O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
Matematika fakulteti

Algebra va geometriya kafedrasi

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASIDAN MASALA VA MASHQLAR
I-qism

O’quv qo‘llanma

Samarqand – 2020

Algebra va sonlar nazariyasidan masala va mashqlar. I-qism. O'quv qo'llanma. – Samarqand, 2020. – 185 bet.

Mualliflar: **U.X. Narzullayev, A.S. Soleev, X.X.Ro'zimuradov**

Taqrizchilar: Termiz davlat universiteti Algebra va geometriya kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari doktori, professor **I. Allakov**
O'zFA Matematika instituti Samarqand filiali yetakchi ilmiy xodimi, fizika-matematika fanlari doktori, professor **I.A. Ikromov**

Samarqand davlat universiteti Ilmiy kengashining 2020 yil ___ sentabridagi yig'lishida nashrga tavsiya etilgan.

So’z boshi

Ushbu o’quv qo‘llanma «Algebra va sonlar nazariyasi» fani bo‘yicha 5130100 – Matematika», 5110100 – Математика ва информатика, 5140300–Механика ва математик моделлаштириш ta’lim yo‘nalishlari bakalavr talabalari uchun mo‘ljallangan. Unda shu fanning namunaviy o‘quv dasturidan kelib chiqib, to’plamlar va akslantirishlar, asosiy algebraik sistemalar, sonlar nazariyasi mavzulariga oid qisqacha nazariy ma’lumotlar, namunaviy misollarni yechish uchun uslubiy tavsiylar, mustaqil ish topshiriqlari va boshqa tarqatma materiallar keltirilgan.

Qo’llanmadan 5A130101 – Matematika (yo’nalishlar bo’yicha) magistratura mutaxassisligi talabalari ham Abstrakt algebra fanining elementlarini o’rganishda foydalanishlari mumkin.

Qo’llanmada to’plamlar va akslantirishlar, asosiy algebraik sistemalar, sonlar nazariyasi mavzulariga oid jami 1000 ga yaqin misollar, mashqlar va nazariy masalalar jamlangan bo’lib, ulardan bir qanchasining yechimlari to’liq berilgan yoki yechish uchun ko’rsatmalar berilgan.

Raqamiga * belgisi qo’yilgan mashqlarning to’liq yechimlari keltirilgan.

Qo’llanma talabalarga Algebra va sonlar nazariyasi bo’yicha keltirilgan mavzularni yanada chuqurroq o‘zlashtirishga yaqindan yordam beradi degan umiddamiz.

Mualliflar

I-bob
TO'PLAMLAR VA AKSLANTIRISHLAR

Tayanch iboralar: *to'plam; qarashlilik munosabati; tegishlilik munosabati; to'plamlar birlashmasi; to'plamlar majmuyi birlishmasi; to'plamalr kesishmasi; unversal to'plam; to'ldiruvchi; simmetrik ayirma; to'plamlarning bevosita yoki dekart ko'paytmasi; to'plamning bevosita darajasi; akslantirish; to'plamni almashtirish; elementning obrazi; elementning proobrazi; to'plamning obrazi; inyektsiya; syuryeksiya; biyeksiya; akslantirishning arligi; kompozisiya; teskari akslantirish; binar munosabat; binar munosabatning aniqlanish sohasi; binar munosabatning qiymatlar sohasi; binar munosabat uchun teskari munosabat; munosabatlar ko'paytmasi; refleksivlik; irrefleksivlik; simmetriklik, antisimmetriklik; ekvivalentlik; ekvivalentlik sinfi (qo'shni sinf); faktor to'plam; tabiiy akslantirish; old tartib; qismiy tartib; qismiy (chiziqli) tartiblanganlik; maksimal (minimal), eng katta (eng kichik) elementlar; qismto'plamning yuqori (quyi) chegarasi; qismto'plamning aniq yuqori (quyi) chegarasi; to'la tartiblanganlik; monoton akslantirish; qisman tartiblangan to'plamlar izomorfizmi; chekli to'plam; to'plam elementlarining soni; cheksiz to'plam; sanoqli to'plam; kontinual to'plam; kardinal sonlar; deduksiya; induksiya; matematik induksiya usuli.*

1-§. To'plamlar ustida amallar

Qandaydir xossa aniqlangan bo'lib, biror matematik nazariyada o'rganilishi mumkin bo'lgan har qanday predmetning bu xossaga ega yoki emasligini aytish mumkin bo'lsin. U holda bu xossaga ega birgalikda olingan barcha predmetlarni biz yangi matematik obyekt kabi tasavvur eta olamiz. Bu obyekt aytilgan xossaga ega bo'lgan barcha predmetlardan iborat *to'plam,* predmetlarning o'zlari esa uning *elementlari* deyiladi. Shunday qilib, biror to'plamning berilishi uchun yo shunday xossani ifodalash kerak bo'ladiki, unga ega bo'lishlik biror matematik predmetni bu to'plamning elementi qilsin, yoki unig hamma elementlarini ko'rsatish kerak bo'ladi.

Mana bu $\in$ belgi orqali *qarashlilik munosabati* belgilanadi, ya'ni $x \in A$ ifoda x element A to'plamga qarashli ekanligini ifodalaydi. x ning A ning elementi emasligi $x \notin A$ kabi yoziladi. Agar ikkita A va B to'plamlar bir xil elementlardan iborat bo'lsa, ular *teng* deyiladi. Agar A va B to'plamlar teng bo'lsalar $A=B$ kabi, aks holda $A \neq B$ kabi yozamiz. Mana bu $\subseteq$ orqali *o'z ichiga olishlik munosabati* ifodalanadi ya'ni $A \subseteq B$ yozuv A ning har bir eleyenti B ning elementi ham bo'lishini bildiradi. Bu holda A to'plam B ning qism to'plami, B esa A ning *ustto'plami* deyiladi. Agar $A \subseteq B$ va $A \neq B$ bo'lsa A to'plam B ning *xos qism to'plami* deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi. Hech qanday elementlarga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ orqali belgilanadi. A to'plamning barcha qism to'plamlari majmuyi *R(A)* bilan belgilanadi.

A va *B* *to'plamlarning birlashmasi* deb, $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ёки } x \in B\}$ to'plamga aytiladi.

A_i $(i \in I)$ *to'plamlar majmuyining birlashmasi* deb

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid ø \; őí äàé \; i_o \in I \; ò î ï èëàäèêè \;\; x \in A_{i_o}\}$$

to'plamga aytiladi.

A va *B* *to'plamlarning kesishmasi* deb, $A \cap B = \{x | x \in A \text{ va } x \in B\}$ to'plamga aytiladi.

$A_i (i \in I)$ to'plamlar majmuiyning kesishmasi deb, $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \; \forall \; i \in I\}$ to'plamga aytiladi, bu yerda $I \neq \varnothing$.

A va *B* *to'plamlarning ayirmasi* deb, $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ âà } x \notin B\}$ to'plamga aytiladi.

Biz bu paragrafdagi masalalarda uchraydigan hamma to'plamlar biror *U universal to'plamning* qism to'plamlari deb hisoblaymiz. $U \setminus A$ ayirma *A* to'plamning to'ldiruvchisi deyiladi va $(-A)$ orqali belgilanadi.

A va *B* *to'plamlarning simmetrik ayirmasi* deb,

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ to'plamga aytiladi.}$$

1-m i s o l. $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$ bo'ladigan *A*, *B* va *C* to'plamlar mavjudmi?

Yechish. $x \in A \cap B$ bo'lsin, u holda $x \notin C$. Shunday qilib $x \in (A \cap B) \setminus C$. Demak, bunday to'plamlar mavjud emas. ■

2-m i s o l. Ayniyatni isbot qiling

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Yechish. $x \in A \cap (B \cup C)$ bo'lsin. U holda $x \in A$ va $x \in B \cup C$ bo'ladi. Agar $x \in B$, bo'lsa, $x \in A \cap B$ bo'ladi, va demak, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Agar $x \in C$ bo'lsa, $x \in A \cap C$ bo'ladi, va demak, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Shunday qilib $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bo'lsin. Agar $x \in A \cap B$ bo'lsa $x \in A$ va $x \in B$ bo'ladi. Bundan $x \in A$ va $x \in B$, ya'ni. $x \in A \cap (B \cup C)$ kelib chiqadi. Agar $x \in A \cap C$ bo'lsa $x \in A$ va $x \in C$ bo'ladi. Bundan $x \in A$ va $x \in B \cup C$, ya'ni $x \in A \cap (B \cup C)$ kelib chiqadi. Shunday qilib

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C). \; ■$$

3-m i s o l. Ayniyatni isbot qiling:

$$-(A \cap B) = (-A) \cup (-B).$$

Yechish. $x \in -(A \cap B)$ bo'lsin. Bu $x \in U$ ва $x \notin A \cap B$ bo'lishini bildiradi. Bundan $x \notin A$ yoki $x \notin B$ ligi kelib chiqadi. Agar $x \notin A$ bo'lsa $x \in -A$ bo'ladi, va va demak, $x \in (-A) \cup (-B)$. Agar $x \notin B$ bo'lsa, $x \in -A$ bo'ladi, va demak, $x \in (-A) \cup (-B)$. Shunday qilib, $-(A \cap B) \subseteq (-A) \cup (-B)$ $x \in (-A) \cup (-B)$ bo'lsin. Agar $x \in -A$ bo'lsa $x \in U$ ва $x \notin A$ bo'ladi, va demak, $x \notin A \cap B$. Bundan $x \in -(A \cap B)$ kelib chiqadi. Agar $x \in -B$ bo'lsa, $x \in U$ ва $x \notin B$, va demak,

$x \notin A \cap B$ bo'ladi. Bundan $x \in -(A \cap B)$ kelib chiqadi. Shunday qilib $(-A) \cup (-B) \subseteq -(A \cap B)$. ■

4-m i s o l. Quyidagilarni isbotlang:

a) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq (-B) \cup C$; b) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Yechish. a) $A \cap B \subseteq C$ va $x \in A$ bo'lsin. Ikki holni qarab chiqamiz: $x \in B$ yoki $x \in -A$. Agar $x \in B$ bo'lsa $x \in A \cap B \subseteq C$ ya'ni $x \in (-B) \cup C$ bo'ladi.

Agar $x \in -A$ bo'lsa $x \in (-B) \cup C$ bo'ladi.

$A \subseteq (-B) \cup C$ va $x \in A \cap B$ bo'lsin. U holda $x \in A$ va $x \in B$. Demak, $x \in C$.

b) $(A \setminus B) \cup B = A$ va $x \in B$ bo'lsin. U holda tushinarliki $x \in A$. $B \subseteq A$ bo'lsin. U holda $(A \setminus B) \cup B = (A \cap (-B)) \cup B = (A \cup B) \cap (-B \cup B) = A$. ■

5-m i s o l. Ayniyatni isbot qiling

$A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$.

Yechish. $x \in A \cap (B \dot{-} C)$ bo'lsin. U holda $x \in A$ va $x \in B \dot{-} C$ bo'ladi. Bundan, agar $x \in B$ bo'lsa $x \notin C$ bo'lishi, va demak, $x \in A \cap B$ bo'lishi kelib chiqadi, ammo $x \notin A \cap C$. Agar $x \in C$ bo'lsa $x \notin B$. Demak, $x \in A \cap C$, ammo $x \notin A \cap B$. Shunday qilib $x \in (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$. Demak $A \cap (B \dot{-} C) \subseteq (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$.

$x \in (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$ bo'lsin. Agar $x \in A \cap B$ va $x \neq A \cap C$ bo'lsa u holda $x \in A$, $x \in B$, $x \notin C$ bo'ladi. Demak $x \in A \cap (B \dot{-} C)$. Agar $x \in A \cap C$ va $x \notin A \cap B$ bo'lsa, u holda $x \in A$, $x \in C$, $x \notin B$. Demak, $x \in A \cap (B \dot{-} C)$ bo'ladi. Shunday qilib; $(A \cap B) \dot{-} (A \cap C) \subseteq A \cap (B \dot{-} C)$.

6-m i s o l. Isbot qiling:

$A \dot{-} B = C \Leftrightarrow B \dot{-} C = A \Leftrightarrow C \dot{-} A = B$.

Yechish. $A \dot{-} B = C$ bo'ladi. U holda $B \dot{-} C = B \dot{-} (A \dot{-} B) = B \dot{-} (B \dot{-} A) = A$, chunki $A \dot{-} B = B \dot{-} A$ va $A \dot{-} (A \dot{-} B) = B$.

7-m i s o l. $\cup, \cap, \setminus$ amallarni

a) $\dot{-}, \cap$; b) $\dot{-}, \cup$; s) $\setminus, \dot{-}$ amallar orqali ifodalang.

Yechish. a) $A \cup B = A \dot{-} B \dot{-} (A \cap B)$, $A \setminus B = A \dot{-} (A \cap B)$;

b) $A \cap B = (A \cup B) \dot{-} A \dot{-} B$, $A \setminus B = (A \cup B) \dot{-} B$;

s) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cup B = (A \dot{-} B) \dot{-} [A \setminus (A \setminus B)]$. ■

8-m i s o l. n elementli to'plam 2^n ta qism to'plamlarga ega bo'lishini isbot qiling.

Yechilish. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ va $B \subseteq A$ bo'lsin. Har bir a_i element uchun ikki: $a_i \in B$ va $a_i \notin B$ imkoniyat mavjud. A ning hammasi bo'lib $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ ta qism to'plami mavjud. ■

9-m i s o l. Isbot qiling:

$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Yechish. $C \in P(A \cap B)$, ya'ni $C \subseteq A \cap B$ bo'lsin. U holda $C \subseteq A$ va $C \subseteq B$, va demak, $C \in P(A)$ va $C \in P(B)$. Shunday qilib $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$.

$C \in P(A) \cap P(B)$ bo'lsin. U holda $C \in P(A)$ va $C \in P(B)$, ya'ni $C \subseteq A$ va $C \subseteq B$, va demak, $C \subseteq A \cap B$. Shunday qilib, $C \subseteq P(A \cap B)$. Demak, $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$. ■

10-m i s o l. Agar $A \cap B \subseteq -C$ va $A \cup C \subseteq B$ bo'lsa, hamma A,B va C lar uchun $A \cap C = \varnothing$ bo'lishini isbot qiling.

Yechish. Teskarisini faraz qilib isbotlaymiz. $x \in A \cap C$ bo'lsin, u holda $A \cup C \subseteq B$ bo'lgani uchun $x \subseteq B$ bo'ladi. Ammo $x \in A \cap B$, demak, $x \in -C$. Bu esa $x \in C$ bo'lishiga ziddir.

M A S H Q L A R

1. Isbot qiling:

a) $A \subseteq A$ (refleksivlik); b) agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo'lsa $A \subseteq C$ (tranzitivlik);

c) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$; d) $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$; y) $A \setminus B \subseteq A$.

2. Agar A to'plam x^2-$7x+12=0$ tenglama ildizlari to'plami va $B = \{3,4\}$, bo'lsa A=B bo'lishini isbotlang.

3. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ bo'lishini isbotlang.

4. $\{\{1,2\},\{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$ligini isbotlang.

5. $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ larni toping, agar

a) $A = \{-1,0,3,4\}$, $B = \{0,4,6\}$; b) $A = [0,2]$, $B = [1,5]$;

c) $A = [0,2]$, $B = \{0,4,6\}$;d) $A =]-\infty, 7[$, $B =]5,8[$;

e) $A = [1,3] \cup [5,7]$, $B = [2,6]$.

6.Quyidagi ayniyatlarni isbot qiling:

a) $A \cup A = A \cap A = A$; b) $A \cap B = B \cap A$; s) $A \cup B = B \cup A$;

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; e) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

g) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;

h) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$.

7. Quyidagi ayniyatlarni isbot qiling:

a) $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$; b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

e) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;

g) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; h) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;

i) $-(-A) = A$; j) $A \cup (-A) = U$; k) $A \cap (-A) = \varnothing$;

l) $(A \cap B) \cup [A \cap (-B)] = (A \cup B) \cap [A \cup (-B)] = A$;

m) $[(-A) \cup B] \cap A = A \cap B$;

n) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$; o) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

p) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; q) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

8.Isbotlanki:

a) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$; b) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ va $A \subseteq C$;

c) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap (-B) \subseteq C$;   d) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

e) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$; f) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;

g) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;   h) $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;

i) $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$;   j) $A \subseteq B \Rightarrow -B \subseteq -A$;

g) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$;   k) $A = -B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ va $A \cup B = U$.

9.Ayniyatlarni isbotlang:

a) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$;   b) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$;

c) $A \dot{-} (A \dot{-} B) = B$; d) $A \cup B = A \dot{-} B \dot{-} (A \cap B)$;

e) $A \setminus B = A \dot{-} (A \cap B)$; f) $A \setminus B = A \dot{-} (A \cap B)$;

g) $A \dot{-} \varnothing = \grave{A}$; h) $A \dot{-} \varnothing = \varnothing$;

i) $A \dot{-} U = -A$;   j) $(A \cup B) = (A \dot{-} B) \cup (A \cap B)$.

10.Isbotlangki,

a) $A \dot{-} B = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{A} = B$; b) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = A \dot{-} B$.

11. n ta elementdan iborat to'plam nechta k elementli $(k \le n)$ to'plamlarga ega?

12. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari hamma *A, B* va *C* lar uchun to'g'ri?

a*) Agar $A \in B$ va $\mathrm{B} \in \tilde{N}$ bo'lsa, $\grave{A} \in \tilde{N}$;

b*) Agar $A \subseteq B$ *va* $B \in \tilde{N}$ *bo'lsa* $\grave{A} \in \tilde{N}$;

c*) Agar $A \cap B \subseteq -\tilde{N}$ va $\grave{A} \cup \tilde{N} \subseteq B$ bo'lsa, $\grave{A} \cap \tilde{N} = \varnothing$;

d*) Agar $A \ne B$ va $B \ne C$ bo'lsa, $A \ne C$;

e*) Agar $A \subseteq -(B \cup C)$ va $B \subseteq (A \cup C)$ bo'lsa $B = \varnothing$.

13*. Har bir musbat *n* son uchun shunday *n* elementli A_n to'plam ko'rsatingki, agar $x, y \in A_n$ bo'lsa, yo $x < y$ yo $y < x$, yoki $x = y$ bo'lsin.

14*. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

Bu yerda *A, B* va *C* berilgan to'plamlar va $B \subseteq A \subseteq C$.

15. Tenglamalar sistemasi yeching

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \setminus X = C, \end{cases}$$

bu yerda *A, B* va *C* berilgan to'plamlar va $B \subseteq A, A \cap C = \varnothing$.

16. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

Bu yerda *A, B* va *C* berilgan to'plamlar va $B \subseteq A \subseteq C$.

17. Quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

a) $\bigcup_{k \in K} \bigcup_{t \in T} A_{kt} = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{kt}$;   b) $\bigcap_{k \in K} \bigcap_{t \in T} A_{kt} = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{k \in K} A_{kt}$;

c) $-\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) = \bigcap_{k \in K} (-A_k)$; d) $-\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) = \bigcup_{k \in K} (-A_k)$; ye) $\bigcup_{k \in K} (B \cap A_k) = B \cap \left(\bigcup_{k \in K} A_k\right)$.

2-§. Akslantirishlar

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlarning *bevosita* yoki *dekart ko'patmasi* deb

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{< a_1, a_2, \ldots, a_n > | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

to'plamga aytiladi.

Agar $A_1 = \ldots = A_n = A$ bo'lsa, $A_1 \times \ldots \times A_n$ to'plam A *to'plamning bevosita darajasi* deyiladi va A^n bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan $A^1=A$, $A^0=\varnothing$ deb hisoblash tabiiydir.

A,B ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plamlar bo'lsin. Agar har bir $a \in A$ elementga bir qiymatli aniqlangan va $f(a)$ bilan belgilanadigan $b \in B$ element mos qilib qo'yilgan, ya'ni $b = f(a)$, bo'lsa, A to'plamning B to'plamga f *akslantirilishi* berilgan deyiladi va $f: A \to B$ kabi yoziladi. $f: A \to B$ akslantirish boshqacha aytilganda qiymatlari B to'plamdan olinadigan A to'plamdagi *funksiya* deyiladi.

$f: A \to A$ akslantirish A *to'plamning almashtirishi* deyiladi. A to'plamning eng oddiy almashtirishi hamma $a \in A$ lar uchun $i(a)=a$ kabi aniqlanadigan $i_A: A\to A$ aynan almashtirishdfn iborat.

$f: A \to B$ akslantirish berilgan va $a \in A$ bo'lsin. $b = f(a)$ element a *elementning* f *akslantirishdagi obrazi*, a element esa b *elementning proobrazi* deyiladi. Agar b element a ning f akslantirishdagi obrazi bo'lsa $a \mapsto b$ kabi yoziladi. Agar $X \subset A$ bo'lsa, $f(X) = \{f(a) | a \in X\}$ deb hisoblaydilar. $f(X)$ to'plam X *to'plamning* (f akslantirishdagi) *obrazi* deyiladi.

Agar A to'plamning ixtiyoriy a_1, a_2 elementlari uchun

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

shart berilgan bo'lsa, $f: A \to B$ akslantirish *inyektiv* yoki *inyeksiya* deyiladi.

Agar B to'plamning har bir elementi aqalli bitta proobrazga ega, ya'ni ixtiyoriy $b \in B$ uchun $f^{-1}(b) \neq \varnothing$ bo'lsa, $f: A \to B$ akslantirish *syuryektiv yoki syuryeksiya* deyiladi.

Bir vaqtning o'zida ham inyektiv ham syuryektiv bo'lgan f akslantirish *biyektiv akslantirish yoki biyeksiya* deyiladi. Agar $A=C$, $B=D$ va har bir $a \in A$ uchun $f(a) = \varphi(a)$ bo'lsa ikki $f: A \to B$ va $\varphi: C \to D$ akslantirishlar teng deyiladi va $f = \varphi$ kabi yoziladi. Agar $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ - chekli to'plam, B – ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsa, $f: A \to B$ akslantirishni

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yozish qabul qilingan.

$f(x,y)$ - ikki o'zgaruvchili funksiya (masalan, $x + y$, $x - y$, xy, bu erda $x, y \in \boldsymbol{R}$) bo'lsin. Bu funksiyani har bir (x, y) tartiblangan juftni biror elementga mos qilib qo'yuvchi

$$f: X^2 \to Y$$

akslantirish kabi qarash mumkin.

Umuman X to'plam m ta elementlarning har bir tartiblangan majmuyiga Y to'plamning biror elementini mos qilib qo'yuvchi m argumentli $(x_1, \ldots, x_m)$ funksiya

$$f : X^m \to Y \ (m = 0,1,2,\ldots)$$

akslantirishdir.

m son f akslantirishning *arligi* deyiladi.

0-ar (nular) akslantirish Y ning biror elementini belgilab qo'yadi;

1-ar (unar) akslantirish har bir $x \in X$ elementga $f(x) \in Y$ elementni mos qo'yadi;

2-ar (binar) akslantirish $x, y \in X$ elementlarning har bir tartiblangan juftiga $f(x, y) \in Y$ elementni mos qo'yadi;

3-ar (ternar) $x, y, z \in X$ elementlarning har bir tartiblangan uchligiga $f(x, y, z) \in Y$ elementni mos qo'yadi; va hokazo.

Ikki $f : A \to B$ va $g : B \to C$ akslantirishlar berilgan bo'lsin. Har bir $a \in A$ elementga $g(f(a)) \in C$ elementni mos qilib qo'yib, A to'plamning C to'plamga akslantirilishini hosil qilamiz. Bu akslantirish f va g akslantirishlarning ko'paytmasi yoki kompozisiyasi deyiladi va gf qilib belgilanadi.

$f : A \to B$ - biyektiv akslantirish bo'lsin. U holda har bir $b \in B$ element uchun $f(a) = b$ bo'ladigan yagona $a \in A$ element mavjud bo'ladi. Har bir elementga uning $a \in A$ proobrazini mos qilib qo'yuvchi $f^{-1} : B \to A$ akslantirish f akslantirishga *teskari akslantirish* deyiladi

1-m i s o l. $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2\}$,bo'lsin. U holda

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$,

$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$.

Shuning bilan birga $a, b, c \notin \{(1,2)\}$ bo'lsa, hatto $(A \times B) \cap (B \times A) = \varnothing$. ■

2-m i s o l. $a \neq c$ bo'lganda $A = \{a, b\}, B = \{b, c\}$ to'plamlar uchun

$A \times B = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$, $\quad B \times A = \{(b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\} \neq A \times B$,

ammo $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(b, b)\} \neq \varnothing$. ■

3-m i s o l. A bilan B – o'zaro perpindikulyar son o'qlari, ularning kesishish nuqtasini ularning har birida sanoq boshi deb olinsa, u holda $A \times B$ ko'paytma XOY dekart koordinata tekisligi bo'ladi. ■

4-m i s o l. Isbot qiling: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Yechish. $x \in (A \cup B) \times C$ bo'lsin. U holda $x = < y, z >$, bu yerda $y \in A \cup B, z \in C$. Bundan $y \in A$ yoki $y \in B$. Demak, $< y, z > \in A \cdot C$ yoki $< y, z > \in A \times C$.

Shunday qilib, $(A \cup B) \times C \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

$x \in (A \times C) \cup (B \times C)$ bo'lsin. U holda $x \in A \times C$ yoki $x \in B \times C$. Bu esa $x = < y, z >$ ekanligini bildiradi va $x \in A \times C$ bo'lgan holda $y \in A,\ z \in C$ ni $x \in B \times C$ bo'lgan holda esa $y \in B,\ z \in C$ bo'lishini hosil qilamiz. Demak, $y \in A \cup B, a\ \ x = < y, z > \in (A \cup B) \times C$ va shuning uchun

$$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C. \ ■$$

5-m i s o l. Agar $f: \boldsymbol{R} \to [-1,\ 1],\ \ f(x) = \sin x$ bo'lsa $f(1), f^{-1}(1)$ larni toping va f ning turini aniqlang.

Yechish. $f(1) = 1$. Ta'rifga asosan $f^{-1}(1) = \{x \in \boldsymbol{R} \,/\, f(x) = \sin x = 1\}$. Demak, $f^{-1}(1) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}\right\}$. f – syuryeksiya bo'lib, ammo inyeksiya emas, chunki, masalan, $\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$. ■

6-m i s o l. Agar $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ \ f(x) = 2x + 1$ и $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)=3x-1$ bo'lsa gf, fg, g^2, f^3 larni toping.

Yechish. $gf = g(f(x)) = g(2x+1) = 3(2x+1) - 1 = 6x + 2$;

$fg = f(g(x)) = f(3x-1) = 2(3x-1) + 1 = 6x - 1$;

$g^2 = g(g(x)) = g(3x-1) = 3(3x-1) - 1 = 9x - 4$;

$f^3 = f(f^2(x)) = f(f(f(x))) = f(f(2x+1)) = f(2(2x+1)+1) =$

$= f(4x+3) = 2(4x+3) + 1 = 8x + 7$ shuning bilan birga

$gf: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, fg: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, g^2: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f^3: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. ■

7-m i s o l. Agar f, g X = {1, 2, 3, 4, 5, 6} to'plamning $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo'ladigan akslantirishlari bo'lsa, gf, fg, f^6 larni toping.

Yechish. $f(1)=6$, $g(6)=2$ bo'lgani uchun $fg(1)=2$. Shuningdek, $fg(2)=4$, $fg(3)=6$, $fg(4)=3$, $fg(5)=5$, $fg(6)=1$. Shuning uchun

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Xuddi shunday muhokama yuritib

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ f^6 = f^2 \cdot f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. ■$$

8-m i s o l. Agar f va g lar X={1,2,3,4} to'plamning,

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

bo'ladigan akslantirishlari bo'lsa, $f^{-1}, g^{-1}, g^{-2} f^3$ larni toping.

Yechish. $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(1)=2$, $f^{-1}(4)=3$, $f^{-1}(3)=4$ bo'lgani uchun $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Xuddi shunday tartibda

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ g^{-2} = (g^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$f = f\cdot f^2 = f\cdot f\cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ larni topamiz. Shuning uchun

$g^{-2} f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ■

M A S H Q L A R

18. a) $A\times B \neq B\times A$ b) $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$ bo'ladigan A, B va C lar mavjud bo'lishini isbotlang.

19. Agar A, B, C va D lar bo'sh bo'lmasa,

a) $A\subseteq B$ va $C\subseteq D \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D$;

b) $A=B$ va $C=D\Leftrightarrow A\times C=B\times D$

bo'lishini isbotlang

20. Isbotlang:

a) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$; b) $\bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A_i\times B_i)$.

21.Isbotlang:

a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

b) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D)$;

c) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$; d) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$;

e) $A\times B=(A\times D)\cap(C\times B)$, bunda $A\subseteq C, B\subseteq D$;

f) $U^2\setminus(A\times B)=[(U\setminus A)\times U]\cup[U\times(U\setminus B)]$.

22*. $A,B\neq\varnothing$ va $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times D$ bo'lsin. $A=B=C=D$ bo'lishini isbotlang.

23.Agar a) $X=\{1,2\}$, $Y=\{3,4,5\}$; b) $X=\{3\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, bo'lsa, $X\times Y, Y\times X, X^2, X^3, |X^n|, |Y^n|$ larni toping ($|A|$ belgi A to'plam elementlari sonini ifodalaydi, $n\in N$.)

24. $X=\{1,2,3,4\}$ to'plamning $y=\{4,5,6\}$ to'plamga bir nechta har xil akslantirishlarini ifodalang. Ulardan qaysilari syuryektiv ekanligini ko'rsating. X to'plamning Y to'plamga inyektiv akslantirishi mavjudmi?

25. Π - tayinlangan to'g'ri burchakli $x0y$ kordinatlar sistemasidan iborat tekislik, $f:\Pi\to\Pi$ akslantirish tekislik nuqtalarini ox o'qiga oy o'qiga nisbatan parallel proyeksiyalash bo'lsin. a) $f^{-1}(0)$ ni toping; b) $f(\Pi)$ ni toping. f ning turini aniqlang (ya'ni inyektiv, syuryektiv yoki biyektiv ekanligini aniqlang).

26. Π tayinlangan to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasidan iborat tekislik, $f:\Pi\to\Pi$ tekislikni koordinatalar boshi atrofida α burchakka burish bo'lsin. f ning turini aniqlang.

27. Quyidagilar uchun $f(1)$, $f^{-1}(1)$ larni toping va f ning turini aniqlang:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=3x-2$; b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=2^x$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{>0}, f(x)=2^x$; d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{>0}, f(x)=x^2$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{\geq 0}, f(x)=x^2$; f) $f:\boldsymbol{R}^{\geq 0}\to\boldsymbol{R}^{\geq 0}, f(x)=x^2$;

g) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=x^3$; h) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=\sin x$;

i) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1],\ \ f(x)=\sin x$; j) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\cos x$;

k) $f:\boldsymbol{R}\to[-1,1],\ \ f(x)=\cos x$; l) $f:[0,\pi]\to[-1,1],\ \ f(x)=\cos x$;

m) $f:\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=tgx$;

n) $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=tgx$;

o) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{k\pi/k\in\boldsymbol{Z}\}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=ctgx$; p) $f:(0,\pi)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=ctgx$;

q) $f:\boldsymbol{R}^{>0}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\log_2 x$.

28. a) $\boldsymbol{Z}$ to'plamning $\boldsymbol{N}$ ga; b) $\boldsymbol{Q}$ to'plamning $\boldsymbol{N}$ ga; s) (0,1) to'plamning $\boldsymbol{R}$ ga biyektiv akslantirishi mavjudligini isbotlang.

29. n elementli to'plamning s elementli to'plamga nechta har xil akslantirishlari mavjud?

30. $f:X\to Y$, $A_1,A_2\subset X$, $B_1,B_2\subset Y$ bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarning to'g'riligini isbotlang:

a) $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$; b) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$;

c) $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$ va bu yerda, umuman aytganda, tegishlilikni tenglik bilan almashtirish mumkin emas.

d) $B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$; e) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$;

f) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$; g) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$;

h) $f^{-1}(CB)=Cf^{-1}(B)$, agar $B\subset Y$ bo'lsa.

31. Agar $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=x^2$ va $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=2^x$ bo'lsa $gf,\ fg,\ g^2,\ f^3$ larni toping.

32. Agar X ning f va g akslantirishlari quyidagicha aniqlangan

a) $X=\{1,2,3,4,5\}$; $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$;

b) $X=\{1,2,3,4,5,6\}$; $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&6&5&4\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$;

bo'lsa $gf,\ fg,\ g^5,\ f^6$ larni toping.

33. Quyidagilar uchun $gf,\ fg,\ g^2,\ f^2$ larni toping:

a) f – tekislikni ox o'qqa oy o'qqa parallel ravishda proyeksiyalash, g tekislikni oy o'qqa ox o'qqa parallel ravishda proyeksiyalash;

b) f - tekislikning ox o'qqa nisbatan simmetriyasi g tekislikning oy o'qqa nisbatan simmetriyasi;

c) f tekislikni ox o'qqa proyeksiyalash, g – shu tekislikning ox o'qqa nisbatan simmetriyasi;

34. 27-masaladagi akslantirishlardan qaysilari teskarilanuvchanligini aniqlang va har bir teskarilanadigan akslantirishning teskarisini toping.

35. Agar $f,\ g$ lar X to'plamning almashtirishlari bo'lsa, $f^{-1},\ g^{-1},\ g^{-2}f^3$,

f^3g^2 larni toping:

a) $X=\{1,2,3,4,5\}$; $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$;

b) $X=\{1,2,3,4,5\}$; $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$.

3-§. Binar munosabatlar

A va B to'plamlar elementlari orasidagi *binar munosabat* deb, $A\times B$ to'plamning ixtiyoriy R qism to'plamiga aytiladi. $A=B$ bo'lsa R munosabat A da aniqlangan binar munosabat deyiladi. $<x,y>\in R$ ning o'rniga, ko'p hollarda, xRy yozialdi. R *binar munosabatning aniqlanish sohasi* deb,

$\delta_R=\{x|$ shunday y mavjudki, $<x,y>\in R\}$ to'plamga aytiladi.

R binar munosabatning qiymatlar sohasi deb,

$\rho_R=\{y|$ shunday x mavjudki, $<x,y>\in R\}$ to'plamga aytiladi.

Birlashma, kesishma va hokazo nazariy–to'plamiy amallar binar munosabatlardan iborat. A va B to'plamlar elementlari orasidagi R *binar munosabatning* to'ldiruvchisi

$-R=(A\times B)\setminus R$ to'plam hisoblanadi.

R *binar munosabatga teskari munosabat* deb,

$R^{-1}=\{<x,u>|<y,x>\in R\}$ to'plamiga aytiladi.

X *to'plamning* R *ga nisbatan obrazi* deb, $R(X)=\{y|$ shunday $x\in X$ topiladiki, $<x,y>\in R\}$ to'plamga X *to'plamning* R *ga nisbatan proobrazi* deb $R^{-1}(X)$ ga aytiladi.

$R_1\subseteq A\times B$ va $R_2\subseteq B\times C$ *munosabatlarning ko'paytmasi* deb,

$R_1\circ R_2=\{<x,\ y>|$ shunday z mavjudki $<x,z>\in R_1$ va $<z,y>\in R_2\}$ to'plamga aytiladi.

1-m i s o l. Ushbu $R=\{<x,y>|x,y\in \boldsymbol{N}$ va x son y ning bo'luvchisi$\}$ munosabat uchun $\delta_R,\rho_R,R^{-1},R\circ R,R\circ R^{-1},R^{-1}\circ R$ larni toping.

Yechish. Biz 0 son 0 songa bo'linadi deb hisoblaymiz, $\delta_R=\rho_R=\boldsymbol{N}$ chunki $<x,x>\in R$.

$R^{-1}=\{<x,y>|\ x,y\in\boldsymbol{N}$ va y son x ning bo'luvchisi$\}$.

$R\circ R=R.$ $R\circ R^{-1}=\boldsymbol{N}$, chunki $<x,y>\in R\circ R^{-1}\Leftrightarrow$ shunday z mavjudki x z ga bo'linadi va z esa y ga bo'linadi. Ammo bunday z ixtiyoriy x va y bo'yicha osongina topiladi, masalan z = xy deb olish kerak. $R^{-1}\circ R=\boldsymbol{N}^2$, chunki $<x,y>\in R\circ R^{-1}\Leftrightarrow$ shunday z topiladiki, x z ga bo'linadi va z *esa* y ga bo'linadi. Ixtiyoriy x,y uchun $z=1$ deb olish kerak. ■

2-m i s o l. $\delta_{R_1\circ R_2}=R_1^{-1}(\rho_{R_1}\cap\delta_{R_2})$.

Yechish. $x\in\delta_{R_1\circ R_2} \Leftrightarrow$ shunday y mavjudki, $<x,y>\in R_1\circ R_2 \Leftrightarrow$ shunday y va z mavjudki, $<x,z>\in R_1$ va $<z,y>\in R_2 \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $<x,z>\in R_1$ va $z\in\delta_{R_2} \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $<z,x>\in R^{-1}{}_1$ $z\in\rho_{R_2}$ va $z\in\delta_{R_2} \Leftrightarrow x\in R_1^{-1}(\rho_{R_1}\cap\delta_{R_2})$. ■

3-m i s o l. $\rho_{R_1\circ R_2}=R_2(\rho_{R_1}\cap\delta_{R_2})$ ni isbotlang.

Yechish. $x\in\rho_{R_1\circ R_2} \Leftrightarrow$ shunday y mavjudki, $<y,x>\in R_1\circ R_2 \Leftrightarrow$ shunday y va z mavjudki, $<y,z>\in R_1$ va $<z,x>\in R_2 \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $z\in\rho_{R_1}$ va $<z,x>\in R_2 \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $z\in\rho_{R_1}, z\in\delta_{R_2}$ va $<z,x>\in R_2 \Leftrightarrow$ $x\in R_2(\rho_{R_1}\cap\delta_{R_2})$. ■

4-m i s o l. Ixtiyoriy binar munosabatlar uchun

$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$ bo'lishini isbot qiling.

Yechish. $<x,y>\in(R_1\cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R_1\cup R_2 \Leftrightarrow <y,x>\in R_1$ yoki $<y,x>\in R_2 \Leftrightarrow <x,y>\in R_1^{-1}$ yoki $<x,y>\in R_2^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$. ■

5-m i s o l. Ixtiyoriy binar munosabatlar uchun

$(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$ bo'lishini isbotlang.

Yechish. $<x,y>\in(R_1\circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R_1\circ R_2 \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $<y,z>\in R_1$ va $<z,x>\in R_2 \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $<x,z>\in R_2^{-1}$ va $<z,y>\in R_1^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$. ■

M A S H Q L A R

36. Quyidagi munosabatlar uchun $\delta_R,\rho_R,R^{-1},R\circ R,R\circ R^{-1},R^{-1}\circ R$ larni toping:

a) $R=\{<x,y>|x,y\in \mathbf{N}$ y ga bo'linadi $x\}$;

b) $R=\{<x,y>|x,y\in \mathbf{R}$ va $y+x\le 0\}$;

c) $R=\{<x,y>|x,y\in \mathbf{R}$ va $2x\ge 3y\}$;

d) $R=\{<x,y>/x,y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ va $y\ge \sin x\}$.

37. Isbotlang:

a) $\delta_R=\varnothing \Leftrightarrow R=\varnothing \Leftrightarrow \rho_R=\varnothing$; b) $\delta_{R^{-1}}=\rho_R$, $\rho_{R^{-1}}=\delta_R$.

38.Isbotlang:

a) agar $B\neq\varnothing$ bo'lsa $\delta_{A\times B}=A$ bo'ladi; b) agar $A\neq\varnothing$, $\rho_{A\times B}=B$ bo'ladi.

39*. R – A da aniqlangan binar munosabat bo'lsin. A dagi ixtiyoriy R_1 binar munosabat uchun $R\circ R_1=R_1\circ R=R_1$ bo'lganda va faqat shu holdagina $R=i_A$ bo'lishini isbotlang.

40.Ixtiyoriy binar munosabatlar uchun quyidagilarni isbotlang:

a*) $R\cup R=R\cap R=R$; b) $(R^{-1})^{-1}=R$;

c) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$; d) $-R^{-1} = (-R)^{-1}$;

e) $\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \bigcup_{i\in I} R_i^{-1}$; f) $\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1}$.

41. Qanday R binar munosabatlar uchun $R^{-1} = -R$ munosabat o'rinli bo'ladi?

42. Ixtiyoriy binar munosabatlar uchun quyidagilarni isbotlang:

a*) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$;

b) $\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) \circ Q = \bigcup_{i\in I} (R_i \circ Q)$; c*) $Q \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcup_{i\in I} (Q \circ R_i)$;

43.Isbotlang:

a*) $Q \circ \left(\bigcap_{i\in I} R_i\right) = \bigcap_{i\in I} (Q \circ R_i)$; b*) $\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right) \circ Q = \bigcap_{i\in I} (R_i \circ Q)$.

c*) a) va b) tasdiqlarda tegishlilikni tenglik bilan almashtirish mumkin emas.

44. Agar $R_1 \subseteq R_2$ bo'lsa

a) $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$; b) $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$; c) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

45. *A, V, A_1, V_1* – to'plamlar shunday to'plamlarki *A* to'plam *A_1*, bilan *V* esa *V_1* bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'lsin. Agar $A \cap B = ø$ va $A_1 \cap B_1 = ø$ bo'lsa $A \cup B$ va $A_1 \cup B_1$ lar orasida o'zaro birqiymatli moslik mavjudligini isbotlang:

4-§. Ekvivalentlik munosabati va bo'linishlar

Bu paragrifda qaraladigan binar munosabatlar bo'sh bo'magan to'plamlarda berilgan bo'ladi.

A to'plamdagi *R* binar munosabat *refleksiv* deyiladi, agar hamma $x \in A$ lar uchun $< x, x > \in R$, bo'lsa va *irrefleksiv* deyiladi hamma $x \in A$ lar uchun $< x, x > \notin R$ bo'lsa.

R binar munosabat *simmetrik* deyiladi, agar $< x, y > \in R \Rightarrow < y, x > \in R$ bo'lsa, va *antissimmetrik* deyiladi, agar $< x, y > \in R$ i $< y, x > \in R \Rightarrow x = y$ bo'lsa.

R binar munosabat *tranzitiv* deyiladi, agar

$$< x, y > \in R \quad \text{va} \quad < y, z > \in R \Rightarrow < x, z > \in R.$$

A to'plamdagi refleksiv, tranzitiv va simmetrik munosabat *A* dagi e*kvivalentlik* deyiladi.

$[x]_R = x / R = \{y \mid < x, y > \in R\}$ to'plam x elementning *R* ekvivalentlik bo'yicha *ekvivalentlik sinfi (qo'shnilik sinfi)* deyiladi.

A to'plam elementlarining *R* ekvivalentlik bo'yicha ekvivalentlik sinflari to'plami *A* ning *R* bo'yicha *faktor-to'plami* deyiladi va *A/R* bilan belgilanadi.

Agar $\bigcup_{i\in I} A = A$ bo'lib, A_i lar juft-jufti bilan o'zaro kesishmasa, *A* ga $\{A_i\}_{i\in I}$ majmua*ning tarqatmasi (yoyilmasi)* deyiladi.

1-m i s o l. Quyidagi

a) refleksiv, simmetrik, tranzitivmas;

b) refleksiv, antisimmetrik, tranzitivmas;

c) refleksiv, tranzitiv, simmetrikmas;

d) antisimmetrik, tranzitiv, refleksivmas

binar munosabatlarni tuzing.

Yechish. Masalan,

a) $\{< x, y >| x, y \in \boldsymbol{R}, |x-y| \le 1\}$; b) $\{< x, y >| x, y \in \boldsymbol{Z}, x \le y \le x^2\}$;

c) $\{< x, y >| x, y \in \boldsymbol{R}, x \le y\}$; d) $\{< x, y >| x, y \in \boldsymbol{R}, x = y = 0\}$. ■

2-m i s o l. $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ bo'lganda va faqat shu holdagina *R₁* va *R₂* simmetriik munosobatlarning $R_1 \circ R_2$ ko'paytmasi simmetrik bo'lishini isbotlang.

Yechish. $R_1 \circ R_2$ simmetrik bo'lsin. U holda

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Aksincha, $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 \Rightarrow (R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2$. ■

3-m i s o l. Agar R to'plamdagi tranzitiv va simmetrik munosabat va $\delta_R \cup \rho_R = A$ bo'lsa, R munosabat A dagi ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

Yechish. $x \in A \;\Rightarrow\; < x, y > \in R$ yoki $< y, x > \in R$ biror y uchun $< x, y > \in R$ va $< y, x > \in R \;\Rightarrow\; < x, x > \in R$. ■

4-m i s o l. A to'plamning o'zaro kesishmaydigan bo'shmas qism to'plamlarga hamma tarqatmalari sinfi bilan A dagi hamma ekvivalentlik munosabatlar majmui orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligini isbotlang.

Yechish. $\{A_i\}_{i \in I}$ tarqatmaga $R=\{<x,y>$ shunday $i \in I$ mavjudki, $x, y \in A_i\}$ ekvivalentlikni mos qilib qo'yamiz. ■

5-m i s o l. $f : A \to B$ ixtiyoriy akslantirish bo'lsin.

$Q = \{< x, y >| \; f(x) = f(y)\}$ deymiz. Q ning A dagi evivalentilik munosabati va f akslantirish uchun $f = \varepsilon \circ f'$ yoyilma mavjudligini isbot qiling. Bu yerda ε A ning, $A/Q = \{[x]_q \mid x \in A\}$ da tabiiy akslantirilishi, ya'ni $\varepsilon(x) = [x]_Q$, f esa *A/Q* va *f(A)* orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik.

Yechish. $f'([x]_q) = f(x)$ qilib olamiz. Ko'rinib turibdiki, $[x]_Q = [y]_Q \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Shuning uchun *f′* - *A/Q* va *f(A)* lar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik.

$$(\varepsilon \circ f')(x) = f'(\varepsilon(x)) = f'([x]_Q) = f(x). \; ■$$

6-m i s o l. $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$ bo'lganda va faqat shu holdagina *R₁* va *R₂* ekvivalentlik munosabatlarning $R_1 \cup R_2$ birlashmasi ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

Yechish. $R_1 \cup R_2$ ekvivalentlik munosabati bo'lsin. U holda

$R_1 \circ R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) \subseteq R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ i_A) \cup (i_A \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2$.

Aksincha, $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$ bo'lsin. U holda

$$R_2 \circ R_1 = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = (R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2),$$

$$(R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) = (R_1 \circ R_1) \cup (R_2 \circ R_1) \cup (R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \cup R_2$$

ya'ni $R_1 \cup R_2$ tranzitiv. $R_1 \cup R_2$ ning simmetrikligi va refleksiligi ko'rinib turgan narsalar. ■

M A S H Q L A R

46*. Agar R_1 va R_2 munosabatlar refleksiv bo'lsa, $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1^{-1}, R_1 \circ R_2$ munosabatlar ham refleksiv bo'lishini isbotlang.

47*. a) Agar R_1 va R_2 irrefleksiv bo'lsa, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} munosabatlar ham irrefleksiv bo'lishini isbotlang; b) Irrefleksiv munosabatlarning $R_1 \circ R_2$ ko'paytmasi irrefleksiv bo'lmasligi mumkinligini isbotlang.

48*. Agar R_1 va R_2 simmetrik munosabatlar bo'lsa, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_1^{-1}$ munosabatlarning ham simmetrik bo'lishini isbotlang.

49. a) Agar R_1 va R_2 munosabatlar antisimmetrik bo'lsa, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} munosabatlarning ham antisimmetrik bo'lishini isbotlang;
b) A to'plamdagi R_1 va R_2 antisimmetrik munosabatlarning $R_1 \cup R_2$ birlashmasi $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq i_A$ bo'lganda va faqat shu holdagina antisimmetrik bo'lishini isbotlang.

50. Simmetrik, tranzitiv, ammo refleksivmas binar munosabat tuzing.

51. Bir vaqtning o'zida simmetrik va antisimmetrik ixtiyoriy R binar munosabat tranzitiv bo'lishini isbotlang.

52. Quyidagi binar munosabatlarning har biri uchun u qanday xossalarga (refleksivlik, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik) ega va qaysilariga ega emasligini aniqlang:

a) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{R}$ va $x^2 = y^2\}$;
b) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{R}$ va $x^2 + y^2 = 1\}$;
c) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{R}$ va $xy > 1\}$;
d) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{R}$ va $y = |x|\}$;
e) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{R}$ va $x^2 + x = y^2 + y\}$;
f) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{R}$ va $x - y \in \boldsymbol{Z}\}$;
g) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{Z}$ va $x \le y+1\}$;
h) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{Z}$ va $2x = 3y\}$;
i) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{Z}$ va $x^2 + y^2 = 1\}$;
j) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{Z}^+$ va $x \neq y\}$;
k) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{Z}^+$ va EKUB $(x,y) \neq 1\}$;
l) $R=\{<x, y> | \, x, y \in \boldsymbol{Z}^+, \exists z \in \boldsymbol{N} : xy = z^2\}$.

53. $\boldsymbol{N}$ va $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ to'plamlarda R_m, Q, S larni quyidagicha aniqlaymiz:

a) $<a,b> \in R_m \Leftrightarrow (a-b)$ son m $(m>0)$ ga bo'linadi;

b) $<<a,b>,<c,d>> \in Q \Leftrightarrow a+d = b+c$;

c) $<<a,b>,<c,d>> \in S \Leftrightarrow [((a \cdot d = b \cdot c) \quad b \neq 0$ ва $d \neq 0)$ yoki $(a=c,\, b=0,\, d=0)]$.

R_m, Q, S ekvivalentlik munosabatlar ekanligini isbotlang.

54. A – to'plam tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami bo'lsin. Ushbu munosabatlar ekvivalentlik munosabatlari bo'ladimi? a) to'g'ri chiziqlarning parallelligi; b) to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligi.

55. Haqiqiy sonlarning $\boldsymbol{R}$ to'plamida R munosabatni $xRy \Leftrightarrow (x-y)$ - ratsional son tarzda aniqlaymiz. R ning ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.

56. Agar R – ekvivalentlik munosabati bo'lsa;

a) $x \in [x]_R$; b) $<x,y> \in R \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$ bo'lishini isbotlang.

57. Agar R ekvivalentlik munosabati bo'lsa, R^{-1} ham ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

58*. $R \subseteq A^2$ bo'lsin. Ushbu tasdiqni isbotlang: R – ekvivalentlik munosabati $\Leftrightarrow (R \circ R^{-1}) \cup i_A = R$.

59*. Agar R_1 va R_2 A dagi ekvivalentlik munosabatlar bo'lsa, quyidagilarni isbotlang:

a) $R_1 \circ R_1 = A^2 \Leftrightarrow R_1 = A^2$; b) $R_1 \circ R_2 = A^2 \Leftrightarrow R_2 \circ R_1 = A^2$.

60. A to'plamdagi ekvivalentlik munosabatlar ixtiyoriy sistemasining kesishmasi ham A dagi ekvivalentlik munosabat bo'lishini isbotlang.

61*. R_1 va R_2 ekvivalentlik munosabatlarning $R_1 \circ R_2$ ko'paytmasi $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ bo'lganda va faqat shu holdagina ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

62*. Agar R_1 va R_2 – ekvivalentlik munosabatlar va $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ bo'lsa, $R_1 + R_2 = R_1 \circ R_2$ bo'lishini ko'rsating. Bu yerda R_1+R_2 – ifoda $R_1 \cup R_2$ni o'z ichiga oladigan eng kichik ekvivalentlik munosabati.

63*. Ekvivalentlik munosabatlarning har qanday $\{R_i\}_{i\in I}$ majmui uchun shunday Q ekvivalentlik munosabati topiladiki, $\bigcup\limits_{i\in I} R_i \subseteq Q$ va har qanday R ekvivalentlik munosabati uchun, agar $\bigcup\limits_{i\in I} R_i \subseteq R$ bo'lsa, u holda $Q \subseteq R$ bo'ladi. Shuni isbotlang.

5-§. Tartib munosabati

A to'plamdagi binar munosabat A dagi *oldtartib* deyiladi, agar u refleksiv va tranzitiv bo'lsa A, to'plamdagi refleksiv, tranzitiv va antisimmetrik munosabat A da *qismiy tartib* deyiladi. Qismiy tartib ko'pgina hollarda $\leq$ bilan bedgilanadi. $\leq^{-1}$ tartib $\leq$ ga *qo'shma tartib* deyilib, $\geq$ bilan belgilanadi. Agar $x \leq u$ va $x \neq y$ bo'lsa $x < y$ qilib yozamiz. Agar A dan olingan ixtiyoriy ikki element $\leq$ bo'yicha taqqoslanuvchi, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in A$ uchun $x \leq u$ yoki $u \leq x$ bo'lsa A dagi $\leq$ qismiy tartib *chiziqli* deyiladi. Qismiy (chiziqli) $\leq$ tartibli A to'plam *qismiy (chiziqli) tartiblangan* deyiladi. $\leq$ bilan qismiy tartiblangan A to'plamning $\leq$ bilan chiziqli tartiblangan B qism to'plami *zanjir* deyiladi.

Agar $a \leq x$ ($x \leq a$) dan $a = x$ ligi kelib chiqsa, qismiy tartiblangan A to'plamning a elementi *maksimal (minimal)* element deyiladi. Agar hamma $x \in A$ lar uchun $x \leq a$ $(a \leq x)$ bo'lsa, A ning a elementi *eng katta (eng kichik)* element deyiladi. Eng katta element hamma vaqt maksimaldir, ammo teskarisi o'rinli emas. Maksimal elementlar ko'p bo'lishi mumkin, ammo eng katta element, agar u mavjud bo'lsa, bir qiymatli aniqlangan bo'ladi. Xuddi shunday muhokamalar *eng kichik* va *minimal elementlarga* ham tegishli.

Qismiy tartiblangan A to'plamning V qism to'plamining *yuqori (quyi) chegarasi* deb A ning har bir $b \in B$ uchun $b \le a$ $(a \le b)$ bo'ladigan a elementiga aytiladi.

$B \subseteq A$ *qism to'plamning ixtiyoriy aniq yuqori (quyi) chegarasi* deb B ning eng kichik yuqori (eng katta quyi) chegarasiga aytiladi. $B \subseteq A$ to'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari mos ravishda $supB$ va $\inf B$ orqali belgilanadi.

Agar A to'plamning har bir bo'sh bo'lmagan qism to'plami eng kichik elementga ega bo'lsa, A dagi $\le$ chiziqli tartibni *to'liq* deb ataymiz. Bu holda A to'plam *to'liq tartiblangan* deyiladi.

A va B – qismiy tartiblangan to'plamlar va f - A dan B ga funksiya bo'lsin. Agar har qanday $x_1, x_2 \in A$ elementlar uchun $x_1 \le x_2$ dan $f(x_1) \le f(x_2)$ kelib chiqsa, f *monoton akslantirish* deyiladi.

Agar f A va B to'plamlar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik va f bilan f^{1} – monoton akslantirishlar bo'lsa, u holda f qisman tartiblangan A va B to'plamlarning *izomorfozmi*, A va B esa *izomorf* to'plamlar deyiladi.

1-m i s o l. R_1 va R_2 A to'plamdagi chiziqli tartiblar bo'lsin. Qachon $R_1 \circ R_2$ chiziqli tartib bo'ladi?

Yechish. Agar $R_1 \ne R_2$ bo'lsa, shunday $<x,y>$ juft mavjud bo'ladiki, $<x,y> \in R_1, <x,y> \notin R_2$ yoki $<x,y> \notin R_1, <x,y> \in R_2$. Birinchi holda $<x,y> \notin R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$, $<x,y> \in R_2 \subseteq R_1 \circ R_2$, $x \ne y$. Ikkinchi hol ham xuddi shunday ko'rsatiladi. Agar $R_1 = R_2$ bo'lsa, $R_1 \circ R_2 = R_1$ bo'ladi. Demak, $R_1 \circ R_2$ faqat $R_1 = R_2$ bo'lganda va faqat shu holda chiziqli tartib bo'ladi. ■

2-m i s o l.

a) $\boldsymbol{N}^2$; b) $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{N}^2 \cup \boldsymbol{N}^3 \cup \ldots \cup \boldsymbol{N}^n \cup \ldots$; c) kompleks sonlar.

Yechish. a) Masalan, $<m,n> \le <m_1,n_1> \Leftrightarrow m < m_1$ yoki $(m = m_1$ ва $n \le n_1)$;

b) $<m_1,\ldots,m_k> \le <n_1,\ldots,n_\ell> \Leftrightarrow$ shunday i $(1 \le i \le \min(k,l))$ mavjudki, $m_1 = n_1,\ldots,m_{i-1} = n_{i-1}, m_i < n_i$ yoki $k \le l$ va $m_1 = n_1, \ldots m_k = n_k$;

s) $a + b_i \le a_1 + b_1 i \Leftrightarrow a < a_1$ yoki $a = a_1$, $b \le b_1$. ■

M A S H Q L A R

64. Berilgan to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami, to'plamlarning tegishlilik (qism to'plam bo'lishlik) xossasiga ko'ra qisman tartiblanganligini isbot qiling.

65. $N = \{0,1,2,\ldots\}$ to'plamda $\le$ va $<$ munosabatlar oddiy ma'noda aniqlangan bo'lsin. $< \circ < \ne <$; $\le \circ < = <$; $\le \circ \ge = N^2$ bo'lishini isbotlang.

66. i_A ning A da qismiy tartibligini isbotlang.

67. $a \le b \Leftrightarrow a,\ \ b \in N$ va a son b ning bo'luvchisi bo'lsin. 0 o'zining bo'luvchisi deb hisoblaymiz. $\le$ ning N da qismiy tartib ekanligini isbotlang.

68. a) Har qanday qisman tartiblangan to'plam bittadan ortiq eng katta (eng kichik) elementga ega emasligini isbot qiling.

v) Qisman tartiblangan to'plamning eng katta (eng kichik) elementi yagona maksimal (minimal) element bo'lishini isbot qiling.

69. Agar $R-$ qismiy tartib bo'lsa, u holda $R^{-1}-$ ham qismiy tartib bo'lishini isbotlang.

70. Agar $\{R_i\}_{i\in I}$ – A to'plamdagi qismiy tartiblar sistemasi bo'lsa, u holda $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ –ham A da qismiy tartib bo'lishini isbotlang.

71. $R=(R\circ R)\bigcup i_A$ bo'lganda va faqat shu holda A to'plamdagi R munosabat oldtartib bo'lishini isbotlang.

72. A to'plamda $R-$ munosabat oldtartib bo'lsin. $a \sim b \Leftrightarrow (a,b)\in R$ va $<a,b>\in R$ deb hisoblaylik. ~ munosabat A da ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

73. Agar R X da qismiy (chiziqli, to'liq) tartib va $A\subseteq X$ bo'lsa, u holda $R\bigcap A^2$ A da qismiy (chiziqli,to'liq) tartib bo'lishini isbotlang.

74. $\le$ munosabat A da qismiy tartib bo'lsin. $<$ ning irrefleksiv va tranzitiv bo'lishini isbotlang.

75. Agar A da biror munosabat irrefleksiv va tranzitiv bo'lsa, u holda $x\le y \Leftrightarrow x<y$ yoki $x=y$ munosabat A da qismiy tartib bo'lishini isbotlang.

76. Ixtiyoriy A qisman tartiblangan to'plam shu A to'plam qism to'plamlarning $\subseteq$ tegishlilik belgisi bilan tartiblangan biror sistemasiga izomorf bo'lishini isbot qiling.

77. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan chekli qisman tartiblangan A to'plam minimal va maksimal elementga ega bo'lishini isbotlang.

78. Qisman tartiblangan A to'plam chekli bo'lsin. A ning ixtiyoriy a elementi uchun A da shunday b va c elementlar topiladiki, $a\le b$ va b A da maksimal element bo'ladi; shuningdek $c\le a$ va c A da minimal element bo'ladi. Shuni isbot qiling.

79. Har qanday chekli to'plamning chiziqli tartiblantirish mumkin bo'lishini ko'rsating.

80. A – qisman tartiblangan to'plam, unda har bir zanjir m dan ortiq elementga ega bo'lmasin, o'zaro taqqoslanmaydigan elementlarning ixtiyoriy qism to'plami esa n dan ortiq elementga ega bo'lmasin. A ning $m\cdot n$ dan ortiq elementga ega emasligini ko'rsating.

81. Har qanday $a\le b$ uchun $a\le c\le b$ bo'ladigan faqat chekli miqdordagi c elementlar mavjud bo'lishi xossasiga ega hamma A chiziqli tartiblangan to'plamlarni tavsiflang.

82. Hamma shunday M to'plamlarni topingki, unda shunday R to'liq tartib mavjud bo'lsinki, R^{-1} ham M da to'liq tartib bo'lsin.

6-§. To'plam quvvati

Agar A va B to'plamlar elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mukin bo'lsa, A to'plam B to'plamga *ekvivalent* (belgilashda: A~B) deyiladi.

A to'plamning quvvati deb, A to'plamga ekvivalent hamma to'plamlar sinfiga aytiladi va $\bar{A}$ bilan belgilanadi. Ekvivalent to'plamlar *tengquvvatli* ham deyiladi.

n orqali, bunda $n \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ to'plamning quvvatini belgilaymiz. Biror n uchun $\boldsymbol{N_n}$ ga ekvivalent har bir A to'plam, chekli to'plam deyiladi, n – son esa A to'plam elementlari soni deyiladi.

Chekli bo'lmagan to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi. $N = \{0, 1, 2\ldots\}$ to'plamga ekvivalent har bir A to'plam *sanoqli* deyiladi va uning quvvati $\aleph_0$ bilan belgilanadi.

Haqiqiy sonlar to'plami $\boldsymbol{R}$ ga ekvivalent har bir A to'plam *kontiniual* deyiladi va uning quvvati $\grave{\boldsymbol{A}}$ bilan belgilanadi.

Ixtiyoriy to'plamlarning quvvatlari *kardinal sonlar* deyiladi. Chekli to'plamlarning kardinal sonlari chekli deyiladi, cheksiz to'plamlar uchun esa – *cheksiz* deyiladi. $\boldsymbol{ç}$ kardinal son – *kontinium quvvati* deyiladi.

Agar A to'plam B ning biror qism to'plamiga ekvivalent bo'lsa $\overline{A} \le \overline{B}$ deb ataymiz. Agar $\overline{A} \le \overline{B}$ va A bilan B ekvivalent bo'lmasa, u holda $\overline{A} < \overline{B}$ deymiz.

1-m i s o l. $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$ va $A \sim A_2$ bo'lsin. $A \sim A_1$ ni isbot qiling.

Yechish. f - A va A_2 lar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'lsin.

$B = A,\ B_1 = A_1,\ B_{n+2} = f(B_n)\ (n = 0,1,\ldots)$ deymiz. U holda

$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq,\ldots, A = \bigcup_{i\in\boldsymbol{N}}(B_i \setminus B_{i+1});$$

$$\cup \bigcap_{i\in\boldsymbol{N}} B_i = \bigcup_{i\in\boldsymbol{N}}(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \cup \bigcup_{i\in\boldsymbol{N}}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}) \cup \bigcap_{i\in\boldsymbol{N}} B_i;$$

$$A_i = \bigcup_{i\in\boldsymbol{N}\setminus\{0\}}(B_i \setminus B_{i+1}) \cup \bigcap_{i\in\boldsymbol{N}} B_i = \bigcup_{i\in\boldsymbol{N}}(B_{2i+2} \setminus B_{2i+3}) \cup \bigcup_{i\in\boldsymbol{N}}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}) \cup \bigcap_{i\in\boldsymbol{N}} B_i\ ;$$

$$f(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) = B_{2i+2} \setminus B_{2i+3} \quad \text{ya'ni} \quad (B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \sim (B_{2i+2} \setminus B_{2i+3}).$$

Hamma $B_i \setminus B_{i+1}(i = 0,1,\ldots)$ va $\bigcap_{i\in N} B_i$ to'plamlar o'zaro kesishmasliklari sababli $A \sim A_1$ dir (45-masalaga qarang). ■

2-m i s o l. Agar $\overline{A} \le \overline{B}$ va $\overline{B} \le \overline{A}$ bo'lsa $\overline{A} = \overline{B}$ bo'ladi. (Kantor-Bernshteyn teoremasi). Shuni isbot qiling.

Yechish. Agar $f : A \to B$ va $g : B \to A$ bo'lsin. f va g inyeksiyalar bo'ladi va $f(A) \subseteq B, g(B) \subseteq A$. U holda: $f(g(B)) \subseteq f(A) \subseteq B$ va $f(A) \sim B$ (1-misolga qarang). ■

3-m i s o l. Chekli to'plam o'zining hech qanday qism to'plamiga va hech qanday ustto'plamiga ekvivalent emasligini isbotlang.

Yechish. $f(A)\subset A$ bo'lsin. Bu yerda f – inyeksiya, $a\in A\setminus f(a)$, $a_0=a$, $a_{i+1}=f(a_i)$, $i\geq 0$ deymiz. U holda $a_{i+1}\in\underbrace{f(\ldots(f}_{1\,марта}(A))\ldots,a_{i+1}\notin\underbrace{f(f(\ldots(f(A))\ldots)}_{i+1\,марта}$, shuning uchun $i\neq j$ bo'lganda $a_i\neq a_j$. Demak, A cheksiz $\{a_0,a_1,\ldots\}$ qism fazoga ega. ■

4-m i s o l. Sanoqli to'plamning har qanday qism to'plami sanoqli yoki chekli ekanligini isbotlang.

Yechish. Bu tasdiqni $\boldsymbol{N}$ uchun isbotlasa yetarli. I cheksiz bo'lib $I\subseteq\boldsymbol{N}$ bo'lsin. $f:\boldsymbol{N}\to I$ akslantirishni tuzamiz. Buning uchun *f(0)* sifatida $I\setminus\{f(0),\ldots,f(n)\}$ ning eng kichik elementini olamiz. U holda f akslantirish $\boldsymbol{N}$ bilan I orasidagi o'zaro birqiymatli moslik bo'ladi. ■

5-m i s o l. Bo'shmas A to'plam biror $\boldsymbol{N}$ dan A ga o'tkazuvchi f funksiyaning qiymatlari to'plami bo'lganda va faqat shu holdagina sanoqli yoki chekli bo'lishini isbotlang.

Yechish. $A=\{a_0,\ldots,a_n\}$ $(n\geq 0)$ bo'lsin. Ushbu: $0\leq i\leq n$ *учун* $f(i)=a_0$, $i>n$ uchun $f(i)=a_i$ tarzda berilgan $f:\boldsymbol{N}\to A$ akslantirishni olib qaraymiz. f funksiya $\boldsymbol{N}$ ni A ga akslantiradi. ■

6-m i s o l. A va B sanoqli bo'lsalar $A\cup B$ ning sanoqli bo'lishini isbotlang.

Yechish. Inyektiv $f:\boldsymbol{N}\to A$ va $g:\boldsymbol{N}\to B$ akslantirishlar uchun $A=f(\boldsymbol{N}),B=g(\boldsymbol{N})$ bo'lsin. k=0,1,… uchun $h(2k)=f(k),\ h(2k+1)=g(k)$ deylik. U holda *h* akslantirish $\boldsymbol{N}$ ni $A\cup B$ ga akslantiradi. $A\cup B$ cheksiz bo'lganligi sababli $A\cup B$ sanoqli bo'ladi (5-misolga qarang). ■

7-m i s o l. Butun sonlar to'plami $\boldsymbol{Z}$ ning sanoqliligini isbot qiling.

Yechish. Ushbu: $f(0)=0,\ f(k)=2k,\ f(-k)=2k-1\ (k=1,2,\ldots)$ qoida bilan $f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{N}$ akslantirishni olib qaraymiz. f akslantirish biyeksiyadir. ■

8-m i s o l. *A* to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami *R(A)* *A* dan katta quvvatga ega bo'lishini isbotlang.

Yechish. $\varphi:A\to P(A)$ biyeksiya bo'lsin. $B=\{x\mid x\in A$ ва $x\notin\varphi(x)\}$ deymiz. U holda biror $x_0\in A$ uchun $x_0\in B\Rightarrow x_0\notin\varphi(x_0)=B,\ x_0\neq B\Rightarrow\ x_0\notin\varphi(x_0)\Rightarrow x_0\in B$, ga ega bo'lamiz ya'ni qarama-qarshilikka kelindi.Shuning uchun bunday φ funksiya mavjud emas. $B=\varphi(x_0)$ ■

9-m i s o l. $[a,b]\sim[c,d]$ bo'lishini isbotlang, bu yerda $a<b,\ c<d$.

Yechish. Ushbu: $x\in[0,1]$ uchun $f(x)=a+(b-a)x$ qoida bilan berilgan $f:[0,1]\to[a,b]$ akslantirishni olib qaraymiz. U holda f [0,1] va $[a,b]$ lar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi. Xuddi shunday tartibda $[0,1]\sim[c,d]$ hosil qilinadi. Demak, $[a,b]\sim[c,d]$. ■

10-m i s o l. A – to'plam haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'idagi sanoqli to'plam bo'lsin. a ni $\{x+a\mid x\in A\}\cap A=\varnothing$ bo'ladigan qilib tanlash mumkinmi?

Yechish. $B=\{x-y|x,y\in A\}$ to'plamni olib qaraymiz B - sanoqli. Ixtiyoriy $a\in\boldsymbol{R}\setminus B$ masala shartini qanoatlantiradi. Demak, qo'yilgan savolga musbat javob beriladi. ■

11-m i s o l. Hamma to’plamlarni o’z ichiga oladigan to’plam mavjud emasligini isbotlang.

Yechish. Hamma to’plamlarni o’z ichiga oladigan to’plamni U bilan belgilaymiz. U holda $P(U) \subseteq U$, bu yerda $P(U)$ U ning hamma qism to’plamlari to’plami. Boshqa tomondan $\overline{\overline{P(U)}} > \overline{\overline{U}}$ (8-misolga qarang). Qarama-qarshilik hosil bo’ladi. ■

M A S H Q L A R

83.Isbotlang:

a) A~A (refleksivlik); b) agar A~B bo’lsa B~A bo’ladi (simmetriklik);

c) agar A~B va B~C bo’lsa A~C bo’ladi (tranzitivlik).

84. a) A~B $\Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$;

b) $\overline{A_1} = \overline{A_2}, \overline{B_1} = \overline{B_2}$ va $\overline{A_1} \le \overline{B_1} \Rightarrow \overline{A_1} \le \overline{B_2}$;

c*) agar A dan B ga funksiya mavjud bo’lsa, $\overline{B} \le \overline{A}$ bo’ladi

85. Isbotlang:

a) chekli to’plamning har qanday qism to’plami cheklidir.

b) chekli sondagi chekli to’plamlar birlashmasi cheklidir.

c) chekli sondagi chekli to’plamlar bevosita yig’indisi cheklidir.

86. a) Ikki chekli to’plam ularning elementlari soni bir xil bo’lganda va faqat shu holdagina ekvivalent bo’lishini isbot qiling.

b) Kardinal sonlar cheksiz ko’pligini isbotlang.

87*. Har qanday cheksiz to’plamdan sanoqli qism to’plam ajratish mumkinligini isbot qiling.

88*. To’plam o’zining qismto’plamiga ekvivalent bo’lganda va faqat shu holdagina cheksiz to’plam bo’lishini isbotlang.

89*. Funksiyaning aniqlanish sohasi sanoqli bo’lsin. Bu funksiyaning qiymatlari sohasi chekli yoki sanoqli bo’lishini isbotlang.

90*. Sanoqli to’plamdan chekli qism to’plam ajratilsa, qolgan to’plam sanoqli bo’lishini isbotlang.

91*. Isbot qiling:

a) agar A_i lar chekli, bo’shmas va o’zaro kesishmasa u holda $\bigcup\limits_{i \in N} A_i$ sanoqli bo’ladi;

b) agar hamma A_i lar sanoqli bo’lsa u holda $\bigcup\limits_{i \in N} A_i$ sanoqli bo’ladi;

92*.Isbot qiling:

a) agar A cheksiz va B – chekli yoki sanoqli bo’lsa $A \cup B \sim A$ bo’ladi;

b) agar A cheksiz va sanoqsiz, B chekli yoki sanoqli bo’lsa $A \setminus B \sim A$ bo’ladi;

93*. Agar $A_1, \ldots, A_n (n \ge 1)$ sanoqli bo’lsa, u holda $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sanoqli bo’lishini isbot qiling.

94*. Isbotlang:

a) ratsional sonlar to’plami sanoqli;

b) $a < b$ bo’lganda $[a,b]$ segmentning ratsional sonlar to’plami sanoqli.

95. Biror sanoqli to'plamning elementlaridan tuzilgan hamma chekli ketma-ketliklar to'plami sanoqli to'plamligini isbotlang.

96*. Sanoqli to'plamning hamma chekli qism to'plamlari to'plami sanoqli ekanligini isbot qiling.

97*. Bir o'zgaruvchili butun koeffisiyentli hamma ko'phadlar to'plami sanoqliligini isbotlang.

98*. Haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'idagi bir-biri bilan kesishmaydigan ochiq intervallarning har qanday to'plami sanoqli bo'lishdan ortiq emas.

99*. $A \in \boldsymbol{R}$ bo'lib, A ning hamma har xil x, y elementlari uchun $|x-y| \geq \delta$ bo'ladigan $\delta > 0$ mavjud bo'lsa, u holda A chekli yoki sanoqli bo'lishini isbotlang.

100*. Isbotlang: $(0,1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1)$.

101*. Kvadrat va kesma nuqtalari, to'plamlari ekvivalentligini isbotlang.

102*. Ikki aylana nuqtalari to'plamlari ekvivalentligini isbotlang.

103*. [0,1] segment nuqtalari to'plami sanoqliligini isbotlang.

104*. Irrasional sonlar to'plamining quvvati qanday?

105*. **S** quvvatli chekli yoki sanoqli miqdordagi to'plamlar birlashmasi **S** quvvatga ega bo'lishini isbotlang.

106*. Natural sonlarning hamma sanoqli ketma-ketliklari to'plami **s** quvvatga ega bo'lishini isbotlang.

