T.A.ALIQULOV, M.Q.MOVLONOV,
Z.E.CHORSHANBIYEV

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYADAN AMALIY MASHG'ULOTLAR

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

T.A.ALIQULOV, M.Q.MOVLONOV, Z.E.CHORSHANBIYEV

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYADAN AMALIY MASHG'ULOTLAR

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida foydalanishga tavsiya qilingan*

QARSHI
«INTELLEKT» NASHRIYOTI
2021

UDK 512.86: 513.012
BBK: 76.441
T.A.Aliqulov, M.Q.Movlonov, Z.Chorshanbiyev
Chiziqli algebra va analitik geometriyadan amaliy mashg‘ulotlar.
O‘quv qo‘llanma. «Intellekt» nashriyoti. – Qarshi. 2021 yil, – 170 bet.

**Taqrizchilar:**
**R.D. Shodiyev** – QarDU professori, p.f.d.
**N. Djurayev** – QarMII dotsenti, f-m.f.n.

Ushbu o‘quv qo‘llanma oliy texnika o‘quv yurtlarida o‘qitiladigan “oliy matematika”ning chiziqli algebra va analitik geometriya bo‘limlarini o‘qitishga bag‘ishlangan. Mazkur o‘quv qo‘llanma “5312000 -Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish”, “5310900-Metrologiya, standartlashtirish va mahsulot sifati menejmenti” yo‘nalishlari talabalari uchun “Oliy matematika” fanidan tasdiqlangan Davlat ta’lim standartlariga muvofiq ishlab chiqilgan fan dasturi bo‘yicha tayyorlangan, undan boshqa barcha oliy texnika o‘quv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mimkin. Bu ularga kelgusidagi o‘qitiladigan mutaxassislik fanlarini o‘rganishda ham foydali bo‘ladi.

UDK 512.86: 513.012
BBK: 76.441

ISNB 978 – 9943 – 7745 –2 –0

## KIRISH

Tabiat va jamiyat hodisalarini o‘rganish, fizika va texnika, ximiya va biologiya, iqtisodiyot va boshqa fanlarning masalalarini yechish ikki bosqichdan iborat bo‘ladi. Birinchi bosqich masalani matematik modelini tuzish ya’ni evolyutsion jarayonni faqat miqdor jihatdan mos tasvirlovchi tenglamani tuzish bilan yakunlanadi. Ikkinchi bosqich tenglamani yechishdan iborat. Masala keltirilgan tenglama turlichabo‘lib, uni yechish tenglamani yechishning umumiy nazariyasi ishlab chiqilgan yoki ishlab chiqilmaganligiga bog‘liq bo‘ladi. Agar masala keltirilgan tenglamani yechilishi nazariyasi yaratilgan bo‘lsa, masala tenglamaga keltirilishi bilan yechilgan sanaladi.

Oliy o‘quv yurtlarida o‘qitiladigan matematika predmeti yechilish nazariyasi yaratilgan tenglamalarni o‘rganadi. Shuning uchun ham matematikani doimo rivojlanayotgan matematika fani va uning mustahkam asosi bo‘lgan – matematika predmetini uzviy bog‘liqligi sifatida qaraladi.

Ushbu «Chiziqli algebra va analitik geometriyadan amaliy mashg‘ulotlar» o‘quv qo‘llanmasi oliy texnika o‘quv yurtlarining “5312000 – Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish”, “5310900 - Metrologiya, standartlashtirish va mahsulot sifati menejmenti” yo‘nalishlari fan dasturi asosida yozilgan bo‘lib, undan boshqa barcha oliy texnikao‘quv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mumkin. Mazkur qo‘llanmanafaqat talabalar balki yosho‘qituvchilar va mustaqil izlanuvchilar uchun hamfoydadan holi bo‘lmaydi.

Unda har bir mavzuga doir qisqacha nazariy ma’lumotlar unga doir misollar yechib ko‘rsatilgan hamda mustaqil bajarishlari uchun misollar keltirilgan. Har bir mavzuning so‘ngida mustahkamlash uchun mavzuni o‘rgatuvchi noodatiy testlar berilgan. Ba’zi bir misollarni Maple matematik paketidan foydalangan holda yechib ko‘rsatilgan, grafik tasvirlangan.

O‘quv qo‘llanma oliy ta’limda o‘qitishning kredit modul tizimida tashkil etilishida, xususan oliy matematikaga tegishli bo‘lgan o‘quv materiallarini masofaviy o‘qitish platformalariga joylashtirish, talabalar tomonidan mavzularni mustahkamlashga yordam beruvchi o‘rgatuvchi testlardanfoydalanish, ularni fanga bo‘lgan qiziqishini yanada orttiradi, mavzularni osonroq o‘zlashtirishga yordam beradi.

maqsadga muvofiq (optimal) yechimini topishga yordam beruvchi bir tarmog'idir.

Optimal yechimni topishda matematik programmalalashtirish metodlarini qo'llash uchun iqtisodiy muammoni modellashtirish ob'ektlari va ular orasidagi o'zaro bog'lanishlar xarakteristikalarini funksiya, tenglama, tengsizlik, raqam va shu kabilar ko'rinishda yozish, ya'ni masalaning matematik modelini tuzish lozim.

Masalaning matematik modeli quyidagilarni o'z ichiga oladi.

1. $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ - masalaning maqsadini aniqlovchi noma'lum miqdorlar to'plami. Ular masalaning **rejasi** deyiladi.

2. **Maqsad funksiyasi-** tanlangan optimallik kriteriysi asosida qo'yilgan maqsadni matematik ko'rinishda ifodalanishi. Maqsad funksiyasi foyda, ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, ishlab chiqarish xarajati va shu kabilarni ifodalashi mumkin. Maqsad funksiyasi odatda $Z = Z(X)$ yoki $F = F(X)$ kabi belgilanadi.

3. Noma'lum miqdorlarga qo'yiladigan shartlar(yoki **cheklanishlar sistemasi**). Bu shartlar ehtiyojning muhim zaruriyatini qanoatlantiruvchi zahiralar(resurs)ning chegaralanganligidan kelib chiqadi. Cheklanishlar matematik tenglama va tengsizlik ko'rinishida ifodalanadi. Ularning majmui mumkin bo'lgan yechimlarni tashkil etadi

Matematik programmalashtirish chiziqli programmalashtirish, chiziqli bo'lmagan programmalashtirish va dinamik programmalashtirish deb ataluvchi qismlarni o'z ichiga oladi. Matematik programmalashtirishning ko'p o'rganilgan bo'limi chiziqli programmalashtirishdir. Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish uchun bir qator samarali metodlar, algoritmlar va dasturlar ishlab chiqilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma chiziqli programmalashtirish bo'yicha tayyorlangan bo'lib, oliy ta'lim muassasalarining 230000-Iqtisod ta'lim sohasi barcha ta'lim yo'nalishlari bakalavriyat talabalariga mo'ljallangan. Undan shuningdek, real jarayonlarni tadqiq qilishda matematik modellashtirishni qo'llaydigan muhandislar ham manba sifatida foydalanishlari mumkin.

Chiziqli cheklanishlar bilan berilgan ekstremal masalalar sinfini ajratishga o'tgan asrning 30-yillarini keltirish mumkin. Chiziqli programmalashtirish masalalari bo'yicha dastlabki tadqiqot olib borganlardan biri buyuk matematik va fizik Jon fon Neymandir. U matritsali o'yinlar haqidagi asosiy teoremani isbot qildi va uning nomi bilan ataluvchi iqtisodiy modelni tadqiq qildi. Ikkinchisi akademik, Nobel mukofoti laureyati, rus olimi L. V. Kantorovich. Uning bir qator chiziqli programmalashtirishga bag'ishlangan mukammal masalalari va taklif etgan simpleks-metoddan uncha farq qilmaydigan metodlaridir. L.V.Kantorovichning asosiy ishlari ikkinchi jahon urishi sabab, 1959 -yilga kelib kitob holida chop etildi.

Dastlabki transport masalasi 1930- yilda rus olimi A.N.Tolst tomonidan taklif etilgan.

M.K.Gavurin L.V.Kantorovich bilan birgalikda chiziqli program-malashtirish masalalarining yechish metodlarini ishlab chiqdilar.

Urish yillarida AQShda chiziqli programmalashtirish masalalariga qiziqish o'yg'ondi. D.Dansig tomonidan A.Charısa, L.Ford va D.Falkersonlarning uzoq ishtiroki bilan simpleks metod ishlab chiqildi. D.Neyman g'oyasi asosida D.Geyil tomonidan ikkilanishlar teoremasi isbotlandi.

Chiziqli programmalashtirishni qo'llash bo'yicha yig'ilgan tajribalar, shuningdek, chiziqli masalalarni yechishda ishlab chiqilgan samarali hisoblash usullari shuni ko'rsatadiki, chiziqli programmalashtirish masalalari va yechimlari xossalarini tadqiq qilish metodlarini bilish muhim ahamiyatga ega. Shu sababli qo'llanmada shu kabi masalalarga ko'proq e'tibor qilingan.

O'quv qo'llanma ikki bobdan iborat. I bob kirish xarakteriga ega bo'lib, chiziqli algebra elementlariga o'rin berilgan. II bob chiziqli programmalashtirish masalalarining qo'yilishi va yechish usullariga bag'ishlangan.

O'quv qo'llanmani tayyorlashda chiziqli programmalashtirish masalalarining matematik asoslarini ochib berishga harakat qilingan.

# I-BOB. CHIZIQLI ALGEBRA

## 1-§. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI

**Reja:**

1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash.

1.2. Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar.

1.3. Determinantning asosiy xossalari.

1.4. n-tartibli determinant haqida tushuncha.

**Adabiyotlar:**2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** determinant, satr, ustun, element, diagonal, minor, algebraik to‘ldiruvchi.

### 1.1.Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash

**Ta’rif.**Berilgan 4 ta $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$son orqali aniqlangan $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ songa ikkinchi tartibli determinant deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}\,(1)$$

$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. Bu yerda$a_{11}$, $a_{12}$larga determinantning birinchi, $a_{21}$, $a_{22}$ larga esa ikkinchi satr, $a_{11}$, $a_{21}$ larga determinantning birinchi$a_{12}$, $a_{22}$ larga esa ikkinchi ustun elementlari, $a_{11}$, $a_{22}$ larga determinantning bosh, $a_{21}$, $a_{12}$larga determinantning yordam-chi diagonal elementlari deyiladi.

(1) dan ko‘rinadiki ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun, bosh diagonal elementlar ko‘paytmasidan yordamchi dioganal elemenlari ko‘paytmasini ayirish kifoya ekan.

**Misol.** Quyidagi determinantni (1) formula yordamida hsoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot 3-9\cdot 9=21-81=-60$$

**Ta'rif.** Berilgan 9 ta $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ son orqali quyidagicha aniqlangan va belgilangan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

songa **uchinchi tartibli determinant** deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr va uchta ustun elementlaridan iborat bo'lib, $a_{ij}$(i=1,2,3; j=1,2,3) 9 ta element bo'ladi. Endi 3-tartibli determinantni hisoblash sxemasini keltirib o'tamiz.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2)$$

**Misol.** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

**Yechish.** (2) formulaga ko'ra

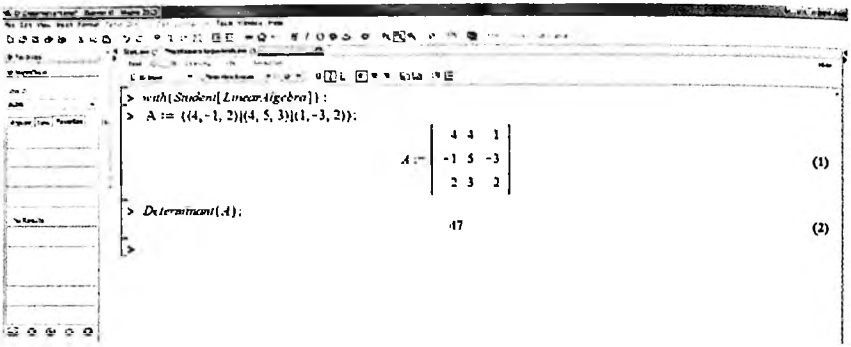
$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot5\cdot2 + 2\cdot4\cdot(-3) + (-1)\cdot3\cdot1 - 2\cdot5\cdot1 - (-1)\cdot4\cdot2 - 4\cdot3\cdot(-3) - 2\cdot5\cdot1 = 47$$

Shu 3-tartibli determinantni maple dasturida hisoblab ko'ramiz.

```
>with(Student[LinearAlgebra]) :
> A := ⟨⟨4,-1, 2⟩|⟨4, 5, 3⟩|⟨1,-3, 2⟩⟩;
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>Determinant(A);
```




## 1.2. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar

**Ta'rif.** biror n-tartibli determinantning $a_{ij}$ elementinig minori deb, shu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan *n-1* tartibli determinantga aytiladi va odatda $M_{ij}$ orqali belgilanadi.

**Masalan.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantning $a_{23}$ elementining minori 2-satr va 3-ustun elementlarini o'chirishdan hosil bo'lgan $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli determinant bo'ladi.

**2-ta'rif.** n-tartibli determinantning $a_{ij}$ elementining algebraik to'ldiruvchisi deb shu element minorini $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olinganiga aytiladi va $A_{ij}$ orqali belgilanadi.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

**Misol.**

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantning $a_{43}$ elementining minorini va $a_{21}$ elementining algebraik to'ldiruvchisini hisoblang.

**Yechish.** $a_{43}$ elementining minorini topish uchun shu element turgan satri va ustunini o'chirib quyidagi determinantni hisoblaymiz.

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 - 15 + 8 = -24.$$

$a_{21}$ elementni algebraik to'ldiruvchisini hisoblashdan oldin uning $M_{21}$ minorini hisoblab topamiz.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -23; \; A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -(-23) = 23.$$

Ushbu 4-tartibli determinantning $a_{43}$ elementining minorini va $a_{21}$ elementining algebraik to'ldiruvchisini maple dasturida hisoblab ko'ramiz.

>$with(Student[LinearAlgebra])$ :

>A := ⟨⟨1,-2, 3, 1⟩|⟨4, 3, 1, 2⟩|⟨5, 0, 6, 1⟩|⟨3, 1, 2, 2⟩⟩;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

>$Minor(A, 3, 4)$;

$$-24$$

>$-Minor(A, 1, 2)$;

$$23$$

## 1.3. Determinantning asosiy xossalari

*1-xossa.* Agar determinantning satrlarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi.

*2-xossa.* Determinantning ixtiyoriy ikkitasatrini (yoki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinant qiymati o'z ishorasini o'zgartiradi, xolos.

*3-xossa.* Determinantning biror satrining (yoki ustunining) barcha elementlari nol bo'lsa, determinantning qiymati nol bo'ladi.

*4-xossa.* Ixtiyoriy ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinant qiymati nol bo'ladi.

*5-xossa.* Istalgan satr (yoki ustun) ning umumiy elementini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

*6-xossa.* Determinantning biror satr (yoki ustun) elemenlariga boshqa satr (yoki ustunining) elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shganda determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Bu xossalarning to'g'riligini bevosita determinantlarni hisoblab ishonch hosil qilish mumkin.

*7-xossa.* Har qanday determinant, biror satri (yoki ustuni) elementlari bilan shu elementlarning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad \text{yoki} \quad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Determinantning 7-xossasidan foydalanib istalgan tartibli determinantni hisoblash mumkin. Bu xossa orqali determinantlarni biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash usuli deb, ham yuritiladi.

**Misol.** $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni biror satr yoki ustun elementlari yoyilmasi bo'yicha hisoblang.

**Yechish.** Determinantni hisoblash uchun yuqorida keltirilgan 7-xossadan foydalanamiz. Buning uchun 1-satr elementlarini o'zining alagebraik to'diruvchilariga ko'paytirib qo'shamiz, ya'ni

$$\begin{vmatrix}-5 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 4 & -1 & 5\\ -4 & 1 & -8 & -1\\ 3 & 2 & 6 & 2\end{vmatrix}=(-5)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & -1 & 5\\ 1 & -8 & -1\\ 2 & 6 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ -4 & -8 & -1\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\ -4 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1 & 4 & -1\\ -4 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}=-264$$

1-satr elementi bo'yicha yoyib determinantni hisoblashni maple dasturida bajarib ko'ramiz.

>$with(Student[LinearAlgebra])$ :

>A := ⟨⟨−5, 1,−4, 1⟩|⟨1, 4,−1, 5⟩|⟨−4, 1,−8,−1⟩|⟨3, 2, 6, 2⟩⟩;

$$A := \begin{bmatrix}-5 & 1 & -4 & 3\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ -4 & -1 & -8 & 6\\ 1 & 5 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

>$Minor(A, 1, 1);$

$$74$$

>$Minor(A, 1, 2);$

$$28$$

>$Minor(A, 1, 3);$

$$-14$$

>$Minor(A, 1, 4);$

$$-26$$

> $-5\cdot Minor(A, 1, 1)-1\cdot Minor(A, 1, 2) - 4\cdot Minor(A, 1, 3)-3$
$\cdot Minor(A, 1, 4);$

$$-264$$

Misolni yechilishiga e'tibor qilsak, 1 ta to'rtinchi tartibli determinant 7-xossadan foydalanib 4 ta uchinchi tartibli determinantga keltirib hisoblandi. Bu tabiiyki ko‘p hisoblashlarni talab etadi. Bunday misollarni yechishda, determinantni boshqa xossalaridan (odatda 6-xossadan) foydalanib, biron ustun yoki satrda bitta element qoldirib, qolganlarini 0 gatenglab, shu ustun yoki satr bo‘yicha yoyib hisoblash osonroq bo‘ladi. Buni yuqoridagi misolda ko‘rsatamiz.

Berilgan misolning 2-ustun elementlarini nollarga aylantirishga harakat qilamiz. Buning uchun 4-ustunni -1 ga ko‘paytirib 2-ustunga qo‘shamiz. Natijada

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & -8 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo‘ladi. Endi 2-satrni 2 ga ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz.

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & -8 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -10 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Oxirgi hosil bo‘lgan determinantni hisoblash uchun 7-xossadan foydalanamiz. Buning uchun determinantni ikkinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib uning qiymatini hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -10 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{12} + (-1)\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} + 0\cdot A_{42} = (-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -5 & -4 & 1 \\ -2 & -10 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot\left((-5)(-10)\cdot 2 + 1\cdot(-2)\cdot 6 + (-4)\cdot 9\cdot 3 - 1\cdot(-10)\cdot 3 - (-4)(-2)\cdot 2 - (-5)\cdot 9\cdot 6\right) = -264$$

*8-xossa.* Determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlarining boshqa satri (yoki ustuni) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari ko‘paytmalarining yig‘indisi nol bo‘ladi.

*Masalan.* Ikkinchi ustun elementlarini birinchi ustun elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirsak $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+ a_{32}A_{31}=0$ bo‘ladi.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda minor va algebraik to‘ldiruvchi tushunchalaridan foydalanib hisoblaymiz.

**Misol.** $\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n-2 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & 3 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & 2 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & 1 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

**Yechish.** Bu determinantni hisoblash uchun yuqorida keltirilgan 6-xossasini qo‘llaymiz. Buning uchun determinantni 1-satrini o‘zgartirmasdan qoldirib qolgan satrlari elementlarini o‘zgartiramiz. 2- satrini o‘zgartirish uchun 1-satrni -1 ga ko‘paytirib 2-satrga qo‘shamiz.

$$\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ -n+n & -n+n-1 & -n+n & \dots & -n+n & -n+n & -n+n \\ n & n & n-2 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & 3 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & 2 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n & n-2 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & 3 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & 2 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & 1 \end{vmatrix}$$

Oxirgi hosil bo‘lgan determinantni endi 3-satri elementlarini o‘zgartiramiz. Buning uchun 1-satri elementlarini -1 ga ko‘paytirib 3-satr elementlariga qo‘shamiz.

$$\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -n+n & -n+n & -n+n-2 & \dots & -n+n & -n+n & -n+n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & 3 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & 2 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & 3 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & 2 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & 1 \end{vmatrix}$$

Xuddi shunday tartibda qolgan har bir satrlari elementlarini ham o‘zgartirish uchun 1-satrni -1 ga ko‘paytirib shu satrlar elementlariga qo‘shib quyidagi determinantni hosil qilamiz. Bu hosil bo‘lgan determinant qiymati bosh dioganal elementlari ko‘paytmasiga tengdir.

$$\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(n-1) \end{vmatrix} = n\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(3-n)\cdot(2-n)\cdot(1-n) =$$

$$= n\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(3-n)\cdot(2-n)\cdot(1-n) = (-1)^{n-1}\left(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\right) = (-1)^{n-1}\cdot n!$$

### 1.4. n-tartibli determinant haqida tushuncha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko‘rinishdagi simvol bilan belgilangan songa **n-tartibli determinant** deyiladi va uning elementlari n ta satr va n ta ustunga joylashtirilgan bo‘ladi.

### Mustaqil bajarish uchun mashqlar

Quyidagi determinantlarni hisoblang (1-6).

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ a-2 & 1 \end{vmatrix}$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.(7-13)

7. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 13. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$

Tenglamani yeching (15-20).

15. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$ 16. $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$ 17. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix}=-4$

18. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix}=-34$ 19. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 20. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

Quyidagi determinantlarni eng qulay satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang (21-28).

21. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 25. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 1 & d & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$

Determinantni istalgan yo‘l bilan hisoblang.

29*. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$ 30* $\left.\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}\right\} n$

Bu turkumdagi testlarni chap ustundagi savollarga mos to‘g‘ri javoblar o‘ng ustundan tanlanadi. Natijada javoblar kaliti hosil bo‘ladi. Bu odatda mustaqil shug‘ullanuvchi talabalar uchun foydali bo‘ladi.

## Mavzuni mustahkamlash uchuno'rgatuvchi testlar

| Savollar | Javoblar |
|---|---|
| 1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantda $M_{23}$ minorini toping. | A. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$ |
| 2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantda $A_{23}$ algebraik to'ldiruvchisini toping. | B. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11}+a_{31} & ka_{12}+a_{32} & ka_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$ |
| 3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantga teng kuchli determinantni toping. | C. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ |
| 4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantni 2-ustun bo'yicha yoyilmasini ko'rsating. | D. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ |
| 5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ determinantga teng kuchli determinantni toping. | E. $a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23}$ |
| | F. $-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 2-§. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

**Reja:**

1. Matritsa tushinchasi. Matritsaning asosiy turlari.
2. Matritsalar ustida amallar.
3. Teskari matritsa va uni tuzish.
4. Matritsaning rangi

**Adabiyotlar:**2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** matritsa, xos marritsa, xosmas matritsa, birlik matritsa, teskari matritsa.

### 2.1. Matritsa tushunchasi. Matritsaning asosiy turlari

Ma'lum $a_{ij}$ $(i=1,...,m;\ j=1,...,n)$ elementlardan tuzilgan, m ta satrga,n ta ustunga joylashtirilgan quyidagi jadvalga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$(m\times n)$o'lchovli to'g'ri burchakli matritsa deb ataladi. Bunda$a_{11}$,$a_{12}$, ... sonlar matritsaning elementlari deyiladi.

Agar (1) matritsada satrlari soni ustunlari soniga teng ya'ni $m=n$ bo'lsa, **kvadrat matrisa** deyiladi. Faqat bitta satrdan iborat matritsa – satr matritsa deb, faqat bitta ustundan iborat matritsa – ustun matritsa deyiladi.

Kvadrat matritsalar uchun uning elementlaridan tuzilgan determinant quyidagicha bo'ladi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hamma elementlari nol bo'lgan matrisaga nol matritsa deyiladi.

Bosh diagonal elementlari birlardan qolgan boshqa barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan kvadrat matrisaga birlik matritsa deyiladi va $E$ harfi orqali belgilanadi.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ |E|=1,\ \text{bo'lishi ravshan.}$$

## 2.2. Matritsa ustida amallar

*Matritsani songa ko'paytirish.* Biror $A$ matrisani $k$ songa ko'paytirish deb, $A$ matrisaning hamma elementlarini shu $k$ songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matrisaga aytiladi va $kA$ ko'rinishda yoziladi.

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{14} \end{pmatrix}$$

**Misol.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa 3 ga ko'paytirilsin.

**Yechish.** $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$

*Matritsalarni qo'shish.* Ikkita bir xil o'lchamli $A$ va $B$ matritsalarning yig'indisi deb ularning mos elementlarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi, ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

***Matritsalarni ko'paytirish.*** Matritsalarni ko'paytirish uchun birinchi ko'paytuvchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi ko'paytuvchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lshi kerak.

Agar $m\times k$ o'lchovli $A$ matritsani, $k\times n$ o'lchovli $B$ matritsaga ko'paytmasi shunday $m\times n$ o'lchovli $C$ matritsaga teng bo'ladiki, uning elementlari

$$c_{ij}=\sum_{t=1}^{k} a_{ik}b_{kj},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$$

formula bilan topiladi.

Masalan, uchinchi tartibli $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ matritsalarning ko'paytmasi elementlari quyidagicha aniqlanuvchi $C=AB$ matritsaga aytiladi.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

**Misol.** Quyidagi matritsalarni ko'paytiring.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Yechish.** Birinchi biz $A\cdot B$ ko'paytmani topamiz.

A matritsani ustunlari soni 3 ga B matritsani satrlari soni ham 3 ga teng. $A\cdot B$ ko'paytma mavjud.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$(2\times3)$ o'lchovli A matritsa matritsani $(3\times2)$ o'lchovli B matritsaga ko'paytirish natijasida $(2\times2)$ o'lchovli matritsa hosil bo'ldi.

Endi $B\cdot A$ ko‘paytmani topamiz.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot1\\ 2\cdot2+1\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1\\ 2\cdot2+2\cdot3 & 2\cdot1+2\cdot1 & 2\cdot1+2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3 & 2\\ 7 & 3 & 3\\ 10 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

$(3\times2)$o‘lchovli B matritsani $(2\times3)$o‘lchovli A matritsaga ko‘paytirish natijasida $(3\times3)$o‘lchovli matritsa hosil bo‘ldi.

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, umumiy holda matritsalarni ko‘paytirish o‘rin almashtirish xossasiga ega emas, ya’ni umumiy holda $A\cdot B\neq B\cdot A$. Agar $A\cdot B=B\cdot A$ bo‘lib qolsa, bunday $A$ va $B$ matritsalar kommutativ matritsalar deyiladi.

Yuqorida berilgan matritsalarni ko‘paytirishni ham maple dasturida bajarilishini ko‘rib chiqamiz. Maple ishchi oynasida berilgan matritsalarni kiritamiz va *evalm* (*evalm(A&*B)* A matritsani B matritsaga ko‘paytirish) buyrig‘i orqali matritsalarni ko‘paytiramiz.

$> with(linalg):$

$>A := matrix([[2, 1, 0], [3, 1, 1], ]);$

$$A := \begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$> B := matrix([[1, 2], [2, 1], [2, 2]]);$

$$B := \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}$$

$>evalm(A\&*B);$

$$\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{vmatrix}$$

$>evalm(B\&*A);$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Bunda ham $A \cdot B \neq B \cdot A$ bajarilishini ko'rishimiz mumkin.

## 2.3. Teskari matritsa va uni tuzish

$A$ kvadrat matritsa uchun $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ tenglik bajarilsa, $A^{-1}$ matritsa $A$ matritsaga **teskari matritsa** deyiladi. $\det A \neq 0$ bo'lgan har qanday matritsaga teskari matritsa mavjud bo'ladi. A matritsani teskari matritsasi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

formula yordamida topiladi.

**Misol.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

**Yechish.** Matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4(4-2) + 4 + 5 = 17$$

Demak, $A^{-1}$ matritsa mavjud. $\det A$ning algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{31} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Teskari matritsani (1) formuladan topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -9 & 16 & 4 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{9}{17} & \frac{16}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{7}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

Endi $A\cdot A^{-1}=E$ bo'lishligini ko'rsatamiz. Buning uchun teskari matritsadan $\frac{1}{17}$ ni matritsadan tashqariga chiqarib olib, keyin matritsalarni ko'paytiramiz.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{9}{17} & \frac{16}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{7}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -9 & 16 & 4 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 4\cdot2+(-1)\cdot(-9)+0\cdot(-7) & -1\cdot2+1\cdot(-9)+(-2)\cdot(-7) & 0\cdot2+(-1)\cdot(-9)+4\cdot(-7) \\ 4\cdot4+(-1)\cdot16+0\cdot3 & -1\cdot4+1\cdot16+(-2)\cdot3 & 0\cdot4+(-1)\cdot16+4\cdot3 \\ 4\cdot1+(-1)\cdot4+0\cdot5 & -1\cdot1+1\cdot4+(-2)\cdot5 & 0\cdot1+(-1)\cdot4+4\cdot5 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ $A\cdot A^{-1}=E$ tenglik bajarildi. Bundan berilgan matritsaga teskari matritsani to'g'ri topganligimiz ko'rinadi.

Berilgan matritsani ham teskarisini topishni ham Maple dasturida bajarib ko'ramiz.

>*restart*; *with*(*Student*[*LinearAlgebra*]) :

>$A := \langle\langle 4, 1, 5\rangle|\langle -1, 1, -2\rangle|\langle 0, -1, 4\rangle\rangle;$

$$A:=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

>A^(-1);

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{9}{17} & \frac{16}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{7}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

## 2.4. Matritsaning rangi

Ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo‘lsin. Bu matritsada qandaydir $k$ ta satr va $k$ ta ustunniajratamiz $(k \le m, k \le n)$.$A$ matritsaning bu satrlar va ustunlaming kesishgan o‘rinlarida turgan elementlaridan tuzilgan $k$ -tartibli determinant $A$ **matritsaning** $k$ **- tartibli minori**deyiladi. Matritsaning elementlarini uning birinchi tartibli minori deb hisoblash mumkin. Masalan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

matritsa 4 ta uchinchi tartibli, 18 ta ikkinchi tartibli va 12 ta birinchi tartibli minorlarga ega.

$A$ matritsaning noldan farqli barcha minorlarini qaraymiz. $A$**– matritsaning rangi**deb uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga aytiladi. $A$ matritsaning rangi $r(A)$ yoki $rang(A)$kabi belgilanadi.

**Misol.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matritsani rangini minorlar ajratish usuli bilan hisoblang.

## 1.3 Teskari matritsa. Matritsa rangi

**4-ta'rif.** Agar $A$ va $B$ kvadrat matritsa uchun $AB=BA=E$ bo'lsa, $B$ matritsa $A$ ga **teskari matritsa** deyiladi va $A^{-1}$ bilan belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra, $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

**5-ta'rif.** Agar $A$ matritsa uchun $|A|\neq 0$ bo'lsa, bunday matritsa **xosmas**, aks holda, ya'ni $|A|=0$ bo'lsa, **xos** matritsa deyiladi.

**2-teorema.** $A$ kvadrat matritsaga teskari $A^{-1}$ matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun uning xosmas bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Zarurligi.** Agar $A$ matritsa uchun unga teskari $A^{-1}$ matritsa mavjud bo'lsa, u holda $A\cdot A^{-1}=E$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan $8^0$ xossani e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1, \tag{1.3}$$

demak, $|A|\neq 0$ bo'lar ekan.

**Yetarliligi.** $A$-matritsa xosmas, ya'ni $|A|\neq 0$ bo'lsin. U holda (1.1) tenglikdan matritsalarni ko'paytirish va matritsani songa ko'paytirish qoidasiga ko'ra,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\dots A_{j1}\dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\dots A_{j2}\dots A_{n2} \\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots \\ A_{1k} & A_{2k}\dots A_{jk}\dots A_{nk} \\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots \\ A_{1n} & A_{2n}\quad A_{jn}\dots A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi teskari matritsaning yagona ekanligini, ya'ni agar $B$ matritsa $A$ uchun teskari matritsa bo'lsa, $B=A^{-1}$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$B=B\cdot E=B\cdot(A\cdot A^{-1})=(B\cdot A)\cdot A^{-1}=E\cdot A^{-1}=A^{-1}.$$

Demak, $B=A^{-1}$ ekan.

(1.3) tenglikdan $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

**4-misol.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

**Yechish.**

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Barcha elementlarning algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

Shuningdek, $A_{31}=0$, $A_{32}=7$, $A_{33}=7$.

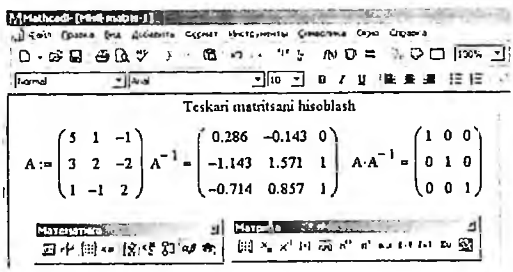
Demak, $$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 11 & 7 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}$ va $A$ matritsalarni ko'paytiramiz:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 11 & 7 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\cdot5 - 1\cdot3 + 0\cdot1 & 2\cdot1 - 1\cdot2 + 0\cdot(-1) & 2\cdot(-1) - 1\cdot(-2) + 0\cdot2 \\ -8\cdot5 + 11\cdot3 + 7\cdot1 & -8\cdot1 + 11\cdot2 + 7\cdot(-1) & -8\cdot(-1) + 11\cdot(-2) + 7\cdot2 \\ -5\cdot5 + 6\cdot3 + 7\cdot1 & -5\cdot1 + 6\cdot2 + 7\cdot(-1) & -5\cdot(-1) + 6\cdot(-2) + 7\cdot2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$




Ko'rinib turibdiki, haqiqatdan $A^{-1} \cdot A = E$.

**Yechish.** Berilgan matritsa rangi $1 \le r(A) \le \min(3;5)$ oraliqda bo'ladi. Biz dastlab matritsaning uchinchi tartibli minorlarini hisoblaymiz. Buning uchun dastlabki 3 ta ustun elementlarini olib minor tuzamiz.

$$M_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Keyin 1,2,4 ustunlar elementlarini olib keyingi uchinchi tartibli minorini tuzamiz.

$$M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Biz qolgan uchinchi tartibli minorlarini ham shu tartibda topamiz.

