ?
2. На каком электромагнитном принципе работают все электродвигатели?
3. Устройство, принцип действия, схемы включения и особенности применения двигателей постоянного тока (ДПТ) независимого, последовательного и смешанного возбуждения?
4. Как представляются уравнения электрического и механического равновесия ДПТ независимого возбуждения (ДПТ НВ)?
5. Какие статические характеристики имеет ДПТ НВ при управлении по напряжению на якоре, по напряжению на обмотке возбуждения, при введении добавочного сопротивления в цепь якоря?
6. Как описываются переходные процессы в ДПТ НВ операторным уравнением в отклонениях от установившегося процесса?
7. Устройство и принцип действия бесколлекторных двигателей постоянного тока (БДПТ), называемых также вентильными двигателями?
8. Как регулируется скорость вращения БДПТ?
9. Устройство и действие двухфазных асинхронных двигателей (ДАД)?
10. Способы регулирования момента и скорости ДАД?
11. Регулировочные и механические характеристики ДАД?
12. Устройство и действие трехфазных асинхронных двигателей (ТАД)?
13. Какие механические характеристики имеют ТАД?
14. Как регулируется скорость вращения ТАД?
15. Как действует САУ скоростью ТАД при управлении по напряжению?
16. Устройство и действие шаговых двигателей с активным ротором?
17. Устройство и действие шаговых двигателей с реактивным ротором?
18. Устройство и действие электромагнитных фрикционных муфт?
19. Устройство и принцип действия порошковых муфт трения?
20. Устройство и принцип действия электромагнитных муфт скольжения?
21. Назначение, устройство и принцип действия ходовых электромагнитов?

### 7.3. Гидравлические и пневматические двигатели

Гидравлические и пневматические двигатели преобразуют энергию сжатой жидкости (масла) или сжатого газа (воздуха) в движущую силу, крутящий момент, скорость или перемещение регулирующего органа ОУ [34]. Комплекс из источника энергопитания (насоса), устройства управления и двигателя называется сервомеханизмом. На входе сервомеханизма действует управляющий сигнал, на выходе – механическое воздействие на ОУ.

По сравнению с электродвигателями гидравлические двигатели (ГД) и пневматические двигатели (ПД) имеют примерно в 10 раз больше удельную мощность на килограмм веса, равную в среднем 10 кВт/кг. Преимуществами ГД и ПД также являются простота получения возвратно-поступательных и вращательных движений без кинематических передач и редукторов, большая мощность при малых габаритах, высокая надежность и большой срок службы, простота конструкции и малая стоимость, высокое быстродействие благодаря большим движущим силам и малым инерционным массам, нечувствительность к электромагнитным помехам и радиации. Недостатки ГД и ПД – невозможность размещения двигателя, устройства управления и источника питания на удалении друг от друга, утечки при износе уплотнений подвижных сочленений, потребность в насосах и трубопроводах высокого давления.

**Гидравлические сервомеханизмы** состоят из гидронасоса, гидродвигателя и управляющего устройства [34].

1) *Гидронасосы* преобразуют механическую энергию первичного двигателя в энергию сжатой рабочей жидкости (масла). Гидронасосы и гидродвигатели имеют одинаковое устройство и являются *гидравлическими машинами*, обладающими свойством обратимости.

Шестеренчатые гидронасосы (рис. 7.3.1, а) применяют при давлении до  $25 \text{ кг/см}^2$  и производительности до 5–140 л/мин. Лопастные гидронасосы центробежного типа (рис. 7.3.1, б) и типа винта (рис. 7.3.1, в) применяют при давлениях от 25 до  $65 \text{ кг/см}^2$  и производительности до 200 л/мин. Поршневые (рис. 7.3.1, г) и диафрагменные (плунжерные) (рис. 7.3.1, д) гидронасосы применяют при давлении от  $65 \text{ до } 200 \text{ кг/см}^2$  и производительности до 400 л/мин.

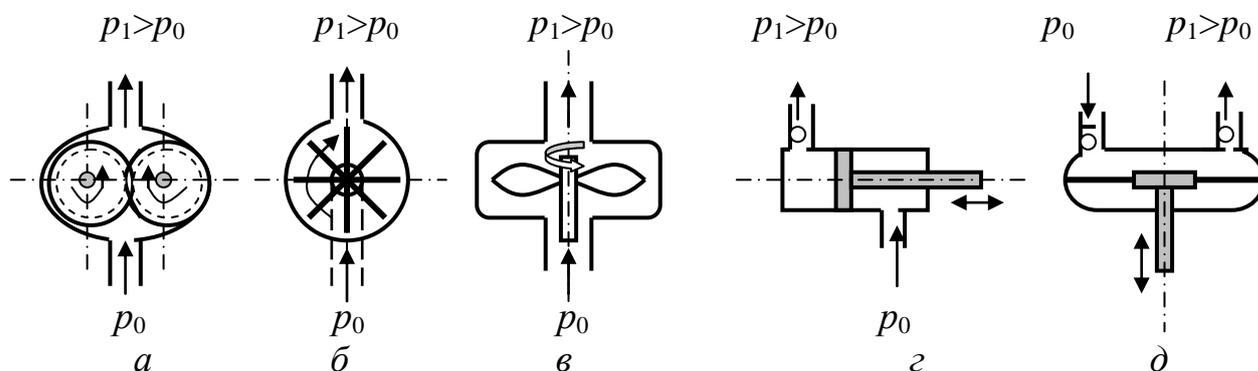


Рис. 7.3.1. Схемы гидронасосов

2) *Гидродвигатели* используются для выполнения возвратно-поступательных движений с применением силовых гидроцилиндров и вращательных движений с применением ротационных гидромоторов.

*Силовые гидроцилиндры (СГЦ)* (рис. 7.3.1, *з*) применяются в автоматике для возвратно-поступательного перемещения рабочих органов в стационарных ОУ (станки, роботы, прессы и др.) и автономных машинах (экскаваторы, погрузчики и др.). СГЦ создают большие усилия и практически не влияют на инерционность ОУ из-за малости собственной кинетической энергии  $mV^2/2$  движущегося поршня.

*Ротационные гидромоторы (РГМ)* делятся на РГМ с непрерывным вращением выходного вала (рис. 7.3.2, *а, б*) и поворотные РГМ с ограниченным углом поворота выходного вала (рис. 7.3.2, *з*).

*РГМ с непрерывным вращением* используются в САУ для плавного регулирования скорости движения ОУ в диапазоне до 1:1300. Из многообразия РГМ в регулируемых гидроприводах обычно применяются аксиально-поршневые, радиально-поршневые и лопастные РГМ.

*Аксиально-поршневые РГМ* с наклонной шайбой имеют несколько силовых цилиндров 1, расположенных в неподвижном блоке цилиндров 2 аксиально по окружности. Поршни 3 этих цилиндров поочередно давят своими толкателями на свободно вращающуюся шайбу 4 подшипника, которая создает наклон и тангенциальную силу вращения основания 6 подшипника, шарнирно связанного по углу поворота с выходным валом 5, что приводит к вращению выходного вала 5 РГМ (рис. 7.3.2, *а*). В левой части РГМ расположено распределительное устройство подачи давления в цилиндры, управляемое от вращающегося выходного вала 5 и определяющее направление вращения. Скорость вращения РГМ регулируется изменением количества подводимой жидкости.

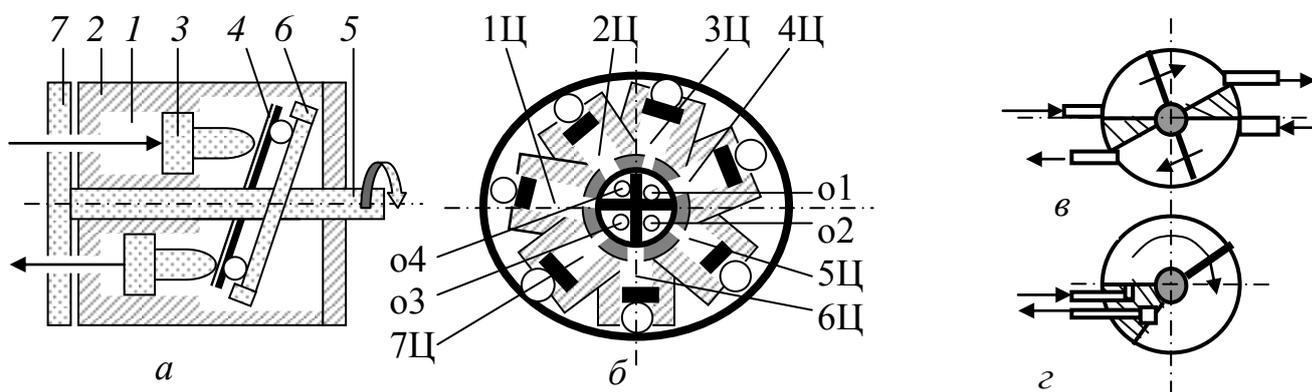


Рис. 7.3.2. Схемы гидромоторов

*Радиально-поршневые РГМ* двойного действия с цапфенным распределением рабочей жидкости (рис. 7.3.2, *б*) имеют несколько радиально расположенных силовых цилиндров 1Ц–7Ц во вращающемся звездообразном блоке цилиндров, поршни которых давят на шарики,

прижимая их к эллипсоидной стенке неподвижного корпуса. При нагнетании жидкости через отверстия  $o1$  и  $o3$  создается момент сил, вращающий звездообразный блок цилиндров и вал РГМ по часовой стрелке, а при нагнетании через отверстия  $o2$  и  $o4$  – против часовой стрелки. Внутри цилиндров имеются пружинки, не показанные на рисунке, прижимающие шарики поршнями к стенкам эллипсоида.

*Поворотные гидромоторы (ПГМ)* изготавливаются с одной (рис. 7.3.2, *г*) и двумя лопастями (рис. 7.3.2, *в*). ПГМ с одной лопастью имеет угол поворота до  $320^\circ$ , но он не разгружен от радиальных усилий. ПГМ с двумя лопастями свободен от этого недостатка, но его угол поворота не превышает  $160^\circ$ .

3) *Гидравлические устройства управления (ГУУ)* строятся по принципам дроссельного, объемного или струйного управления.

*ГУУ с дроссельным управлением (ГУУДУ)* содержат дроссель, регулирующий поступление сжатой жидкости в гидродвигатель. Наиболее распространены дроссели типа *золотниковая пара*, состоящие из цилиндра с окнами (щелями) в стенках, перекрываваемых в разной степени поршнем. В схеме ГУУДУ с четырехщелевым золотником при нейтральном положении поршня (рис. 7.3.3, *а*) левая и правая полости силового цилиндра *1* закрыты поршнем золотника *2* и гидродвигатель заторможен. При смещении поршня в левое положение напорная магистраль соединяется с левой полостью силового цилиндра и его поршень перемещается вправо, вытесняя отработанную жидкость из правой полости рабочего цилиндра. При смещении поршня золотника в правое положение поршень в силовом цилиндре будет перемещаться влево, вытесняя отработанную жидкость из левой полости силового цилиндра. Скорость движения поршня в силовом цилиндре или скорость вращения гидромотора регулируется изменением площади сечения щелей золотниковой пары при смещениях поршня золотника в разные положения.

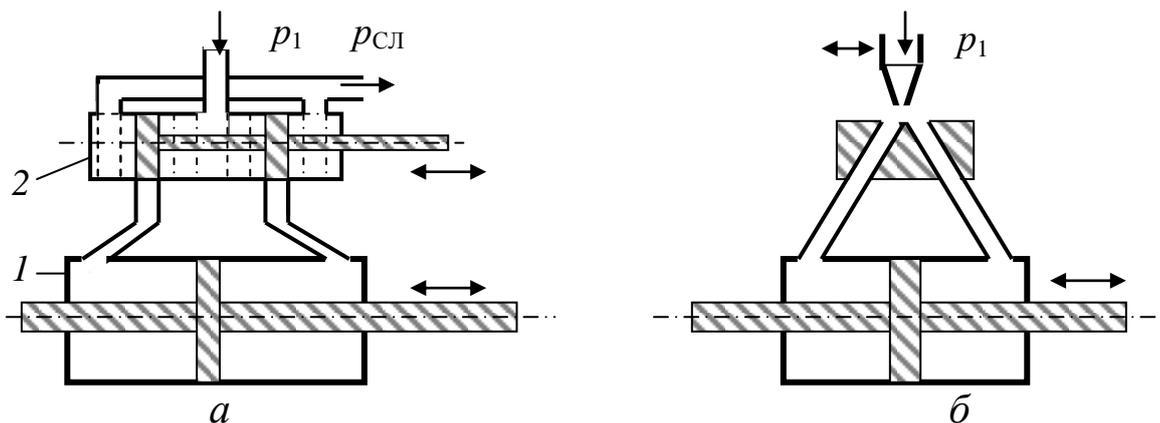


Рис. 7.3.3. Схемы ГИМ дроссельного и струйного управления

*ГУУ с объемным управлением (ГУУОУ)* действуют по принципу регулирования производительности насоса для изменения скорости гидродвигателя за счет изменения объема рабочей жидкости, проходящей через гидродвигатель в единицу времени. ГУУОУ имеют высокий к.п.д., но и высокую стоимость потому, что для каждого гидродвигателя нужен отдельный насос.

*ГУУ струйного управления (ГУУСУ)* (рис. 7.3.3, б) имеют в качестве управляющего элемента подвижную струйную трубку с конической насадкой и плиту с двумя отверстиями, соединенными с рабочими камерами исполнительного гидродвигателя. В ГУУСУ кинетическая энергия потока (струи) рабочей жидкости, вытекающей (бьющей) под давлением из насадки трубки, преобразуется в статическое давление рабочей жидкости, создаваемое в рабочих камерах гидродвигателя. Достоинством ГУУОУ являются большая чувствительность к перемещению струйной трубки и высокая надежность функционирования, а недостатками – большой расход рабочей жидкости, вследствие чего низкий к.п.д. Поэтому ГУУСУ применяются только в маломощных сервомеханизмах [34].

***Пневматические сервомеханизмы*** преобразуют энергию сжатого газа (воздуха) в механическую энергию воздействий на ОУ. По принципу действия и составу основных элементов пневматические и гидравлические сервомеханизмы аналогичны. Пневматические сервомеханизмы состоят из источника газовой энергии, управляющего устройства и пневматического двигателя [34].

1) *Источники газовой энергии* обычно состоят из очистителя воздуха (или газового генератора) и компрессора (насоса), сжимающего и накачивающего газ или воздух в ресивер (аккумулятор сжатого газа или воздуха в виде герметичного баллона).

2) *Управляющие устройства* в пневматических сервомеханизмах строятся по тем же принципам дроссельного, объемного или струйного управления, что и в гидравлических сервомеханизмах.

3) *Пневматические двигатели (ПД)*, используемые в САУ, разделяются на следующие шесть типов [34]:

- 1) поршневые ПД (силовой цилиндр) (рис. 7.3.1, з);
- 2) диафрагменные ПД (мембранные, сильфонные) (рис. 7.3.1, д);
- 3) газомоторные ПД (поршеньковые газомоторы) (рис. 7.3.2, а);
- 4) турбинные ПД (рис. 7.3.4, а);
- 5) струйно-реактивные ПД (рис. 7.3.4, б);
- 6) комбинированные ПД.

ПД первого, второго и третьего типов функционируют на основе использования потенциальной энергии (силы давления) сжатого газа и их устройство и принципы действия аналогичны соответствующим типам гидродвигателей, рассмотренным выше.

*Турбинные ПД* (ТПД) (рис. 7.3.4, а) состоят из рабочего колеса 1 с лопатками 2 и соплами 3, образующими лопаточный аппарат турбины, в котором потенциальная энергия сжатого газа преобразуется в кинетическую энергию и механическую энергию вращения рабочего колеса – единственного движущегося элемента турбинного ПД.

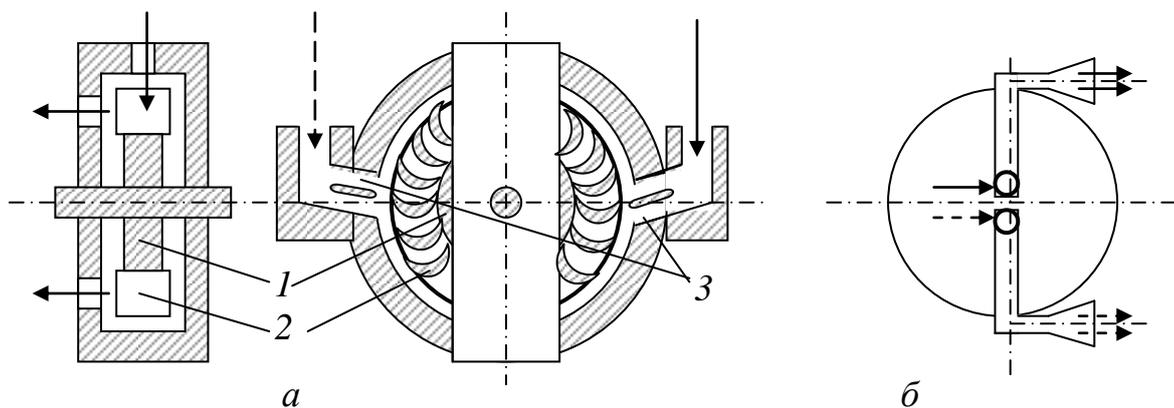


Рис. 7.3.4. Схемы турбинного и струйно-реактивного пневматических двигателей

В турбинах струя газа, попадая в лопаточный аппарат «сопло-лопатка», изменяет направление движения и оказывает давление на лопатки, вызывая вращение колеса турбины. Реверсивные турбины имеют на одном валу два комплекта «рабочее колесо – сопло» с разным расположением лопаток (рис. 7.3.4, а). Крутящий момент и скорость вращения ТПД регулируется изменением расхода газа методом дроссельного или объемного управления, как в гидродвигателях.

В зависимости от геометрии лопаточного аппарата турбины разделяются на активные (в которых в основном используется кинетическая энергия газовой струи) и активно-реактивные (в которых используется не только кинетическая, но и потенциальная энергия сжатого газа за счет его расширения в лопаточном аппарате).

*Струйно-реактивные ПД* преобразуют энергию газового потока в усилие (или крутящий момент), развиваемое реактивными соплами (рис. 7.3.4, б). Струйно-реактивные двигатели особенно широко применяются в авиации и ракетной технике.

*Комбинированные пневматические двигатели* являются многоступенчатыми системами, состоящими из нескольких однокаскадных пневматических двигателей (ПД), работающих на общий вал. При этом по питанию сжатым газом ПД включены последовательно – от источника газ поступает в первую турбину, полученный на ее выходе газ направляется во вторую турбину и т.д. В эту общую систему могут объединяться ПД разных типов. В комбинированных ПД повышается к.п.д. и быстродействие потому, что в однокаскадных ПД невозможно использовать всю энергию газа с высоким давлением (это связано с предельным циклом Карно) и два однокаскадных ПД половинной мощности имеют суммарный момент инерции меньше, чем один однокаскадный ПД полной мощности.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие достоинства и недостатки имеют гидравлические и пневматические сервомеханизмы по сравнению с электромеханизмами?
2. Как устроены шестеренчатые, центробежные, лопастные, поршневые и диафрагменные гидравлические машины (насосы и двигатели)?
3. Какое устройство и принцип действия имеют аксиально-поршневые и радиально-поршневые гидродвигатели непрерывного вращения?
4. Какое устройство и принцип действия имеют однолопастные и двухлопастные поворотные гидромоторы?
5. Как регулируется движущая сила и скорость гидро- и пневмодвигателей с дроссельным, объемным и струйным управлением?
6. Какое устройство и принцип действия имеют неререверсивные и реверсивные газовые турбины?
7. Как действуют струйно-реактивные пневмодвигатели?
8. Как действуют комбинированные многоступенчатые пневмодвигатели?

## 8. САУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ

### 8.1. Включение ЭВМ в контур управления

В аналоговых САУ управляющие воздействия формируются регуляторами на *операционных усилителях* с жестко заданными алгоритмами управления. В цифро-аналоговых САУ регуляторы выполняются на управляющих цифровых *микроЭВМ*, имеющих запоминающее устройство, что обеспечивает гибкую автоматическую оптимизацию алгоритма управления для повышения качества функционирования САУ, недостижимую в аналоговых системах. Управляющие микроЭВМ, называемые микроконтроллерами, изготавливаются по интегральной технологии и могут располагаться на одном кристалле площадью 20-30 квадратных миллиметров, поэтому очень дешевы, не требуют наладки, характеризуются простотой и удобством использования, легко встраиваются в объекты управления, имеют преимущества перед аналоговыми устройствами по стабильности характеристик, отсутствию дрейфа нуля, точности вычислений, по возможности автоматического изменения алгоритма управления, выполнения диагностики САУ и выполнения других функций [2, 18, 19, 20].

ЭВМ включается в контур управления по структурам с центральной управляющей микроЭВМ (рис. 8.1.1, а) или с автономными управляющими микроЭВМ (рис. 8.1.1, б). При этом ЭВМ должны формировать управляющие воздействия на ОУ в течение одного периода квантования для исключения нарастающего запаздывания.