7-§. Matematik induksiya usuli

Tasdiqlar *umumiy* va *xususiy* tasdiqlarga bo'linadi. Umumiy tasdiqqa misollar keltiramiz: o'zbek avtomabillarining kuzovlar metalldan qilingan; har qanday parallelogrammda dioganallar kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi; raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadigan hamma sonlar 3 ga bo'linadi.

Bularga mos xususiy tasdiqlar misollari ushbulardir: «Neksiya»ning kuzovi metalldan qilingan; rombda dioganallar kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi; 2001 son 3 ga bo'linadi.

Umumiy tasdiqlardan xususiy tasdiqlarga o'tish *deduksiya* deyiladi. Masalan, a) hamma o'zbek avtomabillarining kuzovlari metaldan qilingan; v) «Neksiya»-o'zbek avtomabili; s) «Neksiya» metaldan qilingan kuzovga ega.

Umumiy (a) tasdiqdan (v) tasdiq yordamida (s) xususiy tasdiq hosil qilindi.

Xususiy tasdiqdan umumiy tasdiqqa o'tish *induksiya* deyiladi. Induksiya to'g'ri xulosaga ham noto'g'ri xulosaga ham keltirishi mumkin. Buni ikkita misol bilan tushuntiramiz:

1-m i s o l. A) 2001 son 3 ga bo'linadi; b) raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadigan sonlar 3 ga bo'linadi. b) tasdiq to'g'ri. ■

2-m i s o l. a) 2001 son 3 ga bo'linadi; b) hamma to'rtxonali sonlar 3 ga bo'linadi.

Xususiy a) tasdiqdan b) umumiy tasdiq hosil qilindi. b) tasdiq noto'g'ri. ■

Induksiyadan matematikada qanday foydalanish kerakki, faqat to'g'ri xulosalar hosil qilinsin, degan savol kelib chiqadi. Qo'yilgan savolga javob topish uchun avval matematikada yo'l qo'yilishi mumkin bo'lmagan induksiya misolini qarab chiqamiz.

3-m i s o l. Birinchi Peterburg akademiklaridan biri, mashhur matematik L.Eyler ko'rsatgan $f(x)=x^2+x+41$ ko'phadni olib qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, $f(0)=41, f(1)=43$. *Tub sonlar* hosil qildik. *f(x)* ko'phadda *x* ning o'rniga ketma-ket 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, qiymatlarni qo'yishni davom etdirib har safar 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151 *tub sonlarni* hosil qg'ilamiz. Bu hosil qilingan natijalar asosida berilgan uchhadda *x* ning o'rniga ixtiyoriy butun manfiy bo'lmagan sonni *tub son* hosil qilish mumkin degan tasdiqni hosil qilamiz. ■

Nima uchun bu misolda keltirilgan muhokamalar matematikada yo'l qo'yilmaydi?

Gap shundaki, bu muhokamalarda har qanday *x* uchun umumiy xulosani bu tasdiqning *x* ning bir necha qiymatlarida to'g'ri bo'lib chiqqanligigagina asoslanib chiqardik. Biz keltirgan misolda umumiy tasdiq to'g'ri emas bo'lib chiqdi. Darhaqiqat $x^2 + x + 41^2$ uchhadni mufassalroq o'rgansak, uning x=0,1,2,…,39 qiymatlarda tub songa teng, ammo x = 40 da bu uchhad 41^2 ga, ya'ni murakkab songa tengligini ko'ramiz. Shunday qilib biz 40 ta xususiy hollarda to'g'ri, ammo shu bilan birga umuman noto'g'ri bo'lgan tasdiqni uchratdik.

Ko'rib chiqilgan misol, sodda ammo juda muhim xulosa qilish imkonini beradi: *Tasdiq bir qator xususiy qiymatlarda to'g'ri va shu vaqtning o'zida, umuman noto'g'ri bo'lishi mumkin. Shu munosabat bilan ushbu savol yuzaga keladi: Bir qancha xususiy hollarda to'g'ri bo'lgan tasdiq berilgan. Uning hamma xususiy hollarini qarab chiqish imkoniyati yo'q. Bu tasdiq usmuman to'g'rimi yo to'g'ri emasligini qanday qilib aniqlash mumkin?*

Bu masalaning yechimiga ba'zan *matematik induksiya* uslubi deb ataladigan maxsus uslubni tatbiq etish bilan erishiladi. Bu uslub asosida *matematik induksiya qoidasi* yotadi. Bu qoida quyidagidan iborat:

Tasdiq ixtiyoriy natural n uchun to'g'ri bo'ladi, agar:

*1) u p=*1 *uchun to'g'ri, va*

*2) tasdiqni qandaydir ixtiyoriy natural n=k uchun to'g'riligidan, uning n=k+*1 *uchun to'g'riligi kelib chiqsa.*

Matematik induksiya qoidasiga asoslangan isbotlash *matematik induksiya uslubi bilan isbotlash* deyiladi. Bunday isbotlash ikki mustaqil bo'limlardan iborat bo'lish kerak:

*1) Tasdiq p=*1 *uchun to'g'ri (induksiya bazasi, asosi).*

*2)Agar tasdiq n=k uchun to'g'ri (induksiya farazi) bo'lsa, u holda bu tasdiq n=k+*1 *uchun to'g'ri (induksion o'tish), bu yerda* $k \in \boldsymbol{N}$.

4-m i s o l. Nyuton binoni

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^s a^{n-s} b^s + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n, \ (*)$$

bu yerda *a* va *b* ixtiyoriy sonlar, $n \in \boldsymbol{N}$ va

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Yechish. p=1 uchun (*) o'rinli.

$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + b^k$ bo'lsin. U holda

$$\left(a+b\right)^{k+1}=(a+b)^{k}\left(a+b\right)=(a^{k}+C_{k}^{1}a^{k-1}b+\ldots+b^{k})(a+b)=a^{k+1}+(1+C_{k}^{1})a^{k}b+$$
$$(C_{k}^{1}+C_{k}^{2})a^{k-1}b^{2}+\ldots+(C_{k}^{s}+C_{k}^{s+1})a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}$$

$C_{k}^{s}+C_{k}^{s+1}=C_{k+1}^{s+1}$ ekanligi tekshirish qayd emas. Shuning uchun
$$\left(a+b\right)^{k+1}=a^{k+1}+C_{k+1}^{1}a^{k}b+C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2}+\ldots+C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}. \ ■$$

5-m i s o l. A – to'plam qisman tartiblanagn to'plam bo'lib, unda har bir zanjir t tadan ortiq elementga ega bo'lmasin, juft-jufti bilan taqqoslanmaydigan elementlarning har qanday qism to'plami esa p tadan ortiq elementdan iborat bo'lmasin. A to'plam $m\cdot n$ tadan ortiq elementga ega emasligini isbotlang.

Yechish. m ga nisbatan induksiya vositasida isbotlaymiz. m=1 bo'lganda A ning hamma elementlari juft-jufti bilan taqqoslanmaydi va A elementlari soni p dan ortmaydi. m>1, B – to'plam A ning minimal elementlari to'plami bo'lsin. Agar C A\\$B$ to'plamda ixtiyoriy zanjir bo'lsa, u holda C eng kichik a elementga ega bo'ladi.(77-masalaga qarang, § 5) va shunday $a_0\in B$ element mavjud bo'ladiki $a_0\le a$ (§ 5, 78-masala). Shuning uchun $C\cup\{a_0\}$ to'plam A da zanjir, $a_0\notin C$ va demak, C to'plam *m-1* tadan ortiq elementga ega emas. Induksiya faraziga ko'ra (A\\$B$) o'z ichiga *(m-1)p* dan ortiq bo'lmagan elementni oladi, A=(A\\$B$)$\cup B$ to'plam esa $(m-1)n+n=mn$ dan ortiq bo'lmagan elementlarni oladi. ■

6-m i s o l.
$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$ ni isbotlang.

Yechish. p=1 bo'lganda tasdiq to'g'ri.
$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$ bo'lsin.

U holda
$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+$$
$$+(k+1)(k+2)\times(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}. \ ■$$

7-m i s o l. Agar $V_0=2,\ V_1=3$ va ixtiyoriy natural k uchun $V_{k+1}=3V_k=2V_{k-1}$ munosabat o'rinli bo'lsa, $V_n=2^n+1$ bo'lishini isbotlang.

Yechish.. Shartga asosan *p = 0* va *p = 1* uchun tasdiq o'rinli. $V_{k-1}=2^{k-1}+1; V_k=2^k+1$ deylik. U holda $V_{k+1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1$.■

8-m i s o l. Butun $n\ge0$ uchun $A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ son 133 ga bo'lishini isbotlang.

Yechish. p= 0 uchun tasdiq o'rinli. Tasdiq $n = k$ uchun tasdiq o'rinli deb faraz qilamiz, ya'ni $A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$ *son 133 ga bo'linadi deylik.*

U holda
$$A_{k+1}=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot11^{k+2}+144\cdot12^{2k+1}=11\cdot11^{k+2}+$$
$$+133\cdot12^{2k+1}+11\cdot12^{2k+1}=11\cdot\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)+133\cdot12^{2k+1}=11\cdot A_k+133\cdot12^{2k+1}$$

Biz A_{k+1} ni har biri 133 ga bo'linadigan ikki qo'shiluvchi yig'indisi shaklida ifodaladik. Demak, A_{k+1} 133 ga bo'linadi. ■

9-m i s o l. Ayniyatni isbotlang:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Yechish. p=0 uchun ayniyat o'rinli, chunki $\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$

$n = k$ uchun ayniyat o'rinli bo'lsin, ya'ni

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdots \cos 2^k \alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

U holda u $n = k+1$ uchun ham o'rinli bo'ladi. Darhaqiqat

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdots \cos 2^k \alpha \cos^{2k+1} \alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha \cdot \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}. \ ■$$

10-m i s o l. $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ bo'lishini isbotlang, bu yerda $\alpha > -1, \alpha \neq 0,$ n - birdan katta natural son.

Yechish. p=2 uchun tengsizlik o'rinli, chunki $\alpha^2 > 0$.

Tengsizlik $n = k$ uchun, bu yerda k qandaydir natural son, o'rinli bo'lsin, ya'ni

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha. \qquad (1)$$

U holda tengsizlik $n = k+1$ uchun ham o'rinli ya'ni

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha. \qquad (2)$$

bo'lishini ko'rsatamiz

Darhaqiqat, shartga ko'ra $1+\alpha > 0$ shuning uchun (1) ning ikki tomonini ($1+\alpha$) ga ko'paytirib hosil qilingan

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+\alpha)(1+\alpha), \qquad (3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi (3) tengsizlikni

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2$$

ko'rinishda yozamiz. Oxirgi tengsizlikning o'ng tomonidagi $k\alpha^2$ musbat qo'shiluvchini tashlab yuborib (2) tengsizlikni hosil qilamiz. ■

M A S H Q L A R

107. Natural qatorda dastlabki *p* ta sonning yig'indisi $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ga teng bo'lishini isbotlang.

108. Natural qatorda dastlabki *p* ta son kvadratlari yig'indisi $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng bo'lishini isbotlang.

109. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ ni isbotlang.

110. Natural qatorda dastlabki *n* ta son kublarining yig'indisi

$\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ga teng bo'lishini isbotlang.

111. $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$ bo'lishini isbotlang.

112. Isbotlang: $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

113. Isbotlang: $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

114. Isbotlang: $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

115. Ayniyatni isbotlang:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

116. Uchta ketma-ket natural sonlar kublarining yig'indisi 9 ga bo'linishini isbotlang.

117. Isbotlang: $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin n\,x=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}$.

118. Isbotlang: $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos n\,x=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

119. Isbotlang:

$$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin n\,x=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

120. Isbotlang

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos n\,x=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

121*. Isbotlang: $\dfrac{1}{2}tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}tg\dfrac{x}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}tg\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}ctg\dfrac{x}{2^n}-ctgx$ $(x\neq m\pi)$.

122*. Ixtiyoriy natural $n>1$ uchun $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

123*. Isbotlang: $\dfrac{4^n n+1}{}<\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

124. Ixtiyoriy $a,b\in \boldsymbol{R},\ n\in \boldsymbol{N}$ uchun

$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^k b^n$ bo'lishini isbotlang.

125. Ixtiyoriy natural p uchun

a) p^3-p son 3 ga bo'linadi;

b) p^5-p son 5 ga bo'linadi;

c) p^7-p son 7 ga bo'linadi;

d) ixtiyoriy natural p uchun p^9-p ayirma 9 ga bo'linishi to'g'rimi?

126. Tengsizliklarni ibotlng:

a) Ixtiyoriy natural $n>4$ uchun $n^2 < 2^n$;

b) Ixtiyoriy natural $n \geq 4$ uchun $2^n < n!$;

c*) Ixtiyoriy natural $n>1$ uchun $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

127*. Ixtiyoriy natural a, b, c sonlar uchun $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ tengsizlik bajarilishini isbotlang.

128*. Ixtiyoriy natural a, b lar uchun:

a) $a^n b + ab^n \leq a^{n+1} + b^{n+1}$, ixtiyoriy natural p uchun;

b) $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$, ixtiyoriy natural $p > 1$ uchun, tengsizliklar bajarilishini isbotlang.

129*. Ixtiyoriy natural p uchun $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ son 11 ga bo'linishini isbotlang.

130*. Ixtiyoriy natural p uchun $3^{2n} + 2^{6n-5}$ son 11 ga bo'linishini isbotlang.

131. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ning 7 ga bo'linishini isbotlang.

II-bob
ASOSIY ALGEBRAIK SISTEMALAR

Tayanch iboralar: *n-ar algebraik amal*; *kompozitsiya*; *algebraik sistema, algebraik struktura; algebraik tizim*; *gruppoid*; *assosiativ amal*; *polugruppa*; *neytral (birlik) element*; *monoid*; *teskari element*; *gruppa*; *Keli jadvali*; *kommutativ amal*; *Abel gruppa*; *additiv gruppa*; *multiplikativ gruppa*; *gruppa tartibi*; *olmoshlarlar gruppasi*; *simmetrik gruppa*; *to'liq chiziqli gruppa;maxsus chiziqli gruppa; qismgruppa*; *trivial qismgruppa; siklik gruppa; gruppa elementining tartibi*; *gruppalar izomorfizmi*; *gruppalar avtomorfizmi*; *ishora almashinuvchi gruppa*; *gruppaning davri; gruppaning davriy qismi; elementning sentralizatori; gruppa markazi; Keli teoremasi; gruppaning ichki avtomorfizmi; chap (o'ng) qo'shni sinf; Lagranja teoremasi*; *qismgruppaning gruppadagi indeksi; Koshi teoremasi*; *gruppaning qismgruppa bo'yicha chap (o'ng) tomonli yoyilmasi; normal bo'luvchi; qo'shma elementlar; qo'shmalangan qismgruppalar; faktor-gruppa*; *gruppalar gomomorfizmi*; *gomomorfizm yadrosi*; *tabiiy gomomorfizm; gruppalar gomomorfizmi teoremasi; qismgruppaning normalizatori; gruppalar monomorfizmi; gruppalar epimorfizmi; halqa; assosiativ halqa; birlik elementli halqa; Li halqasi (liyaviy halqa); nolning bo'luchilari; halqaning additiv va multiplikativ gruppalari; birning bo'luvchilari; trivial halqa; butunlik soxasi; jism; maydon; maydon xarakteristikasi; qismhalqa; chegirmalar halqasi; halqalar izomorfizmi; halqaning chap (o'ng) ideali; ikkitomonlama ideal; bosh ideal; ; faktor-halqa; maksimal ideal; halqalar gomomorfizmi; halqalar monomorfizmi; halqalar epimorfizmi; halqa gomomorfizmi yadrosi; halqalar gomomorfizmi haqidagi teorema; nilpotent element; halqaning radikali; yevklid halqasi.*

8-§. Algebraik amallar

A – ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsin. Agar A to'plamning ma'lum tartibda olingan n ta elementiga shu to'plamning aniq bir elementi mos qilib qo'yilgan bo'lsa, A da *n-ar algebraik amal aniqlangan* deyiladi. Boshqacha qilib aytganda *n*-ar algebraik amal

$$f : A^n \longrightarrow A$$

akslantirishdir. n soni f *amalning arligi* deyiladi.

0–ar (nular) amal A ning qandaydir elementini doimiylashtiradi (ya'ni bu amal A ning hamma elementlarini bitta elementga o'tkazadi);

1-ar (unar) amal har bir $a \in A$ elementga $f(a) \in A$ elementni mos qilib qo'yadi.

2-ar (binar) amal $a, b \in A$ elementlarning har bir tartiblangan juftiga $f(a,b) \in A$ elementni mos qilib qo'yadi.

3-ar (ternar) amal $a, b, c \in A$ elementlarning har bir tartiblangan uchligiga $f(a,b,c) \in A$ elementni mos qilib qo'yadi va h.k.

Biz asosan binar algebraik amallarni qarab chiqamiz. Binar algebraik amal ko'pgina hollarda umumiy shaklda * belgi bilan, bu amalning *a* va *b* elementlarga tadbiq etilishi natijasi esa $a * b$ shaklda belgilanadi. Bunday belgilashda (bu amalni qandaydir biror aniq amal, masalan, $+, -, \cdot, :$ va h.k. bilan almashtirganda) * amalning o’zi kompozitsiya, uning a va b elementlarga tadbiq etilishi natijasi, ya’ni $a*b$ element a va b elementlar *kompozitsiyasi* deyiladi. Algebraik amallar majmo’i (ular istalgan arlikda bo’lishi mumkin) aniqlangan bo’sh bo’lmagan ixtiyoriy to’plam *algebraik sistema (algebraik struktura, algebraik tizim)* deyiladi.

Shuni qayd qilamizki, A da binar algebraik amal ta’rifi a va b elementlarning $a*b$ kompozitsiyasi; birinchidan A ga tegishli, ikkinchidan bu kompozitsiya bir qiymatli va uchinchidan a va b elementlar tartibiga bog’liq bo’lishini talab qiladi.

* algebraik amalli A to’plam $(A,*)$ shaklda belgilanadi va *gruppoid* deyiladi.

1-m i s o l. Agar $A=\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\dots\}$ (natural sonlar to’plami), $*$ – esa oddiy ma’nodagi qo’shish $(+)$ bo’lsa, u holda $(\boldsymbol{N},+)$ – gruppoid bo’ladi. ■

2-m i s o l. $(\boldsymbol{N},\cdot)$ – ham gruppoid (bu yerda $*$ – sonlarni ko’paytirish). ■

3-m i s o l. $(\boldsymbol{N},-),(\boldsymbol{N},:)$ – lar gruppoid emas. ■

4-m i s o l. $(\{1,2,\dots,10\},+)$ va $(\{1,2,\dots,10\},\cdot)$ -- lar gruppoid emas, chunki birinchi o’nlik sonlarini qo’shish va ko’paytirish uning chegarasidan tashqariga chiqarib yuborishi mumkin:
$7,8,3,4\in\{1,2,\dots,10\}$ bo’lsa hamki $7+8\notin\{1,2,\dots,10\}$, $3\cdot 4\notin\{1,2,\dots,10\}$. ■

5-m i s o l. Agar $a*b$ kompozitsiya a^b bo’lsa u holda $(\boldsymbol{N},+)$ – gruppoid bo’ladi. Unda oldingi misollardan farqli ravishda hamma vaqt ham $a*b=b*a$ bo’lavermaydi (masalan, $2^3\neq 3^2$). ■

6-m i s o l. $A=\{a,b,e\}$ bo’lsin. Kompozitsiyani quyidagi jadval bilan beriladi:

$*$	a	b	e
a	a	e	a
b	e	a	b
e	a	b	e

Ko’rinib turibdiki, $(A,*)$ - gruppoid. ■

7-m i s o l. X – bo’sh bulmagan to’plam bo’lsin. Almashtirishlar kompozitsiyasi (ko’paytmasi):

a) X to’plamning hamma almashtirishlari;
b) X to’plamning hamma inyektiv almashtirishlari;
s) X to’plamning hamma suryektiv almashtirishlari;
d) X to’plamning hamma biyektiv almashtirishlari

to’plamlarida binar algebraik amamllar bo’ladi. Demak, *a*), *b*), *c*), va *d*) hollardagi algebraik sistemalar gruppoidlardir. ■

Agar ixtiyoriy $a,b,c\in A$ lar uchun $a*(b*c)=(a*b)*c$ bo’lsa, A dagi * binar algebraik amallar *assosiativ* deyiladi.

Agar * kompozitsiya assosiativ bo’lsa, $(A,\times)$ gruppoid *polugruppa (yarimgruppa)* deyiladi.

8-m i s o l. $(\boldsymbol{N},+)$ va $(\boldsymbol{N},\cdot)$ – polugruppalardir, chunki hamma vaqt

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ va } a(bc)=(ab)c. \ ■$$

9-m i s o l. $a*b=a^b-$ amalli $(\boldsymbol{N},*)$ sistema polugruppa emas, chunki $a^{(b^c)}=(a^b)^c$ tenglik hamma vaqt ham to'g'ri bo'lavermaydi, masalan, $3^{(1^2)}\neq(3^1)^2$. ■

10-m i s o l. Hamma rasional sonlarning $\boldsymbol{Q}-$to'plami uchun $a*b=\dfrac{a+b}{2}$ amalli $(\boldsymbol{Q},*)$ gruppoid polugruppa emas, chunki ixtiyoriy $a,b,c\in\boldsymbol{Q}$ elementlar uchun $a*(b*c)=\dfrac{a+\frac{b+c}{2}}{2}$ va $(a*b)*c=\dfrac{\frac{a+b}{2}+c}{2}$ qiymatlar hamma vaqt ham mos tushavermaydi. ■

Agar har qanday $a\in A$ element uchun $a*e=a$ va $e*a=a$ bo'lsa, $(A,*)$ gruppoidning e elementi *neytral* element deyiladi.

11-m i s o l. Har qanday gruppoidda ham neytral element mavjud bo'lavermaydi. $(\boldsymbol{N},+)-$ da neytral element yo'q; $(\{0,1,2,...,\},+)-$ da bor, u 0 sonidir; $(\boldsymbol{N},\ \cdot)-$ da neytral element 1 dir. $a*b=a^b$ bo'lgan $(N,*)$ da ixtiyoriy a element uchun $a*1=a$ bo'lishini ko'ramiz. Ammo bu yerda 1 faqat bir tomondan (o'ngdan) neytrallik vazifasini bajaradi, biroq $a*1\neq a$ ($a\neq1$ bo'lganda). Shuning uchun 1 neytral element bo'lmaydi. (boshqa hyech bir element ham neytral element bo'lolmaydi) ■

Neytral elementga ega bo'lgan polugruppa *monoid* deyiladi. Agar bu e neytral element oshkor ko'rsatilgan bo'lsa $(A,*,e)$ monoid binar amalli (* kompozitsiya) va har bir elementni o'zgarishsiz qoldiradigan e nular amallardan iborat ikki ammalli algebraik sistemani ifodalaydi, ammo umumiy holda bu monoidni undagi nular amalni oshkor ko'rsatmay $(A,*)$ ko'rinishda ifodalaydilar. ■

12-m i s o l. $(\boldsymbol{N},*)$ da ixtiyoriy $a,b,\in\boldsymbol{N}$ lar uchun $a*b=$ *EKUB(a, b)* bo'lsa, $(N,*)-$ monoid bo'ladi. Bu yerda $e=1$. ■

13-m i s o l. $X-$ to'plam, $P(X)-$ uning hamma qism to'plamlari to'plami bo'lsin. U holda

a) to'plamlar kesishmasi $P(X)$ da binar algebraik amal bo'ladi. Bu amal assosiativ, X ning o'zi neytral element bo'ladi. Shuning uchun $(P(X),\ \bigcap)-$ monoid.

b) to'plamlar birlashmasi $P(X)$ da binar algebraik amal bo'ladi. Bu amal assosiativ. Bo'sh $\varnothing$ to'plam neytlar element bo'ladi. Demak, $(P(X),\ \bigcup)-$ monoid. ■

Agar $a*b=b*a=e$ bo'lsa, b element $(A,*)$ monoidning $a\in A$ elementiga *teskari element* deyiladi.

Monoidning har bir elementi ham *teskarilanuvchi* (ya'ni teskari elementga ega) bo'lavnrmaydi. Ammo agar $a\in A$ -- teskarilanuvchi bo'lsa, u holda, unga teskari element faqat bitta bo'ladi va a^{-1} orqali belgilanadi. Teskari elementning ta'rifiga asosan $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ bo'lgani uchun a^{-1} ga teskari element bo'lib a xizmat qiladi, ya'ni $(a^{-1})^{-1}=a$.

$*$ kompozitsiyaning assosiativligidan $a*b*c*d*f$ (ko'paytuvchilar soni istalgancha bo'lishi mumkin) ifodaning ma'noga ega ekanligi kelib chiqadi, chunki qavslarning ixtiyoriy tartibda joylashtirilishi bir xil natijaga keltiradi. Monoidning ixtiyoriy sanoqdagi teskarilanuvchi elementlari kompozitsiyasi teskarilanuvchidir.

Har bir monoidda bitta teskarilanuvchi element albatta mavjud. Bu uning neytral elementi. e. Hamma elementi teskarilanadigan monoid *gruppa* (guruh) deyiladi.

14-m i s o l. $(\boldsymbol{Z},+), (\boldsymbol{Q},+), (\boldsymbol{R},+), (\boldsymbol{C},+)-$gruppalardir $(e=0, \quad a^{-1}=-a)$. ■

15-m i s o l. $(\boldsymbol{Z},\cdot)-$ gruppa emas, chunki ± 1 dan boshqa hamma butun sonlar teskarilanmaydilar. ■

16-m i s o l. $(\boldsymbol{Q},\cdot), (\boldsymbol{R},\cdot), (\boldsymbol{C},\cdot)-$ monoidlar, gruppa emas, chunki 0^{-1} mavjud emas. ■

17-m i s o l. $(\boldsymbol{Q}\setminus\{0\},\cdot), (\boldsymbol{R}\setminus\{0\},\cdot), (\boldsymbol{C}\setminus\{0\},\cdot)-$ gruppalar. ■

M A S H Q L A R

132. Natural sonlarning N to'plamida binar algebraik amallar quyidagi tengliklar bilan berilgan.

$a)$ $a*b=$ ЭКУБ (a, b); $b)$ $a*b=$ ЭКУБ (a, b); $c)$ $a*b=a^{2b}$;

$d)$ $a*b=a^2\, b^2$; $e)$ $a*b=\max\,(a, b)$; $f)$ $a*b=\min\,(a, b)$;

$g)$ $a*b=|a-b|+1$; $h)$ $a*b=a$.

Har bir algebraik sistemani xarakterlab bering, ya'ni gruppoid, polugruppa, monoid yoki gruppa ekanligini aniqlang.

133. Hamma musbat haqiqiy sonlarning $\boldsymbol{R}^{>0}$ algebraik amallar quyidagi tengliklar bilan berilgan.

$a)$ $a*b=\sqrt{a\,b}$; $b)$ $a*b=\sqrt[3]{a\,b}$; $c)$ $a*b=a^b$;

$d)$ $a*b=\dfrac{a}{b}$; $e)$ $a*b=1$.

Har bir algebraik sistemani xarakterlab (tavsiflab) bering.

134. $X\neq\varnothing-$ bo'lsin. X ning barcha qismto'plamlari to'plami $P(X)$ da algebraik amallar quyidagi tengliklar bilan berilgan.

$a)$ $A*B=A\setminus B$; $b)$ $A*B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$.

Har bir algebraik sistemani xarakterlab bering.

135. A^2 to'plamda (bu yerda $A-$ixtiyoriy to'plam) $*$ amal $(a,b)*(c,d)=(a,d)$ qoida bilan aniqlangan. A^2 to'plam shu amalga nisbatan polugruppa bo'ladimi? A^2 da neytral element mavjudmi?

136. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning hamma darajalaridan iborat polugruppa nechta elementga ega? Bu polugruppa gruppa bo'la oladimi?

137*. Polugruppaning ixtiyoriy a elementi uchun $az = z(za = z)$ bo'lsa z polugruppaning *o'ng (chap) noli* deyiladi. Agar polugruppada ham o'ng, ham chap nollar mavjud bo'lsa, ularning hammasi bitta element bo'ladi, ya'ni yagona ikki tomonlama nol mavjud bo'ladi. Shuni isbot qiling.

138*. Polugruppaning *o'ng (chap) biri* deb shunday u elementga aytiladiki, har qanday a element uchun $au = a$ $(ua = a)$ bo'ladi. Agar polugruppada ham o'ng, ham chap birlar mavjud bo'lsa, ularning hammasi bitta element bo'lishini, ya'ni yagona bitta ikki tomonlama bir mavjud bo'lishini isbot qiling.

139. Polugruppaning elementi bir vaqtning o'zida o'ng nol va chap bir bo'laoladimi?

140*. O'ng qisqartirishli (ya'ni $ba = ca$ dan $b = c$ hosil bo'ladigan) va aqalli bitta chap birga ega bo'lgan chekli (ya'ni elementlari soni chekli bo'lgan) polugruppa gruppa bo'lishini isbot qiling.

141. Gruppa bo'laolmaydigan o'ng qisqartirishli chekli polugruppaga misol tuzing.

142. Chekli $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ to'plamda $*$ binar amal *Keli jadvali* bilan aniqlangan bo'lsin. Bu n ta satr va n ta ustundan iborat bo'lib, uning $i-$satri bilan $j-$ustuni kesishgan joyda A ning $a_i * a_j$ ga teng elementi turadi. Bu jadval *ko'paytirish jadvali* ham deyiladi. Quyidagi amallar uchun Keli jadvallari tuzing:

a) $\{1,2,3,4,6,12\}$ to'plamda eng kichik umumiy karralini topish;

b) $\{1,2,3,4,6,12\}$ to'plamda eng katta umumiy bo'luvchini topish;

c) $P(\{1, 2\})$ da to'plamlarning birlashmasini topish;

d) $P(\{1, 2\})$ da to'plamlarning kesishmasini topish;

e) $f_1 = x, \quad f_2 = \frac{1}{x}, \quad f_3 = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_4 = \frac{x+1}{x-1}, \quad f_5 = \frac{1-x}{1+x},$

$f_6 = \frac{1+x}{1-x}, \quad f_7 = -\frac{1}{x}, \quad f_8 = -x.$

funksiyalar kompozitsiyasini topish.

143. $\boldsymbol{Z}_m = \{0,1,\ldots,m-1\}$ to'plamda algebraik amallarni quyidagiga aniqlaymiz:

a) $a * b-$ son $a+b$ ni m ga bo'lishdan hosil bo'ladigan qoldiq. Bu amalni m *modul bo'yicha qo'shish* deb atab $\oplus$ bilan belgilaymiz;

b) $a * b-$ son ab ni m ga bo'lishdan hosil bo'ladigan qoldiq. Bu amalni m *modul bo'yicha ko'paytirish* deb atab $\otimes$ belgi bilan belgilaymiz.

$(\boldsymbol{Z}_m, \oplus)$ va $(\boldsymbol{Z}_m, \otimes)$ algebraik sistemalarni xarakterlang. $n = 2, 3, 4$ hollar uchun ularning Keli jadvallarini tuzing.

9-§. Gruppalar. Qismgruppalar. Izomorfizm.

Gruppa tushunchasining alohida ahamiyatga egaligini hisobga olib uning «gruppoid», «polugruppa» va «monoid» iboralaridan foydalanilmay beriladigan ta'rifini keltiramiz.

Bo’sh bo’lmagan G to’plamda * binar algebraik amal aniqlangan bo’lib,

1) har qanday $g_1, g_2 \in G$ elementlar uchun $g_1 * g_2 \in G$ element bir qiymatli aniqlangan;
2) $*$ amal assosiativ;
3) G da neytral element mavjud;
4) G ning barcha elementlari teskarilanuvchi,

shartlar bajarilsa, $(G,*)$ sistema *gruppa* deyiladi. Bu holatda G to’plam * amalga nisbatan gruppa tashkil etadi deb ham aytadilar.

Har qanday $(A,*)$ gruppoidning ixtiyoriy $a,b \in A$ elementlari uchun $a*b=b*a$ bo’lsa, * amal *kommutativ amal*, gruppoidning o’zi esa *kommutativ gruppoid* deyiladi.

Kommutativ gruppa *abel gruppa* ham deyiladi.

Ko’pgina hollarda algebraik amalni ko’paytirish yoki qo’shish deb atash qulaylik qiladi. Agar amalni ko’paytirish deb atasak, g_1 va g_2 elementlarning *kompozitsiya ko’paytma* deb ataladi va $g_1 g_2$ ko’rinishda yoziladi. Bu holda neytral element *birlik element* deb ataladi va 1 yoki e bilan, g teskari element esa g^{-1} bilan belgilanadi.

Agar amal ***qo’shish*** deb atalsa g_1 va g_2 elementlar kompozitsiyasi *yig’indi* deb ataladi va $g_1 + g_2$ bilan; neytral element *nol* deb ataladi va 0 simvol bilan; g ga teskari element esa *qarama-qarshi **element*** deyiladi va $(-a)$ bilan belgilanadi.

Gruppadagi amal *ko’paytirish* deb atalganda, gruppaning o’zi *multiplikativ gruppa*, *qo’shish* deb atalganda esa *additiv gruppa* deyiladi.

Agar gruppa elementlari soni chekli bo’lsa, *chekli gruppa*, aks holda *cheksiz gruppa* deyiladi. Chekli gruppa elementlari soni uning *tartibi* deyiladi.

1-m i s o l. $(G,*)$ gruppada ixtiyoriy $g_1, g_2 \in G$ elementlar uchun $g_1 * x = g_2, \quad y * g_1 = g_2$ tenglamalarning har biri bir qiymatli yechiladi.

*Yechish.*Avval birinchi tenglamani qanoatlantiradigan $x \in G$ element mavjud deb faraz qilamiz va uning qanday element ekanligini aniqlaymiz (ya’ni yagonaligini isbot qilamiz), keyin topilgan element haqiqatan berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz (ya’ni mavjudligini isbot qilamiz).

$x-$element $g_1 * x = g_2$ bo’ladigan konkret element bo’lsin. U holda $g_1^{-1} * (g_1 * x) = g_1^{-1} * g_2$, bundan

$$(g_1^{-1} * g_2) * x = g_1^{-1} * g_2, \quad e * x = g_1^{-1} * g_2, \quad x = g_1^{-1} * g_2.$$

Demak, izlanayotgan element faqat $x = g_1^{-1} * g_2$ ko’rinishda bo’lishi mumkin. Shu element berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz: $g_1 * (g_1^{-1} * g_2) = (g_1 * g_1^{-1}) * g_2 = e * g_2 = g_2$ Ikkinchi tenglama uchun ham xuddi shunday muhokama yuritiladi. ■

2-m i s o l. *(olmosh (o’rniga qo’yish) lar gruppasi).*

$S_n -$barcha $n!$ ta $n-$darajali olmoshlar to’plami bo’lsin.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, \quad \beta = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$$

olmoshlarning $\alpha\beta$ *ko'paytmasi* deb $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$ olmoshga aytiladi.

Ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun S_n to'plam olmoshlarni ko'paytirishga nisbatan gruppa tashkil etishni ko'rsatamiz. Shu bilan birga n=1; 2 bo'lgan hollarda bu Abel gruppasi, $n \geq 3$ bo'lganda esa Abel gruppasi emas.

$(S_n, \cdot)$ sistema uchun gruppa ta'rifining to'rt shartining hammasini tekshiramiz:

1. $\alpha, \beta \in S_n$ bo'lsa $\alpha\beta \in S_n$ – bo'lishi olmoshlar ko'paytmasining ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. $\alpha, \beta, \gamma \in S_n$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ – ixtiyoriy son va $(\alpha)(i) = j$, $(\beta)(j) = k$, $\gamma(k) = l$ bo'lsin.

U holda $\beta\gamma(j) = l$, $\alpha(\beta\gamma)(i) = l$, $\alpha\beta(i) = k$, $(\alpha\beta)\gamma(i) = l$. Shunday qilib, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dagi qanday i sonni olmaylik har ikkala $\alpha(\beta\gamma)$ va $(\alpha\beta)\gamma$ olmoshlarning har biri uni bitta son (l) ga o'tkazadi. Bu o'z navbatida $\alpha(\beta\gamma)$ va $(\alpha\beta)\gamma$ -- podstanovkalar S_n dagi bitta podstanovkaning o'zi ekanligini ko'rsatadi., ya'ni $\alpha(\beta\gamma) = = (\alpha\beta)\gamma$.

3. S_n da neytral element bo'lib $l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ ayniy olmosh xizmat qiladi: ixtiyoriy $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ uchun $\alpha e = e\alpha = \alpha$ bo'lishini ko'rish oson.

4. Agar $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ bo'lsa, u holda $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ bo'ladi. Haqiqatan $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Shunday qilib $(S_n, \cdot)$ - gruppa.

S_1 faqat bitta $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ elementdan iborat. S_2 – esa ikkita

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ elementlardan iborat:

$ee = e$, $e\alpha = \alpha e = \alpha$, $\alpha\alpha = e, \alpha^{-1} = \alpha$. S_1 va S_2 gruppalarning har ikkalasi abel gruppalardir.

Endi $\mathrm{n} \geq 3$ bo'lsin.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olmoshlarni olib qaraylik. U holda

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \neq \alpha\beta, \text{ ya'ni } \mathrm{n} \geq 3$$

bo'lganda S_n - abel gruppa emas. ■

S_n *n-darajali simmetrik gruppa* deyiladi.

2-m i s o l. Elementlari $\boldsymbol{R}$ to'plamdan olingan n*-tartibli* barcha maxsusmas kvadrat matritsalar to'plami matritsalarni ko'paytirishga nisbatan gruppa tashkil etishini isbot qiling. Bu gruppa $\boldsymbol{R}$ da n*-darajali to'liq chiziqli* gruppa deyiladi va $GL(n, \boldsymbol{R})$ bilan belgilanadi.

*Yechish.*Mustaqil bajaring. ■

3-m i s o l. Elementlari $\boldsymbol{R}$ to'plamdan olingan va determinanti 1 ga teng bo'lgan barcha n-tartibli matritsalar to'plami matritsalarni ko'paytirish amaliga nisbatan gruppa tashkil etishini isbot qiling. Bu gruppa *maxsus chiziqli gruppa* deyiladi va $SL(n, \boldsymbol{R})$ bilan belgilanadi.

*Yechish.*2-misol kabi bajariladi. ■

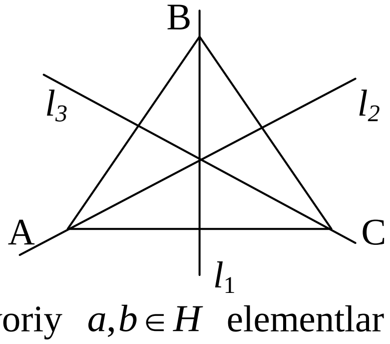
Geometrik figuraning nuqtalari orasidagi masofani o'zgartirmaydigan almashtirishi shu *figuraning simmetriyasi* deyiladi.

4-m i s o l. Muntazam uchburchakning barcha simmetriyalari to'plami simmetriyalarni akslantirishlar singari ko'paytirishga nisbatan gruppa tashkil etishini isbot qiling. Uning Keli jadvalini tuzing.

Yechish $ABC-$muntazam uchburchak bo'lsin, l_1, l_2, l_3 - uning medianalari. Ushbu e, a, b, c, d, f oltita almashtirishlarni qarab chiqamiz. Bunda: $e-$ aynan almashtirish; $a-$ uchburchakni O nuqta atrofida 120^0; b – uni 240^0 ga burish; $c, d, f-$lar mos ravishda l_1, l_2, l_3 medianalarga nisbatan almashtirishlar. Bu oltita almashtirish to'plami gruppa bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Uning Keli jadvali quyidagicha bo'ladi:

	ye	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
	ye	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a	*a*	*b*	*e*	*f*	*c*	*d*
b	*b*	*ye*	*a*	*d*	*f*	*c*
c	*c*	*d*	*f*	*e*	*a*	*b*
d	*d*	*f*	*c*	*b*	*e*	*a*
f	*f*	*c*	*d*	*a*	*b*	*e*



■

Agar ixtiyoriy $a, b \in H$ elementlar uchun $a * b \in H$ bo'lsa, G to'plamning bo'sh bo'lmagan H qismto'plami * algebraik amalga nisbatan *yopiq* deyiladi. bundan keyingi muhokamalarda (agar boshqa amal takidlangan bo'lmasa) gruppaviy amalni *ko'paytiruv* deb ataymiz. $G-$ gruppa berilgan bo'lsin. Agar G to'plamning bo'sh bo'lmagan H qismto'plamining o'zi gruppada aniqlangan amalga nisbatan gruppa tashkil etsa uni G gruppaning qismgruppasi deyiladi. G to'plamning bo'sh bo'lmagan H qism to'plami G gruppaning qismgruppasi bo'lishi uchun uning *ko'paytirish* va elementlarning *teskarilanishi* amallariga nisbatan yopiq bo'lishi, ya'ni

1) $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$;

2) $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

shartlarning bajarilishi yetarli.

Agar G gruppada biror g element olinsa, u holda $\{g^k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ to'plam G ning qismgruppasi bo'ladi (tekshirib ko'ring!). Bu qism gruppa *siklik* qism gruppa, g element esa uning *yasovchisi* (yoki yaratuvchisi) deyiladi. Yasovchisi g bo'lgan siklik qismgruppani $< g >$ bilan belgilaymiz.

O'zining biror $< g >$ siklik qismgruppasi bilan mos tushadigan G gruppa *siklik gruppa* deyiladi. Bu holda g element uning yasovchi (yoki yaratuvchi)si deyiladi. Agar G gruppaning g elementining hamma har xil bo'lgan butun darajalari har xil, ya'ni $k \neq l \Rightarrow g^k \neq g^l$, $k, l \in \boldsymbol{Z}$ bo'lsa g element *cheksiz tartibga ega* deyiladi. Aks holda, ya'ni elementning butun darajalari orasida tenglari mavjud, $g^n = 1$ bo'lib, $0 < m < n$ uchun $g^m \neq 1$ bo'lsa, n natural son g *elementning tartibi* deyiladi.

Agar G gruppaning g elementi cheksiz tartibga ega bo'lsa $< g >$ siklik gruppa cheksiz bo'ladi. Agar g elementning tartibi n bo'lsa, $< g >$ qism ham n-tartibga ega bo'ladi, shu bilan birga $< g > = \{g^0 = 1, \quad g^1, \ldots, g^{n-1}\}$.

Cheksiz siklik gruppa $< g >$ da g^{-1} ham yasovchi bo'ladi, g va g^{-1} dan boshqa yasovchilar mavjud emas. Agar $< g >$ – siklik gruppaning tartibi n bo'lsa, u holda g^k element faqat va faqat k va n sonlar o'zaro tub bo'lgandagina yasovchi bo'ladi.

G_1 va G_2 – lar mos ravishda $*$ va $\circ$ amallarga nisbatan gruppalar bo'lsin. Agar ixtiyoriy $g_1, g_2 \in G_1$ lar uchun $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ bo'lsa biyektiv $f: G_1 \to G_2$ akslantirish G_1 gruppaning G_2 gruppaga *izomorfizmi* deyiladi. Bu holda G_1 gruppa G_2 gruppaga *izomorf* ham deyiladi va $G_1 \cong G_2$ shaklda yoziladi. Gruppaning o'ziga izomorfligi uning *avtomorfizmi* deyiladi.

5-m i s o l. Ixtiyoriy G gruppada $\{e\}$ va G ning o'zidan iborat ikkita qismgruppa mavjud. Ular G ning *trivial* qismgruppalari deyiladi.■

6-m i s o l. Simmetrik S_n gruppada barcha juft olmosh (o'rniga qo'yish) lar to'plami A_n qismgruppadir. (Tekshirib ko'ring!) Bu qismgruppa n-darajali ishora almashinuvchi gruppa deyiladi. Uning tartibi $\frac{1}{2}n!$ ga teng. ■

7-m i s o l. $SL(n, \boldsymbol{R})$ gruppa $GL(n, \boldsymbol{R})$ gruppaning qismgruppasidir.

8-m i s o l. Olmoshlarning ushbu

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

to'plami S_4 gruppada qismgruppa ekanligini ko'rsating.

Yechish. H ning Keli jadvalini tuzamiz:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_2	α_3	α_0
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_0	α_1	α_2

Bu jadvaldan $H-$ning qismgruppa ekanligi kelib chiqadi. ■

9-m i s o l. Agar $g-$element G gruppaning n-tartibli elementi bo'lsa k son n ga bo'lganda va faqat shu holdagina $g^k = e$ bo'ladi.

Yechish. $g^k = e$ bo'lsin. n son g ning tartibi bo'lgani uchun $k \geq n$. U holda $k = nq + r, \quad 0 \leq r < n$. Bundan $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = a^r = e. \quad a^n = e.$ element tartibi ta'rifiga asosan n son $g^n = e$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik natural sondir. $r < n$ bo'lgani uchun yuqoridagi muhokamada faqat $r = 0$ bo'lishi mumkin. Demak, k son n ga bo'linadi.

Aksincha, agar k son n ga bo'linsa, $k = nq_1, \quad q_1 \in \boldsymbol{Z}$ va shuning uchun: $g^k = g^{nq_1} = (g^n)^{q_1} = e.$ ■

10-m i s o l. G gruppaning g elementi n-tartibga ega bo'lsa g^k element $\frac{n}{d}$ tartibga ega bo'ladi. Bunda $d = ЭКУБ(n, k)$. Shuni isbot qiling.

*Yechish.*Bu yerda $(g^k)^{\frac{n}{d}} = e$ va $0 < m < \frac{n}{d}$ bo'lganda $(g^n)^m \neq e$ bo'lishini ko'rsatish kerak. Eng avvalo $(g^k)^{\frac{n}{d}} = g^{\frac{kn}{d}} = (g^n)^{\frac{n}{d}} = e.$ Endi $m > 0$ shunday son bo'lsinki, $(g^k)^m = g^{km} = e$ bo'lsin. U holda 9-misolga ko'ra bundan km ning a ning tartibi bo'lgan $n-$ga bo'linishi kelib chiqadi. Demak, $\frac{k}{d}m$ son $\frac{n}{d}$ ga bo'linadi. Ammo $\frac{k}{d}$ va $\frac{n}{d}$ lar o'zaro tub. Shuning uchun m son $\frac{n}{d}$ ga bo'linishi kelib chiqadi, bundan $m \geq \frac{n}{d}$. ■

11-m i s o l. Multiplikativ $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ gruppada $z = \cos\frac{13\pi}{75} + i\sin\frac{13\pi}{75}$ elementning tartibi 150 ga teng. Shunga ishonch hosil qiling. ■

12-m i s o l. Birning 15-darajali ildizlarining har biri uchun uning tartibini ko'rsating.

*Yechish.*Birning 15-darajali ildizlari $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{15} + i\sin\frac{2\pi k}{15}$ bilan ifodalanadi. Bundan ε_0 ning tartibi birga; ε_5, ε_{10} larning tartiblari uchga; $\varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9, \varepsilon_{12}$ larning tartiblari beshga; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}$ larning tartiblari 15 ga tengligini ko'ramiz.■

13-m i s o l. Tartibi 100 bo'lgan $G = < g >$ siklik gruppada tartibi 20 bo'lgan hamma elementlarini toping.

Yechish. g^k elementning tartibini $ord(g^k)$ bilan belgilaymiz va shunday g^k elementlarni izlaymizki, $ordg^k(g^k) = 20$ bo'lsin. 10-misolga asosan $ord(g^k) = \frac{n}{ЭКУБ(n,k)}$ yoki bizning misolimizda $20 = \frac{100}{ЭКУБ(100,k)}$ bu esa o'z navbatida $(100,k) = 5$ ga teng kuchli. Shunday qilib yechilayotgan masala ushbu masalaga keltiriladi: shunday butun k sonlarni topingki $(100, k = 5)$ bo'lsin. Bunday sonlar 5, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95 bo'ladi. Demak, izlanayotgan elementlar: $g^5, g^{15}, g^{35} g^{45}, g^{55}, g^{65}, g^{85} g^{95}$ bo'ladi. ■

14-m i s o l. Barcha butun sonlarning $(\boldsymbol{Z},+)$ additiv gruppasi cheksiz siklik gruppadir. U 1 ning barcha karralilaridan iborat bo'ladi. ■

15-m i s o l. Birning $n-$darajali barcha ildizlari qiymatlari n-tartibli multiplikativ siklik gruppa tashkil etadi. U birning ixtiyoriy $n-$darajali boshlang'ich ildizi orqali yaratilishi mumkin. ■

16-m i s o l. Barcha butun sonlarning $(\boldsymbol{Z},+)$ additiv gruppasi barcha juft sonlarning $(2\boldsymbol{Z},+)$ additiv gruppasiga izomorfligini isbot qiling.

*Yechish.*Ixtiyoriy $k \in \boldsymbol{Z}$ uchun $f(k) = 2k \in 2\boldsymbol{Z}$ qoida bilan berilgan $f : \boldsymbol{Z} \to 2\boldsymbol{Z}$ akslantirish olamiz. $f -$ izomorfizmdir. ■

17-m i s o l. Barcha musbat haqiqiy sonlarning $(\boldsymbol{R}^{>0}, \cdot)$ multiplikativ gruppasi barcha haqiqiy sonlarning $(\boldsymbol{R},+)$ additiv gruppasiga izomorfligini isbot qiling.

Yechish. $\varphi(a) = \ln a = a'$ formula bilan aniqlangan $\varphi : \boldsymbol{R}^{>0} \to \boldsymbol{R}$ akslantirish olamiz. $\varphi(a\,b) = \ln a\,b = \ln a + \ln b = a' + b' \in \boldsymbol{R}$ shart ixtiyoriy $a,b \in \boldsymbol{R}^{>0}$ uchun o'rinli bo'lgani uchun $\varphi -$ izomorfizmdir. ■

18-m i s o l. Kompleks sonlarning $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ multiplikativ gruppasi $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi maxsusmas (ya'ni, kamida, $a \neq 0$ yoki $b \neq 0$) matrislarning multiplikativ gruppasiga izomorfligini isbot qiling.

Yechish. $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ formula bilan aniqlangan φ akslantirishni olamiz. $\varphi(c + di) = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ bo'lsin. U holda

$$\varphi[(a+bi)(c+di)]=\varphi[(ac-bd)+(ad+bc)i]=$$

$$=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\varphi(a+bi)\varphi(c-di).$$

Shu bilan birga agar $a+bi\neq c+di$ bo'lsa, u holda $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$. Demak, $\varphi-$izomorfizm. ■

19-m i s o l. S_3 gruppaning barcha avtomorfizmlarini toping.

Yechish. S_3 to'liq yozamiz:

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

$a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. U holda S_3 ni quyidagi ko'ri-nishda yozish mumkin bo'ladi.

$$S_3=\{e,b,a,a^2b,a^2,ab\}=\{e,a,a^2b,ab,a^2b\}.$$

Bu holda: $a^3=e,\ \ b^2=e,\ \ ba=a^2b$ bo'lishi bevosita tekshiriladi. Bu tengliklarga asoslanib S_3 gruppaning ixtiyoriy ikki elementi ko'paytmasini topaolamiz. Masalan,

$$a^2\cdot ab=a^3b=eb=b,\ \ ab\cdot a^2b=ab\cdot ba=ab^2a=a\cdot e\cdot a=a^2,$$

$$ab\cdot a^2=abaa=aa^2ba=a^3ba=eba=ba=a^2b \text{ va h. k.}$$

S_3 gruppa quyidagi har xil avtomorfizmlarga ega. Qulaylik uchun ularni olmoshlar shaklida yozamiz:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ e & a & a^2 & b & ab & a^2b \end{pmatrix};$$

$$\alpha=\begin{pmatrix} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ e & a & a^2 & ab & a^2b & b \end{pmatrix};$$

$$\beta=\begin{pmatrix} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ e & a & a^2 & a^2b & b & ab \end{pmatrix};$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ e & a^2 & a & b & a^2b & ab \end{pmatrix};$$

$$\mu=\begin{pmatrix} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ e & a^2 & a & a^2b & ab & b \end{pmatrix};$$

$$\nu=\begin{pmatrix} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ e & a^2 & a & ab & b & a^2b \end{pmatrix}.$$

Bu akslantirishlar ko'paytirishni saqlab qoladi. Masalan,

$b\gamma:\gamma(a^2)=a,\quad \gamma(ab)=a^2b,$ demak, $\gamma(a^2\cdot ab)=a\cdot a^2b$ yoki
$\gamma(b)=b;\quad \gamma(ab)=a^2b,\quad \gamma(a^2b)=ab,$ demak, $\gamma(ab\cdot a^2b)=a^2b\cdot ab,$
$\gamma(abba)=a^2a^2bb,\quad \gamma(a^2)=a$ va h.k.

M A S H Q L A R

144. Quyidagi to'plamlarning har biri ko'rsatilgan amallarga nisbatan gruppa tashkil etishini aniqlang. Gruppalardan qaysilari abel gruppa?

a) barcha toq sonlar to'plami, qo'shishga nisbatan.

b) barcha juft sonlar to'plami, qo'shishga nisbatan;

c) barcha musbat rasional (haqiqiy) sonlar to'plami ko'paytrishga nisbatan;

d) maxraji ikkining darajalaridan iborat barcha rasional sonlar to'plami qo'shishga nisbatan;

e) maxrajlari berilgan (chekli yoki cheksiz) to'plamdan olingan tub sonlarning faqat chekli sondagilari noldan farqli bo'lgan butun manfiy bo'lmagan ko'rsatkichlari ko'paytmasidan iborat bo'lgan rasional sonlar to'plami – qo'shishga nisbatan;

f) X to'plamning barcha podstanovkalari to'plami podstanovkalarni akslantirishlar sifatida ko'paytirishga nisbatan;

g) $X=\{1,2,\ldots,n\}$ to'plamning barcha juft podstanovkalari to'plami podstanovkalarni ko'paytirishga nisbatan;

h) tekislikning belgilangan nuqta atrofida barcha burishlari to'plami burishlarni akslantirishlar sifatida ko'paytirishga nisbatan;

i) x o'zgaruvchining butun (rasional, haqaqiy va kompleks) koeffisiyentli 1) *n*-darajali, 2) darajasi *n* dan katta bo'lmagan (nolinchi darajalari ham) barcha ko'phadalri to'plami ko'phadlarni qo'shishga nisbatan;

j) tekislik (fazo)dagi barcha erkli vektorlari to'plami vektorlarni qo'shishga nisbatan;

k) $n>1$ tartibli elementlari rasional (kompleks) sonlar bo'lgan barcha maxsusmas matritsalar to'plami 1) qo'shish; 2) ko'paytrish amalga nisbatan;

l) $n>1$ tartibli elementlari rasional (kompleks) son bo'lgan determinanti 1) 1 ga; 2) ± 1 ga teng barcha matritsalar to'plami matritsalarni ko'paytirishga nisbatan;

m) birning $n-$darajali (haqiqiy va shuningde kompleks) barcha ildizlari to'plami ko'paytirishga nisbatan;

n) moduli 1 ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlar to'plami ko'paytirishga nisbatan;

o) barcha sof mavhum kompleks sonlar to'plami kompleks sonlarni

1) qo'shish; 2) ko'paytirish amaliga nisbatan;

p) 3 ga qoldiqsiz bo'linadigan barcha sonlar to'plami qo'shishga nisbatan.

145. Quyidagi qonuniyatlar bilan aniqlangan $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ almashtirishlar to'plamlaridan qaysilari almashtirishlarni qo'paytirishga nisbatan gruppa ekanliginianiqlang. Ularning qaysilari abel gruppa :

a) $f(x)=ax+b,\quad a,b\in\boldsymbol{R},\quad a\neq 0;$

b) $f(x)=x+b,\quad b\in\boldsymbol{R};$

c) $f(x) = ax + b, \quad a,b \in \boldsymbol{R}, \quad a > 0;$

d) $f(x) = ax + b, \quad a,b \in \boldsymbol{R}, \quad a < 0;$

e) $f(x) = ax + b, \quad a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a \neq 0;$

f) $f(x) = ax + b, \quad a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a > 0;$

g) $f(x) = ax + b, \quad a,b \in \boldsymbol{Z}, \quad a \neq 0;$

h) $f(x) = 2^k x, \quad k \in \boldsymbol{Z}$?

146. Quyidagicha berilgan matritsalar to'plamlari matritsalarni ko'paytirishga nisbatan gruppa ekanligini isbot qiling. Ularning qaysilari abel

a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a^2 + b^2 > 0 \right\};$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a^2 + b^2 > 0 \right\};$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \boldsymbol{R} \right\};$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \mid k = 0,1,\dots,n-1 \right\};$

e) har bir satri va har bir ustunida faqat bitta elementi 1 ga qolganlari noldan iborat barcha n-tartibli kvadrat matritsalar to'plami.

f) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \boldsymbol{R}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \right\};$

g) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad n > 1, \quad a_{ij} \in \boldsymbol{R}$ ko'rinishdagi barcha uchburchakli maxsusmas matritsalar to'plami.

h) belgilangan maxsusmas simmetrik (kososimmetrik) A – matritsa uchun $S^T AS = A$ shartni qanoatlantiradigan barcha $n > 1$ tartibli S matritsalar to'plami ?

147. Berilgan figuraning barcha simmetriyalari to'plami simmetriyalarni akslantirishlar kabi ko'paytirishga nisbatan gruppa bo'lishini isbot qiling. Ushbu figuralarning simmetriya gruppasini tuzing:

a) kvadratning;

b) kvadrat bo'lmagan rombning;

c) kvadrat bo'lmagan to'g'ri to'rtburchakning.

Ularning har biri uchun Keli jadvali tuzing.

148*. Agar ikki burishning ko'paytmasi sifatida ularning birin-ketin bajarilishi qabul qilinsa, muntazam *n*-burchakning va besh muntazam ko'pyoqlardan har birining *n*-burchakni va ko'pyoqlini uning o'ziga o'tkazadigan markaz atrofida burishlarning barchasi gruppa tashkil etishini isbot qiling. Bu gruppalar tartibini aniqlang.

149. $\{1,2,..,p-1\}$, bunda p - tub son, to'plam p modul bo'yicha ko'paytrishga nisbatan gruppa tashkil etishini isbot qiling. $p=5$ bo'lgan hol uchun bu gruppaning Keli jadvalini tuzing.

150. Rasional (haqiqiy, kompleks) sonlarning hamma (a,b) tartiblangan juftlari to'plami (bunda $a\neq 0$): $(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,\ \ a_1b_2+b_1)$ qoida bo'yicha aniqlangan ko'paytirishga nisbatan gruppa tashkil etishini isbotlang.

151. 13-misoldagi gruppalarning qaysilari shu misoldagi boshqa gruppalarning qismgruppasi bo'ladi?

152. Gruppaning qismgruppalari kesishmasi uning qismgruppasi bo'lishini isbot qiling.

153. Ushbu olmoshlar to'plamlarining qaysilari S_4 gruppaning qismgruppasi bo'ladi?

$a)\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\right\};$

$b)\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\};$

$c)\ \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\right\};$

$$d)\ \left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}.$$

154. Agar G gruppaning H qismgruppasi ikkitadan kam bo'lmagan elementlardan iborat bo'lib G bilan ustma-ust tushmasa H qismgruppa G ning *xos* qismgruppasi deyiladi. Quyidagi gruppalarning xos qismgruppalarini ko'rsating:

a) butun sonlarning additiv gruppasi;

b) noldan farqli rasional sonlarning multiplikativ gruppasi;

s) S_3 simmetrik gruppa;

d) S_4 simmetrik gruppa;

e) musbat rasional sonlarning multiplikativ gruppasi.

155. Agar butun sonlar additiv gruppasining H qismgruppasi 2 ni o'z ichiga olsa, u holda H hamma juft sonlarni o'z ichiga oladi. Shuni isbot qiling.

156. Agar butun sonlar additiv gruppasining H qismgruppasi 1 yoki –1 ni o'z ichiga olsa, u $\boldsymbol{Z}$ bilan ustma-ust tushishini isbot qiling.

157. Noldan farqli haqiqiy sonlarning multiplikativ gruppasida quyidagilarni o'z ichiga oladigan eng kichik (o'z ichiga olish ma'nosida) qismgruppa toping.

a) 2; *b*) $\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$; *c*) $\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}$; *d*) $\boldsymbol{Z}^{>0}$; *e*) $\boldsymbol{Q}^{>0}$.

158. $(\boldsymbol{R}\setminus\{0\},\cdot)$ gruppasining hamma chekli qismgruppalarini toping.

159. G – gruppa va $Z(G)=\{g\in G \mid gx=xg \quad \forall x\in G\}$ bo'lsin. $Z(G)-$ to'plam G ning qismgruppasi ekanligini isot qiling. ($Z(G)$ gruppa G gruppaning *markazi* deyiladi).

160. Multiplikativ $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ gruppada quyidagi elementlarning tartibini toping:

a) $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{150}+i\sin\dfrac{2\pi k}{150}$, $k=15,\ \ 25$ bo'lganda;

b) $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{88}+i\sin\dfrac{2\pi k}{88}$, $k=4,\ 12,\ 7$ bo'lganda;

c) $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{19}+i\sin\dfrac{2\pi k}{19}$, $k=2,\ 6,\ 10$ bo'lganda.

161. Birning tartiblari 5, 7, 8, 12 ga teng bo'lgan barcha *n*-darajali ildizlarini toping, agar: *a*) $n=24$; *b*) $n=28$ bo'lsa.

162. Agar *a*) n = 18; *b*) n = 25 bo'lsa, birning har bir *n*-darajali ildizi uchun uning tartibini ko'rsating.

163. Podstanovkalarning uchinchi darajali S_3 gruppasida hamma elementlar tartibini aniqlang. S_3 gruppa siklik gruppa bo'ladimi?

164. Elementlari kompleks sonlar bo'lgan ikkinchi tartibli maxsusmas matritsalarning $GL(2,\boldsymbol{C})$ gruppasida quyidagi elementlar tartibini aniqlang:

$$a)\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\ \ b)\ \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\ \ c)\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix};\ \ d)\ \begin{pmatrix}i&0\\0&-1\end{pmatrix};\ \ e)\ \begin{pmatrix}i&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

165. G gruppaning ixtiyoriy a,b elementlari uchun:

a) a ва a^{-1}; *b*) a ва $b^{-1}ab$; *c*) ab ва ba elementlar birxil tartibli ekanligini isbot qiling.

166. 17 – 18 masalalardagi gruppalarning qaysilari siklik gruppa?

167. Isbot qiling:

a) agar G gruppada birlik bo'lmagan har bir elementning tartibi 2 ga teng bo'lsa, u holda u abel gruppa bo'ladi;

b) agar shu bilan birga G chekli gruppa bo'lsa u $2^n\ (n\in\boldsymbol{N})$ elementdan iborat bo'ladi.

168. Podstanovkalarning ixtiyoriy chekli tartibli siklik gruppalari mavjudligini isbot qiling.

169. $a-$element multiplikativ G gruppaning *n*-tartibli elementi bo'lsin. Quyidagilarni isbot qiling:

a) $a^0,a^1,\ldots,a^{n-1}$ elementlar juft-jufti bilan har xil;

b) $H=\{a^0,a^1,\ldots,a^{n-1}\}$ to'plam G ning qismgruppasi.

170. $a-$ element G gruppaning elementi va $n-$natural son bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalent (teng kuchli) ekanligini isbot qiling:

a) $a-$ning tartibi *n*;

b) $<a>-$ gruppa *n*-tartibli;

171. G gruppa $a-$ elementi $p\,(p-$tub son) tartibli bo'lsin. Ixtiyoriy butun m uchun yo $a^m=1$ yoki a^m ning tartibi p ga teng bo'lishini isbot qiling.

172. G gruppaning $a-$ elementi n-tartibli bo'lsin. Quyidagilarni isbot qiling:

a) n va s lar o'zaro tub bo'lganda va faqat shu holda a^s ning tartibi n ga teng bo'ladi;

b) agar n va k o'zaro tub bo'lsalar u holda $<a>$ da $\sqrt[k]{a}$ mavjud bo'ladi, ya'ni a element G da biror elementning k-darajasi bo'ladi, va aksincha;

s) agar n toq bo'lsa, u holda $<a>$ dagi har bir element $<a>$ dagi biror elementning kvadrati bo'ladi.

173. Siklik $<a>$ gruppaning:

a) 5; *b*) 10; *s*) 12 tartibli hamma yasovchilarini yozing.

174. Ixtiyoriy gruppada r va s o'zaro tub deb hisoblanadigan bo'lsa rs tartibli har bir a element bir qiymatli aniqlangan r-tartibli $a^{\lambda s}$ va bir qiymatli aniqlangan s-tartibli $a^{\mu z}$ elementlarning ko'paytmasidan iborat bo'ladi. Shuni isbot qiling.

175. Gruppaning a va b - elementlari o'rin almashinuvchi va chekli o'zaro tub r va s tartiblarga ega bo'lsin. Ularning ab ko'paytmasi rs tartibga ega bo'lishini isbotlang.

176. Har anday cheksiz gruppa cheksiz ko'p qism gruppalarga ega bo'lishini isbot qiling.

177. *a*) S_3 gruppaning; *b*) $<a>$ siklik gruppaning; α) 6; β) 24; γ) 100 tartibli hamma qismgruppalarini toping.

178. $\boldsymbol{C}^*$ gruppaning $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ elementining tartibi cheksiz ekanligini isbot qiling.

179. Ushbu gruppalarning har birida nechta 6-tartibli elementlar mavjud:

a) $\boldsymbol{C}^*$; *b*) S_5; *c*) A_5 ?

180*. S_n gruppada ushbu tasdiqlarni isbot qiling:

a) toq podstanovkaning tartibi juft sondir;

b) ixtiyoriy podstanovkaning tartibi uning yoyilmasiga kiradigan mustaqil sikllarning eng kichik umumiy karralisi bo'ladi.

181*. n-tartibli $<a>$ siklik gruppada $g^k=e$ shartni qanoatlantiradigan hamma g elementlarni va quyidagi hollar uchun hamma k tartibli elementlarni toping:

a) $n=24,\quad k=6;$ *b*) $n=24,\quad k=4;$ *c*) $n=100,\quad k=5;$

d) $n=360,\quad k=30;$ *e*) $n=360,\quad k=12;$ *f*) $n=360,\quad k=7.$

182*. n-tartibli $G=\langle a\rangle-$siklik gruppa berilgan bo'lsin. Quyidagilarni isbot qiling:

a) $ЭКУБ(k,n)=ЭКУБ(l,n)$ bo'lganda va faqat shu holdagina a^k va a^l elementlar bir xil tartibga ega bo'ladi;

b) a^k element k va n o'zaro tub bo'lganda va faqat shu holdagina G ning yaratuvchi elementi bo'ladi;

s) har qanday $H \subseteq G$ qismgruppa a^d ko'rinishdagi element bilan yaratiladi, bu yerda $d-$son n ning bo'luvchisi;

b) n ning har qanday d bo'luvchisi uchun *d*-tartibli yagona $H \subseteq G$ qismgruppa mavjud.

183*. $G-$chekli gruppa va $d(G)-$son har qanday $g \in G$ element uchun $g^s = e$ bo'ladigan s natural sonlarning eng kichigi bo'lsin ($d(G)$ son G gruppaning *davri* deyiladi). Quyidagilarni isbot qiling:

a) $d(G)$ davr G gruppa tartibi $|G|$ ning bo'luvchisi bo'lib, G gruppa elementlari tartiblarining eng kichik umumiy karralisiga teng;

b) agar G abel gruppa bo'lsa, u holda $d(G)$ tartibli $g \in G$ element mavjud;

s) G chekli abel gruppa $d(G) = |G|$ bo'lganda va faqat shu holdagina siklik gruppa bo'ladi.

b) va *s*) tasdiqlar noabel gruppalar uchun ham o'rinlimi?

184. Qamma elementlari chekli tartibga ega bo'lgan cheksiz gruppa mavjudmi?

185. G gruppaning barcha chekli tartibli elementlari to'plami uning *davriy qismi* deyiladi.

a) abel gruppaning davriy qismi qismgruppa bo'lishini isbot qiling;

b) masalaning *a*) sharti noabel gruppa uchun to'g'rimi?

s) $\boldsymbol{C}^*$ gruppaning davriy qismini toping.

d) abel G gruppada tartibi cheksiz bo'lgan elementlar bor va ularning hammasi H qismgruppaga tegishli bo'lsa, H qismgruppa G gruppa bilan ustma-ust tushishini isbot qiling.

186. Abel gruppada tartiblari belgilangan n sonning bo'luvchilari bo'lgan elementlar to'plami qismgruppa bo'lishini isbot qiling. Bu tasdiq noabel gruppa uchun to'g'rimi?

187. G gruppaning berilgan $g \in G$ element bilan o'rin almashinuvchi hamma elementlar (*g* elementning sentralizatori) ni toping, agar:

a) $G = S_4, \qquad g = (12)(34);$

b) $G = SL(2, \boldsymbol{R}), \qquad g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};$

c) $G = S_n, \qquad g = (123..n)$ bo'lsa.

188. Ushbularni isbot qiling:

a) muntazam uchburchakning simmetriyalari gruppasi S_3 podstanovkalar gruppasiga izomorfdir;

b) ixtiyoriy ikki cheksiz siklik gruppalar izomorfdir;

c) berilgan tartibdagi ixtiyoriy ikki chekli siklik gruppalar izomorfdir.

189. Quyidagi additiv gruppalar izomorfligini isbot qiling:

a) Mos ravishda 2 va 3 sonlariga karrali sonlarning $2\boldsymbol{Z}$ va $3\boldsymbol{Z}$ gruppalar;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \boldsymbol{R} \right\}$ va $\boldsymbol{R}$;

s) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \boldsymbol{R}\right\}$ va $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x,y \in \boldsymbol{R}\right\}$.

190. Ushbu gruppalarning izomorfligini isbot qiling:

a) $\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \boldsymbol{R}\right\}, \cdot\right)$ va $(\boldsymbol{R},+)$;

b) $\left(\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \boldsymbol{R}, \quad x \neq 0\right\}, \cdot\right)$ va $(\boldsymbol{R}\setminus\{0\}, \cdot)$.

s) birning $n-$darajali ildizlari gruppasi $(U_n, \cdot)$ va

$$\left(\left\{\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \mid k = 0,1,\ldots,n-1\right\}, \cdot\right);$$

d) 14-*a*) misoldagi va 19 misoldagi gruppalar;

ye) $\left(\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a^2+b^2>0\right\}, \cdot\right)$ va

$\left(\left\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a^2+b^2>0\right\}, \cdot\right)$;

f) $\left(\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a^2+b^2>0\right\}, \cdot\right)$ va

$\left(\left\{a+bi\sqrt{3} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}, \quad a^2+b^2>0\right\}, \cdot\right)$;

g) $\left(\left\{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \boldsymbol{R}\right\}, \cdot\right)$ va $(\{z \in \boldsymbol{C} \setminus |z|=1\}, \cdot)$.

191*. Quyidagi gruppalar izomorf emasligini isbot qiling:

a) $(\boldsymbol{Q},+)$ va $(\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$;

b) $(\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ va $(\boldsymbol{Q}^{>0}, \cdot)$;

c) $(\boldsymbol{Q}^{>0}, \cdot)$ va $(\boldsymbol{R}^{>0}, \cdot)$;

d) $(\boldsymbol{R}^{>0}, \cdot)$ va $(\boldsymbol{R}\setminus\{0\}, \cdot)$;

e) $(\boldsymbol{R},+)$ va $(\boldsymbol{R}\setminus\{0\}, \cdot)$; *f*) $(\boldsymbol{R}^{+}, \cdot)$ va $(\boldsymbol{Q},+)$.

192. Quyidagi tartibli hamma gruppalar (izomorfizm aniqligigacha) ni toping: *a*) uch; *b*) to'rt; *c*) olti.

193. $(G_1, \cdot)$ va $(G_2, \cdot)$ gruppalarning $f-$izomorfizmi berilgan bo'lsin. Quyidagilarni isbot qiling:

a) $f(1)=1$;

b) $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$;

c) g va $f(g)$ elementlarning tartiblari bir xil bo'ladi.

194. (*Keli teoremasi*) n-tartibli ixtiyoriy chekli gruppa S_n ning biror qismgruppasiga izomorfdir. Shuni isbot qiling.

195. Quyidagilarni isbot qilang:

a) ixtiyoriy gruppaning hamma avtomorfizmlari to’plami kompozitsiyaga nisbatan gruppadir;

b) ushbu $s: x \to axa^{-1}$ (bu yerda $a-$element G ning belgilangan elementi) akslantirish G ning avtomorfizmidir. (Bu *ichki avtomorfizm* deyiladi).

s) ixtiyoriy gruppaning barcha ichki avtomorfizmlari to’plami kompozitsiyaga nisbatan gruppadir.

196. Quyidagi gruppalarning avtomorfizm gruppalarini toping:

a) butun sonlarning additiv gruppasi;

b) α) 4; β) 5; γ) 6; δ) 10 tartibli $<a>$ siklik gruppalar.

197. $G-$rasional sonlarning additiv gruppasi va $0 \neq r \in \boldsymbol{Q}$ bo’lsin. Quyidagilarni isbot qiling:

a) $\varphi: G \to G, \quad \varphi(a) = ra -$akslantirish avtomorfizmdir;

b) G ning boshqa avtomorfizmlari mavjud emas.

10-§. Qo’shni sinflar. Normal bo’luvchilar. Faktor-gruppa. Gruppalar gomomorfizmi

Multiplikativ $G-$ gruppa, $H-$ uning qismgruppasi va $g \in G$ bo’lsin. $gH = \{gh \mid h \in H\}$ to’plam G gruppaning H qismgruppa bo’yicha chap qo’shni sinfi, $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ to’plam G gruppaning H qismgruppa bo’yicha *o’ng qo’shni* sinfi deyiladi.

1-m i s o l. Simmetrik S_3 gruppada $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ va $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ elementlardan iborat A qismgruppani olib qaraymiz va $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ elementni olamiz. U holda gA chap qo’shni sinf $ge = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $ga = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ elementlardan, $Ag-$o’ng qo’shni sinf esa $eg = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $ag = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ elementlardan iborat bo’ladi. ■

Chap qo’shni sinflarning quyidagi xossalarini ko’rsatib o’tamiz:

1) $b \in aH \Leftrightarrow bH = aH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$;

2) $aH = bH$ yoki $aH \cap bH = \varnothing$; 3) $a \in aH$.