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_4^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_5^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_6^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_7^{(3)} = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_8^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 7 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_9^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_{10}^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Demak barcha uchinchi tartibli minorlari nolga teng ekan.Endi ikkinchi tartibli minorlarini topamiz.

$M_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -6 \ne 0$. Bundan ko'rinib turibtiki $r(A) = 2$ ga teng ekan.

Matritsaning rangini topishda ko'p sonli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun matritsani rangini hisoblashda uni elementar almashtirishlar deb ataluvchi almashtirishlardan foydalanish maqsadga muvofiq.Matritsani elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi.

*a*) faqat nollardan iborat satr (ustun)larni o'chirish;

*b*) ikkita satr (ikkita ustun)larnio'rinlarini almashtirish;

*c*) bir satr(ustun)ning barcha elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr(ustun)ning mos elementlariga qo'shish;

*d*) satr(ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish.

Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Agar $B$ matritsa $A$ matritsadan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa, $A$ va $B$ ekvivalent matritsalar deyiladi, hamda $A \sim B$ kabi yoziladi.

**Misol.** Yuqorida berilgan $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matritsani elementar almashtirishlar usulida rangini toping.

**Yechish.** Matritsani 1 va 2-ustun o'rinlarini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Hosil bo'lgan matritsani 1-ustuni elementlarini $\left(\frac{1}{2}\right)$ ga ko'paytiramiz

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Endi 1-satri elementlarini (-2) ga ko'paytirib 2-satrga qo'shamiz, yana shu 1-satri elementlarini (-3) ga ko'paytirib 3-satri elementlariga qo'shib 3-satriga yozamiz:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

2-satri elementlarni $\left(\frac{1}{3}\right)$ ga ko'paytiramiz:

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}\sim$$

3-ustun elementlarini (-2) ga ko‘paytirib, 3-ustun elementlariga qo‘shamiz va 3-satrga yozamiz:

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hosil bo‘lgan matritsani 3-satri elementlari nollardan iborat bo‘lgani uchun ularni o‘chiramiz:

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Oxirgi matritsaning rangi 2 ga teng, chunki $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Shuning uchun ham berilgan matritsani rangi ham 2 ga teng.

Berilgan matritsani Maple matematik paketida rangini hisoblaymiz. Matritsani kiritamiz va dasturning *rank* buyrug‘idan foydalanamiz.

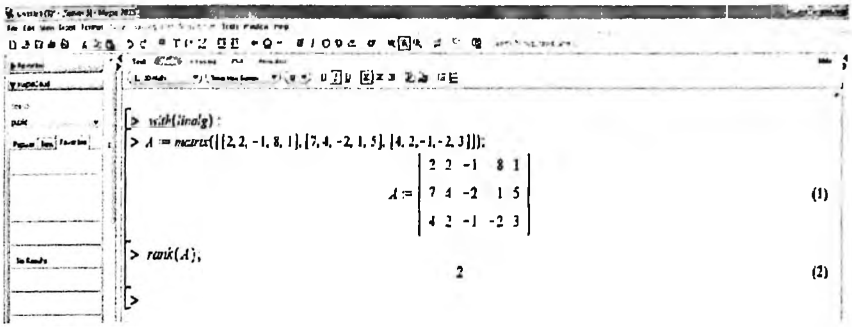
```
> with(linalg) :
> A := matrix([[2, 2, -1, 8, 1], [7, 4, -2, 1, 5], [4, 2,-1,-2,
     3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>rank(A);
```

$$2$$

Berilgan masala yechimi Maple dasturining ishchi oynasida quyidagi ko‘rinishda hosil bo‘ladi.




## Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. Agar $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}$ bo‘lsa,

a) $3A+2B$, b) $-A+3B$, b ) $2A+4D$, c) $\frac{1}{2}A+1{,}5B$ larni hisoblang.

Ushbu matritsalarning ko‘patmasini toping (2-3).

2. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, a) $A\cdot B$, b) $B\cdot A$

3. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 7 & 0\end{pmatrix}$, a) $A\cdot B$, b) $B\cdot A$,

Quyidagilarni hisoblang (4-8).

4. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^2$ 5. $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$ 6. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$

7. $\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}^2$ 8. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$

Ushbu matritsalarga teskari matritsalarni toping. (9-12)

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matritsali tenglamalarni yeching. (13-17)

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ 14. $X * \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

15. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Quyidagi matritsalarni rangini toping (18-20).

18. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

## Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar

| | |
|---|---|
| 1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ matritsagatransponirlangan matritsani ko'rsating. | A. Mavjud emas |
| 2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ko'paytmani toping. | B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 3. $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani ko'rsating. | C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 26 & 9 \\ 50 & 18 \end{pmatrix}$ matritsali tenglamada noma'lum X matritsani toping. | D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$ | E. $\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -5 & -1 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ |
| | F. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 3-§. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI VA UNI YECHISH USULLARI

**Reja:**

1. Fizik va iqtisodiy jarayonlarda chiziqli algebraik tenglamalarsistemasini modellashtirish.
2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushuncha. Kroniker-Kapelli teoremasi.
3. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning matritsa usuli.
4. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning Kramer qoidasi.
5. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning Gauss qoidasi.
6. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.
7. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda dasturlar majmuasidan foydalanish.

**Adabiyotlar:**2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** sistema koeffitsienti, ozod had, sistemaning yechimi, birgalidagi sistema, aniq sistema, aniqmas sistema, birgalikda bo'lmagan sistema.

### 3.1. Tabiiy va amaliy jarayonlarni chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga modellashtirish.

Bizga ma'lumki, noma'lum son qatnashgan tenglik - tenglama deyiladi. Agar tenglamada bir emas, ikkita noma'lum qatnashsa bu tenglama yetarli bo'lmaydi, ikkinchi tenglama tuzib olinadi. Agar noma'lumlar uchta bo'lsa, uchinchi va hakozo... noma'lumlarni bog'lovchi tenglamalarni tuzib, ularni yechish kerak bo'ladi. Natijada tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Quyida chiziqli algebraic tenglamalar sistemasiga keltiruvchi asosiy yo'nalishlarni keltiramiz:

-ko'pgina, o'zaro bog'liq bo'lmagan noma'lumlar qatnashgan fizik va iqtisodiy jarayonlar bevosita chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga modellashtiriladi.

-oliy texnika o‘quv yurtlarida xususan “5312000 -Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish”, “5310900-Metrologiya, standartlashtirish va mahsulot sifati menejmenti” yo‘nalishlaridao‘qitiladigan mutaxassilik fanlari va ulami o‘rganish uchun kerak bo‘ladigan nazariy mexanika, materiallar qarshiligi va gidravlika fanlari chiziqli algebraik tenglamalardan foydalaniladi.

-analitik yechimlari umumiy holda aniqlanmagan nochiziqli va differensial tenglamalarni yechishda turli xil sonli usullardan foydalaniladi. Bu usullar ham ko‘p hollarda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Quyida noma’lumlar o‘rtasidagi bog‘lanishlar chiziqli bo‘lgan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriluvchi, ko‘plab fizik va iqtisodiy jarayonlardan bir nechtasini misol tariqasida keltiramiz:

1. Narxlari turlicha bo‘lgan bo‘lgan uchta buyumlarni bir nehtadan xarid qilgan xaridorlarning har biri to‘lgan pul miqdori uchun tuzilgan tenglamalar, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tashkil etadi.

2. Murakkab elektr zanjirlardan o‘tayotgan elektr tokining miqdorini hisoblashni matematik modeli Kirxgof qonunlariga asoslangan har bir kontur shaxobcha uchun tuzilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi.

3. Ma’lumki, banklarga qo‘yiladigan omonat pullari turlicha foizlarda ortadi. Shuning uchun omonatchi bir qism pulini bir bankga, ikkinchi qismini ikkinchi bankga va h.k... o‘z pullarini turli variantlarda omonatga qo‘yishin rejalashtirsa har variant uchun oladigan foydasi uchun alohida tenglama, natijada chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

4. Nazariy mexanika fanini statistika bo‘limida qattiq jismning muvozanat tenglamalari tekislikda 3 ta, fazoda 6 ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi. Muvozanati o‘rganilayotgan jism murakkab konstruksiyadan iborat bo‘lsa, tenglamalar soni ortib boradi.

5. Materiallar qarshiligi fanida muvozanat tenglamalari qatoriga, balkalarda hosil bo‘ladigan zo‘riqishlarni aniqlash uchun ham qo‘shimcha tenglamalar qo‘yiladi, natijada yanada ko‘proq noma’lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

6. “Neft va gaz” konlarini razvedka qilish fanida, g‘ovak muhitlarda quduqga harakatlanuvchi “Neft va gaz” suyuqliklarini sizib chiqishida bosimni aniqlash masalasida xususiy hosilali ikkinchi tartibli differensial tenglamalar tenglamalarga keltiriladi. Ularni taqribiy yechishda qo‘llaniladigan sonli usullar ham chiziqli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Shuning uchun ham chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullarini yaxshi o‘zlashtirish, hozirgi zamonaviy kompyuter texnologiyalar EHM lar yordamida yechish ko‘mikmalariga ega bo‘lishni talab etadi.

## 3.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushuncha. Kroniker-Kapelli teoremasi

Quyidagi $n$ta noma’lumli$m$ ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu erda $a_{ij}$ –sistemaning koeffitsiyentlari, $x_j$ –noma’lumlar, $b_i$ –haqiqiy sonlarga ozod hadlar deyilad. $n$ - noma’lumlar soni, $m$– tenglamalar soni $\left(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}\right)$. Agar (1) sistemada ozod sonlar $b_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ larni barchasi 0 ga ya’ni teng, $b_i = 0$ bo‘lsa, u holda (1)bir jinsli chiziqli algebraic tenglamalar sistemasi deyiladi. (1) Sistema noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

matritsaga sistemaning **asosiy matritsasi** deyiladi.

(2) matritsaga ozod hadlaridan tuzilgan ustunni qo'shish orqali hosil qilingan

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (3)$$

matritsaga (1) sistemaning **kengaytirilgan matritsasi** deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deb shunday $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlarga aytiladiki, bu sonlarni noma'lumlar o'rniga qo'yilganda, sistemaning har bir tenglamasi o'rinli tenglikka aylanadi. Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'lsa, u birgalikda bo'lgan, aks holda, ya'ni yechimga ega bo'lmasa, **birgalikda bo'lmagan tenglamalar** sistemasi deyiladi.

Quyida (1) Sistema birgalikda bo'lishining zaruriy va yetarli shartini aniqlovchi Kroniker-Kapelli teoremasini keltiramiz.

**Teorema** (*Kroniker-Kapelli*). (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng, ya'ni $r(A)=r(B)$ bo'lishi zarur va yetarli.

Biz quyida chiziqli tenglamalar sistemani yechishni o'rta maktabda ma'lum bo'lgan 1) o'rniga qo'yish; 2) qo'shish; 3) grafik usullaridan boshqa bir necha usullarini ko'rib o'tamiz.

### 3.3. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning matritsa usuli

Agar (1) sistemada noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng $(n=m)$ bo'lsa,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

ko'rinishdagi sistemaga aylanadi.

(4) sistema uchun quyidagi matritsalarni tuzib olamiz.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

U holda (4) chiziqli sistemani matritsaviy ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$A\cdot X=B \tag{5}$$

Faraz qilaylik A matritsa xosmas matritsa bo'lsin. (5) tenglamani har ikkala tomonini chap tomondan A matritsaning teskari $A^{-1}$ matritsasiga ko'paytiramiz.

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

$A^{-1}\cdot A=E,\ E\cdot X=X$ ekanligidan

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{6}$$

(6) ifoda kelib chiqadi. Bu chiziqli tenglamalar sistemasini matritsaviy ko'rinishi (5) ni yechimini topish formulasidir.

**Misol.** $\begin{cases} x_1+2x_2=-6, \\ 3x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$ sistemani matritsa usulida yeching.

**Yechish.** Bu sistemani matritsaviy (5) ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B.$ Bu yerda $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sistemani yechimini (6) formula orqali topamiz. Buning uchun $A$ matritsaning $A^{-1}$ teskari matritsasini topamiz. Dastlab, $A$ ning determinanti $\det A$ ni hisoblaymiz.

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot2+2\cdot1\cdot1+0\cdot3\cdot3-0\cdot2\cdot1-2\cdot3\cdot2-1\cdot1\cdot3=-9\neq0.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki $A$ matritsa xosmas matritsa ekan. Demak, teskari matritsa $A^{-1}$ mavjud va uni topamiz. $A$ matritsaning barcha elementlarini algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=-5,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&0\\3&2\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=2,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4.$$

Teskari matritsani topish formulasiga ko‘ra

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}1&-4&2\\-5&2&-1\\7&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}\\\frac{5}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{-7}{9}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

(6) formulaga ko‘ra

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{-1}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}\\\frac{5}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{-7}{9}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}\cdot(-6)+\frac{4}{9}\cdot3-\frac{2}{9}\cdot0\\\frac{5}{9}\cdot(-6)-\frac{2}{9}\cdot3+\frac{1}{9}\cdot0\\-\frac{7}{9}\cdot(-6)+\frac{1}{9}\cdot3+\frac{4}{9}\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Demak, $x_1=2, x_2=-4, x_3=5$.

### 3.4. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning Kramer qoidasi.

(4) tenglamalar sistemasida $\det A\neq0$ bo‘lsa, sistemani yechimi $X=A^{-1}\cdot B$ ifoda orqali topiladi.

Bu ifodani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz.

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|}b_1 + \frac{A_{21}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}b_n \\ \frac{A_{12}}{|A|}b_1 + \frac{A_{22}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}b_n \\ \ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|}b_1 + \frac{A_{2n}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Bundan $x_i = \frac{1}{\det A}\cdot(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n) = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$. Bu yerda, $\Delta = \det A$ sistemaning asosiy determinanti deyiladi. $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ $(i=\overline{1,n})$ yordamchi determinantlar deyiladi va ular $\Delta$ determinantning $i$-ustuni elementlari o‘rniga ozod sonlarni yozish orqali tuziladi. U holda (4) sistemani yechimlarini

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \quad (i=\overline{1,n}) \tag{7}$$

formulalar orqali topamiz.

(7) formulalarga chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechish yoki **Kramer formulalari** deyiladi.

**Misol.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ sistemani Kramer formulalari bilan yeching.

**Yechish.** Bu sistemani yuqorida matritsa usuli bilan yechgan edik. Endi Kramer qoidasi bo‘yicha yechib ko‘ramiz.

Kramer formulalariga ko‘ra sistemani yechimlari

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

dan iborat.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=-9,\quad \Delta x_1=\begin{vmatrix}-6&2&0\\3&2&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-18,$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}1&-6&0\\3&3&1\\1&0&2\end{vmatrix}=36,\ \Delta x_3=\begin{vmatrix}1&2&-6\\3&2&3\\1&3&0\end{vmatrix}=-45;$$ Sistemani yechimlarini topamiz.

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=2,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-4,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=5.$$

Agar sistemada asosiy determinant $\Delta=0$ bo'lib, yordamchi determinant $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ lardan birortasi noldan farqli bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi;

Asosiy determinant $\Delta=0$ bo'lib, yordamchi determinantlarni ham barchasi $\Delta x_1=\Delta x_2=,...,=\Delta x_n=0$ bo'lganda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki birgalikda bo'lmaydi.

### 3.5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss qoidasi

Bu usulda noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lmagan holatda ham sistemani yechimini topish mumkin.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \tag{8}$$

Sistemaning yechimini Gauss usulida topish uchun sistemani noma'lumlari ketma-ket yo'qotish natijasida tenglamalar sistemasi pog'onasimon (trapetsiya yoki uchburchak) ko'rinishga keltirib, noma'lumlar topib olinadi.Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda amalga oshiriladi.

*1-bosqich.* (8) sistemani pog'onasimon (trapetsiyasimon yoki uchburchaksimon) ko'rinishga keltirishdan iborat.

*2-bosqich.* Pog'onasimon sistemani yechishdan iborat. Pog'onasimon sistema yagona yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Gauss usuli mohiyatini quyidagi misolda ko'rib o'tamiz.

**Misol.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ sistemani Gauss usuli bilan yeching.

**Yechish.** Gauss usulining 1-bosqichini quyidagicha amalga oshiramiz. Uning uchun 1- tenglamani ozgartirmagan holatda 2 va 3-tenglamani o'zgartiramiz, ya'ni 2-tenglamadagi $x_1$ noma'lumni yo'qotish uchun 1-tenglamani (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga qo'shamiz, so'ngra 3-tenglamadagi $x_1$ noma'lumni yo'qotish uchun 1-tenglamani (-1) ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shamiz natijada 2- va 3-tenglamada $x_1$ noma'lum yo'qoldi.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} -3I_1 + I_2 \\ -I_1 + I_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad = -6 \\ \quad -4x_2 + x_3 = 21 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan sistemada 2- va 3- tenglamalarning o'rinlarini almashtiramiz. So'ngra 3-tenglamada $x_2$ noma'lumni yo'qotish uchun 2-tenglamani (4) ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shamiz. Natijada pog'onasimon sistemaga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad = -6 \\ \quad -4x_2 + x_3 = 21 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \langle I_2 \Leftrightarrow I_3 \rangle \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad = -6 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 6 \\ \quad -4x_2 + x_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow \langle 4I_2 + I_3 \rangle \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad = -6 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 6 \\ \quad 9x_3 = 45. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan sistemani yechamiz. Bunda oxirgi 3-tenglamadan $x_3$ noma'lumni topamiz. $9x_3 = 45 \Rightarrow x_3 = 5$. $x_3$ qiymatini 2-tenglamaga qo'yib, $x_2$ noma'lumni topamiz. $x_2 + 2x_3 = 6 \Rightarrow x_2 + 2\cdot 5 = 6 \Rightarrow x_2 = -4$. $x_3$, $x_2$ larni qiymatlarini 1- tenglamaga qo'yib, $x_1$ noma'lum qiymatini topamiz. $x_1 = -6 - 2x_2 = -6 - 2(-4) = 2$.

Demak, $x_1 = 2,\ x_2 = -4,\ x_3 = 5$.

Gauss usulining 1-bosqichini sistemaning o'zida emas, balki sitemaning kengaytirilgan matritsasida bajarish qulayroq bo'ladi. Buning uchun tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasini tuzamiz va satrlar ustida zarur elementar almashtirishlarni bajaramiz. Sistemani yechishning 1-bosqichi quyidagicha bajariladi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right)$$

Oxirgi matritsa yordamida berilgan sistemaga mos keluvchi yangi algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad = -6 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 6 \\ \qquad\qquad 9x_3 = 45. \end{cases}$$

hosil bo‘ladi. Bundan osongina noma’lumlarni topishimiz mumkin.

Tenglamalar sistemasini yechishning boshqa bir turi **Jordan-Gauss usuli**hamqo‘llaniladi. Bu usulda kengaytirilgan $(A|B)$ matritsa ustida elementar almashtirishlar bajariladi va u $(E|X)$ ko‘rinishga keltiriladi. Bu yerda $E$ birlik matritsa. Bunda oxirgi kengaytirilgan matritsadagi $X$ matritsa tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

**Misol.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yeching.

**Yechish.** Yuqoridagi Gauss usulining oxirgi matritsasi ustida elementar almashtirish qilamiz va matritsani $(E|X)$ ko‘rinishga keltiramiz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right)\left\langle \frac{1}{9}I_3 \right\rangle \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)\langle -2I_3 + I_2 \rangle \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)\langle -2I_2 + I_1 \rangle \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim (E|X).$$

Demak, $x_1 = 2, x_2 = -4, x_3 = 5.$

### 3.6. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

Ozod sonlari nolga teng bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

sistemaga **bir jinsli tenglamalar sistemasi**deyiladi. (9) sistemani asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo'lganligi uchun bu sistema hamma vaqt birgalikda bo'ladi. (9) sistema hamma vaqt kamida bitta $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (trivial) yechimga ega.

Bir jinsli sistemani 0 dan farqli yechimga ega ekanligini aniqlash muhimdir.

Bir jinsli tenglamalar sistemasi nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy matritsasining rangi $r$ noma'lumlar soni $n$ dan kichik, ya'ni $r<n$ bo'lishi zarur va yetarli. $n$ noma'lumli $n$ ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun uning $\Delta$ determinanti nolga teng, ya'ni $\Delta = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

**Misol.** Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

**Yechish.** Sistema matritsasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo'shib, to'rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'lgan matritsaning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday qilib, $A$ matritsaning rangi 3 ga teng, noma'lumlar soni to'rtta, yuqoridagi sharga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. $x_1, x_2, x_3$ noma'lumlar koeffitsiyentidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo'lgani uchun $x_4$ ni o'ng tomonga o'tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4. \text{ K}$$

ramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4,\ x_2 = \frac{43}{21}x_4,\ x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Shunday qilib, $x_4$ ning istalgan aniq qiymatiga mos $x_1, x_2, x_3$ larni topish olishimiz mumkin. Masalan, $x_4 = 21$ desak, $x_1 = -31, x_2 = 43, x_3 = -28$ ga ega bo'lamiz. Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo'yib yechimning to'g'riligiga ishonish mumkin.

## 3.7. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda dasturlar majmuasidan foydalanish

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matematik paketlardan Maple dasturidan foydalanib yechimini topamiz.

Yuqorida berilgan misolni Maple dasturida matritsa, Kramer va Gauss usullarida yechib ko'ramiz.

**Misol.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ sistemani matritsa usulida yeching.

Buning uchun maple dasturi ishchi oynasida noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan A matritsa va ozod sonlardan B matritsani quyidagi buyruqlar orqali kiritib olamiz. Keyin *inverse* buyrug'i bilan A matritsani teskarisini topib, so'ngra *multiply* buyrug'i orqali B matritsaga ko'paytmasidan *x* matritsani topamiz.

>$with(linalg)$ :

>$A := matrix(3, 3, [[1, 2, 0], [3, 2, 1], [1, 3, 2]]);$

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

>$B := matrix(3, 1, [-6, 3, 0]);$

$$B := \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>$x := multiply(inverse(A), B);$

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Endi berilgan sistemani Kramer usuli bilan yechishni ham Maple dasturida ko'rib o'tamiz.

>$with(Student[LinearAlgebra])$ :

$>d := \langle\langle 1, 3, 1\rangle|\langle 2, 2, 3\rangle|\langle 0, 1, 2\rangle\rangle;$

$$d := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$> d := Determinant(d);$

$$d := -9$$

$> dx1 := \langle\langle -6, 3, 0\rangle|\langle 2, 2, 3\rangle|\langle 0, 1, 2\rangle\rangle;$

$$dx1 := \begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$> d1 := Determinant(dx1);$

$$d1 := -18$$

$> dx2 := \langle\langle 1, 3, 1\rangle|\langle -6, 3, 0\rangle|\langle 0, 1, 2\rangle\rangle;$

$$dx2 := \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$>d2 := Determinant(dx2);$

$$d2 := 36$$

$>dx3 := \langle\langle 1, 3, 1\rangle|\langle 2, 2, 3\rangle|\langle -6, 3, 0\rangle\rangle;$

$$dx3 := \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$> d3 := Determinant(dx3);$

$$d3 := -45$$

$> x := d1/d; y := d2/d; z := d3/d;$

$$x := 2$$

$$y := -4$$

$$z := 5$$

Sistemani Maple dasturida Gauss usuli bilan yechishni ham ko‘rib o‘tamiz.

$>with(LinearAlgebra):$

$> A := \langle\langle 1, 3, 1\rangle|\langle 2, 2, 3\rangle|\langle 0, 1, 2\rangle\rangle;$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$>B := \langle -6, 3, 0\rangle;$

$$B := \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$>GaussianElimination(A);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$>GaussianElimination(A,'method'='FractionFree');$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$>ReducedRowEchelonForm(\langle A|B\rangle);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

## Mustaqil bajarish uchun mashqlar

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa, Kramer va Gauss usulida yeching (1-10).

1. $\begin{cases} 4x - y = 4 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x + y + 6z = 24 \\ -x + 6y + z = 2 \\ 6x - y + 6z = 24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x + y + 7z = 15 \\ -x + 7y + z = 5 \\ 7x - y + 7z = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 3y \quad + t = 3 \\ 3x - 2y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t \quad = 2 \\ -x + 2y - z + 2t \quad = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \quad = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching (9-10).

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

## Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar.

| | |
|---|---|
| 1. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ chiziqli algebraik tenglamalar sistemasida $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bo‘lsa u holda sistema ... | A. Yechimga ega. |
| 2. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ sistemani yechimlari nechta. | B. Yagona yechimga ega. |
| 3. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{13}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsasi teng bo‘lsa u holda sistema ... bo‘ladi. | C. Sistema cheksiz ko‘p yechimga ega. |

| | |
|---|---|
| 4. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ chiziqli algebraik tenglamalar sistemasida $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa u holda sistema ...... | D. Sistema yagona (trivial) yechimga ega. |
| | E. Ikkita yechimga ega |

# II-BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI

## 4-§. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR

**Reja:**

1. Tabiiy va amaliy jarayonlarni “vektorlar algebrasi”ga modellashtirsh.
2. Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar.
3. Vektorni o‘qdagi proyeksiyasi. Vektorlar chiziqli erkliligi. Vektorlarni bazis bo’yicha yoyilmasi.
4. Vektorlarning yo‘naltiruvchi kosinuslari.

**Adabiyotlar:**2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13.

**Tayanch iboralar:**skalyar miqdor, vektor miqdor, vektor, bazis, ort, kollinearlik, komplanarlik.

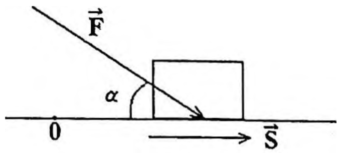
### 4.1. Tabiiy va amaliy jarayonlarni “vektorlar algebrasi”ga modellashtirsh

Ma’lumki, faqatgina son qiymatlari bilan aniqlanuvchi: masofa, vaqt, massa, va harorat kabi miqdorlar skalyar miqdorlar deb; faqat son qiymati bilangina emas, balki yo‘nalishi bilan ham aniqlanadigan kuch, ko‘chish, tezlik va tezlanish kabi miqdorlar vektor miqdorlar deb ataladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, skalyar miqdorlar(sonlar)ni qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish natijasida yana skalyar miqdorlar hosil bo‘ladi. Vektor miqdorlarni qo‘shish, ayirish va skalyar miqdorga ko‘paytirish natijasida yana vektor miqdorlar hosil bo‘lsada, vektor miqdorlarni ko‘paytirish natijasida ba’zida skalyar miqdorlar, ba’zida esa vektor miqdorlar hosil bo‘ladi.

Buni quyidagi misollarda keltirish mumkin:

1.To‘g‘ri chiziqli harakatda kuch $\overline{F}$ vektor kattalikni $\overline{S}$ ko‘chish vektoriga ko‘paytmasi bu ko‘chishda bajarilgan $A$ skalyar miqdor-ishni beradi (1-chizma). $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$.




*1-chizma*

2. Biron $S$ sirt orqali $\bar{v}$ vektori bilan o'tayotgan suyuqlikning vaqt birligida o'tadigan orqali (miqdori) skalyar miqdor bo'ladi.

3. Qattiq jismning biron nuqtasiga qo'yilgan $\overline{F}$ kuch ta'siridagi aylanma harakati, bu yerda hosil bo'ladigan kuch momenti vektoriga bog'liq bo'ladi.

4. Qo'zg'almas o'q atrofida $\bar{\omega}$–burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning $\bar{r}$ – radius vector orqali aniqlanadigan ixtiyoriy M nuqtasini tezligi $\bar{\upsilon}, \bar{\omega}$ burchak tezlik va $\bar{r}$–radius vektorlarni ko'paytmasi ko'rinishida aniqlanib, vector kattalik bo'ladi.

Shuning uchun ham, matematikada skalyar miqdorlar(sonlar) bilan birgalikda vector miqdorlar (vektor)ni o'rganish zaruriyati paydo bo'lgan. Bizga ma'lumki matematika-fizik va amaliy jarayonlarni miqdor(skalyar va vektor) jihatidan o'rganuvchi fandir. Faqatgina kattaligi bilan emas, yo'nalishi bilan ham aniqlanadigan ba'zi bir fizik kattaliklar masalan kuch, tezlik va tezlanishlarni matematikada yo'naltirilgan kesma-vektor orqali belgilash (ko'rsatish) o'rganish uchun oson bo'ladi.

Hozirgi zamon matematikasining eng asosiy tushunchalaridan biri, bu vector bo'lib, uning umumlashgani tenzor tushunchasi bo'ladi. "Vektor "tushunchasi birinchi marta irlandiyalik matematik va astranom Uiliam Gamiltonning asarlarida 1845 yilda paydo bo'lgan. Bunda u vector tushunchasini kompleks sonlarni umumlashtiruvchi sonlar sistemasini qurishda foydalangan. U.Gamilton "skalyar", "skalyar ko'paytma", "vector ko'paytma" tushunchalarini ham birinchilardan bo'lib foydalangan.

Umuman olganda vektor tushunchasini ikkiga bo'lib o'rganiladi.

1.Haqiqiy hayotda uchraydigan fizik jarayonlarni aks ettiruvchi vektor. 2.Matematikada o'rganiladigan vektor.

Fizikadagi vektor: kattaligi; yo'nalishi va qo'yilish nuqtasi bilan xarakterlanadi. Masalan kuch-vektori kattaligi, yo'nalishi va quyilish nuqtasi bilan xarakterlanadi. Uni fazoni boshqa bir nuqtasiga ko'chirganimizda uni harakatga ta'siri o'zgarib ketishi mumkin. Bunda ko'chirilgan nuqtada kuch bilan birgaaylanuvchi moment vektori ham hosil bo'ladi.

Matematikadagi vektor-bu yo'naltirilgan kesma bo'lib, faqatgina kattaligi va yo'nalishi bilan to'la xarakterlanadi. Matematikada erkin vektor qaralib, uni fazoni istalgan nuqtasiga parallel ko'chirish mumkin. Shuning uchun ham, matematikada kattaligi va yo'nalishi bir xil vektorlar teng vektorlar deyiladi.Vektor lotinchadan vector "ko'chiruvchi" ma'nosini anglatadi.

Bundan tashqari matematikadan vektor koordinatalari orqali to'liq xarakterlangani uchun, uni nafaqat uch o'lchovli Yevklid fazosida, balki istalgan n o'lchovli fazoga umumlashtirish mumkin. Boshqacha qilib aytganda vektorni matematikada istalgan masalan, tartiblangan sonlar to'plami sifatida ham o'rganish mumkin. Bunda tartiblangan sonlar to'plamini vektor satr, vektor ustun deb ham qarash mumkin. Quyida biz vektor tushunchasi qo'llaniladigan sohalar, boshqacha qilib aytganda matematikadagi vektorlar algebrasiga modellashtirishdan masalalar haqida qisqacha ma'lumotlar keltiramiz. Vektor-ko'rsatuvchi. Vektor tushunchasi kundalik hayotimizda uchraydigan kattalikdir. Undan biz biror bir ob'yektni kam vaqt sarflab, tezda topishda yordam beradigan yoki "yo'l belgilari"da qo'llaniladigan ko'rsatuvchi sifatida har kuni foydalanamiz. Fizikada vektor. Kattaligi, yo'nalishi va qo'yilish nuqtasi bilan harakatlanadigan barcha fizik kattaliklar. Masalan kuch, tezlik, tezlanish va boshqa real vektorlar. Adabiyotda vektor. Masalan: Ivan Andrevich Krilovning "Oqqush, cho'rtanbaliq va qisqichbaqa" haqidagi masalida bu jonzodlarning turli yo'nalishda harakatlanishi natijasida (aravaga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng) bo'lganligi uchun arava o'z joyida qoladi. Bunda har kim aravani o'z tomoniga tortaversa, ish bajarilmaydi, - degan ma'joziy ma'no ham bor.

Ximiyada vektor. Ximiyada amalga oshiriladigan barcha reaksiyalar yo'nalish bo'yicha amalga oshadi.

Biologiyada vektor. Parazitlarni bir organizmdan ikkinchisiga o'tkazuvchi organizmlar-vektor hisoblanadi. Masalan, bitlar toshmali tiflarni uyg'otuvchilarni o'tkazadi, kalamushlar-o'latni bir organizmdan ikkinchisiga o'tkazuvchi vektorlardir.

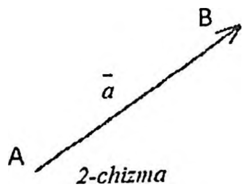
Iqtisodiyotda vektor. Vektor biror-bir tartiblangan sonlar ketma-ketligi deb qarash mumkin bo'lganligi uchun iqtisodiyotda biror-bir korxonaning ishlab chiqaradigan mahsulotlari ketma-ketligini vektorni tashkil etuvchilari deb qarash mumkin. Masalan, to'qimachilik fabrikasi bir smenada 500 ta sochiq, 450 ta xalat va 450 ta ko'ylak ishlab chiqarsa, uning bir oyda yoki yil davomida ishlab chiqarish programmasini uch o'lchovli vektor orqali ifodalash mumkin.

Tabiiy jarayonlarni yuz berishi qonuniyatlarini deyarli barchasi, masalan, Nyuton qonunlari va bu jarayonlarni aniq bir sohalarga qo'llanishini o'rganadigan texnika xususan"5312000 -Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish", "5310900-Metrologiya, standartlashtirish va mahsulot sifati menejmenti" yo'nalishlarida o'qitiladigan mutaxassislik fanlarni ham ko'p hollarda, masalan, elektrotexnikada Kirxgoff qonunlari vektor ko'rinishdagi matematik formula va tenglamalarga modellshtiriladi.

Yuqoridagilardan kelib chiqib, quyidagicha xulosa qilishimiz mumkin. Biz matematikada vektorlar ustida chiziqli amallar va ularni ko'paytmasini yaxshi o'rganib olsak, nafaqat hayotda uchraydigan vektor kattaliklar, balki boshqa tabiiy va amaliy jarayonlar masalalarini ham o'zlashtirishimiz osonlashadi.

