A.Abdushukurov, T.Zuparov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

"Tafakkur Bo'stoni"
Toshkent – 2015

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA
A.Abdushukurov, T.Zuparov

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Abdushukurov A.A., Zuparov T.M.

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

Oliy o'quv yurtlarining bakalavr yo'nalishi talabalari uchun darslik

"TAFAKKUR BO'STONI"
TOSHKENT-2015

UO'K: 519.2(075)
KBK 22.171
E-97

Taqrizchilar: **Shoraxmetov Sh.**, Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti "Oliy matematika" kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori;

Jamirzayev A.A., Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

E-97 **Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika** [matn]: o'quv qo'llanma / A.A.Abdushukurov [va boshq.]. – T.: «Tafakkur Bo'stoni», 2015. –416 b.

KBK 22.171ya73

ISBN 978-9943-993-21-1

Darslik ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani o'qitiladigan oliy ta'lim muassasalarining aniq va tabiiy fanlar ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan bakalavrlar hamda ilmiy-tadqiqot ishlari olib borayotgan magistrantlar uchun mo'ljallangan. Unda zamonaviy ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining asosiy da'volari, tushunchalari va tasodifiy tajribalar natijalarini tahlil qilish uslubiyatlari namunaviy misollar bilan batafsil bayon qilingan. Darslikda fan bo'limlari bo'yicha mavzularni chuqur o'zlashtirish uchun mustaqil yechishga mo'ljallangan misollar, masalalar va test-topshiriqlari ham keltirilgan.

Darslikdan ilmiy tadqiqot ishlari bilan shug'ullanuvchi barcha mutaxassislar ham foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-993-21-1

KIRISH

Ushbu darslikda zamonaviy ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining asosini bayon qilish maqsad qilib olingan. Darslikda fanning asosiy tushuncha va da'volari imkoniyat darajasida keng qamrab olingan bo'lib, uni yozishda mualliflarning O'bekiston Milliy universitetida ko'p yillar davomida olib borgan mashg'ulotlari materiallari asos qilib olingan.

Darslikda oliy ta'lim muassasalarining aniq va tabiiy fakultetlari bakalavriat ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan talabalar ma'ruza, amaliy mashg'ulot va mustaqil ta'lim materiallarini chuqur o'zlashtirishlari uchun ular zarur tipik masala va misollar bilan ta'minlanganlar. Darslik tuzilishi bo'yicha nomiga mos ravishda ikki qismdan iborat bo'lib, uning "Ehtimollar nazariyasi" qismi (I-VI boblar) professor T.M.Zuparov va "Matematik statistika" qismi (VII-XIII boblar) professor A.A.Abdushukurov tomonidan yozilgan. Mazkur darslik hozirga qadar o'zbek tilidagi mavjud o'quv qo'llanma va darsliklardan farqli ravishda yagona butunlik prinsipiga amal qilgan holda fanning har ikkala qismida magistrantlar va ilmiy xodimlar tadqiqotlar olib borishlari uchun zarur bo'lgan materiallarni ham o'z ichiga olgandir.

Hozirda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullarining qo'llanish doirasi fan, texnika va amaliyot bilan bog'liq deyarli barcha tadqiqotlarda kengayib bormoqda va ular tadqiqotlarning muqarrarligini aniqlashda yuqori mutasaddi tashkilotlar tomonidan talab etilmoqda. Shu munosabat bilan mualliflar ushbu darslik nafaqat talabalarga, balki mutaxassislar uchun ham foydali bo'lishiga ishonch bildiradilar.

Mualliflar kitobxonlarning darslikka oid fikr va mulohazalarini minnatdorlik bilan qabul qiladilar. Ushbu darslik qo'lyozmasini tayyorlashda qimmatli yordami uchun mualliflar O'zbekiston Milliy universiteti katta ilmiy xodim-izlanuvchisi N.S.Nurmuxamedovaga tashakkur bildiradilar.

I BOB. EHTIMOLLAR FAZOSI

1-§. Tasodifiy hodisa. Elementar hodisalar fazosi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri tasodifiy hodisadir. Bu tushuncha tajriba bilan chambarchas bog'liqdir. Tajriba sun'iy ravishda yaratiluvchi yoki uni o'tkazuvchi shaxsning ixtiyoriga bog'liq bo'lmagan holda vujudga keluvchi ma'lum shartlar kompleksi bajarilganida, o'tkaziladigan sinovdan iborat. Tajribalarni ikki sinfga (turga) bo'lish mumkin. Ularning birida tajriba natijalari tabiat qonunlariga tayangan holda oldindan aytib berilishi mumkin. Bunday tajribalar **deterministik (aniqlangan)** degan nom bilan yuritiladi. Tajribalarning ikkinchi sinfida esa bir xil shart-sharoit bajarilganda ham sinov natijasida bir-birini rad etuvchi xilma-xil hodisalar ro'y berishi mumkin. Bunday xilma-xillik masalan, elektr lampochkalarining ishdan chiqish hodisasini kuzatganda, elementar zarrachalar bir-birlari bilan to'qnashganda, individumlarning biror tibbiy preparatga ta'sirchanligi kuzatilganda va hokazolarda uchraydi. Bunday tajribalarni o'rganish ehtimollar nazariyasining predmetini tashkil etadi. Ular **tasodifiy (stoxastik)** yoki ehtimollik tajribalari deb ataladi. Biz bunday tajribalarni istalgancha qaytarish mumkin, deb faraz qilamiz.

Tasodifiy tajribaning har qanday natijasi **elementar hodisa** deyiladi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalardan tashkil topgan to'plamni biz **elementar hodisalar fazosi** yoki **tanlanma fazo** deb ataymiz va Ω orqali belgilaymiz, har bir elementar hodisani esa ω, $(\omega \in \Omega)$ orqali belgilaymiz.

Elementar hodisalar fazosining tuzilmasini izohlash uchun quyida misollar keltiramiz.

1-misol. Tajriba bir jinsli simmetrik tanga tashlashdan iborat bo'lsin. Raqamni «r» va gerbni «g» orqali belgilasak, u holda elementar hodisalar $\omega_1 = \text{g}$ va $\omega_2 = \text{r}$ bo'lib, elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ to'plamdan iborat bo'ladi.

2-misol. Tajriba nomerlangan kubni (yoqlari birdan oltigacha nomerlangan bir jinsli kubni) tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ to'plamdan iborat.

3-misol. Faraz qilaylik, biz telefon stansiyasining ishini bir soat ichida kuzatib, chaqirishlar (talablar) soni bilan qiziqaylik. Kuzatuv vaqtida bitta ham chaqirish kelmasligi, bitta chaqirish kelishi, ikkita chaqirish kelishi va hokazo hodisalar ro'y berishi mumkin. Bu tajribada elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{0,1,2,...\}$ ko'rinishga ega.

4-misol. n ta sharni m ta turli sharlarni o'z ichiga olgan idishdan tanlash bilan bogliq bo'lgan murakkabroq tajribani ko'rib o'tamiz. Har bir tanlovda olingan shar idishga qaytarib qo'yiladigan tajribaga **takroriy (yoki qaytuvli)** tanlash deyiladi. Bu holda n ta shardan iborat har qanday tanlanma $\Omega = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ ko'rinishda yozilishi mumkin, bu yerda u_i orqali i-qadamda olingan sharning raqami belgilangan. Takroriy tanlanmada har bir u_i, $1,2,3,...,m$ qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin. Elementar hodisalar fazosini tasvirlash bir xil tarkibli, masalan, (5121234) va (1251243) kabi tanlanmalarni bir xil tanlanma yoki har xil tanlanma deb hisoblashimizga qarab tubdan farq qiladi. Shu munosabat bilan ikki holni farqlaymiz: **tartiblangan tanlanmalar va tartiblanmagan tanlanmalar.**

Tartiblangan tanlanmalar qaralgan holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega; \omega = (u_1, u_2, ..., u_n); u_i = 1,2,...,m\}$ ko'rinishga ega va elementar hodisalar soni $N(\Omega) = m^n$ ga teng. Tartiblanmagan tanlanmalarni biz $\omega = [u_1, u_2, ..., u_n]$ shaklida ifodalasak, bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega; \omega = [u_1, u_2, ..., u_n]; u_j = 1,2,...,m\}$ ning elementlari sonini $K(m,n)$ orqali belgilaymiz, u holda

$$N(\Omega) = K(m,n) = C^n_{m+n-1} \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $C^j_k = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ k-ta elementdan j tadan tuzilgan guruhlar soniga teng. (1) tenglikning isboti ushbu

$$K(1,n) = 1, \; K(m,n) = \sum_{s=1}^{n} K(m-1,s) \tag{2}$$

rekkurent munosabatdan kelib chiqadi. (2) tenglikdagi $K(m-1,s)$ avval $m-1$ ta turli sharli idishdan s ta shardan iborat tartiblanmagan tanlanma olib, so'ngra m-sharni $n-s$ marta qo'shib olishdan hosil bo'lgan elementar hodisalar soniga teng.

5-misol. Bu misolda endi tanlangan shar idishga qaytarib qo'yilmaydi. Bunday tajribaga **qaytarilmas tanlash** deyiladi. Bu holda $n \le m$ deb faraz qilamiz. Qaytarilmas n ta shardan iborat tartiblangan tanlash o'tkazilgan holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \left\{ \omega; \omega = (u_1, u_2, \ldots, u_n); u_1 \ne u_2 \ne \ldots \ne u_n, u_i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

to'plam orqali ifodalanadi va bu to'plamning elementlari soni

$$(m)_n = m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

m elementdan n tadan o'rinlashtirishlar soni A_m^n ga teng. Tartiblanmagan tanlash o'tqazilgan holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \left\{ \omega; \omega = [u_1, u_2, \ldots, u_n]; u_1 \ne u_2 \ne \ldots \ne u_n; u_i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

to'plamdan iborat bo'ladi va har bir tartiblanmagan turli elementli tanlanmadan $n!$ ta turli tartiblangan tanlanmani hosil qilish mumkin bo'lgani uchun barcha elementar hodisalar soni

$$N(\Omega) = \frac{(m)_n}{n!} = \frac{A_m^n}{n!} = C_m^n$$

ga teng bo'ladi.

6-misol. Navbatdagi misol sifatida shamolning yo'nalishini aniqlashdan iborat bo'lgan tajribani ko'raylik. Agar biz natijani θ orqali belgilasak, u holda θ $[0, 2\pi)$ yarim intervaldan qiymatlar qabul qiladi. Shunday qilib, tabiiy ravishda Ω elementar hodisalar fazosi chekli yarim intervaldan (yoki aniqrog'i aylananing nuqtalaridan iborat bo'ladi). Bir vaqtning o'zida shamolning yo'nalishi θ va uning v tezligini kuzatish yana ham aniqroq tajriba bo'lar edi. Bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \left\{ \omega = (\theta, v);\ 0 \le \theta < 2\pi; v > 0 \right\}$, ya'ni ikki o'lchovli vektorlardan tashkil topgan cheksiz to'plam orqali ifodalanar edi.

7-misol. Broun harakati. Mikroskopda molekulalar tomonidan ko'p miqdordagi zarbalar natijasida tartibsiz (xaotik) harakat qilayotgan kichik zarrachaning holati kuzatilayotgan bo'lsin. Kuzatuv $[0,T]$ vaqt oraligida o'tkazilayotgan bo'lsin. Bu tajribaning natijasi zarrachaning harakat trayektoriyasidan iborat bo'ladi. Agar bizni zarrachaning biror yo'nalish bo'yicha siljishi qiziqtirsa, u holda vaqtning ixtiyoriy t momentida ($t\in[0,T]$), uni tanlangan yo'nalishdagi proyeksiyasining vaziyati $x(t)$ koordinata orqali ifodalanadi. Bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{x(t);t\in[0,T]\}=C_{[0,T]}[0,T]$ oralig'ida aniqlangan haqiqiy uzluksiz funksiyalar to'plamidan iborat bo'ladi.

Demak, elementar hodisalar fazosi chekli, sanoqli va hatto kontinium quvvatga ega bo'lishi mumkin ekanligi yuqorida keltirilgan misollardan yaqqol ko'rinadi.

Elementar hodisalar fazosi bilan bir qatorda endi eng muhim tushuncha **tasodifiy hodisa** yoki (boshqa tipdagi hodisalarni biz bu darslikda ko'rmayotganligimiz sababli) **hodisa** tushunchasini kiritamiz. Hodisalar elementar hodisalardan tashkil topgan to'plamlar bo'lib, ular odatda lotin alifbosining bosh harflari $A,B,C,\ldots$ lar bilan belgilanadi. Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga biz **muqarrar** hodisa deymiz. Aksincha hech qachon ro'y bermaydigan (ya'ni birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan) hodisaga **mumkin bo'lmagan** yoki **bajarilmaydigan** hodisa deb aytaymiz va uni $\varnothing$ orqali belgilaymiz. Birorta berilgan hodisalar sinfiga tayanib "yoki", "va", "inkor qilish" kabi mantiqiy bog'lanishlar yordamida yangi hodisalarni "hech bo'lmaganda" hosil qilish mumkin; bu mantiqiy bog'lanishlarga to'plamlar nazariyasida "birlashma", "kesishma" va "to'ldirma" kabi amallar mos keladi.

A hodisaga **teskari** (qarama-qarshi) $\bar{A}$ **hodisa** deb, A hodisa ro'y bermaganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytiladi.

A va B hodisalarning yigindisi $A+B$ (yoki $A\bigcup B$) deb, A yoki B hodisalar, yoki ikkalasi ham bajarilganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytiladi. $A+\bar{A}=\Omega$ – muqarrar hodisa ekanligi o'z-o'zidan ayon.

A va B hodisalarning ko'paytmasi AB (yoki $A \cap B$) deb, A va B hodisalar birgalikda bajarilganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytamiz. $A\overline{A} = \varnothing$ – mumkin bo'lmagan hodisa ekanligi ravshan.

Agar $AB = \varnothing$ bo'lsa, A va B hodisalar **birgalikda bo'lmagan (yoki birgalikda bajarilmaydigan) hodisalar** deyiladi.

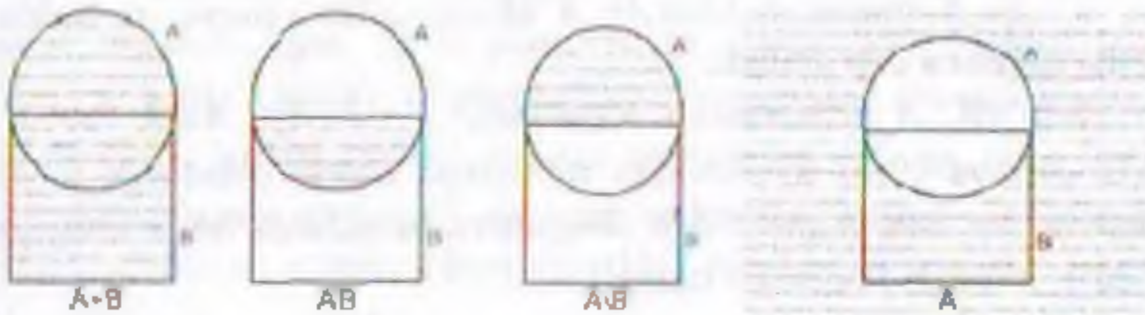
A va B hodisalarning $A \setminus B$ ayirmasi deb, A hodisa bajarilib, B hodisa bajarilmaganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytiladi.

Agar A hodisaning ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa, u holda A hodisa B hodisani **ergashtiradi** deymiz va buni $A \subseteq B$ ko'rinishda yozamiz.

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar **teng kuchli** yoki **teng hodisalar** deyiladi va $A = B$ orqali yoziladi. Teng kuchli hodisalar bir xil elementar hodisalardan tashkil topgan ekanligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

8-misol. Tajriba simmetrik bir jinsli tangani uch marta tashlashdan iborat bo'lsin. Elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ to'plamdan iborat bo'lib, unda $\omega_1 = (ggg)$, $\omega_2 = (ggr)$, $\omega_3 = (grg)$, $\omega_4 = (rgg)$, $\omega_5 = (grr)$, $\omega_6 = (rgr)$, $\omega_7 = (rrg)$, $\omega_8 = (rrr)$. A hodisa tanga uch marta tashlanganda ikki marta gerb tushishidan, B esa kamida ikki marta raqam tushishidan iborat bo'lsin, u holda $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ va $B = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ ekanligi ravshan. Demak, $A + B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ – kamida bir marta raqam tushish hodisasi, $AB = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ – kamida ikkita raqam yoki birorta ham raqam tushmaslik hodisasidan iborat.

9-misol. Tajriba birlik kvadratga tavakkaliga zarracha tashlashdan iborat bo'lsin. A tashlangan zarrachaning doiraga tushishi, B esa tashlangan zarrachaning kichik kvadratga tushishi hodisalari bo'lsa, u holda $A+B$, AB, $A \setminus B$ va $\overline{A}$ hodisalar zarrachaning mos ravishda A va B figuralarning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi va birlik kvadratgacha to'ldirmasi orqali hosil qilingan (1-shaklda tegishli sohalar shtrixlangan) sohalarga tushishidan iborat.



1-shakl.

Hodisalarning yigindisi va ko'paytmasi amallarini ularning chekli yoki cheksiz to'plami $\sum_{\alpha} A_{\alpha}$ (yoki $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$), $\prod_{\alpha} A_{\alpha}$ (yoki $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$) uchun kengaytirish mumkin.

To'plamlar ustidagi amallarning barcha xossalari hodisalar uchun ham o'rinlidir, masalan:

$$\overline{\sum_{\alpha} A_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}, \ \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}, \ \bar{A} = \Omega \setminus A, \bar{\Omega} = \varnothing,$$

$$A \setminus B = A \setminus AB = A\bar{B}, \ A \setminus (A \setminus B) = AB, \ A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A},$$

$$A + A = A, \ (A + B)C = AC + BC, \ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

2-§. Tasodifiy hodisalar algebrasi va σ- algebrasi. Ehtimollar nazariyasining aksiomalari. Ehtimollik fazosi

Elementar hodisalar fazosi cheksiz bo'lgan umumiy holda biz barcha hodisalarni qarash o'rniga, hodisalarning algebralari yoki σ–algebralari deb ataluvchi ba'zi sinflarinigina qaraymiz. Shunday qilib, elementar hodisalar fazosi Ω ixtiyoriy to'plamdan iborat va $\mathcal{A}$ esa Ω to'plamning qism to'plamlaridan tashkil topgan birorta sistema bo'lsin.

1-ta'rif. Agar

1°. $\Omega \in \mathcal{A}$;

2°. $A \in \mathcal{A}$ va $B \in \mathcal{A}$ munosabatdan $A + B \in \mathcal{A}$ ekani kelib chiqsa;

3°. $A \in \mathcal{A}$ munosabatdan $\overline{A} \in \mathcal{A}$ ekani kelib chiqsa, u holda $\mathcal{A}$ sistema **algebra** deb ataladi.

2-ta'rif. $\mathcal{A}$ – hodisalar algebrasi, $P = P(A)$; $A \in \mathcal{A}$ esa $\mathcal{A}$ da aniqlangan va $[0;1]$ to'plamdan qiymatlar qabul qiladigan to'plam funksiyasi bo'lsin. Agar $\mathcal{A}$ dan olingan va birgalikda bajarilmaydigan ixtiyoriy A va B hodisalar uchun

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ da **chekli additiv o'lchov** kiritilgan deyiladi. $P(\Omega) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi chekli additiv o'lchovga esa $\mathcal{A}$ da aniqlangan **chekli additiv ehtimollik o'lchovi** deyiladi.

Agar $\mathcal{A}$ hodisalar algebrasi bo'lsa, u holda $A \in \mathcal{A}$ va $B \in \mathcal{A}$ hodisalar uchun $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ va $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ munosabatlarga ko'ra $A \cap B \in \mathcal{A}$ va $A \setminus B \in \mathcal{A}$ ekanligi kelib chiqadi. Shu kabi 1° va 3° shartdan $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$, yani $\varnothing \in \mathcal{A}$ ekanligi kelib chiqadi.

Hodisalarning $\mathcal{A}$ algebrasi ba'zan hodisalar halqasi deb ham ataladi, chunki $\mathcal{A}$ da halqaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita algebraik amal (qo'shish va ko'paytirish: $\cup;\cap$) kiritilgan. Hodisalarning $\mathcal{A}$ algebrasi, $\mathcal{A} \cap \Omega = \mathcal{A}$ bo'lgani uchun birlik halqani tashkil etadi.

Algebra tashkil qiluvchi hodisalar sistemasining "eng kichigi" $\mathcal{A} = \{\varnothing;\Omega\}$ ekanligi ravshan. Shu bilan birga Ω to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi $\mathcal{M}(\Omega)$ ham algebradan iborat ekanligini tekshirish mumkin.

Agar Ω chekli fazo bo'lsa, u holda uning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathcal{M}(\Omega)$ sistema ham chekli to'plam bo'ladi.

10-misol. Tajriba bir jinsli simmetrik tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. U holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$ 4 ta elementdan tashkil topgan chekli to'plamdan iborat bo'ladi va $\mathcal{M}(\Omega)$ algebraning barcha hodisalarini yozib chiqish mumkin:

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{\varnothing;\{gg\};\{gr\};\{rg\};\{rr\};\{gg,gr\};\{gg,rg\};\{gg,rr\};\{gr,rg\};\{gr,rr\};$$

$$\{rg,rr\};\{gg,gr,rr\};\{gg,rr,gr\};\ \{gg,rr,gr\};\{gr,rg,rr\};\Omega\}.$$

Bu misolda $\mathcal{M}(\Omega)$ algebra $2^4=16$-ta elementar hodisalardan tashkil topgan. Agar Ω to'plam N ta elementdan tashkil topgan bo'lsa, u holda $\mathcal{M}(\Omega)$ to'plam 2^N ta elementdan iborat. Haqiqatan ham 0 va 1 lardan tashkil topgan uzunliklari N ga teng bo'lgan ketma-ketliklarning soni 2^N ga teng va bunday ketma-ketliklar bilan $\mathcal{M}(\Omega)$ orasida o'zaro birqiymatlik moslik o'rnatish mumkin $\left(2^N = C_N^0 + C_N^1 + \ldots + C_N^N\right)$.

3-ta'rif. Agar Ω to'plamning qism to'plamlaridan tashkil topgan hodisalarning $\mathcal{A}$-algebrasida (2° shart o'rnida):

2^*. $A_n \in \mathcal{A}; n = 1,2,\ldots$dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ekanligi kelib chiqsa, u holda $\mathcal{A}$ σ – **algebra** yoki **Borel algebrasi** deyiladi. Ω fazo va uning qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathcal{A}$ σ -algebra birgalikda **o'lchovli fazo** deb ataladi va $(\Omega,\mathcal{A})$ orqali belgilanadi.

11-misol. 1°) $\Omega = R = \{x;\ -\infty < x < \infty\}$ sonli to'g'ri chiziq bo'lsin. $\mathcal{F}_0$ orqali chekli yoki cheksiz kesmalardan, intervallar va yarim intervallardan tashkil topgan to'plamlar sistemasini belgilaymiz. $\mathcal{F}_0$ algebra tashkil qilmaydi. Masalan, $A = (-\infty;-1)$ va $B = (1;+\infty)$ to'plamlar yig'indisi $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ to'plam $\mathcal{F}_0$ sistemaga kirmaydi. Agar $\mathcal{F}_0$ ni, undan olingan to'plamlarning barcha chekli yig'indilari bilan to'ldirsak, u holda hosil bo'lgan yangi to'plamlar sistemasi $\mathcal{F}$ algebrani tashkil qiladi.

$\mathcal{F}$ algebrani o'z ichiga olgan barcha σ -algebralarni qaraymiz. $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ va $\mathcal{M}(\Omega)$ σ -algebrani tashkil qilgani sababli, $\mathcal{F}$ algebrani o'z ichiga olgan kamida bitta σ -algebra mavjud. Bunday σ - algebralarning kesishmasi (ya'ni σ -algebralarning barchasiga tegishli bo'lgan to'plamlar sinfi) yana σ -algebrani tashkil qiladi. Bu barcha intervallarni o'z ichiga olgan minimal σ -algebra bo'lib, **Borel** σ - **algebrasi deyiladi** va $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R)$ orqali belgilanadi.

2°) $\Omega = R_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \ x_k \in R\}$ – n o'lchovli Evklid fazosi bo'lsin. R_n fazo nuqtalarini $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'rinishida ifodalaymiz. I_0 orqali

$$\{x \in R_n;\ a_1 < x_1 \le b_1, a_2 < x_2 \le b_2, ..., a_n < x_n \le b_n\} \qquad (3)$$

ko'rinishdagi barcha n o'lchovli yarim ochiq parallelepipedlardan tashkil topgan to'plamlar sistemasini belgilaymiz, bu yerda $-\infty \le a_i < b_i$ haqiqiy sonlar. (3) ko'rinishdagi yarim ochiq parallelepipedlarning chekli yig'indilaridan tashkil topgan $\mathcal{B}_0(R_n)$ sinf algebra tashkil qilishini tekshirish qiyin emas. $\mathcal{B}_0(R_n)$ algebrani o'z ichiga olgan minimal $\mathcal{B}(R_n) = \mathcal{B}_n$ σ-algebraning mavjud ekanligini 1^0-xossadagi kabi isbotlash mumkin. $\mathcal{B}_n$ σ-algebraga n o'lchovli Evklid fazosidagi Borel to'plamlarining σ-algebrasi deyiladi.

4-ta'rif. Bizga $(\Omega,\mathcal{A})$-o'lchovli fazo berilgan bo'lsin. Agar $\mathcal{A}$ σ-algebrada aniqlangan P sonli funksiya uchun quyidagi aksiomalar o'rinli bo'lsa:

K1. Istalgan $A \in \mathcal{A}$ uchun $P(A) \ge 0$ (P ning nomanfiyligi);

K2. $P(\Omega) = 1$ (P ning normalanganligi);

K3. Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ hodisalar ketma-ketligi uchun

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{ (} P \text{ ning sanoqli additivligi),}$$

u holda $\mathcal{A}$ σ-algebrada P ehtimollik o'lchovi yoki ehtimol kiritilgan deyiladi.

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ uchlikka ehtimollar fazosi yoki ehtimollik modeli deyiladi, bu yerda $\mathcal{A}$ hodisalarning σ-algebrasi, P $\mathcal{A}$ da aniqlangan ehtimol. $P(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) songa A hodisaning ehtimoli deyiladi.

Demak, ehtimollik modelini yaratish o'lchovli fazoda manfiy bo'lmagan, sanoqli additiv Ω fazoning o'lchovi 1 bo'lgan o'lchov kiritishdan iborat ekan.

Ehtimollar nazariyasining, yuqorida kiritilgan, aksiomatikasini A.N.Kolmogorov taklif qilgan. K1, K2, K3 aksiomalar sistemasi, ularni qanoatlantiruvchi real obyektlar mavjud bo'lgani sababli o'zaro zid emas.

3-§. Ehtimolning asosiy xossalari

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan ehtimolning quyida keltirilgan asosiy xossalari kelib chiqadi.

1°) $P(\varnothing)=0$.

1°-xossaning isboti $\varnothing\cup\Omega=\Omega$ tenglikdan va K1, K3 aksiomalardan kelib chiqadi.

2°) Agar $A\subset B$ bo'lsa, u holda $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$. $B=A\bigcup(B\setminus A)$ va $A\bigcap(B\setminus A)=\varnothing$ tengliklardan K3 aksiomaga ko'ra

$$P(B)=P(A)+P(B\setminus A).$$

Bu tenglikdan ushbu xossaning isboti kelib chiqadi:

3°) Agar $A\subset B$ bo'lsa, $P(A)\le P(B)$ bo'ladi.

4°) Agar $A,B\in \mathcal{A}$ bo'lsa, u holda

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

Bu xossaning isboti $A\bigcup B=A\bigcup(B\setminus(A\bigcap B))$ tenglik va 2°-xossadan kelib chiqadi:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B\setminus(A\bigcap B))=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

5°) $P(\bar{A})=1-P(A)$ tenglik $A\bigcup\bar{A}=\Omega$, $A\bigcap\bar{A}=\varnothing$ munosabatlar va K3 aksiomadan kelib chiqadi.

6°) Agar $A_n\in \mathcal{A}$, $n=1,2,\ldots$ bo'lsa, u holda

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

6°-xossani isbotlash uchun $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ tenglikka murojaat etamiz, bu yerda $B_1=A_1$, $B_n=\bar{A}_1\bigcap\ldots\bigcap\bar{A}_{n-1}\bigcap A_n$, $n=2,3,\ldots$, $B_i\bigcap B_j=\varnothing$, $i\ne j$ tenglik o'rinli. Demak K3 aksiomaga ko'ra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

Quyidagi teorema ehtimollik o'lchovi bilan chekli additiv to'plam funksiyasining uzluksizligi orasidagi bog'lanishni ko'rsatadi.

1-teorema. P – $\mathcal{A}$-algebrada kiritilgan chekli additiv ehtimollik o‘lchovi bo‘lsin. U holda ushbu 4 ta shart o‘zaro ekvivalent:

1. P σ -additiv (ya’ni P $\mathcal{A}$ da kiritilgan ehtimol).

2. P – yuqoridan uzluksiz, ya’ni $\mathcal{A}$ dan olingan va $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n=1,2,...,$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $A_1, A_2,...$ ketma-ketlik (buni biz $A_n \uparrow$ orqali belgilaymiz) uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

3. P-quyidan uzluksiz, ya’ni $\mathcal{A}$ dan olingan va $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n=1,2,...,$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $A_1, A_2,...$ ketma-ketlik uchun (buni biz $A_n \downarrow$ orqali belgilaymiz)

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

4. P – “nolda uzluksiz”, ya’ni $\mathcal{A}$ dan olingan va $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n=1,2,...,$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $A_1, A_2,...$ ketma-ketlik uchun (buni biz $A_n \downarrow \varnothing$ orqali belgilaymiz)

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Isboti. Teoremani biz ushbu 1)$\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3)$\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$1) sxema bo‘yicha isbotlaymiz. Bu yerda i)$\Rightarrow$j) orqali i) shartdan j) shart kelib chiqishi belgilangan.

1)$\Rightarrow$2). $A_n\uparrow$ va $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ bo‘lsin. $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, n = 2,3,...$ hodisalarni belgilaymiz. B_n hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bajarilmaydigan hodisalar va $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ bo‘lgani uchun P ning σ – additivligiga ko‘ra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus A_2) + ... =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + ... = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2)⇒3). $A_n \downarrow$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ bo'lsin. $B_n = A_1 \setminus A_n$, $n = 1,2,\ldots$ hodisalarni belgilaymiz. $\{B_n\}$ hodisalar ketma-ketligi uchun $B_n \uparrow$ shart bajariladi va $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ bo'lgani uchun 2°- xossaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(A_1) - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_1 \setminus B_n) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

3)⇒4). Tabiiy.

4)⇒1). 4°-xossa o'rinli bo'lsin. $A_1, A_2, \ldots$ juft-jufti bilan birgalikda bajarilmaydigan hodisalar ketma-ketligi bo'lib, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ bo'lsin. P ning chekli additivligidan, ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

tenglikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ deylik, u holda $\{B_n\}$ ketma-ketlik uchun $B_n \downarrow \emptyset$ shart bajariladi. Demak, 4° ga ko'ra

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left[P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) - P(B_n)\right] =$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

1-teorema isbotlandi.

4-§. Elementar hodisalarning diskret fazosi. Ehtimolning klassik ta'rifi

Elementar hodisalar fazosi chekli yoki cheksiz, ammo ularni $\omega_1, \omega_2, \ldots$ ko'rinishida nomerlab chiqish mumkin bo'lgan fazoga elementar hodisalarning diskret fazosi deyiladi. Birinchi paragrafda ko'rib o'tilgan 1-, 2-, 3-misollarda elementar hodisalar fazosi Ω diskret fazo tashkil qiladi.

Ω diskret fazo va $\mathcal{A}=\mathcal{M}(\Omega)$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy $A\in\mathcal{A}$ hodisaning ehtimolini quyidagicha kiritish mumkin:

$\sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega=1$ shartni qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan p_ω sonlar berilgan bo'lsin. A hodisaning ehtimolini

$$P(A)=\sum_{\omega\in A} p_\omega \tag{4}$$

yig'indi shaklida ifodalaymiz. (4) formula orqali aniqlangan to'plam funksiyasi ehtimol o'lchoviga qo'yilgan 3 ta aksiomaning barchasini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, K1 aksioma $P(A)$ miqdorning aniqlanishidan kelib chiqadi. K2 aksioma ham bajariladi, chunki (4) tenglikka ko'ra

$$P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega=1.$$

Agar A birgalikda bajarilmaydigan ikkita A_1 va A_2 hodisalarning yig'indisi bo'lsa, u holda (4) tenglikka ko'ra

$$P(A_1\cup A_2)=P(A)=\sum_{\omega\in A} p_\omega=\sum_{\omega\in A_1\cup A_2} p_\omega=\sum_{\omega\in A_1} p_\omega+$$

$$\sum_{\omega\in A_2} p_\omega=P(A_1)+P(A_2)$$

bo'ladi, ya'ni (4) tenglik orqali kiritilgan ehtimollik o'lchovi chekli additivdir. Xuddi shu kabi P ning sanoqli additivligini ham isbotlash mumkin. Demak,

$$p_\omega\ge 0 \text{ va } \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega=1 \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi sonlar yordamida $(\Omega,\mathcal{A})$ o'lchovli fazoda (4) formula orqali ehtimol o'lchovini kiritish mumkin. Bu ta'kidning teskarisi ham o'rinli, ya'ni agar $(\Omega,\mathcal{A})$ o'lchovli fazoda K1, K2, K3 aksiomalarni qanoatlantiruvchi P ehtimol o'lchovi kiritilgan bo'lsa, u holda (5) shartlarni qanoatlantiruvchi shunday $p_\omega\ge 0$ sonlar mavjudki, $A\in\mathcal{A}$ hodisaning ehtimoli (4) formula orqali ifodalanadi. Haqiqatan ham, $A=\{\omega\}$ – yagona ω elementar hodisadan iborat deb hisoblab, biz $P(A)=p_\omega=P(\{\omega\})$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak, K1 aksiomaga ko'ra, $p_\omega \geq 0$. Shu bilan birga, agar $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...\}$ bo'lsa, u holda K3 aksiomadan

$$P(A)=P\Big(\{\omega_{i_1}\}+\{\omega_{i_2}\}+...\Big)=\sum_{\omega\in A}P(\{\omega\})=\sum_{\omega\in A}p_\omega$$

(4) tenglik kelib chiqadi. Bundan va K2 aksiomadan $A=\Omega$ deb hisoblab,

$$\sum_{\omega\in\Omega}p_\omega=1$$

tenglikka kelamiz.

Agar Ω chekli elementar hodisalar fazosi bo'lib, p_ω barcha ω elementar hodisalar uchun bir xil bo'lsa, u holda (4) formula

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} \tag{6}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda $N(A)$ orqali A to'plamning elementlari soni belgilangan. Bu ehtimolning **klassik ta'rifidir.** Bu holda

$$1=P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}p_\omega=p_\omega N(\Omega)$$

bo'lgani uchun

$$p_\omega=\frac{1}{N(\Omega)}$$

tenglik o'rinli, yani klassik ta'rifga olib keladigan ehtimollar fazosining modeli ixtiyoriy elementar hodisaning ro'y berish imkoniyati tajriba xarakterini aniqlovchi shartlarga nisbatan bir xil bo'lgan hollarda ishlatiladi. Masalan, simmetrik bir jinsli nomerlangan kub tashlanganda 1,2,...,6 elementar hodisalar uchun $p_1=...=p_6=\frac{1}{6}$, simmetrik bir jinsli tanga uchun esa $p(g)=p(r)=\frac{1}{2}$ deb aniqlash va ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanish tabiiydir.

Demak, A hodisaning ehtimolini klassik ta'rifdan foydalanib hisoblash A hodisani ro'y berishiga olib keluvchi barcha elementar hodisalarning sonini hisoblashga keltiriladi. Ba'zan bunday hisoblashlar trivial, ba'zan esa kombinatorikaning qiyin masalasi bo'lib, uni yechish uchun hozirgi kunda rivojlantirilgan nozik usullarni qo'llashga to'g'ri keladi. Bunday sof texnikaviy qiyinchiliklarni yengish ehtimollar nazariyasi faniga hech qanday aloqasi yo'q. Ammo bir qancha bunday holatlarni tekshirmay turib, na o'rganilayotgan mavzuning tabiati haqida, na uning amaliy imkoniyatlari haqida tasavvurga ega bo'lish mumkin emas.

Endi ehtimollikning klassik ta'rifidan foydalanib, ba'zi hodisalarning etimollarini hisoblaymiz.

12-misol. 3 ta nomerlangan kub tashlanganda tushgan ochkolar yig'indisi 11 ga teng bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Agar ochkolar qaysi nomerlangan kubda tushganini hisobga olsak, elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega ; \omega = (u_1, u_2, u_3);$ $u_j = 1,2,...,6; j = 1,2,3\}$ ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi. Bu yerda (u_1, u_2, u_3) orqali mos ravishda birinchi nomerlangan kubda u_1, ikkinchi nomerlangan kubda u_2 va uchinchisida u_3 ochkolar tushishi belgilangan. Demak, barcha elementar hodisalar soni $N(\Omega)$=6^3=216. Agar A orqali tushgan ochkolar yig'indisi 11 ga teng bo'lish hodisasini belgilasak, u holda $A = \{\omega \in \Omega ; u_1 + u_2 + u_3 = 11\}$ ko'rinishga ega. 11 ochkoni 6 ta turli usul bilan olish mumkin (6+4+1; 6+3+2; 5+5+1 5+4+2; 5+3+3; 4+4+3). Shu bilan birga 6+4+1 kombinatsiyasi ushbu 6 ta elementar hodisalardan biri bajarilganda va faqat shundagina tushishini ko'ramiz: (6,4,1), (6,1,4), (4,6,1), (4,1,6), (1,6,4), (1,4,6). Xuddi shu kabi, 6+3+2, 5+4+2 kombinatsiyalar ham 6 tadan elementar hodisalardan biri bajarilganda ro'y beradi. 5-5-1, 5-3-3, 4-4-3 kombinatsiyalarning har biriga mos keluvchi elementar hodisalarning soni 3 ga teng ekanligi ravshan. Shunday qilib, $N(A)$=3·6+3·3=27 va ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

13-misol. 36 ta qartadan iborat bo'lgan qartalar dastasidan tavakkaliga 3 ta qarta olinadi. Bu qartalarning uchalasi ham bir xil tusli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Qartalarni dastadan olish tartibi bu misolda ahamiyatga ega bo'lmagani uchun elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \{\omega ; \omega = [u_1, u_2, u_3], u_1 \neq u_2 \neq u_3 ; u_j = 1,2,...,36\}$$

ko'rinishga ega. Demak, $N(\Omega)=C_{36}^3=\frac{36\cdot35\cdot34}{1\cdot2\cdot3}$. A orqali olingan qartalar dastasi bir xil tusli bo'lish hodisasini belgilasak va dastada har biri 9 ta qartadan iborat bo'lgan 4 xil turli tus borligini hisobga olsak, u holda

$$N(A)=4C_9^3=\frac{4\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}.$$

Demak,

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{4C_9^3}{C_{36}^3}=\frac{4}{85}.$$

5-§. Ba'zi klassik modellar va taqsimotlar

1. Binomial taqsimot. Simmetrik tanga n marta tashlangan bo'lib, kuzatish natijasini $(u_1,u_2,...,u_n)$ ko'rinishidagi tartiblangan ketma-ketlik shaklida ifodalaylik. Bu yerda $u_i=1$, agar tanga i-marta tashlanganda "gerb" ("yutuq") tushsa va $u_i=0$, agar "raqam" ("yutqaziq") tushsa. Jami 2^n ta bunday ketma-ketliklar mavjud. Elementar hodisalar fazosi ushbu ko'rinishga ega:

$$\Omega=\{\omega;\omega=(u_1,u_2,...,u_n),u_j=0,1\}.$$

Har bir $\omega\in\Omega$ elementar hodisaga

$$p(\omega)=p^{\sum_{j=1}^{n}u_j}q^{n-\sum_{j=1}^{n}u_j} \tag{7}$$

ehtimolni mos qo'yamiz, bu yerda manfiy bo'lmagan p va q sonlar $p+q=1$ tenglikni qanoatlantiradi. (7) tenglik orqali berilgan sonlar $(\Omega,\mathcal{M}(\Omega))$ o'lchovli fazoda ehtimol o'lchovini kiritishini ko'rsatish uchun (5) munosabatning o'rinli ekanligini isbotlaymiz. (7) tenglikka ko'ra $p(\omega)$ manfiy bo'lmagani uchun

$$\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=1$$

ekanligini tekshirishimiz kifoya qiladi. Buning uchun $\sum_{j=1}^{n}u_j=k,(k=0,1,2,...,n)$ bo'lgan barcha $\omega=(u_1,u_2,...,u_n)$ elementar hodisalarni ajratamiz. Bunday natijalar soni k ta "bir"ni n ta o'ringa o'rinlashtirishlar soni C_n^k ga teng. U holda

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Demak, Ω fazo, uning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan A sistema va unda

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

orqali kiritilgan ehtimol o'lchovi ehtimollar fazosini aniqlaydi. Bu hosil bo'lgan modelni tangani n marta tashlash jarayonini tasvirlaydigan ehtimollik modeli deb atash mumkin.

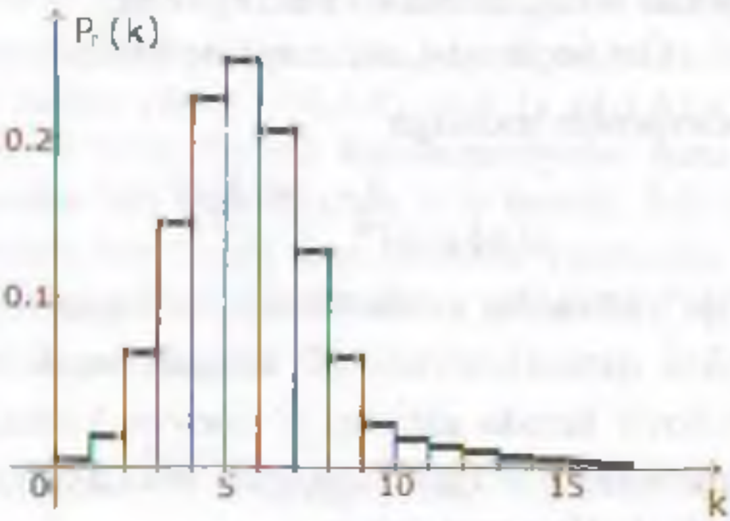
Endi k marta "yutuq" chiqishidan iborat

$$A_k = \{\omega; \omega = (u_1, u_2, ..., u_n); u_1 + u_2 + ... + u_n = k\}; k = 0, 1, ..., n$$

hodisani ko'raylik. Yuqorida aytilganiga ko'ra,

$$P_n(k) = P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{8}$$

ekanligi kelib chiqadi. (8) formulaga Bernulli formulasi deyiladi.



2-shakl.

Ehtimollarning $(P(A_0), P(A_1), ..., P(A_n))$ to'plami ehtimollarning (n hajmli tanlanmada yutuqlar soni uchun) binomial taqsimoti deyiladi. U $k = np$ yaqinida maksimumga erishadi va k undan o'ngga yoki chapga chetlansa kamayadi. Agar $p = \frac{1}{2}$ bo'lsa, binomial taqsimot simmetrik, qolgan hollarda esa nosimmetrik deyiladi (2-shaklda $n=15$ va $p=\frac{1}{3}$ bo'lgan nosimmetrik binomial taqsimotning grafigi tasvirlangan).

Binomial taqsimot amaliy masalalarda ko'p uchraydi. Masalan, tekshirishdan o'tgan sanoat mollarining soni, tanlamadagi qoni ma'lum guruhga tegishli bo'lgan odamlar soni va boshqalar shular jumlasidandir. Binomial taqsimotning boshqa xossalari va unga doir misollar 4-bobda keltirilgan.

2. Gipergeometrik taqsimot. Qarta tarqatish bilan bog'liq bo'lgan masalaga e'tiborimizni qaratamiz, shu bilan birga bir marta berilgan qarta qartalar dastasiga qaytarilmaydi deb faraz qilamiz. Bu faraz ko'pincha haqiqatga yaqin. Qartalar dastasida m ta qarta bor bo'lib, ulardan m_1 tasi qizil, qolgan m_2 tasi esa qora bo'lsin. Qartalar dastasidan n hajmli tartiblangan qaytarilmas tanlanma olamiz ($m \geq n$). Olingan tanlanmada k ta qizil qarta bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Elementar hodisalar fazosi bu holda

$$\Omega=\{\omega;\omega=[u_1,u_2,...,u_n];u_1\neq u_2\neq...\neq u_n;u_i=0,1,...,m\}$$

(1-§ dagi 5-misolga qaralsin) ko'rinishga ega. Har bir elementar hodisaning ro'y berishi teng imkoniyatli ekanligini hisobga olib, barcha $N(\Omega)=m^{(n)}$ ta elementar hodisalar bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz.

A_k orqali tanlanmada k ta qizil qarta bo'lish hodisasini belgilaymiz. Agar qartalarning faqat rangi va ularning uchrash tartibinigina hisobga olsak, u holda tanlanmada k ta qizil va $n-k$ ta qora qarta bo'lish ehtimoli (6) tenglikka ko'ra $m_1^{(k)}\cdot m_2^{(n-k)}/m^{(n)}$. Agar endi ranglarning uchrash tartibini hisobga olmay, faqat mos rangdagi qartalarning umumiy soninigina hisobga olsak (k ta qizil va $n-k$ ta qora), $m^{(n)}$ ta turli tanlanmalar ichida k ta qizil qartani o'z ichiga olganlarining soni C_n^k ga teng. Shunday qilib,

$$P_n(m,k)=P(A_k)=C_n^k\,\frac{m_1^{(k)}m_2^{(n-k)}}{m^{(n)}}=\frac{C_{m_1}^k C_{m_2}^{n-k}}{C_m^n} \tag{9}$$

$\left(P_n(m,0),\ P_n(m,1),\dots,P_n(m,m)\right)$ ehtimollar to'plami **gipergeometrik taqsimot** deyiladi. Bu binomial taqsimotning qaytarilmas tanlanma uchun analogidan iborat bo'lib, agar m soni n ga nisbatan juda katta bo'lsa, bu ikkita taqsimotlar bir-biridan uncha katta farq qilmaydi, ammo amaliyotda uchraydigan ko'p hollarda m va n solishtirib bo'ladigan sonlardan iborat bo'ladi.

14-misol. (Ko'ldagi baliqlar soni haqidagi masala.) Yuqorida ko'rilgan ehtimollik modelining qiziqarli tatbiqlaridan biri **qayta tanlash metodi** deb ataluvchi taftish o'tkazish usulidan iborat. Buni tushuntirish uchun ushbu ko'ldagi baliqlar soni haqidagi masalaga e'tiboringizni qaratamiz.

Ko'lda m ta baliq bor. Baliqlar sonini aniqlash uchun ko'ldan m_1 ta baliq tutib olinib (ular birinchi tanlanmani tashkil qiladi), belgi qo'yilib, ularni yana ko'lga qo'yib yuboriladi. Tutib olingan baliqlar belgilanmagan baliqlar bilan aralashib ketishi uchun biroz vaqt o'tgach, yana n hajmli tanlanma olinadi. Agar ikkinchi tanlanmada har bir belgilangan va belgilanmagan baliqlarni tutib olishni teng imkoniyatli deb faraz qilsak, u holda belgi qo'yilgan baliqlarning soni k ga teng bo'lish ehtimoli (9) formula orqali ifodalanadi. Agar m ning qiymatini (9) ehtimolni maksimallashtiradigan qilib tanlasak (bunday usul bilan baholash matematik statistikada **haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli** nomi bilan tanish), u holda ko'ldagi baliqlar soni uchun

$$\widehat{m} = \frac{m_1 n}{k} \tag{10}$$

bahoni olamiz. Agar ko'ldagi belgi qo'yilgan baliqlar hissasini ikkinchi tanlamadagi belgi qo'yilgan baliqlar hissasiga teng desak, u holda yana (10) bahoni olamiz. Bu esa mazkur bahoning ma'qul baho ekanligini ko'rsatadi.

6-§. Geometrik ehtimollar

Ehtimollik modellarining yana bir muhim sinfi geometrik ehtimollar deb ataluvchi sinfdir. Ω n-o'lchovli Evklid fazosining chekli n-o'lchovli hajmga ega bo'lgan sohasi bo'lsin. Ω ning hajmini aniqlash mumkin bo'lgan har qanday qism to'plamiga hodisa deymiz.

$\mathcal{A}$ orqali barcha hodisalar sinfini belgilaymiz. A hodisaning ehtimoli deb ushbu

$$P(A)=\frac{V(A)}{V(\Omega)} \tag{11}$$

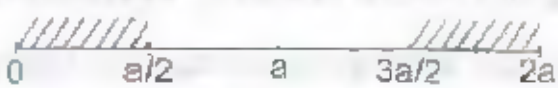
nisbatni qabul qilamiz. Bu yerda $V(A)$ soni A to'plamning n- o'l-chovli hajmi. (11) formula yordamida aniqlangan P to'plam funksiyasi ehtimol o'lchovining barcha aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas.

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollar fazosi, bu yerda P-ehtimol o'lchovi (11) formula orqali aniqlangan, Ω sohaga tavakkaliga (tasodifiy ravishda) nuqta tashlash bilan bog'liq bo'lgan masalalar uchun model vazifasini o'taydi. Bu yerda Ω elementar hodisalar fazosi kontinium quvvatga ega bo'lgani uchun klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Nuqtaning vaziyati Ω sohada tekis taqsimlangan, ya'ni nuqtani A sohaga tushishi bu sohaning n o'lchovli hajmiga proporsional deb faraz qilinadi.

15-misol. $2a$ uzunlikka ega bo'lgan kesmaga tavakkaliga nuqta tashlanadi. Shu nuqtadan kesmaning eng yaqin uchigacha bo'lgan masofa $a/2$ dan kichik bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Umumiylikka zarar etkazmay, kesmaning uchlari 0 va $2a$ koordinatalarga ega deymiz. Tashlangan nuqtadan O nuqtagacha bo'lgan masofani x orqali belgilaymiz. U holda bizni qiziqtirayotgan hodisa $x<a/2$ yoki $2a-x<a/2$ bo'lganda va faqat shunda ro'y beradi.

Talab qilingan ehtimol $\left(a/2+a/2\right)/2a=1/2$ nisbatga teng (3-shaklga qarang).

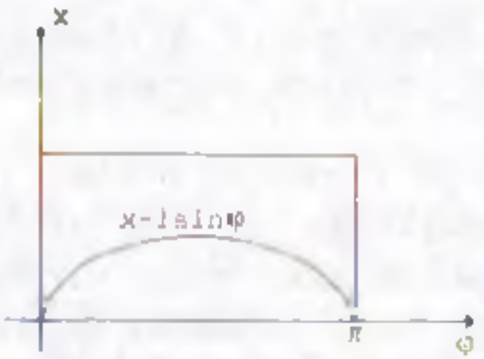


3-shakl.

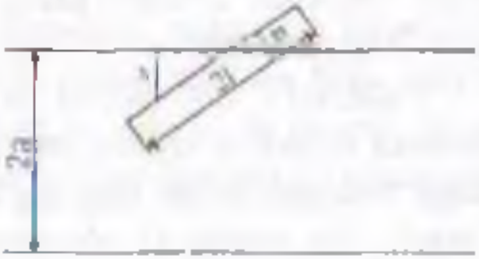
16-misol (Byuffon masalasi). Tekislikda bir-biridan $2a$ masofada parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan va shu tekislikka uzunligi $2l\ (l<a)$ bo'lgan igna tavakkaliga tashlanadi. Ignaning to'g'ri chiziqlardan birortasini kesib o'tish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ignaning o'tqazilgan to'g'ri chiziqlarga nisbatan vaziyati uning o'rtasidan unga eng yaqin turgan chiziqqacha bo'lgan

x masofa hamda igna bilan to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak orqali ifodalanadi (5-shakl). $0 \le x < a$ va $0 \le \varphi < \pi$ bo'lgani uchun ignaning barcha holatlari (ya'ni barcha elementar hodisalar) tomonlari 0 va π bo'lgan to'g'ri to'rtburchak nuqtalari bilan aniqlanadi (4-shakl).



4-shakl.



5-shakl.

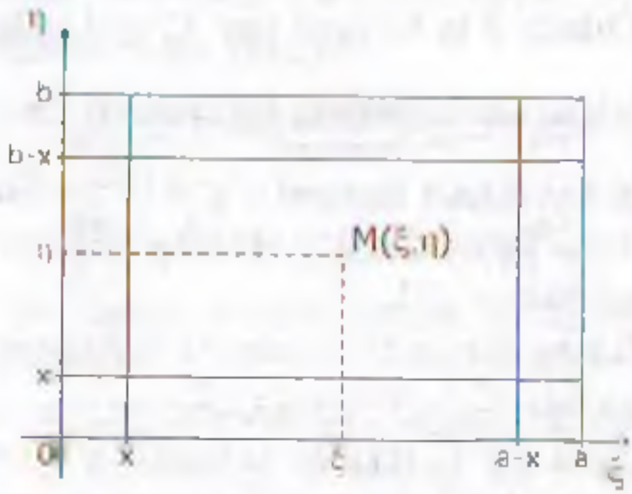
Ignaning parallel to'g'ri chiziq bilan kesishishi (A hodisa) uchun $x \le l \sin\varphi$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir. Izlanayotgan ehtimol, (11) formulaga ko'ra, 4-shakldagi shtrixlangan sohaning yuzini to'g'ri to'rtburchak yuziga nisbatiga teng bo'ladi, ya'ni

$$P = P(A) = \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Byuffon masalasi, snaryadning kattaligi va uning quvvatini hisobga olish bilan bog'liq bo'lgan otishlar nazariyasining ba'zi masalalarini hal etishda asosiy rol o'ynaydi. Bundan tashqari, Byuffon masalasi π sonining qiymatini tasodifiy tajribalar usulidan foydalanib topishda ham ishlatiladi. Haqiqatan ham, yechilgan masaladan $\pi = \frac{2l}{Pa}$ formula hosil bo'ladi. Ignani tashlash yordamida π ni aniqlash uchun yetarlicha ko'p tajriba o'tqaziladi va mos $\frac{n(A)}{n}$ chastota $P = P(A)$ ehtimolga tenglashtiriladi (bu yerda n tajribalar soni, $n(A)$ esa ignaning parallel chiziqlardan birini kesib tushgan hollar soni).

17-misol. Tomonlari a va b ga ($b \le a$) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakka tavakkaliga nuqta tashlanadi. Tashlangan nuqtadan to'rtburchakning eng yaqin tomonigacha bo'lgan masofa x dan katta emasligining ehtimoli topilsin.

Yechish. Umumiylikka zarar keltirmay, to'g'ri to'rtburchakning uchi koordinatalar boshida va uning tomonlari koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan deb faraz qilamiz (6-shaklga qarang):



6-shakl.

Tashlangan M nuqtaning koordinatalarini (ξ,η) deylik. Hisoblanayotgan ehtimol ushbu $A_x = \{(\xi,\eta); \min\{\xi,\eta,a-\xi,b-\eta\} \le x\}$ hodisaning ehtimoliga teng.

$$\bar{A}_x = \{(\xi,\eta); \min\{\xi,\eta,a-\xi,b-\eta\} > x\} = \{(\xi,\eta) : x < \xi < a-x, x < \eta < b-x\}$$

tenglik o'rinli. Demak, izlanayotgan ehtimol (11) formulaga ko'ra 6-shaklda shtrixlangan sohaning yuzini, to'g'ri to'rtburchakning yuziga nisbati shaklida ifodalanadi, ya'ni $P(A_x) = F(x) = \frac{S_x}{S}$, bu yerda S_x soni A_x sohaning yuzi, $S = ab$ esa to'g'ri to'rtburchakning yuzi.

Agar $x \le 0$ bo'lsa, $S_x = 0$ va $x \ge b/2$ bo'lsa, $S_x = S$ munosabatlar o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas. Endi $0 < x < b/2$ bo'lsin, u holda $S_x = S - (b-2x)(a-2x)$. Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x \le 0, \\ 1-(1-2x/b)(1-2x/a), \text{ agar } 0 < x < b/2, \\ 1, \text{ agar } x > b/2. \end{cases}$$

7-§. Shartli ehtimollar. Hodisalarning bog'liqsizligi

Shartli ehtimolning ta'rifini kiritishdan oldin bir qancha misollar ko'ramiz.

18-misol. Oilada 2 ta farzand bor. O'g'il bola tug'ilish ehtimolini $\frac{1}{2}$ deb olib, ushbu hodisalarning ehtimollari topilsin.

1°. Oiladagi har ikkala farzand o'g'il (A hodisa).

2°. Oilada bitta farzand o'g'il ekanligi malum (B hodisa). Oilada ikkinchi farzand ham o'g'il.

Yechish. Ikkita farzandli oilalarda bolalarni jinslari bo'yicha taqsimoti quyidagicha:

1) birinchi bola o'g'il, ikkinchisi ham o'g'il (o'o');
2) birinchi bola o'g'il, ikkinchisi qiz (o'q);
3) birinchi bola qiz, ikkinchisi o'g'il (qo');
4) birinchi bola qiz, ikkinchisi ham qiz (qq).

Demak, elementar hodisalar fazosi Ω={o'o',qo',qq} ko'inishga ega va bunda barcha elementar hodisalar teng ehtimolli. Klassik ta'rifga ko'ra $P(A)=\frac{1}{4}$.

2°-holda biz qo'himcha axborotga egamiz (B hodisa bajarilgan), ya'ni oilada bitta bola o'g'il. Bu holda endi o'o', o'q, qo' elementar hodisalar teng imkoniyatli, demak, izlanayotgan ehtimol $\frac{1}{3}$ ga teng deyish tabiiy.

19-misol. Idishda m ta oq va $n-m$ ta qora shar bor. Idishdan ketma-ket 2 ta shar olingan.

1°. Olingan har ikkala shar oq (A hodisa) ekanligining ehtimoli topilsin.

2°. Agar birinchi olingan shar oq (B hodisa) ekanligi ma'lum bo'lsa, ikkinchisi ham oq shar ekanligining ehtimoli $P(A/B)$ topilsin.

Yechish. Ehtimolning klassik ta'rifidan $P(A)=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$ ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi holda, birinchi olingan shar oq bo'lgani uchun, ikkinchi tanlashdan oldin idishda $n-1$ ta shar qolgan va ulardan $m-1$ tasi oq, demak $P(A/B)=\frac{m-1}{n-1}$.

Ehtimol klassik usul bilan kiritilgan holda A, B, A/B va AB hodisalarning ehtimollari mos ravishda

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)};\ P(AB)=\frac{N(AB)}{N\Omega)};\ P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)};$$

$$P(A/B)=\frac{N(A/B)}{N(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

ekanligi ravshan. Bu oxirgi tenglik shartli ehtimolga umumiy ta'rif berish imkonini beradi.

5-ta'rif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosi berilgan va $A, B \in \mathcal{A}$; $P(B)>0$ bo'lsin. A hodisaning B hodisa ro'y bergandagi **shartli ehtimoli** deb ushbu

$$P_B(A)=P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{12}$$

nisbatga aytiladi.

(12) nisbatni

$$P(AB)=P(B)P_B(A) \tag{13}$$

shaklda qayta yozib, **ko'paytirish formulasi** deb ataluvchi tenglikni hosil qilamiz. (13) tenglikdan, induksiyaga ko'ra, hodisalarning ixtiyoriy ko'paytmasining ehtimolini topishga doir ushbu formula kelib chiqadi.

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar uchun $P(A_1A_2...A_{n-1})>0$ bo'lsa, u holda

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n). \tag{14}$$

20-misol. 3 ta tuz, 4 ta qirol va 2 ta valetdan iborat bo'lgan qartalar dastasidan ikki o'yinchi galma-gal tavakkaliga (bittadan) qarta olishadi. Qaysi o'yinchi birinchi bo'lib dastadan tuz olsa, Shu o'yinchi o'yinni yutgan hisoblanadi. Agar valet chiqsa o'yin durang bo'ladi. Olingan qartalar dastaga qaytib qo'yilmaydi. Birinchi o'yinchining yutish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ehtimoli izlanayotgan hodisani A orqali belgilaymiz. U holda A hodisa A={t, qqt, qqqqt} ko'rinishga ega. Bu yerda "t" – birinchi o'yinchiga tuz chiqqanini, "qqt" – birinchi va ikkinchi o'yinchiga qirol chiqqandan so'ng birinchi o'yinchiga tuz chiqqanini va nihoyat "qqqqt" – birinchi va ikkinchi o'yinchilarga ikkitadan qirol chiqib, so'ng birinchi o'yinchiga tuz chiqqanini bildiradi. Klassik ta'rifga va shartli ehtimolning ta'rifiga ko'ra quyidagilarni topamiz:

$$P(q)=4/9,\ P(t)=3/9,\ P_q(q)=3/8,\ \ P_{qq}(t)=3/7,$$

$$P_{qq}(q)=2/7,\ P_{qqq}(q)=1/6,\ P_{qqqq}(t)=3/5.$$

Topilgan ehtimollarni yuqoridagi (14) formulaga qo'ysak

$$P(qqt)=P(q)P_q(q)P_{qq}(t)=4/9\cdot 3/8\cdot 3/7=1/14,$$

$$P(qqqqt)=P(q)P_q(q)P_{qq}(q)P_{qqq}(q)P_{qqqq}(t)=4/9\cdot 3/8\cdot 2/7\cdot 1/6\cdot 3/5=1/210$$

tenglik hosil bo'ladi. Demak

$$P(A)=P(t)+P(qqt)+P(qqqqt)=1/3+1/14+1/210=43/105$$

ekan.

2-teorema. Agar $B\in\mathcal{A}$ – fiksirlangan hodisa bo'lsa, u holda $P_B(A)$ shartli ehtimol, $A\in\mathcal{A}$ hodisaning P_B funksiyasi sifatida yangi $(\Omega,\mathcal{A},P_B)$ ehtimollar fazosini aniqlaydi.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun P_B ning $(\Omega,\mathcal{A})$ o'lchovli fazoda aniqlangan ehtimol o'lchovi ekanligiga ishonch hosil qilishimiz, ya'ni P_B uchun K1, K2, K3 aksiomalar o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, (12) formuladan

$$P_B(A)\geq 0 \text{ va } P_B(\Omega)=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

munosabatlarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Agar A_1, A_2 birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa ($A_1\cdot A_2=\varnothing$), u holda A_1B va A_2B hodisalar ham birgalikda emas. Demak,

$$P_B(A_1+A_2)=\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}=$$
$$=P_B(A_1)+P_B(A_2),$$

ya'ni P_B chekli additiv.

$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ hodisalar ketma-ketligi $A_{n+1}\subset A_n$, $n=1,2,\ldots$ va $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ (ya'ni $A_n\downarrow\varnothing$) shartlarni qanoatlantirsin. U holda $\{BA_n\}$

ketma-ketlik uchun ham $BA_{n+1} \subset BA_n$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} BA_n = \varnothing$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi va P ning nolda uzluksizligiga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} P_B(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(BA_n)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \lim_{n\to\infty} P(BA_n) = 0 .$$

Bundan 3-§ dagi 1-teoremaga asosan P_B uchun K3 aksiomaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Demak, P_B funksiya $(\Omega,\mathcal{A})$ o‘lchovli fazoda aniqlangan ehtimol o‘lchovi ekan.

Hodisalarning bog‘liqsizligi. Hodisalarning bog‘liqsizligi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bu xossa ehtimollar nazariyasini o‘lchovli fazolarning umumiy nazariyasidan ajratib turadigan o‘ziga xos xususiyatini aniqlab beradi.

Agar $P(A/B) = P(A)$ tenglik bajarilsa, u holda A hodisa B hodisaga bog‘liq emas deyish tabiiydir. Agar $P(A) > 0$ bo‘lsa, u holda $P(B/A)$ shartli ehtimol mavjud va ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)} = P(B)$$

Demak, A hodisaning B ga bog‘liqsizligidan B hodisaning ham A ga bog‘liqsizligi kelib chiqadi, ya’ni A va B hodisalarning bog‘liqsizligi simmetriklik xususiyatiga ega ekan.

Agar A va B hodisalar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda $P(AB) = P(A)P(B)$ tenglik o‘rinli va bu tenglik A va B hodisalarning ehtimollari nol bo‘lganida ham ma’noga ega. Natijada biz ushbu ta’rifga kelamiz.

6-ta’rif. Agar

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa A va B **hodisalar bog‘liqsiz** deyiladi.

21-misol. Tajriba simmetrik tangani 2 marta tashlashdan iborat. A orqali birinchi tashlanganda gerb chiqish hodisasini, B orqali esa tanga ikkinchi marta tashlanganda gerb chiqish hodisasini belgilaymiz. U holda elementar hodisalar maydoni Ω={gg,gr,rg,rr}, A={gg,gr} va B={gg,rg} to‘plamlardan iborat bo‘ladi. Agar elementar hodisalarning har biri $1/4$ ehtimolga ega ekanligini hisobga olsak, u holda $P(A)=1/2, P(B)=1/2, P(AB)=1/4$ bo'ladi. Demak, $P(AB)=P(A)P(B)$ va A,B hodisalar bog'liqsiz.

7-ta'rif. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n;\ 2 \le k \le n$ sonlar uchun

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **birgalikda bog'liqsiz hodisalar** deyiladi.

7-ta'rifdan $A_1, A_2, \ldots, A_n$, birgalikda bog'liqsiz hodisalar bo'lsa, u holda ularning ixtiyoriy qism to'plamidagi $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ hodisalar ham birgalikda bog'liqsiz ekanligi kelib chiqadi. Ushbu misol hodisalarning birgalikda bog'liqsizligi ularning juft-jufti bilan bog'liqsizligiga nisbatan kuchliroq shart ekanligini ko'rsatadi.

22-misol. Tajriba simmetrik tangani 2 marta tashlashdan iborat bo'lsin (20-misolga qarang). $A=\{gg, gr\}$, $B=\{gg, rg\}$ va $C=\{gg, rr\}$ – tanga ikki marta tashlaganda ikki marta bir xil tomon tushish hodisasini belgilaymiz. Agar barcha elementar hodisalar bir xil ehtimolga ega bo'lsa, u holda

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{1}{2};\quad P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4},$$

ammo $P(ABC)=\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$, ya'ni A,B,C hodisalar juft-jufti bilan bog'liqsiz, lekin ular birgalikda bog'liqsiz emas.

Ehtimollar nazariyasida ko'pincha bog'liqsiz hodisalar bilan birga hodisalar sinflarining bog'liqsizligini ham qarashga to'g'ri keladi.

8-ta'rif. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$- hodisalarning algebralari (σ-algebralari) berilgan bo'lsin. Agar barcha $\{ A_i \in \mathcal{A}_i,\ i=1,2,\ldots,n \}$ hodisalar uchun $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ algebralar (σ-algebralar) **birgalikda bog'liqsiz** deyiladi.

8-§. To'la ehtimollik formulasi. Bayes formulasi

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan va musbat ehtimollarga ega bo'lgan hodisalar bo'lsin. Agar $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ bo'lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B / A_j) \tag{15}$$

formula o'rinli. (15) formulaga **to'la ehtimollik formulasi** deyiladi.