Xuddi shunday xossalar o’ng qo’shni sinflar uchun ham o’rinli.

Berilgan G gruppaning H qismgruppa bo’yicha hamma har xil chap qo’shni sinflari soni uning shu podgruppa bo’yicha hamma har xil o’ng qo’shni sinflari soni bilan bir xil bo’ladi. (Gruppa cheksiz bo’lganda buning ma’nosi shuki, G gruppaning H qismgruppa bo’yicha hamma chap qo’shni sinflari to’plamining quvvati, o’ng qo’shni sinflar to’plamining quvati bilan bir xil bo’ladi). Bu son (cheksiz to’plam uchun -- quvvat) H qismgruppaning G dagi *indeksi* deyiladi.

Agar G gruppa chekli bo'lsa, u holda uning tartibi uning ixtiyoriy H qismgruppasi tartibi bilan shu qismgruppaning G dagi indeksi ko'paytmasiga teng bo'ladi (*Lagranj teoremasi*). Bundan chekli gruppaning ixtiyoriy qismgruppasining tartibi shu gruppa tartibining bo'luvchisi bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek, ixtiyoriy chekli gruppa ixtiyoriy elementning tartibi ham shu gruppa tartibining bo'luvchisi bo'ladi. Aksincha, agar chekli G tartibi *r* tub songa bo'linsa, G gruppa *r* tartibli elementlarga ega bo'ladi (*Koshi teoremasi*).

G gruppa elementlarini H qismgruppa bo'yicha bitta chap qo'shni sinfga tegishlilarini bir to'plamga birlashtirib o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish G gruppaning H qismgruppa bo'yicha *chap tomonli yoyilmasi* deyiladi. Agar chap qo'shni sinflar o'rniga qismgruppa bo'yicha o'ng qo'shni sinflar olinsa, G gruppaning H qismgruppa bo'yicha o'ng tomonli yoyilmasi hosil qilinadi.

2-m i s o l. Elementlari

$$\alpha_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bo'lgan S_3 gruppada $e=\alpha_1$, α_6 dan iborat H qismgruppani olamiz. U holda S_3 ning H bo'yicha chap tomonli yoyilmasi quyidagi sinflarga ajraladi:

1) $e,\ \alpha_6$ – qo'shni sinf $eH = H$;

2) α_2, α_5 – qo'shni sinf $\alpha_2 H$;

3) α_3, α_4 – qo'shni sinf $\alpha_3 H$,

o'ng tomonli yoyilmada esa:

1) $e,\ \alpha_6$ – qo'shni sinf $He = H$;

2) α_2, α_4 – qo'shni sinf $H\alpha_2$;

3) α_3, α_5 – qo'shni sinf $H\alpha_3$.

H qismgruppaning S_3 gruppadagi indeksi 3 ga teng. ■

Agar G gruppaning H qismgruppa bo'yicha o'ng tomonli va chap tomonli yoyilmalari sinflari bir xil bo'lsa, H qismgruppa G gruppaning *normal bo'luvchisi* (*normal qismgruppasi, invariant qismgruppasi*) deyiladi.

3-m i s o l. Agar H qismgruppaning G gruppadagi indeksi 2 ga teng bo'lsa, N – qismgruppa G ning normal bo'luvchisi bo'lishini isbot qiling.

Yechish. G gruppaning H qism bo'yicha o'ng tomonli va chap tomonli sinflar yoyilmalarida qo'shni sinflardan biri H ning o'zi bo'ladi, ikkinchi qo'shni sinf esa G gruppaning H da mavjud bo'lmagan hamma elementlardan iborat bo'ladi. ■

4-m i s o l. Ishora almashinuvchi A_n gruppa S_n simmetrik gruppaning normal bo'luvchisi bo'lishini isbot qiling.

Yechish. A_n ning S_n dagi indeksi 2 ga teng bo'lgani uchun 3-misolga asosan A_n – ning S_n ning normal bo'luvchisi ekanligini hosil qilamiz. ■

H qismgruppa G gruppaning ixtiyoriy g elementi uchun $gH = Hg$ bo'lganda va faqat shu holdagina G ning normal bo'luvchisi bo'ladi. $gH = Hg$ tenglik H ning ixtiyoriy h elementi uchun H da $gh = h'g, \quad hg = gh''$ tengliklarni qanoatlantiradigan h' va h'' elementlar topish mumkinligini bildiradi.

5-m i s o l. Agar $G -$ abel gruppa bo'lsa, u holda uning har qanday H qismgruppasi normal bo'luvchi bo'ladi.

*Yechish.*Buning uchun $h' = h'' = h$ deb olish kifoya. ■

Agar G gruppada $g_2 = g^{-1}g_1g$ bo'ladigan g element mavjud bo'lsa, G gruppaning g_1 va g_2 elementlari shu gruppada *qo'shma elementlar* deyiladi. Bu holda g_2 element g_1 dan g ni transformirlashtirish bilan hosil qilingan deydilar.

Agar *H* – *G* ning qisgruppasi va g – element *G* ning belgilangan elementi bo'lsa, $h^{-1}h, h$ ko'rinishdagi hamma elementlar to'plami yana *G* ning qismgruppasi bo'ladi, bu yerda h qiymat sifatida *H* ning hamma elementlarini qabul qiladi. Bu qismgruppa *G* da H bilan *qo'shmalangan* qismgruppa deyiladi.

G ning *H* qismgruppasi har bir h element bilan birga *G* da h bilan qo'shmalangan har bir elementni ham o'z ichiga olganda va faqat shu holdagina *G* ning normal bo'luvchisi bo'ladi.

G gruppaning normal bo'luvchilari va faqat shulargina ular bilan qo'shmalangan hamma qismgruppalar bilan mos (ustma-ust) tushadi.

6-m i s o l. $SL(n, \boldsymbol{R})$ gruppa $GL(n, \boldsymbol{R})$ ning normal bo'luvchisi bo'lishini isbot qiling.

Yechish. $A \in SL(n, \boldsymbol{R}), \quad B \in GL(n, \boldsymbol{R})$ bo'lsin. U holda

$$\det(B^{-1}AB) = \det B^{-1} \det A \det B = \det A = 1.$$

Shuning uchun ham $B^{-1}AB \in SL(n, \boldsymbol{R})$. Shuni isbot qilish kerak edi. ■

Agar *G* gruppaning *H* normal bo'luvchilari bo'yicha hamma qo'shni sinflar to'plamida $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ qoida bo'yicha amal kiritsak (additiv yozuvda esa $(g_1 + H) + (g_2 + H) = (g_1 + g_2) + H$). Bu amal binar algebraik amal bo'ladi. Shu amalga nisbatan *G* gruppaning *N* normal bo'luvchisi bo'yicha hamma qo'shni sinflari to'plamining o'zi ham gruppa bo'ladi. Bu gruppa *G* gruppaning *N* normal bo'luvchisi bo'yicha faktor-gruppasi deyiladi va *G/H* shaklda belgilanadi. *G/H* faktor-gruppaning birlik elementi *N* qo'shni sinf faktor-gruppaning gH elementiga teskari element g^{-1} *N* va *G/H* faktor-gruppaning tartibi *N* ning *G* dagi indeksiga teng bo'ladi.

7-m i s o l. 5 ga bo'linadigan sonlarning additiv *G* gruppasining 15 ga bo'linadigan sonlar to'plamidan iborat *N* ismgruppa bo'yicha faktor-gruppasini toping.

Yechish. G – abel gruppa bo'lgani uchun *H* uning normal bo'luvchisi bo'ladi. *G* gruppaning *H* bo'yicha qo'shni sinflarga yoyilmasini topamiz. *G* ning a va b elementlari bitta qo'shni sinfga tegishli bo'lishlari uchun a- b son *N* ga tegishli bo'lishi *zarur* va *yetarli*. Boshqacha qilib aytganda a va *b* 15 ga bo'linganda bir xil qoldiq berishlari kerak. Ammo 5 ga bo'linadigan sonlar 15 ga bo'lishganda faqat 0, 5, 10 qoldiqlar hosil bo'lishi mumkin. Shunday qilib, *G* gruppa uchta qo'shni sinflar hosil bo'ladi: 15 ga bo'linadigan sonlardan iborat K_0, 15 ga bo'lganda 5 qoldiq hosil bo'ladigan sonlardan iborat K_1 va 15 ga bo'lganda 10 qoldiq hosil bo'ladigan sonlardan iborat K_2.

Bundan *G/H* ning tartibi uch ekanligi kelib chiqadi. uning tuzilishini aniqlash uchun $2K_1 = K_1 + K_2$ sinfni topamiz. Ammo $K_1 = 5 + H$. Shuning uchun $2K_1 = (5+5) + H = 10 + H = K_2$. Shuningdek, $3K_1 = K_0$. Shunday qilib K_1 - to'plam *G/H* faktor-gruppaning yasovchisidir. *G/H* gruppa uchinchi tartibi siklik gruppadir. ■

8-m i s o l. Noldan farqli hamma kompleks sonlarning *G* multiplikativ gruppasining modullari birga teng barcha kopleks sonlardan iborat *N* qismgruppasi bo'yicha faktor-gruppasini toping.

Yechish. *N* - qismgruppa *G* ning normal bo'luvchisi ekanligini ravshan. *G* ning *N* bo'yicha qo'shni sinflarini topamiz. *G* dagi har bir z ni $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ trigonometrik ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $r > 0, r \in \boldsymbol{R}$. *N* qismgruppa moduli 1 ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlardan iborat bo'lgani uchun bitta zH qo'shni sinfga tegishlikompleks sonlarning hammasi z ning moduliga teng, ya'ni r moduliga ega bo'ladi. Haqiqatdan, agar u son zH ga tegishli bo'lsa, u holda $u = z\alpha$ bo'ladi, bunda $\alpha \in H$. Shuning uchun $|u| = |z||\alpha| = r$.

Aksincha moduli z ning moduliga teng bo'lgan har qanday u_1 kompleks son zH qo'shni sinfga tegishli bo'ladi, chunki $\left|\frac{u}{z}\right| = 1$ shuning uchun $\frac{u}{z} = \alpha$, bunda $\alpha \in$ *N*, ya'ni $u = z\alpha$. Boshqacha qilib aytganda u son zH ning elementi. Bundan G/H faktor-gruppa rH qo'shni sinflardan iborat ekanligini hosil qilamiz, bu yerda r - ixtiyoriy haqiqiy son. Shuning bilan birga har xil musbat r_1 va r_2 haqiqiy sonlar uchun har xil r_1H va r_2N qo'shni sinflar hosil bo'ladi.

Shunday qilib, o'zaro bir qiymatli $r \leftrightarrow rH$ moslikka ega bo'lamiz. Musbat haqiqiy sonlarning $\boldsymbol{R}^{>0}$ to'plami ko'paytirishga nisbatan gruppa tashkil etadi. Bu gruppa G ning qismgruppasidir. $\boldsymbol{R}^{>0}$ gruppa G/H faktor-gruppaga izomorfligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, agar r_1 va r_2 - ikkita $\boldsymbol{R}^{>0}$ dan olingan qandaydir sonlar bo'lsa, u holda, yuqorida aytib o'tganimizdek $r_1 \leftrightarrow r_2H$, $r_2 \leftrightarrow r_2H$ va $r_1r_2 \leftrightarrow r_1r_2H$. Ammo (r_1H)(r_2N)= r_1 r_2N. Demak $r_1r_2 \leftrightarrow (r_1H)(r_2H)$. Shunday qilib, $G/H \cong \boldsymbol{R}^{>0}$.
■

G_1, G_2 $-$lar mos ravishda $*$ va $\circ$ binar algebraik amallarga nisbatan gruppalar bo'lsin. Agar $f(a*b) = f(a) \circ f(b) \quad \forall a, b \in G_1$ bo'lsa, $f : G_1 \to G_2$ akslantirish G_1 gruppaning G_2 ga *gomomorfizmi* deyiladi.

$\{a \in G_1 \mid f(a) = e_{G_2}\}$ to'plam, bu yerda e_{G_2} - element G_2 ning neytral elementi, f gomomorfizmning yadrosi bo'ladi va aksincha, G gruppaning har qanday gomomorfizmining yadrosi G ning normal bo'luvchisi bo'ladi.

Agar har bir $g \in G$ elementga G gruppaning biror *N* normal bo'luvchisi bo'yicha gH qo'shni sinf mos qilib qo'yilsa, G gruppaning G/H faktor-gruppaga gomomorf akslantirish hosil bo'ladi. Bu G ning G/H ga tabiiy gomomorfizmi deyiladi. uning yadrosi N normal bo'luvchining o'zi bo'ladi. Tabiiy gomomorfizmda G gruppaning G/H gruppaning bitta belgilangan elementiga o'tadigan barcha elementlari to'plami G gruppaning N normal bo'luvchi bo'yicha qo'shni sinfi bo'ladi.

Agar $f: G_1 \to G_2$ - gruppa gomomorfizmi bo'lsa, u holda $f(G_1) \cong G_1 / Ker\ f$ (*gruppalar gomomorfizmi teoremasi*).

9-m i s o l. Multiplikativ $H = \{1, -1\} -$ gruppa va butun sonlarning $\boldsymbol{Z}$ - additiv gruppasi berilgan bo'lsin. Agar har bir juft songa 1 ni, har bir toq songa (-1) ni mos qilib qo'ysak, $(\boldsymbol{Z}, +)$ additiv gruppaning $(H = \{1, -1\}, \cdot)$ multiplikativ gruppaga gomomorfizmini hosil qilamiz. ■

10-m i s o l. agar elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan n-tartibli har bir maxsusmas matritsaga uning determinantini mos qilib qo'ysak, multiplikativ $GL(n, \boldsymbol{R})$ gruppaning $(\boldsymbol{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ multiplikativ gruppaga gomomorfizmini hosil qilamiz. ■

11-m i s o l. $f(z) = z^2$ qoida bilan berilgan $f: G^* \to \boldsymbol{R}^*$ akslantirish (bu yerda $G^* = G \setminus \{0\}, \boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$) gomomorfizm bo'lishini aniqlang.

*Yechish.*Gomomorfizm shartini tekshiramiz. $z_1, z_2 \in G^*$ bo'lsin, u holda $f(z_1, z_2) = (z_1, z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 = f(z_1) f(z_2) \quad \forall \quad z_1, z_2 \in G^*$, ya'ni $f -$gomomorfizmdir. ■

12-m i s o l. Oltinchi tartibli H_1 siklik gruppaning o'n sakkizinchi tartibli H_2 siklik gruppaga hamma gomomorfizmlarni toping.

Yechish. h_1 va h_2 - mos ravishda H_1 va H_2 gruppalarning yasovchilari va $\varphi: H_1 \to H_2 -$biror gomomorfizm bo'lsin.

U holda $h_1^6 = e$ bo'lgani uchun $\varphi(h_1^6) = (\varphi(h_1)^6 = e'$, va gomomorfizmda birlik element birlik elementga (bu yerda $e' - H_2$ning birliik elementi) o'tishi hisobga olinsa, H_2 gruppada faqat beshta: $e', h_2^3, h_2^6, h_2^9, h_2^{12}, h_2^{15}$ element bunday xususiyatga ega bo'lib H_2 gruppada boshqa hyech qanday elementning oltinchi darajasi birga aylanmasligini ko'ramiz. Shunday qilib ko'rilayotgan misolda gomomorfizmlar oltita. Bular:
$\varphi_1(h_1) = e', \varphi_2(h_1) = h_2^3, \varphi_3(h_1) = h_2^6, \varphi_4(h_1) = h_2^9, \quad \varphi(h_1) = h_2^{12}, \varphi(h_1) = h_2^{15}.$ Bulardan birinchisida gruppa to'laligicha birlik elementga o'tadi. $\varphi_2 -$ ning gomomorfizm ekanligini tekshiraylik. H_1 dan olingan g_1^k va g_1^ℓ $(0 \le k, \ell < 6)$ elementlarni olib qaraylik.

$$\varphi_2(g_1^k g_1^\ell) = \varphi_2(g_1^{k+\ell}) = g_2^{3(k+\ell)} = g_2^{3k} g_2^{3\ell} = \varphi_2(g_1^k)\, \varphi_2(g_1^\ell),$$

ya'ni $\varphi_2 -$ gomo-morfizm. $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 -$ larning gomomorfizmligi ham xuddi shundaay tartibda ko'rsatiladi. ■

Faktor-gruppalarni hisoblashda gomomorfizmlar haqidagi teorema katta foyda berishi mumkinligini ta'kidlab o'tamiz. Agar G gruppa berilgan bo'lib N uning normal bo'luvchichi bo'lsa, G/H faktor-gruppani topish uchun G ning biror shunday

G' gruppaga gomomorfizmini tuzish kerakki, uning yadrosi N ga teng bo'lsin. U holda gomomorfizmlar haqidagi teoremaga ko'ra G/H faktor-gruppa G ga izomorf bo'ladi.

13-m i s o l. $GL(n,\boldsymbol{R})$ gruppaning $SL(n,\boldsymbol{R})$ normal qismgruppa bo'yicha faktor-gruppasini toping.

Yechish. 10-misoldagi ushbu $f: GL(n,\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^*$ gomomorfizmni olib qaraymiz. Agar har bir qo'shni sinfga shu qo'shni sinfga kiruvchi hamma matritsalarning determinantiga teng sonni mos qilib qo'yilsa, u holda bu gomomorfizmning yadrosi $SL(n,\boldsymbol{R})$ bo'ladi. Bundan $GL(n,\boldsymbol{R})/SL(n,\boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^*$. ■

14-m i s o l. 8-misolni gomomorfizmlar haqidagi teoremaga asoslanib yechamiz.

Yechish. Har bir z kompleks songa uning $|z|$ modulini mos qilib qo'yamiz. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ tenglikdan $z \to |z|$ moslik G gruppaning $\boldsymbol{R}^{>0}$ gruppaga gomomorfizmi ekanligi kelib chiqadi. Uning yadrosi bo'yicha 1 ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlarning H qismgruppasining xuddi o'zi bo'ladi. Demak, $G/H \cong \boldsymbol{R}^{>0}$. ■

15-m i s o l. Moduli 1 ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlarning G multiplikativ gruppasining 1 va –1 sonlardan iborat N qismgruppa bo'yicha faktor-gruppasini toping.

Yechish. Ushbu $z \to z^2$ moslikni qarab chiqamiz. $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2$ bo'lgai uchun bu akslantirish G gruppaning o'zida gomomorfizmi bo'ladi. Aslida esa, bu G gruppaning o'ziga gomomrfizm bo'ladi, chunki har bir kompleks son boshqa biror sonning kvadrati shaklida ifodalanadi. Bu gomomorfizmning yadrosi faqat va faqat shunday α sonlardan iborat bo'ladiki, $\alpha^2 = 1$. Ko'rinib turadiki, bular 1 va –1 sonlar bo'ladi, ya'ni yadro N bilan ustma-ust tushadi. Demak, gomomorfizmlar haqidagi teoremaga asosan $G/H \cong \boldsymbol{G}^{>0}$. ■

16-m i s o l. Oldingi misolda G gruppaning 1 ga teng bo'lmagan N normal bo'luvchisi bo'yicha faktor-gruppasi G gruppaning o'ziga izomorf bo'lishi ko'rindi. Bu hol G chekli gruppa bo'lganda ham sodir bo'lishi mumkinmi?

Yechish. Bo'lishi mumkin emas, chunki Lagrnj teoremasiga asosan bu holda G/H faktor-gruppaning tartibi G ning tartibining N ning tartibiga bo'linmasi, ya'ni G gruppaning tartibidan kichik bo'ladi. ■

M A S H Q L A R

198. S_3 gruppada

a) har bir qismgruppa bo'yicha o'ng qo'shni sinflarni toping;

b) qismgruppalarning qaysilari normal bo'luvchilar bo'lishini ko'rsating.

199. $\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots n \\ 1 & i_2\ldots i_n \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi podstanovkalarning N to'plami S_n gruppada qismgruppa tashkil etishini ko'rsating. S_n ning H bo'yicha qo'shni sinflari sonini toping.

200. Tekislikning belgilangan *O* nuqtasidan chiquvchi vektorlarning additiv gruppasining shu *O* nuqtadan o'tuvchi belgilangan to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar qismgruppasi bo'yicha qo'shni sinflarini toping. Qo'shni sinflarni tekislikda tasvirlang.

201*. Faqat birlik elementdangina iborat bo'lmagan *G* gruppa uning tartibi tub son bo'lganda va faqat shu holdagina xos qismgruppalarga ega bo'lmasligini isbot qiling.

202*. Tartibi p ($p-$ tub son) bo'lgan ixtiyoriy gruppa siklik gruppa bo'lishini isbot qiling.

203*. *G* – birning barcha *n*-darajali ildizlarining multiplikativ gruppasi, ya'ni har qanday butun *n>0* uchun birning barcha *n*-darajali ildizlarini o'z ichiga olsin. Har qanday butun musbat *m* uchun *G* gruppa o'z ichiga bitta va faqat bitta *m*-tartibli qismgruppani olishini va bu qismgruppa siklik gruppa bo'lishini isbotlang.

204*. Ixtiyoriy butun musbat *n* uchun birning *n*-darajali ildizlari gruppasi $(\boldsymbol{C}^*,\cdot)$ da yagona *n*-tartibli qismgruppa bo'lishini isbotlang.

205. Quyidagi gruppalar uchun qo'shni sinflar toping va $d)-g)$ hollarda ular dekart tekisligida qanday figuralar bilan tasvirlanishini ko'rsating:

a) butun sonlarning additiv gruppasining berilgan n songa karrali bo'lgan sonlarning $n\boldsymbol{Z}$ qismgruppasi bo'yicha;

b) haqiqiy sonlarning additiv gruppasining butun sonlardan iborat qismgruppasi bo'yicha;

c) kompleks sonlar additiv gruppasining gausiy butun sonlar, ya'ni butun *a* va *b* uchun $a+bi$ ko'rinishdagi sonlar qismgruppasi bo'yicha;

d) tekislikning koordinatalar boshidan chiqadigan vektorlari additiv gruppasining Ox o'qda yotuvchi vektorlar qismgruppasi bo'yicha;

e) multiplikativ $\boldsymbol{C}^*$ gruppaning moduli bo'yicha birga teng bo'lgan sonlar qismgruppasi bo'yicha;

f) multiplikativ $\boldsymbol{C}^*$ gruppaning musbat butun sonlar qisgruppasi bo'yicha;

g) multiplikativ $\boldsymbol{C}^*$ gruppaning noldan farqli haqiqiy sonlar $\boldsymbol{R}^*$ qismgruppasi bo'yicha;

h) simmetrik S_n gruppaning n sonni o'z o'rnida qoldiruvchi podstanovkalar qismgruppasi bo'yicha;

i) simmetrik S_n gruppaning juft podstanovkalar qismgruppasi A_n bo'yicha;

j) o'n ikkinchi tartibli $<a>$ siklik gruppaning $<a^3>$ qismgruppa bo'yicha;

k) cheksiz tartibli $<a>$ siklik gruppaning $<a^3>$ qismgruppa bo'yicha;

l) sakkizinchi tartibli $<a>$ siklik gruppaning $<a^3>$ qisgruppa bo'yicha;

m) cheksiz tartibli $<a>$ siklik gruppaning $<a^4>$ qismgruppa bo'yicha;

n) to’liq chiziqli $GL(n,\boldsymbol{R})$ gruppaning maxsus chiziqli $SL(n,\boldsymbol{R})$ gruppa bo’yicha. ■

206. Ixtiyoriy G gruppaning birlik qisgruppa bo’yicha va shu gruppaning o’zi bo’yicha chap (o’ng) yoyilmasi nimadan iborat? Ularning har biri G ning normal bo’luvchisi bo’laoladimi?

207. S_3 gruppada birlik qismgruppadan va shu gruppaning o’zidan farqli barcha normal qismgruppalarni toping.

208. A_n gruppa misolida G gruppaning N normal qismgruppaning K normal qismgruppasi G da albatta normal qismgruppa bo’lishi shart emas ekanligini ko’rsating.

209. a) determinanti ± 1 ga teng bo’lgan matritsalar qismgruppasi to’liq chiziqli $GL(n,\boldsymbol{R})$ gruppaning normal qismgruppasi bo’lishini isbot qiling;

b) determinanti musbat bo’lgan matritsalar qism to’plami to’liq chiziqli $GL(n,\boldsymbol{R})$ gruppaning normal qismgruppasi bo’lishini isbot qiling.

210. Gruppaning normal bo’luvchilari kesishmasi normal bo’luvchi bo’lishini isbot qiling.

211. Agar G gruppaning H qismgruppa bo’yicha ixtiyoriy ikki chap qo’shni sinflari ko’paytmasi chap qo’shni sinf bo’lsa H - qismgruppa normal bo’luvchi bo’lishini isbot qiling.

212. Gruppaning markazi uning normal bo’luvchisi bo’lishini isbot qiling.

213. Bu uch $A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ matritsaning qaysilari $GL(2,\boldsymbol{C})$ da o’zaro qo’shma?

214. Gruppa elementining sentralizatorini (shu element bilan o’rin almashtiriluvchi elementlar to’plamini) toping:

a) S_4 gruppada $(1\quad 2)(3\quad 4)$ o’rin almashtirishning;

b) S_4 gruppada $(1\quad 2\quad 3\quad \dots\quad n)$ o’rin almashtirishning.

215. $GL(2,\boldsymbol{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping:

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\ b)\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\ c)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ d)\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

216. a) S_3; b) A_4 gruppalarning qo’shma elementlar sinflariga tarqatmalarini toping.

217. Qo’shma sinflari soni a) 1; b) 2 ga teng bo’lgan hamma chekli gruppalarni toping.

218. S_4 gruppada

a) $(1\quad 2)(3\quad 4)$ o’rin almashtirishning;

b) $(1\quad 2\quad 4)$ o’rin almashtirishning qo’shma sinflarini toping.

219*. S_n gruppada ikki o’rinalmashtirish ular bir xil siklik tuzilishga ega (ya’ni ularning mustaqil sikllarga yoyilmasi ixtiyoriy k uchun bir xil miqdordagi k

uzunlikdagi sikllardan iborat) bo'lganda va faqat shu holdagina o'zaro qo'shma bo'lishini isbot qiling.

220*. *a*) S_4; *b*) S_5; *s*) S_6 gruppalarda qo'shma sinflari sonini toping.

221. *a*) agar *N* va *K* chekli gruppaning qo'shma qismgruppalari va $K \subseteq H$ bo'lsa, $K = H$ bo'lishini;

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \boldsymbol{Z} \right\}$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \boldsymbol{Z} \right\}$ qismgruppalar gruppada qo'shma va $K \subset H$ bo'lishini isbot qiling.

222. Agar *a*) *H* qismgruppa $G = GL(2, \boldsymbol{R})$da dioganal matritsalar qismgruppasi bo'lsa;

b) H qismgruppa $G = GL(2, \boldsymbol{R})$da $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \boldsymbol{R}$ ko'rinishdagi matritsalar qismgruppasi bo'lsa, *H* qismgruppaning *N(H)* normalizatori (*H* normal bo'ladigan eng katta qismgruppa) ni toping.

223*. $H-$ qimsgruppaning *G* dagi indeksi 2 ga teng, *G* gruppadagi qo'shma elementlar sinfi *S* bo'lib, $C \subset H$ bo'lsa, *S* yo *H* da qo'shma bo'lgan elementlar sinfi yoki bir xil miqdordagi elementlardan iborat *H* da qo'shma elementlarning ikki sinfining birlashmasidan iborat bo'lishini isbot qiling.

224*. A_5 gruppada qo'shma sinflari sonini va sinflarning har birida elementlar sonini aniqlang.

225. *a*) butun sonlar additiv gruppasining berilgan *p* natural songa karrali bo'lgan sonlar qismgruppasi bo'yicha;

b) to'rtga karrali butun sonlar additiv gruppasining 24 ga karrali butun sonlar qismgruppasi bo'yicha;

c) noldan farqli haqiqiy sonlar $\boldsymbol{R}^*$ multiplikativ gruppasining musbat sonlar $\boldsymbol{R}^{>0}$ qismgruppasi bo'yicha, faktor-gruppalarini toping.

226. $\varphi \mapsto \cos\varphi + i\sin\varphi$ akslantirish haqiqiy sonlar additiv gruppasining moduli bo'yicha birga teng bo'lgan kompleks sonlar multiplikativ gruppasiga gomomorfizmi ekanligini ko'rsating. Shu gomomorfizm yadrosini toping.

227. Haqiqiy koeffisiyentli hamma ko'phadlarning *G* additiv gruppasi berilgan bo'lsin. Har bir $f(x) \in G$ ko'phadga $(f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n))$ satrni mos qilib qo'yamiz, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n -$ juft-jufti bilan har xil bo'lgan berilgan sonlar. Bu akslantirish $\boldsymbol{R}^n$ additiv gruppaga gomomorfizm ekanligini isbot qiling va uning yadrosini toping.

228*. Multiplikativ abel gruppa *G*, *k* – belgilangan butun son, $H = \{a^k \mid a \in G\}$ bo'lsin.

a) $H-$ to'plam *G* ning qismgruppasi ekanligini;

b) $\varphi : G \to H, \varphi(a) = a^k -$ akslantirish G ning H ga gomomorfizmi ekanligini, isbot qiling. Bu gomomorfizm yadrosini toping.

229. Agar f - G_1 gruppaning G_2 gruppada gomomorfizmi bo'lsa, quyidagi tasdiqlarni isbot qiling:

a) $f(1)=1$; b) $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$;

c) agar $H-$ G ning qismgruppasi bo'lsa, $f(H)-$ G_2 ning qismgruppasi bo'ladi;

d) agar $H-G_1$ ning normal bo'luvchisi bo'lsa, $f(H)-$ $\operatorname{Im} f$ ning normal bo'luvchisi bo'ladi;

*e**) hamma vaqt ham $H-G_1$ ning normal bo'luvchisi bo'lganda $f(H)-$ G_2 ning bo'luvchisi bo'lavermaydi;

f) $Ker\ f\ -\ G_1$ ning normal bo'luvchisi bo'ladi;

g) $Ker\ f=\{1\}$ bo'lganda va faqat shu holdagina $f-$ akslantirish *monomorfizm* (inyektiv gomomorfizm) bo'ladi;

i) agar $H'-$ G_2 ning qismgruppasi bo'lsa, $f^{-1}(H')-$ to'plam G_1 ning qismgruppasi bo'ladi;

j) agar $H'-$ to'plam G_2 ning normal bo'luvchisi bo'lsa, $f^{-1}(H')-$ to'plam G_1 ning normal bo'luvchisi bo'ladi.

230. G_2 ham siklik gruppa bo'lib, uning tartibi G_1 tartibining bo'luvchisi bo'lganda va faqat shu holdagina G_2 gruppa chekli G_1 siklik gruppaning gomomorf obrazi bo'lishini isbot qiling.

231. G_1 - chekli gruppa, $f-$ akslantirish G_1 ning G_2 gruppada *epimorfizm* (syuryektiv gomomorfizm) bo'lsa, quyidagilarni isbot qiling;

a) elementning tartibi $f(a)$ ning tartibiga bo'linadi;

b) G_1 ning tartibi G_2 ning tartibiga bo'linadi.

232. Quyidagilar uchun hamma gomomorfizmlarni toping:

a) *p*-tartibli $<a>$ siklik gruppaning o'ziga gomomorfizmlarini;

b) 18-tartibli $<a>$ siklik gruppaning 6-tartibli $<b>$ gruppada;

c) 12-tartibli $< a >$siklik gruppaning 15-tartibli $<b>$ siklik gruppada;

d) 6-tartibli $<a>$ siklik gruppaning 25-tartibli siklik gruppada.

233*. Rasional sonlarning additiv gruppasini butun sonlarning additiv gruppasiga gomomorf akslantirish mumkin emasligini isbotlang.

234*. H_n- argumenti $\dfrac{2\pi k}{n}(k\in \boldsymbol{Z})$ bo'lgan sonlar to'plami bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\cong \boldsymbol{U}$ (*U* - moduli bir bo'lgan kompleks sonlar gruppasi*)*;

b) $\boldsymbol{C}^*/\boldsymbol{R}^*\cong U$;

c) $U/U_n\cong U$ (U_n-1 ning n -darajali ildizlari gruppasi);

d) $\boldsymbol{C}^*/U_n\cong \boldsymbol{C}^*$;

e) $\boldsymbol{C}^*/H_n\cong U$;

f) $H_n/\boldsymbol{R}^{>0}\cong U_n$;

g) $H_n/U_n\cong \boldsymbol{R}^{>0}$.

235. $A=\{X\in GL(n,\boldsymbol{R})\,|\,|\det X|=1\}$;

$B=\{X\in GL(n,\boldsymbol{C})\,|\,|\det X|=1\}$;

$M = \{X \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \det X > 0\}$;

$N = \{X \in GL(n, \boldsymbol{C}) / \det X > 0\}$ bo'lsin. Quyidagilarni isbotlang:

a) $GL(n, \boldsymbol{C}) / SL(n, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C}^*$;

b) $GL(n, \boldsymbol{R}) / M \cong \boldsymbol{Z} / 2\boldsymbol{Z}$;

c) $GL(n, \boldsymbol{C}) / N \cong U$;

d) $GL(n, \boldsymbol{R}) / A \cong \boldsymbol{R}^{>0}$;

e) $GL(n, \boldsymbol{C}) / B \cong \boldsymbol{R}^{>0}$.

236. $G-$ uch o'lchovli fazoning hamma harakatlari gruppasi, N –parallel ko'chirishlardan iborat qismgruppa va K – berilgan nuqta atrofida burishlar qismgruppasi bo'lsin.

a) N G ning normal bo'luvchisi, ammo K – normal bo'luvchi emasligini;

b) $G / H \cong K$ bo'lishini, isbot qiling.

237*. ***Q/Z*** gruppada

a) har bir element chekli tartibga ega ekanligini;

b) har bir n natural son uchun roppa-rosa bitta n-tartibli qismgruppa mavjudligini, isbot qiling.

238*. G gruppaning ichki avtomorfizmlari gruppasi G gruppaning uning markazi bo'yicha faktor-gruppasiga izomorfligini isbot qiling.

239. Noabel gruppaning uning markazi bo'yicha faktor-gruppasi siklik gruppa bo'la olmasligini isbotlang.

11-§. Halqa. Jism. Maydon

Bo'sh bo'lmagan $K \neq \varnothing$ to'plamda ikkita binar algebraik amal aniqlangan bo'lsin. Ulardan birini *qo'shuv* deb ataymiz va additiv tarzda belgilaymiz, ikkinchisini esa *ko'paytiruv* deb atab multiplikativ tarzda belgilaymiz. Bu amallar aslida qo'shish va ko'paytirish deb ataladigan oddiy arifmetik amallar bilan bir mazmunli bo'lishi shart emas. Agar:

a) $(K,+)-$ abel gruppa; *b*) $(K,\cdot)-$ gruppoid;

s) qo'shish va ko'paytirish ikkita:

$\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x(y+z) = xy + xz, \\ (y+z)x = yx + zx. \end{cases}$ distributivlik qonunlari bilan bog'langan shartlar qanoatlantirilsa, $(K,+,\cdot)$ algebraik sistema *halqa* deyiladi.

Agar ko'paytirish amali assosiativ, ya'ni $(K,\cdot)-$ polugruppa bo'lsa, $(K,+,\cdot)$ *assosiativ* halqa deyiladi.

Ko'paytirish amali kommutativ bo'lganda esa $(K,+,\cdot)$ halqa *kommutativ* halqa deyiladi. Bu holda ikki distributivlik qonunlaridan bittasini tekshirish yetarli, chunki boshqasi undan kelib chiqadi.

Ko'paytirishga nisbatan neytral 1 element mavjud bo'lganda $(K,+,\cdot)$ halqa *birlik elementli halqa* deyiladi.

1-m i s o l. Ushbu $(\boldsymbol{N},+,\cdot)-$ algebraik sistema (bu yerda + va $\circ$ oddiy ma'nodagi arifmetik amallar) uchun *a*) va *s*) shartlar bajariladi. Hatto ko'paytirish kommutativ va assosiativ birlik element ham mavjud. Shunga qaramay $(\boldsymbol{N},+,\cdot)-$ halqa emas, chunki $(\boldsymbol{N},+)$ - gruppa emas. ■

2-m i s o l. $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)-$ birlik elementli assosiativ-kommutativ halqa. Bu yerda $\boldsymbol{Z}$ ni juft butun sonlar to'plami $2\boldsymbol{Z}$ bilan almashtirib birlik elementsiz assosiativ-kommutativ halqa misolini hosil qilamiz. ■

3-m i s o l. $(\boldsymbol{Q},+,\cdot),(\boldsymbol{R},+,\cdot),(\boldsymbol{C},+,\cdot)-$ lar birlik assosiativ-kommutativ halqalar. ■

4-m i s o l. Uch o'lchovli Yevklid fazosining hamma geometrik vektorlari to'plamini $\vec{M}$ bilan, vektorlarni qo'shishni +, vektorlarni vektorli ko'paytirishni $\times$ bilan belgilasak, $(\vec{M},+,\times)$ sistema halqa bo'ladi. Ammo vektorlar algebrasining asosiy qonunlaridan ko'ramizki, bu halqa assosiativ ham emas, kommutativ ham emas, shuningdek birlik elementga ham ega emas. Unda kommutativlik qonuni o'rniga $\vec{x}\times\vec{y}=-(\vec{y}\times\vec{x})$ -- anti kommutativlik qonuni bajariladi. Shu qonun tufayli bu yerda distributivlik qonunlarining ikkalasi ham bir-biridan kelib chiqadi. Noassosiativ halqalarda assosiativlikning o'rnini to'ldiradigan qandaydir boshqa qonunlar mavjud bo'lmasa ularda algebraik ifodalarning birini boshqalariga shakl almashtirishlar ma'nosida «deyarli hyech narsa qilib bo'lmaydi». Geometrik vektorlarga oid yuqoridagi misolda bunday «to'ldiruvchi» sifatida: $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}+(\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{z}+(\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y}=\vec{0}$ munosabat xizmat qiladi. ■

Agar $\forall x,y,z\in K \quad x\cdot x=0$ va $(xy)z+(yz)x+(zx)y=0$ bo'lsa $(K,+,\cdot)$ halqa ***liyaviy halqa*** (*Li* halqasi) deyiladi.

$x\cdot x=0$ munosibatdan antikommutativlikning kelib chiqishini tekshirib ko'rish qiyin emas.

5-m i s o l. F **-** to'plam haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan va haqiqiy qiymatlar qabul qiladigan $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ funksiyalar to'plami bo'lib shu bilan birga ixtiyoriy $f_1, f_2\in F$ funksiyalar uchun f_1+f_2 funksiya har bir $x\in\boldsymbol{R}$ ga $f_1(x)+f_2(x)$ qiymatni $f_1 f_2-$ funksiya esa $f_1(x)f_2(x)$ qiymatni mos qilib qo'ysin. U holda $(F,+,\cdot)$ birli assosiativ-kommutativ halqa bo'ladi. Bu yerda bir rolini hamma $x\in\boldsymbol{R}$ lar uchun faqat 1 qiymat qabul qiladigan $f(x)=1$ nol rolini esa $f(x)=0$ funksiya bajaradi. Bu yerda funksiyalarni qo'shish va ko'paytirish uchun kommutativlik, assosiativlik va distributivlik qonunlari haqiqiy sonlar uchun bajariladigan shunday qonunlardan bevosita kelib chiqadi. ■

Oxirgi ikki misol (vektorlar va funksiyalar misollari) sonli halqalar (elementlari sonlar, amallar oddiy ma'nodagi qo'shish va ko'paytirish) da mavjud bo'lmagan shunday bir ajoyib bir imkoniyatni namoyish etadi: umumiy holda halqalarda shunday ikki element mavjud bo'lishi mumkinki, ularning har biri noldan farqli bo'lgani holda ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Ikkita misol keltiramiz.

6-m i s o l. $(\vec{M},+,\cdot)$ halqada hatto $\vec{x}-$ nolmas vektor bo'lganda ham $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$. ■

7-m i s o l. $(F,+,\cdot)$ halqada ko'paytmasi nol bo'lgan ikki:

$$f_1(x)=\frac{|x|+x}{2}=\begin{cases} x & \text{булганда} \quad x\geq 0,\\ 0 & \text{булганда} \quad x<0,\end{cases} \qquad f_2(x)=\frac{|x|-x}{2}=\begin{cases} 0 & \text{булганда} \quad x\geq 0,\\ -x & \text{булганда} \quad x<0,\end{cases}$$

noldan farqli funksiyalar mavjud. ■

$x\neq 0, y\neq 0$, ammo $xy=0$ bo'lsa $(K,+,\cdot)$ halqaning x va u elementlari nolning *bo'luvchilari* deyiladi. Bu holda x – nolning *chap*, u – esa ***o'ng*** bo'luvchisi (kommutativ halqalarda bunday farqlash o'rinli emas) deyiladi.

$(\boldsymbol{Q},+,\cdot),(\boldsymbol{R},+,\cdot),(\boldsymbol{C},+,\cdot)-$ nolning bo'luvchilarisiz halqalar, $(\vec{M},+,\times)$ va $(F,+,\cdot)$ lar esa nolning bo'luvchilarili halqalardir.

Halqaning ta'rifiga ko'ra uning hamma elementlari to'plami qo'shishga nisbatan gruppa tashkil etadi. Bu gruppa halqaning *additiv gruppasi* deyiladi. Birli halqaning *a* elementi uchun $a^{-1}\in K$ ham bo'lsa *a* element *K* ning teskarilanuvchi elementi deyiladi. Assosiativ birli K^* to'plami ko'paytirishga nisbatan gruppadir. Bu gruppa halqaning *multiplikativ gruppasi* deyiladi.

Birli halqada teskarilanuvchi element *birning bo'luvchisi* ham deyiladi.

8-m i s o l. Agar halqa nolning bo'luvchilariga ega bo'lmasa ixtiyoriy $z\neq 0$ uchun $xz=yz$ yoki $zx=zy$ dan $x=y$ kelib chiqadi, ya'ni tenglikning ixtiyoriy tomondan noldan farqli umumiy ko'paytuvchiga qisqartirish mumkin. Shuni isbot qiling.

Yechish. $xz=yz$ bo'lsin. U holda $xz-yz=0,\ (x-y)z=0,$ ammo $z\neq 0$. Shu sababdan nolning bo'luvchilari mavjud bo'lmagani sababli: $x-y=0,$ ya'ni $x=y.$ Xuddi shunday tartibda $zx=zy$ tenglikdan $x=y$ hosil qilinadi. ■

9-m i s o l. Birli $(K,+,\cdot)$ assosiativ halqada nolning hyech qanday bo'luvchisi birning bo'luvchisi bo'laolmaydi.

*Yechish.*Masalan $xy=0$ bo'lib, $y\neq 0,$ x esa teskari x^{-1} elementga ega bo'lsin ($x\neq 0,$ *u* esa y^{-1} teskari elementga ega bo'lgan hol ham xuddi shunday tarzda qarab chiqiladi. Ammo u holda $x^{-1}(xy)=x^{-1}0=0$. Bundan assosiativlik qonuniga ko'ra, $(x^{-1}x)y=0,\quad 1\cdot y=0,\quad y=0$. Bu esa $y\neq 0$ degan farazimizga ziddir. ■

Yagona elementdan iborat halqa (bu yagona element halqaning ham biri ham noli bo'lib xizmat qiladi) *trivial* halqa deyiladi. Agar $(K,+,\ \cdot)$ halqada $1=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu halqa trivial halqa bo'ladi; haqiqatan u holda ixtiyoriy $x\in K$ uchun $x=x\cdot 1=x\cdot=0=0$ bo'ladi. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan birli $(1\neq 0)$ notrivial assosiativ-kommutativ halqa *butunlik sohasi* (yoki *butunlik* halqasi) deyiladi. Masalan, $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ shunday halqadir.

Har bir noldan farqli elementi teskarilanadigan birli assosiativ halqa *jism* deyiladi. Agar shu bilan birga ko'paytirish amali kommutativ ham bo'lsa, *maydon* deyiladi. Maydon tushunchasining juda muhim ekanligini nazarda tutib uning halqa tushunchasiga asoslanmaydigan ta'rifini keltiramiz.

Agar:

a) $(K,+)-$ abel halqa; *b*) $(K,\cdot)-$ gruppoid, $(K\setminus\{0\},\cdot)-$ abel gruppa;

s) qo'shish bilan ko'paytirish amallari distributivlik qonuni bilan bog'langan (uni ikki formasining ixtiyoriy bittasi bilan ifodalash mumkin), bo'lsa $(K,+,\ \cdot)$ algebraik sistema *maydon* deyiladi.

10-m i s o l. $(\boldsymbol{Z},+,\ \cdot)-$ sistema maydon (hatto telo ham) emas, chunki noldan farqli ham butun sonlar ham ko'paytirishga nisbatan teskarilanuvchi emas. Birning bo'luvchilari bo'lib bu yerda faqat 1 va –1 elementlar xizmat qilishadi. ■

11-m i s o l. $(\boldsymbol{Q},+,\cdot)$, $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$, $(\boldsymbol{C},+,\cdot)$ - maydonlardir. ■

12-m i s o l. Vektorlar halqasi $(\vec{M},+,\cdot)$ ning va funksiyalar halqasi $(F,+,\cdot)$ ning maydon, hatto telo ham bo'laolmasligini ko'rsating. ■

*Yechish.*8-misolga ko'ra hyech qanday maydon nolning bo'luvchilariga ega emas. $(\vec{M},+,\cdot)$ va $(F,+,\cdot)$ halqalar esa nolning bo'luvchilariga ega. Shundan ko'rsatilishi kerak bo'lgan tasdiq hosil bo'ladi. ■

13-m i s o l. $x,y,z,t-$lar $(P,+,\cdot)$ maydonning ixtiyoriy elementlari va $y\neq 0,\quad t\neq 0$ bo'lsin. $\frac{x}{y}\pm\frac{z}{t}=\frac{xt\pm yz}{yt}$ ni isbot qiling. ■

*Yechish.*Maydonda ko'paytirish kommutativ bo'lgani uchun ixtiyoriy $y\neq 0$ uchun $xy^{-1}=y^{-1}x$ va bu ifodalarning har birini $\frac{x}{y}$ kasr shaklida ifodalash hyech qanday aniqsizlikka olib kelmaydi. Shuning uchun isbotlanayotgan tenglikning chap tomoni $xy^{-1}\pm zt^{-1}=xy^{-1}tt^{-1}\pm zt^{-1}yy^{-1}=xt(yt)^{-1}\pm yz(yt)^{-1}=(xt\pm yz)(yt)^{-1}$, ya'ni o'ng tomoniga teng. Shu bilan birga nolning bo'luvchilari mavjud emasligi sababidan $y\neq 0$ va $t\neq 0$ dan $yt\neq 0$ kelib chiqadi. ■

Agar $(P,+,\cdot)$ maydon biri (birlik elementi) ning hamma butun karralilari *P* ning elementlaridan iborat bo'lsa, ya'ni $k=\ell$ uchun $k\cdot 1\neq l\cdot 1$ bo'lsa *R* maydon nol xarakteristikaga ega deyiladi va $charP=0$ shaklda yoziladi. Aks holda $1<m<p$ uchun $p\cdot 1=0$, ammo $m\cdot 1\neq 0$ bo'lsa, *r* natural son *R* maydonning xarakteristikasi deyiladi va $charP=p$ qilib yoziladi. Boshqacha qilib aytganda, maydonning biri uning additiv gruppasida cheksiz tartibli element bo'lsa, maydonning xarakteristikasi nolga teng deyiladi, aks holda maydonning xarakteristikasi deb maydon birining uning additiv gruppasidagi tartibiga aytiladi.

14-m i s o l. Agar $charP=p>0$ bo'lsa:

a) *r* – tub son; *b*) ixtiyoriy $a\in P$ uchun $pa=0$ bo'lishini isbot qiling.

Yechish.a) Teskarisini faraz qilamiz. *R* ning tartibi tub emas, ya'ni $p=m\cdot n$, *m* va *n* $-1<m<p$ va $1<n<p$ bo'lgan natural sonlar bo'lsin. *R* ta birning yig'indisi nolga teng: $1+1+\ldots+1=0.$ bu yig'indining qo'shiluvchilarini har biri *n* ta birdan iborat *m* ta gruppaga ajratish mumkin. U holda distributivlik qonuniga asosan

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p}=\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}+\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}+\ldots+\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}=$$

$$=1\cdot(1+1+\ldots+1)+1\cdot(1+1+\ldots+1)+\ldots+1\cdot(1+1+\ldots+1)=$$
$$=\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{m}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}$$

Endi r – yig'indi nolga teng bo'ladigan birlarning eng kichik miqdori hamda $m<p$ va $n<p$ bo'lgani uchun va $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}\neq 0,$ ni hosil qilamiz, ammo $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p}=0.$ Buning bo'lishi mumkin emas, chunki maydon nolning bo'luvchilariga ega emas.

b) Haqiqatan,
$a+a+\ldots+a=1\cdot a+1\cdot a+\ldots+1\cdot a=\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{p}a=0\cdot a=0,$ $p\neq 0$ bo'lgani holda. Ta'rifga asosan nolta qo'shiluvchilarning yig'indisi nolga teng deb hisoblanadi. ■

Agar $(K,+,\cdot)$ halqa elementlarining K' bo'sh bo'lmagan qismto'plami halqada aniqlangan amallarga nisbatan halqa bo'lsa $(K',+,\cdot)$ halqa $(K,+,\cdot)$ning qismhalqasi deyiladi. Bunda hamma joyda «halqa» so'zini «maydon» so'zi bilan almashtirilsa qismmmaydon tushunchasi hosil bo'ladi.

15-m i s o l. Hamma juft sonlar halqasi $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ butun sonlar halqasining qismhalqasi bo'ladi, hamma toq sonlar to'plami esa qismhalqa bo'lmaydi. ■

16-m i s o l. Maydon, va shu sababli $(\boldsymbol{Q},+,\cdot)$ halqa ham o'z ichiga qismmaydon bo'laolmaydigan $(Z,+,\cdot)$ qismhalqani oladi. ■

17-m i s o l. $\boldsymbol{Z}_m=\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ to'plam m modul bo'yicha qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa tashkil etadi (§1 dagi 12-masalaga qarang). Bu halqa m modul bo'yicha chegirtmalar halqasi deyiladi. ■

18-m i s o l. $m>1$ bo'lganda chegirtmalarning hyech qanday $\boldsymbol{Z}_m$ halqasi $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ da qismhalqa bo'laolmaydi, chunki $K'=\{0,1,2,\ldots,m-1\}-$ to'plam $M=\boldsymbol{Z}$ ning qismto'plami bo'lsa hamki unda aniqlangan qo'shish amali ($m>2-$bo'lganda ko'paytirish amali ham) $(K,+,\cdot)$ dagi bir xil ismli amallar bilan moslashmaydi. ■

Agar $K'-$ to'plam $(K,+,\cdot)$ halqa elementlaridan iborat bo'sh bo'lmagan qismto'plam bo'lsa, $(K',+,\cdot)$ ning qismhalqa bo'lishi uchun quyidagilarni ko'rsatish yetarli:

a) $(K',+)$ va $(K',\cdot)$ - gruppoidlar, ya'ni hamma vaqt $x,y\in K'$ dan $x+y\in K'$ va $xy\in K'$ kelib chiqadi;

b) agar $x\in K'$ bo'lsa, $-x\in K'$ bo'ladi.

$(K,+,\cdot)-$maydon bo'lgani holda $(K',+,\cdot)$ ning qismmaydon ekanligini tekshirish uchun *a*) va *b*) shartlardan tashqari yana

c) agar $x\in K'\backslash\{0\}$ bo'lsa, $x^{-1}\in K'\backslash\{0\}$ bo'lishini ko'rsatish yetarli.

Agar ixtiyoriy $x,y\in K$ lar uchun:

$f(x+y)=f(x)+f(y),$

$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y).$

bo'ladigan $f: K \to \widetilde{K}$ biyeksiya mavjud bo'lsa, $(K,+,\cdot)$ va $(\widetilde{K},+,\cdot)$ halqalar izomorf deyiladi.

Shuni ham ta'kidlaymizki, hatto $\widetilde{K} = K$ bo'lganda ham ikkala halqadagi + va $\circ$ amallari bir xilda belgilansa hamki, albatta bir xil bo'lishi shart emas. $K \bigcap \widetilde{K} = \varnothing$ bo'lganda esa «bir xil amallar» deyishning o'zi ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Agar f – akslantirish K halqaning $\widetilde{K}$ halqaga izomorfizmi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a \in K$ uchun $f(0) = 0,\quad f(-a) = -f(a)$. Shuningdek, agar $1 \in K$ bo'lsa, $f(1) = 1$ va ixtiyoriy $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ uchun $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. Halqaning o'ziga izomorfizmi shu halqaning avtomorfizmi deyiladi.

Agar K halqa butunlik sohasi yoki maydon bo'lsa uning izomorf obrazi ham butunlik sohasi yoki maydon bo'lishi shubhasiz.

Agar K halqaning L halqaning biror qismhalqasiga izomorf akslanishi mavjud bo'lsa, K halqa L halqaga joylashadi deymiz.

19-m i s o l. *a*) juft sonlarning $2\boldsymbol{Z}$ halqasi butun sonlar halqasi $\boldsymbol{Z}$ ga joylashadi; *b*) butun sonlar halqasi $\boldsymbol{Z}$ rasional sonlar halqasi Q ga joylashadi. ■

M A S H Q L A R

240. Ushbu to'plamlardan qaysilari ko'rsatilgan qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa va qaysilari maydon tashkil etishini aniqlang. Maydon bo'lmagan birli halqalar uchun hamma teskarilanuvchi elementlar to'plamini toping. (*a*) – 0) misollarda sonlarning oddiy ma'nodagi qo'shish va ko'paytirish amallari qaraladi):

a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$; *b*) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$;

c) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$; *d*) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2\boldsymbol{Z}\}$;

e) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$; *f*) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$;

g) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \boldsymbol{Q}\}$; *h)* $\{a + bi \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$;

i) $\{a + bi \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$; *j*) $\{a + b\sqrt{2}\,i \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$;

k) $\{a + b\sqrt{2}\,i \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$; *l*) $\{a + b\sqrt{3}\,i \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$;

m) $\{a + b\sqrt{3}\,i \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$;

n) maxraji berilgan r tub songa bo'linmaydigan barcha rasional sonlar to'plami;

o) $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n$ ko'rinishdagi barcha yig'indilar to'plami. Bu yerda $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R},\quad z_1, z_2, \ldots, z_n$ – lar esa birning kompleks ildizlari;

p) $\dfrac{a + b\sqrt{D}}{2}$ ko'rinishdagi kompleks sonlar to'plami. Bu yerda D – kvadratlardan xoli (tub sonning kvadratiga bo'linmaydigan) belgilangan butun son; *a* va *b* juft-toqligi bir xil bo'lgan butun sonlar;

q) oddiy ma’noda matritsalarni ko’paytirish va qo’shish amallariga nisbatan $n>1$ tartibli elementlari butun (rasional, haqiqiy, kompleks) son bo’lgan matritsalar to’plami;

r) *x* o’zgaruvchining koeffisiyentlari butun (rasional, haqiqiy, kompleks) sonlar bo’lgan ko’phadlari to’plami ko’phadlarni ko’paytirish va qo’shish (oddiy ma’noda) amallariga nisbatan;

s) qo’shish va ko’paytirish: $a\oplus b=a+b-1,\quad a\odot b=a+b-ab$ tengliklar bilan aniqlangan barcha haqiqiy sonlarning *R* to’plami:

t) funksiyalarni akslantirishni ko’paytirish va qo’shish kabi qo’shish va ko’paytirish amallariga nisbatan barcha chiziqli funksiyalar to’plami.

241. 1. Quyidagi matritsalar to’plamlarining har biri matritsalarni ko’paytirish va qo’shish amallariga nisbatan halqa bo’lishini ko’rsating.

2. Bu halqalardan qaysilari kommutativ, qaysilari maydon ekanligini ko’rsating.

3. Maydon bo’lmagan birli halqalarda hamma teskarilanuvchi elementlarni toping.

4. Nolning bo’luvchilari halqalarda nolning hamma bo’luvchilarini toping:

a) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$; *b*) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Q}\right\}$;

c) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in 2\mathbf{Z}\right\}$; *d*) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$;

e) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in 3\mathbf{Z}\right\}$; *f*) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Q}\right\}$;

g) $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$; *h*) $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Q}\right\}$;

i) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$; *j*) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$;

k) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in \mathbf{Z}\right\}$; *h*) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in \mathbf{Q}\right\}$;

m) tartibi $n>1$ bo’lgan elementlarni haqiqiy sonlardan iborat hamma diagonal matritsalar;

n) **Q** da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa bilan o’rin almashtiriluvchi hamma $(2\times 2)-$ matritsalar to’plami;

o) **R** da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa bilan o’rin almashtiriluvchi hamma $(2\times 2)-$ matritsalar to’plami.

242. Ushbu matritsalar to'plamlarining qaysilari matritsalarni ko'paytirish va qo'shishga nisbatan halqa tashkil etadi?

a) n-tartibli elementlari haqiqiy sonlar bo'lgan barcha simmetrik matritsalar to'plami;

b) barcha haqiqiy n-tartibli ortogonal matritsalar to'plami;

s) n-tartibli yuqori uchburchakli matritsalar to'plami;

d) oxirgi ikki satri nollardan iborat $n \geq 2$ tartibli matritsalar to'plami;

ye) $\begin{pmatrix} x & y \\ dy & x \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsalar to'plami, bu yerda $d-$belgilangan son, $x, y \in \mathbf{Z}$;

f) $\begin{pmatrix} x & y \\ dy & x \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsalar to'plami, bu yerda $d-$ K halqaning belgilangan elementi, $x, y \in K$;

g) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \\ dy & x \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsalar to'plami, bu yerda $d-$ belgilangan kvadratlardan ozod son, x va $y-$bir xil juft-toqlikdagi sonlar;

h) $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi kompleks matritsalar to'plami;

i) $\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -t & y & x \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi haqiqiy matritsalar to'plami.

243. Ushbu funksiyalar to'plamlarining qaysilari funksiyalarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa tashkil etadi?

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar to'plami;

b) (a, b) intervalda ikkinchi hosilaga ega bo'lgan funksiyalar to'plami;

s) haqiqy o'zgaruvchining butun rasional funksiyalari to'plami;

d) haqiqiy o'zgaruvchining rasional funksiyalari to'plami;

ye) haqiqiy o'zgaruvchining biror $H \subseteq \mathbf{R}$ qismto'plamda nolga aylanadigan funksiyalari to'plami;

f) haqiqiy koeffisiyentli $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ trigonometrik ko'phadlar to'plami, bu yerda $n \in \mathbf{N}$;

g) haqiqiy koeffisiyentli $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ trigonometrik ko'phadlar to'plami, bunda $n \in \mathbf{N}$;

h) haqiqiy koeffisiyentli $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ ko'rinishdagi trigonometrik ko'phadlar to'plami, bunda $n \in \mathbf{N}$;

i) biror H to'plamda aniqlangan va qiymatlari biror K halqaga tegishli funksiyalar to'plami.

244. Ushbu tasdiqlarni isbotlang:

a) $\mathbf{N_n}=\{0,1,\dots,n-1\}$ to'plam n modul bo'yicha qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan birli kommutativ halqa (§ 1 dagi 12-misolga qarang);

b) agar n -- murakkab son bo'lsa, $\mathbf{N_n}$ -- nolning bo'luvchilarili halqa bo'ladi;

c) a va n o'zaro tub bo'lganda va faqat shu holdagina $a\in\mathbf{Z_n}$ element teskarilanuvchi bo'ladi;

d) $\mathbf{Z_{10}}, \mathbf{Z_{12}}, \mathbf{Z_7}$ halqalarning hamma teskarilanuvchi elementlarini toping.

e) n tub son bo'lganda va faqat shu holdagina $\mathbf{Z_n}$ maydon bo'ladi;

f) agar n tub son bo'lsa, $\mathrm{char}\,\mathbf{Z_n}=n$.

245. Elementlari $\mathbf{Z}_2$ dan olingan ushbu

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

matritsalar matritsalarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan maydon tashkil etishini ko'rsating. Shu maydon elementlarini ko'paytirish va qo'shish amallarining Keli jadvalini tuzing.

246. Ushbu $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbf{Z}_3\right\}$ to'plam to'qqiz elementdan iborat maydon tashkil etishini va uning multiplikativ gruppasi siklik gruppaligini isbot qiling.

247. Elementlari $\mathbf{Z}_3$ dan olingan $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$ matritsaning hamma darajalari nol matritsa bilan birgalikda to'qqiz elementdan iborat maydon tashkil etishini isbot qiling.

248. Ushbu tenglamalarni $\mathbf{Z}_6$ halqada yeching:

a) $2+x=1$; *b*) $4-x=5$; *c*) $5+x=0$;

d) $2x=1$; *e*) $4x=5$; *f*) $5x=0$;

g) $3x=3$; *h*) $3x=2$; *i*) $4x=2$;

j) $5x=1$; *k*) $4x=3$; *l*) $4x=1$.

249. Ushbu tenglamalar sistemasini

a) $\mathbf{Z}_3$ maydonda; b) $\mathbf{Z}_5$ maydonda yeching:
$x+2z=1,\quad y+2z=2,\quad 2x+z=1$.

250. Ushbu tenglamalarni $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ maydonda yeching:

a) $x^2+(4-2\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2}=0$;

b) $x^2-x-3=0$; *c*) $x^2+x-7+6\sqrt{2}=0$;

d) $x^2-2x+1-\sqrt{2}=0$.

251. Ushbu tenglamalardan qaysilari $\mathbf{Z}_{11}$ maydonda yechiladi?:

a) $x^2=5$; *b*) $x^7=7$; *c*) $x^3=a$

252. Elementlari soni n ta bo'lgan maydonda $x^n = x$ ayniyat bajarilishini isbot qiling.

253. $p = 3,5,7,11$ lar uchun $\mathbf{Z}_p$ maydonning multiplikativ gruppasida 2 elementning tartibini aniqlang. Bu gruppalardan qaysilarida 2 yaratuvchi element bo'ladi?

254. Ushbu multiplikativ gruppalarda hamma yaratuvchi elementlarni toping: *a*) $\mathbf{Z}_7$; *b*) $\mathbf{Z}_{11}$.

255. M to'plam barcha qismto'plamlarining $p(M)$ to'plami $A + B = A \Delta B(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$, $A \cdot B = A \bigcap B$, $A, B \in p(M)$ amallarga nisbatan birli halqa tashkil etadi. Uning elementlari $x^n = x$ tenglamani qanoatlantiradi. Shuni isbot qiling.

256*. K – chekli halqa bo'lsin. Ushbularni isbotlang:

a) agar K da nolning bo'luvchilari bo'lmasa uning birlik elementi mavjud va uning hamma nolmas elementlari teskarilanuvchan bo'ladi;

b) agar K birlik elementga ega bo'lsa uning har bir bir tomonlama teskari elementga ega bo'lgan elementi teskarilanuvchi bo'ladi;

s) agar K birlik elementga ega bo'lsa, unda nolning har bir chap bo'luvchisi nolning o'ng bo'luvchisi bo'ladi.

257*. Birli va nolning bo'luvchisisiz halqada bir tomonlama teskari elementga ega har bir element teskarilanuvchi bo'lishini isbot qiling.

258. K – birli halqa va $x, y \in K$ bo'lsin. Ushbu tasdiqlarni isbot qiling:

a) agar xy va yx ko'paytmalar teskarilanuvchi bo'lsa, x va y elementlar ham teskarilanuvchi bo'ladi;

b) agar K nolning bo'luvchilariga ega emas va xy ko'paytma teskarilanuvchi bo'lsa, x va y elementlar teskarilanuvchi bo'ladi;

s) agar K chekli va xy ko'paytma teskarilanuvchi bo'lsa x va y teskarilanuvchi bo'ladi;

d) K halqa to'g'risida qo'shimcha shartlarsiz xy ko'paytmaning teskarilanuvchanligidan x va y elementlarning teskarilanuvchanligi kelib chiqadi.

259. Har bir elementi $x^2 = x$ tenglamani qanoatlantiradigan ixtiyoriy halqaning kommutativligini isbot qiling. $x^3 = x$ shartda ham shunday bo'ladimi?

260. Bittadan ortiq elementli nolning bo'luvchilarisiz chekli kommutativ halqa maydon bo'lishini isbotlang.

261. K halqa qismhalqalarining kesishmasi K ning qismhalqasi bo'lishini isbotlang.

262. 108-masaladagi halqa (maydon) larning qaysilari boshqalarining qismhalqasi (qismmaydoni) bo'ladi?

263. Ushbu to'plamlarning har biri kompleks sonlar halqasining qismhalqasi bo'lishini isbotlang:

a) $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \quad | \ a, b \in \mathbf{Z}\}$;

b) $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + bi\sqrt{3} \quad | \ a, b \in \mathbf{Z}\}$;

$c)$ $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} \quad | \ a,b \in \mathbf{Z}\}$.

Bu halqalarning har birida $N(Z) = |Z|^2$ funksiya uchun quyidagi shartlar bajarilishini ko'rsating:

1) $N(Z)-$ nolmas butun son;

2) $N(Z_1 Z_2) = N(Z_1) \quad N(Z_2)$;

3) $z = 0$ bo'lganda va faqat shu holdagina $N(z) = 0$ teskarilanuvchi bo'ladi.

4) $N(z) = 1$ bo'lganda va faqat shu holdagina $z-$ teskarilanuvchi bo'ladi.

Har bir halqaning multiplikativ gruppasini toping.

264. $\boldsymbol{Z}_{10}, \boldsymbol{Z}_{12}$ va $\boldsymbol{Z}_7$ halqalarning hamma qismhalqalarini toping.

265. Maydon bo'lmagan halqada biror maydon joylashishi mumkinmi?

134. $\boldsymbol{R}$ maydonda eng kichik birli qismhalqa va: $a)$ $\sqrt{2}$; $b)$ $\sqrt{3}$;

$c)$ $\sqrt[3]{2}$ sonni o'z ichiga olgan qismmaydonni toping.

266. $\boldsymbol{S}$ maydonda: $a)$ i; $b)$ $1+i$; $c)$ $2i$ sonni o'z ichiga olgan eng kichik qismhalqa va qismmaydon toping.

267. $f-$akslantirish K_1 halqaning K_2 halqada izomorfizmi bo'lsin, agar $1 \in K_1$ bo'lsa $f(0) = 0, \quad f(-a) = -f(a)^k, \quad f(1) = 1,$ larni isbotlang.

269. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in \boldsymbol{R}$ ko'rinishdagi matritsalar kompleks sonlar maydoniga izomorf maydon tashkil etishini isbotlang.

270. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in \boldsymbol{Q}$ ko'rinishdagi matritsalar $a + b\sqrt{3}$, bunda $a,b \in \boldsymbol{Q}$ ko'rinishdagi sonlar maydoniga izomorf maydon tashkil etishini isbotlang.

271. $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, bunda $a,b \in \boldsymbol{Q}$ ko'rinishdagi matritsalar $a_3 + b\sqrt{2}$, bunda $a,b \in \boldsymbol{Q}$ ko'rinishdagi sonlar maydoniga izomorf maydon tashkil etishini isbotlang.

272. 1) 108 *0*) va 110 *g*); 2) 110 *h*) va 110 *i*) misollardagi halqalarning izomorfligini isbotlang.

273. Xarakteristikasi *p* bo'lgan ixtiyoriy *R* maydon o'z ichiga $\boldsymbol{Z}_p$ ga izomorf bo'lgan *L* qismmaydonni olishini va *R* ni *L* da aniqlangan chiziqli fazo sifatida qarash mumkinligini isbotlang.

274*. Ixtiyoriy chekli maydon elementlarining soni biror *p* tub sonning darajasiga tengligini isbotlang.

275*. Nol xarakteristikali har qanday maydon *Q* ga izomorf qismmaydonni o'z ichiga olishini isbotlang.

276. Halqa (maydon) ning hamma avtomorfizmlari to'plami avtomorfizmlarni akslantirishlar kabi ko'paytirish amaliga nisbatan gruppa bo'lishini isbotlang.

a) butun sonlar halqasining;

b) rasional sonlar maydonining;

c) haqiqiy sonlar maydonining avtomorfizmlari gruppalarini toping.

277. Kompleks sonlar maydonining har bir haqiqiy sonni o'z o'rniga qoldiradigan hamma avtomorfizmlarini toping.

278. $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$ va $\{a+b\sqrt{5} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$ maydonlar izomorfmi?

279. K — to'plam $K_1,\ldots,K_m$ halqalarning bevosita ko'paytmasi bo'lsin:

a) qanday shartlarda K kommutativ, birlik elementga ega; nolning bo'luvchilarisiz bo'ladi?

b) K da hamma teskarilanuvchi elementlarni, nolning hamma bo'luvchilarini va hamma nilpotent elementlarni toping.

280. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar *k* va *l* o'zaro tub bo'lsa, $\boldsymbol{Z}_{kl} \cong \boldsymbol{Z}_k \times \boldsymbol{Z}_l$;

b) agar $n = p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}$, bunda $n = p_1,\ldots,p_s -$ har xil tub sonlar bo'lsa, u holda $\boldsymbol{Z}_n \cong \boldsymbol{Z}_{p_1^{k_1}} \times\ldots\times \boldsymbol{Z}_{p_1^{k_s}}$.

12-§. Halqa ideali. Faktor halqa. Halqalar gomomorfizmi

K halqaning quyidagi:

a) $a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$

b) ixtiyoriy $a \in K$ va $i \in I$ lar uchun $ai\,(ia)$ ko'paytma I ga tegishli: $ai \in I \quad (ia \in I)$, shartlarni qanoatlantiruvchi bo'sh bo'lmagan *I* qismto'plami uning ***chap (o'ng) ideali*** deyiladi.

K halqaning bir vaqtning o'zida ham chap ham o'ng ideali bo'ladigan I qismto'plami halqaning *ikki tomonlama ideali* deyiladi.

Agar *K* halqada biror *M* to'plam berilgan bo'lsa *M* to'plamning hamma elementlarini o'z ichiga olgan eng kichik (o'z ichiga saqlash ma'nosida) (chap, o'ng, ikki tomonlama) ideal *M* to'plam bilan yaratilgan (mos ravishda chap, o'ng yoki ikki tomonlama) ideal deyiladi va *(M)* bilan belgilanadi. Bu ideal *K* halqaning hamma (mos ravishda chap, o'ng yoki ikki tomonlama) ideallari kesishmasidan iborat bo'ladi. Bitta *a* element bilan yaratilgan ideal *bosh ideal* deyiladi. *a* element bilan yaratilgan chap bosh ideal $(a)_l$ bilan, o'ng bosh ideal $(a)_r$ bilan, ikki tomonlama bosh ideal esa *(a)* bilan belgilanadi. Agar *K* – birli kommutativ halqa bo'lsa, *(a)* bosh ideal hamma ka ko'rinishdagi elementlardan iborat bo'ladi, bunda $k \in K$. Har bir ideali bosh ideal bo'lgan birli, nolning bo'luvchilarisiz kommutativ halqa (butunlik sohasi) bosh ideallar halqasi deyiladi.

$I-$ideal K halqaning ikki tomonlama ideali, $a,b \in K$ bo'lsin. Agar $(a-b) \in I$ bo'lsa *a* element *b* element bilan I ideal moduli bo'yicha (yoki qisqacha *I* ideal bo'yicha) taqqoslanadi deydilar va $a \equiv b(\mathrm{mod}\, I)$ shaklda belgilaydilar. Ideal bo'yicha taqqoslamalrni hadlab qo'shish, ayirish va ko'paytirish mumkin.

Xususiy holda $K = \boldsymbol{Z}, \quad I = (m)$, bunda $m \geq 0$ bo'lsa, $a \equiv b(\mathrm{mod}(m))$ o'rniga $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ yozadilar va bu holda *a son b son bilan m modul bo'yicha taqqoslanadi* deydilar.

K halqaning additiv gruppasining I qismgruppa bo'yicha $a+I$ qo'shni sinfi I *ideal moduli bo'yicha* (yoki qisqacha I ideal bo'yicha) *chegirtmalar sinfi* deyiladi.

K halqaning I modul bo'yicha hamma chegirtmalar sinflari to'plamida qo'shish va ko'paytirishni quyidagi tengliklar bilan aniqlash mumkin:

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I,$$
$$(a+I)(b+I)=ab+I.$$

Bu amallarga nisbatan chegirtmalar sinflari to'plami halqa bo'ladi. Bu halqa K *halqaning* I *ideal bo'yicha faktor halqasi* deyiladi va K/I shaklda belgilanadi.

$K-$ birli kommutativ halqa bo'lsin. Agar $P\neq K$ va $xy\in P$ dan $x\in P$ yoki $y\in P$ kelib chiqsa K halqaning P ideali *sodda* ideal deyiladi. Agar $M\neq K$ va $M\subset I\subset K$ (tegishlilik qat'iy) shartni qanoatlantiruvchi I ideal mavjud bo'lmasa M ideal K halqaning *maksimal ideali* deyiladi.

Sodda va maksimal ideallarning ahamiyati quyidagi teoremada ifodalangan: agar $K-$ birli kommutativ halqa bo'lsa u holda 1) agar P sodda ideal bo'lsa K/P faktor halqa butunlik sohasi bo'ladi;
2) $M-$ maksimal ideal bo'lganda va faqat shu holdagina K/M faktor-halqa maydon bo'ladi.

Ushbu K_1, K_2- halqalar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $a,b\in K_1$ lar uchun $f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(ab)=f(a)f(b)$ shartlarni qanoatlantiruvchi

$f:K_1\to K_2$ akslantirish K_1 halqaning K_2 halqada *gomomorfizmi* deyiladi. Inyektiv gomomorfizm *monomorfizm*, syuryektiv gomomorfizm *epimorfizm* va biyektiv gomomorfizm *izomorfizm* deyiladi.
K_1 halqaning K_2 halqada f gomomorfizmining *yadrosi* deb $\{a\in K_1 \mid f(a)=0\}$ to'plamga aytiladi. f gomomorfizmning yadrosi $Ker\ f$ bilan belgilanadi. U K_1 halqaning ikki tomonlama ideali bo'ladi.