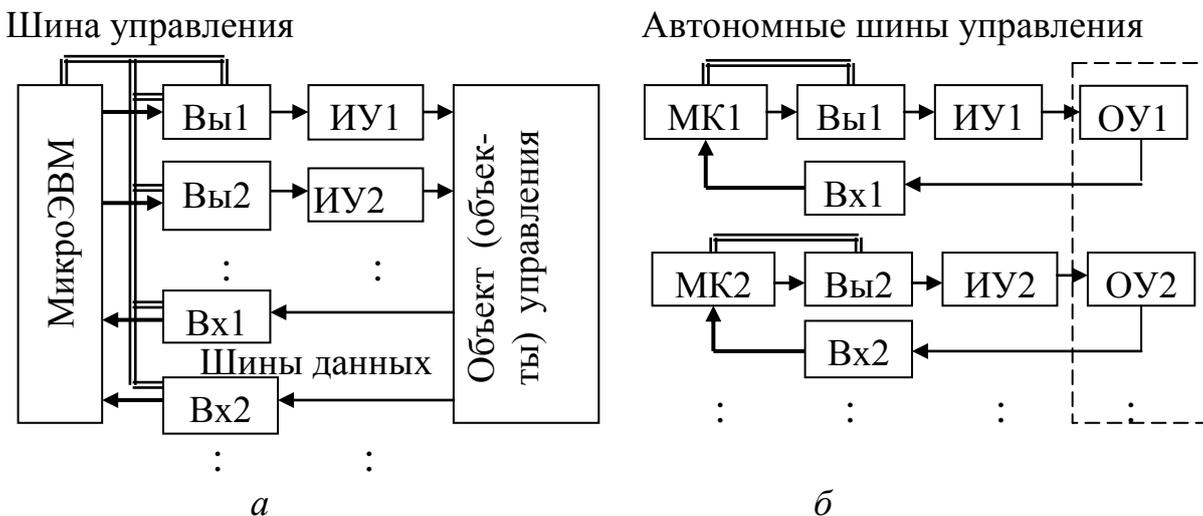


Рис. 8.1.1. Структуры САУ с управляющими микроЭВМ

Структуры с центральной микроЭВМ обычно применяются в САУ сложными многомерными объектами (теплоэлектростанции,

прокатные станы, обрабатывающие центры и др.) или в многомерных САУ группой одномерных объектов (автоматические линии станков с ЧПУ, птицефабрики и др.). Процессор центральной микроЭВМ по очереди обслуживает отдельные каналы управления. Очередность обслуживания может осуществляться по жесткой программе или по мере поступления заявок от отдельных каналов с учетом приоритетов согласно положениям теории массового обслуживания.

В САУ с автономными микроЭВМ (микроконтроллерами МК) в каждом контуре управления объектами центральная ЭВМ либо отсутствует, либо вводится для выполнения функций диспетчера или супервизора. Такие системы по сравнению с САУ с центральной ЭВМ имеют более высокую надежность и меньшую стоимость (при числе каналов до пяти) при отсутствии длинных линий связи и возможности объединения микроЭВМ в локальные вычислительные сети, обеспечивающие многократное повышение надежности и расширение выполняемых функций. Поэтому принцип децентрализованного микроконтроллерного управления в САУ с автономными микроЭВМ имеет преимущественное применение [2, 19, 20]. В контурах управления САУ с автономными микроЭВМ в качестве регуляторов часто используют *регулирующие микроконтроллеры (ремиконты)*, которые состоят из устройства ввода-вывода, микроЭВМ и пульта оператора (рис. 8.1.2) [2, 20].

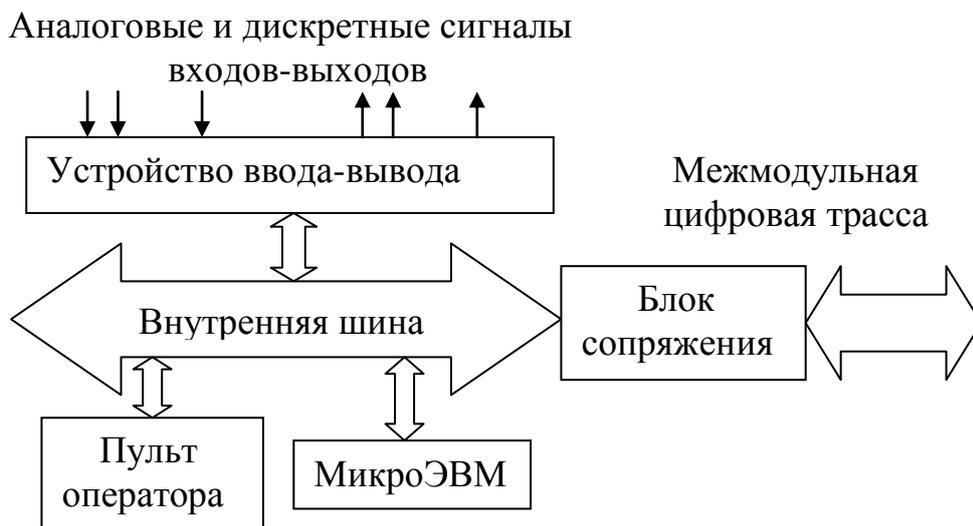


Рис. 8.1.2. Структурная схема ремиконта

Входные цепи ремиконта рассчитаны на подключение аналоговых и дискретных датчиков, а в выходных цепях формируются аналоговые и дискретные сигналы управления исполнительными устройствами САУ. Устройства аналогового ввода-вывода содержат узлы

гальванического разделения сигналов, узел мультиплексирования аналоговых входных сигналов и преобразователи АЦП, ЦАП, дискретно-цифровой преобразователь (ДЦП) и цифро-дискретный преобразователь (ЦДП). Узлы гальваноразвязки подавляют помехи общего вида и обеспечивают работу с источниками информации, находящимися под различными потенциалами. В выходах ремиконта мультиплексирование не используется и число выходных ЦАП равно числу выходных цепей ремиконта, что связано с необходимостью запоминания управляющих сигналов после завершения вычислений.

МикроЭВМ ремиконта имеет традиционную компьютерную организацию с той особенностью, что наибольшая часть его памяти программируется на заводе-изготовителе и поэтому в ремиконте отсутствуют средства ввода и отладки программ и модули сопряжения с ними, что позволяет упростить устройство и эксплуатацию ремиконтов. В ПЗУ ремиконта записывается библиотека из 20–25 типовых алгоритмов, комбинации которых, программируемые с пульта оператора в любом сочетании, позволяют осуществлять автоматическое управление объектами практически любой сложности. Пульт оператора ремиконта используется для установки требуемой конфигурации контура управления, выбора алгоритма управления, контроля значений технологических переменных, оперативного вмешательства в процесс управления и др. Для программирования используется десятичный код, набираемый на панели оператора.

В типовой линейаризованной одномерной цифро-аналоговой САУ (ЦАС), регулятором является микроЭВМ с синхронно работающими АЦП на входе и ЦАП на выходе, управляющая непрерывной выходной частью САУ (рис. 8.1.3) [2, 18, 19, 20].

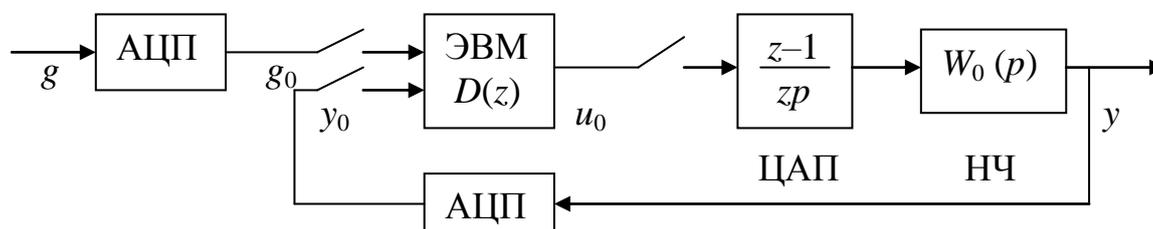


Рис. 8.1.3. Линейаризованная одномерная ЦАС

В ЦАС задачи, решаемые ЭВМ, заключаются в обработке поступающей информации, вычислении ошибки (разности между заданным  $g_0$  и фактическим  $y_0$  значениями управляемой величины при отсутствии аналогового сравнивающего устройства), вычислении управляющего воздействия  $u_0$  в соответствии с алгоритмом управления, выполнении операций контроля, подготовки к работе и т.д.

Решение этих задач осложняется тем, что в ЦАС имеется квантование сигналов по времени, что относит их к классу импульсных систем, и квантование сигналов по уровню, что обуславливает их нелинейность. Поэтому методы исследования нелинейных систем мало пригодны для ЦАС и основным методом исследования ЦАС является их моделирование на ЭВМ. Однако приближенные расчеты ЦАС как *линеаризованных импульсных САУ* без учета квантования по уровню позволяют решать практические задачи, а влияние квантования по уровню можно учитывать дополнительно [1, 2, 20].

Линеаризация ЦАС основана на замене ступенчатых характеристик АЦП и ЦАП линейными “средними” прямыми “величина-код”, тогда как метод линеаризации разложением в ряд Тейлора с учетом линейных членов для линеаризации ЦАС оказывается непригодным, поскольку исключает возможность использования нелинейных законов управления. Линеаризация АЦП в ЦАС определяется числом уровней одной ветви характеристики  $\mu_1 = 2^{\alpha_1} - 1 = g_{\max} / \delta_1$ , где  $\alpha_1$  – число двоичных разрядов АЦП (без учета знакового разряда);  $g_{\max}$  – максимальное входное воздействие, соответствующее насыщению АЦП;  $\delta_1$  – величина (цена) единицы младшего разряда АЦП. Крутизна линеаризованной характеристики АЦП  $k_1 = 1/\delta_1$ . Обычно число разрядов АЦП составляет от 8 до 32. Например, для преобразования в код угла поворота какого либо датчика с погрешностью не более  $\pm 10''$  цена единицы младшего разряда должна быть  $\delta_1 \leq 20''$ , а для преобразования угла в пределах  $\pm 180^\circ$  число разрядов АЦП должно быть  $\alpha_1 \geq \log_2 \left( \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{20} + 1 \right) = 14,2$ . Число разрядов ЦАП может быть меньше, чем в АЦП, так как в ЦАП число разрядов может быть равно единице (релейный закон управления).

ЭВМ с АЦП на входе и ЦАП на выходе представляются ЗФП [2]

$$D(z) = \frac{U_0(z)}{X_0(z)} = \frac{b_s + b_{s-1}z + \dots + b_0z^s}{a_k + a_{k-1}z + \dots + a_0z^k}, \quad (8.1.1)$$

где  $U_0(z)$  и  $X_0(z)$  –  $z$ -изображения решетчатых функций выходной величины ЭВМ  $u_0[n]$  и входной величины (ошибки управления)  $x_0[n] = g_0[n] - y_0[n]$  при обязательном соотношении  $k \geq s$  [2].

Поделив (8.1.1) на  $z^k$ , получим для предельного случая  $s=k$

$$D(z) = \frac{U_0(z)}{X_0(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_kz^{-k}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k}}. \quad (8.1.2)$$

Из (8.1.2) можно получить выражение

$$(a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k})U_0(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_kz^{-k})X_0(z). \quad (8.1.3)$$

Из (8.1.3) при переходе к оригиналам с учетом теоремы смещения на целое число тактов получим разностное уравнение [2, 20]

$$\begin{aligned} a_0 u_0[n] + a_1 u_0[n-1] + \dots + a_k u_0[n-k] = \\ = b_0 x_0[n] + b_1 x_0[n-1] + \dots + b_k x_0[n-k]. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Поделив уравнение (8.1.4) на  $a_0 \neq 1$ , получим из (8.1.4) при  $a_0 = 1$  алгоритм работы ЭВМ в виде [2, 20]

$$\begin{aligned} u_0[n] = b_0 x_0[n] + b_1 x_0[n-1] + \dots + b_k x_0[n-k] - \\ - (a_1 u_0[n-1] + a_2 u_0[n-2] + \dots + a_k u_0[n-k]). \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Таким образом, ЭВМ выполняет функции некоторого цифрового фильтра (ЦФ) с передаточной функцией  $D(z)$  (8.1.1). Если в установленном режиме (при  $z=1$ ) по (8.1.1)  $D(1)=K$ , то такой ЦФ выполняет в ЦАС функции пропорционального регулятора  $u_0(t)=Kx(t)$ . Если ЭВМ должна выполнять функции интегрирования, то знаменатель в (8.1.1) должен содержать множитель  $(z-1)$ , а при дифференцировании – числитель ЗФП ЭВМ (8.1.1) должен содержать множитель  $(z-1)$ .

Для реализации приближенного дифференцирования в ЭВМ вводится оператор дифференцирования  $p=(\ln z)/T$ , где  $z=\exp(pT)$ , разложенный в степенной ряд по формуле (8.1.6), которая полностью совпадает с использованием для дифференцирования интерполяционных полиномов Ньютона и Лагранжа [3]

$$p = \frac{1}{T} \left[ (1-z^{-1}) + \frac{1}{2}(1-z^{-1})^2 + \frac{1}{3}(1-z^{-1})^3 + \dots \right]. \quad (8.1.6)$$

Ошибка дифференцирования по (8.1.6) оценивается по первому отброшенному члену ограниченного ряда. Условие сходимости ряда в (8.1.6) ограничиваются дифференцированием сигналов с частотой выше  $f \geq 1/6T$ , что в САУ практически маловероятно.

Передаточную функцию разомкнутой ЦАС соответственно структурной схеме (рис. 8.1.3) можно представить в виде

$$W(z) = D(z) \frac{\delta}{\delta_1} \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}, \quad (8.1.7)$$

где  $\delta$  и  $\delta_1$  – цена единицы младшего разряда ЦАП и АЦП.

Передаточная функция замкнутой ЦАС при одинаковых АЦП в каналах прямой и обратной связей (рис. 8.1.3) записывается в виде

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{W(z)}{1+W(z)}. \quad (8.1.8)$$

Передаточная функция по ошибке управления ЦАС будет

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{G_0(z) - Y_0(z)}{G(z)} = \frac{1}{1+W(z)}. \quad (8.1.9)$$

### Контрольные вопросы

1. Какие преимущества имеют регуляторы на микроЭВМ?
2. Какие задачи решают микроЭВМ в замкнутых САУ?
3. Какое назначение имеют АЦП и ЦАП в цифро-аналоговых САУ?
4. Как представляются свойства микроЭВМ в САУ дискретными функциями передачи в виде отношений z-преобразований  $D(z)=U(z)/X(z)$  решетчатых функций выходного  $u[n]$  и входного  $x[n]$  сигналов ЭВМ?
5. Как из z-функции передачи  $D(z)$  микроЭВМ получить алгоритм работы микроЭВМ?
6. Как получить передаточные функции замкнутой ЦАС по задающему воздействию и по ошибке управления?

## 8.2. Устройства связи ЭВМ с объектом управления

Связь управляющей ЭВМ с объектом управления (ОУ) может строиться по синхронному, асинхронному и комбинированному принципам [1, 2]. При *синхронном* принципе связи процесс управления разбивается на циклы равной длительности, определяемые тактовыми импульсами таймера. В каждом цикле происходит опрос датчиков управляемых величин, преобразование их сигналов в цифровую форму, запоминание и обработка полученной информации в ЭВМ и выдача новых значений управляющих воздействий на исполнительные органы ОУ. После этого ЭВМ прерывает вычисления до начала следующего цикла. Все операции должны заканчиваться в одном цикле за интервал времени, в течение которого параметры ОУ изменяются незначительно. *Асинхронный* принцип связи управляющей ЭВМ с ОУ используется для прерывания обработки одних сигналов перед другими сигналами, имеющими более высокий приоритет (например, для отработки аварийных режимов). При *комбинированном* принципе связи используются синхронный и асинхронный принципы для разных ситуаций в ОУ.

Однако в любых системах связь управляющих ЭВМ с ОУ осуществляется с использованием входных аналого-цифровых преобразователей (АЦП) и выходных цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП) [1, 2, 19]. Интегральная технология изготовления АЦП и ЦАП обеспечивает их высокую надежность, быстродействие, малые габариты и низкую стоимость. Устройства связи в виде АЦП и ЦАП не нужны только в случаях сопряжения ЭВМ с цифровыми датчиками информации и исполнительными устройствами с цифровым управлением при одинаковом с ЭВМ кодировании сигналов.

**Цифро-аналоговые преобразователи** (ЦАП) преобразуют цифровые выходные сигналы ЭВМ в двоичном коде в аналоговые сигналы напряжения постоянного тока определенной величины и полярности, воздействующие на усилители и исполнительные органы ОУ. Принцип действия ЦАП основан на суммировании эталонных значений напряжения постоянного тока, пропорциональных весам разрядов входного двоичного кода сигналов от ЭВМ

$$U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{Э}} \sum_{i=1}^n b_i 2^{-i} = U_{\text{Э}} (b_1 \cdot 2^{-1} + b_2 \cdot 2^{-2} + \dots + b_n \cdot 2^{-n}), \quad (8.2.1)$$

где  $U_{\text{Э}}$  – эталонное напряжение;  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – коэффициенты двоичных разрядов, принимающих значения 0 или 1.

К основным параметрам ЦАП относятся:

– *разрешающая способность* – величина, обратная числу уровней аналогового сигнала  $q=1/2^n$ , где  $n$  – число разрядов преобразуемого двоичного кода;

– *точность* – наибольшее отклонение аналогового сигнала от входного цифрового значения, равное цене младшего разряда  $\Delta A_0$ ;

– *нелинейность* – максимальное отклонение линейно увеличивающегося выходного напряжения от прямой линии между нулевым и максимальным его значениями;

– *время преобразования* – время между подачей цифрового кода и достижением выходным аналоговым сигналом значения, отличающегося на величину допустимой погрешности преобразования.

В зависимости от того, преобразуется цифровой код непосредственно в аналоговую величину или вначале преобразуется в промежуточный сигнал с последующим преобразованием в выходную аналоговую величину, различают ЦАП с прямым и промежуточным преобразованием. ЦАП с прямым преобразованием делятся на параллельные и последовательные.

В *параллельных ЦАП* все разряды двоичного кода одновременно подаются на схему суммирования. Параллельные ЦАП состоят из резистивной матрицы, набора токовых ключей, выходного операционного усилителя и источника опорного (эталонного) стабилизированного напряжения (рис. 8.2.1). Резистивная матрица выполняется по схеме с эталонными (весовыми, разрядными) резисторами или по схеме с резистивной сеткой  $R-2R$ .

В ЦАП с эталонными резисторами (рис. 8.2.1, а) входной двоичный код  $N$  поступает на триггеры  $T$  регистра, который управляет состоянием ключей  $S$ , подключающих эталонные (весовые) резисторы  $R_i$  к источнику эталонного напряжения  $U_{\text{Э}}$  при  $b_i=1$  или к нулевой

шине при  $b_i=0$ . Величины сопротивлений эталонных резисторов подбираются по двоичному закону  $R_i=R \times 2^{i-1}$ , при этом разряд с индексом  $i=n$  является младшим, а разряд с индексом  $i=1$  – старшим. Входной ток операционного усилителя  $OY$  определяется суммой

$$I_{BX} = \sum_{i=1}^n \frac{U_{\text{Э}}}{R_i} b_i = \frac{2U_{\text{Э}}}{R} \sum_{i=1}^n b_i \cdot 2^{-i} = \frac{2U_{\text{Э}}}{R} N. \quad (8.2.2)$$

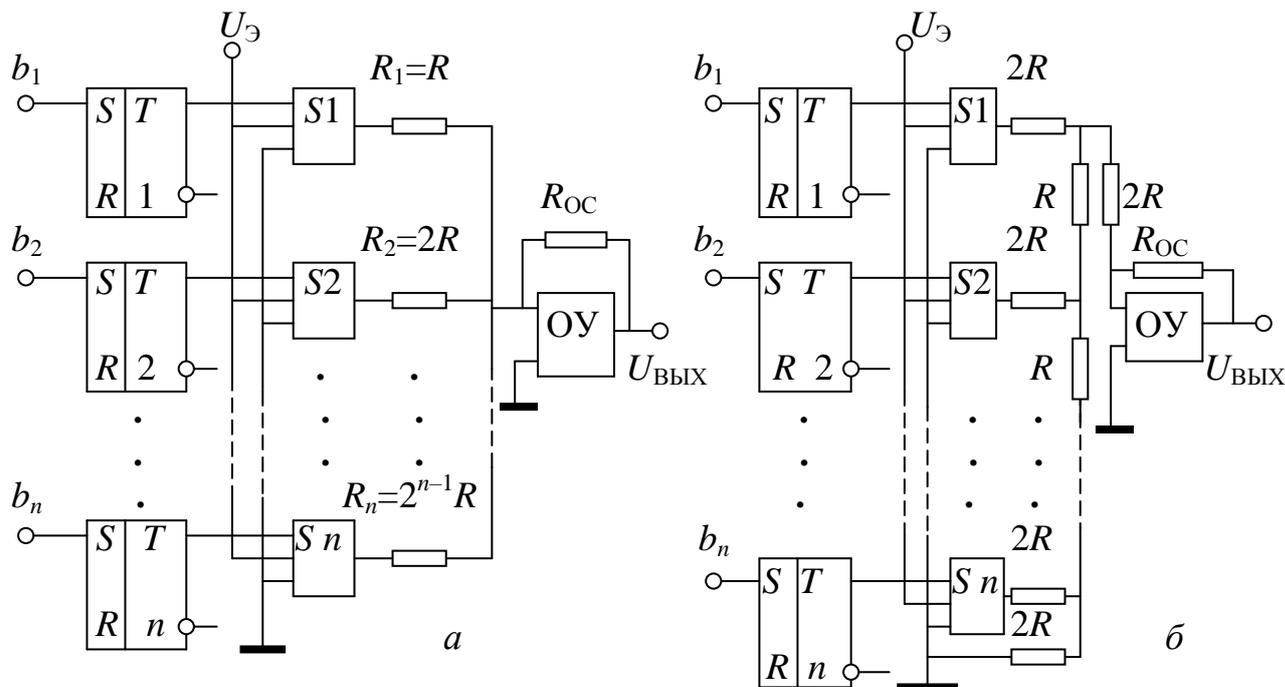


Рис. 8.2.1. ЦАП параллельного кода

Усилитель  $OY$  преобразует ток  $I_{BX}$  в напряжение  $U_{\text{ВЫХ}}$ , масштабирование которого производится подбором величины  $R_{OC}$

$$U_{\text{ВЫХ}} = R_{OC} \cdot I_{BX} = 2U_{\text{Э}} \frac{R_{OC}}{R} N. \quad (8.2.3)$$

В резистивной матрице с эталонными резисторами для каждого разряда двоичного кода необходимы эталонные резисторы разных номиналов, что является недостатком ЦАП. Этот недостаток устраняется в ЦАП с резистивной сеткой  $R-2R$ , в которой используются только два номинала сопротивлений  $R$  и  $2R$  (рис. 8.2.1, б).