(15) formulani isbotlash uchun $B = A_1B + A_2B + \ldots + A_nB$ tenglikka murojaat qilamiz. Bu yerda $A_1B, A_2B, \ldots, A_nB$ juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar ekanligi ravshan. Demak,

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(BA_j).$$

Bu tenglikning $P(BA_j)$ qo'shiluvchilariga ko'paytirish formulasini qo'llab, to'la ehtimollik formulasini hosil qilamiz.

To'la ehtimollik formulasi, murakkab hodisalarning ehtimollarini shartli ehtimollarni qo'llab topishda asosiy vosita vazifasini bajaradi.

Ehtimolning σ-additivlik xossasidan foydalanib, (15) formulani $A_1, A_2, \ldots$ – sanoqli, juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun umumlashtirish mumkin.

23-misol. Birinchi idishda 2 ta oq va 3 ta qora, ikkinchisida esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga 2 ta shar olib ikkinchisiga solingandan so'ng ikkinchi idishdan tavakkaliga olingan shar oq shar ekanligi ehtimoli topilsin.

Yechish. A_1, A_2 va A_3 lar orqali birinchi idishdan ikkinchisiga olib qo'yilgan sharlarning mos ravishda har ikkalasi ham oq, har ikkalasi qora va turli rangda bo'lish hodisalarini, B orqali esa ikkinchi idishdan olingan shar oq shar bo'lish hodisasini belgilaymiz. U holda ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(A_1) = \frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \; P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, \; P(A_3) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$P(B/A_1)=\frac{3}{7},\quad P(B/A_2)=\frac{1}{7},\quad P(B/A_3)=\frac{2}{7}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Izlanayotgan hodisaning ehtimoli, to'la ehtimollik formulasiga ko'ra, quyidagicha bo'ladi:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=$$
$$\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{7}+\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{35}.$$

Ko'paytirish formulasidan ushbu

$$P(B)P(A_k/B)=P(BA_k)=P(A_k)P(B/A_k),\ k=1,...,n,$$

tenglikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bundan to'la ehtimollik formulasiga tayanib topamiz:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)},\ k=1,...,n.\quad (16)$$

(16) formulaga Bayes formulasi deyiladi. Bayes formulasi matematik statistikada keng qo'llaniladi. Statistik qo'llanishlarda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarni ko'pincha "**gipotezalar**", $P(A_k)$ ehtimolni A_k gipotezaning **aprior (tajribagacha) ehtimoli** $P(A_k/B)$ shartli ehtimolni esa uning **aposterior (tajribadan so'nggi) ehtimoli** deb atashadi.

24-misol. Shifokor bemorni tekshirib ko'rganda uning A_1, A_2, A_3 kasalliklarning biri bilan og'riganligini gumon qildi. Ularning ehtimollari ma'lum shartlar ostida mos ravishda quyidagilarga teng: $P(A_1)=1/2$, $P(A_2)=1/6$, $P(A_3)=1/3$. Shifokor kasallikning tashxisini aniqlash uchun, agar bemor A_1 kasallik bilan og'rigan bo'lsa, 0,1 ehtimol bilan, A_2 kasallik bilan og'rigan bo'lsa, 0,2 ehtimol bilan va A_3 kasallik bilan og'rigan bo'lsa, 0,9 ehtimol bilan ijobiy natija beradigan tahlil belgiladi. Jami besh marta tahlil o'tkazilib, ulardan to'rttasi ijobiy va bittasi esa salbiy natija berdi. Tahlil o'tkazilgach har bir kasallikning ehtimollari hisoblansin.

Yechish. B orqali beshta tahlildan to'rttasi ijobiy va bittasi salbiy natija berish hodisasini belgilaymiz. Bemor A_1 kasallik bilan og'rigan holda (ya'ni A_1 gipotezasi bajarilsa) B hodisaning ro'y berish ehtimoli Bernulli formulasiga ko'ra

$$P(B / A_1) = C_5^4(0,1)^4 \cdot 0,9 = 5 \cdot 0,00009 = 0,00045.$$

Xuddi shu kabi A_2 va A_3 gipotezalar uchun bu ehtimolliklar mos ravishda

$$P(B / A_2) = C_5^4(0,2)^4 \cdot 0,8 = 5 \cdot 0,00128 = 0,0064$$

va

$$P(B / A_3) = C_5^4(0,9)^4 \cdot 0,1 = 5 \cdot 0,06561 = 0,32805$$

bo'ladi.

Shunday qilib, Bayes formulasiga ko'ra, tahlillar o'tkazilgach, A_1 kasallik bilan og'riganlik ehtimoli

$$P(A_1 / B) = \frac{1/2\, 0,00009}{1/2\, 0,00009 + 1/6\, 0,00128 + 1/3\, 0,06561} \approx 0,002,$$

A_2 kasallik bilan og'riganlik ehtimoli

$$P(A_2 / B) = \frac{1/6 \cdot 0,00128}{1/2 \cdot 0,00009 + 1/6 \cdot 0,00128 + 1/3 \cdot 0,06561} \approx 0,01$$

va A_3 kasallik bilan og'riganlik ehtimoli

$$P(A_3 / B) = \frac{1/3 \cdot 0,06561}{1/2 \cdot 0,00009 + 1/6 \cdot 0,00128 + 1/3 \cdot 0,06561} \approx 0,988$$

ekanligini topamiz.

Bu hisoblashlarni nazarda tutib, shifokor bemor A_3 kasallik bilan og'rigan deb tashxiz qo'yishi tabiiydir.

9-§. Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi

Tajriba deb, biz natijasi tasodifiy hodisalardan iborat eksperimentni tushunamiz. Biz qabul qilgan aksiomatikada tajriba qandaydir ehtimollar fazosidan iborat. Bir xil tajriba n marta ketma-ket o'tkazilayotgan bo'lsin va har bir tajribaning natijasi N ta elementar hodisalardan iborat bo'lsin. Umumiylikka zarar keltirmay, ularni $0,1,\ldots,N-1$ sonlaridan iborat deyishimiz mumkin. Elementar hodisalar fazosi bu holda diskret fazo bo'lib, ushbu ko'rinishga ega

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n); \omega_k = 0,1,\ldots,N-1; k = 1,2,\ldots,n\}$$

$\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ elementar hodisa $\omega_k;k=1,2,...,n$ simvolni biz k nomerli tajribada ω_k hodisa ro'y berdi deb talqin qilamiz.

Har bir $\omega\in\Omega$ elementar hodisaga

$$p(\omega)=p(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)=p_{\omega_1}p_{\omega_2}\cdots p_{\omega_n} \tag{17}$$

ehtimolni mos qo'yamiz, bu yerda manfiy bo'lmagan $p_0,p_1,...,p_{N-1}$ sonlar quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$\sum_{i=0}^{N-1}p_i=1. \tag{18}$$

(17) tenglik orqali berilgan $p(\omega)$ sonlar $(\Omega,\mathcal{M}(\Omega))$ o'lchovli fazoda ehtimol o'lchovini kiritishi uchun (5) munosabatning o'rinli ekanligini, $p(\omega)\geq 0$ bo'lgani sababli $\sum\limits_{\omega\in\Omega}p(\omega)=1$ ekanligini ko'rsatish kifoya. Haqiqatdan ham, (17), (18) tengliklarga ko'ra,

$$\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=\sum_{\omega_1;\omega_2;...;\omega_n=\overline{0,N}}^{N}p(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)=$$

$$=\sum_{\omega_1;\omega_2;...;\omega_n=\overline{0,N}}^{N}p_{\omega_1}p_{\omega_2}\cdots p_{\omega_n}=\prod_{i=1}^{n}\sum_{\omega_i=0}^{N-1}p_{\omega_i}=1.$$

Demak, Ω fazo, uning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathcal{A}$ σ-algebra va unda

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}p(\omega) \tag{19}$$

formula orqali kiritilgan ehtimol o'lchovi ehtimollik modelini aniqlaydi. (18) tenglikdagi p_i sonlar alohida olingan (fiksirlangan) tajribada i-natijaning ro'y berish ehtimolidan iborat. Haqiqatan ham, agar $A_k(i)=\{\omega;\ \omega_k=i\}$ bo'lsa, u holda (19) tenglikka ko'ra

$$P(A_k(i))=\sum_{\omega\in A_k(i)}p(\omega_1,\omega_2,...,\omega_k,...,\omega_n)=$$

$$\sum_{\omega_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{\omega_{k-1}=0}^{N-1}\sum_{\omega_k=0}^{N-1}\sum_{\omega_{k+1}=0}^{N-1}\cdots\sum_{\omega_n=0}^{N-1}p_{\omega_1}\cdots p_{\omega_{k-1}}p_i p_{\omega_{k+1}}\cdots p_{\omega_n}=p_i.$$

Faraz qilaylik, Ω_k k-tajribaning elementar hodisalar fazosi $A_k=\mathcal{M}(\Omega)$, P_k esa (Ω_k,A_k) o'lchovli fazoda $p_0,p_1,...,p_{N-1}$ sonlar yordamida kiritilgan ehtimol o‘lchovi bo‘lsin. U holda $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k)$ ehtimollar fazosini k-tajribaning matematik modeli va $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$, ..., $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ ketma-ketlikni esa tajribalar ketma-ketligining modeli deb atash mumkin.

I BOBGA DOIR MASALALAR

1. $\bigcup, \bigcap$ amallarning quyidagi xossalari isbotlansin:

1) $A\bigcup B = B\bigcup A; A\bigcap B = B\bigcap A$ (kommutativlik);

2) $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C), (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$ (assotsiativlik);

3) $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$,
$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcap C)$ (distributivlik);

4) $A\bigcup A = A, A\bigcap A = A$ (idempotentlik);

5) $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}$ (ikkilamchilik prinsipi).

2. Ω – ixtiyoriy to‘plam, $A, A_1, A_2, \ldots$ va $B, B_1, B_2, \ldots - \Omega$ ning qism to‘plamlari bo‘lsin. Simmetrik ayirma quyidagi xossalarga ega ekanligi ko‘rsatilsin:

a) $A\Delta B = \overline{A}\bigcap\overline{B}$; b) $A\Delta\left(\bigcup_{n\geq1} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n\geq1}(A\Delta B_n)$;

d) $A\Delta\left(\bigcap_{n\geq1} B_n\right) \supseteq \bigcap_{n\geq1} A\Delta B_n$; e) $\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right)\Delta\left(\bigcup_{n\geq1} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n\geq1}(A_n\Delta B_n)$;

f) $\left(\bigcap_{n\geq1} A_n\right)\Delta\left(\bigcap_{n\geq1} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n\geq1}(A_n\Delta B_n)$.

3. A va B hodisalar birgalikda bajarilishi uchun, $A+B, \overline{A}+B, A+\overline{B}$ hodisalarning ko‘paytmasi bo‘sh bo‘lmasligi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

4. Idishda k ta oq va l ta qora shar bor. Idishdan tavakkaliga bitta shar olib chetga qo‘yiladi. U oq shar ekan. So‘ngra idishdan yana bitta shar olinadi. Bu olingan shar ham oq shar bo‘lish ehtimoli topilsin.

5. n ta elementdan iborat to‘plam berilgan. Undan tavakkaliga bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plam tanlanadi. Tanlangan qism to‘plamdagi elementlar soni juft bo‘lish ehtimolini toping.

6. Ehtimol tushunchasidan foydalanib, quyidagi ayniyatlar isbotlansin:

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k$; 2) $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$;

3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_m^k = C_{m-1}^n, m \geq n-1$;

4) $\sum_{k=0}^{m} k(k-1)C_m^k = m(m-1)2^{m-2}, m \geq 2$.

7. Ikkita A va B talabalar quyidagi o‘yinni o‘ynashadi. Birinchi qadamda A talaba uchta nomerlangan kubning oltitadan yoqlariga 1 dan 18 gacha bo‘lgan sonlarni xohlagan tartibda joylashtirib chiqadi. Ikkinchi qadamda B talaba nomerlangan kublarini yaxshilab o‘rganib chiqib, ulardan birini tanlaydi. Uchinchi qadamda A talaba qolgan kublardan birini tanlaydi. So‘ngra har qaysi o‘yinchi o‘zidagi nomerlangan kubni tashlaydi va katta ochko tushgan talaba o‘yinni yutadi. Bunday o‘yin qaysi talaba uchun foydaliroq?

8. Tavakkaliga tanlangan butun musbat son tub son bo‘lish ehtimoli topilsin.

9. σ – algebra tashkil etmaydigan hodisalar algebrasiga misol keltiring.

10. Ω – sanoqli to‘plam va $\mathcal{A}$ uning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan σ-algebra bo‘lsin. Agar A chekli bo‘lsa, $\mu(A)=0$ va agar A cheksiz bo‘lsa $\mu(A)=\infty$ deylik. $\mu(\cdot)$ to‘plam funksiyasi chekli additiv, ammo sanoqli additiv emasligi ko‘rsatilsin.

11. Har bir $n \geq 1$ da $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar ko‘paytmasi uchun ushbu

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

tengsizlik isbotlansin.

12. $P(A/B) + P(A/\bar{B}) = 1, P(A/B) + P(\bar{A}/\bar{B}) = 1$ tengliklar, umuman olganda, noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatuvchi misollar keltiring.

13. $A_1, A_2, ..., A_n$ bog'liqsiz hodisalar va $P(A_i) < 1, i = 1, 2, ..., n$ bo'lsin. U holda shunday B hodisaning mavjudligini ko'rsatingki, $P(B) > 0$ bo'lib, ixtiyoriy $1 \le i \le n$ uchun $B \cap A_i = \varnothing$ bo'lsin.

14. n ta shar n ta yacheykaga tasodifiy ravishda joylashtirilgan. Aynan ikkita yacheykaning bo'sh bo'lish ehtimoli p_n topilsin.

15. Tanga n marta tashlanadi. Har bir tajribada "gerb" chiqish ehtimoli p, raqam chiqish ehtimoli esa q. $\pi(n)$ orqali chiqqan gerblar soni toq bo'lish ehtimolini belgilaylik. $\pi(n)$ topilsin.

16. Ixtiyoriy uchta A, B, C hodisalar uchun

$$|P(AB) - P(AC)| \le P(B \Delta C)$$

tengsizlik o'rinli ekanligi isbotlansin.

17. A hodisa o'zi bilan bog'liqsiz bo'lsa, uning ehtimoli 0 yoki 1 ekanligi isbotlansin.

18. A va B bog'liqsiz hodisalar bo'lsin. Bu hodisalarning ehtimollari orqali quyidagi hodisalarning ehtimollari hisoblansin.

a) A va B hodisalardan k tasi ro'y beradi;

b) A va B hodisalardan eng ko'pi bilan k tasi ro'y beradi;

c) A va B hodisalardan eng kamida k tasi ro'y beradi, $(0 \le k \le 2)$.

19. A, B_1, B_2 hodisalar berilgan. A va B_1 hamda A va B_2 hodisalar bog'liqsiz bo'lsa, u holda A va $B_1 \cup B_2$ hodisalar bog'liqsiz bo'lishi uchun A va $B_1 \cap B_2$ hodisalarning bog'liqsiz bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

20. A va B bog'liqsiz hodisalar va $P(A + B) = 1$ bo'lsin. U holda yoki A yoki B hodisaning ehtimoli 1 ga teng ekanligi ko'rsatilsin.

TEST SAVOLLARI

1. A hodisa qanday bo'lganda $A \cup \overline{A} = A$ tenglik o'rinli bo'ladi?

A. $A = \varnothing$ B. $A = \Omega$ C. $A = \Omega \setminus A$ D. Hech qachon.

2. A va B hodisalar qanday bo'lganda $(A \cup B) \setminus B = A$ tenglik o'rinli?

A. $B = \varnothing$ B. $A = \varnothing$ C. $AB = \varnothing$ D. Har doim.

3. Quyidagi ifodani soddalashtiring: $(A+B)(A+\overline{B})$.

A. $A+B$ B. B C. $\varnothing$ D. A.

4. Quyidagi ifodani soddalashtiring: $(\overline{A}+B)(A+B)$.

A. $\varnothing$ B. A C. B D. Ω.

5. Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, AB nimaga teng?

A. B B. A C. $B-A$ D. $A-B$.

6. $A \subseteq B$ bo'lsa, ABC ifodani soddalashtiring.

A. B B. BC C. A D. AC.

7. Qanday shart bajarilganda $A+B$; $\overline{A}+B$; $A+\overline{B}$ hodisalar birgalikda bo'ladi?

A. $A \neq \varnothing$ B. $AB=\Omega$ C. $AB \neq \varnothing$ D. $B \neq \varnothing$.

8. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Idishdan tavakkaliga olingan shar oq shar bo'lish ehtimoli topilsin.

A. 7/15 B. 0,7 C. 1/15 D. 0,3.

9. 36 talik qartalar dastasidan tavakkaliga ikkita qarta olingan. Ularning har ikkalasi ham tuz bo'lish ehtimolini toping.

A. 1/81 B. 1/105 C. 1/9 D. 0.

10. Tavakkaliga tanlangan ikkita raqamlar ichida 0 raqami yo'q bo'lish ehtimoli topilsin.

A. 0,8 B. 0,9 C. 0,81 D. 0,99.

11. Tavakkaliga tanlangan ikkita raqamlar ichida 0 raqami yoki 1 raqami yo'q bo'lish ehtimoli topilsin.

A. 0,99 B. 0,64 C. 0,98 D. 0,81.

12. 6 ta oq va 8 ta qora shar solingan idishdan tavakkaliga ikkita shar olingan. Ikkala shar ham bir xil rangli bo'lish ehtimolini toping.

A. 4/7 B. 25/49 C. 3/7 D. 43/91.

13. Uchta simmetrik tanga bir vaqtda tashlanganda ikki marta gerb chiqish ehtimoli qanday?

A. 3/4 B. 1/2 C. 3/8 D. 5/8.

14. Agar $P(A)=0{,}6$; $P(A+B)=0{,}8$ bo'lsa $P(\overline{A}B)$ hisoblansin.

A. 0,2 B. 0,32 C. 0,48 D. 0,4.

15. A va B hodisalar bog'liqsiz bo'lib, $P(A)=0{,}6$; $P(B)=0{,}5$ bo'lsa, $P(A+B)$ hisoblansin.

A. 0,6 B. 0,5 C. 0,3 D. 0,8.

16. Agar A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, to'g'ri tenglikni ko'rsating.

A. A-B=$\varnothing$ B. $A+B=\Omega$ C. $A\subseteq B$ D. AB =$\varnothing$

17. Agar A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa va $P(A)=p_1$; $P(B)=p_2$ bo'lsa, $P(A+B)$ hisoblansin.

A. p_1 B. $p_1+p_2-p_1p_2$ C. p_1+p_2 D. p_2.

18. Agar $P(A)=1/4$; $P(B)=2/3$ va $P(A+B)=5/6$ bo'lsa, $P(AB)$ hisoblansin.

A. 7/12 B. 1/6 C. 1/12 D. 12/15.

19. $\{(x,y;0\le x,y\le 1\}$ kvadratga tasodifan nuqta tashlangan. Ushbu $A=\{(x,y);x\le 1/2\}$, $B=\{(x,y);y\ge 1/2\}$ hodisalar uchun ushbu tasdiqlarning qaysinisi o'rinli?

A. A va B hodisalar bog'liqli

B. A va B hodisalar birgalikda emas

C. A va B hodisalar bog'liqsiz

D. A va B ixtiyoriy hodisalar.

20. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ to'plamdan 3 ta ketma-ket (qaytarilmas) tanlovdan iborat bo'lgan tasodifiy tajribaga mos kelgan Ω-elementar hodisalar fazosining elementlar soni topilsin.

A. 720 B. 1000 C. 30 D. 60.

21. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ to'plamdan 3 ta ketma-ket (qaytariluvchan) tanlovdan iborat bo'lgan tasodifiy tajribaga mos kelgan Ω-elementar hodisalar fazosining elementlari soni topilsin.

A. 30 B. 720 C. 60 D. 1000.

II BOB. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOT FUNKSIYALARI

I-bobda biz $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosini aksiomatik qurib, ba'zi eng sodda ehtimollik modellarni muhokama qildik. Ammo ehtimollar nazariyasi faqat tasodifiy hodisalar va ularning ehtimollarini topish bilangina chegaralanib qolganda edi, u bunday yuksalishga va amaliyotda bu qadar keng tatbiq doirasiga ega bo'lmagan bo'lar edi. Ehtimollar nazariyasining boshlang'ich davriga qaytib qimor o'yinlarida o'yinchilarni o'yinning tasodifiy oqibatigina emas, balki u bilan bog'liq bo'lgan yutuq yoki yutqazish, ya'ni shu oqibatga mos qo'yilgan son qiymat qiziqtirishini eslaylik. Bunday son qiymatni **tasodifiy miqdor** deb atash tabiiy. Bu bobda biz shu tasodifiy miqdor tushunchasini o'rganamiz.

1-§. Tasodifiy miqdorlar

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir. Tasodifiy miqdor tasodifga bog'liq holda u yoki bu son qiymatlarni qabul qiluvchi miqdordir. Masalan, tavakkaliga olingan n ta mahsulotlar ichidagi yaroqsizlarining soni, n ta o'q uzilganida nishonga tekkan o'qlar soni, asbobning beto'xtov ishlash vaqti va hokazolar tasodifiy miqdorlarga misol bo'la oladi. ξ – tasodifiy miqdor, tajribaning har bir mumkin bo'lgan oqibatiga mos qo'yilgan sondan iborat. Tajriba natijalarining to'plami elementar hodisalar bilan ta'riflangani tufayli tasodifiy miqdorga Ω elementar hodisalar fazosining $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasi sifatida qarash mumkin. Tasodifiy miqdorning ta'rifini keltirishdan avval bir qancha misollar ko'ramiz.

1-misol. Tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat. Elementar hodisalar maydoni

$$\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$$

ko'rinishga ega. ξ – gerb chiqishlar soni bo'lsin. ξ ning qiymati elementar hodisalarning $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasidan iborat. $\xi(\omega)$ funksiyaning qiymatlari jadvali ushbu ko'rinishga ega:

ω	gg	gr	rg	rr
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

2-misol. Tanga birinchi bor gerb chiqqunicha tashlansin. Bu holda

$$\Omega = \{g, rg, rrg, rrrg, ..., rrr...g, ...\} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}.$$

ξ – tanga tashlashlar soni bo‘lsin. U holda ξ elementar hodisalarning funksiyasi bo‘lib, agar $\omega = \omega_n \left(n = 1, 2, ...\right)$ bo‘lsa, $\xi\left(\omega\right) = n$ bo‘ladi.

3-misol. Radiusi R ga teng bo‘lgan doiraviy tekis ekranda tasodifiy ravishda zarracha paydo bo‘lish hodisasi kuzatilayotgan bo‘lsin. ξ orqali zarrachadan ekran markazigacha bo‘lgan masofani belgilaylik. Bu holda $\Omega = \{\omega; \omega = (x, y);\ x^2 + y^2 \leq R\}$ – to‘plamdan iborat bo‘ladi. ξ elementar hodisalarning funksiyasi bo‘lib, $\xi\left(\omega\right) = x^2 + y^2$ tenglik o‘rinli.

Yuqorida ko‘rilgan misollar tasodifiy miqdorni elementar hodisalar fazosining funksiyasidan iborat deb izohlash mumkin ekanligini ko‘rsatadi. Ammo Ω da aniqlangan ixtiyoriy funksiyani tasodifiy miqdor deb qarash mumkin emas. Amaliyotda ko‘pincha $\xi\left(\omega\right)$ tasodifiy miqdorning qiymati u yoki bu to‘plamga tegishli bo‘lish ehtimoli nimaga teng degan savolga javob berishga to‘g‘ri keladi. Demak, sonlar o‘qidagi yetarlicha keng $\left\{B\right\}$ to‘plamlar sinfi uchun biz $\{\omega\ ; \xi\left(\omega\right) \in B\}$ to‘plam hodisalarning $\mathcal{A}$ σ-algebrasiga tegishli bo‘lishiga va demak, $P(\{\omega; \xi\left(\omega\right) \in B\})$ ehtimolni hisoblash mumkin ekanligiga ishonch hosil qilishimiz kerak.

1-ta’rif. *$(\Omega, \mathcal{A}, P)$* – ehtimollar fazosi va $\xi = \xi\left(\omega\right)$ – Ω da aniqlangan sonli funksiya bo‘lsin. Agar har qanday haqiqiy x uchun

$$\{\omega; \xi\left(\omega\right) \leq x\} \in \mathcal{A} \tag{1}$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday $\xi = \xi\left(\omega\right)$ funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Funksional analiz kursidan ma’lumki, (1) shartni qanoatlantiruvchi, Ω da aniqlangan $\xi = \xi\left(\omega\right)$ funksiyaga $\mathcal{A}$ σ-algebraga nisba-

tan o'lchovli funksiya deyiladi. Shunday qilib, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ fazodagi tasodifiy miqdor $\mathcal{A}$ σ-algebraga nisbatan o'lchovli funksiyadan iborat ekan.

2-ta'rif. Ixtiyoriy $x\in R$ son uchun aniqlangan

$$F(x)=F_{\xi}(x)=P\left(\{\xi\le x\}\right)$$

funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning **taqsimot funksiyasi** deyiladi.

Tasodifiy miqdorning yana bir eng sodda misoli sifatida $A\in\mathcal{A}$ **hodisaning** $I_A(\omega)$ **indikatorini** qarash mumkin:

$$I_A=I_A(\omega)=\begin{cases}1, \text{agar}\ \omega\in A,\\ 0, \text{agar}\ \omega\notin A.\end{cases}$$

$$\{\omega;\xi(\omega)\le x\}=\begin{cases}\varnothing, & x<0,\\ \overline{A}, & 0\le x<1,\\ \Omega, & x\ge 1,\end{cases} \qquad (2)$$

munosabatdan $I_A(\omega)$ funksiyaning tasodifiy miqdor ekanligi kelib chiqadi. Uning taqsimot funksiyasi (2) munosabatga ko'ra

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ P(\overline{A}), & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$$

ko'rinishga ega.

Endi $A_i\in\mathcal{A}, A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\ne j,\ \sum_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ bo'lsin, u holda

$$\xi(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i I_{A_i}(\omega);\ x_i\in R \qquad (3)$$

ko'rinishda ifodalangan tasodifiy miqdorga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi. Agar (3) yig'indi chekli bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga **sodda** (yoki **elementar**) tasodifiy miqdor deyiladi.

(3) tenglikdan diskret tasodifiy miqdor faqat $x_1,x_2,\dots$ qiymatlarnigina qabul qilishi kelib chiqadi. Agar $p_i=P(A_i)=P(\xi=x_i)$ belgilash kiritsak, u holda diskret tasodifiy miqdor ξ ushbu jadval orqali to'la aniqlanadi.

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Yuqoridagi jadvalga diskret tasodifiy miqdorning **taqsimot qonuni** deb ataladi. Bunda $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ tenglik o'rinli.

Tasodifiy miqdorlarning yana bir qancha misollarini ko'ramiz.

4-misol. Simmetrik bir jinsli tanga tashlansin. Bu holda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ bo'lib, bu yerda $\omega_1 =$ "g", $\omega_2 =$ "r", $\mathcal{A}$ esa Ω ning barcha qism to'plamlaridan iborat, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, \omega = \omega_1, \\ -1, \omega = \omega_2 \end{cases}$$

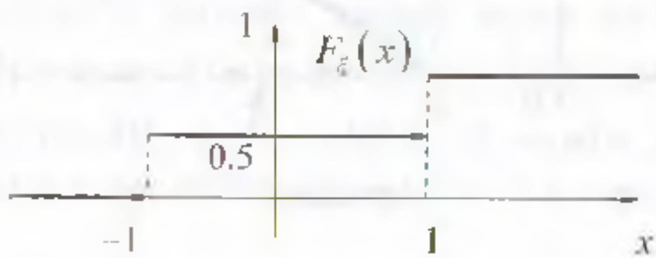
deylik. Bu holda

$$\{\omega; \xi(\omega) \le x\} = \begin{cases} \varnothing, x < -1, \\ \{\omega_2\}, -1 \le x < 1, \\ \Omega, x \ge 1 \end{cases}$$

munosabat o'rinli. Demak, $\xi(\omega)$ – tasodifiy miqdor ekan. Uning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < -1, \\ 1/2, -1 \le x < 1, \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$$

ko'rinishga ega va grafigi 7-shaklda keltirilgan.



7-shakl.

5-misol. $[a,b]$ kesmaga tasodifiy ravishda nuqta tashlansin, ya'ni nuqta $[a,b]$ kesmaning birorta qism to'plamiga tushish ehtimoli u to'plamning Lebeg o'lchoviga proporsional bo'lsin. Bunda $\Omega=[a,b]$ bo'lib, $\mathcal{A}$ esa $[a,b]$ kesmadagi barcha Borel to'plamlaridan iborat bo'ladi. $\xi=\xi(\omega)$ funksiyani

$$\xi(\omega)=\omega, \omega\in[a,b]$$

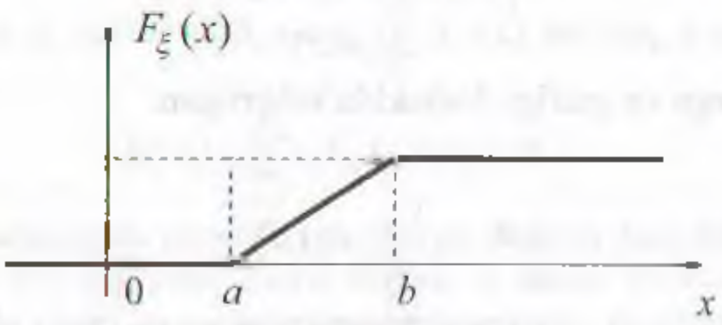
formula orqali belgilaymiz, ya'ni ξ – $[a,b]$ oraliqqa tushgan nuqtaning koordinatasidan iborat. Bunda

$$\{\omega:\xi(\omega)\leq x\}=\begin{cases}\varnothing, x<a,\\ [a,x], a\leq x<b,\\ \Omega=[a,b], x\geq b\end{cases}$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, har qanday $x\in R$ uchun $\{\omega;\xi(\omega)\leq x\}\in\mathcal{A}$, ya'ni $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor bo'lar ekan. $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\leq x<b,\\ 1, x\geq b.\end{cases}$$

Bu taqsimot funksiya (8-shakl) $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimotini aniqlaydi.



8-shakl.

Endi ehtimollar fazosi va unda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lmagan funksiyaga misol keltiramiz.

6-misol. $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ – $[0,1]$ oralig‘idagi Lebeg o‘lchovli to‘plamlarning σ-algebrasi bo‘lsin. $P(A) = \lambda(A)$, $A \in \mathcal{A}$ deymiz, bu yerda $\lambda(A)$ orqali A to‘plamning Lebeg o‘lchovi belgilangan. U holda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimollar fazosi. E – $[0,1]$ oraliqdagi Lebeg bo‘yicha o‘lchovsiz to‘plam bo‘lsin*. $\xi(\omega) = I_E(\omega)$ orqali E to‘plamning indikatorini aniqlaymiz. U holda, agar $0 \le x < 1$ bo‘lsa, $\{\omega;\ \xi(\omega) \le x\} = \overline{E} \notin \mathcal{A}$. Demak, yuqorida tasvirlangan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan $\xi(\omega)$ funksiya tasodifiy miqdor bo‘lmas ekan.

$\xi(\omega)$ – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va $B \subseteq R$ – sonlar o‘qidagi to‘plam bo‘lsin. $\mathcal{A}_\xi$ orqali ushbu

$$\mathcal{A}_\xi = \{B; B \subseteq R; \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

to‘plamlar sinfini belgilaylik, bu yerda $\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ to‘plam B to‘plamning proobrazi. Avvalo shuni aytish lozimki, $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning ta’rifidan $B = (-\infty; x]$, $x \in R$ ko‘rinishdagi yarim intervallar $\mathcal{A}_\xi$ sinfga tegishli ekanligi kelib chiqadi.

Quyidagi teorema Borel to‘plamlarining σ-algebrasi $\mathcal{A}_\xi$ sinfida yotishini ko‘rsatadi.

1-teorema. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosi, ξ undagi tasodifiy miqdor, B esa sonlar o‘qidagi ixtiyoriy Borel to‘plami bo‘lsin. U holda

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega; \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

munosabat o‘rinli, ya’ni har qanday Borel to‘plamining proobrazi tasodifiy hodisadan iborat.

Isboti. $a, b; a \le b$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lsin. U holda $\{\omega; \xi(\omega) \in (a,b]\} = \{\omega; a < \xi(\omega) \le b\} = \{\omega; \xi(\omega) \le b\} \setminus \{\omega; \xi(\omega) \le a\}$ tengliklardan $\xi^{-1}((a,b]) = \xi^{-1}((-\infty, b]) \setminus \xi^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ munosabatning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $(a,b]$ ko‘rinishidagi barcha

---

* Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. – T.: “O‘qituvchi”, 1968. darslikning 60-§ ga qaralsin.

yarim intervallar $\mathcal{A}_\xi$ to'plamga tegishli. Shu bilan birga R sonlar o'qidagi ixtiyoriy $B, B_1, B_2, \ldots$ to'plamlar uchun

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\xi^{-1}(B_i), \tag{4}$$

$$\xi^{-1}\left(\overline{B}\right)=\overline{\xi^{-1}(B)}, \tag{5}$$

$$\xi^{-1}(R)=\Omega \tag{6}$$

tengliklar o'rinli ekanligini osongina isbotlash mumkin. (4)–(6) tengliklardan $\mathcal{A}_\xi$ to'plamlar sinfi barcha $(a,b]$ yarim intervallarni o'z ichiga oluvchi σ -algebra ekanligi kelib chiqadi. Borel to'plamlarining σ -algebrasi $(a,b]$ ko'rinishidagi barcha yarim intervallarni o'z ichiga oluvchi minimal σ -algebra bo'lgani uchun $B(R)\subseteq\mathcal{A}_\xi$. Demak, teoremaning da'vosi ixtiyoriy B Borel to'plami uchun o'rinli ekan.

3-ta'rif. $(R, B(R))$ – sonli to'g'ri chiziq va undagi Borel to'plamlaridan tashkil topgan σ -algebra bo'lib, $\xi=\xi(\omega)$ funksiya $(\Omega,\mathcal{A},P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lsin.

$(R, B(R))$ o'lchovli fazoda

$$P_\xi(B)=P\left(\{\omega;\xi(\omega)\in B\}\right),\ B\in B(R)$$

formula orqali aniqlangan P_ξ -ehtimol o'lchoviga ξ tasodifiy miqdorning **ehtimollik taqsimoti** deyiladi.

Demak, har qaysi ξ tasodifiy miqdor yangi $\left(R, B(R), P_\xi\right)$ ehtimollar fazosini vujudga keltirar ekan.

2-§. Taqsimot funksiyalarining xossalari. Misollar

$F(x)$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsin. U holda $F(x)$ taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

F1. Monotonlik xossasi: agar $x_1 \le x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1)\le F(x_2)$ bo'ladi.

F2. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0; F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1.$

F3. O'ngdan uzluksizlik xossasi: $\lim\limits_{x\to x_0+0} F(x)=F(x_0)$.

Isboti. F1 xossaning isboti $\{\xi\le x_1\}\subseteq\{\xi\le x_2\}$ munosabatdan va ehtimolning 3-asosiy xossasidan kelib chiqadi. F2 xossani isbotlash uchun biz ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonli ketma-ketliklarni qaraymiz, bunda x_n ketma-ketlik $-\infty$ ga monoton kamayadi ($x_n\downarrow-\infty$), y_n esa $+\infty$ ga monoton o'sadi ($y_n\uparrow+\infty$). Agar $A_n=\{\omega;\xi(\omega)\le x_n\}$ va $B_n=\{\omega;\xi(\omega)\le y_n\}$ deb belgilasak, $A_n\downarrow\varnothing$ va $B_n\uparrow\Omega$ bo'lgani uchun F2 xossa ehtimolning quyidan va yuqoridan uzluksizlik xossalaridan kelib chiqadi (1.1-teoremaning 4- va 2-punktlariga qaralsin).

F3 xossa ham xuddi F2 kabi isbotlanadi: $A=\{\omega;\xi(\omega)\le x_0\}$ $A_n=\{\omega;\xi(\omega)\le x_n\}$ bo'lsin, bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi bo'lib $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ tenglik o'rinli. Demak, A_n hodisalar ketma-ketligi monoton kamayuvchi bo'lib, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$ tenglik o'rinli bo'lgani sababli (ya'ni $A_n\downarrow A$), 1.1-teoremaning 3-punktiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$ yoki $\lim\limits_{x\downarrow x_0}F(x)=F(x_0)$ tenglik kelib chiqadi.

$F(x)=F_\xi(x)$ funksiya umuman olganda chapdan uzluksiz emas, chunki ehtimolning o'ngdan uzluksizlik xossasidan

$$p_x=F(x)-F(x-0)=\lim_{n\to\infty}\big(F(x)-F(x-1/n)\big)=\lim_{n\to\infty}P(x-1/n<\xi\le x)=$$

$$=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi\in(x-1/n,x]\}\right)=P(\{\xi=x\})$$

tenglik o'rinli.

Bundan barcha $x\in R$ sonlar uchun $P\{\xi=x\}=0$ tenglik o'rinli bo'lsa va faqat shu holdagina $F_\xi(x)$ funksiya uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $p_0=P(\{\xi=x_0\})=F(x_0)-F(x_0-0)$ tenglikdan $F(x)$ funksiyaning uzilish nuqtalarida $p_0>0$ tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Har qanday natural n soni uchun $F(x)$ funksiyaning

$p_0 = P(\{\xi = x_0\}) \geq \frac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi uzilish nuqtalarining soni n dan katta bo'lmagani sababli, taqsimot funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqlidir.

$F_\xi(x) = F(x)$ taqsimot funksiyaning uzilish nuqtalarini $x_1, x_2, \ldots$ orqali belgilaylik. Agar ξ – diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $p_k = P(\{\xi = x_k\}),\ k = 1,2,\ldots$ ehtimollar

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \tag{7}$$

tenglikni qanoatlantiradi va aksincha, agar $p_k,\ k = 1,2,\ldots$ ehtimollar (7) tenglikni qanoatlantirsa, u holda ξ tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor bo'ladi.

ξ-diskret tasodifiy miqdorning P_ξ taqsimoti eng ko'pi bilan sanoqli sondagi x_k nuqtalarda to'plangan bo'lib, uni

$$P_\xi(B) = \sum_{\{k: x_k \in B\}} p(x_k)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin.

Endi amaliyotda eng ko'p uchraydigan diskret taqsimotli tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Binomial taqsimot. Agar diskret tasodifiy miqdor ξ uchun $x_k = k,\ k = 0,1,\ldots,n$ bo'lib,

$$p_k = P(\{\xi = k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 < p < 1$$

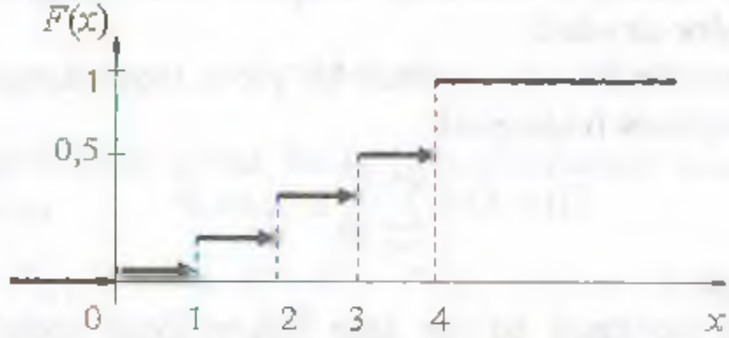
bo'lsa, u holda ξ tasodifiy miqdorga (n, p) **parametrli binomial tasodifiy miqdor,** $P_n(k) = p_k$ ehtimollarga esa (n, p) **parametrli binomial taqsimot** deyiladi. (n, p) parametrli binomial tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$B(x, n, p) = \sum_{k \leq x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, x \in R$$

ko'rinishga ega. Binomial taqsimot n ta bog'liqsiz tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishlar soni μ_n ni A hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli p bo'lgan holdagi taqsimotidan iborat.

7-misol. Oraliq nazorat uchun o'tkazilayotgan yozma ishda talaba $n=4$ ta masala oldi. Har bir masalani to'g'ri yechish ehtimoli 0,8 bo'lsin. μ orqali to'g'ri yechilgan masalalar sonini belgilaylik. Bu holda biz (4;0,8) parametrli binomial taqsimotga egamiz. Uning taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi quyidagi jadvalda va 9-shaklda keltirilgan.

μ	0	1	2	3	4
P_μ	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096



9-shakl.

(n,p) parametrli binomial taqsimotni maksimallashtiruvchi k sonni, ya'ni ro'y berishlar soni μ_n ning eng katta ehtimol bilan qabul qiluvchi qiymatini topamiz. Buning uchun quyidagi nisbatni ko'ramiz:

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{1-p}=1+\frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

Agar $k<(n+1)p$ bo'lsa, $P_n(k)>P_n(k-1)$, ya'ni k o'sishi bilan $P_n(k)$ funksiya monoton o'sadi; agar $k>(n+1)p$ bo'lsa, $P_n(k)<P_n(k-1)$, ya'ni $P_n(k)$ ehtimollar monoton kamayadi. $m=\left[(n+1)p\right]-(n+1)p$ sondan katta bo'lmagan eng katta butun son bo'lsin, u holda $k=m$ da $P_n(k)$ ehtimol eng katta qiymatga erishadi. Agar $(n+1)p$ butun son bo'lsa, $P_n(k)$ ehtimolni maksimallashtiradigan k ning qiymati ikkita: $k=(n+1)p$ va $k=(n+1)p-1$.

Yuqoridagi 7-misolda $(n+1)p=5\cdot 0{,}8=4$ bo'lgani uchun $P_4(k)$ ni maksimallashtiruvchi k ning qiymati ikkita: $k=3$ va $k=4$. Bunda $P_4(k)=0{,}4096$. Demak, talaba 3 ta yoki 4 ta masalani yechish ehtimoli 0,8192 ga teng ekan.

Puasson taqsimoti. Agar ξ-diskret tasodifiy miqdor $x_k: 0,1,2,...$ qiymatlarni

$$p_k=\pi(k;\lambda)=P(\{\xi=k\})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};\lambda>0$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, uni λ **parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor** yoki qisqacha **Puasson tasodifiy miqdor** deyiladi.

λ parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Pi(x;\lambda)=\sum_{k<x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, x\in R$$

ko'rinishga ega.

Puasson taqsimoti ba'zan kam uchraydigan hodisalar qonuni degan nom bilan ham ataladi, chunki u har doim ko'p tajriba o'tkazilib, ularning har birida kuzatilayotgan hodisaning ehtimoli kichik bo'lgan hollarda uchraydi.

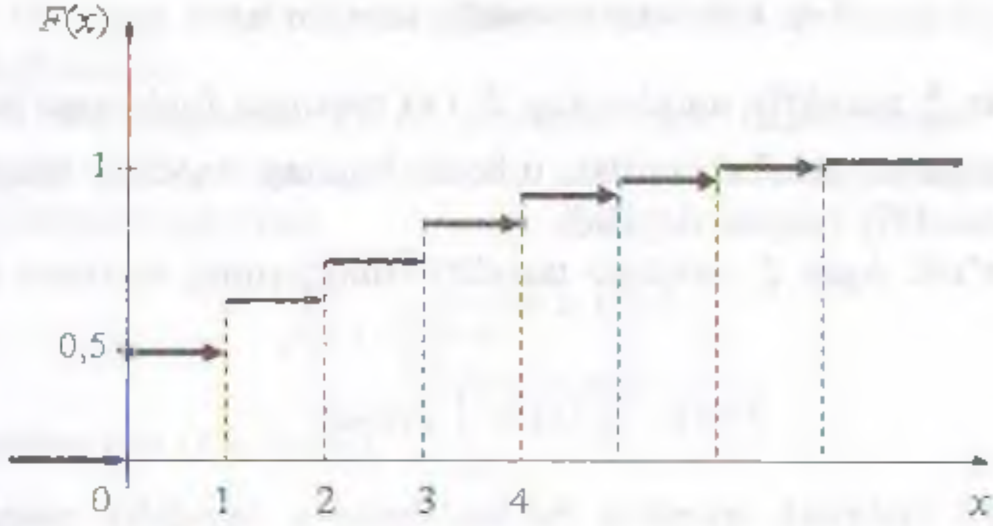
Geometrik taqsimot. Agar ξ tasodifiy miqdor $x_k: 0,1,2,...$ qiymatlarni

$$\Gamma(k;p)=p_k=P(\{\xi=k\})=p(1-p)^k;0<p<1 \qquad (8)$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, u p **parametrli geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi.

8-misol. O'tkazilayotgan fizikaviy tajribada kutilayotgan natija chiqish ehtimoli 0,4 bo'lsin. ξ orqali kutilgan natija birinchi marta chiqquncha o'tkazilgan tajribalar sonini belgilaylik. U holda ξ tasodifiy miqdor 0,4 parametrli geometrik taqsimotga ega. Quyida uning (8) formula orqali hisoblangan taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi (10-shaklda) keltirilgan.

ξ	0	1	2	3	...
P_ξ	0,4	0,24	0,144	0,0864	...



10-shakl.

ξ – geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin, u holda

$$P(\{\xi = n+m / \xi \geq n\}) = P(\{\xi = m\}), m = 1,2,... \quad (9)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatdan ham,

$$P(\{\xi = n+m / \xi \geq n\}) = \frac{P(\{\xi = n+m, \xi \geq n\})}{P(\{\xi \geq n\})} = \frac{P(\{\xi = n+m\})}{P(\{\xi \geq n\})} =$$

$$= \frac{p(1-p)^{n+m}}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(1-p)^k} = p(1-p)^m = P(\{\xi = m\}).$$

(9) tenglikni yuqorida keltirilgan misolda sharhlaylik. 8-misolda ξ tasodifiy miqdorni natijani "kutish" vaqti deb sharhlash mumkin. Bu holda (9) tenglikni $(n-1)$ ta tajribada natija chiqmaganlik shartida, yana $m-1$ ta tajribadan so'ng birinchi marta natija chiqish ehtimoli m-tajribada birinchi marta natija chiqish shartsiz ehtimoliga teng deb izohlash mumkin. Bu (9) tenglik bilan ifodalanadigan xossa **so'nggi ta'sirning yo'qligi** deb ataladi.

Kezi kelganda shuni qayd qilish lozimki, barcha diskret taqsimotlar ichida faqat geometrik taqsimotgina so'nggi ta'sirning yo'qlik xossasiga ega.

3-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Agar ξ tasodifiy miqdorning $F_\xi(x)$ taqsimot funksiyasi barcha $x \in R$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

4-ta'rif. Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F(x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du \qquad (10)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga **absolut uzluksiz** tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerdagi $p(x)$ funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deyiladi.

(10) tenglikdan zichlik funksiyaning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

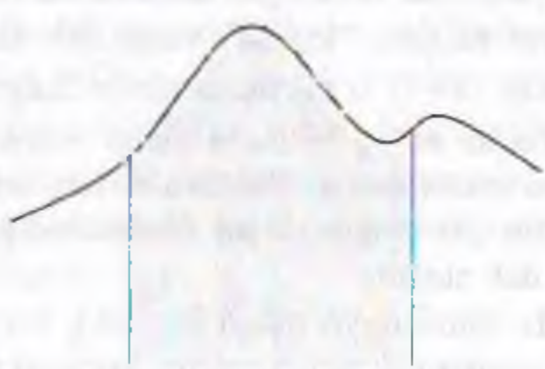
1°) $F'(x) = p(x)$;

2°) $p(x) \geq 0$;

3°) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$;

4°) $\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = P(\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}), \quad x_1 \leq x_2$.

4°-xossaga ko'ra absolut uzluksiz tasodifiy miqdorning $[x_1, x_2]$ oraliqqa tushish ehtimoli son jihatidan 11-shaklda shtrixlangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng.



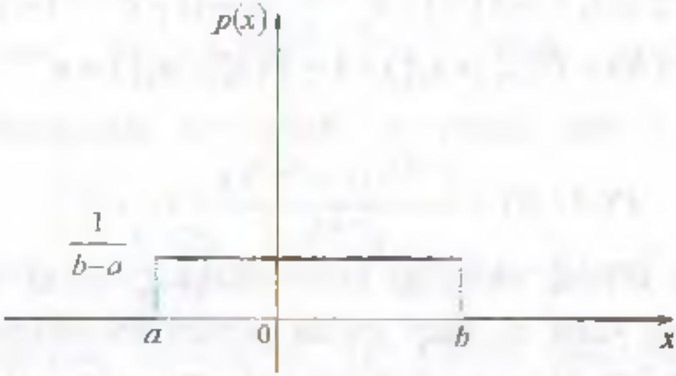
11-shakl.

Endi eng ko'p ishlatiladigan absolut uzluksiz tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Tekis taqsimot. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor (5-misolga qarang) absolut uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x<a;\ \text{yoki}\ x>b\end{cases}$$

ko'rinishga ega (12- shakl).



12-shakl.

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning $[a,b]$ oraliq ichidagi (x_1,x_2) intervalga tushish ehtimoli, $F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$ ga teng bo'lib, u shu intervalning uzunligiga proporsional.

Eksponensial taqsimot. Quyidagi

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorga λ $(\lambda>0)$-**parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi. Bu holda taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}; & x\ge 0\end{cases}$$

ko'rinishga ega ekanligini topish qiyin emas.

Turli elementlar atomlarining yemirilish vaqti eksponensial taqsimotga ega. Bunda $T=\frac{1}{\lambda}$ son yemirilish vaqtining o'rtacha qiymatini bildiradi.

Eksponensial taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdor so'nggi ta'sirning yo'qlik xossasiga ega. ξ tasodifiy miqdorni atomning yemirilish vaqti deb izohlab, $A=\{x_1<\xi\le x_1+x_2\}$ hodisani ko'ramiz va bu hodisaning $B=\{\xi>x_1\}$ hodisa ro'y bergandagi shartli ehtimolini hisoblaymiz:

$$P(A)=P(\{x_1<\xi\le x_1+x_2\})=1-e^{-\lambda(x_1+x_2)}-(1-e^{-\lambda x_1})=e^{-\lambda x_1}(1-e^{-\lambda x_2})$$

$$P(B)=P(\{\xi>x_1\})=1-P(\{\xi\le x_1\})=e^{-\lambda x_1}$$

tengliklardan

$$P(A/B)=\frac{e^{-\lambda x_1}(1-e^{-\lambda x_2})}{e^{-\lambda x_1}}=1-e^{-\lambda x_2}$$

munosabatning o'rinli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni atom x_1 vaqt yashagach uning yana x_2 vaqt ichida yemirilish ehtimoli, xuddi shu atomni x_2 vaqt ichida yemirilishining shartsiz ehtimoli bilan bir xil. Aynan shu xossa so'nggi ta'sirning yo'qlik xossasidan iborat.

So'nggi ta'sirning yo'qligi eksponensial taqsimlangan tasodifiy miqdorning xarakterlovchi xossasidan iborat. Boshqacha qilib aytganda, barcha absolut uzluksiz taqsimotli tasodifiy miqdorlar ichida faqat eksponensial taqsimotli tasodifiy miqdorgina so'nggi ta'sir yo'qlik xossasiga ega (geometrik taqsimotga qaralsin).

Normal taqsimot. Taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du$$

ko'rinishga ega bo'lgan tasodifiy miqdorga (a,σ^2) **parametrli normal (yoki Gauss) qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$\varphi_{a\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty$$

ko'rinishga ega. Biz

$$\varphi_{a,\sigma}(x) > 0 \text{ va } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx = 1$$

ekanligini ko'rsataylik:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)\varphi_{a,\sigma}(y)dxdy =$$

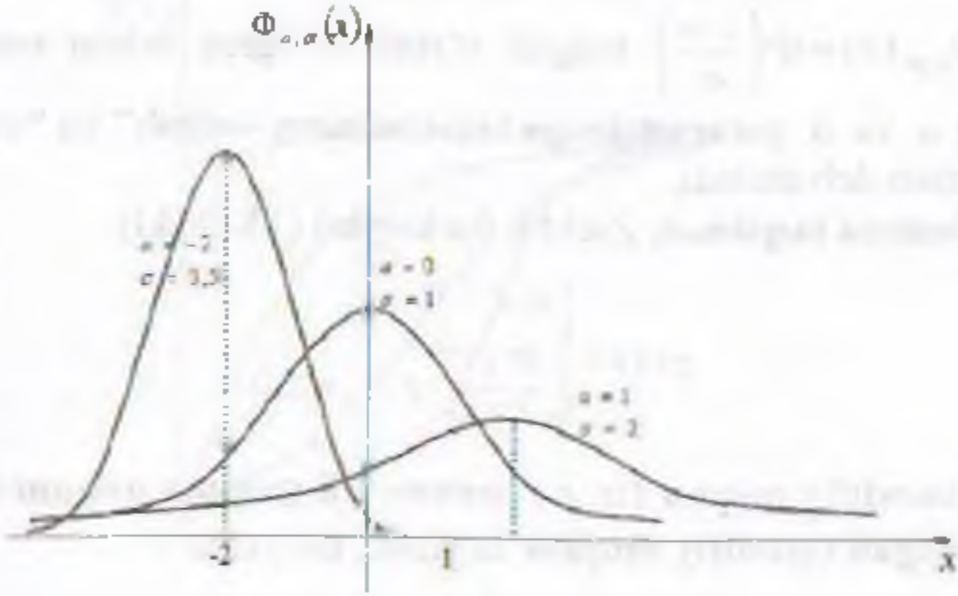
$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)^2\right\}dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}dudv.$$

Oxirgi integralda $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ deb o'zgaruvchilarni almashtirsak,

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx\right]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\exp\{-r^2/2\}drd\theta = -\int_0^{\infty} d\exp\{-r^2/2\} = 1$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, $\varphi_{a,\sigma}(x)$ zichlik funksiya, $\Phi_{a,\sigma}(x)$ esa taqsimot funksiya ekan. Normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini turli a va σ parametrlarga bog'liq holdagi grafiklari 13-shaklda keltirilgan.



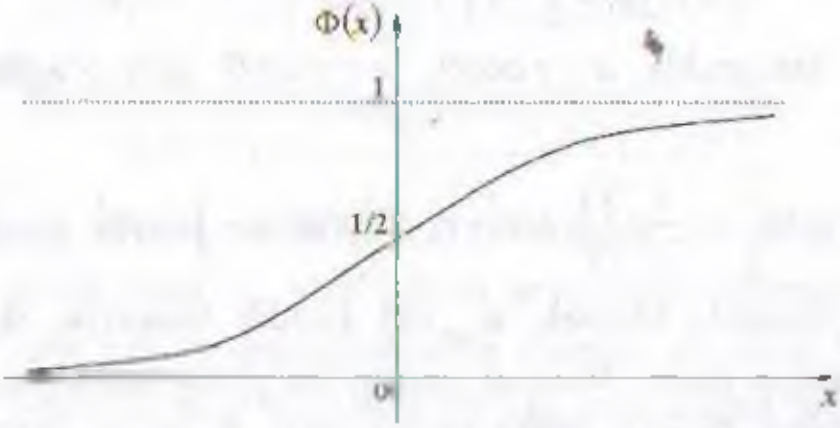
13-shakl.

$\varphi_{a,\sigma}(x)$ zichlik funksiya $x=a$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi va uning grafigi $x=a$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bu funksiya uchun OX o'q gorizontal asimptota $x=a+\sigma$, $x=a-\sigma$ nuqtalar esa funksiyaning burilish nuqtalaridan iborat.

Xususan $a=0$, $\sigma=1$ bo'lganda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{01}(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$$

ko'rinishiga ega bo'ladi va $\Phi(x)$ taqsimotga **standart normal qonun** deyiladi (14-shakl).



14-shakl.

$\Phi_{a,\sigma}(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun normal qonunning a va σ parametrlariga taqsimotning "siljish" va "masshtab" parametrlari deb ataladi.

Gamma taqsimot. Zichlik funksiyasi (15-shakl)

$$p(x)=\begin{cases} 0, x<0; \\ \frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x\geq 0 \end{cases}$$

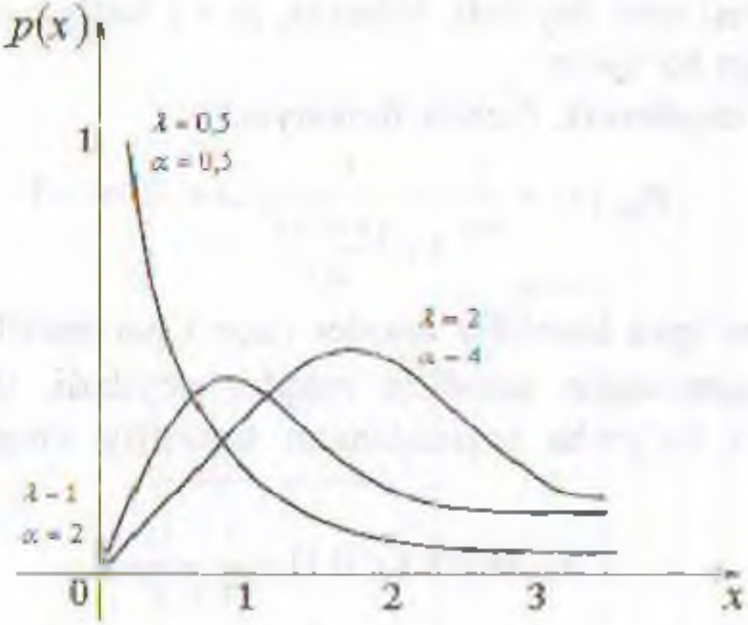
bo'lgan tasodifiy miqdor **(α,λ) parametrli gamma qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi, bu yerda

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

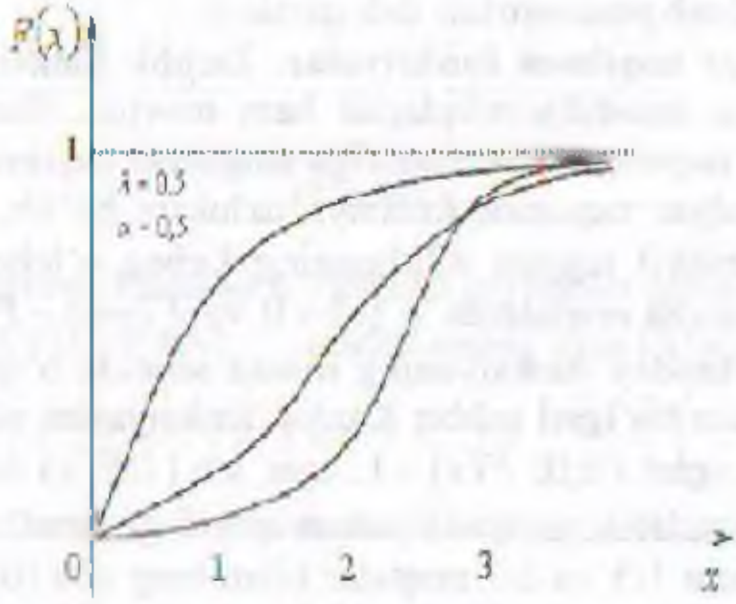
Eyler gamma funksiyasi. Uning taqsimot funksiyasi (16-shakl)

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}u^{\alpha-1}e^{-\lambda u}du, x\geq 0;\\ 0, x<0\end{cases}$$

ko'rinishga ega.



15-shakl.



16-shakl.

Umumiy holda gamma taqsimot aniq ifodalanmasa ham, u ba'zi juda muhim xususiyatlarga ega. Masalan, agar $\alpha = k$, ya'ni α butun qiymatlarni qabul qilsa, biz ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida muhim rol o'ynaydigan Erlang taqsimotini hosil qilamiz. Agar $\alpha = k/2, \lambda = 1/2$ bo'lsa, gamma taqsimot χ^2 (xi-kvadrat) deb ataluvchi taqsimotga aylanadi, bu holda k soni χ^2 taqsimotning ozodlik darajasi soni deyiladi. Nihoyat, $\alpha = 1$ bo'lsa, biz eksponensial taqsimotga ega bo'lamiz.

Koshi taqsimoti. Zichlik funksiyasi

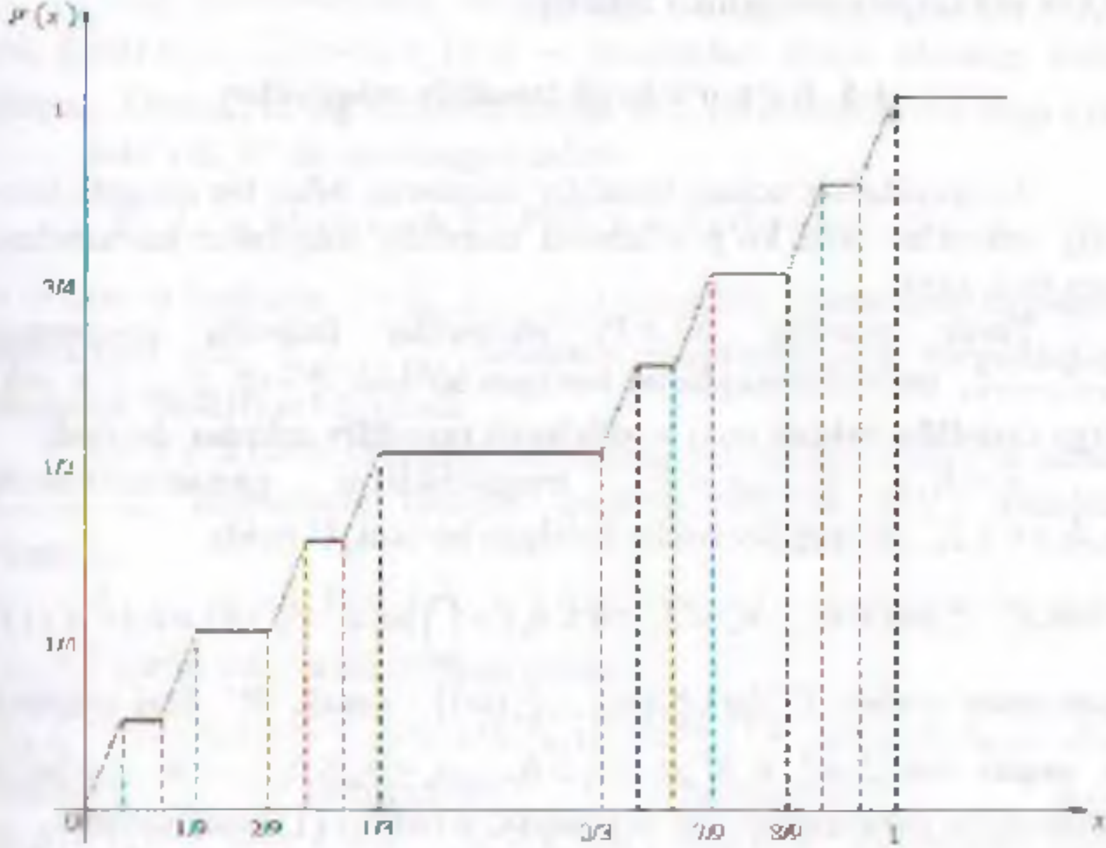
$$p_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}, x \in R, \sigma > 0$$

ko'rinishda bo'lgan tasodifiy miqdor (a,σ) parametrli Koshi qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. (0;1) parametrli Koshi qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$K(x) = K(x;0,1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

ko'rinishga ega. $K(x;a,\sigma) = K\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun xuddi normal qonundagi kabi bu yerda ham a va σ parametrlarga siljish va masshtab parametrlari deb qaraladi.

Singulyar taqsimot funksiyalar. Zichlik funksiyaga ega bo'lmagan uzluksiz tasodifiy miqdorlar ham mavjud. Bunday tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalariga singulyar taqsimot funksiyalari deyiladi. Singulyar taqsimot funksiya uzluksiz bo'lib, barcha o'sish nuqtalaridan tashkil topgan to'plamning Lebeg o'lchovi 0 ga teng, ya'ni deyarli barcha nuqtalarda $F'(x) = 0$ va $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ tengliklar o'rinli. Bunday funksiyaning misoli sifatida o'quvchiga analiz kursidan ma'lum bo'lgan ushbu Kantor funksiyasini olishimiz mumkin: $F(x) = 0$, agar $x \le 0$, $F(x) = 1$, agar $x \ge 1$. $F(x)$ funksiyani $[0,1]$ oraliqdagi qiymatlarini aniqlash uchun quyidagi amallarni bajaramiz. Avval bu oraliqni 1/3 va 2/3 nuqtalar bilan teng uch [0;1/3], [1/3;2/3] va [2/3;1] bo'laklarga bo'lamiz. Ichki oraliqda $F(x)$=1/2 deymiz. Qolgan ikki oraliqning har birini yana teng uch bo'laklarga bo'lib, har bir ichki oraliqlarda $F(x)$ funksiya mos ravishda 1/4 va 3/4 qiymatlarni qabul qiladi, deymiz. Har bir qolgan oraliqlar o'z navbatida yana uch bo'lakka bo'linib, uning ichki bo'laklarida $F(x)$ funksiya uning aniqlangan qo'shni qiymatlarining o'rta arifmetigiga teng, deb olamiz va hokazo (17-shakl).



17-shakl.

$F(x)$ taqsimot funksiya o'zgarmas qiymatlar qabul qiluvchi ichki [1/3;2/3], [1/9;2/9],[7/9;8/9], ... oraliqlarning uzunliklar yig'indisi

$$1/3+2/9+4/27+...=\frac{1}{3}(1+2/3+4/9+...)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1.$$

Demak, $F(x)$ funksiyani o'sish nuqtalarining Lebeg o'lchovi 0 ga teng ekan.

Taqsimot funksiyalarning mumkin bo'lgan tiplari haqida boshqa to'xtalmay, haqiqatda taqsimot funksiyalar yuqorida keltirilgan uchta tip bilan tugallanishi haqidagi mulohaza bilan kifoyalanamiz. Aniqroq aytganda ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyasini

$$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) + c_3F_3(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. bu yerda $c_i \geq 0$, $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, $F_1(x)$ – diskret taqsimot funksiya, $F_2(x)$ – absolut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)$ esa singulyar taqsimot funksiya.

4-§. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

Kelgusida biz uchun tasodifiy miqdorlar bilan bir qatorda tasodifiy vektorlar yoki ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar tushunchasi ham juda zarur.

Faraz qilaylik, (Ω, A, P) ehtimollar fazosida aniqlangan $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin. $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ vektorga **tasodifiy vektor** yoki n**-o'lchovli tasodifiy miqdor** deyiladi.

$a_1 < b_1, a_2 < b_2, ..., a_n < b_n$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $a_i, b_i, i = 1, 2, ..., n$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\{\omega; a_1 < \xi_1(\omega) \leq b_1, ..., a_n < \xi_n(\omega) \leq b_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega; a_i < \xi_i(\omega) \leq b_i\} \in A \quad (11)$$

munosabat o'rinli. $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ orqali R^n dagi nuqtani, Δ orqali esa $\Delta = \{x \in R^n; a_1 < x_1 \leq b_1, ..., a_n < x_n \leq b_n\}$ – n o'lchovli yarim ochiq parallelepipedni belgilasak, u holda (11) munosabatni

$$\{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in \Delta\} \in A \quad (12)$$

shaklda ifodalash mumkin.