### 4.2.Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar

Matematikada yo'nalishga ega bo'lgan kesmaga**vektor**deb ataladi.



2-chizma

Tekislikda A va B nuqtalarni oladigan bo'lsak, A dan B nuqtaga yo'naltirib vektor yasaymiz. A nuqta vectorniboshi, Besaoxirideyiladiva$\overline{AB}$yoki$\bar{a}$ orqalibelgilanadi (2-chizma).

Vektorning moduli, ya'ni uzunligi $|\overline{AB}|$ yoki $|\bar{a}|$ kabi belgilanadi.

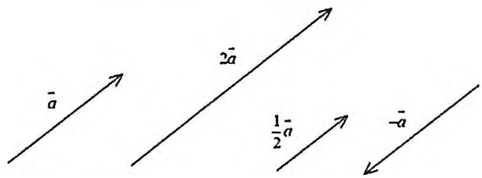
Uzunligi birga teng bo'lgan vektorga **birlik vektor** deyiladi.

Agar vektorlar bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga **kollinear vektorlar** deyiladi.

Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar**deb ataladi.

Bir xil uzunlikka ega, o'zaro kollinear va bir xil yo'nalishli vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\bar{a}=\bar{b}$ ko'rinishda belgilanadi. Shuning uchun ham matematikada vektorni kattaligi va yo'nalishini o'zgartirmasdan istalgan nuqtaga ko'chirish mumkin deb qaraladi. Bunday vektorlar erkin vektorlar deyiladi.

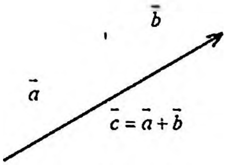
***Vektorni songa ko'paytirish.*** Agar $\bar{a}$ vektorni biror $\lambda$ haqiqiy songa ko'paytirganda, $\bar{a}$ vektorga kollinear moduli $|\lambda||\bar{a}|$ ga teng bo'lgan va $\lambda>0$ bo'lsa, $\bar{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishli, agar $\lambda<0$ bo'lsa, $\bar{a}$ ga qarama-qarshi yo'nalishli yangi vektorga aytiladi (3-chizma).



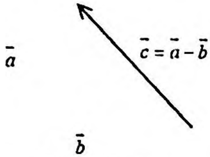

*3-chizma*

***Vektorlarni qo'shish.*** $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, $\bar{b}$ vektor $\bar{a}$ ning oxiridan boshlanganda, $\bar{a}$ vektorning boshidan boshlanadigan va $\bar{b}$ vektorni oxirida tugaydigan $\bar{c}$ vektorga aytiladi (4-chizma).

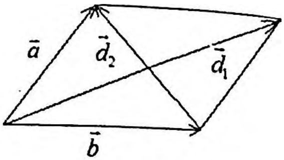
***Vektorlarni ayirmasi.*** $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\bar{c}$ vektorga aytiladiki, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlarning yig'indisi $\bar{a}$ vektorga teng va u $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ kabi ifodalanadi. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasini chizmada ko'rishimiz mumkin (5-chizma).




*4-chizma*




*5-chizma*



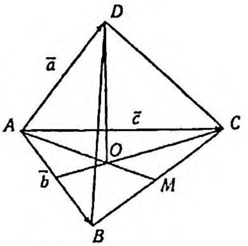

*6-chizma*

Parallel bo'lmagan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarni yig'indisi va ayirmasini parallelogram qoidasiga ko'ra ham toppish mumkin. Parallelogrammni tomonlari $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlardan iborat, deb qarasak, dioganallarini ifodalovchi vektorlarni $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orqali $\overline{d_1}=\bar{a}+\bar{b}$, $\overline{d_2}=\bar{a}-\bar{b}$ ko'rinishda ifodalash mumkin (6-chizma)

Xuddi shu tarzda bir nechta $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},...$ vektorlarni qo'shish va ayirish tushunchalarini ham kiritish mumkin.

Vektorlarni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirishni ular ustida **chiziqli amallar** deyiladi.

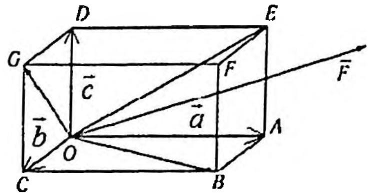
**Misol.** Komplanar bo'lmagan $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar orqali muntazam uchburchakli piramida hosil qilindi. D uchidan tushirilgan balandlik $\overline{DO}$ vektorni $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar orqali ifodalang (7-chizma).




*7-chizma*

**Yechish.** Piramida to'gri bo'lganligi sababli *D* uchidan tushirilgan balandlik piramida asosining medianalari kesishgan nuqtasiga tushadi. Uch burchak medianalarining kesishish nuqtasi xossasidan (medianalar 2:1 nisbatda kesishadi) foydalanib quyidagini $|AM|=|AO|+|OM|$, $\frac{AO}{OM}=\frac{2}{1}$, $\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}$, yozamiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra $\overline{DO}=\overline{DA}+\overline{AO}=-\overline{AD}+\frac{2}{3}\overline{AM}$ ga ega bo'lamiz. $\overline{AM}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$, $\overline{DO}=-\overline{AD}+\frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)=-\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}+\frac{1}{3}\bar{c}$.

**Misol.** $OABCDEFG$ to‘g‘ri parallelepiped ning $O$ uchiga uchta kuch $\overline{OB}, \overline{OE}, \overline{OG}$ vektorlari bo‘yicha ta’sir qilmoqda. Bu kuchlarning teng ta’sir kuchini ya’ni $\overline{F}$ ni toping

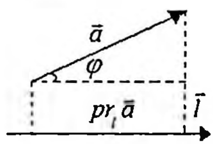



*8-chizma*

**Yechish.** $\overline{AO} = \vec{a}, \overline{OC} = \vec{b}, \overline{OD} = \vec{c}$ deb belgilab olamiz(8-chizma). $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}, \overline{OE} = \vec{a} + \vec{c}, \overline{OD} = \vec{b} + \vec{c}$. Kuchlarning teng ta’sir etuvchi kuchni toppish uchun $\overline{F} = \overline{OB} + \overline{OE} + \overline{OD}$ ga teng bo‘ladi. Bundan $\overline{F} = \overline{OB} + \overline{OE} + \overline{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 2\overline{OF}$, ya’ni natijaviy vector dioganalini ifodalovchi $\overline{OF}$ vektordan 2 marta katta bo‘lgan vektorni ifodalaydi.

### 4.3. Vektorni o‘qdagi proyeksiyasi.Vektorlar chiziqli erkliligi. Vektorlarni basis bo’yicha yoyilmasi

$\vec{a}$ vector $l$ o‘qdagi proyeksiyasi deb, shu vector uzunligini u bilan $l$ o‘qning musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi kosinusiga ko‘paytmasini aytiladi *va* $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$ bilan ifodalanadi.




*9-chizma*

Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi quyidagi xossalarga ega.

$1^0$. Bir nechta vector yig‘indisining berilgan o‘qdagi proeksiyasi vektorlarning shu o‘qdagi proeksiyalari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\Pr_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \Pr_l\vec{a} + \Pr_l\vec{b} + \Pr_l\vec{c}$$

$2^0$. Vektor skalyar songa ko‘paytirilsa, uning o‘qdagi proeksiyasi ham shu songa ko‘payadi, ya’ni

$$\Pr_l\left(\lambda \bar{a}\right) = \lambda \cdot \Pr_l \bar{a}$$

Fazoda $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vektorlar va $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ixtiyoriy sonlarni olib,

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3$$

vektorni tuzamiz. Bunda $\bar{a}$ vektorga $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vektorlar bilan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar orqali chiziqli bog'langan deyiladi.

**Ta'rif.** Agar $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vektorlar uchun kamida bittasi nolga teng bo'lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar topilsa va bu sonlar uchun

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 = 0 \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vektorlar sistemasiga **chiziqli bog'liq vektorlar**deyiladi.

**Ta'rif.** Agar (1) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vektorlar sistemasiga **chiziqli erkli vektorlar**deyiladi.

Bazisning vektorlari o'zaro perpendikular va birga teng uzunlikka ega bo'lsa, bu bazis **ortanormallangan bazis**deb ataladi. Dekart koordinatalar sistemasi *Oxyz*ortanormallangan bazis tashkil qiladi. Bunda bazis sifatida *Ox, Oy, Oz* o'qlarning ortlari mos ravishda$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$bo'lgan birlik vektorlar olinadi. $\bar{a}$ vektor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bazisda quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \qquad (2)$$

Bu ifoda vektorning $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$**bazis bo'yicha yoyilmasi**deb ataladi va qisqacha $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ deb yoziladi. Bunda, $\bar{a}$ vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari $a_x, a_y, a_z$ lar $\bar{a}$ vektorning koordinatalari deb ham yuritiladi. Bunda $\bar{a}$ vektorning uzunligi quyidagicha bo'ladi.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (3)$$

## 4.4. Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari

Agar $\alpha, \beta, \gamma$ burchaklar $\bar{a}$ vektorning koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari bo'lsa, $\cos\alpha, \cos\beta$ va $\cos\gamma$

miqdorlar vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi, va ular quyidagicha aniqlanadi.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \qquad (4)$$

Yo'naltiruvchi kosinuslari o'rtasida quyidagi bog'liqlik mavjud

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (5)$$

Bizga $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ va $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, ular ustida chiziqli amallarni ularni koordinatalari orqali ham quyidagicha bajarish mumkin.

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\bar{j} + \lambda a_z\bar{k}$

$\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orqali $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ $(\lambda, \mu = const)$ ko'rinishda chiziqli ifodalanadi.

Fazoda berilgan $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi $\overline{AB}$ vektorni yasashimiz uchun

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} \qquad (6)$$

formuladan foydalanamiz. Demak $\overline{AB}$ vektorni koordinatalari $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ dan iborat bo'ladi. Bu vektorni uzunligi

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (7)$$

ga teng bo'ladi. Bu vektorni uzunligi $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani ham aniqlaydi.

**Misol.** Fazoda berilgan $A(5;3;7)$ va $B(8;-1;0)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vektor $\bar{a}$ bilan, $C(7;-2;-1)$ va $D(9;0;-2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vektorni $\bar{b}$ bilan belgilangan bo'lsa, $\bar{c} = -3\bar{a} + 4\bar{b}$ vektor yoyilmasi, uzunligi va yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

**Yechish.** Masalani shartiga ko'ra $\vec{a}=\overline{AB}$, $\vec{b}=\overline{CD}$ bilan belgilaymiz. Biz dastlab $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalarini (6) dan foydalangan holda topib olamiz:

$$\vec{a}=\overline{AB}=(8-5)\cdot\vec{i}+(-1-3)\cdot\vec{j}+(0-7)\cdot\vec{k}=3\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k},$$

$$\vec{b}=\overline{CD}=(9-7)\cdot\vec{i}+(0-(-2))\cdot\vec{j}+(-2-(-1))\cdot\vec{k}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}.$$

Vektorlar ustida chiziqli amallardan foydalangan holda $\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$ vektorni topamiz.

$$-3\cdot\vec{a}=-3\cdot\left(\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}\right)=-9\vec{i}+12\vec{j}+21\vec{k},\ 4\cdot\vec{b}=4\cdot\left(2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}\right)=8\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}=\left(-9\vec{i}+12\vec{j}+21\vec{k}\right)+\left(8\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}\right)=-\vec{i}+4\vec{j}-17\vec{k}.$$

Endi $\vec{c}$ vektorning uzunligi $|\vec{c}|$ ni (2) formuladan foydalanib topamiz.

$$|\vec{c}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-17)^2}=\sqrt{306}\ \textit{uzunlik birlik}.$$

(3) formuladan foydalanib $\vec{c}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini topamiz.

$$\cos\alpha=\frac{c_x}{|\vec{c}|}=-\frac{1}{\sqrt{306}},\ \cos\beta=\frac{c_y}{|\vec{c}|}=\frac{4}{\sqrt{306}},\ \cos\gamma=\frac{c_z}{|\vec{c}|}=-\frac{17}{|\vec{c}|}.$$

## Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yordamida quyidagi vektorlarni yasang:

1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$ ; 3) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ ; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$

2. $ABC$ uchburchakda $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$, M nuqta BC tomonining o'rtasi bo'lsin. $\overline{AM}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

3. ABC uchburchakda $\overline{AB}=\overline{m}$ va $\overline{AC}=\overline{n}$ bo'lsin. Quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\frac{\overline{n}+\overline{m}}{2}$; 2) $\frac{\overline{m}-\overline{n}}{2}$; 3) $\frac{\overline{n}-\overline{m}}{2}$;

4. $ABCDA'B'C'D'$ parallepipedda uning qirralari bilan ustma-ust tushuvchi vektorlar berilgan: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$ $\overline{AA'}=\overline{p}$. Quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$; 2) $\overline{m}+\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$ 3) $\frac{1}{2}\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}+\overline{p}$;

4) $\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$ 5) $-\overline{m}-\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$

5. Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar uchburchakni tomonlari bo'lsa, bu uchburchakning medianalarini ifodalovchi vektorlarini toping.

6. $\bar{a}=\{6;3;-2\}$ vektorning moduli hisoblansin.

7. $\bar{a}$ vektorning ikkita $x=4,\ y=-12$ koordinatasi berilgan. Agar $|\bar{a}|=13$ bo'lsa, uning uchinchi z koordinatasi topilsin.

8. Agar $\bar{a}=\{2;-3;-1\}$ vektorning uchi $(1,-1,2)$ nuqta bilan ustma-ust tushsa, uning boshi aniqlansin.

9. $\bar{a}=\{12;-15;-16\}$ vektorning uzunligi, yo'naltiruvchi kosinuslari, $Ox$o'qdagi proyeksiyasi hisoblansin.

10. Agar vektor uzunligi $|\bar{a}|=3$ va koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari teng bo'lsa, $\bar{a}$ vektorni koordinatalarini toping.

11. Agar uchta $\overline{F_1},\overline{F_2},\overline{F_3}$ kuchlar perpendikulyar ravishda bir nuqtaga ta'sir qilayotgan bo'lsin. Kuchlarning kattaliklari ma'lum bo'lsa, natijaviy kuchni toping. $|\overline{F_1}|=2, |\overline{F_2}|=10, |\overline{F_3}|=11$.

12. Vektor $Ox$ va $Oz$o'qlari bilan mos ravishda $\alpha=120^\circ, \gamma=45^\circ$ burchak tashkil etadi. Vektor $Oy$o'q bilan qanday burchak tashkil etadi?

13. $\bar{a}$ vektor $Ox$ va $Oy$ o'qlari bilan mos ravishda $\alpha=60^\circ. \beta=60^\circ$ burchak tashkil etadi. $|\bar{a}|=2$ deb, uning koordinatalari hisoblansin.

14. Quyidagilar $|\bar{a}|=13$, $|\bar{b}|=19$ va $|\bar{a}+\bar{b}|=24$ berilgan. $|\bar{a}-\bar{b}|$ hisoblansin.

15. $\alpha$ va $\beta$ koeffisiyentlarning qanday qiymatlarida $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ va $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

16. Quyidagi to‘rtta nuqtani trapetsiyaning uchlari ekanligi tekshirilsin: $A(3;-1;2)$, $B(1;-2;-3)$, $C(1;-1;-3)$, $D(3;-5;3)$

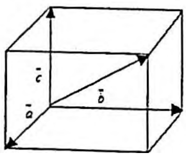
17. $\bar{a}=\{3;\ \ -5;\ \ 8\}$ va $\bar{b}=\{-1;\ \ 1;\ \ -4\}$ vektor yig‘indisi va ayirmasining modullari aniqlansin.

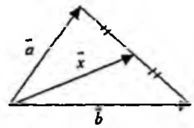
18. $\overline{AB}=\{2;\ \ 6;\ \ -4\}$ va $\overline{AC}=\{4;\ \ -2;\ \ 2\}$ vektor $ABC$ uchbukchakning tomonlari bilan ustma-ust tushadi. Shu uchburchakning uchlariga qo‘yilgan va uning $AM$, $BN$, $CP$ medianalari bilan ustma-ust tushuvchi vektorlarning koordinatalari aniqlansin.

19. Tekislikda uchta $\bar{a}=\{3;-2\}$, $\bar{b}=\{-2;1\}$ va $\bar{c}=\{7;-4\}$ vektor berilgan. Bu vektorlarning har birining, qolgan ikkita vektorni bazis sifatida qabul qilib, yoyilmasi aniqlansin.

20. Uchta $\bar{a}=\{3;-1\}$, $\bar{b}=\{1;-2\}$ va $\bar{c}=\{-1;7\}$ vektor berilgan. $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ Vektorning $\bar{a}$, $\bar{b}$ bazis bo‘yicha yoyilmasi topilsin.

**Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar.**

| | |
|---|---|
| 1. $\bar{a}(-2;1;-4)$ vektorga kollinear bo‘lgan vektorni ko‘rsating. | A. $\bar{x}\left(-\frac{2}{7};\frac{6}{7};\frac{3}{7}\right)$ |
| 2. $\bar{a}(4;2;0)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan vektorlarni ko‘rsating. | B. $\bar{x}(1;4;0)$ |
| 3. $\bar{a}(3;0;0)$,   $\bar{b}(0;4;0)$, $\bar{c}(0;0;3)$ vektorlardan qurilgan parallelepepednidioganalini ifodalovchi vektorni toping. | C. $\bar{x}(4;-2;8)$ |

| | |
|---|---|
| 4. $\vec{a}(2;-6;-3)$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan birlik vektorni ko'rsating. | D. $\vec{x}(3;4;3)$ |
| 5.Uchburchakda $\vec{a}(2;1;5)$, $\vec{b}(0;1;3)$ vektorlar berilgan. Medianani ifodalovchi $\vec{x}$ vektorni toping.   | E. $\vec{x}(-1;2;8)$ |
| | F. $\vec{x}(1;1;3)$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 5- §. IKKI VEKTORNI SKALYAR VA VEKTOR KO'PAYTMALARI. ARALASH KO'PAYTMA

**Reja:**

1. Skalyar ko'paytma va uning asosiy xossalari.
2. Ikki vektor orasidagi burchak.
3. Ikki vektorning perpendikularlik sharti.
4. Ikki vektorni vektor ko'paytmasi va uning asosiy xossalari.
5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi.
6. Uch vektorning aralash ko'paytmasi va uning asosiy xossalari
7. Vektorlarni kollinearlik va komplanarlik shartlari.

**Adabiyotlar:** 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** yo'naltiruvchi kosinus, skalyar ko'paytma, vektor ko'paytma skalyar kvadrat, perpendikulyarlik, parallellik.

### 5.1. Skalyar ko'paytma va uning asosiy xossalari.

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar **skalyar ko'paytmasi**deb bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng songa aytiladi va $\bar{a}\cdot\bar{b}$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\left(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}\right) \qquad (1)$$

ga teng.

**Kuchning bajargan ishi.** Moddiy nuqtaning $\bar{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli ko'chishda bajargan ishi $\bar{F}$ kuch vektori va ko'chish vektori skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$A = \bar{F}\cdot\bar{S} = |\bar{F}|\cdot|\bar{S}|\cos\varphi, \quad \varphi = \left(\bar{F}\hat{\ }\bar{S}\right) \qquad (2)$$

Bu skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosini ifodalaydi.

Skalyar ko'paytma quyidagi muhim xossalarga ega:

$1^0$. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ o'rin almashtirish xossasi.

$2^0$. $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$ taqsimot xossasi.

$3^0$. $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})$ guruxlash xossasi.

$4^0$.Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo‘nalishdagi kollinear vektorlar bo‘lsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|$ chunki $\cos 0^0=1$.

$5^0$. Agar qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|$ chunki $\cos 180^0=-1$.

$6^0$. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0^0=|\bar{a}|^2 \Rightarrow \bar{a}^2=|\bar{a}|^2$ ya’ni

$$|\bar{a}|=\sqrt{(\bar{a}\cdot\bar{a})} \qquad (3).$$

$7^0$. Nolga teng bo‘lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo‘lsa, ularning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi, ya’ni $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

$8^0$. Ikkita $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ va $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ vektorlarni skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng ya’ni,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z\,. \qquad (4)$$

### 5.2. Ikki vektor orasidagi burchak

$\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ va $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$ kosinusi quyidagi formula orqali topiladi.

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (5)$$

Fazodagi ikki vektor orasidagi burchak kosinusi ushbu vektorlarning yo‘naltiruvchi kosinuslari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2.$$

**Misol.**Quyidagi $\bar{a}(1;-2;2)$, $\bar{b}(2;1;1)$ vektorlar berilgan. Ularning skalyar ko‘paytmasi va ular orasidagi burchakni toping.

**Yechish.** Berilgan vektorlarni skalyar ko‘paytmasini topish uchun (4) dan foydalanib topamiz.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=1\cdot 2+(-2)\cdot 1+2\cdot 1=2.$$

Ular orasidagi burchakni topish uchun (5) dan foydalanamiz.

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{9},\ \varphi=\arccos\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Bu misolni maple dasturida yechib ko'ramiz.

$>with(VectorCalculus):$

$>a:=\langle 1,-2,2\rangle;$

$$a:=e_x-2e_y+2e_z$$

$>b:=\langle 2,1,1\rangle;$

$$b:=2e_x+e_y+e_z$$

$>a.b;$

$$2$$

$>with(LinearAlgebra):$

$>VectorAngle(a,b);$

$$\arccos\left(\frac{1}{9}\sqrt{6}\right)$$

Demak, natija bir xil chiqdi.

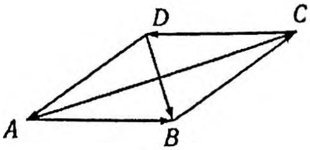
### 5.3. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti

Nolga teng bo'lmagan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zaro perpendikular bo'lishi uchun, ularni skalyar k'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Ikkita vektorni perpendikulyarlik sharti

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (6)$$

**Misol.** *ABCD* romb berilgan. Uning diagonallari to'g'ri burchak ostida kesishishini isbotlang.

**Yechish.** Rombni 10–chizmadagi kabi tomonlari va diagonallarini vektorlar orqali belgilaymiz. Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz.




*10-chizma*

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, $\overline{DB}=\overline{DA}+\overline{AB}$ $\overline{DA}=-\overline{BC}$, $\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{BC}$ Endi $\overline{AC}$va $\overline{DB}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. $\overline{AC}\cdot\overline{DB}=\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)=\left(\overline{AB}\right)^2-\left(\overline{BC}\right)^2=0$, chunki rombda hamma tomonlari teng $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BC}\right|$. $\overline{AC}$ va $\overline{DB}$ diagonal vektorlarining skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lganligi sababli, bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi. Bundan rombning dioganallari ham perpendikulyar bo'ladi.

**Misol.** Moddiy nuqta $A(1;-2;2)$ va nuqtadan $B(5;-5;-3)$ nuqtaga $\overline{F}=\{4;5;-1\}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chgan. Quyidagilarni toping: 1) $\overline{F}$ kuchning bajargan ishini; 2) $\overline{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini.

**Yechish.** Moddiy nuqta ko'chish vektorini, uning va $\overline{F}$ kuchning uzunligini topamiz:

$$\overline{S}=\overline{AB}=(x_B-x_A)\overline{i}+(y_B-y_A)\overline{j}+(z_B-z_A)\overline{k}=(5-1)\overline{i}+(-5-(-2))\overline{j}+(-3-2)\overline{k}=$$
$$=4\overline{i}-3\overline{j}-5\overline{k}.$$

$\left|\overline{S}\right|$ va $\left|\overline{F}\right|$larni vektorlarni uzunliklarini topish formulasidan foydalanib topamiz:

$$\left|\overline{S}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{16+9+25}=5\sqrt{2},\ \left|\overline{F}\right|=\sqrt{4^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{16+25+1}=\sqrt{42}.$$

(2) formulaga ko'ra $A=\overline{F}\cdot\overline{S}=4\cdot4+5\cdot(-3)+(-1)\cdot(-5)=6$ (ish birlik.)

(5) formulaga ko'ra $\cos\varphi=\dfrac{\overline{F}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{F}\right|\left|\overline{S}\right|}=\dfrac{6}{5\sqrt{2}\sqrt{42}}=\dfrac{3}{5\sqrt{21}}$, $\varphi=\arccos\dfrac{3}{5\sqrt{21}}$.

**Misol.** Agar $\overline{m}$ va $\overline{n}$ vektorlar orasidagi burchagi $\frac{\pi}{3}$ ga teng birlik vektorlar bo'lsa, $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$ va $\overline{b}=\overline{m}-2\overline{n}$ vektorlarda yasalgan parallelogramning dioganallari uzunliklarini va ular orasidagi burchagini aniqlang.

**Yechish.** Parallelogramni dioganallari $\overline{d_1}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{d_2}=\overline{a}-\overline{b}$ vektorlardan iborat bo'ladi.

$$\overline{d_1}=\overline{a}+\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}+\overline{m}-2\overline{n}=3\overline{m}-\overline{n},\quad \overline{d_2}=\overline{a}-\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}-\overline{m}+2\overline{n}=\overline{m}+3\overline{n}$$

(3) formulaga ko'ra

$$|\vec{d_1}| = |3\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{(3\vec{m} - \vec{n})^2} = \sqrt{9|\vec{m}|^2 - 6\vec{m}\vec{n} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{9|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}) + |\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{9\cdot 1^2 - 6\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1^2} = \sqrt{7}.$$

$$|\vec{d_2}| = |\vec{m} + 3\vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} + 3\vec{n})^2} = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 6\vec{m}\vec{n} + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}) + 9|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 + 6\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{3} + 9\cdot 1^2} = \sqrt{13}.$$

(5) formulaga ko'ra,

$$\cos(d_1\,\hat{}\,d_2) = \frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|} = \frac{(3\vec{m} - \vec{n})\cdot(\vec{m} + 3\vec{n})}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|} = \frac{3m^2 + 8\vec{m}\cdot\vec{n} - 3n^2}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|} = \frac{3m^2 + 8|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\frac{\pi}{3} - 3n^2}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|} =$$

$$= \frac{3\cdot 1^2 + 8\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} - 3\cdot 1^2}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{91}}, \quad (\vec{d_1}\,\hat{}\,\vec{d_2}) = \arccos\frac{4}{\sqrt{91}}.$$

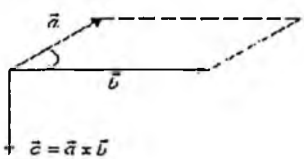
## 5.4. Ikki vektorni vektor ko'paytmasi va uning asosiy xossalari

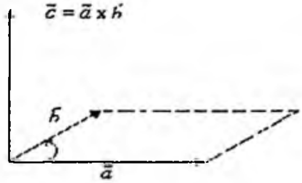
**Ta'rif.** $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni vektor ko'paytmasi deb, shunday $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ bilan belgilanadigan uchinchi $\vec{c}$ vektorga aytiladiki:

1. $\vec{c}$ ning moduli son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning yuziga teng $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$

2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar;

3. $\vec{c}$ vektorning musbat yo'nalishi shundayki,agar $\vec{c}$ vektorning uchidan qaralsa, $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilishi masofasi soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda ko'rinadi; (11-12-chizma)






*11 - chizma12- chizma*

Vektorko'paytmaquyidagimuhimxossalargaega:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

2. $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$

3. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

4. Vektor ko'paytma ko'paytuvchi vektorlardan biri nol vektor bo'lganda yoki vektorlar kollinear bo'lgandagina nolga teng bo'ladi.

Bu xossadan istalgan vektorni o'zini-o'ziga vektor ko'paytmasi nol vektorga tengligi, ya'ni $\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$ ekani kelib chiqadi.

### 5.5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ va $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Shu vektorlarning vektor ko'paytmasini topish uchun quyidagi determinantdan foydalaniladi.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (7)$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan qurilgan parallelogramning yuzi

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\right| \tag{8}$$

formula yordamida topiladi. Shu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi esa

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\right|. \tag{9}$$

**Misol.** Uchlari $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini hisoblang.

**Yechish.** (9) formulaga ko'ra

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}S_{par}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|-2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+14\cdot\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2+14^2}=\frac{1}{2}\sqrt{216}=8$$ kv. birlik bo'ladi.

**Misol.** $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $30^0$ burchak tashkil etadi. Agar $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ bo'lsa, $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$ va $\vec{n}=5\vec{a}+4\vec{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzini toping.

**Yechish.** Parallelogrammni yuzini (8) formulaga ko'ra topamiz: $S=\left|\vec{m}\times\vec{n}\right|$.

$$\vec{m}\times\vec{n}=\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(5\vec{a}+4\vec{b}\right)=15\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)+12\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-10\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-8\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\times\vec{a}=0\\ \vec{b}\times\vec{b}=0\end{vmatrix}=$$

$=12\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+10\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=22\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.Hosil bo'lgan vektor ko'paytmani topamiz

$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=2\cdot3\cdot\sin30^0=3.$

Demak, izlanayotgan uchburchak yuzasini topish (9) formulaga ko'ra

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{m}\times\vec{n}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|22\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=11\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=11\cdot3=33$ kv.birlik.

## 5.6. Uch vektorning aralash ko'paytmasi va uning asosiy xossalari

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ va $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

**Ta'rif.** $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}$ ni uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan son $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi, va $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ kabi belgilanadi.

Uchta vektorlarni aralash ko'paytmasi, quyidagi determinant orqali topiladi.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Uchlari bitta nuqtada bo'lgan $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ bir tekislida yotmagan vektorlarni qirrasi deb olib parallelepiped yasaymiz. Bu parallelepiped hajmi

$$V_{par}=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| \qquad (11)$$

formula yordamida topiladi.

Bu vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi

$$V_{pir}=\frac{1}{6}V_{par}=\frac{1}{6}\cdot\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| \qquad (12)$$

**Misol.** Qirralari $\vec{a}\,(2;1;-3)$, $\vec{b}\,(1;2;1)$, $\vec{c}\,(1;-3;1)$ vektorlarda bo'lgan parallelepiped hajmini toping.

**Yechish.** Bu hajmni topish masalasini Maple dasturida bajarib ko'ramiz. Berilgan vektorlarni Maple ishchi oynasida quyidagicha kiritib olamiz.

$>with(VectorCalculus):$

$>a := RootedVector([2, 1,-3], root = \langle 1, 2, 3\rangle);$

$$a := \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$>b := RootedVector([1, 2, 1], root = \langle 1, 2, 3\rangle);$

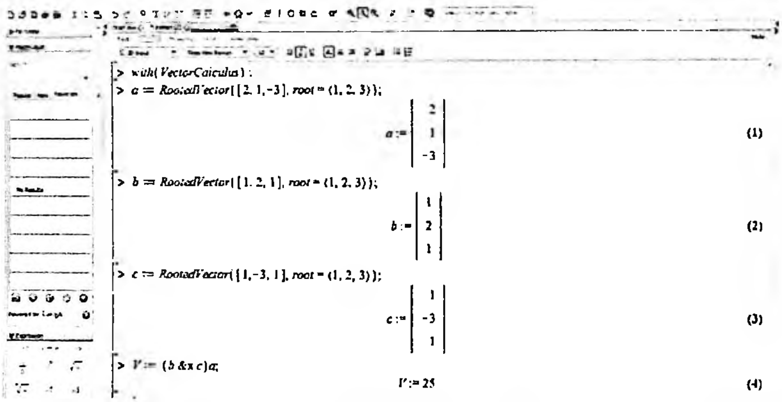
$$b := \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$>c := RootedVector([1,-3, 1], root = \langle 1, 2, 3\rangle);$

$$c := \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$>V := (b \,\&\mathrm{x}\, c)a;$

$$V := 25$$




Uch vektorlarnini aralash ko‘paytmasi quyidagi muhim xossalarga ega.

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$

2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$

3. Ikkita qo‘shni ko‘paytuvchining o‘rinlari almashtirilsa aralash ko‘paytma ishorasini almashtiradi. Masalan, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$

**Misol.** Uchlari $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ va $D(3;7;2)$ nuqtalardan iborat uchburchakli piramidaning $BCD$ yoqiga tushirilgan balandligini hisoblang.

**Yechish.** Geometriya kursidan ma'lumki piramidani hajmi $V_{pir}=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot h$ formula orqali hisoblanadi.Bu yerdan $h=\frac{3V_{pir}}{S_{BCD}}$. $BCD$ yoqiga tushirilgan balandligini hisoblash uchun piramidaning hajmi va $BCD$ yoq yuzini hisoblashimiz kerak. $S_{BCD}$ ni topish uchun $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ vektorlardan foydalanamiz. Ularni koordinatalarini topamiz: $\overline{BC}(4;-1;-2)$, $\overline{BD}(1;4;-3)$. $S_{BCD}$ yuzani hisoblash uchun vektor ko'paytmadan foydalanamiz.

$$\overline{BC}\times\overline{BD}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -1 & -2\\ 1 & 4 & -3\end{vmatrix}=11\bar{i}+10\bar{j}+17\bar{k}.$$

(9) formulaga ko'ra

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{BC}\times\overline{BD}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|11\bar{i}+10\bar{j}+17\bar{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\frac{\sqrt{510}}{2}\text{ kv.birlik.}$$

Endi hajmni hisoblash uchun vektorlarni aralash ko'paytmasidan foydalanamiz. Buning uchun $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ vektorlarni koordinatalarini topamiz: $\overline{AB}(1;3;4)$, $\overline{AC}(6;2;2)$, $\overline{AD}(3;7;1)$.Bu vektorlarni aralash ko'paytmasini (10) ga ko'ra hisoblaymiz:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}=120.$$

(12) formulaga ko'ra

$$V_{pir}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|120|=20\text{ kub birlik.}$$

Endi $h=\frac{3V_{pir}}{S_{BCD}}$ dan foydalanib balandlikni hisoblaymiz.

$$h=\frac{3V_{pir}}{S_{BCD}}=\frac{3\cdot 20}{\sqrt{510}}=2\sqrt{\frac{30}{17}}.\text{ uzunlik birlik.}$$

## 5.7. Vektorlarni kollinearlik va komplanarlik shartlari

Kollinear vektorlarni $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)=\lambda\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ deb yozishmumkin. Shuning uchun ham $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni kollinearlik sharti quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\quad(13)$$

Agar nolga teng bo'lmagan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0\qquad(14)$$

### Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ \varphi=\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$ berilgan. $|\vec{c}|=2\vec{a}-3\vec{b}$ vektorning modulini toping.