Agar $f:K_1\to K_2$ *-- akslantirish halqalar gomomorfizmi bo'lsa u holda* $f(K_1)\cong K_1/Ker\ f$ *bo'ladi* (halqalar gomomorfizmi haqidagi teorema).

1-m i s o l. K halqaning har qanday ideali K halqaning (umuman olganda e birlik elementni o'z ichiga olmaydigan) qismhalqasi bo'lishi qismhalqaning ta'rifidan kelib chiqadi. ■

2-m i s o l. Har qanday qismhalqa ham ideal bo'lavermaydi. Haqiqatan, butun koeffisiyentli ko'phadlar halqasi $\boldsymbol{Z}[x]$ haqiqiy koeffisiyentli ko'phadlar halqasi $\boldsymbol{R}[x]$ ning qismhalqasi. Ammo $\boldsymbol{Z}[x]$ halqa $\boldsymbol{R}[x]$ ning ideali emas, chunki masalan $2+3x$ ko'phad $\boldsymbol{Z}[x]$ ga tegishli, unga karrali bo'lgan

$$(2+3x)\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}x^2$$

ko'phad kasr koeffisiyentlarga ega va shuning uchun $\boldsymbol{Z}[x]$ ga tegishli emas. ■

3-m i s o l. Ozod hadi nol bo'lgan ko'phadlarning I to'plami x va y o'zgaruvchilarning haqiqiy koeffisiyentli ko'phadlari halqasi $\boldsymbol{R}[x,y]$ ning ideali bo'lishini ko'rsating.

*Yechish.*Haqiqatan, agar $\varphi(x,y)$ va $\psi(x,y)$ ko'phadlarning ozod hadlari nolga teng bo'lsa $\varphi-\psi$ ko'phadning ozod hadi va shuningdek $f(x,y)\ \varphi(x,y)$ (bu yerda $f(x,y)\in \boldsymbol{R}[x,y]$) ko'rinishdagi har qanday ko'phadning ham ozod hadi nolga teng bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda agar $\varphi\in I$ va $\psi\in I$ bo'lsa, $\varphi-\psi\in I$ bo'ladi; $\varphi\in I$ va $f\in \boldsymbol{R}[x,y]$ bo'lganda esa, $f\varphi\in I$ bo'ladi. Demak, $I-$to'plam $\boldsymbol{R}[x,y]$ halqada ideal. Bu ideal bosh ideal emas. Haqiqatan x va y ko'phadlar I ga tegishli bo'lgani holda I da x ham, y ham karrali bo'ladigan birorta ham ko'had mavjud emas. ■

4-m i s o l. K halqaning ikkita I_1 ва I_2 chap ideallarining $I_1\bigcap I_2$ kesishmasi K halqaning chap ideali bo'lishini isbotlang.

Yechish. $a\in I_1\bigcap I_2$ va $b\in I_1\bigcap I_2$ bo'lsin. U holda $a\in I_1$ ва $b\in I_2$. I_1- K da ideal bo'lgani uchun $a-b\in I_1$ bo'ladi. Xuddi shu tarzda $a-b\in I_2$ ko'rsatiladi va shuning uchun $a-b\in I_1\bigcap I_2$. Va yana, agar $a\in I_1\bigcap I_2$ va $k\in K$ bo'lsa, $a\in I_1$ bo'ladi va I_1 to'plam K da chap ideal bo'lgani uchun $ka\in I_1$ bo'ladi. Xuddi shu tarzda $ka\in I_2$ hosil qilinadi. Shuning uchun $ka\in I_1\bigcap I_2$. Bundan $I_1\bigcap I_2$ ning K da chap ideal ekanligi kelib chiqadi. ■

5-m i s o l. Kommutativ K halqaning (a) bosh ideali har qanday $a\in K$ uchun mavjud va:

a) agar $1\notin K$ bo'lsa, $(a)=\{ka+na\,|\,k\in K, n\in \boldsymbol{Z}\}$;

b) agar $1\in K$ bo'lsa, $(a)=\{ka|\,k\in K\}$.

*Yechish.*a) $ka+na$ ko'rinishdagi ikki ifodaning ayirmasi ham, shubhasiz, shunday ko'rinishga ega. Karralisi esa: $s(ka+na)=(sk+ns)a,$ ya'ni $k'a$ yoki $k'a+0\cdot a$ ko'rinishda bo'ladi.

Shubhasizki, (a) ideal a elementni o'z ichiga oladigan ideallar orasida eng kichigi, chunki har bir ideal har holda o'z ichiga hamma ka karralilarni va hamma $\pm\Sigma a=na$ ko'rinishdagi yig'indilarni va shuning uchun hamma ko'rinishdagi yig'indilarni olishi kerak. Shunday qilib (a) ideal a elementni o'z ichiga oladigan hamma ideallar kesishmasi kabi aniqlanadi.

b) agar K halqa 1 birlik elementga ega bo'lsa $ka+na$ uchun $ka+n\cdot 1\cdot a=(k+n\cdot 1)a=k'a$ yozuvdvn foydalanish mumkin. Demak, bu holda (a) ideal hamma ka karralilardan iborat bo'ladi. ■

6-m i s o l. Agar K halqaning I ideali teskarilanuvchi elementni o'z ichiga olsa, $I=K$ bo'lishini isbotlang.

Yechish. $I-$to'plam K ning ideali bo'lgani uchun $K\supseteq I.$ Boshqa tomondan, agar $U\in I-$teskarilanuvchi bo'lsa, $uK\subseteq I,$ bundan $K\subseteq u^{-1}I\subseteq I.$ Demak, $K=I.$ ■

Agar $x^n=0$ shartni qanoatlantiradigan n natural son mavjud bo'lsa K halqaning $x\neq 0$ elementi *nilpotent* element deyiladi. Barcha nilpotent elementlarning N to'plami K halqaning *radikali* deyiladi.

7-m i s o l. Kommutativ K halqaning N radikali ideal bo'lishini isbotlang.

*Yechish.*Ta'rifga asosan $a,b \in N$ bo'lsa, $a^k = 0$ va $b^l = 0$ bo'ladigan k va l natural sonlar mavjud bo'ladi. U holda $(a-b)^{k+l}$ *=0* bo'ladi, chunki tenglikning chap tomonidagi ifoda yoyilmasida har bir had $a^s b^{k+l-s}$ ko'paytuvchiga ega va shu sababli yo $s \geq k$ va $a^s = 0,$ yoki $s < k,\ k+l-s > l$ va shuning uchun $b^{k+l-s} = 0.$ ■

8-m i s o l. $K[x]$- K maydondagi ko'phadlar halqasi bo'lsin. $I = (f(x))$ bo'lishini isbotlang. Bu yerda $f(x) - I$ ga tegishli eng kichik darajali ko'phad, ya'ni $K[x]$ bosh ideallar halqasidir.

Yechish. $g(x) \in I$ bo'lsin. $g(x)$ ni $f(x)$ ga qoldiqli bo'lamiz: $g(x) = f(x)q(x) + r(x).$ agar $r(x) \neq 0$ bo'lsa $\deg r(x) < \deg f(x)$ va $r(x) = g(x) - f(x)q(x) \in I.$ Bu esa $f(x)$ ning eng kichik darajali ekanligiga ziddir.

Demak, $r(x) = 0$ va $g(x) = f(x)q(x) \in (f(x))$ va shuning uchun $I \subseteq (f(x)).$ $(f(x)) \supseteq I$ esa ko'rinib turgan tasdiq. ■

Ushbu:

1) har bir noldan farqli a elementiga manfiy bo'lmagan $N(a)$ son mos qilib qo'yilgan;

2) ixtiyoriy $a,b \in K,$ bunda $b \neq 0$ elementlar uchun shunday $q,r \in K$ topiladikki, $a = bq + r$ bo'ladi. Shu bilan birga yo $r = 0,$ yoki $N(r) < N(b)$, shartlarni qanoatlantiradigan K butunlik sohasi *Yevklid* halqasi deyiladi. Boshqacha qilib aytganda yevklidiy halqalarda qoldiqli bo'lish amalining o'xshashi bor.

9-m i s o l. Butun sonlar halqasi $\boldsymbol{Z}$ va bitta x o'zgaruvchining haqiqiy koeffisiyentli ko'phadlari halqasi $\boldsymbol{R}[x]$ yevklidiy fazolardir. $\boldsymbol{Z}$ halqada $N(a) = |a|,$ $\boldsymbol{R}[x]$ da esa $N(\varphi(x))$ uchun $\varphi(x)$ ning darajasini olish kerak. ■

10-m i s o l. Har qanday yevklidiy halqa K bosh ideallar halqasi bo'lishini isbot qiling.

Yechish. K halqaning nolmas $I -$ idealida shunday a elementni tanlaymizki, $N(a)$ eng kichik musbat qiymat qabul qilsin. (Bunday element mavjud chunki hamma $N(a)-$qiymatlar nomanfiy butun sonlar). U holda I dagi hamma elementlarni $b = qa,\ q \in K$ ifodalash mumkin. Chindan ham, aks holda, $b = qa + r,$ $0 < N(r) < N(a)$ bo'lar edi. Shu bilan birga $b \in I$ va $qa \in I$ bo'lgani uchun $r = b - qa \in I$ ham bo'ladi. Shunday qilib biz I da shunday r element topdikki, $0 < N(r) < N(a)$. Bu esa a ning tanlab olinganiga ziddir. Demak, b ni $b = aq$ shaklda ifodalash mumkin. Shuning uchun $I = \{aq\}$, bu yerda q K ning hamma sonlarini qabul qiladi. Shunday qilib I bosh idealdir. ■

11-m i s o l. Oldingi misoldan $\boldsymbol{Z}$ va $\boldsymbol{R}[x]$ halqalar bosh ideallar halqalari ekanligi kelib chiqadi. ■

12-m i s o l. Butun gaussiy sonlar halqasi $\boldsymbol{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in Z,\ i^2 = -1\}$ ning yevklidiy halqa ekanligini isbot qiling.

*Yechish.*Bu halqa $\boldsymbol{C}$ kompleks sonlar halqasining qismhalqasi bo'lganligi uchun butunlik sohasidir. Shuning uchun $z = 0$ yoki $\omega = 0$ bo'lganda va faqat shu holdagina $z\omega = 0$ bo'ladi.

$z=a+bi$ uchun $N(z)=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ bo'lsin. Shubhasizki $N(z)\geq 0$ va $N(z\omega)=N(z)\cdot N(\omega)$.

$N(z)$ son yevklidiy fazo ta'rifining ikkinchi shartini ham qanoatlantirishini isbot qilamiz. $z=a+bi\in \boldsymbol{Z}[i]$ va $\omega=c+di\in \boldsymbol{Z}[i], \omega\neq 0$ bo'lsin. $N(z-q\omega)<N(\omega)$ bo'ladigan $q\in \boldsymbol{Z}[i]$ son mavjud bo'lishini isbot qilamiz. Avval z ni ω ga bo'lamiz: $\frac{z}{\omega}=\frac{a+bi}{c+di}=\alpha+\beta i.$

$|\alpha-x|\leq\frac{1}{2}$ ва $|\beta-y|\leq\frac{1}{2}$ bo'ladigan α ва β ga yaqinroq sonlarni x va y bilan belgilaymiz va $q=x+iy$ deymiz. $\frac{z}{\omega}-q$ ayirmani t bilan belgilasak $t=(\alpha+\beta i)-(x+iy)=(\alpha-x)+(\beta-y)i$ bo'ladi.

x va y sonlarning tanlanishiga ko'ra:

$$N(t)=(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \quad \text{va} \quad z-q\omega=\left(\frac{z}{\omega}-q\right)\omega=t\omega$$

bo'lgani uchun $N(z-q\omega)=N(t\omega)=N(t)\cdot N(\omega)\leq\frac{1}{2}N(\omega)$. Demak, $z=q\omega+r,$ bu yerda $N(r)=N(z-q\omega)\leq\frac{1}{2}N(\omega)N(\omega)$. Shuning uchun $\boldsymbol{Z}[i]-$yevklidiy halqa va shu sababli bosh ideallar halqasi ham. ■

13-m i s o l. Har bir haqiqiy koeffisiyentli ko'phadga uning ozod hadini mos qilib qo'yuvchi $f:\boldsymbol{R}[x]\to\boldsymbol{R}$ akslantirish gomomorfizm bo'lishini isbotlang. Uning yadrosini toping.

Yechish. $\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ bo'lsin. U holda $f(\varphi(x))=a_n$. Ma'lumki, ko'phadlarni qo'shishda ularning ozod hadlari qo'shiladi, ko'paytirilganda esa, ozod hadlari ko'paytiriladi. Shuning uchun f gomomorfizmdir: agar $f(\varphi(x))=a,\ f(\varphi(x))=b$ bo'lsa,

$$f(\varphi(x)+\psi(x))=a+b,\quad f(\varphi(x)\psi(x))=ab$$

bo'ladi.

O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki, bu akslantirishda nolga faqat ozod hadi nol bo'lgan ko'phadlar o'tishi mumkin. Shuning uchun $Ker\ f=(x)-$ $\boldsymbol{R}[x]$ ning ideali. ■

14-m i s o l. $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, $a,b,c\in\boldsymbol{Z}$ ko'rinishdagi sonlar to'plamini $\boldsymbol{Z}[\sqrt[3]{2}]$ bilan belgilaymiz. Osongina ko'rsatish mumkinki,

$$f(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=a=b\sqrt[3]{4}+c\sqrt[3]{2}$$

akslantirish $\boldsymbol{Z}[\sqrt[3]{2}]$ halqaning avtomorfizmi bo'ladi. ■

15-m i s o l. $I-$ideal $R[x]$ halqaning ozod hadlari nol bo'lgan ko'phadlaridan iborat bo'lsin. $\varphi(x)\equiv\psi(x)(\mathrm{mod}I)$ munosabat $\varphi(x)-\psi(x)\in I$ ni, ya'ni $\varphi(x)-\psi(x)$ ayirmaning ozod hadi nolga tengligini bildiradi. Ammo bu holda $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$

larning ozod hadlari bir xil bo'lsa, $\varphi(x)-\psi(x)$ ayirmaning ozod hadi nol bo'ladi va shuning uchun $\varphi(x)-\psi(x)\in I$.

Shunday qilib, $\boldsymbol{R}[x]$ halqaning I ideal bo'yicha chegirtmalari sinflari bir xil ozod hadlarga ega bo'lgan $\varphi(x)$ ko'phadlardan iborat bo'ladilar. Bu sinflarning har biri ozod hadning qiymati bilan berilishi mumkin.

Har bir $\varphi(x)$ ko'phadga uning ozod hadini mos qilib qo'yuvchi akslantirish $\boldsymbol{R}[x]$ ning $R[x]/I$ ga gomomorf akslanishini ifodalaydi. Bunda har bir ko'phadga xuddi shunday ozod hadli ko'phadlar to'plami mos qo'yiladi. ■

M A S H Q L A R

281. Berilgan to'plamlar ko'rsatilgan halqalar additiv gruppasining qismgruppasi, qismhalqasi yoki ideali bo'lishini aniqlang:

a) $\boldsymbol{Z}$ halqada $n>1$ ga karrali sonlarning $n\boldsymbol{Z}$ to'plami;

b) $\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in \boldsymbol{Z}\}$ halqada $\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in 2\boldsymbol{Z}\}$ to'plam;

s) $\{a+bi\mid a,b\in \boldsymbol{Z}\}$halqada $\{a+bi\mid a,b\in 3\boldsymbol{Z}\}$ to'plam;

ye) butun koeffisiyentli ko'phadlarning $\boldsymbol{Z}[x]$ halqasida $\boldsymbol{Z}$ to'plam;

f) butun koeffisiyentli ko'phadlarning $\boldsymbol{Z}[x]$ halqasida ozod hadlari juft bo'lgan ko'phadlarning I to'plami;

g) butun koeffisiyentli ko'phadlarning $\boldsymbol{Z}[x]$ halqasida bosh koeffisiyent juft bo'lgan ko'phadlarning I to'plami;

h) $\boldsymbol{Q}[x]$ halqada butun koeffisiyentli ko'phadlarning $\boldsymbol{Z}[x]$ to'plami;

i) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \boldsymbol{Z}\right\}$ halqada $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a\in \boldsymbol{Z}\right\}$ to'plam;

j) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} / a,b,c\in \boldsymbol{Z}\right\}$ halqada $\left\{\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b,c\in \boldsymbol{Z}\right\}$ to'plam.

282. P maydondagi hamma n tartibli ($n>1$) kvadrat matritsalar halqasi $M(n,P)$ da quyidagilarni isbotlang:

a) Oxirgi ustuni nollardan iborat matritsalar to'plami chap ideal bo'ladi va o'ng ideal bo'lmaydi;

b) oxirgi satri nollardan iborat matritsalar to'plami o'ng ideal bo'ladi va chap ideal bo'lmaydi;

s) oxirgi r ta ($1\le r\le n$) ustuni nollardan iborat matritsalar to'plami chap ideal bo'ladi va o'ng ideal bo'lmaydi;

d) oxirgi r ta ($1\le r\le n$) satri nollardan iborat matritsalar to'plami o'ng ideal bo'ladi va chap ideal bo'lmaydi;

e) nol ideal $\{0\}$ va $M(n,P)$ halqaning o'zidan boshqa ikki tomonlama ideallar yo'q.

283. Maydonda nol ideal $\{0\}$ va shu maydonning o'zidan boshqa ideallar yo'qligini isbot qiling.

284. Kommutativ K halqaning $M=\{a_1,a_2,...,a_s\}$ to'plam orqali yaratilgan ideali quyidagi ko'rinishdagi hamma chekli yig'indilardan iborat bo'lishini isbotlang:

a) agar $1\in K$ bo'lsa, $\sum\limits_i k_i a_i$, bunda $k_i\in K$;

b) agar $1\notin K$ bo'lsa, $\sum\limits_i k_i a_i+\sum\limits_i n_i a_i$, bunda $k_i\in K, n_i\in \boldsymbol{Z}$.

285. M to'plam orqali yaratilgan idealini toping:

a) $\boldsymbol{Z}$ halqada $M=\{3,5\}$;

b) $\boldsymbol{Z}$ halqada $M=\{4,10\}$;

s) $\boldsymbol{R}$[x] halqada $M=\{x^6-1, x^4-1\}$;

d) $\boldsymbol{R}$[x] halqada $M=\{x, x+1\}$;

e) $\boldsymbol{Q}$[x] i $\boldsymbol{R}$[x] halqalarda $M=\{x^4+4x^2-7x+2, x^3+3x^2-4\}$.

286. Kommutativ K halqaning $I_1,I_2,...,I_m$ ideallari yig'indisi deb K halqaning $x=x_1+x_2+...+x_m$ ko'rinishda ifodalanadigan hamma x elementlari to'plamiga aytiladi va $I=I_1+I_2+...+I_m$ qilib yoziladi. Agar ixtiyoriy $x\in I$ uchun bu ifodalanish yagona bo'lsa, I summa $I_1,I_2,...,I_m$ ideallarning bevosita yig'indisi deyiladi. Bu holda $I=I_1\oplus I_2\oplus...\oplus I_m$ yozuv qo'llaniladi. Ushbu tasdiqlarni isbotlang:

a) chekli miqdordagi ideallar yig'indisi idealdir;

b) ikki idealning yig'indisi ularning kesishmasi faqat nol elementdan iborat bo'lganda va faqat shu holdagina bevosita yig'indi bo'ladi.

287. $\boldsymbol{Z}$ halqada quyidagi ideallarning yaratuvchi elementini toping:

a) $(3)+(4)$; b) $(3)\bigcap(4)$; c) $(4)+(6)$; d) $(4)\bigcap(6)$;

e) $(6,9,15)+(10,25,30)$; f) $(6,9,15)\bigcap(10,25,30)$.

288*. K halqaning I_1 *ва* I_2 ideallari berilgan bo'lsin. $I_1\subseteq I_2$ yoki $I_2\subseteq I_1$ bo'lganda va faqat shu holdagina $I_1+I_2=I_1\bigcup I_2$ bo'lishini isbotlang.

289. n modul bo'yicha chegirtmalar sinflari halqasi $\boldsymbol{Z}_n$ ning additiv gruppasining ixtiyoriy qismgruppasi $\boldsymbol{Z}_n$ ning ideali va $\boldsymbol{Z}_n$ ning har qanday ideali bosh ideal bo'lishini isbotlang:

a) $\boldsymbol{Z}_4$; b) $\boldsymbol{Z}_6$; c) $\boldsymbol{Z}_{10}$; d) $\boldsymbol{Z}_{12}$ halqalarning hamma ideallarini toping.

290. $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \mid a,b\in \boldsymbol{Z}\right\}$ halqaning hamma ikki tomonlama ideallarini toping.

291. $\boldsymbol{Z}[i]=(1)=(i)=(-i)=(-1)$ ni isbotlang.

292. Ushbu $3-5i, 4+6i, -15+9i, 5-3i$ sonlarning qaysilari gausiy sonlarning $(3+5i)$ idealiga tegishli? Ulardan qaysilari shu idealni yaratadi?

293. $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}[i]$; $\boldsymbol{Z}[x]$ va $\boldsymbol{Q}[x]$ larda (2) idealni toping.

294. Butun sonlar halqasi $\boldsymbol{Z}$ ning ushbu

$$3\boldsymbol{Z}, 2\boldsymbol{Z}; 4\boldsymbol{Z}, 5\boldsymbol{Z},\ 6\boldsymbol{Z}, (-11)\boldsymbol{Z}, 24\boldsymbol{Z}, (-4)\boldsymbol{Z}, 13\boldsymbol{Z}, 33\boldsymbol{Z}, 12\boldsymbol{Z}$$

ideallarida qanday tegishliliklar o'rinli ekaniligini ko'rsating.

295*. $M(n,\boldsymbol{R})$ halqa sodda, ya'ni xos (ikki tomonlama) ideallarga ega emasligini isbot qiling.

296*. Agar $P-$ maydon bo'lsa, $M(n,P)-$ sodda halqa bo'lishini isbotlang.

297. $\boldsymbol{Z}$ halqaning: a) (3) b) (4) ideallar bo'yicha chegirtmalar sinflarini va ularga mos faktor halqalarni toping. Bu faktor halqalardagi qo'shish va ko'paytirish amallari uchun Keli jadvallari tuzing va ulardan qaysilari maydon ekanligini aniqlang.

298. $\boldsymbol{Z}$ halqaning $(m) = m\boldsymbol{Z}$ ideal bo'yicha chegirtmalar sinflarini toping. $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ faktor halqa $\boldsymbol{Z}_m$ ga izomorfligini isbotlang.

299. $\boldsymbol{Z}_{12}$ halqaning mos faktor halqalari maydon bo'ladigan hamma ideallarini toping.

300. Agar:

a) $K = \{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}, \quad I = \{a+bi \mid a,b \in 2\boldsymbol{Z}\};$

b) $K = \boldsymbol{Z}_2[x], \quad I = (x^2+x+1)$

bo'lsa, $I - K$ halqaning ideali ekanligini ko'rsating, K halqaning I ideal bo'yicha chegirtmalar sinflarini toping, K/I faktor halqadagi qo'shish va ko'paytirish amallari uchun Keli jadvallari tuzing va K/I faktor halqa maydon bo'lish bo'lmasligini aniqlang.

301. $I-$ ning K halqaning ideali ekanligini ko'rsating, K halqaning I ideal bo'yicha chegirtmalar sinflarini toping va K/I faktor halqaning maydon bo'lish bo'lmasligini aniqlang:

a) $K = \{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}, \quad I = \{a+bi \mid a,b \in 3\boldsymbol{Z}\};$

b) $K = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}, \quad I = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in 2\boldsymbol{Z}\};$

s) $K = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}, \quad I = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in 3\boldsymbol{Z}\};$

d) $K = \boldsymbol{Z}_2[x], \quad I = (x^2+x);$

e) $K = \boldsymbol{Z}_3[x], \quad I = (x^2+1);$

f) $K = \boldsymbol{Z}[x], \quad I = (x^2+1);$

g) $K = \boldsymbol{R}[x], \quad I = (x^2+1);$

h) $\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \boldsymbol{Z}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \boldsymbol{Z}\right\}.$

302. $K = \{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}$ halqaning $I = (n), n \in \boldsymbol{N}$ bosh ideal bo'yicha $K/I-$ faktor halqasi n ikki butun son kvadratlari yig'indisi shaklida ifodalanmaydigan sodda son bo'lganda va faqat shu holdagina maydon bo'lishini isbot qiling.

303. $\boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z}$ faktor halqaning $2+6\boldsymbol{Z}$ qo'shni sinfiga tegishli bir nechta butun son ko'rsating.

304. Qo'shni sinflarning $n+6\boldsymbol{Z} = 0+6\boldsymbol{Z}$ tengligi qanday shartda o'rinli bo'ldi?

305. Qanday shartda $(k+6\boldsymbol{Z})(l+6\boldsymbol{Z})=0+6\boldsymbol{Z}$ bo'ladi? k va l sonlarning bu tenglik o'rinli bo'ladigan qiymatlariga misollar keltiring.

306*. Ushbu:

$-3+5i;\quad 25+3i;\quad 47+10i;\quad -2;\quad 1+i;\quad 1-i;\quad 3i;-1;-2+i;\quad -2+3i$

sonlardan $Z[i]$ halqada (2) ideal bo'yicha bitta qo'shni sinfga tegishlilarni ko'rsating.

307. Quyidagi tengliklarning qaysilari $Z[i]/(2)$ faktor halqada o'rinli:

a) $1+2i+(2)=1-2i+(2);$

b) $1+(2)=i+(2);$

c) $3i+(2)=18-i+(2);$

d) $18-4i+(2)=0+(2);$

e) $3-i+(2)=3+i+(2);$

f) $3i+(2)=2+i+(2)$?

308. $\boldsymbol{Z}[i]/(2)$ faktor halqaning hamma elementlarini toping. Qo'shish va ko'paytirish ammallari jadvallarini tuzing. Bu faktor halqa butunlik sohasi emasligini ko'rsating.

309*. $\boldsymbol{Z}[i]/(3)$ faktor halqaning hamma elementlarini ko'rsating. Qo'shish va ko'paytirish jadvallarini tuzing. $\boldsymbol{Z}[i]/(3)-$ ning maydonligini isbotlang.

310. $\boldsymbol{Z}[i]/(5)$ faktor halqa nechta elementni o'z ichiga oladi? U maydon bo'laoladimi?

311. $\boldsymbol{Z}[i]/(13)$ faktor halqa butunlik sohasi ekanligini isbotlang.

312. $P-$ maydon bo'lsin. Uning hamma faktor halqalarini tavsiflang.

313. $x^2+x+1+(x^3-1)$ qo'shni sinf $\boldsymbol{R}[x]/(x^3+1)$ halqada nolning bo'luvchisi bo'lishini isbotlang.

314. $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2-2)$ faktor halqaning $x^4-3x^3+5x^2-7x+1+(x^2-2)$ qo'shni sinfda darajasi 4 dan kichik bo'lgan vakillarini ko'rsating. Darajasi mumkin qadar kichik bo'lgan vakilni toping.

315. $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ faktor halqaning $x^3+3x^2-5x+2+(x^2+1)$ qo'shni sinfida darajasi mumkin qadar kichik bo'lgan ko'phadni ko'rsating.

316. $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ faktor halqaning

$$x^5-2x^3+5x^2-2x+1+(x^2+1)$$

qo'shni sinfida darajasi mumkin qadar kichik bo'lganini ko'rsating. Bunday ko'phadlari nechta?

317. $R[x]/(x^2+x+1)$ faktor halqaning quyidagi elementlari orasidan nolga tenglarini ko'rsating:

a) $x^3+x+1+(x^2+x+1);$

b) $x^3+1+(x^2+x+1);$

c) $x^3-1+(x^2+x+1);$

d) $x^3+x^2+x+(x^2+x+1).$

318*. $\boldsymbol{R}[x]/(x)$ va $\boldsymbol{R}$ halqalarning izomorfligini isbotlang.

319. $\boldsymbol{Z}[x]/(x)$ va $\boldsymbol{Z}$ halqalarning izomorfligini isbotlang.

320. $\boldsymbol{Z}[x]$ halqaning $(x)+(3)$ ideali ozod hadi 3 ga karrali bo'lgan hamma butun koeffisiyentli ko'phadlardan iborat ekanligini isbotlang. $\boldsymbol{Z}[x]/(x,3)$ faktor halqa nechta elementdan iborat?

321. $\boldsymbol{Z}[x]/(x,3)-$maydon $\boldsymbol{Z}_3$ maydonga izomorfligini isbotlang.

322. $(x,3)$ ideal $\boldsymbol{Z}[x]$ ning maksimal ideali ekanligini isbotlang. (x) ideal $\boldsymbol{Z}[x]$ da maksimal bo'ladimi?

323*. K butunlik halqasi, I uning ideali bo'lsin. I maksimal ideal bo'lganda va faqat shu holdagina K/I maydon bo'lishini isbotlang.

324. $\boldsymbol{Z}[x]$ da maksimal bo'lmagan sodda ideallarga misollar keltiring.

325. $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in \boldsymbol{Z}\right\}$ bo'lsin. $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\right)=a-b$ bo'ladigan $f:K\to \boldsymbol{Z}$ akslantirish gomomorfizm bo'lishini isbotlang. Uning yadrosini va $K/Ker\ f$ faktor halqani toping.

326. $K=C[-1,1]$ bo'lsin. $f(g)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bo'ladigan $f:K\to \boldsymbol{R}$ akslantirish gomomofizm bo'lishini isbotlang. Uning yadrosini va $K/Ker\ f$ faktor halqani toping.

327. $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b\end{pmatrix} \mid a,b\in \boldsymbol{R}\right\}$ bo'lsin. $f(A)=trA$ (trA - A matritsaning izi) bo'ladigan $f:K\to R$ akslantirish gomomorfizm bo'lishini isbotlang. Uning yadrosi va $K/Ker\ f$ faktor halqani toping.

328*. Halqalarning hamma o'zida gomomorfizmlarini toping:

a) $\boldsymbol{Z}_{12}$; *b)* $\boldsymbol{Z}_{10}$; *c)* $\boldsymbol{Z}_7$.

329. $F-$ hamma haqiqiy funksiyalar to'plami, $c\in \boldsymbol{R}$ bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) $t(f)=f(c)-$ bo'ladigan $t:F\to \boldsymbol{R}$ akslantirish gomomorfizmdir;

b) $Ker\ t=\{\mathrm{f}\in \mathrm{F} \mid \mathrm{f}(c)=0\}$;

c) $F/Ker\ t$ faktorhalqa $\cong R$.

330. Halqalarni xos ideallarining bevosita yig'indisiga yoying:

a) $\boldsymbol{Z}_{10}$; b) $\boldsymbol{Z}_{12}$; c) $\boldsymbol{Z}_{15}$; d) $\boldsymbol{Z}_{36}$; ye) $\boldsymbol{Z}$.

331. $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b\end{pmatrix} \mid a,b\in \boldsymbol{R}\right\}$ halqada $I_1=\left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a\end{pmatrix} \mid a\in \boldsymbol{R}\right\}$ va $\mathrm{I}_2=\left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0\end{pmatrix} \mid c\in \boldsymbol{R}\right\}$ to'plamlar chap ideallarligini va $K=I_1\oplus I_2$ ni isbotlang. I_1 ва I_2 ideallarda birlik element mavjudmi?

332. Haqiqiy sonlar maydoni $\boldsymbol{R}$ da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa bilan kommutirlanuvchi hamma ikkinchi tartibli matritsalar halqasi K ni har biri $\boldsymbol{R}$ ga izomorf bo'lgan ikki idealning bevosita yig'indisiga yoying.

333. Quyidagi halqalarni, agar mumkin bo'lsa, xos ideallarning bevosita yig'indisiga yoying:

a) $K = \boldsymbol{R}[x]/(x^2 + x)$;

b) $K = \boldsymbol{R}[x]/(x^2)$;

c) $K = \boldsymbol{R}[x]/(x^2 + 1)$;

d) $K = \boldsymbol{C}[x]/(x^2 + 1)$.

334. Agar $K = I_1 \oplus I_2$ bo'lsa quyidagilarni isbotlang:

a) I_1 ning ixtiyoriy elementining I_2 ning ixtiyoriy elementiga ko'paytmasi nolga teng;

b) agar e_1 va e_2 – mos ravishda I_1 va I_2 ning birlari bo'lsa, $e_1 + e_2$ – element K ning biri bo'ladi;

c) $K / I_1 \cong I_2, \quad K / I_2 \cong I_1$.

III-BOB

BUTUN SONLAR XALQASIDA BO'LINISH NAZARIYASI

Tayanch iboralar**:** *bo'linma; bo'luvchi; qoldiqli bo'lish haqidagi teorema; to'liqmas bo'linma; qoldiq; umumiy bo'luvchi; eng katta umumiy bo'luvchi; juft-juft tub sonlar; umumiy karrali; eng kichik umumiy bo'linuvchi; Yevklid algoritmi; murakkab son; Eratosfen g'alviri; arifmetikaning asosiy teoremasi; kanonik yoyilma; chekli uzluksiz kasrlar; aniq bo'linmalar; munosib kasrlar; butun qism; kasr qism; antye funksiya; Eyler funksiyasi; Myobius funksiyasi.*

13-§. Butun sonlarning bo'linishi

Agar shunday q butun son mavjud bo'lib, $a = bq$ tenglik o'rinli bo'lsa, a butun son b butun songa ($b\neq 0$) bo'linadi yoki b son a sonni bo'ladi deyiladi. Bu yerda q bo'linma, b bo'luvchi, a bo'linuvchi deb ataladi. a sonning b songa bo'linishini $b|a$ shaklda belgilanadi, agar a son b songa bo'linmasa, uni $b \nmid a$ bilan belgilaymiz.

***Bo'linish xossalari**:*

a) bo'linish refleksiv, ya'ni $a|a$;

b) bo'linish tranzitiv, ya'ni agar $b|a$ va $c|b$ bo'lsa, u holda $c|a$;

c) $c|a$ dan ixtiyoriy butun b son uchun $c|ab$ o'rinli;

d) $c|a$ va $c|b$ dan ixtiyoriy butun x va y sonlar uchun $c|ax+by$ o'rinli (masalan, $c|a\pm b$). Bu xossa ikkidan ko'p sonlar uchun ham o'rinli;

e) $b|a$ va $a|b$ bo'lsa, $a = \pm b$;

f) $b|a$, $a > 0$, $b > 0$ dan $b \le a$ kelib chiqadi.

Qoldiqli bo'lish haqidagi teorema: a – butun son, b – butun musbat son bo'lsin. a son hamma vaqt b songa bo'linmaydi, lekin hamma vaqt *a son b songa qoldiqli bo'linadi*, ya'ni shunday yagona butun q va r sonlar topiladiki, ular uchun

$$a = bq + r,\ 0 \le r < b$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda q - *to'liqmas bo'linma*, r - soni a ni b ga bo'lgandagi *qoldiq* deyiladi.

1-m i s o l. a sonni 13 ga bo'lganda to'liqmas bo'linma 17 ga teng bo'lsa, a ning eng katta qiymatini toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra, $a = 13\cdot 17+r$, $0 \le r < 13$. Demak, $r = 12$ bo'lganda a eng katta qiymatga erishadi, ya'ni $13\cdot 17 + 12 = 233$. ■

2-m i s o l. Bo'linuvchi 371, to'liqmas bo'linma 14 ga teng bo'lsa, bo'luvchi va unga mos qoldiqlarni toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra, $371 = b\cdot 14 + r$, $0 \le r < b$, bundan $14b < 371$, $b \le 26$. Boshqa tomondan $15b > 371$, bundan $b > 24$. Demak, b=25; 26 va r = 21; 7 bo'ladi. ■

3-m i s o l. a sonni b songa bo'lganda bo'linma q va nolmas qoldiq r ga teng. a ni qanday natural n songa ko'paytirganda bo'linma n marta ortadi?

Yechish. $an = bqn + rn$ dan $rn < b$ va $n < \frac{b}{r}$. ■

4-m i s o l. Uchta ketma-ket natural sonlardan bittasi 3 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish. Natural sonni $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$ sonlarning bittasi shaklida ifodalash mumkin. Agar $n = 3k$ bo'lsa, u holda $3|n$; agar $n = 3k + 1$ bo'lsa, u holda $3|n + 2$; agar $n = 3k + 2$ bo'lsa, u holda $3|n+1$. ■

5-m i s o l. Agar besh xonali son 41 ga bo'linsa, shu sonni tashkil qilgan raqamlarni aylanma almashtirish yordamida hosil bo'lgan har qanday sonning 41 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish. Besh xonali son $N=10^4a+10^3b+10^2s+10d+e$ bo'lsin va u 41 ga bo'linsin. Raqamlarni aylanma almashtirishdan (chapga bir raqamga) quyidagi sonni hosil qilamiz:

$$N_1=10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10 e + a =$$
$$10(10^4 a + 10^3 b + 10^2 c + 10 d + e) - 10^5 a + a = 10N - 99999 a.$$

41| N va 41|99999 dan 41| N_1 kelib chiqadi. ■

6-m i s o l. $2^{2^n}+1\ (n=2,3,\ldots)$ ko'rinishdagi barcha sonlar 7 raqam bilan tugashini isbotlang.

Yechish. $2^{2^2}+1=17$. Agar $2^{2^n}+1=10q+7$, bo'lsa, u holda

$$2^{2^{n+1}}+1=\left(2^{2^n}\right)^2+1=(10q+6)^2+1=(10Q+6)+1=10Q+7. ■$$

7-m i s o l. 7·11·13=1001 ni bilgan holda 7, 11, 13 ga umumiy bo'linish alomatini keltirib chiqaring. Bu alomatni 368312 ga qo'llang.

Yechish. $N = 1000q + r = 1001q + r - q$ dan N son 7, 11 va 13 ga bo'linishi uchun shu sondan uning 1000 ga bo'linganida hosil bo'lgan qoldiqdan ayirmasi 7, 11 yoki 13 ga bo'linishi zarur va yetarligi kelib chiqadi, ya'ni $7\cdot11\cdot13/(1-q)$. Agar $N = 368312$ bo'lsa, yuqorida keltirilgan ayirma $368 - 312 = 56$.

56 faqat 7 ga bo'linganligi sababli 368312 7 ga bo'linadi, lekin 11 va 13 ga bo'linmaydi. ■

8-m i s o l. To'rtta ketma-ket joylashgan butun sonlar ko'paytmasiga bir qo'shilganda to'liq kvadrat hosil bo'lishini isbotlang.

Yechish. $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ – to'rtta ketma-ket keladigan butun sonlar bo'lsin. U holda

$$(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n-1)(n+2)(n^2+n)+1=(n^2+n-1)^2. ■$$

9-m i s o l. $11^{10} - 1$ sonni 100 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish. Nyuton binomini qo'llaymiz:

$$(1+10)^{10}=1+C_{10}^1\cdot10+C_{10}^2\cdot10^2+C_{10}^3\cdot10^3+\ldots+10^{10}.$$

Bundan

$$(1+10)^{10}-1=10\cdot10+C_{10}^2\cdot10^2+C_{10}^3\cdot10^3+\ldots.+10^{10}$$

har bir qo'shiluvchi 100 ga bo'linadi. ■

10-m i s o l. Har bir butun n uchun $n^5 - n$ son 5 ga bo'linishi isbotlang.

Yechish. $n^5 - n = n(n^2-1)(n^2+1)$. Butun sonni 5 ga bo'lganda qoldiqlar 0, 1, 2, 3, 4 bo'ladi va bundan butun son $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$, ko'rinishdan biriga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Agar $n = 5k$ bo'lsa, n son 5 ga bo'linadi; agar $n = 5k + 2$ yoki $n = 5k + 3$ bo'lsa, $(n^2 + 1)$ son 5 ga bo'linadi; agar $n = 5k + 1$ yoki $n = 5k + 4$ bo'lsa, (n^2-1) 5 ga bo'linadi. ■

11-m i s o l. Raqamlar yig'indisi bir xil bo'lgan ikki son ayirmasi 9 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish. $N_1 = \overline{a_n..a_1a_0}$ va $N_1 = \overline{b_m..b_1b_0}$ bo'lsin.

$$N_1 = 9Q_1 + \sum_{i=0}^{n} a_i \text{ va } N_2 = 9Q_2 + \sum_{j=0}^{m} b_j \text{ dan shartga ko'ra,}$$

$$\sum a_i = \sum b_j \text{, demak, } N_1 - N_2 = 9(Q_1 - Q_2). \ ■$$

12-m i s o l. Ketma-ket kelgan to'rtta raqam birin-ketin yozilgan bo'lib, dastlabki ikkita raqam o'rni almashtirilgandan so'ng to'la kvadrat bo'lgan to'rt xonali son hosil qilingan. Shu sonni toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra,

$$N^2 = 1000(x + 1) + 100x + 10(x + 2) + (x + 3) = 11(101x + 93).$$

Bundan $N = 11\cdot k$ va N to'la kvadrat bo'lganligidan $11k^2 = 101x + 93$, ya'ni $k^2 = \dfrac{101x+93}{11} = 9x + 8 + \dfrac{2x+5}{11}$. Bu yerdan $x = 3$ kelib chiqadi. Demak, $N = 11(101\cdot3 + 93) = 4356 = 66^2$. ■

M A S H Q L A R

335. Agar bo'linuvchi va bo'linma berilgan bo'lsa, bo'luvchi va qoldiqni toping: *a*) 25 va 3; *b*) – 30 va – 4.

336*. Isbotlang:

a) toq natural sonning kvadratini 8 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi;

b) ketma-ket ikki natural son kvadratlari yig'indisini 4 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi.

337*. 15 soni har qanday natural darajaga ko'tarilib, 7 ga bo'linsa 1 qoldiq qolishini isbotlang.

338*. Agar $mn + pq$ $m - p$ ga bo'linsa, u holda $mq + np$ ham $m - p$ ga bo'linishini ko'rsating, bu yerda $m, n, p, q \in \mathbf{Z}$.

339*. a, b, c, d, n – butun sonlar. $ad - bc$, $a - b$ sonlar n ga bo'linadi va b, n sonlar birdan farqli natural bo'luvchilarga ega emas. $c - d$ ni n ga bo'linishini isbotlang.

340. Ixtiyoriy butun n son uchun isbotlang:

a) $n^3 - n$ son 3 ga bo'linadi; *b*) $n^7 - n$ son 7 ga bo'linadi;

*c**) $n^5 - n$ son 30 ga bo'linadi.

341*. Olti raqamli son 5 bilan tugaydi, agar bu sonni chap tomonga birinchi o'ringa o'tkazsak, u holda berilgan sondan 4 marta katta son hosil bo'ladi. Shu sonni toping.

342*. $n(n+1)(2n+1)$ $(n \in \boldsymbol{N})$ sonni 6 ga bo'linishini isbotlang.

343*. Kasr sonning surati ikki toq sonning kvadatlari ayirmasi, maxraji esa shu sonlar kvadratlari yig'indisiga teng. Shu kasr surat va maxrajini ikkiga qisqartirish mumkin, 4 ga esa qisqarmasligini ko'rsating.

344*. To'la kvadrat bo'lgan to'rt xonali sonning minglar va o'nlar xonasidagi raqamlari bir xil, yuzlar xonasidagi raqam birlik raqamdan 1 ga katta. Shu sonni toping.

345*. Ketma-ket joylashgan beshta butun sonlar kvadratlarining yig'indisi to'la kvadrat bo'lmasligini isbotlang.

346*. Agar biror sonni 9 ga bo'lganda qoldiq 2, 3, 5, 6, 8 sonlardan birortasi bo'lsa, shu son to'la kvadrat bo'la olmasligini ko'rsating.

347. $S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{77\ldots7}_{n-ta}$ ketma-ketlikning n ta hadlari yig'indisini toping.

348*. 16 sonning raqamlari o'rtasiga 15 soni yozilgan, 1156 son o'rtasiga yana 15 yozilgan va hokazo. Shu sonlar to'la kvadrat bo'lishini ko'rsating.

349*. Har qanday natural m va n lar uchun $mn(m^4 - n^4)$ sonni 30 ga bo'linishini isbotlang.

350*. Hech qanday butun x uchun $3x^2+2$ son to'la kvadrat bo'laolmasligini ko'rsating.

351*. 3^n $(n \in N)$ ta bir xil raqamlardan tuzilgan natural sonni 3^n ga bo'linishini isbotlang.

14-§. Eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy bo'linuvchi

a, b, ..., l sonlarni bo'luvchi butun son shu sonlarni *umumiy bo'luvchisi* deyiladi.

Shu bo'luvchilarning eng kattasi *eng katta umumiy bo'luvchi* (EKUB) deyiladi va $d = (a, b, \ldots, l)$ bilan belgilanadi.

Agar $(a, b, \ldots, l) = 1$ bo'lsa, *a, b, ..., l* sonlar o'zaro *tub sonlar* deyiladi. Agar *a, b,..., l* sonlarning har biri qolganlari bilan o'zaro tub bo'lsa, bu sonlar *juft-juft bilan o'zaro tub sonlar* deyiladi.

Yevklid algoritmini qo'llab, sonlarni EKUB ini topish mumkin, bu usul quyidagicha: agar a va b natural sonlar va $a > b$ bo'lsa, u holda

$$a = bq_1+r_1,\ 0 < r_1 < b,$$
$$b = r_1 q_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1,$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1},$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1},\ r_{n+1}=0.$$

Noldan farqli oxirgi r_n qoldiq a va b sonlarni EKUB ini beradi.

Har qanday *a, b,…, l* sonlarga bo'linadigan son berilgan sonlarni *umumiy karralisi* deyiladi. Umumiy karralilarning eng kichigi *eng kichik umumiy bo'linuvchi* (EKUK) deyiladi va $m = [a, b, \ldots, l]$ bilan belgilanadi.

a va *b* sonlarni umumiy karralisi

$$M = \frac{ab}{d}t, \quad t \in \mathbf{Z}, \qquad d = (a,b)$$

tenglik yordamida topiladi. Agar $t = 1$ bo'lsa, bu tenglikdan *a* va *b* sonlarning EKUK i kelib chiqadi, ya'ni

$$m = \frac{ab}{d}, \quad \text{yoki} \quad [a,b] = \frac{ab}{(a,b)}.$$

Juft-juft o'zaro tub sonlarning EKUK i shu sonlar ko'paytmasiga teng.

Agar $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ *ва* $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, *бу ерда* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – turli tub sonlar, α_i, β_j – butun musbat sonlar bo'lsin. U holda

$$(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \ldots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)},$$

$$[a,b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \ldots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

quyidagi rekurrent formulalar yordamida bir nechta sonlarni EKUK va EKUB ini topish mumkin:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n]$$

Demak bu formulalardan bir nechta sonlarni EKUB va EKUK ini topish ikkita sonni EKUB va EKUK ini topish masalasiga keltiriladi.

1-m i s o l. (1734, 822) va [1734, 822] ni toping.

Yechish. Bu sonlar uchun Yevklid algoritmini topamiz:

1734 = 822 · 2 + 90;
822 = 90 · 9 + 12;
90 = 12 · 7 + 6;
12 = 6 · 2.

Demak, (1734, 822) = 6.

$$[1734, 822] = \frac{1734 \cdot 822}{6} = 237558. \blacksquare$$

2-m i s o l. Ikkita ketma-ket juft sonlarning EKUB i 2 ga, toq sonlarning EKUB i esa 1 ga tengligini isbotlang.

Yechish.

$(2n, 2n + 2) = 2(n, n + 1) = 2$

$2n + 3 = (2n + 1)\cdot 1 + 2$

$2n + 1 = 2\cdot n + 1$

$2 = 1\cdot 2$, bundan $(2n + 1, 2n + 3) = 1$. $\blacksquare$

3-m i s o l. $(a, b) = 1$ dan $(a + b, a - b)$ 1 yoki 2 ga tengligi kelib chiqishini isbotlang.

Yechish. $(a + b, a - b) = d$ bo'lsin, u holda $d|2a$ va $d|2b$. $(2a, 2b) =$

$= 2(a,b) = 2$ bo’lganligi sababli $d|2$.

Demak, $d = 1$ yoki 2. ■

4-m i s o l. Agar $u_1v_2 - u\ v_1 = 1$ bo’lsa, $(a,b) = (u_1\ a+v_1b,\ u_2a+v_2b)$ ni isbotlang.

Yechish. $(a, b) = d$ va $(u_1a + v_1b, u_2a + v_2b) = d_1$ bo’lsin. $d_1|(u_1a + v_1b)$, $d_1|(u_2a + v_2b)$ va $u_1v_2 - u_2v_1 = 1$ dan $d_1 \mid a$, $d_1 \mid b$, kelib chiqadi, demak, $d_1 \mid d$. $d \mid a$, $d \mid b$ dan $d_1 \mid d$ kelib chiqadi. Demak, $d = d_1$. ■

5-m i s o l. $3 = (51, 21)$ ni $51x + 21y$ shaklda ifodalang.

Yechish. $51 = 21\cdot2 + 9$, $21 = 9\cdot2 + 3$. Bundan
$3 = 21 - 2\cdot9 = 21 - 2(51 - 21\cdot2) = 21\cdot5 - 51\cdot2$. ■

6-m i s o l. ab va $m = [a, b]$ sonlarni EKUB ini toping.

Yechish. $(ab, m) = (dm, m) = m(d, 1) = m$, bu yerda $d = (a,b)$. ■

7-m i s o l. Uchta ketma-ket natural sonlarning EKUB va EKUK ini toping.

Yechish. $(n, n + 1, n + 2) = ((n, n + 1), n + 2) = (1, n + 2) = 1$.

$$[n,n+1,n+2] = [[n,n+1],n+2] = [n(n+1),n+2] =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1),n+2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n,n+2)},$$

$(n,n+2)$ n ning juft-toqligiga qarab 2 yoki 1 bo’ladi.

Demak, agar n toq bo’lsa, $[n, n + 1, n + 2] = n(n + 1)(n + 2)$, va agar n juft bo’lsa, $[n, n + 1, n + 2] = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$. ■

8-m i s o l. Ikkita sonning EKUB i shu sonlar ayirmasidan katta bo’lishi mumkinmi?

Yechish. $a > b$ va $(a, b) = d$ bo’lsin. Bundan $a = dx$, $b = dy$ va $x - y > 0$ bo’ladi. Agar $d > a - b = d(x - y)$ bo’lsa, $1 > x - y$ va $0 < x - y < 1$ ni hosil qilamiz. Bu tengsizlik o’rinli emas, chunki x va y – butun sonlar. Demak, $(a, b) \le a - b$ $(a > b)$ bo’ladi. ■

9-m i s o l. $\begin{cases} x+y=150 \\ (x,y)=30 \end{cases}$ sistemani natural yechimlarini toping.

Yechish. $(x, y) = 30$ quyidagi sistemaga teng kuchli.

$$\begin{cases} x = 30u \\ y = 30v \\ (u,v)=1. \end{cases}$$

Bundan berilgan sistemaning birinchi tenglamasi $u+v=5$ ko’rinishga keladi va $u=1,2,3,4$ qiymatlar qabul qiladi. Demak, $x = 30, 60, 90, 120$ ga teng bo’lishi mumkin. $y = 150 - x$ dan $y = 120, 90, 60, 30$. ■

10-m i s o l. Agar $(a, b) = 24$, $[a,b] = 2496$ bo’lsa, a va b larni toping.

Yechish. $(a, b) = 24$ dan $a = 24x$, $b = 24y$ va $(x,y) = 1$ kelib chiqadi. $x < y$ bo’lsin. $[a,b] = \dfrac{ab}{(a,b)}$ dan

$$2496=\frac{24x\cdot 24y}{24} \text{ yoki } xy=104=2^3\cdot 13.$$

$(x, y) = 1$ dan $xy = 1\cdot 104$ yoki $xy = 8\cdot 13$ bo'lishi mumkin. Bu yerdan $x = 1$ va $y = 104$ bo'lganda $a = 24\cdot 1 = 24$, $b = 24\cdot 104 = 2496$; $x = 8$ va $y = 13$ bo'lganda $a = 24\cdot 8 = 192$, $b = 24\cdot 13 = 312$. ■

M A S H Q L A R

352. Yevklid algoritmi yordamida sonlarning EKUB va EKUK ini toping:
a) 546 va 231; *b*) 1001 va 6253; *c*) 2737, 9163 va 9639;
d) 420, 126 va 525; *e*) 529, 1541 va 1817.

353. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratib sonlarning EKUB ini toping:
a) 360 va 504; *b*) 220 va 6600; *c*) 187 va 533;
d) 420, 126 va 525; *e*) 529, 1541 va 1817.

354*. Agar $a = cq+r$, $b = cq_1+r_1$ bo'lib, a, b, q, q_1 r, r_1 – butun nomanfiy sonlar; c – butun musbat son bo'lsa,

$$(a, b, c) = (c, r, r_1)$$

tenglikni isbotlang. Bu tenglikdan (a,b,c) ni topish qoidasini keltirib chiqaring va shu qoidani n ta son uchun umumlashtiring.

355. 354-masaladan foydalanib, quyidagi sonlarni EKUB ini toping:
a) 299, 391 va 667; *b*) 588, 2058 va 2849;
c) 31605, 13524 , 12915 va 11067.

356. $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$ formuladan foydalanib quyidagi sonlarning EKUK ini toping:
a) 252 va 468; *b*) 279 va 372; *c*) 178 va 381;
d) 299 va 234; *e*) 493 va 221.

357*. Agar $(a,b)=1$ bo'lsa, quyidagilarni toping:
a) $((a,b), [a,b])$; *b*) $(a+b, ab)$; *c*) $(a+b, [a,b])$.

358*. Ikki son yig'indisi 667, EKUK i va EKUB i nisbatlari 120 ga teng bo'lsa, shu sonlarni toping.

359*. Ikki sonni har birini ularning EKUB iga bo'lganda hosil bo'lgan bo'linmalar yig'indisi 18 ga teng. Sonlarning EKUK i 975 ga teng bo'lsa, shu sonlarni toping.

360*. $a = 899$, $b = 493$ berilgan. $d = (a,b)$ ni toping va shunday x va y larni aniqlangki, $d = ax + by$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsin.

361. 360-masalani quyidagi juftliklar uchun bajaring:
a) $a = 1445$, $b = 629$; *b*) $a = 903$, $b = 731$; *c*) $a = 1786$, $b = 705$.

362*. Sistemalarni natural yechimlarini toping:

a) $\begin{cases}(x,y)=45\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{7}\end{cases}$; *b*) $\begin{cases}xy=8400\\ (x,y)=20\end{cases}$;

$c)\ \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9} \\ (x,y)=28 \end{cases}$; $d)\ \begin{cases} xy=20 \\ [x,y]=10. \end{cases}$

363*. Agar *a, b, c* – toq sonlar bo'lsa,

$(a,b,c)=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)$ ni isbotlang.

364*. Isbotlang:

$a)\ [a,b,c]=\dfrac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$;

$b)\ (a,b)\,(a,c)\,(b,c)\,[a,b]\,[a,c]\,[b,c]=a^2b^2c^2$.

365*. $N=10a+b$ $(0\le b\le 9)$ natural son $m=10q+1$ songa bo'linishi uchun faqat va faqat $a-bq$ m ga bo'linishi kifoya ekanligini isbotlang.

366*. Toping:

a) $(n, 2n+1)$; *b*) $(10n+9, n+1)$; *c*) $(3n+1, 10n+3)$.

367*. $N=10a+b$ $(0\le b\le 9)$ natural son $m=10q+9$ ga bo'linishi uchun faqat va faqat $a+b(q+1)$ ni m ga bo'linishi kifoya ekanligini isbotlang.

368. Ixtiyoriy natural a va b lar uchun:

$$(a,b)=(5a+3b,\ 13a+8b)$$

tenglik o'rinli ekanligini isbotlang.

369. Agar $(a,b)=1$ bo'lsa, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+b}$ – qisqarmas kasr ekanligini isbotlang.

15-§. Tub va murakkab sonlar

Agar natural son *tub son* deyiladi, u ikkita turli natural bo'luvchiga (bir va o'zi) ega bo'lsa va *murakkab son* deyiladi, agar uning bo'luvchilar soni ikkitadan ko'p bo'lsa.

Bir son na tub, na murakkab songa tegishli emas. Tub sonlar (va ularning natural darajalari) o'zaro tubdir. Murakkab sonning birdan farqli natural bo'luvchisi $\sqrt{a}$ dan katta emas. Bu shartdan foydalanib *a* sonning tub bo'luvchilarini faqat $\sqrt{a}$ dan katta bo'lmagan tub sonlar orasidan izlash kerakligi kelib chiqadi.

a sondan katta bo'lmagan tub sonlarni jadvalini tuzish uchun *Eratosfen g'alviri* deb ataluvchi usul mavjud. Bu usul bo'yicha sonlar qatorida bi-rinchi topilgan p_1 tub songa karrali bo'lgan sonlarni o'chirish, so'ng ikkinchi r_2 tub sonni topib, unga karrali sonlarni o'chirish va hokazo. Bu prosessni $\sqrt{a}$ dan katta bo'lmagan tub songacha davom ettirib, 1 dan *a* gacha sonlar qatorida o'chirilmay qolgan sonlar *a* dan katta tub sonlarni beradi.

Birdan katta har qanday butun *a* sonni $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tub sonlar ko'paytmasi shaklida ko'paytuvchilar yozilishi tartibi aniqligida yagona ra-vishda yozish mumkin (*arifmetikaning asosiy teoremasi*):

$$a = p_1\, p_2 \ldots p_n \,.$$

Ba'zi ko'paytuvchilar takrorlanib kelishi mumkin, shuning uchun ularni karralilarini mos ravishda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ lar bilan belgilab, a sonning *kanonik yoyilmasi*ni hosil qilamiz, ya'ni:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} \,.$$

Bundan a sonning har qanday bo'luvchisi

$$d = p_1^{\beta_1} p_1^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$$

ko'rinishga ega bo'lishi kelib chiqadi, bu yerda $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, …., $0 \le \beta_n \le \alpha_n$.

1-m i s o l. Tub sonlar ayirmasi shaklida yoziladigan barcha toq sonlarni toping.

Yechish. Tub sonlardan bittasi albatta juft bo'lishi kerak, shuning uchun $N = p - 2$, bu yerda p – juft bo'lmagan tub son. ■

2-m i s o l. $N = 3m+2$ (m=1,2…,) sonning kvadratini natural son kvadrati va tub son yig'indisi shaklida yozish mumkin emasligini isbotlang.

Yechish. Agar $N^2 = n^2+p$ bo'lsa, u holda $p = (N-n)(N+n)$, bundan $N - n = 1$, $N + n = p$ va demak, $2N = 1 + p$ yoki $p = 2N - 1 = 6m + 3$, bu esa mumkin emas. ■

3-m i s o l. 127 tub yoki murakkab son ekanligini aniqlang.

Yechish. $\sqrt{127}$ dan oshmaydigan 2, 3, 5, 7, 11 tub sonlar 127 ini bo'luvchilari emas, demak, bu son tub sondir. ■

4-m i s o l. 2320 va 2350 sonlari orasida joylashgan barcha tub sonlarni toping.

Yechish. Yechimni soddalashtirish maqsadida 2321 dan 2349 gacha bo'lgan sonlar qatorida juft, 0 va 5 bilan tugallanadigan sonlarni yozmaslik mumkin, chunki bu sonlar tub emas. Demak: 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, 2337, 2339, 2341, 2343, 2347, 2349.

Bu sonlar qatoridan 3 ga bo'linadiganlarni o'chiramiz (3 ga bo'linish alomatidan foydalanamiz). Bu sonlar:

2331, 2337, 2343, 2349

Qolgan sonlar:

2321, 2323, 2327, 2329, 2333, 2339, 2341, 2347.

Bu qatorda 5 ga karrali son bo'lmaganligi sababli 7 ga karrali sonlarni o'chiramiz. Bu quyidagicha amalga oshiriladi. Qatordagi birinchi sonni 7 ga bo'lamiz:

$$2321 = 7 \cdot 331 + 4.$$

Qoldiq 4 dan (7 gacha 3 yechishmaydi) 7 ga karrali son natural sonlar qatoridagi 2321 dan keyingi uchinchi sonligi kelib chiqadi, ya'ni 2324 va shu 2324 dan keyingi barcha 7 chi sonlar bo'ladi. Ya'ni: 2331, 2338, 2345. 11 ga karrali son 2321. Bundan keyin keladigan 11 ga karrali sonlar 2332, 2343 sonlar o'chirilgan. 13 ga karrali sonlarni topamiz: qolgan sonlardan birinchi son 2323 ni 13 ga bo'lamiz:

$$2323=13\cdot 178+9.$$

Demak, 13 ga karrali son natural sonlar qatorida 2323 dan to'rtta keyin kelgan (9+4=13) bo'ladi, ya'ni 2327. Bu sonni o'chiramiz. 13 ga bo'linadigan keyingi son 2340, bu son o'chirilgan. $\sqrt{2350}<49$ bo'lganligi sababli bu prosessni to 47 tub songacha davom ettirish kerak. 2329 – 17 ga karrali, 2323 – 23 ga karrali sonlar. Qolgan 2333, 2339, 2341, 2347 sonlar tub sonlar bo'ladi. ■

5-m i s o l. $2^{18}+3^{18}$ yig'indini tub ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish.

$$2^{18}+3^{18}=\left(2^2+3^2\right)\left(2^4-2^2 3^2+3^4\right)\left(2^{12}-2^6\cdot 3^6+3^{12}\right)=$$

$$=13\cdot 61\left(2^{12}-2^6\cdot 3^6+3^{12}\right)=13\cdot 61\cdot 488881=13\cdot 61\cdot 37\cdot 73\cdot 181.$$ ■

6-m i s o l. 3, 5 va 7 sonlar yagona uch egizak sonlar (ya'ni ayirmasi 2 ga teng bo'lgan arifmetik progressiya tashkil etuvchi 3 ta tub son) tashkil etishini isbotlang.

Yechish. p, $p+2$ va $p+4$ ($p>3$) sonlarni ko'ramiz. $p=3q+1$ ($q=2,4,\ldots,$) bo'lsa, $p+2$ – son murakkab son bo'ladi (3 ga bo'linadi). Agar $p=q+2$ $(q=1,2,\ldots)$ bo'lsa, $p+4$ murakkab son bo'ladi. ■

7-m i s o l. 2^n-1 va 2^n+1 ($n>2$) sonlar bir vaqtda tub sonlar bo'laolmasligini isbotlang.

Yechish. $2^n=3q+1$ yoki $2^n=3q+2$ ko'rinishga ega. Birinchi holda $2^n-1=3q$ – murakkab son, chunki $n>2$ da $q>1$ bo'lishi kerak. Ikkinchi holda $2^n+1=3q+3$ – yana murakkab son. ■

8-m i s o l. $3n+2$ ($n=1,2,\ldots$) ko'rinishdagi eng katta tub son mavjud emasligini isbotlang.

Yechish. $N=3\cdot 5\cdot 7\cdots p+2$ ko'rinishdagi sonni qaraymiz, bu yerda $p=3n+2$ ko'rinishdagi son (N soni ham shu ko'rinishdagi son). N ning kanonik yoyilmasida p dan katta tub sonlar mavjud va bular orasida $3n+2$ ko'rinishdagi tub son mavjud. $3n+1$ ko'rinishdagi tub sonlar ko'paytmasi yana shu shaklga ega bo'lganligi sababli u N ga teng bo'laolmaydi. Demak, p qanday bo'lishidan qat'iy nazar $3n+2$ ko'rinishdagi p dan katta tub son mavjud. ■

9-m i s o l. $n>2$ sondan katta bo'lmagan barcha tub sonlar ko'paytmasi n dan katta bo'lishini isbotlang.

Yechish. p – tub son $p\le n$ shartni qanoatlantiruvchi eng katta tub son bo'lsin. $N=2\cdot 3\cdot 5\cdots(p\text{-}1)$ sonning kanonik yoyilmasi faqat n dan katta tub sonlardan iborat.

Demak, $N>n$ va bundan $N=2\cdot 3\cdot 5\cdots p > n$. ■

10-m i s o l. p va $8p^2+1$ – tub sonlar bo'lsa, $8p^2+2p+1$ tub son bo'lishini isbotlang.

Yechish. p va $8p^2+1$ – tub sonlar bo'lganligi sababli $p=3$ bo'lishi kerak, chunki $p=3k+1$ yoki $3k+2$ bo'lganda $8p^2+1$ tub bo'lmaydi. Demak, $8p^2+2p+1=79$ – bu tub son. ■

M A S H Q L A R

370. Sonlar orasida joylashgan tub sonlarni toping:
a) 200 va 220; *b*) 2540 va 2570; *c*) 1200 va 1250.

371*. $n > 1$ natural sonlar uchun $n^4 + 4$ va $n^4 + n^2 + 1$ murakkab sonlar bo'lishini isbotlang.

372*. Qanday tub p son uchun $4p^2 + 1$ va $6p^2 + 1$ tub sonlar bo'ladi.

373*. Qanday tub p son uchun $p + 10$ va $p + 14$ tub sonlar bo'ladi.

374*. Agar $a > 3$, natural m va n sonlarni 3 ga bo'lganda mos ravishda 1 va 2 ga teng qoldiqga ega bo'lsa, a, $a + m$, $a + n$ sonlar bir vaqtda tub bo'laolmasligini ko'rsating.

375*. n va $n!$ ($n > 2$) sonlar orasida hech bo'lmaganda bitta tub son borligini isbotlang.

376*. Barcha $2p + 1$ ko'rinishdagi butun sonlar ichida bitta son to'la kub bo'lishini isbotlang, bu yerda p – tub son.

377*. Agar tub sonlarni 5 tub sondan boshlab nomerlab chiqilsa, u holda har bir tub son o'zini uchlangan nomeridan katta bo'lishini isbotlang.

378*. Agar $p > 5$ tub son bo'lsa, uning kvadratini 30 ga bo'lganda qoldiq 1 yoki 19 bo'lishini ko'rsating.

379*. p va q – 3 dan katta tub sonlar bo'lsa, $p^2 - q^2$ son 24 ga karrali bo'lishini ko'rsating.

380*. Sonlar bir vaqtda tub son bo'laolmasligin isbotlang: *a*) $p + 5$ va $p + 10$; *b*) p, $p + 2$ va $p + 5$.

381*. Agar toq p sonni ikki son kvadratlari ayirmasi shaklida yagona ravishda ifodalash mumkin bo'lsa, u tub, aks holda murakkab bo'lishini isbotlang.

382*. 47 masala yechimidan foydalanib toq sonlarni ko'paytuvchilarga ajratish usulini keltirib chiqaring.
a) 6643; *b*) 1769; *s*) 3551; *d*) 6497 sonlarni ko'pay-tuvchilarga ajrating.

383*. Agar N son ikki sonlar kvadratlari yig'indisi shaklida ikki xil ifodalansa, ya'ni $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, u holda N murakkab son bo'lishini isbotlang.

384*. $235^2 + 972^2$ sonni ko'paytuvchilarga ajrating.

385*. $3^{10} + 3^5 + 1$ sonni ko'paytuvchilarga ajrating.

386*. Agar $1+2^k$ tub son bo'lsa, $k = 0$ yoki $k = 2^n$
($n = 0, 1, 2, \ldots$) bo'lishini isbotlang.

387*. O'zaro tub a,b sonlar uchun $a^\alpha + b^\beta$ tub son bo'lsa, $(\alpha, \beta) = 1$ yoki $(\alpha, \beta) = 2^k$ o'rinli bo'lishini ko'rsating.

388. Agar 2^n-1 tub son bo'lsa, n – tub son ekanligini ko'rsating.

16-§. Chekli uzluksiz kasrlar

Agar $\frac{a}{b}$ – qisqarmas kasr (to'g'ri yoki noto'g'ri) bo'lsa, bu kasrni Yevklid algoritmi yordamida quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}},$$

bu yerda q_0 – butun nomanfiy son; $q_1, q_2,\ldots, q_n$ – butun musbat sonlar.

Bu tenglikning o'ng tomonida yozilgan kasr *chekli uzluksiz kasr* yoki *zanjirli kasr* deyiladi.

Bu kasrlarni qisqacha

$$\frac{a}{b}=(q_0, q_1, q_2,\ldots,q_n)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Yevklid algoritmidagi $q_1, q_2,\ldots,q_n$ lar uzluksiz zanjirning *maxrajlari*; $q_0, q_1, q_2,\ldots, q_{n-1}$ – *to'liqmas bo'linmalar*; $q_0, q_1, q_2,\ldots, q_n$ lar esa *aniq bo'linmalar* deyiladi.

$$\delta_0=\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_0}{1},\qquad \delta_1=\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1};\ \ \delta_2=\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots,\delta_n=\frac{P_n}{Q_n}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}$$

lar *munosib kasrlar* deyiladi va $\frac{p_n}{Q_n}=\frac{a}{b}$.

Munosib kasrlar va $\frac{a}{b}$ kasr orasida quyidagi munosibatlar o'rinli:

$$\frac{P_0}{Q_0}<\frac{P_2}{Q_2}<\frac{P_4}{Q_4}<\ldots.<\frac{a}{b}<\ldots.<\frac{P_5}{Q_5}<\frac{P_3}{Q_3}<\frac{P_1}{Q_1}.$$

Bu tengsizliklardan berilgan $\frac{a}{b}$ kasr ikkita qo'shni munosib kasrlar orasida joylashganligi va tartib oshgani sari bu qo'shni kasrlar intervali kichrayib borishi ko'rinyapti. Shuning uchun ham bunday kasrlar «munosib kasrlar» deyiladi.

Ketma-ket uchta munosib kasrlar suratlari va maxrajlari $k = 2$ dan boshlab quyidagi bog'lanish o'rinli:

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}}$$

Agar shartli ravishda $P_{-1}=1$, $Q_{-1}= 0$, $Q_0 = 1$ qabul qilsak, u holda barcha munosib kasrlarni quyidagi sxema yordamida topish mumkin:

k		0	1	2	…	k	…	n
q_k		q_0	q_1	q_2	…	q_k	…	q_n
P_k	1	$P_0 = q_0$	$P_1 = q_0q_1 + 1$	$P_2=P_1q_2 + P_0$	…	$P_k = P_{k-1}q_k + P_{k-2}$	…	P_n
Q_k	0	$Q_0 = 1$	$Q_1 = q_1$	$Q_2 = Q_1q_2 + Q_0$	…	$Q_k = P_{k-1}q_k + Q_{k-2}$	…	Q_n

Ikkita qo'shni munosib kaslar ayirmasini

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}$$

formula yordamida topish mumkin.

$\frac{a}{b}$ kasrni $\frac{P_k}{Q_k}$ munosib kasr bilan almashtirganda hosil bo'lgan xatoni

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{P_k}{Q_k}\right| \le \frac{1}{Q_kQ_{k+1}}$$

tengsizlik bilan baholanadi.

1-m i s o l. $\frac{245}{83}$ sonni shunday munosib kasr bilan almashtiringki, uning xatosi 0, 001 dan katta bo'lmasin.

Yechish. Sonni uzluksiz kasrga yoyamiz:

$$\frac{245}{83} = (2,1,19,1,3).$$

Demak kasrlarni topamiz:

k		0	1	2	3	4
q_k		2	1	19	1	3
P_k	1	2	3	59	62	245
Q_k	0	1	1	20	21	83

$$\left|\frac{245}{83}-\frac{59}{20}\right|<\frac{1}{20\cdot 21}>\frac{1}{1000}.$$

δ_2 shartni qanoatlantirmaydi.

$\delta_3=\frac{62}{21}$ ni keltiramiz: $\left|\frac{245}{83}-\frac{62}{21}\right|<\frac{1}{21\cdot 83}<\frac{1}{1000}$. Demak, masala yechimi $\delta_3=\frac{62}{21}$.

■

2-m i s o l. $\frac{a}{b}=(2,1,1,3,1,2)$ uzluksiz kasrga mos kasrni toping.

Yechish. Munosib kasrlarni topamiz:

k		0	1	2	3	4	5
q_k		2	1	1	3	1	2
P_k	1	2	3	5	18	23	64
Q_k	0	1	1	2	7	9	25

Bu jadvaldan $\frac{a}{b}=\frac{64}{25}$.

Bu masalani yechimini quyidagicha topish mumkin:

$$\frac{a}{b}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{3}}}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{11}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{11}{14}}=2+\frac{14}{25}=\frac{64}{25}.$$

Bu usuldan zanjirdagi sonlar miqdori oz bo'lganda foydalanish mumkin. ■

3-m i s o l. $\frac{3587}{2743}$ kasrni kasrga yoyish yordamida qisqartiring.

Yechish. Sonni uzluksiz kasrga yoyamiz: $\frac{3587}{2743}=(1,3,4)$.

Demak, $\frac{3587}{2743}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=1+\frac{4}{13}=\frac{17}{13}$. ■

4-m i s o l. a va b – o'zaro tub musbat sonlar. $\frac{a}{b}$ ni uzluksiz kasrga yoygandagi oxiridan ikkinchi munosib kasr $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ bo'lsin. $ax + by = 1$ Diofant tenglamasini xususiy yechimi

$$x_0 = (-1)^{n-1} Q_{n-1}; \quad y_0 = (-1)^n P_{n-1}, \quad яъни \quad ax_0 + by_0 = 1$$

ko'rinishda bo'lishini isbotlang.

Yechish. $\frac{a}{b}$ ni uzluksiz kasr ko'rinishda tasvirlaymiz:

$$\frac{a}{b} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$$

Ikkita munosib kasrlar orasidagi formuladan $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}$, lekin $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$, shuning uchun $\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{bQ_{n-1}}$, bundan $aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^{n-1}$, yoki $a(-1)^{n-1} Q_{n-1} + b(-1)^n P_{n-1} = 1$.

Bu tenglikni $ax_0 + by_0 = 1$ tenglik bilan solishtirsak

$x_0 = (-1)^{n-1} Q_{n-1}, \quad y_0 = (-1)^n P_{n-1}$ ni hosil qilamiz. ■

5-m i s o l. $ax + by = c$ diofant tenglamasi yechimlarini toping.