В последовательных ЦАП код преобразуется последовательно, что замедляет преобразование и делает их малоприменимыми для САУ.

**Аналого-цифровые преобразователи (АЦП)** преобразуют информацию из аналоговой формы в цифровую.

АЦП характеризуются следующими основными параметрами:

– диапазон изменения входного сигнала определяется числом разрядов выходного кода и весом младшего разряда;

– *точность преобразования* зависит от шага квантования по уровню и ошибок, возникающих из-за погрешностей АЦП;

– *время преобразования* определяется временем представления мгновенного значения аналогового сигнала в цифровой форме.

Количественная связь между аналоговой величиной  $A(t_j)$  и соответствующей ей цифровой величиной  $N(t_j)$  характеризует алгоритм аналого-цифрового преобразования

$$N(t_j) = A(t_j) / \Delta A \pm \delta N(t_j), \quad (8.2.4)$$

где  $\Delta A$  – шаг квантования по уровню, цена (вес) единицы младшего разряда кода;  $\delta N(t_j)$  – погрешность преобразования на  $j$ -м шаге.

АЦП классифицируют по схеме входа (одноканальные и многоканальные), по схеме выхода (последовательного или параллельного кода), по методу преобразования. Наиболее распространены в АЦП три метода преобразования: последовательного счета, поразрядного взвешивания, непосредственного считывания. Метод последовательного счета основан на представлении входной аналоговой величины суммой дозированных эталонных величин. Метод поразрядного взвешивания основан на последовательном уравнивании входной аналоговой величины эталонами, пропорциональными степеням числа 2, начиная с эталона старшего разряда. Метод считывания предусматривает одновременное сравнение аналоговой входной величины со всеми эталонами разрядов двоичного  $n$ -разрядного кода.

*АЦП последовательного счета* подразделяются по способу слежения за входной аналоговой величиной на циклические и накопительные. В циклических АЦП входная величина измеряется полностью в каждом цикле преобразований. В накопительных АЦП измеряется только изменение входной величины относительно его значения в предыдущем цикле преобразования.

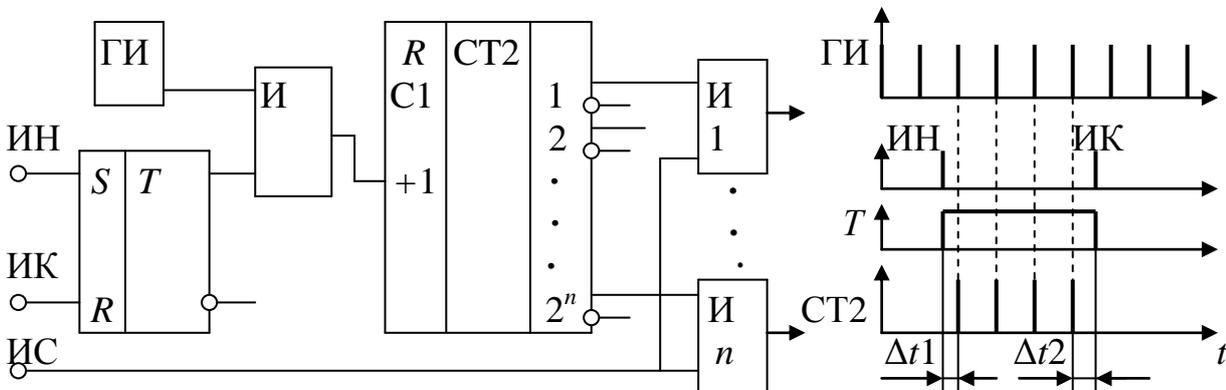


Рис. 8.2.2. АЦП интервалов времени в код

*Циклические АЦП* последовательного счета выполняются с промежуточным преобразованием входной величины во временной ин-

тервал, частоту, фазу и без промежуточного преобразования. Преобразование интервалов времени в код заключается в подсчете числа импульсов генератора ГИ за интервал времени (рис 8.2.2). Импульс начала измеряемого интервала времени ИН поступает на триггер Т, который через схему совпадений И открывает поступление импульсов от генератора ГИ на двоичный счетчик СТ2. Импульс конца временного интервала ИК устанавливает триггер Т в исходное состояние. Записанный в счетчике  $n$ -разрядный код, соответствующий измеренному интервалу времени, передается в ЭВМ по сигналу импульса считывания информации ИС через набор из  $n$  элементов совпадения. Погрешность преобразования зависит от величины и стабильности частоты следования импульсов ГИ, количества разрядов счетчика, а также от случайной величины погрешности дискретности измерений  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$ .

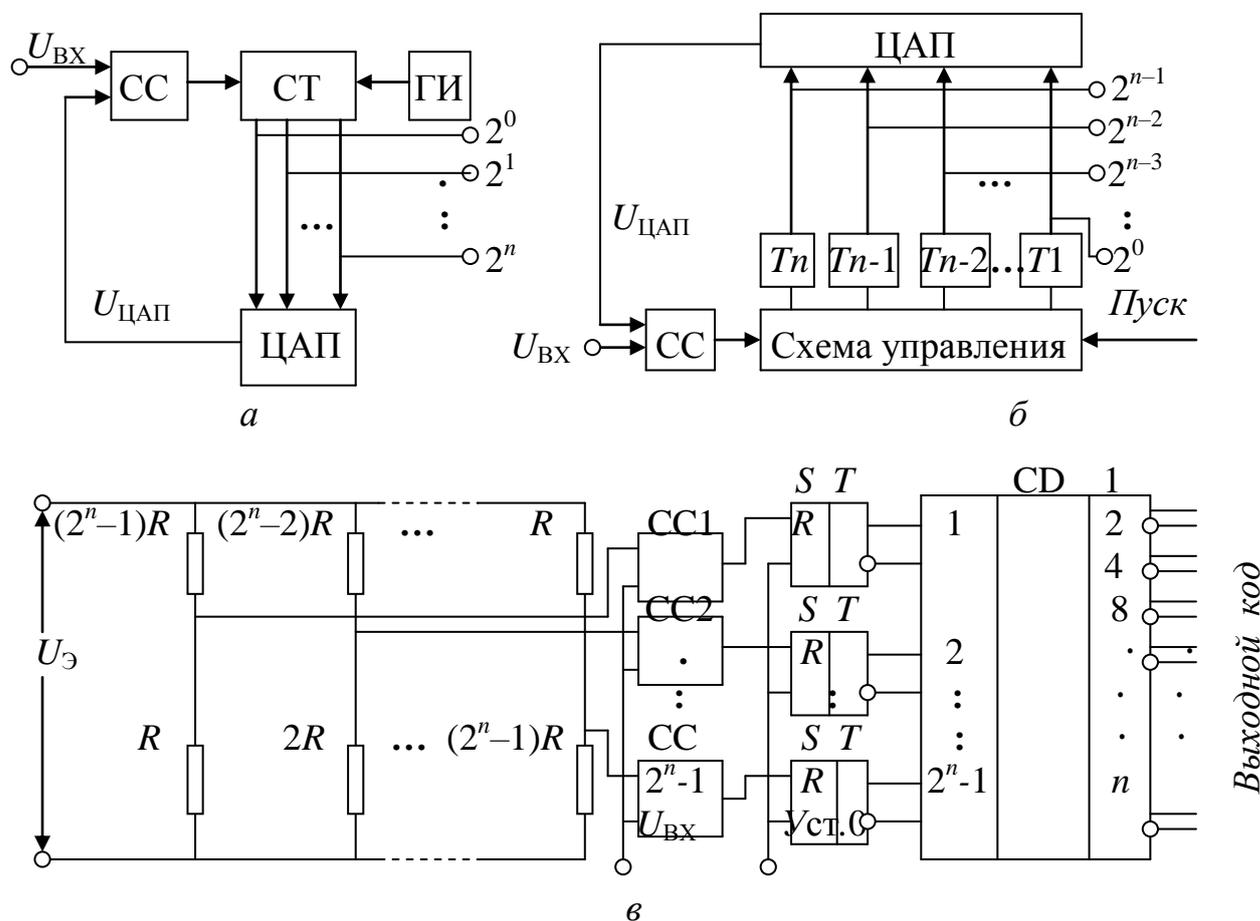


Рис. 8.2.3. Аналого-цифровые преобразователи

Другой разновидностью АЦП последовательного счета являются АЦП с использованием ЦАП в цепи обратной связи, применяемые для преобразования аналоговых сигналов напряжения и тока в цифровой код. Один из вариантов АЦП последовательного счета с ЦАП в цепи обратной связи (рис. 8.2.3, а) содержит элемент сравнения СС

(компаратор), генератор тактовых импульсов ГИ, счетчик тактовых импульсов СТ и цифро-аналоговый преобразователь ЦАП. В начале каждого цикла преобразования в АЦП устройство подготовки (на схеме не показано) обнуляет выходной код счетчика СТ и компаратор СС, сравнивая преобразуемое входное аналоговое напряжение  $U_{ВХ}$  с выходным напряжением  $U_{ЦАП}$ , разрешает счетчику СТ при  $U_{ВХ} > U_{ЦАП}$  вести подсчет тактовых импульсов, поступающих от ГИ. В результате растёт код на выходе СТ и на входе ЦАП и увеличивается напряжение  $U_{ЦАП}$  на выходе ЦАП и входе компаратора СС. При достижении равенства  $U_{ВХ} = U_{ЦАП}$  компаратор запрещает счетчику СТ продолжение подсчета импульсов и полученный на выходе СТ код сохраняется до следующего цикла преобразования. Начало очередных циклов преобразований могут инициироваться в функции времени или в функции нарушения равенства  $U_{ВХ} = U_{ЦАП}$  на входе компаратора СС.

АЦП данного типа следят за изменениями величины преобразуемого аналогового напряжения  $U_{ВХ}$  в выходной двоичный код  $N$  и поэтому называются следящими АЦП. Время преобразования зависит от числа разрядов счетчика и от величины преобразуемого аналогового напряжения и возрастает с их увеличением. Точность преобразования увеличивается с возрастанием числа разрядов счетчика и уменьшением величины ступеней ЦАП, а также с повышением точности компаратора при определении равенства  $U_{ВХ} = U_{ЦАП}$ .

*Метод поразрядного кодирования (поразрядного взвешивания)* повышает быстродействие АЦП по сравнению с методом последовательного счета. В варианте АЦП поразрядного кодирования (рис. 8.2.3, б) реализуется принцип последовательных приближений. Двоичный код входной преобразуемой аналоговой величины  $U_{ВХ}$  формируется схемой управления в  $n$ -разрядном регистре на триггерах  $T_n, T_{n-1}, T_{n-2}, \dots, T_1$  в виде двоичных сигналов 1 или 0 на выходных шинах регистра, начиная со старшего разряда с весом  $2^{n-1}$  до младшего разряда с весом  $2^0$ . Этот код образует на выходе ЦАП суммарное напряжение  $U_{ЦАП}$ , которое сравнивается с входной преобразуемой аналоговой величиной  $U_{ВХ}$  в компараторе СС, а результат сравнения поступает в схему управления. Схема управления по команде *Пуск* переводит в начале первого такта работы триггер  $T_n$  старшего разряда из начального состояния 0 в состояние 1 и на выходе ЦАП создается напряжение  $U_{ЦАП}$ , соответствующее выходному коду старшего разряда  $N_{2^{n-1}} = 2^{n-1}$ . Если в течение первого такта работы сохранится условие  $U_{ВХ} > U_{ЦАП}$ , то выход компаратора СС будет иметь состояние 0 и схема управления сохранит триггер  $T_n$  в состоянии 1 и код

$N_{2n-1}=2^{n-1}$  на выходе АЦП. Если при включении старшего разряда получится  $U_{ВХ} < U_{ЦАП}$ , то выход компаратора СС примет состояние 1 и схема управления возвратит триггер  $Tn$  в исходное состояние 0. В следующем такте система управления переводит из начального состояния 0 в состояние 1 триггер  $Tn-1$  следующего более низкого разряда с весом  $2^{n-2}$  и цикл процессов преобразования повторяется до установления двоичного сигнала 1 или 0 на всех шинах более низких разрядов выходного кода вплоть до младшего разряда с весом  $2^0 = 1$ . Затем циклы преобразований повторяются.

В результате в АЦП устанавливается равенство  $U_{ВХ} = U_{ЦАП}$  и соответствующий  $n$ -разрядный код входной аналоговой величины  $U_{ВХ}$ . Время преобразования зависит от числа разрядов и тактовой частоты и не зависит от величины преобразуемого аналогового напряжения. В 12-разрядных АЦП данного типа время преобразования составляет от 10 до 150 мкс. Погрешность АЦП определяется неточностью ЦАП, а также зоной нечувствительности и дрейфом нуля компаратора СС.

*Метод считывания* обеспечивает наибольшее быстродействие АЦП. В схеме АЦП считывания (рис. 8.2.3, в) преобразуемое аналоговое напряжение  $U_{ВХ}$  одновременно сравнивается с использованием  $n$  компараторов СС с эталонными  $n$  уровнями напряжений  $U_{Эj}$ , пропорциональных числам от  $2^0 = 1$  до  $2^n - 1$   $n$ -разрядного двоичного кода. Эталонные уровни напряжений  $U_{Эj}$  формируются в резистивном делителе и подаются на входы соответствующих компараторов вместе с преобразуемым аналоговым напряжением  $U_{ВХ}$ . При  $U_{ВХ} > U_{Эj}$  на выходах компараторов СС устанавливается сигнал 0, а при  $U_{ВХ} < U_{Эj}$  – сигнал 1. Результаты сравнения с выходов компараторов поступают через RS-триггеры на входы шифратора СД, который преобразует результаты сравнений в двоичный параллельный  $n$ -разрядный код с весовыми значениями разрядов 1, 2, 4, ...,  $2^n - 1$ . Изменения  $U_{ВХ}$  приводят к изменению выходного кода АЦП. Установка триггеров в нулевое состояние осуществляется сигналом Уст.0.

Время преобразования в АЦП считывания составляет от 10 до 100 нс. Недостаток таких АЦП состоит в необходимости использования большого числа компараторов ( $2^n - 1$ ). Например, для построения 6-разрядного АЦП требуется 63 компаратора и столько же триггеров. Поэтому АЦП считывания обычно имеют число разрядов не более 8.

### Контрольные вопросы

1. Какое назначение имеют устройства связи цифровых управляющих ЭВМ с объектами управления и другими звеньями в системах автоматического управления (САУ)?

2. В каких случаях при использовании цифровых управляющих ЭВМ в САУ применение устройств связи не требуется?

3. По какому принципу действуют цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП) сигналов двоичного кода в непрерывные сигналы напряжения?

4. Какие основные параметры характеризуют работу ЦАП?

5. Какое устройство и принцип действия имеют параллельные ЦАП с матрицей эталонных резисторов?

6. Какие отличия имеют ЦАП с резистивной сеткой  $R-2R$  по сравнению с ЦАП с матрицей эталонных резисторов?

7. Почему ЦАП с последовательным преобразованием кода в аналоговую величину малоприменимы для применения в САУ?

8. Какой принцип действия имеют аналого-цифровые преобразователи (АЦП) в САУ с цифровыми управляющими ЭВМ?

9. Какими основными параметрами характеризуются свойства АЦП?

10. На каких принципах основаны три основных метода преобразования аналоговой величины в двоичный код в АЦП: метод последовательного счета, метод поразрядного кодирования, метод считывания?

11. Какие различия имеют циклические и накопительные АЦП последовательного счета?

12. Какое устройство и какой принцип действия имеют АЦП последовательного счета для преобразования интервалов времени, частоты или фазы в двоичный код?

13. Какое устройство и какой принцип действия имеют АЦП последовательного счета с использованием ЦАП в цепи обратной связи?

14. Какое устройство и какой принцип действия имеют АЦП поразрядного кодирования с использованием ЦАП в цепи обратной связи?

15. Какие сравнительные оценки по быстродействию имеют АЦП последовательного счета для измерения интервалов времени, АЦП последовательного счета с ЦАП в обратной связи, АЦП поразрядного кодирования с ЦАП в обратной связи?

16. Какое устройство и какой принцип действия имеют АЦП считывания?

17. Какое основное преимущество и какой основной недостаток имеют АЦП считывания?

18. Почему АЦП считывания изготавливаются с ограниченным числом разрядов (обычно не более 8)?

### 8.3. Обработка информации с датчиков

В САУ циркулирующие в системе сигналы информации поступают в управляющую ЭВМ в дискретные моменты времени, между которыми сведения об изменениях сигналов информации отсутствуют. Поступающая в ЭВМ информация может содержать сигналы помех, нарушающих нормальную работу САУ. Поэтому в САУ осуществляется обработка информации с целью подавления помех и приведения сигналов к виду, необходимому для нормальной работы САУ. При обработке сигналов информации в САУ обычно осуществляются операции их фильтрации, интерполяции и экстраполяции, выполняемые устройствами с  $RC$ -фильтрами, операционными усилителями, электронно-вычислительными элементами или ЭВМ с соответствующим программно-алгоритмическим обеспечением [1, 2, 20].

**Фильтрация сигналов информации** в САУ представляет собой в общем случае *инерционное преобразование* входного сигнала  $x(t)$  с целью выделения полезной информации  $y(t)$  и подавления сигналов внешних и внутренних помех  $h(t)$ . Сигналы внешних помех создаются электроустановками (электросварка, коммутация токов потребителей, трамваев, троллейбусов, излучающей электромагнитной аппаратуры) и грозowymi разрядами в атмосфере. Сигналы внутренних помех возникают в собственной аппаратуре САУ при дискретизации сигналов информации (шумы квантования), пульсациях и скачках тока, флюктуациях тока и шумах в полупроводниковых приборах и др. [1, 2]. Результат фильтрации в виде выходного сигнала ЭВМ  $y(t)$  может быть определен либо заданием функционала

$$y(t) = L_t[x(\tau)], \quad (8.3.1)$$

либо заданием дифференциального уравнения преобразования

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right), \quad (8.3.2)$$

где  $f$  – заданная функция,  $n = 1, 2, \dots$ .

Если при всех  $t$  (8.3.1) зависит только от реализации  $x(\tau)$  на интервале времени до момента  $t$ , то операции (8.3.1) могут быть выполнены в реальном времени физически реализуемым фильтром. Операции (8.3.2) всегда физически реализуемы, если известны начальные условия в некоторый момент времени  $t_0 < t$ . Если функционал (8.3.1) зависит от реализации  $x(\tau)$  только на интервале  $(t-T, t)$  при  $T > 0$ , то фильтр называется *фильтром с конечной памятью  $T$* . Если функционал (8.3.1) зависит только от последовательности дискретных значе-

ний  $x_i = x(t_i)$  ( $i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, t_n \leq t$ ), то такой фильтр называется *дискретным* и уравнение (8.3.2) при этом заменяется разностным уравнением или рекуррентным соотношением.

**Линейная фильтрация** является частным случаем, в котором уравнение фильтра (8.3.2) линейно относительно всех аргументов, кроме  $t$ , а функционал (8.3.1) приобретает вид

$$y(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (8.3.3)$$

где  $t_0$  – момент начала реализации  $x(\tau)$ ;  $k(t, \tau)$  – импульсная реакция (отклик фильтра в момент  $t$  на входной сигнал в виде  $\delta$ -функции, поданный в момент  $\tau$ ).

Примером линейного фильтра является *фильтр низкой частоты* с передаточной функцией  $W(p) = K/(1+pT)$ , имеющий полосу равномерного пропускания частот от 0 до  $\omega_c = 1/T$  с уменьшением  $K$  на 20 дБ/дек при  $\omega \geq \omega_c$ . Более крутопадающую амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), близкую по форме к прямоугольной характеристике идеального фильтра, имеет так называемый *фильтр Баттерворта* с АЧХ  $|W_B(j\omega)| = 1/\sqrt{(1+\omega T)^{2n}}$ , при  $n=2-8$ . Алгоритмы реализации фильтров на ЭВМ аналогичны выражениям (8.1.2)–(8.1.5).