R dan olingan ixtiyoriy $\{B_k\}$ ketma-ketlik uchun o'rinli bo'lgan ushbu

$$\begin{gathered} \bigcap_k \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in B_k\} = \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in \bigcap_k B_k\} \\ \bigcup_k \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in B_k\} = \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in \bigcup_k B_k\} \end{gathered} \quad (13)$$

tengliklardan va (12) munosabatdan foydalanib (12) munosabatning Δ ning R^n dan olingan ixtiyoriy Borel to'plami bo'lgan hol uchun ham o'rinli ekanligini isbotlash mumkin.

5-ta'rif. $\left(R^n, B(R^n)\right)$ o'lchovli fazoda

$$P_{\xi}(B) = P\left\{\omega : \xi(\omega) \in B\right\},\ B \in B(R^n)$$

formula orqali aniqlangan P_{ξ} ehtimol o'lchoviga $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ **tasodifiy vektorning ehtimollik taqsimoti** deyiladi.

(12) munosabatdan har qanday $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ uchun $\left\{\omega;\ \xi_1(\omega) \le x_1, ..., \xi_n(\omega) \le x_n\right\} \in A$ – hodisadan iborat ekanligi kelib chiqadi. Demak, uning ehtimoli haqida so'z yuritishimiz ma'noga ega.

6-ta'rif. R^n da aniqlangan ushbu

$$F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\{\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\})$$

n o'lchovli funksiya $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ **tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi** yoki $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ **tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi** deyiladi.

Ko'p o'lchovli taqsimot funksiyani biz ba'zan, qulaylik uchun $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ indekslarni tushirib qoldirib, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ shaklida yozamiz.

Δ_{a_k, b_k} orqali $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning k-argumenti bo'yicha $\left(a_k, b_k\right]$ yarim intervalda olingan ushbu

$$\Delta_{a_k, b_k} F(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, ..., x_n)$$

funksiya orttirmasini belgilaylik. Agar $(a, b] = \{x \in R^n; a_1 < x_1 \le b_1, ..., a_n < x_n \le b_n\}$ orqali R^n dagi yarim ochiq parallelepipedni belgilasak, u holda

$$P_{\xi}\left((a, b]\right) = \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} ... \Delta_{a_n, b_n} \tag{14}$$

tenglik o'rinli. (14) formulaning isbotini a_k, b_k argumentlar bo'yicha birin-ketin o'tkazish mumkin:

$$P\left(\{a_1 < \xi_1 \le b_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\}\right) = P\left(\left\{\xi_1 \le b_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\right\}\right) -$$

$$-P(\{\xi_1 \le a_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\}) = \Delta_{a_1, b_1} F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$P(\{a_1 < \xi_1 \le b_1, a_2 < \xi_2 \le b_2, \xi_3 \le x_3, ..., \xi_n \le x_n\}) =$$

$$P(\{a_1 < \xi_1 \le b_1, \xi_2 \le b_2, ..., \xi_n \le x_n\}) -$$

$$-P(\{a_1<\xi_1\le b_1,\xi_2\le a_2,\xi_3\le x_3,...,\xi_n\le x_n\})=$$

$$=\Delta_{a_2,b_2}P(\{a_1<\xi_1\le b_1,\xi_2\le x_2,...,\xi_n\le x_n\})=$$

$$=\Delta_{a_2b_2}\left(\Delta_{a_1,b_1}F(x_1,x_2,...,x_n)\right)=\Delta_{a_1,b_1}\Delta_{a_2,b_2}F(x_1,x_2,...,x_n)$$

va hokazo.

5-§. Ko'p o'lchovli taqsimot funksiyalarning xossalari

$F(x_1,x_2,...,x_n)=F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo'lsin. Ko'p o'lchovli $F(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

F1°. Monotonlik xossasi: $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo'yicha kamayuvchi emas va o'ngdan uzluksiz.

F2°. $\lim\limits_{x_k\to+\infty}F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=F(x_1,...,x_{k-1},\infty,x_{k+1},...,x_n)=$

$$=F_{\xi_1,...,\xi_{k-1},\xi_{k+1},...,\xi_n}(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n);\quad k=1,2,...,n.$$

F3°. $\lim\limits_{x_k\to-\infty}F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=0; k=1,2,...,n.$

F4°. $\Delta_{a_1,b_1}\Delta_{a_2,b_2}...\Delta_{a_n,b_n}F(x_1,x_2,...,x_n)\ge 0.$

F1°, F2°, F3° xossalar bir o'lchovli taqsimot funksiyalarning mos xossalari kabi isbotlanadi, F4° xossaning isboti esa (14) formuladan kelib chiqadi.

F2° va F3° ko'p o'lchovli taqsimot funksiyaning **uyg'unlik xossalari** deb ataladi.

F1°-F4° xossalarga ega bo'lgan ixtiyoriy n o'lchovli $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya birorta $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasidan iborat.

Bir o'lchovli taqsimot funksiyalar uchun F4° xossa F1° xossadan kelib chiqadi, ammo n o'lchovli taqsimot funksiyalar uchun F4° xossa mustaqil bo'lib, u birinchi uchta xossadan kelib chiqmaydi.

9-misol. Ushbu $F(x_1,x_2)=\begin{cases}0, agar & x_1+x_2<1,\\ 1, agar & x_1+x_2\ge 1\end{cases}$

ikki o'lchovli funksiyani ko'raylik. Bu funksiya uchun F1°-F3° xossalar o'rinli ekanligi osongina tekshiriladi. Ammo $F(x_1,x_2)$ funksiya F4° xossaga ega emas, chunki

$$\Delta_{0,1}\Delta_{0,1}F(0,0)=\Delta_{0,1}[F(1,0)-F(0,0)]=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)=-1.$$

$\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar qism to'plamini barcha tasodifiy miqdorlarning $F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiyasi orqali F2° xossa yordamida keltirib chiqariladigan birgalikdagi taqsimot funksiyasiga **marginal (hususiy)** taqsimot funksiya deyiladi.

7-ta'rif. Agar R^n fazoning chekli yoki sanoqli $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)});k=1,2,...$ nuqtalari uchun

$$P(\{\xi_1=x_1^{(k)},\xi_2=x_2^{(k)},...,\xi_n=x_n^{(k)}\})=p_{x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}}=p_{x^{(k)}},$$

$$\sum_k p_{x_1^{(k)},...,x_n^{(k)}}=\sum_k p_{x^{(k)}}=1$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorga ***n* o'lchovli diskret tasodifiy vektor** deyiladi. Diskret tasodifiy vektorning taqsimot qonuni R fazodagi kabi

$$P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(B)=\sum_{\{k;x^{(k)}\in B\}}p_{x^{(k)}},\quad B\in(B(R^n),),\ x^{(k)}\in R^n$$

formula orqali beriladi.

Polinomial taqsimot. Agar m-o'lchovli diskret tasodifiy vektor ξ uchun $x_k=k=(k_1,k_2,...,k_m),\ k_i\in Z,\ k_1+k_2+...+k_m=n$ bo'lib,

$$p_k=P(\{\xi=k\})=P(\{\xi_1=k_1,...,\xi_m=k_m\})=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m}\quad(15)$$

$p_i\geq 0, i=1,2,...,m; p_1+p_2+...+p_m=1$ bo'lsa, u holda ξ vektor $(n;p_1,p_2,...,p_m)=(n;p)$ parametrli polinomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy vektor va $b(k;n,p_1,p_2,...,p_m)=p_k$ ehtimollarga esa $(n;p_1,p_2,...,p_m)$ **parametrli polinomial taqsimot deyiladi.** (15) tenglikning o'ng tomoni $(p_1+p_2+...+p_m)^n$ polinomning $p_1,p_2,...,p_m$ sonlarning darajalari bo'yicha yoyilmasining umumiy holidan iborat bo'lgani sababli, yuqoridagi taqsimot polinomial taqsimot deb ataladi.

Agar $m=2, p_1=p, p_2=1-p$ bo'lsa, polinomial taqsimot (n,p)-parametrli binomial taqsimotga aylanadi.

10-misol. Ikki shaxmatchi orasida shaxmat turniri o'tkazilayotgan bo'lsin. Birinchi o'yinchi har bir o'yinni, avvalgi o'yin qanday yakunlanganidan qat'iy nazar, p ehtimol bilan yutib, q ehtimol bilan yutqazadi va $1-p-q$ ehtimol bilan o'yin durang bo'ladi, deylik. U holda n ta o'yindan so'ng birinchi shaxmatchi o'yinni k marta yutib, m marta yutqazish ehtimoli $(k+m\leq n)$ ushbu

$$p(n;k,m)=\frac{n!}{k!l!(n-k-m)!}p^k q^m (1-p-q)^{n-k-m}$$

songa teng.

8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ uchun

$$F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(u_1,u_2,...,u_n)du_1du_2...du_n \quad (16)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya mavjud bo'lsa, u holda $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorga n **o'lchovli absolut uzluksiz tasodifiy vektor**, $p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaga esa uning zichlik funksiyasi deyiladi.

(16) munosabatdan n o'lchovli zichlik funksiyaning ushbu xossalari kelib chiqadi:

1°) Deyarli barcha $(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ nuqtalarda

$$p_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdots\partial x_n}F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$$

tenglik o'rinli;

2°) $p_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0$;

3°) $\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n=1$;

4°) $p_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ zichlik funksiyaning uzluksiz nuqtalarida

$$P(\{x_i<\xi_i<x_i+\Delta x_i, i=1,2,...,n\})=$$

$$=p_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)\Delta x_1\Delta x_2...\Delta x_n+o(\Delta x_1\Delta x_2...\Delta x_n)$$

$\max\limits_i \Delta x_i\to 0$ munosabat o'rinli.

Ko'p o'lchovli normal taqsimot. $\bar{m}=(m_1,m_2,...,m_n)$ – n o'lchovli vektor va $R=\|r_{ij}\|$ birorta $n\times n$ o'lchovli, musbat aniqlangan, simmetrik matritsa bo'lsin. R – musbat aniqlangan matritsa bo'lgani uchun uning teskari matritsasi $R^{-1}=A=\|a_{ij}\|$ mavjud.

Zichlik funksiyasi

$$\phi(x_1,x_2,...,x_n)=\phi_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=$$

$$=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right\}$$

ko'rinishga ega bo'lgan n o'lchovli tasodifiy vektor $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ $(\bar{m};R)$ **parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy vektor** deyiladi. Bu yerda $|A|=\det A$ orqali A matritsaning determinanti belgilangan.

R matritsaga $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ vektorning **kovariatsion matritsasi**, $\bar{m}=(m_1,m_2,...,m_n)$ vektorga esa uning **o'rta qiymat vektori** deyiladi.

$\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ – n o'lchovli $(\bar{m},R)$ parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy vektor bo'lsin. U holda $(n-1)$ o'lchovli $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1})$ vektor ham o'rta qiymat vektori $(m_1,m_2,...,m_{n-1})$ va kovariatsion matritsasi R matritsaning oxirgi satr va ustunini o'chirgandan hosil bo'ladigan R' matritsaga teng bo'lgan normal taqsimotga ega. Buni

$$\phi_{\xi_1\xi_2...\xi_{n-1}}(x_1,x_2,...,x_{n-1})=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{\xi_1...\xi_{n-1}\xi_n}(x_1...x_{n-1},x_n)dx_n$$

tenglikdan (bu tenglik taqsimot funksiyaning F2 xossasidan kelib chiqadi) keltirib chiqarish mumkin.

11-misol. O'rta qiymat matritsasi (m_1,m_2), kovariatsion matritsa esa

$$R=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}(\sigma_1,\sigma_2>0;\ -1<r<1)$$

bo'lgan normal qonun bo'yicha taqsimlangan ikki o'lchovli tasodifiy vektor bo'lsin. U holda

$$|R| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(1 - r^2\right)$$

$$F = R^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} & \dfrac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ \dfrac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2\left(1-r^2\right)} \end{pmatrix}$$

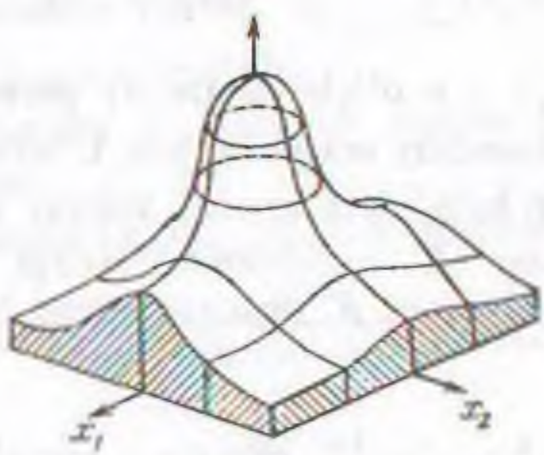
$$|A| = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)}$$

tengliklardan $\phi_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)$ zichlik funksiya

$$\phi(x_1, x_2) = \phi_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

ko‘rinishga ega ekanligi kelib chiqadi (18-shakl).



18-shakl.

Ikki o‘lchovli normal qonunining zichlik funksiyasi ($m_1 = m_2 = 0$ bo‘lgan hol).

6-§. Tasodifiy miqdorlarning bog‘liqsizligi

Tasodifiy miqdorlarning bog‘liqsizlik tushunchasi ehtimollar nazariyasidagi eng muhim tushunchalardan biri bo‘lib, u hodisalarning bog‘liqsizligini tasodifiy miqdorlarga ko‘chirishdan iborat.

9-ta'rif. $\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ lar (Ω,A,P) ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Agar ixtiyoriy $B_k\in B(R)$ $(k=1,2,...,n)$ Borel to'plamlari uchun

$$P(\xi_1\in B_1,...\xi_n\in B_n)=P(\xi_1\in B_1)....P(\xi_n\in B_n) \qquad (17)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1,...\xi_n$ **bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar** deyiladi.

Agar ixtiyoriy n va $1\le i_1<...<i_n<\infty$ sonlar uchun $\xi_{i_1},...\xi_{i_n}$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz deyiladi.

(17) tenglikdan $B_k=(-\infty,x_k],k=1,2,...,n$ bo'lgan xususiy holda

$$F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)...F_{\xi_n}(x_n) \qquad (18)$$

tenglikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan (18) munosabatdan (14) tenglikka ko'ra, ixtiyoriy $a_k\le b_k$ sonlar uchun

$$P(\{a_1<\xi_1\le b_1,a_2<\xi_2\le b_2,...,a_n<\xi_n\le b_n\})=\prod_{k=1}^{n}P(\{a_k<\xi_k\le b_k\})$$

ekanligi, ya'ni (17) tenglikning $B_k=(a_k,b_k]$ yarim intervallar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Ehtimollarning barcha yarim intervallardagi qiymatlari uning Borel to'plamlaridagi qiymatlarini yagona usul bilan aniqlagani uchun oxirgi tenglikdan (17) munosabatning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (18) tenglikni $\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi uchun ta'rif sifatida qabul qilish mumkin.

$\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ absolut uzluksiz tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda

$$F_{\xi_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{x_i}p_{\xi_i}(x)dx;\ \ i=1,2,...,n$$

tenglikdan (18) ga ko'ra

$$F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)...F_{\xi_n}(x_n)=$$
$$\int_{-\infty}^{x_1}p_{\xi_1}(x)dx\int_{-\infty}^{x_2}p_{\xi_2}(x)dx...\int_{-\infty}^{x_n}p_{\xi_n}(x)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n}p_{\xi_1}(u_1)p_{\xi_2}(u_2)...p_{\xi_n}(u_n)du_1du_2...du_n.$$

Aksincha,

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n}p_{\xi_1}(u_1)p_{\xi_2}(u_2)\ldots p_{\xi_n}(u_n)du_1du_2\ldots du_n$$

munosabatdan (18) tenglikka kelamiz.

Shunday qilib, $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n$ – absolut uzluksiz tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun n o'lchovli tasodifiy vektor $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ absolut uzluksiz bo'lib,

$$p_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)\ldots p_{\xi_n}(x_n)$$

tenglikning o'rinli ekanligi zarur va yetarli ekan.

Diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun

$$P\left(\left\{\xi_1=x_1^{(k)},\xi_2=x_2^{(k)},\ldots,\xi_n=x_n^{(k)}\right\}\right)=$$
$$=P\left(\left\{\xi_1=x_1^{(k)}\right\}\right)P\left(\left\{\xi_2=x_2^{(k)}\right\}\right)\cdots P\left(\left\{\xi_n=x_n^{(k)}\right\}\right)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli ekanligini tekshirish qiyinchilik tug'dirmaydi.

Tasodifiy miqdorlar yoki tasodifiy hodisalarning bog'liqsizligini formal ta'rifi sababli bog'liq bo'lmagan hodisalarga mansublilik ma'nosidagi real bog'liqsizlik tushunchasiga nisbatan ancha keng. Shu sababli bog'liqlik yo'q deyishga hech qanday asosimiz bo'lmagan hollarda ham "matematik" bog'liqsizlik o'rinli bo'lishi mumkin.

12-misol. $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ – ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor bo'lib,

$$P(\{\xi_1=1,\xi_2=1\})=P(\{\xi_1=-1,\xi_2=1\})=P(\{\xi_1=1,\xi_2=-1\})=$$
$$=P(\{\xi_1=-1,\xi_2=-1\})=1/4$$

bo'lsin. U holda

$$P(\{\xi_1=\varepsilon_1,\xi_1\xi_2=\varepsilon_2\})=P(\{\xi_1=\varepsilon_1,\xi_2=\varepsilon_2/\varepsilon_1\})=1/4=$$
$$=P(\{\xi_1=\varepsilon_1\})P(\{\xi_1\xi_2=\varepsilon_2\}),\varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm 1,$$

tenglikdan ξ_1 va $\xi_1\xi_2$, garchan ular tuzilishiga ko'ra bog'liqli bo'lsalar ham, bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligi kelib chiqadi.

7-§. Tasodifiy miqdorning funksiyalari

$g(x)$ funksiya R da aniqlangan bo'lsin. $g^{-1}(B)$ orqali $B \subset R$ to'plamning proobrazini belgilaylik, ya'ni $g^{-1}(B) = \{x \in R : g(x) \in B\}$.

10-ta'rif. Agar ixtiyoriy Borel to'plami $B \in B(R)$ uchun $g^{-1}(x)$ proobraz ham Borel to'plamidan iborat bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya Borel funksiyasi deyiladi.

R da aniqlangan uzluksiz va bo'lakli uzluksiz funksiyalar Borel funksiyalariga misol bo'ladi.

2-teorema. $g(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ Borel funksiyalaridan iborat bo'lib, ξ, ξ_1 va ξ_2 lar $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda ushbu ta'kidlar o'rinli:

1. $\eta = g(\xi)$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor.

2. Agar ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\eta_1 = g_1(\xi_1)$ va $\eta_2 = g_2(\xi_2)$ tasodifiy miqdorlar ham bog'liqsiz bo'ladi.

Isboti. 1. $\eta = \eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ ni murakkab funksiya deb qaraymiz. $B \in B(R)$ bo'lsin. $g(x)$ Borel funksiyasi bo'lgani uchun $g^{-1}(B) = B_1 \in B(R)$ munosabat o'rinli. ξ – $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lgani uchun $\xi^{-1}(B_1) \in B(R)$, demak $\eta^{-1}(B) = \xi^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$, ya'ni η -$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor.

2. $B_1, B_2 \in B(R)$ – ixtiyoriy Borel to'plamlari bo'lsin. U holda

$$P(\{\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2\}) = P(\{g_1(\xi_1) \in B_1, g_2(\xi_2) \in B_2\}) =$$
$$= P(\{\xi_1 \in g_1^{-1}(B_1), \xi_2 \in g_2^{-1}(B_2)\})$$

tenglik o'rinli. Bundan, $g_1^{-1}(B_1)$ va $g_2^{-1}(B_2)$ Borel to'plamlari bo'lganligi va ξ_1, ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligini hisobga olsak,

$$P(\{\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2\}) = P(\{\xi_1 \in g_1^{-1}(B_1)\})P(\{\xi_2 \in g_2^{-1}(B_2)\}) =$$
$$= P(\{g_1(\xi_1) \in B_1\})P(\{g_2(\xi_2) \in B_2\}) = P(\{\eta_1 \in B_1\})P(\{\eta_2 \in B_2\})$$

munosabat kelib chiqadi. Demak, η_1 va η_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz. Teorema isbotlandi.

13-misol. Agar $g(x)$ funksiya monoton o'suvchi funksiya bo'lib, $g^{-1}(x)$ uning teskari funksiyasi bo'lsa, u holda

$$F_\eta(x) = F_{g(\xi)}(x) = P(\{g(\xi) \le x\}) = P(\{\xi \le g^{-1}(x)\}) = F_\xi(g^{-1}(x)). \quad (19)$$

Bu tenglikdan, agar $F_\xi(x)$ uzluksiz taqsimot funksiya bo'lsa, u holda $g(x) = F_\xi(x)$ deb olib, $\eta = F_\xi(\xi)$ ning $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor ekanligini keltirib chiqaramiz. Aksincha, η $[0,1]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, $\xi = F^{-1}(x)$ tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega ekan. Demak, biz tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor yordamida oldindan berilgan taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni qurish imkoniga egamiz.

Agar $g(x) = bx + a, b > 0$ bo'lsa, u holda (19) tenglikdan $F_{b\xi+a}(x) = F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)$ munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabatdan biz normal va Koshi taqsimot funksiyalarini ko'rganda foydalangan edik.

Agar $g(x)$ funksiya qat'iy o'suvchi funksiya bo'lib, differensiallanuvchi va $p(x) - \xi$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'lsa, u holda $\eta = g(x)$ tasodifiy miqdor ham absolut uzluksiz bo'lib,

$$p_\eta(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} p_\xi(g^{-1}(x))$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglik (19) tenglikning har ikki tomonidan hosila olib topiladi.

$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ lar *(Ω,𝒜,P)* ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar va $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ – Borel σ-algebrasiga nisbatan o'lchovli funksiya, ya'ni ixtiyoriy Borel to'plami $B \in B(R^n)$ uchun

$$g^{-1}(B) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n; \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B\}$$

proobraz R^n dagi Borel to'plamidan iborat bo'lsin (10-ta'rifga qaralsin). U holda Ω da aniqlangan $\eta = g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $B \in B(R)$ uchun $g^{-1}(B) \in B(R)$ munosabatdan

$$\{\omega; \eta(\omega) \in B\} = \{\omega; g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in B\} = \{\omega; (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in g^{-1}(B)\} \in B(R)$$

kelib chiqadi.

Kompozitsiya formulalari. Agar $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ absolut uzluksiz taqsimotga ega bo'lsa, u holda $\eta = g(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F_\eta(x) = P(\{g(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\le x\}) = \\ = \int\cdots\int_{g(x_1,...,x_n)\le x} p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n \qquad (20)$$

formula orqali topish mumkin.

ξ_1, ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar va $g(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ bo'lgan muhim xususiy holni ko'ramiz. $p_{\xi_1}(x), p_{\xi_2}(x)$ mos zichlik funksiyalar bo'lsin. U holda ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz bo'lgani uchun

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)$$

tenglik o'rinli. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ yig'indining taqsimot funksiyasini (20) formula orqali topamiz:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P(\{\xi_1+\xi_2\le x\}) = \iint_{x_1+x_2\le x} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \iint_{x_1+x_2\le x} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{x-x_1} p_{\xi_2}(x_2)dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-x_1)p_{\xi_1}(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1)\int_{-\infty}^{x} p_{\xi_2}(x_2-x_1)dx_2dx_1.$$

Ushbu $F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-x_1)p_{\xi_1}(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-x_1)dF_{\xi_1}(x_1)$

va

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x-x_1)dx_1$$

Formulalarga **kompozitsion** yoki **yig'ish formulalari** deyiladi va mos ravishda $F_{\xi_1+\xi_2} = F_{\xi_1} * F_{\xi_2}$ va $p_{\xi_1+\xi_2} = p_{\xi_1} * p_{\xi_2}$ kabi belgilanadi.

14-misol. ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, mos ravishda (a_1,σ_1^2) va (a_2,σ_2^2) parametrli normal taqsimotga ega bo'lsin. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz.

Yechish. Kompozitsion formuladan foydalanamiz:

$$p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(x-u)du=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x-u-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}du$$

munosabatdan

$$\frac{(u-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-u-a_2)^2}{\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u-\frac{a_1\sigma_2^2+(x-a_2)\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2+\frac{(x-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

tenglikka asosan

$$p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\sigma^2(u-A)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}du, \qquad (21)$$

Bu yerda $a=a_1+a_2, \sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$ va $A=\frac{a_1\sigma_2^2+(x-a_2)\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$.

$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{\sigma^2(u-A)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right\}$ funksiya ixtiyoriy fiksirlangan x uchun $\left(A,\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\right)^2\right)$ parametrli normal zichlik funksiya bo'lgani uchun undan $(-\infty,+\infty)$ oralig'ida olingan integral birga teng va (21) tenglikdan

$$p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, bog'liqsiz normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig'indisi yana normal taqsimotga ega ekan.

II BOBGA DOIR MASALALAR

1. Tanga uning gerb tomoni tushgunga qadar tashlanadi. Elementar hodisalar fazosi Ω aniqlansin. $\xi=\xi(\omega)$ – tanga tashlashlar sonining taqsimot qonuni topilsin.

2. Diskret ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti $P(\xi=k)=\frac{C}{k(k+1)(k+2)}$ formula orqali aniqlanadi. $k=1,2,\dots$

Quyidagilarni toping: a) o'zgarmas C sonni; b) $P(\xi \geq 3)$ ni; c) $P(n_1 \leq \xi_1 \leq n_2)$ ni.

3. B tasodifiy nuqta markazi $A(0;a)$ bo'lgan $x^2+(y-a)^2=r^2$ aylanada tekis taqsimlangan, $C=(\xi,0)$ tasodifiy nuqta esa A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan absissa o'qining kesishgan nuqtasidan iborat. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va taqsimot zichligi topilsin (ξ ning taqsimoti Koshi taqsimoti deyiladi).

4. Indikatorlarning quyidagi xossalarini tekshiring $I_A = I_A(\omega)$:

$$I_\emptyset = 0,\ I_\Omega = 1,\ I_A + I_{\bar{A}} \equiv 1,\ I_A I_B = I_{AB},\ I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{AB},$$

$$I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - I_{A_k}\right),\ I_{\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - I_{A_k}\right),\ I_{A\Delta B} = \left(I_A - I_B\right)^2.$$

5. $0,1,2,...$ qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdor geometrik taqsimotga ega bo'lishi uchun ushbu

$$P\{\xi = k + r / \xi \geq k\} = P\{\xi = r\},\ (r \geq 1)$$

xossaning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

6. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar $F_i(x) = P\left(\xi_i \leq x\right)$, $i = 1,2,...,n$ va $\xi = \max\{\xi_1,...,\xi_n\}$, $\eta = \min\{\xi_1,...,\xi_n\}$ bo'lsin. ξ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari topilsin.

7. ξ tasodifiy miqdor o'zi bilan bog'liqsiz bo'lishi uchun $P(\xi = const) = 1$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

8. Qanday shart bajarilganda ξ va $\sin\xi$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'ladi?

9. $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{A}$ esa $[0,1]$ oraliqdagi Borel to'plamlarining $\sigma-$ algebrasi va $P-$ Lebeg o'lchovi bo'lsin. $\left(\Omega, \mathfrak{A}, P\right)-$ ehtimollar fazosida $\xi_n = \omega^n, (n = 1,2,...)$ tenglik yordamida $\xi_1, \xi_2, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi aniqlangan. Agar $A_n = \{\omega \in \Omega : \xi_n \leq 1/n\}$ bo'lsa, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ va $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ hodisalar topilsin.

10. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ – ehtimollar fazosi $[0,1]$ kesma, undagi Borel to'plamlarining σ-algebrasi va Lebeg o'lchovidan tashkil topgan. Agar

a) $\xi = \begin{cases} 1/4, \omega \in [0;1/4), \\ 1/2, \omega \in [1/4;3/4), \text{bo'lsa}, \\ 1, \omega \in [3/4;1] \end{cases}$

b) $\xi = \omega/2$ bo'lsa; c) $\xi = 1/2$ bo'lsa, ξ yaratgan σ-algebrani tasvirlang.

11. ξ va η bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $F(x)$ va $G(x)$ mos ravishda ularning taqsimot funksiyalari bo'lsin. $\xi\eta$ va ξ/η tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini toping.

12. ξ va η tasodifiy miqdorlar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ taqsimot zichliklariga, $F(x)$ va $G(x)$ taqsimot funksiyalarga ega. $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2)$ tasodifiy vektor. $p(x,y) = f(x)g(y)(1 + r(F(x), G(y)))$, taqsimot zichligiga ega, bu yerda $r(x,y)$ funksiya

$$\min_{\substack{0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1}} r(u,v) \ge -1, \quad \int_0^1 r(u,v)dv = \int_0^1 r(u,v)du = 0$$

shartlarni qanoatlantiradi. ς vektor komponentalari bo'lgan ς_1 va ς_2 tasodifiy miqdorlarning taqsimot zichliklari topilsin.

13. $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ to'rtburchakdan tasodifan, tekis taqsimotga ega bo'lgan nuqta tanlanadi. Uning (ξ, η) koordinatalari bog'liqsiz ekanligi isbotlansin.

14. $x^2 + y^2 \le R$ doiradan tasodifan, tekis taqsimotga ega bo'lgan nuqta tanlanadi. Uning (ξ, η) koordinatalari bog'liqli ekanligini ko'rsating.

15. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ – ehtimollar fazosi bo'lib, bunda Ω – har biri musbat ehtimolga ega bo'lgan n ta nuqtadan iborat. Bu fazoda aniqlangan va har qaysisi n ta turli qiymatlarni qabul qiluvchi ikkita bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar mavjud emasligi isbotlansin.

16. $\Omega = [0,1]$ oraliq, $\mathfrak{A}$ uning Borel to'plamlaridan tashkil topgan σ – algebrasi, P – Lebeg o'lchovi bo'lsin. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ – ehtimollar fazosida bir ehtimol bilan o'zgarmas songa teng va $\xi(\omega) = \omega$ bilan bog'liqsiz bo'lgan tasodifiy miqdor mavjudmi?

TEST SAVOLLARI

1. ξ – simmetrik tangani 3 marta tashlanganda tushgan gerblar soni bo'lsa, ξ ning taqsimot qonuni yozilsin.

A. $\begin{array}{lcccc} \xi: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P_\xi: & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$ B. $\begin{array}{lcccc} \xi: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P_\xi: & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$

C. $\begin{array}{lcccc} \xi: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P_\xi: & 1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \end{array}$ D. $\begin{array}{lccc} \xi: & 1 & 2 & 3 \\ P_\xi: & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}$

2. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi va taqsimot funksiyasini toping.

A. $f(x)=\begin{cases} 0, x\overline{\in}[a,b], \\ 1, x\in[a,b] \end{cases}$, $F(x)=\begin{cases} 0, x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b, \\ 1, x>b \end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases} 0, x\overline{\in}[a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b] \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0, x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b, \\ 1, x>b \end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases} 0, x\overline{\in}[a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b] \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ x, 0\le x\le 1, \\ 1, x>1 \end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases} 0, x\overline{\in}[0,1], \\ 1, x\in[0,1] \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ x, 0\le x\le 1, \\ 1, x>1. \end{cases}$

3. Qanday shart bajarilsa ξ tasodifiy miqdor o'zi bilan bog'liqsiz bo'ladi?

A. Har doim B. Hech qachon

C. Agar $P(\xi = const)=1$ bo'lsa D. To'g'ri javob yo'q.

4. $I_A = I_A(\omega) - A$ hodisaning indikatori. Noto'g'ri munosabatni ko'rsating.

A. $I_{A\cap B} \ne I_A \cdot I_B$

B. $I_A(\omega)\le I_B(\omega)$ tengsizlik barcha $\omega\in\Omega$ lar uchun $A\subset B$ bo‘lganda va faqat shundagina bajariladi.

C. $I_{A\cup B}=I_A+I_B-I_{A\cap B}$

D. $I_\varnothing(\omega)\equiv 0; I_\Omega(\omega)\equiv 1$.

5. Mumkin bo‘lgan qiymatlari ayrim ajralgan sonlar bo‘lib, ularni tayin ehtimollar bilan qabul qiladigan miqdorga ... deyiladi.

A. singulyar tasodifiy miqdor B. diskret tasodifiy miqdor

C. uzluksiz tasodifiy miqdor D. normal taqsimot.

6. Taqsimot funksiyaning qiymatlari qaysi oraliqda o‘zgaradi?

A. (0,1) B. (0,2) .C. $(-\infty,+\infty)$ D. [0,1].

7. X uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa, quyidagi tengsizliklarning qaysinisi to‘g‘ri?

A. $P(a<x<b)=F(b)+F(a)$ B. $P(a<x<b)=F(b)/F(a)$

C. $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$ D. $P(a<x<b)=F(b)F(a)$.

8. Taqsimot funksiya uchun quyidagi xossalardan qaysi biri o‘rinli?

A. uzluksiz B. o‘suvchi C. davriy D. chegaralangan.

9. Agar diskret tasodifiy miqdor uchun $P\{\xi=k\}=\frac{c}{n+2}$, $k=1,2,..,n-1$ bo‘lsa, o‘zgarmas c ning qiymatini toping.

A. $\frac{n+2}{n}$ B. $\frac{n}{n+2}$ C. $\frac{n+2}{n-1}$ D. $\frac{2}{n}$.

10. Tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le 0\\ Ce^{-\lambda x}, & \text{agar } x>0,\end{cases}\quad \lambda>0$$

bo‘lsa, o‘zgarmas son C ning qiymatini toping.

A. $\frac{1}{\lambda}$ B. λ C. $\frac{1}{\lambda^2}$ D. $\frac{1}{\lambda+1}$.

11. I_A – A hodisa indikatori. To‘g‘ri tenglikni ko‘rsating.

A. $I_\varnothing=1$ B. $I_\varnothing=0$ C. $I_\varnothing>0$ D. $I_\varnothing>1$.

12. $I_A=I_A(\omega)$ – A hodisaning indikatori. To‘g‘ri munosabatni ko‘rsating.

A. $I_{A\cup B}=I_A-I_B+I_{A\cap B}$ B. $I_{A\Delta B}=I_A+I_B$

C. $I_{A\cup B}=I_A+I_B-I_{A\cap B}$ D. $I_\varnothing=1$.

13. $(R, B(R))$ o'lchovli fazoda aniqlangan singulyar ehtimol o'lchovining ta'rifini ko'rsating.

A. Mos taqsimot funksiyasi uzluksiz, lekin uning o'sish nuqtalaridan tashkil topgan to'plamning Lebeg o'lchovi nolga teng

B. Mos taqsimot funksiyasi uzluksiz, lekin absolut uzluksiz bo'lmagan ehtimol o'lchovi

C. Mos taqsimot funksiyasi diskret, ammo uning o'sish nuqtalaridan tashkil topgan to'plam musbat Lebeg o'lchoviga ega

D. Mos taqsimot funksiyasi uzluksiz va uning o'sish nuqtalaridan tashkil topgan to'plamning Lebeg o'lchovi birga teng.

14. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ – ehtimollar fazosi. To'g'ri ta'kidni ko'rsating.

A. Ω da aniqlangan va diskret qiymatlarni qabul qiluvchi har qanday funksiya tasodifiy miqdor bo'lmaydi

B. Har qanday $\mathfrak{A}$ o'lchovli funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi

C. Ω da aniqlangan har qanday funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi

D. Ω da aniqlangan har qanday $(R, B(R))$ o'lchovli funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi.

15. Qanday ξ tasodifiy miqdor o'zi bilan bog'liqsiz bo'ladi?

A. ξ har doim o'zi bilan bog'liqli

B. Agar u uzluksiz bo'lsa

C. Agar $P(\xi = const) = 1$ bo'lsa

D. To'g'ri javob yo'q.

16. Agar ξ va η bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $p_1(x)$ va $p_2(x)$ lar mos ravishda ularning zichlik funksiyalari bo'lsa, $\xi + \eta$ ning zichlik funksiyasini toping.

A. $p_{\xi+\eta}(x) = p_1(x)p_2(x)$ B. $p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x+y)p_2(x)dy$

C. $p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y-x)p_2(y)dy$

D. $p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x-y)p_2(y)dy$.

17. $(\Omega, \mathcal{F}_a, P)$ – ixtiyoriy ehtimol fazosi bo'lsin. Ushbu $\xi : (\Omega, \mathcal{F}_a) \to (R, B(R))$ uchun qanday shart bajarilsa, u tasodifiy miqdor deyiladi?

A. o'lchovli funksiya   B. sodda funksiya

C. uzluksiz funksiya   D. o'zaro bir qiymatli funksiya.

18. $x(t)$ fazodagi ushbu $P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ ko'rinishda aniqlanadigan P_ξ ehtimol o'lchovi ξ tasodifiy miqdorning $(R, B(R))$ fazodagi ... deyiladi. ta'rifni to'ldiring.

A. zichlik funksiyasi   B. taqsimot funksiyasi

C. Borel funksiyasi   D. ehtimollik taqsimoti.

19. Agar $F(x) = P(\xi \le x)$, $x \in R - \xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsa, u holda $P(\xi > x)$ ehtimolni $F(x)$ yordamida ifodalang.

A. $F(x)$ B. $F(x-0)$ C. $1 - F(x)$ D. $F(x+0)$.

20. Chekli yoki sanoqli sondagi $\{x_k\}$ qiymatlarni $\{p_k\}\left(\sum\limits_k p_k = 1\right)$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor ... deyiladi. Ta'rifni to'ldiring.

A. uzluksiz   B. absolut uzluksiz   C. singulyar   D. diskret.

21. Taqsimot funksiyasini $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor ... tasodifiy miqdor deyiladi. ta'rifni to'ldiring.

A. absolut uzluksiz   B. uzluksiz   C. diskret   D. singulyar.

22. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimollar fazosi. To'g'ri ta'kidni ko'rsating.

A. Ω da aniqlangan har qanday $(R, B(R))$ o'lchovli funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi

B. Ω da aniqlangan har qanday funksiya tasodifiy funksiya bo'ladi

C. Har qanday $\mathcal{A}$ o'lchovli funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi

D. To'g'ri javob yo'q.

III BOB. TASODIFIY MIQDORNING SONLI XARAKTERISTIKALARI. MATEMATIK KUTILMA

Har bir tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi orqali to'la aniqlanishini biz avvalgi bobda ko'rgan edik. Kuzatuvchi nuqtayi nazaridan, bir xil taqsimot funksiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni, garchan ular turli ehtimollar fazosida aniqlangan bo'lib, turli hodisalarni tasvirlasalar ham bir-biridan ajratib bo'lmaydi. Ammo taqsimot funksiyalari turlicha bo'lgan tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lib, ularni taqqoslash talab qilinsa, ma'lum qiyinchiliklar paydo bo'ladi. Ba'zi hollarda bunday qiyinchiliklar oson yechiladi. Masalan, agar Bernulli sxemasida bizni yutuqlar soni qiziqtirayotgan bo'lsa, u holda ikkita Bernulli sxemasidan qaysi birida yutuqning ehtimoli katta bo'lsa, xuddi shunisini tanlash kerak ekanligi tabiiy. Umumiy holda esa ikkita taqsimot funksiyani qanday taqqoslash tushunarli emas va shuning uchun ham har bir tasodifiy miqdorni biror son (balki bir qancha sonlar) bilan xarakterlash maqsadga muvofiq bo'lib, ular tasodifiy miqdorlarni ma'lum ma'noda tartiblashga sabab bo'lar edi. Tasodifiy miqdorning bunday xarakteristikalaridan biri uning **o'rta qiymati** yoki **matematik kutilmasidir.**

Mazkur bobda biz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini o'rganamiz.

1-§.Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

ξ tasodifiy miqdor chekli sondagi $a_1, a_2, ..., a_r$ qiymatlarni $p_k = P(\xi_k = a_k)$ ehtimollar bilan qabul qilsin. ξ tasodifiy miqdorni n marta o'tkazilgan tajribada kuzataylik va uning bu tajribalarda qabul qilgan qiymatlarini $x_1, x_2, ..., x_n$ orqali belgilaylik. U holda bu kuzatilgan qiymatlarning o'rta qiymatini ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{k_i}{n} = \sum_{i=1}^{r} a_i N_n(\{\xi = a_i\}), \qquad (1)$$

bu yerda k_i va $N_n(A)$ orqali mos ravishda biz o'tkazgan tajribalar seriyasidagi $A=\{\xi=a_i\}$ hodisaning ro'y berishlar soni va chastotasi belgilangan. (1) formulada chastotalarni ehtimollar bilan almashtirib, biz ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (yoki o'rta qiymati) deb ataluvchi ushbu

$$\sum_{i=1}^{r} a_i p_i = M\xi$$

qiymatni hosil qilamiz. Ixtiyoriy diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ham yuqoridagi kabi aniqlanadi.

1-ta'rif. $\{x_k\}$ qiymatlarni p_k ehtimollar bilan qabul qiluvchi ξ diskret **tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi** deb

$$M\xi=\sum_k x_k p_k \tag{2}$$

yig'indiga aytiladi. Shu bilan birga, agar ξ tasodifiy miqdor sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, u holda (2) qator absolut yaqinlashuvchi bo'lishi zarur, aks holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas deb hisoblanadi.

1-izoh. Diskret tasodifiy miqdorni ta'riflashda u qabul qiluvchi qiymatlarining tartibi biz uchun ahamiyatga ega emas, shuning uchun ham (2) qatorning yig'indisi qo'shiluvchilarning tartibiga bog'liq emasligi tabiiy, bu esa qator absolut yaqinlashgandagina o'rinli.

Agar $\xi \geq 0$ bo'lsa, u holda (2) tenglikning o'ng tomonidagi qator yoki absolut yaqinlashadi yoki $+\infty$ ga uzoqlashadi. Oxirgi holda $M\xi=+\infty$ deb hisoblanadi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblashga doir bir qancha misollar ko'ramiz.

1-misol. ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlarni bir xil $p_i=P(\xi=x_i)=\frac{1}{n}$ ehtimollar bilan qabul qilsin. U holda

$$M\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$$

bo'lib, matematik kutilma $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlarning o'rta (arifmetik) qiymatiga teng bo'ladi.

2-misol. $(n;p)$ parametrli binomial taqsimotga ega bo'lgan μ_n tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M\mu_n = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j (1-p)^{n-j} =$$

$$= np\sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np.$$

3-misol. ξ parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. U holda

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} = \lambda.$$

Demak, Puasson taqsimotining matematik kutilmasi uning parametri λ ga teng ekan.

4-misol. p-parametrli geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = pq\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)_q^{1} = pq\left(\frac{1}{1-q}\right)_q^{1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p},$$

$$q = 1-p.$$

ya'ni $M\xi = \frac{1-p}{p}$ ko'rinishga ega.

5-misol. Musbat butun sonlarni qabul qiluvchi ξ-tasodifiy miqdor uchun $p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ bo'lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty$$

va demak, $M\xi = +\infty$.

6-misol. ξ-tasodifiy miqdor $x_k = (-1)^k k$ qiymatlarni $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$ ehtimollar bilan qabul qilsin, $k = 1, 2, \ldots$. U holda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k k\right|\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=+\infty$$

bo'lgani uchun ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas.

2-§. Diskret tasodifiy miqdor matematik kutilmasining asosiy xossalari

$\xi=\xi(\omega)$-$(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. Agar Ω fazoni chekli yoki sanoqli $\Omega=\sum_i A_i$, $A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j$ yig'indi shaklida ifodalash mumkin bo'lib, har bir $A_i\in\mathcal{A}$ hodisada $\xi(\omega)$ o'zgarmas qiymatni qabul qilsa: $\xi(\omega)=x_i, \omega\in A_i$, u holda ξ ***sodda tasodifiy miqdor*** deyiladi.

Tushunarliki, sodda tasodifiy miqdor

$$\xi=\xi(\omega)=\sum_i x_i I_{A_i}(\omega) \qquad 3)$$

ko'rinishda ifodalanadi.

Ixtiyoriy diskret tasodifiy miqdor sodda tasodifiy miqdor va aksincha, har qanday sodda tasodifiy miqdor diskret ekanligini ko'rish qiyin emas.

Haqiqatdan ham, agar diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \ldots$ qiymatlarni qabul qilsa, uni (3) yig'indi shaklida yozish mumkin, bunda $A_i=\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}\in\mathcal{A}$.

1-ta'rifdan sodda tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi=\sum_i x_i P(A_i) \qquad (4)$$

yig'indiga teng ekanligi kelib chiqadi.

Sodda tasodifiy miqdor matematik kutilmasining yuqoridagi (4) formula orqali keltirilgan ta'rifi ma'noli bo'lishi uchun uning to'g'ri ekanligiga, ya'ni $M\xi$, ξ tasodifiy miqdorning faqat o'ziga bog'liq bo'lib, uning (3) ko'rinishida ifodalanishiga bog'liq emasligiga ishonch hosil qilishimiz zarur. $\xi=\xi(\omega)$ sodda tasodifiy miqdor (3) ifodadan tashqari yana boshqa

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_j y_j I_{B_j}(\omega)$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda $\sum_j B_j = \Omega$ va $B_j B_k = \varnothing, j \neq k$.

$C_{ij} = A_i \cap B_j$ deymiz va C_{ij} to'plamda $\xi(\omega)$ miqdorning z_{ij} qiymati bir vaqtning o'zida ham x_i ga, ham y_j ga teng va har qanday i uchun $A_i = \sum_k A_i B_k$ va har bir j uchun $B_j = \sum_i A_i B_j$ bo'lgani sababli

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij})\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij})\right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j).$$

munosabat o'rinli, chunki absolut yaqinlashuvchi qatorning hadlarini ixtiyoriy tartibda yig'ish mumkin.

Endi diskret tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasining asosiy xossalarini keltiramiz.

1-teorema. 1°. Agar ξ va η – diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi$, $M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo'lsa, u holda ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar uchun $a\xi + b\eta$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud bo'lib,

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo'lsa, $M\xi \geq 0$. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo'lib, $\xi \geq \eta$ bo'lsa, u holda $M\xi \geq M\eta$ bo'ladi.

3°. Agar $|\xi| \leq \eta$ bo'lib, $M\eta$ chekli bo'lsa, $M\xi$ ham chekli bo'ladi. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar chekli bo'lsa, u holda $M(\xi + \eta)$ ham chekli.

Isbot. 1°. $\xi(\omega)$ va $\eta(\omega)$ tasodifiy miqdorlar $A_1, A_2, \ldots$ va $B_1, B_2, \ldots$ to'plamlar indikatorlarining chiziqli kombinatsiyalaridan iborat bo'lsin, ya'ni

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \quad \eta(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega).$$

$C_{ij} = A_iB_j$ etib belgilaymiz. $\bigcup_{i,j} A_iB_j = \Omega$ va $\omega \in C_{ij}$ uchun $a\xi(\omega) + b\eta(\omega) = ax_i + by_j$ tenglik o'rinli. Bundan matematik kutilmaning ta'rifiga ko'ra:

$$M(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(ax_i + by_j)P(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(ax_i + by_j)P(A_iB_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} ax_i \sum_{j=1}^{r} P(A_iB_j) + \sum_{j=1}^{\infty} by_j \sum_{i=1}^{\infty} P(A_iB_j) = a\sum_{i=1}^{r} x_iP(A_i) +$$

$$+ b\sum_{j=1}^{\infty} y_jP(B_j) = aM\xi + bM\eta.$$

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo'lsa, (3) munosabatdan $x_i \geq 0$ bo'lgani sababli $M\xi \geq 0$. Agar $\xi \geq \eta$ bo'lsa, u holda $\xi = \eta + (\xi - \eta)$ tenglikdan 1°-xossaga ko'ra $M\xi = M\eta + M(\xi - \eta)$ bo'lgani sababli $M\xi \geq M\eta$ kelib chiqadi, chunki $\xi \geq \eta$ tengsizlikdan $M(\xi - \eta) \geq 0$.

3°. $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \eta = \sum_{j=1}^{r} y_j I_{B_j}(\omega)$ va $|\xi| \leq \eta$ bo'lsin. U holda $\omega \in A_iB_j$ munosabatdan ixtiyoriy i, j uchun $|x_i| \leq y_j$ ekanligi kelib chiqadi. Shu bilan birga

$$\sum_{i=1}^{r} P(A_iB_j) = P(B_j) \text{ va } \sum_{j=1}^{\infty} P(A_iB_j) = P(A_i)$$

tengliklar o'rinli. Bundan foydalanib va absolut yaqinlashuvchi qatorning hadlarini ixtiyoriy tartibda yig'ish mumkin ekanligini hisobga olib, quyidagini topamiz:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_iP(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\sum_{j=1}^{\infty} P(A_iB_j) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{r} P(A_iB_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_jP(B_j) = M\eta < \infty.$$

3-§. Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (umumiy hol)

2-teorema. Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ – diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashsa, u holda $M\xi_n$ matematik kutilmalar ketma-ketligi Koshi ma'nosida fundamental bo'ladi.

Isboti. ξ – diskret tasodifiy miqdor uchun

$$|M\xi| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i)\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i) \le \sup_i |x_i| \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) =$$
$$\sup_i |x_i| = \sup_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega)| \tag{5}$$

munosabat o'rinli. Bundan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$|M\xi_n - M\xi_m| = |M(\xi_n - \xi_m)| \le \sup_{\omega\in\Omega} |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \to 0, n, m \to \infty.$$

Demak, $\{M\xi_n\}$ ketma-ketlik fundamental ekan. Teorema isbotlandi.

3-ta'rif. $\xi = \xi(\omega) - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor, $\xi_n(\omega)$ esa $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashuvchi diskret tasodifiy miqdorlarning ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsin. U holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb ushbu

$$M\xi = \lim_{n\to\infty} M\xi_n$$

qiymatga aytiladi.

2-izoh. Yetarlicha katta n sonidan boshlab $M\xi_n$ matematik kutilmalar bir vaqtda yoki mavjud, yoki mavjud emasligi ravshan. Oxirgi holda $M\xi$ mavjud emas deyiladi.

ξ tasodifiy miqdorning yuqorida keltirilgan ta'rifi ma'noli ekanligini ko'rsatamiz.

Birinchidan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdor uchun unga tekis yaqinlashuvchi diskret tasodifiy miqdorlarning ketma-ketligi mavjud.

Haqiqatan ham, har qanday natural n va butun k sonlar uchun

$$A_k^{(n)} = \left\{\omega; \frac{k}{n} \le \xi(\omega) < \frac{k+1}{n}\right\} = \left\{\frac{k}{n} \le \xi < \frac{k+1}{n}\right\} = \xi^{-1}\left\{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right\} \in \mathcal{A}$$

va $\sum_{-\infty}^{\infty} A_k^{(n)} = \Omega$ munosabatlar o'rinli.

$$\xi_n(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}I_{A_k^{(n)}}(\omega) \qquad (6)$$

deb belgilaymiz. U holda $\left|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\right|\le\frac{1}{n}$.

Ikkinchidan, agar $\xi_n(\omega)$ va $\eta_n(\omega)$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}M\xi_n=\lim_{n\to\infty}M\eta_n$$

tenglik o'rinli, ya'ni $M\xi$, ξ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashuvchi $\xi_n(\omega)$ ketma-ketlikni tanlashga bog'liq emas.

Haqiqatan ham, (5) tenglikdan

$$0\le\left|M\xi_n-M\eta_n\right|=\left|M(\xi_n-\eta_n)\right|\le\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi_n(\omega)-\eta_n(\omega)\right|\le$$

$$\le\left(\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\right|+\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi(\omega)-\eta_n(\omega)\right|\right)\to0,\ n\to\infty$$

munosabatning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Matematik kutilmaning ta'rifidan va 1-teoremadan bevosita ushbu teorema kelib chiqadi.

3-teorema. 1°. ξ va η tasodifiy miqdorlar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalarga ega bo'lib, a va b – ixtiyoriy sonlar bo'lsin. U holda $M(a\xi+b\eta)$ mavjud bo'lib,

$$M(a\xi+b\eta)=aM\xi+bM\eta$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2°. Agar $\xi\ge0$ bo'lsa, u holda $M\xi\ge0$[1]. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo'lib, $\xi\ge\eta$ bo'lsa, u holda $M\xi\ge M\eta$ bo'ladi.

3°. Agar $M\xi$ chekli bo'lsa, u holda $M\eta$ ham chekli bo'ladi. Agar $|\xi|\le\eta$ bo'lib $M\eta$ chekli bo'lsa, u holda $M\xi$ ham chekli bo'ladi.

Bu teorema diskret tasodifiy miqdorlar uchun isbotlangan 1-teoremaning analogidan iborat.

---

[1] Musbat tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi har doim mavjud.

4-teorema (matematik kutilmaning multiplikativlik xossasi). Agar ξ va η bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar chekli bo'lsa, u holda

$$M\xi \cdot \eta = M\xi \cdot M\eta$$

tenglik o'rinli.

Isboti. ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsin. Agar ξ va η diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{A_k}(\omega)$, $\eta = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega)$ ko'rinishga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy k, j butun sonlar uchun $P\left(A_k B_j\right) = P(A_k) \cdot P(B_j)$ tenglik o'rinli. Demak,

$$M\xi \cdot \eta = M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_k y_j I_{A_k B_j}(\omega)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_j P\left(A_k B_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_k y_j P(A_k) P(B_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k) \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j) = M\xi \cdot M\eta.$$

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda (6) formula orqali ifodalangan $\xi_n(\omega)$ va

$$\eta_n(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{j}{n} I_{B_j^{(n)}}(\omega), \quad B_j^{(n)} = \left\{\omega; \frac{j}{n} \le \eta(\omega) < \frac{j+1}{n}\right\}$$

diskret tasodifiy miqdorlar ham bog'liqsiz bo'ladi. Demak, yuqorida isbotlanganiga ko'ra, $M\xi_n\eta_n = M\xi_n\eta_n$ tenglik o'rinli. $\xi_n(\omega)$ ketma-ketlik $\xi(\omega)$ ga $\eta_n(\omega)$ ketma-ketlik $\eta(\omega)$ga tekis yaqinlashgani uchun $\xi_n(\omega) \cdot \eta_n(\omega)$ ketma-ketlik $\xi(\omega) \cdot \eta(\omega)$ga tekis yaqinlashadi. Demak, matematik kutilmaning ta'rifiga ko'ra

$$M\xi \cdot \eta = \lim_{n\to\infty} M\xi_n\eta_n = \lim_{n\to\infty} M\xi_n\eta_n = \lim_{n\to\infty} M\xi_n \lim_{n\to\infty} M\eta_n = M\xi \cdot M\eta.$$

Teorema isbot bo'ldi.

1-natija. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular chekli matematik kutilmalarga ega bo'lsalar, u holda

$$M\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdots M\xi_n$$

tenglik o'rinli.

5-teorema (Monoton yaqinlashish haqidagi teorema). $\xi_n(\omega)$ – manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $\xi_n \le \xi_{n+1}, n=1,2,...$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. Agar $M\xi_n$ matematik kutilmalar mavjud bo'lib, $\sup\limits_n M\xi_n < \infty$ bo'lsa, u holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi chekli bo'lib, $M\xi = \lim\limits_{n\to\infty} M\xi_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $0 \le \xi_n(\omega) \le \xi(\omega)$ bo'lgani uchun 3 teoremaning 2-xossasiga ko'ra $0 \le M\xi_n \le M\xi$ va

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n \le M\xi \quad . \tag{7}$$

$A_{nj}^{(k)} = \left\{\omega; \frac{j-1}{k} \le \xi_n < \frac{j}{k}\right\}$ va $\xi_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{k} I_{A_{nj}^{(k)}}(\omega)$ bo'lsin. U holda $\xi_{nk} \le \xi_{n,k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{nk} = \xi_n$ munosabatlar o'rinli. $\eta_k = \max\limits_{1<n<k}\xi_{nk}$ sodda tasodifiy miqdor va $0 \le \eta_k = \max\limits_{1<n\le k}\xi_{nk} \le \max\limits_{1<n\le k+1}\xi_{n,k+1} = \eta_{k+1}$ bo'lgani uchun η_k monoton o'sadi. $\eta = \lim\limits_{k\to\infty}\eta_k$ bo'lsin. U holda har bir k uchun $\eta_k \le \xi_k$ ekanligidan

$$\lim_{k\to\infty} M\xi_k = M\eta \le \lim_{k\to\infty} M\xi_k . \tag{8}$$

Shu bilan birga, $n \le k$ bo'lsa, $\xi_{nk} \le \eta_k \le \eta$ va bundan $k \to \infty$ deb barcha n lar uchun $\xi_n \le \eta$ tengsizlikning o'rinli ekanligini hosil qilamiz. Demak, $\xi \le \eta$ va $M\xi \le M\eta$ tengsizliklar, (7) va (8) munosabatlar bilan birga teoremani isbotlaydi.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$

Formula orqali ifodalanishi bizga ma'lum. Quyida absolut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

6-teorema. Agar ξ tasodifiy miqdor $p_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_\xi(x)\,dx < \infty$$

bo'lsa, u holda

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x)dx \tag{9}$$

tenglik o'rinli.

Isboti. Biz $p_{\xi}(x)$ Riman ma'nosida integrallanuvchi va (9) tenglikning o'ng tomonida Riman xosmas integrali turibdi deb, faraz qilamiz (teoremaning isboti Lebeg integrali uchun ham o'rinli).

$A_k = \left\{ \frac{k}{2^n} < \xi(\omega) \le \frac{k+1}{2^n} \right\}$ hodisalar va $\xi_n = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{A_k}(\omega)$ sodda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz. U holda $\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi$ tenglik o'rinli. Shu bilan birga

$$M\xi_n = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P(A_k) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(u)du$$

va

$$\int_{-n}^{n} xp(x)dx = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} xp(x)dx \le \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k+1}{2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{n} + \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(x)dx \le \frac{1}{n} + \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

munosabatlar o'rinli.

$$\int_{-n}^{n} xp(x)dx - \frac{1}{2^n} \le M\xi_n \le \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

tengsizliklardan $n \to \infty$ da (9) tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi absolut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblashga doir bir nechta misollar keltiramiz.

7-misol. $\xi - [a,b]$ oralig'ida tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu holda $x < a$ yoki $x > b$ bo'lsa, $p(x) = 0$ ekanligini hisobga olsak,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

Kutganimizdek, $M\xi$ soni $[a,b]$ oraliqning o'rtasi bilan ustma-ust tushar ekan.

8-misol. (a,σ) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\phi_{a,\sigma}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Oxirgi integralda $y = {(x-a)}/{\sigma}$ almashtirish bajarib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma y + a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \cdot y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy + a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy + a \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy = a.$$

Bu yerda birinchi integralda integrallanuvchi funksiya toq funksiya bo'lgani sababli nolga teng, ikkinchisi esa standart normal zichlik funksiyadan olingan integral bo'lgani uchun birga teng. Shunday qilib, $M\xi = a$, ya'ni normal taqsimotning birinchi parametri uning matematik kutilmasidan iborat ekan.

9-misol. ξ tasodifiy miqdor Koshi zichlik funksiyasiga ega bo'lsin:

$$K(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

U holda $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|dx}{\pi(1+x^2)} = \infty$ bo'lgani uchun, ξ ning matematik kutilmasi mavjud emas.

10-misol. (α,λ)-parametrli gamma taqsimotning matematik kutilmasini hisoblaymiz. Gamma taqsimotning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0 \end{cases}$$

bo'lgani sababli

$$M\xi = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \cdot \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

4- §. Tasodifiy miqdor funksiyasining matematik kutilmasi

ξ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor bo'lib, $g(x)$ esa R da aniqlangan biror Borel funksiyasi va $\eta = g(\xi)$ bo'lsin. U holda η ham $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo'ladi (II bob, 2-teorema). Uning matematik kutilmasini hisoblash uchun II bob 7-§ dagi formulalardan η tasodifiy miqdorning taqsimotini topib, so'ngra avvalgi paragrafdagi ta'rifdan foydalanish mumkin. Ammo biz boshqa, qulayroq usulni qo'llaymiz.

Avval $x_1, x_2, \ldots$ qiymatlarni $p_k = P(\xi = x_k)$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi ξ diskret tasodifiy miqdorni ko'ramiz. Bu holda $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdor $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_k), \ldots$ qiymatlarni p_k ehtimollar bilan qabul qilishi bizga ma'lum. Shuning uchun ham, agar

$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| p_i < \infty$$

shart bajarilsa, u holda η tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$$

formula orqali aniqlanadi.

Endi ξ tasodifiy miqdor absolut uzluksiz bo'lib, $p_\xi(x)$ uning zichlik funksiyasi bo'lgan holni qaraymiz.

7-teorema. Agar ξ $p_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lib, $g(x)$ R da aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| p_\xi(x) dx$$

integral absolut yaqinlashsa, u holda

$$M\eta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\xi}(x) dx \qquad 10)$$

tenglik o‘rinli.

Isboti. Teoremani avval $[a,b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz $g(x)$ funksiya uchun isbotlaymiz. Har qaysi $n=1,2,...$ sonlar uchun $x_{nk} = a + \frac{b-a}{n}k$ va $g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b), \\ g(x_{nk}), & x_{n,k-1} < x \le x_{nk} \end{cases}$ deb belgilaymiz.

$\varepsilon > 0$ ixtiyoriy musbat son bo‘lsin. U holda faqat ε ga bog‘liq bo‘lgan shunday n_0 natural son topiladiki, barcha $n \ge n_0$ va har qanday $x \in [a,b]$ sonlar uchun $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli, ya’ni $g_n(x)$ funksiyalar ketma-ketligi $g(x)$ funksiyaga $[a,b]$ oraliqda tekis yaqinlashadi. $\eta_n = g_n(\xi)$ sodda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz. Yuqorida isbotlanganiga ko‘ra η_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashadi. Demak, matematik kutilmaning ta’rifiga ko‘ra,

$$\lim_{n\to\infty} Mg_n(\xi) = Mg(\xi). \qquad (11)$$

Ikkinchi tomondan,

$$Mg_n(\xi) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{nk}) \int_{x_{n,k-1}}^{x_{nk}} p_{\xi}(x) dx = \int_a^b g_n(x) p_{\xi}(x) dx.$$

Bu tenglikdan va yuqorida isbotlangan $|g_n(x) - g(x)| \le \varepsilon$ tengsizlikdan $n \ge n_0$ sonlar uchun

$$\left| \int_a^b g(x) p_{\xi}(x) dx - Mg_n(\xi) \right| \le \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan, (11) tenglikga ko‘ra (10) formulaga kelamiz.

Endi $g(x) \ge 0$ bo‘lgan holga o‘tamiz. Ushbu

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \le n; \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz. $\eta_n = g_n(\xi)$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdorga monoton yaqinlashadi. Monoton yaqinlashish haqidagi teoremaga ko'ra $Mg_n(\xi) \uparrow Mg(\xi)$ munosabat o'rinli. Bundan va

$$Mg_n(\xi) = \int_{-n}^{n} g(x)p_{\xi}(x)dx \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx$$

munosabatdan (10) tenglik manfiy bo'lmagan $g(x)$ funksiyalar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Umumiy holda,

$$g(x) = \max\{g(x);0\} + \min\{g(x);0\} = g^+(x) - g^-(x)$$

tenglikdan va teoremaning musbat g(x) funksiyalar uchun o'rinli ekanligidan,

$$Mg(\xi) = Mg^+(\xi) - Mg^-(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g^+(x)p_{\xi}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g^-(x)p_{\xi}(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx.$$

Teorema isbot bo'ldi.

3-izoh. (10) formula $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya R^n fazoni R fazoga akslantiruvchi n o'lchovli uzluksiz funksiya bo'lgan umumiy holda ham o'rinli ekanligini yuqoridagi kabi isbotlash mumkin. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ n o'lchovli tasodifiy vektor absolut uzluksiz bo'lib, $p_{\xi_1, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_n)$ uning zichlik funksiyasi bo'lsin. U holda matematik kutilma

$$Mg(\xi_1, ..., \xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, ..., x_n)p_{\xi_1, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n$$

formula orqali hisoblanadi.

4-izoh. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozish ma'lum qiyinchiliklarga olib keladigan ba'zi hollarda matematik kutilmani hisoblash uchun (10) formuladan foydalanmay, balki boshqa (matematik kutilmaning xossalaridan foydalanuvchi) turli usullar ishlatiladi.

11-misol. Standart normal taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0.$$

$\eta = \sigma \cdot \xi + a$ tasodifiy miqdor $\left(a, \sigma^2\right)$ parametrli normal taqsimlangan bo'lsin. U holda, matematik kutilmaning additivlik xossasiga ko'ra $M\eta = \sigma \cdot M\xi + a = a$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tenglikni biz 8-misolda keltirib chiqargan edik.

12-misol. n ta bog'liqsiz tajribalardan iborat bo'lgan Bernulli sxemasida, kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishlar soni μ ni $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ yig'indi shaklida ifodalash mumkin, bu yerda μ_j – A hodisaning j-tajribadagi ro'y berishlar soni. U holda

$$M\mu_j = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

bo'lgani uchun matematik kutilmaning additivlik xossasiga ko'ra

$$M\eta = M\eta_1 + M\eta_2 + \ldots + M\eta_n = np$$

tenglik kelib chiqadi. Bu 2-misoldagi natija bilan bir xil, ammo juda kam hisoblashlar yordamida olingan.

5-§. Dispersiya. Yuqori tartibli momentlar

Tasodifiy miqdorni sonli xarakteristikalaridan yana biri uning dispersiyasidan iborat.

4-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ songa aytiladi. $\sigma = \sqrt{D\xi}$ qiymatga ξ tasodifiy miqdorning **o'rta kvadratik chetlanishi** yoki **standart chetlanish** deyiladi.

$D\xi$ dispersiya ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanday tarqalgan ekanligini xarakterlovchi sondan iborat.

Dispersiyaning ba'zi xossalarini keltiramiz:

1°. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Haqiqatan ham,

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = M(\xi^2 - 2(\xi M\xi) + \left(M\xi\right)^2) =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

2°. Agar ξ tasodifiy miqdor yagona o'zgarmas C sonni 1 ehtimol bilan qabul qilsa, ya'ni $P(\xi = C) = 1$ bo'lsa, u holda $D\xi = 0$. Darhaqiqat, $MC=C$ tenglikdan $D\xi = M(\xi - C)^2 = (C - C)^2 \cdot 1 = 0$.

3°. Ixtiyoriy C soni uchun $D(C\xi) = C^2 D\xi$, $D(\xi + C) = D\xi$ tengliklar o'rinli.

Isboti.

$$D(C\xi) = M(C\xi - MC\xi)^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 = C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi.$$

$$D(\xi + C) = M(\xi + C - M(\xi + C))^2 = M(\xi - M\xi + C - C)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

4°. Agar ξ va η o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ tenglik o'rinli.

Isboti. Matematik kutilmaning additivlik xossasidan foydalanib quyidagini topamiz:

$D(\xi + \eta) = M(\xi - M\xi)^2 + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + M(\eta - M\eta)^2 = D\xi + D\eta$, bu yerda $\xi - M\xi$ va $\eta - M\eta$ tasodifiy miqdorlarning bog'liq emasligidan $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

4-xossa faqat ikkita emas, balki juft-jufti bilan bog'liqsiz bo'lgan n ta tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun ham o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas.