Yechish. 4-misoldan

$$x_0 = (-1)^{n-1} Q_{n-1} c, \quad y_0 = (-1)^n P_{n-1} c$$

kelib chiqadi.

Agar tenglamada b koeffisiyentning ishorasi manfiy bo'lsa, u holda y_0 formulasida $(-1)^{n-1}$ ni olish kerak. Bu x_0 va y_0 qiymatlarini $x = x_0 – bt$, $y = y_0 + at$ ga qo'yib berilgan tenglamani umumiy yechimini hosil qilamiz: $ax + by = c$. ■

6-m i s o l. Uzluksiz kasrlar yordamida $38x + 117y = 209$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. $\frac{38}{117}$ ni uzlksiz kasrga yoyamiz: $\frac{38}{117} = (0,3,12,1,2)$.

k			0	1	2	3	4
Q_k			0	3	12	1	2
P_k	0	1	0	1	12	13	38
Q_k	1	0	1	3	37	40	117

kasrlarni topamiz.

Bundan: $P_{n-1} = 13$, $Q_{n-1} = 40$, $n = 4$.

5-misoldagi formulalardan

$$x_0 = (-1)^3 \cdot 40 \cdot 209 = -8360,$$

$$y_0 = (-1)^4 \cdot 13 \cdot 209 = 2717$$

ni topamiz. Demak, tenglamani umumiy yechimi:

$$x = -8360 - 117\, t,$$
$$y = 2717 + 38\, t.$$

Tekshirish: 38 (- 8360) + 117 · 2717 = - 317680 + + 317889 = 209. ■

7-m i s o l. Uzluksiz kasrlar yordamida $119\,x - 68\,y = 34$ tenglamani umumiy yechimimni toping.

Yechish. $\frac{119}{68}$ ni uzluksiz kasrga yoyamiz: $\frac{119}{68} = (1,1,3)$. Munosib kasrlarni topamiz:

k			0	1	2
q_k			1	1	3
P_k	0	1	1	2	7
Q_k	1	0	1	1	4

Bundan: $P_{n-1} = 2$, $Q_{n-1} = 1$, $n = 2$ ni aniqlaymiz.

(119, 68) = 17 va $c = 34$ son 17 ga bo'linadi. Berilgan tenglamani 17 ga bo'lib, $7x - 4y = 2$ ni hosil qilamiz.

Tenglamaning xususiy yechimi:

$$x_0 = (-1)^1 \cdot 1 \cdot 2 = -2,\ y_0 = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 2 = -4.$$

Umumiy yechim esa: $\left.\begin{aligned} x &= -2 + 4t \\ y &= -4 + 7t \end{aligned}\right\}.$

Tekshirish: 7 (-2) – 4 (-4) = - 14 + 16 = 2. ■

M A S H Q L A R

389. Kasrlarni uzluksiz kasrlarga yoying:

a) 2,71828; *b*) $\frac{103993}{33102}$; *c*) $\frac{99}{170}$; *d*) $\frac{355}{113}$.

390. Kasrlarni uzluksiz kasrlarga yoying:

a) $\frac{247}{74}$; *b*) $\frac{77}{187}$; *c*) $\frac{333}{100}$; *d*) $\frac{103993}{33102}$.

391. Uzluksiz kasrlarga yoyilmasidan foydalanib kasrlarni qiqartiring:

a) $\frac{3953}{871}$; *b*) $\frac{6059}{1241}$; *c*) $\frac{6821}{2147}$; *d*) $\frac{10027}{32671}$; *e*) $\frac{3653}{3107}$

392. Berilgan kasrni uzluksiz kasrga yoying va uni $\frac{P_4}{Q_4}$ kasr bilan almashtiring. Almashtirish xatosini toping va xatosi ko'rsatilgan holda taqribiy almashtirishga mos tengligini yozing:

a) $\frac{29}{37}$; *b*) $\frac{648}{385}$; *c*) $\frac{571}{359}$.

393. Ko’rsatilgan chekli uzluksiz kasrlarga mos oddiy qisqarmaydigan kasrlarni toping:

$$a)\quad \frac{a}{b}=(2,3,1,4);\quad b)\quad \frac{a}{b}=(1,1,2,3,4);\quad c)\quad \frac{a}{b}=(1,3,2,4,3,1,1,1,5);$$

$$d)\quad \frac{a}{b}=(2,1,1,2,1,6,2,5);\quad e)\quad \frac{a}{b}=(0,1,2,3,4,5);$$

$$f)\quad \frac{a}{b}=(-2,3,1,5,4,2);\quad g)\quad \frac{a}{b}=(0,13,2,2,2,1,1,7).$$

394. Tenglamani yeching:

$$a)\quad (x,2,3,4)=\frac{73}{30};\qquad b)\quad (2,1,2,x)=\frac{19}{7}.$$

395. Diofant tenglamalarini yeching:

a) 41x + 114y = 5; *b*) 19x – 15y = 1;
c) 23x – 17y = 11; *d*) 53x – 47y = 11;
e) 35x – 18y = 3; *f*) 85x – 71y = 5;
g) 41x – 11y = 7.

17-§. Sonli funksiyalar

1. S o n n i n g b u t u n q i s m i

x sonning *butun qismi*, ya’ni $[x]$ qo’sh tengsizlik bilan $[x]\le x\le [x]+1$ yoki $x-1<[x]\le x$; yoki $x=[x]+\alpha,\ 0\le\alpha\le 1$ tenglik bilan aniqlanadi va *ant’ye funksiya* deyiladi.

Agar x_1 va x_2 sonlardan birortasi butun bo’lsa,

$$[x_1 + x_2] = [x_1] + [x_2]$$

o’rinli bo’ladi.

$\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{[x]}{m}\right]$ o’rinli bo’ladi.

$m!$ ko’paytmaning kanonik yoyilmasiga p tub son

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{m}{p^S}\right]$$

darajada keladi, bu yerda S son $p^S\le m<p^{S+1}$ tengsizlikdan aniqlanadi.

1-m i s o l. $3-2\cos\dfrac{90\pi}{181}$ sonning butun qismini toping.

Yechish. $a\in\boldsymbol{Z}$ va x kasr son uchun $[a – x] = a + [-x]$ formula o’rinli. Bu formulani qo’llab

$$\left[3-2\cos\frac{90\pi}{181}\right]=3+\left[-2\cos\frac{90\pi}{181}\right]=3+(-1)=2$$

ni hosil qilamiz. ■

2-m i s o l. $\left[\frac{x+y}{n}\right]$ ni $\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{y}{n}\right]$ yoki $\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{y}{n}\right]+1$ga tengligini isbotlang.

Yechish. $\frac{x+y}{n}=\left[\frac{x}{n}\right]+\alpha+\left[\frac{y}{n}\right]+\beta$

bo'lib, bu yerda $0\le\alpha<1,\ 0\le\beta<1$. Demak,

$$\left[\frac{x+y}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{y}{n}\right]+[\alpha+\beta].$$

$0\le\alpha+\beta<2$ bo'lganligi sababli $[\alpha+\beta]$ 0 yoki 1 ga teng bo'ladi. ■

n dan katta bo'lmagan va $p_1, p_2,..., p_k$ tub sonlar bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar sonini quyidagi formula bilan hisoblash mumkin:

$$B(n;p_1,p_2,...,p_k)=[n]-\left[\frac{n}{p_1}\right]-....-\left[\frac{n}{p_k}\right]+\left[\frac{n}{p_1p_2}\right]+....+$$

$$+\left[\frac{n}{p_{k-1}p_k}\right]-\left[\frac{n}{p_1p_2p_3}\right]-....-\left[\frac{n}{p_{k-2}p_{k-1}p_k}\right]+....+(-1)^k\left[\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}\right].$$

3-m i s o l. 180 dan katta bo'lsagan va 5, 7, 11 larga bo'linmaydigan sonlar sonini toping.

Yechish. n = 180 va p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11 lar uchun

$$B(180;5,7,11)=[180]-\left[\frac{180}{5}\right]-\left[\frac{180}{7}\right]-\left[\frac{180}{11}\right]+\left[\frac{180}{5\cdot7}\right]+\left[\frac{180}{5\cdot11}\right]+$$

$$+\left[\frac{180}{7\cdot11}\right]-\left[\frac{180}{5\cdot7\cdot11}\right]=180-36-25-16+5+3+2-0=113.$$ ■

4-m i s o l. 2002! son nechta 0 bilan tugaydi.

Yechish. Misol yechimi 2002! Ning kanoniy yoyilmasiga 5 nechanchi daraja bilan kirishini aniqlash masalasiga keltiriladi:

$$\left[\frac{2002}{5}\right]+\left[\frac{2002}{25}\right]+\left[\frac{2002}{125}\right]+\left[\frac{2002}{625}\right]+\left[\frac{2002}{3125}\right]=$$

$$=400+80+16+3+0=499.$$

Demak, 2002! son 499 ta 0 bilan tugaydi. ■

5-m i s o l. (2*m*)!! ning kanonik yoyilmasiga *p* tub son nechanchi darajada kirishini aniqlang.

Yechish. (2*m*)!! = *m*! 2^m bo'lganligi sababli *p* = 2 ga teng bo'lsa,

$$m+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{2^i}\right],\ \ 2^k\le m<2^{k+1}.$$

p > 2 bo'lsa,

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{m}{p^i}\right], \quad p^s \le m < p^{s+1}$$

ga teng bo'ladi. ■

2. Haqiqiy sonning kasr qismi

Haqiqiy x sonning kasr qismi $\{x\}$ quyidagi formula bilan aniqlanadi: $\{x\} = x - [x]$.

6-m i s o l. {-4,35} ni toping.

Yechish. {-4,35} = –4,35 – (–5) = 0,65. ■

3. Natural sonning bo'luvchilar soni va ular yig'indisi

Ixtiyoriy natural a son uchun $\tau(a)$ va $S(a)$ funksiyalar mos ravishda a sonning natural bo'luvchilari soni va ularni yig'indisini ifodalaydi. Bu funksiyalar uchun quyidagi formulalar o'rinli:

$$\tau(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$$

$$S(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\dots\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1} = \prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1},$$

bu yerda $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}$ – a sonning kanonik yoyilmasi.

Bu funksiyalar multiplikativ, ya'ni agar $(a,b) = 1$ lar uchun

$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b) \text{ va } S(ab) = S(a)S(b)$$

o'rinli.

7-m i s o l. 2002 sonni bo'luvchilar soni va ularni yig'indisini toping.

Yechish. 2002 = 2 · 7 · 11 · 13, bundan

$$\tau(2002) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16,$$

$$S(2002) = \frac{2^{1+1}-1}{2-1}\cdot\frac{7^{1+1}-1}{7-1}\cdot\frac{11^{1+1}-1}{11-1}\cdot\frac{13^{1+1}-1}{13-1} = 3\cdot8\cdot12\cdot14 = 4032. \ ■$$

8-m i s o l. 2002 sonni barcha bo'luvchilarini toping.

Yechish. 2002=2·7·11·13 – kanonik yoyilmasidan foydalanamiz: (1+2)(1+7)(1+11)(1+13)=1+2+7+11+13+14+22+26+77+91+143+154+182+286+1001+2001 – 2002 ning barcha bo'luvchilari yig'indisi va demak har bir qo'shiluvchi izlanayotgan bo'linmalarni beradi. ■

9-m i s o l. Natural a sonning barcha natural bo'luvchilarining ko'paytmasi funksiyasi $\delta(a)$ bo'lsa,

$$\delta(a) = \sqrt{a^{\tau(a)}}$$

tenglik to'g'riligini isbotlang.

Yechish. $d_1, d_2, ..., d_{\tau(a)}$ – a sonning barcha natural bo'luvchilari bo'lsin. U holda $\delta(a)=\prod_{i=1}^{\tau(a)} d_i = d_1 d_2 \ldots d_{\tau(a)}$. $\frac{a}{d_1}, \frac{a}{d_2}, \ldots, \frac{a}{d_{\tau(a)}}$ – sonlar a ning bo'luvchilaridir, bundan $\delta(a)=\prod_{i=1}^{\tau(a)} \frac{a}{d_i} = a^{\tau(a)} \prod_{i=1}^{\tau(a)} \frac{1}{d_i}$.

δ(a) uchun hosil bo'lgan tengliklarni ko'paytirib $\delta^2(a)=a^{\tau(a)}$ ni hosil qilamiz, bundan $\delta(a)=\sqrt{a^{\tau(a)}}$. ■

10-m i s o l. 2002 sonining barcha natural bo'luvchilari ko'paytmasini toping.

Yechish. $\delta(2002)=\sqrt{2002^{16}}=2002^8$. ■

11-m i s o l. Barcha natural bo'luvchilari ko'paytmasi 5832 ga teng bo'lgan natural sonni toping.

Yechish. $\sqrt{a^{\tau(a)}}=5832=2^3\cdot 3^6$, bundan $a=2^x\cdot 3^y$ va

$$\begin{cases} x(1+x)(1+y)=6 \\ y(1+x)(1+y)=12. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi: x = 1, y = 2. Demak, a = 18. ■

12-m i s o l. 3 va 4 ga bo'linadigan va 14 ta bo'luvchiga ega bo'lgan sonni toping.

Yechish. Misol shartiga ko'ra, τ(a) = 14 = 2·7 == (1+1)(6+1),

demak, $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, ya'ni $a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$, bu yerda $\alpha_1\geq 2$, $\alpha_2\geq 1$. Demak, a = 2^6 · 3 = 192. ■

3. Berilgan musbat sondan katta bo'lmagan tub sonlar soni

π (x) barcha natural x lar uchun aniqlangan bo'lib, natural sonlar qatorida x dan katta bo'lmagan tub sonlar sonni bildiradi. π (x) ni qiymatini tub sonlar jadvali yordamida aniqlanadi yoki yetarlicha katta x lar uchun taqribiy hisoblash mumkin:

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ell n x} \quad \text{va} \quad \pi(x)\approx\int_2^x\frac{du}{\ell n u}.$$

13-m i s o l. $\pi(x)=\frac{x}{\ell n\, x}$ formula yordamida π (1000) ni qiymatini toping va natijaning nisbiy xatosini hisoblang.

Resheniye. $\pi(1000)\approx\frac{1000}{3\ell n 10}\approx\frac{1000}{6{,}9078}\approx 145.$

Tub sonlar jadvalidan π(1000)=168, demak nisbiy xato

$$\frac{\Delta\pi(1000)}{\pi(1000)}=\frac{168-145}{168}\approx 14\%. \ ■$$

4. E y l ye r f u n k s i ya s i

φ (a) – Eyler funksiyasi a sonning barcha natural qiymatlarida aniqlangan bo'lib, *a* dan katta bo'lmagan va u bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar sonini bildiradi. $\varphi(1) = 1$ deb qabul qilingan. Eyler funksiyasi:

$$\varphi(a) = a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right)\left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right)\ldots\left(p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}\right)$$

formula yordamida hisoblanadi, bu yerda $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ – sonning kanonik yoyilmasi.

Xususan, $\varphi\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$, $\qquad \varphi(p) = p - 1$.

Eyler funksiyasi multiplikativ, ya'ni o'zaro tub $a, b, \ldots, \ell$ sonlar uchun $\varphi(ab\ldots\ell) = \varphi(a)\varphi(b)\ldots\varphi(\ell)$ shart bajariladi.

14-m i s o l. φ (1956) ni hisoblang.

Yechish. $1956=2^2\cdot 3\cdot 163$ bo'lganligi sababli

$$\varphi(1956) = \left(2^2 - 2\right)(3-1)(163-1) = 2\cdot 2\cdot 162 = 648.\ \blacksquare$$

15-m i s o l. φ $(12 \cdot 5 \cdot 1956)$ ni hisoblang.

Yechish. O'zaro tub ko'paytuvchilarni aniqlash uchun ko'paytmani kanonik yoyilmasini topamiz:

$12\cdot 5\cdot 1956 = 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 163 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 163.$ Bundan

$$\varphi(12\cdot 5\cdot 1956) = \varphi\left(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 163\right) = \left(2^4 - 2^3\right)\left(3^2 - 3\right)(5-1)(163-1) =$$
$$= 8\cdot 6\cdot 4\cdot 162 = 31104.\ \blacksquare$$

16-m i s o l. $\varphi\left(3^x\cdot 5^y\right) = 600$ tenglamani yeching.

Yechish. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ dan $\varphi\left(3^x\cdot 5^y\right) = 2^3\cdot 3\cdot 5^2.$ Boshqa tomondan

$$\varphi\left(3^x 5^y\right) = \left(3^x - 3^{x-1}\right)\left(5^y - 5^{y-1}\right).$$

Demak, $3^{x-1}\cdot 2\cdot 5^{y-1}\cdot 4 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$ yoki $3^{x-1}5^{y-1} = 3\cdot 5^2$ va $x = 2$, $y = 3$. $\blacksquare$

17-m i s o l. $a = 72$ uchun *Gauss formulasini* to'g'riligini ko'rsating: $\sum_{d/a}\varphi(d) = a$.

Yechish. Gauss formulasi $\sum_{d/a}\varphi(d) = a$ da $a = 72$ deb olamiz: $a = 72 = 2^3 \cdot 3^2$.

72 ning barcha bo'luvchilari:

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)$.

$$\sum_{d/72}\varphi(d) = \left[\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi\left(2^2\right) + \varphi\left(2^3\right)\right]\left[\varphi(1) + \varphi(3) + \varphi\left(3^2\right)\right] =$$
$$= (1+1+2+4)(1+2+6) = 8\cdot 9 = 72 = a.\ \blacksquare$$

18-m i s o l. $\varphi(x) = p - 1$ tenglamani yeching.

Yechish. $x = r^{\alpha}\cdot y$ deb olamiz, bu yerda $(y, r) = 1$.

$r^{\alpha-1}\varphi(y) = 1$, bundan $\alpha = 1$ va $\varphi(y) = 1$. Demak, $r = 2$ da tenglama yagona $x = 2$ (chunki bu holda $y = 1$); $r > 2$ da tenglama ikkita: $x = r$; $2r$ yechimga ega. $\blacksquare$

19-m i s o l. Eyler funksiyasining xossalaridan foydalanib tub sonlar soni cheksiz ko'pligini isbotlang.

Yechish. $r_1, r_2,\dots,r_k$ – barcha tub sonlar bo'lsin, u holda

$a = r_1 \cdot r_2 \dots r_k$ son uchun $\varphi(a) = (r_1 - 1)(r_2 - 1)\dots(r_k - 1)$ bo'ladi. Boshqa tomondan $\varphi(a)=1$, chunki ixtiyoriy birdan farqli va a dan katta bo'lmagan son oddiy bo'luvchiga ega va bu bo'luvchi r_i lardan birortasiga teng, shu sababli bu son a bilan o'zaro tub bo'la olmaydi. Demak, $(r_1-1)(r_2-1)\dots(r_k-1)=1$, lekin bu tenglik $k = 2$ dan boshlab o'rinli emas, (2-1)(3-1) > 1 hosil qilingan qarama-qarshilik tub sonlar soni cheksizligini bildiradi.

5. Myobius funksiyasi

Barcha natural sonlar uchun aniqlangan

$$\mu(a)=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ (-1)^k, & агар \quad a=p_1p_2\dots p_k, \quad p_i\neq p_j \quad i\neq j\\ 0, & агар \quad a \text{ туб сон квадратига } \quad булинса\end{cases}$$

ko'rinishdagi funksiyaga *Myobius funksiyasi* deb ataladi.

Bu funksiya multiplikativdir, ya'ni agar $(a,b)=1$ bo'lsa, $\mu(a,b)=\mu(a)\mu(b)$.

Agar $\theta(a)$ – ixtiyoriy multiplikativ funksiya bo'lsa, u holda

$$\sum_{d/a}\mu(d)\,\theta(d)=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ \prod_{p/a}(1-\theta(p)), & агар \quad a\neq 1.\end{cases}$$

Agar bu formulada $\theta(a)\equiv 1$ va $\theta(a)=\dfrac{1}{a}$ deb olsak quyidagshi formulalarni hosil qilamiz:

$$\sum_{d|a}\mu(d)=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ 0, & агар \quad a\neq 1\end{cases}$$

$$\sum_{d|a}\frac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}1, & агар \quad a=1\\ \prod_{p/a}\left(1-\dfrac{1}{p}\right), & агар \quad a>1.\end{cases}$$

Agar butun a lar uchun $f(a)$ – funksiya birqiymatli bo'lib,

$$F(a)=\sum_{d|a}f(d) \quad (d>0)$$

o'rinli bo'lsa, u holda

$$f(a)=\sum_{d|a}\mu(d)F\left(\frac{a}{d}\right)$$

tenglik o'rinlidir (*Myobiusning teskarilash formulasi*).

20-m i s o l. μ (2002) ni hisoblang.

Yechish. 2002 = 2·7·11·13 dan μ (2002) = $(-1)^4$ = 1 kelib chiqadi.■

21-m i s o l.

$$\sum_{d|a}\mu(d)=0 \quad a=18$$ uchun to'g'riligini isbotlang.

Yechish. 18 ning bo'luvchilari: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Bundan

$$\sum_{d|18}\mu(d)=\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(6)+\mu(9)+\mu(18)=$$
$$=1+(-1)+(-1)+1+0+0=0.$$

22-m i s o l. $\sum_{d|a}\frac{\mu(d)}{d}=\prod_{p|a}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ formula to'g'riligini $a=12$ uchun tekshiring.

Yechish. 12 ning bo'luvchilari: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Bundan

$$\sum_{d|a}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\frac{\mu(3)}{3}+\frac{\mu(4)}{4}+\frac{\mu(6)}{6}+\frac{\mu(12)}{12}=$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{3}.$$

$$\prod_{p|12}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$ ■

M A S H Q L A R

396. Toping:

$a)\ [-2{,}7];\quad b)\ \left[2+\sqrt[3]{987}\right];\qquad c)\ \left[\frac{7-\sqrt{21}}{2}\right];\qquad d)\ \left[\frac{10}{3+\sqrt{3}}\right];$

$e)\ \left[1{,}(3)+2tg\frac{\pi}{4}\right];\quad f)\ \left[3+\sin\frac{13\pi}{7}\right];\quad g)\ [2-\lg 2512];$

$h)\ [2-\lg abcd];\quad i)\ \left[\sqrt{30}+\sqrt[3]{10}\right];\qquad j)\ [1-\ln 50].$

397*. Barcha haqiqiy x va y lar uchun $[x+y]\geq[x]+[y]$ to'g'riligini isbotlang.

398*. $[ax]=m$ tenglamani yechimini toping, bu yerda $a\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$.

399*. m ning qanday butun musbat qiymati uchun $[12{,}4\cdot m]=86$ tenglik o'rinli bo'ladi.

400*. Agar $p>2$ tub son bo'lsa, $\left[\frac{p}{4}\right]$ ning qiymati $\frac{p-1}{4}$ yoki $\frac{p-3}{4}$ ga tengligini isbotlang.

401*. a sonni m ga bo'lganda qoldiq r bo'lsa, $\left[\frac{a}{m}\right]=\frac{a-r}{m}$ tenglikni isbotlang.

402*. Agar m toq son bo'lsa, $\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m-1}{2}$ ni isbotlang.

403*. Tenglamani yeching:

$$a)\ \left[x^2\right]=2; \qquad b)\ \left[3x^2-x\right]=x+1;$$

$$c)\ [x]=\frac{3}{4}x; \quad d)\ \left[x^2\right]=x.$$

404*. 10^6 va 10^7 sonlar orasida 786 ga karrali bo'lgan nechta natural son bor?

405*. 1000 kichik natural sonlardan nechtasi 5 va 7 ga bo'linadi?

406*. 100 dan katta bo'lmagan natural sonlardan nechtasi 36 bilan o'aro tub?

407. 1000! ning kanonik yoyilmasida 11 nechanchi darajada keladi?

408. 1964! soni nechta nol bilan tugaydi?

409. 2311 dan oshmaydiganva 5, 7, 13, 17 larga bo'linmaydigan butun musbat sonlar soni nechta?

410. Nayti kolichestvo selыx polojitelnыx chisel, ne prevosxodyaщix 110 i vzaimno prostыx s chislom 36.

411. 12317 dan katta bo'lmagan va 1575 bilan o'zaro tub bo'lgan butun musbat sonlar sonini toping.

412. 1000 dan katta bo'lmagan va 363 bilan o'zaro tub bo'lgan butun musbat sonlar sonini toping.

413. r^n ! ning kanonik yoyilmasiga p tub son nechanchi darajada keladi?

414. Sonlarni kanonik yoyilmasini toping:

a) 10! ; *b*) 15! ; *c)* 20! ; *d*) 25! ; *e*) 30! .

415. $\frac{20!}{10!\quad 10!}$ ni kanonik yoyilmaini toping.

416*. α ning shunday eng katta qiymatini topingki, bunda

$$N=\frac{101\cdot 102\ldots 1000}{7^{\alpha}}-\text{ butun son bo'lsin.}$$

417*. $(2m+1)!!$ ning kanonik yoyilmasida p tub son nechanchi darajada bo'lishini aniqlang.

418*. $a\le x\le b, \quad 0\le y\le f(x),$ egri chiziqli trapesiyada butun koordinatali nuqtalar soni nechta? Bu yerda a va b – natural sonlar; $f(x)$ – berilgan kesmada uzluksiz va nomanfiy funksiya.

419. $x^2 + y^2 = 6{,}5^2$ doirada nechta butun koordinatali nuqta bor?

420*. Agar $(a, 4) = 1$ bo'lsa,

$\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=\frac{3(a-1)}{2}$ tenglik to'g'riligini isbtolang.

421*. Agar $(a, m) = 1$, $m \ge 2$, $a \ge 2$ bo'lsa,

$$\left[\frac{a}{m}\right]+\left[\frac{2a}{m}\right]+\ldots+\left[\frac{(m-1)a}{m}\right]=\frac{(m-1)(a-1)}{2}$$

tenglik to'g'riligini isbotlang.

422*. x ning qanday qiymatlarida $[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]=1$ tenglik o'rinli.

423*. $\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{x}{m-1}\right]$ tenglamani yeching, bu yerda m = 2, 3, 4...

424. Qanday shartlar bajarilganda $[ax^2 + bx + c] = d$ tenglama yechimga ega bo'ladi, bu yerda $a \neq 0$, $d \in \boldsymbol{Z}$.

425. Toping: $a)\ \{2{,}6\};\quad b)\ \left\{\frac{8}{3}\right\};\quad c)\ \{7\};\quad d)\ \left\{-2\frac{1}{2}\right\}.$

426. Berilgan sonlarni natural bo'luvchilari va ular yig'indisini toping:
a) 375 ; *b*) 720 ; *c*) 957 ; *d*) 988 ; *e*) 990 ; *f*) 1200.

427. Berilgan sonlarning barcha bo'luvchilarini toping:

a) 360 ; *b*) 375.

428*. $S(m) = 2m - 1$ sharti qanoatlantiruvchi natural m sonlar cheksiz ko'pligini isbotlang.

429*. Agar $(m, n) > 1$ bo'lsa, $\tau(m\ n)$ yoki $\tau(m)\ \tau(n)$ lardan qaysisi katta, $S(mn)$ va $S(m)\ S(n)$ larchi?

430. Agar $m = 1968$ bo'lsa, $\tau(m)$, $S(m)$, $\delta(m)$ larni toping.

431*. O'zining natural bo'luvchilari ko'paytmasiga teng bo'lgan barcha natural sonlar to'plami barcha tub sonlar to'plami bilan ustma-ust tushishini isbotlang.

432*. a natural sonning barcha natural bo'luvchilarining n-darajasi ($n \in \boldsymbol{Z}$) yig'indisi $S_n(a)$ formulasini keltirib chiqaring.

433. Toping: *a*) $S_2(12)$; *b*) $S_2(18)$; *c*) $S_2(16)$.

434. 28, 496, 8128 sonlar mukammal, ya'ni o'zining bo'luvchilari yig'indisining yarmiga tengligini isbotlang.

435*. *Yevklid teoremasi*ni isbotlang: $2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$ ko'rinishdagi juft natural sonlar mukammal sonlardir, bu yerda $2^{\alpha+1}-1$ – tub son.

436*. *Eyler teoremasi*ni isbotlang: $2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$ ko'rinishdagi natural sonlar, yagona mukammal juft sonlardir, bu yerda $2^{\alpha+1}-1$ – tub son.

437*. *Ferma masalasi*: $2^{\alpha}\cdot r_1\ r_2$ ko'rinishdagi shunday eng kichik son topingki, uning barcha bo'luvchilari yig'indisi o'zidan uch marta katta bo'lsin, bu yerda r_1 va r_2 – tub sonlar.

438*. Shunday son topingki, uning ikkita tub bo'luvchisi bo'lib, barcha bo'luvchilarning soni 6 ta yig'indisi 28 ga teng bo'lsin.

439*. Natural son ikkita tub bo'luvchiga ega. Shu son kvadratining barcha bo'luvchilari soni 15 ta bo'lsa, uning kubi nechta bo'luvchiga ega?

440*. Natural son ikkita tub bo'luvchiga ega. Shu son kvadratining barcha bo'luvchilari soni 81 ta bo'lsa, uning kubi nechta bo'luvchiga ega?

441*. Isbotlang:

$$N=\frac{d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}+d_n}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_{n-1}}+\frac{1}{d_n}},$$

bu yerda d_1, $d_2, \ldots, d_n$ – N sonning barcha bo'luvchilari.

442.* Agar $N = a^{\alpha}\ b^{\beta}\ \ldots\ m^{\mu}\ (a,\ b,.,\ m \in \mathbf{Z})$ bo'lsa, shu sonni ikkita son ko'paytmasi shaklida necha xilda yozish mumkin?

443.* $N = 2^{\alpha}\, 5^{\beta}\, 7^{\Upsilon}$ son berilgan**.** Agar $5N$ N dan kichik 8 ta bo'luvchiga, $8N$ – N dan katta .

444. $N = 2^{x}\ 3^{-y}\ 5^{z}$ son berilgan. Agar N ni 2 ga bo'lsak, yangi sonning bo'luvchilari N ning bo'luvchilaridan 30 ta kam; agar N ni 3 ga bo'lsak, yangi sonning bo'luvchilari N ning bo'luvchilaridan 35 ta kam; agar N ni 5 ga bo'lsak, yangi sonning bo'luvchilaridan 42 ta kam. Shu sonni toping.

445. Agar biror son to'la kvadrat bo'lishi uchun faqat va faqat uning bo'luvchilari soni toq bo'lishini isbotlang.

446. Quyidagilarni aniq qiymatini hisoblang:

a) π (4); *b*) π (7); *c*) π (10); *d*) π (12); *e*) π (25);

f) π (50); *g*) π (200); *h*) π (500).

447. $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ell n x}$ formula yordamida quyidagilarni taqribiy qiymatini va natijaning nisbiy xatosini toping:

a) π (50), b) π (100); *c*) π (500).

448*. Chebыshev tengsizligi yordamida

$$\frac{\pi(x)}{x} \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

ni isbotlang.

449*. Ixtiyoriy p tub son uchun $\dfrac{\pi(p-1)}{p-1} < \dfrac{\pi(p)}{p}$ o'rinli, lekin m - murakkab son bo'lsa, $\dfrac{\pi(m)}{m} < \dfrac{\pi(m-1)}{m-1}$ o'rinligini ko'rsating.

450. Toping:

$a)\ \varphi(375);\quad b)\ \varphi(720);\quad c)\ \varphi(988);\quad d)\ \varphi(1200);$

$e)\ \varphi(1500);\quad f)\ \varphi(4320)$

451. Ko'paytma qiymatini topmasdan ko'paytuvchilarning Eyler funksiyasini qiymatini toping:

a) φ (5 · 7 · 13) ; *b*) φ (12 · 17); *c*) φ (11 · 14 · 15·);

d) φ (990 · 1890).

452. 1 dan 120 gacha sonlar intervalida 30 bilan o'zaro tub bo'lmagan sonlar nechta?

453*. Agar $a = 3^{\alpha}\, 5^{\beta}\, 7^{\Upsilon}$ va $\varphi(a) = 3600$ bo'lsa, a ni toping.

454*. Agar $a = pq,\ p - q = 2$ va $\varphi(a) = 120$ bo'lsa, a ni toping. Bu yerda p va q – har xil tub sonlar har xil tub sonlar.

455*. Agar $a = p^2\, q^2$ va $\varphi(a) = 11424$ bo'lsa, a ni toping. p va q – har xil tub sonlar.

456*. Agar $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1>1$, $\alpha_2>1, \ldots, \alpha_n > 1$) va φ (a) = 462000 bo’lsa, a ni toping.

457*. m dan kichik va u son bilan o’zaro tub sonlar yig’indisi $S = \frac{1}{2} m \cdot \varphi(m)$ formula yordamida hisoblashini isbotlang.

458. $S = \frac{1}{2} a \cdot \varphi(a)$ formulani quyidagi sonlar uchun qo’llang: a) 12; b) 18; c) 375.

459*. Isbotlang:

$a)\ \varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1};\ b)\ \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}\varphi(p);\quad c)\ \varphi(a^\alpha) = a^{\alpha-1}\varphi(a),\ a \in \boldsymbol{N}.$

460. φ (2a) ni φ (a) yoki 2φ (a) ga tengligini isbotlang. Shu sonlar o’rinli bo’ladigan shartlarni toping.

461*. Isbotlang: a) φ (4n + 2) = φ (2n + 1);

b) $\varphi(4n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & agar \quad (n,2) = 1 \\ 2\varphi(2n), & agar \quad (n,2) = 2 \end{cases}$

462. Tenglamalarni yeching: a) φ (5^x) = 100; b) φ (7^x) = 294; c) φ (7^x) = 705894; d) φ (r^x) = r^{x-1} , $x \in \boldsymbol{N}$.

463. Berilgan b maxrajli nechta to’g’ri qisqarmas musbat kasrlar mavjud?

464. 129 masala yordamida maxrajlari quyidagilar bo’lgan qisg’armas musbat kasrlar sonini toping:

a) 10; b) 16; c) 36; d) 72.

465. $\frac{a}{b}$ musbat, to’g’ri qisqarmas kasr bo’lsin. Agar b = 2 dan b = n gacha qiymatlar qabul qilsa, bunday kasrlar nechta?

466. 131 masala shartida b: a) 2 dan 5 gacha; b) 2 dan 10 gacha; c) 2 dan 15gacha qiymatlar qabul qilsa, kasrlar sonini toping.

467*. 300 dan kichik natural sonlar ichida 20 bilan teng umumiy bo’luvchiga ega bo’lgan sonlar nechta?

468. 1665 dan kichik natural sonlar ichida u bilan 37 ga teng umumiy bo’luvchiga ega bo’lgan sonlar nechta?

469. 1476 dan kichik natural sonlar ichida u bilan 41 ga teng umumiy bo’luvchiga ega bo’lgan sonlar nechta?

470*. $a \geq 3$ lar uchun φ (a) ning qiymati doimo juft son bo’lishini isbotlang.

471*. Agar φ (x) = a tenglama x = m ildizga ega bo’lsa, x = 2m ham tenglama ildizi bo’lishini isbotlang, bu yerda (m,2) = 1.

472*. (m,n) > 1 bo’lsa, φ (m n) yoki φ (m) φ (n) larni solishtiring?

473*. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\varphi(d)}$ tenglikni isbotlang, bu yerda $(m,n) > 1$.

474*. φ (m n) = φ (δ) φ (μ) tenglikni isbotlang, bu yerda $\delta = (m,n)$, $\mu = [m,n]$.

475. $\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \ldots + \varphi(p^\alpha)$, $\alpha \in \boldsymbol{N}$ ni hisoblang.

476. $\varphi\left(\frac{a}{d_1}\right)+\varphi\left(\frac{a}{d_2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{a}{d_k}\right)$ ni hisoblang, bu yerda d_i –a ning barcha bo'luvchilari?

477. Quyidagi sonlar uchun $\sum_{d/a}\varphi(d)=a$ to'g'riligini tekshiring: a) 80; b) 360; c) 375; d) 957; e) 2800.

478. Tenglamalarni yeching: a) $\varphi(x) = 2^{\alpha}$; b) $\varphi(p^x) = 6 \cdot p^{x-2}$.

479. Tenglamalarni yeching: a) $\varphi(x) = 14$; b) $\varphi(x) = 8$;

c) $\varphi(x) = 12$.

480*. Tenglamani yeching: $\varphi(2x) = \varphi(3x)$.

481. $\varphi(5x) = \varphi(7x)$ tenglama butun sonlar to'plamida yechimga ega emasligini isbotlang.

482. Tenglamalarni yeching: *a*) $\varphi(x) = \varphi(p\,x)$;

b) $\varphi(p\,x) = p\varphi(x)$;

c) $\varphi(p_1x) = \varphi(p_2x)$ (p_1, p_2 – turli tub sonlar).

483*. Tenglamani yeching:

$$a)\ \varphi(x)=\frac{x}{2};\quad b)\ \varphi(x)=\frac{x}{3};\quad c)\ \varphi(x)=\frac{x}{4}.$$

484. $\varphi(p^x) = a$ tenglamani tekshiring.

485. a = 1, 2,…, 100 sonlar uchun $\mu(a)$ funksiyaning jadvalini tuzing.

486. a = 24 uchun $\sum_{1/a}\mu(d)=0$ formula to'g'riligini tekshiring.

487. a = 18 uchun $\sum_{d/a}\frac{\mu(d)}{d}=\prod_{p/a}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ formula to'g'riligini isbotlang.

IV-BOB

BUTUN SONLAR XALQASIDA TAQQOSLAMALAR NAZARIYASI

Kalit so'zlar va ifodalar: taqqoslanuvchi sonlar*; taqqoslamaning ma'nosi haqidagi teorema; sonlar sinfi; berilgan modul bo'yicha chegirma; berilgan modul bo'yicha chegirmalarning to'la sinfi, berilgan modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sinfi, Eyler teoremasi, Ferma teoremasi; berilgan modul bo'yicha chegirmalarning additiv gruppasi; berilgan modul bo'yicha chegirmalarning xalqasi; modul bilan o'zaro tub chegirmalar sinfi; modul bilan o'zaro tub chegirmalarningn multiplikativ gruppasi; absolyut psevdotub son; Bir noma'lumli n-darajali taqqoslama; taqqoslamaning yechimi; teng kuchli taqqoslamalar; birinchi darajali taqqoslamalar; birinchi darajali bir xil noma'lumli taqqoslamalar sistemasi; birinchi darajali bir xil noma'lumli taqqoslamalar sistemasining yechimlari*.

18-§. Taqqoslama tushunchasi va uning xossalari

a va b *butun sonlarni* butun musbat m soniga bo'lganda bir xil qoldiq qoladigan, ya'ni

$$a = mq_1 + r \qquad \text{va} \qquad b = mq_2 + r,$$

bo'lsa, a va b *sonlar* teng qoldiqdli yoki m modul bo'yicha o'zaro taqqoslanadigan sonlar deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$a \equiv b \ (mod\ m)$$

"*a son b bilan m modul bo'yicha taqqoslanadi*" deb o'qiladi.

Agar $a \equiv b\ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a - b$ ayirma m ga qoldiqsiz bo'linadi, va aksincha, agar a va b sonlarning ayirmasi m ga bo'linsa, u holda $a \equiv b\ (mod\ m)$ o'rinli bo'ladi (*taqqoslamaning ma'nosi haqidagi teorema*).

Har qanday butun son m modul bo'yicha o'zining qoldig'i bilan taqqoslanadi, ya'ni, agar $a = mq + r$ bo'lsa, u holda $a \equiv r\ (mod\ m)$ bo'ladi.

Xususiy holda, agar $r = 0$ bo'lsa, u holda $a \equiv 0\ (mod\ m)$ bo'ladi; bu taqqoslama $m \mid a$ ekanligini, ya'ni m soni a ning bo'luvchisi ekanligini bildiradi, aksincha ham o'rinli, agar $m \mid a$ bo'lsa, u holda $a \equiv 0\ (mod\ m)$ deb yoziladi.

Taqqoslamalarning asosiy xossalari
(tengliklarning xossalariga o'xshash)

1. Agar $a \equiv c\ (mod\ m)$ va $b \equiv c\ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a \equiv b\ (mod\ m)$ bo'ladi.
2. Agar $a \equiv b\ (mod\ m)$ va $c \equiv d\ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ m)$ bo'ladi.
3. Agar $a + b \equiv c\ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a \equiv c - b\ (mod\ m)$ *bo'ladi*.
4. Agar $a \equiv b\ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a \pm mk \equiv b\ (mod\ m)$, yoki $a \equiv b \pm mk\ (mod\ m)$ bo'ladi.
5. Agar $a \equiv b\ (mod\ m)$ va $c \equiv d\ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $ac \equiv bd\ (mod\ m)$ *bo'ladi*.

6. Agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ bo’lsa, u holda $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)\ (n \in \mathbf{N})$ *bo’ladi*.
7. Agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ bo’lsa, u holda ixtioriy k butun son uchun $ak \equiv bk \ (mod\ m)$ *bo’ladi,.*
8. Agar $ak \equiv bk \ (mod\ m)$ va $(k,m) = 1$ bo’lsa, u holda $a \equiv b \ (mod\ m)$ *bo’ladi*.
9. Agar $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \ (a_i \in \mathbf{Z})$ va $x \equiv x_1 \ (mod\ m)$ bo’lsa, u holda $f(x) \equiv f(x_1) \ (mod\ m)$ *bo’ladi*.

Taqqoslamalarninng maxsus xossalari

1. Agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ bo’lsa, u holda $k \in \mathbf{N}$ *uchun* $ak \equiv bk \ (mod\ mk)$ bo’ladi.
2. Agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ va $a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad m = m_1 d$ bo’lsa, u holda $a_1 \equiv b_1 \ (mod\ m_1)$ bo’ladi.
3. Agar $a \equiv b \ (mod\ m_1), a \equiv b \ (mod\ m_2), ..., a\ (\ b\ (mod\ m_k)$ bo’lsa, u holda $a \equiv b \ (mod\ M)$ bo’ladi, bu yerda $M = [m_1, m_2,..., m_k]$.
4. Agar taqqoslama m modul bo’yicha o’rinli bo’lsa, u holda bu taqqoslama m ning ixtiyoriy bo’luvchisi bo’lgan d modul bo’yicha ham o’rinli bo’ladi.
5. Agar taqqoslamaning bir tomoni biror songa bo’linsa, u holda uning ikkinchi tomoni va moduli ham shu songa bo’linadi.

1-Misol. Quyidagi shartlarni taqqoslamalar yordamida yozing:

a) 219 va 128 sonlarni 7 ga bo’lganda bir xil qoldiq qoladi;
b) (-352) sonini 31 ga bo’linganida qoldiq 20 ga teng bo’ladi ;
c) 487 - 7 ayirma 12 ga bo’linadi; d) 20 – soni 389 ni 41 ga bo’lgandagi qoldiqdan iborat;
e) N soni juft; f) N soni toq; g) N sonining ko’rinishi $4k + 1$ dan iborat;
h) N sonining ko’rinishi $10k + 3$ dan iborat; i) N sonining ko’rinishi $8k – 3$ dan iborat.

Yechilishi. Taqqoslamaning ma’nosi haqidagi teoremaga asosan:

a) $219 \equiv 128\ (mod\ 7)$; b) $–352 \equiv 20\ (mod\ 31)$; c) $487 \equiv 7\ (mod\ 12)$; d) $389 \equiv 20\ (mod\ 41)$;
e) $N \equiv 0\ (mod\ 2)$; f) $N \equiv 1$ yoki $-1\ (mod\ 2)$; g) $N \equiv 1\ (mod\ 4)$; h) $N \equiv 3\ (mod\ 10)$; i) $N \equiv -3\ (mod\ 8)$. ■

2-Misol. Quyidagi shartni qanoatlantiradigan m ning qiymatlarini toping:

$$20 \equiv 8\ (mod\ m).$$

Yechilishi. m ning qiymatlari (taqqoslamaning ma’nosi haqidagi teoremaga asosan) $20 – 8 = 12$ ning bo’luvchilaridan iborat, ya’ni: 1; 2; 3; 4; 6; 12. ■

3-Misol. $2^{5n} – 1$ ning 31 ga bo’linishini isbotlang $(n \in \mathbf{N})$.

Yechilishi. $2^5 – 1 = 31$ bo’lganligi uchun $2^5 \equiv 1\ (mod\ 31)$. Bu taqqoslamaning ikkala tomonini (6-xossaga asosan) n darajaga ko’tarib, $2^{5n} \equiv 1\ (mod\ 31)$ ni hosil qilamiz, bu esa $31 \mid (2^{5n} – 1)$ ni anglatadi. ■

4-Misol. 2^{100} sonining oxirgi ikkita raqamini toping.

Yechilishi. Berilgan sonning oxirgi ikki raqami bu sonni 100 ga bo’lganda hosil bo’ladigan qoldiqdan iborat. Demak, quyidagi taqqoslamani qanoatlantiradigan x sonini topish talab qilinadi:

$$2^{100} \equiv x \ (mod\ 100).$$

Ikkining kichik darajalaridan boshlab, 100 ga bo'lganda hosil bo'ladigan qoldiqlarni ketma-ket ajratamiz:

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10};\ (1024)^{10} \equiv (24)^{10}\ (mod\ 100).$$

$(24)^{10} = (576)^5 \equiv 76^{\,5} \equiv (76)^4 \cdot 76 = (5776)^2 \cdot 76 \equiv (76)^2 \cdot 76 = 5776 \cdot 76 \equiv 76^2 \equiv 5776 \equiv 76$ $(mod\ 100)$.

Shunday qilib, 2^{100} sonining oxirgi ikki raqamir 7 va 6 dan iborat. ■

5-Misol. Agar p – tub son bo'lsa, u holda $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^k\ (mod\ p)$ taqqoslamani isbotlang.

Yechilishi. Ma'lumki, ixtiyoriy p va k sonlar uchun $C_{p-1}^{k} + C_{p-1}^{k-1} = C_p^k$ formula o'rinli, C_p^k - butun sondan iborat bo'lib, p ga bo'linadi, chunki $k < p$, p esa tub sondan iborat, shuning uchun u maxrajning birorta ham ko'paytuvchisi bilan qisqarib ketmaydi. Shunday qilib, $C_p^k \equiv 0\ (mod\ p)$. U holda $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)\ C_{p-1}^{k-1}\ (mod\ p)$.

Bu rekurrent munosabatni ketma-ket qo'llab, yuqori ko'rsatkichni 1 gacha kamaytiramiz:

$$C_{p-1}^{k} \equiv (-1)\ C_{p-1}^{k-1} \equiv (-1)^2\ C_{p-1}^{k-2} \equiv (-1)^3\ C_{p-1}^{k-3} \equiv \ldots \equiv (-1)^{k-1}(p-1) \equiv (-1)^k (mod\ p).\ ■$$

6-Misol. Agar a va b – ixtiyoriy butun sonlar, p – tub son bo'lsa, quyidagi taqqoslamani isbotlang

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ (mod\ p).$$

Yechilishi. Binomni yoyish formulasidan:

$$(a+b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-2} b^2 + \ldots + C_p^{p-1} a b^{p-1} + b^p.$$

O'ng tomonda ikkinchi qo'shiluvchidan boshlab, p-*1* –nchi qo'shiluvchigacha barcha qo'shiluvchilar p ga bo'linadi, chunki

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-(k-1))}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}\text{, bu yerda } k < p.$$

Demak, $C_p^i \equiv 0 (mod\ p)$, $i = 1, 2, \ldots, (p-1)$.

Bu yerdan $(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ (mod\ p)$ kelib chiqadi. ■

MAShQLAR

488. Qanday modul bo'yicha barcha butun sonlar o'zaro taqqoslanadi?

489. Quyidagi taqqoslamalardan qaysilari to'g'ri:

a) $1 \equiv -5\ (mod\ 6)$; b) $546 \equiv 0\ (mod\ 13)$; c) $1956 \equiv 5\ (mod\ 12)$;

d) $2^3 \equiv 1\ (mod\ 4)$; e) $3m \equiv -1\ (mod\ m)$?

490. Berilgan modul bo'yicha har qanday butun son o'zining qoldig'i bilan taqqoslanishini isbot qiling.

491. Quyidagi taqqoslamalarni qanoatlantiradigan x ning barcha qiymatlarini toping:

a) $x \equiv 0\ (mod\ 3)$; b) $x \equiv 1\ (mod\ 2)$.

492. Quyidagi taqqoslamalarni qanoatlantiradigan m ning barcha qiymatlarini toping: $3r + 1 \equiv r + 1$ (*mod m*).

493. Agar $x = 13$ soni $x \equiv 5$ (*mod m*) taqqoslamani qanoatlantirsa, modulning mumkin bo'lgan qiymatlarini toping.

494*. Agar n – toq son bo'lsa, u holda $n^2 - 1 \equiv 0$ (*mod* 8) taqqoslama o'rinli ekanligini ko'rsating.

495*. Agar $100a + 10b + c \equiv 0$ (*mod* 21) bo'lsa, u holda $a - 2b + 4c \equiv 0$ (*mod* 21) taqqoslamaning o'rinli ekanligini ko'rsating.

496. Agar $3^n \equiv -1$ (*mod* 10) bo'lsa, u holda $3^{n+4} \equiv -1$ (*mod* 10) ($n \in \mathbf{N}$) taqqoslamaning o'rinli ekanligini ko'rsating,.

497*. $2^{11 \bullet 31} \equiv 2$ (*mod* $11 \cdot 31$) taqqoslamaning to'g'riligini ko'rsating.

498*. Agar $x = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ bo'lsa, u holda $1 + 3^x + 9^x$ ning 13 ga bo'linishini ko'rsating.

499. $N = 11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$ soni 7 modul bo'yicha absolyut qiymati bo'yicha eng kichik qanday son bilan taqqoslanadi?

500. $3^{14} \equiv -1$ (*mod* 29) ni tekshiring.

501. $1532^5 - 1$ ni 9 ga bo'lganda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

502*. Agar $a \equiv b$ (*mod* p^n) bo'lsa, u holda $a^p \equiv b^p$ (*mod* p^{n+1}) ni isbotlang.

503. Agar $ax \equiv bx$ (*mod m*) bo'lsa, u holda $a \equiv b\left(mod\,\frac{m}{(x,,m)}\right)$ ni isbotlang.

504*. Agar $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} \equiv 0$ (*mod* 33) bo'lsa, u holda $a_4 + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} \equiv 0$ (*mod* 33) ni isbotlang. $a_{i+1} = 0$ da $\overline{a_{i+1}a_i} = a_i$ deb oling.

505*. Berilgan sonning oxirgi ikkita raqamini toping: a) 9^{9^9}; b) 7^{9^9}.

506*. $r^{r+2} + (r+2)^r \equiv 0$ (*mod* $2r+2$) taqqoslamani isbot qiling, bu yerda $r > 2$.

507*. Quyidagi sonlarni

$$-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$$

r > 2 modul bo'yicha o'zaro taqqoslanmasligini ko'rsating.

508*. $2^{3^n} \equiv -1$ (*mod* 3^{n+1}), $n \in \mathbf{N}$ taqqoslamani isbotlang.

509*. $N = 3^{2^{4n+1}} + 2$ va $M = 2^{3^{4n+1}} + 3$ ($n \in \mathbf{N}$) ko'rinishdagi sonlarning murakkab sonlardan iboratligini isbot qiling.

510*. Agar

$$\left.\begin{array}{r} ac \equiv bd \\ a \equiv b \end{array}\right\}(mod\; m)$$

taqqoslamalar berilgan va $(a, m) = 1$ bo'lsa, u holda birinchi taqqoslamani ikkinchi taqqoslamaga hadma-had bo'lish natijasida $c \equiv d$ (*mod m*) ni hosil qilinishini ko'rsating.

511. $a^{100} \equiv 2$ (*mod* 73) va $a^{101} \equiv 69$ (*mod* 73) ekanligi ma'lum. a ni 73 ga bo'linganida hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

512*. $\frac{11a+2b}{19} \in \mathbf{Z}$ ifoda berilgan. $\frac{18a+5b}{19} \in \mathbf{Z}$ ni isbotlang.

513. $2^x + 7^y = 19^z$ va $2^x + 5^y = 19^z$ tenglamalar natural sonlarda yechimga ega emasligini ko’rsating.

514. $p > 2$ (p – tub son) bo’lganda

$$1^{2k+1} + 2^{2k+1} + 3^{2k+1} + ... + (p-1)^{2k+1} \equiv 0 \ (mod\ p)$$

taqqoslamani to’g’riligini ko’rsating.

19-§. Chegirmalar sinflari. Eyler va Ferma teoremalari

m natural songa bo’linganida bir xil r qoldiq qoladigan barcha butun sonlar to’plami m modul bo’yicha sonlar sinfini tashkil qiladi. Bu sinfning har bir soni umumiy holda $mk+r$, $k\in\mathbf{Z}$ ko’rinishda yoziladi. Barcha sinflar soni m ga teng.

Sinfning ixtiyoriy soni m modul bo’yicha *chegirma* deyiladi (shu sinfning boshqa sonlariga nisbatan).

Har bir sinfdan ixtiyoriy ravishda bittadan olingan sonlar to’plami berilgan m modul bo’yicha *chegirmalarning to’la sinfi* deyiladi.

Odatda chegirmalarning to’la sinfi sifatida berilgan m bo’yicha eng kichik manfiy bo’lmagan chegirmalar, ya’ni 0, 1, 2,..., m - 1 sistema olinadi.

Ba’zan berilgan m modul bo’yicha chegirmalardan absolyut qiymati bo’yicha eng kichik musbat bo’lmagan chegirmalarning to’la sistemasi ham qaraladi: -(m-1), -(m-2),..., -2, -1, 0. m modul bo’yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning to’la sinfi ham ishlatiladi. Masalan, $m = 7$ bo’lganda bu sistema -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 chegirmalardan iborat bo’ladi; $m = 8$ bo’lganda esa -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 yoki –4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 chegirmalardan tashkil topadi.

Chegirmalarning to’la sistemasidan olingan va m modul bilan o’zaro tub bo’lgan chegirmalar m modul bo’yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi deyiladi. Kelitirilgan sistemada chegirmalar soni $\varphi(m)$- Eyler funksiyasining qiymatiga teng.

Chegirmalarning to’la sistemasidagi kabi keltirilgan sistemaning ham uch turi ishlatiladi: *eng kichik musbat chegirmalarning keltirilgan sistemasi, absolyut qiymati bo’yicha eng kichik manfiy chegirmalarning keltirilgan sistemasi va absolyut qiymati bo’yicha eng kichik chegirmalarning keltirilgan sistemasi.*

$x_1, x_2,..., x_s$ butun sonlar sistemasi $s = m$ va $i \neq j$ da $x_i \equiv x_j\ (mod\ m)$ bo’lganda va faqat shu holda m modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasidan iborat bo’ladi. $(a, m) = 1$ bo’lganda $ax + b$ chiziqli formaning qiymatlari m modul bo’yicha chegirmalarning to’la sistemasidan iborat bo’lishi uchun x qabul qiladigan qiymatlar ham chegirmalarning to’la sistemasidan iborat bo’lishi zarur va yetarlidir.

$x_1, x_2,..., x_s$ butun sonlar sistemasi $s = \varphi(m)$ va $i \neq j$, $(x_i, m) = 1$ da $x_i \equiv x_j\ (mod\ m)$ bo’lganda va faqat shu holda m modul bo’yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasidan iborat bo’ladi. $(a, m) = 1$ bo’lganda ax chiziqli formaning qiymatlari m modul bo’yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasidan iborat bo’lishi uchun x qabul qiladigan qiymatlar ham chegirmalarning keltirilgan sistemasidan iborat bo’lishi zarur va yetarlidir.

$m > 1$ va $(a, m) = 1$ bo’lganda quyidagi taqqoslama o’rinli:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m),$$

bu yerda $\varphi(m)$ –Eyler funksiyasi (*Eyler teoremasi*).

p tub son va $(a, p) = 1$ bo'lganda quyidagi taqqoslama o'rinli:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p) \text{ (Ferma teoremasi)}.$$

a butun sonni o'zida saqlaydigan m bo'yicha chegirmalar sinfini $a\ mod\ m$ bilan belgilaymiz. Demak,

$$a\ mod\ m = a + m\mathbf{Z} = \{a + km \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ bilan m modul bo'yicha barcha chegirmalar sinflari to'plamini belgilaymiz:

$$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = \{0\ mod\ m, 1\ mod\ m, ..., (m\text{-}1)\ mod\ m\}.$$

Bu to'plamda qo'shish va ko'paytirish amallarini quyidagi tengliklar orqali kiritiladi:

$$a\ mod\ m + b\ mod\ m = (a + b)\ mod\ m,$$

$$(a\ mod\ m) \cdot (b\ mod\ m) = ab\ mod\ m.$$

$(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, +)$ – abel gruppasidan, hamda $\mathbf{Z}$ gruppaning $m\mathbf{Z}$ qism gruppa bo'yicha faktor gruppasidan iborat bo'lib, *m modul bo'yicha chegirmalar sinfining additiv gruppasi deyiladi*.

$(Z/mZ, +, \cdot)$ – birlik elementli kommutativ xalqadan iborat bo'lib, *m modul bo'yicha chegirmalar sinfinig xalqasi deyiladi*.

Agar $(a, m) = 1$ bo'lsa, $a\ mod\ m$ sinf *m modul bilan o'zaro tub bo'lgan chegirmalar sinfi deyiladi*.

m modul bilan o'zaro tub bo'lgan chegirmalar sinflari to'plami ko'paytirishga *nisbatan* abel gruppasi tashkil etadi va u *m modul bilan o'zaro tub bo'lgan chegirmalar sinflarining multiplikativ gruppasi deyiladi*.

Agar $ab \equiv 1 \ (mod\ m)$ bo'lsa, a chegirma b chegirmaga m modul bo'yicha teskari deyiladi.

1-Misol. 10 modul bo'yicha chegirmalar to'la sistemasining uchta turini yozing.

Yechilishi. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – 10 modul bo'yicha eng kichik manfiy bo'lmagan chegirmalarning to'la sistemasi.

-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0 – 10 modul bo'yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik manfiy chegirmalarning to'la sistemasi.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 yoki –5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 – 10 modul bo'yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning to'la sistemasi. ■

2-Misol. 10 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasining uchta turini yozing.

Yechilishi. 1, 3, 7, 9 – 10 modul bo'yicha eng kichik manfiy bo'lmagan chegirmalarning keltirilgan sistemasi.

-9, -7, -3, -1 – 10 modul bo'yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik manfiy chegirmalarning keltirilgan sistemasi.

-3, -1, 1, 3 chegirmalar 10 modul bo'yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning keltirilgan sistemasi. ■

3-Misol. 20, -4, 22, 18, -1 sonlar qanday modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etadi?

Yechilishi. 5 modul bo'yicha berilgan sonlar mos ravishda 0, 1, 2, 3, 4 sonlar bilan taqqoslanadi, shuning uchun izlanayotgan modul 5 ga teng. ■

4-Misol. $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ sonlar sistemasi 7 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil eitishini ko'rsating.

Yechilishi. Berilgan sonlardan eng kichik musbat chegirmalarni tuzamiz:

3, 2, 6, 4, 5, 1, chunki $3^2 \equiv 2$ (*mod* 7), $3^3 \equiv 6$ (*mod* 7), $3^4 \equiv 4$ (*mod*7), $3^5 \equiv 5$ (*mod* 7), $3^6 \equiv 1$ (*mod* 7). ■

5-Misol. 383^{175} ni 45 ga bo'lganda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

Yechilishi. $383 \equiv 23$ (*mod* 45) bo'lganligi uchun $383^{175} \equiv 23^{175}$ (*mod* 45). Endi $\varphi(45) = 24$ va (23, 45) = 1 dan Eyler teoremasiga ko'ra:

$23^{24} \equiv 1$ (*mod* 45) ni hosil qilamiz. Demak,

$23^{175} = 23^{24\bullet 7 + 7} = (23^{24})^7 \cdot 23^7 \equiv 1^7 \cdot 23^7$ (*mod* 45).

Shu taxlitda davom etib, $23^7 = (23^2)^3 \cdot 23 \equiv 34^3 \cdot 23 = 34^2 \cdot 34 \cdot 23 \equiv 1156 \cdot 782 \equiv 31 \cdot 17 = 527 \equiv$ 32 (*mod* 45) ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $383^{175} \equiv$ 32 (*mod* 45). Izlanayotgan qoldiq 32 dan iborat. ■

6-Misol. x ning har qanday butun qiymatida $x^7 \equiv x$ (*mod* 42) taqqoslamani to'g'riligini ko'rsating.

Yechilishi. Ferma teoremasiga ko'ra, $x^7 \equiv x$ (*mod* 7). Endi $x^7 \equiv x$ (*mod* 2 va 3) ekanligini isbot qilamiz, buning uchun 2 va 3 modullar bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini, y'ani 0, 1, 2 sonlarni sinash yetarli.

7-Misol. Butun sonning 100-darajasini 125 ga bo'lganda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

Yechilishi. Agar (a, 5) = 1 bo'lsa, u holda Eyler teoremasiga ko'ra:

$a^{\varphi(125)} = a^{100} \equiv 1$ (*mod* 125).

Agarda (a, 5) = 5 bo'lsa, u holda $a^{100} \equiv$ 0 (*mod* 125).

Demak, agar (a, 5) = 1 bo'lsa, u holda izlanayotgan qoldiq 1 ga teng. Agarda (a, 5) = 5 bo'lsa, u holda a^{125} soni 125 ga bo'linadi. ■

8-Misol. $2^{\varphi(m)-1}$ ni toq m soniga bo'linganida hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

Yechilishi. $2^{\varphi(m)-1} \equiv r \ (mod\ m)$, $0 \le r < m$ bo'lsin. U holda $2^{\varphi(m)} \equiv 2r \equiv 1 \ (mod\ m)$ yoki $r = \frac{1+mq}{2}$, bu yerda $q \in \boldsymbol{Z}$. $0 \le r < m$ shartni $q = 1$ da yagona $\frac{1+mq}{2}$ qiymat qanoatlantiradi, bu yerdan r = $\frac{1+m}{2}$ ni hosil qilamiz. ■

9-Misol. 341 soni uchun $2^{341} \equiv$ 2 (*mod* 341) taqqoslamaning o'rinli ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. 341 – murakkab son, $341 = 11 \cdot 31$. $2^5 \equiv$ 1 (*mod* 31) va $2^{10} \equiv$ 1 (*mod* 31) taqqoslamalar o'rinli ekanligini osongina tekshirish mumkin.

Ferma teoremasiga asosan $2^{10} \equiv$ 1 (*mod* 11). 11 va 13 sonlar o'zaro tub bo'lganligi uchun bu yerdan $2^{10} \equiv$ 1 (*mod* $11 \cdot 31$) kelib chiqadi, ya'ni $2^{10} \equiv 1$ (*mod* 341). Demak, $2^{340} \equiv$ 1 (*mod* 341) va $2^{341} \equiv$ 2 (*mod* 341) taqqoslamalar o'rinli. ■

10-Misol. Agar har bir butun a soni uchun $a^n \equiv a \ (mod\ n)$ taqqoslama o'rinli bo'lsa, n murakkab soni *absolyut psevdotub son* deyiladi. 561 ning *absolyut psevdotub son* ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Berilgan sonni tub ko'paytuvchilarga ajratamiz $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Ferma teoremasiga asosan 561 bilan o'zaro tub bo'lgan har bir butun a soni uchun

$a^2 \equiv 1$ (*mod* 3), $a^{10} \equiv 11$ (*mod* 11), $a^{16} \equiv 17$ (*mod* 17) taqqoslamalar o'rinli bo'ladi. 3, 11, 17 tub sonlardan iborat bo'lganligi uchun va [2, 10, 16] = 80 bo'lganligidan bu taqqoslamalardan quyidagi taqqoslamalar kelib chiqadi: $a^{80} \equiv 1$ (*mod* 561), $a^{560} \equiv 1$ (*mod* 561). Demak, 561 *absolyut psevdotub sondan iborat* . ■

MAShQLAR

515. 10 modul bo'yicha chegirmalaraning hamma sinflarini taqqoslamalar ko'rinishida yozing.

516. 10 modul bo'yicha chegirmalaraning hamma sinflarini $x = 10q + r$, $0 \le r < 10$ ko'rinishda yozing.

517. Quyidagi modullar bo'yicha ko'rsatilgan chegirmalarning sinflarini yozing: a) 10 modul bilan o'zaro tub bo'lgan; b) 10 modul bilan EKUBi 2 ga teng bo'lgan; s) 10 modul bilan EKUBi 5 ga teng bo'lgan; d) 10 modul bilan EKUBi 10 ga teng bo'lgan.

518. Berilgan modullar bo'yicha chegirmalarning to'la va keltirilgan sistemalarining barcha turlarini yozing: a) $m = 9$; b) $m = 8$; c) $p = 7$; d) $m = 12$.

519*. 25, -20, 16, 46, -21, 18, 37, -17 sonlarning 8 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil qilishini ko'rsating.

520. 32, -9, 15, 42, -18, 30, 6 sonlarni p =7 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etishini ko'rsating.

521. 21, 2, -18, 28, -19, 40, -22, -2, 15 sonlarning 9 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etishini ko'rsating.

522. 24, 18, -19, 37, 28, -23, -32, 5, 41, -35, -33 sonlarning 11 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil etishini ko'rsating.

523. 19, 23, 25, -19 sonlarning 12 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etishini ko'rsating.

524. 11, -1, 17, -19 sonlarning 8 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil etishini ko'rsating.

525*. 24, 14, 25, 37, -8, -19, -40 sonlarning 6 modul bo'yicha eng kichik manfiy bo'lmagan, absloyut qiymati bo'yicha eng kichik musbat bo'lmagan va absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarini toping. Bu sonlar berilgan modul bo'yicha nechta har xil sinflarga tegishli bo'ladi? Qaysi sonlar berilgan modul bo'yicha bir sinfga tegishli bo'ladi?

526. Oldingi masalaning shartini 8 modul bo'yicha 17, -14, 19, -49, -22, 21, -29 sonlarga qo'llang.

527. 100 sonining quyidagi modullar bo'yicha eng kichik manfiy bo'lmagan, absloyut qiymati bo'yicha eng kichik musbat bo'lmagan va absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarini toping: 5, 7, 11, 25, 120, 200.

528. Oldingi masalani 50 soni va 3, 8, 12, 25, 70, 100 modullarga nisbatan yeching.

529*. Har qanday ketma-ket keladigan m ta butun sonlar m modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini tashkil eitishini ko'rsating.

530*. 10 modul bo'yicha $3x$–1 ko'rinishdagi chegirmalarning to'la sistemalaridan birortasini ko'rsating.

531. 4 modul bo'yicha $5x$ ko'rinishdagi chegirmalarning to'la sistemalaridan birortasini ko'rsating.

532. $5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6$ sonlar sistemasi 7 modul bo'yicha keltirilgan sistemani tashkil etishini ko'rsating.

533. m modul bo'yicha chegirmalarning additiv gruppasi ***Z**/m**Z*** ning siklik gruppa ekanligini ko'rsating.

534. (***Z**/m**Z***, +) gruppaning m modul bo'yicha chegirmalar sinfi xalqasining additiv gruppasidan iborat ekanligini ko'rsating.

535. Agar a va b o'zaro teskari bo'lsa, u holda $a \bmod m \cdot b \bmod m = 1 \bmod m$ ni ko'rsating, ya'ni $a \bmod m$ va $b \bmod m$ chegirmalar sinflari ham m modul bo'yicha o'zaro teskari bo'ladi.

536. m modul bo'yicha chegirmalar sinfi xalqasining teskarilanuvchi elementlari gruppasi m modul bo'yicha o'zaro tub bo'lgan chegirmalar sinfining multiplikativ gruppasi bilan ustma-ust tushishini ko'rsating.

537. m – tub sondan iborat bo'lganda m modul bo'yicha chegirmalar sinfining xalqasi maydon tashkil qilishini ko'rsating.

538*. Kanonik yoyilmasi 2 va 5 ni o'zida saqlamaydigan natural sonning 12-darajasining birlik raqami 1 ga tengligini isbotlang.

539*. Eyler teoremasini quyidagi hollarda tekshiring: a) $a = 5$, $m = 24$; b) $a = 2$, $m = 33$; c) $a = 3$, $m = 18$; d) a = 3, m = 24.

540*. Eyler va Ferma teoremalaridan foydalanib, quyidagi modullar bo'yicha taqqoslamalr tuzing va har bir taqqoslamani qanoatlantiradigan a ning qiymatlarini va chegirmalar sinfini yozing: a) 6; b) 5; c) 8; d) 7.

541*. a) Agar $(a, 7) = 1$ bo'lsa, u holda $a^{12} - 1$ ning 7 ga bo'linishini; b) Agar $(a, 65) = (b, 65) = 1$ bo'lsa, u holda $a^{12} - b^{12}$ ning 65 ga bo'linishini ko'rsating.

542. $a \equiv 0 \ (mod\ p)$ bo'lganda $a^{p-1} + p - 1$ sonning murakkab ekanligini ko'rsating.

543*. $\sum_{i=1}^{p-1} i^{k(p-1)} + 1 \equiv 0 \ (mod\ p)$ taqqoslamani to'g'ri ekanligini isbot qiling.

544. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i{}^p \pmod p$ taqqoslamani to'g'ri ekanligini isbot qiling.

545. $a^{n(p-1)+1} \equiv a \ (mod\ p)$ taqqoslamani to'g'ri ekanligini isbot qiling..

546. Bo'linishning qoldiqlarini toping: a) 109^{345} ni 14 ga; b) 439^{291} ni 60 ga; s) 293^{275} ni 48 ga.

547. Bo'linishning qoldiqlarini toping: : a) $3^{80} + 7^{80}$ ni 11 ga; b) $3^{100} + 5^{100}$ ni 7 ga; s) $2^{100} + 3^{100}$ ni 5 ga; d) $5^{70} + 7^{50}$ ni 12 ga.

548. 243^{402} sonining oxirgi uchta raqamini toping.

549*. $(a, m) = 1$ bo'lganda $a^x \equiv 1 \ (mod\ m)$ taqqoslamani qanoatlantiradigan x ning eng kichik natural qiymati $\varphi(m)$ sonning bo'luvchisidan iborat ekanligini isbotlang.

550*. $a^{561} \equiv a$ (*mod* 1) ni isbotlang.

551*. $x^{(p-1)m} + x^{(p-1)n} \equiv 0$ *(mod p)* taqqoslamani x ning $p > 2$ ga karrali qiymatlari qanoatlantirishini ko'rsating.

552*. 2, 3 va 5 ga bo'linmaydigan m natural soni 11...1 ko'rinishdagi $\varphi(m)$-xonali sonning bo'luvchisi ekanligini ko'rsating.

553. a) Agar $(a, 561) = 1$ bo'lsa, u holda $a^{560} \equiv 1$ (*mod* 561) ni isbotlang; b) $2^{1093 \bullet 1092} \equiv 1$ (*mod* 1093^2) ni isbotlang.

554*. Agar $a^r \equiv \pm 1$*(mod p)* bo'lsa, u holda $a^r \equiv \pm 1$*(mod* p^2*)* ni isbotlang (r – tub son).

555*. Agar p va q – o'zaro teng bo'lmagan tub sonlar bo'lsa, u holda $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1$*(mod pq)* ni isbotlang.

556*. x ning qanday butun qiymatida $x^{13} \equiv x$ (*mod* 2730) taqqoslama to'g'ri bo'ladi?

557*. Agar $\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0$ (*mod* 30) bo'lsa, u holda $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 \equiv 0$ (*mod* 30) ni ko'rsating.

558*. Agar $m > 1$- toq son bo'lsa, u holda $2^{\varphi(m)-1}$ soni m ga bo'linganida $m - \left[\frac{m}{2}\right]$ qoldiq qolishini ko'rsating.

559*. Agar $(a, 10) = 1$ bo'lsa, u holda $a^{100n+1} \equiv a$ (*mod* 1000), $n \in \boldsymbol{N}$ ni ko'rsating.

560*. $2^{19 \bullet 73-1} \equiv 1$ (*mod* $19 \cdot 73$) taqqoslamani to'g'ri ekanligini ko'rsating.

561*. Agar p_1 va p_2 – har xil tub sonlar bo'lsa, $p_1^{p_2-1} + p_2^{p_1-1} \equiv 1$ (*mod* p_1p_2) taqqoslamani to'g'ri ekanligini ko'rsating.

562*. Agar $2r + 1$ ($r \neq 3$) – tub son bo'lsa, u holda $4r + 1 \equiv 0$ (*mod* 3) ni ko'rsating.

563*. Agar *(a, m)* = 1 va $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ *(mod* $\varphi(m)$*)* bo'lsa, u holda $a^{\alpha_1} \equiv a^{\alpha_2}$ (*mod m*) ni isbotlang.

564*. $a^{6m} + a^{6n} \equiv 0$ (*mod* 7), $m, n \in \boldsymbol{N}$ taqqoslama faqat a soni 7 ga karrali bo'lganda o'rinli bo'lishini ko'rsating.

565*. Agar $(n, 6) = 1$ bo'lsa, u holda $n^2 \equiv 1$ (*mod* 24).

566*. Quyidagi shartdan p tub sonni toping:

$$5^{p^2} + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2).$$

567*. Agar uchta ketma-ket keladigan butun sonlardan o'rtadagisi biror butun sonning kubidan iborat bo'lsa, bu sonlarning ko'paytmasi 504 ga bo'linishini ko'rsating.

568*. Agar $r > 3$, r va $2r+1$ lar tub sonlar bo'lsa, u holda $4r+1$ – murakkab son ekanligini ko'rsating.

20-§. Bir noma'lumli algebraik taqqoslamalar. Birinchi darajali taqqoslamalar.

n-darajali bir noma'lumli taqqoslama deb quyidagi ko'rinishdagi taqqoslamaga aytiladi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \ (mod\ m),$$

bu yerda $a_0 \equiv 0\ (mod\ m)$, $a_i \in \boldsymbol{Z}$, $i = \overline{0, n}$, n – manfiy bo'lmagan butun son.

Taqqoslamani yechish – uni qanoatlantiradigan x ning barcha qiymatlarini topish demakdir.