Примерами линейных фильтров также являются линейные замкнутые САУ на входе которых действует сигнал с помехами  $x(t)$ , а на выходе формируется реакция  $y(t)$  на полезную входную информацию.

**Нелинейная фильтрация** осуществляется при прохождении сигнала через линейный фильтр – безынерционное нелинейное звено – второй линейный фильтр. При этом (8.3.1) можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t k_i(t, \tau) f_i \left( \int_{t_0}^{\tau} h_i(\tau, s) x(s) ds \right) d\tau, \quad (8.3.4)$$

где  $h_i(t, \tau)$ ,  $k_i(t, \tau)$  – импульсные реакции линейных фильтров,  $f_i(z)$  – функции нелинейного фильтра (например:  $f_1(z) = |z|$ ,  $f_2(z) = z^2$  и т.д.).

Более сложным нелинейным фильтром является замкнутый контур, содержащий безынерционный нелинейный элемент.

**Оптимальная фильтрация** осуществляется при оптимальном в определенном смысле преобразовании входного сигнала  $x(t)$ . Оптимальность преобразования входного сигнала может заключаться в воспроизведении полезного сигнала, представляющего одну из компонент  $z(t)$  входного сигнала  $x(t)$ , либо некоторого функционала  $z(t) = f[x(t)]$  (например, производную от  $x(t)$  в заданной точке; предска-

зываемое значение  $x(t)$  в заданный момент времени и др.). При этом остальные компоненты сигнала  $x(t)$  рассматриваются как помехи, подлежащие устранению в процессе оптимальной фильтрации. Выходной сигнал  $y(t)$  оптимального фильтра служит оценкой функции  $z(t)$ , поэтому  $y(t)$  должен максимально приближаться к  $z(t)$ .

Общий метод синтеза оптимальных фильтров дает *теория статистических решений*. При синтезе заданными считаются: 1) способ кодирования  $z(t)$  в  $x(t)$ , т.е. способ комбинирования полезного сигнала с помехами; 2) статистические характеристики  $x(t)$  и  $z(t)$ ; 3) функция потерь, т.е. количественная мера отличия  $y(t)$  от  $z(t)$ , которая определяет критерий синтеза. Наиболее простым является случай, когда сигнал  $x(t)=z(t)+n(t)$  представляет аддитивную смесь полезного сигнала  $z(t)$  и сигнала помехи  $n(t)$ . Для этого случая разработана *теория оптимальной линейной фильтрации*, в которой оптимизация производится по минимуму среднеквадратичного отклонения  $y(t)$  от  $z(t)$ . При этом для определения импульсной реакции линейного оптимального фильтра  $k(t,\tau)$  необходимо знать только корреляционные функции  $K_{zz}(t_1,t_2)=z(t_1)z(t_2)$  и  $K_{xz}(t_1,t_2)=x(t_1)z(t_2)$ . Если входной сигнал  $x(t)$  наблюдается на интервале  $(t_0, t)$ , функция  $k(t,\tau)$  определяется интегральным уравнением

$$\int_{t_0}^t k(t,\tau)K_{xz}(\tau,s)d\tau=K_{zz}(t,s). \quad (8.3.5)$$

Уравнение (8.3.5) остается справедливым и в случае, когда  $z(t)$  и  $x(t)$  являются многомерными процессами. При этом  $K_{xz}$  и  $K_{zz}$  представляют собой соответствующие корреляционные матрицы.

*Линейный оптимальный фильтр*, определяемый уравнением (8.3.5), является наилучшим среди любых линейных и нелинейных фильтров для случаев, когда сигнал помехи  $n(t)$  является гауссовским случайным процессом, а полезный сигнал  $z(t)$  – либо гауссовским процессом, либо процессом с неизвестным распределением вероятностей, обладающий известной функцией корреляции. При этом функция потерь является симметричной функцией разности  $y(t)-z(t)$ . В других практических случаях, когда полезный сигнал  $z(t)$  сложно закодирован в  $x(t)$ , оптимальный фильтр представляется нелинейной системой с обратной связью.

Оптимальное по критерию минимума среднеквадратичной ошибки управление в САУ с управляющей ЭВМ при известных статистических характеристиках полезного сигнала и сигнала помехи на входе САУ обеспечивают *цифровые винеровские фильтры*, реализующие

оптимальную частотную передаточную функцию замкнутой САУ  $H(j\omega)$  [2]. Оптимальная передаточная функция замкнутой САУ  $H(p)$  определяется с учетом полезного сигнала  $u(t)$ , сигнала помехи  $v(t)$ , входного сигнала  $r(t)=u(t)+v(t)$ , желаемого значения управляемой величины  $g(t)$ , ошибки управления  $e(t)=g(t)-y(t)$ , управляемой величины  $y(t)$ , оператора обработки полезного сигнала  $H_0(p)$  (рис. 8.3.1). Критерием оптимальности является минимум дисперсии ошибки [2].

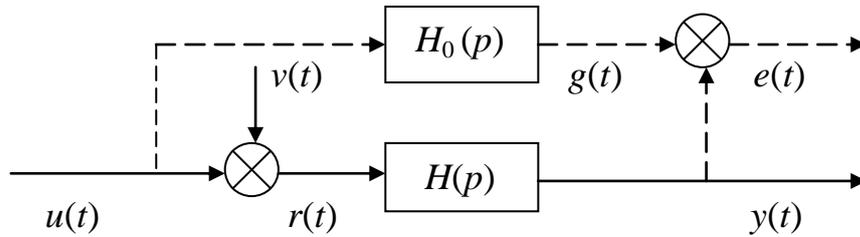


Рис. 8.3.1. Оптимальный фильтр Винера

**Интерполяция и экстраполяция сигналов информации** в САУ с ЭВМ необходима для определения непрерывных значений управляемой величины  $y$  от времени или от другого аргумента  $x$  на интервалах между дискретно заданными ее значениями  $y[x_n]=f[x_n]$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ), поскольку рабочие движения  $y(x)=f(x)$  при этом должны совершаться не ступенчато, а непрерывно. Для получения *непрерывной информации* о текущем значении функции  $f(x)$  используется *интерполяция* и *экстраполяция* по дискретно заданным значениям функции  $y[x_n]=f[x_n]$ , называемых *узлами интерполяции* или *опорными точками траектории* изменения интерполируемой функции [3, 19].

*Интерполяция* – это определение значений функции в некоторой точке *внутри* известных значений функции слева и справа от нее.

*Экстраполяция* – это определение значений функции в некоторой точке по известным значениям слева от нее (экстраполяция вперед, предсказание) или справа от нее (экстраполяция назад), т.е. определение значений функции *за пределами* ее известных значений.

Целью интерполяции является вычисление непрерывной интерполирующей функции  $Y(x)$ , восстанавливающей непрерывные значения интерполируемой функции  $y(x)$  на заданном отрезке траектории по значениям координат опорных точек  $y[x_n]$ . Интерполирующая функция  $Y(x)$  должна точно совпадать с интерполируемой функцией  $y(x)$  в узлах интерполяции (в опорных точках)  $y[x_n]$  и возможно меньше отличаться от  $y(x)$  в промежутках между узлами интерполяции  $y[x_n]$ . Интерполяция осуществляется специальными вычислительными устройствами (интерполяторами) или цифровыми ЭВМ, работающими по определенным программам.

По способу аппроксимации функции между узлами интерполяции могут использоваться различные методы интерполяции, *интерполяционные формулы* которых сопоставляют интерполирующую функцию заданного класса  $Y(x)=Y(x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , зависящую от  $n+1$  параметров  $x$ , выбранных так, чтобы значения  $Y(x)$  совпадали со значениями  $y(x)$  для данного множества  $n+1$  значений аргумента  $x_k$  (узлов интерполяции)  $Y(x_k)=y(x_k)=y_k$ .

Наиболее простым является *метод линейной интерполяции*, называемый *интерполяцией первого порядка*. При этом считается, что между соседними опорными точками траектории  $y[x_0]$  и  $y[x_1]$  приращение интерполируемой функции  $\Delta_1=y[x_1]-y[x_0]$  пропорционально приращению аргумента  $h_1=x_1-x_0$ . Тогда текущее значение  $Y(x)$  интерполируемой непрерывной функции  $y(x)$  на интервале между двумя заданными опорными точками траектории  $y[x_0]$  и  $y[x_1]$  вычисляется по интерполяционной формуле

$$Y(x) = y[x_0] + \frac{y[x_1] - y[x_0]}{x_1 - x_0}(x - x_0), \quad x_0 \leq x \leq x_1. \quad (8.3.6)$$

Текущее значение *интерполяционной поправки* между опорными точками вычисляется из  $\frac{y[x_1] - y[x_0]}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \frac{\Delta_1}{h_1}(x - x_0)$ .

Погрешность линейной интерполяции функции по (8.3.6) не превышает единицы младшего разряда значащей цифры, если две соседние разности  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$  отличаются не более, чем на четыре единицы младшего разряда. Если это условие не выполняется, что свидетельствует о резких изменениях интерполируемой функции, то для обеспечения приемлемой точности интерполяции нужно использовать методы интерполяции второго и более высокого порядка, например, квадратичную или параболическую интерполяцию.

В общем случае при параболической интерполяции  $n$ -го порядка какова бы ни была заданная функция  $f(x)$  и как бы ни были выбраны узлы интерполяции (опорные точки)  $f_0=f(x_0), \dots, f_n=f(x_n)$ , всегда существует единственный интерполяционный многочлен  $n$ -степени  $\varphi_n(x)$ , принимающий в этих точках те же значения, что и  $f(x)$ :  $\varphi(x_i)=f(x_i)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ). Для вычисления такого интерполяционного многочлена может использоваться *формула Лагранжа*:

$$\varphi_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + \dots + L_n(x)f_n, \quad (8.3.7)$$

где

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}, \quad f_i = f(x_i). \quad (8.3.8)$$

В САУ с ЭВМ информация формируется дискретно с постоянным периодом квантования и поэтому интерполяционные узлы часто располагаются на равном расстоянии друг от друга, что упрощает интерполяцию. В этих случаях постоянная величина  $h=x_{i+1} - x_i$  называется *шагом интерполяции* дискретной функции  $y(x_k)$  при  $x_k=x_0+hk$ , где  $k$  – целые числа (эти обозначения сохраняются и при отрицательных значениях  $k<0$ ). *Первые разности* функции относительно данного шага интерполяции  $h$  определяются формулами:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i. \quad (8.3.9)$$

Разности первых разностей образуют *разности 2-го порядка* (или *вторые разности*):

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x), \quad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i. \quad (8.3.10)$$

Так же определяются и разности более высоких порядков.

Для интерполяции по заданным дискретным значениям функции  $f_k(x_k)$  составляется *таблица разностей* по следующей схеме [3]:

$x_k$	$f_k(x)$	$\Delta f_k(x)$	$\Delta^2 f_k(x)$	$\Delta^3 f_k(x)$	$\Delta^4 f_k(x)$	Формула
...	...					
$x_{-2}$	$f_{-2}$	$\Delta f_{-3}$	$\Delta^2 f_{-3}$		$\Delta^4 f_{-4}$	$N_2$
$x_{-1}$	$f_{-1}$	$\Delta f_{-2}$	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-3}$	$\Delta^4 f_{-3}$	
$x_0$	$f_0$	$\Delta f_{-1}$	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-2}$	$\Delta^4 f_{-2}$	$S$
		$\Delta f_0$		$\Delta^3 f_{-1}$		$B$
$x_1$	$f_1$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_{-1}$	
$x_2$	$f_2$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$	$N_1$
$x_3$	$f_3$		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$	
...	...					

С использованием разностей интерполяционный многочлен определяется по следующим формулам, где обозначено  $u=(x-x_0)/h$ :

**формулы Ньютона**

$$N_1(x) = f_0 + \frac{u(u-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{u(u-1) \dots (u-n+1)}{n!} \Delta^n f_0; \quad (8.3.11)$$

$$N_2(x) = f_0 + u \Delta f_{-1} + \frac{u(u+1)}{2} \Delta^2 f_{-2} + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n}; \quad (8.3.12)$$

**формула Стирлинга**

$$S(x) = f_0 + u \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2} \Delta^2 f_{-1} + \frac{u(u^2 - 1) \Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{3! \cdot 2} + \dots + \frac{u^2(u^2 - 1) \Delta^4 f_{-2} + \dots + \frac{u^2(u^2 - 1) \cdot \dots \cdot [u^2 - (n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} f_{-n}; \quad (8.3.13)$$

**формула Бесселя**

$$B(x) = f_0 + u \Delta f_0 + \frac{u(u-1) \Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} + \frac{u(u-1)(u-0,5) \Delta^3 f_{-1} + \frac{u(u^2 - 1)(u-2) \Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{4! \cdot 2}}{3!} + \dots + \frac{(u-0,5)u(u^2 - 1) \cdot \dots \cdot [u^2 - (n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} f_{-1}. \quad (8.3.14)$$

Формулы Ньютона дают интерполяционный многочлен, если  $x_0$  является первым или последним из интерполяционных узлов дискретной функции, тогда как для формул Стирлинга и Бесселя  $x_0$  является средним или одним из средних интерполяционных узлов.

**Погрешности интерполяции и экстраполяции** зависят от точности измерения координат узлов интерполяции. Если  $f(x)$  измерена с ошибкой  $\varepsilon$ , то в  $\Delta f(x)$  ошибка уже будет  $2\varepsilon$ , в  $\Delta^2 f(x)$  ошибка будет  $4\varepsilon$  и т.д. Поэтому при измерениях и расчетах в значениях координат узлов интерполяции нельзя отбрасывать последние значащие цифры.

При аналитическом задании интерполируемой функции  $f(x)$  погрешность от замены функции  $f(x)$  интерполяционным многочленом  $\varphi_n(x)$  может быть вычислена по формуле Лагранжа в виде:

$$f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n), \quad (8.3.15)$$

где  $\xi$  есть некоторое промежуточное значение между наибольшим и наименьшим из чисел  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Контрольные вопросы**

1. Назначение и способы фильтрации сигналов информации?
2. Что называется интерполяцией и экстраполяцией дискретно заданной функции?
3. Как осуществляется линейная интерполяция первого порядка для дискретно заданной функции?
4. В каких случаях необходимо применение параболической интерполяции и экстраполяции второго и более высокого порядка для дискретно заданной функции?

## 8.4. Режим реального времени управления

Режим реального времени управления характеризуется одновременной совместной работой цифровой и аналоговой частей в замкнутой САУ с управляющей микроЭВМ (или микроконтроллером), в которых операции преобразования и хранения дискретной информации осуществляются в форме кодо-импульсных сигналов в машинном времени, измеряемом в периодах квантования сигналов  $nT$ , а операции преобразования энергии и сигналов аналоговой информации осуществляются в непрерывной форме в реальном времени  $t$ , измеряемом в секундах. Измерительно-преобразовательные устройства (датчики) в цифро-аналоговых САУ могут формировать выходные сигналы информации как в виде аналоговых (непрерывных) величин, так и в виде дискретных импульсных величин или цифрового кода.

Системы реального времени предсказуемо (во времени) реагируют на непредсказуемо (во времени) возникающие события [36]. Системы “жесткого реального времени” должны за заданный интервал времени отработать появившееся событие, а при невозможности – выдать отказ от решения задачи. Системы “мягкого реального времени” не дают отказов и всегда начинают решать возникшую задачу в последовательности приоритетов ее составных частей, но не всегда успевают решить задачу за заданный интервал времени, что создает задержку управления и нарушает оптимальность режимов работы САУ.

Все процессы управления в САУ развиваются в реальном времени, которое связано с динамическими свойствами объекта и параметрами цифровой части. Важнейшим из этих параметров является период квантования во времени  $T$ , который определяет *допустимое запаздывание*  $\tau \leq T$  в формировании управления аналоговой частью САУ. Трудности формирования управления за время  $\tau \leq T$  обусловлены задержками на реальное время преобразования информации в АЦП, в ЭВМ и в ЦАП. Для сокращения времени задержек на обработку дискретных сигналов частота их квантования во времени достигает нескольких десятков мегагерц [2, 10, 20], а асинхронность и параллельность процессов вычислений в ЭВМ лежит в основе управления [36].

Первой серьезной проблемой, решаемой в цифро-аналоговых САУ реального времени, является формирование в ЭВМ с АЦП на входе и ЦАП на выходе управляющего воздействия на непрерывную выходную часть в течение времени, не более одного периода кванто-

вания  $T$ . Это необходимо для исключения нарастающего запаздывания в процессе управления, нарушающего работоспособность САУ.

Время вычисления дискретного управляющего сигнала в ЭВМ зависит от алгоритма преобразования входного сигнала и сильно возрастает при реализации операций умножения функций, возведения в степень и тригонометрических преобразований, которые выполняются за время, существенно превышающее период квантования  $T$ . Для решения этой проблемы могут использоваться многопроцессорные ЭВМ и микроконтроллеры или локальные вычислительные сети с распараллеливанием операций между процессорами разных ЭВМ.

В системах реального времени успешно используются так называемые *промышленные компьютеры*, состоящие из одной платы, на которой размещены процессор, контроллер памяти и память разного типа (ОЗУ, ПЗУ, ФЛЭШ-память), но без дисковых накопителей, не отвечающих требованиям готовности к системам реального времени.

При сопряжении управляющей микроЭВМ с объектом управления с помощью ЦАП также возникают трудности в связи со значительным превышением разрядной сетки микроЭВМ, имеющей не менее 16 или 32 разрядов, по отношению к числу разрядов подключаемого к ее выходу АЦП, имеющих не более 12–14 разрядов, что осложняет схемотехническое и программное сопряжение АЦП с шиной данных микроЭВМ и сверхбыстродействующих микроЭВМ, называемых аналоговыми процессорами.

Экстраполяция сигналов информации в САУ, работающих в реальном времени, должна осуществляться по прошлым дискретным значениям опорных точек траектории экстраполируемой функции, т.е. должна непрерывно решаться задача экстраполяции вперед (задача предсказания). Эта задача может решаться экстраполяторами с использованием второй формулы Ньютона (8.3.12).

### Контрольные вопросы

1. Что называется режимом работы САУ с ЭВМ в «реальном времени»?
2. Какое общее основное требование предъявляется к цифровой части любых замкнутых цифро-аналоговых САУ?
3. Какие трудности возникают в работе цифровой части САУ в режиме «реального времени»?
4. Как решается проблема сокращения времени обработки сигналов в управляющих ЭВМ?
5. Как проводится экстраполяция в системах «реального времени»?

## 8.5. Распределенные системы управления

Для распараллеливания операций обработки информации в САУ реального времени с целью ускорения формирования управляющих воздействий, повышения надежности, производительности и гибкости применяемых микроЭВМ используется два класса структур цифровых САУ: многомикропроцессорные САУ (рис. 8.5.1) и многомашинные САУ (рис. 8.5.2) [2, 20, 39, 40].

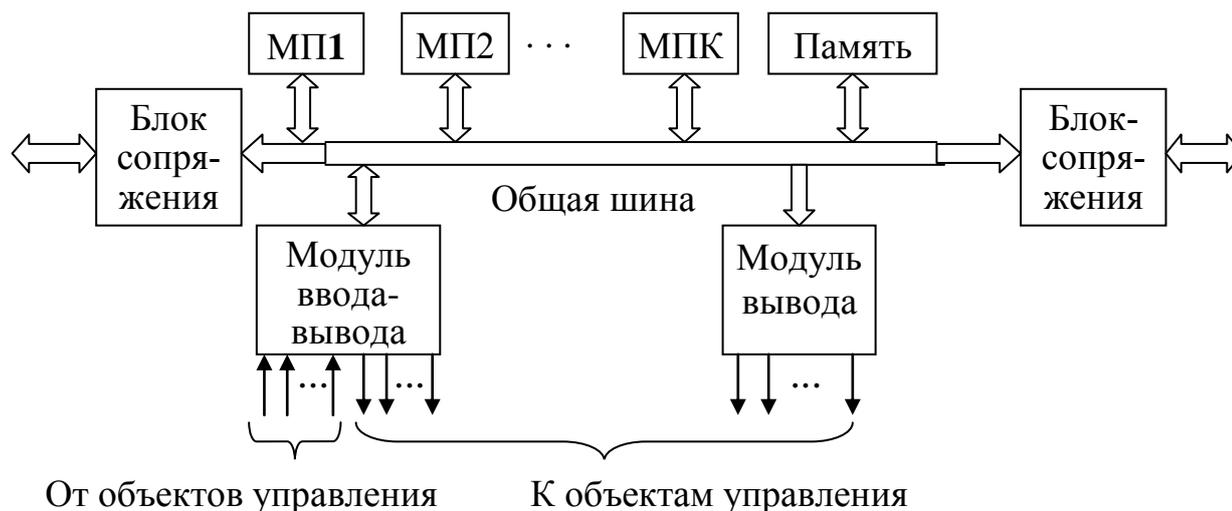


Рис. 8.5.1. Многомикропроцессорная система управления

**Многомикропроцессорные САУ** с параллельной работой ряда микропроцессоров на общую шину ЭВМ позволяют реализовать одновременное выполнение нескольких команд и нескольких программ и повысить производительность вычислений [2]. Однако при этом сохраняются все недостатки САУ с центральной управляющей ЭВМ – низкая надежность из-за отсутствия резервирования и необходимость длинных линий связей с объектами управления.