13-misol. (n, p) parametrli binomial taqsimotga ega bo'lgan μ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblaymiz.

μ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun 1°-xossadan foydalanamiz. $M\mu$ matematik kutilma 2-misolda topilgan edi: $M\mu = np$. Endi $M\mu^2$ matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$M\mu^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) C_{n-1}^j p^j (1-p)^{n-j} =$$

$$= np(M\mu(n-1) + 1) = np((n-1)p + 1) = (np)^2 + npq. \qquad (12)$$

Demak, $D\mu = M\mu^2 - (M\eta)^2 = npq$. (12) natijaga quyida keltirilgan usul bilan osongina kelish mumkin: $\mu(n)$ tasodifiy miqdorni n ta bog'liqsiz tajribalardan iborat bo'lgan Bernulli sxemasida kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishlar soni ekanligini hisobga olib, uni

$$\mu = \mu(n) = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

ko'rinishdagi yig'indi shaklida ifodalash mumkin, bu yerda μ_j orqali j-tajribada A hodisa ro'y bersa 1, aks holda 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdor belgilangan. Har bir qo'shiluvchining dispersiyasi

$$D\mu_j = (0 - M\mu_j)^2 \cdot q + (1 - M\mu_j)^2 \cdot p = (-p)^2 q + (1-p)^2 p =$$

$$= p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq$$

va μ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liqsiz bo'lgani uchun 4-xossaga ko'ra ushbu

$$D\mu = D\mu(n) = D\mu_1 + D\mu_2 + \ldots + D\mu_n = npq$$

tenglikka kelamiz.

14-misol. λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Buning uchun biz dispersiyaning 1'-xossasidan foydalanamiz. Bizga $M\xi = \lambda$ ekanligi ma'lum (3-misol). $M\xi^2$ matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \right) = \lambda \cdot \left(M\xi + 1 \right) = \lambda^2 + \lambda..$$

Shunday qilib,

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi^2) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

ya'ni Puasson taqsimotining dispersiyasi ham, uning matematik kutilmasi kabi λ parametrga teng ekan.

15-misol. $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi (10) formulaga asosan topiladi:

$$D\xi = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} \left[\left(b - \frac{b+a}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{b+a}{2} \right)^3 \right] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

16-misol. (a,σ^2) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\phi_{a,\sigma}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dx.$$

Bu integralda $y=\frac{(x-a)}{\sigma}$ almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$D\xi = \sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy.$$

Hosil bo'lgan integralni $v=\frac{y}{\sqrt{2\pi}}$, $du = y\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$ deb olib, bo'laklab integrallaymiz:

$$D\xi = \sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy = \sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)dy = \sigma^2.$$

Demak, (a,σ^2) parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning ikkinchi parametriga teng ekan.

17-misol. (α,λ)-parametrli gamma taqsimotning dispersiyasini hisoblaymiz. $M\xi=\frac{\alpha}{\lambda}$ ekanligini hisobga olib, dispersiyaning 1-xossasidan foydalanamiz:

$$M\xi^2 = \int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}y^{\alpha+1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

$$D\xi = M\xi^2-(M\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}-\frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

5-ta'rif. $\xi-(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va $k>0$ biror son bo'lsin. Agar $M|\xi|^k$ matematik kutilma mavjud bo'lsa, u holda $a_k=M\xi^k$ songa ξ tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli boshlang'ich momenti**, $m_k=M|\xi|^k$ songa esa uning ***k*-tartibli absolut momenti** deyiladi.

$\xi-M\xi$ tasodifiy miqdorning momentlarini **markaziy momentlar** deyiladi.

Agar $M\xi = 0$ bo'lsa, u holda markaziy moment boshlang'ich momentga teng bo'ladi. ξ tasodifiy miqdorning birinchi tartibli boshlang'ich momenti uning matematik kutilmasi bilan, ikkinchi tartibli markaziy momenti esa dispersiyasi bilan ustma-ust tushadi.

18-misol. (Normal taqsimotning markaziy momentlari). ξ tasodifiy miqdor (a,σ^2) parametrli normal taqsimotga ega bo'lsin. U holda $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$ ekanligi bizga ma'lum. ξ tasodifiy miqdorning markaziy momentlarini hisoblaymiz.

$$\beta_m = M(\xi - a)^m = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^m \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Bu yerda $z = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajarib, topamiz:

$$\beta_m = \frac{\sigma^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^m \exp\left\{-z^2/2\right\} dz.$$

Agar m toq bo'lsa, u holda $\beta_m = 0$ bo'ladi, agar m juft bo'lsa ($m=2k$), u holda $\beta_{2k} = M(\xi - a)^{2k} = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^{2k} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz$ da

$\frac{z^2}{2} = t$ almashtirish bajarib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\beta_{2k} = M(\xi - a)^{2k} = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{k-1/2} e^{-t} dt = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\sigma^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}.$$

19-misol. λ-parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdorning yuqori tartibli momentlari hisoblansin.

Yechish. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

ξ ning k-tartibli momentini 7-teoremadagi (10) formuladan foydalanib topamiz:

$$a_k = M\xi^k = \int_0^\infty x^k \lambda \cdot e^{-k\lambda} dx = \lambda \int_0^\infty x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^k}\int_0^\infty t^k e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k}.$$

Agar k musbat butun son bo'lsa, $\Gamma(k+1) = k!$ va $a_k = \frac{k!}{\lambda^k}$.

6-§. Asosiy tengsizliklar

Matematik analiz kursidan bizga ma'lum bo'lgan yig'indi va integrallar uchun isbotlangan ko'p tengsizliklar ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursida ham keng qo'llaniladi. Shu bilan birga ehtimollar nazariyasining o'ziga xos bo'lgan tengsizliklari ham mavjud. Bu tengsizliklarning barchasida matematik kutilma va yuqori tartibli momentlar ishlatiladi. Bu paragrafda biz bunday tengsizliklarning eng muhimlarini keltiramiz.

Yensen tengsizligi. Agar $M|\xi| < \infty$ va $g(x)$ botiq funksiya bo'lsa, u holda

$$Mg(\xi) \ge g(M\xi) \tag{13}$$

tengsizlik o'rinli.

Isboti. $g(x)$ funksiya (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a,b)$ va istalgan $0 \le \theta \le 1$ sonlar uchun ushbu

$$g(\theta \cdot x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta \cdot g(x_1) + (1-\theta)g(x_2) \tag{14}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq deyiladi.

$x_0 \in (a,b)$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1, x_2 sonlar uchun

$$\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0} \tag{15}$$

tengsizlik o'rinli. (15) tengsizlikni isbotlash uchun (14) ifodada $\theta = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$ deb olish kifoya. (15) tengsizlikdan

$$\sup_{x_1 < x_0} \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \le C \le \inf_{x_2 > x_0} \frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi o'zgarmas C soni mavjud ekanligi kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlik o'z navbatida

$$g(x) \geq g(x_0) + C \cdot (x - a) \tag{16}$$

ko'rinishdabo'ladi.

5-izoh. Agar g(x) funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda uning botiqligi $g''(x) \geq 0 \ (a < x < b)$ tengsizlik bilan aniqlanadi. Bu holda (16) tengsizlikda $C = g'(x_0)$ deb olish mumkin.

(16) tengsizlikda $x_0 = M\xi, \ x = \xi$ deb va uning har ikkala tomonidan matematik kutilma olsak, (13) tengsizlik kelib chiqadi.

Lyapunov tengsizligi. Ixtiyoriy musbat $r < s$ sonlar uchun

$$\left(M|\xi|^r\right)^{1/r} \leq \left(M|\xi|^s\right)^{1/s}.$$

Bu tengsizlikni isbotlash uchun $g(x) = x^{s/r}$ botiq funksiya va $|\xi|^r$ tasodifiy miqdorlarga **Yensen tengsizligini** qo'llash kifoya.

Gyolder tengsizligi. $r > 1, \ s > 1, \ 1/r + 1/s = 1$ sonlar va ξ, η tasodifiy miqdorlar uchun $M|\xi|^r < \infty, M|\eta|^s < \infty$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. U holda

$$M|\xi \cdot \eta| \leq \left(M|\xi|^r\right)^{1/r} \cdot \left(M|\eta|^s\right)^{1/s} \tag{17}$$

Isboti. $g(x) = -\ln x, x > 0$ funksiya $(0, \infty)$ intervalda aniqlangan botiq funksiya bo'lgani tufayli (13) tengsizlik o'rinli, ya'ni ixtiyoriy $x_1, x_2 > 0$ va istalgan $0 \leq \theta \leq 1$ sonlar uchun

$$\ln(x_1\theta + x_2(1-\theta)) \geq \theta \ln x_1 + (1-\theta)\ln x_2 = \ln\left(x_1^{\theta} \cdot x_2^{1-\theta}\right)$$

tengsizlik o'rinli. Endi $x_1 = |a|^r$, $x_2 = |b|^s$; $\theta = \frac{1}{r}, \ 1 - \theta = \frac{1}{s}$ deb olsak, u holda

$$|ab| \leq \frac{|a|^r}{r} + \frac{|b|^s}{s}$$

tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $a = \frac{\xi}{\left(M|\xi|^r\right)^{1/r}}, b = \frac{\eta}{\left(M|\eta|^s\right)^{1/s}}$ deb (biz $M|\xi|^r \neq 0, M|\eta|^s \neq 0$ deb faraz qilamiz, aks holda (17) tengsizlik trivial bajariladi), hosil bo'lgan tengsizlikning har ikki tomonidan matematik kutilma olsak, biz Gyolder tengsizligiga kelamiz.

7-§. Chebishev tengsizligi

ξ tasodifiy miqdor va $H(\xi)=I_{\{\xi>0\}}$ esa $\{\xi>0\}$ hodisaning indikatori bo'lsin. $H(\xi)$ funksiyaga Xevisayd funksiyasi deyiladi.

$\xi\geq 0-$ manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdor va $a>0$ – ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Ushbu bevosita tekshiriladigan

$$H(\xi-a)\leq\frac{\xi}{a}$$

tengsizlikning har ikki tomonidan matematik kutilma olib (3-teoremaning 2°-punktiga ko'ra bunday qilish mumkin), ushbu

$$P(\xi>a)\leq\frac{M\xi}{a} \tag{18}$$

Markov nomi bilan ataluvchi sodda, lekin juda ham foydali tengsizlikni hosil qilamiz. Agar ξ musbat va chekli matematik kutilmaga ega bo'lsa, bu tengsizlikdan ξ tasodifiy miqdorning berilgan a qiymatdan katta bo'lish ehtimolining yuqori chegarasi kelib chiqadi. Shu bilan birga $M\xi$ qancha kichik bo'lsa, bu chegara shuncha kichik bo'ladi. Agar $M\xi\leq a$ bo'lsa, (18) aniq tengsizlik bo'ladi, ya'ni shunday ξ tasodifiy miqdor mavjudki, uning uchun $M\xi$ oldindan aniqlangan (berilgan) qiymatga ega va (18) munosabatda tenglikka erishish mumkin. Masalan, agar ξ tasodifiy miqdor 0 va a qiymatlarni, mos ravishda $1-\frac{M\xi}{a}$ va $\frac{M\xi}{a}$ ehtimollar bilan qabul qilsa, bunday tenglik o'rinli.

Endi musbat bo'lishi shart bo'lmagan, ammo $M\xi$ va $M\xi^2$ matematik kutilmalarning qiymatlari chekli bo'lgan ξ tasodifiy miqdorni olaylik. Yuqoridagi kabi

$$H(|\xi-m|-a)\leq\left(\frac{\xi-m}{a}\right)^2$$

tengsizlikni har ikki tomonidan matematik kutilma olib

$$P(|\xi - m| > a) \le \frac{M(\xi - m)^2}{a^2} \tag{19}$$

munosibatni hosil qilamiz (bu yerda m – ixtiyoriy haqiqiy son), ya'ni biz ξ tasodifiy miqdorning m dan berilgan a qiymatga chetlanish ehtimoli uchun $M\xi$ va $M\xi^2$ matematik kutilmalar orqali ifodalangan yuqori chegarasini hosil qildik. $(\xi - m)^2$ kvadratning matematik kutilmasi $M(\xi - m)^2 = M\xi^2 - 2mM\xi + m^2$, m bo'yicha o'zining eng kichik qiymatiga $m = M\xi$ bo'lganida erishadi.

(19) tengsizlikda $m = M\xi$ deb olsak, biz Chebishev tengsizligini hosil qilamiz:

$$P(|\xi - M\xi| > a) \le \frac{D\xi}{a^2},$$

bu matematik kutilmadan a qiymatga chetlanish ehtimolini ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi bilan bog'laydigan juda muhim tengsizlik.

Agar ξ tasodifiy miqdor nolga teng dispersiyaga ega bo'lsa, ya'ni $M(\xi - M\xi)^2 = 0$ bo'lsa, u holda ξ **o'rta kvadratik ma'noda** $M\xi$ qiymatga teng deymiz va $\xi \overset{kv}{=} M\xi$ deb yozamiz. Agar $\xi \overset{kv}{=} M\xi$ bo'lsa, Chebishev tengsizligidan ixtiyoriy kichik musbat son a uchun $P(|\xi - M\xi| \le a) = 1$ tenglik o'rinli yoki 1 ehtimol bilan $\xi = M\xi$ ekanligi kelib chiqadi.

8-teorema. $g(x) \ge 0$, ξ tasodifiy miqdorning qiymatlar sohasida kamaymaydigan funksiya bo'lib, $Mg(\xi)$ matematik kutilma mavjud bo'lsin. U holda har qanday $a > 0$ uchun

$$P(|\xi| > a) \le \frac{Mg(\xi)}{g(a)}$$

tengsizlik o'rinli.

Bu teorema ham (18) va (19) tengsizliklar kabi

$$H(|\xi| - a) \le \frac{g(\xi)}{g(a)}$$

ifodaning har ikkala tomonidan matematik kutilma olib isbotlanadi.

2-natija. k ixtiyoriy natural son va $M|\xi|^k < \infty$ bo'lsa, u holda har qanday musbat haqiqiy son a uchun

$$P(|\xi| > a) \leq \frac{M|\xi|^k}{a^k}$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlikka k-tartibli momentlar uchun **Chebishev tengsizligi** deyiladi.

8-§. Shartli ehtimol va shartli matematik kutilma

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimollar fazosi va $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, ...\}$ to'plam Ω fazoni musbat o'lchovli to'plamlarga **parchalanishi** bo'lsin (bundan keyingi mulohazalarimizda barcha **parchalanishlarni** o'lchovli deb faraz qilamiz va buni alohida qayd etib o'tirmaymiz). U holda har qanday A hodisa uchun $P(A/B_k) = \dfrac{P(AB_k)}{P(B_k)}$, $k = 1, 2, ...$ shartli ehtimollar aniqlangan bo'ladi.

$$\xi_B = \xi_B(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A/B_k) I_{B_k}(\omega)$$

tasodifiy miqdorga A hodisaning $\mathfrak{B}$ **parchalanishga** nisbatan shartli ehtimoli deyiladi va $P(A/\mathfrak{B})$ yoki $P(A/\mathfrak{B})(\omega)$ kabi belgilanadi. U har bir B_k to'plamda o'zgarmas $P(A/B_k)$ qiymatga ega.

Shartli ehtimolning asosiy xossalari:

1) agar A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A + B/\mathfrak{B}) = P(A/\mathfrak{B})) + P(B/\mathfrak{B}).$$

Isboti. Quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$\xi_{A+B}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(P(A+B)/B_k \right) I_{B_k}(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(P(A/B_k + P(B/B_k) \right) I_{B_k}(\omega) = \xi_A(\omega) + \xi_B(\omega).$$

2) $P(A/\Omega) = P(A)$,

3) $MP(A/\mathfrak{B}) = P(A)$.

Isboti.

$$MP(A/\mathfrak{B}) = M\xi_B(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A/B_k)P(B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(AB_k) = P\left(A\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right) = P(A).$$

Agar $\mathfrak{B}$ **parchalanish** η tasodifiy miqdor orqali vujudga kelsa, u holda ξ_B shartli ehtimolga A hodisaning η tasodifiy miqdorga nisbatan shartli ehtimoli, yoki η yaratgan σ-algebraga nisbatan shartli ehtimoli deyiladi:

$$P(A/\eta) = P(A/\sigma(\eta)) = P(A/\eta)(\omega).$$

6-izoh. η tasodifiy miqdor u yaratgan **parchalanishning** har qaysi elementida o'zgarmas bo'lgani sababli $P(A/\eta) = P(A/\sigma(\eta))$ shartli ehtimolni A hodisa va η miqdorlarning (noma'lumlarning) funksiyasi shaklida ifodalash mumkin:

$$P(A/\eta)(\omega) = p(A,\eta(\omega)).$$

20-misol. ξ,η bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, ξ esa λ parametrli Puasson taqsimotiga, η esa p parametrli Bernulli taqsimotiga ega bo'lsin. $A_k = \{\omega \in \Omega : \xi + \eta = k\}$ hodisalarni kiritamiz. U holda

$$P(A_k/\eta), k = 0,1,2,...$$

shartli ehtimollar hisoblansin.

Yechish. Avval ushbu tasdiqni isbotlaymiz.

Agar ikkita bog'liqsiz diskret ξ va η tasodifiy miqdorlar mos ravishda $\{x\}$ va $\{y\}$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda

$$P(\xi + \eta = z / \eta = y) = P(\xi = z - y) \qquad (20)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan ham, shartli ehtimol formulasiga ko'ra

$$P(\xi + \eta = z / \eta = y) = \frac{P(\xi+\eta=z, \eta=y)}{P(\eta=y)}.$$

Bundan ξ va η tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligidan

$$P(\xi + \eta = z/\eta = y) = \frac{P(\xi+y=z)P(\eta=y)}{P(\eta=y)} = P(\xi = z - y).$$

(20) tenglikni biz ko'rayotgan hol uchun qo'llab, quyidagini topamiz:

$$P(A_k/\eta)=P(A_k/\eta=0)I_{\{\eta=0\}}(\omega)+P(A_k/\eta)I_{\{\eta=1\}}(\omega)=$$
$$=P(\xi=k)I_{\{\eta=0\}}(\omega)+P(\xi=k-1)I_{\{\eta=1\}}(\omega).$$

Bundan, ξ tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lgani sababli

$$p_k=P(\xi=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,...$$

va shu munosabat bilan

$$P(A_k/\eta)=p_k I_{\{\eta=0\}}(\omega)+p_{k-1}I_{\{\eta=1\}}(\omega)=p_k(1-\eta)+p_{k-1}\eta.$$

Demak,

$$P(A_0/\eta)=p_0(1-\eta)=e^{-\lambda}(1-\eta),$$

$$P(A_k/\eta)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1-\eta)+e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\eta=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{k!}\big(1+(k-1)\eta\big),\ k=1,2,...$$

Xuddi yuqoridagi kabi konstruksiya tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli. $(\Omega,\mathcal{A},P)$ – ehtimollar fazosida $\mathfrak{B}=\{B_1,B_2,...\}$ **parchalanish** va chekli yoki sanoqli $x_1,x_2,...\in R$ qiymatlarni qabul qiluvchi

$$\xi(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k I_{A_k}(\omega),\ A_k=\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_k\},\ k=1,2,...$$

tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin. U holda har bir $\omega\in\Omega$ va barcha $k\geq 1$ butun sonlar uchun

$$P\{A_k/\mathfrak{B}\}=P\{A_k/\mathfrak{B}\}(\omega)=P\{\xi=x_k/\mathfrak{B}\}(\omega)$$

shartli ehtimollar aniqlangan va ular ξ tasodifiy miqdorning $x_1,x_2,...\in R$ qiymatlar to'plamida ehtimollar taqsimotini yaratadi. ξ tasodifiy miqdorning $\mathfrak{B}$ **parchalanishga** nisbatan shartli matematik kutilmasini Ω ni R ga akslantiruvchi funksiya kabi (ya'ni tasodifiy miqdor kabi) aniqlaymiz:

$$M\{\xi/\mathfrak{B}\}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k P\{A_k/\mathfrak{B}\}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k P\{\xi=x_k/\mathfrak{B}\}(\omega).$$

Bu formulani qayta ifodalaymiz:

$$M\{\xi/\mathfrak{B}\}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k P\{A_k/\mathfrak{B}\}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\sum_{j=1}^{\infty}P\left\{A_k/B_j\right\}I_{B_j}(\omega)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}I_{B_j}(\omega)\sum_{k=1}^{\infty}x_k P\{A_k/B_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}I_{B_j}(\omega)M\{\xi/B_j\}.$$

Shunday qilib, ξ tasodifiy miqdorning $\mathfrak{B}$ **parchalanishga** nisbatan shartli matematik kutilmasi bu **parchalanishning** har bir B_j elementida $M\left\{\xi/B_j\right\}\in R$ ga teng o'zgarmas qiymatlarga ega bo'lgan tasodifiy miqdordan iborat ekan. Demak, $M\left\{\xi/B_j\right\}$ – $\mathfrak{B}$ parchalanishga nisbatan ($\mathfrak{B}$ **parchalanish** yaratgan σ-algebraga nisbatan) o'lchovli funksiya ekan. Ixtiyoriy $\mathfrak{B}$ o'lchovli D to'plam uchun $\{\omega\in\Omega: M\{\xi/\mathfrak{B}\}\in D\}$ hodisa $\mathfrak{B}$ dan olingan B_j to'plamlarning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni u $\mathfrak{B}$ **parchalanish** yaratgan σ-algebraga tegishli ekanligini qayd etishimiz lozim.

Endi $\mathfrak{B}$ **parchalanishga** nisbatan shartli matematik kutilmaning asosiy xossalarini keltiramiz. Quyida keltirilgan tengliklarda uchragan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi mavjud deb faraz qilinadi.

Ixtiyoriy ξ,η tasodifiy miqdorlar, har qanday $\mathfrak{B}$ **parchalanish** va ixtiyoriy $a,b,c\in R$ sonlar uchun:

1) $M\{a\xi+b\eta/\mathfrak{B}\}=aM\{\xi/\mathfrak{B}\}+bM\{\eta/\mathfrak{B}\}$;

2) $M\left\{\xi/\Omega\right\}=M\xi$;

3) $M\{C/\mathfrak{B}\}=C$;

4) $M\{I_A/\mathfrak{B}\}=P\{A/\mathfrak{B}\}$.

1)–4) xossalarning isboti shartli matematik kutilmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

5) ixtiyoriy tasodifiy miqdor ξ va $\mathfrak{B}=\left\{B_1,B_2,...\right\}$ o'lchovli ixtiyoriy A hodisa uchun

$$MI_A\xi=M\{I_A M\{\xi/\mathfrak{B}\}\} \tag{21}$$

formula o'rinli.

Isboti. Haqiqatan ham, A hodisa $\mathfrak{B}$ **parchalanishga** nisbatan o'lchovli bo'lgani uchun, $A = \bigcup_{j:B_j \subset A} B_j$ tenglik o'rinli va

$$MI_A\xi = \sum_{\omega\in A} \xi(\omega)P\{\omega\} = \sum_{j:B_j\subset A}\sum_{\omega\in B_j} \xi(\omega)P\{\omega\} =$$

$$= \sum_{j:B_j\subset A}\sum_{\omega\in B_j} \xi(\omega)P\{\omega / B_j\}P(B_j) = \sum_{j:B_j\subset A} M\{\xi / B_j\}P(B_j) =$$

$$= \sum_{j:B_j\subset A} M\{\xi / B_j\}\sum_{\omega\in B_j} P\{\omega\} = \sum_{\omega\in A} M\{\xi / \mathfrak{B}\}(\omega)P\{\omega\} = MI_A M\{\xi / \mathfrak{B}\}.$$

(21) tenglikdan to'la ehtimol formulasini umumlashtiruvchi ushbu muhim xossa kelib chiqadi:

Natija. Ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdor va ixtiyoriy $\mathfrak{B}$ **parchalanish** uchun to'la matematik kutilma formulasi o'rinli:

$$M\xi = MM\{\xi / \mathfrak{B}\}.$$

$\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, ...\}$ **parchalanish** va $\eta = \eta(\omega)$ qandaydir tasodifiy miqdor bo'lsin. Agar η yaratgan $\mathfrak{B}_\eta$ **parchalanish** uchun $\mathfrak{B}_\eta \subseteq \mathfrak{B}$ munosabat o'rinli bo'lsa, bu holda η tasodifiy miqdorni

$$\eta = \eta(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i I_{B_i}(\omega)$$

shaklida ifodalash mumkin, bu yerda y_i larning ba'zilari teng ham bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, agar η tasodifiy miqdor $\mathfrak{B}$ **parchalanishning** elementlarida (atomlarida) o'zgarmas qiymatlar qabul qilsa va faqat shundagina u $\mathfrak{B}$ ga nisbatan o'lchovli tasodifiy miqdor bo'ladi.

Agar $\mathfrak{B}$ trivial **parchalanish** (ya'ni $\mathfrak{B} = \{\Omega\}$) bo'lsa, u holda η $\mathfrak{B}$ o'lchovli bo'lishi uchun $\eta = C = const$ bo'lishi zarur va yetarli. Shu bilan birga, ixtiyoriy η tasodifiy miqdor o'zi yaratgan $\mathfrak{B}_\eta$ **parchalanishga** nisbatan o'lchovlidir.

6) agar η tasodifiy miqdor $\mathfrak{B}$ o'lchovli bo'lsa, u holda ixtiyoriy diskret ξ tasodifiy miqdor uchun

$$M\{\xi\eta / \mathfrak{B}\} = \eta M\{\xi / \mathfrak{B}\},$$

tenglik oʻrinli va xususan,

$$M\{\eta / \mathfrak{B}\} = \eta \quad (M\{\eta / \mathfrak{B}\eta\} = \eta). \tag{22}$$

Isboti. $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} x_j I_{A_j}(\omega)$ boʻlsin. U holda

$$\xi\eta = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_j y_k I_{A_j B_k}(\omega)$$

tenglik oʻrinli va shu sababli

$$M\{\xi\eta / \mathfrak{B}\} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_j y_k P\{A_j B_k / \mathfrak{B}\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_j y_k \sum_{l=1}^{\infty} P\{A_j B_k / B_l\} I_{B_l}(\omega) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_j y_k P\{A_j B_k / B_k\} I_{B_k}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_j y_k P\{A_j / B_k\} I_{B_k}(\omega). \tag{23}$$

Ikkinchi tomondan, $I_{B_k}^2(\omega) = I_{B_k}(\omega)$ va $k \neq j$ uchun $I_{B_k}(\omega) I_{B_j}(\omega) = 0$ tengliklarni hisobga olib, quyidagini topamiz:

$$\eta M\{\xi / \mathfrak{B}\} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k I_{B_k}(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} x_j P\{A_j / \mathfrak{B}\} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} y_k I_{B_k}(\omega)\right] \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{\infty} x_j P\{A_j / B_l\}\right] I_{B_l}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j} y_k x_j P\{A_j / B_k\} I_{B_k}(\omega),$$

bu (23) tenglik bilan birga 6) xossani isbotlaydi.

Shartli matematik kutilmaning yana bir muhim xossasini keltiramiz:

7) $\mathfrak{B}_1$ va $\mathfrak{B}_2$ – ikkita **parchalanish** boʻlib, $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$ ($\mathfrak{B}_2$ **parchalanish** $\mathfrak{B}_1$ ga nisbatan "maydaroq") boʻlsin. U holda ixtiyoriy diskret ξ tasodifiy miqdor uchun

$$M(M\{\xi / \mathfrak{B}_2\} \mathfrak{B}_1) = M\{\xi / \mathfrak{B}_1\}. \tag{24}$$

Isboti. (24) tenglikni isbotlash uchun $\mathfrak{B}_1 = \{B_{11}, B_{12}, \ldots\}$ va $\mathfrak{B}_2 = \{B_{21}, B_{22}, \ldots\}$ deymiz. U holda, agar $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} x_j I_{A_j}(\omega)$ boʻlsa,

$$M\{\xi / \mathfrak{B}_2\} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P\{A_j / \mathfrak{B}_2\},$$

va shuning uchun ham

$$M[P\{A_j / \mathfrak{B}_2\} / \mathfrak{B}_1] = P\{A_j / \mathfrak{B}_1\} \tag{25}$$

ekanligini ko'rsatish yetarli.

$$P\{A_j / \mathfrak{B}_2\} = \sum_{q=1}^{\infty} P\{A_j / B_{2q}\} I_{B_{2q}}(\omega)$$

bo'lgani uchun

$$M[P\{A_j / \mathfrak{B}_2\} / \mathfrak{B}_1] = \sum_{q=1}^{\infty} P\{A_j / B_{2q}\} P\{B_{2q} / \mathfrak{B}_1\} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} P\{A_j / B_{2q}\} \left[\sum_{p=1}^{\infty} P\{B_{2q} / B_{1p}\} I_{B_{1p}}(\omega) \right] =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} I_{B_{1p}}(\omega) \sum_{q=1}^{\infty} P\{A_j / B_{2q}\} P\{B_{2q} / B_{1p}\} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} I_{B_{1p}}(\omega) \sum_{\{q: B_{2q} \subseteq B_{1p}\}} P\{A_j / B_{2q}\} P\{B_{2q} / B_{1p}\} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} I_{B_{1p}}(\omega) \sum_{\{q: B_{2q} \subseteq B_{1p}\}} \frac{P(A_j B_{2q})}{P(B_{2q})} \cdot \frac{P(B_{2q})}{P(B_{1p})} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} I_{B_{1p}}(\omega) P(A_j / B_{1p}) = P\{A_j / \mathfrak{B}\},$$

ya'ni (25) tenglik kelib chiqadi.

Agar $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\eta_1, \dots, \eta_n$ **parchalanish** $\eta_1, \dots, \eta_k$ tasodifiy miqdorlar orqali yaratilgan bo'lsa, u holda $M\{\xi / \mathfrak{B}\eta_1, \dots, \eta_n\}$ shartli matematik kutilma ξ tasodifiy miqdorning $\eta_1, \dots, \eta_k$ tasodifiy miqdorlarga nisbatan shartli matematik kutilmasi deyiladi va uni $M\{\xi / \eta_1, \dots, \eta_n\}$ orqali belgilanadi.

7-xossadan quyidagi foydali xossaning o'rinli ekanligi bevosita kelib chiqadi:

8) $M[M\{\xi / \eta_1, \eta_2\} / \eta_1] = M\{\xi / \eta_1\}$.

Izoh. Diskret Ω ni har bir chekli yoki sanoqli $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2, ...\}$ **parchalanishiga** u orqali yaratilgan yagona minimal $\sigma(\mathfrak{B})-\sigma$-algebra mos keladi va aksincha Ω ni qism to'plamlaridan tashkil topgan har qanday σ-algebra biror $\mathfrak{B}$ – chekli yoki sanoqli **parchalanish** orqali yaratiladi. Boshqacha aytganda, diskret Ω fazoning σ-algebralari bilan uning barcha **parchalanishlari** orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekanligini ko'rsatish qiyin emas (bu fikrni isbotlashni o'quvchiga mashq sifatida qoldiramiz). Shuning uchun ham, ξ tasodifiy miqdorning $\sigma(\mathfrak{B})-\sigma$ algebraga nisbatan shartli matematik kutilmasi $M\{\xi / \mathfrak{B}\}$ ga teng ekanligi ravshan.

$\mathfrak{B}$ **parchalanish** biz ko'rgan chekli yoki sanoqli, ammo ularning B_j elementlari 0 dan farqli ehtimolga ega bo'lgan holda shartli matematik kutilma va shartli ehtimolning ta'rifi konstruktiv bo'lib, u juda yaqqol ko'rinishga ega. Ammo ehtimollar nazariyasida "nol" ehtimollik hodisalarga nisbatan shartli ehtimollarni ko'rishni taqozo etuvchi masalalar bilan uchrashishga to'g'ri keladi.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ – ehtimollar fazosi, $\mathfrak{S}$ – qandaydir σ-algebra, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{A}$ ($\mathfrak{S}-\mathcal{A}$ ning qism σ-algebrasi) va $\xi=\xi(\omega)$ ixtiyoriy tasodifiy miqdor bo'lsin. Endi ξ tasodifiy miqdorning $\mathfrak{S}\,\sigma$-algebraga nisbatan shartli matematik kutilmasining (va xususan, shartli ehtimolining) ta'rifini keltiramiz.

6-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning $\mathfrak{S}\,\sigma$-algebraga nisbatan shartli matematik kutilmasi $M\{\xi / \mathfrak{S}\}$ deb $\mathfrak{S}$ ga nisbatan o'lchovli va ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ uchun

$$\int_A \xi \, dP = \int_A M\{\xi / \mathfrak{S}\} dP$$

tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy tasodifiy miqdorga aytiladi. Bunday tasodifiy miqdorning mavjudligini isbotlash ancha murakkab bo'lib, u ushbu Radon–Nikodim teoremasiga tayanadi.

Radon–Nikodim teoremasi. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimollar fazosi va λ esa P ga nisbatan absolut uzluksiz, ishorali o'lchov (ya'ni $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$, bu yerda λ_1 va λ_2 nomanfiy va juda bo'lmaganda ulardan bittasi chekli) bo'lsin. U holda shunday $\mathcal{A}$ o'lchovli $f = f(\omega): \Omega \to [-\infty, +\infty]$ funksiya mavjudki, uning uchun ixtiyoriy $A \in \mathcal{A}$ bo'lganda

$$\lambda(A) = \int_A f(\omega) P(d\omega) \qquad (26)$$

tenglik o'rinli. Shu bilan birga o'lchovi $P-$ nol bo'lgan to'plam aniqligida bunday f funksiya yagona, ya'ni agar h (26) tenglikni qanoqtlantiruvchi boshqa funksiya bo'lsa, u holda

$$P\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq h(\omega)\} = 0 .$$

Bizning holda $M\{\xi / \mathfrak{S}\} = f(\omega) - \lambda$ o'lchovning P o'lchovga nisbatan zichligi. Radon–Nikodim teoremasi o'lchovlar nazariyasiga tegishli: uning isbotini masalan A.A.Borovkovning darsligidan topish mumkin.

7-ta'rif. A hodisaning $\mathfrak{S}\sigma$-algebraga nisbatan shartli ehtimoli $P\{A / \mathfrak{S}\}$ deb, $I_A(\omega)$ indikatorning $\mathfrak{S}\sigma$-algebraga nisbatan shartli matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni

$$P\{A / \mathfrak{S}\} = M\{I_A / \mathfrak{S}\} .$$

Boshqacha aytganda, $P\{A / \mathfrak{S}\} - \mathfrak{S}$ o'lchovli tasodifiy miador bo'lib, u ixtiyoriy $B \in \mathfrak{S}$ uchun

$$\int_B P\{A / \mathfrak{S}\} dP = P(A \cap B)$$

tenglikni qanoqtlantiradi.

Bu paragrafning oxirida $\mathfrak{S}\sigma$-algebraga nisbatan shartli matematik kutilmaning muhim xossalarini keltiramiz. Quyida keltirilgan xossalarda barcha ko'rilayotgan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi aniqlangan va $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{A}$ deb (va xossalarda bu shartlarni alohida qayd etmasdan) faraz qilamiz.

1-xossa. Agar $C -$ o'zgarmas son bo'lib, $\xi = C$ bo'lsa, u holda $M\{\xi / \mathfrak{S}\} = C$.

2-xossa. Agar $\xi \leq \eta$ bo'lsa, u holda $M\{\xi / \mathfrak{S}\} \leq M\{\eta / \mathfrak{S}\}$.

3-xossa. $|M\{\xi / \mathfrak{S}\}| \leq M\{|\xi| / \mathfrak{S}\}$.

4-xossa. Agar $a, b \in R$ va $aM\xi + bM\eta$ aniqlangan bo'lsa, u holda

$$M\{a\xi + b\eta / \mathfrak{S}\} = aM\{\xi / \mathfrak{S}\} + bM\{\eta / \mathfrak{S}\}$$

tenglik o'rinli.

5-xossa. Agar $\mathfrak{S} = \{\varnothing, \Omega\}$ – trivial algebra bo'lsa, u holda

$$M\{\xi / \mathfrak{S}\} = M\xi .$$

6-xossa. $M\{\xi / \mathcal{A}\} = \xi$.

7-xossa. $M\{M\{\xi / \mathfrak{S}\}\} = \xi$.

8-xossa. Agar $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ bo'lsa, u holda

$$M[M\{\xi / \mathfrak{S}_2\} / \mathfrak{S}_1] = M\{\xi / \mathfrak{S}_1\}.$$

9-xossa. Agar $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ bo'lsa, u holda

$$M[M\{\xi / \mathfrak{S}_2\} / \mathfrak{S}_1] = M\{\xi / \mathfrak{S}_2\}.$$

10-xossa. Matematik kutilmasi $M\xi$ mavjud bo'lgan ξ tasodifiy miqdor $\mathfrak{S}\,\sigma$-algebraga bog'liq bo'lmasin (ya'ni u $I_B . B \in \mathfrak{S}$ ga bog'liq emas). U holda

$$M\{\xi / \mathfrak{S}\} = M\xi .$$

11-xossa. Agar η – $\mathfrak{S}$-o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lib, $M|\eta| < \infty$ va $M|\xi\eta| < \infty$ bo'lsa, u holda

$$M\{\xi\eta / \mathfrak{S}\} = \eta M\{\xi / \mathfrak{S}\}.$$

III BOBGA DOIR MASALALAR

1. $F(x)$ – manfiy bo'lmagan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsa, u holda

$$M\xi = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

va ixtiyoriy o'zgarmas C uchun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M\xi^n} = \max\{x_1, x_2, \dots x_k\}$

$$M(\min(\xi, C)) = \int_0^C (1 - F(x)dx$$

tengliklarning o'rinli ekanligi isbotlansin.

2. Polinomial taqsimotda

$$(P(\xi_1 = m_1, \ldots \xi_k = m_k) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k},$$

bu yerda $m_i, i = 1, \ldots, k$ manfiy bo‘lmagan butun sonlar, $m_1 + \ldots + m_k = n, p_1 + \ldots + p_k = 1)$ $M\xi_i$, $D\xi_i$ va $Cov(\xi_i, \xi_j)$ lar topilsin.

3. ξ tasodifiy miqdor chekli sondagi nomanfiy $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qiymatlarni qabul qilsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\xi^{n+1}}{M\xi^n} = \max\{x_1, x_2, \ldots x_k\};$$

ekanligi isbotlansin.

4. ξ manfiy bo‘lmagan butun qiymatlarni qabul qilsin va $M\xi < \infty$ bo‘lsin. U holda

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k)$$

ekanligi isbotlansin.

5. ξ tasodifiy miqdor faqat butun musbat qiymatlarni

$$P\{\xi = k\} = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, (a > 0)$$

ehtimollar bilan qabul qiladi (Paskal taqsimoti). ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

6. $\mu - n$ ta bog‘liqsiz tajribada A hodisaning ro‘y berishlar soni bo‘lib, k-tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p_k bo‘lsin. μ miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi hisoblansin.

7. ξ va η bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar qo‘shimcha yana qanday shartni qanoatlantirsa, $D\xi\eta = D\xi D\eta$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

8. Idishda N ta shar bo‘lib, ulardan n tasi oq. Idishdan m ta shar olinadi va ξ olingan sharlar ichidagi oq sharlar soni bo‘lsin $(m \leq n)$. ξ tasodifiy miqdorning (gipergeometrik taqsimot) matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

9. ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi| \geq n\} < \infty$$

bo‘lsa va faqat shundagina chekli bo‘lishi isbotlansin.

10. ξ tasodifiy miqdor lognormal taqsimotga ega, ya'ni

$$p(x)=0, \text{ agar } x\le 0 \text{ va } p(x)=\frac{1}{xb\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2b^2}(\ln x-a)^2}, \text{ agar } x>0,$$

bu yerda $a-$ ixtiyoriy haqiqiy son, $b>0$. ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

11. Agar $M\xi$ chekli bo'lsa,

$$\lim_{x\to\infty} x(1-F(x))=0; \ \lim_{x\to-\infty} xF(x)=0$$

munosabatlarning o'rinli ekanligi isbotlansin.

12. R radiusli sferada tavakkaliga A va B nuqtalar olingan. AB vatar uzunligining taqsimot funksiyasi va matematik kutilmasi topilsin.

13. Sfera sirtidan tavakkaliga ikkita nuqta olinib, ularni katta doiraning kichik yoyi bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan yoy uzunligining taqsimot funksiyasi, matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

14. Absolut uzluksiz manfiy bo'lmagan ξ tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyaga va $p(x)$ taqsimot zichligiga ega bo'lsin. Shu bilan birga, $F(0)=0$ va manfiy bo'lmagan monoton differensiyallanuvchi $g(x)$ funksiya uchun $Mg(\xi)<\infty$ bo'lsa, u holda

$$Mg(\xi)=g(0)+\int_0^\infty g'(x)(1-F(t))dt$$

tenglik o'rinli ekanligi isbotlansin.

15. ξ tasodifiy miqdor λ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega. $\eta=[\xi]$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin va $M\eta$ hisoblansin.

16. ξ tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal taqsimotga ega bo'lsin. $\eta=\frac{1}{\xi^2}$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin. $M\eta$ mavjudmi?

17. $F(x)-$uzluksiz taqsimot funksiya bo'lsin. Quyidagi tengliklar isbotlansin:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dF(x)=\frac{1}{2}$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} F^k(x)dF^n(x)=\frac{n}{n+k}$.

$$V_n = \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{x_1} & e^{x_2} & \dots & e^{x_n} \\ e^{2x_1} & e^{2x_2} & \dots & e^{2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{(n-1)x_1} & e^{(n-1)x_2} & \dots & e^{(n-1)x_n} \end{vmatrix}$$

Vandermond determinantidan iborat bo'ladi. $V_n = \prod_{1\le i<j\le n} (e^{x_i} - e^{x_j})$ tenglik o'rinli. x_j, $j = 1,2,\dots,n$ turli sonlardan iborat bo'lgani uchun $V_n \neq 0$ va M^{-1} – teskari matritsa mavjud ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Hosil qiluvchi funksiyalar. Tasodifiy miqdorning qiymatlari $x_j = j$, $j = 0,1,2,\dots$ – manfiy bo'lmagan butun sonardan iborat bo'lgan xususiy, ammo juda muhim bo'lgan holda

$$g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{tj} p_j$$

bo'ladi. Agar oxirgi tenglikda $z = e^t$ belgilash kiritsak, u holda hosil bo'lgan funksiyani quyidagi

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j p_j \qquad (2)$$

ko'rinishda ifodalaymiz va uni **hosil qiluvchi funksiya** deb ataymiz. $g(t)$ va $h(z)$ funksiyalar orasida

$$h(z) = g(\log z), \quad g(t) = h(e^t)$$

tengliklar o'rinli. $h(1) = g(0) = 1$, $h'(1) = g'(0) = a_1$ va

$$h''(1) = g''(0) - g'(0) = a_2 - a_1,$$

$$a = a_1 = M\xi = h'_\xi(1) \qquad (3)$$

$$D\xi = h''_\xi(1) + h'_\xi(1) - \left[h'(1)\right]^2$$

tengliklarning o'rinli ekanligini qayd etib o'tamiz.

(2) tenglikning o'ng tomonidagi darajali qator kompleks sonlar tekisligining markazi 0 nuqtada va radiusi esa $r = \left(\overline{\lim}\sqrt[n]{|p_n|}\right)^{-1}$ formula bilan aniqlanuvchi doirada yaqinlashadi.

$$p_j = \frac{1}{j!} h^{(j)}(0), \quad j = 0,1,2,... \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun (2) va (4) formulalar ξ tasodifiy miqdorning $\{p_j\}$ taqsimot qonuni bilan $h(z)$ hosil qiluvchi funksiyasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi.

5-misol. ξ diskret tasodifiy miqdorning momentlari quyidagi

$$a_0 = 1,\, a_k = \frac{1}{2} + \frac{2^k}{4},\, k \geq 1$$

formulalar yordamida ifodalangan bo'lsin. U holda uning momentlar hosil qiluvchi funksiyasi

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

tenglik orqali ifodalanadi. Bu $z = e^t$ noma'lumning ko'p haddan iborat va

$$h(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2.$$

Demak, ξ tasodifiy miqdor $\{0,1,2\}$ qiymatlarni mos ravishda $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ ehtimollar bilan qabul qilar ekan.

2-§. Momentlar hosil qiluvchi va hosil qiluvchi funksiyalarning xossalari

Momentlar hosil qiluvchi va hosil qiluvchi funksiyalarning ikkalasi ham diskret tasodifiy miqdorlarni o'rganishda juda foydali bo'lgan ko'p xossalarga ega. Biz bu xossalardan asosiylarini keltiramiz.

1-xossa. Agar ξ diskret tasodifiy miqdor bo'lib, $\eta = a\xi + b$, $a, b \in R$ bo'lsa, u holda η tasodifiy miqdorning momentlar hosil qiluvchi va hosil qiluvchi funksiyalari quyidagi

$$g_\eta(t) = e^{tb} g_\xi(at) \quad \text{va} \quad h_\eta(z) = z^b h_\xi(az)$$

tengliklar orqali ifodalanadi.

Isboti. Haqiqatan ham,

$$g_\eta(t) = Me^{t(a\xi + b)} = Me^{at\xi} e^{tb} = e^{tb} Me^{at\xi} = e^{tb} g_\xi(at).$$

Ikkinchi tenglik ham shu kabi isbotlanadi.

Agar ξ_1 va ξ_2 mos ravishda P_{ξ_1} va P_{ξ_2} taqsimotlarga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning yig'indisi $\eta=\xi_1+\xi_2$ esa P_η taqsimotga ega bo'lsa, u holda P_η P_{ξ_1} va P_{ξ_2} taqsimotlarning kompozitsiyasidan iborat va uni aniqlash ancha mashaqqatli ekanligi bizga ma'lum (11-bobga qarang). Quyida keltirilgan 2-xossa diskret tasodifiy miqdorlar uchun yig'indining taqsimotini topishni ancha osonlashtiradi.

2-xossa. Agar $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ bog'lisiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $g_{\xi_k}(t)$ va $h_{\xi_k}(z)$, $k=1,2,\dots,n$ mos ravishda ularning momentlar hosil qiluvchi va hosil qiluvchi funksiyalari bo'lsa, u holda

$$g_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t)=\prod_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(t) \quad \text{va} \quad h_{\xi_1+\dots+\xi_n}(z)=\prod_{i=1}^{n} h_{\xi_i}(z) \qquad (5)$$

Isboti. $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligidan mos ravishda $e^{t\xi_1},\dots,e^{t\xi_n}$ va $z^{\xi_1},\dots,z^{\xi_n}$ tasodifiy miqdorlarning ham bog'liqsizligi kelib chiqadi. Bundan matematik kutilmaning multiplikativ xossasiga ko'ra (5) munosabatlarga ekvivalent bo'lgan

$$Me^{t(\xi_1+\dots+\xi_n)}=Me^{t\xi_1}\dots e^{t\xi_n}=\prod_{j=1}^{n} Me^{t\xi_j},$$

$$Mz^{\xi_1+\dots+\xi_n}=Mz^{\xi_1}\dots z^{\xi_n}=\prod_{j=1}^{n} Mz^{\xi_j}$$

tengliklar kelib chiqadi.

6-misol. ξ va η bog'liqsiz va mos ravishda (n,p) va (m,p) parametrlarga ega bo'lgan binomial tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda

$$g_\xi(t)=(pe^t+q)^n, \quad h_\xi(t)=(pz+q)^n,$$

$$g_\eta(t)=(pe^t+q)^m, \quad h_\eta(z)=(pz+q)^m$$

va 2-xossaga ko'ra

$$g_{\xi+\eta}(t)=g_\xi(t)g_\eta(t)=(pe^t+q)^{n+m},$$

$$h_{\xi+\eta}(z)=h_\xi(z)h_\eta(z)=(pz+q)^{n+m}=\sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k p^k q^{n+m-k} z^k.$$

Oxirgi tenglikdan bir xil p parametrga ega bo'lgan bog'liqsiz binomial taqsimotga ega bo'lgan ξ va η tasodifiy miqdorlarning yig'indisi ham $(n+m; p)$ parametrli binomial taqsimotga ega ekanligi kelib chiqadi.

7-misol. Agar ξ va η bog'liqsiz, mos ravishda nomanfiy butun qiymatlarni qabul qiluvchi p parametrli geometrik taqsimotga ega, ya'ni $p_\xi(k)=p_\eta(k)=q^k p$, $k=0,1,2,...$ bo'lib, $\zeta=\xi+\eta$ bo'lsa, u holda

$$g_\xi(t)=g_\eta(t)=\frac{p}{1-qe^t}$$

va 2-xossaga ko'ra,

$$g_\zeta(t)=g_\xi(t)g_\eta(t)=\frac{p^2}{1-2qe^t+q^2e^{2t}}.$$

Agar $z=e^t$ almashtirish bajarsak, u holda oxirgi tenglikdan,

$$h_\zeta(z)=\frac{p^2}{(1-qz)^2}=p^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k z^k$$

kelib chiqadi. Bundan hosil qiluvchi funksiyaning ta'rifiga ko'ra

$$p_\zeta(k)=P(\zeta=k)=p^2(k+1)q^k,\ k=0,1,2,...$$

Demak, P_ζ taqsimot p parametrli teskari binomial taqsimotdan iborat ekan.

$\xi_1,\xi_2,...$ – bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan, manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $h_\xi(z)$ hosil qiluvchi funksiyaga ega bo'lsin va ν $\{\xi_k, k\ge 1\}$ ketma-ketlikka bog'liq bo'lmagan butun nomanfiy qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo'lsin. $S_0=0$ va $\nu\ge 1$ uchun $S_\nu=\xi_1+\xi_2+...+\xi_\nu$ tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi bo'lsin.

3-xossa. $h_{S_\nu}(z)$ hosil qiluvchi funksiya ushbu

$$h_{S_\nu}(z)=h_\nu\left(h_\xi(z)\right) \tag{6}$$

superpozitsiyaga teng.

Isboti. Quyidagi

$$\left\{Mz^{\xi_1+...+\xi_\nu}/\nu=n\right\}=Mz^{\xi_1+...+\xi_n}=\left[h_\xi(z)\right]^n$$

IV BOB. HOSIL QILUVCHI VA XARAKTERISTIK FUNKSIYALAR

1-§. Diskret taqsimotlar uchun momentlar hosil qiluvchi funksiya

III bobda biz tasodifiy miqdorning ikkita eng muhim xarakteristikalari bo'lgan matematik kutilma va dispersiyani to'liq o'rgangan edik. Matematik kutilma va dispersiya tasodifiy miqdor haqida, aniqrog'i uning taqsimot funksiyasi haqida muhim ma'lumotlarni qamrab oladi. Ammo ular tasodifiy miqdorning taqsimotini, hatto tasodifiy miqdorlar chekli sondagi qiymatlarga ega bo'lgan eng sodda holda ham to'liq aniqlay olmaydi. Turli taqsimotlarga ega bo'lgan, ammo matematik kutilmalari va dispersiyalari bir xil bo'lgan sodda tasodifiy miqdorlarga misollar keltirish qiyin emas.

1-ta'rif. ξ tasodifiy miqdor qiymatlar sohasi $\{x_1, x_2, ...\}$ bo'lgan diskret tasodifiy miqdor bo'lsin. ξ tasodifiy miqdorning **momentlar hosil qiluvchi funksiyasi** deb

$$g(t) = Me^{t\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!} = M\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k t^k}{k!} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} p(x_j) \qquad (1)$$

funksiyaga aytiladi. Bu yerda $a_k = M\xi^k$, $p(x_j) = P(\xi = x_j)$.

Momentlar hosil qiluvchi funksiyani ξ tasodifiy miqdor momentlarini tasvirlashning qulay vositasi deb qarash mumkin. Haqiqatan ham, $g(t)$ funksiyani n marta differensiallab, so'ngra $t = 0$ deb olsak, u holda

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right|_{t=0} = g^{(n)}(0) = \left.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! a_k t^{k-n}}{(k-n)! k!}\right|_{t=0} = a_k .$$

Sodda misollarda momentlar hosil qiluvchi funksiyalarni hisoblash qiyin emas.

1-misol. ξ tasodifiy miqdor $\{1, 2, ..., n\}$ qiymatlarni $p_\xi(j) = \frac{1}{n}$, $1 \le j \le n$ ehtimollar bilan qabul qilsin (tekis taqsimot). U holda

$$g(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}e^{jt}=\frac{1}{n}(e^{t}+e^{2t}+...+e^{nt})=\frac{e^{t}(e^{nt}-1)}{n(e^{t}-1)}.$$

Birinchi tenglikning har ikkala tomonidan hosila olib, quyidagilarni topamiz:

$$a=a_1=g'(0)=\frac{1}{n}(1+2+...+n)=\frac{n+1}{2};$$

$$a_2=g''(0)=\frac{1}{n}(1+4+...+n^2)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sigma^2=D\xi=a_2-a^2=(n^2-1)/12.$$

2-misol. ξ tasodifiy miqdor (n,p) parametrli binomial taqsimotga ega bo'lsin. U holda $p_\xi(j)=P_n(j)=C_n^j p^j q^{n-j}, q=1-p$, $0\le j\le n$ ekanligini hisobga olib, quyidagilarni topamiz:

$$g(t)=\sum_{j=0}^{n}e^{jt}C_n^j p^j q^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\left(pe^t\right)^j q^{n-j}=\left(pe^t+q\right)^n.$$

Bundan

$$a_1=g'(0)=n(pe^t+q)^{n-1}pe^t\Big|_{t=0}=np,$$

$$a_2=g''(0)=n(n-1)p^2+np.$$

Demak, $a=a_1=np$ va $\sigma^2=a_2-a_1^2=np(1-p)$.

3-misol. ξ tasodifiy miqdor $\{1,2,...\}$ qiymatlarni qabul qilib, $p_\xi(j)=q^{j-1}p,\ j=1,2,...$ bo'lsin. U holda

$$g(t)=\sum_{j=1}^{\infty}e^{jt}q^{j-1}p=\frac{pe^t}{1-qe^t}.$$

Bu yerda,

$$a_1=g'(0)=\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\Bigg|_{t=0}=\frac{1}{p},$$

$$a_2=g''(0)=\frac{pe^t+pqe^{2t}}{(1-qe^t)}\Bigg|_{t=0}=\frac{1+q}{p^2},$$

Demak, $a=a_1=1/p$ va $\sigma^2=a_2-a_1^2=q/p^2$.

4-misol. ξ tasodifiy miqdor $\lambda > 0$ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. U holda $p_\xi(j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,...$ bo'lgani uchun

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

U holda,

$$a_1 = g'(0) = e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda,$$

$$a_2 = g''(0) = e^{\lambda(e^t-1)}\left(\lambda^2 e^{2t} + \lambda e^t\right)\Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda,$$

$$a = a_1 = \lambda \text{ va } \sigma^2 = a_2 - a_1^2 = \lambda.$$

Puasson taqsimotining dispersiyasini bu usul bilan topish uning ta'rifidan foydalanib bevosita hisoblashga nisbatan ancha qulay ekan.

Momentlar muammosi. Momentlar hosil qiluvchi funksiyadan foydalanib, biz juda bo'lmaganda sodda tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot funksiyalar o'zining momentlari orqali to'la aniqlanishini ko'rsatishimiz mumkin.

1-teorema. ξ diskret tasodifiy miqdor $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ qiymatlarni qabul qilib, $a_k = M\xi^k$, $k = 0,1,2,...$ momentlarga ega bo'lsin. U holda

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!}$$

momentlar qatori $g(t)$ barcha t sonlar uchun cheksiz marta differensiallanuvchi funksiyadir.

Isboti. $a_k = M\xi^k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k p(x_j)$ tenglik o'rinli. Agar $M = \max_j |x_j|$ bo'lsa, u holda

$$|a_k| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|^k p(x_j) \le M^k \sum_{j=1}^{n} p(x_j) = M^k.$$

Demak, barcha N lar uchun

$$\sum_{k=0}^{N} \left|\frac{a_k t^k}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(M|t|\right)^k}{k!} \le e^{M|t|}$$

tengsizlik o'rinli va bundan barcha t sonlar uchun momentlar qatorining $g(t)$ funksiyaga yaqinlashishi kelib chiqadi. $g(t)$ darajali qator bo'lgani uchun uning yig'indisi cheksiz ko'p marta differensiallanuvchidir.

Demak, $a_k, k=0,1,...$ momentlar $g(t)$ funksiyani to'la aniqlar ekan. Aksincha $a_k = g^{(k)}(0)$ bo'lgani uchun, $g(t)$ ham a_k momentlarni aniqlaydi.

2-teorema. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ qiymatlarni qabul qiluvchi sodda ξ tasodifiy miqdor P_ξ taqsimotga va $g(t)$ momentlar hosil qiluvchi funksiyasiga ega bo'lsin. U holda $g(t)$ P_ξ orqali bir qiymatli aniqlanadi va aksincha.

Isboti.

$$g(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{tx_j} p(x_j)$$

bo'lgani uchun P_ξ $g(t)$ funksiyani bir qiymatli aniqlaydi. (1) formulada $p(x_j) = p_j$ deb belgilaymiz va t ning n ta turli $t_1, t_2, ..., t_n$ qiymatlarini tanlab, $b_i = g(t_i)$ deb, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} e^{t_i x_j} p_j, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

yoki uni matritsaviy shaklda

$$B = MP$$

deb ifodalashimiz mumkin. Bu yerda $B = (b_i), P = (p_i)$ n o'lchovli ustun vektorlar, $M = \left(e^{t_i x_j}\right)$ esa $n \times n$ o'lchovli kvadrat matritsa. Hosil bo'lgan matritsaviy tenglamani M matritsa teskarilanuvchan, ya'ni uning determinanti noldan farqli bo'lgandagina P ga nisbatan yechish mumkin. Bu holda

$$P = M^{-1} B$$

bo'ladi. Agar t_i ni $t_i = i - 1$ ko'rinishida tanlasak, u holda M matritsaning determinanti quyidagi

18. Agar $M\xi$ chekli bo'lsa, u holda ushbu

$$M\xi = \int_0^{\infty}(1-F(y))dy - \int_{-\infty}^{0}F(y)dy = \int_0^{\infty}(1-F(+y)+F(-y))dy$$

tenglik o'rinli va aksincha, o'ng tomondagi integrallarning cheklili-gidan, $M\xi < \infty$ tengsizlik kelib chiqishi isbotlansin.

19. Har biri ikkitadan qiymat qabul qiluvchi ξ va η tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiyasi 0 bo'lishi uchun ular bog'liqsiz bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

20. ξ va η butun manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi < \infty$ bo'lsin. U holda

$$M\min\{\xi,\eta\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\}P\{\eta \geq k\}$$

ekanligi isbotlansin.

21. ξ va η – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi$ aniqlangan bo'lsin.

$$M\{\xi / \xi+\eta\} = M\{\eta / \xi+\eta\} = \frac{\xi+\eta}{2}$$

tenglik ko'rsatilsin.

22. $\xi_1, \xi_2, ...$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun $M|\xi_1| < \infty$ shart bajarilsin. U holda

$$M\{\xi_1 / S_n, S_{n+1}, ...\} = \frac{S_n}{n} \text{ (d.m.)}$$

ekanligi isbotlansin, bu yerda $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$.

TEST SAVOLLARI

1. ξ va η tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi qaysi formulada to'g'ri ko'rsatilgan?

A. $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ B. $\frac{M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

C. $M(\xi - M\xi)^2(\eta - M\eta)^2$ D. $M\xi\eta$.

2. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va $D(\xi+\eta)=10$; $D\xi=6$ bo'lsa, $D\eta$ topilsin.

A. 1 B. 0,4 C. 0,6 D. 4.

3. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi=3$; $M\eta=-2$ bo'lsa, $M(4\xi+3\eta)$ topilsin.

A. 18 B. 6 C. -6 D. 30.

4. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va $D\xi=4$, $D\eta=2$ bo'lsa, $D(2\xi-3\eta)$ hisoblansin.

A. 44 B. 24 C. 34 D. 16.

5. Agar ξ tasodifiy miqdor $(n;p)$ parametrli binomial taqsimotga ega bo'lsa, uning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

A. $0; np(1-p)$. B. $np; pq$ C. $npq; np$ D. $np; np(1-p)$

6. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

A. $\frac{a+b}{2}; \frac{(b-a)^2}{12}$ B. $\frac{b-a}{2}; \frac{(a+b)^2}{12}$

C. $\frac{a+b}{2}; \frac{(b-a)^2}{6}$ D. $\frac{b-a}{2}; \frac{(a-b)^2}{12}$.

7. α parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

A. $\alpha; \frac{1}{\alpha}$ B. $\alpha; \alpha^2$ C. $\alpha; \alpha$ D. $\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}$.

8 . α parametrli eksponensial taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

A. $\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha^2}$ B. $\alpha; \frac{1}{\alpha}$ C. $\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}$ D. $\alpha; \alpha^2$.

9. (a,σ^2) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

A. $0; 1$ B. $a; \sigma$ C. $0; \sigma^2$ D. $a; \sigma^2$

10 ξ va η tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffisiyenti 1 ga teng. ξ va η miqdorlar haqida nima deyish mumkin?

A. Ular chiziqli bog'liqli

B. Ular bog'liqsiz

C. Ular haqida hech narsa deb bo'lmaydi

D. Ular ixtiyoriy funksional bog'lanishga ega.

11. Qanday tasodifiy miqdorlar uchun $D(X-Y)=DX+DY$ tenglik o'rinli?

A. Bu tenglik hech qachon bajarilmaydi

B. Diskret tasodifiy miqdorlar

C. Ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar.

D. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar.

12. ξ_k tasodifiy miqdorlar mos ravishda k parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lsa ($k=1,2,...,n$), $M(\xi_1+...+\xi_n)$ hisoblansin.

A. $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ B. nk C. $\frac{n(n+1)}{2}$ D. $n(n+1)$.

13. ξ va η tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari ucnun qaysi munosabat xususan o'rinli emas?

A. $MC\xi=CM\xi$. B. $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$

C. $M\xi\eta=M\xi M\eta$ D. $\xi\le\eta\Rightarrow M\xi\le M\eta$.

14. Noto'g'ri tenglikni ko'rsating.

A. $DC\xi=C^2D\xi$ B. $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$

C. $DC>0$ D. $D(\xi+C)=D\xi$.

15. ξ – $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor va $\eta=2\xi+1$ bo'lsa, $M\eta$ topilsin.

A. 2 B. 3 C. 5 D. 0,5.

16. Qanday tasodifiy miqdorlar uchun $M\xi\eta=M\xi M\eta$ tenglik o'rinli?

A. Ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar

B. Diskret tasodifiy miqdorlar

C. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar

D. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar.

17. (a,σ^2) – parametr bilan normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdor uchun $M(\xi-a)^3$ni toping.

A. a B. 0 C. a^3 D. $a\sigma^2$.

18. Agar ξ_1 ва ξ_2 bog'liqsiz va har biri mos ravishda (2;1) hamda (1;4) parametrlar bilan normal taqsimlangan bo'lsa, $D(\xi_1 - \xi_2)$ ni toping.

A. 5 B. 1 C. 2 D. 6.

19. Qanday shartda $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ tenglik o'rinli?

A. Har doim

B. ξ va η bog'liqsiz

C. ξ va η lar uzluksiz taqsimotga ega

D. ξ va η diskret taqsimlangan.

20. Agar ξ va η bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi = 1$, $M\eta = 2$, $D\xi = 1$, $D\eta = 4$ bo'lsa, $M(\xi + \eta + 1)^2$ ni toping.

A. 16. B. 5. C. 10. D. 21.

21. Tanga "gerb" tomoni tushgunga qadar tashlanadi. Tashlashlar soni X ning matematik kutilmasini toping.

A 2,5 B. 0,5 C. 4 D. 2.

22. Agar ξ tasodifiy miqdor $N(a;\sigma^2)$ normal qonun bo'yicha taqsimlangan va $M\xi = 1$, $M\xi^2 = 2$ bo'lsa, a va σ^2 larni toping.

A. 1 va 1. B. 1 va 2. C. 2 va 1. D. 2 va 2.

23. Agar $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$ bo'lib, $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ bo'lsa, $M\eta$ va $D\eta$ larni toping.

A. $a,1$ B. $0;\sigma^2$ C. $a;1/\sigma$ D. $0;1$.

24. Agar ξ tasodifiy miqdor $B(2;0,5)$ binomial qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, $M(\xi - 1)^2$ ni toping.

A. 3/2 B. -3/2 C. 0 D. 1/2.

tenglikni ishlatib, $h_{S_\nu}(z)=Mz^{S_\nu}$ hosil qiluvchi funksiyani shartli matematik kutilma yordamida aniqlaymiz:

$$h_{S_\nu}(z)=Mz^{S_\nu}=M\left(M\left\{z^{\xi_1+\ldots+\xi_n}/\nu\right\}\right)=M\left[h_\xi(z)\right]^\nu=h_\nu(h_\xi(z)).$$

(6) va (3) formulalardan foydalanib S_ν tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$h'_{S_\nu}(z)=h'_\nu(h_\xi(z))h'_\xi(z),$$

$$h'_{S_\nu}(1)=h'_\nu(1)h'_\xi(1),$$

$$h''_{S_\nu}(z)=h''_\nu(h_\xi(z))[h'_\xi(z)]^2+h'_\nu(h_\xi(z))h''_\xi(z),$$

$$h''_{S_\nu}(1)=h''_\nu(1)[h'_\xi(1)]^2+h'_\nu(1)h''_\xi(1).$$

Demak,

$$MS_\nu=M\nu M\xi_1,$$

$$DS_\nu=h''_\nu(1)[h'_\xi(1)]^2+h'_\nu(1)h''_\xi(1)+MS_\nu-(MS_\nu)^2=$$

$$=(M\nu^2-M\nu)(M\xi_1)^2+M\nu(M\xi_1^2-M\xi_1)+M\nu M\xi_1-$$

$$-(M\nu)^2(M\xi_1)^2=D\nu(M\xi_1)^2+M\nu D\xi_1.$$

Shunday qilib,

$$MS_\nu=M\nu M\xi_1,$$

$$DS_\nu=D\nu(M\xi_1)^2+M\nu D\xi_1.$$

Yuqorida MS_ν va DS_ν uchun keltirilgan tengliklarga **Vald ayniyatlari** deyiladi va ular ehtimollar nazariyasining ko'p masalalarida keng ko'lamli tatbiqlarga ega.

Bu paragrafning oxirida $\{p_j, j=0,1,...\}$ taqsimot qonunlari bilan hosil qiluvchi funksiyalar orasida (2) va (4) formulalar yordamida aniqlangan moslik nafaqat o'zaro bir qiymatli, shu bilan birga u o'zaro uzluksiz ekanligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

3-teorema. $h_r(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^{(r)}z^n, r=1,2,...$ – $\{p_n^r\}$ taqsimotga mos kelgan hosil qiluvchi funksiyalar ketma-ketligi, $h(z)$ esa $\{p_n\}$ taqsimotning hosil qiluvchi funksiyasi bo'lsin. Har qanday n uchun

$\lim\limits_{r\to\infty} p_n^{(r)} = p_n$ munosabatlarning o'rinli bo'lishi uchun ixtiyoriy $0 \le z < 1$ da quyidagi

$$\lim_{r\to\infty} h_r(z) = h(z) \tag{7}$$

munosabatning o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. $\lim\limits_{r\to\infty} p_n^{(r)}(z) = p_n$ munosabat o'rinli deb faraz qilamiz. $\varepsilon > 0$ va $0 \le z < 1$ bo'lsin. U holda

$$\left|h_r(z) - h(z)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left|p_k^{(r)} - p_k\right| z^k \le \sum_{k=0}^{N-1}\left|p_k^{(r)} - p_k\right| +$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{N-1}\left|p_k^{(r)} - p_k\right| + \frac{z^N}{1-z}$$

Tengsizlikning o'ng tomonida, avval N ni $\frac{z^N}{1-z} < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz, so'ngra r_0 sonni shunday tanlaymizki, $r \ge r_0$ bo'lganda $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left|p_k^{(r)} - p_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Demak, $r \ge r_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi r lar uchun $\left|h_r(z) - h(z)\right| < \varepsilon$. Bundan esa teoremaning zaruriylik sharti kelib chiqadi.