Agar berilgan taqqoslamani biror $x = \alpha$ qiymat qanoatlantirsa, u holda bu taqqoslamani α bilan m modjul bo'yicha taqqoslanaidgan barcha sonlar ham qanoatlantiradi: $x \equiv \alpha\ (mod\ m)$, yoki, $x = mk + \alpha$, ya'ni, m modul bo'yicha α tegishli bo'lgan chegirmalar sinfining barcha chegirmalari qanoatlantiradi. Har bir sinf bitta yechimni tashkil etadi. Demak, *taqqoslamani yechish* – uni qanoatlantiradigan chegirmalarning barcha sinflarini topishdan iborat.

Har bir sinfdan bittadan olingan chegirmalar to'la sistemani tashkil etganligi uchun taqqoaslamani qanoatlantiradigan sonlar sinfini topish chegirmalarning to'la sistemasidan ularga mos keladigan chegirmalarni topishdan iborat ekan. Odatda α sifatida berilgan modul bo'yicha manfiy bo'lmagan eng kichik yoki absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalar olinadi. Shunday qilib, to'la sistemaning nechta chegirmasi berilgan taqqoslamani qanoatlantirsa, taqqoslama shuncha yechimga ega bo'ladi.

Agar bir xil x noma'lumli va bir xil modulli ikkita taqqoslamani x noma'lumninng bir xil qiymatlari qanoatlantirsa, bunday taqqoslamalar teng kuchli deyiladi.

Berilgan taqqoslamaga teng kuchli taqqoslamalar quyidagi almashtirishlar natijasida hosil bo'ladi:

a) berilgan taqqoslamaning ikkala tomoniga ham bir xil sonni qo'shish natijasida;

b) berilgan taqqoslamaning ixtiyoriy bir qismiga modulga karrali bo'lgan sonni qo'shish natijasida;

c) berilgan taqqoslamaning ikkala tomonini modul bilan o'zaro tub bo'lgan songa ko'paytirish (bo'lish) natijasida;

d) taqqoslamaning ikkala tomonini va modulini bir xil songa bo'lish natijasida.

1-Misol. Quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $x^3 - 2x + 6 \equiv 0\ (mod\ 11)$;

b) $x^4 + 2x^3 + 6 \equiv 0\ (mod\ 8)$;

c) $x^4 - x^3 - x^2 + 5x - 2 \equiv 0\ (mod\ 6)$.

Yechilishi. a) 11 modul bo'yicha absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning to'la sistemasidan iborat

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

sonlarni bevosita taqqoslamaga qo'yib tekshirish natijasida 5 soni taqqoslamani qanoatlantirishini hosil qilamiz. Yechimni $x \equiv 5\ (mod\ 11)$ ko'rinishda yozamiz.

b) 8 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasi -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 da birorta ham chegirma taqqoslamani qanoatlantirmaydi, shuning uchun berilgan taqqoslama yechimga ega emas.

c) 6 modul bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasi -2, -1, 0, 1, 2, 3 da faqat ikkita son taqqoslamani qanoatlantiradi: -1 va 2. Berilgan taqqoslama ikkita yechimga ega: $x \equiv -1 \ (mod\ 6)$ va $x \equiv 2 \ (mod\ 6)$.

Modulning bo'luvchisi bo'yicha olingan taqqoslama berilgan modul bo'yicha taqqoslamaning natijasidan iborat bo'ladi. ■

2-Misol. $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 \ (mod\ 9)$ taqqoslamani yeching.

Yechilishi. Modulning bo'luvchisi bo'yicha olingan taqqoslamani qaraymiz: $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 \ (mod\ 3)$, bu yerdan $x^2 + x \equiv 0 \ (mod\ 3)$ yoki $x\ (x + 1) \equiv 0 \ (mod\ 3)$, ko'paytuvchilarning har birini alohida yechib $x \equiv 0, 2 \ (mod\ 3)$ ni hosil qilamiz. Yechimlarni chegirmalar sinfi orqali $x = 3q$; $3q + 2$ shaklda yozamiz.

Endi $x = 3q$ ni berilgan taqqoslamaga qo'yamiz:

$9q^2 - 15q + 6 \equiv 0 \ (mod\ 9)$, bu yerdan $3q \equiv 3 \ (mod\ 9)$, ya'ni. $q \equiv 1 \ (mod\ 3)$ yoki $q = 1 + 3t$. Bu yerdan $x = 3 + 9t$ yoki $x \equiv 3 \ (mod\ 9)$ yechimni hosil qilamiz.

$x = 3q + 2$ da berilgan taqqoslama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$9q^2 + 12q + 4 - 15q - 10 + 6 \equiv 0 \ (mod\ 9)$. Bu taqqoslamani soddalashtirishlardan so'ng $3q \equiv 0 \ (mod\ 9)$ yoki $q \equiv 0 \ (mod\ 3)$ ni hosil qilamiz. $q = 3t$ bo'lganda berildgan taqqoslamaning ikkinchi yechimi $x = 9t + 2$ yoki $x \equiv 2 \ (mod\ 9)$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, berilgan taqqoslama ikkita yechimga ega ekan: $x \equiv 2; 3 \ (mod\ 9)$. ■

3-Misol. Teng kuchli taqqoslamaga o'tish bilan quyidagi taqqoslamani yeching: $13x \equiv 5 \ (mod\ 47)$.

Yechilishi. Taqqoslamaning o'ng tomoniga 47 ni qo'shamiz:

$13x \equiv 52 \ (mod\ 47)$. Endi taqqoslamaning ikkala tomonini 13 ga qisqartirib, uning yechimini hosil qilamiz: $x \equiv 4 \ (mod\ 47)$. ■

Birinchi darajali taqqoslamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$ax \equiv b \ (mod\ m).$$

Bu taqqoslamani yechishda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) Agar $(a, m) = 1$ bo'lsa, u holda taqqoslama faqat yagona yechimga ega.

b) Agar $(a, m) = d > 1$ bo'lib, b ozod had d ga bo'linmasa, u holda taqqoslama yechimga ega emas.

s) Agar $(a, m) = d > 1$ bo'lib, b ozod had d ga bo'linsa, u holda taqqoslama d ta yechimga ega bo'ladi va bu yechimlar quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$x_k \equiv \alpha + \frac{(k-1)m}{d} \ (mod\ m), \ k=1, 2, \ \ldots, d$$

bu yerda α - quyidagi taqqoslamaning yechimidan iborat:

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} (mod\ \frac{m}{d}).$$

$ax \equiv b \ (mod\ m)$ taqqoslamani yechish usullarini faqat $(a, m) = 1$ bo'lganda qarab chiqamiz, uchinchi holda taqqoslama d ga qisqartirilgandan so'ng birinchi holga keltiriladi.

Birinchi darajali taqqoslamalarni yechishda quyidagi uchta usul qo'llaniladi:

a) yechim m modul bo'yicha eng kichik manfiy bo'lmagan yoki absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarning to'la sistemasidagi sonlarni bevosita sinash usuli bilan topiladi.

b) *Eyler usuli*. Yechim quyidagi formula bilan topiladi:

$$x \equiv ba^{\varphi(m)-1}\ (mod\ m),$$

bu yerda $\varphi(m)$ –Eyler funksiyasi;

s) chekli uzluksiz kasrlar yordamida quyidagi formula bilan yechim topiladi:

$$x \equiv (-1)^n\, b\, P_{n-1}\ (mod\ m),$$

bu yerda P_{n-1} – $\frac{m}{a}$ kasrni uzluksiz kasrga yoyganda hosil bo'ladigan oxirgisidan bitta oldingi munosib kasrning suratidan iborat.

Ba'zi hollarda taqqoslamalarning xossalariga asoslangan almashtirishlar orqali berilgan taqqoslama oson yechiladi (3-misolga qarang).

4-Misol . Quyidagi taqqoslamani Eyler usuli bilan yeching:

$$9x \equiv 8\ (mod\ 34).$$

Yechilishi. (9, 34) = 1 bo'lganligi uchun berilgan taqqoslama yagona yechimga ega bo'ladi. $\varphi(34) = 16$ ni hisoblab quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x \equiv 8\cdot 9^{15} \equiv 8\cdot 3^{30} \equiv 8\cdot 3^{14} \equiv 8\cdot(2187)^2 \equiv 8\cdot 11^2 \equiv 16\ (mod\ 34). \ ■$$

Misol 5. Taqqoslamani uzluksiz kasrlar orqali yeching:

$$285x \equiv 177\ (mod\ 924).$$

Yechilishi. (285, 924) = 3 va 177 = 59·3 bo'lganligi uchun berilgan taqqoslama uchta yechimga ega.

Taqqoslamaning ikkala tomonini va modulini 3 ga bo'lamiz:

$$95x \equiv 59\ (mod\ 308).$$

$\frac{308}{95}$ kasrni uzluksiz kasrga yoyamiz: $\frac{308}{95} = (3, 4, 7, 1, 2)$. Munosib kasrlar jadvalini tuzamiz:

q_i		3	4	7	1	2
P_i	1	3	13	94	107	308

Shunday qilib, $P_{n-1} = P_4 = 107$, demak,

$$x \equiv (-1)^4\cdot 107\cdot 59\ (mod\ 308),$$

Bu yerdan natija taqqoslamaning yechimi $x \equiv 153\ (mod\ 308)$ ni hosil qilamiz.
Berilgan taqqoslamaning yechimlari quyidagicha tasvirlanadi:

$$x \equiv 153;\ 461;\ 769\ (mod\ 924). \ ■$$

Birinchi darajali taqqoslamalarni birinchi darajali ikki noma'lumli aniqmas tenglamalarni (diofant tenglamalari) yechishga tatbig'ini qarab chiqamiz.
Quyidagi aniqmas tenglama

$$ax + by = c; \quad a, b, c \in \boldsymbol{Z}$$

ni yechish talab qilinsin. Agar $(a, b) = 1$ bo'lsa, u holda berilgan tenglama butun yechimlarga ega bo'lib, uning umumiy yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = x_1 + bt,$$
$$y = y_1 - at$$

yoki b manfiy bo'lganda quyidgicha ifodalash qulay:

$$x = x_1 - bt,$$
$$y = y_1 + at.$$

Bu formulalarda x_1 va y_1 lar x va y larning tenglamani qanoatlantiradigan qandaydir qiymatlaridan iborat va $t \in \boldsymbol{Z}$.

Agar $(a, b) = d > 1$ va c soni d ga bo'linmasa, u holda $ax + by = c$ tenglama butun sondagi yechimlarga ega emas.

Birinchi darajali aniqmas tenglamalar nazariyasidan noma'lumlarni xususiy yechimlarini topishning bir necha usullari mavjud.

Taqqoslamalar yordamida bu xususiy yechim quyidagicha topiladi: $ax + by = c$ dan taqqoslamaning ma'nosi haqidagi teoremaga ko'ra $ax \equiv c \ (mod\ b)$ bir noma'lumli taqqoslamani hosil qilamiz, bu yerda b o'z ishorasi bilan olinadi, taqqoslamani qanoatlantiradigan x ning qiymati x_1 sifatida olinadi, y_1 ning qiymati esa bevosita berilgan tenglamaga x_1 ni qo'yib topiladi.

Misol 6. Quyidagi tenglamani butun sonlarda yechimlarini toping:

$$39x - 22y = 10.$$

Yechilishi. Tenglamadan quyidagi taqqoslama kelib chiqadi:

$$39x \equiv 10 \ (mod\ 22).$$

Bu taqqoslamadagi koeffisiyentlarni 22 modul bo'yicha eng kichik musbat chegirmalariga keltirsak, $17x \equiv 10 \ (mod\ 22)$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $x_1 = 20$ ni hosil qilamiz. Bu qiymatni berilgan tenglamaga qo'yib, $y_1 = 35$ ni topamiz. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x = 20 + 22t, \\ y = 35 + 39t. \end{cases} \quad ■$$

7-Misol. Tug'ilgan kunning 12 ga ko'paytmasi va oyning 31 ga ko'paytmalarining yig'indisi 299 ekanligi ma'lum bo'lsa, tug'ilgan kunni toping.

Yechilishi. x – sana, y – oyning raqami bo'lsin. U holda quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$12x + 31y = 299.$$

Bu yerdan $12x \equiv 299 \ (mod\ 31)$ yoki $12x \equiv 20 \ (mod\ 31)$ taqqoslama kelib chiqadi. Oxirgi taqqoslamani yechib, $x_1 = 12$ ni hosil qilamiz. Topilgan qiymatni berilgan tenglamaga quyib, $y_1 = 5$ ni hosil qilamiz. Demak, tug'ilgan kun 12 - may ekan. ■

MAShQLAR

569. Manfiy bo’lmagan eng kichik chegirmalarni bevosita sinash usuli bilan quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $5x^2 - 15x + 22 \equiv 0\ (mod\ 3)$; b) $x^2 + 2x + 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$; c) $3x \equiv 1\ (mod\ 5)$;
d) $8x \equiv 3\ (mod\ 14)$; e) $x^3 - 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$; f) $x^2 - 2x + 1 \equiv 0\ (mod\ 4)$;
g) $27x^2 - 13x + 11 \equiv 0\ (mod\ 5)$.

570. Taqqoslamalarning xossalari yordamida dastlab soddalashtirib, so’ngra absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalarni bevosita sinash usuli bilan quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $12x \equiv 1\ (mod\ 7)$; b) $8x \equiv 1\ (mod\ 5)$; c) $3x \equiv 13\ (mod\ 11)$; d) $6x \equiv 3\ (mod\ 7)$;
e) $6x + 5 \equiv 1\ (mod\ 7)$; f) $90x^{20} + 46x^2 - 52x + 46 \equiv 0\ (mod\ 15)$.

571. Quyidagi taqqoslamalarni yechimga ega emasligini ko’rsating:

a) $2x - 3 \equiv 0\ (mod\ 6)$; b) $x^2 - 2x + 3 \equiv 0\ (mod\ 4)$; c) $x^3 + x + 4 \equiv 0\ (mod\ 5)$;
d) $x^4 + 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$; e) $x^5 - 2x^3 + 13x - 1 \equiv 0\ (mod\ 4)$.

572. Noma’lumning ixtiyoriy butun qiymatlari quyidagi taqqoslamalarni qanoatlantirishini ko’rsating:

a) $x^2 - x + 6 \equiv 0\ (mod\ 2)$; b) $x(x^2 - 1) \equiv 0\ (mod\ 6)$;
c) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \equiv 0\ (mod\ 4)$; d) $x^r - x \equiv 0\ (mod\ r)$.

573. Taqqoslamaning xossalaridan foydaldanib, almashtirishlar orqali quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $2x \equiv 7\ (mod\ 15)$; b) $5x \equiv 2\ (mod\ 8)$; c) $7x \equiv 2\ (mod\ 13)$;
d) $3x \equiv 23\ (mod\ 37)$; ye) $27x \equiv 14\ (mod\ 25)$; f) $13x \equiv 10\ (mod\ 11)$;
g) $5x \equiv 3\ (mod\ 11)$; h) $7x \equiv 5\ (mod\ 24)$.

574. x ning qanday butun qiymatlarida $5x^2 + x + 4$ kvadrat uchhad 10 ga bo’linadi?

575. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ (mod\ 6)$ taqqoslamani $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ (mod\ 2)$ zaruriy shartdan foydalanib yeching.

576. $x^{\varphi(30)} \equiv 1\ (mod\ 30)$ taqqoslamani yeching.

577. $x^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$ taqqoslama nechta yechimga ega?

578*. Agar $(n, m) = 1$ bo’lsa, u holda n-darajali $x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \equiv 0\ (mod\ m)$ taqqoslamani yangi y o’zgaruvchini kiritish bilan (n-1) darajali hadi qatnashmaydigan $y^n + b_2\ y^{n-2} + ... + b_n \equiv 0\ (mod\ m)$ taqqoslamaga keltirish mumkinligini ko’rsating.

579*. Oldingi masaladan foydalanib, $x^3 + 5x^2 + 6x - 8 \equiv 0\ (mod\ 13)$ taqqoslamani uch hadli $y^3 + ry + q \equiv 0\ (mod\ 13)$ taqqoslamaga keltiring.

580. Eyler usuli bilan quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $5x \equiv 7\ (mod\ 10)$; b) $3x \equiv 8\ (mod\ 13)$; c) $7x \equiv 5\ (mod\ 17)$;
d) $13x \equiv 3\ (mod\ 19)$; e) $27x \equiv 7\ (mod\ 58)$.

581. Uzluksiz kasrlar usuli bilan quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $7x \equiv 4\ (mod\ 19)$; b) $143x \equiv 41\ (mod\ 221)$; c) $13x \equiv 178\ (mod\ 153)$;
d) $67x \equiv 64\ (mod\ 183)$; y) $89x \equiv 86\ (mod\ 241)$; f) $213x \equiv 137\ (mod\ 516)$;

g) $111x \equiv 81$ (*mod* 447); h) $186x \equiv 374$ (*mod* 422); i) $129x \equiv 321$ (*mod* 471).

582. Qulay usul bilan quyidagi taqqoslamalarni yeching:

a) $12x \equiv 9$ (*mod* 18);
b) $20x \equiv 10$ (*mod* 25);
c) $-50x \equiv 67$ (*mod* 177);
d) $-73x \equiv 60$ (*mod* 311);
e) $-53x \equiv 84$ (*mod* 219);
f) $90x + 18 \equiv 0$ (*mod* 138);
g) $78x \equiv 42$ (*mod* 51).

Javoblarni berilgan taqqoslamaga qo'yish bilan tekshirib ko'ring.

583*. Birinchi darajali 21 modul bo'yicha quyidagi taqqoslamalarni tuzing: a) faqat yagona yechimga ega bo'lgan; b) 3 va 7 ta yechimga ega bo'lgan; c) 2, 10, 15 ta yechimga ega bo'lgan.

584. Tug'ilgan kunning 12 ga ko'paytmasi va oyning 31 ga ko'paytmalarining yig'indisi 198 bo'lsa, tug'ilgan kunni toping.

585*. 523 sonning chap tomonidan shunday uch xonali sonni yozingki, hosil bo'lgan olti xonali son 7, 8 va 9 ga bo'linsin.

586. 629 sonning o'ng tomonidan shunday uch xonali sonni yozingki, hosil bo'lgan olti xonali son 5, 8 va 11 ga bo'linsin.

587. 723 sonning o'ng tomonidan shunday ikki xonali sonni yozingki, hosil bo'lgan 5 xonali sonni 31 ga bo'lganda 7 qoldiq qolsin.

588. Quyidagi tenglamalarni butun sonlarda yeching:

a) $3x + 4y = 13$;
b) $8x - 13y = 63$;
c) $43x + 37y = 21$;
d) $45x - 37y = 25$;
e) $81x - 48y = 33$;
f) $26x + 3y = 13$;
g) $53x + 17y = 25$;
h) $47x - 105y = 4$;
i) $18x - 33y = 112$;
j) $11x + 16y = 156$;
k) $12x - 37y = -3$;
l) $23x + 15y = 19$.

589. Don tashish uchun 60 kg va 80 kg lik qoplar bor. 440 kg donni tashish uchun shu xaltalardan nechtadan kerak bo'ladi?

590. 14900 so'mga 300 so'mlik va 500 so'mlik chiptalardan nechtadan sotib olsa bo'ladi?

591. $ax + by = c$ to'g'ri chiziqning abssissalari a_1 va a_2 ga teng bo'lgan kesmasida nechta butun son mavjudligini toping:

a) $8x - 13y + 6 = 0$; $a_1 = -100$; $a_2=150$;
b) $7x + 29y = 584$; $a_1 = -20$, $a_2 = 160$;
c) $90x - 74y = 50$; $a_1 = -100$, $a_2 = 200$.

592*. a va b ning qanday natural qiymatlarida $ax - by = 31$ tenglama $x =5$, $y = 9$ yechimga ega?

593*. Uchlari $A(x_1, y_1)$, $V(x_2, y_2)$ butun nuqtalarda bo'lgan kesmaning ichki butun nuqtalari soni $d - 1$ ga tengligini ko'rsating, bu reda $d = (y_1 - y_2, x_1 - x_2)$.

594. Uchlari $A\ (2, 1)$, $B(20, 7)$, $C(8, 15)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak ning tomonlari nechta butun nuqtalardan o'tadi?

595. x qanday butun qiymatlarida quyidagi funksiyalar butun qiymatlarni qabul qiladi:

a) $f(x) = \frac{9x-1}{7}$; b) $F(x) = \frac{7x-1}{15}$?

596*. Fabrikaga 18 ta vagonda 500 tonna paxta olib kelishdi. Vagonlarda 15, 20 va 30 tonnadan paxta bo'lgan. 15, 20 va 30 tonnalik vagonlardan nechtadan bo'lgan?

21-§. Birinchi darajali taqqoslamalar sistemalari

Bir noma'lumli har xil modulii birinchi darajali taqqoslamalr sistemasining umumiy ko'rinishi quyidagidan iborat:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x \equiv b_1(mod\ m_1) \\ a_2x \equiv b_2(mod\ m_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx \equiv b_n(mod\ m_n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Bu sistema yechimini topishning umumiy usuli quyidagicha: dastlab sistemaning birinchi taqqoslamasining $x \equiv \alpha\ (mod\ m_1)$ yechimi topiladi, bu yerda α - $m_1$modul bo'yicha manfiy bo'lmagan eng kichik yoki absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmadan iborat, bu yechimni sonlar sinfi shaklida yozib olinadi:

$$x = m_1t + \alpha\ . \qquad (2)$$

(Agar birinchi taqqoslama yechimga ega bo'lmasa, berilgan sistema ham yechimga ega bo'lmaydi).

So'ngra x ning (2) dagi qiymati sistemaning ikkinchi taqqoslamasiga qo'yilib,

$$a_2(m_1t + \alpha) \equiv b_2(mod\ m_2) \qquad (3)$$

taqqoslama hosil qilinadi . (3) taqqoslamadan t ning sonlar sinfi shaklidagi

$$t = m_2t_1 + \beta$$

ko'rinishi topilib, u (2) tenglikka qo'yiladi va x ning yangi qiymati hisoblanadi. (Agar (3) taqqoslama yechimga ega bo'lmasa, berilgan sistema ham yechimga ega bo'lmaydi).

Natijada x ning sonlar sinfi shaklida yozilgan va berilgan sistemaning dastlabki ikkita taqqoslamasini qanoatlantiradigan qiymati hosil bo'ladi. x ning topilgan qiymati uchinchi taqoslamaga qo'yilib, hosil bo'lgan taqqoslama t_1 ga nisbatan yechiladi va t_1 ning sonlar sinfi shaklida yozilgan qiymati x ning ifodasiga qo'yladi, so'ngra x ning bu qiymati to'rtinchi taqqoslamag qo'yiladi va shu taxlitda sistemaning oxirgi taqqoslamasigacha yechiladi. *x ning oxirgi qiymati berilgan sistemaning yechimidan iborat bo'ladi.*

Berilgan sistemani yechishda dastavval har bir taqqoslamani alohida yechib, sistema quyidagi ko'rinishga keltirib olinadi:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv \alpha_1(mod\ m_1) \\ x \equiv \alpha_2(mod\ m_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv \alpha_n(mod\ m_n) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

So'ngra yuqoridagi usul qo'llaniladi.

Agar (1) sistemaning $a_ix \equiv b_i\ (mod\ m_i)\ (i = \overline{1, n})$ taqqoslamalari uchun $(a_i, m_i) = d_i$ va $d_i|b_i$ bo'lsa, u holda har bir i-nchi taqqoslamaning hadlarini va modulini d_i ga qisqartirib, (1) sistemaga teng kuchli bo'lgan quyidagi sistema hosil qilinadi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_1}{d_1}x \equiv \frac{b_1}{d_1}\left(mod\,\frac{m_1}{d_1}\right)\\
&\frac{a_2}{d_2}x \equiv \frac{b_2}{d_2}\left(mod\,\frac{m_2}{d_2}\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{a_n}{d_n}x \equiv \frac{b_n}{d_n}\left(mod\,\frac{m_n}{d_n}\right)
\end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Bu sistemaning taqqoslamalirini x ga nisbatan yechib, (5) sistemaning yechimini quyidagi sistemaning yechimiga keltirish mumkin:

$$\left.\begin{aligned}
&x \equiv \alpha_1\left(mod\,\frac{m_1}{d_1}\right)\\
&x \equiv \alpha_2\left(mod\,\frac{m_2}{d_2}\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x \equiv \alpha_n\left(mod\,\frac{m_n}{d_n}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Agar (4) sistemada $m_1, m_2,..., m_n$ modullar juft-jufti bilan o’zaro tub bo’lsa, $i \neq j$ da $(m_i, m_j) = 1$ bo’lsa, u holda uning yechimini quyidagi formula bilan ham topish mumkin

$$x_0 = \frac{M}{m_1}y_1\alpha_1 + \frac{M}{m_2}y_2\alpha_2 + ... + \frac{M}{m_n}y_n\alpha_n, \qquad (7)$$

bu yerda $M = [m_1, m_2 ,..., m_n]$ va $y_1, y_2 ,..., y_n$ lar

$$\frac{M}{m_i}y_i = 1(mod\ m_i),\ i = \overline{1,n}$$

taqqoslamalarning yechimlaridan iborat. Sistemaning yechimi

$x \equiv x_0\ (mod\ M)$ taqqoslamadan iborat bo’ladi.

Agar $\frac{m_1}{d_1}, \frac{m_2}{d_2},..., \frac{m_n}{d_n}$ muodullar juft-jufti bilang o’zaro tub bo’lsa, Bu usul bilan (6) sistemani ham yechish mumkin.

1-Misol . Quyidagi taqqoslamalr sistemasini yeching:

$$\left.\begin{aligned}
&x \equiv 13(mod\ 16)\\
&x \equiv 3(mod\ 10)\\
&x \equiv 9(mod\ 14)
\end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Birinchi taqqoslamadan:

$$x = 16t + 13.$$

ni hosil qilamiz. x ning bu qiymatini ikkinchi taqqoslamag qo’yamiz:

$$16t + 13 \equiv 3\ (mod\ 10), \quad \text{yoki} \quad 16t + 10 \equiv 0\ (mod\ 10),$$

Bu yerdan $8t \equiv 0\ (mod\ 5)$, yoki $16t \equiv 0\ (mod\ 5)$ ni hosil qilamiz.

Demak, $t = 5t_1$.

$t = 5t_1$ ni $x = 16t + 13$ ifodaga qo’yamiz:

$x = 16\cdot5t_1 + 13 = 80t_1 + 13.$

x ning topilgan qiymatini uchinchi taqqoslamag qo'yamiz:

$80t_1 + 13 \equiv 9$ (*mod* 14), yoki $80t_1 \equiv -4$ (*mod* 14), bu yerdan

$80t_1 \equiv 10$ (*mod* 14), yoki $40t_1 \equiv 5$ (*mod* 7), yoki

$8t_1 \equiv 1$ (*mod* 7), bu yerdan $t_1 \equiv 1$ (*mod* 7), ya'ni, $t_1 = 7t_2 + 1$.

$t_1 = 7t_2 + 1$ ni $x = 80t_1 + 13$ ifodaga qo'yib,

$x = 80\,(70t_2 + 1) + 13 = 560t_2 + 93$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, $x \equiv 93$ (mod 560). ■

Tekshirish: 93 – 13 ayirma 16 ga bo'linadi; 93 – 13 ayirma 10 ga bo'linadi; 93 – 9 ayirma 14 ga bo'linadi.

Eslatma. $16t \equiv 0$ (*mod* 10) taqqoslamani yechishda biz $8t \equiv 0$ (*mod* 5) taqqoslamani hosil qildik, uning yechimi $t \equiv 0$ (*mod* 5), yoki $t = 5t_1$ berilgan taqqoslamaning $x = 80t_1 + 13$ yechimiga olib keldi. Ammo $16t \equiv 0$ (*mod* 10) taqqoslamaning ikkinchi $t \equiv 5$ (*mod* 10), yoki $t = 10t_1 + 5$ yechimi ham mavjud (chunki, $d = (16, 10) = 2$). Bu yechimni $x = 16t + 13$ ifodaga qo'yib, $x = 16(10t_1 + 5) +13 = 160t_1 + 93$ yechimni hosil qilamiz. Lekin $93 \equiv 13$ (*mod* 80) bo'lganligi uchun, ya'ni 93 va 13 sonlari 80 modul bo'yicha bir sinfga tegishli bo'lganligi uchun x ning bu qiymatiga mos bo'lgan yechim qaralmaydi.

Bu eslatmadan (1-misol) agar sistemaning biror taqqoslamasi yoki t_1 ga nisbatan biror taqqoslama m modul bo'yicha d ta yechimga ega bo'lsa, u holda sistemani yechimini topish uchun d ta yechimga ega bo'lgan taqqoslama yechimini unga teng kuchli bo'lgan m/d modul bo'yicha taqqoslama yechimi bilan almashtirish yetarlidir.

2-Misol. Taqqoslamalar sistemasini yeching:

$$\left.\begin{aligned} 7x &\equiv 3(mod\ 11) \\ 15x &\equiv 5(mod\ 35) \\ 3x &\equiv 2(mod\ 5) \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Sistemaning har bir taqqoslamasini alohida yechib, bu sistemaga teng kuchli bo'lgan quyidagit sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2(mod\ 11) \\ x &\equiv 5(mod\ 7) \\ x &\equiv 4(mod\ 5) \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning modullari juf-jufti bilan o'zaro tub sonlardan iborat bo'lganligi uchun uning yechimini (7) formula bilan topish mumkin.

$M = [11, 7, 5] = 385$,

$$\frac{M}{m_1} = 35, \quad \frac{M}{m_2} = 55, \quad \frac{M}{m_3} = 77\,.$$

sonlarni topib, quyidagi taqqoslamalarni tuzamiz:

$35u_1 \equiv 1$ (*mod* 11), $55u_2 \equiv 1$ (*mod* 7), $77u_3 \equiv 1$ (*mod* 5),

bu yerdan $u_1 = 6$, $u_2 = -1$, $u_3 = 3$ larni hosil qilamiz.

Endi (7) formuladan quyidagini hosil qilamiz:

$x_0 = 35\cdot6\cdot2 + 55\cdot(-1)\cdot5 + 77\cdot3\cdot4 = 1069 \equiv 299$ (*mod* 385).

Shunday qilib, $x \equiv 299$ (*mod* 385). ■

3-Misol. Taqqoslamalar sistemasini yeching:

$$\left.\begin{aligned} 5x &\equiv 7(mod\ 9) \\ 4x &\equiv 3(mod\ 7) \\ 3x &\equiv 8(mod\ 12) \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Berilgan sistemaning uchinchi taqqoslamasida (3, 12) = 3, ammo 8 soni 3 ga bo'linmaydi, shuning uchun bu taqqoslama ham berilgan sistema ham yechimga ega emas.

4-Misol. Taqqoslamalar sistemasini yeching:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2(mod\ 3) \\ x &\equiv 3(mod\ 2) \\ x &\equiv -1(mod\ 6) \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Sistemaning dastlabki ikkita taqqoslamasi $x \equiv -1$ (mod 3) va $x \equiv -1$ (mod 2) taqqoslamalarga teng kuchli, shuning uchun ularni uchinchi taqqoslamaning natijasi bo'lganligi uchun tashlab yuborilsa bo'ladi. Shunday qilib, sistema uchinchi taqqoslamasining yechimi sistemaning ham yechimi bo'ladi, ya'ni. $x \equiv -1 \equiv 5$ (mod 6). ■

5-Misol. 2, 3, 4, 5, 6 va 7 sonlariga bo'linganida mos ravishda 1, 2, 3, 4, 5 va 0 qoldiq hosil bo'ladigan sonni toping.

Yechilishi. Masala yuidagi taqqoslamalr sistemasiga keltiriladi:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1(mod\ 2) \\ x &\equiv 2(mod\ 3) \\ x &\equiv 3(mod\ 4) \\ x &\equiv 4(mod\ 5) \\ x &\equiv 5(mod\ 6) \\ x &\equiv 0(mod\ 7) \end{aligned}\right\}$$

$x \equiv 1$ (mod 2) yoki $x \equiv 3$ (mod 2) taqqoslama $x \equiv 3$ (mod 4) taqqoslamaning natijasi sifatida tashlab yuborilishi mumkin. Xuddi shunday $x \equiv 2$ (mod 3) taqqoslama ham olinmaydi.

Shunday qilib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3(mod\ 4) \\ x &\equiv 4(mod\ 5) \\ x &\equiv 5(mod\ 6) \\ x &\equiv 0(mod\ 7) \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechib, $x \equiv 119$ (mod 420) ni hosil qilamaiz. ■

6-Misol. Quyidagi taqqoslama yechimga ega bo'ladigan a ning qiymatlarini toping:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 5(mod\ 18) \\ x &\equiv 8(mod\ 21) \\ x &\equiv a(mod\ 35) \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Birinchi taqqoslamadan

$$x = 18t + 5$$

ni hosil qilamiz. x ning bu qiymatini ikkinchi taqoslamaga qo'yib, t ning qiymatini topamiz:

$18t + 5 \equiv 8$ (*mod* 21), yoki $18t \equiv 3$ (*mod* 21), yoki $6t \equiv 1$ (*mod* 7), $t \equiv 6$ (*mod* 7). $t \equiv -1$ (*mod* 7) ni olish qulayroq, bu yerdan $t = 7t_1 - 1$. Bu qiymatni x ning ifodasiga qo'yib,

$$x = 16\,(7t_1 - 1) = 5 = 126t_1 - 13.$$

x ning hosil qilingan qiymatini sistemaning uchinchi taqqoslamaga qo'yamiz:

$$126t_1 - 13 \equiv a\ (mod\ 35),\ \text{t.ye. } 21t_1 \equiv a = 13\ (mod\ 35).$$

$(21, 35) = 7$ bo'lganligi uchun oxirgi taqqoslama yechimga ega bo'lishi uchun $a + 13 \equiv 0$ (*mod* 7) taqqoslama yechimga ega bo'lishi kerak, bu yerdan $a \equiv 1$ (*mod* 7). *Shunday qilib, berilgan sistema* a $\equiv 1$ (mod *7) bo'lganda yechimga ega*. ■

7-Misol. O'nlik sanoq sistemasida berilgan $4x87u6$ soni 56 ga bo'linadi. Shu sonni toping.

Yechilishi. Masala shartidan quyidagi taqqoslamalarni tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} 4x87y6 \equiv 0(mod\ 8) \\ 4x87y6 \equiv 0(mod\ 7) \end{aligned}\right\}$$

Birinchi taqqoslamadan $7y6$ ning 8 ga bo'linishi va 8 ga bo'linish alomatiga asosan $y = 3$ va $y = 7$ qiymatlarni hosil qilamiz.

Bu qiymatlarni ikkinchi taqqoslamag qo'yib,:

$4x8736 \equiv 0$ (*mod* 7),

$4x8776 \equiv 0$ (*mod* 7)

taqqoslamalarni hosil qilamiz. Bu taqqoslamalrni quyidagi ko'rinishda tasvirlab olamiz

$$400000 + 10000x + 8736 \equiv 0\ (mod\ 7), \qquad 4x \equiv 1\ (mod\ 7),$$

yoki

$$400000 + 10000x + 8776 \equiv 0\ (mod\ 7), \qquad 4x \equiv 3\ (mod\ 7).$$

Birinchi taqqoslama $x \equiv 2$ (*mod* 7), yoki $x = 7t+2$ yechimga ega. Bu yerdan $t=0$ da $x_1=2$ va $t=1$ da $x_2=9$ ni hosil qilamiz. t ning boshqa qiymatlariga mo keluvchi x ning qiymatlari yaramaydi.

Ikkinchi taqqoslama $x \equiv 6$ (*mod* 7) yoki $x = 7t + 6$ yechimga ega. Bundan yagona qiymat $x_3 = 6$ ni hosil qilamiz. x ning hosil qilingan qiymatlarini berilgan sonning ifodasiga qo'yib, 428736, 498736, 468776 sonlarni hosil qilamiz. ■

8-Misol. Quydagi taqqoslamani o'zaro tub modullar bo'yicha taqqoslamalar sistemasiga keltirib yeching:

$$x^3 + 2x + 3 \equiv 0\ (mod\ 15)\ .$$

Yechilishi. Berilgan taqqoslama quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\left.\begin{aligned} x^3 + 2x + 3 \equiv 0(mod\ 5) \\ x^3 + 2x + 3 \equiv 0(mod\ 3). \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaningn ikkinchi taqqoslamasi $(x - 1)x(x + 1) \equiv 0$ (*mod* 3) taqqoslamaga teng kuchli va u x ning barcha butun qiymatlari uchun o'rinli. Demak berilgan taqqoslama quyidagi taqqoslamaga teng kuchli bo'ladi

$$x^3 + 2x + 3 \equiv 0\ (mod\ 5),$$

bu yerdan $x \equiv 2;\ 4$ (*mod* 5) ni hosil qilamiz.

Berilgan 15 modul bo'yicha quyidagi yechimlarni hosil qilamiz:

$x \equiv 2; 7; 12; 4; 9; 14 \ (mod\ 15)$. ■

9-Misol. Quyidagi chiziq qaysi butun nuqtalardan o'tadi:

$$15u = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 11, \text{ bu yerda } -2 < x < 8 \ ?$$

Yechilishi. Chiziq tenglamasidan $2x^3 - 5x^2 + 4x + 11 \equiv 0 \ (mod\ 15)$ taqqoslamaga ega bo'lamiz. Bu taqqoslama esa quyidagi sistemaga teng kuchli

$$2x^3 - 5x^2 + 4x + 11 \equiv 0 \ (mod\ 5)$$
$$2x^3 - 5x^2 + 4x + 11 \equiv 0 \ (mod\ 3).$$

Birinchi taqqoslama $x \equiv 2; 4 \ (mod\ 5)$ yechimlarga, ikkinchisi esa $x \equiv 1; 2 \ (mod\ 3)$ yechimlarga ega.

Endi

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 3) \end{cases} \begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases} \begin{cases} x \equiv 4 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 3) \end{cases} \begin{cases} x \equiv 4 \ (mod\ 5). \\ x \equiv 2 \ (mod\ 3), \end{cases}$$

taqqoslamalarni yechib, $x \equiv 7; 2; 4; 14 \ (mod\ 15)$ yechimlarni topamiz.

Shartda ko'rsatilgan oraliqqa x ning quyidagi qiymatlari tushadi: $x = 7; 2; 4; -1$. u ning mos qiymatlari chiziqningn berilgan tenglamasidang topiladi. ■

10-Misol. Taqqoslamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 9u \equiv 15 \\ \qquad\qquad (mod\ 12), \\ 7x - 3u \equiv 1 \end{cases}$$

Yechilishi. Birinchi taqqoslamaning ikkala tomonini va modulini 3 ga qisqartirib, $3u \equiv 5 \ (mod\ 4)$, yoki $3u \equiv 9 \ (mod\ 4)$, yoki $u \equiv 3 \ (mod\ 4)$ ni hosil qilamiz.

12 modul bo'yicha $u \equiv 3; 7; 11 \ (mod\ 12)$ yechimlar kelib chiqadi.

Bu yerdan quyidagi uchta sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 7x \equiv 1 + 3u \\ \qquad\qquad (mod\ 12), \\ u \equiv 3 \end{cases} \begin{cases} 7x \equiv 1 + 3u \\ \qquad\qquad (mod\ 12), \\ u \equiv 7 \end{cases} \begin{cases} 7x \equiv 1 + 3u \\ \qquad\qquad (mod\ 12) \\ u \equiv 11 \end{cases}$$

Bu sistemalarni soddalashtirib,

$$\begin{cases} x \equiv 10 \\ \qquad (mod\ 12), \\ u \equiv 3 \end{cases} \begin{cases} x \equiv 10 \\ \qquad (mod\ 12), \\ u \equiv 7 \end{cases} \begin{cases} x \equiv 10 \\ \qquad (mod\ 12) \\ u \equiv 11. \end{cases}$$

yechimlarni hosil qilamiz. ■

11-Misol. Taqqoslamalar sistemasin yeching:

$$\begin{cases} x + 2u \equiv 3 \\ \qquad\qquad (mod\ 5). \\ 4x + u \equiv 2 \end{cases}$$

Yechilishi. Ikkinchi taqqoslamani 2 ga ko'paytirib, hosil bo'lgan taqqoslamadan birinchi taqqoslamani hadma-had ayiramiz: $7x \equiv 1 \ (mod\ 5)$, bu yerdan $x \equiv 3 \ (mod\ 5)$ ni hosil qilamiz. Birinchi taqqoslamani ikkala tomonini 4 ga ko'paytirib, hosil qilingan taqqoslamadan ikkinchisini ayiramiz: $u \equiv 0 \ (mod\ 5)$. Tekshirish:

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv 3 \\ \qquad (mod\ 5) \\ u \equiv 2 \end{array}\right.$$

sistema berilgan sistemaning yechimidan iborat ekanligini ko'rsatadi. ■

MAShQLAR

597. Quyidagi taqqoslamalar sistemalarini yeching:

a) $\left.\begin{array}{r} x \equiv 4\ (mod\ 5) \\ x \equiv 1\ (mod\ 12) \\ x \equiv 7\ (mod\ 14) \end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{r} x \equiv 1\ (mod\ 25) \\ x \equiv 2\ (mod\ 4) \\ x \equiv 3\ (mod\ 7) \\ x \equiv 4\ (mod\ 9) \end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{r} 2x \equiv 7\ (mod\ 13) \\ 5x \equiv 8\ (mod\ 17) \\ 3x \equiv 7\ (mod\ 31) \\ 14x \equiv 35\ (mod\ 19) \end{array}\right\}$; d) $\left.\begin{array}{r} 4x \equiv 7\ (mod\ 13) \\ x \equiv 2\ (mod\ 17) \\ 5x \equiv 3\ (mod\ 9) \\ 8x \equiv 4\ (mod\ 14) \end{array}\right\}$;

e) $\left.\begin{array}{r} 3x \equiv 7\ (mod\ 10) \\ 2x \equiv 5\ (mod\ 15) \\ 7x \equiv 5\ (mod\ 12) \end{array}\right\}$; f) $\left.\begin{array}{r} 4x \equiv 1\ (mod\ 9) \\ 5x \equiv 3\ (mod\ 7) \\ 4x \equiv 5\ (mod\ 12) \end{array}\right\}$;

g) $\left.\begin{array}{r} 5x \equiv 1\ (mod\ 12) \\ 5x \equiv 2\ (mod\ 8) \\ 7x \equiv 3\ (mod\ 11) \end{array}\right\}$; h) $\left.\begin{array}{r} 3x \equiv 1\ (mod\ 10) \\ 4x \equiv 3\ (mod\ 5) \\ 2x \equiv 7\ (mod\ 9) \end{array}\right\}$;

i) $\left.\begin{array}{r} 3x \equiv 5\ (mod\ 7) \\ 2x \equiv 3\ (mod\ 5) \\ 3x \equiv 3\ (mod\ 9) \end{array}\right\}$; j) $\left.\begin{array}{r} 5x \equiv 200\ (mod\ 251) \\ 11x \equiv 192\ (mod\ 401) \\ 3x \equiv -15\ (mod\ 907) \end{array}\right\}$.

598. 2, 3, 4 ga bo'linganida 1 qoldiq qoladigan va 5 ga qoldiqsiz bo'linadigan barcha natural sonlarni toping.

599. 4, 5, 7 ga bo'linganida mos ravishda 3, 4, 5 qoldiq qoladigan 200 va 500 sonlari orasidagi barcha butun sonlarni toping.

600*. Abssissalar o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta chiziqda yotadigan $4x - 7u = 9$, $2x + 9u = 15$ va $5x - 13u = 12$ to'g'ri chiziqlarning butun nuqtalarini toping.

601. Quyidagi taqqoslamalar sistemalarini yeching:

a) $\left.\begin{array}{r} x \equiv a\ (mod\ 6) \\ x \equiv 1\ (mod\ 8) \end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{r} x \equiv 2\ (mod\ 6) \\ x \equiv a\ (mod\ 8) \end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{r} x \equiv 5\ (mod\ 18) \\ x \equiv 8\ (mod\ 21) \\ x \equiv a\ (mod\ 35) \end{array}\right\}$; d) $\left.\begin{array}{r} x \equiv a\ (mod\ 7) \\ x \equiv b\ (mod\ 5) \\ x \equiv c\ (mod\ 3) \end{array}\right\}$.

602. Quyidagi sistemalar yechimga ega bo'ladigan a ning barcha qiymatlarini toping:

a) $\left.\begin{array}{l} x \equiv a \ (mod\ 6) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 10) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 21) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 11) \end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 3 \ (mod\ 11) \\ x \equiv 11 (mod\ 20) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 15) \\ x \equiv a \ (mod\ 18) \end{array}\right\}$; c) $\left.\begin{array}{l} 2x \equiv a \ (mod\ 4) \\ 3x \equiv 4 \ (mod\ 10) \end{array}\right\}$.

603*. O'nlik sanoq sistemasida $xuz138$ ko'rinishda yozilgan N soni 7 ga bo'linadi, $138xuz$ soni esa 13 ga bo'linganida 6 qoldiq qoladi va $x1u3z8$ sonini 11ga bo'linganida 5 qoldiq qoladi. N sonini toping.

604*. $13xu45z$ sonini 792 ga bo'linishini bilgan holda x, u, z larni toping.

605*. Shunday uch xonali sonlarni topingki, ularni har birining o'ng tomoniga shu sondan keyin keladigan sonni yozsak aniq kvadrat hosil bo'lsin.

606*. Noma'lum sonni 7 ga bo'lsak, 3 qoldiq hosil bo'ladi, shu noma'lumning kvadratini 7^2 ga bo'lsak 44 qoldiq hosil bo'ladi; uning kubini 7^3 ga bo'lsak 111 qoldiq hosil bo'ladi. Noma'lum sonni toping.

607. Quydagi taqqoslamalarni o'zaro tub modullar bo'yicha taqqoslamalar sistemasiga keltirib yeching:

a) $13x \equiv 32 \ (mod\ 28)$; b) $245x \equiv 405 \ (mod\ 475)$; c) $78x \equiv 49 \ (mod\ 77)$;
d) $56x \equiv 81 \ (mod\ 45)$; ye) $x^2 \equiv -1 \ (mod\ 20)$; g) $x^2 \equiv -1 \ (mod\ 85)$.

608. Quyidagi chiziq qaysi butun nuqtalardan o'tadi:

$$14y = 3x^3 - 4x^2 + 11x + 4, \text{ bu yerda } -7 < x < 7?$$

609. Quyidagi taqqoslamalar sistemalarini yeching:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 3u \equiv 5 \\ 4x \equiv 5 \end{array}\right. (mod\ 7)$; b) $\left\{\begin{array}{l} x \equiv 2 \\ x - 2u \equiv 1 \end{array}\right. (mod\ 4)$;

c) $\left\{\begin{array}{l} 9u \equiv 15 \\ 3x - 7u \equiv 1 \end{array}\right. (mod\ 12)$; d) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 5u \equiv 1 \\ 9u \equiv 15 \end{array}\right. (mod\ 12)$;

e) $\left\{\begin{array}{l} x + 2u \equiv 0 \\ 3x + 2u \equiv 2 \end{array}\right. (mod\ 5)$; f) $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4u \equiv 29 \\ 2x - 9u \equiv -84 \end{array}\right. (mod\ 143)$;

g) $\left\{\begin{array}{l} x + 2u \equiv 4 \\ 3x + u \equiv 2 \end{array}\right. (mod\ 5)$; h) $\left\{\begin{array}{l} 4x - u \equiv 2 \\ 2x + 2u \equiv 0 \end{array}\right. (mod\ 6)$.

610. Quyidagi tenglamalar sistemasini butun sonlarda yeching:

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 5z = 1 \\ 3x + y + 5z = 3 \end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{l} x - y - 3z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{array}\right\}$.

611.

$$\frac{3x-u+1}{7} \quad \text{va} \quad \frac{2x+3u-1}{7}$$ ifodalar butun son bo'ladigan.

x va u ninng butun qiymatlarini toping,

JAVOBLAR. KO'RSATMALAR. YECHILISHLAR

I-bob
TO'PLAMLAR VA AKSLANTIRISHLAR
1-§.

3. $\{\emptyset\}$ to'plam bitta $\emptyset$ elementga ega, $\emptyset$ to'plam esa elementga ega emas.

5. a) $A\cup B=\{-1,0,3,4,6\},\quad A\cap B=\{0,4\},\quad A\setminus B=\{-1,3\},\quad B\setminus A=\{6\};$

b) $A\cup B=[0,5],\quad A\cap B[1,2],\quad A\setminus B=[0,1],\quad B\setminus A=]2,5];$

c) $A\cup B=[0,2]\cup\{4,6\},\quad A\cap B\{0\},\quad A\setminus B=]0,2],\quad B\setminus A=\{4,6\};$

d) $A\cap B=]-\infty,8[,\quad A\cap B=]5,7[,\quad A\setminus B=]-\infty,5],\quad B\setminus A=]7,8[;$

e) $A\cup B=[1,7],\quad A\cap B=[2,3]\cup]5,6],\quad A\setminus B=[1,2[\cup]6,7],\quad B\setminus A]3,5].$

8. e) *Yechish.* $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C).$ bo'lsin. U holda $C\subseteq A\cap(B\cup C),$ va demak, $C\subseteq A.$.

11. C_n^k .

12. a) Noto'g'ri. *Yechish.* Masalan $A=\emptyset,\quad B=\{\emptyset\},\quad C=\{\{\emptyset\}\};$ b)Noto'g'ri, a) da bo'lgan misol bu yerda ham misol bo'la oladi; c) To'g'ri. *Yechish.* Teskarisini faraz qilib isbotlaymiz $x\in A\cap C,$ bo'lsin, u holda $A\cup C\subseteq B,$ bo'lgani uchun $x\in B$. Ammo $x\in A\cap B,$ va demak, $x\in -C$. Bu esa $x\in C$ bo'lishiga ziddir. d) Noto'g'ri. *Yechish.* Masalan $A=C\neq B$ deb olamiz. e) Noto'g'ri. Masalan. Uchta juft-jufti bilan kesishmaydigan bo'sh bo'lmagan to'plamlarni olamiz.

13. *Yechish.* Masalan $A_1\{\emptyset\},\quad A_{n+1}=A_n\cup\{A_n\}$ bo'lsin.

14. $X=(C\setminus A)\cup B.$ *Yechish.* Darhaqiqat, $B\subseteq X\subseteq(-A)\cup B$ (8-b) masalaning birinchi tenglamasidan) kelib chiqadi) va 4-misoldan va $C\cap(-A)\subseteq X\subseteq C$ (8-masala a) va s) dagi ikkinchi tenglamadan kelib chiqadi). Bundan

$$B\cup(C\cap(-A))X\subseteq A\subseteq((-A)\cup B)\cap C=((-A)\cap C)\cup(B\cap C)=((-A)\cap C)\cup B.$$

$X=(C\setminus A)\cup B$ ning berilgan sistemani qanoatlantirishni tekshirish qiyin emas.

15. $X=(A\setminus B)\cup C.$

16. $X=C\setminus B.$

17. e) *Yechish.* $x\in\bigcup_{k\in K}(B\cap A_k)$ bo'lsin. U holda $k\in K$ topiladiki, $x\in B\cap A_k$, ya'ni $x\in B$ va $x\in A_k$. Shuning uchun $x\in\bigcup_{k\in K}A_k$ va demak, $x\in B\cap\bigcup_{k\in K}A_k$. Shunday qilib, $\bigcup_{k\in K}(B\cap A_k)\subseteq B\cap\bigcup_{k\in K}A_k$ $x\in B\cap\bigcup_{k\in K}A_k$ bo'lsin. U holda $x\in B$ va $x\in\bigcup_{k\in K}A_k$, ya'ni shunday $k\in K$ mavjudki $x\in A_k$ bo'ladi. Shuning uchun $x\in B\cap A_k$, va demak, $x\in\bigcup_{k\in K}(B\cap A_k)$. Shunday qilib $B\cap\bigcup_{k\in K}A_k\subseteq\bigcup_{k\in K}(B\cap A_k)$.

2-§.

22. *Yechish.* $a\in A,\ b\in B.$ bo'lsin. Unda $<a,b>\in A\times B,$ va demak, $<a,b>\in C\times D,$ ya'ni $a\in C,\ b\in D.$ Boshqa tomondan $<b,a>\in B\times A,$ va demak, $<b,a>\in C\times D,$ ya'ni $b\in C,\ a\in D.$ Unda $<a,a>\in C\times D,$ demak $a\in B$. Xuddi shuningdek $<b,b>\in C\times D,$ demak, $b\in A.$ Shunday qilib $A=B$. Unda $A\times B=C\times D$ ga ega bo'lamiz va *19(v)* masalaga ko'ra *A=S, V=D.*

23. a) $X\times Y=\{(1,3),(2,3),(1,4),(2,4),(1,5),(2,5)\},\quad Y\times X=\{(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),$ $(5,2)\},\quad X^2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,1),(2,2)\},\quad X^3=\{(1,1,1),(1,2,1),(2,1,1),(2,2,1),$ $(1,1,2),(2,1,2),(2,2,2),(1,2,2)\},\quad |X^n|=2^n,\quad |Y^n|=3^n;$ b) $X\times Y=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\},$ $Y\times X=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\},\quad X^2=\{(3,3)\},\quad X^3=\{(3,3,3)\},\quad |X^n|=1,\ |Y^n|=4^n.$

24. a) $f^{-1}(0)-$ *oy* o'qi b) $f(\Pi)-$*ox* o'qi, f – syuryektiv, ammo noinyektiv akslantirish.

26. f – biyeksiya.

27. a) $f(1)=1,\quad f^{-1}(1)=1,$ f – biyeksiya;

b) $f(1)=2,\quad f^{-1}(1)=\{0\},$ f – inyeksiya, ammo nosyuryektiv akslantirish;

c) $f(1)=2,\quad f^{-1}(1)=\{0\},$ f – biyeksiya;

d) $f(1)=1,\quad f^{1}(1)=\{1,-1\},$ f – noinyeksiya va nosyuryeksiya;

e) $f(1)=1,\quad f^{-1}(1)=\{1,-1\},$ f – syuryeksiya ammo noinyeksiya;

f) $f(1)=1, \quad f^{-1}(1)=\{1\}$, f – biyeksiya; g) $f(1)=1, \quad f^{1}(1)=\{1\}$, f – biyeksiya;

h) $f(1)=\sin 1, \quad f^{-1}(1)=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\right\}$, f – noinyeksiya va nosyuryeksiya;

i) $f(1)=\sin 1, \quad f^{-1}(1)=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, f – biyeksiya;

j) $f(1)=\cos 1, \quad f^{1}(1)=\{2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$, f – noinyeksiya va nosyuryeksiya;

k) $f(1)=\cos 1, \quad f^{-1}(1)=\{2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$, f – syuryeksiya, ammo noinyeksiya;

1) $f(1)=\cos 1, \quad f^{-1}(1)=\{0\}$, f – biyeksiya;

m) $f(1)=tg1, \quad f^{-1}(1)=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\right\}$, f – syuryeksiya, ammo noineksiya;

o) $f(1)=tg1, \quad f^{-1}(1)=\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, f – biyeksiya;

p) $f(1)=ctg1, \quad f^{-1}(1)=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\right\}$, syuryeksiya, noinyeksiya;

q) $f(1)=1, \quad f^{-1}(1)=\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, f – biyeksiya; r) $f(1)=0, \quad f^{-1}(1)=2$, f – biyeksiya.

29. s^n.

31. $gf:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $gf(x)=2^{x^2}$, $fg:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $fg(x)=2^{2x}$, $g^2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g^2(x)=2^{2^x}$, $f^3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f^3(x)=x^8$.

32. a) $gf=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}$, $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix}$, $f^6=e, \quad f^5=e$;

b) $gf=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&5&1&2&3\end{pmatrix}$, $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&2&1&3\end{pmatrix}$, $f^6=e, \quad f^5=g$.

33. a) $gf:\Pi\to\Pi$ --shunday akslantirishki, ixtiyoriy $M\in\Pi$ uchun $fg=gf, \quad g^2=g, \quad f^2=f$;

v) gf – tekislikning koordinat boshiga nisbatan simmetriyasi $fg=gf, \quad g^2=f^2=e$; s) $gf=fg=f, \quad g^2=e, \quad f^2=f$.

34. b), d), e), h), j) , k), m), p), dagi akslantirishlar teskarilanmaydi.

a) $f^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+2)$; c) $f^{-1}:\mathbf{R}^{>0}\to\mathbf{R}, \quad f^{-1}(x)=\log_2 x$;

f) $f^{-1}:\mathbf{R}^{>0}\to\mathbf{R}^{>0}$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$; g) $f^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$;

i) $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x)=\arcsin x$;

1) $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f^{-1}(x)=\arccos x$;

o) $f^{-1}:\mathbf{R}\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x)=arctg\ x$;

q) $f^{-1}:\mathbf{R}\to(0,\pi)$, $f^{-1}(x)=arcctg\ x$; r) $f^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{>0}$, $f^{-1}(x)=2^x$.

35. a) $f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$, $g^{-1}=g$, $g^{-2}f^3=f^{-3}g^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}$;

b) $f^{-1}=g^{-2}f^3=f^{-3}g^3=f$, $g^{-1}=g$.

3-§.

36. Biz *0 0* ning bo'luvchisi deb hisoblaymiz. a) 1-misolga o'xshab ko'rsatiladi. b) $\delta_R=\rho_R=R^{-1}=R$, $R\cdot R=R\cdot R^{-1}=R^{-1}\cdot R=\mathbf{R}^2$;

c) $\delta_R=\rho_R=\mathbf{R}$ $R^{-1}=\{<x,y>|\,x,y\in\mathbf{R}$ ва $2y\geq 3x\}$, $R\cdot R=\{<x,y>|\,x,y\in\mathbf{R}$ ва $4x\geq 9y\}$, $R\cdot R^{-1}=R^{-1}\cdot R=\mathbf{R}^2$;

d) $\delta_R=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\rho_R=\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathbf{R}^{-1}=\{<x,y>|\,x,y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ва $x\geq\sin\ y\}$,

$R\cdot R=\{<x,y>|\sin\sin x\leq y\}, R\cdot R^{-1}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]^2, R^{-1}\cdot R=\{<x,y>|\,x,y\in\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]\}$.

39. *Yechish.* Agar $R=i_A$, bo'lsa unda A dagi har qanday R_1 munosabat uchun $<x,y>\in R\cdot R_1\Leftrightarrow$ shunday z mavjudki $<x,z>\in R$ va $<z,y>\in R_1$, ammo faqat $x=z$ uchun $<x,z>\in R$ bo'ladi. Shunday qilib $R\cdot R_1=R_1$. Xuddi shu tarzda $R_1\cdot R=R$.bo'lishi ko'rsatiladi. Aksincha $R_1=i_A$ deylik. U holda $R\cdot R_1=R_1$, bo'lgani uchun $R=i_A$bo'ladi.

40. a) *Yechish.* $<x,y>\in(R_1\cdot R_2)^{-1}\Leftrightarrow\ <y,z>\in R_1\cdot R_2\Leftrightarrow\ <y,x>\in R_1$ yoki $<y,x>\in R_2\Leftrightarrow\ <x,y>\in R_1^{-1}$ yoki $<x,y>\in R_2^{-1}\Leftrightarrow\ <x,y>\in R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$;

d) *Yechish.* *R* – *A* va *V* to'plamlar elementlari orasidagi binar munosabat bo'lsin.

$<x,y>\in -R^{-1}\Leftrightarrow\ <x,y>\in(B\times A)\setminus R^{-1}\Leftrightarrow\ x\in B,\ \ y\in A$ va

$< x,y > \notin R^{-1} \Leftrightarrow \quad x \in B, \quad y \in A$ va

$< y,x > \notin R \Leftrightarrow \quad < y,x > \in (A \times B) \setminus R \Leftrightarrow \quad < y,x > \in -R \Leftrightarrow \quad < x,y > \in (-R)^{-1}.$

41. Agar $A \neq \emptyset$ va $B \neq \emptyset$ bo'lsa, unda bunday munosabatlar mavjud emas..

Yechish. $x \in A \cap B$ bo'lsin. Unda $< x,y > \in R \Leftrightarrow \quad < x,x > \in R^{-1} \Leftrightarrow \quad < x,x > \in -R$ ziddiyat hosil bo'ladi.

42. a) *Yechish.* $< x,y > \in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki $< x,z > \in R_1$ va $< z,y > \in R_2 \cdot R_3 \Leftrightarrow$ shunday $z,\ u$ lar mavjudki, $< x,u > \in R_1 \cdot R_2$ va $< u,y > \in R_3 \Leftrightarrow \quad < x,y > \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3.$ b) *Yechish.* $< x,y > \in \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \cdot Q \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $< x,z > \in \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right)$ va $< z,y > \in Q \Leftrightarrow$ shunday z va $i \in I$ mavjudki, $< x,z > \in R_i$ va $< z,y > \in Q \Leftrightarrow$ shunday $i \in I$ mavjudki,

$< x,y > \in R_1 \cdot Q \Leftrightarrow \quad < x,y > \in \bigcup_{i \in I} (R_i \cdot Q);$ s) ham b) kabi isbotlanadi.

43. a) *Yechish.* $< x,y > \in Q \cdot \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \Leftrightarrow$ shunday z mavjudki, $< x,z > \in Q$ va $< z,y > \in \bigcap_{i \in I} R_i \Leftrightarrow$ shunday z topiladiki $< x,z > \in Q$ va hamma $i \in I$ lar uchun $< z,y > \in R_i \Leftrightarrow$ hamma $i \in I$ lar uchun $< x,y > \in Q \cdot R_i \Leftrightarrow \quad < x,y > \in \bigcap_{i \in I} (Q \cdot R_i);$

b) ham a) kabi isbotlanadi; c) *Yechish.* Masalan a) uchun $R_1 = \{< 1,1 >\}, \quad R_2 = \{< 0,1 >\}, \quad Q = \{< 1,0 >, < 1,1 >\}.$

4-§.

46. *Ko'rsatma.* $R \quad A \Leftrightarrow i_A \subseteq R$ da refleksiv munosabatdir.

47. *Ko'rsatma.* a) $R \quad A \Leftrightarrow R \cap i_A = \emptyset$ da irrefleksiv munosabat.

b) Masalan, $R_1 = \{< x,y > | \, x,y \in N, \quad x < y\}, \quad R_2 = R_1^{-1}$ bo'lsin. U holda $R_1 \circ R_2 -$ refleksiv.

48. *Ko'rsatma.* $R -$ simmetrik $\Leftrightarrow R = R^{-1}.$

49. a) *Ko'rsatma.* $R -$ antisimmetrik $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq i_A;$ b) *Yechish.*

$$(R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}); \quad R_1^{-1} \cap R_2 = (R_1 \cap R_2^{-1})^{-1}.$$

50 Masalan $\{<x,y>\mid x,y\in R,\quad x,y>0\}$.

51. *Ko'rsatma.* $R\subseteq i_A$.

52. d) norefleksiv, nosimmetrik, antisimmetrik va tranzitiv; g) refleksiv, nosimmetrik, noantisimmetrik, notranzitiv; h) norefleksiv, nosimmetrik, antisimmetrik, notranzitiv; e) refleksiv, simmetrik, noantisimmetrik, tranzitiv.

54. *a*) ha; b) yo'q.

57. $R=R^{-1}$.

58. *Yechish.* $R-$ekvivalentlik $\Rightarrow R^{-1}=R,\quad R\circ R\subseteq R,\quad i_A\subseteq R.$ Aksincha, $R\circ R^{-1}$ ixtiyoriy R uchun simmetrik. Shuning uchun R simmetrik va $R\circ R=R\circ R^{-1}\subseteq R.$

59. *a*) *Ko'rsatma.* $R_1=R_1\circ R_1$;

b) Ko'rsatma. $A^2=(A^2)^{-1}=(R_1\circ R_2)^{-1}==R_2^{-1}\circ R_1^{-1}=R_2\circ R_1.$

61. *Yechish.* $R_1\circ R_2-$ekvivalentlik

$\Rightarrow R_1\circ R_2=(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}=R_2\circ R_1$ bo'lsin. Unda

$R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$.simmetrik; $(R_1\circ R_2)^{-1}=(R_2\circ R_1)^{-1}=R_1^{-1}\circ R_2^{-1}=R_1\circ R_2$, ya'ni $R_1\circ R_2$ simmetrik;

$$(R_1\circ R_2)\circ(R_1\circ R_2)=R_1\circ(R_2\circ R_1)\circ R_2=R_1\circ(R_1\circ R_2)\circ R_2=(R_1\circ R_1)\circ(R_2\circ R_2)\subseteq R_1\circ R_2,$$

ya'ni $R_1\circ R_2$ tranzitiv; reflektivligi esa ko'rinib turibdi.

62. *Yechish.* $R_1\circ R_2$ ekvivalentlikdir (61-masalaga qarang). Ko'rinib turibdiki, $R_1\cup R_2\subseteq R_1\circ R_2$. Endi qandaydir Q ekvivalentlik munosabati uchun $R_1\cup R_2\subseteq Q$ bo'lsin. Unda $R_1\circ R_2\subseteq(R_1\cup R_2)\circ(R_1\cup R_2)\subseteq Q\circ Q\subseteq Q.$

63. *Ko'rsatma.* Q $R_{i_1}\circ R_{i_2}\circ\ldots R_{i_k}\ (k\geq 1,\quad i_1,\ldots,i_k\in I)$ ko'rinishdagi tuzish mumkin bo'lgan hamma ko'paytmalar birlashmasidir.

5-§.

68. a), b) lar qismiy tartibning antisimmetrikligidan kelib chiqadi.

71. *Ko'rsatma*. $R-$oldtartib $\Rightarrow R=R\circ i_A\subseteq R\circ R.$

76. $h(x)=\{y\mid y\leq x\}$ uchun $x\in A$ talab qilinayotgan izomorfizmdir.

78 *Ko'rsatma.* Aks holda A o'z ichiga shunday $\{a,a_1,a_2,\ldots\}$ cheksiz qism to'plamni oladiki, $a>a_1>a_2>\ldots$ yoki $a<a_1<a_2<\ldots$ bo'ladi.

80. *Yechish.* m ga nisbatan induksiya bilan isbotlaymiz (7-§). $m=1$ bo'lganda A ning hamma elementlari juft-jufti bilan tahhoslanmaydilar va A ning elementlari soni n dan oshmaydi. $m>1$, V – A ning minimal elementlari to'plami bo'lsin. Agar $C\ \ A\setminus B$, to'plamdagi ixtiyoriy zanjir bo'lsa, unda C eng kichik a elementga ega bo'ladi (77-masalaga qarang) va shunday $a_0\in B$ mavjud bo'ladiki, $a_0\leq a$ bo'ladi (78-masalaga qarang). Shuning uchun $C\cup\{a_0\}$ A da zanjir, $a_0\notin C$ va, demak, C ning elementlari soni (m – 1) dan ortiq emas. Induksiya faraziga asosan $(A\setminus B)$ ning elementlari soni $(m-1)\,p$ dan ortiq emas. $A=(A\setminus B)\cup B$ to'plam esa $(m-1)\,p+n = mn$ tadan ortiq elementga ega emas.

81. *Yechish.* Agar A aytilgan xossaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy nominimal $a\in A$ element uchun $\{x\,|\,x\in A,\quad x<a\}$ to'plamning aniq yuqori yoki $u(a)$ mavjud va ixtiyoriy nomaksimal $a\in A$ element uchun $\{x\,|\,x\in A,\quad x>a\}$ to'plamning aniq quyi yoki $g(a)$ mavjud bo'ladi. Agar $a<b$ bo'lsa, u holda $\underbrace{b=g(g...(g(a))}_{n\ \text{marta}}...)$, $\underbrace{a=u(u...(u(b))}_{n\ \text{marta}}...)$ qandaydir p uchun. To'rtta hol bo'lishi mumkin.

a) A eng kichik va eng katta elementlarga ega. U holda A chekli.

b) A eng kichik a_0 elementga ega va eng katta elementga ega emas. U holda qandaydir n uchun ixtiyoriy $a\in A$ element $\underbrace{g(g...(g(a_0))}_{n\ \text{marta}}...)$ ko'rinishda ifodalanadi, va A natural sonlar to'plamiga ularning oddiy tartibi bilan izomorfdir.

s) A eng katta a_0 elementga ega va eng kichik elementga ega emas. U holda A manfiy butun sonlar to'plamiga izomorf.

d) A eng katta va eng kichik elementlarga ega emas. U holda A hamma butun sonlar to'plamiga izomorf.

82. Hamma chekli to'plamlar va faqat shular.

6-§.

84. s) *Ko'rsatma.* f A dan B ga funksiya bo'lsin. U holda $b\in B$ uchun $g(b)\in f^{-1}(\{b\})$ bo'ladigan ixtiyoriy $g:B\to A$ funksiya inyeksiya bo'ladi.

87. *Yechish.* A – cheksiz, $a_0 \in A$. bo'lsin. U holda $A \setminus \{a_0\}$ ham cheksiz bo'ladi (85-v)masalaga qarang) va $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$ mavjud bo'ladi. Shuningdek $A \setminus \{a_0, a_1\}$ cheksiz va $a_2 \in A \setminus \{a_0, a_1\}$ mavjud va hakoza. $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$,.... deylik. U holda f **N** va $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, ...\} \subseteq A$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi.

88. *Yechish.* A cheksiz va $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ – uning sanoqli qism –to'plami bo'lsin. U holda

$$A = B \bigcup (A \setminus B) \sim (B \setminus \{b_0\}) \bigcup (A \setminus B) = A \setminus \{b_0\}.$$

89. 84 s)-masala va 4-misoldan kelib chiqadi.

90. 85 b)-masaladan va 4-misoldan kelib chiqadi.

91. a) *Yechish.* $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{in_i}\}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ bo'lsin. $i \in \mathbf{N}$, $j \le n_i$ uchun $f(a_{ij}) = n_0 + \cdots + n_{i-1} + j - 1$ deylik. $f : \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i \to \mathbf{N}$ biyeksiyadir;

b) *Yechish.* $A_0 = \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots\}$, $A_1 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{20}, a_{21}, a_{22}, \ldots\}, \ldots$ bo'lsin. $B_0 = \{a_{00}\}$, $B_1 = \{a_{01}, a_{10}\}, \ldots,$ $B_n = \{a_{0n}, a_{1n-1}, \ldots, a_{n0}\}$. deylik. U holda $\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} B_i$ sanoqlidan boshqa emas. (a) masalani qarang.) $\overline{\overline{\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i}} \ge \overline{\overline{A_0}} = \mathbf{N_0}$.

92. *Yechish.* a) A_1 to'plam A ning sanoqli qism to'plami $A_1 \bigcup B \sim A_1$ (90-masala va 6-misolga qarang). Shuning uchun

$$A \bigcup B = (A \setminus A_1) \bigcup (A_1 \bigcup B) \sim (A \setminus A_1) \bigcup A_1 = A;$$

b) *Yechish.* *(a)* dan kelib chiqadi, chunki $A = (A \setminus B) \bigcup B$ va $(A \setminus B)$ cheksiz.

93. *Ko'rsatma.* $A_1 = \{a_0, a_1, \ldots\}$, $A_2 = \{b_0, b_1, \ldots\}$ bo'lsin. U holda $A_1 \times A_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_2 \times \{b_i\}$, $A_1 \times \{b_i\} \sim A_1$. Shuning uchun $A_1 \times A_2$ sanoqli (91 (b)masalaga qarang).

94. a) *Yechish.* $y \neq 0$, da $f(<x,y>)=\dfrac{x}{y}$, $f(<x,0>)=0$ funksiya $\mathbf{Z}^2$ni $\mathbf{Q}$ ga akslantiradi. Shuning uchun $\overline{\overline{\mathbf{Q}}} \le \overline{\overline{\mathbf{Z}}}^2$ (84 c)-maslaga qarang). Bundan $\overline{\overline{\mathbf{N}}} \le \overline{\overline{\mathbf{Q}}} \le \overline{\overline{\mathbf{Z}}}^2 \le \overline{\overline{\mathbf{N}}}$ (7-misolga va 93-masalaga qarang) va $\overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \overline{\overline{\mathbf{N}}}$ (2-misolga qarang);

b) *Yechish.* $a_1, b_1 -$lar $a < a_1 < b_1 < b,$ bo'ladigan rasional sonlar bo'lsin. $f(0)=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, $f(n+1)=\dfrac{a_1+f(n)}{2}$ $\boldsymbol{N}$ dan $b\,[a,b]$ da inyeksiya. Boshqa tomondan, $[a,b]\cap \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}$.

95. *Yechish.* 91 (b) va 93-masalalardan kelib chiqadi, chunki barcha chekli ketma-ketliklar to'plami belgilangan p uzunlikdagi $n \in \mathbf{N}$ ketma-ketliklar birlashmasidir.

96. 95-masladan kelib chiqadi.

97. *Yechish.* 95-masaladan kelib chiqadi, chunki $a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\cdots+a_kx^{n_k}+a_{k+1}$ ko'phadni $\{x,+\}\cup \mathbf{N}$ sanoqli to'plam elementlarining chekli ketma-ketligi ko'rinishida ifodalash mumkin.

98. *Yechish.* (a,b) intervalda c $(a<c<b)$ ratsional sonni topish mumkin. Shuning uchun intervallar to'plami $\mathbf{Q}$ to'plamning qism to'plamiga ekvivalent.

99. *Ko'rsatma.* 98-masaladan kelib chiqadi. Ixtiyoriy $x \in \mathrm{A}$ nuqtaga $\left(x-\dfrac{\delta}{2},\quad x+\dfrac{\delta}{2}\right)$ intervalni mos qo'yish kerak.

100. *Ko'rsatma..* 92 (a)- masaladan kelib chiqadi.

101. *Ko'rsatma.* Masalan, $[0,1]$ va $[0,1]^2$larni olish kerak. Hech qaysisining davrida 9 mavjud bo'lmagan haqiqiy sonlarning $<0,a_0a_1\ldots;\ 0,b_0b_1\ldots>$ juftiga $0,a_0b_0a_1b_1\ldots.$ sonni mos qilib qo'yish kerak. Shundan keyin 2-misoldan foydalaning.