**Многомашинные САУ** с взаимосвязанным использованием определенного числа микроЭВМ позволяют создавать децентрализованные *распределенные системы управления*, обеспечивающие повышение надежности, экономичности, простоты и удобства эксплуатации, гибкости, живучести и производительности цифровых частей САУ [2, 39, 40]. Такие САУ строятся по следующим основным вариантам топологии многомашинных распределенных систем (рис. 8.5.2): *а)* иерархическая; *б)* шинная; *в)* сетевая; *г)* кольцевая; *д)* матричная; *е)* последовательная. МикроЭВМ изображены прямоугольниками, объекты управления – кружками, каналы информационных связей – линиями.

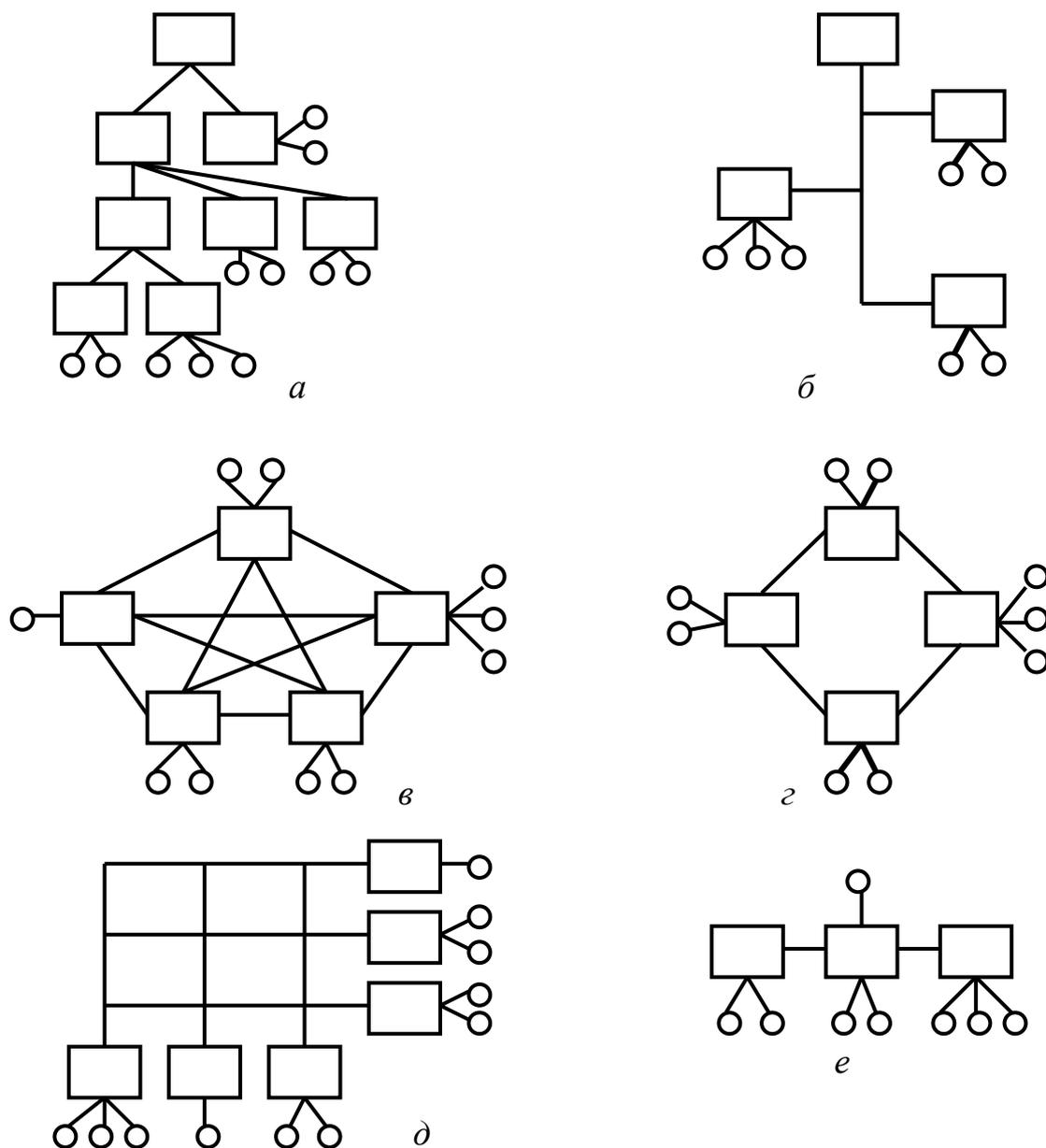


Рис. 8.5.2. Топология распределенных САУ

В распределенных САУ децентрализация предполагает не только рассредоточение аппаратуры по объектам управления, но и *распределение функций обработки информации и управления* между автономными микроЭВМ, в том числе и параллельное дублирование функций для обеспечения надежности и живучести системы. Поэтому, в отличие от систем с центральной ЭВМ и многомикропроцессорной ЭВМ, в распределенных САУ выход из строя любой микроЭВМ не приводит к отказу всей системы управления.

В распределенных системах управления для дистанционного сбора информации от многочисленных датчиков могут вводиться так называемые *вынесенные измерительные станции*, которые получают и обрабатывают сигналы от датчиков и передают цифровую информацию в процессоры управляющих микроЭВМ. Вынесенные измери-

тельные станции имеют собственный микропроцессор, мультиплексор и аналого-цифровой преобразователь, что позволяет разгрузить управляющие микроЭВМ от выполнения многих локальных функций и расширить их возможности при выполнении основных функций цифровых регуляторов в САУ.

### Контрольные вопросы

1. Какие преимущества и недостатки имеют цифро-аналоговые САУ с использованием многомикропроцессорных микроЭВМ?
2. По каким принципам строятся многомашинные распределенные САУ и какие преимущества они имеют перед САУ с индивидуальными ЭВМ?

## 8.6. Локальные вычислительные сети в управлении

Развитие и расширение применения распределенных цифровых систем управления обусловили целесообразность перехода *от системных принципов* построения САУ и АСУ *к сетевым принципам* организации взаимодействия ЭВМ и средств телеобработки сигналов информации и управления в системах управления на основе создания *локальных вычислительных сетей* (ЛВС) [2, 20, 40].

**Локальная вычислительная сеть** (ЛВС) представляют собой распределенную вычислительную систему управления, построенную по сетевым принципам организации управления входящими в нее компонентами, размещенными на сравнительно небольшой территории на расстояниях друг от друга до 5–10 км и связанными между собой *сетью передачи данных* (СПД).

Основными компонентами в ЛВС в терминах сетевой организации их взаимодействия являются так называемые узлы или станции:

*локальные технологические станции* (ЛТС), которые воспринимают сигналы от датчиков, обрабатывают эти сигналы и выдают управляющие воздействия на исполнительные устройства ОУ;

*операторские станции* (ОпС), служащие для связи операторов с системой управления;

*координирующие станции* (КоС), представляющие собой управляющие ЭВМ, которые осуществляют управление в распределенной системе путем выдачи задающих воздействий на ЛТС.

В ЛВС основные узлы или станции соединяются между собой *сетью передачи данных* (СПД), средства взаимодействия с которой закладываются в ЛТС, ОпС и другие станции ЛВС. В некоторых ЛВС также вводятся *связные станции*, решающие только задачи организа-

ции работы сети связи. Иногда в ЛВС вводятся *станции для выполнения специальных функций* таких, как задание программ работы ЛТС, ОпС, ведения диагностики, документирования, архива и т. д.

По способу передачи информации ЛВС делятся на два класса: с *маршрутизацией передачи информации* и с *селекцией передачи информации*. В ЛВС с маршрутизацией передача информации от передающей станции к принимающей станции осуществляется по специально выбранному маршруту. В ЛВС с селекцией передаваемая информация поступает на все станции, но воспринимает эту информацию только станция, в адрес которой направлена информация.

Физическая среда сетей передачи данных (СПД) в ЛВС представляется *витыми парами проводов, коаксиальными кабелями и оптоволоконными кабелями*. Достоинства витых пар – низкая стоимость и простота подключения новых абонентов посредством повторителей, недостаток – ограничение скорости передачи до 1 Мбит/с. Коаксиальные кабели для передачи дискретных сигналов (ДС) обеспечивают скорость передачи до 10 Мбит/с при средней помехоустойчивости и малой стоимости эксплуатации. Коаксиальные кабели для передачи аналоговых сигналов (АС) ориентированы на использование в кабельном телевидении и имеют преимущества перед кабелями для передачи ДС по помехоустойчивости и качеству передачи гибридного трафика (одновременной передачи АС и ДС). Оптоволоконные кабели обеспечивают передачу данных со скоростью до 150 Мбит/с при самой высокой помехоустойчивости и наибольшей стоимости подключения абонентов. Качественные сравнительные характеристики физических сред СПД приведены в таблице 8.6.1 [40].

Таблица 8.6.1

Параметры	Тип физической среды СПД			
	витые пары	коаксиал. кабель/ДС	коаксиал. кабель/АС	оптоволокон. кабель
Полоса пропускания	узкая	узкая/средняя	широкая	очень широкая
Число абонентов	малое	среднее	большое	малое
Длина линии	малая	средняя	большая	большая
Помехоустойчивость	малая	средняя	высокая	очень высокая
Трудоемкость укладки	средняя	малая	малая	средняя
Стоимость	низкая	средняя	средняя	высокая

По топологии ЛВС наибольшее применение имеют следующие варианты: шина (моноканал), кольцо, звезда, дерево. Их сравнительные качественные характеристики приведены в таблице 8.6.2 [40].

Подключение абонентов при шинной организации ЛВС осуществляется тремя способами: 1) через аппаратуру абонентов; 2) через специальную аппаратуру, подключенную к шине; 3) непосредственно к шине, без промежуточной аппаратуры. Наибольшая надежность и быстродействие передачи информации в ЛВС обеспечиваются при третьем способе подключения [40].

Таблица 8.6.2

Параметры	Топология ЛВС			
	шина	кольцо	звезда	дерево
Сложность подключ.	малая/средняя	малая	малая	средняя
Надежность	высокая	высокая	средн/высок	высокая
Наращиваемость	высокая	средняя	малая	высокая
Стоимость	низкая	средняя	высокая	низкая

*Методы доступа к физической среде СПД* для бесконфликтной передачи информации множеству адресатов по одному и тому же физическому каналу делятся на три базовых группы: случайные, детерминированные, комбинированные [40].

*Случайные методы доступа*, при которых любая станция ЛВС может в любой момент времени обратиться к физической среде СПД, включают следующие разновидности: 1) *бесконтрольный* (станция обращается к каналу связи независимо от того занят он или нет); 2) *с тактированным временем* (каждая станция начинает передачу в «свое» время); 3) *с контролем занятости канала* (станция непрерывно прослушивает канал и начинает передачу после прекращения предыдущей передачи); 4) *с контролем столкновений* (станция начинает передачу в любое время и прекращает передачу при обнаружении конфликта столкновения); 5) *с контролем занятости моноканала и контролем столкновений* (станция прослушивает канал и начинает передачу, когда канал свободен; при возникновении столкновения передача прекращается).

*Детерминированные методы доступа* в СПД подразделяются на централизованные и децентрализованные и предусматривают делегирование полномочий на ведение передачи данных станциям ЛВС. Станции ЛВС передают информацию в канал СПД только при получении разрешающей команды. Причем при централизованном детерминированном доступе команды на опрос состояния станций ЛВС поступают из общего центра управления, а при децентрализованном доступе управляющие команды генерируются каждой станцией, входящей в СПД с помощью специальных устройств.

Сравнение базовых методов управления доступом к каналу СПД показывает, что *случайные методы* множественного доступа наиболее эффективны при малой нагрузке и редком обмене короткими сообщениями станций ЛВС между собой. Протоколы этого метода обеспечивают наименьшую задержку и наибольшую скорость передачи информации. При большой и равномерной нагрузке СПД более эффективным является управляемый *детерминированный метод* доступа к каналу, обеспечивающий выделение отдельных временных интервалов доступа для каждой станции ЛВС. При изменении нагрузки СПД в широком диапазоне применяются протоколы *комбинированного доступа*, адаптивного к изменяющейся нагрузке СПД.

**Локальные распределенные АСУ**, созданные по сетевым принципам построения ЛВС, обеспечивают высокую производительность и надежность управления многочисленными (до нескольких сотен) взаимодействующими ЛТС с 16- и 32-разрядными микропроцессорами, связанными посредством параллельных или последовательных системных шин [42]. Например, микроконтроллерная последовательная шина типа *Bitbas* обеспечивает управление распределенной системой с числом станций до 250 [40]. Шина ориентирована на стандарт *МОС* и реализует функции физического, канального и сетевого уровней, большинство функций транспортного уровня и некоторые из функций сеансового уровня. Физическое соединение шины соответствует стандарту *RS-485*, аппаратной основой является микроконтроллер типа 8044 фирмы Intel с процессором типа 8051 [40].

### Контрольные вопросы

1. Назначение и состав локальных вычислительных сетей (ЛВС)?
2. Какие функции выполняют в ЛВС локальные технологические, операторные, координирующие станции (узлы)?
3. Какие физические средства используются в сетях передачи данных и как соотносятся их стоимость, помехоустойчивость, полоса пропускания частот, дальность передачи информации?
4. Как осуществляется случайный, детерминированный, комбинированный методы доступа пользователей в общую сеть передачи данных?

## 8.7. Инструментальные средства АСУ

Автоматизированные системы управления (АСУ) состоят из оперативного персонала, организационного, информационного, программного и технического обеспечения [14]. Оперативный персонал

осуществляет контроль и управление процессами, эксплуатационное обслуживание и восстановление технических и программных средств АСУ. Организационное обеспечение АСУ представляет собой совокупность документов по обеспечению функционирования АСУ. Программное обеспечение содержит закономерности управления процессами в АСУ. Информационное обеспечение определяет способы и формы контроля состояния и управления АСУ как в виде сигналов для ЭВМ и технических средств управления, так и в виде документов, графиков и сигналов информации для обслуживающего персонала. Техническое обеспечение АСУ представляет собой комплекс технических средств, обеспечивающих функционирование АСУ.

**Программное обеспечение** (ПО) является наиболее трудоемкой, сложной и дорогостоящей частью АСУ (стоимость разработки и изготовления ПО может достигать 90% от стоимости всей АСУ) [14, 39, 41]. Программы для АСУ содержат *последовательности команд для ЭВМ*, которые необходимо выполнить для реализации требуемого функционирования АСУ. Для описания последовательности команд используются специальные *языки программирования* (АССЕМБЛЕР, ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ, СИ и другие). Программа, реализующая какую-либо функцию АСУ, называется *функциональной программой*. Функциональным программам присущи следующие основные свойства:

1) каждая программа имеет свой *регламент исполнения* (периодическое через интервалы времени  $T$ , в заданное время суток, по требованию другой программы, по требованию оператора и др.);

2) в работе АСУ участвуют большое количество отдельных программ со своими регламентами исполнения (до ста и более), что приводит к возникновению конфликтных требований одновременно исполнения несколько программ, тогда как ЭВМ в реальном времени может исполнять программы только поочередно и для этого в АСУ должна иметься *система массового обслуживания* программ, обеспечивающая последовательное поочередное выполнение всех программ с учетом наибольшей производительности работы АСУ в реальном масштабе времени;

3) программы могут храниться в ОЗУ и ПЗУ ЭВМ, на сменных магнитных дисках и других носителях информации, что приводит к разным затратам времени на поиск и исполнение программ.

По принятой классификации система программного обеспечения (СПО) АСУ делится на общее ПО и специальное ПО.

**Общее программное обеспечение АСУ** – это часть СПО, представляющая совокупность программ, необходимых для функциони-

рования вычислительного комплекса (ВК). В общее ПО входят: программа-диспетчер, оперативно координирующая работу отдельных программ и устройств ВК и организующая очередность выполнения разных программ (массовое обслуживание программ); программы управления отдельными устройствами ВК; служебные программы (для формирования таблиц, печати результатов и др.); стандартные подпрограммы для вычисления часто встречающихся функций (синусов, логарифмов и др.); трансляторы с алгоритмических языков; тесты для проверки исправности устройств ВК и др. Общее ПО обычно поставляется в комплекте со средствами ВК.

**Специальное программное обеспечение АСУ** (СПО АСУ) – это часть ПО, разрабатываемая индивидуально для каждой АСУ и включающая программы реализации управляющих, информационных и вспомогательных функций в данной АСУ. Например, к специальному ПО относятся программы вычисления управляющих воздействий при заданном алгоритме управления, фильтрации и интерполяции показаний датчиков, вычисления технико-экономических показателей ТП.

СПО АСУ состоит из четырех программных блоков [14]:

1) блок управления программами – *операционная система* (ОС), обеспечивающая управление всеми программами и очередностью их исполнения (ЭВМ поставляются с набором разных ОС, из которых можно выбрать наилучшую для данной АСУ);

2) блок управления данными – *система управления базой данных* (СУБД), обеспечивает запись и хранение данных в устройствах памяти и выдачу данных в необходимой форме для обработки в ЭВМ, для каждой АСУ набор данных индивидуален;

3) блок связи оператора с ОС и СУБД программно обеспечивает предоставление оператору данных о работе САУ и возможности воздействия на ОС и СУБД;

4) блок функциональных программ обеспечивает функционирование технических средств АСУ для получения заданных ТП.

Схема процесса разработки и изготовления СПО для АСУ представлена на рис. 8.7.1 [14]. В верхней части рис. 8.7.1 показана схема *объектной ЭВМ*, работающей в составе АСУ при ее эксплуатации в реальном времени. В нижней части рис. 8.7.1 показана схема *инструментальных средств* для создания СПО АСУ. Инструментальные средства реализуются на *инструментальной ЭВМ*, работающей в машинном масштабе времени. Обычно СПО разрабатываются в специализированных проектных организациях с использованием мощных инструментальных ЭВМ.

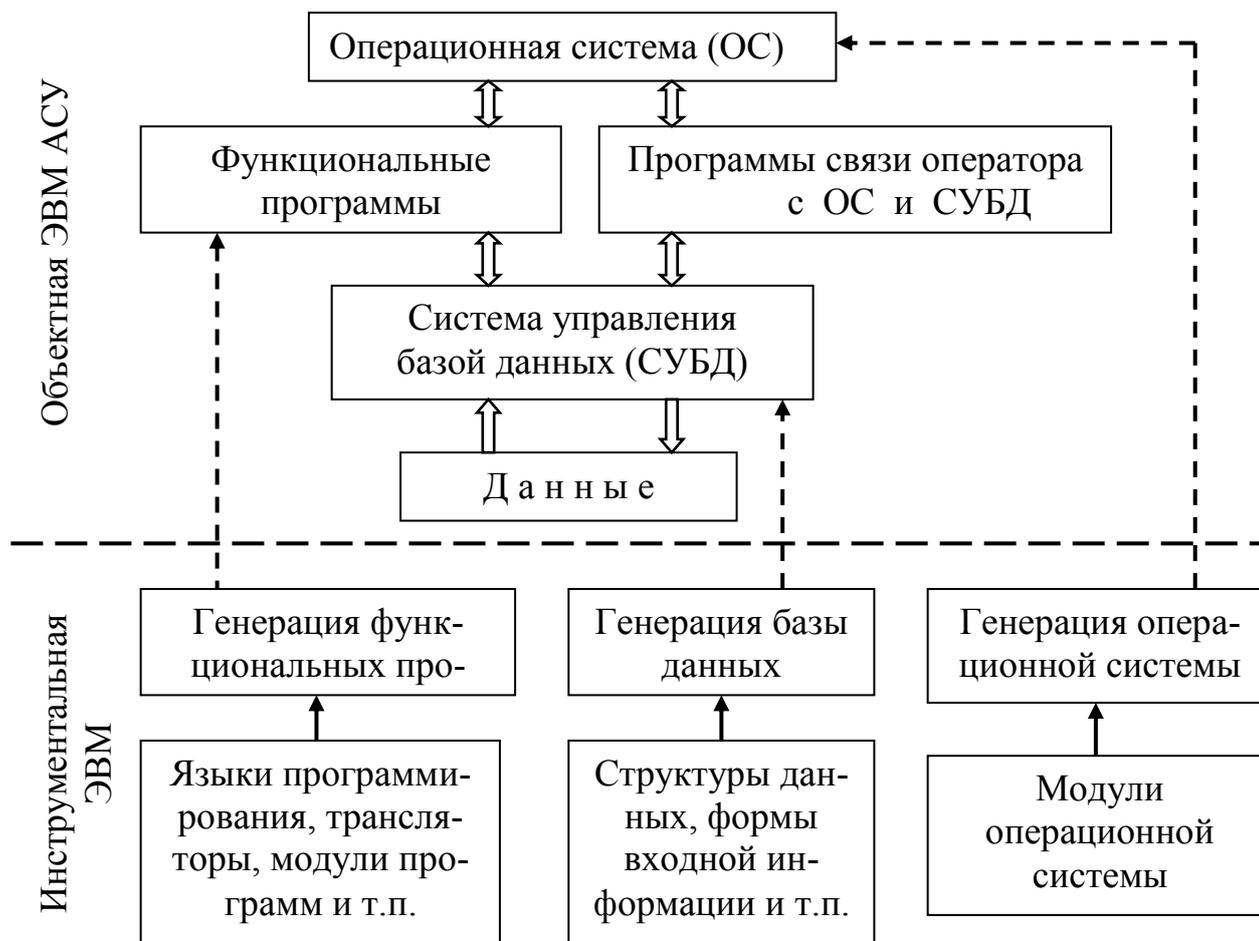


Рис. 8.7.1. Схема разработки и изготовления ПО АСУ

**Инструментальные средства АСУ** (рис. 8.7.1) состоят из трех модулей [14]. В модуле генерации функциональных программ на основе известных языков программирования, трансляторов, функциональных модулей и других зависимостей формируются *функциональные программы* управляющих, тестовых и других воздействий на элементы АСУ. Эти программы записываются в память объектной ЭВМ и исполняются по командам операционной системы (ОС). В модуле генерации базы данных на основании структуры и массы данных формируются *программы банка данных*, необходимые для функционирования конкретной АСУ, записываемых в память объектной ЭВМ. В модуле генерации операционной системы (ОС) с использованием трансляторов определяется нужный набор *программ и функций ОС* для данной АСУ.