Ehtimollar nazariyasida matematik analizdagi turli bo'limlarning metodlari va analitik apparatlari keng qo'llanishini biz avvalgi boblarda ko'rgan edik. Ehtimollar nazariyasida uchraydigan juda ko'p masalalarning ayniqsa bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning yig'indisi bilan bog'liq bo'lgan masalalarning sodda yechimlarini, nazariyasi matematik analizda rivojlantirilgan va Furye almashtirishlari nomi bilan ma'lum bo'lgan xarakteristik funksiyalar yordamida topish mumkin.

Xarakteristik funksiyalar metodi ehtimollar nazariyasi analitik apparatining asosiy vositalaridan biri ekanligini V bobda limit teoremalarni isbotlashda, xususan Muavr-Laplas teoremasini umumlashtiruvchi markaziy limit teoremani isbotlash jarayonida yaqqol ko'rishimiz mumkin. Ushbu bobda biz xarakteristik funksiyalarning asosiy xossalarini bayon qilish bilan birga, unga tegishli bo'lgan maxsus xossa va teoremalarni ham isboti bilan keltiramiz.

3-§. Xarakteristik funksiyalarning ta'rifi va sodda xossalari

Haqiqiy qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar bilan bir qatorda xarakteristik funksiyalar nazariyasi kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarni jalb etishni taqozo qiladi. Kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdor deb $\zeta(\omega)=\xi_1(\omega)+i\xi_2(\omega)$ ko'rinishidagi funksiyaga aytiladi, bu yerda $\omega\in\Omega$ va (ξ_1,ξ_2) – tasodifiy vektor. Tasodifiy miqdorlarga oid bo'l-gan ko'pgina ta'rif va xossalar kompleks tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas. Masalan, agar $M\xi_1$ va $M\xi_2$ matematik kutilmalar mavjud bo'lsa, u holda $\zeta=\xi_1+i\xi_2$ kompleks tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini

$$M\zeta = M\xi_1 + i\,M\xi_2$$

formula orqali ifodalash tabiiy.

Agar (ξ_1,η_1) va (ξ_2,η_2) tasodifiy vektorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\varsigma_1=\xi_1+i\eta_1$ va $\varsigma_2=\xi_2+i\eta_2$ kompleks tasodifiy miqdorlar bog'-liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Matematik kutilmaning asosiy xossalari kompleks tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlanib qoladi.

2-tarif. ξ –tasodifiy miqdorning **xarakteristik funksiyasi** deb haqiqiy t argumentning ushbu

$$f_\xi(t)=Me^{it\xi}=\int_\Omega e^{it\xi}dP=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_\xi(x) \qquad (8)$$

funksiyasiga aytiladi.

Agar ξ diskret taqsimotga ega bo'lsa, u holda xarakteristik funksiya

$$f_\xi(t)=\sum_k e^{itx_k}P(\xi=x_k)=\sum_k e^{itx_k}p(x_k) \qquad (8')$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Agar ξ tasodifiy miqdor absolut uzluksiz taqsimotga ega bo'-lib, $p(x)$ uning zichlik funksiyasi bo'lsa, u holda

$$f_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p(x)dx \qquad (8'')$$

bo‘ladi, ya’ni absolut uzluksiz tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi $p(x)$ zichlik funksiyaning Furye almashtirishidan iborat.

Eyler formulasiga ko‘ra, $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun (8) tenglikdan

$$f_\xi(t)=M\cos t\xi+iM\sin t\xi$$

kelib chiqadi.

Ushbu $\left|f_\xi(t)\right|=\left|Me^{it\xi}\right|\le 1$ tengsizlikdan ixtiyoriy tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi mavjudligi kelib chiqadi.

Xarakteristik funksiyaning bir nechta eng sodda xossalarini keltiramiz.

4-teorema. $f_\xi(t)-\xi$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi bo‘lsin. U holda

1°. $f_\xi(0)=1$, $\left|f_\xi(t)\right|\le 1$.

2°. Ixtiyoriy a va b o‘zgarmas haqiqiy sonlar uchun $f_{a+b\xi}(t)=e^{iat}f_\xi(bt)$ tenglik o‘rinli.

3°. $\overline{f_\xi}(t)=f_\xi(-t)=f_{-\xi}(t)$.

4°. Agar $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, u holda

$$f_{\xi_1+...+\xi_n}(t)=f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)\cdots f_{\xi_n}(t)$$

tenglik o‘rinli.

5°. $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya $R=(-\infty,\infty)$ da tekis uzluksiz.

6°. $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya haqiqiy bo‘lishi uchun ξ tasodifiy miqdorning $F_\xi(x)$ taqsimot funksiyasi simmetrik bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1°-xossaning isboti $e^{i0}=1$ va $\left|Me^{it\xi}\right|\le M\left|e^{it\xi}\right|=M1=1$ munosabatlardan kelib chiqadi. 2° va 3°-xossalar xarakteristik funksiyaning ta’rifidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$f_{a+b\xi} = Me^{it(a+b\xi)} = e^{ita}Me^{itb\xi} = e^{ita}f_\xi(bt)$$

va

$$\overline{f_\xi}(t) = \overline{Me^{it\xi}} = Me^{\overline{it\xi}} = Me^{-it\xi} = f_\xi(-t).$$

4°-xossaning isboti. $e^{it\xi_1}, e^{it\xi_2}, ..., e^{it\xi_n}$ kompleks tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz. Demak,

$$f_{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(t) = Me^{it(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)} = Me^{it\xi_1}e^{it\xi_2}...e^{it\xi_n} =$$
$$= Me^{it\xi_1}Me^{it\xi_2}...Me^{it\xi_n} = f_{\xi_1}(t)f_{\xi_2}(t)...f_{\xi_n}(t).$$

Bu yerda biz bog'liqsiz kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi chekli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi mos matematik kutilmalarning ko'paytmasiga teng ekanligidan foydalandik.

Endi $f_\xi(t)$ funksiyaning tekis uzluksizligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy haqiqiy $x, y \in R$ sonlar uchun

$$\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \le 2 \tag{9}$$

va

$$\left|e^{ix} - e^{iy}\right| = \left|\int_x^y e^{iu}du\right| \le \left|\int_x^y du\right| = |x - y| \tag{10}$$

tengsizliklar o'rinli.

N ixtiyoriy musbat son bo'lib, $A = \{\omega \in \Omega; |\xi(\omega)| \le N\}$ bo'lsin. U holda

$$\left|f_\xi(t_1) - f_\xi(t_2)\right| = \left|M\left(e^{it_1\xi} - e^{it_2\xi}\right)\right| \le M\left|e^{it_1\xi} - e^{it_2\xi}\right| I_A + M\left|e^{it_1\xi} - e^{it_2\xi}\right| I_{\bar{A}}$$

munosabatdan $|\xi| > N$ bo'lsa, (9) va $|\xi| \le N$ bo'lsa, (10) tengsizlikni qo'llab, ushbu

$$\left|f_\xi(t_1) - f_\xi(t_2)\right| \le |t_1 - t_2| N + 2P(|\xi| > N) \tag{11}$$

tengsizlikning o'rinli ekanligini keltirib chiqaramiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin. Avval N ni shunday tanlaymizki, $P(|\xi| > N) < \varepsilon/4$ bo'lsin, so'ngra $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ deb olamiz, natijada $|t_1 - t_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha t_1, t_2 sonlar uchun (11) munosabatdan

$$|f_\xi(t_1) - f_\xi(t_2)| < \varepsilon$$

tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

6°-xossani isbotlash uchun biz turli taqsimot funksiyalarga turli xarakteristik funksiyalar mos kelishidan foydalanamiz. Darhaqiqat, $\overline{f}_\xi(t) = f_\xi(t)$ bo'lsa va faqat shundagina $f_\xi(t)$ haqiqiy, ya'ni 3°-xossaga ko'ra ξ va $-\xi$ bir xil xarakteristik funksiyaga ega bo'lsa va faqat shundagina u haqiqiy. Ammo bu o'z navbatida ξ va $-\xi$ bir xil taqsimotga ega ya'ni, $F_\xi(x)$ simmetrik ekanligiga ekvivalentdir.

Xarakteristik funksiyalarni qo'llash asosan 1-teoremadagi 4°-xossaga tayanadi. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shish juda murakkab bo'lgan amal – qo'shiluvchilar taqsimot funksiyalarining kompozitsiyasiga keltirilishini biz II bobda ko'rgan edik. Xarakteristik funksiyalar uchun bu murakkab amal xarakteristik funksiyalarni ko'paytirish amali bilan almashtirilar ekan.

4-§. Xarakteristik funksiyalarning maxsus xossalari

5-teorema. Agar $M|\xi|^k < \infty$ bo'lsa, u holda $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya k-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$f_\xi^{(\nu)}(t) = i^\nu \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu e^{itx} dF_\xi(x), \quad \nu = 1, 2, ..., k, \tag{12}$$

$$f_\xi^{(\nu)}(0) = i^\nu M\xi^\nu, \tag{13}$$

$$f_\xi(t) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(it)^\nu}{\nu!} M\xi^\nu + o(t^k), \quad t \to 0. \tag{14}$$

Isboti. (12) tenglikni $\nu = 1$ uchun isbotlaymiz. Quyidagi

$$\frac{f_\xi(t+h) - f_\xi(t)}{h} = M\frac{e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h}$$

munosabatda (10) tengsizlikka ko‘ra $\left|\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right| \le 1$ va teoremaning shartiga ko‘ra $M|\xi| < \infty$ bo‘lgani uchun Lebegning majorant yaqinlashish haqidagi teoremasiga binoan $h \to 0$ da limitga o‘tish mumkin va demak,

$$f'_\xi(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f_\xi(t+h) - f_\xi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} M\frac{e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h} = iM\xi e^{it\xi}$$

tenglik o‘rinli.

(12) munosabatni umumiy holda isbotlash uchun biz ushbu

$$\left|e^{ix} - \left(1 + \frac{ix}{1!} + \cdots + \frac{(ix)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right| \le \min\left\{\frac{|x|^n}{n!}, \frac{2|x|^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \tag{15}$$

tengsizlikdan foydalanamiz.

(15) tengsizlikning $n = 1$ bo‘lgan holi (9) va (10) tengsizliklardan kelib chiqadi. (15) munosabat birorta n uchun o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$\int_0^x \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iu)^k}{k!}\right)du = \frac{1}{i}\left(e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani sababli

$$\left|e^{ix} - \left(1 + \frac{ix}{1!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}\right)\right| \le \int_0^{|x|}\left|e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iu)^k}{k!}\right|du \le \int_0^{|x|}\min\left\{\frac{|u|^n}{n!}, \frac{2|u|^{n-1}}{(n-1)!}\right\}du \le$$

$$\le \min\left\{\int_0^{|x|}\frac{u^n}{n!}du, 2\int_0^{|x|}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}du\right\} = \min\left\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, 2\frac{|x|^n}{n!}\right\}.$$

Demak, to‘liq matematik induksiya metodiga ko‘ra (15) tengsizlikning ixtiyoriy $n \ge 1$ uchun o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

(12) formula $\nu < k$ uchun o'rinli bo'lsin. U holda

$$\frac{f_\xi^{(\nu)}(t+h)-f_\xi^{(\nu)}(t)}{h}=i^\nu M\xi^\nu \frac{e^{it\xi}\left(e^{ih\xi}-1\right)}{h}$$

tenglikdan (15) tengsizlikga asosan

$$\left|\xi^\nu e^{it\xi}\frac{\left(e^{ih\xi}-1\right)}{h}\right|\le|\xi|^{\nu+1}$$

bo'lgani va teoremaning shartiga ko'ra $M|\xi|^{\nu+1}<\infty$ bo'lgani uchun Lebegning majorant yaqinlashish teoremasiga binoan

$$\lim_{h\to0} i^\nu M\xi^\nu \frac{e^{it\xi}\left(e^{ih\xi}-1\right)}{h}=i^{\nu+1}M\xi^{\nu+1}.$$

Shuning uchun

$$f_\xi^{(\nu+1)}(t)=\lim_{h\to0}\frac{f_\xi^{(\nu)}(t+h)-f_\xi^{(\nu)}(t)}{h}=i^{\nu+1}M\xi^{\nu+1}.$$

(12) munosabatda $t=0$ deb, biz (13) formulani hosil qilamiz. (14) munosabatda qoldiq hadni baholash uchun (15) tengsizlikni

$$R_k(t)=\left|f_\xi(t)-\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(it)^\nu}{\nu!}M\xi^\nu\right|=\left|M\left(e^{it\xi}-\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(it\xi)^\nu}{\nu!}\right)\right|$$

ayirmaga qo'llaymiz:

$$R_k(t)\le\frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!}M|\xi|^{k+1}I_A+2M\frac{|t|^k|\xi|^k}{k!}I_{\bar A},\qquad(16)$$

bu yerda $A=\{\omega\in\Omega:|\xi(\omega)|\le N\}$.

Agar $|\xi|>N$ bo'lsa $I_A=0$ bo'lgani sababli (16) dan ushbu

$$R_k(t)\le\frac{NM|\xi|^k|t|^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{2|t|^k}{k!}M|\xi|^k I_{\bar A}$$

tengsizlik kelib chiqadi. $\varepsilon>0$ ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Avval N sonini shunday tanlaymizki, natijada

$$M|\xi|^k I_{\bar A}<\frac{\varepsilon}{4}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsin, so‘ngra $\delta = \frac{\varepsilon(k+1)}{2NM|\xi|^k}$ deb olamiz, natijada $|t| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $t \in R$ sonlar uchun $R_k(t) \le \frac{|t|^k}{k!}\varepsilon$, ya’ni $R_k(t) = o(t^k)$, $t \to 0$ munosabatning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Endi misollar ko‘rishga o‘tamiz.

8-misol. Agar $P(\xi = a) = 1$ bo‘lsa, u holda $f_\xi(t) = e^{ita}$.

9-misol. Agar $\xi; (n; p)$ parametrli binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda $(8')$ formulaga ko‘ra

$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{it}\right)^k p^{n-k} = \left(pe^{it} + q\right)^n.$$

10-misol. $\xi - \lambda$ parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin. U holda

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\}.$$

11-misol. $\xi - p$ parametrli geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin. U holda

$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{it}(1-p)\right)^k = \frac{p}{1-qe^{it}}.$$

12-misol. $\xi - [-a, a]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda

$$f_\xi(t) = \int_{-a}^{a} \frac{e^{itx}}{2a} dx = \frac{\sin at}{at}.$$

13-misol. Agar $\xi - \lambda$ parametrli eksponensial qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa, u holda

$$f_\xi(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{itx - \lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

14-misol. ξ standart $N(0,1)$ normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. U holda

$$f_\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-x^2/2}\,dx.$$

$f_\xi(t)$ funksiyani t bo'yicha differensiallab va bo'laklab integrallab ushbu

$$f_\xi'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ixe^{-itx-x^2/2}\,dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{itx-x^2/2}\,dx=-tf_\xi(t);$$

$$f_\xi'(t)=-tf_\xi(t)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Buning umumiy yechimi $f_\xi(t)=Ce^{-t^2/2}$ ko'rinishga ega. $f_\xi(0)=1$ boshlang'ich shartdan $C=1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$f_\xi(t)=e^{-t^2/2}.$$

Endi $\eta-(a,\sigma)$ parametrli normal qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. U holda η tasodifiy miqdorni $\eta=\sigma\xi+a$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Bundan 1-teoremaning 2°-xossasiga ko'ra

$$f_\eta(t)=e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

ekanligi kelib chiqadi.

15-misol. $\xi-a$ parametrli Koshi taqsimotiga ega bo'lsin. U holda

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2},$$

va

$$f_\xi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{a}{a^2+x^2}dx=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx.$$

$f_\xi(t)$ – juft funksiya bo'lgani sababli uning $t>0$ nuqtalardagi qiymatlarini bilish kifoya. Oxirgi tenglikning har ikkala tomonidan t bo'yicha hosila olsak,

$$f'_\xi(t)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x\sin tx}{x^2+a^2}dx. \tag{17}$$

Matematik analiz kursidan bizga ma'lumki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\pi,(t>0). \text{ shuning uchun ham } a=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{x}dx \tag{18}$$

(17) va (18) tengliklarni birgalikda qo'shib quyidagini topamiz:

$$f'_\xi(t)+a=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\sin tx}{x}dx$$

Oxirgi tenglikning har ikkala tomonidan t bo'yicha hosila olib, topamiz.

$f''_\xi(t)=a^2 f_\xi(t)$. Demak, $f_\xi(t)=c_1e^{at}+c_2e^{-at}, t>0$. $f_\xi(t)$ – R da aniqlangan chekli funksiya bo'lgani sababli, $c_1=0$, $f_\xi(0)=1$ shartdan $c_2=1$ ekanligini hosil qilamiz. Shunday qilib, $t>0$ uchun $f_\xi(t)=e^{-at}$. Bundan $f_\xi(t)$ funksiyaning juft ekanligini hisobga olib, $f_\xi(t)=e^{-a|t|}, t\in R$ tenglikga kelamiz.

5-§. Teskarilash formulasi

Har bir $F(x)$ taqsimot funksiya uchun (8) formula orqali aniqlangan $f(t)$ xarakteristik funksiya mos keladi. Bu fikrning teskarisi ham o'rinli, ya'ni taqsimot funksiya xarakteristik funksiya orqali bir qiymatli aniqlanadi.

6-teorema (***teskarilash formulasi***). $F=F(x)$ – taqsimot funksiya va

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x) \tag{19}$$

unga mos kelgan xarakteristik funksiya bo'lsin.

1°) Agar a va b ($a<b$) lar $F(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalari bo'lsa, u holda

$$F(b)-F(a)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{itb}}{it}f(t)dt. \qquad (20)$$

2°) Agar $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ bo'lsa, u holda $F(x)$ absolut uzluksiz taqsimot funksiya bo'lib, uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)dt \qquad (21)$$

formula orqali ifodalanadi.

Isboti. Avval $F(x)$ absolut uzluksiz bo'lgan holni ko'raylik. Bunda (8″) formulaga ko'ra

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p(x)dx$$

va shuning uchun ham (21) formula integrallanuvchi $f(t)$ funksiyaning Furye almashtirishidan iborat. (21) tenglikning chap va o'ng tomonlarini integrallab, hosil bo'lgan ifodada integrallash tartibini o'zgartirib, topamiz:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b p(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt\right]dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\int_a^b e^{-itx}dx\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}dt.$$

Demak, bu xususiy holda teskarilash formulasi Furye integral almashtirishining natijasidan iborat.

Endi (20) formulani umumiy holda isbotlashga o'tamiz.

1°. (12) formuladan ushbu

$$J_A=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)\right]dt \quad (22)$$

tenglikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

(10) tengsizlikdan

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right|=\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right|\le b-a$$

ekanligi kelib chiqadi. Shu bilan birga

$$\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{+\infty}(b-a)\,dF(x)\le 2A(b-a)<\infty$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun (22) integralda Fubini teoremasiga ko'ra integrallash tartibini almashtirish mumkin. Shunday qilib,

$$J_A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\,dt\right]dF(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-A}^{A}\frac{\sin t(x-a)-\sin t(x-b)}{t}\,dt\right]dF(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-A(x-a)}^{A(x-a)}\frac{\sin z}{z}\,dz-\int_{-A(x-b)}^{A(x-b)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right]dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_A(x)\,dF(x), \quad (23)$$

bu yerda

$$G_A(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-A(x-a)}^{A(x-a)}\frac{\sin z}{z}\,dz-\int_{-A(x-b)}^{A(x-b)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right] \qquad (24)$$

$g(x,y)=\int_x^y\frac{\sin z}{z}\,dz$ funksiya x va y argumentlar bo'yicha tekis uzluksiz va

$$\lim_{x\to-\infty,\ y\to+\infty} g(x,y)=\pi \qquad (25)$$

tenglik o'rinli. Bundan barcha A va x sonlar uchun shunday C o'zgarmas son topiladiki, uning uchun $|G_A(x)|\le C<\infty$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Shu bilan birga, (24) va (25) tengliklardan

$$\lim_{A\to\infty}G_A(x)=G(x)$$

limitning mavjudligini osongina isbotlash mumkin. Bu yerda

$$G(x)=\begin{cases}0, x<a, x>b;\\ \frac{1}{2}, x=a, x=b;\\ 1, a<x<b.\end{cases}$$

Bundan va Lebegning majorant yaqinlashish haqidagi teoremasiga binoan integral belgisi ostida $A\to\infty$ da limitga o'tish mumkinligidan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$\lim_{A\to\infty} J_A=\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G_A(x)dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dF(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{a} G(x)dF(x)+\int_{a}^{b} G(x)dF(x)+\int_{b}^{\infty} G(x)dF(x)=$$

$$=F(b-)-F(a)+\frac{1}{2}\left[F(a)-F(a-)+F(b)-F(b-)\right]$$

Agar a va b nuqtalarni $F(x)$ funksiyaning uzilish nuqtalari ekanligini e'tiborga olsak, oxirgi tenglikdan (13) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

6-§. Taqsimot funksiyalar to'plami bilan xarakteristik funksiyalar orasidagi moslikning uzluksizligi

Uchunchi paragrafda biz tasodifiy funksiyalar to'plami va xarakteristik funksiyalar to'plamlari orasida o'zaro birqiymatlik moslik (biyeksiya) mavjud ekanligini ko'rsatgan edik. Ushbu paragrafda bu moslik o'zaro uzluksiz, ya'ni u gomomorfizm ekanligini ham ko'rsatamiz. Buning uchun biz bu to'plamlarda mos topologiyalar kiritishimiz zarur bo'ladi. Xarakteristik funksiyalar to'plamida nuqtaviy yaqinlashish yoki kompaktlarda tekis yaqinlashish topologiyasini, taqsimot funksiyalar to'plamida esa sust yaqinlashish topologiyasini kiritamiz.

3-tarif. $\{F_n(x), n\geq 1\}$ va $F(x)-$ taqsimot funksiyalar bo'lsin. Agar $F(x)$ funksiyaning ixtiyoriy uzluksiz nuqtasi x uchun

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $F_n(x)$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $F(x)$ taqsimot funksiyaga sust yaqinlashadi deyiladi va

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$$

simvol orqali belgilanadi.

1-izoh. $F(x)$ – taqsimot funksiya bo'lmagan holda ham yuqoridagi ta'rifdan foydalanamiz.

Quyida keltirilgan misol taqsimot funksiyalarning sust limiti taqsimot funksiya bo'lishi shart emasligini ko'rsatadi.

16-misol. $\{F_n(x), n \geq 1\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi ushbu

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, x < n, \\ 1, x \geq n \end{cases}$$

formula yordamida aniqlangan bo'lsin. U holda, $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, bu yerda $F(x) = 0$, $x \in R$.

1-lemma. D to'plam R da hamma joyda zich to'plam bo'lsin. Agar $\{F_n(x), n \geq 1\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi ixtiyoriy $x \in D$ uchun $n \to \infty$ da $F(x)$ taqsimot funksiyaga intilsa, u holda $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$.

Isboti. x nuqta $F(x)$ taqsimot funksiyaning fiksirlangan uzluksizlik nuqtasi bo'lsin.

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} F(x)$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $\bar{D} = R$ bo'lgani sababli, $x' < x < x''$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $x', x'' \in D$ nuqtalar mavjud. 1-lemmaning shartlaridan

$$F(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x'')$$

munosabatlarning o'rinli ekanligi bevosita kelib chiqadi. x nuqta $F(x)$ taqsimot funksiyaning uzluksizlik nuqtasi bo'lgani uchun $F(x')$ va $F(x'')$ lar bir-biriga istalgancha yaqin bo'lishi mumkin.

7-teorema (Xellining birinchi teoremasi). Taqsimot funksiyalarning ixtiyoriy ketma-ketligidan sust yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin. Shu bilan birga $F(x)$ limit funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) $F(x)$ monoton kamaymaydigan funksiya;

2) $F(x)$ o'ngdan uzluksiz;

3) ixtiyoriy $x \in R$ uchun $0 \leq F(x) \leq 1$.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun Kantorning diagonallashtirish metodidan foydalanamiz. $D = \{x_k\} - R$ da hamma joyda zich sanoqli to'plam bo'lsin. $\{F_n(x_1)\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. $F_n(x)$ – taqsimot funksiya ekanligini hisobga olib, topamiz:

$$0 \leq \{F_n(x_1)\} \leq 1, \quad n \geq 1.$$

Veyershtrass teoremasiga ko'ra bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{F_{n_1}(x_1)\}$ qism ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu ketma-ketlikning limitini $F(x_1)$ orqali belgilaymiz.

Endi $\{F_n(x_2)\}$ sonli ketma-ketlikni olamiz, $0 \leq \{F_{n_1}(x_2)\} \leq 1, n \geq 1$ tengsizliklardan Veyershtrass teoremasini ishlatib, $F(x_2)$ga yaqinlashuvchi $\{F_{n_2}(x_2)\}$ qism ketma-ketlikning mavjudligiga ishonch hosil qilamiz va shu kabi davom ettirib, $\{F_{n_k}(x_k)\}$ qismiy ketma-ketliklarni topamiz hamda uning limitini $F(x_k)$ orqali belgilaymiz.

Nihoyat, taqsimot funksiyalarning $\{F_{n_n}(x)\}$ diagonal ketma-ketligini olamiz,

$\{F_{n_n}(x)\} \subset \{F_n(x)\}$ va yasalishiga ko'ra, ixtiyoriy $x_k \in D$ uchun

$$F_{n_n}(x_k) \underset{n\to\infty}{\to} F(x_k).$$

Demak, 1-lemmaga asosan, $F_{n_n} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F$.

$F(x)$ funksiya, 4-teoremada keltirilgan shartlarni qanoatlantirishi limitlarning xossalaridan kelib chiqadi.

8-teorema (Xellining ikkinchi teoremasi). $\{F_n(x)\}$ – taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $n \to \infty$ da $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ funksiyaga sust yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy uzluksiz va chegaralangan $g(x): R \to R$ funksiya uchun

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) \tag{26}$$

munosabat o'rinli.

2-izoh. 5-teoremani quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin: $F_n \Rightarrow F$ bo'lsin, bu yerda F_n va F taqsimot funksiyalar. U holda ixtiyoriy uzluksiz va chegaralangan $g(x): R \to R$ funksiya uchun (26) munosabat o'rinli.

Isbotni ikki bosqichda o'tkazamiz.

1-bosqich. F funksiyaning ixtiyoriy ikkita $a < b$ uzluksizlik nuqtalari uchun

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)dF_n(x) = \int_a^b g(x)dF(x) \tag{27}$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$g(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani sababli, u $[a,b]$ oraliqda tekis uzluksizdir. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ uchun $[a,b]$ oraliqni $a = x_0, \dots, x_L = b$ nuqtalar yordamida shunday oraliqlarga ajratish mumkinki, natijada ixtiyoriy $x \in (x_{k-1}, x_k]$ uchun $|g_k(x) - g(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g_k(x) = g(x_k), \forall x \in (x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, L$. F funksiyaning uzluksizlik nuqtalari hamma joyda zich joylashgani uchun barcha x_k lar F funksiyaning uzluksizlik nuqtalaridan iborat deb olishimiz mumkin. Endi g funksiyaning chegaralanganligi va Riman-Stiltyes integralining xossasiga ko'ra,

$$\left|\int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF(x)\right| \le \left|\int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g_k(x)dF_n(x)\right| +$$

$$+\left|\int_a^b g_k(x)dF_n(x) - \int_a^b g_k(x)dF(x)\right| + \left|\int_a^b g_k(x)dF(x) - \int_a^b g(x)dF(x)\right| \le$$

$$\le \int_a^b |g(x)-g_k(x)|dF_n(x)+\left|\sum_{k=1}^{L}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x_k)dF_n(x)-\sum_{k=1}^{L}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x_k)dF(x)\right|+$$

$$+\int_a^b |g(x)-g_k(x)|dF(x)\le \varepsilon\left(F_n(b)-F_n(a)\right)+\varepsilon\left(F(b)-F(a)\right)+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{L} g(x_k)[F_n(x_k)-F_n(x_{k-1})-F(x_k)+F(x_{k-1})]\right|\le 2\varepsilon+$$

$$+M\sum_{k=1}^{L}\left|(F_n(x_k)-F(x_k))-(F_n(x_{k-1})-F(x_{k-1}))\right|.$$

(27) munosabatni isbotlash uchun, avval L ni yetarlicha katta qilib belgilaymiz, so'ngra $n\to\infty$ va F_n taqsimot funksiyalar ketma-ketligini F taqsimot funksiyaga $n\to\infty$ da $x_k, k=1,2,...,L,$ nuqtalarda intilishini hisobga olamiz.

2-bosqich. (26) ifodaning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. 2-izohga ko'ra, $F(x)$ taqsimot funksiya bo'lgani sababli, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $F(x)$ funksiyaning shunday $-X$ va X uzluksizlik nuqtalari mavjudki, ular uchun

$$F(-X)<\varepsilon/2,\ 1-F(X)<\varepsilon/2$$

va $n\to\infty$ da $F_n\Rightarrow F$ bo'lgani sababli shunday $n_0\in N$ son mavjudki, barcha $n>n_0$ sonlar uchun

$$F_n(-X)<\varepsilon/2,\ 1-F_n(X)<\varepsilon/2$$

tengsizliklar o'rinlidir.

Yuqorida aytilganlarni e'tiborga olib, $g(x)$ funksiya chegaralangan bo'lgani sababli,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_n(x)-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)\right|\le \int_{|x|>X}|g(x)|dF_n(x)+$$

$$+\left|\int_{|x|<X} g(x)dF_n(x)-\int_{|x|<X}|g(x)|dF(x)\right|+\int_{|x|>X}|g(x)|dF(x)\le$$

$$\le M\left(F_n(-x)+(1-F(x)\right)+\varepsilon+M\left(F(-X)+(1-F(X)\right)\le 3M\varepsilon+\varepsilon.$$

8-teorema isbotlandi.

Xellining ikkinchi teoremasiga teskari teorema ham o'rinli.

9-teorema. Agar ixtiyoriy chegaralangan uzluksiz $g : R \to R$ funksiya uchun

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$$

bo'lsa, u holda

$$F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F,$$

bu yerda F_n, $n=1,2,...$ va F lar taqsimot funksiyalar.

10-teorema (to'g'ri limit teorema). Agar $\{F_n\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $n\to\infty$ da taqsimot funksiyaga sust yaqinlashsa, u holda ularga mos kelgan xarakteristik funksiyalar $\{f_n\}$ ketma-ketligi F taqsimot funksiyaga mos kelgan f xarakteristik funksiyaga nuqtaviy yaqinlashadi.

3-izoh. Bu teoremadagi nuqtaviy yaqinlashishni R dagi ixtiyoriy kompaktda tekis yaqinlashish bilan almashtirish mumkin.

10-teoremaning ishoti Xellining ikkinchi teoremasi va xarakteristik funksiyaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Bu yerda biz $g(x)=e^{itx}, x\in R$ deb olamiz, i va t larga esa parametrlar deb qaraymiz.

11-teorema (teskari limit teorema). $\{f_n\}$ – xarakteristik funksiyalar ketma-ketligi 0 da uzluksiz f funksiyaga nuqtaviy yaqinlashsin. U holda mos taqsimot funksiyalar $\{F_n\}$ ketma-ketligi F taqsimot funksiyaga sust yaqinlashadi va f funksiya F taqsimot funksiyaga mos kelgan xarakteristik funksiya bo'ladi.

Isboti. $\{F_n\}$ – $\{f_n\}$ xarakteristik funksiyalar ketma-ketligiga mos kelgan taqsimot funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. Xellining birinchi teoremasidan sust yaqinlashuvchi $\{F_{n_k}\}\subset\{F_n\}$ qism ketma-ketlikning mavjud ekanligi kelib chiqadi. $F_{n_k}\Rightarrow F$ bo'lsin. F-taqsimot funksiya ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $F(+\infty)-F(-\infty)=1$ ekanligini ko'rsatish kifoya. Kelgusida isbot uchun bizga quyidagi tengsizlik kerak bo'ladi:

$$P\{|\xi|\le x\}\ge \frac{\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\,dt\right|-\frac{1}{\tau x}}{1-\frac{1}{\tau x}}. \tag{28}$$

$\tau x=2$ deylik. U holda (28) tengsizlik

$$P\{|\xi|\le x\}\ge \frac{\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\,dt\right|-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\,dt\right|-1 \tag{29}$$

ko'rinishga keladi.

(28) tengsizlikni isbotlaymiz. Xarakteristik funksiyaning ta'rifi va Fubini teoremasiga ko'ra

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} Me^{it\xi}\,dt\right|=\left|\frac{1}{2\tau}M\int_{-\tau}^{+\tau} e^{it\xi}\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\tau}M\frac{\sin\tau\xi}{\xi}\right|=\left|\frac{1}{\tau}M\frac{\sin\tau\xi}{\xi}\right|I_{\{|\xi|>x\}}+\left|\frac{1}{\tau}M\frac{\sin\tau\xi}{\xi}\right|I_{\{|\xi|\le x\}}\le$$

$$\le M\left|\frac{\sin\tau\xi}{\tau\xi}\right|I_{\{|\xi|>x\}}+M\left|\frac{\sin\tau\xi}{\tau\xi}\right|I_{\{|\xi|\le x\}}\le P\{|\xi|\le x\}+\frac{1}{\tau x}\left(1-P(|\xi|\le x\right).$$

Oxirgi tengsizlik (28) bilan bir xil ekanligini ko'rish qiyin emas. $f(x)$ funksiya 0 nuqtada uzluksiz va u $\{f_n(t)\}$ xarakteristik funksiyalar ketma-ketligining nuqtaviy limiti bo'lgani uchun $f(0)=1$ va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\tau_0>0$ mavjudki, $0<\tau<\tau_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy τ lar uchun

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\,dt\right|>1-\frac{\varepsilon}{4} \tag{30}$$

tengsizlik o'rinli.

$n \to \infty$ da $f_n(t) \to f(t)$ ekanligidan, barcha $n > n_0$ va $\tau \in (0, \tau_0]$ sonlar uchun

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} f_n(t)dt - \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{31}$$

tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. (30) va (31) tengsizliklardan, ixtiyoriy $n > n_0$ va $0 < \tau \le \tau_0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha τ sonlar uchun

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} f_n(t)dt \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} . \tag{32}$$

(32) va (30) tengsizliklardan, ixtiyoriy $n > n_0$ va $0 < \tau \le \tau_0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha τ sonlar uchun,

$$F_{n_k}\left(\frac{2}{\tau}\right) - F_{n_k}\left(-\frac{2}{\tau} - 0\right) \ge P\left\{\left|\xi_{n_k}\right| \le \frac{2}{\tau}\right\} \ge 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1 = 1 - \varepsilon.$$

Oxirgi tengsizlikdan, $\varepsilon > 0$ va $\tau > 0$ ixtiyoriy sonlar bo'lgani uchun

$$F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

tenlik kelib chiqadi. Sunday qilib, $F(x)$ning taqsimot funksiya ekanligi isbotlandi.

Yuqorida aytilganlardan, to'g'ri limit teoremaga ko'ra

$$\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x), t \in R$$

Munosabat o'rinli. Ammo teoremaning shartiga ko'ra

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$$

bo'lgani sababli $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$ funksiya $F(x)$ taqsimot funksiyaga mos kelgan xarakteristik funksiya bo'ladi.

Endi $F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F$ munosabatning o'rinli ekanligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilamiz: F_n taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $n \to \infty$ da $F-$ taqsimot funksiyaga sust yaqinlashmasin. U holda

$$\exists F_{m_k};\left\{F_{m_k}\right\} \subset \left\{F_n\right\}, F_{m_k} \Rightarrow F^*,\ F^* \neq F,$$

shu bilan birga F^* va F taqsimot funksiyalar. To'g'ri limit teoremaga ko'ra

$$f_{n_k}(t) \to f(t),$$

$$f_{m_k}(t) \to f^*(t), k \to \infty,$$

va yagonalik teoremasidan $f(t) \neq f^*(t)$, ammo bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ va shuning uchun ham $f(t) = f^*(t)$. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik farazimizni noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. 8-teorema isbot bo'ldi.

IV BOBGA DOIR MASALALAR

1. $f(t) = f(-t),\ f(t+2a) = f(t), 0 \le t \le a$ bo'lsa, $f(t) = \frac{a-t}{a}$ tengliklar yordamida aniqlangan funksiya xarakteristik funksiya ekanligi isbotlansin.

2. ξ_2 va ξ_3 turli taqsimlangan bo'lib, $\xi_1 + \xi_2$ va $\xi_1 + \xi_3$ yig'indilarning taqsimot funksiyalari bir xil, bog'liqsiz ξ_1, ξ_2, ξ_3 tasodifiy miqdorlarni topish mumkin ekanligini isbotlang.

3. Agar $f(t), t \in R$ xarakteristik funksiya bo'lsa, u holda

$$\phi_1(t) = \begin{cases} f(t), |t| \le a, \\ f(t+2a), |t| > a, \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du,$$

$$\phi_3(t) = \exp\{f(t) - 1\}$$

funksiyalar ham xarakteristik funksiyalar ekanligi isbotlansin.

4. $f(t),\ t\in R$ xarakteristik funksiya uchun

$$1-|f(2t)|^2 \le 4\left(1-|f(t)|\right)^2,\ t\in R$$

tengsizlik o‘rinli ekanligi isbotlansin.

5. Har qanday haqiqiy $f(t), t\in R$ xarakteristik funksiya uchun

$$1+f(2t)\ge 2[f(t)]^2$$

tengsizlik o‘rinli ekanligi isbotlansin.

6. Agar $F(x)$ taqsimot funksiya va $f(t)$ uning xarakteristik funksiyasi bo‘lsa, u holda har qanday $x\in R$ uchun

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-itx}dt = F(x)-F(x-0)$$

tenglik isbotlansin.

7. F taqsimot funksiya, x_k uning sakrash nuqtalari, f unga mos kelgan xarakteristik funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt=\sum_k[F(x_k)-F(x_k-0)]$$

tenglik isbotlansin.

8. Absolut uzluksiz tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi $t\to\infty$ da nolga intilishi isbotlansin.

9. f_1, f_2, f_3- xarakteristik funksiyalar va $f_1f_2=f_1f_3$ bo‘lsin. Bundan $f_2=f_3$ tenglik kelib chiqadimi?

10. Agar f_1 va f_2- xarakteristik funksiyalar bo‘lib, $0\le\theta\le1$ bo‘lsa, u holda $(1-\theta)f_1+\theta f_2$ ham xarakteristik funksiya ekanligini ko‘rsating.

11. Agar $M\xi=0$ bo‘lsa, u holda

$$M|\xi|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{Re}f(t)}{t^2}dt$$

tenglik isbotlansin. Bu yerda $f-$ xarakteristik funksiya, $\operatorname{Re}f$ esa f ning haqiqiy qismi. Agar $D\xi$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$M|\xi|=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{Re}f'(t)}{t}dt$$

tenglik isbotlansin.

12. Xarakteristik funksiya juft funksiya bo'lishi uchun unga mos kelgan $F(x)$ taqsimot funksiya

$$F(x)=1-F(-x-0)$$

shartni qanoatlantirishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

13. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shganda uchinchi markaziy momentlar qo'shiladi, to'rtinchilari esa qo'shilmasligi isbotlansin.

14. $f_{\xi,\eta}(t,t)=f_\xi(t)\cdot f_\eta(t), t\in R$ tenglikdan ξ va η tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi kelib chiqmasligi isbotlansin.

15. $f_{\xi+\eta}(t,t)=f_\xi(t)\cdot f_\eta(t), t\in R$ tenglikdan ξ va η tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi kelib chiqmasligi isbotlansin.

16. ξ tasodifiy miqdorlarning nolda differensiallanuvchi ekanligidan $M\xi$ ning mavjud ekanligi kelib chiqmasligi isbotlansin.

17. Xarakteristik funksiya haqiqiy qiymatli bo'lishi uchun u juft funksiya bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

18. Quyidagi funksiyalar xarakteristik funksiya bo'la olmasligi isbotlansin:

a) $e^{-|t|}$; b) e^{-t^4};

c) $a_1\cos t+...+a_n\cos nt+b_1\sin t+...+b_n\sin nt, \quad b_1,...,b_n\neq 0$, bu yerda $a_i,b_i\in R$.

19. $\cos t^2$ funksiya xarakteristik funksiyami?

20. $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor $(\Omega,\Re,P)-$ ehtimollar fazosida aniqlangan, bu yerda $\Omega=[0,1]$, $\Re=\Re_{[0,1]}-[0,1]$ oraliqdagi Borel to'plamlarining σ-algebrasi va $P=P_\lambda-$ Lebeg o'lchovi. Agar

a) $\xi(\omega)=\begin{cases}2\omega, 0\le\omega\le\frac{1}{2},\\ 2\omega-1, \frac{1}{2}<\omega\le 1;\end{cases}$

b) $\xi(\omega)=\ln\omega; \xi(0)=0;$

c) $\xi(\omega)=\begin{cases}1, 0\le\omega\le 1/3,\\ 0, 1/3<\omega<2/3,\\ 1, 2/3\le\omega\le 1\end{cases}$

bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasi topilsin.

21. Zichlik funksiyasi $\frac{1}{\pi chx}, -\infty < x < \infty$ bo'lgan taqsimotning xarakteristik funksiyasini toping.

22. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) - R^n$ dagi tasodifiy vektor, $f(t_1, ..., t_n) -$ uning xarakteristik funksiyasi, $f_1(t), ..., f_n(t) -$ mos ravishda $\xi_1, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning xarakteristik funksiyalari bo'lsin. $\xi_1, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun ixtiyoriy $t_1, ..., t_n$ lar uchun

$$f(t_1, ..., t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

23. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) - R^n$ dagi tasodifiy vektor, $f(t_1, ..., t_n)$ esa uning xarakteristik funksiyasi, $f_1(t), ..., f_n(t)$ lar $\xi_1, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning xarakteristik funksiyalari bo'lsin. Ixtiyoriy haqiqiy $t \in R$ uchun

$$f(t, ..., t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t)$$

tengliklarning o'rinli ekanligidan $\xi_1, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi kelib chiqmasligini ko'rsating.

24. $f_1(t), f_2(t), ... -$ xarakteristik funksiyalar, $a_1, a_2, ...$ manfiy bo'lmagan sonlar bo'lib, $a_1 + a_2 + ... = 1$ bo'lsin. U holda

$$g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(t)$$

funksiya xarakteristik funksiya bo'lishi isbotlansin.

25. $F(x) - f(t)$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lgan taqsimot funksiya bo'lsin. $\operatorname{Re} f(t)$ xarakteristik funksiya ekanligini isbotlab, unga mos kelgan taqsimot funksiya topilsin.

26. ξ tasodifiy miqdor $f(t)$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lib, qandaydir a uchun $P\{\xi = a\} > 1/2$ bo'lsin. U holda $f(t)$ haqiqiy sonlar o'qining birorta ham nuqtasida nolga aylanmasligi isbotlansin.

27. ξ tasodifiy miqdor haqiqiy $f(t)$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lib, qandaydir $a \neq 0$ uchun $P\{\xi = a\} < 1/4$ bo'lsin. U holda $f(t)$ cheksiz ko'p nuqtalarda nolga aylanishi isbotlansin.

28. Quyidagi xarakteristik funksiyalarga mos kelgan taqsimotlar topilsin.

a) $\cos t$; b) $\cos^2 t$; c) e^{-t^2}; d) $e^{-|t|}$;

e) $\frac{1}{1+t^2}$; f) $\frac{1}{1-it}$; g) $\frac{\sin t}{t}$; h) $e^{-|t|}\cos t$.

29. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, ν – butun musbat qiymatlarni qabul qiluvchi va $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ketma-ketlikka bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'lib, $p_k = P(\nu = k)$, $f(t)$ esa ξ_1 tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi bo'lsin. $\xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini toping.

30. Juft uzluksiz va $t \geq 0$ da qavariq, $0 \leq f(t) \leq 1$ va $f(0) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya xarakteristik funksiya bo'lishi isbotlansin.

V BOB. LIMIT TEOREMALAR

Oldingi boblarda keltirilgan fikr-mulohazalardan ko'rinadiki, ehtimollar nazariyasining ko'pchilik masalalari tasodifiy miqdorlar yig'indisini o'rganish bilan bog'liq bo'lar ekan. Bunga oddiy misol sifatida binomial taqsimotni (polinomial taqsimotni ham) olish mumkin. O'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti har bir qo'shiluvchilar taqsimotlarining kompozitsiyasi bilan aniqlanadi. Lekin taqsimot funksiyalar sinfida aniqlangan bu amal murakkab va shu munosabat bilan yig'indi tasodifiy miqdorning taqsimotini aniq hisoblashga qaratilgan harakat befoyda bo'lib chiqadi. Shuning uchun tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotini asimptotik ifodalar yordamida approksimatsiyalash masalalari muhim ahamiyat kasb etadi. O'z navbatida taqsimotlarni approksimatsiyalash masalalari etimollar nazariyasining limit teoremalari bilan bog'liqdir.

Amaliyotda bitta tasodifiy miqdor ko'p marta kuzatilib, natija har bir kuzatuv qiymatlarining yig'indisidan iborat bo'lgan hol ko'p uchraydi. Yuqorida qayd qilingan qimor o'yinlari bilan bir qatorda, birorta fizik kattalikni, o'lchov aniqligini oshirish uchun takroriy o'lchashlar, so'ngra ularni o'rtalashtirishlar, ko'p karra bir jinsli sabablar ta'sirida o'tadigan, vaqtga bog'liq bo'lgan jarayonlar va shu kabilar bunga misol bo'la oladi.

Ushbu bobda bunday hodisalar yagona ehtimollik nuqtayi nazaridan quyidagi sxemaga asoslanib tavsiflanadi.

Bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan bo'lishi ham mumkin bo'lgan, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bizni ulardan birinchi n ta yig'indisining, qo'shiluvchilar soni o'sgandagi (asimptotik) holati qiziqtiradi. Yetarlicha katta n larda tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigi tasodifiylik xossasini yo'qotib, matematik kutilmalarning o'rta arifmetik qiymatiga intilar ekan. Bu tasdiq katta sonlar qonuni deb ataladi.

Katta sonlar qonuni ikki xil yo'nalishda kengaytirilgan. Ulardan biri o'rta arifmetik miqdorning dinamikasi bilan bog'liq. Bu yo'nalishning asosiy natijalariga kuchaytirilgan katta sonlar qonuni va takroriy logarifm qonunlarini kiritish lozim. Ikkinchi yo'nalishning boshlang'ich punkti ba'zan markaziy limit muammosi deb ataluvchi masala hisoblanadi. Bizga ma'lum bo'lgan Muavr–Laplas teoremalari bunga misol bo'ladi. Markaziy limit muammoning yechimi bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi yig'indisi har bir qo'shiluvchining qo'shgan hissasi yig'indiga nisbatan cheksiz kichik bo'lgan holda, taqsimot funksiyasining limitlaridan tashkil topgan sinfni tafsiflashga imkon beradi.

1-§. Markaziy limit teorema

Ushbu paragraf ehtimollar nazariyasining eng ajoyib natijalaridan biri bo'lgan markaziy limit teoremaga bag'ishlangan. Har qaysi qo'shiluvchilari cheksiz kichik bo'lgan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning yig'indisi keng shartlar bajarilganda normal taqsimot funksiyaga (Gauss taqsimotiga) yaqin taqsimotga ega. Bu natijaning qiymati ehtimollar nazariyasi chegarasidan juda chetga chiqib ketadi. U ko'p amaliy masalalarni yechish jarayonida normal taqsimotni ishlatish uchun asos vazifasini bajaradi.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ixtiyoriy ehtimollar fazosi va $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ unda aniqlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in R$ uchun ushbu

$$P\left(\frac{\xi_1+...+\xi_n - M(\xi_1+...+\xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1+...+\xi_n)}} \le x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi **markaziy limit teoremani** qanoatlantiradi deb ataymiz.

Avval markaziy limit teoremaning bir xil taqsimlangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga taalluqli bo'lgan eng sodda variantini keltiramiz.

1-teorema. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bir xil taqsimlangan va $M\xi_n = a$ chekli matematik kutilmaga hamda chekli $D\xi_n = \sigma^2 > 0, n \ge 1$ dispersiyaga ega bo'lsin. U holda ular markaziy limit teoremani qanoatlantiradi, ya'ni

$$P\left(\frac{\xi_1+...+\xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x).$$

Isboti. $\overline{\xi}_k = \xi_k - a$ belgi kiritamiz. U holda $M\overline{\xi}_k = 0$ va $M\overline{\xi}_k^2 = \sigma^2$. Xarakteristik funksiyalarning maxsus xossasi (5-teorema, (16) munosabat)ga ko'ra

$$f_{\overline{\xi}_k}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2). \qquad (1)$$

Shu bilan birga, $S_n = \frac{\xi_1 + ... + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{\xi}_k}{\sigma\sqrt{n}}$ tenglik o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun ham S_n miqdorning xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\overline{\xi}_k/\sigma\sqrt{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\overline{\xi}_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

ko'rinishga ega va demak u $n \to \infty$ da $e^{-t^2/2}$ ga nuqtaviy yaqinlashadi. Ammo, $e^{-t^2/2}$ funksiya (0;1) parametrlarga ega bo'lgan normal tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasidir. Endi 1-teoremaning isboti xarakteristik funksiyalar uchun isbotlangan teskari limit teoremadan kelib chiqadi.

1-misol. Har bir tajribada yutuqning ehtimoli p bo'lgan Bernulli sxemasini ko'ramiz. μ_k orqali k-tajribadagi yutuqlar sonini belgilaymiz, u holda

$$M\mu_k = p, D\mu_k = p(1-p); k = 1,2,...,n.$$

$S_n = \mu_1 + ... + \mu_n$ belgilash kiritamiz.

1-teoremaga ko'ra, ixtiyoriy $x \in R$ uchun

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x).$$

Bu tasdiq **Muavr-Laplasning integral teoremasini** aks ettiradi.

2-misol. O'lchov xatoliklari. Biror a miqdorni o'lchaganda taqriban ξ qiymat hosil bo'ladi. Yo'l qo'yilgan xatolik $\delta = \xi - a$ ikkita xatoliklarning ushbu

$$\delta = (\xi - M\xi) + (M\xi - a)$$

yig'indisi shaklida ifodalanishi mumkin. Ulardan birinchisi $\xi - M\xi$ tasodifiy xatolik, ikkinchisi $M\xi - a$ esa sistematik xatolik deb ataladi.

Yaxshi o'lchov usullari ishlatilgan holda sistematik xatolik nolga teng bo'ladi, shu sababli $M\xi=a$ deb olamiz va demak $M\xi-a=0$. $D\xi=\tau^2$ bo'lsin. Tasodifiy δ xatolikni kamaytirish uchun n marta, qiymatlari $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ bo'lgan bog'liqsiz o'lchov o'tkaziladi va a miqdorning qiymati sifatida

$$S_n=\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}$$

o'rta arifmetik qiymat olinadi. Bunda qanday xatolikka yo'l qo'yiladi? 1-teoremaga ko'ra

$$P\left(\left|S_n-a\right|\le\varepsilon\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{n}/\tau}^{\varepsilon\sqrt{n}/\tau}e^{-t^2/2}dt.$$

O'ng tomonda turgan funksiyaning qiymati jadvallashtirilgan (ilovalar 2-jadvalga qaralsin).

3-misol. Antropologiyada ma'lum yoshli va jinsli odamning bo'yi yo'ki vazni odatda normal tasodifiy miqdor deb hisoblanadi. Ammo ko'p hollarda bu parametrlarning logarifmlari normal taqsimlangan deb juda katta asos bilan aytishimiz mumkin. Agar η tasodifiy miqdor uchun $\xi=\log\eta$ normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda η logarifmik normal taqsimotga yoki qisqacha lognormal taqsimotga ega deyiladi. Bo'yni yo'ki vaznni lognormalligini nazariy jihatdan ham asoslash mumkin. Masalan, vazn juda ko'p bog'liqsiz sabablar natijasida hosil bo'ladi va ular vaznga multiplikativ ta'sir ko'rsatadi, ya'ni

$$\eta=\eta_1\cdot\eta_2\cdots\eta_n.$$

Bu yerda η_k lar birga yaqin bo'lgan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar. Bu holda

$$\log\eta=\sum_{k=1}^{n}\log\eta_k$$

va $\log\eta$ 1-teoremaga ko'ra limitda normal taqsimotga ega.

4-misol. Markaziy limit teorema yordamida sof analitik natijalarni ham isbotlash mumkin. Masalan, ushbu

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$$

tenglikni isbotlaymiz.

Faraz qilaylik. S_n – parametri n bo'lgan Puasson tasodifiy miqdori bo'lsin. U holda

$$P(S_n \le n) = e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Ammo $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, bu yerda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan, parametri 1 ga teng bo'lgan Puasson tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi = D\xi = 1$. 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} P(S_n \le n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{2}.$$

Ba'zi shartlar bajarilsa bog'liqsiz turli taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ham markaziy limit teorema o'rinli.

Agar ixtiyoriy $\tau > 0$ uchun

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|} (x-a_k)^2\, dF_k(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

bo'lsa, u holda $\{\xi_k\}, k \ge 1$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun **Lindeberg sharti** bajarilgan deyiladi, bu yerda $a_k = M\xi_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$ va $F_k(x)$ esa ξ_k tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

2-teorema (Lindeberg). Agar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Lindeberg sharti bajarilsa, u holda ixtiyoriy $x \in R$ uchun

$$P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-(a_1+a_2+...+a_n)}{B_n} \le x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x).$$

Isboti. Quyidagi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$\xi_{kn} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n};\ k = 1,2,...;\ n = 1,2,...$$

U holda

$$M\xi_{kn} = 0,\ M\xi_{kn}^2 = \frac{1}{B_n^2}D\xi_k,\ \sum_{k=1}^{n} D\xi_{kn} = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = 1$$

$$S_n = \frac{(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)-(a_1+a_2+...+a_n)}{B_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - a_k}{B_n} = \sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}$$

tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini hisoblaymiz. $\xi_{kn}, k=1,2,...$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lgani sababli, xarakteristik funksiyalarning xossasiga ko'ra

$$f_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{\xi_{kn}}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{kn}(t). \quad (2)$$

(2) tenglikning har ikkala tomonini logariflaymiz:

$$\ln f_{S_n}(t)=\sum_{k=1}^{n} f_{kn}(t)$$

va

$$\ln f_{S_n}(t)\underset{n\to\infty}{\to}-\frac{t^2}{2}$$

munosabatning o'rinli ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun avval ixtiyoriy chekli $|t|\leq T$ intervalda, $k\,(1\leq k\leq n)$ va t lar bo'yicha tekis

$$\ln f_{kn}(t)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

yoki

$$f_{kn}(t)\underset{n\to\infty}{\to}1$$

munosabatlarning o'rinli ekanligini isbotlaymiz.

V bobdagi (15) tengsizlikdan va

$$\int_{-\infty}^{\infty} itxdF_{kn}(x)=Mit\xi_{kn}=0$$

tenglikdan foydalanib quyidagini topamiz:

$$|\phi_{kn}(t)-1|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)dF_{kn}(x)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1-itx)dF_{kn}(x)\right|\leq$$

$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tx)^2}{2}dF_{kn}(x)=\frac{t^2}{2}\left(\int_{|x|\leq\varepsilon}+\int_{|x|>\varepsilon}\right)x^2dF_{kn}(x). \quad (3)$$

Ushbu

$$F_{kn}\left(\frac{x-a_k}{B_n}\right)=P\left(\xi_{nk}\leq\frac{x-a_k}{B_n}\right)=P\left(\frac{\xi_k-a_k}{B_n}\leq\frac{x-a_k}{B_n}\right)=F_k(x)$$

tenglikni hisobga olib, ixtiyoriy $\tau>0$ uchun

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{|x-a_k|}{B_n}>\tau}\left(\frac{x-a_k}{B_n}\right)dF_{kn}\left(\frac{x-a_n}{B_n}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{|z|>\tau}z^2\,dF_{kn}(z)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

(3) tenglikning o‘ng tomonini yuqoridan quyidagi ifoda bilan baholash mumkin:

$$\frac{t^2}{2}\varepsilon^2+\frac{t^2}{2}\int_{|z|>\varepsilon}z^2\,dF_{kn}(z).$$

Shunday qilib, barcha yetarlicha katta n sonlar uchun, $1\le k\le n$ shartni qanoatlantiruvchi k va ixtiyoriy chekli $[-T,T]$ intervalda yotuvchi t larga nisbatan tekis ravishda

$$|f_{kn}(t)-1|\le\frac{T^2\varepsilon^2}{2}+\frac{T^2}{2}\cdot D\xi_{kn}$$

tengsizlik o‘rinli ekan.

Oxirgi tengsizlikdan $(1\le k\le n)$ga nisbatan tekis ravishda

$$\lim_{n\to\infty}f_{kn}(t)=1 \tag{4}$$

va barcha yetarlicha katta n larda, ixtiyoriy chekli $[-T,T]$ intervalda yotuvchi t lar uchun

$$|f_{kn}(t)-1|<\frac{1}{2} \tag{5}$$

tengsizlik o‘rinli. Shuning uchun ham biz bu oraliqda quyidagi yoyilmani yoza olamiz:

$$\ln f_{S_n}(t)=\sum_{k=1}^{n}\ln f_{kn}(t)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+(f_{kn}(t)-1))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(f_{kn}(t)-1\right)+R_n, \tag{6}$$

bu yerda $R_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(f_{kn}(t)-1\right)^s$.

(5) tengsizlikka ko‘ra

$$|R_n(t)|\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{|f_{kn}(t)-1|^s}{2}\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f_{kn}(t)-1|^2}{1-|f_{kn}(t)-1|}\le\sum_{k=1}^{n}|f_{kn}(t)-1|^2,$$

ammo

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_{kn}(t)-1\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)dF_{kn}(x)\right|\le\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,dF_{kn}(x)=\frac{t^2}{2}.$$

Demak, $\left|R_n(t)\right|\le\frac{t^2}{2}\max_{1\le k\le n}\left|f_{kn}(t)-1\right|$.

(5) dan, ixtiyoriy $T>0$ uchun $t\in[-T,T]$ oraliqga nisbatan tekis ravishda $n\to\infty$ da

$$R_n(t)\to 0 \tag{7}$$

kelib chiqadi.

Shu bilan birga

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f_{kn}(t)-1\right)=-\frac{t^2}{2}+\rho_n, \tag{8}$$

bu yerda

$$\rho_n(t)=\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)dF_{kn}(x).$$

Aytaylik, $0<\varepsilon-$ ixtiyoriy musbat son bolsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{n}D\xi_{kn}=1$$

ekanligini hisobga olib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\rho_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le\varepsilon}\left(e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right)dF_{kn}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}\left(\frac{t^2x^2}{2}+e^{itx}-1-itx\right)dF_{kn}(x).$$

V bob 4-§ dagi (15) tengsizlik quyidagi bahoni olishga imkon beradi:

$$\rho_n(t)=\frac{|t|^3}{6}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le\varepsilon}|x|^3\,dF_{kn}(x)+t^2\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}x^2\,dF_{kn}(x)\le$$

$$\le\frac{|t|^3}{6}\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le\varepsilon}x^2\,dF_{kn}(x)+t^2\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}x^2\,F_{kn}(x)=$$

$$=\frac{|t|^3}{6}\varepsilon+t^2\left(1-\frac{|t|}{6}\varepsilon\right)\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}x^2\,dF_{kn}(x).$$

Lindeberg shartiga ko'ra

$$t^2\left(1-\frac{|t|}{6}\varepsilon\right)\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon} x^2\,dF_{kn}(x),\ [-T,T],\ \varepsilon>0$$

qo'shiluvchining qiymatini istalgan $\delta>0$ sondan kichik qilib olish mumkin. ε ning ixtiyoriyligidan foydalanib, uni shunday tanlaymizki, natijada barcha $\delta>0$ va $T,t\in[T,T]$ sonlar uchun

$$|\rho_n(t)|<2\delta\ ,\ (n\ge n_0(\varepsilon,\delta,T))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlik t ni qiymatining har bir chekli intervalida tekis ravishda

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(t)=0 \qquad (9)$$

munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

(6)-(9) munosabatlardan, har qaysi oraliqda tekis ravishda

$$\lim_{n\to\infty}\ln f_{S_n}(t)=-\frac{t^2}{2}$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Lyapunov teoremasi. Agar $\{\xi_n\}_{n\in N}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday musbat δ mavjud bo'lib, $n\to\infty$ da

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}M|\xi_k-a_k|^{2+\delta}\to 0 \ \textbf{(Lyapunov sharti)}$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi.

Isboti. Lyapunov shartidan Lindeberg shartining o'rinli ekanligi kelib chiqishiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)\le\frac{1}{B_n^2(\tau B_n)^\delta}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^{2+\delta}dF_k(x)\le$$

$$\le\frac{1}{\tau^2}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}M|\xi_k-a_k|^{2+\delta}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

1-mashq. 1-teorema Lindeberg teoremasining natijasi ekanligini isbotlang.

2-ta'rif. $\{\xi_k\}_{k\in N}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $\xi_{kn}=\dfrac{\xi_k-a_k}{B_n}, k=\overline{1,n}$, $n\geq 1$ bo'lsin, bu yerda $a_k=M\xi_k$, $B_n^2=D(\xi_1+...+\xi_n)$. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$\max_{k<n}P\left(|\xi_{kn}|>\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (10)$$

bo'lsa, ξ_{kn} tasodifiy miqdorlar **hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik (nolga tekis yaqinlashadi)** deyiladi.

Lindeberg sharti

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a_k)/B_n$$

tasodifiy miqdorning taqsimoti $n\to\infty$ da $N(0,1)$ – normal taqsimotga intilishi uchun zaruriy shart emas. Bu fikrni quyida keltirilgan misol tasdiqlaydi.

5-misol. $\xi_{1n}=\eta, \xi_{2n}=...=\xi_{nn}=0$ bo'lsin. Bu yerda η – (0,1) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin. U holda

$$M\xi_{kn}=0, \sum_{k=1}^{n}D\xi_{kn}=1, P\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}\leq x\right)=P(\eta\leq x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

tengsizliklar o'rinli, ammo Lindeberg sharti bajarilmaydi.

Ammo, agar

$$P\left(\sum_{n=1}^{n}\xi_{kn}\leq x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

yaqinlashish bilan birga hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichiklik sharti bajarilsa, u holda Lindeberg sharti zaruriy shart bo'lib qoladi.

3-teorema. Agar $\{\xi_{kn}\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (10) shartni qanoatlantirsa va har qanday $x\in R$ uchun

$$P\left(\sum_{n=1}^{n}\xi_{kn}\leq x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

bo'lsa, u holda Lindeberg sharti bajariladi.

Isboti. Quyidagi tengsizliklarning o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas:

$$\left|f_{kn}(t)-1\right|=\left|Me^{itx}-1\right|\leq\int\limits_{|x|>\varepsilon}\left|e^{itx}-1\right|dF_{kn}(x)+$$

$$+\int\limits_{|x|\leq\varepsilon}\left|e^{itx}-1\right|dF_{kn}(x)\leq 2\int\limits_{|x|>\varepsilon}dF_{kn}(x)+\int\limits_{|x|\leq\varepsilon}|t\varepsilon|dF_{kn}(x)\leq 2P(|\xi_{kn}|>\varepsilon)+|t\varepsilon|.$$

(10) shartga ko'ra, ixtiyoriy $t\in R$ uchun

$$\max_{k\leq n}\left|f_{kn}(t)-1\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Lindeberg teoremasining isbotlashda qo'llanilgan usuldan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$|R_n|=\left|\lg f_n(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(f_{kn}(t)-1\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|f_{kn}(t)-1\right|^2\leq\frac{t^2}{2}\max_{k\leq n}\left|f_{kn}(t)-1\right|.$$

Quyidagilar ham o'rinli

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f_{kn}(t)-1\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\sum_{k=1}^{n}x^2dF_{kn}(x)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}dG_n(x),$$

bu yerda $G_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{t\leq x}t^2dF_{kn}(t)$.

Demak,

$$\ln f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}-t^2/2$$

muhosabatdan, $t\in R$ uchun nuqtaviy ravishda

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f_{kn}(t)-1\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}t^2/2$$

va $G_n(x)$ taqsimot funksiya bo'lgani uchun

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}+\frac{1}{2}\right)dG_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

So'ngra

$$\left|\frac{e^{itx}-1-ix}{x^2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

va bu tengsizlik $x \neq 0$ da qat'iy. Shuning uchun ham, agar $\tau > 0$ bo'lsa, u holda

$$\sup_{|x|>\varepsilon}\left|\frac{e^{itx}-1-ix}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2}-\delta(\tau),$$

bu yerda $\delta(\tau)>0$. Demak, $|x|>\tau$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{itx}-1-ix}{x^2}+\frac{1}{2}\right) \geq \delta(\tau)>0.$$

U holda

$$\int_{|x|>\tau n} \delta(\tau)\, dG_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Agar $E(x)$ funksiya 0 nuqtani 1 ehtimol bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi, ya'ni

$$E(x)=\begin{cases}1, x\geq 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$$

bo'lsa, u holda

$$\int_{|x|>\tau} \delta(\tau)\, dE(x)=0$$

va $G_n(x) \Rightarrow E(x)$, bu esa Lindeberg sarti bajarilishiga ekvivalentdir. Teorema isbotlandi.

2-§. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining yaqinlashish turlari

Matematik analiz kursida funksiyalar ketma-ketligining turli yaqinlashishlari ko'riladi: tekis yaqinlashish, deyarli barcha nuqtalarda yaqinlashish, o'lchov bo'yicha yaqinlashish, o'rta kvadratik yaqinlashish va boshqa shular kabi yaqinlashishlar. Xuddi shu kabi, ehtimollar nazariyasida ham (elementar hodisalar fazosida aniqlangan funksiyalar kabi qaraladigan) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun va shu bilan bir qatorda taqsimot funksiyalar ketma-ketligi uchun ham turli yaqinlashishlar ko'riladi.

Ushbu paragrafda tasodifiy miqdorlarning turli yaqinlashishlari ko'rilib, ular orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi.

Bir ehtimol bilan yaqinlashish (deyarli muqarrar yaqinlashish).

4-ta'rif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan $\xi=\xi(\omega)$ va $\{\xi_n=\xi_n(\omega), n\geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin.