2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi=60°$ burchak tashkil etadi, shu bilan birga $|\vec{a}|=5$ va $|\vec{b}|=8$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $|\vec{a}+\vec{b}|$ va $|\vec{a}-\vec{b}|$ lar aniqlansin.

3. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar va $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=12$ bo'lsa, $|\vec{a}+\vec{b}|$ va $|\vec{a}-\vec{b}|$ lar aniqlansin.

4. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ va $\vec{b}=-\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlariga qurilgan parallelogramm diagonallari orasidagi burchakni toping.

5. Quyidagi $\vec{a}=(3;-6;-1)$, $\vec{b}=(1;4;-5)$, $\vec{c}=(3;-4;12)$ vekrorlar berilgan. $pr_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ ni toping.

6. $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ birlik vektorlar quyidagi $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=0$ shartni qanoatlantirsa, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1$ ni toping.

7. $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}$ vektorning $\vec{a}$ vektorga perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

8. Uchlari $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$ va $C(3;-2;1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning B uchidagi ichki burchagi topilsin.

9. Oz o'qiga perpendikulyar $\vec{x}$ vektor $\vec{x}\cdot\vec{a}=9$ va $\vec{x}\cdot\vec{b}=-4$ shartlarni qanoatlantirsin. $\vec{x}$ vektorni toping.

10. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ vektorga kollinear shunday $\vec{b}$ vektorni topingki, $\vec{a}\cdot\vec{b}=28$ shartni qanoatlantirsin.

11. Koordinata o'qlari va $M(-2;3;1)$ nuqtaning radius vektori orasidagi burchaklarni toping.

12. Koordinata boshiga $\overline{F_1}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ va $\overline{F_2}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ kuchlar qo'yilgan. Natijaviy kuchni koordinata boshidan $M(2;-1;-1)$ nuqtasiga ko'chirishda bajargan ishini toping.

13. Bir nuqtaga qo'yilgan uchta kuch berilgan: $\overline{F_1}=\{3;\ -4;\ 2\}$, $\overline{F_2}=\{2;\ 3;\ -5\}$ va $\overline{F_3}=\{-3;\ -2;\ 4\}$. Shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisining qo'yilish nuqtasi to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanib, $M_1(5;3;-7)$ holatdan $M_2(4;-1;-4)$ holatga ko'chganda, teng ta'sir etuvchi bajargan ish hisoblansin.

15. $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$ va $\vec{n}=5\vec{a}-4\vec{b}$ perpendikulyar bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.

16. $\overline{F}=(3;1;2)$ kuch ostida $M(2;-1;-3)$ nuqtadan $N(5;3\lambda-2;4)$ nuqtaga ko'chganda, 13 joul ish bajaradi. Ko'chish yo'li uzunligini hisoblang.

17. Kvadratning uchidan qarshi tomonlarni teng ikkigabo'luvchi to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Usha tug'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

18. $\vec{a}=(3;-1;-2)$ va $\vec{b}=(1;2;-1)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\vec{a}\times(2\vec{a}+\vec{b})$ ni toping.

19. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi=\pi/6$ burchakni hosil qiladi. Agar $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=5$ bo'lsa $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ni hisoblang.

20. Agar $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=13$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=36$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni toping.

21. $\vec{a}=\{2;-1;1\}$ va $\vec{b}=\{2;3;6\}$ vektorlar orasidagi burchak sinusi hisoblang.

22. Agar $\vec{a}=(3;1;2)$, $\vec{b}=(2;7;4)$, $\vec{c}=(1;2;1)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ni toping.

23. Uchlari $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak-ning yuzini toping.

24. Qavslarni ochib quyidagilarni soddalashtiring.

a) $2\vec{i}(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}(\vec{i}\times\vec{j})$

b) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$

c) $(3\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$

25. Uchburchakning uchta uchi $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ va $C(1;3;-1)$ lar berilgan. Uchburchakning B uchidan AC tomoniga balandlik tushirilgan. Ushbu balandlikni uzunligi topilsin.

26. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=\{4;-2;-3\}$ va $\vec{b}=\{0;1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib, $Oy$ o'qi bilan o'tmas burchak hosil qiladi. $\vec{x}$ vektorning uzunligi $|\vec{x}|=26$ bo'lsa, uning koordinatlarini aniqlang.

27. $\vec{m}$ vektor $Oz$ o'qiga hamda $\vec{a}=\{8;-15;3\}$ vektorga perpendikulyar va $OX$ o'qi bilan o'tkir burchak tashkil etadi. $|\vec{m}|=51$ ekani ma'lum bo'lsa, uning koordinatlarini toping.

28. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ va $\vec{b}=\{1;-1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar hamda $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$ tenglikni qanoatlantiradi. $\vec{x}$ vektorni aniqlang.

29. Ayniyatni isbotlang: $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

30. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlaro'zaro $45^0$ burchak tashkil etadi. Agar $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$ bo'lsa, $\vec{a}-2\vec{b}$ va $3\vec{a}+2\vec{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzini toping.

31. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlaro'zaro perpendikulyar vao'ng uchlikni tashkil etadi. Ularning uzunliklari $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ berilgan. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ hisoblansin.

32. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{6}$ ni tashkil qiladi. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{c}|=3$ bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

33. Quyidagi uchta vektor berilgan: $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3;-2;5\}$. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ hisoblansin.

34. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$ vektorlardan parallelepiped yasalsin va uning hajmi topilsin.

35. $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ va $D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishini ko'rsating.

36. Uzunliklari 2 ga teng bo'lgan va koordinatalar burchaklarining bissektrisalari bo'yicha yo'nalgan $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ va $\overline{OC}$ vektorlarda yasalgan tetraedrning hajmi topilsin.

37. $\alpha$ ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=(1;1;\alpha)$, $\vec{b}=(0;1;0)$ va $\vec{c}=(3;0;1)$ vektorlar komplanar bo'ladi?

38. Uchlari $A(1;-2;2)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;-2;8)$, $D(1;1;10)$ nuqtalardan iborat piramidaning hajmini va $D$ uchidan tushirilgan balandligini toping.

## Mavzuni mustahkamlash uchuno'rgatuvchi testlar

| | |
|---|---|
| kkita kolleniar vektorlarni vektor ko'paytmasi nimaga teng? | A. -3 |
| 2. $\overline{F}(4;1;-2)$ kuchta'sirida $M_1(2,-1,-3)$ nuqtadan $M_2(5;3;-2)$ nuqtaga ko'chgandaqan chaish bajaradi. | B. $-48\overline{i}-81\overline{j}+30\overline{k}$ |
| 3. $\overline{a}=\{1;2;7\}$, $\overline{b}=\{-4;2;-1\}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $(3\overline{a}-\overline{b})\times\overline{b}$ ni toping. | C. 0 |
| 4. $\alpha$ning qanday qiymatida $\overline{a}=\{\alpha;3;1\}$, $\overline{b}=\{5;-1;2\}$, $\overline{c}=\{-1;5;4\}$ vektorlar komplanar bo'ladi. | D. 3 |
| 5. Uchlari $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$va $D(4;1;3)$ nuqtalardan iborat tetraedrning hajmi hisoblansin. | E. 18 |
| | F.14 |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

# III-BOB. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA

## 6-§. KOORDINATALAR SISTEMASI

**Reja:**

1. Haqiqiy sonlar o‘qi
2. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi.
3. Tekislikdagi ikki nuqtasi orasidagi masofa.
4. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish.
5. Qutb koordinatalar sistemasi.
6. Nuqtaning qutb va Dekart koordinatalari orasidagi bog‘lanish.
7. Koordinatalarni almashtirish.

**Adabiyotlar:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** natural son, butun son, ratsional son, irratsional son, haqiqiy son, son o‘qi, masshtab, sonning absolyut qiymati, Dekart sistemasi, nuqtaning
koordinatalari, koordinata sistemasi, abssissa, ordinata, applikata, oktant, qutb koordinatalari, koordinatalarni almashtirish.

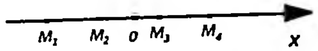
### 6.1. Haqiqiy sonlar o‘qi

Sonlar o‘qi yoki o‘q deb sanoq boshi-koordinatalar boshi, musbat yo‘nalish hamda uzunligi bir birlikka teng sanaluvchi kesma-o‘lchov birligi tanlangan to‘g‘ri
chiziqqa aytiladi. 0 dan o‘ng tomonda joylashgan $x$ sonlar musbat, 0 dan chap tomonda joylashgan $x$ sonlarg esa manfiy sonlar mos keladi.

Haqiqiy sonlar, haqiqiy sonlar o‘qida bir qiymatli aniqlanadi va aksincha sonlar o‘qining har bir nuqtasiga bitta haqiqiy son mos keladi.

$x$ haqiqiy son sonlar o‘qida uni tasvirlovchi $M$ nuqtaning koordinatasi deb aytiladi va $M(x)$ ko‘rinishda yoziladi.

13-chizmada –5, -1.5, 1.2, 4 haqiqiy sonlarni sonlar o‘qida mos ravishda tasvirlovchi $M_1(-5)$, $M_2(-1,5)$, $M_3(1,2)$ va $M_4(4)$, nuqtalar ko‘rsatilgan.




*13-chizma*

Sonlar o'qining $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalari orasidagi masofa

$$d = |x_2 - x_1| \qquad (1)$$

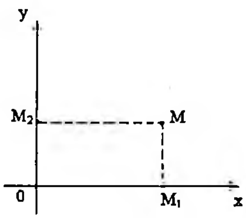
formula yordamida topiladi.

### 6.2. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi

Yuqorida keltilgan ma'lumotlarda ko'rdikki, to'g'ri chiziq nuqtalarining o'rni bitta haqiqiy son ya'ni uning koordinatasi bilan to'la aniqlanadi. Tekislik nuqtalarining o'rni bir juft sonlar bilan aniqlanadi.

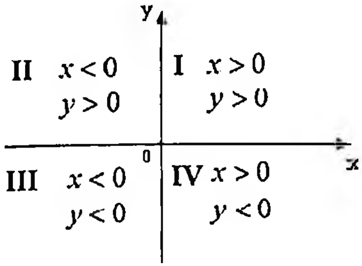
Tekislikda bir xil o'lchov birligiga ega, O nuqtada to'g'ri burchak ostida kesishuvchi O$x$, O$y$ o'qlar berilgan bo'lsin. O$x$ va O$y$ o'qlari joylashgan tekislik koordinatalar tekisligi deb aytiladi va 0$xy$bilan belgilanadi (14-chizma).

$M$koordinata tekisligining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, shu nuqtadan $Ox$ va $Oy$ o'qlariga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazilganda ular o'qlar bilan $M_1$ va $M_2$ nuqtalarda kesishadi. $M_1(x)$nuqta $M$ nuqtaning absissasi, $M_2(y)$ esa ordinatasi deyiladi. Demak, O$xy$ koordinatatekisligining istalgan $M$ nuqtasiga yagona juft $(x;y)$ koordinatalari mos keladi.

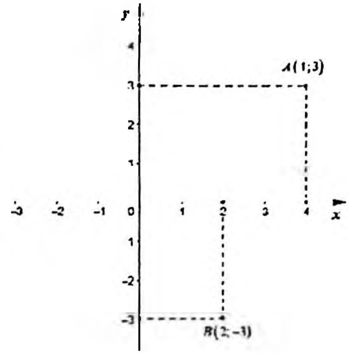



*14-chizma*

O$x$o'q abssissalar o'qi, O$y$ o'q esa ordinatalar o'qi deyiladi. O'qlarning kesishish nuqtasi O koordinatalar boshideyiladi. Koordinata o'qlari koordinata tekisligini choraklar deb ataluvchi to'rtta qismlarga ajratadi (15-chizma)




*15-chizma*



*16-chizma*

**Misol.** Koordinatalar tekisligida $A(4;3)$ va $B(2;-3)$ nuqtalarni yasang.

**Yechish.** Abssissalar o‘qi O$x$ da koordinatasi 3 ga teng $A_1$ nuqtani hamda ordinatalar o‘qi O$y$ da koordinatasi –2 ga teng bo‘lgan $A_2$ nuqtalarni olamiz. $A_1$ nuqtadan O$x$o‘qqa perpendikulyar, $A_2$ nuqtadan O$y$ o‘qqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi A izlanayotgan nuqta bo‘ladi (16-chizma). B nuqtani ham shunday tasvirlaymiz.

### 6.3. Tekislikdagi ikki nuqtasi orasidagi masofa

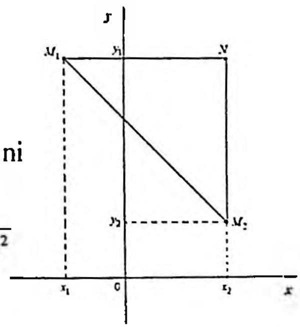
$Oxy$ tekisligida berilgan $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish formulasini 17-chizmadan foydalanib osongina keltirib chiqaramiz.

$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |M_2N|^2$,

$|M_1N| = |x_2 - x_1|$, $|M_2N| = |y_2 - y_1|$.

Bu yerda biz gepotenuzani ya’ni $d = |M_1M_2|$ ni topamiz:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |M_2N|^2} = = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



*17 – chizma*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2)$$

(2) formula tekislikda ikki nuqtasi orasidagi masofani topish formulasidir.

**Misol.**$M_1$ (-1; 3) va $M_2$(2; -1) nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

**Yechish.** Berilgan nuqtalar orasidagi masofani topish uchun (2) formuladan foydalanamiz.

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(2-(-1))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5 \textit{ uzunlik birlik}.$$

## 6.4. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

*Oxy* tekislikda $M_1(x;y)$ va $M_2(x;y)$ nuqtalar berilganda $M_1M_2$kesmani biror $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}>0$ nisbatda bo‘luvchi $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

formulalardan foydalanamiz.

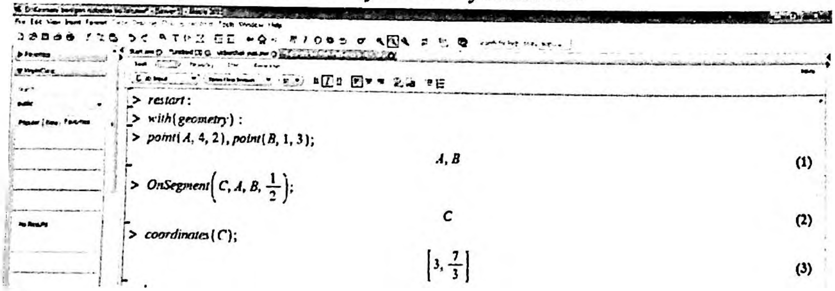
Xususiy holda, kesma o‘rtasi $M(x;y)$ koordinatalari $\lambda=1$ bo‘lgani uchun

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4)$$

formula bilan topiladi.

**Misol.** Uchlari $A(4;2)$, $B(1;3)$ nuqtalarda bo‘lgan kesmani $\lambda=\frac{1}{2}$ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaningkoordinatalarini toping.

Bu misolni Maple dasturidan foydalanib yechamiz.



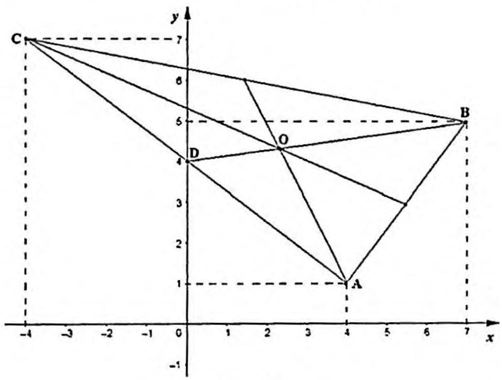
**Misol.** Uchlari $A(4;1)$, $B(7;5)$ va $C(-4;7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari kesishgan $O$ nuqtasini koordinatalarini toping.

**Yechish.** Medianalar kesishgan nuqtani topishni ikkita usulini ko'rib o'tamiz. Uchburchakni medianasi deyilganda bir burchagi uchidan chiqib qarshisidagi tomonni teng ikkiga bo'luvchi kesmani tushunamiz. (18-chizma)

*1-usul.* Planametriya bo'limidan bizga ma'lumki, uchlari $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ va $C(x_C;y_C)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari kesishishgan nuqtasini topish uchun, uchburchakni mos koordinatalarini qo'shib uchga bo'lar edik, ya'ni

$$x_0 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_0 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Shunga ko'ra $x_0 = \frac{4+7+(-4)}{3} = \frac{7}{3}$, $y_0 = \frac{1+5+7}{3} = \frac{13}{3}$.




*18-chizma*

***2-usul.*** Bizga ma'lumki, uchburchakning medianalari kesishganda kesishgan nuqtasida medianalari uchdan boshlab hisoblaganda $\lambda = 2:1$ nisbatda bo'linadi. Biz shu uchburchakning B uchida mediana o'tkazamiz.

Bu mediana $AC$ tomonni $D(x_D;y_D)$ nuqtada teng ikkiga bo'lgani uchun (4) formulaga ko'ra

$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$, $y_D = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$. Endi medianalar kesishgan nuqtasini (3) formulaga ko'ra topamiz.

$$\lambda=\frac{BO}{OD}=\frac{2}{1}=2,\ x_0=\frac{7+2\cdot 0}{1+2}=\frac{7}{3},\ y_0=\frac{5+2\cdot 4}{1+2}=\frac{13}{3},\quad O\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right).$$

Demak medianalar kesishish nuqtasi $O\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$dan iborat bo‘ladi.

Uchlari $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\ M_3(x_3;y_3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakni yuzi

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]\right| \qquad (5)$$

formula yordamida topiladi.

Agar $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$ bo‘lsa, $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\ M_3(x_3;y_3)$ nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

**Misol.** Uchlari $A(2;3),\ B(3;1),\ C(5;4)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzini hisoblang.

**Yechish.** Bu uchburchakni yuzini hisoblash uchun (5) dan foydalanamiz.

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]\right|=\frac{1}{2}\left|\left[2(1-4)+3(4-3)+5(3-1)\right]\right|=\frac{7}{2}$$

Bu misolni Maple dasturidan foydalanib ham hisoblab ko‘ramiz.

```
>restart:
>with(geometry):
>point(A, 2, 3), point(B, 3, 1), point(C, 5, 4);
                        A, B, C
>triangle(ABC, [A, B, C]); area(ABC);
                          ABC
                          7/2
```

$M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\dots,M_n(x_n;y_n)$nuqtalarko‘pburchakninguchlaribo‘lsa , uningyuzi

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-y_1x_2+x_2y_3-y_2x_3+\dots+x_{n-1}y_n-y_nx_n+x_ny_1-y_nx_1\right| \qquad (6)$$

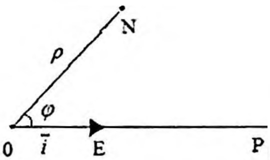
formulaorqalitopiladi.

## 6.5. Qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikda Dekartning to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidan keyin ko‘p qo‘llaniladigan koordinatalar sistemalaridan biri qutb koordinatalar sistemasidir.

Shu Sistema bilan tanishaylik. Yo‘nalishli tekislikda *0* nuqta va bu nuqtadan chiquvchi $OP$ nur va $OP$ nurda yotuvchi $\overline{OE}=\bar{i}$ birlik vector olamiz.


*19-chizma*



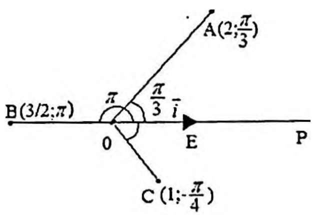

20-*chizma*

Tekislikda $(O;\bar{i})$ qutb koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy $N$ nuqta berilgan bo‘lsin, bu nuqtaning tekislikdagi vaziyatini ma’lum tartibda olingan $\rho$ va $\varphi$ ikkita son bilan aniqlanadi.

Bu yerda $\rho=|ON|$ ni $N$ nuqtaning qutb radiusi, $\varphi=(OP^{\wedge}ON)$ ni $N$ nuqtaning qutb burchagi deyiladi. Ularni birgalikda $N$ nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va $N(\rho,\varphi)$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar $0\le\rho<\infty$, $0\le\varphi<2\pi$ o‘zgarsa, tekislikni har bir nuqtasi qutb koordinatalar bilan ifodalanadi.

**Misol.** $A(2;\frac{\pi}{3})$, $B(1,5;\pi)$, $C(1;-\frac{\pi}{4})$. Nutalarni qutb kordinatalar sistemasiga tasviri 21- chizmada ko‘rsatilgan nuqtalardir.




*21-chizma*

## 6.6. Nuqtaning qutb va Dekart koordinatalari orasidagi bog‘lanish

Tekislikdagi $N$ nuqtaning qutb koordinatalar $\rho, \varphi$; Dekart koordinatalari $x$, $y$ orasidagi bog‘lanish, 22- chizmadan

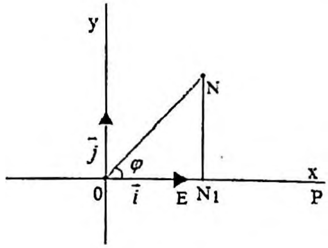
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \qquad (7)$$

formulalar orqali ifodalanishi ko‘rinib turibdi.

Bu yerda

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{y}{x};$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (8)$$

formuladan topiladi.




*22-chizma*

**Misol.** Qutb koordinatalarda berilgan $A\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$ nuqtalarni to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidagi koordinatalari topilsin.

**Yechish.** Nuqtani (1) ifodadan foydalanib Dekart koordinatalarini aniqlaymiz (11-chizma).

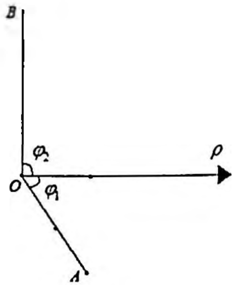
$$x = \rho\cos\varphi = 2\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1, \quad y = \rho\sin\varphi = 2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

Demak $A$ nuqtani dekart koordinatalar sistemasida $A\left(1;-\sqrt{3}\right)$ bildiradi. Shunday tartibda $B$ nuqtanikini ham topamiz.

$$x = \rho\cos\varphi = 4\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 4\cdot 0 = 0,$$

$$y = \rho\sin\varphi = 4\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 4\cdot 1 = 4.$$

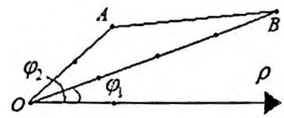
$B$ nuqtani Dekart koordinatalar sistemasida $B(0;4)$ ni anglatadi.




*23-chizma*

**Misol.** Qutb koordinatalar sistemasida

$A\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa ular orasidagi masofani aniqlang.



*24-chizma*

**Yechish.** A va B nuqtalar orasidagi masofani toppish uchun $\Delta OAB$ uch burchak uchun kosinuslar teoremasidan foydalanamiz ya’ni,

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\cdot|OB|\cos(\angle AOB)$$

$$|AB| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 - 2\cdot|OA|\cdot|OB|\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \sqrt{20 - 16\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{20 - 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}}$$ *uzunlik birlik.*

## 6.7. Koordinatalarni almashtirish

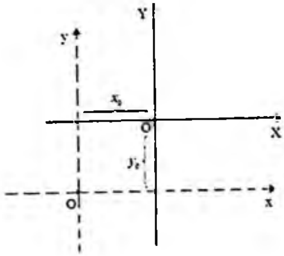
Ko‘p hollarda berilgan masala yechimini soddalashtirish, chiziq tenglamasini ixcham va qulay ko‘rinishda yozish uchun berilgan $Oxy$ Dekart koordinatalar sistemasidan boshqa bir $O'XY$ Dekart koordinatalar sistemasiga o‘tishga to‘g‘ri keladi. Bunda quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin.

***I-hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish.*** Bunda berilgan $Oxy$ koordinatalar sistemasining boshi $O(0;0)$ biror $O'(x_0;y_0)$ nuqtaga parallel ko‘chiriladi. Bunda $Ox$ va $Oy$ o‘qlarning yo‘nalishi va holati o‘zgarmay qoladi va shu sababli bu yangi hosil bo‘lgan sistemani $O'XY$ kabi begilaymiz (25-chizma).

Bu eski $Oxy$ sistemadagi $x$ va $y$ koordinatalar bilan yangi $O'XY$ sistemadagi $X$ va $Y$ koordinatalar orasidagi bog‘lanish

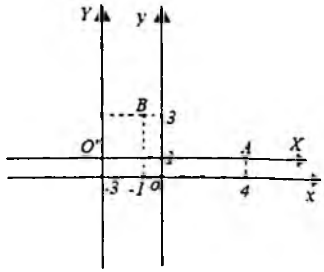
$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \qquad (9)$$

formulalar bilan ifodalanadi.





25-chizma





26-chizma

**Misol.** Parallel ko‘chirishda yangi koordinatalar boshi $(-3;1)$ nuqtaga keltirilsa, $A(4;1)$, $B(-2;3)$ nuqtalarning yangi koordinatalari topilsin.

**Yechish.** Bu yerda $x_0=-3, y_0=1$ bo‘lsa, A nuqtani yangi koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini topamiz (26-chizma).

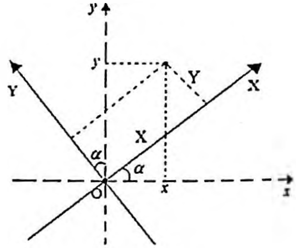
$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 4+3 \\ Y_A = 1-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 7 \\ Y_A = 0 \end{cases}$$

$O'XY$ koordinatalar sistemasida $A(7;0)$ nuqtani bildiradi. Endi B nuqtaning koordinatasini topamiz.

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -2+3 \\ Y_B = 3-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = 1 \\ Y_B = 2 \end{cases}$$

B nuqta $O'XY$ koordinatalar sistemasida $B(1;2)$ nuqtani bildiradi.

***II-hol. Koordinatalar sistemasini burish.*** $Oxy$ koordinatalar Sistemasining boshi $O(0;0)$ nuqta o‘zgarmasdan, $Ox$ va $Oy$ o‘qlar bir xil $\alpha$ burchakka buriladi. Bunda hosil bo‘lgan yangi sistemani $OXY$ deb belgilaymiz (27-chizma).





27-chizma

Bunda eski $Oxy$ sistemadagi $x$ va $y$ koordinatalar bilan yangi $OXY$ Sistemadagi $X$ va $Y$ koordinatalar orasidagi bog‘lanish

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (10)$$

formulalar bilan ifodalanadi.

**Misol.** Koordinata o‘qlarini $\alpha = 30^0$ ga burib $A(1;1)$, $B(\sqrt{3};2)$ nuqtalar hosil qilingan. Bu nuqtalarning eski sistemadagi koordinatalarini toping.

**Yechish.** Demak $A$ nuqtani yangi koordinatalar sistemasidagi absissasi $X=1$, ordinatasi $Y=1$ ga teng. Biz A va B nuqtalarni eski koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini (10) dan foydalanib topamiz.

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 1\cdot\cos30^0 - 1\cdot\sin30^0 \\ y_A = 1\cdot\sin30^0 + 1\cdot\cos30^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ y_A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

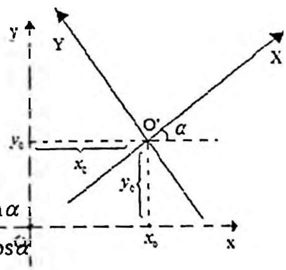
$A\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$.

$$\begin{cases} x_B = \sqrt{3}\cdot\cos30^0 - 2\cdot\sin30^0 \\ y_B = \sqrt{3}\cdot\sin30^0 + 2\cdot\cos30^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2} \\ y_B = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2} \end{cases}. \; B\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$$

***III-hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burish.*** Bunda dastlab berilgan $Oxy$ koordinatalar sistemasining boshi $O(0;0)$ biror $O'(x_0;y_0)$ nuqtaga parallel ko‘chiriladi. So‘ngra hosil bo‘lgan $O'XY$ sistemaning o‘qlari bir xil $\alpha$ burchakka buriladi. Natijada yangi hosil bo‘lgan sistemada ham koordinata boshi, ham o‘qlar o‘zgaradi (28-chizma).

Bunda eski $Oxy$ sistemadagi $x$ va $y$ koordinatalar bilan yangi $O'XY$ sistemadagi $X$ va $Y$ koordinatalar orasidagi bo‘g‘lanish (11) formulalar bilan ifodalanadi.

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha + x_0 \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha + y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} X = (x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha \\ Y = -(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha \end{cases} \qquad (11)$$



*28-chizma*

## Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. Koordinatalar boshiga nisbatanA(+5), B(-2) vaC($\sqrt{3}$) nuqtalarga simmetirik nuqtalar topilsin.

2. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan $M(3;-4)$ nuqta berilgan. $M$ nuqtaga

a) koordinatalar boshiga

b) abssissa o'qiga

c) ordinata o'qiga

d) birinchi va uchinchi koordinata burchaklarining bissektrisasiga

e) ikkinchi va to'rtinchi koordinata burchaklarining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqta topilsin.

2. Koordinata o'qlarida (-5;9) nuqtadan 15 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.

3. Quyidagi hollarning har birida $A$, $B$ nuqtalar orasidagi $d$ masofa topilsin:

1) $A(4;3), B(7;7)$ 2) $A(12;-1), B(7;7)$ 3) $A(3;-1), B(-2;4)$

4. Koordinata o'qlarida joylashgan $(1;1)$, $(3;7)$ nuqtalardan teng uzoqlikdagi nuqtalar topilsin.

5. $Oy$ o'qidagi koordinatalar boshidan va $(-8;-4)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin.

6. Tekislikda $A(10;4)$ va $B(-2;8)$ nuqtalar berilgan. $AB$ kesmani $C$ va $D$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo'laklarga bo'lindi. Shu $C$, $D$ nuqtalar koordinatalarini toping.

7. Uchlari $A(-3;-3), B(-1;3), C(11;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning tomonlari uzunliklarini va uchburchak yuzasini hisoblang.

8. Kvadratning qarama-qarshi ikkita $A(-3;2), B(5;-4)$uchlari berilgan. Qolgan ikkita $C$, $D$ uchlari topilsin.

9. Uchlari $A(2;-1), B(4;2), C(5;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakni teng yonli uchburchak ekanligini ko'rsating va uning yuzasini hisoblang.

10. Uchlari $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$ nuqtalarda bo'lgan parallelgramm-ning to'rtinchi $D$ uchi koordinatalari va dioganallari uzunliklarini toping.

11. Qutb koordinatalari quyidagi qiymatlarga ega bo'lgan nuqtalar tasvirlansin:

a) $\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\left(4;-\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\left(5;-\frac{\pi}{2}\right)$

d) $(1;0)$ e $\left(\sqrt{3};\pi\right)$ f) $\left(\sqrt{2};\frac{2\pi}{3}\right)$

12. $A\left(4;\frac{\pi}{3}\right)$ va $B\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right)$ nuqtalar berilgan.

a) qutb o'qiga nisbatan simmetrik,

b) qutb boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalarini toping.

13. Ikkita qarama-qarshi uchlari qutb koordinatalarda $A\left(2;-\frac{\pi}{6}\right), B\left(2;-\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtalar orqali berilgan bo'lsa, kvadratning yuzini toping.

14. O'qlarini $\alpha=60^0$ ga burib $A(1;1), B\left(\sqrt{3};1\right), C\left(0;-\sqrt{3}\right)$ nuqtalar hosil qilingan. Bu nuqtalarning eski sistemadagi koordinatalarini toping.

**Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar.**

| | |
|---|---|
| 1. $A(2;-3)$ nuqtaga koordinat boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtani toping. | A. $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ |
| 2. $C(3;5)$ nuqta $AB$ kesmani $AC:CB=3:4$ kabi nisbatda bo'lsa, A uchining koordinatalarini toping. Bunda $B(-1;1)$. | B. $(-2;3)$ |
| 3. Qutb koordinatalardagi $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$ nuqtani Dekart koordinatalar sistemasining koordinatalarida ifodalang. | C. $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ |

| | |
|---|---|
| 4. Uchlari $A(1;4)$, $B(-5;0)$, $C(-2;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalari kesishish nuqtasini toping. | D. $(-10;5)$ |
| 5. Koordinata o'qlarini $\alpha=30^0$ga burib $A(1;1)$ nuqtani hosil qilgan bo'lsa, eski koordinatalarini toping. | E. $(0;5)$ |
| | F. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 7-§.TEKISLIKDAGI TO‘G‘RI CHIZIQ

**Reja:**

1. Tabiiy, texnik va iqtisodiy jarayonlarda tekislikdagito‘g‘ri chiziqning tadbiqi.
2. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to‘g‘ri chiziq tenglamasi.
3. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.
4. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi.
5. To‘gri chiziqlarning o’zaro joylashishi.
6. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
7. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.
8. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.
9. To‘g‘ri chiziqlar dastasi.
10. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

**Adabiyotlar:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** to‘gri chiziq, burchak koeffitsient, boshlang‘ich ordinata, parallellik, perpendikulyarlik, burchak, analitik geometriya.

### 7.1. Tabiiy, texnik va iqtisodiy jarayonlarda tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning tadbiqi

Fazodagi jismlarning yoki bitta jism qismlarini bir-biriga nisbatan harakati mexanik harakat deyiladi. Mexanikada jismlarning harakatini konkret vaziyatlardan kelib chiqib, turli fizik modellardan foydalaniladi. Eng soda fizik model moddiy nuqtadir. Qaralayotgan shart-sharoitlarda o‘zining o‘lchamlarini harakat o‘lchovlariga nisbatan hisobga olmasa ham bo‘ladigan, massaga ega bo‘lgan jism moddiy nuqta deyiladi.