### Контрольные вопросы

1. Какие функции в АСУ выполняют оперативный персонал, организационное, информационное, программное, техническое обеспечение?
2. Что по существу представляют собой программы работы АСУ?
3. Какие программы входят в общее программное обеспечение АСУ?

4. Какие программы входят в специальное программное обеспечение?
5. Какое назначение и какие свойства имеют функциональные программы?
6. Что представляет собой система управления базой данных в АСУ?
7. Какие функции выполняет операционная система АСУ?
8. Как представляется схема разработки программного обеспечения АСУ?

## 8.8. Типовые модели систем массового обслуживания

В САУ и АСУ с управляющими ЭВМ управляемые технические устройства (ТУ) работают непрерывно, т. е. параллельно во времени, но процессоры в ЭВМ решают задачи управления разными ТУ (пользователями) последовательно (поочередно) во времени. Вычислительные системы с разделением времени процессора ЭВМ между одновременно работающими пользователями называются *системами с разделением времени* (СРВ) [2, 20, 41]. Очередность обслуживания пользователей в СРВ определяется встроенной в СРВ *системой массового обслуживания* (СМО), создаваемой на основе *теории массового обслуживания* (ТМО) [10, 35, 36, 38].

ТМО возникла в начале 20 века как раздел теории вероятностей, решающий задачи оптимизации массового обслуживания абонентов телефонных сетей связи, в которых число абонентов (пользователей) значительно превышает число обслуживающих коммутирующих приборов (ресурс системы). Поэтому в ТМО и СМО используется терминология из телефонии – пользователи, каналы (приборы) обслуживания, заявки (требования) на обслуживание, входящий  $\lambda$  и выходящий  $\mu$  потоки заявок, число мест ожидания (очередь), время обслуживания, приоритеты обслуживания и другие.

Режим разделения времени в СРВ характеризуется оперативным предоставлением ресурсов ЭВМ (процессорного времени, памяти, каналов связи и других средств) многим одновременно работающим пользователям по их требованиям. Работа ЭВМ заключается в выполнении требований (заявок) от разных пользователей и собственных системных требований.

Задачи массового обслуживания возникают в тех случаях, когда требования на выполнение работы поступают в случайные моменты времени, а выполнение этих работ, называемое *обслуживанием*, осуществляется одним или несколькими *обслуживающими устройствами* (приборами, ЭВМ). Каждое очередное  $n$ -е требование  $C_n$  характеризуется тремя случайными величинами:  $\tau_n$  – моментом поступ-

ления;  $t_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  – временем между поступлением требования  $C_n$  и поступлением предыдущего требования  $C_{n-1}$ ;  $x_n$  – временем обслуживания требования  $C_n$  [10, 35, 36, 38]. Общая структура СМО с тремя обслуживающими приборами приведена на рис. 8.8.1.

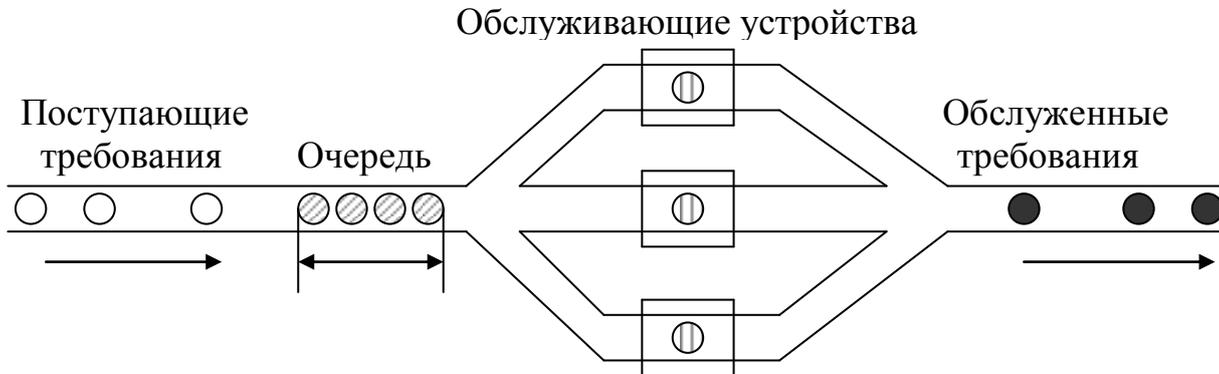


Рис. 8.8.1. Модель системы массового обслуживания

Устройства, способные в любой момент времени обслуживать лишь одно требование, называются *каналом обслуживания*. При наличии в СМО нескольких каналов, способных одновременно обслужить ряд требований, СМО называется *многоканальной системой*. Все каналы или часть их могут выполнять одинаковые или различные виды обслуживания.

Очередность и порядок выполнения требований в СМО определяет составная часть операционной системы ЭВМ–планировщика в виде алгоритма диспетчеризации, устанавливающего очередность работ всех ЭВМ в СМО при обработке требований (рис. 8.8.2) [44]. Входящий поток требований (работ) поступает в накопитель  $R$ , из которого первые по очереди требования ЭВМ–планировщик направляет на обслуживание в свободные от работы ЭВМ. Очередность выполнения заявок в СМО определяется правилами, называемыми *дисциплиной обслуживания*. Большинство дисциплин обслуживания формируются на основе модификаций циклической дисциплины и дисциплины многоуровневого понижения приоритета [44].

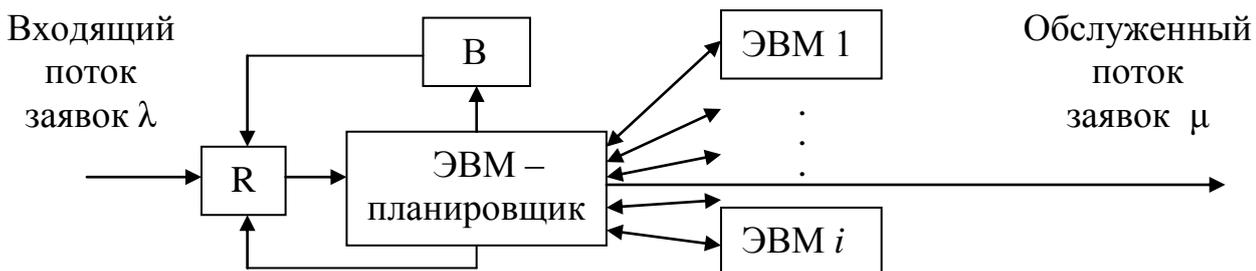


Рис. 8.8.2. Схема планирования порядка работ ЭВМ в СМО

*Циклическая дисциплина обслуживания RR (Round-Robin)* предусматривает поступление заявок в накопителе в конец единственной очереди  $R$  (рис. 8.8.1 и 8.8.2). Каждой заявке из вершины очереди отводится квант  $\Theta$  времени процессора ЭВМ. Если обслуживание заявки не заканчивается за время кванта  $\Theta$ , то процесс ее обслуживания прерывается и заявка перемещается в конец очереди  $R$ , а процессор приступает к обслуживанию следующей очередной заявки, что позволяет ускорить выполнение коротких заявок за счет задержки выполнения длинных заявок [44].

*Дисциплина обслуживания с многоуровневым понижением приоритета  $FB_N$  (Foreground-Background)* имеет  $N$  очередей заявок к процессору ( $N \geq 2$ ). Каждой очереди соответствует относительный приоритет, уменьшающийся с увеличением номера очереди. Заявки выбираются из всех очередей соответственно их приоритетам. Если за время предоставленного кванта обслуживание не завершено, то заявка перемещается в конец очереди с более низким приоритетом. Заявки из последней очереди обрабатываются до конца, что соответствует предоставлению им кванта бесконечной длительности [44].

По сравнению с классическими системами очередей, модели диспетчеризации в СМО могут иметь *нестандартную дисциплину обслуживания* с так называемой обратной связью, т.е. с переходом заявки, не обслуженной за время отведенного ей кванта, обратно в систему очередей  $R$  для ускорения прохождения коротких заявок за счет задержки обслуживания длинных заявок в условиях априорно неизвестных длительностей обслуживания. Следствием этого является малая перспективность использования в СМО дисциплин обслуживания с относительными и абсолютными приоритетами из-за трудностей априорной селекции заявок по длительности обслуживания [42]. Наиболее известными из нестандартных дисциплин обслуживания являются: «первый пришел – первый обслужен» FCFS (First Come – First Served); «последний пришел – первый обслужен» LCFS (Last Come – First Served); «справедливого распределения процессора» EPS (Egalitarian Processor – Sharing) – предельный аналог дисциплины RR при  $\Theta \rightarrow 0$ ; случайный выбор [44].

Обычно в СМО имеется машинно-зависимый планировщик нижнего уровня, который обеспечивает наибольшую эффективность работы ЭВМ: он улаживает конфликты с общими ресурсами, с распределением оперативной памяти, управляет системой очередей  $B$ , а также занимается другой краткосрочной работой. Предметом создания СМО является синтез *планировщика высшего уровня*, работающе-

го на больших интервалах времени и осуществляющего стратегические решения посредством формирования очередей заявок  $R$  к ЭВМ, входящих в состав СМО. При этом качество функционирования СМО определяется внешней и внутренней эффективностью.

Под *внешней эффективностью СМО* понимается способность быстрого удовлетворения заявок пользователей (т. е. минимальное время обслуживания), под *внутренней эффективностью СМО* – наибольшая степень использования ресурсов системы (минимальное относительное время простоя ЭВМ). Если в мультипрограммных системах пакетной обработки основной целью обычно является повышение производительности ЭВМ за счет максимального использования времени процессора (т.е. повышение внутренней эффективности), то в СМО необходимо улучшать обслуживание пользователей (т.е. повышать внешнюю эффективность). Повышение внешней эффективности достигается ценой снижения внутренней эффективности. Например, уменьшить время ожидания можно за счет ухудшения использования процессора (по сравнению с пакетной обработкой) из-за квантования выполнения заданий вследствие неизбежных дополнительных затрат времени процессора на релокацию программ (изменение местоположения в памяти) и работу операционной системы.

*Типовые модели СМО* принято обозначать трехпозиционными символами  $A/B/m$ , где  $m$  – число обслуживающих приборов (каналов, ЭВМ) в СМО, а  $A$  и  $B$  указывают на законы распределения времени между соседними требованиями и распределение времени обслуживания, которые могут иметь следующие значения [35, 36, 38]:  $M$  – закон показательного распределения (Markovian);  $E_r$  – закон распределения Эрланга порядка  $r$  (Erlangian);  $H_R$  – закон гиперпоказательного распределения порядка  $R$  (Hyperexponential);  $D$  – регулярный поток (постоянная величина) (Deterministic);  $G$  – закон произвольного распределения (General).

К трехпозиционному обозначению СМО  $A/B/m$  могут добавляться еще одна или две позиции, чтобы указать емкость накопителя (обозначаемую через  $K$ ) или число источников требований (обозначаемую через  $M$ ). При этом всегда указывается, какие позиции вводятся дополнительно, при отсутствии этих позиций соответствующие числа предполагаются бесконечными [36].

В СМО выполняется последовательность элементарных массовых операций, которые могут быть *реальными* (требующими для выполнения определенных затрат работы ЭВМ) и *фиктивными* (вводимыми в модель СМО для учета порядка ее работы, например, опе-

рации ожидания). Реальные операции выполняются *обслуживающими приборами* (каналами, линиями, ЭВМ). СМО, содержащая один прибор, называется *одноканальной*, содержащая не менее двух приборов – *многоканальной*. Считается, что обслуживающий прибор (канал, линия) может одновременно выполнять лишь одну операцию. Приборов в СМО всегда конечное множество. *Очередью* называется совокупность требований, ожидающих обслуживания, когда все приборы заняты обслуживанием других требований. Ожидающие требования находятся в *накопителе*, имеющим конечную емкость или теоретически бесконечную емкость (бесконечный накопитель).

Основные варианты построения и принципы функционирования СМО включают следующие разновидности [38].

**1. Одноканальная СМО с ожиданием** (рис. 8.8.3, а) является простейшей СМО, где источник требований  $O$  генерирует поток требований с интенсивностью  $\lambda$ , поступающий в «бесконечный» накопитель  $H$ . Если прибор 1 свободен, то очередное требование поступает на обслуживание. Если прибор занят, то очередное требование остается в накопителе, становясь в конец имеющейся очереди. Как только прибор 1 освобождается, он приступает к обслуживанию требования из накопителя. Если требований в накопителе нет, то прибор 1 простаивает. Пример такой СМО – билетная касса с одним кассиром.

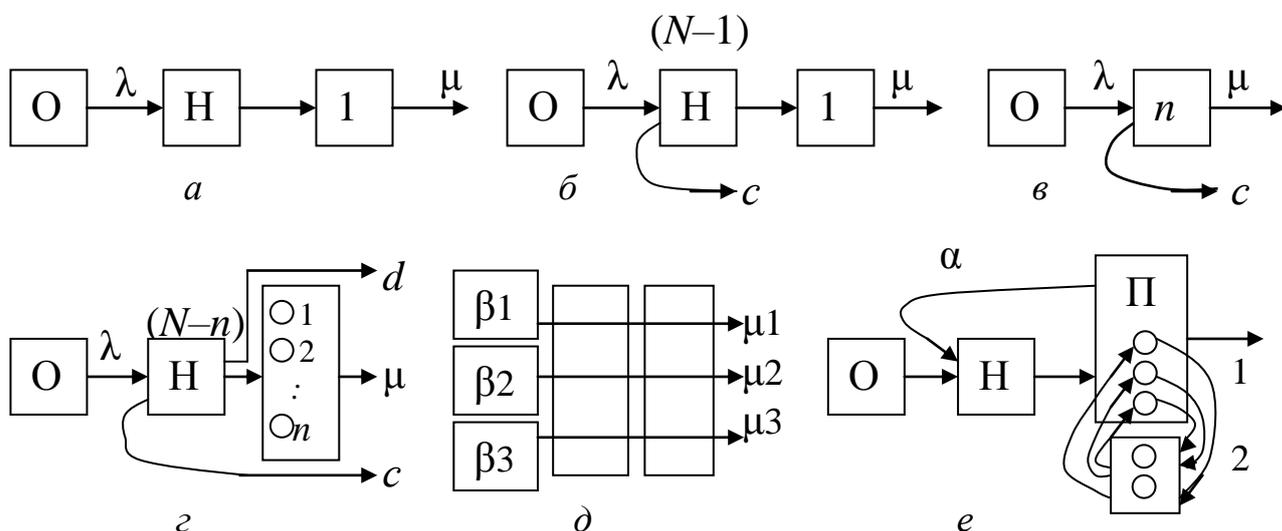


Рис. 8.8.2. Типовые модели СМО.

**2. Одноканальная СМО с ограниченной очередью (с конечным накопителем)** (рис. 8.8.3, б) отличается от первой тем, что в данной СМО в любой момент времени могут находиться не более  $N$  заявок, поскольку накопитель имеет емкость  $(N-1)$  и одна заявка обслуживается в приборе 1. Если в момент поступления заявки в накопителе для

нее нет места, то поступившая заявка теряется (стрелка  $c$  обозначает поток потерянных заявок). Пример такой СМО – обработка поступающих заявок в ЭВМ с ограниченной памятью (заявка, переполняющая объем памяти теряется).

**3. Многоканальная СМО с отказами** (рис. 8.8.3, *в*) имеет  $n$  обслуживающих приборов (каналов) при отсутствии накопителя и очереди. Заявка, поступившая во время обслуживания предыдущих требований во всех  $n$  приборах (все каналы заняты), теряется (стрелка  $c$ ). Пример такой СМО – автоматическая телефонная станция (АТС), где подается сигнал занятости. В таких СМО под длиной очереди понимают число занятых каналов обслуживания.

**4. Многоканальная СМО с общей очередью (с общим накопителем)** имеет структуру, аналогичную системам второго типа (рис. 8.8.3, *б*), но отличающуюся наличием  $n$  обслуживающих приборов, каждый из которых может одновременно обслуживать одну заявку из общей очереди, при емкости накопителя ( $N - n$ ). Как только в любом приборе заканчивается операция обслуживания, он сразу приступает к обслуживанию очередной заявки из накопителя. Возможна также реализация многоканальной системы без накопителя (рис. 8.8.3, *в*). Пример СМО четвертого типа – обслуживание клиентов в парикмахерской несколькими мастерами.

**5. СМО с ограниченным временем ожидания** (рис. 8.8.3, *г*) относится к СМО, в которых поступающее в накопитель заявки могут ожидать начала обслуживания лишь ограниченное время. В такой СМО к обычным потокам заявок (входящих  $\lambda$ , обслуженных  $\mu$ , потерянных  $c$  из-за переполнения накопителя) добавляется поток потерь заявок  $d$  из-за истечения времени ожидания. Пример СМО данного типа – обслуживание движущихся изделий на конвейере.

**6. СМО с приоритетным обслуживанием** (рис. 8.8.3, *д*) обрабатывает заявки соответственно правилам приоритета обслуживания. По правилу *многоприоритетного обслуживания* поступающие требования разделяются на ряд групп с разными приоритетами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и т. д., которые обслуживаются в порядке приоритетов, образуя соответствующие выходные потоки  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  и т. д. По правилу *относительного приоритета* более срочные заявки образуют первостепенную очередь 1 типа, а другие заявки образуют второстепенную очередь 2 типа, которая обслуживается при отсутствии заявок в первостепенной очереди. По правилам *абсолютного приоритета* порядок относительного приоритета сохраняется, но отличается тем, что при появлении заявки 1 типа обслуживание заявки 2 типа прерывается и

прибор исполняет поступившую заявку 1 типа. Различают *абсолютный приоритет с запоминанием* (после обслуживания заявки 1 типа, прибор продолжает прерванное обслуживание заявки 2 типа, начав с прерванного места), *абсолютный приоритет с повторением* (после обслуживания заявки 1 типа, прибор повторяет прерванное обслуживание заявки 2 типа с начала), *абсолютный разрушающий приоритет* (при поступлении заявки 1 типа обслуживание заявки 2 типа прекращается и эта заявка теряется).

**7. СМО с ненадежными обслуживающими приборами** делятся на два класса: 1) *невосстанавливаемые СМО*, в которых отказавшая ЭВМ требует замены на запасную ЭВМ с необходимым программно-алгоритмическим обеспечением; 2) *восстанавливаемые СМО*, созданные на основе многомашиных вычислительных систем, в которых заявка на восстановление функционирования СМО структуры 1 посылается к другому прибору (другой ЭВМ) структуры 2 (рис. 8.8.3, e). В восстанавливаемой СМО приборы, входящие в трехканальную систему 1, восстанавливаются двухканальной системой 2. После замены приборы возвращаются в систему 1. Стрелкой  $\alpha$  показан поток требований, направляемых в накопитель в моменты отказа приборов.

**Характерной особенностью** задач массового обслуживания является возникновение несоответствия между скоростью поступления требований и скоростью обслуживания, в результате чего или оказываются простаивающими обслуживающие приборы, или образуется очередь на обслуживание. Подобные ситуации постоянно возникают в очередях у касс и прилавков, в очередях на ремонт оборудования в ожидании свободных ремонтных бригад, в очередях самолетов на взлет в ожидании освобождения взлетной полосы. Поэтому принципиально важными являются следующие характеристики системы массового обслуживания (СМО): 1) длина очереди в различные моменты времени; 2) общая продолжительность нахождения требования в системе обслуживания (включая ожидание в очереди и само время обслуживания); 3) доля времени простаивания обслуживающих приборов, когда приборы были не заняты.

Для получения математической модели СМО необходимо иметь: 1) описание входящего потока требований; 2) описание способа, каким выполняется обслуживание требований; 3) описание дисциплины очереди, то есть указание того, каким образом требования поступают из очереди на обслуживание: живая очередь (первым пришел – первым обслужен), обслуживание по степени срочности, по какой-то шкале приоритетов и т.п.

При исследовании СМО входящий поток требований обычно считается *пуассоновским*, характеризующимся интенсивностью  $\lambda$ . Принимая потоки пуассоновскими, получим результаты работы СМО в самых неблагоприятных условиях, при которых и следует создавать СМО для СРВ. Это означает, что заявки поступают в случайные моменты времени, причем вероятность появления заявки в интервале от  $t$  до  $t+\Delta t$  равна  $\lambda\Delta t$  и не зависит от  $t$ , а вероятность появления в этом интервале двух и более заявок пренебрежительно мала [10, 36].