102. *Ko'rsatma..* Ikkita, masalan, markazi koordinata boshida va r va R radiusli aylanalarni olib qarash kerak. $<r\cos\varphi, r\sin\varphi>$ nuqtaga $<R\cos\varphi,\ R\sin\varphi>$ nuqtani mos qo'yish kerak.

103. *Yechish.* $f:\mathbf{N}\to[0,1]$ – biyeksiya, $f(n)=0,a_{n0}a_{n1}...a_{nk}....$ bo'lsin. Haqiqiy β sonni quyidagicha tuzamiz $\beta=0,\ b_0b_1b_2...,$ bu yerda $b_i=\begin{cases}1, & \text{если } a_{ii}\neq 1,\\ 2, & \text{если } a_{ii}=1.\end{cases}$.

Ko'rinib turibdiki, $f(n)\neq\beta.$ Qarama-qarshilik hosil qildik.

104. *Yechish.* $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\bigcup(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$ va $\mathbf{Q}$ sanoqli (94 (a) va 92 (b)masalaga qarang) bo'lgani uchun irrasional sonlar to'plamining quvvati s ga teng bo'ladi.

105. *Ko'rsatma.* $[0,1]\subseteq\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}_n}[i,i+1]\subset\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}}[i,i+1]\subset\mathbf{R}$.

106. *Yechish.* Har bir $x\in\mathbf{R}$ ga x ga yaqinlashuvchi rasional sonlar ketma-ketligini mos qo'yish mumkin va $Q\sim N$ natural sonlar ketma-ketligi bo'lgani uchun $\overline{\overline{\mathbf{R}}}$ hamma bunday ketma-ketliklarning C to'plami quvvatidan ortiq emas. Aksincha natural sonlarning $a_0,a_1,a_2,....$ ketma-ketligiga haqiqiy $0,\underbrace{0...0}_{a_0+1}1\underbrace{0...0}_{a_1+1}1\underbrace{0...0}_{a_2+1}1...$ sonni mos qo'yyamiz.

7-§.

115. *Yechish.* $n=0$ bo'lganda $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}$, ya'ni tasdiq o'rinli.

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}\ \text{bo'lsin.}$$

U holda

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

121. *Yechish.* Tasdiq to'g'ri, chunki

$$\frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}-ctgx=\frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}-\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}=\frac{tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}$$

bo'lgani uchun $n=1$ tasdiq o'rinli.

$$\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}tg\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}-ctgx\ \text{bo'lsin.}$$

U holda

$$\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}tg\frac{x}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^k}ctg\frac{x}{2^k}-ctgx+\frac{1}{2^{k+1}}tg\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}\frac{ctg^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{ctg\frac{x}{2^{k+1}}}+$$

$$+\frac{1}{2^{k+1}ctg\frac{x}{2^{k+1}}}-ctgx=\frac{1}{2^{k+1}}ctg\frac{x}{2^{k+1}}-ctgx.$$

122. *Yechish.* $n=2$ da tasdiq o'rinli, chunki $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}.$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k} \qquad \text{(1) bo'lsin}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1} \qquad \text{(2) ni isbot qilamiz.}$$

Ixtiyoriy $k\geq 0$ uchun

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \qquad \text{(3) o'rinli}$$

Darhaqiqat bu tengsizlik uning ikki tomonini $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ ga ko'paytirib hosil qilinadigan $1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}>1$ tengsizlikka teng kuchli. (1) va (3) ni hadlab qo'shib (2) ni hosil qilamiz.

123. $n=2$ bo'lganda tengsizlik $\frac{16}{3}<6$ ko'rinishni oladi, va demak, to'g'ri $\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}$ bo'lsin, bunda $k\geq 2$. $k>0$ bo'lganda $\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ tengsizlikning o'rinli ekanligini tekshirish qiyin emas. Shuning uchun

$$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}, \text{ ya'ni } \frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}.$$

125. d) To'g'ri emas 2^9-2 son 9 ga bo'linmaydi.

126. s) *Ko'rsatma.* Nyuton binomidan foydalanish kerak.:

$$\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}+(n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}(n+1)>n!(n+1)=(n+1)!.$$

127. *Ko'rsatma.* Agar $a=b$ bo'lsa, berilgan tengsizlik ixtiyoriy $a,$ s uchun bajariladigan $2ac\le a^2+c^2$ tengsizlikka teng kuchli. Shuning uchun «ixtiyoriy $a,b\in\mathbf{N}$ uchun $a<b<c\Rightarrow ab+bc+ac\le a^2+b^2+c^2$ tasdiqni isbotlash yetarli. Uni c bo'yicha induksiya vositasida isbot qilish kerak.

128. a) *Ko'rsatma.* $a^nb+ab^n\le a^{n+1}+b^{n+1}$ tengsizlikdan $a^{n+1}b+a^2b^n\le a^{n+2}+ab^{n+1}$ va $a^nb^2+ab^{n+1}\le a^{n+1}b+b^{n+2}$ tengsizliklar kelib chiqadi. Oxirgi ikki tengsizlikni qo'shib, $a^2b^n+a^nb^2\le a^{n+2}+b^{n+2}$ tengsizlikni hosil qilamiz. $2ab\le a^2+b^2$ tengsizlikdan $2a^{n+1}b\le a^{n+2}+a^nb^2$ va $2ab^{n+1}\le a^2b^n+b^{n+2}$ tengsizliklar kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni qo'shib $2(a^{n+1}b+ab^{n+1})\le a^{n+2}+b^{n+2}+a^2b^n+a^nb^2$ ni hosil qilamiz. b) n bo'yicha induksiya, a) dan foydalaning.

129. n bo'yicha induksiya bilan isbotlang.

120. *Ko'rsatma:* n bo'yicha induksiya bilan isbotlang.

$$A_k=3^{2k}+2^{6k-5}$$

son 11 ga bo'linsin. U holda

$$A_{k+1}=3^{2k+2}+2^{6k+1}=9\cdot 3^{2k}+64\cdot 2^{6k-5}=9(3^{2k}+2^{6k-5})+55\cdot 2^{6k-5}$$

son 11 ga bo'linadi.

131. n bo'yicha induksiya bilan isbotlang.

II-Bob. ASOSIY ALGEBRAIK SISTEMALAR

8-§

132. *a*) – *h*) gruppoidlar; *a*), *b*), *d*), *e*), *f*), *h*) – polugruppalar;
b), *e*) - monoidlar.
133. *a*) – *e*) – gruppoidlar; *e*) – polugruppa.
134. *b*) gruppa.
135. ha; agar $Card\ M>1$ bo'lsa mavjud emas.
136. 3, yo'q.

137. *Ko'rsatma.* z_1z_2 ni qarab chiqish kerak; bu yerda $z_1 -$qandaydir chap nol, $z_2 -$ o'ng nol.

138. *Ko'rsatma.* u_1u_2 ni ko'rib chiqish kerak; bunda $u_1 -$ qandaydir chap birlik, $u_2 -$ o'ng birlik.

139. ha, faqat ko'paytma o'ng ko'paytuvchiga teng bo'lgan polugruppada.

140. *Ko'rsatma.* Ga ni qarab chiqish kerak; bunda G $-$ berilgan polugruppa, $Ga = G$ bo'lishini, ya'ni $xa = b$ tenglama G da a va b larning istalgan qiymatlarida yechilishini, xususan $xa = e$, bu yerda $e -$ chap birlik bo'lishini ko'rsatish kerak. Bir qiymatlilik ko'rinib turibdi.

141. Ko'paytma chap ko'paytuvchiga teng bo'lgan polugruppa.

142.

a)

	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

b)

	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

e)

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4	f_8	f_7
f_3	f_3	f_4	f_7	f_8	f_2	f_1	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1	f_7	f_8	f_5	f_6
f_5	f_5	f_6	f_8	f_7	f_1	f_2	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_1	f_2	f_8	f_7	f_3	f_4
f_7	f_7	f_8	f_3	f_5	f_4	f_3	f_1	f_2

f_8	f_8	f_7	f_4	f_3	f_6	f_5	f_2	f_1

143. *a*) $(\boldsymbol{Z}_n,\oplus)$ – gruppa; *b*) $(\boldsymbol{Z}_n,\otimes)$ – monoid.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

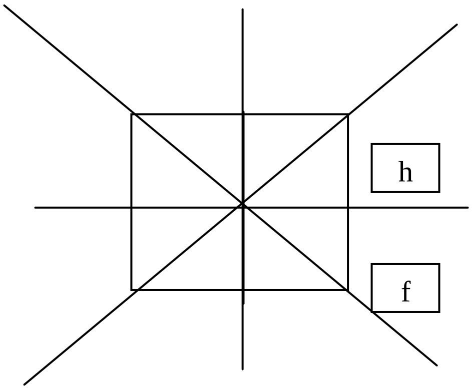
9-§

144. Gruppa tashkil etadigan to’plamlar: *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*), *h*), *i*) (2), *j*), *k*) (2), l) (1), *m*), *n*), *0*), *p*) (1), *q*); xususan abel gruppalar *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *h*), *i*) (2), *j*), *h*), 0), *p*) (1), *q*), *g*) $n=2{,}3$ bo’lsa abel gruppa.

145. Gruppa tashkil etadigan to’plamlar: *a*), *b*), *c*), *e*), *f*), *h*); xususan abel gruppalar *b*), *h*).

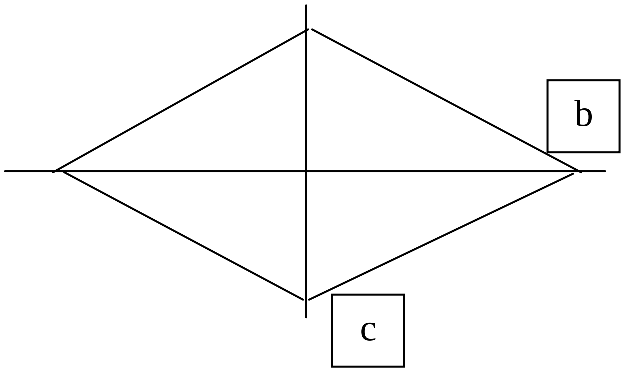
146. *a*), *b*), *c*), *d*) – abel gruppalar; *ye*) – agar $n=1{,}2$ bo’lsa abel gruppa.

147. *a*) simmetriya gruppasi sakkiz almashtirishdan iborat: $e,a,b,c,d,f,g,h,$ bu yerda $e-$ aynan almashtirish, $a-$ kvadratni markazi atrofida 180^0 ga burish, $b-$ 90^0 ga, $c-$ 270^0 burish; $d,f,g,h-$ kvadratni simmetriya o’qlariga nisbatan akslantirishlar.



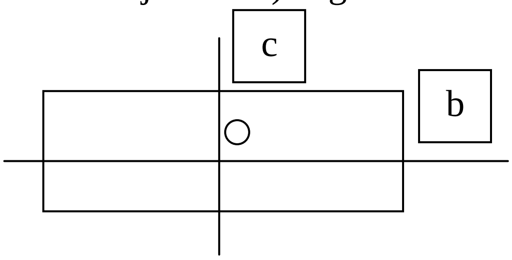
	e	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*
a	*a*	*ye*	*c*	*b*	*f*	*d*	*h*	*g*
b	*b*	*s*	*a*	*e*	*g*	*h*	*f*	*d*
c	*c*	*b*	*e*	*a*	*h*	*g*	*d*	*f*
d	*d*	*f*	*h*	*g*	*e*	*a*	*c*	*b*
f	*f*	*d*	*g*	*h*	*a*	*e*	*b*	*c*
g	*g*	*h*	*d*	*f*	*b*	*c*	*e*	*a*
h	*h*	*g*	*f*	*d*	*c*	*b*	*a*	*e*

b) Simmetriya gruppasi to'rt almashtirishdan iborat: $e,a,b,c,$ bunda $e-$ aynan almashtirish, $a-$ rombni O markaz atrofida 180^0 ga burish, $b,c-$ rombning diaganallarga nisbatan almashtirishlar.



	ye	*a*	*b*	*c*
ye	*ye*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*e*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*b*	*a*	*e*

c) simmetriya gruppasi to'rt almashtirishdan iborat: $e,a,b,c,$ bunda $e-$ aynan almashtirish, $a-$ to'g'ri to'rtburchakni o'z markazi atrofida 180^0 ga burish, $b,c-$ lar to'rtburchakni qarama-qarshi tomonlarining o'rtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarga nisbatan almashtirishlari. Keli jadvali *b*) dagi kabi.



148. Muntazam $n-$ burchakning burishlar gruppasining tartibi n ga teng; tetraedrniki 12, kub bilan oktaedrniki 24, dodekaedr bilan ikosaedrniki 60. *Ko'rsatma.* Ko'p yoqlilar uchun berilgan A nuqtani biror B (*A* dan farqli bo'lishi shart emas) nuqtaga o'tkazuvchi burishlarni qarab chiqing va gruppaning tartibi mk ($m-$ uchlar soni, $k-$ bir nuqtadan chiqadigan qirralar soni) ga teng.

149.

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

151. *b*) *d*) uchun; *ye*), *i*(2); *c*) lar *d*) uchun; *d*) *e*) uchun; *i(2); ye*) uchun *i(2); g*) agar $X=\{1,2,\ldots,n\}$ bo'lsa *f*) uchun va agar $X-$ tekislik bo'lsa f) uchun; *m*) (1), (2) lar *l*) uchun; *h*) esa *0*) uchun.

153. $a),c),d)$.

157. *a*) $\{2^n \mid n\in \mathbf{Z}\}$; *b*) $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$; *c*) $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$; *d*) $\mathbf{Q}^{>0}$, *e*) $\mathbf{Q}^{>0}$.

158. $\{-1,1\}$.

160. *a*) z_{25} ning tartibi 6; z_{15} niki 10; *b*) z_4 bilan z_{12} ning tartibi 22, z_7 ning tartibi esa 88; *s*) z_2, z_6 va z_{10} larning tartibi 19.

161. *a*) tartibi 5 va 7 bo'lan ildizlar mavjud emas; $\pm\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ ning tartibi sakkizga teng, $\pm\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ ning tartibi esa 12 ga teng; *b*) tartiblari besh, yetti va 12 bo'lgan ildizlar mavjud emas. $\cos\dfrac{2\pi k}{7}+i\sin\dfrac{2\pi k}{7}$, $k=1,2,\dots,6$ ning tartibi yettiga teng.

162. *a*) $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{8}+i\sin\dfrac{2\pi k}{8}$ qilib belgilab: z_0 ning tartibi birga, z_9 niki ikki, z_6 bilan z_{12} larniki uchga, z_3 bilan z_{15} larning tartibi oltiga, z_2, z_8, z_{10}, z_{12}, z_{14}, z_{16} larning tartibi beshga, $z_1, z_5, z_7, z_{11}, z_{13}, z_{17}$ larning tartibi 18 ga tengligini topamiz; *b*) $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{25}+i\sin\dfrac{2\pi k}{25}$ qilib belgilab: z_0 ning tartibi bir, $z_5, z_{10}, z_{15}, z_{20}$ larning tartibi besh va boshqa hamma ildizlarning tartiblari 25 ga tengligini topamiz.

163. e ning tartibi birga teng, $(12),(13),(23)$ larning tartiblari ikki, $(1\ \ 2\ \ 3)$ va $(1\ \ 3\ \ 2)$ larning tartiblari uch, S_3 siklik gruppa emasligini topamiz.

164. *a*) bitta; *b*) ikkita; *s*) ∞; *d*), *e*) da to'rtta.

165. 17-masaladagi muntazam $n-$burchak burishlari gruppasi yasovchisi, masalan, $\dfrac{2\pi}{n}$ burchakka burish bo'lgan iklik gruppa; 18-masaladagi gruppa siklik gruppa yasovchisi $p=5$ uchun 2 element bo'lishi mumkin.

168. Yasovchisi uzunligi n bo'lgan sikl bo'lgan siklik gruppaning tartibi n bo'ladi.

173. *a*) a^1, a^2, a^3, a^4; *b*) a^1, a^3, a^7, a^9; *c*) a^1, a^5, a^7, a^{11}.

177. *a*) $\{e\},\{e,(12)\},\{e,(13)\},\{e,(23)\},\{e,(123)\},\{e,(132)\},S_3$; *b*) $\beta) <1>, <a^2>, <a^3>, <a^4>, <a^6>, <a^8>, <a^{12}>, G=<a>$; $\gamma)$ $<a^d>|\,d-$son 100 ning bo'luvchisi$\}$.

179. *a*) 2; *b*) 20; *c*) 0.

180. *Ko'rsatma.* Sikl tartibi uning uzunligiga teng bo'lishidan foydalaning.

181. *Ko'rsatma.* Agar $x^k=e$ va $x=a^\ell$ bo'lsa, $a^{kl}=e$ bo'ladi. Bundan $kl\,\vdots\,n$ va $l\,\vdots$ EKUB(n,k); a^k element $\dfrac{n}{\text{ЭКУБ (n, k)}}$ va shuning uchun EKUB$(n,\ell)=\dfrac{n}{k}$ bo'lganda shartni qanoatlantiradi.

182. *a*) *Ko'rsatma*. 10-misolga qarang; *b*) *Ko'rsatma*. Œzaro tub k va n sonlar uchun shunday u va v sonlar mavjudki, $ku+nv=1$; *s*) *Ko'rsatma*. $a^s\in H$ bo'ladigan s eng kichik natural sonlarni qarab chiqing. *d*) *s*) dan foydalaning; agar d_1 va d_2- n ning har xil bo'luvchilari bo'lsa mos qismgruppalar har xil tartiblarga ega bo'ladi.

183. $n=|G|, d=d(G), m-$ esa G elementlari tartiblarining EKUK si bo'lsin. *a*) Lagranj teoremasiga ko'ra n son d ga bo'linadi, bundan $x^d=l,$ shuning uchun *d* son gruppa ixtiyoriy elementi tartibiga bo'linadi, ya'ni $d\,\vdots\, m$; *b*) $d=p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$ bo'lsin, *a*) ga asosan G da tartibi $p_1^{k_1}l_{k_1}$ bo'lgan element mavjud, bunda l va p_1 o'zaro tub; u holda x^l ning tartibi p_1 bo'ladi. Xuddi shu tarzda $x_2,...,x_s$ ham va $x_1..x_s$ ko'paytma (10-misolga qarang) *d* tartibga ega; *b*) va *c*) tasdiqlar S_3 uchun to'g'ri emas.

184. Birning p^n darajali kompleks ildizlari gruppasi ($p-$tub son).

185. *b*) to'g'ri emas: tekislikning o'ziga biyeksiyasi gruppasi G da ikki parallel to'g'ri chiziqlarga nisbatan simmetriyalar kompozisiyasi parallel ko'chirishdan iborat; *s*) 1 ning hamma darajali ildizlari to'plami; bosh dioganalida 1 ning ildizlari joylashtirilgan dioganal matrisalar to'plami.

186. To'g'ri emas: $GL(2,\boldsymbol{R})$ da tartibi 2 bo'lgan elementlar gruppa tashkil eta olmaydi (54 *b*) ga qarang).

187. *a*) D_4 gruppa (kvadrat harakatlari gruppasi); *b*) $D_2(\boldsymbol{R})-$ ikkinchi tartibli diagonal matrisalar gruppasi $a\neq b$ bo'lganda, $a=b$ bo'lganda esa $SL_2(\boldsymbol{R})$; *s*) $<g>$.

191. *a*) $(\boldsymbol{Q},+)$ da $2x=a$ ko'rinishdagi har qanday tenglama yechiladi; $(\boldsymbol{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ da $x^2=a$ ko'rinishdagi tenglama hamma vaqt ham yechilavermaydi. *b*) $(\boldsymbol{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ da $x^2=1$ ikki yechimga ega, $(\boldsymbol{Q}^{>0},\cdot)-$ da esa faqat bitta; *s*) $(\boldsymbol{R}^{>0},\cdot)$ da $x^2=a$ ko'rinishdagi har qanday tenglama yechiladi, $(\boldsymbol{Q}^{>0},\cdot)$ da esa bunday shart bajarilmaydi. *d*) *b*) ga qarang; *e*) *a*) ga qarang; *f*) $(\boldsymbol{Q},+)$ da ixtiyoriy nol bo'lmagan a,b lar uchun $ka=lb$ bo'ladigan k,l noldan farqli butun sonlar mavjud; $(\boldsymbol{R}^{>0},\cdot)$ da ixtiyoriy butun noldan farqli k,l lar uchun $a^k\neq b^l$ bo'ladigan a,b larni topish mumkin. Masalan, $a=10,\quad b=10^{r}$, bunda $r\notin\boldsymbol{Q}$.

192. *a*) bitta gruppa – uchinchi tartibli siklik gruppa; *b*) ikkita gruppa: to'rtinchi tartibli siklik gruppa va algebraik amallar quyidagi jadval bilan ifodalanadigan e,a,b,c elementlardan iborat gruppa

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*e*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*b*	*a*	*e*

c) ikkita gruppa: oltinchi tartibli siklik gruppa va S_3 podstanovkalar gruppasi.

196. Siklik gruppaning avtomorfizmi yaratuvchi elementning obrazi bilan to'la aniqlanadi.Quyida yaratuvchi elementning turli avtomorfizmlardagi obrazlari ko'rsatilgan: *a*) 1, -1; *b*) α) a,a^3;
b) β) a,a^2,a^3,a^4; *b*) γ) a,a^5; *b*) δ) a,a^3,a^7,a^9.

10-§

198. *a*) $H_1 = < e >; \quad H_2 = < 1,2 >; \quad H_3 = < 1,3 >; \quad H_4 = < 2,3 >;$
$H_5 = < (1\,2\,3) >; \quad H_6 = S_3 -$ S_3 нинг кисмгруппалари.

Qo'shni sinflar:

$H_1 : \{e\},\ \{(12)\}, \{(13)\}, \{(23)\}, \{(123)\}, \{(132)\};$

$H_2 : \{e,\ (12)\}, \{(132)(13)\}, \{(23)(123)\};$

$H_3 : \{e, (13)\}, \{(12), (123)\}, \{(23), (132)\};$

$H_4 : \{e, (23)\}, \{(12), (132)\}, \{(13), (123)\};$

$H_5 : \{e, (123)(132)\}, \{(13)(12), (23)\}; H_6 : S_3.$

b) $H_1, H_5, H_6.$

199. *n.*

200.Qo'shni sinflar oxiri berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda yotuvchi hamma vektorlardan iborat.

201. *Ko'rsatma.* Tartibi tub son bo'lmagan ixtiyoriy gruppada xos qismgruppalar borligini isbot qilish uchun ushbu hollarni qarab chiqish kerak: G da cheksiz tartibli element mavjud, G da hamma elementlar chekli tartibli ammo o'zi siklik gruppa emas, G -- chekli tub bo'lmagan tartibli siklik gruppa.

202. *Ko'rsatma.* Tub tartibli gruppa o'zining ixtiyoriy noldan farqli elementi bilan yaratilishini isbotlang.

203. *Ko'rsatma.* Agar $H - G$ ning qismgruppasi va H ning tartibi m bo'lsa, ixtiyoriy $a \in H$ uchun $a^m = 1$. Demak, H birning $m -$ darajali ildizlaridan iborat.

204. 71-masalaga berilgan ko'rsatmaga qarang.

205. *a*) $a + n\boldsymbol{Z} = \{a + nk \mid k \in \boldsymbol{Z}\}, \quad a = 0,1,\ldots,n-1;$

b) $a + \boldsymbol{Z} = \{a + k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}, \quad 0 \le a < 1;$

c) $(\alpha + \beta i) + \boldsymbol{Z} = \{a + \alpha + (\beta + b)i \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}, \quad 0 \le \alpha < 1; \quad 0 \le \beta < 1;$

d) $\alpha\, j + H = \{\alpha\, \bar{j} + \beta \bar{i} \,/\, \beta \in \boldsymbol{R}\}, \quad \alpha \in \boldsymbol{R} \quad \alpha\, \bar{j} + H -$ oxiri $y = \alpha$ to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar to'plami.

e) $\alpha H = \{\alpha h \mid |h| = 1\}, \quad \alpha \in \boldsymbol{R}^{>0}, \quad \alpha H -$ markazi $O(0,0)$ nuqtada bo'lgan α radiusli aylana.

f) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)\boldsymbol{R}^{>0} = \{\alpha\cos\varphi + i\alpha\sin\varphi \mid \alpha \in \boldsymbol{R}^{>0}\}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)R^{>0} -$ $[0, M)$ nurning to'ldiruvchisi $M(\cos\varphi, \sin\varphi)$ nuqtadan $y = x + tg\varphi$ to'g'ri chiziqqacha.

g) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)\boldsymbol{R}^{*} = \{\alpha\cos\varphi + i\alpha\sin\varphi \mid \alpha \in \boldsymbol{R}^{*}\}, \quad 0 \le \varphi < \pi,$
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)\boldsymbol{R}^{*} -$ nuqtasiz to'g'ri chiziq; $O(0,0)$
nuqtasiz $y = xtg\varphi$ to'g'ri chiziq;

h) chap qo'shni sinflar: $\{f \in S_n \mid f(i) = n\}, \quad i = 1,2,\ldots,n; i$;

j) $< a^3 > = \{1, a^3, a^6, a^9\}, a < a^3 > = \{a, a^4, a^7, a^{10}\},$
$a^2 < a > = \{a^2, a^5, a^8, a^{11}\};$

$k)\ <a^3>=\{a^{3k}\mid k\in \boldsymbol{Z}\},$

$a<a^3>=\{a^{3k+1}\mid k\in \boldsymbol{Z}\},\ a^2<a^3>=\{a^{3k+2}\mid k\in \boldsymbol{Z}\};$

$l)\ <a^2>=\{1,a^2,a^4,a^6\},\ a<a^2>=\{a,a^3,a^5,a^7\};$

$m)\ <a^4>=\{a^{4k}\mid k\in \boldsymbol{Z}\},\ a<a^4>=\{a^{4k+1}\mid k\in \boldsymbol{Z}\},\ \ a^2<a^4>=$
$\{a^{4k+2}\mid k\in \boldsymbol{Z}\},\ a^3<a^4>=\{a^{4k+3}\mid k\in \boldsymbol{Z}\};$

n) bir xil determinantli matrisalar to’plami.

206. G gruppaning birlik qismgruppa bo’yicha yoyilmasi bu gruppani uning hamma bir elementli qismgruppalari birlashmasi ko’rinishida yozilishidan iborat bo’ladi. G gruppaning uning o’zi bo’yicha yoyilmasi G ga teng bo’lgan bitta qo’shni sinfdan iborat bo’ladi.

207. A_3.

208. Masalan, $K=\{(12)(34)\},H=V_4-$ *Kleyn gruppasi*. (
$\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ o’rin almashtirishlar gruppasi va har qanday unga izomorf gruppa).

213. A_1 bilan A_3 qo’shma, chunki bir xil Jordon shakliga ega, A_1 bilan A_2 esa qo’shma emas, chunki har xil Jordan shakllariga ega.

214. *a*) Kleyn qismgruppasi; *b*) berilgan o’rin almashtirishlarning hamma n-darajalari.

215. *a*) dioganal matrisalar qismgruppasi; *b*) butun gruppa;

c) $\begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 3a & 4a+b \end{pmatrix}$, $a,b\in \boldsymbol{R}$ va $b^2+5ab-2a^2\neq 0$ ko’rinishdagi matrisalar to’plami;

d) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ko’rinishdagi matrisalar to’plami, bunda $a,b\in R$, $a\neq 0$.

216. *a*) $S_3=\{e\}U\{(12),(13),(23)\}U\{(123),(132)\};$

$b)\ A_4=\{e\}\cup\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\cup\{(123),(134),(142),$
$(243)\}\cup\{(132),(143),(124)(234)\}$.

217. *a*) birlik gruppa; *b*) ikinchi tartibli gruppa, chunki gruppaning barcha birlik bo’lmagan elementlari qo’shma, gruppaning tartibi n son $n-1$ ga bo’linishi kerak.

218. *a*) $\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$;

b) $\{(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\}$.

219. *Ko’rsatma*. a o’rin almashtirishning mustaqil sikllarga yoyilmasi $a=(i_1..i_k)(i_{k+1}..i_l)....$ bo’lsin. $c=bab^{-1}$ o’rin almashtirishni hisoblash uchun b ni

$$b=\begin{pmatrix} i_1..i_k & i_{k+1}..i_l\dots \\ j_1\dots j_k & j_{k+1}\dots j_l\dots \end{pmatrix}$$

ko’rinishda yozish kerak. U holda $c=(j_1\dots j_k)(j_{k+1}\dots j_\ell)\dots$ bo’ladi.

220. *a*) 5; *b*) 7; *c*) 11. *Ko’rsatma*. Berilgan element bilan qo’shma elementlar sonini topish uchun uning sentralizatorining tartibini topin yetarli.

221. *a*) qo'shma qismgruppalar bir xil tartibga ega; *b*) $K = gHg^{-1}$, bunda $g = diag(2,1)$.

222. *a*) $N(H) = H$; *b*) $N(H)$ hamma ikkinchi tartibli maxsusmas matrisalardan iborat, ularda $a_{21} = 0$.

223. *Yechish.* $c \in C$ va $G = H \in Hx$ G ning ikkita qo'shni sinflar yoyilmasi bo'lsin. U holda C dagi ixtiyoriy element hch^{-1} yoki $hxcx^{-1}h^{-1}$, $h \in H$ shaklda yozilishi mumkin.

224. 1, 15, 20, 20, 12 va 12 lardan iborat 5 ta qo'shni sinflar. *Ko'rsatma.* 87- va 91-masalalarga berilgan ko'rsatmalarga qarang. A_5 gruppa S_5 da qo'shma bo'lgan to'rtta sinfdan iborat, ularning namoyandalari $e, (12)(34), (124)$ va (12345) lardir. Birinchi va ikkinchisi toq (1 va 15) sondagi elementlardan iborat va shu sababli A_5 da ham qo'shmadirlar. Uchinchisi ham A_5 da ikkita sinfga tarqalmaydi, chunki x sifatida (223-masala ko'rsatmasiga qarang) (45) o'rin almashtirishni olish mumkin, ammo u holda (45) (123)(45)$^{-1}$=(123). Nihoyat to'rtinchisi A_5 da ikkita sinfga yoyiladi, chunki uning elementlari soni 24 A_5 gruppaning tartibiga bo'linmaydi.

226. Yadro - 2π ga karrali bo'lgan butun sonlar additiv gruppasi.

227. Yadro $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ ga bo'linadigan ko'phadlarning additiv gruppasidan iborat bo'ladi.

228. *e*) *Ko'rsatma.* $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ i_1\,i_2\,i_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ i_1\,i_2\,i_3\,4 \end{pmatrix}$ sifatida aniqlangan $f: S_3 \to S_4$ akslantirishni olib qarash kerak. A_3 S_3 ning normal bo'luvchisi, ammo $f(A_3)$ S_4 ning normal bo'luvchisi emas.

232. Gomomorfizm yaratuvchi elementning obrazi bilan to'la aniqlanadi. Quyida bu elementning mumkin bo'lgan obrazlari keltirilgan: *a*) gruppaning ixtiyoriy elementi, gomomorfizmlar soni n ga teng; *b*) e, b, b^2, b^3, b^4, b^5; *c*) b^5, b^{10}; *d*) *e*.

233. *Ko'rsatma*. $a \mapsto 1$ bo'lganda $\dfrac{a}{2}$ ning obrazini toping.

234. *Ko'rsatma.*Quyidagi akslantirishlarni qarang: *a*) $x \mapsto \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$; *b*) $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$; *c*) $z \mapsto z^n$; *d*) $z \mapsto z^n$; *e*) $z \mapsto \left(\dfrac{z}{|z|}\right)^n$; *f*) $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$; *g*) $z \mapsto |z|$.

235. *Ko'rsatma.* $X/Y \cong Z$ ko'rinishdagi izomorfizmni isbotlash uchun yadrosi Y bo'lgan X ning Z ga gomomorfizmini topish kerak:

a) $f: GL(n,\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}^*,\ f(A) = \det A$;

b) $f: GL(n,\boldsymbol{R}) \to \{1,-1\},\ f(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \det A > 0 \\ -1, & \text{если} \quad \det A < 0 \end{cases}$;

c) $f: GL(n,\boldsymbol{C}) \to U,\ f(A) = \dfrac{A}{\det|A|}$; *d*) $f: GL(n,\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^{>0},\ f(A) = |\det A|$;

e) $f: GL(n,\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{R}^{>0},\ f(A) = \det A$.

237. *Ko'rsatma.* Tartibi n bo'lgan yagona qismgruppada $\frac{k}{n}+\boldsymbol{Z}, k\in\boldsymbol{Z}$ ko'rinishdagi hamma qo'shni sinflar hosil bo'ladi.

238. *Ko'rsatma.* Har bir $g\in G$ elementga $x\mapsto gxg^{-1}$ avtomorfizmni mos qilib qo'yuvchi akslantirishni qarab chiqish kerak.

239. *Ko'rsatma.* Agar $G/\boldsymbol{Z}=<a\boldsymbol{Z}>$ bo'lsa ixtiyoriy $x,y\in G$ elementlar $x=a^k z,\ y=a^l z$ ko'rinishga ega bo'ladi va bu holda $xy=yx$ bo'ladi.

11-§

240. *e*) va *s*) dan boshqa hamma to'plamlar halqadirlar; *s*) da esa $D=4k+1$ bo'lganda halqa bo'ladi; ulardan *b*), *d*), *f*), *h*), *j*), *l*), *n*), *r*) dagi to'plamlar maydon teskarilanuvchi elementlar to'plamlari:

a) $\{x+y\sqrt{2}\mid x^2-2y^2=\pm1\}$; *c*) $\{x+y\sqrt{3}\mid x^2-3y^2=1\}$;

g) $\{1,-1,i-i\}$; *i*) $\{1,-1\}$; *k*) $\{1,-1\}$; *m*) $\left\{\frac{m}{n}\mid (p,mn)=1\right\}$;

p) $\boldsymbol{Z}^*_{n\times n}=\{A\mid \det A=\pm1\},\quad P^*_{n\times n}=GL(n,P)=\{A\mid \det A\neq 0\}$, agar $P=\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$;

q) $\{f(x)\in P[x]\mid \det f(x)=0\}$, agar $P=\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$.

241. 1. Nokommutativ halqalar yo'q.

2. *b*), *f*) *h*), *l*), *n*), *o*) dagi halqalar maydondirlar.

3. Teskarilanuvchi elementlar:

a) $\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix},\quad x^2-3y^2=1;$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ *i*) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix},\quad x^2-y^2=\pm1;$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

k) $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{pmatrix} -1 & b & c \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matrisalar;

m) nolmas maxsus matrisalar.

4. Nolning bo'luvchilari:

i) $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix},\ a\neq 0$ ko'rinishdagi matrisalar;

j) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a \neq 0, \quad b \neq 0$ ko'rinishdagi matrisalar;

k) $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad b^2 + c^2 \neq 0$ ko'rinishdagi matrisalar;

m) nolmas maxsus matrisalar.

242. *c*), *d*), *e*), *f*), *g*) $d = 4k + 1$ bo'lganda, *h*), *i*).

243. *h*) dan boshqa hammasi.

244. *d*) $\boldsymbol{Z}_{10}^* = \{1,3,7,9\}$, $\boldsymbol{Z}_{12}^* = \{1,5,7,11\}$, $\boldsymbol{Z}_7^* = \{1,2,3,4,5,6\}$.

245.

+	*0*	*E*	*S*	*T*
0	*0*	*E*	*S*	*T*
E	*E*	*0*	*T*	*S*
S	*S*	*T*	*0*	*E*
T	*T*	*S*	*E*	*0*

.	*0*	*E*	*S*	*T*
0	*0*	*0*	*0*	*0*
E	*0*	*E*	*S*	*T*
S	*0*	*S*	*T*	*E*
T	*0*	*T*	*E*	*S*

248. *a*) $x = 5$; *b*) $x = 5$; *c*) $x = 1$; *d*) yechimi yo'q; *ye*) yechimi yo'q; *f*) $x = 0$; *g*) $x = 1$; *h*) yechimi yo'q; *i*) $x = 2$; *j*) $x = 5$; *k*) yechimi yo'q; *ye*) yechimi yo'q.

249. *a*) yechimi yo'q; *b*) $x = 2, \quad y = 3, \quad z = 2$.

250. *a*) $x_1 = -1, \quad x_2 = -3 + 2\sqrt{2}$; *b*) yechimi yo'q ($\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ da 13 kvadrat emas); *s*) yechimi yo'q; *d*) yechimi yo'q.

251. Hammasi.

252. n elementli maydonning multiplikativ gruppasi $n-1$ ga teng tartibga ega.

253. $p = 3$ bo'lganda 2; $p = 5$ bo'lganda 4; $p = 7$ bo'lganda 3; $p = 11$ bo'lganda 10.

254. *a*) 3 va 5; *b*) 2, 3, 8 va 9.

256. *Yechish. a*) $x \mapsto ax(a \in \boldsymbol{R}, a \neq 0) -$ akslantirish biyeksiya, shuning uchun qandaydir $x \in \boldsymbol{R}$ uchun $ax = a$ bo'ladi, ixtiyoriy $b \in \boldsymbol{R}$ ni $b = ya$ ko'rinishda yozish mumkin va u holda $bx = b$, ya'ni $x -$ chap birlik element; *b*) o'ngdan teskarilanuvchi element nolning o'ng bo'luvchisi bo'lolmaydi va shuning uchun $x_1 a, \ldots, x_n a$ elementlar juft-jufti bilan har xil va ulardan biri 1 ga teng.

257. *Yechish.* Agar $ab = 1$ bo'lsa $(ba - 1)b = 0$ bo'ladi.

258. *b*) 257-masalaning javobini qarang; *s*) 256-masalaning *b*) ni qarang; *d*) 256-masalaning javobini qarang.

259. $x^3 = x$ shartda to'g'ri emas.

263. Halqaning multiplikativ gruppasi: *a*) $\{1,-1,i,-i\}$; *b*), *c*) $\{1,-1\}$.

264. $\boldsymbol{Z}_n$ halqa additiv gruppasining har qanday qismgruppasi $\boldsymbol{Z}_n$ halqaning qismhalqasi bo'ladi. Shuning uchun $\boldsymbol{Z}_{10}$ halqaning qismhalqalari: $<1>,<2>,<5>,<0>$; $\boldsymbol{Z}_{12}$ halqaning qismhalqalari: $<1>,<2>,<3>,<4>,<6>,<0>$; Z_7 niki $<1>,<0>$.

265. Ha. Masalan, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\right\}$ halqada skalyar matrisalar qismhalqasi maydon bo'ladi.

266. *a*) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$;

b) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$;

c) $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \boldsymbol{Q}\}$.

267. *a*) $\{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$;

b) $\{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Z},\quad a \equiv b(\mathrm{mod}\,2)\}$, $\{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$;

c) $\{4a+2bi / a,b \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{a+bi / a,b \in \boldsymbol{Q}\}$.

274. *Ko'rsatma.* 273-masaladan foydalaning, elementlar soni p^n ga tengligini ko'rsating. Bunda $p-$ maydon xarakteristikasi $n-$ esa shu maydonni Z_p ga izomorf qismmaydondagi vektorli fazo sifatida qaralgandagi o'lchovi.

275. *Ko'rsatma.* e - berilgan maydonning birlik elementi (biri) bo'lsin. U holda $\{me\cdot(ne)^{-1} \mid m,n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\}-$ qismto'plam $\boldsymbol{Q}$ ga izomorf bo'lgan qismmaydon bo'ladi.

276. Avtomorfizmlar gruppasi faqat aynan avtomorfizmdangina iborat.

277. Aynan va har bir sonni qo'shmasiga o'tkazadigan avtomorfizm.

278. Yo'q.

280. *a*) $[x]_{kl} \mapsto ([x]_k,[x]_l)-$ akslantirish avtomorfizmdir.

12-§

281. *g*) punkdagi to'plamdan tashqari hamma to'plamlar qismgruppa va qismqalqadirlar. *a*), *b*), *d*), *f*), *i*), *j*) lardagi to'plamlar ideallar bo'ladi.

285. *a*) $\boldsymbol{Z}$; *b*) (2); *c*) (x^2-1); *d*) $\boldsymbol{R}[x]$; *e*) (x^2+x-2).

287. *a*) 1; *b*) 12; *c*) 2; *d*) 12; *e*) 1; *f*) 15.

288. *Ko'rsatma.* Agar $I_1+I_2=I_1\cup I_2$ va $I_1 \not\subseteq I_2$ bo'lsa, ixtiyoriy $x\in I_2$ uchun $a+x$ elementni qarab chiqish kerak, bunda $a\in I_1\setminus I_2$. $x\in I_1$ ligini ko'rsatish kerak.

289. *a*) (0), (1), (2); *b*) (0), (1), (2), (3); *c*) (0), (1), (2), (5); *d*) (0), (1), (2), (3), (4), (6).

290. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in m\boldsymbol{Z}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in m\boldsymbol{Z}\right\}$,

$\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta,\lambda\in m\boldsymbol{Z}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \mid \lambda\in m\boldsymbol{Z}\right\},$ $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \mid \alpha\in m\boldsymbol{Z}\right\},$ $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \mid \alpha,\lambda\in m\boldsymbol{Z}\right\}.$

292. $-15+9i,\quad 5-3i$; idealga tegishli.

294. $k\boldsymbol{Z}\subseteq m\boldsymbol{Z} \Leftrightarrow m\mid k$.

295. *Ko'rsatma*. Ixtiyoriy nolmas ideal o'z ichiga teskarinaluvchi matrisani oladi.

296. *Ko'rsatma.* I - $M(n,P)$ halqaning ideali, A matrisa I dan olingan nolmas matrisa, $E_{ij}-$ $i-$satri bilan $j-$ustuni kesishmasida 1, qolgan elementlari 0 bo'lgan matrisa bo'lsin. A matrisani chapdan va o'ngdan mos keladigan E_{ij} matrisalarga ko'paytirib yig'indisi teskarilanuvchi matrisa bo'ladigan matrislar hosil qilish mumkinligini ko'rsating.

297. *a*) $\boldsymbol{Z}/(3)=\{[0],[1],[2]\}$,

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

.	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

$\boldsymbol{Z}/(3)-$ maydon;

b) $\boldsymbol{Z}/(4)=\{[0],[1],[2],[3]\}$,

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

.	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

$\boldsymbol{Z}/(4)-$ maydon emas;

298. $\{[a]\mid a=0,1,\ldots,m-1\}$, bunda $[a]=a+(m)=\{a+mk\mid k\in\boldsymbol{Z}\}$.

299. (2), (3).

300. *a*)

+	[0]	[1]	[i]	[1+i]
[0]	[0]	[1]	[i]	[1+i]
[1]	[1]	[0]	[1+i]	[i]
[i]	[i]	[1+i]	[0]	[1]
[1+i]	[1+i]	[i]	[1]	[0]

.	[0]	[1]	[i]	[1+i]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[i]	[1+i]
[i]	[0]	[i]	[1]	[1+i]
[1+i]	[0]	[1+i]	[1+i]	[0]

$K/I-$maydon emas, chunki K/I da nolning bo'luvchisi bor;

b)

+	[0]	[1]	[x]	[1+x]
[0]	[0]	[1]	[x]	[1+x]
[1]	[1]	[0]	[1+x]	[x]
[x]	[x]	[1+x]	[0]	[1]
[1+x]	[1+x]	[x]	[1]	[0]

.	[0]	[1]	[x]	[1+x]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[x]	[1+x]
[x]	[0]	[x]	[1+x]	[1]
[1+x]	[0]	[1+x]	[1]	[x]

$K/I-$maydon.

301.

a) $K/I=\{[0],[1],[2],[i],[1+i],[2+i],[2i],[1+2i],[2+2i]\}-$may- don;

b) $\{[0],[1],[\sqrt{3}],[1+\sqrt{3}]\}-$maydon emas;

c) $\{[0],[1],[2],[\sqrt{2}],[1+\sqrt{2}],[2+\sqrt{2}],[2\sqrt{2}],[1+2\sqrt{2}],[2+2\sqrt{2}]\}-$ maydon;

d) $\{[0],[1],[x],[1+x]\}-$ maydon emas;

e) $\{[0],[1],[2],[x],[1+x],[2+x],[2x],[1+2x],[2+2x]\}-$ maydon;

f) $\{[ax+b]\mid a,b\in \boldsymbol{Z}\}-$maydon emas;

g) $\{[ax+b]\mid a,b\in \boldsymbol{R}\}-$ maydon;

h) $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\right.$
$\left.\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}-$ maydon emas;

306. *Ko'rsatma.* $a \equiv c(\mathrm{mod}\,2)$ va $b \equiv d(\mathrm{mod}\,2)$ bo'lganda va faqat shu holdagina $a+bi, c+di$ lar bir qo'shni sinfga tegishli bo'ladi.

307. 306-masalaga qarang.

309. *Ko'rsatma.* Hammasi bo'lib 9 ta element.

310. 25 ta element. Maydon emas.

316. $x-4$ ko'phad qo'shni sinfdagi yagona birinchi darajali ko'phad.

317. *c*), *d*).

318. *Ko'rsatma.* Har bir $f(x)+(x)$ qo'shni sinfga $f(x)$ ko'phadning ozod hadini mos qilib qo'yish kerak.

319. Faktor halqa uchta elementdan iborat.

322. Yo'q, bo'lmaydi.

323. *Ko'rsatma.* $a+I$ -- nolmas sinf bo'lsin. K halqaning $I \subseteq A \subseteq K$ shartni qanoatlantiruvchi $A=\{ra+x \mid r\in K, x\in I\}-$ideali va $I \neq A.$, demak, $A=K$ bo'lishini ko'rsating va bundan $a+I$ qo'shni sinf uchun K/I faktor halqada unga teskari element borligini keltirib chiqaring.

325. $Ker\ f=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a\end{pmatrix} \mid a\in \boldsymbol{Z}\right\},\ K/Ker\ f\cong \boldsymbol{Z}.$

326. $Ker\ f=\left\{g\in K \mid g\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\},\ K/Ker\ f\cong \boldsymbol{R}.$

327. $Ker\ f=\left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a\end{pmatrix} \mid a\in \boldsymbol{R}\right\},\ K/Ker\ f\cong \boldsymbol{R}.$

328. *a*) $f_1(x)=4x,\quad f_2(x)=9x,\quad f_3(x)=x,\quad f_4(x)=0,\ x\in \boldsymbol{Z}_{12};$

b) $f_1(x)=6x,\quad f_2(x)=5x,\quad f_3(x)=x,\quad f_4(x)=0,\ x\in \boldsymbol{Z}_{10};$

c) $f_1(x)=x,\quad f_2(x)=0,\quad x\in \boldsymbol{Z}_7.$ *Ko'rsatma.* Izlanayotgan gomomorfizm bir (birlik element) ning obrazi bilan to'la aniqlanadi. Haqiqatan, $\varphi(1)=a$ bo'lsin. U holda $a^2=\varphi(1)\,\varphi(1)=a$ va $\varphi(x)=xa$. Ammo agar $a^2=a$ bo'lsa, $\varphi:\boldsymbol{Z}_m\to \boldsymbol{Z}_m$, $\varphi(x)=xa$ akslantirish gomomorfizm bo'ladi. Shuning uchun hamma gomomorfizmlarni topish uchun $\boldsymbol{Z}_m$ ning $a^2=a$ (*idempotent*) shartni qanoatlantiruvchi hamma elementlarini topish qoladi.

330. *a*) $\boldsymbol{Z}_{10}=(2)\oplus(5);$ *b*) $\boldsymbol{Z}_{12}=(3)\oplus(4);$ *c*) $\boldsymbol{Z}_{15}=(3)\oplus(5);$

d) $\boldsymbol{Z}_{36}=(4)\oplus(9);$ *e*) yoyilmaydi.

331. I_1 idealda birlik element yo'q, I_2 idealning birlik elementi $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dir.

332. $K=I_1\oplus I_2,$

$$I_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0\end{pmatrix} \mid a\in \boldsymbol{R}\right\},\ I_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & b\end{pmatrix} \mid b\in \boldsymbol{R}\right\}.$$

333. *a*) $K=(x)/(x^2+x)\oplus(x+1)/(x^2+x);$ *b*), *c*) yoyilmaydi;

d) $K=(x+i)/(x^2-1)\oplus(x-i)/(x^2+1).$

III-BOB
BUTUN SONLAR XALQASIDA BO’LINISH NAZARIYASI

13-§

335. *a*) $q = 7; 8$ va $r = 2; 6$; *b*) $q = 8; 9$ va $r = 2; 6$.

336. *a*) *Yechish:* $(2n+1)^2 = 4n\,(n+1) + 1$, bu yerda $n\,(n + 1)$ 2 ga bo’linadi;

b) *Yechish:* $n^2 + (n + 1)^2 = 2n\,(n + 1) + 1$, bu yerda $n\,(n + 1)$ 2 ga bo’linadi.

337. *Ko’rsatma.* $15 = 7\cdot 2 + 1$. Agar $15^n = 7q+1$, u holda $15^{n+1} = 5^n \cdot 15 = 7Q + 1$.

338 *Yechish.* Masala sharti bo’yicha, $\dfrac{mn+pq}{m-p} = t -$ butun son.

$$\frac{mq+np}{m-p} - t = \frac{mq+np}{m-p} - \frac{mn+pq}{m-p} = \frac{q(m-p)-n(m-p)}{m-p} = q-n\,.$$

Bundan $\dfrac{mq+np}{m-p} = q-n+t -$ butun son. Demak, $mq + np$ $m - p$ ga bo’linadi.

339. *Yechish.* Masala sharti bo’yicha, $ad - bc = nt$ *va* $a - b = nt_1$. Ikkinchi tenglikni d ga ko’paytirib, birinchisidan ayiramiz:
$b(c\text{-}d) = n\,(dt_1 - t)$. Bundan b va n ga qo’yilgan shartlarlarga asosan $s–d$ ni n ga bo’linishi kelib chiqadi.

340. *c) Yechish.* $m^5 - m = (m - 1)\,m\,(m + 1)\,(m^2 + 1) = (m - 1)\,m\,(m + 1).\,[(m^2 - 4) + 5] = (m - 2)\,(m - 1)\,m\,(m + 1)\,(m + 2) + 5\,(m - 1)\,(m + 1)$. Qo’shiluvchilarning har biri 30 ga bo’linadi, chunki k ta ketma-ket sonlar ko’paytmasi $k!$ ga bo’linadi (bu $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$- butun son bo’lishidan kelib chiqadi). Bundan yig’indi ham 30 ga bo’linadi, demak $m^5 - m$ 30 ga bo’linadi.

341. *Yechish.* $10x + 5$ – izlanayotgan sonl bo’lsin. 5 raqamni chap tomondan birinchi o’ringa qo’yib $5 \cdot 10^5 + x$ hosil qilamiz . Berilgan shartlarga ko’ra $5 \cdot 10^5 + x = 4\,(10x + 5)$ tenglamaga kelamiz. Bundan
$x = 112820$ kelib chiqadi.

342. *Yechish.* Masala shartini quyidagicha yozib olamiz: $n(n + 1)\,(2n + 1) = n\,(n + 1)\,[(n - 1) + (n + 2)] = (n\text{-}1)\,n\,(n + 1) + n\,(n + 1)(n + 2)$. Har bir qo’shiluvchi 6 ga bo’linishidan (6 masala yechimidan) yig’indini 6 ga bo’linishi kelib chiqadi.

343. *Yechish.* $\dfrac{(2m+1)^2-(2n+1)^2}{(2m+1)^2+(2n+1)^2} = \dfrac{4(m+n+1)(m-n)}{2[2(m^2+n^2+m+n)]}$ hosil bo’lgan kasrni faqat 2 ga qisqartirish mumkin.

344. *Yechish.* $N^2 = 1000x + 100(y+1) + 10x + y = 101(10x+y) + 100$.

Bundan $10x + y = \dfrac{(N+10)(N-10)}{101}$, $N = 91$, $N^2 = 8181$.

345. *Yechish.* $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5\,(n^2 + 2)$ to’la kvadrat bo’lishi uchun $n^2 + 25$ ga karrali bo’lishi kerak yoki n^2 ning oxirgi raqami 8 yoki 3 bo’lishi kerak, bu mumkin emas.

346. *Yechish.* Har qanday butun sonni quyidagilardan birortasi shaklida yozish mumkin: $9k$, $9k \pm 1$, $9k \pm 2$, $9k \pm 3$, $9k \pm 4$. Bu sonlar kvadratlari:
$(9k)^2 = 9(9k^2)$; $(9k \pm 1)^2 = 9\,(9k^2 \pm 2k) + 1$; $(9k \pm 2)^2 = 9(9k^2 \pm 4k) + 4$;
$(9k \pm 3)^2 = 9\,(9k^2 \pm 6k + 1)$; $(9k \pm 4)^2 = 9\,(9k^2 \pm 8k + 1) + 7$. Natijada butun son kvadrati 9 ga bo'lganda qoldiq faqat 0, 1, 4, 7 bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi.

347. *Yechish.*

$$S_n = 7(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n\ ta\ raqam}) = 7(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$$

$$= \frac{7}{81}(10^{n+1} - 9n - 10).$$

348. *Yechish.*

$$\underbrace{111\ldots1}_{n\ ta\ raqam}\underbrace{555\ldots56}_{n\ ta\ raqam} = \frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot 10^{n+1} + 5\cdot 10\cdot\frac{10^n-1}{9} + 6 =$$

$$\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 = \left(\frac{10^{n+1}-1}{3} + 1\right)^2 = \left(\underbrace{333\ldots3}_{n\ ta\ raqam} + 1\right)^2.$$

349. *Yechish.* $m\,n\,(m^4 - n^4) = n\,(m^5 - m) - m\,(n^5 - n)$ 30 ga karrali (335 misolga ko'ra).

350. *Yechish.* $y^2 = 3x^2 + 2$ tenglama butun sonlarda yechimga ega emas. Haqiqatdan ham, *u* ni $y = 3n$ yoki $y = 3n \pm 1$ shakllardan birortasi ko'rinishida ifodalash mumkin va bundan y^2 ni 3 ga bo'lganda qoldiq faqat 0 yoki 1 bo'ladi masala shartiga ko'ra qoldiq 2 bo'lishi kerak.

351. *Yechish.* Matematik induksiya usulini qo'llaymiz: $\overline{aaa}$ son 3 ga bo'linadi, chunki $a + a + a = 3a$; Agar $\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^m}$ son 3^n ga bo'linsa, u holda

$$\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^{n+1}} = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n}\ \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n}\ \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n} = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n}\cdot\left(10^{3^n}\right)^2 + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n}\cdot 10^{3^n} + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n} =$$

$$= aa\ldots a \cdot 100\ldots0100\ldots01$$

3^{n+1} ga bo'linadi.

14-§

352. *a*) 21, *b*) 13; *c*) 119; *d*) 3; *e*) 23.

353. *a*) 2520; *b*) 138600; *c*) 99671; *d*) 881200.

354. *Yechish.* $(a, b, c) = d$ bo'lsin, u holda $a = cq + r$, $b = cq_1 + r_1$ dan $d|r$ va $d|r_1$ kelib chiqadi. $d = (c, r, r_1)$ ni isbotlaymiz. $(c, r, r_1) = D$ bo'lsin. $a = cq + r$ va $b = cq_1 + r_1$ tengsizliklardan $D\,|\,a$, $D\,|\,b$ va shart bo'yicha $D|c$. Bundan $D = (a, b, c)$ va demak, $D = d$. n ta son uchun $(a_1, a_2,\ldots,a_n) = (a_n, r_1,r_2,.,r_{n-1})$ ni olamiz, bu yerda $r_1, r_2,\ldots,r_{n-1} - a_1, a_2,\ldots, a_{n-1}$ sonlarni a_n ga bo'lgandagi qoldiq.

355. *a*) 23; *b*) 7; *c*) 21.

356. *a*) 3776; *b*) 1116; *c*) 67818; *d*) 5382; *e*) 6409.

357. *a*) *Yechish.* $(d,m) = (d, [dx, dy]) = d(1, [x, y]) = d$. Agar

$d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ va $m = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ deb olsak, natija o'zgarmaydi;

b) *Yechish*. Agar $p - a + b$ va $a \cdot b$ sonlarning umumiy bo'luvchichi bo'lsa, u holda a yoki b sonlardan birortasi p ga bo'linishi kerak. $a + b$ ni p ga bo'linishidan p son a va b larni umumiy bo'luvchisi ekanligi kelib chiqadi. Bu masala shartiga zid, chunki $(a, b) = 1$;

c) *Yechish*. $(a, b) = d$ va $a = dx$, $b = dy$ bo'lsin, bunda $(x, y) = 1$. Bu holda $(a + b, m) = (d(x + y), dxy) = d(x + y, xy) = d$. Demak,
$(a+b, [a,b]) = (a, b)$.

358. *Yechish*. x va y – izlanayotgan sonlar bo'lsin va $(x, y) = d$, bundan $x = dm$ va $y = dn$ va $(m, n) = 1$. Shartga ko'ra, $x + y = d(m + n) =$ $= 667 = 23 \cdot 29$. Shart bo'yicha $\frac{[x, y]}{(x, y)} = 120$, bundan $[x,y]=120 \cdot (x, y)=120\, d$, boshqa tomondan $[x, y] = \frac{xy}{d} \Rightarrow \frac{xy}{d} = 120d$, *yoki* $xy = 120d^2$. Bulardan

$$\begin{cases} x + y = 23 \cdot 29 \\ xy = 120d^2 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. $d(m + n) = 23 \cdot 29$ dan $d = 23$ va $d = 29$ ($d = 1$ yoki $d = 23 \cdot 29$ - o'rinli bo'lmaydi) bo'lishi mumkin. $d = 23$ bo'lganda, $x = 552$, $y = 115$. $d = 29$ da $x = 435$, $y = 232$.

359. *Yechish*. x va y – noma'lum sonlar va $(x,y) = d$ bo'lsin. U holda $\frac{x}{d} = m, \frac{y}{d} = n$, bunda $(m, n) = 1$. Shart bo'yicha $m + n = 18$,

$$[x, y] = \frac{xy}{d} = \frac{dm \cdot dn}{d} = mnd = 975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13.$$

Bundan $\begin{cases} m + n = 18 \\ mnd = 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \end{cases}$ ni hosil qilamiz va uning yechimi $m = 5, n = 13, d = 15$ bo'ladi. Demak, $x = 75$, $y = 195$.

360. *Yechish*. Shart bo'yicha, $a = 899$, $b = 493$. Yevklid algoritmiga ko'ra: $a = b \cdot 1 + 406$, $b = 406 \cdot 1 + 87$, $406 = 87 \cdot 4 + 58$, $87 = 58 \cdot 1 + 29$, $58 = 29 \cdot 2$ bo'ladi. Oxiridan ikkinchi tenglikdan boshlab: $29 = 87 - 58 = 87 - (406 - 87 \cdot 4) = 87 \cdot 5 - 406 = (b - 406) \cdot 5 - 406 = 5b - 406 \cdot 6 = 5b - (a - b)6 = a(-b) + b \cdot 11$ ni olamiz. $29 = 899\,x + 493\,y$ bilan solishtirsak, $x = -6$, $y = 11$ kelib chiqadi.

361. *a*) $17 = a(-10) + b \cdot 23 = ax + by$;

b) $43 = a \cdot (-4) + b \cdot 5 = ax + by$;

c) $47 = a \cdot 2 + b(-5) = ax + by$.

362. *a*) *Yechish*. $x = 45u$ va $y = 45v$, bu yerda $(u, v) = 1$, $\frac{u}{v} = \frac{11}{7}$ dan $u = 11$ va $v = 7$, demak $x = 495$ va $y = 315$; *b*) *Yechish*. $x = 20u$ va $y = 20v$, bu yerda $(u,v) = 1$, $uv = 21$ dan $u = 1; 3; 7; 21$ va $x = 20; 60; 140; 420$. $y = \frac{8400}{x}$ bo'lganligi sababli $y = 420, 140, 60, 20$. *d*) $x = 140$, $y = 252$.

363. *Yechish.* $(a, b, c) = d$ bo'lsin, u holda $a = md, b = nd, c = kd$
$\frac{a+b}{2}=\frac{m+n}{2}d$; $\frac{a+c}{2}=\frac{m+k}{2}d$; $\frac{b+c}{2}=\frac{n+k}{2}d$. Bundan d son
$\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ sonlarning umumiy bo'luvchisi bo'lishini ko'rsatadi.
Faraz qilamiz, $\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=D$ bundan $d|D$,
$\frac{a+b}{2}=m_1D, \frac{a+c}{2}=n_1D; \frac{b+c}{2}=k_1D.$ Birinchit va ikkinchi tengliklar yig'indisidan uchinchi tenglikni ayirib, $a = (m_1 + n_1 - k_1)D$ ni hosil qilamiz. Shu usulda $b = (m_1 - n_1 + k_1)D$, $c = (-m_1 + n_1 + k_1)D$ larni hosil qilamiz. Bu tengliklardan a, b, c larni D ga bo'linishi kelib chiqadi va demak, $D|d$. Natijada

$$D=d, \qquad \text{яъни } (a,b,c)=\left(\frac{a+b}{2}, \qquad \frac{a+c}{2}, \qquad \frac{b+c}{2}\right).$$

364. *a*) *Yechish.* $(a, b, c) = d$ bo'lsin, u holda $(a, b) = md$, $(a, c) = nd$, $(b,c) = kd$, bu yerda $(m, n, k) = 1$. Bu tenglikdan adm va dn ga bo'linishi kelib chiqadi, demak, $a = dmn\alpha$. Xuddi shunday: $b = dmk\beta$; $c = dnk\gamma$. Bu yerda $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

$$[a,b,c]=dmnk\alpha\beta\gamma=\frac{\alpha^4m^2n^2k^2\alpha\beta\gamma}{d^2mnk}=\frac{(bmn\alpha)(dmk\beta)(dnk\gamma)d}{dm\cdot dn\cdot dk}=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)};$$

b) *Ko'rsatma*: $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$ dan foydalaning.

365. *Yechish.* $qN = 100q + bq = 100q + a - a + bq = am - (a - bq)$, bundan tasdiq to'g'riligi kelib chiqadi, chunki $(q, m) = 1$.

366. *a*) 1;

b) *Yechish.* $(10n + 9, n + 1) = d$ va $10n + 9 = dx$, $n + 1 = dy$ bo'lsin. U holda $10 (dy - 1) + 9 = dx$ yoki $10 dy - 1 = dx$ va natijada $d =1$.

c) *Yechish.* Agar $(3n + 1, 10n + 3) = d$ bo'lsa, u holda $\begin{cases}3n+1=dx\\10n+3=dy\end{cases}$ *yoki* $\begin{cases}30n+10=10dx\\30n+9=3dy\end{cases}$, bundan $1 = d(10x - 3y)$ va $d = 1$. Masalani Yevklid algoritmi yordamida ham yechish mumkin.

367. *Yechish.* $(q + 1)N = 10a (q + 1) + b (q + 1) = am + [a + b (q + 1)]$, bu yerda $(q + 1, 10q + 9) = 1$ (32 masalaga qarang).

368. *Yechish.* $(a, b) = d$ bo'lsin, u holda $a = md$, $b = nd$, $(m, n) = 1$. $5a + 3b = (5m + 3n) d$, $13a + 8b = (13m + 8n)d$ tengliklardan $5a + 3b$ va $13a + 8b$ larning umumiy bo'luvchisi d bo'ladi. $(5a + 13b, 13a + 8b) = D$ bo'lsin, u holda $D|d$, $5a + 3b = m_1D$, $13a + 8b = n_1D$.

Bundan $a = (8m_1 - 3n_1)D$, $b = (5n_1 - 13m_1) = D$ va D a va b larning bo'luvchisi, demak, $D|d$. Natijada $d = D$.

369. *Yechish.* $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a+b}{a(a+b)}$. $(a,b)=1$ dan $(a,\ 2a+b)=1$ kelib chiqadi. $(2a+b,\ a+b)=1$ ni ko'rsatamiz. $(2a+b,\ a+b)=d>1$ bo'lsin, u holda $2a+b=dm$, $a+b=dn$, $(m,n)=1$ va demak, $a=d\,(m-n)$,
$b=d\,(2n-m)$, ya'ni d/a, d/b masala shartiga ziddir.

15-§

370. *a*) 211;
b) 2543, 2549, 2551, 2557;
c) 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249.
371. *Yechish.*

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-4n^2=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right).$$

372. *Yechish.* Barcha natural sonlarni $5n$, $5n\pm1$, $5n\pm2$ ko'rinishda yozish mumkin. $5n$ ko'rinishdagi son tub son bo'ladi, agar $n=1$ bo'lsa va bu holda $p=5$, $4p^2+1=101$, $6p^2+1=151$. Bu p ning qiymati masala shartini qanoatlantiradi. Boshqa bunday sonlar mavjud emasligini ko'rsatamiz. Agar $p=5n\pm1$ bo'lsa, $4p^2+1=5(20n^2\pm8n+1)$ – murakkab son; agar $p=5n+2$ bo'lsa, $6p^2+1=5(30n^2\pm24\,n+1)$ – murakkab son.

373. *Yechish*. Barcha natural sonlarni $6k$, $6k\pm1$, $6k\pm2$, $6k\pm3$ ko'rinishda yozish mumkin. 2 va 3 dan tashqari $6k\pm1$ ko'rinishdagi sonlar tub bo'lishi mumkin (teskarisi hamma vaqt o'rinli emas, ya'ni har qanday $6k\pm1$ ko'rinishdagi sonlar tub son bo'lmasligi ham mumkin). Agar $p=6k-1$ bo'lsa, u holda $p+10=6k-1+10=3\,(2k+3)$ – murakkab son; agar $p=6k+1$ bo'lsa, u holda $p+14=6k+1+14=3\,(2k+5)$ – murakkab son. Shunday qilib, bir vaqtda $p+10$ va $p+14$ sonlar tub bo'ladigan 3 dan katta p tub son mavjud emasligi ko'rsatdik.

Agar $p=2$ bo'lsa, $p+10$ va $p+14$ – murakkab sonlar bo'ladi. Agar $p=3$ bo'lsa, $p+10$ va $p+14$ – tub sonlar bo'ladi. Demak, bitta $p=3$ son masala shartini qanoatlantiradi.

374. *Yechish*. Shart bo'yicha, $a>3$, $m=3t+1$, $n=3t_1+2$. 2 va 3 dan farqli tub sonlarni $p=6k\pm1$ ko'rinishda ifodalash mumkin (39 masalaga qarang). Agar $a=p=6k+1$, u holda $a+n=6k+1+3t+2=$
$=3\,(2k+t+1)$ – murakkab son; agar $a=p=6k–1$, to $a+m=6k-1+3\,t++1=3\,(2k+t)$ murakkab son.

375. *Yechish. p* – $n!$ ning tub bo'luvchisi. $p\le n!-1$ bo'lganligi sababli $p<n!$ Boshqa tomondan $n!$ p ga bo'linmaydi, bundan $n<p$. Shunday qilib, $n<p<n!$ (bu isbotdan tub sonlar soni cheksiz ko'pligi kelib chiqadi).

376. *Yechish.* Shart bo'yicha, $2p+1$ – to'la kub, ya'ni
$2\,p+1=(2\,x+1)^3=8\,x^3+12\,x^2+6\,x+1=2\,x\,(4\,x^2+6\,x+3)+1$, bundan $p=x\,(4\,x^2+6x+3)$. p – tub sonligidan $x=1$ va $p=13$, shuning uchun
$2p+1=27=3^3$ – yagona son.

377. *Yechish.* Oldin natural sonlar qatorida 5 dan boshlab uchta ketma-ket kelgan toq sonlar barchasi tub bo'laolmasligini ko'rsatamiz. Faraz qilamiz, har bir tub

sonlar jufti oralarida bitta murakkab son joylashgan (egzak sonlar). Tub sonlarni bunday joylashishi yetarlicha ziya bo'ladi. Bu holda tub sonlar $6n - 1$ va $6n + 1$ shaklida tasvirlash mumkin va ularning nomerlari $2n - 1$ va $2n$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ deb
$6n - 1 = 5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots$(bu sonlar nomerlari $2n - 1 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$) va $6n + 1 = 7, 13, 19, 25, 31, 37, \dots$ (bu sonlar nomerlari $2n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$). Bundan ko'rinyaptiki, har bir son o'zining nomeri uchlanganidan katta: $6n - 1 > 3(2n - 1)$ va $(6n + 1) > 3 \cdot 2n$.

378. *Ko'rsatma.* Natural sonlar qatoridagi sonlarni $30k$, $30k \pm \pm 1$, $30k \pm 2, \dots$, $30k \pm 15$ shaklida tasvirlaymiz. Bu sonlardan $p = 30k \pm 1$; $30k \pm 7$; $30k \pm 11$, $30k \pm 13$ lar tub sonlar bo'lishi mumkin.

379. *Yechish.* Agar $p - 1$ va $p + 1$ sonlar orasiga 3 dan katta p son joylashtirilsa, $(p - 1)p(p + 1)$ ko'paytma 3 ga bo'linadi. $p>3$ bo'lganligi sababli $(p - 1)(p + 1)$ ko'paytma 3 ga bo'linishi kerak. Boshqa tomondan
$(p - 1)(p + 1)8$ ga bo'linadi, chunki agar $p - 12$ ga bo'linsa, $p + 1$ – hech bo'lmasa 4 ga bo'linishi kerak.

$p^2 - q^2 = (p - 1)(p + 1) - (q - 1)(q + 1)$, bu yerda $(p - 1)(p + 1)$ va $(q - 1)(q + 1)$ lar har biri 3 ga va 8 ga bo'linadi, demak, $p^2 - q^2$ 24 ga bo'linadi.

380. *a*) *Yechish.* Agar $p = 2$ bo'lsa, u holda $p + 10$ – murakkab son. Agar $p = 2q + 1$ ($q = 1,2,\dots,$) bo'lsa, u holda $p + 5$ – murakkab son.

381. *Yechish.* $p = 2k + 1$ ko'rinishdagi toq son. $p = mn$ ($m > n$) ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralsin. U holda shunday x va y sonlar topiladiki, bular uchun quyidagi sistema o'rinli:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}, \quad bundan \quad x = \frac{m+n}{2},\ y = \frac{m-n}{2}.$$

Demak, murakkab p uchun:

$$p = mn = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

Agar p tub bo'lsa, uni $p = (2k + 1)\cdot 1$ yagonashaklda yozish mumkin. Bu holda $m = 2k + 1 = p$, $n = 1$, demak,

$$p = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Shunday qilib, $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ ko'rinishda tasvirlanish yagona bo'lsa, p – tub; agar $p = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ ko'rinishda tasvirlangan bo'lsa, p – murakkab son.

382. 381-masala shartidan toq sonlarni $(x + y)(x - y)$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratishning quyidagi usuli kelib chiqadi: $p = x^2 - y^2$ tenglikdan p

+ $y^2 = x^2$, ya'ni x ni topish uchun p ga shunday y $\left(y \le \frac{p-1}{2}\right)$ natural son kvadratini qo'yish kerakki natijada $p + y^2$ yig'indi kvadratdan (x^2) iborat bo'lsin. Shu usulda y va x ni topib
$p\,(x + y)\,(x - y) = m\,n$.

a) Kvadratlar jadvalidan foydalanib 6643 soniga yaqin bo'lgan son

$6724 = 82^2$ olamiz. $6724 – 6643 = 81 = 9^2$. Demak, $6643 = 82^2 – 9^2 = (82 + 9)\,(82 - 9) = 91 \cdot 73 = 7 \cdot 13 \cdot 73$;

b) $1769 = 61 \cdot 29$; c) $3551 = 67 \cdot 53$; d) $6497 = 89 \cdot 73$.

383. *Yechish.* $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ va a va b, c va d – sonlarning juft toqligi har xil bo'lsin. a va c, b va d – larning juft toqligi bir xil deb olamiz. $(a - c)\,(a + c) = (d - b)\,(d + b)$ tenglikdan

$$\frac{a-c}{d-b}+\frac{d+b}{a+c}=\frac{u}{v}$$

kelib chiqadi. Bunda birinchi kasrni t ga va ikkinchi kasrni s ga qisqartirilgan deb olsak, ya'ni $a – c = tu$, $d + b = su$, $ak = sv$, $d – b = tv$. U holda

$a=\frac{tu+sv}{2}$, $b=\frac{su-tv}{2}$ bo'ladi. Natijada

$$N=a^2+b^2=\frac{1}{4}\left[(tu+sv)^2+(sn-tv)^2\right]=\frac{1}{4}\left(u^2+v^2\right)\left(t^2+s^2\right).$$

384. *Yechish.* $972^2 + 235^2 = 1000009 = 1000^2 + 3^2$ dan 1000009 son ikki usulda ikki son kvadratlari yig'indisi ko'rinishda yozilishi kelib chiqadi, demak, bu son murakkab va $293 \cdot 3413$ ga teng.

385. *Yechish.* Quyidagi yoyilmani ko'ramiz:

$$a^{10}+a^5+1=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=\frac{\left(a^3-1\right)\left(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1\right)}{(a-1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)}=$$

$$=\left(a^2+a+1\right)\left(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1\right);$$

Bu yerda $a^{12} + a^9 + a^6 + a^2 + 1$ ko'phad $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ ko'phadga ko'phadlarni bo'lish qoidasiga asosan bo'lingan. Natijada $3^{10} + 3^5 + 1 = (3^2 + 3 + 1)(3^8 – 3^7 + 3^5 – 3^4 + 3^3 – 3 + 1) = 13 \cdot 4561$.

386. *Yechish.* Agar k – toq bo'lsa, $1 + 2^k$ son $1 + 2 = 3$ ga karrali. Agar k – juft bo'lsa, u $k = 2^n$ ga yoki $k = 2^n m$ ($m \ge 1$ va toq son), yoki $k = 0$. Lekin $1+2^k=1+2^{2^n m}=\left(1+2^{2^n}\right)^m$ $1+2^{2^n}$ ga karrali (agar $k = 0$ bo'lsa, 2 ga karrali). Demak, barcha $k = 2^n$ dan farqli k lar uchun $1+2^{2^n}$ son murakkab son bo'ladi.