Harakatlanayotgan moddiy nuqta berilgan hisob sistemasida chizadigan chiziq (qoldiradigan iz) trayektoriya deb ataladi. Trayektoriya to‘g‘ri yoki egri chiziqli bo‘ladi. Trayektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli harakatni qaraymiz. To‘g‘ri chiziqli trayektoriy bo‘ylab harakatda bosib o‘tilgan masofa yo‘l deb ataladi. Yo‘l skalyar miqdor bo‘lib, $S = v \cdot t$ formula bilan topiladi. Bu yerda $v-$ vaqt birligi ichida bosib o‘tilgan yo‘l, $t-$ vaqt. Bosib o‘tilgan yo‘l va vaqt o‘zaro chiziqli bo‘lgan, eng ko‘p ishlatiladigan formula hosil bo‘ldi.

Shunday qilib biz fizik va boshqa jarayonlarda uchraydigan masalalarda ikkita o‘zgaruvchi o‘rtasidagi munosabat chiziqli bo‘lgan holatlarni matematik modeli – to‘g‘ri chiziq tenglamasidan iborat bo‘lishligini ko‘rdik.

Shuni ta’kidlash lozimki, ikkita o‘zgaruvchi chiziqli bo‘ladigan ko‘plab fizik, ximik, biologic, iqtisodiy va boshqa tabiiy jarayonlarni ham matematik modeli (qonuniyati) to‘g‘ri chiziq tenglamasi orqali ifodalanadi.

Boshqacha qilib aytganda, to‘g‘ri chiziq tenglamasi o‘zaro to‘g‘ri proporsiaonal bo‘lgan ikkita o‘zgaruvchili qonuniyatlarni $y=kx$, umumiy holda $y=kx+b$ ko‘rinishidagi matematik modeldir. Bu to‘g‘ri proporsional bog‘langan o‘zgaruvchilarning geometrik tasviri to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

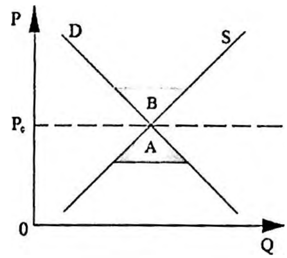
Quyida tekislikdagi to‘g‘ri chiziq mavzusiga modellashtiradigan fizik, ximik, biologik va iqtisodiy jarayonlar masalalaridan bir nechta misol keltiramiz.

1. Bikrligi$k$ga teng bo‘lgan prujinaga mahkamlangan M moddiy nuqta $x$ masofaga chozib qo‘yib yuborilganda unga ta’sir etuvchi elastiklik kuchi $x$-ko‘chishga to‘g‘ri proporsionaldir, $F=kx$ (Guk qonuni).

2. M moddiy nuqta Yerning tortish kuchi ta’sirida $v_0$ boshlang‘ich tezlik bilan erkin tushayotgan bo‘lsa, uning ixtiyoriy paytdagi tezligi $v=v_0+gt$ to‘g‘ri chiziq tenglamasi orqali topiladi. Bu yerda $g-$erkin tushish tezlanishi.

3. Bozorga chiqarilgan mahsulotning narxi $P$, odatda chiqarilgan mahsulot miqdori $Q$ ga to‘g‘ri proporsional bo‘ladi. Bunda taklif ortganda $P=kQ$,

$k>0-$koeffitsiyent, o‘suvchi to‘g‘ri chiziqni, talab ortganda esa $P=-\mu Q$, $\mu>0-$ koeffitsiyent, kamayuvchi to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi (29-chizma). Bu to‘g‘ri chiziqlarni kesishish nuqtasi $P_0$ mahsulot narxini muvozanatlashgan bahosini belgilaydi.




*29-chizma*

4. Biron $t_0$ tempraturali muhitga joylashtirilgan jismning sovish tezligi, $v_{sov}$, jismning temperaturasi $T$ va tashqi muhit temperaturasi farqi $T-t_0$ ga to‘g‘ri proporsionaldir, $v_{sov}=-k(T-t_0)$.

5. Ko‘payish uchun qulay sharoitga ega $N_0$ ta bakteriyaning ko‘payish tezligi uning soniga, $(v_N=kN)$ xuddi shuningdek, radioaktiv elementlarining massasi $m(t)$ ni yemirilishtezligi uning massasiga to‘g‘ri proporsionaldir, $v_{m(t)}=-k\,m(t)$.

Shuning uchun matematika tekislikda va fazoda to‘g‘ri chiziq va ular o‘rtasidagi hamda ularning tekislik va boshqa jismlar bilan munosabatlari alohida o‘rganiladi.

$x$, $y$o‘zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. To‘g‘ri chiziqning Dekart koordinatalariga nisbatan tenglamasi chiziqli tenglama bo‘ladi.

## 7.2. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$M_0(x_0;y_0)$nuqtadan o‘tuvchi $\overline{N}=A\overline{i}+B\overline{j}$ vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi

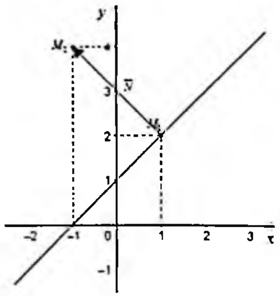
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (1)$$

tenglama orqali topiladi. To‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan har qanday vektorga**to‘g‘ri chiziqning normal vektori**deyiladi. Demak, $\overline{N}=A\overline{i}+B\overline{j}$ vektor (1) tenglama bilan aniqlanuvchi to‘g‘ri chiziqni normal vektori bo‘ladi.

**Misol.** $M_1(1;2)$ va $M_2(-1;4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, $M_1$ nuqtadan o‘tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish.** $\overline{M_1M_2}$ vector to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgani uchun bu vektorni to‘g‘ri chiziqni normal vektori deb olamiz ya’ni, $\overline{N}=\overline{M_1M_2}$. Normalini koordinatalarini topamiz.

$$\overline{N}=\left(x_{M_2}-x_{M_1}\right)\overline{i}+\left(y_{M_2}-y_{M_1}\right)\overline{j}=$$
$$=(-1-1)\overline{i}+(4-2)\overline{j}=-2\overline{i}+2\overline{j}.$$




30-chizma

$M_1$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi (1) formulaga ko‘ra

$$-2\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi(30-chizma).

## 7.3. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi

Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi birinchi darajali tenglama ko‘rinishda ifodalanadi. Haqiqatan ham (1) to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘lishligini (1) dan (2) ni va aksincha (2) dan (1) ni keltirib chiqarib isbotlash mumkin.

Xususiy hollar.

1. Agar (2) da $C=0$ bo‘lsa, $Ax+By=0$ bo‘lib koordinata boshidan o‘tgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

2. Agar (2) da $A=0$ bo‘lsa, $By+C=0$ bu $Ox$o‘qiga parallel bo‘lgan $Oy$ o‘qini $y=-\dfrac{C}{B}$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

3. Agar $B=0$ bo'lsa, $Ax+C=0$ bu $Oy$o'qiga parallel $x=-\frac{C}{A}$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

4. $C=0$, $B=0$ bo'lsa, $Ax=0 \Rightarrow x=0$ - bu $Oy$o'qining tenglamasi.

5. $C=0$ $A=0$ bo'lsa, $By=0 \Rightarrow y=0$ - bu $Ox$o'qining tenglamasi.

## 7.4. To'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi

Biz to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasida y o'zgaruvchini topadigan bo'lsak ya'ni, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ ko'rinishga keladi. $k=-\frac{A}{B}, b=-\frac{C}{B}$ belgilashlarni kiritsak u holda to'g'ri chiziqni burchak koeffisiyentli tenglamasiga ega bo'lamiz

$$y=kx+b. \qquad (3)$$

Bu yerda $k$ parametr to'g'ri chiziqning yo'nalishini xarakterlaydi va to'g'ri chiziqni burchak koeffitsiyenti deb ataladi. Dekart koordinatalar sistemasida $k$ koeffisiyent to'g'ri chiziq bilan $Ox$o'qining musbat yo'nalishi orasidagi $\alpha$ burchakning tangensiga teng. $k=tg\alpha$ $b$-ozod son.

**Misol.** $Ox$ o'q bilan $135^0$ burchak hosil qiluvchi va $Oy$o'qini $(0;4)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish.** Masalani shartiga ko'ra $Oy$ o'qini $(0;4)$ nuqtada kesib o'tadi, ya'ni $b=4$. Burchak koeffitsiyenti $k=tg135^0=-1$. To'g'ri chiziqni burchak koeffitsiyenti tenglamasiga ko'ra $y=-x+4$.

## 7.5. To'gri chiziqlarningo'zaro joylashishi

***1.Ikki chiziqning kesishish nuqtasi.*** To'g'ri chiziqlar o'zlarining $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ularni kesishish nuqtasining koordinatalarini quyidagi

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

sistemani yechish orqali topiladi. Sistemani yechimi to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini ifodalaydi. Bu sistemani yechimi

$$x=\frac{C_2B_1-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1};\quad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}$$

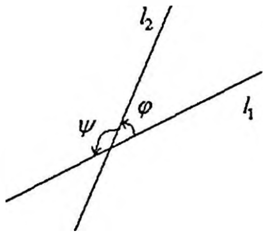
dan iborat bo‘ladi.

***2. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.*** Agar ikkita $l_1$ va $l_2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ burchak koeffitsiyentli tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. va $l_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi orasidagiburchak $\varphi=(l_1\hat{\ }l_2)$, $l_2$ va $l_1$ burchak esa burchak $\psi=(l_2\hat{\ }l_1)$ tushuniladi (31-chizma).

Ular

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\quad tg\psi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$$

formulalar bilan aniqlanadi.




*31-chizma*

Agar to‘g‘ri chiziqlardan qaysi biri birinchi va qaysi biri ikkinchi ekani ko‘rsatilmasdan ular orasidagi o‘tkir burchakni topish uchun

$$tg\varphi=\frac{|k_1-k_2|}{1+k_1k_2}$$

(4)

formuladan foydalaniladi

Agar to‘g‘ri chiziqlar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, u holda (3) formulani quyidagicha ko‘rinishda yozish mumkin:

$$tg\varphi=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{A_1A_2+B_1B_2} \qquad (5)$$

To‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti

$$k_1=k_2 \text{ yoki } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \qquad (6)$$

To‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ yoki } A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{7}$$

### 7.6. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

To‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlarini $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalarda kesib o‘tsin.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{8}$$

Bu tenglamato‘g‘ri chiziqning **kesmalarga nisbatan** tenglamasi deyiladi. (32-chizma).

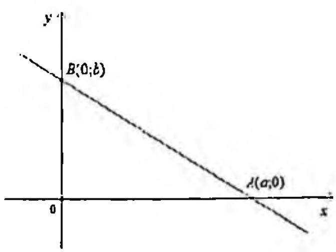
**Misol.** $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari kesishishidan hosil bo‘ladigan shakl yuzasi topilsin.

**Yechish.** $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini (8) ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

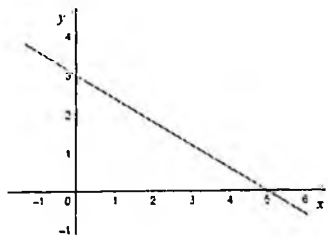
$$3x+5y=15, \quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo‘ladi. Hosil bo‘lgan tekis shakl to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘ladi (33-chizma). Bu uchburchakni yuzasi hisoblash formulasiga ko‘ra

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3=7{,}5 \text{ kv.birlik.}$$




*32-chizma*

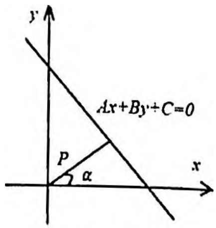



*33-chizma*

## 7.7. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi

To‘g‘ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning $OX$ o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi $\alpha$ berilganda to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad (9)$$



34-chizma

bo‘ladi. (9) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma’lumki, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (34-chizma).

## 7.8. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.

$M(x_0;y_0)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topish

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (10)$$

formula orqali hisoblanadi.

**Misol.** $A(3;\sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

**Yechish.** To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (10) formulaga asosan,

$$d = \left|\frac{2\cdot 3 + \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - 2}{\pm\sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2}}\right| = \left|\frac{6+5-2}{3}\right| = \frac{9}{3}, \qquad d = 3$$

bo‘ladi.

## 7.9. To‘g‘ri chiziqlar dastasi

Tekislikda berilgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va shu tekislikda yotganbarcha to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘ri chiziqlar to‘plami dastasini tashkil etadi.

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (11)$$

(11) tenglamaga berilgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi deyiladi.

## 7.10. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (12)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu tenglamada berilgan nuqtalarning absissalari (ordinatalari) bir-biriga teng $x_1=x_2$ $(y_1=y_2)$bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq $Oy(Ox)$ o‘qqa parallel bo‘lib, uning tenglamasi $x=x_1$ $(y=y_1)$ bo‘ladi.

**Misol.** $M_1(-2;4)$ va $M_2(1;4)$ nuqtalardan o‘tuvchi tog‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish.** (12) formulaga ko‘ra $\frac{x-(-2)}{1-(-2)}=\frac{y-4}{4-4} \Rightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{0}$. Bunday hollarda shartli ravishda maxraji 0 ga teng bo‘lgan kasrni suratini nolga tenglaymiz, $y-4=0$. Demak, $y=4$ Oxo‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi.

**Misol.** $A(5;1)$, $B(1;3)$ uchburchakning ikkita uchi va uning medianalari kesishgan $M(3;4)$ nuqtasi berilgan. Uchburchak tomonlarining tenglamalarni tuzing.

**Yechish.** Uchburchakni uchinchi $C$ uchidan tushgan mediana $AB$ tomonni $D$ nuqtada teng ikkiga bo'ladi. Demak $D(x_D;y_D)$ nuqta $A(x_A;y_A)$ va $B(x_B;y_B)$ nuqtalarni o'rtasida joylashishidan, kesma o'rtasini topish formulalariga ko'ra

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5+1}{2}=3,\quad y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2.$$

Ma'lumki, uchburchakda medianalarning kesishish nuqtasi ularni uchidan boshlab hisoblaganda $2:1$ nisbatda ajratadi. $CD$ mediana uchun quyidagi $\frac{CM}{MD}=\frac{2}{1}=\lambda$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulasiga ko'ra

$x_M=\frac{x_C+\lambda x_D}{1+\lambda}$, $y_M=\frac{y_C+\lambda y_D}{1+\lambda}$ yozamiz. Bundan $C$ uchining koordinatasini

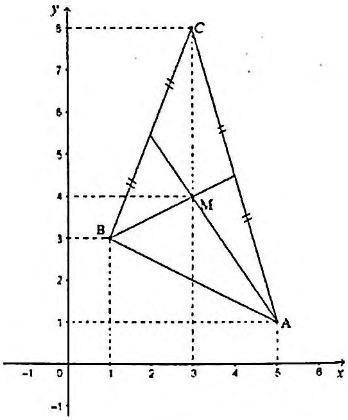
topamiz. $$\begin{aligned} x_C&=(1+\lambda)x_M-\lambda x_D=3\cdot 3-2\cdot 3=3,\\ y_C&=(1+\lambda)y_M-\lambda y_D=3\cdot 4-2\cdot 2=6\end{aligned}$$

Shunday qilib, biz $C(3;8)$ nuqtani topdik. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (12) dan foydalanib, uchburchak tomonlarining tenglamalarini topamiz (35-chizma).

$AB$: $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-5}{1-5}$, bundan $x+2y-7=0$,

$AC$: $\frac{y-8}{1-8}=\frac{x-3}{5-3}$, bundan $7x+2y-37=0$,

$BC$: $\frac{y-8}{3-8}=\frac{x-3}{1-3}$, bundan $5x-2y+1=0$




*35-chizma*

Shu berilgan uchburchakning A B tomonini tenglamasini Maple dasturida tuzib ko'ramiz. Buning uchun Maple ishchi oynasida berilgan $A(5;1)$ va $B(1;3)$ nuqtalarni quyidagi buyruqlar bilan kiritamiz.

>*with*(*geometry*) :

>$point(A, 5, 1), point(B, 1, 3)$;

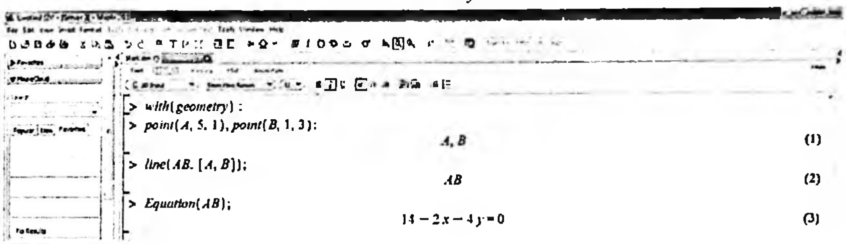
$$A, B$$

>$line(AB, [A, B])$;

$$AB$$

>$Equation(AB)$;

$$14-2x-4y=0$$




**Misol.** $3x+4y-7=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan va $A(3;-1)$ nuqtadan 3 birlik uzoqda joylashgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

**Yechish.** Berilgan to‘g‘ri chiziq umumiy ko‘rinishda berilgan bo‘lib uni (3) formula ko‘rinishda yozib, to‘g‘ri chiziqni burchak koeffitsiyentini topamiz $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$, $k=-\frac{3}{4}$. Tuzadigan tenglamamiz, $y=k_1x+b$ to‘g‘ri chiziqlarni parallelligidan $k_1=k=-\frac{3}{4}$ $y=-\frac{3}{4}x+b$ yoki $3x+4y-4b=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. $A(3;-1)$ nuqtadan $3x+4y-4b=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa 3 birlikka teng ekanligidan, (10) formulaga ko‘ra

$$3=\frac{|3\cdot 3+4\cdot(-1)+b|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow b_1=5,\ b_2=-\frac{5}{2}$$ kelib chiqadi.

Demak izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi.

$$3x+4y-4\cdot(5)=0 \Rightarrow 3x+4y-20=0$$

$$3x+4y-4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow 3x+4y-20=0.$$

## Mustaqilbajarishuchunmashqlar

1. $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$,$M_4(-3;-5)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ nuqtalarning qaysilarning $2x-3y-3=0$ to'g'ri chiziqda yotishi, qaysilari yotmasligi aniqlansin.

2. $2x-3y-12=0$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlansin va shu to'g'ri chiziq chizmada yasalsin.

3. Ikkita $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

4. A B C uchburchakning A B, B C va A C tomonlari mos ravishda $4x-3y-5=0$ $x-3y+10=0$; $x-2=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini koordinatlarini aniqlansin.

5. Parallelogrammning ikkita tomoni tenglamalari $8x+3y+1=0, 2x+y-1=0$ va uning diagonallaridan birining tenglamasi $3x+2y+3=0$ berilgan bo'lsin. Shu parallelogrammning uchlarining koordinatlari aniqlansin.

6. Uchburchakning tomonlari $x+5y-7=0$; $3x-2y-4=0$; $7x+y+19=0$ to'g'ri chiziqlarda yotadi. Uning $S$ yuzi hisoblansin.

7. Ushbu $5x+3y-3=0$ to'g'ri chiziq berilgan. Bu to'g'ri chiziqqa parallel va perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarning burchak koeffisientlari aniqlansin.

8. To'g'ri to'rtburchakning ikkita tomoni tenglamalari $2x-3y+5=0; 3x+2y+15=0$ va uning uchlaridan biri $A(2;-3)$ berilgan. Shu to'g'ri to'rtburchakning qolgan ikkita tomonining tenglamalari tuzilsin.

9. To'g'ri to'rtburchakning ikkita tomonining tenglamalari $x-2y=0$; $x-2y+15=0$ va uning diagonallaridan birining tenglamasi $7x+y-15=0$ berilgan. To'g'ri to'rtburchakning uchlari topilsin.

10. Parallelogrammning ikki tomoni $2x+y-2=0$, $x-y+17=0$ tenglamalar bilan berilgan va uning diagonallari $O(-3{,}5;3{,}5)$ nuqtada kesishadi. Parallelogramm qolgan ikki tomonining tenglamasini tuzing.

11. Ushbu $P(-6;4)$ nuqtaning $4x-5y+3=0$ to‘g‘ri chiziqdagi proeksiyasi topilsin.

12. Ushbu $2x+3y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $P(-5;13)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan Q nuqta topilsin.

13. Berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisienti k hisoblansin:

a) $M_1(2;5)$, $M_2(3;2)$; b) P(-3;1), Q(7;8); c) A(5;6), B(-1;6) d) C(-3;7), D(-3;4)

14. Uchlari $A$(-3;2), $B$(5;-2), $C$(0;4) nuqtalarda joylashgan uchburchakning $BD$ balandlik va $BM$ mediana tenglamalarini tuzing.

15. Uchburchakning $A$(2;-2), $B$(3;-5) va$C$(5;7) uchlari berilgan. Uning $A$ uchidagi ichki burchagining bissektrisasiga$C$ uchidan tushirilgan perpendikulyarning tenglamasi tuzilsin.

16. To‘g‘ri burchakli teng yonli uchburchak gipotenuzasining tenglamasi $3x+2y-6=0$ dan va uchlaridan biri $A(-1;2)$ nuqtadan iborat. Uchburchakning katetlari tenglamalarini tuzing.

18. $ABCD$ parallelogrammning ikkita qo‘shni $A$(-3;-1) va$B$ (2;2) uchlari hamda uning diagonallarini kesishish nuqtasi $O$(3;0) berilgan. Shu parallelogrammning tomonlarini tenglamalari tuzilsin.

19. To‘g‘ri to‘rtburchagning ikkita tomonini tenglamalari $5x+2y-7=0$; $5x+2y-36=0$ va uning diagonali $3x+7y-10=0$ berilgan. Shu to‘g‘ri to‘rtburchagning qolgan tomonlari va ikkinchi diagonalini tenglamalari tuzilsin.

20. Uchburchakning ikki uchi $A(5;1)$, $B(1;3)$ va medianalari kesishish nuqtasi $M(3;4)$ berilgan. Uchburchak tomonlarining tenglamalarini tuzing.

21. Uchburchak tomonlar o'rtalarining koordinatalari berilgan: $M_1(1;-3)$, $M_2(2;-2)$, $M_3(-3;4)$ Uchburchak tomonlarining tenglamalarini tuzing.

22. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi $\varphi$ burchak aniqlansin.

1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$.

23. To'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalar orqali berilgan:

1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$;4) $3x-5y-2=0$; Ular uchun "kesmalardagi" tenglamalar tuzilsin va bu to'g'ri chiziqlar chizmada yasalsin.

24. C(4;2) nuqtadan o'tib, koordinata o'qlari bilan kesishishidan yuzi 2 kv. birlikka teng bo'lgan uchburchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

25. B(5;5) nuqtadan o'tib, koordinata o'qlari bilan kesishishidan yuzi 50 kv. birlikka teng uchburchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

26. To'g'ri chiziqlarning quyidagi tenglamalarini qaysilari normal tenglama ekanligi aniqlansin:

1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; 2) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; 3) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$;

4) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$; 5) $-x+2=0$; 6) $-y-2=0$;

28. Quyidagi hollarning har biridato'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin:

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) $12x-5y+13=0$; 4) $x+2=0$;

29. $x-y+3=0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning $Ox$ o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

30. $3x-4y+8=0$ va $6x-8y-15=0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

31. Ikki tomoni $5x+12y-61=0$ va $5x+12y+7=0$ tenglamalar bilan berilgan kvadratning yuzini va diagonalining uzunligini toping.

32. Trapetsiya asoslarining tenglamalari $3x-4y-15=0$, $3x-4y-35=0$ berilgan. Trapetsiyaning balandligini toping.

## Mavzuni mustahkamlash uchuno‘rgatuvchi testlar

| | |
|---|---|
| 1. Oy o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini ko‘rsating. | A. $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$ |
| 2. Qaysito‘g‘richiziqkoordinatao‘qlaribilanhosilqilganuchburchakyuzini 10 kv.birlikgatengbo‘ladi. | B. $\frac{x-4}{0}=\frac{y-}{2}$ |
| 3. Ox o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ko‘rsating. | C. $y=x-3$ |
| 4. Qaysi to‘g‘ri chiziq $x-1=0$ to‘g‘ri chiziq bilan $45^\circ$ burchak hosil qiladi. | D. $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ |
| 5. $M_1(2;3)$ va $M_2(2;9)$ nuqtalardantenguzoqlikdano‘tuvchito‘g‘richiziqni ko‘rsating. | E. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+3}{0}$ |
| | F. $\frac{x}{2}=\frac{y-6}{0}$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

# 8-§. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

**Reja:**

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy tushuncha
2. Aylana.
3. Ellips.
4. Giperbola
5. Parabola.

**Adabiyotlar:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** aylana, ellips, giperbola, parabola, markaz, radius, fokus, yarim o'q, fokal o'q, simmetriya o'q, ellipsning uchlari, haqiqiy o'q, mavhum o'q, giperbolaning uchi, direktrisa, parabolaning parametri, ekssentrisitet.

## 8.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni amaliy masalalarga tadbiqlari

Ikkinchi tartibli chiziqlar mavzusini o'rganish jarayonida talabalar geometriya matematikaning inson hayotidagi tayin amaliy masalalarni yechish zarurati tufayli paydo bo'lganiga ishonch hosil qilishadi.

"Ikkinchi tartibli chiziqlar o'zi, nimaga kerak" degan savol bilan murojat qilinsa odatda ular asosan moddiy nuqtaning harakat trayektoriyalari, aylana, ellips yoki paraboladan iborat bo'ladi deb javob berishadi.

Aslida esa ikkinchi tartibli egri chiziqlar nafaqat moddiy nuqtaning harakat trayektoriyalaridan, balki ko'pgina fizik jarayonlar, hayotiy, xususan qishloq xo'jaligida qo'llaniladigan masalalar ham ikkinchi tartibli egri chiziqlarga modellashtiriladi.

Quyida ikkinchi tartibli egri chiziqlarga modellashtiriladigan fizik, ximik va boshqa hayotiy jarayonlardan misollardan keltiramiz.

- Quyosh sistemasining planetalari, xususan Yer quyosh atrofida fokuslaridan birida quyosh joylashgan ellips bo'ylab harakatlanadi.

- Kosmik jismlar, xususan yerning sun'iy yo'ldoshlari bilan aloqalarni amalga oshiruvchi qabul qiluvchi yoki uzatuvchi moslamalarning ko'ochiligi qirqimi parabolalardan iborat bo'ladi. Kundalik hayotimizda ishlatiladigan paraboloid antennalarni ishlash tizimi ham shu xossaga asoslangan.

-Agar parabolaning fokusiga yorug'lik manbaiga joylashtirilsa, paraboladan qaytgan nur parabola o'qiga parallel yo'nalgan bo'ladi. projector qurilmasi shu xossaga ko'ra ishlaydi.

-Yer sathidan gorizontga burchak ostida $v_0 = 11,2\, km/sek$ (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang'ich tezlik bilan uchirilgan raketa parabola bo'ylab, harakat $v_0 > 11,2\, km/sek$ boshlangich tezlik bilan uchirilgan raketa giperbola bo'ylab uzoqlashadi. Yerdan $v_0 < 11,2\, km/sek$ boshlang'ich tezlik bilan harakatlangan raketa yerning atrofida ellips bo'ylab harakatlanadi yoki qulab tushadi.

-Qishloq xo'jaligida makkajo'xori donining hosildorligi u va namlikning unumdorlik zahirasi orasidagi bog'lanish parabola orqali aniqlanadigan funksiya $y = -0,006x^2 + 1,1x - 4,2$ parabolik funksiya orqali aniqlanishi tajriba yo'li bilan isbotlangan.

-Bir sutkada sigirdan sog'ilgan sut $y$ (litr)da va sigirning Yoshi $x$ (yil), $x \in [2;12]$ orasidagi bog'lanish $y = -9,53 + 6,86x - 0,49x^2$ parabolani ifodalovchi formuladan iborat bo'ladi. Bu yerdan sigir eng ko'pi bilan sutini 7 yoshida berishligini topish mumkin.

- 1 kg yog' olish uchun lozim bo'lgan sut (litr) miqdori, sutdagi yog'ning foizi $x$ ($2 < x < 6$) orasidagi bog'lanish asimptotalari koordinata o'qlaridan iborat bo'lgan giperbola tenglamasi $y = \frac{88}{x}$ orqali ifodalanadi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ikkinchi tartibli egri chiziqlarni ko'pgina ikkinchi tartibli sirtlarni kesishida hosil bo'lishiga ham e'tibor qaratish zarur. Masalan: dioraviy, elliptik, giperbolik va parabolik sirtlarni *Oxy* tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesishmasi mos ravishda aylana, ellips, giperbola va parabolani ifodalaydi. Bunday ikkinchi tartibli sirtlar bilan turli xil tekisliklar bilan kesimi ikkinchi tartibli egri chiziqlarni ifodalalashini quyida keyinchalik ko'rib o'tamiz.

Demak ikkinchi tartibli chiziqlar xossalarini o'rganish atrofimizdagi olam sirlarini o'rganishda alohida o'ringa ega.

## 8.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy tushuncha

Ikkinchi tartibli egri chiziq deb, $x$ va $y$ o'zgaruvchi koordinatlarga nisbatan

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

(1) ikkinchi darajali geometrik tenglama bilan aniqlanadigan nuqtalarning geometriko'rniga aytiladi. Bu yerda A, B, C lar bir vaqtda nolga teng emas deb qaraladi.

(1) ko'rinishdagi tenglama quyidagi chiziqlarning birini aniqlaydi:

$$I. \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & - \; ellips, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 & - \; mavhum \; ellips, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 & - \; nuqta \, (ikkita \; kesishuvchi \; mavhum \; to'g'ri \; chiziq), \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 & - \; giperbola, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 & - \; kesishadigan \; ikkita \; to'g'ri \; chiziq \end{cases}$$

$$II. \quad y^2 = 2px \quad - \quad parabola,$$

$$III. \begin{cases} x^2 = a^2, \; a \neq 0 & - \; ikkita \; parallel \; to'g'ri \; chiziq, \\ x^2 = -a^2, \; a \neq 0 & - \; ikkita \; mavhum \; parallel \; to'g'ri \; chiziq, \\ x^2 = 0, & - \; ikkita \; ustma-ust \; tushuvchi \; to'g'ri \; chiziq. \end{cases}$$

(1)tenglamaning koeffitsiyentlaridan quyidagi ikkita

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad (2) \text{va} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad (3)$$

determinantlarni tuzib olamiz.

Bu yerda, $\Delta$-determinant (1) tenglamaning diskriminanti, $\delta$ uning yuqori tartibli hadlari diskriminanti deyiladi. $\Delta$ va $\delta$ ning qiymatiga qarab, (1) tenglama quyidagi geometrik shakllarni aniqlaydi:

| | $\Delta \neq 0$ | $\Delta = 0$ |
|---|---|---|
| $\delta > 0$ | Ellips (haqiqiy yoki mavhum) | Nuqta |
| $\delta < 0$ | Giperbola | Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq |
| $\delta = 0$ | Parabola | Ikkita parallael to‘g‘ri chiziq |

Biz quyida ikkinchi tartibli chiziqlardan aylana, ellips, giperbola va parabolalarni o‘rganamiz.

**Misol.** Quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadigan chiziqning turini aniqlang.

1) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$ 2) $2x^2-4xy+y^2-8x-6=0$

**Yechish.** Berilgan chiziqlarni turini aniqlash uchun yuqorida keltirilgan $\delta$ – diskriminant va $\Delta$ – determinantni hisoblaymiz.

1) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$ tenglamadagi $A,B,C,D,E,F$ koeffitsiyentlarni topamiz. (1) ga ko‘ra $A=1, B=-1, C=2, D=-2, E=-3, F=3$ ga teng.

$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Jadvalga ko‘ra ellips yoki nuqtani aniqlashi mumkin. Buni yanada aniqlashtirish uchun (2) determinantni hisoblab ko‘ramiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -26 \neq 0.$$

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, berilgan chiziq ellipsni ifodalaydi.

2) $2x^2-4xy+y^2-8x-6=0$ tenglamada $A=2$, $B=-2$, $C=1$, $D=-4$, $E=0$, $F=-6$ ga teng.

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0,\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Jadvalga ko‘ra chiziq giperbolani ifodalaydi.

## 8.3. Aylana

**Ta'rif.** Tekislikda berilgan biror markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan, shu tekislikdagi nuqtalarni geometric o'rniga **aylana** deyiladi.

Markazi $C(a,b)$ nuqtada, radiusi R ga teng bo'gan aylananing kanonik tenglamasi

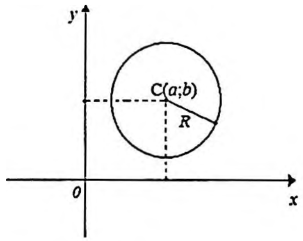
$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi (36-chizma).

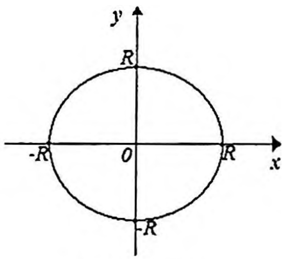
Agar aylana markazi koordinatalar boshida bo'lsa, uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2$$

ko'rinishda yoziladi (37-chizma).




*36-chizma*




*37-chizma*

Yuqorida keltirilagan (1) ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasida $B=0$, $A=C$ bo'lganda, (2) ko'rinishdagi tenglamaga keltirish mumkin.

**Misol.** Ikkinchi tartibli chiziq $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning aylana ekanligini ko'rsating hamda markazini va radiusini toping.

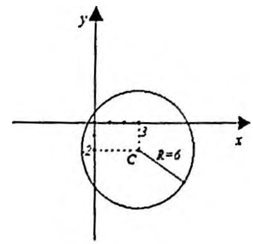
**Yechish.** $x$ va $y$ li hadlar bo‘yicha to‘la kvadratlar ajratamiz:

$$x^2-6x+9-9+y^2+4y+4-4-23=0,$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-23=0 \text{ yoki}$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=36$$

bo‘ladi. Bu berilgan aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3;\,-2)$, nuqtada, radiusi $R=6$ bo‘ladi (38-chizma).