Длительности обслуживания отдельных требований также предполагаются случайными с экспоненциальным законом распределения при среднем времени обслуживания  $1/\mu$ , где  $\mu$  – интенсивность потока обслуживания. Это означает, что вероятность окончания обслуживания очередного требования в интервале от  $t$  до  $t+\Delta t$  не зависит от  $t$  и равна  $\mu\Delta t$ . Такое распределение вероятностей обслуживания не всегда хорошо отражает работу реальных СМО, но его применение упрощает математическое представление исследования. Будем также предполагать, что обслуживание производится в порядке поступления требований [10].

Математическое описание случайных процессов в СМО основано на их представлении в виде *непрерывных марковских процессов*. Случайный процесс называется *марковским*, если для любого момента времени  $t_0$  вероятность состояния системы в будущем (при  $t>t_0$ ) зависит только от ее состояния в настоящем (при  $t=t_0$ ) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. Марковский процесс называется *непрерывным*, если переход системы из одного состояния в другое возможен в любой случайный момент времени. Марковские процессы в СМО могут описываться обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями и статистическими методами. Соответственно для анализа СМО используются аналитические и статистические математические модели [38].

*Аналитические модели СМО* позволяют получить общие зависимости в виде формул на основе решения уравнений исследуемого процесса, но требуют введения существенных упрощений. *Статистические модели СМО* позволяют исследовать на ЭВМ случайный процесс обслуживания с учетом многих факторов и не требуют введения упрощений для получения численного решения, но при увеличении числа элементов такие модели становятся очень сложными и трудно реализуемыми на ЭВМ, а результаты получаются только в виде средних значений [38].

Если в СМО имеется ограниченное число источников требований и конечное число состояний, то происходящий в СМО непрерывный марковский процесс будет апериодическим, стремящимся к установившемуся режиму [38]. Если процессы в СМО марковские, то при исследовании моделей СМО, называемых *марковскими моделями*, предполагается, что случайный поток требований имеет экспоненциальное распределение по закону Пуассона, в частности, вероятность  $P_k(t)$  поступления  $k$  требований в течение промежутка времени длиной  $t$  секунд определяется выражением [38]

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (8.8.1)$$

Среднее число требований, поступающих в течение времени  $t$  выражается в виде  $N(t) = \lambda t$ , а дисперсия  $\sigma_{N(t)}^2 = \lambda t$  совпадает со средним числом требований.

**Дифференциальные уравнения СМО** можно получить следующим образом [10]. Обозначим через  $S_i$  состояние СМО при наличии очереди из  $i$  требований ( $i=0, 1, \dots$ ), а через  $p_i(t)$  – вероятность того что, СМО находится в состоянии  $S_i$  в момент времени  $t$ . Найдем изменение этой вероятности  $\Delta p_i(t)$  за малый интервал времени  $\Delta t$ , непосредственно следующий за моментом  $t$ . Обозначим также через  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  интенсивность потока требований и интенсивность обслуживания требований системой в состоянии  $S_i$ .

Рассмотрим большое число  $N$  идентичных СМО. Из них  $p_{i-1}(t) \cdot N$  будут в момент  $t$  находиться в состоянии  $S_{i-1}$ ,  $p_i(t) \cdot N$  – в состоянии  $S_i$ ,  $p_{i+1}(t) \cdot N$  – в состоянии  $S_{i+1}$ . Определим изменение количества систем  $\Delta p_i(t) \cdot N$ , находящихся в состоянии  $S_i$  за интервал времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Поскольку при пуассоновском потоке требований и экспоненциальном обслуживании за малое время  $\Delta t$  ни в одной из  $N$  СМО не может поступить более одного требования и закончиться обслуживание не более одного требования, то состояние каждой из систем не может измениться более, чем на единицу [10]. Так как вероятности поступления нового требования и окончания обслуживания очередного требования в интервале  $\Delta t$  равны  $\lambda \cdot \Delta t$  и  $\mu \cdot \Delta t$  соответственно, то за время  $\Delta t$  на  $\lambda_i \cdot \Delta t \cdot p_i(t) \cdot N$  систем, находящихся в состоянии  $S_i$ , поступят новые требования, переводящие их в состояние  $S_{i+1}$ , и  $\mu_i \Delta t p_i(t) N$  систем закончат обслуживание очередного требования и перейдут в состояние  $S_{i-1}$ . Кроме того,  $\lambda_{i-1} \Delta t p_{i-1}(t) N$  систем, находящихся в состоянии  $S_{i-1}$ , перейдут в состояние  $S_i$ , получив добавочное требование, и

$\mu_{i+1}\Delta t p_{i+1}(t)N$  систем, находящихся в состоянии  $S_{i+1}$ , перейдут в состояние  $S_i$ , закончив обслуживание очередного требования. Изменение за время  $\Delta t$  общего числа систем  $\Delta p_i(t)N$ , находящихся в состоянии  $S_i$ , будет [10]

$$\Delta p_i(t)N = -\lambda_i \Delta t p_i(t)N - \mu_i \Delta t p_i(t)N + \lambda_{i-1} \Delta t p_{i-1}(t)N + \mu_{i+1} \Delta t p_{i+1}(t)N. \quad (8.8.2)$$

Поделив (8.8.2) на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$dp_i(t)/dt = -(\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t). \quad (8.8.3)$$

Уравнение (8.8.3) неприменимо при отсутствии очереди  $i=0$ , так как в этом случае требования не могут покидать систему и теряет смысл вероятность  $p_{i-1}(t)$ . Поэтому данный случай следует рассмотреть особо. Поскольку при  $i=0$  система может изменить состояние  $S_0$  на  $S_1$  только за счет поступления нового требования, а состояние  $S_1$  на  $S_0$  – за счет окончания обслуживания единственного требования, то

$$dp_0(t)/dt = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t). \quad (8.8.4)$$

Уравнения (8.8.3), (8.8.4) называют *уравнениями «размножения и гибели»*, имея в виду использование этих уравнений для изучения изменения численности популяции в биологии. В задачах массового обслуживания эти уравнения позволяют при заданных начальных условиях и известных интенсивностях  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  определить изменение характера обслуживания требований во времени (переходный процесс обслуживания). Однако решение таких задач для практически важных случаев связано с чрезвычайно большими трудностями [10].

Обычно интерес представляет не переходный процесс, а стационарное состояние системы обслуживания, называемое *статическим равновесием*. В этом состоянии вероятности  $p_i(t)$  не меняются со временем, поэтому можно положить  $dp_i(t)/dt=0$  и записать уравнения системы массового обслуживания (8.8.4) и (8.8.3) в виде [10]

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 p_0 &= \mu_1 p_1; \\ (\lambda_i + \mu_i) p_i &= \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.8.5)$$

Полагая во втором уравнении  $i=1, 2, \dots$  и вычитая из каждого уравнения предыдущее, получим следующую систему уравнений для стационарного режима [10]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 p_0 &= \mu_1 p_1; \\ \lambda_1 p_1 &= \mu_2 p_2; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_i p_i &= \mu_{i+1} p_{i+1}; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (8.8.6)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид [10]:

$$p_1 = \lambda_0 p_0 / \mu_1, \quad p_2 = \lambda_0 \lambda_1 p_0 / \mu_1 \mu_2, \dots, \quad p_i = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1} p_0 / \mu_1 \mu_2 \dots \mu_i \dots \quad (8.8.7)$$

Найденный стационарный режим осуществим только, если [10]

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \quad (8.8.8)$$

Полученные соотношения (8.8.7) и (8.8.8) могут применяться для описания некоторых часто встречающихся типов СМО.

**Система массового обслуживания с отказами** имеет  $n$  одинаковых каналов, на вход которой поступает поток требований с интенсивностью  $\lambda$ . Если в момент поступления очередного требования в системе имеется свободный канал, то требование попадает на обслуживание, если свободного канала нет, то требование покидает систему обслуживания. Такая ситуация возникает, например, в автоматической телефонной станции, где подается сигнал занятости. В подобных СМО под длиной очереди  $i$  понимается число занятых каналов обслуживания, а интенсивность поступающих требований будет [10]

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & \text{если } i \leq n, \\ 0, & \text{если } i > n. \end{cases} \quad (8.8.9)$$

Обозначим через  $\mu$  интенсивность обслуживания одним каналом, тогда интенсивность обслуживания при  $i$  работающих каналах будет

$$\mu_i = i\mu, \quad i = 1, n. \quad (8.8.10)$$

Вероятность одновременной работы  $i$  каналов находим по формулам (8.8.7) [10]

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} p_0 = \frac{\rho^i}{i!} p_0, \quad (8.8.11)$$

где параметр

$$\rho = \lambda / \mu \quad (8.8.12)$$

представляет собой приведенную интенсивность потока.

Вероятность простоя всех каналов  $p_0$  находится из (8.8.8) [10]:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{1}{2!} \rho^2 + \dots + \frac{1}{n!} \rho^n}. \quad (8.8.13)$$

Работу рассматриваемой системы обычно характеризуют вероятностью отказа  $p_{\text{отк}}$  и средним числом занятых каналов  $\bar{k}$ . Отказ от обслуживания происходит, когда все каналы заняты. Вероятность этого

$$p_{\text{отк}} = p_n = p_0 \rho^n / n!. \quad (8.8.14)$$

Иногда вместо вероятности отказа пользуются понятием пропускной способности СМО, определяемой как

$$c=(1-p_{\text{отк}})\lambda. \quad (8.8.15)$$

Среднее число занятых каналов в такой СМО будет [10]

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^n i p_i = p_0 \sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{(i-1)!}. \quad (8.8.16)$$

**Пример 8.8.1.** Имеется СМО с отказами с приведенной интенсивностью потока требований  $\rho=\lambda/\mu=2$ .

Если в СМО используется три канала, то по (8.8.13) вероятность простоя всех каналов будет

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{6}\rho^3} = 0,16.$$

Вероятность отказа по (8.8.14) будет

$$p_{\text{отк}} = p_3 = \frac{1}{6}\rho^3 p_0 = 0,21.$$

Среднее число занятых каналов по (8.8.16) будет

$$\bar{k} = p_0(\rho + \rho^2 + \frac{1}{2}\rho^3) = 1,58.$$

Если в СМО используется только два канала, то

$$p_{\text{отк}} = p_2 = 0,4; \quad \bar{k} = 1,2.$$

**Одноканальная система обслуживания с ожиданием** имеет один канал, на который поступает поток требований с интенсивностью  $\lambda$  при интенсивности обслуживания  $\mu$ . Выражение для вероятностей состояний СМО  $p_i$  получим из (8.8.7), положив  $\lambda_i=\lambda$ ,  $\mu_i=\mu$  и введя параметр приведенной интенсивности потока  $\rho=\lambda/\mu$  [10]:

$$p_i = \rho^i p_0, \quad i=1, 2, \dots \quad (8.8.17)$$

Значение  $p_0$  найдем из (8.8.8) в виде  $p_0(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\dots)=1$ , которое имеет смысл только при  $\rho<1$ . Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем [10]:

$$p_0 = 1-\rho. \quad (8.8.18)$$

С учетом (8.8.18) выражения (8.8.17) для вероятностей  $p_i$  будут:

$$p_i = (1-\rho) \rho^i, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (8.8.19)$$

Основными характеристиками данной СМО являются средняя длина очереди и среднее время ожидания обслуживания.

Среднее число требований, находящихся в системе обслуживания

$$\bar{k} = (p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots) = (1-\rho)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots). \quad (8.8.20)$$

Учитывая, что  $\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots = \rho/(1-\rho^2)$ , получим:

$$\bar{k} = \rho/(1-\rho). \quad (8.8.21)$$

Среднее число требований  $\bar{k}_s$ , проходящих обслуживание, равно нулю, если канал свободен, и единице во всех других случаях [10]:

$$\bar{k}_s = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_2 + \dots) = 1 - p_0 = \rho. \quad (8.8.22)$$

Средняя длина очереди равна разности между  $\bar{k}$  и  $\bar{k}_s$

$$\bar{k}' = \bar{k} - \bar{k}_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \quad (8.8.23)$$

Время обслуживания одной заявки равно  $1/\mu$ , тогда среднее время ожидания для среднего числа заявок  $\bar{k}$ , находящихся в СМО, будет

$$t_{ож} = \bar{k} \cdot 1/\mu = \bar{k} / \mu. \quad (8.8.24)$$

**Многоканальная СМО с ожиданием** имеет  $n$  каналов, на которые поступает поток требований с интенсивностью  $\lambda$  при интенсивности обслуживания  $\mu$  по одному каналу. При этом получаем [10]:

$$\lambda_i = \lambda, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & \text{при } i \leq n; \\ n\mu & \text{при } i > n. \end{cases} \quad (8.8.25)$$

Система сохраняет работоспособность, если  $\rho = \lambda/\mu < n$  [10]. В этом случае для  $p_i$  получаются выражения [10]

$$p_i = \frac{\lambda^i p_0}{\mu \cdot 2\mu \cdot \dots \cdot i\mu} = \frac{\rho^i}{i!} p_0, \quad \text{если } i \leq n; \quad (8.8.26)$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{\mu \cdot 2\mu \cdot \dots \cdot n\mu \cdot (n\mu)^{i-1}} p_0 = \frac{\lambda^i}{n! \mu^n n^{i-n} \mu^{i-n}} p_0 = \\ = \frac{\rho^i}{n! n^{i-n}} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^{i-n}}{n^{i-n}} p_0, \quad \text{если } i > n. \quad (8.8.27)$$

При найденных значениях  $p_i$  соотношение (8.8.8) принимает вид

$$p_0 \left[ 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \left( 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots \right) \right] = 1. \quad (8.8.28)$$

Из (8.8.28), где  $1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots = \frac{1}{1-\rho/n} = \frac{n}{n-\rho}$ , получим

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}}. \quad (8.8.29)$$

Основные параметры многоканальной СМО с ожиданием находятся по (8.8.23), (8.8.22), (8.8.24). Средняя длина очереди будет

$\bar{k}' = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0$ ; среднее число требований, проходящих обслужи-

вание, будет  $\bar{k}_s = \rho$ ; среднее число требований, находящихся в системе обслуживания, будет  $\bar{k} = \bar{k}' + \rho$ ; среднее время ожидания обслуживания будет  $t_{ож} = \bar{k} / \mu n$ .

Рассмотренные случаи определения основных характеристик некоторых систем массового обслуживания показывают общий подход к их расчетам, но не охватывают всего многообразия СМО, используемых на практике и имеющих определенные особенности [35, 36, 38, 43, 44].

## 8.9. Эффективность управления техническими средствами

Под эффективностью управления техническими средствами в распределенной локальной вычислительной сети с системой массового обслуживания (например, в системе ЧПУ группой станков) понимается обеспечение минимального времени обслуживания потребителей при максимальном использовании ресурсов системы управления, что соответствует приведенным в предыдущем разделе 8.8 понятиям внешней и внутренней эффективности систем управления с разделением времени (СРВ). Эти понятия используются и в сетях массового обслуживания с оценкой *внешней эффективности сети* по среднему числу заявок в очереди на обслуживание и оценкой *внутренней эффективности сети* по среднему числу работающих каналов (приборов) обслуживания.

Анализ эффективности управления техническими средствами рассмотрим на примере системы ЧПУ станками с иерархической структурой построения (рис. 8.5.1, а). Число уровней иерархической СМО в СЧПУ зависит от степени детализации управления, определяемой составом функциональных задач – управляющих программ (УП). Например, по функциям, выполняемым различными аппаратно-программными средствами, систему ЧПУ можно разбить на восемь уровней  $x_1 - x_8$  (таблица 8.9.1) [41]. Из устройств разного уровня можно составить различные структуры СМО, теоретически возможное число которых при разбиении на  $r=8$  уровней будет  $2^{r-1}=128$  вариантов. Практически реализуемых систем будет намного меньше.

Аналитическое исследование такой многоуровневой структуры СМО с учетом взаимовероятных связей различных уровней весьма затруднено. Поэтому на первом этапе принято анализировать локальное взаимодействие отдельных пар уровней – *двухуровневых систем*, называемых *типовыми подсистемами СМО*, а на втором этапе проводить анализ СМО в целом, используя результаты локальных исследований типовых подсистем [41].

Таблица 8.9.1

## Уровни декомпозиции СМО (системы ЧПУ)

Обозначение	Наименование	Назначение, функциональная задача
$x_1$	Центральная ЭВМ	Расчет, контроль и хранение УП
$x_2, x_4, x_6$	Каналы связи	Передача информации
$x_3$	Оперативная ЭВМ	Хранение и выдача УП к УЧПУ ОУ
$x_5$	Устройство ЧПУ	Функции устройства ЧПУ
$x_7$	Промежуточная память	Хранение всей или части УП
$x_8$	Техническое устройство	Станок, робот, электропривод

Для типовых подсистем СМО вводятся следующие обозначения:

$\{x_i x_j\}$  – типовая подсистема, в которой устройство уровня  $x_i$  передает информацию в устройство уровня  $x_j$ ;

$m_i$  – число устройств уровня  $x_i$ , являющихся в подсистеме источниками заявок (обслуживаемыми устройствами);

$n_i$  – число устройств уровня  $x_i$ , являющихся обслуживающими приборами, выдающими информацию по заявкам обслуживаемых устройств.

В СМО число обслуживаемых устройств всегда больше числа обслуживающих устройств  $m_i > n_i$ .

Для декомпозиции многоуровневой СМО на типовые подсистемы необходимо на границах раздела выполнять два условия, обеспечивающих независимость анализа каждой подсистемы с учетом того, что подсистемы будут включены в общую систему для анализа [41].

Первое условие – *совместимость* числа элементов на одинаковых уровнях: число управляющих приборов в высшей подсистеме должно быть равно числу управляемых устройств в низшей подсистеме этого уровня

$$m_i \{x_j x_i\} = n_i \{x_i x_k\} \quad \text{при } k > i > j. \quad (8.9.1)$$

Это условие всегда выполняется, если для верхней подсистемы брать результаты, полученные для нижней подсистемы, т. е. проводить расчет СМО снизу вверх по иерархической структуре. Например, если для управления  $m_8$  станками уровня  $x_8$  требуется  $n_7$  уст-

роиств уровня  $x_7$ , то в верхней подсистеме  $\{x_5x_7\}$  на уровне  $x_7$  должно выполняться условие  $m_7=n_7$ .

Второе условие – *независимость времени обслуживания* устройством высшего уровня устройства нижнего уровня другой подсистемы независимо от его работы в составе своей подсистемы

$$\bar{t}_{ж}\{x_jx_i\} + \bar{t}_{с}\{x_jx_i\} \leq \bar{t}_{и}\{x_ix_k\} \text{ при } k > i > j, \quad (8.9.2)$$

где  $\bar{t}_{ж}\{x_jx_i\}$ ,  $\bar{t}_{с}\{x_jx_i\}$  – средние значения времени ожидания и обслуживания в подсистеме  $\{x_jx_i\}$  устройств уровня  $x_i$  устройствами уровня  $x_j$ ;  $\bar{t}_{и}\{x_ix_k\}$  – среднее время обработки в подсистеме  $\{x_ix_k\}$  ранее записанной информации.

Для выполнения второго условия необходимо удовлетворение двух требований. *Во-первых* запись информации в управляющее устройство должна производиться по его заявке в любое время, в том числе и во время обработки ранее записанной в это устройство информации. *Во-вторых* объем памяти управляющего устройства должен обеспечить хранение информации, используемой в процессе обслуживания, и накапливание очередной записываемой информации.

Если на всех уровнях в СМО удовлетворяются перечисленные требования и выполняются условия (8.9.1) и (8.9.2), то структуру СМО можно разделить на указанные подсистемы.

Условие совместимости можно выполнить всегда, но условие независимости времени обслуживания может иногда оказаться невыполнимым. Например, не во всех устройствах можно записать управляющую программу в процессе обработки ранее записанной программы и не всегда объем памяти позволяет записать более одной сложной управляющей программы. В таких случаях обмен информацией между устройствами будет происходить с образованием очереди и возрастанием времени ожидания, что для систем управления в реальном времени может оказаться неприемлемым.

В рассматриваемой СМО (таблица 8.9.1) устройства нижележащих уровней являются источниками заявок, а устройства вышележащих уровней являются приборами обслуживания. Все промежуточные уровни между верхним уровнем (центральной ЭВМ) и нижним уровнем (техническими устройствами ТУ) одновременно являются источниками заявок и приборами обслуживания.

Функционирование СМО, имеющей  $m$  обслуживаемых ТУ и  $n$  обслуживающих приборов, можно описать графом для следующих пяти типовых состояний СМО (рис. 8.9.1) [41]:  $s_0$  – все  $m$  ТУ исправны и созданным ими потоком заявок с интенсивностью  $m\lambda$  переведе-

ны в состоянии записи программ, идет процесс их обслуживания;  $s_k$  – программы записываются только в  $k$  технических устройств ( $k < n$ ), очереди нет;  $s_n$  – все обслуживающие приборы заняты, очереди нет, интенсивность потока заявок равна  $(m-n)\lambda$ ;  $s_{n+r}$  – все приборы заняты ( $k=n$ ) и  $r$  ТУ ожидают очереди обслуживания ( $r=1, 2, \dots, (m-n)$ );  $s_m$  – все  $m$  ТУ нуждаются в обслуживании.