387. *Yechish.* $(\alpha, \beta) = 1$, $(\alpha, \beta) = 2^n$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha α va β lar uchun $a^\alpha + b^\beta$ murakkab son ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham. $(\alpha, \beta) = 1$ – bo'lib, toq bo'lsa, u holda $\alpha = dm$, $\beta = dk$, $(m, k) = 1$ va $a^\alpha + b^\beta = (a^m)^d + (b^k)^d$ $a^m + b^k$ ga karrali. Agar $(\alpha, \beta) = 2^n d$ juft son bo'lib, $d > 1$ – toq bo'lsa, u holda $\alpha = 2^n d\, m$, $\beta = 2^n d\, k$ bundan

$$a^{\alpha}+b^{\beta}=\left(a^{2^n\cdot m}\right)^{\alpha}+\left(b^{2^n k}\right)^{\alpha} \text{ son } a^{2^n m}+b^{2^n k} \text{ ga karrali.}$$

Demak, $(\alpha, \beta) = 1$ va $(\alpha, \beta) = 2^n$ shartlarni qanoatlantiruvchi α va β lardan tashqari barcha hollarda $a^{\alpha}+b^{\beta}$ son murakkab bo'ladi. Teskari tasdiq noto'g'ri, masalan $2^4 + 3^2 = 25$ – murakkab son.

388. *Yechish.* n – murakkab son bo'lsin, $n = ab$ ($a > 1$, $b > 1$), u holda $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ – murakkab son. Teskari tasdiq noto'g'ri: $2^p - 1$ hamma vaqt tub emas, masalan $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$; $2^{23} - 1 = 47 \cdot 178421$.

16-§

389. $a)\ \dfrac{271828}{10^5}=(2,1,2,1,1,4,1,1,6,10,1,1,2);$

$b)\ \dfrac{103993}{33102}=(3,7,15,1,292);$

$c)\ \dfrac{99}{170}=(0,1,1,2,1,1,6,2);$

$d)\ \dfrac{355}{113}=(3;7,16).$

390. $a)\ \dfrac{247}{74}=(3,2,1,2,2)$, munosib kasrlari: $\dfrac{3}{1},\dfrac{4}{3},\dfrac{11}{3},\dfrac{15}{4},\dfrac{131}{35};\dfrac{277}{74};$

$b)\ \dfrac{77}{187}=(0,2,2,3)$, munosib kasrlari: $\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5},\dfrac{7}{12};$

$c)\ \dfrac{333}{100}=(3,3,33)$, munosib kasrlari: $\dfrac{3}{1};\dfrac{10}{3};\dfrac{333}{100};$

$d)\ \dfrac{103993}{33102}=(3,7,15,1,292)$, munosib kasrlari:

$$\frac{3}{1};\frac{22}{7};\frac{333}{106};\frac{355}{113};\frac{103993}{33102}.$$

391. *a*) $\dfrac{29}{37}$ sonni uzluksiz kasrga yoyamiz: $\dfrac{29}{7}=(0,1,3,1,1,1,2)$. Sxema yordamida

k		0	1	2	3	4	5	6
q_k		0	1	3	1	1	1	2
P_k	1	0	1	3	4	7	11	29
Q_k	0	1	1	4	5	9	14	37

kasrlarni topamiz.

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{7}{9} \qquad \frac{1}{Q_4Q_5}=\frac{1}{9\cdot 14}=\frac{1}{126}\approx 0{,}008<0{,}01;$$

.

$$\frac{7}{9}\approx 0{,}78 \qquad ortig'i \quad bilan$$

Shunday qilib, $\frac{29}{37} \approx \frac{7}{9}(+0{,}01) = 0{,}78.$ $\frac{P_4}{Q_4} < \frac{a}{b}$ bo'lganligidan xatoni + ishora bilan olinadi. 7 ni 9 ga bo'lganda bo'linma ortig'i bilan olinishi sababi $\frac{7}{9}$ jami bilan yaqinlashishi bo'lganligidir. O'nli yaqinlashish $\frac{29}{37} \approx 0{,}78$ da xato ko'rsatilmaganligi sababi bu xatoni maxsus hisoblashdadir, ya'ni bu + 0, 008 xato va 7 ni 9 ga bo'lganda yaxlitlash xatolar yig'indisi.

$b)\frac{648}{385} \approx \frac{69}{41}(+0{,}0003) \approx 1{,}6830;\ c)\frac{571}{359} \approx \frac{35}{22}(-0{,}0005) \approx 1{,}5909.$

393. $a)\frac{43}{19};\quad b)\frac{73}{43};\quad c)\frac{2633}{1810};\quad d)\frac{1421}{552};$
$e)\frac{157}{225};\quad f)-1\frac{159}{215};\quad g)\frac{893}{11953}.$

394. a) $x = 2$; b) $x = 2$.

395. a) $x = -125 - 114t$, $y = 45 + 41t$;
b) $x = 4 + 15t$, $y = 5 + 19t$;
c) $x = 33 + 17t$, $y = 44 + 23t$;
d) $x = 88 + 47t$, $y = 99 + 53t$;
e) $x = -3 + 18t$, $y = 6 + 35t$;
f) $x = -25 + 71t$, $y = -30 + 85t$;
g) $x = -28 + 11t$, $y = -105 + 41t$, $t \in \mathbf{Z}$.

17-§

396. *a*) – 3; *b*) 11; *c*) 1; *d*) 2; *e*) 3; *f*) 2; *g*) – 2; *h*) – 2; agar $abcd > 1000,\ \ va\ \ -1,\ agar\ \ \overline{abcd} = 1000;$ i) 7; j) – 3.

397. *Yechish.*
$x = [x] + \theta_1$ ва $y = [y] + \theta_2$ $bo'l\sin,\ bu\ yerda\ \ 0 \le \theta_1 < 1,\ 0 \le \theta_2 < 1,$
u holda $x + y = [x] + [y] + (\theta_1 + \theta_2).\ Agar\ 0 \le \theta_1 + \theta_2 < 1,\quad [x+y] = [x] + [y];$
agar
$1 \le \theta_1 + \theta_2 < 2$ bo'lsa $[x+y] > [x] + [y]$ bo'ladi. Natijalarni birlashtirsak, $[x + y] \ge [x] + [y]$ ni hosil qilamiz.

398. *Yechish.* $[x]$ ni ta'rifiga ko'ra, masala shartiga asosan $ax = m + \theta$, bu yerda $0 \le \theta < 1$ va $a \ne 0$, bu tenglikdan $x = \frac{m+\theta}{a}$ ni hosil qilamiz.

399. *Yechish.* $12{,}4\ m = 86 + \theta$, bu yerda $0 \le \theta < 1$. Tenglikni 5 ga ko'paytiramiz: $62m = 430 + 5\theta$, bundan $m = \frac{430+5\theta}{62} = 6 + \frac{58+5\theta}{62}$. $0 \le \theta < 1$ dan 0

$\leq 5\theta < 5$ va m butun musbat son bo'lishi uchun $\dfrac{58+5\theta}{62}=t$ butun bo'lishi lozim. $t = 1$ deb olsak, $\theta=\dfrac{4}{5}$ ва $m=7$ ni hosil qilamiz.

400. *Yechish.* $\left[\dfrac{p}{4}\right]_{p=4n+1}=n=\dfrac{p-1}{4};\quad \left[\dfrac{p}{4}\right]_{p=4n+3}=n=\dfrac{p-3}{4}.$

401. *Yechish.*

$a=mq+1,\quad 0\leq r<m,\quad$ *ёки* $\quad \dfrac{a}{m}=q+\dfrac{r}{m},\ \ 0\leq\dfrac{r}{m}<1,$ bu yerdan $q=\left[\dfrac{a}{m}\right]$ $\quad$ *и* $\quad \left[\dfrac{a}{m}\right]=\dfrac{a-r}{m}.$

402. $\left[\dfrac{m}{2}\right]_{m=2k+1}=\left[k+\dfrac{1}{2}\right]=k=\dfrac{m-1}{2}.$

403. a) *Yechish.* $2\leq x^2<3$ yoki $\sqrt{2}\leq|x|<\sqrt{3},$ *bundan* $-\sqrt{3}<x\leq-\sqrt{2}$ va $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ ni olamiz;

b) *Yechish.* $x + 1$ ning qiymatlari va bundan x ning qiymatlari ham butun bo'lishi zarur. Bu qiymatlarda $3x^2 - x$ ham butun bo'ladi va berilgan tenglama $3x^2 - x = x + 1$ teng kuchli bo'ladi, bundan $x = 1$ ni olamiz.

c) *Yechish.* Berligan tenglamani $0 \leq x < 4$ qiymatlar qanoatlantiradi, bu qiymatlarda $\dfrac{3}{4}x$ butun qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni $x=0;\ 1\dfrac{1}{3};\quad 2\dfrac{2}{3};$

$d)\,x=0;\ 1.$

404. $\left[\dfrac{10^7}{786}\right]-\left[\dfrac{10^6}{786}\right]=11450.$

405. *Yechish.* $999-\left[\dfrac{999}{5}\right]-\left[\dfrac{999}{7}\right]+\left[\dfrac{\left[\dfrac{999}{5}\right]}{7}\right]=686.$

406. *Yechish.* $100-\left[\dfrac{100}{2}\right]-\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{100}{6}\right]=33.$

407. 98.

408. 488.

409. B (2311; 5, 7, 13, 17) = 1378;

410. B (110; 2,3) = 37.

411. B (12317; 3,5,7) = 5634.

412. 393.

413. $\left[\dfrac{p^n}{p}\right]+\left[\dfrac{p^n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\dfrac{p^n}{p^{n-1}}\right]+\left[\dfrac{p^n}{p^n}\right]=p^{n-1}+\ldots+p+1=\dfrac{p^n-1}{p-1}$

414.

$a) 10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7;$

$b) 15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13;$

$c) 20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19;$

$d) 25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23;$

$e) 30! = 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$

415. $\frac{20!}{10!10!} = 2^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$

416. *Yechish.* $N = \frac{1000!}{100!\,7^{\alpha}}$, bu yerda α

$$\left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{49}\right] + \left[\frac{1000}{301}\right] = \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{100}{49}\right] + \alpha$$

shartni qanoatlantiradi, bundan α = 148 kelib chiqadi.

417. *Yechish.* $(2m+1)!! = \frac{(2m+1)!}{(2m)!!} = \frac{(2m+1)!}{m!2^m}$. Agar $p > 2$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{2m+1}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{p^i}\right], \qquad \textit{бу ерда} \qquad p^k \le 2m+1 < p^{k+1}.$$

418. *Yechish.* Ixtiyoriy butun $x = k$ ($a \le k \le b$) abssissa uchun $[f(x)]+1$ butun ordinatali va berilgan trapesiyaning ichida va chegarasida joylashadi. Demak, nuqtalar soni $\sum_{k=a}^{b}([f(k)]+1)$ ga teng.

419. 126.

420. *Yechish.* Shartga asosan, $a = 4q + 1$ yoki $a = 4q + 3$ ga teng. Birinchi holda $\left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{2a}{4}\right] + \left[\frac{3a}{4}\right] = q + 2q + 3q = 6q = \frac{3(a-1)}{2}$. Ikkinchi hol ham xuddi shunday tekshiriladi.

421. *Yechish.* $a = mq + r$ bo'lsin, bu yerda $0 \le r < m$ va $(r, m) = 1$. $(r, m) = 1$ shart barcha $m \le 2$ lar uchun bajarilishidan $r = 1$ kelib chiqadi. Demak,

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[i\left(q + \frac{1}{m}\right)\right] = q\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{a-1}{m} \cdot \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(a-1)(m-1)}{2}.$$

422. *Yechish.* $x = [x] + \alpha, \quad 0 \le \alpha < 1$ bo'lganligidan

$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = 2[x] + \left[\alpha + \frac{1}{2}\right]$, bundan $\frac{1}{2} \le \alpha + \frac{1}{2} < 1\frac{1}{2}$ va $\left[\alpha + \frac{1}{2}\right]$ 0 ga yoki 1 ga teng. $2x = 2[x] + 2\alpha$ va $[2x] = 2[x] + [2\alpha]$ bo'lganligidan

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [2\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{2}\right].$$

Bu yerda $\left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = [2\alpha] = 0$, yoki $\left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = [2\alpha] = 1.$

423. *Yechish.* Tenglamaning har bir qismini y deb belgilab, $y \le \frac{x}{m} < \frac{x}{m-1} < y+1$ *ни оламиз,* бундан $my \le x < (m-1)\,(y+1)$. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar mavjud bo'lishi uchun
$my < (m-1)\ (y+1)$ yoki $y < m-1$ shartlar bajarilishi zarur va yetarli. Bundan quyilagi natija kelib chiqadi: $my \le x < (m-1)\ (y+1)$, bu yerda
$y - y < m - 1$ shartni qanoatlantiruvchi butun son.

424. *Yechish.* $ax^2 + bx + c$ funksiya va shu bilan birgalikda
$[ax^2 + bx + c]$ funksiya $a > 0$ da quyidan, $a < 0$ da esa yuqoridan chegaralangan. Ikala holda ham $[ax^2 + bx+c]$ funksiya chegarasi $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$. songa teng. Shu sababli $a > 0$ da berilgan tenglama yechimga ega bo'ladi, agar $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right] \le d$; shart bajarilsa va faqat shartda, agar $a < 0$ bo'lsa, bu shart quyidagicha: $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right] \ge 1.$

425. $a)\ 0{,}6;\quad b)\ \frac{2}{3};\quad c)\ 0;\quad d)\ \frac{1}{2}.$

426. a) 624; b) 2418; 30; c) 1440; 8; d) 1960; 12; e) 2808; 24;
f) 3844;30.

427. a) 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360;
b) 1, 5, 25, 125, 3, 15, 75, 375.

428. *Yechish.* $S(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1 = 2\cdot 2^\alpha - 1$, demak, $m = 2^\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{N}$.

429. *Yechish.* Agar p son m yoki n ning kanonik yoyilmalarining birortasiga α ko'rsatkich kirsa, u holda $\tau(mn)$, va $\tau(m)\cdot\tau(n)$ da $\alpha + 1$ ko'paytma mavjud. Agar m va n ning kanonik yoyilmalarida mos ravishda ρ^α va ρ^β Lar bo'lsa, u holda mn ning kanonik yoyilmasida $\rho^{\alpha+\beta}$ mavjud va $\tau(mn)$ dagi $\alpha + \beta + 1$ ko'paytmaga $\tau(m)\cdot\tau(n)$ da qatnashuvchi $(\alpha + \beta)\ (\beta + 1) > \alpha + \beta + 1$ ko'paytma mos keladi. Demak, agar $(m, n)>1$, u holda $\tau(m)\ \tau(n) > \tau(mn)$. Agar r m yoki n ning kanonik yoyilmasiga qatnashsa, yuqorida qayd qilinganidek, $S(x)$ ni hisoblash mumkin.

Ikkinchi holda S (mn) ga kiruvchi $\frac{p^{\alpha+\beta+1}}{p^{-1}}$, ko'paytmaga S ($m$) S ($n$) ga kiruvchi $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1} = \frac{p^{\alpha+\beta+2}-p^{\alpha+1}}{(p-1)^2} + \frac{p^{\beta+1}+1}{(p-1)^2}$, ko'paytma mos keladi.

$$\frac{p^{\alpha+\beta+2}-p^{\beta+1}+1}{p-1} - \left(p^{\alpha+\beta-1}-1\right) = \frac{p\left(p^\alpha-1\right)\left(p^\beta-1\right)}{p-1},$$

tenglikni o'rinliligini osongina ko'rsatish mumkin, bundan

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1}>\frac{p^{\alpha+\beta-1}-1}{p-1}.$$

Demak, agar $(m, n) > 1$ bo'lsa, $S(m)\, S(n) > S(mn)$ bo'ladi.

430. $\tau(m) = 20$, $S(m) = 5208$, $\delta(m) = 1968^{10}$.

431. *Yechish.* ¡zining barcha bo'luvchilari ko'paytmasiga teng bo'lgan m natural son $m=\sqrt{m^{\tau(m)}}$, tenglama yordamida aniqlanadi, ya'ni $\tau(m) = 2$. bundan masala yechimi kelib chiqadi.

432. $S_n(a)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{n(\alpha_i+1)}-1}{p_i^n-1}$. *Ko'rsatma.* Matematik induksiya usulidan foydalaning.

433. a) $S_2(12) = 120$; b) $S_2(18) = 455$; c) $S_2(16) = 341$.

435. *Yechish.* $2^{\alpha}\left(2^{\alpha+1}-1\right)=m$ *u* $2^{\alpha+1}-1=p,$ bo'lsin, u holda $S(m)=S\left(2^{\alpha}\cdot p\right)=\left(2^{\alpha+1}-1\right)(p+1)=\left(2^{\alpha+1}-1\right)2^{\alpha+1}=2m$.

436. *Yechish.* 101-masalaga asosan, har qanday mukammal son $2^{\alpha}\left(2^{\alpha+1}-1\right)$, ko'rinishda bo'lishini isbotshan kerak, bu urda $2^{\alpha+1}-1$ – tub son. $m = 2^{\alpha}q$ bo'lsin, $(q, 2) = 1$ va $S(m) = 2m$, ya'ni $(2^{\alpha+1}-1)\, S(q) = 2^{\alpha+1}\cdot q$, bundan $S(q)= 2^{\alpha+1}\cdot k$ va $q = (2^{\alpha+1}-1)k$, $k\in\mathbf{N}$. k va $(2^{\alpha+1}-1)k$ sonlar q ning bo'luvchilari bo'lib ular yig'indisi $k\cdot 2^{\alpha+1} = S(q)$ ga teng, bundan q boshqa natural bo'luvchilarga ega emas. Demak $q = (2^{\alpha+1}-1)k$ – tub son, bundan $k = 1$ va $2^{\alpha+1}-1$ – tub sondir.

437. *Yechish.* $S(m) = 3m$ tenglama $m = 2^{\alpha}\cdot p_1p_2$ uchun $(2^{\alpha+1}-1)(1 + p_1)(1 + p_2) = 3\cdot 2^{\alpha}p_1p_2$ ko'rinishga ega. Agar $\alpha = 0$ bo'lsa $(1 + p_1)(1 + p_2) = 3p_1p_2$ yoki $1 + p_1 + p_1$, bundan p_1 va p_2 juft son bo'lishi kerak, bu esa o'rinli emas, chunki $1 + p_1$ va $1 + p_2$ juft sonlar. Demak $\alpha \neq 0$. Agar $\alpha = 1$ $(1 + p_1)(1 + p_2) = 2p_1p_2$ yoki $1 + p_1 + p_2 = p_1p_2$, ya'ni $1 + p_1 = p_2(p_1 - 1)$; $p_1 - 1 = 2n$ bo'lganligidan $n + 1 = p_2 n$, bundan $n = 1$ va $p_2 = 2$, bu esa o'rinli emas. Demak $\alpha \neq 1$. Agar $\alpha = 2$ bo'lsa, $7(1 + p_1)(1 + p_2) = 12\, p_1p_2$ yoki $7 + 7(p_1 + p_2) = 5p_1p_2$, bundan $p_1 = 7$ (yoki $p_2 = 7$) va $p_2 = 2$ (yoki $p_1 = 2$), bunday bo'lishi mumkin emas. Demak $\alpha \neq 1$. $\alpha = 3$ bo'lganda $5(1 + p_1)(1 + p_2) = \gamma\, p_1p_2$ yoki $5 + 5(p_1 + p_2) = 3p_1p_2$, bundan $p_1 = 5$ va $p_2 = 3$. Shunday qilib, masala shartini qanoatlantiruvchi eng kichik natural son $m = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120$ bo'ladi.

438. *Yechish.* Shart bo'yicha, $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ va $(1+p_1)(1 + p_2) = 6$, bo'lganligidan $\alpha_1=1$, $\alpha_2= 2$ va $m=p_1p_2^2$. Bundan tashqari, $S(m)=28$, ya'ni $(1+p_1)\left(p_2^2+p_2+1\right)=28,$ bundan $1+p_1=4$ va $p_2^2+p_2+1=7,$ ya'ni $p_1=3, p_2=2$. Demak, $m = 3\cdot 2^2 = 12$.

439. *Yechish*. Masala sharti bo'yicha $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, $m^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}$ *u* $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)=15$, bundan $2\alpha_1+1=3$ va $2\alpha_2+1=5,$ ya'ni $\alpha_1=1,\ \alpha_2=2$. Demak, $\tau(m^2) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = 4\cdot 7 = 28$.

440. *Yechish.* Shart bo'yicha $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 81$, ikki hol o'rinli bo'lishi mumkin: $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 3 \cdot 27$ va $(1 + 2\alpha_1)(1+2\alpha_2) = 9 \cdot 9$, ya'ni $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2=13$ va $\alpha_1=\alpha_2=4$, bulardan $\tau(m^3) = 160$ yoki $\tau(m^3) = 169$.

441. *Ko'rsatma.* $d_1 = \dfrac{N}{d_n}, \quad d_2 = \dfrac{N}{d_{n-1}}, \ldots$.dan foydalaning.

442. *Yechish.* N ning barcha bo'luvchilarini o'sish tartibida yozamiz: $1, d_1, d_2, \ldots, \dfrac{N}{d_2}, \dfrac{N}{d_1}, \dfrac{N}{1}$, bular $(\alpha + 1)(\beta + 1)\ldots(\mu + 1)$. Bularni juftliklarga bo'linsa, $1 \cdot \dfrac{N}{1}, \ d_1 \cdot \dfrac{N}{d_1}, \quad d_2 \cdot \dfrac{N}{d_2}, \ldots$ barcha turli bo'linmalarni hosil qilamiz, ular soni N – to'la kvadrat bo'lganda $\dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)}{2}$, ga teng. Bu natijalarni birlashtirib, turli yoyilmalar soni $\left[\dfrac{1+(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\mu+1)}{2}\right]$. ga tengligini olamiz.

443. *Ko'rsatma.* Masala yechimi $\begin{cases} (\alpha+1)(\gamma+1) = 8 \\ (\alpha+1)(\beta+1) = 12 \\ (\beta+1)(\gamma+1) = 6 \end{cases}$ sistemaga keladi. Bundan $N = 1400$.

444. $N = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$.

445. *Yechish.* $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. bo'lsin, u holda $\tau(m) = (1+ \alpha_1)(1+ \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_k)$. Agar $\tau(m) \equiv 1 \pmod 2$ bo'lsa, u holda $1 + \alpha_i \equiv 1 \pmod 2$ bo'ladi, bundan $\alpha_i \equiv 0 \pmod 2$, bu esa m – butun soni kvadrati bo'lishini ko'rsatadi. Teskaridan, agar m – butun son kvadrati bo'lsa, u holda $\alpha_i \equiv 0 \pmod 2$ va bundan $\tau(m) \equiv 1 \pmod 2$ ni hosil qilamiz.

446. a) 2; b) 4; c) 4; d) 5; e) 9; f) 15; g) 46; h) 95.

447. a) ≈13; 13%; b) ≈ 22; 12%; c) ≈ 80; 16%.

114. *Yechish.* $\pi(p) < p$ tengsizlikdagi

$-p < -\pi(p)$, $p\pi(p) - p < (p - 1)\pi(p)$ va $\dfrac{\pi(p)-1}{p-1} < \dfrac{\pi(p)}{p}$ ni hosil qilamiz.

$\pi(p)-1 = \pi(p - 1)$ dan $\dfrac{\pi(p-1)}{p-1} < \dfrac{\pi(p)}{p}$ kelib chiqadi. $\pi(m-1) = \pi(m)$ tengsizlikdan $\dfrac{\pi(m)}{m} < \dfrac{\pi(m-1)}{m-1}$ ni olamiz.

448. a) 200; b) 192; c) 432; d) 320; e) 400; f) 1152.

451. a) 288; b) 24; c) 480; d) 388800.

452. 88.

453. *Yechish*. Masala sharti bo'yicha, $a = 3^{\alpha}\, 5^{\beta}\, 7^{\gamma}$. Bu soning Eyler funksiyasi $\varphi\,(a) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 5^{\beta-1}\ 4 \cdot 7^{\gamma-1} \cdot 6 = 2^4\, 3^{\alpha-1}\, 5^{\beta-1}\, 7^{\gamma-1}$. shart bo'yicha $\varphi\,(a) = 3600 = =2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, demak $2^4 \cdot 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta-1} \cdot 7^{\gamma-1} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, bundan $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma =1$ va $a = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 7875$.

454. *Yechish*. Shart bo'yicha: $\varphi\,(a) = \varphi(pq) =(p - 1)\,(q - 1) = 120$ va

$p - q = 2$. Natijada $\begin{cases}(p-1)(q-1)=120 \\ \qquad p-q=2\end{cases}$; sistemani hosil qilamiz. Uning yechimi

$p = 13$, $q = 11$. Demak, $a = p\,q = 143$.

455. *Yechish*. Shart bo'yicha $\varphi(a)=\varphi\left(p^2q^2\right)= p(p-1)q(q-1)$ va $\varphi(a)=11424 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$. Demak, $p(p-1)q(q-1)= 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$, yoki $p(p-1)q(q-1)=17 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 6$, bundan $p=17, q=7$ va $a=17^2 \cdot 7^2=14161$.

456. *Yechish*. Shart bo'yicha

$\varphi(a)= p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)$ va $\varphi(a)= 462000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$. Demak,

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11.$$

O'ng tomondagi ko'paytuvchilarni chap tomondagi kabi ko'rinishda ko'paytuvchilarni o'rnini almashtiramiz:
$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)= (11 \cdot 10)(7 \cdot 6)(5^2 \cdot 4)$, bundan $p_1=11$ va $\alpha_1=2$; $p_2=7$ va $\alpha_2=2$; $p_3=5$ va $\alpha_3=3$; $a=11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^3=741125$.

457. *Yechish*. $(a,\ m)=1$ shart bajarilganda $(a,\ m\text{-}a) = 1$ ni bajarilishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $(a, m - a) = d > 1$, u holda $a = dk$, $m - a = dt$, bundan $m = d(t + k)$ va $(a, m) = d > 1$, bu esa $(a, m)= 1$ shartga ziddir.

m dan kichik va u bilan tub bo'lgan sonlarni tartib bilan yozamiz:
$1, a_1, a_2, \ldots, m - a_2\,, m - a_1,\ m - 1$; bu qatorda $\varphi\,(m)$ son bor. Har qanday a_i songa $m - a_i$ son mos keladi; ular yig'indisi

$a_i + (m - a_i) = m$, bu juftliklar soni $\frac{1}{2}\varphi(m)$ va demak $S=\frac{1}{2}m\varphi(m)$.

458. a) 24; b) 54; c) 37500.

459. a) *Yechish*. $a=p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$. bo'lsin. U holda

$$\varphi\left(a^{\alpha}\right)=a^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=a^{\alpha-1}\left[a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right]=$$
$$=a^{\alpha-1}\varphi(a).$$

460. Birinchi hol $(a, 2) = 1$ bo'lganda o'rinli, ikkinchi hol esa $(a, 2) = 2$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

461. a) *Yechish.* $\varphi(4n + 2) = \varphi(2)\,\varphi(2n + 1) = \varphi(2n + 1)$;

b) *Yechish.* Agar $(n, 2)=1$ bo'lsa, u holda $\varphi(4n) = \varphi(4)\,\varphi(n) = 2\varphi(n)$. Agar $n = 2^{\alpha}\cdot k$ bo'lib, $(k, 2) = 1$ bo'lsa, u holda $\varphi(4n) = \varphi(2^{\alpha+2}\cdot k) = 2^{\alpha+1}\cdot\varphi(k) = 2\cdot\varphi(2^{\alpha+1}\cdot k) = 2\varphi(2n)$.

462. a) $x = 3$; b) $x = 3$; c) tenglama $p > 2$ da yechimga ega emas. $p = 2$ da ixtiyoriy natural sonlar uchun o'rinli.

463. $\varphi(b)$.

464. a) 4 kasr: $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}. \frac{9}{10}$. c) 12 kasr.

465. $\varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(n)$.

466. a) 9; b) 31; c) 71.

467. *Yechish.* Shart bo'yicha, $(300, x) = 20$ va barcha x lar 300 dan kichik, 20 ga qisqartirgandan so'ng $(15, y) = 1$, bu yerda barcha y Lar 15 dan kichik va 15 bilan o'zaro tub; ular soni $\varphi(15) = 8$. Bu $y = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ sonlar va bundan $x = 20, 40, 80, 140, 160, 220, 260, 280$.

468. $\varphi(45) = 24$.

469. $\varphi(36) = 12$.

470. *Ko'rsatma.* $\varphi(a)$ ning juftligi 123 masala yordamidan kelib chiqadi.

471. *Yechish.* Agar $(m, 2) = 1$ bo'lsa, u holda $\varphi(m) = \varphi(2m)$.

472. *Yechish.* m va n larning tub bo'luvchisi p uchun $\varphi(mn)$ sonda $1-\frac{1}{p}$, ko'paytuvchi bor, a $\varphi(m)\,\varphi(n)$ – sonida esa $\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$. ko'paytuvchi bor. $1-\frac{1}{p}<1$, bo'lganligi sababli $\varphi(m)\varphi(n) < \varphi(mn)$. Xususiy holda $\varphi^2(m) \le \varphi(m^2)$, tenglik $m = 1$ bo'lganda bajariladi.

473. *Ko'rsatma.* $q_1, q_2, \ldots, q_t$ – m ning kanonik yoyilmasidagi tub sonlar; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ –m va n ning kanonik yoyilmasidagi tub sonlar va $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_S$ – faqat n ning kanonik yoyilmasidagi tub sonlar bo'lsin. U holda

$$\varphi(mn) = mn\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{S}\left(1-\frac{1}{\ell_i}\right) = \left[m\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]\times$$

$$\times\left[n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\prod_{i=1}^{S}\left(1-\frac{1}{\ell_i}\right)\right]\cdot\frac{d}{d\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)} = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}.$$

1-*eslatma*. Shu usulda m va n sonlarning umumiy bo'luvchisi A uchun $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{A}{\varphi(A)}$ munosabatni keltirib chiqarish mumkin.

2-*eslatma*. Chiqarilgan formula yordamida 138 masala yechimi juda osonlik bilan topiladi: $\varphi(m)\varphi(n) \le \varphi(mn)$, chunki $\dfrac{d}{\varphi(\alpha)} \ge 1$. Tenglik o'rinli bo'lishi uchun d = 1 zarur va yetarlidir.

474. *Yechish.* $\varphi(mn) = \varphi(\delta\mu) = \varphi(\delta)\varphi(\mu) \cdot \dfrac{\delta}{\gamma^{\tau}} = \delta\varphi(\mu).$

475. p^{α}.

476. *m.*

477. a) *Yechish*. Gaussa formulasidan $x = 2^y 3^z 5^u$ ($y \ge 0$, $z = 0$; 1 va $U = 0$; 1) kelib chiqadi. $x = 2^y$; $2^y \cdot 3$; $2^y \cdot 5$; $2^y \cdot 15$; 3; 5; 15 imkoniyatlarni tekshirishi $x = 2^{\alpha+1}$; $2^{\alpha} \cdot 3$; $2^{\alpha-1} \cdot 5$; $2^{\alpha-2} \cdot 15$ ($\alpha \ge 2$); 15 ($\alpha = 3$)larni beradi;

b) $p \ne 3$ da yechim yo'q. $r = 3$ da tenglamalarni ixtiyoriy butun $x \ge 2$ qiymatlar qanoatlantiradi.

478. a) yechimi yo'q;

IV-BOB

BUTUN SONLAR XALQASIDA TAQQOSLAMALAR NAZARIYASI

18-§.

488. 1 modul bo'yicha. **489**. a); v); s); **490**. *Yechilishi*. Agar $a = mq + r$ bo'lsa, u holda $a - r = mq$ va $a \equiv r(mod\ m)$. **491**. a) $x = 3q$; v) $x = 1+2q$. **492**. $2r$ ning bo'luvchilari. **493**. 8 ning bo'luvchilari. **494**. *Yechilishi*. Agar n toq son bo'lsa, u holda n-1 va n+1- ketma-ket keladigan juft sonlar. Agar ulardan biri 2 ga karrali bo'lsa, u holda ikkinchisi kaimda 4 ga karrali, shuning uchun: $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \equiv 0$ (*mod* 8), yoki $n^2 \equiv 1$ (*mod* 8). **495**. *Yechilishi*. Berilgan taqqoslamani ikkala tomonini 4 ga ko'paytiramiz: $400a + 40b + 4c \equiv 0$ (*mod* 21), lekin $400a \equiv a$ (*mod* 21), $40b \equiv -2$ (*mod* 21), $4c \equiv 4$ (*mod* 21). Oxirgi uchta taqoslamani hadma-had qo'shamiz: $400a + 40b + 4c \equiv a - 2b + 4c$ (*mod* 21). Bu yerdan $a - 2b + 4c \equiv 0$(*mod* 21) ni hosil qilamiz. **497.** *Yechilishi*. $11\cdot31 - 1 = 340 = 5\cdot68$ va $2^5 \equiv -1$(*mod* 11) bo'lganligi uchun oxirgi taqqoslamani ikkala tomonini 68-nchi darajaga ko'tarib: $(2^5)^{68} = 2^{340} = 2^{11\bullet31-1} \equiv 1$(*mod* 11) ni hsil qilamiz. So'ngra $2^5 \equiv 1$(*mod* 31) dan $(2^5)^{68} = 2^{11\bullet31-1} \equiv 1$(*mod* 31) ni hosil qilamiz. Bu yerdan $2^{11\bullet31-1} \equiv 1$(*mod* $11\cdot31$). Bu taqqoslamani ikkala tomonini 2 ga ko'paytirib izlanayotgan taqqoslamani hosil qilamiz. **498.** *Yechilishi.* $x = 3n + 1$ bo'lganda bo'linuvchi $1+3\cdot27^n + 9\cdot729^n$ ga teng bo'ladi. Berilgan modul bo'yicha $27^n \equiv 729^n \equiv 1$, shuning uchun $1 + 3\cdot27^n + 9\cdot729^n \equiv 1 + 3 + 9 = 13$. **501.** 4. **502.** *Yechilishi*. Shartga asosan $a = b + p^n q$ ($q = 0, \pm1, \pm2, ...$). Bu tenglikningn ikkala tomonini r –nchi darajaga ko'tarib, $a^p = b^p + p^{n+1} \cdot \alpha$ ($\alpha = 0, \pm1, \pm2, ...$) ni hosil qilamiz. **504. K**o'rsatma. $a_4 \cdot 10^4 + a_3a_2\cdot10^2 + a_1a_0 \equiv 0$(*mod* 33) taqqoslamaning chap tomonidan modulga karrali bo'lgan $999a_4 + 99a_3a_2$ sonni ayirish kerak. **505.** *Yechilishi*. a**)** $9^{10} \equiv 1$(*mod* 100) bo'lganligi uchun $9^{10q+r} \equiv 9^r$ (*mod* 100). $9^9 \equiv 9$(*mod* 10) bo'lganligi uchun $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 89$ (mod 100). Izlanayotgan raqamlar 8 va 9; b**)** $7^4 = 2401 \equiv 1$(*mod* 100) bo'lganligi uchun $7^{100} \equiv 1$(*mod* 100), bu yerdan $7^{9^{9^9}} \equiv 7^{100q+89} \equiv 7^{89}$ (mod 100). $7^{88} \equiv 1$(mod 100) bo'lganligi uchun $7^{89} \equiv 7$ (mod 100). Izlanayotgan raqamlar 0 va 7. **506.** *Yechilishi*. $r \equiv r + 2 \equiv 1$ (mod 2) taqqoslamadan $r^{r+2} + (r+2)^r \equiv 0$ (mod 2) kelib chiqadi, $r \equiv -1$ (mod r+1), $r + 2 \equiv 1$ (mod r+1) dan esa $r^{r+2} + +(r+2)^r \equiv 0$ (mod r+1) kelib chiqadi. **507.** *Ko'rsatma*. Noldan tashqari $\pm\frac{p-x}{2}(x = 1, 2,..., p-2)$ ko'rinishdagi sonlar berilgan.

$$\pm\frac{p-x}{2} \equiv 0(mod\ \ p),\ \ \frac{p-x_1}{2} \equiv \pm\frac{p-x_2}{2} \equiv 0(mod\ \ p),$$

Taqqoslamalar mos ravishda noto'g'ri $x \equiv r(mod\ \ r)$, $x_1 \equiv \pm x_2$ (mod r) taqqoslamalarga olib keladi. **508.** *Yechilishi.* **M**atematik induksiya metodini qo'llaymiz. n = 1 da taqqoslama to'g'ri. n uchun taqqoslama to'g'ri bo'lsin. Uni n + 1 da ham o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, $2^{3^{n+1}} + 1 = \left(2^{3^n}\right)^3 + 1 = \left(2^{3^n} + 1\right)\left(2^{2\cdot 3^n} - 2^3 + 1\right) \equiv 0\left(mod\ 3^{n+2}\right)$, induksiya faraziga asosan $2^{3^n} + 1 \equiv 0$ (mod 3^{n+1}) va $2^{2\bullet 3} - 2^3 + 1) \equiv 0$ (mod 3) , chunki $2 \equiv -1$(mod 3). **509.** a) *Yechilishi.* $4 \equiv -1$(mod 5) bo'lganligi uchun $2^{4n+1} = 2\cdot 4^{2n} \equiv 2$($mod$ 5). Shunday qilib, $2^{4n+1} = 2 + 5k$, bu yerda $k \in \boldsymbol{N}$, va $N = 3^{2+5k} + 2 = 9 \cdot 243^k + 2 \equiv 0$ (mod 11), chunki $243 \equiv 1$(mod 11). Shunday qilib, $11|\ N$ va $N > 11$. Demak, N – murakkab son. b**)** *Yechilishi.* $9 \equiv -1$(mod 10) bo'lganligi uchun $3^{4n+1} = 3\cdot 9^{2n} \equiv 3$($mod$ 10). Demak, $3^{4n+1} = 3 + 10k$, bu yerda $k \in \boldsymbol{N}$, va $M = 2^{3+10k} + 3 = 8\cdot 32^{2k} + 3 \equiv 0$ (mod 11), chunki $32 \equiv -1$(mod 11). $M > 11$ va $11|\ M$ dan M ning murakkab son ekanligi kelib chiqadi. **510.** *Yechilishi.* Dastavval agar $(a, m) = k$ bo'lsa, u holda $(b, m) = k$ ekanligini ko'rsatamiz. $a \equiv b\ (mod\ m)$ taqqoslamadan $a = mt + b$, yoki $b = a - mt$, bu yerdan ko'rinib turibdiki, agar $(a, m) = k$ bo'lsa, u holda $k \mid b$. Shunday qilib, agar $(a, m) = 1$ bo'lsa, u holda $(b, m) = 1$. Masala shartidagi ikkinchi taqqoslamani s ga ko'paytirib: $ac \equiv bc\ (mod\ m)$ taqqoslamani hosil qilamiz. U holda $bc \equiv bd\ (mod\ m)$, bu yerdan $(b, m) = 1$ ni hisobga olib $c \equiv d\ (mod\ m)$ ni hosil qilamiz. **511.** *Yechilishi.* Shartga asosan, $a^{100} \equiv 2$ (mod 73); bu taqqoslamaning ikkala tomonini a ga ko'paytirib, $a^{101} \equiv 2a$ (mod 73) ni hosil qilamiz; ammo, shartga ko'ra, $a^{101} \equiv 69$ (mod 73). Bu taqqoslamalardan $2a \equiv 69$ (mod 73) kelib chiqadi. Bu taqqoslamaninng o'ng tomoniga 73 ni qo'shamiz: $2a \equiv 142(mod\ 73)$. (2, 73) = 1 bo'lganligi uchuntaqqoslamaning ikkala tomonini 2 ga qisqartirib, $a \equiv 71$(mod 73) ni hosil qilamiz. Bu yerdan qoldiq 71 ekanligi kelib chiqadi. **512.** *Yechilishi.* Masala shartidan $11a + 2b \equiv 0$ (mod 19) taqqoslamani hosil qilamiz. Bu taqqoslamaning ikkala tomonini 12 ga ko'paytirib: $132a + 24b \equiv 0$ (mod 19) ni hosil qilamiz, bu yerdan esa $18a + 5b \equiv 0$ (mod 19).

514. $1, 2, 3, ..., \frac{p-1}{2}, \frac{p+2}{2}, ..., p-2, p-1$

sonlardan $\frac{p-1}{2}$ ta taqqoslamalrni hosil qilamiz: $1 \equiv -(r-1)$ (mod r), $2 \equiv -(r-2)$ (mod r),

..., $\frac{p-1}{2} \equiv -\frac{p+1}{2}$ (mod p).

Bu taqqoslamalarning har birini *(2k + 1)*- nchi darajaga ko'tarib, so'ngra ularni qo'shib talab qilingan taqqoslamani hosil qilamiz.

19-§

515. $x \equiv$ 0; 1; 2; ... ; 9 (*mod* 10). **517.** a) $x \equiv$ 1; 3; 7; 9 (*mod* 10); b) $x \equiv$ 2; 4; 6; 8 (*mod* 10); s) $x \equiv$ 5 (*mod* 10); d) $x \equiv$ 0 (*mod* 10). **518.** a) m = 9 da chegirmalarning to'la sistemalari: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Chegirmalarning keltirilgan sistemalari: 1, 2, 4, 5, 7, 8; -8, -7, -5, -4, -2, -1; -4, -2, -1, 1, 2, 4. b) m = 8 da chegirmalarning to'la sistemalari: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 yoki -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. chegirmalarning keltirilgan sistemalari: 1, 3, 5, 7; -7, -5, -3, -1; -3, -1, 1, 3.

519. *Yechilishi*. Berilgan sinf sonlarining umumiy ko'rinishidan quyidagilarni topamiz:
25 = 8·3 + 1; -20 = 8(-3) + 4; 16 = 8·2 + 0; 46 = 8·5 + 6; -21 = 8(-3) + 3; 18 = 8·2 + 2; 37 = 8·4 + 5; -17 = 8(-3) + 7. Hosil qilingan qoldiqlarning hammasi har xil va ular
P_m (a)
manfiy bo'lmagan eng kichik chegirmalarning to'la sistemasini tashkil qiladi: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, demak, berilgan sonlar ham chegirmalarning to'la sistemasini tashkil qiladi.
525. *Yechilishi*. Har bir sonni 6 ga bo'lib: 0, 2, 1, 1, 4, 5, 2 qoldiqlarni hosil qilamiz. Topilgan manfiy bo'lmagan chegirmalardan (noldan tashqari) 6 ni ayirib, 0, -4, -5, -5, -2, -1, -4 –absolyut qiymati jihatidan eng kichik musbat bo'lmagan chegirmalarni hosil qilamiz. Absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalar 0, 2, 1, 1, -2, -1, 2 lardan iborat. **527.** manfiy bo'lmagan eng kichik chegirmalar: 0, 2, 1, 0, 100, 100; absolyut qiymati jihatidan eng kichik musbat bo'lmagan chegirmalar: 0, -5, -10, 0, -20, -100; absolyut qiymati jihatidan eng kichik chegirmalar: 0, 2, 1, 0, -20, 100 ili –100. **529.** *Ko'rsatma*. Berilgan sonni $a + x$ (x = 0, 1, 2, ... , m-1), bu yerda a – ixtiyoriy butun son, ko'rinishda yozib olib, chiziqli formaning chegirmalari haqidagi teoremani qo'llanilsin. **530.** *Ko'rsatma*. 10 modul bo'yicha qoldiqlarning to'las sistemasini beradigan x ningn qiymatlaridan foydalanish kerak. **538.** *Yechilishi*. Shartga asosan $x^4 \equiv$ 1(*mod* 10), bu yerdan $x^{12} \equiv 1$ (*mod* 10). **539.** *Yechilishi*. a**)** (5, 24) = 1 va φ(24) = 8 bo'lganligidan $5^8 \equiv$ 1 (*mod* 24) kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, $5^8 = (5^2)^4 = 25^4 \equiv 1^4 = 1$ (*mod* 24); s) *Yechilishi* (3, 18) = 3 > 1 bo'lganligi uchun Eyler teoremasi o'rinli emas. Haqiqatdan ham, φ(18) = 6 va $3^6 = 3^4 \cdot 3^2 = 81 \cdot 9 \equiv 9 \cdot 9 = 81 \equiv 9$ (*mod* 18). **540.** *Yechilishi*. a**)** φ(6) = 2 bo'lganligi uchun $a^2 \equiv 1$ (*mod* 6). Bu taqqoslamani modul bilan o'zaro tub bo'lgan a = 1 va a = 5, yoki $6k + 1$ va $6k + 5$ sonlar sinflari qanoatlantiradi. **541.** *Yechilishi*. b) $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1$ (*mod* 13) va $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$ (*mod* 5) bo'lganligi uchun $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1$ (*mod* 5); demak, $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1$ (*mod* 65) yoki $a^{12} - b^{12}$ ayirma 65 ga bo'linadi. **543.** *Ko'rsatma*. $i = 1, p - 1$ da $i^{k(p-1)} \equiv 1$ *(mod p)* taqqoslamalarni hadma-had qo'shish kerak. **544.** *Ko'rsatma*. $a^r \equiv a$ *(mod r)* taqqoslamadan foydalanish kerak. **546.** a) 1; b) 19; c) 29. **547.** a) 2; b) 6; c) 2; d) 2. **548.** 049. **549.** *Yechilishi*. $\varphi(m) = R_m(a) \cdot q + r$ bo'lsin, bu yerda $q \geq 0$ va $0 \leq r \leq R_m(a) - 1$. $a\, P_m(a) \equiv 1$ *(mod m)* dan $a^{\varphi(m)} \equiv a^r \equiv 1$ *(mod m)* kelib chiqadi, bu yerdan esa r = 0. **550.** *Ko'rsatma*. Oldingi masaladan foydalanish kerak. **551.** *Ko'rsatma*. Agar *(x, r)* = 1 bo'lsa, u holda $x^{(p-1)m} + x^{(p-1)n} \equiv 2$ *(mod p)*. **552.** *Ko'rsatma*. (m, 10) = 1 bo'lganligi uchun $10^{\varphi(m)} \equiv 1$ *(mod m)* yoki $10^{\varphi(m)} - 1 = 99...9 \equiv 0$ *(mod m)*. (9, m) =

1 bo'lganligi uchun hosil qilingan taqqoslamaning ikkala tomonini 9 ga bo'lish mumkin. **553.** b) *Ko'rsatma*. 1093 – tub son. **554.** *Yechilishi*. $a^{r-1} - 1 = (a-1)(a^{r-1} + a^{r-2} + ... + a + 1) \equiv 0$ *(mod r)* bo'lsin. $a^r \equiv a$ *(mod r)* bo'lganligi uchun $a^r - 1 \equiv a - 1$*(mod r)*. Shunday qilib, agar $a^r - 1 \equiv 0$ *(mod r)* bo'lsa, u holda $a - 1 \equiv 0$ *(mod r)*. Oxirgi taqqoslamadan quyidagilarni hosil qilamiz: $a^{r-1} \equiv 1$ *(mod r)*, $a^{r-2} \equiv 1$ *(mod r)*, ... , $a \equiv 1$ *(mod r)*, $1 \equiv 1$ *(mod r)*. Bu taqqoslamalarni hadma-had qo'shib: $a^{r-1} + a^{r-2} + ... + a + 1 \equiv r \equiv 0$ *(mod r)* ni hosil qilamiz, demak, $a^r - 1 \equiv 0$ *(mod* r^2*)*. Shunga o'xshash agar $a^r + 1 \equiv 0$ *(mod r)* bo'lsa, u holda $a^r + 1 \equiv 0$ (*mod* r^2) ni hosil qilamiz. **555.** *Yechilishi*. Ferma teoremasiga asosan $r^{q-1} - 1 \equiv 0$ *(mod q)*, bu yerdan $r^{q-1} - 1 = qt_1$. Shunga o'xshash, $q^{p-1} - 1 \equiv 0$ *(mod p)*, bu yerdan esa $q^{p-1} - 1 = pt_2$. Hosil qilingan tengliklarni ko'paytirib, izlanayotgan taqqoslamani hosil qilamiz. **556.** *Yechilishi*. $2730 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13$. $x^{13} \equiv x$ (*mod* 13) ga egamiz. $x^{13} \equiv x$ (*mod* 2, 3, 5 va 7) taqqoslamalarning to'g'riligi 58 masalaning taqqoslamasidan kelib chiqadi.

557. *Yechilishi*. $a_i^5 \equiv a_i$ (*mod* 2, 3, 5) bo'lganligi uchun $a_i^5 \equiv a_i$ (*mod* 30), (58 masalaga qarang). Shunday qilib, $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \ (mod\ 30)$. **558.** *Yechilishi*.

$m - \left[\frac{m}{2}\right] = m - \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}$ tenglik to'g'ri. $2^{\varphi(m)-1} \equiv r \ (mod\ m)$. yoki $2^{\varphi(m)} - 1 \equiv 2r - 1(mod\ m)$. Ammo Eyler teoremasiga ko'ra $2^{\varphi(m)-1} \equiv r$ *(mod m)*. Demak, $2r - 1 \equiv 0$ (*mod m*) bu yerdan esa $2r - 1 = mt, r = \frac{mt+1}{2}, r = \frac{m+1}{2}$. **559.** *Yechilishi*. Shartga asosan, $(a, 10) = 1$, bu yerdan $(a, 5) = 1$ va $(a, 2) = 1$. $1000 = 125\cdot8$ ni hisobga olib, 125 va 8 modullar bo'yicha taqqoslamalarni qaraymiz. 7 masalaning yechilishidan $a^{100} \equiv 1$ (*mod* 125) ni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan Eyler teoremasiga ko'ra $a^4 \equiv 1$ (*mod* 8); bu taqqoslamani 25 –nchi darajaga ko'tarib, $^{100} \equiv 1$ (*mod* 8) ni hosil qilamiz. Bu yerdan $a^{100} \equiv 1$ (*mod* 1000) kelib chiqadi. Oxirgi taqqoslamani *n*-darajaga ko'tarib, so'ngra uning ikkala tomonini *a* ga ko'paytirib, $a^{100n+1} \equiv a$ (*mod* 1000) ni hosil qilamiz. **560.** *Yechilishi*. $19\cdot73 - 1 = 1386 = 18\cdot77$ bo'lganligi uchun Ferma teoremasiga asosan $2^{18} \equiv 1$ (*mod* 19). U holda $2^{18\bullet77} = 2^{19\bullet73-1} \equiv 1$ (*mod* 19). $2^9 = 512 \equiv 1$ (*mod* 73), to $2^{9\bullet154} = 2^{19\bullet73-1} \equiv 1$ (*mod* 73) bo'lganligi uchun bu yerdan $2^{19\bullet73-1} \equiv 1$ (*mod* $19\cdot73$) ni hosil qilamiz. **561.** *Ko'rsatma*. $p_1^{p_2-1} - 1 = p_2 \cdot q_1$ va $p_1^{p_1-1} - 1 = p_1 \cdot q_2$ tengliklarni hadma-hado' ko'paytirish kerak, bu yerda $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}$. **562.** *Yechilishi*. $(2r + 1, 3) = 1$ bo'lsa, u holda $(2r + 1)^2 \equiv 1$ (*mod* 3), bu yerdan $4r + 1 \equiv 0$ (*mod* 3). **563.** *Yechilishi*. Shartga asosan $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\ m)$ va $\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi(m)\cdot q$. Demak, $a^{\alpha_2+\varphi(m)\cdot q} \equiv a^{\alpha_2}(mod\ m)$ yoki $a^{\alpha_1} \equiv a^{\alpha_2}(mod\ m)$. **564.** *Yechilishi*. Agar *a* soni 7 ga karrali bo'lmasa, u holda $(a, 7) = 1$, bu yerdan $a^6 \equiv 1$ (*mod* 7), bu taqqoslamadan $a^{6m} \equiv 1$ (*mod* 7) va $a^{6n} \equiv 1$ (*mod* 7) taqqoslamalarni hosil qilamiz. Oxirgi taqqoslamalarni qo'shib: $a^{6m} + a^{6n} \equiv 2$ (*mod* 7). Bu yerdan talab qilingan shart kelib chiqadi. **565.** *Yechilishi*. Agar $(n, 6) = 1$ bo'lsa, u holda $(n, 2) = 1$. Demak, *n* – toq son va $(n - 1)$ $(n + 1)$ ifoda ikkita ketma-ket joylashgan juyaye sonning ko'paytmasi sifatida 8 ga bo'linadi, ya'ni, $n^2 - 1 \equiv 0$ (*mod* 8), yoki $n^2 \equiv 1$ (*mod* 8). Ikkinchi tomondan $(n, 6) = 1$ dan $(n, 3) = 1$ ham kelib chiqadi. Shuning uchun $n^2 \equiv 1$

(mod 3). Hosil qilingan taqqoslamalardan $n^2 \equiv 1$ (mod 24) kelib chiqadi. **566.** *Yechilishi*. $r \neq 5$ ekanligi ko'rinib turibdi. Bu yerdan $5^{r-1} \equiv 1$ (mod r), $5^{p^2-1} \equiv 1$ (mod r) va $5^{p^2} + 1 \equiv 6$ (mod 6). Shartga asosan $6 \equiv 0$ (mod r) bo'lsa, u holda r ninng qiymatini 2 va 3 sonlardan izlash kerak. Tekshirishdan $r = 3$ ni topamiz. **567.** *Yechilishi*. $(x^3 - 1)x^3(x^3 + 1) \equiv 0$ (mod 504), yoki $x^2(x^7 - x) \equiv 0$ (mod $7\cdot8\cdot9$) taqfqoslamalarni isbotlash kerak. ixtiyoriy $x \in \mathbf{Z}$ da $x^7 - x \equiv 0$ (mod 7) bo'lganligidan $(x^3 - 1)x^3(x^3 + 1) \equiv 0$ (mod 7) kelib chiqadi. Shu bilan bir vaqtda x ning juft qiymatlari uchun ham toq qiymatlari uchun ham $(x^3 - 1)x^3(x^3 + 1) \equiv 0$ (mod 8) o'rinli, $\varphi(9) = 6$ bo'lganligidan $x^3(x^6 - 1) \equiv 0$ (mod 9) kelib chiqadi. Bu yerdan: $(x^3 - 1)x^3(x^3 + 1) \equiv 0$ (mod 504). **568.** *Yechilishi*. Shartga asosan r va $2r + 1$ – lar tub sonlar, shuning uchun $(2r + 1)^2 \equiv 1$(mod 3), $r^2 \equiv 1$(mod 3). Ikkinchi taqqoslamani 4 ga ko'paytirib, birinchisidan ayiramiz, $4r + 1 \equiv -3 \equiv 0$ (mod 3), ya'ni. $4r + 1$ – murakkab son (3 ga bo'linadi).

20-§

569. a) $x_1 \equiv 1$(mod 3), $x_2 \equiv 2$ (mod 3); b) $x_1 \equiv 1$(mod 5), $x_2 \equiv 2$ (mod 5); s) $x \equiv 2$ (mod 5); d) yechimlari yo'q; ye) $x \equiv 3$ (mod 5); f) $x_1 \equiv 1$(mod 4), $x_2 \equiv 3$ (mod 4); g) $x_1 \equiv 1$(mod 5), $x_2 \equiv 3$ (mod 5). **570.** a) $x \equiv 3$ (mod 7); b) $x \equiv 2$ (mod 5); c) $x \equiv -3$ (mod 11); d) $x \equiv -3$ (mod 7); e) $x \equiv -1$ (mod 7); f) $x \equiv -4$ (mod 15). **573.** a) $x \equiv 11$ (mod 15); b) $x \equiv 2$ (mod 8); c) $x \equiv 4$ (mod 13); d) $x \equiv 20$ (mod 37); e) $x \equiv 7$ (mod 25); f) $x \equiv 5$ (mod 11); g) $x \equiv 5$ (mod 11); h) $x \equiv 11$ (mod 24). **578.** *Yechilishi*. $x = u + \alpha$ almashtirishni kiritib, $(u + \alpha)^n + a_1(y + \alpha)^{n-1} + ... + a_n \equiv 0 (mod\ m)$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan qavslarni ochib chiqib, qaytadan gruppalashlardan so'ng $u^n + (n\alpha + a_1)\, y^{n-1} + ... + (\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_n) \equiv 0 (mod\ m)$ ni hosil qilamiz. α ni shunday tanlaymizki, $n\alpha + a_1 \equiv 0\ (mod\ m)$ o'rinli bo'lsin. Natijada u^{n-1} ni o'zida saqlaydigan had yo'qoladi: $u^n + b_1y^{n-2} + ... + b_n \equiv 0\ (mod\ m)$. **579.** *Yechilishi*. $n\alpha + a_1 \equiv 0\ (mod\ m)$ taqqoslamani tuzamiz. Shartdan $3\alpha + 5 \equiv 0$ (mod 13) kelib chiqadi, uning yechimi: $\alpha \equiv 7$ (mod 13), demak, $x = u + 7$ almashtirish olamiz. Bu almashtirishni berilgn taqqoslamaga qo'yib, $(u + 7)^3 + 5(y + 7)^2 + 6(u + 7) - 8 = u^3 + 26y^2 + 223u + 622 \equiv u^3 + 2u - 2 \equiv 0$ (mod 13) ni hosil qilamiz. **580.** a) $(5, 10) = 5$ va 7 soni 5 ga bo'linmagshanligi uchun bekrilgan taqqoslama yechimga ega emas. b) $x \equiv 7$(mod 13); c) $x \equiv 8$ (mod 17); d) $x \equiv 9$ (mod 19); e) $x \equiv 11$ (mod 58). **581.** a) $x \equiv 6$(mod 19); b) yechimi yo'q; c) $x \equiv 49$ (mod 153); d) $x \equiv 3$ (mod 183); e) $x \equiv 47$ (mod 241). f) yechimi yo'q; g) $x \equiv 41, 190, 339$ (mod 447); h) $x \equiv 61, 248$ (mod 422); i) $x \equiv 39, 196, 353$ (mod 471). **582.** a) yechimi yo'q; b) $x \equiv 3, 8, 13, 18, 23$ (mod 25); c) $x \equiv 73$ (mod 177); d) $x \equiv 29$ (mod 311); e) $x \equiv 48$ (mod 219); f) $x \equiv 9, 32, 55, 78, 101, 124$ (mod 138); g) $x \equiv 11, 28, 45$ (mod 51). **583.** *Yechilishi*. a) $ax \equiv b$ (mod 21), bu yerda $(a, 21) = 1$, $b \in \mathbf{Z}$; b) $ax \equiv b$ (mod 21) taqqoslama yechimga ega bo'lishi uchun, masalan, 3 ta yechimga ega bo'lishi uchun $(a, 21) = 3$ va b soni 3 ga bo'linishi zarur va yetarlidir; s) bunday taqqoslamani tuzish mumkin emas. **584.** 1 iyun. **585.** *Yechilishi*. Qo'shib yoziladigan sonni x bilan beliglaymiz, u holda $523\cdot10^3 + x \equiv 0$ (mod $7\cdot8\cdot9$), bu yerdan $x \equiv -523000 \equiv -352 \equiv 152$ (mod 504), yoki $x = 504t + 152$. x ning qiymati $t = 0$ va $t = 1$ da uch xonali bo'ladi. Bu yerdan $x_1 = 152$, $x_2 = 656$. **586.** $x \equiv 200$ (mod 440), ya'ni

$x \equiv 200$; 640. **587.** $x \equiv 30$ (*mod* 31), ya'ni $x = 30, 61, 42$. **588.** a) $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 3t$; b) $x = 3 + 13t$, $y = -3 + 8t$; c) $x = 22 - 37t$, $y = -25 + 43t$; d) $x = 17 + 37t$, $y = 20 + 45t$; e) $x = 1 + 16t$, $y = 1 + 27t$; f) yechimga ega emas g) $x = 4 + 17t$, $y = -11 - 53t$; h) $x = 47 + 105t$, $y = 21 + 47t$; i) yechimi yo'q; j) $x = 4 + 16t$, $y = 7 - 11t$; k) $x = 9 + 37t$, e = 3 + 12t; l) $x = -7 + 15t$, $y = 12 - 23t$. **589.** $x = 2 - 4t$, $y = 4 + 3t$. $t = 0$ va $t = -1$ da talab qilingan hosil bo'ladi. **590.** $x = 3 - 5t$, $y = 28 + 3t$. **591.** a) $x = -4 + 13t$, $-100 < -4 + 13t < 150$, $-7 \leq t \leq 11$; 19 ta nuqta; b) 7 ta nuqta; s) 8 ta nuqta. **592.** *Yechilishi*. $5a - 9b = 31$ yoki $5a \equiv 31$ (*mod* 9), bu shartni qanoatlantiradigan a ning eng kichik natural qiymati $a = 8$ dan iborat. b ning qiymatini tenglamadan topamiz: $b = 1$. **593.** *Ko'rsatma*. AB to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ qisqarmaydigan kasrdan iborat ekanligidan kelib chiqadi, $x_1 = x_2$ bo'lgan hol ko'rinib turibdi. **594.** Oldingi masalaga asoasan (uchburchakning uchlarini ham hisobga olganda) izlanayotgapn butun nuqtalar soni (18, 6) + (12, 8) + (6, 14) + 3 = 12 ga teng. **595.** a) $9x \equiv 1$ (*mod* 7), bu yerdan $x = 4 + 7t$; b) $x = 13 + 15t$. **596.** *Yechilishi*. Shartga asosan $15x + 20u + 30z = 500$ va $x + y + z = 18$, bu yerdan $y + 3z = 46$, $y \equiv 1$ (*mod* 3) yoki $u = 1 + 3t$. Demak, $3z = 45 - 3t$ va $z = 15 - t$. Bu yerdan $x + 16 + 2t = 18$ yoki $x = 2 - 2t$. Faqat $t = 0$ da natural yechimni hosil qilamiz. Demak, $x = 2$, $y = 1$, $z = 15$.

21-§

597. a) $x \equiv 49$ (*mod* 420); b) $x \equiv 4126$ (*mod* 6300); c) $x \equiv 85056$ (*mod* 130169); d) $x \equiv 9573$ (*mod* 13923); e) yechimi yo'q; f) yechimi yo'q; g) yechimi yo'q; h) $x \equiv 17$ (*mod* 90); i) $x \equiv 4$ (*mod* 105); j) $x \equiv 7777777$ (*mod* 91290457). **598.** $x \equiv 25$ (*mod* 60). **599.** 299 va 439. **600.** *Ko'rsatma.* $4x \equiv 9$ (*mod* 7); $2x \equiv 15$ (*mod* 9); $5x \equiv 12$ (*mod* 13) taqqoslamalar sistemasini yechish kerak, bu yerdan $x \equiv 291$ (*mod* 819). Nuqtalarning ordinatalari to'g'ri chiziqlarning berilgan tenglamalaridan kelib chiqadi. **601.** a) $x \equiv 4a - 3$ (*mod* 24), bu yerda $a \equiv 1$ (*mod* 2); b) $x \equiv 8 - 3a$ (*mod* 24), bu yerda $a \equiv 0$ (*mod* 2); c) $x \equiv 36a - 175$ (*mod* 630), bu yerda $a \equiv 1$ (*mod* 7); d) $x \equiv 15a + 21b - 35c$ (*mod* 105). **602.** a) $a \equiv 5$ (*mod* 6); b) $a \equiv 1$ (*mod* 6); c) $a \equiv 0$ (*mod* 4). **603.** *Yechilishi*. Shartdan quyidagi sistemani hosil qilamiz: $xyz138 \equiv 0$ (*mod* 7), $138xyz \equiv 6$ (*mod* 13), $x1y3z8 \equiv 5$ (*mod* 11). Birinchi taqqoslamani $10^3xyz + 138 \equiv 0$ (*mod* 7) ko'rinishda yozib olamiz. U holda $3xyz \equiv 1$ (*mod* 7), bu yerdan $xyz \equiv 5$ (*mod* 7). Ikkinchi taqqoslama bilan ham xuddi shunday amallarni bajaramiz: $138000 + xyz \equiv 6$ (*mod* 113), bu yerdan $xyz \equiv 1$ (*mod* 13). Endi $xyz \equiv 1$ (*mod* 13), $xyz \equiv 5$ (*mod* 7) taqqoslamalar sistemasini xyz ga nisbatan yechib, $xyz \equiv 40$ (*mod* 91), yoki $xyz = 91t + 40$ ni hosil qilamiz. $t = 1, 2, 3, \ldots, 10$ da $xyz = 131, 222, 313, \ldots, 950$ larni topamiz. Uchinchi taqqoslamani $x\cdot10^5 + 10^4 + u\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + z\cdot10 + 8 \equiv 5$ (*mod* 11) shaklda tasvirlab olamiz, soddalashtirishlardan so'ng $x + y + z \equiv 7$ (*mod* 11)ni hosil qilamiz, ya'ni $x + y + z = 11t + 7$. $0 < x + y + z < 27$ tengsizlikni e'tiborga olib, $x + y + z = 7$ va $x + y + z = 18$ larni hosil qilamiz. U holda 131, 222, 313, ... , 950 sonlar ketma-ketligidan shartni qanoatlantiradigan 313138 va 495138 sonlarni topamiz. **604.** *Yechilishi*. Shartga asosan $13xy45z \equiv 0$ (*mod* 792), ammo $792 = 8\cdot9\cdot11$, shuning uchun quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{13xy45z} \equiv 0 \ (mod\ 8) \\ \overline{13xy45z} \equiv 0 \ (mod\ 9) \\ \overline{13xy45z} \equiv 0 \ (mod\ 11) \end{array}\right\}.$$

Birinchi taqqoslamadan va 8 ga bo'linish alomatidan $450 + z \equiv 0 \ (mod\ 8)$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $z \equiv 6 \ (mod\ 8)$. $z = 6$ ni ikkinchi va uchinchi taqqoslamalarga qo'yib, sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{13xy456} \equiv 0 \ (mod\ 9) \\ \overline{13xy456} \equiv 0 \ (mod\ 11) \end{array}\right\}$$

Bu sistemaning birinchi taqqoslamasidan 9 ga bo'linish alomatiga asosan $x + y + 19 \equiv 0 \ (mod\ 9)$, yoki $x + y \equiv 0 \ (mod\ 9)$ kelib chiqadi. Ikkinchi taqqoslamani $1300000 + x \cdot 10^4 + u \cdot 10^3 + 456 \equiv 0 \ (mod\ 11)$ ko'rinishda tasvirlab olamiz, soddalashtirishlardan so'ng $x - u \equiv 8 \ (mod\ 11)$. U holdaa

$$\left.\begin{array}{l} x + u = 9t_1 + 8 \\ x - y = 11t_2 + 8 \end{array}\right\}$$

Bu yerdan $x = 8$ va $u = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, izlangan son 1380456 dan iborat.

605. *Yechilishi*. Izlanayotgan sonii x bilan belgilaymiz. U holda$x \cdot 1000 + (x+1) = 1001x + 1 = N^2$, yoki $(N+1)(N-1) = 7 \cdot 11 \cdot 13x$, bu yerdan

$$x = \frac{(N+1)(N-1)}{7 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Bu tenglikdan N va x aniqlash uchun quyidagi taqqoslamalar sistemalarini hosil qilamiz:

1) $\left.\begin{array}{l} N+1 \equiv 0 \ (mod\ 7) \\ N-1 \equiv 0 \ (mod\ 143) \end{array}\right\}$

Odatdagi usul bilan yechib $N=573$, $N^2=328329$, $x_1=328$ larni topamiz.

2) $\left.\begin{array}{l} N+1 \equiv 0 \ (mod\ 143) \\ N-1 \equiv 0 \ (mod\ 7) \end{array}\right\}.$

Bu yerdan $N=428$, $N^2=183184$, $x_2=183$.

3) $\left.\begin{array}{l} N+1 \equiv 0 \ (mod\ 11) \\ N-1 \equiv 0 \ (mod\ 91) \end{array}\right\}.$

Bu yerdan $N=274$, $N^2=075076$, ammo $x=075$ ikki xonali son bo'lganligi uchun yechim emas.

4) $\left.\begin{array}{l} N+1 \equiv 0 \ (mod\ 91) \\ N-1 \equiv 0 \ (mod\ 11) \end{array}\right\}$

Sistemadan $N=727$, $N^2=528529$, $x_3=528$ larni hosil qilamiz.

5) $\left.\begin{array}{l} N+1 \equiv 0 \ (mod\ 13) \\ N-1 \equiv 0 \ (mod\ 77) \end{array}\right\}$

$N=155$, $N^2=024025$, ammo $x=025$ ikki xonali son bo'lganligi uchun yechim emas.

6) $\left.\begin{array}{l} N+1 \equiv 0 \ (mod\ 77) \\ N-1 \equiv 0 \ (mod\ 13) \end{array}\right\}$

Bu yerdan $N=846$, $N^2=715716$, $x_4=715$.

606. Shartdan quyidagi sistemani hosil qilamiz: $x \equiv 3$ (mod 7), $x^2 \equiv 44$ (mod 7^2), $x^3 \equiv 111$ (mod 7^3). Birinchi taqqoslamadan $x=7t+3$ ni topamiz. x ning bu qiymatini ikkinchi taqqoslamaga qo'yib, uni t ga nisbatan yechamiz: $(7t+3)^2=44$ (mod 7^2), soddalashtirishlardan so'ng, $42t \equiv 35$ (mod 7^2). Bu taqqoslamani 7 ga qisqartirib, $6t \equiv 5$(mod 7) ni hosil qilamiz, bu yerdan $t \equiv 2$ (mod 7), ya'ni $t=7t_1+2$ bo'ladi. t ning topilgan qiymatini $x=7t+3$ tenglikka qo'yib, $x=7(7t_1+2)+3=49t_1+17$ ni hosil qilamiz. x ninng oxirgi topilgan qiymatini uchinchi taqqoslamaga qo'yib $(49\ t_1+17)^3 \equiv 111$($mod$ 7^3) ni hosil qilamiz. Soddalashtirishlardan so'ng $t_1 \equiv 0$ (mod 7) ni topamiz, bu yerdan $t_1=7t_2+0$. t_1 bu qiymatini $x=49t_1+17$ tenglikka qo'yib, nihoyat $x \equiv$(mod 7^3) ni topamiz. **607.** a) $x \equiv 24$ (mod 28); b) $x \equiv 54$ (mod 95); c) $x \equiv 39$ (mod 77); d) $x \equiv -9$ (mod 45); e) yechim yo'q; f)$x \equiv \pm 13$; ± 47 (mod 85). **608.** (-6,-61), (-1,-1), (1,1), (6,41). **609.** a) $x \equiv y \equiv 3$ (mod 7); b) yechim yo'q; s) yechim yo'q; d) $x_1 \equiv 0$(mod 12), $y_1 \equiv 7$(mod 12) $x_2 \equiv 4$ (mod 12), $y_2 \equiv 7$ (mod 12); $x_3 \equiv 8$ (mod 12), $y_3 \equiv 7$ (mod 12). **610.** a) $x=k+5n$, $y=2k-2+10n$, $z=1-k-5n$, bu yerda $k=0$; 1; 2; 3; 4 va $n \in \mathbb{Z}$; b) Berilgan shartdan $x-u \equiv 1$ (mod 3), $x+y \equiv 1$(mod 2) sistemaga kelib chiqadi. Birinchi taqqoslamadan $y \equiv x - 1+3i$ (mod 6), bu yerda $i=0$; 1 kelib chiqadi. Bu qiymatni ikkinchi taqqoslamag qo'yib, $2x \equiv 2-3i$ (mod 2) ni hosil qilamiz, bu yerdan $3i \equiv 0$ (mod 2) va $i=0$ kelib chiqadi. Demak, $x \equiv k$(mod 6), $y \equiv k-1$ (mod 6), $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5, yoki $x=k+6n$, $y=k-1+6m$, bu yerda $m, n \in \mathbb{Z}$. Bu qiymatlarni berilgan sistemaning tenglamalariga qo'yib, $z=2n-2m=k-1+3n+3m$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $n=1-k-5m$. Shunday qilib, berilgan tenglamalar sistemasining yechimlari $z=6-5k-30m$, $y=k-1+6m$, $x=2-2k-12m$ lardan iborat, bu yerda $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5 va $m \in \mathbb{Z}$. **611.** *Ko'rsatma*. Masalani quyidagi taqqoslamalar sistemasini bilan yechish mumkin:

$$\begin{cases} 3x - u + 1 \equiv 0\ (mod\ 7) \\ 2x + 3y - 1 \equiv 0\ (mod\ 7), \end{cases} \quad \text{bu yerdan} \quad \begin{cases} x \equiv 3\ (mod\ 7) \\ u \equiv 5\ (mod\ 7). \end{cases}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М., 1977, 495 стр.
2. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Тошкент, 1972.
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984, 415 ст.
4. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. Тошкент, 1966.
5. Боревич Э.И. Определители и матрицы. – М., Наука, 1975, 253 ст.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Наука, 1964, 388 с.
7. Ефимов М.В., Розендрон Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1984, 336ст.
8. Виноградов И.М. Сонлар назарияси асослари. – Тошкент, 1962.
9. Бухштаб А.И. Теория чисел. – М., Просвещение, 1966.
10. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., Наука, 1977.
11. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, 1977.
12. Сборник задач по алгебре под редакцией. А.И. Кострикина, М., Наука, 1985.
13. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник задач и упражнений по теории чисел. М., Наука, 1962.
14. Кудреватов И.В. Сборник задач по теории чисел. – М., Наука, 1967, 191ст.
15. Сонли функциялар буйича методик кўрсатмалар. – Самарқанд, СамДУ нашри, 1986.
16. Бир номаълумли таққосламалар бўйича методик кўрсатмалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1986.
17. Чизиқли операторлар темасини ўрганишга доир методик кўрсатмалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1990.
18. Юкори тартибли детерминантларни ҳисоблашга доир методик кўрсатма. Самарқанд, СамДУ нашри, 1988.
19. Оператор матрицасининг Жордан шаклига доир методик кўрсатмалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1993.
20. Хожиев Ж., Файнлеб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
21. Исроилов М.И., Солеев А.С. Сонлар назарияси. – Тошкент, «Фан», 2003.
22. Нарзуллаев У.Х., Солеев А.С. Алгебра и теория чисел. I-II часть, Самарканд, 2002.
23. Zaynalov B.R., Ostonov Q.,Mo’minov Z. Matematika 1. Binar algebraic sistemalar va ularning tadbiqlari. Uslubiy qo’llanma.- Samarqand: SamDU nashri, 2009 y., 159 bet.

Mundarija