Agar

$$P\left\{\omega\in\Omega; \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\right\}=1$$

bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ketma-ketlik **1 ehtimol bilan (deyarli muqarrar)** ξ tasodifiy miqdorga **yaqinlashadi** deyiladi va buni

$$\xi_n \xrightarrow{1 eht.} \xi \ (\text{yo'ki } \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{1 eht.} \xi)$$

orqali belgilanadi.

4-teorema. $\xi_n \xrightarrow{1 eht.} \xi$ munosabat o'rinli bo'lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega\in\Omega : \sup_{m\geq n}\left|\xi_m(\omega)-\xi(\omega)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Ishoti. Quyidagi tenglikni o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas:

$$\left\{\omega\in\Omega; \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\right\}=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega\in\Omega:\left|\xi_m(\omega)-\xi(\omega)\right|\leq 1/r\right\}.$$

Faraz qilamiz,

$$P\left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\neq\xi(\omega)\right\}=0$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Bu esa o'z navbatida

$$P\left\{\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\right|>1/r\right\}\right\}=0$$

tenglikka ekvivalent. Oxirgi tenglik esa, o'z navbatida, ushbu: ixtiyoriy $r>0$ uchun

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_n-\xi\right|>1/r\right\}\right\}=0$$

yoki ixtiyoriy $r>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_n-\xi\right|>1/r\right\}\right)=0$$

ta'kidga ekvivalent. Oxirgi ta'kid esa: ixtiyoriy $r > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m\ge n}|\xi_m - \xi| > 1/r\right) = 0$$

bilan teng kuchli. Bu esa ziddiyatga olib keladi. Yuqorida aytilganlarning hammasidan teoremaning isboti kelib chiqadi.

$A_1, A_2, \ldots$lar $\mathcal{A}$ dan olingan hodisalar ketma-ketligi bo'lsin. $\{A_n \ ch.k.\}$ orqali $A_1, A_2, \ldots$ – hodisalardan cheksiz ko'pi ro'y berishini ifodalovchi

$$\overline{\lim} A_n = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

hodisani belgilaymiz.

Quyidagi Borel-Kantelli lemmasi ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursining eng muhim va amaliyotda keng ko'lamli tatbiqlarga ega bo'lgan natijalaridan biri hisoblanadi. Bu lemma $\{A_n, n \ge 1\}$ – hodisalar ketma-ketligi limsupligining ehtimolini hisoblashga bag'ishlangan.

5-teorema. (Borel-Kantelli lemmasi). $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ehtimollar fazosi va $\{A_n\}_{n\ge1}$ – hodisalar ketma-ketligi bo'lsin.

(a) agar $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ bo'lsa, u holda $P(\limsup A_n) = 0$,

(b) agar $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ qator uzoqlashsa (ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$) va $\{A_n\}_{n\ge1}$ – hodisalar ketma-ketligi bog'liqsiz bo'lsa, u holda $P(\limsup A_n) = 1$.

Isboti. (a) Avval $\limsup A_n \subset \bigcup_{m=k}^{\infty} A_k \ \forall k \ge 1$ munosabatning o'rinli ekanligini qayd etamiz. Demak, har qanday butun $k \ge 1$ uchun, Bul tengsizligiga ko'ra

$$P(\limsup A_n) \le P\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m\right) \le \sum_{m=k}^{\infty} P(A_m) \qquad (11)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ qator yaqinlashgani uchun uning qoldiq hadi nolga intiladi, ya'ni $k \to \infty$ da $\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0$. Shuning uchun ham (11) da $k \to \infty$ deb, biz kutilgan natijaga ega bo'lamiz.

(b) Biz $P\left((\limsup A_n)^c\right) = 0$ ekanligini ko'rsatamiz, bu yerda $A^c = \bar{A}$. Ta'rifga ko'ra

$$(\limsup A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c,$$

(Morgan qonuni) bo'lgani sababli, biz har bir $n \geq 1$ uchun

$$P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c\right) = 0 \tag{12}$$

ekanligini ko'rsatishimiz yetarli. $n \geq 1$ ni fiksirlaymiz. Har qanday haqiqiy x uchun $1 + x \leq e^x$ tengsizlik o'rinli. Bundan foydalanib, har qanday $j \geq 1$ uchun $\{A_n\}$ hodisalar ketma-ketligining bog'liqsizligini hisobga olsak,

$$P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c\right) \leq P\left(\bigcap_{m=n}^{n+j} A_m^c\right) = \prod_{m=n}^{n+j} (1 - P(A_m)) \leq \exp\left\{-\sum_{m=n}^{n+j} P(A_m)\right\}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ qator uzoqlashgani uchun, $j \to \infty$ da $\sum_{m=n}^{n+j} P(A_m) \to \infty$. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ bo'lgani sababli, j ni cheksizga intiltirib, biz (12) ni hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

1-izoh. (a) va (b) tasdiqlar birgalikda Borel-Kantelli lemmasi nomi bilan yuritiladi. Bu ikkala natija 1909, 1912-yillarda Borel va (1912-yilda Kantelli tomonidan isbotlangan).

Borel-Kantelli lemmasi ehtimollar nazariyasining (kuchli yaqinlashishlar bilan bog'liq bo'lgan) ko'p masalalarida juda foydali, xususan bu lemma kuchaytirilgan katta sonlar qonunlarini va takroriy logarifm qonunlarini o'rnatishda kerak bo'ladi. Bu lemmaning birinchi qismi keng ko'lamli tatbiqlarga ega, chunki undagi hodisalar ketma-ketligi mutlaq ixtiyoriy bo'lib, bog'liqsizlikka hech qanday shart qo'yilmaydi. Shu bilan birga u ixtiyoriy o'lchovli fazolar va undagi ixtiyoriy boshqa (ehtimol o'lchovi bo'lishi shart bo'lmagan) o'lchovlar uchun ham o'rinli, chunki (a) tasdiqning isboti jarayonida ehtimol o'lchovining monotonligi va yarim σ – additivlik xossasigina ishlatiladi, xolos.

Borel-Kantelli lemmasining (a) qismi o'lchovlar nazariyasidagi monoton yaqinlashishlar haqidagi teoremaning nomanfiy hadli qatorlarga tatbiqi natijasida kelib chiqadigan xususiy holidan iborat:

(a) ning shartiga ko'ra,

$$M\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} MI_{A_n}=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$$

va shuning uchun $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}=\infty\right)=0$.

Ammo $\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}=\infty\right]=\limsup A_n$.

Aslida, agar $\forall n\geq 1$ uchun $\xi_n\geq 0$ va $\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n<\infty$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator 1 ehtimol bilan yaqinlashishini ko'rsata olamiz.

2-izoh. Borel-Kantelli lemmasining (a) qismiga teskari tasdiqni quyidagicha ta'riflashimiz mumkin: agar $P(\limsup A_n)=0$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ qator yaqinlashadi. Bu esa o'z navbatida ushbu: agar $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$ bo'lsa, u holda $P(\limsup A_n)>0$ degan tasdiqqa ekvivalentdir. Borel-Kantelli lemmasining (b) qismi, agar bunga qo'shimcha ravishda A_n hodisalar ketma-ketligi bog'liqsiz bo'lsa, u holda $P(\limsup A_n)=1$ ekanligini ko'rsatadi; shuning uchun ham (b) tasdiq (a) ning qisman teskarisi deb yuritiladi. Shu bilan birga, (a) tasdiqning teskarisi (ya'ni (b) tasdiq) umumiy holda to'g'ri emas, buni quyidagi misol yaqqol ko'rsatadi.

6-misol. $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{A}$ – $[0,1]$ oraliqdagi Borel to'plamlarining σ-algebrasi, P esa λ – Lebeg o'lchovidan iborat bo'lsin. $A_n=(0,1/n)$, $\forall n\geq 1$ hodisalar berilgan bo'lsin. U holda $A_n\downarrow\varnothing$, ya'ni $\limsup A_n=\varnothing$ va

$$\sum_n^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty,\ \text{lekin}\ P(\limsup A_n)=0.$$

Bu misolda $\forall n\geq m$ uchun $A_n=(c,c+1/n)$ deb olsak, bu yerda $m;\ m>\frac{1}{1-c}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy fiksirlangan butun son, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ va $P(\limsup A_n)$ ehtimolning qiymati $[0,1]$ oraliqdagi ixtiyoriy son bolishi mumkinligini ko'ramiz.

1-natija. $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollik fazosida $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va ξ tasodifiy miqdor aniqlangan bo'lib, $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ ketma- ketlk $\varepsilon_n\downarrow 0,\ n\to\infty$ shartni qanoatlantiruvchi musbat sonlar ketma-ketligi bo'lsin. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon_n\right)<\infty$$

bo'lsa, u holda

$$\xi_n\xrightarrow[n\to\infty]{1\text{eht.}}\xi$$

munosabat o'rinli.

Isboti. $A_n=\{\omega\in\Omega:|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon_n\}$ bo'lsin. U holda Borel-Kantelli lemmasiga ko'ra, $P(A_n\ ch.k.)=0$, bu esa deyarli barcha $\omega\in\Omega$ natijalar uchun shunday $N=N(\omega)$ topiladiki, $n\geq N(\omega)$ uchun $|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\leq\varepsilon_n$ ekanligini bildiradi. Ammo $\varepsilon_n\downarrow 0$ bo'lgani sababli, deyarli barcha $\omega\in\Omega$ lar uchun $n\to\infty$ da $\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)$.

Tasodifiy miqdorlarning ehtimol bo'yicha yaqinlashishi

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollik fazosida $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va ξ tasodifiy miqdor aniqlangan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga **ehtimol bo'yicha yaqinlashadi** deyiladi va bu yaqinlashish

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad n \to \infty \text{ (yoki } \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi \text{)}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Bu yaqinlashish ehtimollar nazariyasida ko'p ishlatiladi. Masalan katta sonlar qonunida (3-§ ga qarang), limit tasodifiy miqdor ξ o'zgarmas sondan iborat bo'ladi, ya'ni $P(\xi = c) = 1$. Analizda bu yaqinlashishni o'lchov bo'yicha yaqinlashish deb atashadi.

Endi ehtimol bo'yicha yaqinlashishning ba'zi asosiy xossalarini keltiramiz.

1-xossa. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ va $f(x)$ funksiya R da aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $f(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(\xi)$ munosabat o'rinli.

Isboti. $f(x)$ ning R da uzluksiz bo'lgani uchun, Kantor teoremasiga ko'ra u ixtiyoriy chegaralangan yopiq to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. $\varepsilon > 0$ va $c > 0$ ixtiyoriy musbat sonlar bo'lib, $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ shunday tanlanadiki, $|x_1| \le c$, $|x_1 - x_2| \le \delta$ tengsizliklar bajarilganida

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan

$$\{|f(\xi_n) - f(\xi)|\} \subset \{|\xi| > c\} + \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,

$$P(|f(\xi_n) - f(\xi)| > \varepsilon) \le P(|\xi| > c) + P(|\xi_n - \xi| > \delta). \qquad (13)$$

ξ_n tasodifiy miqdorning ξ tasodifiy miqdorga ehtimol bo'yicha yaqinlashishidan, ixtiyoriy fiksirlangan $\delta > 0$ va ixtiyoriy $\gamma > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\delta)$ sonning mavjudligi kelib chiqadiki, $n \geq n_0$ bo'lganda

$$P(|\xi_n - \xi| > \delta) < \gamma$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, (13) tengsizlikdan $n \geq n_0$ uchun

$$P(|f(\xi_n) - f(\xi)| > \varepsilon) \leq P(|\xi| > \varepsilon) + \gamma$$

kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlikda, γ ning ixtiyoriy ekanligini hisobga olsak,

$$\lim_{n\to\infty} P(|f(\xi_n) - f(\xi)| > \varepsilon) \leq P(|\xi| > c).$$

Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi miqdorni c sonni tanlash natijasida istalgancha kichik qilib olish mumkin ekanligidan

$$\lim_{n\to\infty} P(|f(\xi_n) - f(\xi)| > \varepsilon) = 0.$$

2-xossa. $\{\xi_n^{(k)}, k = 1,2,...,m; n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlarning m ta ketma-ketligi bo'lsin. Agar $\xi_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi^{(k)}$ va $f(x_1,...,x_m)$ esa R^m da aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda

$$f(\xi_n^{(1)},...,\xi_n^{(m)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(\xi^{(1)},...,\xi^{(m)})$$

bo'ladi.

Isboti. 1-xossaning isboti kabi

$$P\left(\left|f(\xi_n^{(1)},...,\xi_n^{(m)}) - f(\xi^{(1)},...,\xi^{(m)}) > \varepsilon\right|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left(P\left(\left|\xi^{(k)}\right| > c\right) + P\left(\left|\xi_n^{(k)} - \xi^{(k)}\right| > \delta\right)\right)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi, bu yerda $\varepsilon > 0, c > 0$ ixtiyoriy musbat sonlar, $\delta > 0$ shunday tanlanganki, natijada, $|x_1| < c,...,|x_m| < c$ va $|x_1 - y_1| \leq \delta,...,|x_m - y_m| \leq \delta$ shartlar bajarilganda

$$|f(x_1,...,x_m) - f(y_1,...,y_m)| \leq \varepsilon$$

bo'ladi.

3-xossa. Agar $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ va birorta $c > 0$ uchun $P(|\xi_n| \leq c) = 1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi.$$

Isboti. Avval $P\left(|\xi| \le c\right) = 1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, uzluksiz $f(x)$ funksiya, $f(x) = 0$, agar $|x| \le c$ va $f(x) > 0$, agar $|x| > c$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $P\left(f(\xi_n) = 0\right) = 1$ va 1-xossaga ko‘ra $f(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(\xi)$. Shuning uchun ham

$$P(|\xi| \le c) = P(f(\xi) = 0) = 1.$$

Ushbu

$$|\xi_n - \xi| = |\xi_n - \xi| I_{\{|\xi_n - \xi| \le \delta\}} + |\xi_n - \xi| I_{\{|\xi_n - \xi| > \delta\}} \le \delta + 2cI_{\{|\xi_n - \xi| > \delta\}}.$$

Bundan, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ munosabatga ko‘ra, ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} |M\xi_n - M\xi| \le \delta$$

tengsizlik kelib chiqadi.

4-xossa. Agar $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\,d.m.} \xi$ bo‘lsa u holda $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ bo‘ladi.

Isboti. 4-xossaning isboti 4-teoremadan bevosita kelib chiqadi.

Ixtiyoriy tasodifiy miqdor η uchun $F_\eta(x) = P(\eta \le x)$ bo‘lsin. Taqsimot funksiyalar uchun kiritilgan kuchsiz yaqinlashish tushunchasidan foydalanib quyidagi ta’rifni kiritamiz.

6-ta’rif. Agar $n \to \infty$ da $F_{\xi_n}(x) \Rightarrow F_\xi(x)$ bo‘lsa, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga **taqsimot bo‘yicha yaqinlashadi** deyiladi. Bu yaqinlashishni $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$ ko‘rinishda belgilanadi.

5-xossa. Agar tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga ehtimol bo‘yicha yaqinlashsa, bu ketma-ketlik ξ ga taqsimot bo‘yicha ham yaqinlashadi.

Keltirilgan teoremani “$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ dan $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$ kelib chiqadi” ko‘rinishida ifoda qilish mumkin.

Isboti. Aytaylik $\eta_n = \xi_n - \xi$ va $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ bo‘lsin. U holda $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ bo‘ladi, ya’ni har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P(\{|\eta_n| \ge \varepsilon\}) \to 0, n \to \infty \tag{14}$$

munosabat o'rinli. ξ_n tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F_{\xi_n}(x)=F_n(x)=P(\{\xi_n\le x\})=P(\{\xi_n<x,|\eta_n|<\varepsilon\})+P(\{\xi_n\le x,|\eta_n|\ge\varepsilon\}) \quad (15)$$

ko'rinishda yozamiz. Agar $F_\xi(x)=P(\{\xi\le x\})=F(x)$ desak, (13) tenglikdan

$$F_n(x)\le P(\{\xi\le x+\varepsilon\})+P(\{|\eta_n|>\varepsilon\})=F(x+\varepsilon)+P(\{|\eta_n|\ge\varepsilon\}) \quad (16)$$

tengsizlikni olish mumkin. Endi (14) munosabatni hisobga olib, (14) tengsizlikda oldin $n\to\infty$, so'ng $\varepsilon\to 0$ deb hisoblab, $F(x)$ funksiyaning uzluksiz x nuqtalari uchun

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}F_n(x)\le F(x)$$

tengsizlikni yoza olamiz. (15) va (16) munosabatlarda ξ va ξ_n tasodifiy miqdorlarning o'rinlarini almashtirib,

$$F(x)\ge P(\{\xi_n\le x+\varepsilon\})+P(\{|\eta_n|\ge\varepsilon\})$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu yerda x ni $x+\varepsilon$ bilan almashtirsak,

$$F_n(x)\ge F(x-\varepsilon)-P(\{|\eta_n|\ge\varepsilon\})$$

bo'ladi va bundan $F(x)$ taqsimot funksiyaning hamma uzluksiz x nuqtalari uchun

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}F_n(x)\ge F(x)$$

tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $F(x)$ ning uzluksiz x nuqtalari uchun $n\to\infty$ da $F_n(x)\to F(x)$, ya'ni $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$.

3-izoh. Taqsimot bo'yicha yaqinlashishdan tasodifiy miqdorlarning ehtimol bo'yicha yaqinlashishi kelib chiqmaydi. Buni ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar uchun $F_{\xi_1}(x)=F_{\xi_2}(x)$, ya'ni $\xi_1\overset{d}{=}\xi_2$ bo'lsa, $\xi_1\ne\xi_2$ bo'lishi mumkinligi ko'rsatadi (boshqacha aytganda bir xil taqsimlangan har xil tasodifiy miqdorlar mavjud). Masalan ξ_1 tasodifiy miqdor -1 va 1 qiymatlarni 1/2 va 1/2 ehtimollar bilan qabul qilsin va $\xi_2=\xi_1$ bo'lsin. U holda $\xi_1\overset{d}{=}\xi_2$. Endi $\xi_{2n-1}=\xi_1$, $\xi_{2n}=\xi_2$ deb olsak, o‘z-o‘zidan ko‘rinadiki, $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik $\xrightarrow{d}$ ma’noda yaqinlashadi, $\xrightarrow{P}$ ma’noda esa yaqinlashmaydi.

Lekin limit tasodifiy miqdor ξ o‘zgarmas bo‘lsa, bu yaqinlashishlar ekvivalent bo‘lar ekan. Bu tasdiq quyidagi xossadan kelib chiqadi.

6-xossa. Agar $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$ bo‘lib, qandaydir $c \in R$ uchun, $P(\{\xi = c\}) = 1$ bo‘lsa, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Ishoti. Haqiqatan ham, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ bo‘lib, $P(\{\xi = c\}) = 1$ bo‘lsin. O‘zgarmas c sonini 0 deb hisoblash mumkin. U holda har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \to \infty$ da

$$F_n(+\varepsilon) = F_{\xi_n}(+\varepsilon) \to 1, \quad F_n(-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0.$$

Bundan,

$$P\left(\left\{|\xi_n| > \varepsilon\right\}\right) = 1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)$$

tenglikni hisobga olib, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

r-tartibli o‘rtacha yaqinlashish.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollik fazosida $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va ξ tasodifiy miqdor aniqlangan bo‘lsin.

7-ta’rif. Agar

$$M|\xi_n - \xi|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (r > 0)$$

bo‘lsa, u holda $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga r – ***tartibli o‘rtacha yaqinlashadi*** deyiladi va

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_r} \xi$$

orqali ifodalanadi. $r = 2$ bo‘lgan xususiy holda r-tartibli o‘rtacha yaqinlashish ***o‘rta kvadratik yaqinlashish*** deb ataladi.

7-xossa. Agar $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_r} \xi$ bo‘lsa, u holda $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$.

Ishoti. Chebishev tengsizligidan kelib chiqadi:

$$P\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = P\left(|\xi_n - \xi|^r > \varepsilon^r\right) \leq \frac{M|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ya’ni $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$.

8-xossa. Agar $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \xi$ bo'lsa, u holda

$$M\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M\xi \text{ va } M\xi_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} M\xi^2.$$

Isboti. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \xi$ bo'lsa, u holda

$$M|\xi_n-\xi| \le \left(M|\xi_n-\xi|^2\right)^{1/2}$$

tengsizlikga ko'ra $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \xi$ yoki $M|\xi_n-\xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ bo'ladi. Endi

$$M\xi_n = M(\xi_n-\xi+\xi) = M\xi + M(\xi_n-\xi)$$

tenglikdan

$$|M\xi_n - M\xi| = |M(\xi_n-\xi)| \le M|\xi_n-\xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

kelib chiqadi. Demak, $M\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M\xi$. Birinchi tasdiq isbot bo'ldi.

Endi ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz. $(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)$ tengsizlikdan

$$\xi_n^2 = \left[\xi+(\xi_n-\xi)\right]^2 \le 2\left[\xi^2+(\xi_n-\xi)^2\right]$$

kelib chiqadi. Demak,

$$|M\xi_n^2 - M\xi^2| = |M(\xi_n-\xi)(\xi_n+\xi)| \le$$

$$\le \left[M(\xi_n-\xi)^2\right]^{1/2}\left[M(\xi_n+\xi)^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left[M(\xi_n-\xi)^2\right]^{1/2}\left[2M(\xi_n^2+\xi^2)\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left[M(\xi_n-\xi)^2\right]^{1/2}\left[5M\xi^2 + 4M(\xi_n-\xi)^2\right]^{1/2}.$$

Bundan

$$|M\xi_n^2 - M\xi^2| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{yoki} \quad M\xi_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} M\xi^2$$

kelib chiqadi. 8-xossa isbot bo'ldi.

3-§. Katta sonlar qonuni

Ushbu paragrafda n ta tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigining $n\to\infty$ dagi limit holati o'rganiladi. Keltirilgan natijalar yaqinlashish turlariga, ehtimol bo'yicha yaqinlashish yoki deyarli muqarrar yaqinlashishga bog'liq ravishda ikki qismga ajratilgan.

I. Katta sonlar qonuni (KSQ).

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ixtiyoriy ehtimollar fazosida $\{\xi_n, n\in N\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

8-ta’rif. Agar

$$\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+...+M\xi_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}0, \tag{17}$$

ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+...+M\xi_n}{n}\right|>\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

bo‘lsa, u holda $\{\xi_n\} n\in N$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ***katta sonlar qonuniga*** bo‘ysunadi deyiladi.

6-teorema. $\{\xi_n, n\in N\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunishi uchun

$$M\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)\right)^2}{n^2+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)\right)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \tag{18}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. *Zarurligi.* Belgilash kiritamiz:

$$\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k).$$

(17) shart bajarilsin, ya’ni $\eta_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}=M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}I_{\{|\eta_n|\le\varepsilon\}}+M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}I_{\{|\eta_n|>\varepsilon\}}\le\varepsilon^2+MI_{\{|\eta_n|>\varepsilon\}}=$$
$$=\varepsilon^2+P\left(|\eta_n|>\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\varepsilon^2,$$

bundan (18) munosabat kelib chiqadi.

Yetarliligi. (18) shart o‘rinli, ya’ni

$$M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

bo‘lsin. U holda

$$P\left(|\eta_n|>\varepsilon\right)=MI_{\{|\eta_n|>\varepsilon\}}=M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\cdot\frac{1+\eta_n^2}{\eta_n^2}I_{\{|\eta_n|>\varepsilon\}}\le$$
$$\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}I_{\{|\eta_n|>\varepsilon\}}\le\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}M\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Teorema isbotlandi.

7-teorema (Markov teoremasi). Agar

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (19)$$

bo'lsa, u holda $\{\xi_n, n\in N\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi.

Isboti. Bu teorema 6-teoremaning natijasidan iborat. Haqiqatan ham

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}M\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)\right)^2\ge M\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)\right)^2}{n^2+\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)\right)^2}$$

bo'lgani sababli, (19) munosabatga ko'ra, (18) shartning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

8-teorema (Chebishev). $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz va ixtiyoriy $n=1,2,\ldots$ sonlar uchun $D\xi_n\le C$ shartni qanoatlantiruvchi $C>0$ o'zgarmas son mavjud bo'lsin. U holda $\{\xi_n\}n\in N$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi.

Teoremaning isboti. Chebishev tengsizligidan bevosita kelib chiqadi: ε – ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+\ldots+M\xi_n}{n}\right|>\varepsilon\right)\le\frac{D(\xi_1+\ldots+\xi_n)}{\varepsilon^2}=$$
$$=\frac{D\xi_1+\ldots+D\xi_n}{\varepsilon^2n^2}\le\frac{Cn}{\varepsilon^2n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

4-izoh. 8-teorema o'rinli bo'lishi uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=0$$

shart bajarilishi yetarli. Agar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}D\xi_n=0$$

bo'lsa, bu shart bajariladi, chunki Shtols[1] teoremasiga asosan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=\lim_{n\to\infty}\frac{D\xi_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{D\xi_n}{2n-1}=0.$$

1-mashq. 3-teorema 6-teoremaning natijasi ekanligini isbotlang.

9-teorema (Xinchin teoremasi). $\{\xi_n, n\in N\}$ bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_n=a<\infty$ bo'lsin. U holda ular katta sonlar qonuniga bo'ysunadi, ya'ni

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}a. \tag{20}$$

Isboti. Teoremani xarakteristik funksiyalar metodi yordamida isbotlaymiz. Shu maqsadda $\bar{\xi}_n=\xi_n-a$, $S_n=\frac{\bar{\xi}_1+\ldots+\bar{\xi}_n}{n}$ belgilashlar kiritamiz. U holda $M\bar{\xi}_n=0$, $n\in N$ va xarakteristik funksiyalarning xossasiga ko'ra (IV bob, 4-§, (14) formula) $f_{\bar{\xi}}(t)=1+o(t), n\to\infty$. Shu bilan birga (20) shart

$$S_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}0 \tag{21}$$

shartga ekvivalent ekanligi ravshan. Quyidagi tengliklar o'rinli:

$$f_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}f_{\frac{\bar{\xi}_k}{n}}(t)=\prod_{k=1}^{n}f_{\bar{\xi}_k}\left(\frac{t}{n}\right)=\left(1+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

ξ – $P(\xi=0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdor bo'lsin. U holda $f_\xi(t)=f(t)=1$ bo'ladi. Bundan teskari limit teoremaga ko'ra, $S_n\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}\xi$, oxirgi munosabatdan esa 6-xossaga ko'ra Xinchin teoremasining isboti kelib chiqadi.

4-§. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni

9-ta'rif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ixtiyoriy ehtimollar fazosida $\{\xi_n, n\in N\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar $n\to\infty$ da

$$\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+...+M\xi_n}{n}\xrightarrow{1eht}0$$

bo'lsa, u holda $\{\xi_n\}, n\in N$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi *kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga* bo'sunadi deyiladi.

10-teorema (Gayek–Reni tengsizligi). Agar $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz, $M\xi_k=a_k$, $D\xi_k=\sigma_k^2$, $k=1,2,...$ va $C_1,C_2,...$ – manfiy bo'lmagan sonlarning o'smaydigan ketma-ketligi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ va barcha $m,n\in N, m<n$ sonlar uchun

$$P\left(\max_{m\le k\le n} C_k\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-a_i)\right|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\left(C_m^2\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2+\sum_{k=m+1}^{n}C_k^2\sigma_k^2\right)$$

tengsizlik o'rinli.

Isboti. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-a_i),\ \eta=\sum_{k=m}^{n-1}S_k^2\left(C_k^2-C_{k+1}^2\right)+S_n^2C_n^2.$$

η tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblab, uni qulay shaklga keltiramiz:

$$M\eta=\sum_{k=m}^{n-1}\left(C_k^2-C_{k+1}^2\right)MS_k^2+C_n^2MS_n^2=\sum_{k=m}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2\left(C_k^2-C_{k+1}^2\right)+C_n^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=m}^{n-1}\sigma_i^2\left(C_k^2-C_{k+1}^2\right)+\sum_{i=m+1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\sigma_i^2\left(C_k^2-C_{k+1}^2\right)+C_n^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\left(C_m^2-C_n^2\right)+\sum_{i=m+1}^{n-1}\sigma_i^2\left(C_i^2-C_n^2\right)+C_n^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2=$$

$$C_m^2\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2+\sum_{i=m+1}^{n}\sigma_i^2C_i^2.$$

Qandaydir $\varepsilon>0$ uchun quyidagi hodisalarni qaraymiz:

$$A_i=\left\{\omega\in\Omega: C_k\left|S_k(\omega)\right|\le\varepsilon,\ m\le k\le i-1,\ C_i\left|S_i(\omega)\right|>\varepsilon\right\};\ i=\overline{m,n},$$

$A_i,\ i=\overline{m,n}$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lgani sababli

$$P\left(\max_{m<k\le n}C_k\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_i-a_i\right|>\varepsilon\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Agar

$$M\eta \geq \varepsilon^2 \sum_{i=m}^{n} P(A_i)$$

ekanligini ko‘rsatsak, teorema isbotlanadi. Ko‘rish mumkinki,

$$M\eta \geq M\eta \sum_{i=m}^{n} I_{A_i} = \sum_{i=m}^{n} M\eta I_{A_i},$$

$$M\eta I_{A_i} = \sum_{k=m}^{n-1} \left(C_k^2 - C_{k+1}^2\right) MS_k^2 I_{A_i} + C_n^2 MS_n^2 I_{A_i},$$

$$MS_k^2 I_{A_i} = M(S_k - S_i + S_i)^2 I_{A_i} \geq MS_i^2 I_{A_i} + 2M(S_k - S_i)S_i I_{A_i} =$$

$$= MS_i^2 I_{A_i} + 2M(S_k - S_i)MS_i I_{A_i} = MS_i^2 I_{A_i} = M\frac{\varepsilon^2}{C_i^2} I_{A_i} = \frac{\varepsilon^2}{C_i^2} P(A_i).$$

1-natija (Kolmogorov tengsizligi). Agar bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ chekli matematik kutilma hamda chekli dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M\xi_i) > \varepsilon \right| \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{D\xi_k}{k^2}.$$

Isboti. Gayek–Reni tengsizligida $C_k = \frac{1}{k}$ deb olsak, 2-natijaning isboti kelib chiqadi.

Kolmogorov tengsizligini

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M\xi_i) > \varepsilon \right| \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

ko‘rinishda qayta ifodalash mumkin.

11-teorema. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar bo‘lib, $M\xi_n = 0, D\xi_n = \sigma_n^2$ va $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{1eht} 0$$

munosabat o‘rinli, ya’ni bu ketma-ketlik uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o‘rinli.

Isboti. $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ bo‘lsin. U holda

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{1eht} 0$$

bo'lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$P\left(\sup_{k\ge n}\left|\frac{S_k}{k}\right|>\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \tag{22}$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir. Quyidagi

$$A_n=\left\{\max_{2^{n-1}\le k<2^n}\left|\frac{S_k}{k}\right|>\varepsilon\right\}$$

hodisani kiritamiz. U holda (22) yaqinlashish

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

munosabatga ekvivalent. Kolmogorov tengsizligiga ko'ra

$$P(A_n)=P\left(\max_{2^{n-1}\le k<2^n}\left|\frac{S_i}{k}\right|>\varepsilon\right)\le P\left(\max_{2^{n-1}\le k\le 2^n}|S_k|>\varepsilon 2^{n-1}\right)\le$$

$$\le P\left(\max_{1\le k\le 2^n}|S_k|>\varepsilon 2^{n-1}\right)\le 4\frac{DS_{2^n}}{\varepsilon^2 2^{2n}},$$

so'ngra

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\le 4\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2k}\sum_{n=1}^{2^k}\sigma_n^2\le 4\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2\sum_{\{k:2^k\ge n\}}2^{-2k}=$$

$$=4\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2\sum_{\{k:2^k\ge n\}}\frac{1}{\left(2^k\right)^2}\le 8\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty,$$

chunki $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty}2^{-2k}\le 2\cdot 2^{-2k_0}$.

Bundan $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

va bu esa (6) munosabatga ekvivalentdir. Teorema isbot bo'ldi.

1-lemma. ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi chekli bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|\xi|>n\}<\infty$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $M\xi$ matematik kutilmaning chekliligidan $M|\xi|<\infty$ kelib chiqadi va aksincha. Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)I_{\{n-1<|\xi|\le n\}} \le |\xi| I_{\{\xi=0\}} + \sum_{n=1}^{\infty}|\xi| I_{\{n-1\le|\xi|\le n\}} \le \sum_{n=1}^{\infty} nI_{\{n-1<|\xi|\le n\}},$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lgani sababli,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P\left(n-1<|\xi|\le n\right) \le M|\xi| \le \sum_{n=1}^{\infty} nP\left(n-1<|\xi|\le n\right) \qquad (23)$$

ammo

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\left(n-1<|\xi|\le n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(|\xi|>n\right) \le 1+\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi|>n\right), \qquad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(N-1)P\left(n-1<|\xi|\le n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\left(n-1<|\xi|\le n\right) -$$

$$-P\left(|\xi|>0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi|>n\right). \qquad (25)$$

(23) – (25) munosabatlardan

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi|>n\right) \le M|\xi| \le 1+\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi|>n\right),$$

bundan esa lemmaning isboti kelib chiqadi.

12-teorema (Kolmogorov teoremasi). $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘lishi uchun, ya`ni

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{1eht.} 0$$

bo‘lishi uchun ξ_k tasodifiy miqdorlar chekli $M\xi_k = a, k\in\mathbb{N}$ matematik kutilmaga ega bo‘lishi zarur va yetarli.

Isboti. *Yetarliligi.* Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$xI_{\{|x|\le n\}}$ funksiya har qaysi n uchun Borel funksiyasi bo‘lgani sababli $\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_n,\ldots$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan iborat. $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ bo‘lsin. U holda

$$\frac{S_n - na}{n} = \frac{S_n - \bar{S}_n}{n} + \frac{\bar{S}_n - M\bar{S}_n}{n} + \left(\frac{M\bar{S}_n}{n} - a\right) = J_1^n + J_2^n + J_3^n$$

tenglik o'rinli. Teorema shartining yetarliligini isbotlash uchun har uchala qo'shiluvchi ham nolga 1 ehtimol bilan yaqinlashishini ko'rsatamiz. Uchinchi had uchun

$$J_3^n = \frac{1}{n} M \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{|\xi_k| \le k\}} - a = \frac{1}{n} M \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{|\xi_k| \le k\}} -$$

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M\left(\xi_k \left(I_{\{|\xi_k| \le k\}} + I_{\{|\xi_k| > k\}}\right)\right) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| > k\}}\right),$$

ammo

$$M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| > k\}}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

U holda Shtols teoremasidan $J_3^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$A_n = \left\{ \xi_n \ne \overline{\xi}_n \right\}$ hodisa kiritamiz. U holda, $M\xi_n < \infty$ bo'lgani sababli, avvalgi lemmaga ko'ra, har bir n uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi_1| > n\right) < \infty .$$

So'ngra

$$0 \le P(A^*) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0,$$

bo'lgani sababli $P(A^*) = 0$, ya'ni chekli sondagi n uchun $\xi_n \ne \overline{\xi}_n$. Demak,

$$J_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{1eht.} 0 .$$

Endi

$$J_2^n = \frac{\overline{S}_n - M\overline{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{1eht.} 0$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni bajarilishining yetarlilik shartini beruvchi 11- teoremadan foydalanamiz. Buning uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\overline{\xi}_n}{n^2} < \infty$$

ekanligini isbotlaymiz.

$$D\overline{\xi}_n \le M\overline{\xi}_n^{\,2} \le \sum_{k=1}^{n} k^2 P\left(k-1 < |\xi_n| \le k\right)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lgani sababli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\bar{\xi}_n}{n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}P\left(k-1<|\xi_1|\le k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(k-1<|\xi_1|\le k\right)\sum_{n\ge k}\frac{1}{n^2}.$$

Ushbu

$$\sum_{n\ge k}\frac{1}{n^2}\le\int_k^{\infty}\frac{dx}{x^2}\quad\text{va}\quad\sum_{n\ge k}\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}=\frac{k+1}{k^2}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lgani sababli,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\bar{\xi}_n}{n^2}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2(k+1)}{k^2}P\left(k-1<|\xi|\le k\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)P\left(k-1<|\xi|\le k\right)\le$$

$$\le 2+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P\left(k-1<|\xi|\le k\right)\le 2+M|\xi_1|<\infty.$$

Zarurligi. Agar

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow[n\to\infty]{1eht.}0$$

bo‘lsa, u holda

$$\frac{\xi_n}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_{n-1}}{n-1}\xrightarrow[n\to\infty]{1eht.}0,$$

ya’ni, 1 ehtimol bilan

$$\left\{\omega\in\Omega:\left|\frac{\xi_n}{n}\right|>1\right\}$$

hodisalardan faqat cheklitasi ro‘y beradi.

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi_n|>n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi_1|>n\right)<\infty$$

ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi_n|>n\right)=\infty.$$

B^* orqali $\left\{\omega\in\Omega:\left|\frac{\xi_n}{n}\right|>1\right\}$ hodisalardan cheksiz ko‘pi bajarilishini bildiruvchi tasodifiy hodisani belgilaymiz va ξ_k tasodifiy miqdorlarning bog‘liqsizligidan foydalanib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$P(B^*)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\left(\frac{|\xi_m|}{n}>1\right)\right)=1-\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left(\frac{|\xi_m|}{m}\le1\right)\right)=$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}P\left(\bigcap_{m=n}^{k}\left(\frac{|\xi_m|}{m}\le 1\right)\right)=1-\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\prod_{m=n}^{k}\left(1-P\left(\frac{|\xi_m|}{m}>1\right)\right)=$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\prod_{m=n}^{\infty}\left(1-P\left(\frac{|\xi_m|}{m}>1\right)\right)=1.$$

Demak, $M\xi_1<\infty$. Teorema isbot bo'ldi.

2-natija. (Borel teoremasi). Yutuqning ehtimoli p bo'lgan Bernulli sxemasi bo'yicha otkazilayotgan n ta tajribada yutuqlar soni μ_n uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o'rinli, ya'ni

$$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{1\,eht.}0.$$

7-misol. Bernshteyn polinomlari. Katta sonlar qonuni, matematik analiz kursidan bizga ma'lum bo'lgan uzluksiz funksiya ko'phadlar orqali tekis yaqinlashishi haqidagi Veyershtrass teoremasini isbotlashda ishlatiladi. Har bir tajribada "yutuq" chiqish hodisasining ehtimoli x, qarama-qarshi hodisaning ehtimoli $1-x$, $(0<x<1)$ bo'lgan bog'liqsiz tajribalar o'tkazilayotgan bo'lib, μ_n esa n ta tajribada chiqqan "yutuq"lar soni $f\in C_{[0,1]}$ bo'lsin. U holda

$$P(\mu_n=k)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

tenglik o'rinli bo'lgani sababli

$$B_n(x)=Mf\left(\frac{\mu_n}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \quad (26)$$

$B_n(x)$ ko'phad $f(x)$ funksiya uchun **Bernshteyn polinomi deb** ataladi. Bernulli teoremasiga ko'ra

$$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{1\,eht.}x.$$

U holda

$$Mf\left(\frac{\mu_n}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'rish mumkin.

Bernshteyn teoremasi. (26) formula orqali aniqlangan $\{B_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ ko'phadlar ketma-ketligi $[0,1]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

Isboti. f funksiya $[0,1]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani sababli u $[0,1]$ oraliqda tekis uzluksiz bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta(\varepsilon)$ son topiladiki, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x_1 va x_2 sonlar uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $[0,1]$ oraliqda chegaralangan bo'lgani uchun, shunday o'zgarmas son c topiladiki, uning uchun $f(x) \le c$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ushbu

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

binom formulasi o'rinli. Bunga ko'ra

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

va demak,

$$|B_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le \sum_{k: \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k: \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + 2c \sum_{k: \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2} + 2cP\left(\left| \frac{\mu_n}{n} - x \right| \ge \delta \right).$$

Chebishev tengsizligidan

$$P\left(\left| \frac{\mu_n}{n} - x \right| \ge \delta \right) \le \frac{D\left(\frac{\mu_n}{n}\right)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$

kelib chiqadi, chunki $0 < x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar uchun $x(1-x) \le \frac{1}{4}$. $N(\delta)$ soni

$$\frac{1}{4N(\delta)\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural son bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x \in [0,1]$ uchun

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

8-misol. Monte-Karlo metodi. Bizdan, qandaydir uzluksiz $g(x)$ funksiya uchun

$$\int_0^1 g(x)dx$$

integralni hisoblash talab qilinayotgan bo'lsin. $\{\xi_n, n \in \mathrm{N}\}$ $[0;1]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. U holda

$$Mg(\xi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_{\xi_n}(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

va kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan, 1 ehtimol bilan

$$\frac{g(\xi_1)+...+g(\xi_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} Mg(\xi_1) = \int_0^1 g(x)dx$$

deb ta'kidlashimiz mumkin.

Shunday qilib, $\int_0^1 g(x)dx$ integralni taqribiy hisoblash algoritmini keltirib chiqarish uchun katta sonlar qonuni nazariy asos vazifasini bajaradi.

V BOBGA DOIR MASALALAR

1. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_n = 0, n \in N$ bo'lsin. Agar $c = 1$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{\xi_n^c}{1+|\xi_n|} < \infty$$

bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator bir ehtimol bilan yaqinlashishini isbotlang, bu yerda $$\xi_n^c=\begin{cases}\xi_n, |\xi_n|\le c;\\ 0, |\xi_n|>c.\end{cases}$$

2. $\{F_n(x)\}, n\in N$ – tasodifiy funksiyalar ketma-ketligi uzluksiz tasodifiy miqdorga sust yaqinlashsin. U holda bu yaqinlashish tekis yaqinlashish ekanligi isbotlansin.

3. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_k=0, k\in N, D\xi_1=1, D\xi_k=2^{k-2}, k\ge 2$ bo'lsin. Bu holda Lindeberg sharti bajarilmaydi, ammo markaziy limit teorema o'rinli ekanligi isbotlansin.

4. Agar $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa, u holda

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n \quad \text{va} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n$$

tasodifiy miqdorlar xos ekanligini isbotlang.

5. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_1=0$, $M\xi_1^2=1$ bo'lsin. U holda

$$\max\left\{\frac{|\xi_1|}{\sqrt{n}},...,\frac{|\xi_n|}{\sqrt{n}}\right\}\Rightarrow 0, n\to\infty$$

munosabatning o'rinli ekanligini isbotlang.

6. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. Agar $D\xi_n$ chekli bo'lsa va faqat shundagina $A_n=\{|\xi_n|\ge\sqrt{n}\}$ hodisalardan cheklitasi 1 ehtimol bilan ro'y berishi isbotlansin.

7. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $P(\xi_n=1)=\frac{1}{n}, n\in N, P(\xi_n=0)=1-\frac{1}{n}$ bo'lsin. Bu ketma- ketlik $r>0$ tartibli o'rtacha ma'noda yaqinlashib, 1 ehtimol bilan yaqinlashmasligi isbotlansin.

8. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $P(\xi_n=n^{2/r})=\frac{1}{n}, r>0, n\in N, P(\xi_n=0)=1-\frac{1}{n}$ bo'lsin. Bu ketma-ketlik ehtimol bo'yicha yaqinlashib, $r>0$ tartibli o'rtacha ma'noda yaqinlashmasligini ko'rsating.

9. $\xi_n = n^2\xi\exp\{-n\xi\}, n\in N$ bo'lsin, bu yerda ξ ko'rsatkichli taqsimotga ega. U holda barcha nuqtalarda $n\to\infty$ da $\xi_n \to 0$ bo'lib, $M\xi_n$ nolga yaqinlashmasligini ko'rsating.

10. $\xi_n = a_n\eta$, bu yerda $\{a_n, n\in N\}$ yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik, $M\eta^r = \infty$, $r>0$ bo'lsin. $\{\xi_n\}$, $n\in N$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi 1 ehtimollik bilan yaqinlashib, r tartibli o'rtacha ma'noda yaqinlashmasligini isbotlang.

11. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_1 = 0, M\xi_1^2 = 1$ va $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$ bo'lsin. Bu ketma-ketlik sust yaqinlashib, o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashmasligini isbotlang.

12. ξ – $\lambda > 0$ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lsa, $\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ ketma-ketlikning $\lambda\to\infty$ dagi sust limitini toping.

13. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – ketma-ketlik katta sonlar qonuniga bo'ysinadi. U holda $|\xi_1|,|\xi_2|,...$ ketma-ketlik katta sonlar qonuniga bo'ysunishi shartmi?

14. $\xi_1,...,\xi_n,...$ – bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $S_n = \sum_{j=1}^{n}\xi_j, \eta_n = \frac{S_n}{n}, \chi_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ bo'lsin. Quyida keltirilgan taqsimotlar uchun S_n, η_n, χ_n – tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklarining $n\to\infty$ dagi sust limitlari topilsin.

a) binomial taqsimot;

b) Puasson taqsimoti;

c) $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimot;

d) normal taqsimot;

e) Koshi taqsimoti.

15. $[0,1]$ oraliqdan tasodifiy ravishda ξ nuqta tanlanadi va uni o'nlik kasrga $\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_n(\xi)}{10^n}$ yoyiladi. $J_1(\xi)+...+J_n(\xi)$ yig'indi munosib normalangach, $n\to\infty$ da normal tasolifiy miqdorga sust intilishi isbotlansin.

VI BOB. TASODIFIY JARAYONLAR

Ehtimollar nazariyasi kursini o'rganish jarayonida ko'z o'ngimizdan o'tadigan tasodifiy obyektlar borgan sari murakkablashib boradi. Eng avval bular tasodifiy hodisalar bo'lib, ularni 0 va 1 qiymatlarni qabul qiluvchi indikatorlar bilan o'zaro bir qiymatli akslantirish mumkin. So'ngra (haqiqiy qiymatli) tasodifiy miqdorlar o'rganilib, ulardan so'ng chekli o'lchovli tasodifiy vektorlar ko'z o'ngimizda namoyon bo'ladi. Nihoyat, limit teoremalarni o'rganishda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bilan ish olib borishga to'g'ri keladi.

Shunday qilib, ehtimollar nazariyasida bitta yoki bir nechta tasodifiy miqdorlarni o'rganishdan tashqari cheksiz ko'p sondagi tasodifiy miqdorlarni o'rganishga amaliy ehtiyojlar tug'iladi va bu masalalarni tadqiq etish tasodifiy jarayonlar nazariyasini tashkil qiladi. Tasodifiy jarayonlar nazariyasi ehtimollar nazariyasining nisbatan yosh yo'nalishlaridan iborat bo'lib, u fizika, texnika, moliyaviy matematika va tabiiy fanlarning boshqa turli tarmoqlarida muhum qo'llanishlarga ega. Yuqorida qayd etilgan fanlarning talablari qaralayotgan nazariyaning oxirgi o'n yilliklar davomida keskin rivojlanishiga sabab bo'ldi.

Ushbu bobda tasodifiy jarayonlar nazariyasining asoslari bayon etiladi.

1-§. Tasodifiy jarayonlar nazariyasining asosiy tushunchalari

Oldingi boblarda biz tasodifiy miqdorlarning bitta ehtimollar fazosida aniqlangan chekli yoki sanoqli sinflarini ko'rgan edik. Ushbu paragrafda tasodifiy miqdorlar sinfi kontinual (kontinum quvvatli) bo'lishi ham mumkin bo'lgan hol o'rganiladi.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ehtimollar fazosi berilgan bo'lsin. $(\aleph, \Re)-$ o'lchovli fazo bo'lsin, bu yerda $\aleph$ ixtiyoriy to'plam, $\Re$ esa $\aleph$ to'plamning qism to'plamlaridan tashkil topgan σ-algebra.

1-ta'rif. $\xi=\xi(\omega):\Omega\to\aleph$ bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $B\in\Re$ uchun

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{A} \tag{1}$$

bo'lsa, u holda $\xi=\xi(\omega)$ funksiyaga $\aleph$ dan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy element, yo'ki $\aleph$ -q.t.m. deyiladi.

Agar $\aleph=R^1$ va $\Re=B(R^1)$ – Borel to'plamlarining σ-algebrasidan iborat bo'lsa, u holda $\xi=\xi(\omega)$ funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi.

2-ta'rif. T qandaydir to'plam bo'lsin. $t\in T$ parametrga bog'liq bo'lgan $\aleph$ –qiymatli tasodifiy miqdorlar oilasiga ***tasodifiy funksiya*** deyiladi.

$t\in T$ parametrga bog'liq bo'lgan tasodifiy funksiya odatda $\{\xi(t),t\in T\}$ orqali belgilanadi. $T\subset R$ bo'lib, $t\in T$ parametrni vaqt deb talqin qilinsa, u holda $\{\xi(t),t\in T\}$ tasodifiy funksiya ***tasodifiy jarayon*** deb ataladi.

1-misol. Bundan oldingi paragraf $T=\mathbb{N}=\{1,2,3...\}$ larda ko'rilgan $\xi_1,\xi_2,...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ko'rinishga ega bo'lgan tasodifiy jarayondan iborat. $S_1,S_2,...$ ketma-ketlik haqida ham bunday fikrni aytish mumkin, bu yerda $S_k=\xi_1+\xi_2+...+\xi_k$. $T\subseteq\mathbb{Z}=\{...,-1,0,1,...\}$ bo'lgan bunday jarayonlarni odatda ***diskret vaqtli tasodifiy jarayonlar*** yoki ***tasodifiy ketma-ketliklar*** deyiladi.

2-misol. Agar T birorta sonli interval bilan ustma-ust tushsa, ya'ni $T=[a,b]$ $(-\infty\le a<b\le\infty$, yoki $0\le a<b\le\infty)$ bo'lsa, $\{\xi(t),t\in T\}$ tasodifiy miqdorlar oilasi ***uzluksiz vaqtli tasodifiy jarayon*** deyiladi. t parametrni vaqt deb talqin qilish, albatta shart emas. U tasodifiy jarayon tushunchasini yuzaga keltirgan tabiiy nazariy masalalarning ko'pchiligida t parametr vaqtdan, $\xi(t)$ ning qiymati t momentdagi kuzatuvning natijasidan iborat bo'lgani sababli, tarixan vujudga kelgan.

Masalan, gaz molekulasining vaqtga nisbatan harakati, suv havzasidagi suvning sathi, samolyot qanotining tebranishi va boshqa shu kabi jarayonlarni tasodifiy jarayon deb qarash mumkin.

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}\sin kt\,,\ t\in\left[0,2\pi\right]$$

tasodifiy funksiya tasodifiy jarayondan iborat, bu yerda ξ_k – o'zaro bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardan iborat.

3-ta'rif. $t_0\in T$ – fiksirlangan moment bo'lsin. $\xi_0(\omega)=\xi(t_0,\omega)$ tasodifiy miqdor ***tasodifiy jarayonning*** $t_0\in T$ nuqtadagi ***kesimi*** deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\xi(t,\omega)$ ixtiyoriy $t\in T$ uchun haqiqiy (kompleks) qiymatli tasodifiy miqdor bo'lsa (ya'ni $\aleph=R^1$ $(\aleph=\mathbb{C})$, bu yerda $\mathbb{C}$ – kompleks tekislik), u holda $\xi(t)$ ***haqiqiy (kompleks) tasodifiy jarayon*** deyiladi.

5-ta'rif. $\left\{\xi\left(t\right),\ t\in T\right\}$ tasodifiy jarayonni ko'raylik. Ixtiyoriy fiksirlangan $\omega_0\in\Omega$ uchun $\xi_{\omega_0}(t)=\xi(t,\omega_0),\,t\in T$ funksiya jarayonning ω_0 elementar hodisaga mos kelgan ***trayektoriyasi*** deyiladi. Trayektoriyalar ***realizatsiyalar*** yoki ***tanlanma funksiyalar*** deb ham ataladi. Demak, bu holda tasodifiy miqdorning qiymatlari sifatida t ga bog'liq funksiyalar yuzaga keladi.

6-ta'rif. Agar jarayonning trayektoriyalari har bir $t\in T$ nuqtada o'ngdan uzluksiz va chapdan chekli limitga ega bo'lsa, u holda $\xi(t)$ ***regulyar tasodifiy jarayon*** deyiladi.

Endi yuqorida keltirilgan ta'riflarni izohlovchi bir nechta misollar ko'ramiz.

3-misol. $\xi(t)$ tasodifiy funksiya

$$\xi(t)=tX,\ t\in\left[0,1\right]$$

formula orqali aniqlangan bo'lsin, bu yerda $X-\left[0,1\right]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor. $\xi(t)$ tasodifiy funksiyaning **kesimlarini** va trayektoriyalarini tavsiflang.

Yechimi. Fiksirlangan $t_0\in\left[0,1\right]$ nuqta uchun $\xi_{t_0}(\omega)=t_0X(\omega)-[0,t_0]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdordan iborat. $\xi(t)$ tasodifiy funksiyaning trayektoriyalari $\xi_{\omega_0}(t)$ funksiyalar (0,0) nuqtadan chiquvchi burchak koeffitsiyentlari $X(\omega_0)$ bo'lgan to'g'ri chiziqlar. $\xi(t)$

tasodifiy funksiya regulyar, chunki uning barcha trayektoriyalari uzluksiz.

4-misol. $T=[0,\infty)$, $\xi(t)$ tasodifiy jarayon quyidagi

$$\xi(t)=\mu_n,\, t\in[n,n+1),\, n=0,1,...$$

formula orqali berilgan, bu yerda $\{\mu_n, n=0,1,2...\}$ – chekli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi. $\xi(t)$ tasodifiy jarayonning trayektoriyalarini toping. Bu jarayon regulyarmi?

Yechimi. $\{\xi(t),\ t\in T\}$ jarayonning trayektoriyalari bo'lakli o'zgarmas funksiyalardan iborat bo'lib, ular $t=n=0,1,2,...$ nuqtalarda uzilishga ega. Ta'rifga ko'ra bu funksiyalar o'ngdan uzluksiz va chapdan barcha $\omega\in\Omega$ larda

$$\lim_{t\uparrow n}\xi_\omega(t)=\mu_{n-1}(\omega)$$

limitga ega. Shartga ko'ra, $P\{|\mu_{n-1}|<\infty\}=1$ bo'lgani sababli bu jarayon regulyar.

7-ta'rif. $\{\xi(t),\ t\in T\}$ tasodifiy jarayon va $n\geq 1$ lar uchun $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$ – chekli vaqt momentlari guruhi bo'lsin. $(\xi(t_1),...,\xi(t_n))$ tasodifiy vektorning taqsimoti $\xi(t)$ ***jarayonning** n **o'lchovli taqsimoti*** deyiladi. Turli $n=1,2,...$ va mumkin bo'lgan barcha $t_i\in T$ vaqt momentlari uchun aniqlangan taqsimotlar sinfiga ξ tasodifiy jarayonning ***chekli o'lchovli taqsimotlari*** deyiladi.

$\aleph$ orqali $\xi(t)$ tasodifiy jarayonning trayektoriyalari joylashgan $\aleph=\{x(t), t\in T\}$ funksiyalar fazosini belgilaymiz. So'ngra $\mathfrak{B}_\aleph^T$ orqali $\aleph$ fazoning ixtiyoriy $n\in\mathbb{N}$, ixtiyoriy $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$ va ixtiyoriy $B_1,B_2,\ldots,B_n$ Borel to'plamlari uchun

$$C=\{x\in\aleph : x(t_1)\in B_1,...,x(t_n)\in B_n\} \tag{2}$$

ko'rinishidagi barcha qism to'plamlari yaratgan σ – algebrani belgilaymiz. (2) ko'rinishidagi to'plamlar ***silindrik to'plamlar*** deyiladi.

$\xi(t)$ tasodifiy jarayonni $(\Omega,\mathcal{A})$ o'lchovli fazoni $(\aleph,\mathfrak{B}_\aleph^T)$ o'lchovli fazoga Borel o'lchovli akslantirishi deb talqin qilish mumkin. Bu akslantirish $(\aleph,\mathfrak{B}_\aleph^T)$ fazoda

$$P_{\xi}(B)=P\left(\xi^{-1}(B)\right), \forall B\in \mathfrak{B}_{\aleph}^{T}$$

tenglik orqali P_{ξ} ehtimol o'lchovini yaratadi.

$(\aleph, \mathfrak{B}_{\aleph}^{T}, P_{\xi})$ uchlik ***tanlanma ehtimollar fazosi*** deyiladi va bu fazoda elementar hodisa $\langle\omega\rangle$ jarayonning trayektoriyasi bilan aynan teng deb hisoblanadi. P_{ξ} o'lchov esa $\xi(t)$ ***tasodifiy jarayonning taqsimoti*** deyiladi.

$\xi(t)$ tasodifiy jarayonning chekli o'lchovli taqsimotlari silindrik to'plamlar sinfida aniqlangan. Ushbu kitobga kirmagan A.N.Kolmogorov tomonidan isbotlangan mashhur teoremaga asosan bu taqsimotlarni silindrik to'plamlar algebrasi C dan $\mathfrak{B}_{\aleph}^{T}$ σ-algebraga davom ettirish mumkin va buning natijasida hosil bo'lgan $P_{\xi}(\cdot)$ taqsimot berilgan jarayonning P_{ξ} taqsimoti bilan ustma-ust tushadi. Aytilganlardan kelib chiqadiki, P_{ξ} taqsimot hamma chekli o'lchovli taqsimotlar bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bizga (II bobning 4-§ga qarang) ma'lumki, chekli o'lchovli taqsimot funksiyalar chekli o'lchovli taqsimotlarni to'la aniqlaydi. Shuning uchun ham tasodifiy jarayonning chekli o'lchovli taqsimotlarini aniqlash uchun mos taqsimot funksiyalarni aniqlash yetarli.

Shunday qilib, oldindan berilgan chekli o'lchovli taqsimotlarga ega bo'lgan tasodifiy jarayon mavjud, ammo umuman olganda bunday tasodifiy jarayon yagona emas ekan. Boshqa so'z bilan aytganda, chekli o'lchovli taqsimotlar tasodifiy jarayonlarning qandaydir ma'noda bir-biri bilan ekvivalent bo'lgan butun bir sinfini yaratadi. Ekvivalentlik tushunchasiga turli yondashishlarni mukammalroq ko'rib chiqamiz.

$\{\xi(t), t\in T\}$ va $\{\eta(t), t\in T\}$ bitta $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan va bir xil o'lchovli fazoda (masalan, $(R^{1}, B(R^{1}))$ da) qiymatlar qabul qiluvchi ikkita tasodifiy jarayon bo'lsin.

8-ta'rif. Bizga $\{\xi(t), t\in T\}$ va $\{\eta(t), t\in T\}$ tasodifiy jarayonlar berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $t_1,...,t_n\in T$, $B_1,...,B_n\in B(R^{1})$; $n=1,2...$ lar uchun

$$P\left(\xi(t_1)\in B_1,...,\xi(t_n)\in B_n\right)=P\left(\eta(t_1)\in B_1,...,\eta(t_n)\in B_n\right) \qquad (3)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\{\xi(t),t\in T\}$ va $\{\eta(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayonlar ***keng ma'noda stoxastik ekvivalent*** deyiladi.

1-izoh. Keng ma'noda ekvivalentlik sharti ξ va η tasodifiy jarayonlarning chekli o'lchovli taqsimotlari ustma-ust tushishini bildiradi.

9-ta'rif. Agar ixtiyoriy $t\in T$ uchun

$$P\left(\xi(t)=\eta(t)\right)=1 \qquad (4)$$

bo'lsa, u holda $\xi(t)$ va $\eta(t)$ tasodifiy jarayonlar ***stoxastik ekvivalent*** yoki sodda qilib ***ekvivalent*** tasodifiy jarayonlar deyiladi.

Agar jarayonlar stoxastik ekvivalent bo'lsa, u holda ularning chekli o'lchovli taqsimotlari ustma-ust tushadi, ya'ni ular keng ma'noda ekvivalent bo'ladi, ammo buning teskarisi to'g'ri emas. Trayektoriyalar to'g'risida gapirsak, ular stoxastik ekvivalent jarayonlarda turli bo'lishi mumkin ekanligini ushbu misolda ko'rish mumkin.

5-misol. $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{A}=B_{[0,1]}-[0,1]$ oraliqdagi Borel to'plamlarining $\sigma-$algebrasi $P-$ Lebeg o'lchovi va $T=[0,1]$ bo'lsin. $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollar fazosida $\{\xi(t),t\in T\}$ va $\{\eta(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayonlarni quyidagicha aniqlaymiz. $\xi(t,\omega)=0$ va $\eta(t,\omega)=\begin{cases}0, & t\neq\omega,\\ 1, & t=\omega,\end{cases}$ $(t,\omega)\in T\times\Omega$. Bu jarayonlar ekvivalent, ammo ularning trayektoriyalari turli ekanligi ko'rsatilsin.

Yechimi. Qandaydir fiksirlangan $t\in T$ uchun

$$\{\omega\in\Omega:\xi(t,\omega)\neq\eta(t,\omega)\}=\{\omega\in\Omega:\omega=t\}=\{t\}.$$

Bitta nuqtali to'p

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)\leq\frac{1}{B_n^2(\tau B_n)^{\delta}}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^{2+\delta}\,dF_k(x)\leq m$$

ning Lebeg o'lchovi nolga teng bo'lgani sababli, $\forall t\in T$ uchun

$$P\left(\xi(t)\neq\eta(t)\right)=0,$$

ya'ni $\xi(t)$ va $\eta(t)$ tasodifiy jarayonlar stoxastik ekvivalent. Shunga qaramay $\xi(t)$ va $\eta(t)$ jarayonlarning birorta ham ustma-ust tushadigan trayektoriyalari mavjud emas. Haqiqatdan ham, istalgan $\omega\in\Omega$ uchun $t^{*}=\omega$ nuqtada shartga ko'ra $\xi(t^{*},\omega)\neq\eta(t^{*},\omega)$ bo'lgani sababli,

$$P\big(\omega\in\Omega:\xi(t,\omega)=\eta(t,\omega);\forall t\in T\big)=0.$$

Boshqa so'z bilan aytganda $\xi(t)$ va $\eta(t)$ tasodifiy jarayonlarning (1 ehtimol bilan) birorta ham trayektoriyalari ustma-ust tushmaydi.

Quyidagi ta'rif eng kuchli ekvivalentlik tipini aniqlaydi.

10-ta'rif. $\{\xi(t),t\in T\}$ va $\{\eta(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayonlar berilgan bo'lsin. Agar

$$P\left(\sup_{t\in T}\left|\xi(t)-\eta(t)\right|>0\right)=1 \tag{5}$$

bo'lsa, u holda ξ va η ***ajratib bo'lmaydigan*** tasodifiy jarayonlar deyiladi.

(5) shartdan (4) kelib chiqadi, ya'ni ajratib bo'lmaydigan jarayonlar ekvivalent, lekin buning teskarisi umuman olganda to'g'ri emas. Ammo ba'zi qo'shimcha shartlar bajarilsa, 9- va 10-ta'riflar ekvivalent bo'lib qoladi. Bunday hol, masalan $\xi(t)$ va $\eta(t)$ lar tasodifiy ketma-ketliklar bo'lsa bajariladi.

1-teorema. Ekvivalent diskret tasodifiy jarayonlar ajratib bo'lmaydigan tasodifiy jarayonlardan iborat.

Isboti. $\{\xi(t),t\in T\}$ va $\{\eta(t),t\in T\}$; $T=\mathbb{Z}-$ diskret ekvivalent tasodifiy jarayonlar bo'lsin. U holda

$$P\big(\xi(t)\neq\eta(t),\ \text{birorta } t\in T \text{ uchun}\big)=$$

$$=P\left(\bigcup_{t\in T}\{\xi(t)\neq\eta(t)\}\right)\leq\sum_{t\in T}P\big(\xi(t)\neq\eta(t)\big)=0.$$

Bundan (5) shart kelib chiqadi.

Quyidagi misollar chekli o'lchovli taqsimotlarni qanday topish mumkinligini ko'rsatadi.

6-misol. X va Y lar $F_X(x)$ va $F_Y(y)$ taqsimot funksiyalarga ega bo'lgan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlardan iborat bo'lib, $\{\xi(t),\ t\in T\}$ tasodifiy jarayon

$$\xi(t) = Xt + Y$$

formula yordamida aniqlangan bo'lsin. $\xi(t)$ jarayonning trayektoriyalari tavsiflansin va uning chekli o'lchovli taqsimot funksiyalari topilsin.

Yechimi. Bu jarayonning trayektoriyalari tasodifiy burilishga va $t=0$ dagi boshlang'ich tasodifiy shartga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlardan iborat. $\xi(t)$ tasodifiy jarayonning $t>0$ dagi bir o'lchovli taqsimot funksiyasini topamiz.

$$F_\xi(x;t) = P(Xt+Y \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(Xt+Y / Y=y)dF_Y(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(Xt+y \le x)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(X \le \frac{x-y}{t}\right)dF_y(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X\left(\frac{x-y}{t}\right)dF_Y(y).$$

Agar $t=0$ bo'lsa, u holda $F_\xi(x;t) = F_Y(x)$. n o'lchovli taqsimot funksiya uchun, agar $t_1>0,...,t_n>0$ bo'lsa, u holda

$$F_\xi(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = P\big(\xi(t_1) \le x_1,...,\xi(t_n) \le x_n\big) =$$

$$= P\big(Xt_1+Y \le x_1,...,Xt_n \le x_n\big) = \int_{-\infty}^{\infty} P\big(Xt_i+Y \le x_i, i=1,...,n / Y=y\big)dF_Y(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\big(Xt_i+y \le x_i, i=1,...,n\big)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X\left(\min\left\{\frac{x_1-y}{t_1},...,\frac{x_n-y}{t_n}\right\}\right)dF_Y(y).$$

7-misol. $\{\xi(n); n=1,2,...\}$ – kesmalari $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega bo'lgan bir xil taqsimlangan tasodifiy ketma-ketlik bo'lsin. ξ ketma-ketlikning chekli o'lchovli taqsimotlar sinfi topilsin.

Yechimi. $\xi(n)$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligini hisobga olsak,

$$F_\xi(x_1,...,x_k;n_1,...,n_k) = P\big(\xi(n_1) \le x_1,...,\xi(n_k) \le x_k\big) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P\big(\xi(n_i) \le x_i\big) = \prod_{i=1}^{k} F(x_i).$$

Bu holda barcha chekli o'lchovli taqsimot funksiyalar bir o'lchovli $F(x)$ taqsimot funksiya orqali ifodalanadi.

8-misol. $\{\xi(n); n=1,2,...\}$ tasodifiy ketma-ketlik

$$\xi(n)=\alpha\xi(n-1)+\varepsilon_n,\ n=1,2,...,\ \xi(0)=0$$

rekurrent munosabat orqali aniqlangan, bu yerda $\{\varepsilon_n\}-(0,\sigma^2)$ $(\sigma\neq 0)$ parametrlarga ega bo'lgan bog'liqsiz bir xil taqsimlangan normal tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. $\xi(n)$ tasodifiy ketma-ketlikning bir o'lchovli taqsimot funksiyasi topilsin.