*38-chizma*

**Misol.** $2x-y+4=0$ to‘g‘ri chiziqqa $M$ (-1;2) nuqtada urinuvchi va radiusi $r=5$ bo‘lgan aylananing tenglamasi tuzilsin.

**Yechish.** Aytaylik, tuziladigan aylana markazi $C(a;b)$ nuqtada bo‘lsa, u holda aylana radiusi $r=CM$ kesmadan iborat bo‘ladi, chunki aylana $M$ nuqtada to‘g‘ri chiziqqa urinadi. $CM$ berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi. $C$nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa masofa aylana radiusiga teng bo‘ladi. Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topish formulasidan

$$r=\frac{|2a-b+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, $a$, $b$ larni topish uchun quyidagi chiziqli teglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases}\dfrac{|2a-b+4|}{\sqrt{5}}=5\\ (a+1)^2+(b-2)^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|2a-b+4|=5\sqrt{5}\\ (a+1)^2+(b-2)^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|2(a+1)-(b-2)|=5\sqrt{5}\\ (a+1)^2+(b-2)^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+1=m\\ b-2=n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|2m-n|=5\sqrt{5}\\ m^2+n^2=25\end{cases}.$$

Hosil bo‘lgan teglamalar sistemasini yechamiz. Bu sistema ikkita tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$1)\begin{cases}2m-n=5\sqrt{5}\\ m^2+n^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n=2m-5\sqrt{5}\\ m^2+n^2=25\end{cases} \Rightarrow m^2+\left(2m-5\sqrt{5}\right)^2=25 \Rightarrow 5m^2-20\sqrt{5}m+100=0$$

Oxirgi kvadrat tenglamani yechamiz.

$\left(\sqrt{5}m-10\right)^2=0 \Rightarrow m=2\sqrt{5}\,,\, n=2m-5\sqrt{5} \Rightarrow n=-\sqrt{5}$

$\begin{cases} m=a+1 \\ n=b-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{5}-1 \\ b=-\sqrt{5}+2 \end{cases}.$

$\left(x-2\sqrt{5}+1\right)^2+\left(y+\sqrt{5}-2\right)^2=25.$ Markazi $M\left(2\sqrt{5}+1;-\sqrt{5}+2\right)$ nuqtada radiusi $R=5$ bo‘lgan aylana.

2) $\begin{cases} 2m-n=-5\sqrt{5} \\ m^2+n^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=2m+5\sqrt{5} \\ m^2+n^2=25 \end{cases} \Rightarrow m^2+\left(2m+5\sqrt{5}\right)^2=25 \Rightarrow \left(\sqrt{5}m+10\right)^2=0,$

$m=-2\sqrt{5}, n=-9\sqrt{5}.$ $\begin{cases} m=a+1 \\ n=b-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2\sqrt{5}-1 \\ b=-9\sqrt{5}+2 \end{cases} \Rightarrow \left(x+2\sqrt{5}+1\right)^2+\left(y+9\sqrt{5}-2\right)^2=25.$

Markazi $M\left(-2\sqrt{5}-1;-9\sqrt{5}+2\right)$ nuqtada radiusi $R=5$ bo‘lgan aylana.

Demak berilgan to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi ikkita aylana mavjud ekan.

**Misol.** $x^2+y^2=8$ aylananing $(2;-2)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning tenglamasini tuzing.

**Yechish.** Urinmaning tenglamasini $y=kx+b$ ko‘rinishdaizlaymiz. Berilgan aylana bilan izlayotgan urinma bitta nuqtada kesishadi deb,

$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=kx+b \end{cases}$ sistema yagona yechimga ega bo‘lishini ko‘rsatishimiz zarur.

Berilgan $(2;-2)$ nuqta bu sitemani qanoatlantiradi.

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=kx+b \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(kx+b\right)^2=8 \Rightarrow \left(1+k^2\right)x^2+2kbx+b^2-8=0.$$

Bu oxirgi tenglama kvadrat tenglama bo‘lib yagona yechimga ega bo‘lishi uchun diskriminant $D=0$ bo‘lishi kerak.

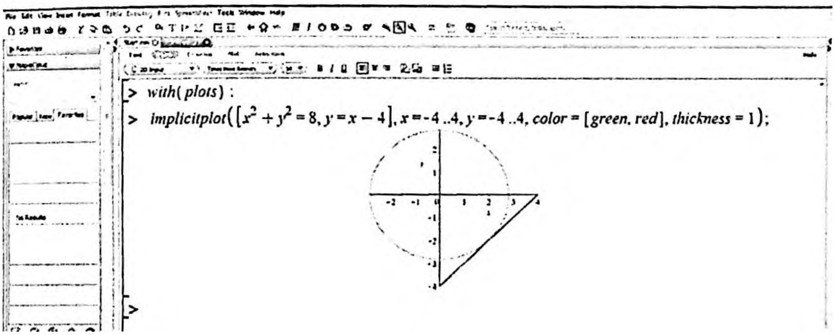
$$\left(2kb\right)^2-4\left(b^2-8\right)\left(1+k^2\right)=0,\quad k^2b^2-\left(b^2+b^2k^2-8-8k^2\right)=0,$$

$$-b^2+8k^2+8=0 \Rightarrow b^2=8\left(1+k^2\right)$$

$(2;-2)$ nuqta urinmaga tegishli nuqta bo'lganligi uchun $-2=2k+b$ ga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} b^2=8(1+k^2) \\ 2k+b=-2 \end{cases} \Rightarrow (-2k-2)^2=8(1+k^2).$$

Bu oxirgi tenglamani yechsak $k=1$ kelib chiqadi. $b=-2k-2=-2\cdot1-2=-4$. Demak $(2;-2)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi $y=x-4$ dan iborat bo'ladi. Hosil qilingan urinma tenglamasi haqiqatdan ham berilgan aylanaga urinishiga ishonch hosil qilishimiz uchun Maple dasturida grafiklarni tasvirlaymiz.




## Mustaqil yechish uchun mashqlar

1. Aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lgan va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.;

2. Koordinatalar boshidan o'tuvchi va markazi C(6;-8) nuqta bilan ustma-ust tushadigan aylana tenglamasini tuzing.

3. $A(3;2)$ va$B(-1;6)$ nuqtalardan o'tuvchi va diametri $d=|AB|$ dan iborat aylana tenglamasini tuzing.

4. $A(-1;5)$, $B(-2;-2)$ va $C(5;5)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

5. $A(1;2)$ nuqtadan o'tib va koordinata o'qlariga urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.

6. $A(3;1)$ nuqtada $x-2y-1=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi va radiusi $R=\sqrt{5}$ ga teng aylana tenglamasini tuzing.

7. Markazi $C(1;-1)$ nuqta bilan ustma-ust tushuvchi va $5x-12y+9=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.

8. $A(3;1)$ va $B(-1;3)$ nuqtalardan o‘tuvchi va markazi $3x-y-2=0$ to‘g‘ri chiziqda yotadigan aylana tenglamasini tuzing.

9. Markazi $Ox$ o‘qida yotuvchi $Oy$ o‘qiga, hamda $4x-3y+1=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

10. Markazi $2x+y=0$, to‘g‘ri chiziqda joylashgan va $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$ to‘g‘ri chiziqlarga urinuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

11. $x-y+2=0, 7x+y=0$ to‘g‘ri chiziqlarga urinuvchi, radiusi $\sqrt{2}$ ga teng bo‘lgan ayiana tenglamasi tuzilsin.

12. $(x+2)^2+(y-4)^2=10$ aylananing A(1;2) nuqtada teng ikkiga bo‘linuvchi vatarining uzunligini toping.

13. $x^2+y^2+6x+4y-12=0$, $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ aylanalarning umumiy nuqtalari topilsin.

14. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ va $x^2+y^2-10y+20=0$ tenglamalar bilan berilgan aylanalar markazlari orasidagi masofani toping.

15. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$, $x^2+y^2-8x-8y-4=0$ tenglamalar bilan berilgan aylanalarni umumiy vatari uzunligi va uning tenglamasi tuzilsin.

16. $A(3;9)$ nuqtadan $x^2+y^2-26x+30y+313=0$ aylanagacha bo‘lgan eng qisqa masofani aniqlang.

17. $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ aylananing $5x-2y-13=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar diametri tenglamasini tuzing.

18. Markazi $(0;2)$ nuqtada bo‘lgan va $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ aylanani to‘g‘ri burchak ostida kesib o‘tuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

## Mavzuni mustahkamlash uchuno‘rgatuvchi testlar

| | |
|---|---|
| 1. $36x^2+36y^2-24x+36y-23=0$ tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring. | A. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ |
| 2. $A(-1;-3)$ va $B(1;3)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasini ko‘rsating. | B. $(x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ |
| 3. Diametri $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ to‘g‘ri chiziqni koodinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini tutashtirishdan hosil bo‘lgan kesma uzunligiga teng bo‘lgan aylana tenglamasini ko‘rsating. | C. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ |
| 4. Uchlari $A(2;1)$, $B(2;4)$ va $C(6;1)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakka tashqi chizilgan aylanani kanonik tenglamasini ko‘rsating. | D. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$ |
| 5. $C(2;4)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata o‘qlariga urinuvchi aylana tenglamasini ko‘rsating. | E. $x^2+y^2=10$ |
| | F. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 8.4. Ellips

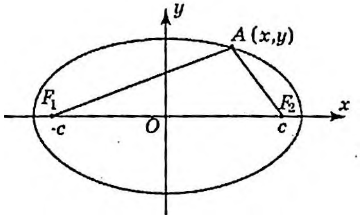
**Ta'rif.** Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'lgan, shu tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rniga**ellips**deyiladi.

Berilgan nuqtalar $F_1$ va $F_2$ bo'lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ ga teng. Chizmadan bo'yicha $2a>2c$ yoki $a>c$.

Ellipsning fokuslari $Ox$ o'qida yotib, koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lsa, bu koordinata sistemasida ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

Bunda $a^2-c^2=b^2$ (4) $a>b$. $A$ va $b$ parametrlar ellipsni katta va kichik yarim o'qlari deyiladi. 39-chizmada fokuslar $F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$. Koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlari, koordinata boshi esa simmetriya markazi bo'ladi.




*39-chizma*

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o'qiga, simmetriya markaziga ega bo'lgan yopiq egri chiziqdir.

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ (4) son ellipsni ekssentrisiteti deyiladi. Ta'rif bo'yicha $\varepsilon<1$, chunki $c<a$. Agar$\varepsilon=0$ bo'lsa, $a=b$ bo'lsa, radiusi $a$ ga teng bo'lgan aylana hosil bo'ladi va $\varepsilon=0$ bo'ladi.

Agar $A(x;y)$ nuqta ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, $r_1=F_1A$, $r_2=F_2A$ fokusgacha bo'lgan masofalar $A$ nuqtaning **fokal radiuslari** deyiladi va

$$r_1=|a+\varepsilon x|, \quad r_2=|a-\varepsilon x| \qquad (5)$$

formulalar bilan aniqlanadi. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ (6)to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrissalari deyiladi.

Agar ikki diametridan biri ikkinchisiga parallel vatarlarni teng ikkiga bo‘lsa, ular **qo‘shma diametrlar** deb ataladi.

Agar (3) ellips vatarlarining burchak koeffitsienti $k$bo‘lsa, unga qo‘shma diametr tenglamasi quyidagicha bo‘ladi.

$$\frac{x}{a^2}+k\frac{y}{b^2}=0. \qquad (7)$$

Burchak koeffitsientlari $k_1, k_2$ bo‘lgan qo‘shma diametrlar uchun

$$k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2} \qquad (8)$$

tenglik bajariladi.

Ellipsning $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmasining tenglamasi quyidagicha

$$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1 \qquad (9)$$

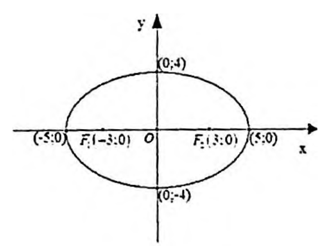
bo‘ladi.

**Misol.** $16x^2+25y^2=400$ ellipsning yarim o‘qlarini, fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

**Yechish.** Berilgan tenglamani 400 ga bo‘lib,

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2=25$, $b^2=16$ bo‘lib, yarim o‘qlari mos ravishda $a=5$, $b=4$ bo‘ladi (40-chizma). (4) formulaga ko‘ra $b^2=a^2-c^2$, bo‘lib, $c^2=25-16=9$, $c=\pm3$ bo‘ladi. Demak, ellepsning fokuslari $F_1(-3;0)$ va $F_2(3;0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisiteti esa, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ dan iborat.




*40-chizma*

**Misol.** Tenglamasi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$dan iborat bo'lgan ellipsning diametrlaridan biri $y=-2x$ tenglamaga ega. Uning qo'shma diametric tenglamasini toping.

**Yechish.** Bu yerda $a^2=16,\ b^2=9,\quad k_1=-2$ (8). formuladan foydalansak, $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow k_2=-\frac{b^2}{k_1a^2}=-\frac{9}{-2\cdot 16}=\frac{9}{32}$. Unga qo'shma diametric tenglamasi $y=\frac{9}{32}x$ dan iborat bo'ladi.

**Misol.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ ellipsning $M$ $(x;\ y)$ nuqtasidan uning chap fokusigacha bo'lgan masofa o'ng fokusigacha bo'lgan masofadan 2 marta katta. $M(x;y)$ nuqtani toping.

**Yechish.** $M$ $(x;\ y)$ nuqtadan chap va o'ng fokusigacha bo'gan masofalarni mos ravishda $r_1,r_2$ orqali belgilaymiz. Yuqorida keltirilgan (4),(5) va (6) formulalardan foydalanamiz. Masalani shartidan (5) ga ko'ra, $r_1=2r_2\Rightarrow a+\varepsilon x=2(a-\varepsilon x)$, (4) va (6) dan $x=\frac{a}{3\varepsilon}=\frac{a}{3\cdot\frac{c}{a}}=\frac{a^2}{3\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{9}{3\sqrt{9-8}}=3.$

Ordinatasini toppish uchun topilgan $x$ ni qiymatini ellips (3) kanonik tenglamasiga olib qo'yamiz va undan $y$ ni topamiz.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\Rightarrow\frac{3^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\Rightarrow y=0.$Javob: $M(3;0)$

**Misol.** Quyidagi $9x^2+25y^2-18x-100y-116=0$ tenglama bilan berilgan Ikkinchi tartib egri chizig'ining umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring. Markazi koordinatalarini, focus nuqtalarining koordinatalarini toping.

**Yechish.** Berilgan tenglamani to'la kvadratga keltirib kanonik ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

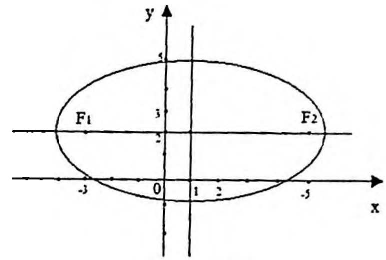
$9x^2+25y^2-18x-100y-116=0,\ \Rightarrow(9x^2-18x)+(25y^2-100y)=116,$

$$9(x^2-2x)+25(y^2-4y)=116 \Rightarrow 9(x^2-2x+1)+25(y^2-4y+4)=116+9+100,$$

$$9(x-1)^2+25(y-2)^2=225 \Rightarrow \frac{9(x-1)^2}{225}+\frac{25(y-2)^2}{225}=1,$$

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Demak berilgan egri chiziq ellipsning kanonik tenglamasi bo‘lib, uning markazi $C(1;2)$ nuqtada, katta va kichik yarim o‘qlari $a=5,\ b=3$ gatengbo‘ladi. (4) formuladan $b^2=a^2-c^2,\ c^2=a^2-b^2$ $=25-9=16$, $c=\pm 4$. Shunday qilib ellipsning fokuslari $F_1(-4;2)$ va $F_2(4;2)$ bo‘ladi(41-chizma).




*41-chizma*

Qutb koordinatalar sistemasida chap fokusi qutb boshida joylashganda ellipsni tenglamasi

$$\rho=\frac{P}{1-\varepsilon\cdot\cos\varphi} \tag{10}$$

bilan anqilanadi. Bu yerda $P=\frac{b^2}{a}$ (11) ga teng bo‘lib, u ellipsni parametri deyiladi. $\varepsilon-$ellipsni ekssentrisiteti bo‘lib $0<\varepsilon<1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

**Misol.** $\rho=\frac{9}{4-\sqrt{5}\cos\varphi}$ ellips tenglamasi kanonik ko‘rinishda yozilsin.

**Yechish.** Tenglamani $\rho=\frac{9}{4(1-\frac{\sqrt{5}}{4}\cos\varphi)}$ yoki $\rho=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{\sqrt{5}}{4}\cos\varphi}$

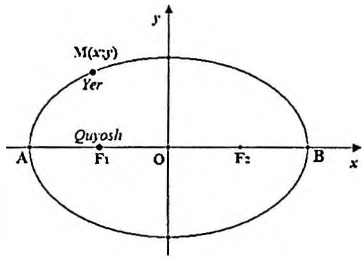
ko‘rinishda yozib uni (10) bilan taqqoslasak $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4},\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{4}$ kelib chiqadi. $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{4}<1$ bo‘lgani uchun berilgan tenglama ellipsning qutb tenglamasi bo‘lishi ravshan.

$\begin{cases} \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechsak, $a=4, b=3$ kelib chiqadi.

Demak yarim o'qlari $a$=4, $b$=3 bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ bo'ladi. Uning fokus nuqtalari qutbda $F_1(\sqrt{5};\pi)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ nuqtalarida joylashadi.

**Misol.**Yer fokuslaridan birida quyosh joylashgan ellips bo'yicha xarakat qiladi (42-chizma). Quyoshdan yergacha bo'lgan eng kichik masofa taxminan 147,5 million kilometrga, eng katta masofa 152,5 million kilometrga teng bo'lsa, Yer orbitasining katta yarim o'qi va ekssentrisiteti topilsin, kanonik tenglamasi tuzilsin.

**Yechish.** Masalani shartiga ko'ra Quyosh ellipsni $F_1$ focus nuqtasiga, yer esa ellips bo'ylab harakatlanadi. Yerning quyoshdan eng kichik masofada bo'lishi uchun yer A nuqtada va eng katta masofada bo'lishi uchun yer B nuqtada bo'lishi lozim.Bu masofalar $AF_1=147.5$, $F_1B=152{,}5$ga teng. Bundan $AB=AF_1+F_1B=147{,}5+152{,}5=300$ kelib chiqadi.



*42-chizma*

$AB=300 \Rightarrow 2a=300 \Rightarrow a=150,\ c=OF_1=OA-AF_1=150-147{,}5=2{,}5.$

$b^2=a^2-c^2=150^2-2{,}5^2=22493{,}75$

Ellipsni ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2{,}5}{150}=\frac{1}{60}$ ga teng.

Yer orbitasining kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{22500}+\frac{y^2}{22493{,}75}=1$$

dan iborat bo'ladi.

## Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. $x^2+4y^2=16$ ellips yasalsin, uning fokuslari va ekssentrisiteti topilsin.

2. Kattao'qi 10 ga, fokuslari orasidagi masofa esa 8 ga teng bo'lgan ellips tenglamasi tuzilsin.

3. Direktrisalari orasidagi masofa $\frac{50}{3}$ ga va ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{3}{5}$ ga teng bo'lgan ellips tenglamasi tuzilsin.

4. $M_1(4;-\sqrt{3})$ va $M_2(2\sqrt{2};3)$ nuqtalardan o'tuvchi ellips tenglamasini tuzing.

5. $x^2+3y^2=12$ ellipsga tomonlari ellips o'qlariga parallel qilib kvadrat ichki chizilgan. Kvadratning yuzini toping.

6. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsning fokal radiuslari o'zaro perpendikulyar bo'lgan nuqtasi topilsin.

7. $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1$ ellipsning $M\ (x;\ y)$ nuqtasidan uning o'ng fokusigacha bo'lgan masofa chap fokusigacha bo'lgan masofadan 4 marta katta. $M\ (x;y)$ nuqtani toping.

8. Ellipsning fokuslaridan biridan uning katta o'qi oxirlarigacha bo'lgan masofalar 2 va 8 ga teng. Ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

9. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipsda o'ng fokusigacha masofa chap fokusigacha bo'lgan masofasiga nisbatan 4 marta katta bo'lgan nuqta topilsin.

10. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsning burchak koeffitsienti $k=\frac{2}{3}$ bo'lgan vatariga qo'shma diametrini aniqlang.

11. Koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips $M_1(2;\sqrt{3})$ va $M_2(0;2)$ nuqtalardan o'tadi. Uning tenglamasi yozilsin va $M_1$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofa topilsin.

12. Fokuslari $Ox$ o'da yotuvchi ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lib, $M(-4;\sqrt{21})$nuqtadan, o'tadi va $\varepsilon=\frac{3}{4}$ ekssentrisitetga ega. Ellips tenglamasi yozilsin va $M$ nuqtaning fokal radiuslari topilsin.

13. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ellipsning $x+y-20=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmasi tenglamasini tuzing.

14. Fokuslari $F_1(-3;\ 0)$, $F_2(3;\ 0)$ nuqtalarda va urinmasi $x+y-5=0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

15. $16x^2+25y^2-400=0$ ellipsning fokuslarining biridan uning kichik o'qiga parallel o'tgan vatari uzunligini toping.

16. Qanday shartlar bajarilganda $(x_0;y_0)$ nuqtadan$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsga urinmalar o'tkazish mumkin? Bu urinmalarning tenglamasini tuzing.

17. Markazi (5;0) nuqtada bo'lgan ellips ordinatalar o'qiga koordinatalar boshida urinadi. Ellipsning ekssentrisiteti $\varepsilon=0,8$ bo'lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

**Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar.**

| | |
|---|---|
| 1. Fokus nuqtalari Oy o'qida joylashgan va yarim o'qlari $a=4$, $b=5$ ga teng ellips tenglamasini ko'rsating. | A. $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ |
| 2. Fokus nuqtalari $F_1(1;-3)$, $F_2(5;-3)$dan iborat va yarim o'qlari$a=4$, $b=5$ga teng ellips tenglamasini ko'rsating. | B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ |
| 3. $9x^2+16y^2-18x-135=0$ tenglama bilan egri chiziqni kanonik tenglama ko'rinishga keltiring. | C. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$ |
| 4. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan | D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ |

| | |
|---|---|
| $r=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}\cos\varphi}$ tenglamasini Dekart koordinatalar sistemasidagi teglamasini yozing. | |
| | E. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 8.4. Giperbola

**Ta'rif.** Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometri ko'rniga **giperbola** deb ataladi.

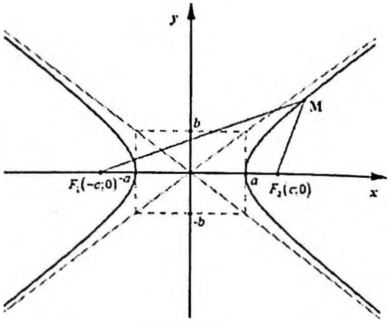
Fokuslargacha bo'lgan masofalar ayirmasini o'zgarmas $2a$ bilan, fokuslari $F_1$ va $F_2$ orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz. $Ox$ o'qini fokuslar orqali o'tadigan va koordinata boshiga simmetrik qilib yo'naltirsak, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ bo'ladi. Ta'rif bo'yicha $2a<2c$ yoki $a<c$.

Bu koordinatalar sistemasida giperbolaning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11}$$

Bu yerda $a, b$ parametrlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari deyiladi. Bunda $b^2=c^2-a^2$, $c>b$.Koordinatao'qlari simmetriya o'qlari, koordinata boshi esa giperbolani markazi bo'ladi. Giperbola o'zining bitta simmetriya o'qi bilan kesishadi; bu kesishish nuqtalari giperbolani uchlari deyiladi.

Giperbolaning o'qlariga nisbatan simmetrik va uning uchlarida unga urinuvchi, tomonlari $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak giperbolaning asosiy to'g'ri to'rtburchagi deyiladi.



*43-chizma*

Asosiy to'g'ri to'rtburchakning dioganallaridan o'tadigan to'g'ri chiziqlar giperbolaning **asimptotalari** deyiladi. Ularning tenglamalari quyidagicha topiladi, $y=\pm\frac{b}{a}x$ (12). $\varepsilon=\frac{c}{a}$ (13) son giperbolaning **ekssentrisiteti** deyiladi. Bunda $\varepsilon>1$, chunki $c>a$ (43-chizma).

Agar $M(x;y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, $r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$ fokusgacha masofalar M nuqtaning fokal radiuslari deyiladi va ular

$$r_1=|\varepsilon x+a|,\quad r_2=|\varepsilon x-a| \qquad (14)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

(11) tenglama bilan aniqlanadigan giperbola uchun $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ (15) to'g'ri chiziqlar uning **direktrissalari** deyiladi.

Agar giperbolaning fokuslari ordinatalar o'qida yotsa, u holda uning kanonik tenglamasi

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda $c^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$. (11) va (16) giperbolalar qo'shma giperbolalar deyiladi. $a=b$ bo'lsa, giperbola teng tomonli giperbola deyiladi.

**Misol.** $9x^2-16y^2=144$ giperbolaning yarim o'qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini hamda asimptotalarining tenglamalarini toping.

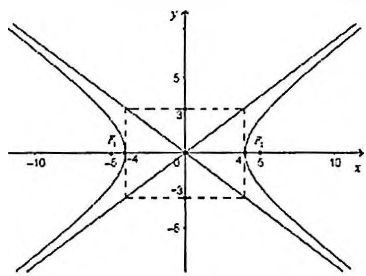
**Yechish.** Berilgan tenglamani 144 ga bo‘lib tenglamani kanonik

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

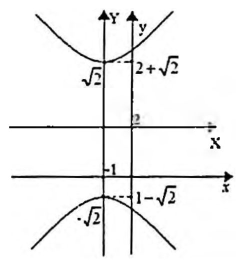
ko‘rinishga keltiramiz. Bundan $a^2=16$, $b^2=9$ bo‘lib, haqiqiyyarimo‘q $a=4$, mavhumyarimo‘q $b=3$ bo‘ladi. $c^2=a^2+b^2$, $c^2=16+9$, $c=\pm 5$ bo‘lib, fokuslari $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$ nuqtalardabo‘ladi (44-chizma). Ekssentrisitet $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. $a$ va $b$ larning(12) gaqo‘yib,

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

asimptotalari tenglamalarini hosil qilamiz.



44-chizma



45-chizma

**Misol:** $x^2-4y^2+2x+16y-7=0$ giperbolaning markazi va yarim o‘qlarini toping.

**Yechish:** $\left(x^2+2x+1\right)-4\left(y^2-4y+4\right)+8=0$

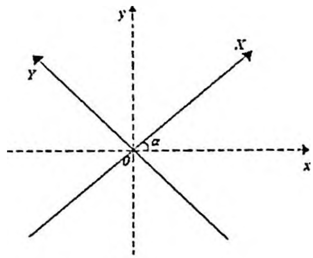
$$(x+1)^2-4(y-2)^2+8=0 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(x+1)^2}{8}=1.$$

Giperbolaning haqiqiy o‘qi $OY$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib, markazi $(-1;2)$ nuqtada, yarim o‘qlari $b=\sqrt{2}$, $a=\sqrt{8}$ ga teng. Bu giperbolani shaklini 45-chizmada ko‘rishimiz mumkin.

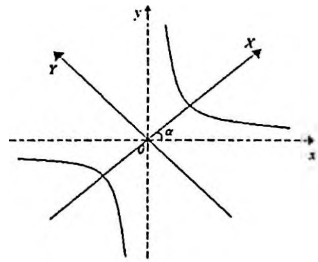
**Misol.** $y=\frac{4}{x}$ tenglama bilan berilgan egri chiziq ham giperbola bo'lishini va uning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

**Yechish.** $Oxy$ koordinatalar sistemasi $Ox$ va $Oy$ o'qlarini koordinata boshini o'zgartirmagan holatda $\alpha$ burchakka burganda yangi $OXY$ kordinatalar sistemasi hosil bo'ladi (46-chizma). $Oxy$ koordinatalar sistemasi bilan yangi $OXY$ kordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'lar edi.

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \quad (17)$$



*46-chizma*



*47-chizma*

Berilgan $y=\frac{4}{x}$ giperbola tenglamasi $Oxy$ koordinatalar sistemasida berilgan. Biz yangi $OXY$ kordinatalar sistemasini $\alpha = 45^0$ burchakka burib hosil qilamiz. U holda (17) quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} x = X\cos 45^0 - Y\sin 45^0 \\ y = X\sin 45^0 + Y\cos 45^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

$x$ va $y$ ning ushbu qiymatlarini $y=\frac{4}{x}$ tenglamaga qo'ysak

$y=\frac{4}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)} \Rightarrow (X+Y)(X-Y)=8 \Rightarrow X^2-Y^2=8.$ Oxirida keltirilgan tenglamani kanonik ko'rinishda yozsak, $\frac{X^2}{8}-\frac{Y^2}{8}=1$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan egri chiziq ham teng tomonli giperbolani ifodalaydi. Bunda giperbolani fokus nuqtalari yangi koordinatalar sistemasining $OX$ o‘qida joylashib, assimptotalari eski koordinatalar sistemasining $Ox$ va $Oy$ o‘qlari bo‘ladi (47-chizma).

Qutb koordinatalar sistemasida giperbolani tenglamasi ham

$$\rho = \frac{P}{1-\varepsilon \cdot \cos\varphi} \tag{18}$$

bilan anqilanadi. Bu yerda $P = \frac{b^2}{a}$ (11) ga teng bo‘lib, u ham giperbolani parametri deyiladi. $\varepsilon-$giperbolani ekssentrisiteti bo‘lib $\varepsilon > 1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

**Misol.** $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\cos\varphi}$ tenglama bilan aniqlanuvchi egri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.

**Yechish.** Tenglamani $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cos\varphi\right)}$ yoki $\rho = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cos\varphi}$ ko‘rinishda yozib olamiz. (18) tenglama bilan taqqoslasak, $P = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ ekanligi kelib chiqadi. Giperbolada $c = \sqrt{a^2-b^2}$ dan foydalanib, $\begin{cases} \frac{b^2}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{cases}$ teglamalar sistemasini hosil qilib uni yechsak, $a = \sqrt{12}, b = \sqrt{8}$ lar kelib chiqadi. Berilgan giperbola kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ dan iborat bo‘ladi.

### Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. Giperbola haqida quyidagilar ma’lum bo‘lsa, uning yarim o‘qlari hisoblansin:

a) fokuslari orasidagi masofa 8 ga va direktrisalari orasidagi masofa 6 ga teng;

b) direktrisalari $y=\pm 3\sqrt{2}$ tenglamalar bilan berilgan va asimptotalari orasidagi burchak - to‘g ‘ri burchak;

c) asimptotalari $y=\pm 2x$ tenglamalar bilan berilgan va fokusiari markazdan 5 birlik masofada;

d) asimptotalari $y=\pm\frac{5}{3}x$ tenglamalar bilan berilgan va giperbola $N(6;9)$ nuqtadan o‘tadi.

2. $x^2-4y^2=16$ giperbola va uning asimptotalari yasalsin. Giperbolaning fokuslari, ekssentrisiteti va asimptotalari orasidagi burchak topilsin.

3. $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng $M$ nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo‘lgan masofalar topilsin.

4. Fokuslari orasida masofa 24 vaekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{12}{13}$ ga teng bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

5. $M(4;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va asimptota tenglamalari $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ dan iborat bo‘lgan giperbola kanonik tenglamasi tuzilsin.

6. $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=-1$ giperbolaning fokuslarini aniqlang.

7. Teng tomonli giperbola $x^2-y^2=8$, berilgan. Unga fokusdosh bo‘lib, $M(-5;3)$ nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning tenglamasi topilsin.

8. $4x^2-9y^2=36$ giperbolaning $M(5;1)$ nuqtada teng ikkiga bo‘linadigan vatarining tenglamasi tuzilsin.

9. Giperbolaning asimptotasi haqiqiy o‘q bilan $\frac{\pi}{4}$ ga teng burchak tashkil qiladi. Giperbolaning ekssentrisitetini toping.

10. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

11. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolaga $(5;-4)$ nuqtada urinadigan to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.

12. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolaning fokuslaridan urinmasigacha bo'lganmasofalarning ko'paytmasi topilsin.

13. Giperbolaning $F_1(4;2)$ $F_2(-1;10)$ fokuslari va urinmasining tenglamasi $3x+4y-5=0$ berilgan. Yarim o‘qlarini toping.

14. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ giperbolaga $2x+5y+11=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular qilib o‘tkazilgan urinmalarning tenglamalari tuzilsin.

15. Fokuslari $F_1(1;0), F_2(0;1)$ nuqtalarda bo‘lib, asimptotalari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

16. Giperbolaning o‘qlari koordinata o‘qlari bilan ustma-ust tushadi va $x-y-2=0$ to‘g‘ri chiziq giperbolaga $M(4;2)$ nuqtasida urinadi. Bu giperbolaning tenglamasini tuzing.

17. Giperbolaning qutb koordinatalar sistemasidagi $\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$ tenglamasi berilgan, uning kanonik tenglamasini tuzing.

18. Giperbolaning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ berilgan. Uni qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzing.

**Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar**

| | |
|---|---|
| 1. Fokus nuqtalari Oy o‘qida joylashgan va yarim o‘qlari $a=3$, $b=5$ ga teng ellips tenglamasini ko‘rsating. | A. $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=-1$ |
| 2. Fokus nuqtalari $F_1(-2;-2)$, $F_2(-2;8)$dan iborat va yarim o‘qlari $a=3$, $b=4$ ga teng | B. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ |

| | |
|---|---|
| ellips tenglamasini ko'rsating. | |
| 3. $M(6;2)$ nuqtadan o'tuvchi va asimptotalari $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ dan iborat giper bola tenglamasini ko'rsating. | C. $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ |
| 4. $4x^2-5y^2-24x-10y+11=0$ tenglama bilan egri chiziqni kanonik tenglama ko'rinishga keltiring. | D. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$ |
| 5. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan $\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$ egri chiziqni kanonik teglamasini yozing. | E. $\frac{(x-1)^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$ |
| | F. $\frac{(x-3)^2}{5}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 8.5. Parabola

**Ta'rif.** Har bir nuqtasidan berilgan nuqtagacha va berilgan to'g'ri chiziq qacha bo'lgan masofalar o'zaro teng bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometri ko'rnishiga **parabola** deyiladi.