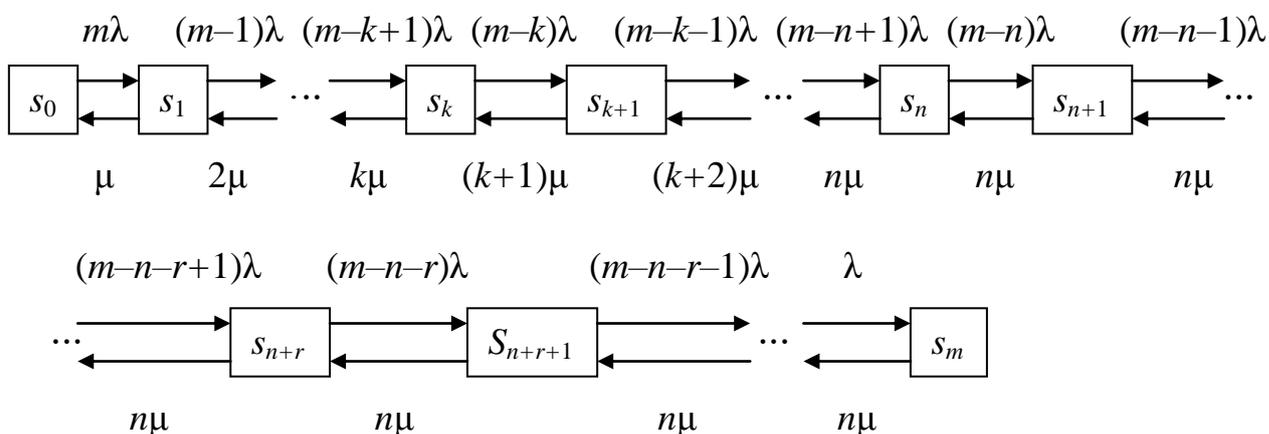


Рис. 8.8.1. Размеченный граф состояний СМО

В графе состояний СМО (рис. 8.9.1) обозначено:  $\lambda$  – интенсивность поступления требований ТУ на обслуживание – входящий поток требований в единицу времени;  $\mu$  – интенсивность обслуживания требований отдельного ТУ одним каналом – выходящий поток обслуженных требований в единицу времени.

Анализ СМО рассмотренного типа позволяет на основе ТМО определить показатели внутренней эффективности СМО (среднее число работающих каналов обслуживания  $\bar{k}$ ) и внешней эффективности (среднее число заявок  $\bar{r}$  в очереди на обслуживание) [41]

$$\bar{r} = p_0 \sum_{r=0}^{m-n} \frac{rm! \alpha^{n+r}}{n! n^r (m-n-r)!}; \quad (8.9.3)$$

$$\bar{k} = p_0 \left[ \sum_{k=0}^n \frac{km! \alpha^k}{k! (m-k)!} + n \sum_{r=1}^{m-n} \frac{m! \alpha^{n+r}}{n! n^r (m-n-r)!} \right], \quad (8.9.4)$$

где  $p_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{m! \alpha^k}{k! (m-k)!} + \sum_{k=n+1}^m \frac{m! \alpha^k}{n^{k-n} n! (m-k)!} \right]^{-1}$ ,  $p_0$  – вероятность того,

что все ТУ (станки) работают исправно;  $\alpha = \lambda/\mu$  – приведенная интенсивность потока заявок;  $\lambda = 1/t_{\text{ТУ}}$  – средняя интенсивность поступления заявок от ТУ (от станков) в единицу времени;  $\mu = 1/t_k$  – средняя интенсивность обслуживания заявок каналами (ЭВМ) в единицу времени. Операции обработки деталей в ТУ (в станках) осуществляются на-

много медленнее, чем операции обработки заявок в ЭВМ и других приборах обслуживания. Поэтому всегда  $\lambda < \mu$  и  $\alpha < 1$ .

Из (8.9.3) получают характеристики зависимости коэффициента использования ТУ  $\xi_{\text{ТУ}}$  (внешней эффективности) от числа  $m$  обслуживаемых ТУ и числа обслуживающих приборов ( $n=1, n=2$ ) при разных приведенных интенсивностях потока заявок  $\alpha = \lambda/\mu$  (рис. 8.9.2) [41].

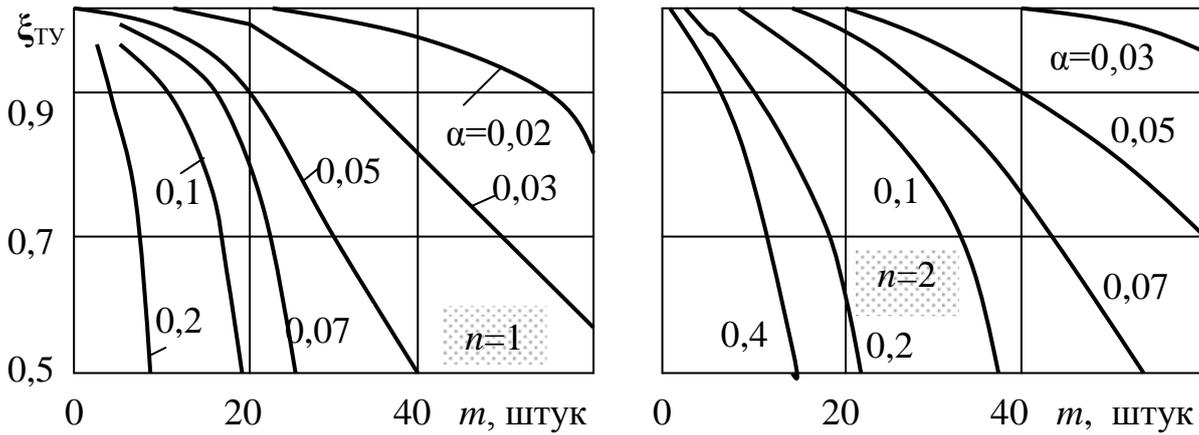


Рис. 8.9.2. Характеристики использования ТУ в СМО ЧПУ

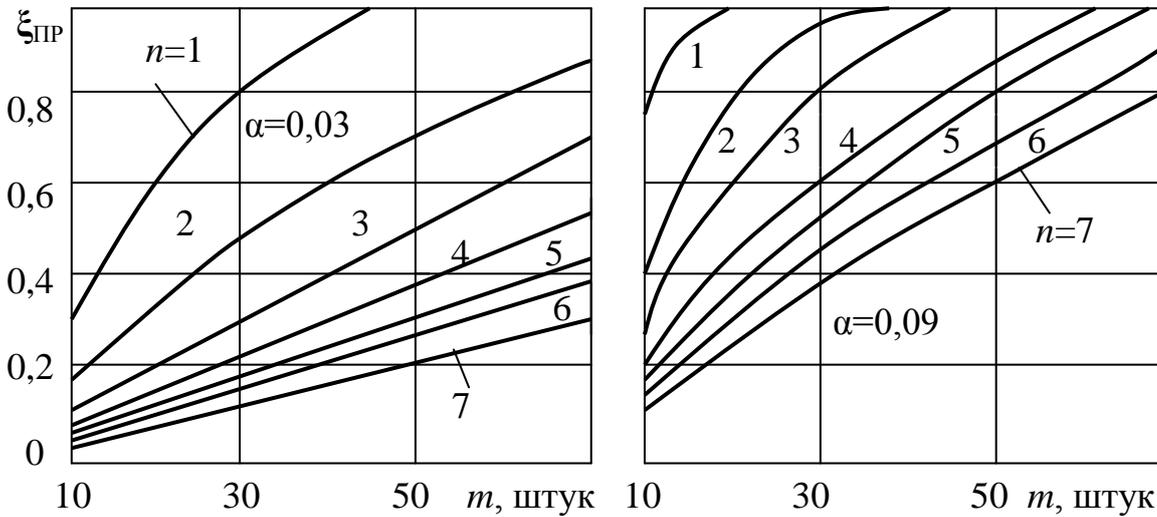


Рис. 8.9.3. Характеристики использования обслуживающих приборов в СМО ЧПУ

Из (8.9.4) получают характеристики зависимости коэффициента использования обслуживающих приборов  $\xi_{\text{ПР}}$  (внутренней эффективности) от числа обслуживаемых пользователей  $m$  и числа обслуживающих приборов  $n$  при постоянных значениях приведенной интенсивности потока заявок, например,  $\alpha = 0,03$  и  $\alpha = 0,09$  (рис. 8.9.3) [41].

Рассмотренная методика позволяет выбирать из ряда аналогичных структур СМО с различными дисциплинами обслуживания за-

данного набора потребителей структуру СМО, наилучшую по совокупности желаемых показателей внешней и внутренней эффективности управления техническими средствами.

### Контрольные вопросы

1. Какие системы называют системами с разделенным временем (СРВ)?
2. Какие проблемы (затруднения) возникают при создании СРВ?
3. Какие задачи изучает теория массового обслуживания (ТМО)?
4. Как осуществляется процесс массового обслуживания в СРВ в терминах ТМО (объекты, потоки объектов, очереди на обслуживание, обслуживающие приборы, потери объектов, время обслуживания и др.)?
5. Что называется дисциплиной обслуживания требований в СМО?
6. Какой основной принцип организации очередей используется в СМО?
7. Что понимается под внутренней и внешней эффективностью СРВ?
8. Какие характеристики СМО обозначаются символами  $A/B/m$ ?
9. Какими показателями характеризуется качество СМО?
10. Как работает одноканальная СМО с ожиданием?
11. Как работает одноканальная СМО с конечным накопителем?
12. Как работает многоканальная СМО с отказами?
13. Как работает многоканальная СМО с общим накопителем?
14. Как работает СМО с ограниченным временем ожидания?
15. Как работает СМО с приоритетным обслуживанием?
16. Как работает СМО с ненадежными обслуживающими приборами?
17. Как понимается эффективность управления техническими средствами в распределенных системах управления?
18. Что понимают под внешней эффективностью СМО?
19. Что понимают под внутренней эффективностью СМО?
20. В чем измеряется интенсивность входящего потока заявок  $\lambda$ ?
21. В чем измеряется интенсивность выходящего потока заявок  $\mu$ ?
22. Почему в системе ЧПУ станками приведенная интенсивность потока заявок  $\alpha = \lambda / \mu$  имеет значение много меньше единицы?
23. Как по среднему числу работающих приборов обслуживания определить коэффициент их использования?
24. Как по среднему числу заявок в очереди на обслуживание определить коэффициент использования обслуживаемых технических устройств?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный единый учебник по дисциплине «Основы автоматики и системы автоматического управления» разработан соответственно требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования РФ (ГОС ВПО РФ) к подготовке дипломированных специалистов по направлению «Проектирование и технология электронных средств», включающему специальности «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» и «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств».

Состав разделов данной дисциплины в учебнике установлен требованиями ГОС ВПО РФ при подготовке указанных специалистов. Поэтому в учебнике не рассмотрены адаптивные, интеллектуальные, игровые и другие системы автоматического управления, относящиеся к кибернетическим системам искусственного интеллекта, которые начинают использоваться в системах автоматизации производства, экономических и научно-технических расчетах и исследованиях [7, 14, 17]. В учебнике также не рассмотрена методология автоматизированного проектирования систем автоматического управления процессами высоких технологий [35]. Однако, изучив дисциплину «Основы автоматики и системы автоматического управления», специалист с высшим техническим образованием сможет при желании освоить использование и указанных достижений научно-технического прогресса, не включенных в данный учебник.

Изложение разделов дисциплины в учебнике сопровождается примерами расчетов и контрольными вопросами, а также выполнением студентами работ лабораторного практикума и выполнением индивидуальных заданий по расчетам реальных элементов и систем автоматического управления. Для углубленного изучения отдельных разделов дисциплины в учебнике приведен список дополнительной литературы, рекомендуемой для соответствующих разделов, что не исключает возможности использования многочисленных других литературных источников по теории и практике систем автоматического управления технологическими процессами и установками.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. С. 768.
2. *Бесекерский В.А., Изранцев В.В.* Системы автоматического управления с микроЭВМ. – М.: Наука, 1987. С. 318.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1967. С. 608.
4. *Ерофеев А.А.* Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 2003. С. 302.
5. *Андреев Н.И., Васильев С.К., Захаров В.Н. и др.* Задачник по теории автоматического управления: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.С. Шаталова. – М.: Энергия, 1979. С. 544.
6. *Кориков А.М.* Основы теории управления: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. С. 392.
7. *Коршунов Ю.М.* Математические основы кибернетики: Учебное пособие для вузов. – М.: Энергия, 1980. С. 424.
8. *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1988. С. 256.
9. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. С. 304.
10. *Стефани В.П.* Основы построения АСУ ТП: Учебное пособие для вузов. – М.: Энергоиздат, 1982. С. 352.
11. *Теория* автоматического управления: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.С. Шаталова. – М.: Высшая школа, 1977. С. 448.
12. *Душин С.Е., Зотов Н.С., Имаев Д.Х. и др.* Теория автоматического управления: Учебник для вузов / Под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2005. С. 567.

### Дополнительная к разделам 1 и 2

13. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. С. 832.
14. *Ерофеев А.А., Поляков А.О.* Интеллектуальные системы управления: Учебное пособие для вузов. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. С. 265.
15. *Солодовников В.В., Коньков В.Г., Суханов В.А., Шевяков О.В.* Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы: Учебное пособие / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Высшая школа, 1991. С. 255.

16. *Музылева И.В.* Элементная база для построения цифровых систем управления: Учебное пособие для вузов. – М.: Техносфера, 2006. С. 137.

17. *Усков А.А., Кузьмин А.В.* Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. М.: Горячая Линия – Телеком, 2004. С. 143.

18. *Филлипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. С. 616.

### **Дополнительная к разделу 3**

19. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2002. С. 576.

### **Дополнительная к разделу 4**

20. *Теория* автоматического управления: Учебник для вузов. Часть вторая / Под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высш. школа, 1972. С. 432.

### **Дополнительная к разделу 5**

21. *Методы* оптимизации в теории управления: Учебное пособие / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: Питер, 2004. С. 256.

### **Дополнительная к разделам 6 и 7**

22. *Коновалов Л.И., Петелин Д.П.* Элементы и системы электроавтоматики: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1985. С. 216.

23. *Подлипенский В.С. и др.* Элементы и устройства автоматики: Учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 1995. С. 472.

24. *Справочник* по автоматизированному электроприводу / Под ред. В.А. Елисеева и А.В.Шинянского. – М.: Энергоатомиздат, 1983. С. 616.

25. *Устройства* и элементы систем автоматического регулирования и управления. Техническая кибернетика. Книга 1. Измерительные устройства, преобразующие элементы и устройства / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1973. С. 671.

26. *Устройства* и элементы систем автоматического регулирования и управления. Техническая кибернетика. Книга 2. Усилительные устройства, корректирующие элементы и устройства / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1975. С. 687.

27. *Устройства* и элементы систем автоматического регулирования и управления. Техническая кибернетика. Книга 3. Исполнительные устройства и сервомеханизмы / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1976. С. 735.

#### **Дополнительная к разделу 8**

28. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. С. 336.

29. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1982. С. 256.

30. Раводин О.М. Гибкие автоматизированные системы и робототехника: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2005. С. 260.

31. Распределенные управляющие и вычислительные системы. Сборник трудов Института проблем передачи информации АН СССР. – М.: Наука, 1987. С. 167.

32. Ратмиров В.А. Основы программного управления станками. – М.: Машиностроение, 1982. С. 240.

33. Тихоненко О.М. Модели массового обслуживания в системах обработки информации. – Минск: Университетское, 1990. С. 191.

34. Шенброт И.М., Антропов М.В., Давиденко К.Я. Распределенные АСУ технологическими процессами. – М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 249.

35. Бородакий Ю.В., Лободинский Ю.Г. Основы теории систем управления (исследование и проектирование). – М.: Радио и связь, 2004. С. 256.



## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	5
В1. Основные понятия и определения в автоматике .....	7
В2. Классификация САУ .....	10
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ .....	13
1.1. Математические модели САУ .....	13
1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики .....	16
1.3. Преобразование структурных схем САУ .....	23
1.4. Передаточные функции замкнутых САУ .....	27
1.5. Анализ одномерных САУ .....	29
1.5.1. Динамическая устойчивость САУ .....	29
1.5.2. Критерий устойчивости Гурвица .....	31
1.5.3. Критерий устойчивости Михайлова .....	33
1.5.4. Критерий устойчивости Найквиста .....	36
1.5.5. Логарифмический критерий устойчивости .....	39
1.5.6. Качество САУ .....	40
1.5.7. Точность САУ .....	43
1.5.8. Инвариантность САУ .....	48
1.5.9. Качество переходного процесса .....	54
1.5.9.1. Классический метод расчета переходного процесса .....	55
1.5.9.2. Операторный метод расчета переходного процесса .....	58
1.5.9.3. Частотные оценки качества переходного процесса .....	60
1.5.9.4. Корневые оценки качества переходного процесса .....	62
1.5.9.5. Интегральные оценки качества переходного процесса .....	65
1.5.10. Чувствительность систем управления .....	68
1.6. Синтез линейных САУ .....	74
1.6.1. Задачи синтеза САУ .....	74
1.6.2. Реализация регуляторов в САУ .....	76
1.6.3. Синтез алгоритмических структур САУ .....	79
1.6.4. Синтез систем подчиненного регулирования .....	84
1.6.5. Частотный метод синтеза САУ .....	91
2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ САУ .....	97
2.1. Классификация дискретных САУ .....	97
2.2. Математическое описание дискретных САУ .....	102
2.2.1. Модель импульсного элемента .....	102
2.2.2. Дискретно-разностные уравнения САУ .....	105
2.2.3. Дискретные преобразования .....	108

2.2.4. Свойства дискретных преобразований .....	108
2.2.5. Передаточные функции дискретных САУ .....	114
2.2.5.1. Передаточные функции разомкнутых САУ .....	114
2.2.5.2. Передаточные функции замкнутых САУ .....	115
2.2.5.3. Передаточные функции по возмущению .....	116
2.2.5.4. Передаточные функции САУ с ЭЦВМ .....	117
2.2.5.5. Частотные передаточные функции .....	125
2.3. Устойчивость дискретных САУ .....	127
2.3.1. Дискретный аналог критерия Гурвица .....	129
2.3.2. Дискретный аналог критерия Михайлова .....	129
2.3.3. Дискретный аналог критерия Найквиста .....	130
2.4. Качество дискретных САУ .....	133
2.4.1. Анализ качества САУ .....	133
2.4.2. Синтез дискретных САУ .....	137
3. РАБОТА САУ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....	144
3.1. Характеристики случайных воздействий .....	144
3.2. Стационарные случайные процессы .....	152
3.3. Оценка влияния случайных воздействий на САУ .....	156
4. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ .....	167
4.1. Особенности нелинейных САУ .....	167
4.2. Методы исследования нелинейных САУ .....	169
4.3. Устойчивость нелинейных САУ .....	183
4.3.1. Понятие устойчивости нелинейных САУ .....	183
4.3.2. Исследование устойчивости методами Ляпунова .....	185
4.3.3. Исследование устойчивости методом В.М. Попова .....	187
4.3.5. Алгебраический метод анализа автоколебаний .....	191
4.4. Качество нелинейных САУ .....	194
4.4.1. Оценка качества методом гармонической линеаризации ....	194
4.4.2. Оценка качества методами численного интегрирования .....	201
4.4.3. Методы компенсации влияния нелинейностей .....	203
5. ОПТИМАЛЬНЫЕ САУ .....	206
5.1. Общие сведения .....	206
5.2. Вариационный метод синтеза ОСАУ .....	208
5.3. Синтез с использованием принципа максимума .....	213
5.4. Метод динамического программирования .....	217
6. ДАТЧИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН .....	224
6.1. Назначение и классификация датчиков .....	224
6.2. Датчики положения .....	226
6.3. Датчики скорости .....	243
6.4. Датчики электрических величин .....	248
6.5. Датчики технологических параметров .....	253

	351
7. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА .....	266
7.1. Назначение и классификация .....	266
7.2. Электрические исполнительные устройства .....	269
7.3. Гидравлические и пневматические двигатели .....	287
8. САУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ .....	294
8.1. Включение ЭВМ в контур управления .....	294
8.2. Устройства связи ЭВМ с объектом управления .....	299
8.3. Обработка информации с датчиков .....	307
8.4. Режим реального времени управления .....	314
8.5. Распределенные системы управления.....	316
8.6. Локальные вычислительные сети в управлении .....	318
8.7. Инструментальные средства АСУ .....	321
8.8. Типовые модели систем массового обслуживания .....	325
8.9. Эффективность управления техническими средствами .....	338
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	344
ЛИТЕРАТУРА.....	345

*Учебное издание*

*Владислав Александрович Бейнарович*

**ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ  
И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебник для вузов

*Издание второе, переработанное и дополненное*

Печатается без редактирования по текстам, предоставленным автором

---

Издательство «В-Спектр»  
Подписано к печати 28.11.2007.  
Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печать трафаретная.  
Печ. л. 22,4. Усл. печ. л. 20,8.  
Тираж 200 экз. Заказ 105.

---

Тираж отпечатан в издательстве «В-Спектр»  
ИНН/КПП 7017129340/701701001, ОГРН 1057002637768  
634055, г. Томск, пр. Академический, 13-24, Тел. 49-09-91.  
E-mail: bvm@sibmail.com