Yechimi. $\xi(n)$ tasodifiy ketma-ketlikning ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\xi(n)=\varepsilon_1\alpha^{n-1}+...+\varepsilon_{n-1}\alpha+\varepsilon_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}\varepsilon_k .$$

$\{\varepsilon_k\}-$tasodifiy miqdorlarning normalligidan va bog'liqsizligidan $\xi(n)$ tasodifiy miqdor ham normal tasodifiy miqdor bo'lib, $M\xi(n)=0$ va

$$D_\xi(n)=D\xi(n)=\sum_{k=1}^{n}D\varepsilon_k\alpha^{2(n-k)}=\begin{cases}\sigma^2\dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}, \text{agar } \alpha^2\neq 1,\\ \sigma^2 n, \text{agar } \alpha^2=1\end{cases}$$

tengliklarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $\xi(n)$ tasodifiy ketma-ketlikning bir o'lchovli taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x;n)=P(\xi(n)\leq x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(n)}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2D_\xi(n)}dy=\Phi\left(x/\sqrt{D_\xi(n)}\right)$$

ko'rinishga ega.

2-§. Tasodifiy jarayonlarning xarakteristikalari. Gilbert jarayoni

Bu paragrafda ko'riladigan tasodifiy jarayonlar kompleks qiymatlarni ham qabul qilishi mumkin. Tasodifiy jarayonning asosiy sinflarini kiritish uchun bizga uning eng muhim momentli xarakteristikalari kerak bo'ladi. Ular chekli o'lchovli taqsimotlar yordamida hisoblanadi va jarayonning sodda xossalarini beradi. $\xi(t)$ tasodifiy jarayon bo'lsin.

$$m_\xi(t)=M\{\xi(t)\} \text{ va } D_\xi(t)=D\{\xi(t)\}=M\left|\xi(t)-m_\xi(t)\right|^2$$

funksiyalarga $\xi(t)$ ***jarayonning*** mos ravishda ***matematik kutilmasi va dispersiyasi*** deyiladi. Tasodifiy jarayonning muhim xarakteristikalaridan biri

$$K(t,s)=Cov(\xi(t),\xi(s))=M\left(\xi(t)-m_\xi(t)\right)\overline{\left(\xi(s)-m_\xi(s)\right)}$$

formula bilan aniqlanadigan ***kovariatsiya funksiyasi*** hisoblanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan barcha $t,s\in T$ lar uchun $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ va $K(t,s)$ miqdorlarning mavjud bo'lishi uchun

$$M\left|\xi(t)\right|^2<\infty\,\forall t\in T \qquad (6)$$

shart bajarilishi yetarli ekanligi kelib chiqadi.

11-ta'rif. (6) shartni qanoatlantiruvchi tasodifiy jarayon ***Gilbert jarayoni*** deyiladi.

Gilbert jarayonining vaqtning t momentidagi qiymatini biz $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ fazoning elementi deb talqin qilamiz. Bu nuqtayi nazarga ko'ra $\{\xi(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayonni $\mathcal{L}_2$ fazodagi qandaydir egri chiziq deb qarash mumkin.

$$B(t,s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}=\left(\xi(t),\overline{\xi(s)}\right),\, t,s\in T$$

funksiya $\xi(t),t\in T$ jarayonning ***kovariatsiyasi*** deyiladi.

1-tasdiq. $\{\xi(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayonning kovariatsiyasi quyidagi xossalarga ega:

1) $B(t,t)=M\left|\xi(t)\right|^2\geq 0,\ t\in T;\ B(t,s)=\overline{B(s,t)},\, t,s\in T;$

2) $\left|B(t,s)\right|^2\leq B(t,t)B(s,s),\ t,s\in T;$

3) B – musbat aniqlangan funksiya, ya'ni barcha $c_1,...,c_n$ kompleks sonlar va ixtiyoriy $t_1,...,t_n\in T$ vaqt momentlari uchun

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i\overline{c}_jB(t_i,t_j)\geq 0.$$

Isboti. 2-xossaning isboti Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi, 3-xossani isbotlash uchun esa

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i\overline{c}_jB(t_i,t_j)=M\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\xi(t_i)\overline{\sum_{j=1}^{n}c_j\xi(t_j)}\right)$$

tenglik o'rinli ekanligini qayd etishimiz yetarli.

Ikkita $\xi(t)$ va $\eta(t)$, $t\in T$ tasodifiy jarayonlarning ***birgalikdagi kovariatsiyasi (korrelyatsion funksiyasi)*** deb

$$B_{\xi\eta}(t,s)=M\xi(t)\overline{\eta(s)}=M((\xi(t)-m_\xi(t))\overline{(\eta(s)-m_\eta(s))})$$

funksiyaga aytiladi.

12-ta'rif. Agar T to'plamdan olingan $t_1<t_2\le t_3<t_4$ vaqt momentlari uchun

$$M\left(\xi(t_4)-\xi(t_3)\right)\overline{\left(\xi(t_2)-\xi(t_1)\right)}=0$$

bo'lsa, u holda $\{\xi(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayon ***ortogonal orttirmali tasodifiy jarayon*** deyiladi.

Agar $\{\xi(t),t\in T\}$ $\xi_1(t)=\xi(t)-m_\xi(t)$ jarayon ortogonal orttirmali bo'lsa, u holda ***korrelyatsiyalanmagan orttirmali*** tasodifiy jarayon deyiladi.

$\{\xi(t),t\in T\}$ ortogonal orttirmali tasodifiy jarayon va biror $t_0\in T$ uchun $\xi(t_0)=0$ bo'lsin. U holda T to'plamdan olingan $t_0<s<t$ sonlar uchun

$$B(t,s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}=M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)\overline{\left(\xi(s)-\xi(t_0)\right)}+$$
$$+M\left|\xi(s)\right|^2=M\left|\xi(s)\right|^2=B(s,s).$$

Bundan,

$$B(t,s)=\overline{B(s,t)}$$

ekanligini hisobga olib, $B(t,s)$ kovariatsiya uchun $t\ge t_0, s\ge s_0$ bo'lganda quyidagi ifodani olamiz:

$$B(t,s)=B(\min(t,s)),\text{ bunda } B(t)=B(t,t)=M\left|\xi(t)\right|^2.$$

$B(t)$ monoton kamaymaydigan funksiya ekanligini qayd etamiz. Haqiqatan ham, $t>s>t_0$ bo'lsin. U holda $\xi(t)$ jarayonning ortogonalligiga ko'ra

$$B(t)=M\left|\xi(t)\right|^2=M\left|\xi(t)-\xi(s)+\xi(s)-\xi(t_0)\right|^2=$$

$$= M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2 + M\left|\xi(s)\right|^2 = M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2 + B(s),$$

ya'ni $B(t) \geq B(s)$.

2-teorema. Berilgan

$$M\xi(t) = m_\xi(t), \; K_\xi(t,s) = Cov(\xi(t), \xi(s)) \tag{7}$$

xarakteristikalarga ega bo'lgan $\{\xi(t), t \in T\}$ haqiqiy tasodifiy jarayon mavjud bo'lishi uchun ixtiyoriy $t_1, \ldots, t_n \in T$ va ixtiyoriy $z_1, \ldots, z_n \in C$ kompleks sonlar uchun

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_\xi(t_i, t_j) z_i z_j \geq 0 \tag{8}$$

shart bajarilishi, ya'ni $K(t,s)$ kovariatsion funksiya musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $\xi(t)$ – (7) xarakteristikalarga ega bo'lgan tasodifiy jarayon bo'lsin. U holda ixtiyoriy $t_1, \ldots, t_n \in T$ va ixtiyoriy $z_1, \ldots, z_n \in C$ kompleks sonlar uchun

$$D\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi(t_i)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\big(\xi(t_i)\xi(t_j)\big) z_i z_j \geq 0,$$

ya'ni $K(t,s)$ kovariatsiya funksiyasi musbat aniqlangan.

Endi (7) momentli xarakteristikalarga ega bo'lgan tasodifiy jarayonning mavjud bo'lishi uchun (8) shart yetarli ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, (8) shart $K = \left(K_\xi(t_i, t_j)\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$ matritsaning musbat aniqlanganligini bildiradi. Bundan esa, n o'lchovli taqsimoti $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ funksiyaga teng bo'lgan m va K parametrli n o'lchovli normal tasodifiy miqdor $N(m, K)$ning mavjudligi kelib chiqadi, bu yerda $m = \{m_\xi(t_1), \ldots, m_\xi(t_n)\}$. Shu bilan birga $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ ko'rinishidagi chekli o'lchovli taqsimotlar sinfi Kolmogorovning moslangan taqsimotlar haqidagi teoremasining shartlarini bajaradi va unga ko'ra chekli o'lchovli taqsimotlari yuqorida ko'rsatilgan normal taqsimotlarga teng va xususan, (7) xarakteristikalarga ega bo'lgan $\{\xi(t), t \in T\}$ jarayonning mavjudligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Gauss jarayonlari.

13-ta'rif. $\{\xi(t), t\in T\}$ tasodifiy jarayon bo'lsin. U holda ixtiyoriy $t_1, t_2, ..., t_k \in T$ uchun

$$f_\xi(z_1,...,z_k;t_1,...,t_k) = M\exp\left\{i\sum_{j=1}^{k} z_j\xi(t_j)\right\} =$$

$$= \int_{R^k} \exp\left\{i\sum_{j=1}^{k} z_j x_j\right\} dF_\xi(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$$

munosabat yordamida aniqlangan haqiqiy $z_1,...,z_k$ o'zgaruvchili kompleks $f_\xi(z_1,...,z_k;t_1,...,t_k)$ funksiya $\xi(t)$ jarayon k o'lchovli $F_\xi(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ taqsimotining xarakteristik funksiyasi deb ataladi.

2-izoh. k – tartibli xarakteristik funksiya (xuddi bir o'lchovli holdagi kabi) unga mos kelgan k – tartibli taqsimot funksiyani topishga imkon beradi va shuning uchun ham bu tushunchalar tasodifiy jarayonning ehtimollik strukturasini tavsiflashda biri ikkinchisining o'rnini bosa oladi.

14-ta'rif. Xarakteristik funrsiyasi

$$f_\xi(z_1,...,z_k;t_1,...,t_k) = \exp\left\{i\sum_{j=1}^{k} z_j m_\xi(t_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} K_\xi(t_i,t_j)z_i z_j\right\} \quad (9)$$

ko'rinishga ega bo'lgan $\{\xi(t), t\in T\}$ tasodifiy jarayonga Gauss jarayoni deyiladi.

Avval aytganimizdek, xarakteristik funksiya tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimotini to'la aniqlaydi. Bizga ma'lumki (II bob, 5-§), matematik kutilmasi m_η va kovariatsion matritsasi K_η bo'lgan k o'lchovli normal tasodifiy vektor $\eta = (\eta_1,...,\eta_k)$ $\varphi_\eta(x)$ zichlikka ega bo'lishi uchun uning K_η – kovariatsion matritsasi xosmas, ya'ni $\det K_\eta > 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu holda zichlik funksiya

$$\phi_\eta(x) = \phi_{\eta_1...\eta_k}(x_1,x_2,...,x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det K_\eta)}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m_\eta)^* K_\eta^{-1}(x-m_\eta)\right\}$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar K_η matritsa musbat aniqlangan bo'lsa, u holda Gauss jarayoni $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k))$ kesimining birgalikdagi taqsimoti

$$f_\xi(x;t_1,\ldots,t_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}\left(\det K_\xi\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m_\xi)^* K_\xi^{-1}(x-m_\xi)\right\}$$

taqsimot zichligiga ega. Xarakteristik funksiya bilan k-tartibli taqsimot zichligi orasidagi bog'lanish ko'p o'lchovli Furye almashtirishiga ko'ra

$$\phi_\xi(x;t_1,\ldots,t_k)=(2\pi)^{-k}\int_{R^k} e^{-ix^*z} f_\xi(z;t_1,\ldots,t_k)dz$$

ko'rinishga ega. Agar $\det K_\xi=0$ bo'lsa, u holda bu $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k))$ kesimlarning chiziqli bog'liqligini bildiradi va ularning birgalikdagi $F_\xi(x;t_1,\ldots,t_k)$ taqsimot funksiyasi zichlikka ega emas.

(9) xarakteristik funksiyalar oilasiga mos kelgan chekli o'lchovli normal taqsimotlar Kolmogorov teoremasining shartlarini qanoatlantirishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Demak, Gauss tasodifiy jarayonining ixtiyoriy $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k))$ kesimlari normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy vektordan iborat.

Gauss tasodifiy jarayonining ta'rifidan, uning chekli o'lchovli taqsimotlari uning ikkita moment xarakteristikalari: matematik kutilmalari va kovariatsion funksiyalari yordamida to'liq aniqlanadi.

2-teoremani isbotlashda qurilgan jarayon Gauss jarayonidan iborat ekanligi ravshan. Gauss jarayoniga yana bitta misol keltiramiz.

9-misol. $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ – birgalikdagi taqsimoti normal taqsimotdan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorlar guruhi va

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i g_i(t)$$

bo'lsin, bu yerda $g_i(t)$ – tasodifiy bo'lmagan funksiyalar. $\xi(t)$ jarayon Gauss jarayoni ekanligi ko'rsatilsin.

Yechimi. Biror $t_1,\ldots,t_k$ vaqt momentlari uchun $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k))$ kesimlarni birgalikdagi taqsimotlarining xarakteristik funksiyasini topamiz. 14-ta'rifga ko'ra

$$f_\xi(z_1,\dots,z_k;t_1,\dots,t_k)=$$

$$=M\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}\xi(t_j)z_j\right)\right\}=M\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\eta_l g_l(t_j)\right)\right\}=$$

$$=M\left\{\exp\left(i\sum_{l=1}^{n}\eta_l\sum_{j=1}^{k}g_l(t_j)z_j\right)\right\}=M\left\{\exp\left(i\sum_{l=1}^{n}\eta_l a_l\right)\right\},$$

bu yerda $a_l=\sum_{j=1}^{k}g_l(t_j)z_j$. $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti normal taqsimot bo‘lgani uchun,

$$f_\xi(z_1,\dots,z_k;t_1,\dots,t_k)=\exp\left\{i\sum_{l=1}^{n}M\eta_l a_l-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}Cov\{\eta_l,\eta_s\}a_l a_s\right\}.$$

Endi a_l ning ifodasini qo‘ysak,

$$\sum_{l=1}^{n}a_l M\eta_l=\sum_{j=1}^{k}M\{\xi(t_j)\}z_j,$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}Cov\{\eta_l,\eta_s\}a_l a_s=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}Cov\{\xi(t_i),\xi(t_j)\}z_i z_j,$$

bo‘lib, bu yerda

$$M\{\xi(t)\}=\sum_{l=1}^{n}M\eta_l g_l(t)=m_\xi(t),$$

$$Cov\{\xi(t),\xi(s)\}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}Cov\{\eta_l,\eta_m\}g_l(t)g_m(s)=K_\xi(t,s).$$

Shunday qilib, $\xi(t)$ Gauss jarayonidan iborat, chunki uning xarakteristik funksiyasi (9) munosabatni qanoatlantiradi.

3-§. Bog‘liqsiz orttirmali tasodifiy jarayonlar

Bog‘liqsiz orttirmali jarayonlar tasodifiy jarayonlarning juda muhim sinflaridan biri hisoblanadi. Broun harakati, Puasson jarayoni va boshqalar bu sinfga tegishlidir.

15-ta’rif. $\{\xi(t),t\in T\}$ tasodifiy jarayon berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $n\in\mathbb{N}$ va $t_0<t_1<\ldots<t_n$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy

$t_1,...,t_n \in T$ vaqt momentlari uchun $\xi(t_0),\xi(t_1)-\xi(t_0),...,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\xi(t)$ ***bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon*** deyiladi.

3-izoh. $(\xi(t_1),...,\xi(t_k))$ tasodifiy vektorlarni $((\xi(t_1)-\xi(t_0)),...,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1}))$ vektorlardan xosmas chiziqli almashtirish yordamida topish mumkin bo'lgani sababli, bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayonning taqsimotlarini berish uchun jarayonning bitta $\xi(t)$ nuqtadagi bir o'lchovli taqsimoti va $s>t$ uchun $\xi(s)-\xi(t)$ orttirmalarining taqsimotini berish yetarli.

$\{\xi(t), t\geq 0\}$ tasodifiy jarayon berilgan bo'lsin. Agar bir ehtimol bilan $\xi(0)=0$ va $\xi(s)-\xi(t),(t\leq s)$ tasodifiy miqdorning taqsimoti $s-t$ ga bog'liq bo'lib, t ga bog'liq bo'lmasa, bunday bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon ***bir jinsli*** deyiladi.

Birjinsli tasodifiy jarayonning xarakteristik funksiyasi

$$f(z,t)=M exp\{iz\xi(t)\},\ z\in R^1 \tag{10}$$

ko'rinishga ega.

3-teorema. $f(z,t)$ xarakteristik funksiya ushbu funksional tenglamani qanoatlantiradi:

$$f(z,t+s)=f(z,t)\cdot f(z,s),\ t,s>0 \tag{11}$$

Isboti. $\xi(t)$ bir jinsli bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon ekanligini hisobga olib, quyidagini topamiz:

$$M\exp\{i(z,\xi(t+s))\}=M\exp\{i(z,\xi(t+s)-\xi(s))\}\exp\{i(z,\xi(s)\}=$$
$$=M\exp\{i(z,\xi(t+s)-\xi(s))\}M\exp\{i(z,\xi(s))\}=$$
$$=M\exp\{i(z,\xi(t))\}M\exp\{i(z,\xi(s))\}.$$

Teorema isbot bo'ldi.

Tasodifiy jarayon $\xi(t)$ uchun ham uzluksizlik, differensial, integral tushunchalarini kiritish mumkin. Bu tushunchalar "stoxastik analiz" deb nomlangan va hozirgi zamon matematikasida katta yo'nalish hisoblangan nazariyaning asosini tashkil etadi. Masalan, agar tasodifiy jarayonning hamma tanlanma funksiyalari uzluksiz bo'lsa, u holda $\xi(t)$ uzluksiz deyiladi. Uzluksizlik tushunchasini boshqacha qilib kiritish ham mumkin.

16-ta'rif. $\{\xi(t), t \in T\}$ tasodifiy jarayon berilgan bo'lsin. Agar

a) Har qanday $t,\ t+h \in T$ uchun $h \to 0$ da

$$\xi(t+h) \xrightarrow{P} \xi(t),$$

bo'lsa tasodifiy jarayon $\xi(t)$ ***stoxastik uzluksiz*** deyiladi.

b) $\underset{|h| \to 0}{l.i.m.} \xi(t+h) = \xi(t)$,

ya'ni $\lim\limits_{|h| \to 0} M|\xi(t+h) - \xi(t)|^2 = 0$ bo'lsa, u holda $\xi(t)$ jarayon t nuqtada ***o'rta kvadratik ma'noda uzluksiz*** deyiladi.

Bu ta'rif faqat ikki o'lchovli taqsimotlarga asoslangan xolos $(t_1 = t,\ t_2 = t+h)$. Trayektoriyalari uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lgan tasodifiy jarayonlar stoxastik ma'noda ham uzluksiz bo'ladi. Lekin, aksincha stoxastik uzluksiz bo'lgan tasodifiy jarayonlar uzluksiz bo'lmagan trayektoriyalarga ega bo'lishi ham mumkin.

4-teorema. $\{\xi(t), t \in T\}$ – bir jinsli stoxastik uzluksiz jarayon bo'lsin. U holda $f(z,t)$ funksiya $t \geq 0$ o'zgaruvchiga nisbatan uzluksiz.

Isboti. Teorema da'vosi (11) munosabat va

$$\lim_{s \to 0} f(z,s) = 1 \qquad (12)$$

tenglikdan kelib chiqadi. Endi o'z navbatida, (12) munosabatni isbotlash uchun esa $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$|f(z,s) - 1| \leq M\left|\exp\{iz\xi(s)\} - 1\right| \leq \varepsilon + 2P\left(|z\xi(s)| > \varepsilon\right)$$

ekanligini qayd etamiz. ξ – stoxastik uzluksiz jarayon bo'lgani sababli $s \to 0$ da oxirgi ehtimol nolga intiladi.

Endi bog'liqsiz orttirmali jarayonlarga doir misollar ko'ramiz.

10-misol (Puasson jarayoni). $\{\xi(t), t \in T = [0,\infty)\}$ – bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon berilgan bo'lsin. Agar $\xi(0) = 0$ (d.m.) va ixtiyoriy $s, t\ (s \leq t)$ vaqt momentlari uchun $\xi(t) - \xi(s)$ tasodifiy miqdor $a(t-s)$ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lsa, u holda ξ jarayon a parametrli Puasson jarayoni deyiladi.

Puasson jarayoni turli amaliy tadqiqotlarda, xususan ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida juda katta ahamiyatga ega. Trayektoriyasi biror hodisani vaqtning 0-momentidan hozirgi t-

momentigacha ro'y berishlar soni $\xi(t)$ ni qayd etish bilan bog'liq bo'lgan jarayon Puasson jarayoni deb qaralishi mumkin. Bunday jarayonlarning aniq misollari sifatida kimyoviy moddaning radioaktiv bo'linishida chiqadigan fotonlar soni, biror fizik qurilmaning berilgan vaqt oralig'ida ishdan chiqishlari soni, sug'urta kompaniyasiga tushgan talablar soni va shu kabilarni qarash mumkin.

Puasson jarayonining barcha trayektoriyalari o'ngdan uzluksiz bo'lsa, u holda uning barcha trayektoriyalari butun qiymatli, kamaymaydigan va o'sish nuqtalarida sakrashlari birga teng bo'lgan funksiyalardan iborat ekanligini isbotlaymiz.

Buning uchun ushbu hodisalarni kiritamiz:

$$A=\left\{\text{barcha ikkili ratsional nuqtalarda } \left(t=\frac{k}{2^n}\right), \xi(t)\in\mathbb{Z}\right\},$$

$$B=\{\text{barcha } t_1\le t_2 \text{ ikkili ratsional nuqtalarda } \xi(t_1)\le\xi(t_2)\},$$

$$C_N=\left\{\begin{array}{l}\text{barcha butun } 0\le i\le N \text{ sonlar uchun shunday ikkili ratsional}\\ t\in[0,N] \text{ nuqta mavjudki, bu nuqtada } \xi(t)=i \text{ tenglik o`rinli}\end{array}\right\},$$

$$A_t=\{\xi(t)\ \text{butun son}\}.$$

U holda

$$P(A_t)=P\big(\xi(t)-\ \text{butun}\big)=P\big(\xi(t)-\xi(0)-\ \text{butun}\big)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\big(\xi(t)-\xi(0)=i\big)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{-at}\frac{(at)^i}{i!}=1.$$

A hodisa A_t hodisalarning sanoqli sondagi kesishmasidan iborat bo'lgani sababli $P(A)=1$. B hodisa

$$B_n=\left\{\xi(0)\le\xi\left(\frac{1}{2^n}\right)\le\xi\left(\frac{2}{2^n}\right)\le\ldots\le\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\le\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\le\ldots\right\}=$$

$$\bigcap_k\left\{\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\ge 0\right\}$$

hodisalar ketma-ketligining kesishmasidan iborat va $P\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\ge 0\right)=1$ bo'lgani sababli, $1=P(B_n)=P(B)$.

$C_N\supseteq\bigcap_{k=0}^{2^nN-1}\left\{\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)=0 \text{ yoki } 1\right\}$ bo'lgani uchun Puasson jarayonining xossalariga ko'ra,

$$P(C_N) \geq \prod_{k=0}^{2^n N} P\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0 \text{ yoki } 1\right) =$$

$$= \left[e^{-a2^{-n}} + a2^{-n}e^{-a2^{-n}}\right]^{2^n N}.$$

Ammo $\alpha \to 0$ da $e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha} = 1 - o(\alpha)$ munosabat o'rinli bo'lgani tufayli, $n \to \infty$ da

$$P(C_N) \geq \left[1 - o\left(a2^{-n}\right)\right]^{N2^n} \longrightarrow 1 \text{ va } P(C_N) = 1.$$

Nihoyat, $\xi(t)$ – kamaymaydigan, butun qiymatli va o'sish nuqtalarida sakrashlari faqat birga teng degan ma'noni bildiruvchi hodisa, $\xi(t)$ning o'ngdan uzluksizligiga ko'ra, $AB\bigcap C_N$ hodisa bilan teng kuchli bo'lgani uchun uning ehtimoli birga teng. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Shunday qilib, a parametrli Puasson jarayonining trayektoriyalari (tanlanma funksiyalari) 1-shakldagi ko'rinishga ega. Bunda $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – birinchi sakrash momenti, ikkinchi sakrash momenti va hokazolardan iborat. Boshqacha aytganda

$$\tau_n = \min\{t \geq 0; \xi(t) = n\} \tag{13}$$

bo'lib, shu bilan birga bunday t momentlar bo'lmasa, u holda $\tau_n = +\infty$ deymiz.

(13) tenglik orqali kiritilgan τ_n – ($[0,\infty)$ dan qiymat qabul qiluvchi) tasodifiy miqdordan iborat. Haqiqatan ham,

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\xi(t) \geq n\} \in \mathcal{A}.$$

$\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1}, \ldots$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular a parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

11-misol. (Viner jarayoni). Viner jarayoni jarayonlar nazariyasining juda muhim misollaridan biridir. Bu tasodifiy jarayon qandaydir ma'noda suyuqlik ichidagi zarracha molekulalarining xaotik zarbalari natijasidagi harakatining matematik modeli vazifasini o'taydi, shuning uchun ham uni Broun harakati deb ham atashadi.

$\{w(t), t \in T = [0,\infty)\}$ – bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon berilgan bo'lsin. Agar $w(0) = 0$ (d.m.) va ixtiyoriy s, t $(0 \leq s \leq t)$ vaqt momentlari uchun $w(t) - w(s)$ tasodifiy miqdor matematik kutilmasi

0 dispersiyasi $t-s$ ga teng bo'lgan normal taqsimotiga ega bo'lsa, u holda $w(t)$ jarayon 0 dan chiquvchi ***Viner jarayoni*** deyiladi.

Viner jarayonining chekli o'lchovli taqsimotlarini topamiz. Buning uchun $0<t_1<...<t_n$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $t_1,...,t_n$ momentlarni fiksirlaymiz va $\overline{w}=(w_1,...,w_n)$ vektorni qaraymiz, bu yerda $w_j=w(t_j)$, $j=1,2,...,n$. $X=\left(w_1,w_2-w_1,...,w_n-w_{n-1}\right)$ vektorning koordinatalari bog'liqsiz va har qaysisi normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlardan iborat bo'lgani sababli uning quyidagi birgalikdagi taqsimotini hisoblash qiyin emas:

$$P_X(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\left[2\pi(t_i-t_{i-1})\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right\},$$

bu yerda $t_0=0$. Shu bilan birga $\overline{w}=AX$ bo'lib, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}1\,0\,0\,...\,0\,0\\1\,1\,0\,...\,0\,0\\-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\1\,1\,1\,...\,1\,1\end{pmatrix}$$

Bu holda

$$P_{\overline{w}}(\overline{x})=\left|\det A\right|^{-1}P_X(A^{-1}X)$$

ekanligi bizga ma'lum (II bob, mustaqil yechish uchun masalalar). Shu bilan birga $\det A=1$ ekani va

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1\ \ 0\ 0\,...\ 0\ 0\\-1\ \ 1\ 0\,...\ 0\ 0\\0\ -1\ 1\,...\ 0\ 0\\-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\0\ \ 0\ 0\,...\,-1\ 1\end{pmatrix}$$

tengliklarni tekshirib ko'rish qiyin emas. Bundan $A^{-1}X=(x_1,x_2-x_1,...,x_n-x_{n-1})$ va

$$P_{\overline{w}}(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\left[2\pi(t_i-t_{i-1})\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right\}$$

kelib chiqadi, bu yerda $x_0=0$.

Demak, Viner jarayonining chekli o‘lchovli taqsimotlari normal (Gauss) taqsimotidan iborat ekan.

Broun harakati jarajoni. Viner jarayonining fizik mohiyati, Broun harakati nomi bilan mashhur bo‘lgan jarayonda namoyon bo‘ladi. Tarkibi bir jinsli bo‘lgan suyuqlikka solingan zarrachani ko‘raylik. U suyuqlik molekulalari bilan to‘qnashishlar natijasida uzluksiz tartibsiz harakatlanadi. Broun harakati birinchi bo‘lib 19-asrda ingliz shifokori Robert Broun tomonidan kuzatilgan. Broun harakatining matematik nazariyasi 20-asr boshlarida Bashelye va Eynshteynlar tomonidan taklif qilingan. Bu nazariya tajribalar yordamida tekshirish uchun yetarli bo‘lib, ammo matematik nuqtayi nazardan ular yetarlicha asoslangan emas edi. Bu vazifani birinchi bo‘lib 1923-yilda Norbert Viner bajardi.

Bu jarayonning diskret analogi sifatida, ushbu tasodifiy daydish modelini ko‘rish mumkin. Zarracha o‘z holatini faqat Δt ga karrali bo‘lgan vaqt momentlaridagina o‘zgartiradi. x nuqtada turgan zarracha, undan oldingi holatlariga bog‘liqsiz ravishda, qo‘shni $x+\Delta x$ yoki $x-\Delta x$ nuqtalardan biriga teng ehtimollar bilan o‘tadi, shu bilan birga siljish barcha x nuqtalarda bir xil Δx ga teng (bir o‘lchovli daydish). Ma’lum ma’noda $\Delta x \to 0$ va $\Delta t \to 0$ bo‘lgandagi limit holatida Broun harakatining fizik mohiyatini xarakterlovchi tasodifiy jarayon hosil bo‘ladi.

$w(t)$ orqali Broun zarrachasining vaqtni t momentidagi holatini belgilaymiz. Vaqtning boshlang‘ich $t=0$ momentida zarracha $x=0$ nuqtada bo‘lsin. Diskret sang‘ishda zarracha t vaqt davomida $n=\frac{t}{\Delta t}$ marta siljiydi, ulardan qandaydir S_n tasodifiy sondagilari o‘ngga, qolgan $n-S_n$ tasi esa chapga siljishlardan iborat bo‘lsin. Shunday qilib, zarrachaning o‘ngga $S_n\Delta x$, chapga ko‘chishi esa $(n-S_n)\Delta x$ bo‘lib, $w(t)$ va S_n orasida ushbu

$$w(t)=\left[S_n\Delta x-(n-S_n)\Delta x\right]=(2S_n-n)\Delta x$$

tenglik o‘rinli, bu yerda $t=n\Delta t$. Agar $w(0)=0$ tenglikni hisobga olsak, u holda ixtiyoriy $s,t\geq 0$ uchun

$$w(s+t)=\left[w(s)-w(0)\right]+\left[w(t+s)-w(s)\right]$$

tenglik o‘rinli.

Ko'rilayotgan daydish modelida $w(s)-w(0)$ va $w(t+s)-w(s)$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, ular bir xil taqsimotga ega ekanligini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun ham, ixtiyoriy $s,t\geq 0$ uchun ushbu

$$Dw(t+s)=D\left[w(s)-w(0)\right]+D\left[w(t+s)-w(s)\right]=$$
$$=Dw(s)+Dw(t)$$

tenglik o'rinli. $Dw(t)$ dispersiya $t\,(t\geq 0)$ argumentning funksiyasi sifatida qaralganda, chiziqli funksiya ekanligi ko'rinib turibdi, shuning uchun ham

$$Dw(t)=\sigma^2 t,\ 0\leq t\leq\infty,$$

bo'lib, bu yerda σ^2 – diffuziya koeffitsiyenti deb ataluvchi biror o'zgarmas sondan iborat. Ikkinchi tomondan, t vaqt davomidagi ya'ni $n=\dfrac{t}{\Delta t}$ ta qadamdagi siljishning dispersiyasi

$$Dw(t)=(\Delta x)^2\frac{t}{\Delta t}$$

ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Natijada Δx va Δt orasida quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}=\sigma^2.$$

Zarrachaning siljishlari bir-biriga bog'liq bo'lmagani sababli, ularni "yutuq"ning ehtimoli $p=1/2$ ga teng bo'lgan Bernulli tajribalari deb qarash ham mumkin. Shu bilan birga zarrachaning o'ngga siljish ehtimoli $p=1/2$ ga teng. U holda S_n – musbat yo'nalish tomon qo'yilgan qadamlar (siljishlar) soni n ta bog'liqsiz tajribada chiqqan "yutuq"lar soniga teng bo'ladi. Shu bilan birga, vaqtning t- momentidagi zarrachaning holati $S_n^*=\dfrac{1}{\sqrt{n}}(2S_n-n)$ – normalangan miqdor bilan quyidagi bog'lanishga ega:

$$w(t)=S_n^*\sqrt{n}\Delta x=S_n^*\sqrt{t}\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}}=S_n^*\sigma\sqrt{t}.$$

Demak, $w(t)$ tasodifiy miqdorning $\Delta t\to 0$ dagi limit taqsimoti, markaziy limit teoremaga ko'ra, quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$P\left(\frac{w(t)}{\sigma\sqrt{t}}\leq x\right)=\lim_{\Delta t\to 0}P\left(S_n^*\leq x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-x^2/2}dx=\Phi(x). \quad (14)$$

4-§. Stasionar tasodifiy jarayonlar

Stasionar jarayonlar tasodifiy jarayonlarning muhim sinflaridan biri hisoblanadi. Statsionarlik xossasi jarayon kesimlari sinfining ba'zi xarakteristikalari vaqtga bog'liq emasligini bildiradi.

17-ta'rif. $\{\xi(t), t\in T\}$ jarayon berilgan bo'lsin. Agar $n\geq 1$ larda ixtiyoriy $t_1,...,t_n\in T$ vaqt momentlari va $\xi(t_1+h),...,\xi(t_n+h)$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti, $(t_i+h)\in T, i=1,...,n$ shartlarni bajaradigan barcha h lar uchun bir xil bo'lsa, u holda $\xi(t)$ ***statsionar tasodifiy jarayon*** deyiladi.

Stasionar jarayonning chekli o'lchovli taqsimotlari h ga surishga nisbatan invariantdir. Agar bunday jarayonning matematik kutilmasi mavjud bo'lsa, u o'zgarmas,

$$M\xi(t)=M\xi(0),$$

va (ikkinchi moment mavjud bo'lsa) $K_\xi(t,s)$ – kovariatsiya funksiyasi $(t-s)$ ayirmagagina bog'liq bo'ladi. Shu munosabat bilan quyidagi ta'rifni kiritamiz.

18-ta'rif. Agar ixtiyoriy $t,s\in T, t-s\in T$ uchun

$$M\xi(t)=const, \quad Cov\big(\xi(t),\xi(s)\big)=K(t-s)$$

bo'lsa, u holda $\{\xi(t), t\in T\}$ – ***keng ma'noda statsionar jarayon*** deb ataladi.

Bir xil taqsimlangan, bog'liqsiz bo'lishi shart bo'lmagan tasodifiy miqdorlarning yig'indisi statsionar tasodifiy jarayonga misol bo'ladi. Endi murakkabroq misollarni ko'ramiz.

12-misol. $A,\eta\geq 0, \varphi$ A,η,φ – tasodifiy miqdorlar esa A,η tasodifiy miqdorlarga bog'liq emas va $[0,2\pi]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsin.

$$\xi(t,\omega)=A\cos(\eta t+\varphi)$$

formula orqali aniqlangan tasodifiy jarayon statsionar ekanligini isbotlaymiz.

Isboti. $\xi(t)$ statsionar jarayon ekanligini ko'rsatish uchun ixtiyoriy n o'lchovli C Borel to'plami va ixtiyoriy $h, t_1,...,t_n$ vaqt momentlari uchun

$$P\Big(\big(A\cos(\eta(t_1+h)+\varphi),\ldots,A\cos(\eta(t_n+h)+\varphi)\big)\in C\Big)=$$
$$=P\Big(\big(A\cos(\eta t_1+\varphi),\ldots,A\cos(\eta(t_n+\varphi)\big)\in C\Big)$$

ekanligini isbotlash zarur. B orqali $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\in[0,2\pi]$ va $\big(x\cos(yt_1+z),\ldots,x\cos(yt_n+z)\big)\in C$ shartlarni qanoatlantiruvchi (x,y,z) nuqtalar to'plamini. $<u>$ orqali esa $[0,2\pi]$ oraliqqa keltirilgan (ya'ni $2\pi k\leq u\leq 2\pi(k+1)$ uchun $<u>=u-2\pi k$) u nuqtani belgilaymiz. U holda isbotlanayotgan tenglikni

$$P\big((A,\eta,<\varphi+\eta h>)\in B\big)=P\big((A,\eta,\varphi)\in B\big)$$

ko'rinishda yozish mumkin, yoki

$$\int_0^\infty\int_0^\infty F_\varphi\{z:(x,y,<z+yh>)\in B\}dF_{A,\eta}(x,y)=$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty F_\varphi\{z:(x,y,z)\in B\}dF_{A\eta}(x,y),$$

bu yerda $F_\varphi-\varphi$ tasodifiy miqdorning taqsimoti, $F_{A\eta}$ esa A va η tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti.

Ammo oxirgi tenglik o'z-o'zidan ravshan, chunki φ tasodifiy miqdorning taqsimoti surishga va 2π modul bo'yicha keltirishga nisbatan invariant bo'lgani sababli, $\forall x,y$ uchun

$$F_\varphi\{z:(x,y,<z+yh>)\in B\}=F_\varphi\{z:(x,y,z)\in B\}.$$

13-misol. $M\xi(t)=m$ va $K_\xi(t,s)=C(t-s)$ kovariatsion funksiyaga ega bo'lgan Gauss jarayoni, tor ma'noda statsionar bo'lishi isbotlansin.

Yechimi. $\xi(t)$ jarayonning $t_1,\ldots,t_n\in T$ uchun n o'lchovli taqsimotining xarakteristik funksiyasi

$$f_\xi(z_1,\ldots,z_n;t_1,\ldots,t_n)=\exp\left(i\sum_{j=1}^n z_jm-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^n C(t_l-t_j)z_lz_j\right)$$

va u barcha t_l larni $t_l+h;\ l=1,\ldots,n$ lar bilan almashtirishda o'zgarmaydi, shuning uchun jarayonning n o'lchovli taqsimotlari ham t_l larni t_l+h lar bilan almashtirganda o'zgarmaydi, shu bilan birga bu barcha $n\geq 1$ va $t_i+h\in T$ shartni qanoatlantiruvchi barcha h lar uchun o'rinli.

14-misol. $\{w(t), t\geq 0\}$ – Broun harakati jarayoni va $\tau>0$ bo'lsin. $\{Z(t)=w(t+\tau)-w(t), t\geq 0\}$ keng ma'noda statsionar jarayon ekanligini ko'rsatib, uning kovariatsiya funksiyasi topilsin.

Yechimi. $Z(t)$ jarayonning momentli xarakteristikalarini aniqlaymiz. $Mw(t)=Mw(t+\tau)=0$ bo'lgani uchun, $MZ(t)=0$ va

$$Cov(\xi(t),\xi(s))=M\big(w(t-\tau)-w(t)\big)\big(w(x+t)-w(s)\big)=$$

$$=\min(t+\tau,s+\tau)-\min(t,s+\tau)-\min(t+\tau,s)+\min(t,s)=$$

$$=\begin{cases}\tau-|t-s|, & \text{agar } |t-s|\leq\tau,\\ 0, & \text{agar } |t-s|>\tau\end{cases}=K(t-s).$$

Shuday qilib, $Z(t)$ jarayonning kovariatsiya funksiyasi faqat $t-s$ ga bog'liq bo'lgani sababli u keng ma'noda statsionar jarayondan iborat.

5-§. Markov jarayonlari

Bu paragrafda biz, amaliyotda keng ko'lamli tatbiqlarga ega bo'lgan, tasodifiy jarayonlarning yana bir muhim sinfi hisoblanadigan Markov jarayonlari bilan tanishamiz.

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollar fazosida $\{\xi(t), t\geq 0\}$ jarayon aniqlangan bo'lsin. Markov jarayonining ta'rifini keltirishdan oldin quyidagi

$$\mathfrak{F}_t=\sigma\{\xi(u), u\leq t\};\quad \mathfrak{F}_{[t,\infty)}=\sigma\{\xi(u), u\geq t\}$$

belgilashlarni kiritamiz. Qaralayotgan σ – algebralarning aniqlanishiga ko'ra, agar $u\leq t$ bo'lsa, $\xi(u)$ tasodifiy miqdor $\mathfrak{F}_t$ σ-algebraga nisbatan o'lchovli va agar $u\geq t$ bo'lsa, u $\mathfrak{F}_{[t,\infty)}$ ga nisbatan o'lchovli bo'ladi.

19-ta'rif. Agar ixtiyoriy $t\geq 0$, $A\in\mathfrak{F}_t$, $B\in\mathfrak{F}_{[t,\infty)}$ lar uchun 1 ehtimol bilan

$$P(AB/\xi(t))=P(A/\xi(t))P(B/\xi(t)) \qquad (15)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\{\xi(t), t\geq 0\}$ tasodifiy jarayon Markov jarayoni, (15) xossa esa Markov xossasi deyiladi.

Markov jarayonining yana bitta ekvivalant ta'rifini keltiramiz.

20-ta'rif. Agar ixtiyoriy chekli f Borel funksiyasi va $t_1 < t_2 < ... < t_n \leq t$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi vaqt momentlari uchun

$$M\left(f(\xi(t))\middle|\xi(t_1),...,\xi(t_n)\right) = M\left(f(\xi(t))\middle|\xi(t_n)\right) \qquad (16)$$

bo'lsa, u holda $\{\xi(t), t \geq 0\}$ tasodifiy jarayon Markov jarayoni deyiladi.

Ta'rifga ko'ra,

$$P(s,x,t,B) = P(\xi(t) \in B | \xi(s) = x) \qquad (17)$$

va bu funksiya absolut uzluksiz, ya'ni uni

$$P(s,x,t,B) = \int_B p(s,x,t,y)dy; \quad \forall B \in B(R)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsin.

$P(s,x,t,B)$ funksiya $\xi(t)$ jarayonning o'tish funksiyasi (yoki ehtimoli), $p(s,x,t,B)$ esa o'tish zichligi deyiladi.

5-teorema. Agar $\{\xi(t), t \geq 0\}$ Markov jarayoni bo'lsa, u holda

$$P(s,x,t,B) = \int_R P(s,x,u,dy)P(u,y,t,B), \qquad (18)$$

$$p(s,x,t,z) = \int_R p(s,x,u,y)p(u,y,t,z)dy. \qquad (19)$$

Isboti. $\xi(t)$ Markov jarayoni bo'lgani sababli, $u > s$ uchun

$$P(s,x,t,B) = P(\xi(t) \in B | \xi(s) = x) =$$

$$= \int_R P\left((\xi(t) \in B \cap \xi(u) = y) \middle| \xi(s) = x\right)dy =$$

$$= \int_R \frac{P(\xi(t) \in B \cap \xi(u) = y \cap \xi(s) = x)}{P(\xi(s) = x} dy =$$

$$= \int_R P\left(\xi(t) \in B \middle| \xi(u) = y \cap \xi(s) = x\right) \frac{P(\xi(u) = y \cap \xi(s) = x)}{P(\xi(s) = x} dy =$$

$$= \int_R P(\xi(t) \in B | \xi(u) = y) P(\xi(u) = y | \xi(s) = x) dy =$$

$$= \int_R P(s,x,u,dy) P(u,y,t,B),$$

ya'ni (18) tenglik isbotlandi. (19) tenglik ham shu kabi isbotlanadi.

(18) va (19) tenglamalar Kolmogorov–Chepmen tenglamalari deyiladi.

Endi (17) shartni qanoatlantiruvchi $\xi(t)$ Markov jarayoni mavjud bo'lishi uchun $P(s,x,t,B)$ funksiya qanday xossalarga ega bo'lishi kerakligini aniqlaymiz.

21-ta'rif. $(\aleph,\mathfrak{R}_\aleph)$ o'lchovli fazo bo'lsin. Agar $P(s,x,t,B)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) B ning funksiyasi deb qaralgan $P(s,x,t,B)$ har bir $s\le t$, $x\in\aleph$ da ehtimollik taqsimotidan iborat;

2) har qanday $s\le t$ va $B\in\mathfrak{R}_\aleph$ uchun $P(s,x,t,B)$ x ga nisbatan o'lchovli;

3) $0\le s<u<t$ da, ixtiyoriy x va $B\in\mathfrak{R}_\aleph$ uchun (18) tenglik o'rinli;

4) agar $s=t$ bo'lsa, u holda $P(s,x,t,B)\triangleq I_x(B)$, bu yerda

$$I_x(B)=\begin{cases}1, \text{agar } x\in B,\\ 0, \text{agar } x\notin B\end{cases}$$

u o'tish funksiyasi deb ataladi.

Bu ta'rifdagi 1- va 2-xossalar $P(s,x,t,B)$ funksiyani shartli taqsimot ekanligini asoslaydi.

Endi $\xi(0)=a$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi qandaydir $\xi(t)$ jarayonning chekli o'lchovli taqsimotlarini $P(s,x,t,B)$ funksiya yordamida ushbu

$$\begin{aligned}&P(\xi(t_1)\in dy_1,\dots,\xi(t_n)\in dy_n)=\\&=P(0,a,t_1,dy_1)P(t_1,y_1,t_2,dy_2)\dots P(t_{n-1},y_{n-1},t_n,dy_n)\end{aligned}\tag{20}$$

formula orqali ifodalaymiz.

3- va 4-xossalardan bu chekli o'lchovli taqsimotlarning moslanganligi kelib chiqadi va shuning uchun ham ular Kolmagorov teoremasiga ko'ra, $\xi(t)$ jarayonni to'la aniqlaydi. (20) formula va (16) ga ko'ra

$$P(\xi(t_n)\in B_n|(\xi(t_1),\dots,\xi(t_{n-1}))=(y_1,\dots,y_{n-1}))=P(t_{n-1},y_{n-1},t_n,B_n).$$

Demak, 20-ta'rifga ko'ra biz

$$P(s,x,t,B)=P(\xi(t)\in B|\xi(s)=x)$$

shartni qanoatlantiruvchi Markov jarayonini qurdik.

Agar $P(s,x,t,B)=P(0,x,t-s,B)$ tenglik bajarilsa, u holda $\xi(t)$ ***bir jinsli Markov jarayoni deyiladi*** va bunda o'tish ehtimolini qisqalik uchun $P(x,\tau,B)$ ko'rinishda yoziladi.

Bir jinsli Markov jarayonlari uchun Kolmogorov–Chepman tenglamasi soddalashadi:

$$P(x,s+t,B)=\int_R P(x,s,dy)P(y,t,B),$$

Markov jarayonining chekli o'lchovli taqsimotlarini topish uchun uning o'tish ehtimollari va biror boshlang'ich momentdagi bir o'lchovli taqsimotlarini bilish yetarli, chunki to'la ehtimol formulasi va Markov xossasini ishlatib,

$$P(\xi(t_1)\in B_1,...,\xi(t_k)\in B_k)=\int_R \pi(dx_0)\int_{B_1} P(0,x_1,t_1,dx_1)$$

$$...\int_{B_k} P(t_{k-1},x_{k-1},t_k,dx_k)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $0=t_0<t_1<...<t_k$, $B_1,...,B_k\in B(R)$, $\pi(B)=P(\xi(0)\in B)$.

6-§. Markov zanjirlari

Markov jarayonlari nazariyasida fizikadan olingan atamalar ishlatiladi: jarayonning qiymatlar to'plami ***fazalar fazosi*** (yoki h***olatlar fazosi***), uning elementlari esa ***holatlar*** deb ataladi. $\xi(t), t\in T$ – tasodifiy jarayonni qarayotganda, vaqtning t momentida fazaviy holati $\xi(t)$ bo'lgan sistema haqida gapiramiz.

Keyinchalik Markov zanjiri deb atalgan jarayonlar birinchi marta 1906–1907-yillarda A.A.Markovning rus tilida yozilgan asarlarida uchraydigan unli va undosh harflar ketma–ketligining xossalarini o'rganishga bag'ishlangan ishlarida ko'rilgan.

Ushbu paragrafda biz Markov jarayonlarining muhim sinfi hisoblanadigan, holatlar fazosi chekli yoki sanoqli to'plamdan iborat bolgan, bir jinsli Markov zanjirlari bilan tanishamiz va uning asosiy xossalarini o'rganamiz. Umumiylikka zarar keltirmay Markov zanjirining holatlari natural sonlardan iborat, deb faraz qilishimiz mumkin. t parametr manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni $T=\{0,1,2,...\}$ deb faraz qilamiz. U holda $\xi(t)$ Markov xossasini qanoatlantiruvchi tasodifiy ketma-ketlikdan iborat bo'ladi.

3-izoh. $\xi_1,\xi_2,...$ ushbu $\{1,2,...,n\}$ to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsin. Shartli ehtimolning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $t\geq 0$, $t\in\mathbb{N}$ lar uchun

$$P(\xi_0=i_0,\xi_1=i_1,...,\xi_t=i_t,\xi_{t+1}=i_{t+1})=$$

$$=P(\xi_0=i_0)\prod_{s=0}^{t}P\{\xi_{s+1}=i_{s+1}\,|\xi_0=i_0,...,\xi_s=i_s\} \tag{21}$$

tenglik o'rinli.

Agar $\xi_1,\xi_2,...$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda

$$P\{\xi_{s+1}=i_{s+1}\,|\xi_0=i_0,...,\xi_s=i_s\}=P(\xi_{s+1}=i_{s+1})$$

va birgalikdagi taqsimot formulasi ancha soddalashadi:

$$P(\xi_0=i_0,\xi_1=i_1,...,\xi_t=i_t,\xi_{t+1}=i_{t+1})=\prod_{s=0}^{t+1}P(\xi_s=i_s). \tag{22}$$

Markov zanjiri – chetki (21) va (22) hollar orasida turgan bog'liqli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan iborat.

Markov zanjirlari uchun 20- (va 21-) ta'rif ancha soddalashadi va ushbu ko'rinishga ega bo'ladi.

22-ta'rif. Holatlar to'plami S chekli yoki sanoqli bo'lgan ***diskret vaqtli Markov zanjiri*** deb tasodifiy miqdorlarning shunday $\{\xi_t, t=0,1,...\}$ ketma-ketligiga aytiladiki, ular ixtiyoriy $t\geq 0$ va ixtiyoriy $i_0,i_1,...,i_t,i_{t+1}\in S$ holatlar uchun

$$P\{\xi_{t+1}=i_{t+1}\,|\xi_0=i_0,...,\xi_t=i_t\}=P\{\xi_{t+1}=i_{t+1}\,|\xi_t=i_t\}=p_{i_t,i_{t+1}}^{(t)}$$

shartni qanoatlantiradi.

Tasodifiy miqdor ξ_0 sistemaning boshlang'ich holatini bildiradi va uning taqsimoti

$$p_k^{(0)}=P(\xi_0=k),\ \sum_k p_k^{(0)}=1$$

boshlang'ich taqsimot deyiladi.

Agar $p_{ij}^{(t)}$ funksiya t ga bog'liq bo'lmasa, u holda ***Markov zanjiri vaqtga nisbatan bir jinsli*** deyiladi.

Holatlar to'plami $\{1,2,...,n\}$ bo'lgan vaqtga nisbatan bir jinsli Markov zanjiri uchun (21) formula

$$P(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_t = i_t) =$$

$$= P(\xi_0 = i_0)\prod_{k=1}^{t} P\{\xi_k = i_k | \xi_{k-1} = i_{k-1}\} = p_{i_0}^{(0)} \prod_{k=1}^{t} p_{i_{k-1}i_k} \quad (23)$$

ko'rinishini oladi. Holatlar to'plami $\{1,2,...,n\}$ bo'lgan vaqt bo'yicha bir jinsli Markov zanjiri trayektoriyalarining taqsimotlari n^2+n ta parametrlar

$$p^{(0)} = \{ p_k^{(0)} = P(\xi_0 = k), 1 \le k \le n\}$$

va $p_{ij} = P\{\xi_{t+1} = j | \xi_t = i\}$ o'tish ehtimollari bilan aniqlanadi. p_{ij} ni sistema bir qadamda i-holatdan j-holatga o'tish ehtimoli deb talqin qilish mumkin.

O'tish ehtimollari $P = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ ----- \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix}$ matritsani hosil qiladi.

O'tish matritsasining barcha elementlari nomanfiy, har bir satrdagi elementlar yig'indisi birga teng. Bunday matritsalar ***stoxastik matritsalar*** deyiladi. Barcha satrlarining elementlari yig'indisi birdan oshmaydigan va elementlari nomanfiy bolgan matritsa esa ***yarim stoxastik matritsa*** deyiladi. Har bir ustun elementlarining yig'indisi ham bir bo'lgan stoxastik matritsa ***ikki marta stoxastik matritsa*** deb ataladi.

Vaqt bo'yicha bir jinsli bo'lmagan Markov zanjirlarida $P^{(t)} = \| p_{ij}^{(t)} \|$ - o'tish matritsalari t ga bog'liq bo'ladi.

Sanoqli Markov zanjirlarining o'tish ehtimollari guruhini o'lchovlari cheksiz bo'lgan matritsa shaklida ifodalash mumkin.

Endi Markov zanjirlarini tashkil qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun bir necha misollar keltiraylik.

15-misol. Butun qiymatlarni qabul qiluvchi bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_t\}_{t=0}^{\infty}$ bir jinsli Markov zanjirini hosil qiladi. Bu holda

$$p_{ij} = P(\xi_t = j | \xi_{t-1} = i) = P(\xi_t = j) = P(\xi_0 = j) = p_j^{(0)},$$

ya'ni P matritsaning har bir satri boshlang'ich taqsimotdan iborat.

16-misol. $\{\eta_t\}_{t=1}^{\infty}$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, $P(\eta_t=1)=p$, $P(\eta_t=-1)=q$ va $p+q=1$ bo'lib, $\{\xi_t\}$ ketma-ketlik

$$\xi_t=\max\{\xi_{t-1}+\eta_t,0\},\quad t=0,1,2,...$$

formula orqali ifodalangan bo'lsin. $\{\xi_t\}$ ketma-ketlik 0 nuqtada qaytaruvchi ekranli manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida ***tasodifiy daydish*** deb ataladi.

ξ_t ketma-ketlik Markov zanjiri hosil qilishini ko'rish qiyin emas. Bu holda $P\{\xi_{t+1}=i+1|\xi_t=i\}=p, P\{\xi_{t+1}=i-1|\xi_t=i\}=q,\ i\geq 1$ tengliklar o'rinli bo'lgani sababli bu Markov zanjiri

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

o'tish matritsasiga ega.

17-misol. ξ_n – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan nomanfiy butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $P(\xi_n=k)=p_k$, $k=0,1,2,...$ bo'lsin. U holda $S_0=0, S_n=\xi_1+...+\xi_n$ deb qabul qilsak, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ ketma-ketlik bir jinsli sanoqli Markov zanjirini tashkil qiladi. Bu holda o'tish ehtimollari

$$p_{ij}=P\{S_n=j|S_{n-1}=i\}=P\{S_{n-1}+\xi_n=j|S_{n-1}=i\}=$$

$$=P(\xi_n=j-i)=\begin{cases} p_{j-i}, & j\geq i, \\ 0, & j<i \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Bu misolda o'tish matritsasi

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

bo'lib uning har bir satri oldingi satrning elementlarini bir raqamga o'ng tomonga surishdan hosil bo'ladi.

18-misol (Diffuziya uchun Erenfestlar modeli). Fiziklar Paul va Tatyana Erenfest nomi bilan ataluvchi bu model zarrachalarni (bir-biri bilan tutashtirilgan) ikkita idishda ko'chish jarayonini tavsiflaydi va u molekulalarning harakati jarayonida klassik mexanika nuqtayi nazaridan qaytariluvchan deb hisoblangan, qaytarilmaydigan o'zgarishlarning (tutashtirilgan idishlarda bosimlarning tenglashishi natijasida) vujudga kelish oqibatlarini tushuntirib berish uchun taqdim etilgan.

Ikkita idishda n ta zarracha bor bo'lsin. Vaqtning har bir $t=0,1,2,\ldots$ momentida tasodifan va undan oldingilariga bog'liqsiz, n ta zarrachalardan bittasi teng imkoniyatli ravishda tanlanadi va u 1/2 ehtimol bilan o'z idishida qoladi, yoki bo'lmasa 1/2 ehtimol bilan boshqa idishga o'tkaziladi. ξ_t esa vaqtning t momentida birinchi idishdagi zarrachalar soni bo'lsin. U holda ξ_t bir jinsli Markov zanjirini tashkil qiladi va

$$P\{\xi_{t+1}=j|\xi_t=j\}=1/2,$$

$$P\{\xi_{t+1}=j-1|\xi_t=j\}=\frac{j}{2n},$$

$$P\{\xi_{t+1}=j+1|\xi_t=j\}=\frac{n-j}{2n}$$

tengliklar o'rinli bo'lgani sababli, o'tish matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$P=\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{n-1}{2n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{2}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{n-2}{2n} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
- & - & - & - & - - & - - & - - & - - & - -\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{n-2}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2n} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{n-1}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.$$

Endi m qadamda sistemaning holatlari o'zgarishini o'rganamiz. Shu maqsadda $p_{ij}(m)=P(\xi_m=j|\xi_0=i)-m$ qadamda sistema i holatdan j holatga o'tish ehtimollarini ko'ramiz.

$\{\xi_t\}$ – holatlar to'plami $\{1,2,...,n\}$ va o'tish ehtimollari matritsasi P bo'lgan Markov zanjiri bo'lsin. m qadamda o'tish ehtimollari $P(m)=\|p_{ij}(m)\|$, $m=1,2,...$ matritsasini va $\overline{p}(t)=(p_1(t),...,p_n(t))$ vektorlarni kiritamiz, bu yerda $p_k(t)=P(\xi_t=k)$.

6-teorema. O'tish ehtimollari matritsasi P bo'lgan bir jinsli Markov zanjirlari uchun ixtiyoriy $m\geq 1$ bo'lganda

$$P(m)=P^m, \quad \overline{p}(t+m)=\overline{p}(t)P^m, \tag{24}$$

o'tish ehtimollari matritsasi $P^{(n)}=\left\|P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_n=i\}\right\|$ bo'lgan bir jinsli bo'lmagan Markov zanjirlari uchun esa

$$\begin{aligned}&\left\|P\{\xi_{t+m}=j\,|\,\xi_t=i\}\right\|=P^{(t)}P^{(t+1)}...P^{(t+m-1)};\\&\overline{p}(t+m)=\overline{p}(t)P^{(t)}P^{(t+1)}...P^{(t+m-1)}\end{aligned} \tag{25}$$

tengliklar o'rinli.

Isboti. To'la ehtimol formulasiga ko'ra, istalgan $k\in\{1,2,...,m-1\}$ va ixtiyoriy $i,j\in\{1,2,...,n\}$ uchun

$$p_{ij}(m+1)=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(m)p_{kj}=\left(P(m)P\right)_{ij}$$

tenglik o'rinli, bu yerda $(A)_{ij}$ – A matritsaning i-satridagi j- elementini bildiradi. Shunday qilib, $P(m+1)=P(m)P$. Bundan, induksiyaga ko'ra, (24) formula kelib chiqadi. (25) formula ham shu kabi isbotlanadi.

Ixtiyoriy n-tartibli $P=\|p_{ij}\|$ va $Q=\|q_{ij}\|$ stoxastik matritsalarning ko'paytmasi $S=\|s_{ij}\|=PQ$ yana stoxastik matritsa bo'ladi. Haqiqatan ham, ko'paytmaning elementi nomanfiy ekanligi o'z-o'zidan ravshan. Shu bilan birga

$$\sum_{j=1}^{n}s_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ik}q_{kj}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}\sum_{j=1}^{n}q_{kj}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}=1,$$

ya'ni S matritsa ham stoxastik matritsa ekan.

Shunday qilib, 6-teoremadagi P^m va $P^{(t)}P^{(t+1)}...P^{(t+m-1)}$ matritsalar ham stoxastik.

6.1. Markov zanjiri holatlarining klassifikatsiyasi

M – Markov zanjirining holatlar to'plami, $p_{ij}(t)$ esa i- holatdan j-holatga t qadamda o'tish ehtimoli bo'lsin. Markov zanjiri holatlarini Markov zanjiri trayektoriyalari, ularga tushish momentlarining xarakteriga ko'ra klassifikatsiyalash mumkin.

23-ta'rif. Agar biror $t > 0$ uchun $p_{ij}(t) > 0$ bo'lsa, u holda bir jinsli Markov zanjirining ***j-holati i-holatdan keyin keladi*** deyiladi va buni $j \mapsto i$ simvol orqali belgilanadi. Agar $i \mapsto j$ va $j \mapsto i$ bo'lsa ($i - j$), i va j holatlar ***tutashgan holatlar*** deyiladi. – holatlar to'plamida ekvivalent munosabat bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Quyida keltirildan tushunchalar Markov zanjirlari nazariyasida ko'p ishlatiladi. $i \in M$ holat:

1) agar $p_{ii}(1) = 1$ bo'lsa, ***yutib qoluvchi holat*** deyiladi;

2) agar $p_{ii}(t) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi t – vaqt momentlarining eng katta umumiy bo'luvchisi $d > 1$ bo'lsa, ***d davrli holat*** deyiladi;

3) agar uning davri birga teng bo'lsa, u holda u davriy emas deyiladi;

4) agar $\exists i \in M; i \mapsto j, j \not\mapsto i$ bo'lsa, u holda u ***ahamiyatga molik emas*** deyiladi;

5) agar $\forall j \in M; \{i \mapsto j\} \Rightarrow \{j \mapsto i\}$ bo'lsa, u holda u ***ahamiyatga molik*** holat deyiladi.

Ahamiyatga molik i – holat: a) agar $P\{\exists t < \infty; \xi_t = i | \xi_0 = i\} = 1$ shart bajarilsa, ***qaytuvchan***; b) bunda agar $t \to \infty$ da $p_{ii}(t) \to 0$ bo'lsa, u holda ***"nol qaytuvchan"*** deyiladi; c) agar $\limsup\limits_{t \to \infty} p_{ii}(t) > 0$ shart bajarilsa, ***i musbat qaytuvchan holat*** deyiladi.

Barcha tutashgan holatlar sinflaridan tashkil topgan to'plamda ***qisman tartib munosabati*** o'rnatilgan: A va B tutashgan holatlar sinflari bo'lsin. Agar eng kamida bitta $i \in A$ holat qandaydir $j \in B$ holatdan keyin kelsa, u holda holatlar sinfi A, B dan so'ng keladi deyiladi va buni $B \mapsto A$ simvol orqali belgilanadi. Tutashgan sinflar uchun $A \mapsto B$, $B \mapsto A$ vaziyat (hol) $A = B$ bo'lgandagina bajarilishi mumkin.

Qaytuvchan holatlar ***final sinf*** tashkil qiladi: ulardan so'ng boshqa sinflar kelishi mumkin emas. Har bir yutib qoluvchi holat qaytuvchan, bu bir elementli tutashgan qaytuvchan holatlar sinfini tashkil etadi.

24-ta'rif. Bitta tutashgan holatlar sinfidan iborat bo'lgan Markov zanjiri ***yoyilmaydigan***, agar u bir nechta tutashuvchi holatlar sinfidan tashkil topgan bo'lsa, u ***yoyiluvchi Markov zanjiri*** deyiladi.

19-misol. a) ***Davriy zanjirlar***. O'tish matritsasi $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lgan bir jinsli Markov zanjiri berilgan bo'lsa, u holda

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^4 = P, \ldots$$

tengliklar o'rinli. Demak,

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, \text{ agar } j - i = i \pmod 3, \\ 0, \text{ aks hollarda.} \end{cases}$$

Xuddi shunday effekt blokli $P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 \\ P_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar uchun ham o'rinli bo'lib, bu yerda P_1, P_2, P_3 – (kvadrat matritsa bo'lishi shart bo'lmagan) stoxastik matritsalar, nollar esa mos o'lchovlarga ega bo'lgan nollardan tashkil topgan matritsalardan iborat.

b) Ahamiyatga molik bo'lmagan va yutib qoluvchi holatlar. Holatlar to'plami $\{1,2,3\}$ va o'tish matritsasi $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma > 0$ bo'lgan Markov zanjirida 1-holat – ahamiyatga molik bo'lmagan, 2- va 3-holatlar esa yutib qoluvchi holatlar:

$$p_{11}(t)=\alpha^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,\ p_{12}(t)=\left(1-p_{11}(t)\right)\frac{\beta}{\beta+\gamma},$$

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishidagi blokli matritsalar ham xuddi shunday xossaga ega, bu yerda $(P_{11}\ P_{12}\ P_{13})$, P_{22}, P_{33} – stoxastik matritsalar; P_{11} matritsa ahamiyatga molik bo'lmagan holatlar sinfiga mos keladi, P_{22} va P_{33} matritsalar esa tutashuvchi holatlar sinflariga mos kelishi mumkin.

7-teorema. (***Bir jinsli Markov zanjirining qaytuvchanlik kriteriyasi***). Markov zanjirining $j\in M$ holati qaytuvchan bo'lishi uchun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)=\infty$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $\{\xi_0=j\}$ shartda, zanjirni j-holatga qaytish momentlarining ketma-ketligini ko'ramiz:

$$T_0=0, T_k=\min\{t>T_{k-1}:\xi_t=j\}, k=1,2,...,$$

odatdagidek $\min\{\varnothing\}=\infty$ deb olamiz.

1-lemma. Agar $\{\xi_t\}$ bir jinsli Markov jarayoni bo'lsa, u holda $\{\xi_0=j\}$ shartda $\Delta_k=T_k-T_{k-1}$, $k=1,2,...$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan iborat.

Isboti. $\{T_k=t\}\Rightarrow\{\xi_t=j\}$ munosabat o'rinli bo'lgani sababli, Markov xossasiga ko'ra, ixtiyoriy natural n va ixtiyoriy $i_1,...,i_{t-1},i_{t+1},...,i_{t+n}\in M$ holatlar uchun

$$P\{\xi_{t+m}=i_{t+m}, m=1,...,n|\xi_0=i,\xi_1=i_1,...,\xi_{t-1}=i_{t-1},\xi_t=j\}=$$
$$=P\{\xi_{t+m}=i_{t+m}, m=1,...,n|\xi_t=j\}=P\{\xi_m=i_{t+m}, m=1,...,n|\xi_0=j\}.$$

Shuning uchun ham, $T_k=t$ bo'lganda $\{\xi_{t+1},\xi_{t+2},...\}$ trayektoriyaning taqsimoti k ga va t ga bog'liq emas. Demak, ixtiyoriy $k=1,2,...$ uchun $\Delta_{k+1}=T_{k+1}-T_k$ tasodifiy oraliqning uzunligi $\Delta_j=T_j-T_{j-1}, j=1,2,...,k$ oraliqlarning uzunligiga bog'liq emas va $\Delta_1=T_1$ tasodifiy miqdorning taqsimoti bilan bir xil taqsimlangan.

Agar $\{\xi_0 = j\}$ bo'lsa, u holda

$$\{\omega : \exists\, t < \infty : \xi_t = j\} = \{\omega : \Delta_1 < \infty\}$$

ekanligini qayd etamiz. Shuning uchun ham qaytuvchanlikni qayta quyidagicha ta'riflash mumkin: $j \in M$ holat qaytuvchan bo'lishi uchun

$$P(\Delta_1 < \infty) = 1$$

bo'lishi zarur va yetarli.

$I_n(\omega) = \begin{cases} 1, \text{agar } \xi_n = j \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{aks holda,} \end{cases}$ $n = 1, 2, \ldots$ tasodifiy indikatorlar ketma-ketligini kiritamiz, $\nu(N) - N < \infty$ qadamda j-holatga qaytishlar soni bo'lsin:

$$\nu(N) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} I_n(\omega) = \max\{k : T_k \le N\}$$

$M\{I_n(\omega) | \xi_0 = j\} = P\{\xi_n = j | \xi_0 = j\} = p_{jj}(n)$ bo'lgani sababli, $M\nu(N) = \sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n)$.