Berilgan nuqta parabolani fokusi, berilgan to‘g‘ri chiziq direktrissasi deb ataladi. Parabolaning fokusi $F$ bilan, undan direktrissasigacha masofa odatda $p$ bilan belgilanadi. $P$ soni parabolaning parametri deyiladi.

Koordinatlar sistemasini shunday tanlaymizki, $Ox$ o‘qi $F$ (fokus)dan o‘tib, direktrisaga perpendikulyar, $Oy$ o‘qi esa focus va direktrisaning o‘rtasidan o‘tsin. Bu koordinatalar sistemasida $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ parabolaning fokusi, $x=-\frac{p}{2}$ direktrisasi va uning kanonik tenglamasi

$$y^2 = 2px \tag{19}$$

ko‘rinishda bo‘ladi (48-chizma).

Bu $Ox$ o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan parabolani kanonik tenglamasi. Xuddi shuningdek, $Oy$ o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan parabolani kanonik tenglamasi

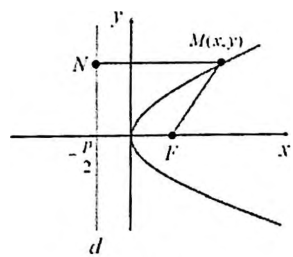
$$x^2 = 2py \tag{20}$$

dan iborat bo‘ladi. Parabola ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasining fokal radiusi

$$r = x + \frac{p}{2} \tag{21}$$

formula bilan aniqlanadi.

Ta’rif bo‘yicha parabola doimo direktrissa va fokus orqali o‘tadigan tekislikda yotadi. (19) tenglama bilan berilgan parabolaning yoylari o‘nga yo‘nalgan. Agar parabolaning yoylari chapga yo‘nalgan bo‘lsa, uning tenglamasi $y^2=-2px$ bo‘ladi.



*48-chizma*

**Misol.** $y^2=12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M(3;\ 6)$ nuqtadan fokusgacha bo‘lgan masofani aniqlang.

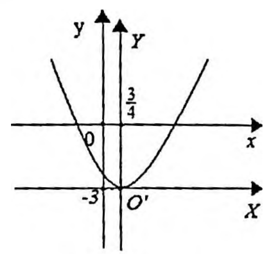
**Yechish.** Berilgan tenglamani (19) tenglama bilan solishtirib $2p=12$, bundan $p=6$, $\frac{p}{2}=3$. Shunday qilib, fokus $F(3;0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x=-3$ ekanligini topamiz. $M(3;6)$ nuqta uchun $x=3$, bo'lib, fokal radius (21) formulaga ko'ra $r=3+3=6$, $r=6$ bo'ladi.

**Misol.** $y=4x^2-6x-\frac{3}{4}$ parabola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirilsin va parabola uchining koordinatalari aniqlansin.

**Yechish:** Parabola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun o'ng tomonda to'la kvadrat ajratamiz.

$$y=4\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}$$

$$y=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-3, \quad y+3=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2.$$




*49-chizma*

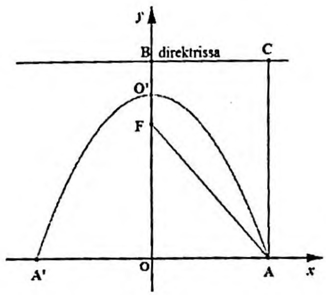
$y+3=Y$, $x-\frac{3}{4}=X$ belgilashlarni kiritsak, $Y=4X^2$. Parabolaning uchun $O'\left(\frac{3}{4},-3\right)$ nuqtada, $O'Y$–simmetriyao'qi (49-chizma).

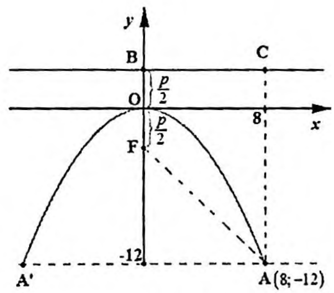
**Misol.** Gorizontga nisbatan o'tkir burchak ostida otilgan tosh parabola yoyini chizib, boshlang'ich joydan 16 metr uzoqlikka tushadi. Toshning 12 metr balandlikka ko'tarilganini bilgan holda parabolik trayektoriyasining parametri topilsin.

**Yechish.** *1-usul.* Masalani shartini 50–chizmaga tasvirladik. Bu yerda $A'A=16$, $OO'=12$ deb belgilab olamiz. Parabolani parametri joylashgan nuqtani $F(0;y_0)$ bilan belgilaymiz. Parabola bilan $Ox$o'qi bilan kesishgan nuqtalari $A'(-8;0)$, $A(8;0)$ dan iborat. Parabolani ta'rifidan foydalansak, $|AF|=|AC|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

$|FO'|=|O'B|=12-y_0, |AC|=|OO'|+|O'B|=12+12-y_0=24-y_0$. $A(8;0)$ va $F(0;y_0)$ nuqtalar orasidagi masofa $|AF|=\sqrt{(8-0)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{64+y_0^2}$. Parabola ta'rifiga ko'ra $|AC|=|AF| \Rightarrow 24-y_0=\sqrt{64+y_0^2} \Rightarrow (24-y_0)^2=64+y_0^2 \Rightarrow y_0=\frac{32}{3}$.

$|PO'|=|O'B|=\frac{p}{2}$ ekanligidan $\frac{p}{2}=12-y_0 \Rightarrow p=24-2y_0=24-2\cdot\frac{32}{3}=\frac{8}{3}$. Demak tosh harakatining trayektoriyasi hosil qilgan parabolaning tenglamasi parametri $p=\frac{8}{3}$ dan iborat.




*51-chizma*

*50-chizma*

*2-usul.* Bu usulda chizmani biroz o'zgartiramiz. (51-chizma.) Ta'rifga ko'ra parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigachava direktrissasigacha bo'lgan masofalar teng $|AF|=|AC|$ ekanligidan foydalanamiz. $A(8;-12)$ nuqtadan $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ fokusigacha bo'lgan masofani hisoblaymiz.

$|AF|=\sqrt{(8-0)^2+\left(-12-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2}=\sqrt{64+\left(\frac{p}{2}-12\right)^2}$. $|AC|$ masofa $|AC|=12+\frac{p}{2}$ ga teng bo'ladi.

$$|AF|=|AC| \Rightarrow \sqrt{64+\left(\frac{p}{2}-12\right)^2}=12+\frac{p}{2} \Rightarrow 64+\left(\frac{p}{2}-12\right)^2=\left(12+\frac{p}{2}\right)^2$$

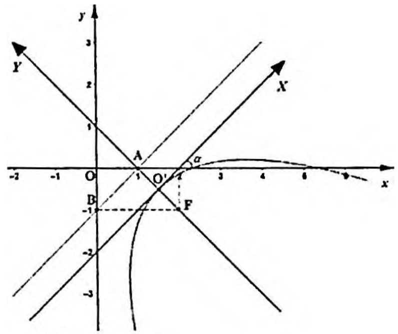
$$\left(\frac{p}{2}+12-\frac{p}{2}+12\right)\left(\frac{p}{2}+12+\frac{p}{2}-12\right)=64 \Rightarrow 24\cdot p=64 \Rightarrow p=\frac{8}{3}.$$

**Misol.** Agar parabolaning $F(2;-1)$ fokusi va $x-y-1=0$ direktrisasi berilgan bo‘lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

**Yechish.** $Oxy$ koordinatalar sistemasida $d$ to‘gri chiziq ya’ni deriktrissasi $x-y-1=0$ to‘gri chizig‘ining grafigini yasaymiz. Parabolaning $F(2;-1)$ nuqtasini ham belgilaymiz, (52-chizma). Parabolaning ta’rifidan uning uchidan deriktrissagacha bo‘lgan masofa uchidan fokusigacha bo‘lgan masofaga teng ekanligini bilamiz. $A$ va $F$ nuqtalarning o‘rtasida parabola uchini joylashtiramiz. Parabola uchi joylashadigan $O'$ nuqtani topamiz. Bu yerda $A$ nuqta direkrissa chizig‘ining $Ox$ o‘qi bilan kesishgan $A(1;0)$ nuqtasi.

$$O'_x=\frac{x_A+x_F}{2}=\frac{1+2}{2}=1{,}5\,,\; O'_y=\frac{y_A+y_F}{2}=\frac{0-1}{2}=-0{,}5.$$

Hosil bo‘lgan parabolaning fokal o‘qi sifatida fokusi orqali $O'Y$ va parabola uchidan $O'X$ o‘qini o‘tkazib yangi koordinatalar sisitemasini hosil qilamiz.




*52-chizma*

Bu yangi koordinatalar sistemasi eski koordinatalar sistemasini boshini $O'(1{,}5;-0{,}5)$ nuqtaga ko‘chirib va o‘qlarini $\alpha$ burchakka burishdan hosil bo‘ladi. $\alpha$ burchakni topamiz.

Chizmada hosil bo‘lgan $\Delta AOB$ uchburchak teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchak ekanligidan $\alpha$ burchak $45^0$ ga teng.

Hosil bo'lgan $OXY$ koordinatalar sistemasida parabola tenglamasini hosil qilamiz. $p$-parametri $F$ nuqtadan $A$ nuqtagacha bo'lgan masofa

$$p=|AF|=\sqrt{(x_A-x_F)^2+(y_A-y_F)^2}=\sqrt{(1-2)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{2}.$$

Demak parabola tenglamasi $X^2=-2pY \Rightarrow X^2=-2\sqrt{2}Y$. Bu tenglamani $Oxy$ kordinatalar sistemasida yozamiz. Buning uchun $Oxy$ koordinatalar sistemasi bilan yangi $OXY$ koordinatalar sistemasini orasidagi bog'lanish formulasidan foydalanamiz.

$$\begin{cases} X=(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha \\ Y=-(x-x_0)\sin\alpha+(y-y_0)\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=(x-1{,}5)\cos 45^\circ+(y+0{,}5)\sin 45^\circ \\ Y=-(x-1{,}5)\sin 45^\circ+(y+0{,}5)\cos 45^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1{,}5+y+0{,}5) \\ Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+1{,}5+y+0{,}5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) \\ Y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y-2) \end{cases}.$$

$$X^2=-2\sqrt{2}\cdot Y \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)\right)^2=-2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-2)\right)\Rightarrow$$

$$(x+y-1)^2=4\sqrt{2}(x-y-2).$$

## Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. $y=kx+2$ to'g'ri chiziqning $y^2=2px$ parabolaga urinish sharti keltirib chiqaralsin.

2. $y^2=2px$ parabolaga uning $M_1(x_1;y_1)$ nuqtasi o'tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

3. $y^2=8x$ parabolaga urinuvchi va $2x+2y-3=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

4. $y^2=64x$ parabolada $4x+3y-14=0$ to'g'ri chiziqqa eng yaqin bo'lgan $M_1$ nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa bo'lgan $d$ masofa hisoblansin.

5. $y^2=36x$ parabolani $A(2;9)$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

6. $y^2=2px$ parabolaga urinmao'tkazilgan. Bu parabolaning uchi, urinmaning $OX$o'q bilan kesishgan nuqtasi bilan urinish nuqtasining $OX$ dagi proeksiyasi, o'rtasida yotishligi isbotlansin.

7. Po'lat arqoni (tros) ikki uchidan osilgan; mahkamlangan nuqtalar bir xil balandlikda joylashgan; ular orasida masofa 20m ga teng. Uning mahkamlangan nuqtadan, gorizontal bo'yicha hisoblanganda, 2m masofaga mos etilgan qismi 14,4 sm ga teng.Po'lat Arqonni taxminan parabola yoyi shakliga ega deb, bu arqonning mahkamlangan nuqtalari o'rtasidagi nuqtada mos qismining kattaligi aniqlansin.

8. $y^2=24x$ parabolaning $F$fokusi va direktrisasining tenglamasi topilsin.

9. $y^2=20x$ paraboladaabsissasi 7ga teng bo'lgan $M$ nuqtaning fokal radiusi hisoblansin.

10. $y^2=16x$ parabolada fokal radiusi 13 ga teng bo'lgan nuqta topilsin.

11. Agar parabolaning $F(7;2)$ fokusi va$x-5=0$ direktrisasi berilgan bo'lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

12. Agar parabolaning $F(4;3)$ fokusi $y+1=0$ direktrisasi berilgan bo'lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

13. $y^2=2px$ parabolaning (3,1) nuqtada teng ikkiga bo'ladigan vatarini toping.

14. Parabolaning A(6;-3) uchi va uning direktrisasining tenglamasi $3x-5y+1=0$ berilgan. Bu parabolaning $F$ fokusi topilsin.

15. Parabolaning A(-2;-1) uchi va uning direktrisasining tenglamasi $x+2y-1=0$ berilgan. Shu parabolaning tenglamasi tuzilsin.

16. $y^2=6x$ parabola va$3x-2y+6=0$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalari aniqlansin:

17. $Ox$ o‘qiga nisbatan simmetrik, uchi esa $(-5;0)$ nuqtaga joylashgan va ordinatalar o‘qidan uzunligi $l=12$ bo‘lgan vatar ajratadigan parabolaningtenglamasini tuzing.

18. $\rho=\dfrac{6}{1-\cos\varphi}$ tenglama bilan berilgan parabolaning kanonik tenglamasini tuzing.

19. $y^2=8x$ parabolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzing.

**Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar**

| | |
|---|---|
| 1. $2x^2-12x+y+13=0$ egri chiziqni kanonik ko‘rinishga keltiring. | A. $(y-4)^2=-16(x-1)$ |
| 2. Fokusi nuqtasi $F(-3;4)$ vadirektrisasi $x-5=0$ dan iborat parabola tenglamasini ko‘rsating. | B. $y^2=-8(x+1)$ |
| 3. $A(-4;1)$ nuqtadan o‘tuvchi va direktrisa tenglamasi $y+4=0$ dan iborat parabola tenglamasini ko‘rsating. | C. $x^2=8y$ |
| 4. Uchi koordinata boshida joylashgan fokusi $F(0;2)$ dan iborat parabola tenglamasini ko‘rsating. | D. $(x-3)^2=-\frac{1}{2}(y-5)$ |
| 5. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan $\rho=\dfrac{9}{1-\cos\varphi}$ egri chiziqni kanonik teglamasini yozing. | E. $x^2=16y$ |
| | F. $y^2=18\left(x+\frac{81}{18}\right)$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

# IV-BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

## 9-§. FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI

**Reja:**

1. Fazoda sirt va uning tenglamasi.
2. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.
3. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi.
4. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi
5. Tekislikni normal tenglamasi.
6. Ikki tekislik orasidagi burchak.
7. Nuqtadan tekislikgacha masofa.

**Adabiyotlar:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** egri chiziq, sirt, tekislik tenglamalari, burchak, parallellik, perpendikulyarlik, normal vektor.

### 9.1. Fazoda sirt va uning tenglamasi

Ma'lumki, tekislikning koordinatalari

$$F(x;y)=0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni egri chiziq deyiladi. Xuddi shuningdek

$$F(x;y;z)=0 \tag{1}$$

tenglama ham $Oxyz$ fazoda koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami, biror sirtni aniqlaydi. Bu tenglamaga sirt tenglamasi deyiladi. (1) tenglamada qatnashgan o'zgaruvchilarning eng katta darajasiga sirtning tartibi deb ataladi. Hamma vaqt ham bu tenglamalar egri chiziqni yoki sirtni aniqlamasligi mumkin.

## 9.2. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi

$Oxyz$ to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$ vektor berilgan bo'lsin. $M_0$ nuqtadan o'tuvchi, $\overline{N}$ normal vektorga perpendikulyar $Q$ tejislik tenglamasini yozish uchun tekislikning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasini olib, $\overline{M_0M}\perp\overline{N}$ shartdan foydalansak,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

tenglama kelib chiqadi. (2) tenglamada qavslarni ochib yuborib soddalashtirsak

$$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0 \text{ yoki } -Ax_0-By_0-Cz_0=0$$

bilan belgilashdan keyin

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) tenglamaga fazoda tekislikning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz:

1) $D=0$ bo'lsa, $Ax+By+Cz=0$ bo'lib, tekislik koordinatlar boshidan o'tadi;

2) $C=0$ bo'lsa, $Ax+By+D=0$ bo'lib, tekislik $Oz$ o'qiga parallel; xuddi shunday $Ax+Cz+D=0$, $By+Cz+D=0$ tekisliklar mos ravishda $Oy$ va $Ox$ o'qlariga paralleldir;

3) 2-holda qo'shimcha ravishda $D=0$ bo'lsa, tekislik tenglamalari $Ax+By=0$, $Ax+Cz=0$, $By+Cz=0$ bo'lib, ular mos ravishda $Oz$, $Oy$, $Ox$ koordinat o'qlaridan o'tadi;

4) $B=C=0$, bo'lsa, $Ax+D=0$ tekislik $yOz$ koordinat tekisligiga parallel, xuddi shunday $By+D=0$, $Cz+D=0$ tekisliklar mos ravishda $xOz$, $xOy$ koordinat tekisliklariga parallel bo'ladi;

5) $B=C=D=0$ bo'lsa, $Ax=0$ bo'lib, $yOz$ koordinat tekisligi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $x=0, yOz$ koordinat tekisligining tenglamasi bo'ladi. Xuddi shunday $y=0$ va $z=0$, mos ravishda $xOz$ va $xOy$ koordinat tekisliklarining tenglamasini ifodalaydi .

**Misol.** $M(2; -3; 2)$ nuqtadan o'tib, $\overline{N}=(5;4;3)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekisliknuning umumiy tenglamasini yozing.

**Yechish.** (2) tenglamagako'ra

$$5(x-2)+4(y+3)+3(z-2)=0 \Rightarrow 5x-10+4y+12+3z-6=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x+4y+3z-4=0.$$

## 9.3. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Agar (3) tenglamada $A,B,C,D$ koeffitsientlaridan hech biri nolga teng bo'lmasa tenglamani

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4}$$

ko'rinishda yozish mumkin. (4) tenglama tekislik koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi. Bu yerdagi $a,b,c$ lar tekisliking $Ox$, $Oy$, $Oz$ o'qlardan ajratgan kesmalari.

**Misol.** $M_0(2; 5; 4)$ nuqtadan o'tib, ordinat o'qidan $b=-6$, aplikata o'qidan $c=3$ kesma ajratib o'tgan tekislik tenglamasini yozing.

**Yechish.** Tekislik tenglamasini topishda biz (4) tenglamadan foydalanamiz. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1$. Tekislik $M_0$ nuqtadano'tishini hisobga olib, nuqtaning koordinata qiymatlarini oxirgi tenglikka olib borib qo'yamiz. $\frac{2}{a}-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}=1$. Bundan nomalum $a$ ni topamiz. $a=4 \Rightarrow \frac{x}{4}-\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$.

**Misol.** $12x-15y+20z-60=0$ tenglama orqali berilgan tekislikni koordinata tekisliklari bilan kesishishidan hosil bo'ladigan jismning hajmi topilsin.

**Yechish.** Oldin tekislikni koordinata tekisliklari bilan qanday jismni hosil qilishini ko'rib o'tamiz.Berilgan tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamani (4) ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$12x-15y+20z=60 \Rightarrow \frac{12x}{60}-\frac{15y}{60}+\frac{20z}{60}=1 \Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1.$$

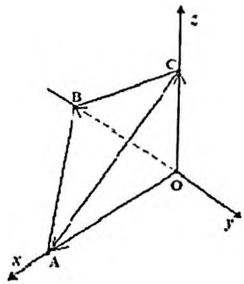
Bundan ko'rinib turibdiki, koordinata o'qlarini $A(5;0;0)$, $B(0;-4;0)$, $C(0;0;3)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Natijada berilgan tekislik koordinata tekisliklari bilan uchlari $O(0;0;0), A(5;0;0)$, $B(0;-4;0)$, $C(0;0;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakli piramidani hosil qiladi (53-chizma). Hosil bo'lgan piramidani hajmini hisoblaymiz. Buning uchun $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ vektorlarni yasab ularning koordinatalarini topamiz. $\overline{OA}(5;0;0)$, $\overline{OB}(0;-4;0)$, $\overline{OC}(0;0;3)$. Bu piramidani hajmini hisoblash uchun uch vektorlarni aralash ko'paytmalaridan foydalanamiz.

Piramidani hajmi

$$V_{pir} = \frac{1}{6}\left|\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}\right|$$

ga teng bo'ladi. $\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -60,$

$$V_{pir} = \frac{1}{6}\left|\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|-60\right| = 10 \text{ kub birlik.}$$




*53-chizma*

### 9.4. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Berilgan uchta $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'lib, uchta vektorning komplanarligidan kelib chiqadi. $M(x, y, z)$ tekislikdagi ixtiyoriy nuqta. $\overline{MM_1}, \overline{M_2M_1}, \overline{M_3M_1}$ vektorlar komplanardir.

## 9.5. Tekislikni normal tenglamasi

$Oxyz$ fazoda koordinatalar boshidan o'tmaydigan $Q$ tekislik berilgan bo'lsin. Koordinatalar boshidan tekislikka $OP$ perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini $p$ orqali va perpendikulyarning $Ox, Oy, Oz$ o'qlar bilan tashkil etgan burchaklarini mos ravishda $\alpha, \beta, \gamma$ lar orqali belgilab, U holda tekislik tenglamasini

$$x\cos\alpha + y\sin\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (6)$$

ko'rinishda keltirish mumkin bo'ladi. (6) tekislikni **normal** tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamada $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

## 9.6. Tekisliklarning o'zaro joylashishi. Tekisliklar dastasi

Umumiy tenglamalari bilan berilgan ikkita $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklarni o'zaro joylashishi ya'ni kesishishi, parallel bo'lish yoki ustma – ust tushishining zaruriy va yetarli shartlari quyidagi jadvalda keltirib o'tamiz.

| **Tekislik joylashuvi** | **Sharti** |
|---|---|
| Kesishishi | $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi 2 ga teng. |
| Parallelligi | $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi 1 ga teng.<br>$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi 2 ga teng. |
| Ustma-ust tushishi | $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi 1 ga teng. |

Bitta to'g'ri chiziq orqali o'tgan barcha tekisliklar to'plami **tekisliklar dastasi** deyiladi. O'zaro parallel tekisliklar to'plami hamdasta deyiladi.

Agar kesishadigan

$$A_1x+B_1x+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2x+C_2z+D_2=0$$

ikkita tekislik bo'lsa, ushbu

$$\alpha\left(A_1x+B_1x+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2x+C_2z+D_2\right)=0 \quad (7)$$

tenglama berilgan tekisliklar aniqlagan dasta tenglam asi bo'ladi. Bu yerda $\alpha$, $\beta$ sonlar bir vaqtda nolga teng emas. Aksincha dastaga tegishli ixtiyoriy tekislik shu tenglama orqali ifodalanadi.

## 9.7. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

$Q_1$ va $Q_2$ tekisliklar mos ravishda $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normallari $\overline{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$ va $\overline{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad (8)$$

formula orqali topiladi. (8) ga ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

$\overline{N_1}$ va $\overline{N_2}$ normal vektorlar kollinear bo'lsa,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

bo'lib, bu **ikki tekislikning parallellik sharti** deyiladi.

$\overline{N_1}$ va $\overline{N_2}$ normal vektorlar perpendikulyar bo'lsa,

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

bo'lib, bu **ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti** bo'ladi.

## 9.8. Nuqtadan tekislikgacha masofa

Nuqtadan tekislikgacha masofa deganda, shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi.

Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasi yordamida berilgan $Q$ tekislikgacha $d$ masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{9}$$

formula yordamida topiladi.

**Misol.** $M_0(4;3;0)$ nuqtadan $M_1(1;3;0), M_2(4;-1;2)$ va $M_3(3;0;1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

**Yechish.** Biz dastlab berilgan uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzib olamiz. Buning uchun yuqorida keltirilgan (5) tenglamadan foydalanamiz.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bundan, $-4(x-1)+4(y-3)-9z+8z-3(y-3)+6(x-1)=0$ yoki $2x + y - z - 5 = 0$.

$M_0(4;3;0)$ nuqtadan $2x + y - z - 5 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani (9) formula bilan hisoblaymiz.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2\cdot 4 + 1\cdot 3 - 1\cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6} \quad (\textit{uzunlik birligi}).$$

### Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. $M(-1; 3; 0)$ nuqtadan o'tib, $\overline{N}(-4, 1, 3)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

2. $M_0(1; -3; 4)$ nuqtadan o'tib, absissa o'qidan $a=-2$, aplikata o'qidan $c=7$ kesma ajratib o'tgan tekislik tenglamasini yozing.

3. $Ox$ o‘qiga parallel va $P(4;0;-2)$, $Q(5;1;7)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

4. $yOz$ koordinat tekisligiga parallel va $M(2;-5;4)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

5. $Oy$ o‘qidan va $M(2;4;1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

6. $Oy$ o‘qiga parallel va $M_1(3;2;1)$, $M_2(4;-3;5)$ nuqtalardano‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

7. $2x-3y+4z-24=0$ tekislikning koordinat tekisliklari bilan kesishishidan hosil bo‘ladigan jism hajmi hisoblansin.

8. Tekislikning $x+2y-3z-6=0$ tenglamasi berilgan. Uning kesmalarga nisbatan tenglamasini tuzing.

9. Koordinat tekisliklari va $2x-3y+6z-12=0$ tekislik bilan chegaralgan piramida xajmi hisoblansin.

10. Ikkita $M_1(3;5;6)$ va $M_2(5;-7;4)$ nuqtalar berilgan. $M_1$ nuqtadan o‘tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

11. $M_1(1;3;-2)$, $M_2(4;-5;6)$ va $M_3(-3;1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

12. $M_1(3;4;-5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\bar{a}_1=\{3;1;-1\}$, $\bar{a}_2=\{1;-2;1\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

14. $2x-y-2z+3=0$ va $x+y-5=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

15. $\ell$ va m larning qanday qiymatlarida quyidagi juft tenglamalar parallel tekisliklarni aniqlaydi:

1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+\ell z-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

16. $\ell$ ning qanday qiymatida quyidagi juft tenglamalar perpendikulyar tekisliklarni aniqlaydi:

1) $3x-5y+\ell z-3=0$, $x+3y+2z+5=0$

2) $5x+y+3z-3=0$, $2x+\ell y-3z+1=0$

17. Koordinatalar boshidan o'tgan va $5x-2y+3z-3=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

18. $M_1(3;-2;-7)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x-y+3z+5=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

19. $M(2;-1;1)$ nuqtadano'tuvchi va $3x+2y-z+4=0$, $x+y+z-3=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasini tuzing.

20. $M_0(2;4;-3)$ nuqtadan o'tib, $3x-2y+5z-4=0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

21. $M(2;1;-2)$ nuqtadan va $x-2y-2z+6=0$, $2x+3y-z+3=0$ tekisliklarning kesishish chizig'idan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

22. $M_1(2;0;0)$, $M_2(0;1;0)$ nuqtalardan o'tuvchi va $Oxy$ tekislik bilan $45^0$ li burchak tashkil qiluvchi tekislik tenglamasini tuzing.

23. $M(1;-4;-5)$ nuqtadan $6x-3y-6z+7=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

24. $2x+2y+z-8=0$ tekislikka parallel va undan $d=4$ masofada bo'lgan tekisliklarning tenglamalarini tuzing.

25. $2x-11y+10z-15=0$ va $2x-11y+10z+45=0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

26. Kubning ikkita qirrasi $2x-2y+z-1=0$ va $2x-2y+z+5=0$ tekisliklarda joylashgan. Kubning hajmini hisoblang.

## Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar

| | |
|---|---|
| 1. $Ox$ o'qqa parallel tekislik tenglamasini ko'rsating. | A. $x-2y-3z-4=0$ |
| 2. $M_0(1;-2;3)$ va $M_1(1;2;3)$ nuqtalarda o'tuvchi va $\overline{p}(2;1;1)$ vektorga parallel tekislik tenglamasini ko'rsating. | B. $4x+y-3z-18=0$ |
| 3. Koordinata o'qlarini $A(-6;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$ kesib o'tuvchi tekislik tenglamasini ko'rsating. | C. $4y+3z-4=0$ |
| 4. $\overline{N}(4;1-3)$ vektorga perpendicular bo'lgan va $Oz$ manfiy yarim o'qda 6 ga teng kesma ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing. | D. $6x-2y-z+4=0$ |
| 5. $M(2;2;-2)$ nuqtadan o'tuvchi $x-2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini ko'rsating. | E. $3x-y-5z+10=0$ |
| | F. $2x-3y-4z+12=0$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 10-§. FAZODAGI TO‘G‘RI CHIZIQ

**Reja:**

1.To‘g‘ri chiziqning kanonik, parametrik,vektor va umumiy tenglamalari.

2. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

3. Ikkito‘g‘ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikulyarlik shartlar.

4. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikningo’zaro joylashishi.

**Adabiyotlar:**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:** burchak,yo‘naltiruvchi vektor, parametr, tekisliklar dastasi.

### 10.1. To‘g‘ri chiziqning kanonik, parametrik,vektor va umumiy tenglamalari

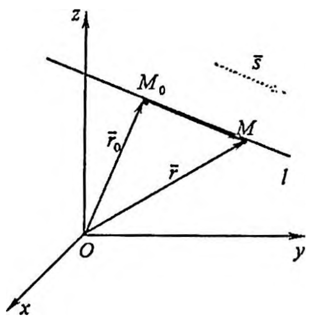
O$xyz$ fazoda$M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadano‘tuvchi va yo‘naltiruvchi vektori $\bar{s}=\{m;n;k\}$bo‘lgan $L$ to‘g‘ri chiziqni tenglamasini yozish uchun, to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy$M(x;y;z)$ nuqtasini olib, $\overline{M_0M}\,//\,\bar{s}$ bo‘lishidan foydalanamiz (54-chizma).

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$$

va $\bar{s}=\{m;n;k\}$ vektorlar kolinear ekanligidan

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k} \quad (1)$$

kelib chiqadi. (1) tenglama fazoda to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.




*54-chizma*

(1) tenglamalarni $t$parametrga tenglab to‘g‘ri chiziqning

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + kt \end{cases} \qquad (2)$$

parametrik tenglamalarini hosil qilamiz.

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s} \cdot t \qquad (3)$$

(3) to‘g‘ri chiziqning vektorli tenglamasi deyiladi

**Misol.** $M_0(2;-3;5)$ nuqtadano‘tib koordinata o‘qlari bilan $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=\pi/3$ burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

**Yechish.** To‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\bar{s} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k}$ vektorni olamiz. Hosil qilingan vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari uchun $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ni tekshirib ko‘ramiz.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

(1) tenglamaga asosan, $\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z-5}{1/2}$ to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Oxirgi tengliklarning har biri biror $t$ songa teng bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi. Shu sababli $t$ parametrga tenglab,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = t \quad \frac{y+3}{1/2} = t \quad \frac{z-5}{1/2} = t \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2; \\ y = \frac{1}{2}t - 3; \\ z = \frac{1}{2}t + 5 \end{cases}$$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalarni hosil qilamiz.

Fazoda to‘g‘ri chiziqni ikki tekislikning kesishishidan hosil bo‘ladi deb ham qarash mumkin. Shuning uchun to‘g‘ri chiziqni analitik holda quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

orqali ham ifodalash mumkin. (4) tenglamada $A_1$, $B_1, C_1$ koeffitsientlar mos ravishda $A_2$, $B_2$, $C_2$ koeffitsientlarga proporsional emas deb hisoblaymiz. Aks holda (4) to'g'ri chiziqni ifodalamaydi. (4) tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

## 10.2. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Fazoda $M_1(x_1, y_1, z_1)$va $M_2(x_2, y_2, z_2)$berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tekislikda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga o'xshash ushbu ko'rinishda

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{5}$$

bo'ladi.

**Misol.** $\begin{cases} 2x+y-5z+3=0, \\ 3x+2y-4z+2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqni umumiy tenglamasini kanonik tenglamalaga keltiring.

**Yechish.** Biz to'gri chiziqni umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirishning ikki xil usulini ko'rsatamiz.

*1-usul.* Berilgan tenglamalar sistemasidan oldin $y$ ni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (–2) ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shib $-x+0+6z-4=0$, yoki $x=6z-4$ tenglamani hosil qilamiz. Endi $x$ noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (3)ga ikkinchi tenglamani (–2) ga ko'paytirib hadma-had qo'shib $-y-7z+5=0$ yoki $y=-7z+5$ tenglamani keltirib chiqaramiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} x=6z-4, \\ y=-7z+5 \end{cases}$$

sistema to'g'ri chiziqning proeksiyalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi.

Oxirgi tenglamalar sistemasini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$\begin{cases} x+4=6z \\ y-5=-7z \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+4}{6}=z, \quad \frac{y-5}{-7}=z.$$

Demak, $\frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z-0}{1}$.

Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

*2-usul.* To‘g‘ri chiziqning aniq $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasini topish uchun uning umumiy tenglamasiga z=0 qiymatni qo‘ysak

$\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ sistema hosil bo‘ladi. Sistemani yechib, to‘gri chiziqqa tegishli absissasi $x=-4$, ordinatasi $y=5$ nuqtasini topamiz. Demak, $M_0(-4;5;0)$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqta ekan. Endi to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorini aniqlaymiz. Uning uchun to‘g‘ri chiziqning umumiy (4) tenglamasidagi tekisliklarni normal vektorlarini aniqlab bu vektorlarni vektor ko‘paytmasiga teng bo‘ladigan to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi vektorini topamiz ya’ni $\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}$.
$\overline{N_1}=\{2;1;-5\}$, $\overline{N_2}=\{3;2;-4\}$

$$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\bar{k}=6\bar{i}-7\bar{j}+\bar{k}$$

Berilgan $M_0(-4;5;0)$ nuqtadan o‘tuvchi $\overline{S}(6;-7;1)$ yo‘naltiruvchi vektorga ega to‘g‘ri chiziq tenglamasi (1) ni tuzamiz.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k} \Rightarrow \frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z-0}{1}.$$

Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

## 10.3. Ikki to‘g‘ri chiziqorasidagi burchak, parallellik va perpendikulyarlik shartlar

Fazoda $L_1$ va $L_2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}$ kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning yo‘naltiruvchi $\bar{S}_1(m_1;n_1;k_1)$ va $\bar{S}_2(m_2;n_2;k_2)$ vektorlari orasidagi burchakka teng bo‘lib, u quyidagicha topiladi.

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_1^2+k_1^2}} \qquad (6)$$

Agar $L_1$ va $L_2$ to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\bar{S}_1$ va $\bar{S}_2$ yo‘naltiruvchi vektorlari ham parallel bo‘ladi va

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{k_1}{k_2} \qquad (7)$$

munosabat bajariladi. Bu ikki to‘g‘ri chiziqning **parallellik** sharti deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, yo‘naltiruvchi vektorlar ham perpendikulyar bo‘lib,

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+k_1\cdot k_2=0 \qquad (8)$$

munosabat bajariladi. Bu ikki to‘g‘ri chiziqlarning **perpendikulyarlik** shartidir.

**Misol.** $A(-1;2;1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{0}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish**. Berilgan to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi $\bar{s}(4;6;0)$ vektori topiladigan to‘g‘ri chiziq uchun ham yo‘naltiruvchi bo‘ladi. (1) dan foydalanib to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{0}.$$

Hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziq $xOy$ tekisligiga parallel bo‘ladi.

## 10.4. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o’zaro joylashishi

Fazoda $L$ to‘g‘ri chiziq va $Q$ tekislik o‘zining tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}, \quad Az+By+Cz+D=0.$$

Ular o‘rtasidagi munosabatlar to‘g‘ri chiziqning $\overline{S}(m;n;k)$ yo‘naltiruvchi vektor va tekislikning $\overline{N}(A;B;C)$ normali orasidagi munosabatlar orqali topiladi.

Bu to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deganda to‘g‘ri chiziq bilan uning shu tekislikdagi proeksiyasi orasidagi burchaklardan biri tushuniladi. Bu burchakni topish uchun to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi vektori va tekislikni normal vektorlari orasidagi munosabatlar orqali topiladi.

$$\sin\varphi=\frac{\overline{N}\cdot\overline{s}}{|\overline{N}||\overline{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (9)$$

(9) fazoda **to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni** topish formulasi bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lishi uchun $\vec{s}=(m;n;k)$ va $\vec{N}=(A;B;C)$ vektorlar perpendikulyar bo‘lib,

$$Am+Bn+Ck=0 \quad (10)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. (10) tenglikka to‘g‘ri chiziq va tekislikning **parallellik sharti** deyiladi. To‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘lsa,

$\vec{s}=(m;n;k)$ va

$\vec{N}=(A;B;C)$ vektorlar parallel bo‘ladi va

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k} \quad (11)$$

munosabat kelib chiqadi. (11) tenglik to'g'ri chiziq va tekislikning **perpendikulyarlik** sharti bo'ladi.

(10) shart bajarilmasa to'g'ri chiziq va tekislik kesishadi. Kesishish nuqtasini topish uchun, ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k}, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

uch noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.

**Misol.** $A(5;-1;-4)$ va $B(6;1;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan $2x-2y+z-3=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

**Yechish.** A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{s}=\overline{AB}(1;0;1)$ ni olamiz. Tekislikning normal vektori $\vec{N}=(2,-2,1)$ bo'lganligi uchun (10) formulaga asosan:

$$\sin\varphi=\frac{2\cdot1+0\cdot(-2)+1\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi=45^0.$$

**Misol.** $P(2;1;-1)$ nuqtani $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{-1}$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan $Q$ nuqtaning koordinatalarini toping.

**Yechish.** Berilgan to'g'ri chiziq $(2;0;-1)$ nuqtadan o'tib $\vec{s}(2;0;-1)$ yo'naltiruvchi vektorga ega. $P$ nuqtaning shu to'g'ri chiziqqa proyeksiyasi, $P'$ nuqtani topamiz. Buning uchun:

a) biz shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lib, $P$ nuqtadan o'tadigan tekislikning tenglamasini tuzamiz.Ushbu tekislikning normal $\overline{N}$ vektori sifatida biz ushbu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorini olamiz: $\overline{N}=\overline{S}(2;0;-1)$. Berilgan P nuqtadan o'tadigan, $\overline{N}$ normalga ega tekislik tenglamasiga ko'ra

$$2\cdot(x-2)+0\cdot(y-1)+(-1)(z+1)=0 \;\Rightarrow\; 2x-z-5=0$$

b) Endi to'g'ri chiziq bilan tekislik tenlamasining kesishish nuqtasini topamiz. Buning uchun to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko‘rinishda yozamiz: dastlab, to‘g‘ri chiziq tenglamasidagi nisbatlarni $t$ parameter orqali bog‘laymiz.

$$\frac{x-2}{2}=t;\ \frac{y}{0}=t;\ \frac{z+1}{-1}=t;$$

Bundan $\begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = 0, \\ z = -t - 1. \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari kelib chiqadi. $x$, $y$ va $z$ ning qiymatlari ni tekislik tenglamasiga qo‘ysak:

$2\cdot(2t+2)-(-t-1)-5=0$ yoki $t=0$ ega bo‘lamiz. $t$ ni qiymatini to‘g‘ri chiziqni parametrik tenglamasiga olib borib qo‘yamiz.

$$\begin{cases} x=2t+2, \\ y=0, \\ z=-t-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=0, \\ z=-1. \end{cases}$$

Demak, to‘g‘ri chiziq va tekislik $P'(2;0;-1)$ nuqtada kesishadi. $P$ va topiladigan $Q$ nuqta to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqtalar bo‘lganligidan, $P'$ nuqta $P$ va $Q$ nuqtalarning o‘rtasi bo‘ladi. U holda

$$P'=\frac{P+Q}{2} \Rightarrow Q=2P'-P \Rightarrow \begin{cases} x_Q=2\cdot2-2=2 \\ y_Q=2\cdot0-1=-1 \\ z_Q=2\cdot(-1)-(-1)=-1 \end{cases}$$

Demak, $Q(2;-1;-1)$ nuqta ekan.

### Mustaqil yechish uchun mashqlar

1. $M_0(2;5;-4)$ nuqtadan o‘tib $\vec{s}=(3;6;7)$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

2. $M_1(3;-2;5)$ va $M_2(6;1;7)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

3. $M(x;y;z)$ moddiy nuqta harakati qonuni tenglamalari berilgan: $x=5-2t$, $y=-3+2t$, $z=5-t$ shu nuqtaning $t_1=0$ momentdan $t_2=7$ momentgacha bosib o‘tgan $d$ yo‘lini aniqlang.

4. Uchlari $A(1;4;2)$, $B(3;5;4)$ va $C(-1;1;2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak $AD$ medianasining kanonik tenglamasini yozing.

5. $M_1(1;-1;3)$ nuqtadan o‘tgan va quyidagalarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalari tuzilsin:

a) $\bar{a}=\{2;-3;4\}$ vektorga ; b) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$ to‘g‘ri chiziqqa;

c) $x=3t-1;\ y=-2t+2$ to‘g‘ri chiziqqa.

6. $ABCD$ parallelogrammning ikki uchi $A(-1;2;0)$, $B(4;1;3)$ va diagonallari kesishish nuqtasi $O(-2;1;2)$ berilgan. Parallelogramm $CD$ tomonining tenglamasini tuzing.

7. $M_1(-6;6;-5)$ va $M_2(12;-6;1)$ nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan .Shu to‘g‘ri chiziqning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

8. $\begin{cases}2x-3y+5z-2=0,\\3x-5y-4z-2=0\end{cases}$ to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini yozing.

9. $\begin{cases}3x-4y+5z+7=0,\\x+2y+3z+11=0.\end{cases}$ to‘g‘ri chiziqni $xOz$ tekislikka proeksiyalovchi tekislik tenglamasi topilsin.

10. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$ va $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-4}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

11. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi topilsin:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-5},\ x+2y-2z+6=0$

12. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan $3x+5y-4z+2=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

13. $A(3;\ 6;\ 2)$ va $B(4;\ 5;\ -2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq va $2x+y-2z-5=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

14. $M_0(-2;3;4)$nuqtadan o‘tib, $3x-2y+5z-6=0$ tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

15. $m$ va $n$ ning qanday qiymatlarida $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-1}$ to‘g‘ri chiziq $mx+2y-4z+n=0$ tekislikda yotadi.

16. $\begin{cases} 2x-3y+4z-2=0, \\ x+2y-5z-3=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq va $2x-7y+12z-15=0$tekislikning parallelligini ko‘rsating.

17. $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$ va $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ parallel to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

18. $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $R$ (4;1;6) nuqtaga simmetrik bo‘lgan $Q$ nuqtani aniqlang.

19. $M$ (2; -3; 4) nuqtadan $Oy$ o‘qda tushirilgan perpendikulyarning tenglamalari yozilsin.

20. $M$ (5;2;–1) nuqtaning $x+2z-1=0$ tekislikdagi proyeksiyasini toping.

21. $M$ (3; 0; 4) nuqtadan $y=2x+1,\ z=2x$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa topilsin.

22. $M(1;3;5)$ nuqtadan $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 3x+y+2z-3=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa topilsin.

23. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ va $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

24. Kubning qirrasi 1 ga tong, uning diagonali bilan shu diagonali kesishmaydigan yoqning diagonali orasidagi qisqa masofa topilsin.

**Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar.**

| | |
|---|---|
| 1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chizi tenglamasin ko'rsating. | A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{-2}$ |
| 2. $\begin{cases} x+2y+4z-8=0 \\ 6x+3y+2z-18=0 \end{cases}$ tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqni kanonik tenglamasini ko'rsating. | B. $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=2t-1 \\ z=3 \end{cases}$ |
| 3. Uchlari $A(2;0;2)$, $B(3;-1;0)$, $C(4;-4;0)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning $B$ uchidan tushirilgan medianasi tenglamasini ko'rsating. | C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}$ |
| 4. $4x-6y+z=0$ tekislikka parallel to'g'ri chiziq tenlamasini ko'rsating. | D. $\frac{x}{8}=-\frac{y+2}{22}=\frac{z}{9}$ |
| 5. $xOy$ tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqni ko'rsating. | E. $\begin{cases} z=3 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases}$ |
| | F. $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{0}=z$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## 11-§. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

**Reja:**

1. Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi.
2. Sfera.
3. Ellipsoid.
4. Giperboloid.
5. Elliptik paraboloid.
6. Giperbolik paraboloid.

**Adabiyotlar:**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

**Tayanch iboralar:**sirt, yasovchi, yo'naltiruvchi, aylanish sirti, konussimon sirt, sfera, markaz, radius, ellipsoid, yarim o'q, ellipsoidning uchlari, giperboloid, paraboloid.

### 11.1. Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida $x$, $y$, $z$ o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz+d=0 \quad (1)$$

aniqlanuvchi sirt **ikkichi tartibli sirt** deyiladi.

Bu yerda $A,B,C,D,E,F$, $a$, $b$, $c$, $d$ koeffitsientlar ma'lum sonlar bo'lib $A,B,C,D,E,F$ sonlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lishi lozim. Aks holda (1) tenglama $ax+by+cz+d=0$ ko'rinishdagi tekislik tenglamasiga aylanadi. (1) tenglama ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi deb ataladi. (1) tenglama koeffitsientlarning qiymatlariga bog'liq ravishda turli sirtlarni aniqlaydi.

(1) tenglamani

$$Ax^2+By^2+Cz^2+d=0 \ (2) \quad \text{yoki} \quad Ax^2+By^2+cz+d=0 \ (3)$$

ko'rinishdagi tenglamalardan biriga keltirish mumkin. (2) ko'rinishdagi tenglamalar bilan aniqlanuvchi sirtlarga **sfera, ellipsoidlar, giperboloidlar va konus sirtlar,** (3) ko'rinishdagi tenglamalar bilan aniqlanuvchi sirtlarga **paraboloidlar** kiradi.

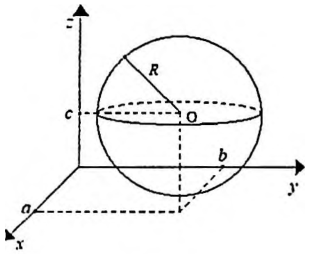
Shu bilan birga ikkinchi tartibli sirt $F(x,y)=0$ $(G(x,z)=0,\ H(y,z)=0)$ tenglama bilan berilishi mumkin. Bunday tenglamalar bilan aniqlanuvchi sirtlarga **silindrik sirtlar** kiradi.

## 11.2. Sfera

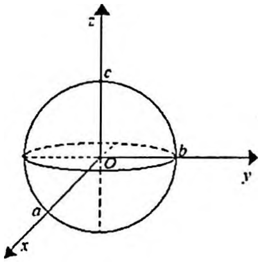
Fazoning berilgan nuqtasidan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalarining geometrik o‘rniga sfera deb ataladi. Berilgan $M(a;b;c)$ nuqta sferaning markazi, undan sferagacha $R$ masofa sferaning radiusideb ataladi. (55-chizma).

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (4)$$

(4) tenglama markazi $M(a;b;c)$ nuqtada, radiusi R ga teng bo‘lgan sfera kanonik tenglamasi deyiladi (56-chizma).




*55-chizma*




*56-chizma*

Sferani umumiy tenglamasi esa

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0,\ (A\neq 0). \qquad (5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

**Misol.** Quyidagi

$$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$$

sfera markazining koordinatalari va radiusi aniqlansin.

**Yechish.** Bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin.

$$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$$

$$x^2-12x+36+y^2+4y+4+z^2-6z+9=36+4+9$$

$$(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=7^2$$

**Misol.** Markazi $M(1;-1;2)$ nuqtada yotgan va $2x-y-2z-9=0$ tekislikka uringan sfera tenglamasini tuzing.

**Yechish.** Tekislik sferaga uringani sababli sferaning markazidan, ya'ni $M(1;-1;2)$ nuqtadan $2x-y-2z-11=0$ tekislikkacha bo'lgan masofa sferaning radiusiga teng bo'ladi. Radiusni topish uchun nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasidan foydalanamiz:

$$R=\frac{|2x_0-y_0-2z_0-11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|2\cdot1-1\cdot(-1)-2\cdot2-11|}{\sqrt{4+1+4}}=4$$

Bundan

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16.$$

**Misol.** $x^2+y^2+z^2=100$ sferani $2x+2y-z=18$ tekislik bilan kesganda kesimda hosil bo'ladigan aylananing radiusini toping.

**Yechish.** Berilgan sfera markazidan berilgan tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$$

ko'rinishda bo'ladi. Chunki tekislikni normal vektorini perpendikulyar to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida olamiz. Endi tekislikni bu to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz.Bu nuqta koordinatalari sfera bilan berilgan tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan aylana markazining koordinatalari bo'ladi.Bu nuqtani topish uchun to'g'ri chiziqni parametrik

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=2t, \\ z=-t. \end{cases}$$

holda yozib, tekislik tenglamasidagi$x,y,z$ larni o'rniga ularning $t$ orqali qiymatini qo'ysak,

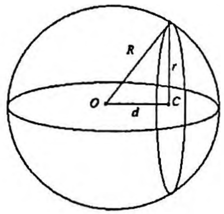
$$2\cdot 2t+2\cdot 2t+t=18$$

$t=2$ kelib chiqadi. Bu qiymatni parametric tenglamaga qo'ysak aylana markazining koordinatalari

$$x=2t=4,\; y=2t=4,\; z=-t=-2$$

$C(4;4;-2)$ kelib chiqadi. Endi sfera markazidan ya'ni, $C(4;4;-2)$ nuqtadan $2x+2y-z=18$ tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz:

$$d=|OC|=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 4+2\cdot 4+2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=6$$




57-chizma

57-chizmada ko'rinib turibdiki, quyidagi $r^2+d^2=R^2$ tenglik o'rinli. Aylana radiusirni topamiz.

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{100-36}=8.$$

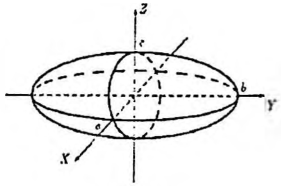
## 11.3. Ellipsoid

*Oxyz* koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (5)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga **ellipsoid** deyiladi.

$a,b,c$ musbat sonlar ellipsoidlarning yarim o'qlari deb ataladi. Agar ellipsoidni yarim o'qlari bir-biriga teng bo'lsa, u holda ellipsoid sfera bo'ladi. Ellipsoidning *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlari ellipslardan iborat bo'ladi (58-chizma).




58-chizma

**Misol.** O'qlari koordinata o'qlaridan iborat, $z=0,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsva $M(1;2;\sqrt{23})$ nuqta orqali o'tuvchi ellipsoid tenglamasi tuzilsin.

**Yechish.** Tuziladigan ellips tenglamasi

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{c^2}=1$ dan iborat bo'ladi. $M$ nuqtani koordinatalarini Shu ellips tenglamasiga qo'yib $c$ ni topamiz.

$\frac{1^2}{9}+\frac{2^2}{16}+\frac{(\sqrt{23})^2}{c^2}=1 \Rightarrow c^2=36$. Demak ellips tenglamasi,

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$ dan iborat bo'ladi.

**Misol.** $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ ellipsoidning $N(3;2;5)$ nuqtasidagi urinma tekisligi tenglamasi tuzilsin.

**Yechish.** Berilgan ellips markazi koordinatalar boshida bo'lganligi sababli $\overline{ON}$ vektorni urinma tekislikning normal vektori sifatida olamiz.

$\overline{ON}=\{3;2;5\}$. Biz $N$ nutqadan o'tuvchi va $\overline{ON}$ normal vektorga ega tekislik tenglamasini tuzamiz.

$$3(x-3)+2(y-2)+5(z-5)=0,\ 3x+2y+5z-38=0.$$

## 11.4. Giperboloid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6)$$

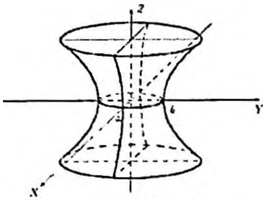
kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga bir pallali giperboloiddeyiladi.

Musbat $a,b,c$ sonlar bir pallali giperboloidning yarim o'qlari deyiladi (59-chizma).Bir pallali giperboloidning $Oxy$ tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlari ellipslardan, $Oxz$ va $Oyz$ tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlari giperbolalardan iborat bo‘ladi.

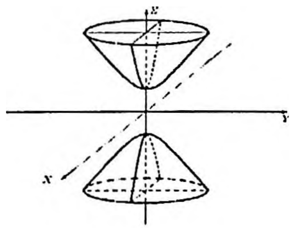
$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{7}$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ikki pallali giperboloiddeyiladi (60-chizma).




*59-chizma*




*60-chizma*

Ikki pallali giperboloidning *Oxy* tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlari ellipslardan, *Oxz* va *Oyz* tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlarigi perbolalardan iborat bo‘ladi.

**Misol.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1$ giperboloidni $z=2$ va $y=4$ tekisliklar bilan kesishishdan hosil bo‘ladigan chiziqlarning turini aniqlang.

**Yechish.** $z=2$ qiymatini giperboloidni tenglamasiga qo‘yamiz.

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}-\frac{2^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{49\cdot\frac{5}{4}}+\frac{y^2}{25\cdot\frac{5}{4}}=1.$$

Demak oxirgi hosil bo‘lgan tenglama ellips tenglamasini ifodalaydi. Endi $y=4$ ni qo‘ysak,

$$\frac{x^2}{49}+\frac{4^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{49}-\frac{z^2}{16}=\frac{9}{25} \Rightarrow \frac{x^2}{49\cdot\frac{9}{25}}-\frac{z^2}{16\cdot\frac{9}{25}}=1.$$

Bu tenglama giperbola tenglamasini bildiradi.

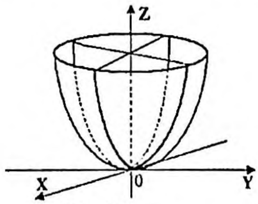
## 11.5. Elliptik paraboloid

*Oxyz* koordinatalar sistemasida

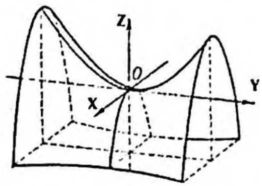
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z, \quad a>0 \ b>0 \tag{8}$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt **elliptik paraboloid** deyiladi (61-chizma).

Elliptik paraboloidning *Oxy* tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlari ellipslardan, *Oxz* va *Oyz* tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlari parabolalardan iborat bo'ladi.




*61-chizma*




*62-chizma*

## 11.6. Giperbolik paraboloid.

*Oxyz*koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z, \quad a>0 \ b>0 \tag{9}$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt giperbolik paraboloiddeyiladi (62-chizma). Giperbolik paraboloidning *Oxy* tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlari giperbolalardan, *Oxz* va *Oyz* tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlari parabolalardan iborat bo'ladi.

### Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1. Quydagi tenglamalar qanday sirtni tasvirlaydi?

a) $x^2+y^2=4$ b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ c) $x^2-y^2=1$ d) $y^2=2x$

e) $z^2=y$ f) $z+x^2=1$ g) $x^2+y^2=0$ h) $y^2=xy$

2. $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z-10=0$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt markazi koordinatalarini toping.

3. Markazi $C(3;-2;1)$ nuqtada bo'lib, $A(2;-1;5)$ nuqtadan o'tuvchi sferaning tenglamasini yozing.

4. Markazi $C(1;-2;3)$ nuqtada bo'lgan va $z-3=0$ tekislikka urinuvchi sferaning tenglamasini tuzing.

5. $A(-5;10;-1)$, $B(1;-2;-1)$, $C(-8;-2;2)$ nuqtalardan o'tuvchi va radiusi $R=9$ ga teng sfera tenglamasini tuzing.

6. Markazi $C(3;-5;-2)$ nuqtada bo'lgan va $2x-y-3z+11=0$ tekislikka urinuvchi sferaning tenglamasini tuzing.

7. Berilgan $A(1;-1;3)$ nuqtadan $x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$ sferagacha bo'lgan masofani toping.

8. Markazi $\frac{x-1}{6}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ tog'ri chiziqda yotuvchi, quyidagi $6x-3y-2z-35=0$ va $6x-3y-2z+63=0$ tekisliklarga urinuvchi sfera tenglamasini tuzing.

9. $2x-2y-z-p=0$ tekislik $p$ ning qanday qiymatlarida $x^2+y^2+z^2=81$ sferaga urinadi?

10. $A(-5;10;-1)$, $B(1;-2;-1)$, $C(-8;-2;2)$ nuqtalardan o'tuvchi va radiusi $R=9$ ga teng sfera tenglamasini tuzing.

11. $A(-2;4;1)$, $B(-5;0;0)$, $C(3;1;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi va markazi $2x+y-z+3=0$ tekislikda joylashgan sfera tenglamasini tuzing.

12. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ sferani $2x-2y-z+9=0$ tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1$ ellipsoidni $y-2=0$ tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan ellipsning yarim o'qlarini aniqlang.

14. Yarim o'qlari koordinata o'qlarida joylashgan, $z=0$ sirt bilan kesimi $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsdan iborat va $M\left(2;1;\sqrt{46}\right)$ nuqtadan o'tuvchi ellipsoid tenglamasini tuzing.

15. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ ellipsoidni $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini toping.

16. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ ellipsoidning eng katta doiraviy kesimini toping.

15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=0$ ellipsni $OX$ o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning tenglamasini toping.

17. $\frac{x^2}{49}-\frac{z^2}{36}=1,\ y=0$ egri chiziqni $OZ$ o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan sir tenglamasini tuzing.

18. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ giperbolik paraboloidning $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{4}$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini toping.

19. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ ellipsoidning $x-z=0$ tekislikka parallel kesimlarining markazlari joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

20. $C(0;0;2)$ nuqtadan va $x^2+y^2-z^2=1$, $x^2+y^2-2z=0$ sirtlarning kesishish chizig'idan o'tuvchi ikkinchi tartibli sirt tenglamasi tuzilsin.

## Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar

| | |
|---|---|
| 1. $4x^2+9y^2+36z^2-8x+36y+4=0$ sirt tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring. | A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=z$ |
| 2. $z=\frac{y^2}{9}$ parabolani $Oz$ o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini ko‘rsating. | B. $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ |
| 3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolani $Oy$ o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt englamasini ko‘rsating. | C. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{16}=1$ |
| 4. Qaysisirtniz=4 tekislikbilankesiganda $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipshosilbo‘ladi. | D. $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}+z^2=1$ |
| 5. Qaysi sirtni y=2 tekislik bilan kesiganda $z=\frac{x^2}{16}-1$ parabola hosil bo‘ladi. | E. $z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}$ |
| | F. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| J | | | | | |

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.,Наука, 1981.-232 с.

2. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М.: Проспект, 2012. - 400 с.

3. Baxvalov S. V., Modenov P. S., Parxomenko A. S. Analitik geometriyadan masalalar to‘plami. Toshkent, 2006, 546 bet.

4. E.Xolmurodov, A.I.Yusupov, T.A.Aliqulov. Oliymatematika. T.,“VNESHINVESTPROM”, 2017.

5. Yo.U.Soatov Oliy matematika. I-qism, T.:«O‘qituvchi». 1992.-496 б.

6. Yo.U. Soatov. Oliy matematika. III- qism, –T., «O‘qituvchi». 1996.-640 б.

7. Минорский В. П. Олий математикадан масалалар тўплами, «Ўқитувчи»-1977. -368 б.

8. T.A.Aliqulov, S.L.Ibragimov “Chiziqli algebra va matematik modellashtirish” Toshkent 2020.-132 bet.

9. Sh. R. Xurramov “Matematika” ma’ruzalar matni. 1-qism. Toshkent 2016.

10. T.N.Qori-Yiyoziy-AnalitikgeometriyaasosiykursiToshkent «O‘qituvchi»,1971y.

11. В.Д. Черненко Высшая математика в примерах и задачах. 1том.–СПб. «Политехника», 2003.-703 с.

12. К.Н.Лунгу, Е.В.Макаров. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.2 – М.: Физматлит, 2007.

13. М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко, Е.В.Шикин, В.И.Заляпин. Высшая математика. 1том-Москва 2003.

14. Maple 9 Learning Guide. Toronto: Maplesoft, a division of WaterlooMaple Inc., 2003.

15. Говорухин В. Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. М, Мир, 1997, 208 с

16. А.В.Матросов, Maple 6. Решение задач высшей математикии механики.

## MUNDARIJA

Kirish ........................................................................................... 3
I-BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ............................................................... 4
1-§. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI ............................. 4
1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash. .............. 4
1.2. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. ................................................. 6
1.3. Determinantning asosiy xossalari. ...................................................... 8
1.4. n-tartibli determinant haqida tushuncha. ........................................... 12
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. ........................................................ 12
Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar. ................................... 14
2-§. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR ................................ 15
2.1. Matritsa tushunchasi. Matritsaning asosiy turlari. ............................... 15
2.2. Matritsa ustida amallar. ................................................................. 16
2.3. Teskari matritsa va uni tuzish. ........................................................ 19
2.4. Matritsaning rangi. ........................................................................ 21
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. ........................................................ 25
Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar. ................................... 26
3-§. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI VA UNI YECHISH USULLARI ........ 28
3.1. Tabiiy va amaliy jarayonlarni chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga modellashtirish. ........ 28
3.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushuncha. Kroniker-Kapelli teoremasi. ........ 30
3.3. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning matritsa usuli. ..................... 31
3.4. Chiziqli tenglamalar sistemani yechishning Kramer qoidasi. ................... 33
3.5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss qoidasi. .................. 35
3.6. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. ................................ 38
3.7. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda dasturlar majmuasidan foydalanish. ........ 40
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. ........................................................ 42
Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar. ................................... 43
II-BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI ......................................................... 45
4-§. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR ...................... 45
4.1. Tabiiy va amaliy jarayonlarni "vektorlar algebrasi"ga modellashtirsh. .. 45
4.2. Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar. ........................................... 48

4.3. Vektorni o‘qdagi proyeksiyasi. Vektorlar chiziqli erkliligi. Vektorlarni bazis bo’yicha yoyilmasi. .......... 51
4.4. Vektorlarning yo‘naltiruvchi kosinuslari .......... 52
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .......... 54
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .......... 56
**5- §. IKKI VEKTORNI SKALYAR VA VEKTOR KO‘PAYTMALARI. ARALASH KO‘PAYTMA** .......... 58
5.1. Skalyar ko‘paytma va uning asosiy xossalari. .......... 58
5.2. Ikki vektor orasidagi burchak. .......... 59
5.3. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti. .......... 60
5.4. Ikki vektorni vektor ko‘paytmasi va uning asosiy xossalari. .......... 62
5.5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko‘paytmasi. .......... 63
5.6. Uch vektorning aralash ko‘paytmasi va uning asosiy xossalari. .......... 65
5.7. Vektorlarni kollinearlik va komplanarlik shartlari .......... 68
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .......... 68
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .......... 72
**III-BOB. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA** .......... 73
**6-§. KOORDINATALAR SISTEMASI** .......... 73
6.1. Haqiqiy sonlar o‘qi. .......... 73
6.2. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi. .......... 74
6.3. Tekislikdagi ikki nuqtasi orasidagi masofa. .......... 75
6.4. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish. .......... 76
6.5. Qutb koordinatalar sistemasi. .......... 79
6.6. Nuqtaning qutb va Dekart koordinatalari orasidagi bog‘lanish. .......... 80
6.7. Koordinatalarni almashtirish. .......... 81
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .......... 84
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .......... 85
**7-§. TEKISLIKDAGI TO‘G‘RI CHIZIQ** .......... 87
7.1. Tabiiy, texnik va iqtisodiy jarayonlarda tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning tadbiqi. .......... 87
7.2. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to‘g‘ri chiziq tenglamasi .......... 89
7.3. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. .......... 90
7.4. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi. .......... 91
Yechish. Masalani shartiga ko‘ra .......... 91

7.5. To‘gri chiziqlarning o’zaro joylashishi. .... 91
7.6. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. .... 93
7.7. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. .... 94
7.8. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa. .... 94
7.9. To‘g‘ri chiziqlar dastasi. .... 95
7.10. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. .... 95
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .... 98
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .... 101
**8-§. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR** .... 102
8.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni amaliy masalalarga tadbiqlari. .... 102
8.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy tushuncha. .... 104
8.3. Aylana. .... 106
Mustaqil yechish uchun mashqlar. .... 109
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .... 111
8.4. Ellips .... 112
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .... 117
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .... 118
8.4. Giperbola. .... 119
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .... 123
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar. .... 125
8.5. Parabola. .... 126
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. .... 131
Mavzuni mustahkamlash uchun o‘rgatuvchi testlar .... 133
**IV-BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA** .... 134
**9-§. FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI** .... 134
9.1. Fazoda sirt va uning tenglamasi. .... 134
9.2. Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasi. .... 135
9.3. Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. .... 136
9.4. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi .... 137
9.5. Tekislikni normal tenglamasi. .... 138
9.6. Tekisliklarning o’zaro joylashishi. Tekisliklar dastasi. .... 138
9.7. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. .... 139

9.8. Nuqtadan tekislikgacha masofa........................................................ 140
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. ........................................................ 140
Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar. .................................. 143
**10-§. FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ**........................................................ 144
10.1. To'g'ri chiziqning kanonik, parametrik,vektor va umumiy tenglamalari........................................................................144
10.2. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.................. 146
10.3. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikulyarlik shartlar........................................................................................ 148
10.4. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashishi...................... 149
Mustaqil yechish uchun mashqlar.......................................................... 151
Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar. .................................. 154
**11-§. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR**..................................................... 155
11.1. Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi............................. 155
11.2. Sfera. ........................................................................................ 156
11.3. Ellipsoid. .................................................................................. 158
11.4. Giperboloid.................................................................................. 159
11.5. Elliptik paraboloid. ...................................................................... 161
11.6. Giperbolik paraboloid..................................................................... 161
Mustaqil bajarish uchun mashqlar. ........................................................ 161
Mavzuni mustahkamlash uchun o'rgatuvchi testlar. .................................. 164
**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI** ................................... 165

UDK 512.86: 513.012
BBK: 76.441
T.A.Aliqulov, M.Q.Movlonov, Z.Chorshanbiyev
Chiziqli algebra va analitik geometriyadan amaliy mashg'ulotlar.
O'quv qo'llanma. «Intellekt» nashriyoti. – Qarshi. 2021 yil, – 170 bet.

ISNB 978 – 9943 – 7745 –2 –0

**T.A.ALIQULOV, M.Q.MOVLONOV, Z.E.CHORSHANBIYEV**

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYADAN AMALIY MASHG'ULOTLAR

Muharrir: B. Musayev
Musahhih: I. Tog'ayev
Texnik muharrir: M. Tog'ayev
Kompyuterda sahifalovchi: A. Abdiraxmonova

*Tasdiqnoma. 5165, 02.03.2021.*
Terishga berildi: 22.11.2021y.
Bosishga ruxsat etildi: 29.12.2021y.
Ofset qog'oz. Qog'oz bichimi: 60x84 1/16.
"Times UZ"gar. Ofset bosma.
Hisob nashriyot t.: 10,54. Shartli b. t.: 10,60.
Adadi: 30 nusxa. Buyurtma № 70

---

«Intellekt» nashriyotida tayyorlandi.
QarMII kichik bosmaxonasida chop etildi.
180100. Qarshi shahri, Mustaqillik ko'chasi 225 – uy.
Telefon 91-466-80-32.

INTELLEKT
NASHRIYOTI

ISBN 978-9943-7745-2-0

9 789943 774520