Agar $P(\Delta_1 < \infty) = 1$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $k = 1, 2, \ldots$ uchun shunday $N(k) < \infty$ topiladiki, uning uchun

$$P(T_k < N(k)) = P\{\nu(N(k)) \ge k\} > \frac{1}{2},$$

va shuning uchun ham

$$\sum_{n=1}^{N(k)} p_{jj}(n) = M\nu(N(k)) \ge \frac{1}{2} k.$$

Bundan, k ni tanlash ixtiyoriy bo'lgani uchun $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$ kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, agar $P(\Delta_1 < \infty) = p < 1$ bo'lsa, u holda $\{T_k\}$ ketma-ketlik birinchi marta $\Delta_k = \infty$ bo'lgan k da uzilib qoladi. Agar

$$\nu = \lim_{N \to \infty} \nu(N) = \max\{k : T_k < \infty\}$$

bo'lsa, u holda yuqorida isbotlangan lemmadan

$$P(\nu = m) = P\left(\min\{k : \Delta_k = \infty\} = m\right) = p^{m-1}(1-p)$$

kelib chiqadi, ya'ni ν tasodifiy miqdor p parametrli geometrik taqsimotga ega, demak, $M\nu = \frac{1}{1-p}$. Shuning uchun ham, ixtiyoriy $N < \infty$ uchun

$$\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) = M\nu(N) \le M\nu \le \frac{1}{1-p}$$

ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$. 7-teorema isbotlandi.

20-misol. a) $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib,

$$P(\zeta_k = 1) = p,\ P(\zeta_k = -1) = q = 1-p,\ k = 1,2,\ldots$$

bo'lsin. Agar $S_0 = 0, S_n = \zeta_1 + \ldots + \zeta_n,\ n = 1,2,\ldots$ deb belgilasak, u holda $\{S_n\}$ ketma-ketlik barcha holatlari tutashuvchi Markov zanjiridan iborat. $\{S_n\}$ tasodifiy daydishning trayektoriyalari 0 holatga qaytishi uchun uning o'ngga va chapga qo'ygan qadamlari soni bir xil bo'lishi zarur va yetarli. Shuning uchun ham toq qadamda 0 holatga qaytish ehtimoli nolga teng, $2n$ ga teng bo'lgan juft qadamda bu ehtimol $n \to \infty$ da

$$p_{00}(2n) = C_{2n}^{n} p^n q^n \sim \frac{(4pq)^n}{(\pi n)^{1/2}},$$

chunki Stirling formulasiga ko'ra $n \to \infty$ da

$$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right]^2}(1+o(1)) \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Agar $p \ne q$ bo'lsa, u holda $4pq < 1$ va $\sum_{n=1} p_{00}(n) < \infty$, ya'ni 0 holat qaytmas holat bo'ladi. Agar $4pq = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$ bo'lsa va

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)=+\infty$, ya'ni bir o'lchovli simmetrik daydish uchun 0 qaytuvchan holat.

b) Tekislikdagi $(S_{10},S_{20})=(0,0)$, $(S_{1n},S_{2n})=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_{2k-1},\zeta_{2k})$, $n=1,2,...$ tasodifiy daydishni qaraymiz, bu yerda $\{\zeta_k\}$ a-holatda kiritilgan ketma-ketlik. Bu (S_{1n},S_{2n}) daydish a-holatda ko'rilgan ikkita bog'liqsiz tasodifiy daydishlarning majmuasidan iborat. $p\neq q$ bo'lgan holda S_{1n} tasodifiy daydish qaytuvchan emas va shuning uchun ikki o'lchovli daydish ham qaytuvchanmas bo'ladi. $p=q=\frac{1}{2}$ bo'lgan holni qaraymiz. $(0,0)$ $2n$ nuqtaga qadamda qaytish ehtimoli, har qaysi ikkita daydishlarning $2n$ qadamda 0 ga qaytish ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$p_{(0,0)(0,0)}(2n)=\left(p_{0,0}(2n)\right)^2=\left(2^{-2n}C_{2n}^{n}\right)^2\sim\frac{1}{\pi n}, n\to\infty.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{(0,0)(0,0)}(2n)$ qator uzoqlashadi, demak isbotlangan teoremaga ko'ra, $(0,0)$ holat qaytuvchan.

c) Ammo

$$p_{(0,0,0)(0,0,0)}(2n)=(p_{00}(2n))^3=\left(2^{-2n}C_{2n}^{n}\right)^3\sim\frac{1}{(\pi n)^{3/2}}\ (n\to\infty)$$

va $\sum_{n=1}^{\infty} p_{(0,0,0)(0,0,0)}(2n)$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun uch o'lchovli simmetrik tasodifiy daydish (S_{1n},S_{2n},S_{3n}) a-holatdagi uchta bog'liqsiz daydishlarning gumhi uchun $(0,0,0)$ holat qaytuvchimas ekanligi kelib chiqadi.

6.2. Chekli Markov zanjirlari uchun limit teorema

Vaqtga nisbatan bir jinsli bo'lgan chekli $\{\xi_t\}$ Markov zanjiri uchun 1 ehtimol bilan yaqinlashish, $\{\xi_t\}$ ning trayektoriyasi birorta holatda "to'xtab qoladi" degan ma'noni bildiradi, bu holda u yutib qoluvchi holat bo'lishi kerak.

8-teorema. Holatlar to'plami $\{1,2,...,n\}$ bo'lgan Markov zanjirining o'tish matritsasi P bo'lib, birorta $\nu<\infty$ uchun P^{ν} matritsaning barcha elementlari musbat bo'lsa, u holda

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j>0, \quad j\in\{1,...,n\} \tag{26}$$

munosabat o'rinli.

$\pi_1,...,\pi_n$ limitlar $i-$ boshlang'ich holatga bog'liq emas va ular

$$\sum_{k=1}^{n} p_{kj}x_k=x_j, \quad j\in\{1,...,n\}, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k=1 \tag{27}$$

tenglamalar sistemasining yagona yechimidan iborat.

Isboti. ν qadamda o'tish matritsasi $P^{\nu}=\|p_{ij}(\nu)\|$ ni ko'ramiz. Shartga ko'ra u stoxastik va barcha elementlari musbat. $\varepsilon=\min\limits_{i,j} p_{ij}(\nu)>0$ belgi kiritamiz.

$G_n=\{x=(x_1,...,x_n):x_1,...,x_n\geq 0, x_1+...+x_n=1\}-\{1,...,n\}$ to'plamdagi taqsimotlar simpleksi bo'lsin. Agar $e_1,...,e_n\in G_n$ birlik vektorlar bo'lsa, u holda $p_{ij}(t)=\left(P^t\right)_{ij}=\left(e_i P^t\right)_j$.

Ixtiyoriy $x\in G_n$ bo'lganda $xP^t\to p$ munosabatni qanoatlantiruvchi $p=(\pi_1,...,\pi_n)$ vektor mavjud ekanligini ko'rsatamiz.

$\left\{xP^t\right\}-$ ketma-ketlik $\left\{xP^{m+t\nu}\right\}=\left\{\left(xP^m\right)P^{t\nu}\right\}, m=0,1,...,\nu-1$ ko'rinishidagi ν ta qism ketma-ketliklardan tashkil topgan, shuning uchun ham teoremaning birinchi tasdig'ini isbotlash uchun $x\left(P^{\nu}\right)^t$ vektorlar ketma-ketligining p limiti, ixtiyoriy $x\in G_n$ uchun mavjud, x ga bog'liq emas va (27) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatish yetarli.

Keyingi isbot 4 ta tasdiqqa ajratilgan.

a) $Ax=xP^{\nu}$ tenglik orqali aniqlangan chiziqli almashtirish G_n ehtimollar taqsimoti simpleksinini yana o'ziga o'tkazadi.

Haqiqatan ham, agar $x=(x_1,...,x_n)\in G_n$ bo'lsa, u holda $y=(y_1,...,y_n)=xP^v$ vektorning barcha komponentlari manfiy emas va

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\, p_{kj}(v) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(v) = \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

b) $\rho(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\left|x_j-y_j\right|$ metrikada $A:G_n\to G_n$ – koeffitsiyenti $1-\varepsilon<1$ dan katta bo'lmagan siquvchan akslantirishdan iborat. Haqiqatan ham,

$$\rho(xP^v, yP^v)=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k p_{kj}(v)-\sum_{k=1}^{n} y_k p_{kj}(v)\right|=\sum_{j=1}^{n}\left|(x_k-y_k)p_{kj}(v)\right|.$$

Agar $x,y\in G_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)=0$. Shuning uchun ham x_k-y_k ayirmalarning manfiy bo'lmagan va musbat bo'lmagan yig'indilari faqat ishoralari bilan farq qiladi, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n}\max\{x_k-y_k,0\}=-\sum_{j=1}^{n}\min\{x_k-y_k,0\}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|x_k-y_k\right|=\frac{1}{2}\rho(x,y).$$

Demak, $x\neq y$ bo'lganda shunday $r,s\in\{1,...,n\}$ holatlar mavjudki, ular uchun

$$x_r-y_r\geq\frac{1}{2n}\rho(x,y)>0>\frac{1}{2n}\rho(x,y)\geq x_s-y_s$$

tengsizliklar o'rinli. Bundan va $a,b>0$ bo'lganda $|a-b|\geq a+b-2\min\{a,b\}$ tengsizlikning o'rinli ekanligidan hamda ε ning ta'rifidan bu r va s lar va ixtiyoriy $j\in\{1,...,n\}$ uchun

$$\left|(x_r-y_r)p_{rj}(v)+(x_s-y_s)p_{sj}(v)\right|\leq(x_r-y_r)p_{rj}(v)+$$
$$+\left|x_s-y_s\right|p_{sj}(v)-2\min\{|x_r-y_r|,|x_s-y_s|\}\min\{p_{rj}(v),p_{sj}(v)\}\leq$$
$$\leq\left|x_r-y_r\right|p_{rj}(v)+\left|x_s-y_s\right|p_{sj}(v)-\frac{1}{n}\rho(x,y)\varepsilon$$

va

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)p_{kj}(v)\right|\leq\sum_{\substack{k=1\\k\neq r,s}}^{n}\left|x_k-y_k\right|p_{kj}(v)+\left|x_r-y_r\right|p_{rj}(v)+$$

$$+\left|x_s - y_s\right| p_{sj}(v) - \frac{1}{n}\rho(x,y)\varepsilon = \sum_{k=1}^{n}\left|x_k - y_k\right| p_{kj}(v) - \frac{1}{n}\rho(x,y)\varepsilon.$$

Demak,

$$\rho\left(xP^v, yP^v\right) = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)p_{kj}(v)\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k - y_k\right| p_{kj}(v) - \frac{1}{n}\rho(x,y)\varepsilon\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left|x_k - y_k\right|\sum_{j=1}^{n} p_{kj}(v) - \varepsilon\rho(x,y) = (1-\varepsilon)\rho(x,y).$$

c) G_n kompaktni o‘ziga o‘tkazuvchi A siquvchi akslantirish yagona p qo‘zg‘almas nuqtaga ega va bu nuqta ixtiyoriy $A^r x$, $r = 1,2,...,$ $x \in G_n$ ketma-ketlik uchun limit nuqta bo‘ladi, chunki $r \to \infty$ da

$$\rho\left(A^r x, p\right) = \rho\left(A^r x, A^r p\right) \le (1-\varepsilon)^r \rho(x,\pi) \to 0.$$

(G_n kompaktning $\left\{A^r x\right\}$ nuqtalaridan tashkil topgan ketma-ketlik kamida bitta p limit nuqtaga ega. $Ap \ne p$ deb faraz qilamiz va r ni shunday tanlaymizki, natijada

$$\rho\left(A^r x, p\right) < \frac{1}{3}\rho\left(Ap,\pi\right) \text{ va}$$

$$\rho\left(A^r x, A^{r+1} x\right) \le (1-\varepsilon)^r \rho\left(x, A x\right) < 1/3\rho\left(p, Ap\right)$$

bo‘lsin. U holda uchburchak tengsizligiga ko‘ra, qarama-qarshilikga kelamiz:

$$\rho\left(Ap, p\right) \le \rho\left(A^r x, p\right) + \rho\left(A^r x, A^{r+1} x\right) + \rho\left(A^{r+1} x, Ap\right) < (1 - \frac{1}{3}\varepsilon)\rho\left(Ap, p\right).$$

d) $r \to \infty$ da $A^r x \to p$ va $\left(A^r x\right)P \to A^r(xP) \to p$, matritsaga ko‘paytirish esa uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun $p - P$ matritsa bilan $G_n \to G_n$ chiziqli almashtirishning qo‘zg‘almas nuqtasi. Agar bu chiziqli almashtirish boshqa qo‘zg‘almas nuqtalarga ega bo‘lganda edi, ular A akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalaridan iborat bo‘lar edi, bu esa mumkin emas. $p - P$ matritsa bilan akslantirishning yagona qo'zg'almas nuqtasi bo'lgani sababli, u (27) chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimidan iborat. Teorema isbot bo'ldi.

6.3. Markov zanjirlari yordamida oddiy tasodifiy daydishlarni tekshirish

$\xi_0, \xi_1, \ldots -$ holatlar to'plami $\{0, 1, \ldots, N\}$ bo'lgan chekli Markov zanjiri bo'lib, 0 va N yutib qoluvchi holatlar bo'lsin, ya'ni

$$p_{00} = P\{\xi_{t+1} = 0 | \xi(t) = 0\} = p_{NN} = P\{\xi_{t+1} = N | \xi(t) = N\} = 1, t \geq 0 \quad (28)$$

va har qaysi "ichki" $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ holatdan yoki qo'shni holatlarga o'tishi yoki o'z o'mida qolishi mumkin:

$$\begin{aligned} p_{kk+1} &= P\{\xi_{t+1} = k+1 | \xi_t = k\} = p_k > 0, \\ p_{kk} &= P\{\xi_{t+1} = k | \xi_t = k\} = r_k \geq 0, \\ p_{kk-1} &= P\{\xi_{t+1} = k-1 | \xi_t = k\} = q_k > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Bunday zanjirning $\xi_0 = k$ boshlang'ich holatli trayektoriyasi 0 yoki N yutib qoluvchi holatlarga tushib qolish ehtimolini topamiz. $k = 1, 2, \ldots, N$ va $t \to \infty$ da

$$p_{k0}(t) = P\{\xi_t = 0 | \xi_0 = k\} \to u_k \,,$$

$$p_{kN}(t) = P\{\xi_t = N | \xi_0 = k\} \to v_k \,.$$

0 va N holatlar yutib qoluvchi bo'lgani va $p_{k0}(t)$ hamda $p_{kN}(t)$ o'tish ehtimollari monoton kamaymaydigan bo'lgani uchun, $p_{k0}(t)$ va $p_{kN}(t)$ miqdorlarning $t \to \infty$ dagi limiti mavjud.

9-teorema. Agar $\{\xi_t\}$ holatlar to'plami $\{0, 1, \ldots, N\}$ va o'tish ehtimollari (28), (29) formulalar orqali ifodalanuvchi Markov zanjiri bo'lsa, u holda $\xi_0 = n$ bo'lganda 0 holatda yutilib qolish ehtimoli u_n, N holatda yutilib qolish ehtimoli v_n lar quyidagi

$$u_n = \frac{1}{1+S} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}, \quad v_n = \frac{1}{1+S}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}\right) = 1 - u_n \,,$$

$$S=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k},\ n=1,2,...,N-1$$

formulalar orqali ifodalanadi.

Isboti. $P\{\xi_t=0|\xi_0=k\}$ uchun to'la ehtimol formulasidan foydalanib, $1\le k<N$ bo'lganda quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$P\{\xi_t=0|\xi_0=k\}=P\{\xi_1=k-1|\xi_0=k\}P\{\xi_t=0|\xi_1=k-1\}+$$
$$+P\{\xi_1=k+1|\xi_0=k\}P\{\xi_t=0|\xi_1=k+1\}=$$
$$=q_kP\{\xi_{t-1}=0|\xi_0=k-1\}+p_kP\{\xi_{t-1}=0|\xi_0=k-1\}.$$

Bundan, t ni cheksizga intiltirsak,

$$u_k=q_ku_{k-1}+p_ku_{k+1},\quad 1\le k<N;\quad u_0=1,u_N=0. \qquad (30)$$

Bu tenglamani boshqa ko'rinishda yozib olamiz:

$$q_k(u_{k-1}-u_k)=p_k(u_k-u_{k+1}),\quad 1\le k<N;\quad u_0=1,\ u_N=0.$$

Demak,

$$u_1-u_2=(u_0-u_1)\frac{q_1}{p_1},$$

$$u_2-u_3=(u_0-u_1)\frac{q_1q_2}{p_1p_2},$$

va induksiyaga ko'ra,

$$u_k-u_{k+1}=(u_0-u_1)\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k},\ k=1,2,...,N-1.$$

Bu tengliklarni hadma-had qo'shib, quyidagini topamiz:

$$u_1-u_N=(u_0-u_1)\sum_{k=1}^{N-1}\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}=(u_0-u_1)S. \qquad (31)$$

Shartga ko'ra, $u_0=1$, demak $u_1=(u_0-u_1)S=(1-u_1)S$, yoki $u_1=\frac{S}{1+S}$. Qolgan u_k larni topish uchun endi quyidagilarni qayd etish yetarli:

$$u_k-u_{k+1}=(1-u_1)\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}=\frac{q_1\cdots q_k}{(1+S)p_1\cdots p_k},\quad k=1,2,...,N-1,$$

yoki

$$u_n=\sum_{k=n}^{N-1}(u_k-u_{k+1})=\frac{1}{1+S}\sum_{k=n}^{N-1}\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k},\quad n=1,2,...,N-1.$$

Xuddi yuqoridagi kabi, $v_1, v_2, ..., v_N$ lar uchun ham tenglamalar sistemasini keltirib chiqarish mumkin, u (30) dan faqat chegaraviy shartlar bilan farq qiladi:

$$v_k = q_k v_{k-1} + p_k v_{k+1}, \quad 1 \le k < N, \quad v_0 = 0, v_N = 1. \qquad (32)$$

(31) tenglamagacha chegaraviy shartlar ishlatilmagan edi. Yangi chegaraviy shartlarni hisobga olinsa, (31) tenglama

$$v_1 - 1 = -v_1 S, \text{ yoki } v_1 = \frac{1}{1+S}$$

ko'rinishini oladi. $v_k - v_{k+1} = -v_1 \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}$ bo'lgani uchun,

$$v_1 - v_n = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = -v_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}$$

va

$$v_n = v_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} \right) = \frac{1}{1+S} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} \right).$$

Teorema isbot bo'ldi.

Yuqoridagi kabi, ammo uytib qoluvchi holatlarsiz Markov zanjirining limit taqsimotlarini topamiz.

10-teorema. Agar $\{\xi_t\}$ – holatlar to'plami $\{0, 1, ..., N\}$ bo'lgan Markov zanjiri bo'lib, uning o'tish ehtimollari

$$p_{k,k+1} = p_k > 0, \quad p_{k,k-1} = q_k > 0, \quad p_{k,k} = r_k \ge 0,$$

$$p_k + q_k + r_k = 1 \quad (k = 1, 2, ..., N-1),$$

$$p_{01} = p_0 > 0, \quad p_{00} = r_0 > 0, \quad p_0 + r_0 = 1,$$

$$p_{NN} = r_N > 0, \quad p_{N,N-1} = q_N > 0, \quad r_N + q_N = 1$$

bo'lsa, u holda $\pi_n = \lim_{t \to \infty} P\{\xi_t = n | \xi_0 = k\}$ limit ehtimollar quyidagi

$$\pi_n = \frac{1}{1+S^*} \frac{p_0 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}, \quad S^* = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_0 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k}$$

formulalar orqali ifodalanadi.

Isboti. P o'tish matritsasiga ega bo'lgan $\{\xi_t\}$ Markov zanjiri, $p_{00} > 0$, $p_{NN} > 0$ bo'lgani sababli, davriy emas, uning barcha holatlari tutashgan va N qadamda u ixtiyoriy holatdan boshqa istalgan holatga musbat ehtimol bilan o'tishi mumkin. Shuning uchun ham unga limit taqsimotning mavjudligi haqidagi umumiy teoremani (8-teoremani) qo'llash mumkin: P o'tish matritsasiga ega bo'lgan. Markov zanjirining limit ehtimollaridan tashkil topgan $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_N)$ vektor, $\pi P=\pi$ tenglamani, ya'ni xususiy holda quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\pi_0=\pi_0 r_0+\pi_1 q_1,$$
$$\pi_k=\pi_{k-1}p_{k-1}+\pi_k r_k+\pi_{k+1}q_{k+1},\quad k=1,\ldots,N-1,$$
$$\pi_N=\pi_{N-1}p_{N-1}+\pi_N r_N,$$
$$\pi_0+\pi_1+\ldots+\pi_N=1.$$

Birinchi tenglamadan $\pi_1=\pi_0\frac{1-r_0}{q_1}=\pi_0\frac{p_0}{q_1}$ kelib chiqadi, bundan va ikkinchi tenglamadan esa

$$\pi_2=\frac{1}{q_2}(\pi_1(1-r_1)-\pi_0 p_0)=\frac{1}{q_2}\pi_0 p_0\left(\frac{1-r_1}{q_1}-1\right)=\pi_0\frac{p_0p_1}{q_1q_2}$$

va hokazo, nihoyat $\pi_N=\pi_0\frac{p_0p_1\cdots p_{N-1}}{q_1q_2\cdots q_N}$. $\pi_0+\ldots+\pi_N=1$ bo'lgani sababli, $\pi_0=\frac{1}{1+S^*}$, va bundan boshqa qolgan ehtimollar uchun formulalar kelib chiqadi.

21-misol. Diffuziya uchun Erenfestlar modeli. n ta zarrachani bitta idishdan ikkinchisiga o'tishi haqidagi yuqoridagi 18-misolda ko'rilgan Erenfestlar modeli uchun t vaqtda birinchi idishdagi zarrachalarning sonini ifodalovchi ξ_t – holatlar to'plami $\{0,1,\ldots,n\}$ va o'tish ehtimollari

$$p_{k,k+1}=p_k=\frac{n-k}{2n}\ (k=0,\ldots n-1),$$
$$p_{k,k-1}=q_k=\frac{k}{2n}\quad (k=1,\ldots,n),$$
$$p_{k,k}=\frac{1}{2}\quad (k=0,\ldots,n)$$

bo'lgan Markov zanjirini tashkil etadi.

Bu Markov zanjirining statsionar (limit) taqsimotlarini topish uchun limit teoremadan foydalanamiz. Bu holda

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_0 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$$

va

$$\pi_k = 2^{-n} C_n^k,$$

ya'ni statsionar taqsimot $(n;1/2)$ parametrli binomial taqsimotdan iborat. Binomial taqsimot uchun 0 va n qiymatlarning ehtimollari (ya'ni vaqtning berilgan momentida barcha zarrachalar birinchi yoki ikkinchi idishda yig'ilib qolish ehtimollari) 2^{-n} ga teng va n idishdagi molekulalar soniga teng bo'lgan holda bu ehtimollar shunday kichikki, koinot vujudga kelganidan boshlab to hozirgi kungacha bo'lgan vaqt oralig'ida bunday momentni kuzatish amalda mumkin emas.

7-§. Tarmoqlanuvchi jarayonlar

Tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasida kimiyoviy, yadroviy va shu kabi boshqa reaksiyalardagi populatsiyalarning rivojlanish jarayonining sodda matematik modeli o'rganiladi. Birinchi bo'lib bunday model XIX asr boshlarida Galton va Vatsonlar tomonidan, ingliz lordlari familiyalarining yo'q bo'lib ketishini o'rganish jarayonida taklif etilgan.

$\mu(t)$ tarmoqlanuvchi jarayonning t momentdagi holatini t avloddagi zarrachalar soni deb talqin qilinadi. Keyingi avlodga o'tishda har bir zarracha tasodifiy sondagi keyingi avlod zarrachalarini vujudga keltirib, o'zi yo'q bo'lib ketadi, turli zarrachalarning avlodlar soni o'zaro bog'liqsiz deb faraz qilinadi.

Tarmoqlanuvchi jarayonni formal ravishda ta'riflash uchun, $0,1,2,\dots$ qiymatlarni qabul qiluvchi bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning cheksiz $\{\gamma_{tk}, t=0,1\dots, k=1,2,\dots\}$ to'plami mavjud deb faraz qilamiz ($\gamma_{tk} - t$ avloddagi k-zarrachaning qoldirgan nasllari soni). Jarayonning qiymatlari ushbu

$$\mu(t+1) = \begin{cases} \gamma_{t1} + \gamma_{t2} + \dots + \gamma_{t\mu(t)}, \mu(t) > 0, \\ 0, \mu(t) = 0 \end{cases}$$

rekurrent munosabat orqali ifodalanadi.

Bunday ta'riflangan $\mu(t)$ tasodifiy jarayon Markov zanjiridan iborat bo'ladi, chunki vaqtning ixtiyoriy t momentida jarayonning qiymati aniqlangan bo'lsa, uning keyingi holatlari $\{\gamma_{sk},\ s\geq t,\ k=1,2,...\}$ tasodifiy miqdorlar orqali aniqlanadi, ular esa avvalgi holatlarga bog'liq emas. Tarmoqlanuvchi jarayonning holatlar to'plami $\{0,1,2,...\}$ – manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamidan iborat, shuning uchun ham tarmoqlanuvchi jarayon sanoqli holatli Markov zanjiridan iborat. 0 holat yutib qoluvchi holat, agar jarayon 0 holatga tushsa, u ***yo'q bo'lib ketgan*** deyiladi.

Biologik va shuningdek fizik qo'llanishlar nuqtayi nazaridan quyidagi ikkita savol eng ko'p qiziqish uyg'otadi: qanday shart bajarilsa jarayonning yo'q bo'lib ketish ehtimoli birga teng va qanday shart bajarilganda jarayon musbat ehtimol bilan yo'q bo'lib ketmaydi?

Tarmoqli jarayonlarning xossalarini o'rnatishda hosil qiluvchi funksiyalardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. γ – tarmoqlanuvchi jarayondagi bitta zarrachaning nasllar soni bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. Quyidagi hosil qiluvchi funksiyalarni kiritamiz:

$$f(s)=Ms^{\gamma}=M\{s^{\mu(1)}|\mu(0)=1\},$$

$$\varphi(t,s)=Ms^{\mu(t)}.$$

11-teorema. $\varphi(t,s), t=0,1,...$ hosil qiluvchi funksiyalar ketma-ketligi

$$\varphi(0,s)=Ms^{\mu(0)},\quad \varphi(t+1,s)=\varphi(t,f(s)), t=0,1,...$$

rekurrent munosabatni qanoatlantiradi. Agar $P(\mu(0)=1)=1$ bo'lsa, u holda

$$\varphi(0,s)=s,\quad \varphi(t+1,s)=f(\varphi(t,s)),\ t=0,1,...$$

tengliklar o'rinli.

Isboti. Tarmoqlanuvchi jarayonning ta'rifiga ko'ra, $\mu(t+1)$ miqdor har birining taqsimoti γ ning taqsimotiga teng bo'lgan $\mu(t)$ta bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning yig'indisiga teng ekanligini hisobga olib, hosil qiluvchi funksiyalarning 3-xossasidan (5-bob, (6) formula) foydalanib quyidagini, topamiz:

$$\varphi(t+1,s)=Ms^{\mu(t+1)}=\varphi(t,Ms^{\gamma})=\varphi(t,f(s)).$$

Xuddi shu kabi, boshlang'ich zarrachaning barcha bevosita (1-avlodni tashkil etuvchi) nasllari bir-biriga bog'liqsiz ravishda ko'paygani va boshlang'ich zarrachaning $t+1$ momentdagi nasllari soni $\mu(t)$ bilan bir xil taqsimotga ega bo'lgani uchun, ikkinchi tenglikni hosil qilamiz:

$$\varphi(t+1,s) = Ms^{\mu(t+1)} = M\left(M\left\{s^{\mu(t+1)}|\mu(0)\right\}\right) = f(\varphi(t,s)).$$

1-natija. Agar $\mu(0)=1$ bo'lsa, u holda

$$\varphi(t,s) = f_t(s) = f(f(...(f(s)))).$$

Isboti. Agar $\varphi(0,s) = Ms^{\mu(0)} = Ms^1 = s$ ekanligini hisobga olsak, natijaning isboti 8-teoremadan bevosita kelib chiqadi.

11-teoremadan foydalanib, $M\mu(t)$ ning qiymatini topamiz. $M\gamma = A$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $t=0,1,2,...$ uchun

$$M\mu(t+1) = \varphi_s'(t+1,s)\Big|_{s=1} = \frac{d}{ds}\varphi(t,f(s))\Big|_{s=1} =$$

$$= \left(\varphi_u'(t,u)\Big|_{u=f(s)} f'(s)\right)\Big|_{s=1} = AM\mu(t)$$

ya'ni

$$M\mu(t) = A^t M\mu(0).$$

Demak, tarmoqlanuvchi jarayonlar bitta zarracha avlodlarining o'rta qiymati $A = M\gamma$ ning turli qiymatlarida turli sifatiy xossalarga ega:

agar $A<1$ bo'lsa, u holda $M\mu(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ va bunday jarayon ***dokritik jarayon*** deyiladi;

agar $A=1$ bo'lsa, u holda $M\mu(t) = M\mu(0)$ va bunday jarayon ***kritik jarayon*** deyiladi;

agar $A>1$ bo'lsa, u holda $M\mu(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ va bunday jarayon ***nadkritik jarayon*** deyiladi.

Bu atamalar kimyoviy yoki yadroviy tasniflashga mos keladi: reaksiya yoki juda tez tugaydi (odatdagi shartlardagi kabi), yoki taxminan bir xil o'zgarmas holatda turadi (yadroviy reaktordagi kabi), yoki bo'lmasa yadroviy portlash hosil bo'ladi.

Matematik kutilmaning holati bilan bir qatorda, tarmoqlanuvchi jarayonning muhim xarakteristikalaridan yana bittasi kamaymaydigan

$P\{\mu(t)=0|\mu(0)=1\}$ ehtimolning limitidan iborat bo'lgan jarayonning yo'q bo'lib ketish ehtimolidan iborat (0 holat yutib qoluvchi holat ekanligini eslatib o'tamiz):

$$q=\lim_{t\to\infty} P\{\mu(t)=0|\mu(0)=1\}.$$

12-teorema. $f(s)$ hosil qiluvchi funksiyaga ega bo'lgan Galton-Vatson jarayonining yo'q bo'lib ketish ehtimoli q soni $f(s)=s$ tenglamaning eng kichik nomanfiy ildizidan iborat.

12-teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi lemma kerak bo'ladi.

2-lemma. $f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k$ – nomanfiy butun qiymatli tasodifiy miqdorning $f(s)\neq s$ shartni qanoatlantiruvchi hosil qiluvchi funksiyasi bo'lsin.

a) Agar $A=f'(1)\leq 1$ bo'lsa, u holda $0\leq s<1$ bo'lganda $f(s)>s$ tengsizlik o'rinli.

b) Agar $A=f'(1)>1$ bo'lsa, u holda shunday $s_0\in[0,1)$ son mavjudki, uning uchun

$$f(s)>s, 0\leq s<s_0,\ f(s_0)=s_0,\ f(s)<s,\ s_0<s<1$$

munosabatlar o'rinli.

Lemmaning isboti. $f(s)$ – hosil qiluvchi funksiya, yig'indisi 1 bo'lgan nomanfiy koeffitsiyentli darajali qatordan iborat, ya'ni u $[0,1]$ oraliqda aniqlangan, nomanfiy, monoton o'suvchi, uzluksiz qavariq, barcha tartibli monoton kamaymaydigan nomanfiy hosilalarga ega bo'lgan funksiya bo'lib, shu bilan birga $f(1)=1$ va $f(0)\geq 0$ bo'lsin.

a) Agar $f'(1)\leq 1$ bo'lib, $f(s)\neq s$ bo'lsa, u holda barcha $u\in(0,1]$ nuqtalarda $f'(u)<1$ va $f''(u)\geq 0$ (shu bilan birga $f''(u)=0$ tenglik faqat $f'(1)<1$ bo'lgandagina bajarilishi mumkin) va Teylor formulasiga ko'ra, har qanday $s\in[0,1)$ bo'lganda, biror $u=u(s)\in(s,1)$ uchun

$$f(s)=f(1)+(s-1)f'(1)+(s-1)^2\frac{f''(u)}{2}>1-(1-s)f'(1)>s.$$

Endi b-tasdiqni isbotlaymiz. Agar $A > 1$ bo'lsa, u holda $s \uparrow 1$ bo'lganda

$$f(s) = 1 - A(1-s) + o(1-s)$$

ya'ni s birga yetarlicha yaqin bo'lganda $f(s) < s$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$f(0) = P(\xi = 0) \geq 0$$

va $f(s)$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra $f(s) = s$ tenglama $s_0 \in [0,1)$ ildizga ega. $f''(s) > 0$ bo'lgani uchun $f(s)$ funksiya $[0,1]$ oraliqda botiq, ya'ni $f(s) = as + b$ tenglama $[0,1]$ oraliqda bittadan ortiq ildizga ega bo'lishi mumkin emas. Ammo $f(s) = s$ tenglama $A > 1$ bo'lganda ikkita 1 va s_0 ildizga ega; demak $s \in [0, s_0)$ bo'lganda $f(s) > s$ va $s \in (s_0, 1)$ bo'lganda esa $f(s) < s$. Lemma isbotlandi.

12-teoremaning isboti.

$$P\{\mu(t) = 0 | \mu(0) = 1\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t) = k | \mu(0) = 1\} s^k \Big|_{s=0} = Ms^{\mu(t)}\Big|_{s=0} = f_t(0),$$

bo'lgani uchun

$$q = \lim_{t \to \infty} f_t(0)$$

tenglik o'rinli.

Ixtiyoriy $t = 0,1,2,...$ uchun $0 \leq f_t(0) \leq s_0$ ekanligini ko'rsatamiz. $t = 0$ bo'lganda bu tengsizlik to'g'ri ekanligi ravshan. So'ngra induksiyadan foydalanamiz. Qandaydir $t \geq 0$ uchun $0 \leq f_t(0) \leq s_0$ bo'lsin. Bu tengsizlikning har ikkala tomoniga f funksiyani ishlatib va uning monotonligini hamda $f(s_0) = s_0$ ekanligini hisobga olib, topamiz:

$$0 \leq f_t(0) \leq f(f_t(0)) = f_{t+1}(0) \leq f(s_0) = s_0.$$

Monoton o'suvchi chegaralangan $\{f_t(0)\}$ ketma-ketlik $t \to \infty$ da limitga ega. Uni $q \leq s_0$ orqali belgilaymiz. $f(s)$ funksiya uzluksiz bo'lgani sababli

$$q = \lim_{t \to \infty} f_{t+1}(0) = \lim_{t \to \infty} f(f_t(0)) = f\left(\lim_{t \to \infty} f_t(0)\right) = f(q).$$

Demak, $q = s_0$. Teorema isbot bo'ldi.

2-natija. Agar $A = f'(1) > 1$ bo'lsa va faqat shundagina tarmoqlanuvchi jarayonning yo'q bo'lib ketish ehtimoli q birdan kichik.

13-teorema. $f(s) \neq s$ bo'lgan tarmoqlanuvchi jarayonning barcha musbat holatlari ahamiyatga molik emas: agar $0 < k < \infty$ bo'lsa, u holda $\lim_{t\to\infty} P\{\mu(t) = k\} = 0$.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz: shunday $k > 0$ mavjud bo'lsinki, u uchun

$$\limsup_{t\to\infty} P(\mu(t) = k) = v_k > 0$$

munosabat o'rinli bo'lsin. Alohida ikkita holni ko'ramiz.

a) $P(\gamma = 0) = p > 0$ bo'lsin. U holda $P\{\mu(t+1) = 0 | \mu(t) = k\} = p^k > 0$. Demak, to'la ehtimol formulasiga ko'ra

$$P(\mu(t+1) = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} P(\mu(t) = m) P\{\mu(t+1) = 0 | \mu(t) = m\} \geq$$

$$\geq P(\mu(t) = 0) + P(\mu(t) = k) P\{\mu(t+1) = 0 | \mu(t) = k\} =$$

$$= P(\mu(t) = 0) + p^k P(\mu(t) = k).$$

Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shib, quyidagini topamiz:

$$P(\mu(t+1) = 0) \geq p^k \sum_{r=0}^{t} P(\mu(r) = k).$$

Agar $v_k = \limsup_{t\to\infty} P(\mu(t) = k) > 0$ bo'lsa, u holda yetarlicha katta t uchun oxirgi tengsizlikning o'ng qismi birdan katta, bu esa bo'lishi mumkin emas. Demak $v_k = 0$ ekan.

b) Endi $P(\gamma = 0) = 0$ bo'lsin. U holda $P(\gamma \geq 1) = 1$ va $f(s) \neq s$ bo'lgani uchun $P(\gamma = 1) < 1$. Demak,

$$P\left(\mu(t+1) = \gamma_{t1} + \ldots + \gamma_{t\mu(t)} \geq \mu(t)\right) = 1$$

va

$$P\left(\mu(t+1) \geq k+1 | \mu(t) = k\right) \geq 1 - \left(P(\gamma = 1)\right)^k \geq 1 - P(\gamma = 1) = r > 0.$$

a) Punktdagi kabi fikrlashlar yordamida quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$P(\mu(t+1)\geq k+1)\geq P(\mu(t)\geq k+1)+P(\mu(t)=k,\mu(t+1)\geq k+1)\geq$$
$$\geq P(\mu(t)\geq k+1)+rP(\mu(t)=k).$$

Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shsak,

$$P(\mu(t+1)\geq k+1)\geq P(\mu(0)\geq k+1)+r\sum_{m=0}^{t}P(\mu(m)=k).$$

Agar $v_k=\limsup\limits_{t\to\infty}P(\mu(t)=k)>0$ bo'lsa, u holda yetarlicha katta t lar uchun oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni birdan katta, bu esa bo'lishi mumkin emas. Demak, bu holda ham $v_k=0$. Teorema isbot bo'ldi.

14-teorema. Agar $A=M\gamma>1$ va $\sigma^2=D\gamma<\infty$ bo'lsa, u holda $P(X>0)>0$ shartni qanoatlantiruvchi shunday X tasodifiy miqdor mavjudki, u uchun

$$P\left\{\frac{\mu(t)}{A^t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0\,\middle|\,\mu(0)=1\right\}=1 \text{ va } MX=1$$

munosabatlar o'rinli. Shu bilan birga X tasodifiy miqdorning $\psi(u)=Me^{iuX}$ xarakteristik funksiyasi $\psi(Au)=f(\psi(u))$ tenglamani qanoatlantiradi.

Isboti. $X(t)=\dfrac{\mu(t)}{A^t}$ $t=0,1,2,\ldots$ deb belgilaymiz.

$$X(0)+\sum_{t=0}^{\infty}\left(X(t+1)-X(t)\right)$$

qator (bunda birinchi k ta qo'shiluvchining yig'indisi $X(k)-1$) 1 ehtimol bilan absolut yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatish yetarli (uning yig'indisi limit tasodifiy miqdor X dan iborat). Agar $\mu(t)=m$ bo'lsa, u holda $\mu(t)=\gamma_{t1}+\ldots+\gamma_{tm}$ ekanligidan foydalanib, to'la matematik kutilma formulasidan,

$$M\left(X(t+1)-X(t)\right)^2=$$
$$=M\left(\frac{\mu(t+1)}{A^{t+1}}-\frac{\mu(t)}{A^t}\right)^2=\frac{1}{A^{2(t+1)}}M\left(\mu(t+1)-\mu(t)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{A^{2(t+1)}}M\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\gamma_{tk}-Am\right)^2 I\{\mu(t)=m\}=$$

$$=\frac{1}{A^{2(t+1)}}\sum_{m=0}^{\infty}P(\mu(t)=m)M\left(\sum_{k=1}^{m}(\gamma_{tk}-A)\right)^2= \qquad (33)$$

$$=\frac{1}{A^{2(t+1)}}\sum_{m=0}^{\infty}P(\mu(t)=m)m\sigma^2=\frac{\sigma^2}{A^{2(t+1)}}M\mu(t)=\frac{\sigma^2}{A^{t+2}}.$$

Agar $A>1$ bo'lsa, u holda (33) tenglikka va Chebishev tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{t=0}^{\infty}P\left(\left|X(t+1)-X(t)\right|>\frac{\sigma}{A^{t/3}}\right)\le\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\sigma^2/A^{t+2}}{\left(\sigma/A^{t/3}\right)^2}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{A^{t/3}+2}<\infty$$

va Borel-Kantelli lemmasiga asosan

$$\left\{\left|X(t+1)-X(t)\right|>\sigma/A^{t/3}\right\},\ t=0,1,...$$

hodisalardan 1 ehtimol bilan faqat cheklitasi ro'y beradi. Bundan

$$P\left(\sum_{t=0}^{\infty}(X(t+1)-X(t))\ \text{qator absolut yaqinl.}\right)=1$$

kelib chiqadi, ya'ni $X=X_0+\sum_{t=0}^{\infty}\left(X(t+1)-X(t)\right)$ tasodifiy miqdor deyarli muqarrar aniqlangan va chekli.

Teoremaning oxirgi ta'kidini isbotlash uchun quyidagi tenglikni ko'ramiz:

$$\psi_{t+1}(u)=Me^{iuX(t+1)}=M\exp\left\{iu\frac{\mu(t+1)}{A^{t+1}}\right\}=\varphi\left(t+1,\exp\left\{iu/A^{t+1}\right\}\right)=$$

$$=f(\varphi(t,\exp\{iu/A^{t+1}\}))=f\left(M\exp\left\{iu\frac{\mu(t)}{A^{t+1}}\right\}\right)=$$

$$=f\left(Me^{iuX(t)/A}\right)=f\left(\psi_t(u/A)\right). \qquad (34)$$

Isbotlanganiga ko'ra, $X(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}X$, demak barcha haqiqiy u lar uchun $\psi_t(u)\xrightarrow[t\to\infty]{}\psi(u)$ munosabat o'rinli. Undan foydalanib,

(34) tenglikning har ikkala tomonida t bo'yicha limitga o'tib, topamiz:

$$\psi(u) = f\left(\psi(u/A)\right),$$

bu esa teoremaning tasdig'idan faqat o'zgartirish almashtirishigagina farq qiladi.

VI BOBGA DOIR MASALALAR

1. $\{\xi(t), t \in T = [0,1]\}$ – tasodifiy jarayon $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan bo'lsin, bu yerda $\Omega = \{1,2\}$, $\mathcal{A}$ – Ω ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan σ – algebra, P – esa $\{1\}$ va $\{2\}$ to'plamlarga $1/2$ ehtimollarni mos qo'yadi. Agar $\xi(t) = \omega t$ bo'lsa, $\xi(t,\omega)$ jarayonning barcha trayektoriyalari va chekli o'lchovli taqsimotlari topilsin.

2. a – parametrli Puasson jarayonining matematik kutilmasi, chekli o'lchovli taqsimotlari va kovariatsiya funksiyasi topilsin.

3. $\Pi(t) - a$ parametrli Puasson jarayoni bo'lsin. Unga bog'liqsiz ravishda tanga tashlaymiz va $\eta(t)$ jarayonni quyidagicha aniqlaymiz: agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, $\eta(t) = (-1)^{\Pi(t)}$, aks holda $\eta(t) = (-1)^{\Pi(t)+1}$ deb belgilaymiz. $\{\eta(t), t \geq 0\}$ tasodifiy jarayonning chekli o'lchovli taqsimotlarini toping.

4. $\xi(t) = X \sin \omega t$ – tasodifiy jarayonning matematik kutilmasi va kovariatsiya funksiyasi topilsin, bu yerda ω – o'zgarmas chastota, $MX = 1, DX = 0,2$.

5. $\xi(t) = Xe^{-t^2}$ – jarayonning matematik kutilmasi va kovariatsiya funksiyasini toping, bu yerda X – tasodifiy miqdor, $MX = 2$, $DX = 0,01$.

6. Agar $\{\xi(t), t \in T\}$ – tasodifiy jarayon $A \in T$ – kompakt to'plamda stoxastik uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda ehtimol bo'yicha chegaralangan, ya'ni $N \to \infty$ da

$$\sup_{t \in A} P\left(|\xi(t)| > N\right) \to 0$$

ekanligi isbotlansin.

7. $\xi(t)$ – stoxastik uzlukziz jarayon va $g(x)$ – ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $g(\xi(t))$ ham stoxastik uzluksiz jarayon ekanligi isbotlansin.

8. $\xi(t)=\gamma_1 g_1(t)+...+\gamma_n g_n(t)$ tasodifiy jarayonning kovariatsiya funksiyasini toping, bu yerda $g_1(t),...,g_n(t)$ – notasodifiy funksiyalar, $\gamma_1,...,\gamma_n$ – esa korelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular mos ravishda $d_1,...,d_n$ dispersiyalarga ega.

9. $\xi_1(t)$ va $\xi_2(t)$ – $K_1(t,s)$ va $K_2(t,s)$ kovariatsiya funksiyalarga ega bo'lgan ikkita bog'liqsiz tasodifiy jarayonlar bo'lsin. $\eta(t)=\xi_1(t)\xi_2(t)$ jarayonning kovariatsiya funksiyasi topilsin.

10. $\xi(t)$ – tasodifiy jarayon o'z qiymatini vaqtning tasodifiy momentlarida o'zgartiradi. Sakrashlar orasida $\xi(t)$ ning qiymati o'zgarmaydi va bu qiymatlarning har qaysisi, matematik kutilmasi 0 va dispersiyasi σ^2 bo'lgan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlardan iborat. Jarayonning matematik kutilmasi va kovariatsiya funksiyasi topilsin.

11. G sohada vaqtning boshlang'ich $t=0$ momentida k ta zarracha bor edi. Zarrachalarning har qaysisi Δt vaqt oralig'ida $\mu\Delta t+o(\Delta t)$ ehtimol bilan G sohadan chiqib ketadi. Yangi zarrachalar paydo bo'lmaydi. Bu jarayonni tavsiflovchi tenglamalar sistemasini tuzing. Uni yeching. Vaqtning t momentida G sohada bo'lgan zarrachalar sonining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

12. *Poya jarayoni.* G sohada qandaydir zarrachalar paydo bo'lib, so'ngra ular sohani tark etishmaydi. Agar vaqtning boshlang'ich $t=0$ momentida sohada n ta zarracha bo'lgan bo'lsa, u holda vaqtning $(t,t+\Delta t)$ intervalida zarrachalar soni $\frac{1+an}{1+at}\Delta t+o(\Delta t)$ ehtimol bilan bittaga ko'payadi, bu yerda $a>0$. Zarrachalar soni ikkita yoki undan ko'pga ko'payish ehtimoli $o(\Delta t)$. Bu jarayonni tavsiflovchi tenglamalar sistemasini tuzing. Uni yeching. Vaqtning t momentida G sohada bo'lgan zarrachalar sonining matematik kutilmasini va dispersiyasini toping.

13. *Puasson jarayoni.* Biror fizik sistema sanoqlita $E_1,E_2,E_3,...$ holatlardan birida bo'lishi mumkin, shu bilan birga vaqtning ixtiyoriy t momentida u o'zining holatini o'zgartirib, tartib raqami bittaga ko'p bo'lgan holatga o'tishi mumkin. Agar Δt yetarlicha kichik bo'lsa, u

holda sistemaning $(t,t+\Delta t)$ vaqt oralig‘ida E_n holatdan E_{n+1} ga o‘tish ehtimoli $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ ga teng, bu yerda λ – musbat o‘zgarmas son. Bu jarayonni tavsiflovchi tenglamalar sistemasini tuzing, uni yechib, agar vaqtning boshlang‘ich $t=0$ momentida sistema E_0 holatda bo‘lgan bo‘lsa, vaqtning t momentida uning E_n holatda bo‘lish ehtimoli $p_n(t)$ $(n\in\mathbb{N})$ ni toping.

14. ξ_t – bir jinsli Markov zanjiri va A tutashgan holatlar sinfi bo‘lsin. A sinfning barcha tutashuvchi holatlari bir xil davrga ega va ularning hammasi qaytuvchan yoki hammasi nol qaytuvchan, yoki bo‘lmasa musbat qaytuvchan holatlardan iborat ekanligini tekshirib ko‘ring.

15. Vaqtga nisbatan bir jinsli bo‘lmagan Markov zanjirlari uchun 7-teoremada keltirilgan kriteriy noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsating. Misol sifatida ikkita (0 va 1) holatli, o‘tish ehtimoli

a) $p_{ij}^{(n)}=\begin{cases}1/2,\, n=0,\, i,j\in\{0,1\},\\ 1,\, n\le 1,\, i=j,\\ 0,\, n\le 1,\, i\ne j;\end{cases}$ b) $p_{ij}^{(n)}=\begin{cases}1-n^{-2},\, i=j,\\ n^{-2},\, i\ne j,\end{cases}$ $n\ge 0,$

bo‘lgan Markov zanjirlari qaralsin.

16. Agar $\mu(t)$ – Galton-Vatsonning kritik jarayoni bo‘lib, $f'(t)=1$, $f''(t)=b\in(0,\infty)$ bo‘lsa, u holda

$$M\mu(t)(\mu(t)-1)=\frac{d^2}{ds^2}\varphi(t,s)\Big|_{s=1}=bt$$

ekanligini isbotlang.

17. $\mu(t)$ – bitta zarrachadan boshlangan va $f(s)=Ms^{\gamma}$ – hosil qiluvchi funksiyaga ega bo‘lgan Galton-Vatson jarayonida t – avloddagi zarrachalar soni bo‘lsin.

a) $\mu(0)+\mu(1)+...+\mu(k)$ yig‘indining hosil qiluvchi funksiyasi topilsin.

b) $f'(1)=1$, $f''(1)=b\in(0,\infty)$ bo‘lgan kritik jarayon uchun $M\left(\sum\limits_{j=0}^{k}\mu(j)\right)$ va $\sum\limits_{j=0}^{k}M\mu(j)$, $D\left(\sum\limits_{j=0}^{k}\mu(j)\right)$ va $\sum\limits_{j=0}^{k}D\mu(j)$ miqdorlar taqqoslansin.

TEST SAVOLLARI

1. $W(t)$ standart Viner jarayoni uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o'rinli?

A. $EW(t)W(s)=max(t,s)$ B. $EW(t)W(s)=min(t,s)$
C. $EW(t)W(s)=0$ D. To'g'risi yo'q.

2. $\{w_t, t \geq 0\}$ Viner jarayoni bo'lsa, w_t ning taqsimotini toping.

A. $N(0,t)$ B. $N(1,1/2)$ C. $\Pi(1)$ D. $\Pi(0)$.

3. $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – a parametrli Puasson jarayoni bo'lsa, $P(\xi(1)=2)$ hisoblansin.

A. $\frac{e^{-a}}{2}$ B. $\frac{e^{-1}}{2}$ C. To'g'ri javob yo'q. D. $\frac{1}{2}e^{-a}a^2$.

4. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri: $\{\xi(t), t \in T\}$ va $\{\eta(t), t \in T\}$ tasodifiy jarayonlar stoxastik ekvivalent deyiladi?

A. agar barcha $\omega \in \Omega, t \in T$ lar uchun $\xi(t,\omega)=\eta(t,\omega)$ bo'lsa;

B. agar $\forall t \in T$ uchun $P(\xi(t) \neq \eta(t))=1$ bo'lsa;

C. agar $\forall t \in T$ uchun $P(\xi(t)=\eta(t))=1$ bo'lsa;

D. agar deyarli barcha $t \in T$ uchun $\forall \omega \in \Omega$; $\xi(t,\omega)=\eta(t,\omega)$ bo'lsa.

5. $\{w(t), t \geq 0\}$ – Viner jarayoni bo'lsa, $w(2)-w(1)$ning taqsimotini toping.

A. $N(0,t)$ B. $N(1,1/2)$
C. $\Pi(1)$ D. Javoblar ichida tog'risi yo'q.

6. $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – a parametrli Puasson jarayoni bo'lsa, $P(\xi(t)=2)$ hisoblansin.

A. $\frac{e^{-1}}{2}$ B. $\frac{1}{2}e^{-a}a^2$ C. $\frac{e^{-a}}{2}$ D. To'g'ri javob yo'q.

7. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri? $\{\xi(t), t \in T\}$ va $\{\eta(t), t \in T\}$ tasodifiy jarayonlar stoxastik ekvivalent deyiladi, agar:

A. $\forall t \in T$ lar uchun $P(\xi(t) \neq \eta(t))=1$ bo'lsa;

B. deyarli barcha $t \in T$ lar uchun $\forall \omega \in \Omega$; $\xi(t,\omega)=\eta(t,\omega)$ bo'lsa;

C. agar $\forall t \in T$ uchun $P(\xi_t=\eta_t)=1$ bo'lsa;

D. barcha $\omega \in \Omega, t \in T$ lar uchun $\xi_t(\omega)=\eta_t(\omega)$ bo'lsa.

8. Noto'g'ri tasdiqni toping: $\{w(t), t \geq 0\}$ Viner jarayoni.

A. $w(t)-w(s) \in N(0, t-s)$;

B. $w(t)$ – bog'liqsiz orttirmali jarayon;

C. $w(t)$ – statsionar jarayon;

D. $w(t)$ – Gauss jarayoni.

9. $\{X_n, n=0,1,2,...\}$ – butun $j=0,1,2,...$ qiymatlarni qabul qiluvchi Markov zanjiri bo'lsa, u holda X_0 – boshlang'ich taqsimot deyiladi, ...

A. agar $P(X_0=j)=p_j^0 \geq 0$ bo'lib, $\sum_j p_j^0 = 1$ bo'lsa;

B. agar $P(X_0=j)=p_j^0 > 0$ bo'lib, $\sum_j p_j^0 = 1$ bo'lsa;

C. $P(X_0=0)=1$ bo'lsa;

D. To'g'ri javob yo'q.

10. Zarracha $[0,3]$ oraliqning butun nuqtalarida tasodifiy simmetrik daydiyotgan bo'lsin, bunda 0 va 3 nuqtalar yutib qoluvchi holatlar bo'lsa, bunga mos kelgan Markov zanjirining o'tish matritsasini yozing.

A. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\{w(t), t \geq 0\}$ – Viner jarayoni. $w(2)-w(1)$ning taqsimotini toping.

A. $N(2)-N(1)$ B. $\Pi(3)$ C. $\Pi(2)$ D. $\Pi(2)-\Pi(1)$.

12. $\{\xi(t), t \geq 0\} - a$ parametrli Puasson jarayoni bo'lsa, $P(\xi(1)=1)$ hisoblansin.

A. $\frac{e^{-1}}{2}$ B. ae^{-a} C. $\frac{1}{2}e^{-a}a^2$ D. $\frac{e^{-a}}{2}$.

13. $\{\xi(t), t \in T\}$ jarayonning trayektoriyasi deb ...

A. $\xi(t_0)$ tasodifiy miqdorga aytiladi;

B. $\xi(t), t \in T$ funksiyaning grafigiga aytiladi;

C. $\xi(t, \omega_0)$ funksiyaga aytiladi, bu yerda $\omega_0 \in \Omega$ fiksirlangan elementar hodisa;

D. $\xi(t, \omega)$ tasodifiy funksiyaning biror qiymatiga aytiladi.

14. Quyidagilardan to'g'ri tasdiqni toping.

A. Puasson jarayoni bog'liqsiz orttirmali jarayon;

B. Puasson jarayoni Gauss jarayoni;

C. Puasson jarayoni statsionar jarayon emas;

D. Puasson jarayonining trayektoriyalari uzluksiz.

15. $\{X_n, n = 0,1,2,...\}$ – butun $j = 0,1,2,...$ qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Markov zanjirini tashkil qiladi, agar:

A. $X_0 \to X_1 \to X_2 \to$ munosabat o'rinli bo'lsa;

B. $P(X_n = j / X_{n-1} = i)$ shartli ehtimol n ga bog'liq bo'lmasa;

C. $P(X_n = j / X_0 = k_0, X_1 = k_1, ..., X_{n-2} = k_{n-2}, X_{n-1} = i) =$
$= P(X_n = j / X_{n-1} = i)$;

D. Javoblar ichida to'g'risi yo'q.

16. Zarracha $[0,3]$ oraliqning butun nuqtalarida tasodifiy simmetrik daydiyotgan bo'lsin, bunda 0 va 3 nuqtalar yutib qoluvchi holatlar bo'lsa, bunga mos kelgan Markov zanjirining ahamiyatga molik holatlarini toping.

A. bunday holatlar yo'q B. 1 va 2-holatlar

C. hamma holatlar D. 0 va 3-holatlar.

17. Qanday zanjirga yoyilmaydigan Markov zanjiri deyiladi?

A. hamma holatlari ahamiyatga molik bo'lgan Markov zanjiriga;

B. bunday Markov zanjiri bo'lmaydi;

C. holatlari faqat bitta ahamiyatga molik bo'lgan holatlar sinfini tashkil qilgan Markov zanjiriga;

D. to'g'ri javob yo'q.

18. $\{w(t), t \geq 0\}$ – Viner jarayoni. $p(2,3;x,y)$ – ikki o'lchovli taqsimot zichligi topilsin.

A. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{3x^2-2xy+y^2}{4}\right\}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2-2xy+y^2}{4}\right\}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-(y-x)^2/8\right\}$ D. to'g'ri javob yo'q.

19. $\{\xi(t), t \in T\}$ jarayon bog'liqsiz orttirmali jarayon deyiladi, agar:

A. $t_0 \leq t_1 \leq t_2 ; t \in T$ uchun $\xi(t_1)-\xi(t_0), \xi(t_2)-\xi(t_1)$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa;

B. uning kesishmaydigan kesmalardan iborat bo'lgan orttirmalari o'zaro bog'liqsiz bo'lsa;

C. $\{\xi(t), t \in T\}$ tasodifiy miqdorlar sinfi bog'liqsiz bo'lsa;

D. to'g'ri javob yo'q.

20. Zarracha $[0,4]$ oraliqning butun nuqtalarida tasodifiy simmetrik daydiyotgan bo'lsin, bunda 0 va 4 nuqtalar yutib qoluvchi holatlar bo'lsa, bunga mos kelgan Markov zanjirining o'tish matritsasini yozing.

A. $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\{w(t), t \geq 0\}$ – Viner jarayoni. $w(3)-w(2)$ ning taqsimotini toping.

A. $N(0,1)$ B. $N(0,1)$ C. $N(2)-N(1)$ D. $\Pi(3)$.

22. Zarracha $[0,4]$ oraliqning butun nuqtalarida tasodifiy simmetrik daydiyotgan bo'lsin, bunda 0 va 4 nuqtalar yutib qoluvchi holatlar bo'lsa, bunga mos kelgan Markov zanjirining ahamiyatga molik bo'lmagan holatlarini toping.

A. 1, 2, 4   B. 1, 2, 3   C. 0, 4   D. 2, 3, 4.

23. $\{X_n, n=0,1,2,...\}$ – Markov zanjiri bir jinsli deyiladi, agar:

A. $P_{ij}(n)=P_{ij}(n-1)$ bo'lsa;

B. $P(X_n = j / X_{n-1} = i)$ shartli ehtimol n ga bog'liq bo'lmasa;

C. $\{X_n, n=0,1,2,...\}$ ketma-ketlik bir xil taqsimlangan bo'lsa;

D. javoblar ichida to'g'risi yo'q.

24. $\{\xi(t), t \geq 0\} - a$ parametrli Puasson jarayoni bo'lsin. $P(\xi(2)=0)$ hisoblansin.

A. e^{-2a} B. $\frac{e^{-1}}{2}$ C. $\frac{1}{2}e^{-a}a^2$ D. $\frac{e^{-a}a}{2}$

25. $\{\xi(t), t \in T\}$ va $\{\eta(t), t \in T\}$ tasodifiy jarayonlar stoxastik ekvivalent bo'lsa, u holda:

A. ularning chekli o'lchovli taqsimotlari bir xil bo'ladi va aksincha;

B. ularning trayektoriyalari ham bir xil;

C. ularning chekli o'lchovli taqsimotlari bir xil bo'ladi, teskarisi o'rinli emas;

D. yuqoridagi mulohazalar ichida to'g'risi yo'q.

VII BOB. STATISTIK MASALANING QO'YILISHI

1-§. Tanlanma tushunchasi. Tanlanma fazo

Statistik izlanish asosida kuzatilmalar, ya'ni statistik tajriba natijalari – sonli ma'lumotlar yotadi. Faraz qilaylik, biror tasodifiy tajribani kuzatish natijasida $x_1,\dots,x_n$ sonlar olingan bo'lib, ularni bog'liq bo'lmagan va bir xil taqsimlangan $X_1,\dots,X_n$ tasodifiy miqdorlarning qiymatlari deb qaraylik. U holda $x^{(n)}=(x_1,\dots,x_n)$ vektor $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ tasodifiy vektorning qiymati bo'ladi. Matematik statistikada $X_1,\dots,X_n$ tasodifiy miqdorlar n hajmga ega bo'lgan ***takroriy tanlanma*** yoki shunchaki ***tanlanma*** deb ataladi. Bunda $X^{(n)}$ vektor tanlanma yoki kuzatilayotgan tasodifiy vektor deb ham ataladi. O'z navbatida esa X_i tasodifiy vektorlarni biror ξ tasodifiy miqdorning har bir tajribadagi amaliy qiymati deb ham qaraymiz. Demak, kuzatilma deb qiymatlari biror $(\mathscr{X},\mathscr{B})$ o'lchovli fazoda bo'lgan $\xi=X_i$ tasodifiy miqdor tushunilar ekan. Boshqacha aytganda, biror $(\Omega,\mathscr{A},P)$ ehtimollar fazosi mavjud bo'lib, $\xi:(\Omega,\mathscr{A})\to(\mathscr{X},\mathscr{B})$-o'lchovli akslantirishdir. Bu yerda Ω – elementar hodisalar fazosi, $\mathscr{A}$ – hodisalar σ-algebrasi va P – ehtimollik. ξ tasodifiy miqdorning asosiy xarakteristikasi – uning $\mathscr{B}$ da aniqlangan quyidagi taqsimotidir: $P(B)=P(\xi\in B)$, $B\in\mathscr{B}$. Matematik statistikada P taqsimot noma'lum bo'lib, u biror ma'lum $\{P\}$ sinf (oila)ga tegishli deb hisoblanadi. Bu yerda $(\Omega,\mathscr{A},P)$ uchlik yordamchi rol o'ynaydi va uni ko'p usullar bilan tuzish mumkin. Masalan, $\Omega=\mathscr{X}$, $\mathscr{A}=\mathscr{B}$, $P(B)=P(B)$ va $\xi(\omega)=\omega$ desak, ξ tasodifiy miqdor $(\mathscr{X},\mathscr{B},P^{(n)})$ da aniqlangan bo'ladi. Demak, $X^{(n)}$ tanlanmani $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},P^{(n)})$ tanlanma fazodagi elementar hodisa deb qarash mumkin. Bu yerda $\mathscr{X}^{(n)}=\mathscr{X}\times\dots\times\mathscr{X}$, $\mathscr{B}^{(n)}$ to'plam $\mathscr{X}^{(n)}$ dagi to'plamlarning Borel σ-algebrasi, $P^{(n)}$ esa $X^{(n)}$ ning $B=B_1\times\dots\times B_n$ da aniqlangan taqsimoti va $B_i\in\mathscr{B}$. Qulaylik uchun keyinchalik $P^{(n)}$

taqsimotning yuqori indeksini tushirib qoldiramiz. Yuqoridagidan kelib chiqqan holda quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$P\left(X^{(n)} \in B\right) = P\left(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i).$$

Yuqorida aytilganlarni cheksiz hajmdagi tanlanma uchun ham o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Bu holda $X^{(\infty)}$ ni $X^{(\infty)}=(X_1, X_2, ...)$ ning $\mathscr{X}^{(\infty)}$ dagi proyeksiyasi deb tushunamiz va $X^{(\infty)}$ ga mos taqsimotning mavjudligi esa Kolmogorovning moslangan taqsimotlar haqidagi teoremasidan kelib chiqadi.

Biz yuqorida keltirgan tushunchalar ξ – tasodifiy vektor bo'lganida ham o'z kuchini saqlaydi. Demak, agar ξ – tasodifiy vektor bo'lsa, u holda $\mathscr{X} = R^{(m)}$, $m \geq 1$.

2-§. Empirik taqsimot. Glivenko-Kantelli teoremasi

Ma'lumki, ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x) = P(\xi \leq x)$, $x \in R$ orqali aniqlanadi. Har bir x da F noma'lum bo'lganligi sababli hodisalar ehtimollari turg'unligi xossasiga asoslangan holda $\{\xi \leq x\}$ hodisa ehtimolini $X^{(n)}$ tanlanma orqali uning nisbiy sanog'i bo'lgan $\widehat{F}_n(x)$ – empirik taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin. Empirik taqsimot funksiyani indikatorlar yordamida quyidagicha aniqlaymiz:

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\nu_n(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x), \ x \in R,$$

bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikatori belgilangan. Demak, $\nu_n(x)$ sanoq x dan katta bo'lmagan X_i lar sonini bildiradi. $\widehat{F}_n(x)$ funksiya $X_1, X_2, ..., X_n$ qiymatlarini $\frac{1}{n}$ ehtimol bilan (agar X_i lardan biror k tasi ustma-ust tushsa, u holda bu qiymatni $\frac{k}{n}$ ehtimol bilan) qabul qiluvchi diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidir. Har bir fiksirlangan x nuqtada $\widehat{F}_n(x)$ bir xil binomial taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetik qiymatidan iborat bo'lganligi uchun uning matematik kutilmasi va dispersiyasi quyidagicha aniqlanishini ko'rish qiyin emas:

$$M\widehat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MI(X_i\leq x)=F(x), \tag{1}$$

$$D\widehat{F}_n(x)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DI(X_i\leq x)=\frac{1}{n}F(x)\big(1-F(x)\big). \tag{2}$$

Demak, (2) ga asosan Chebishev tengsizligiga ko'ra, har bir x da $\widehat{F}_n(x)$ tasodifiy miqdor ketma-ketligi sifatida $F(x)$ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashar ekan:

$$\forall\varepsilon>0 \text{ uchun } P\left(|\widehat{F}_n(x)-F(x)|\geq\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{3}$$

Agar Borelning kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asoslansak, quyidagi kuchli da'voga ega bo'lamiz.

1-teorema. Tanlanma hajmi $n\to\infty$ da

$$\widehat{F}_n(x)\xrightarrow{1\ \text{eht}}F(x). \tag{4}$$

Bu yerda bir ehtimol bilan yaqinlashish ($\mathscr{X}^{(\infty)},\mathscr{B}^{(\infty)}, P$) uchlikdagi $P=P^{(\infty)}$ taqsimotga nisbatan tushuniladi.

Isboti. Empirik taqsimot funksiya aniqlashishiga ko'ra, $\widehat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i\leq x),\ x\in R$ ga teng. $n=k^2$ deb olsak, $\widehat{F}_{k^2}(x)=\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k^2}I(X_i\leq x)$ bo'ladi. Empirik taqsimotning (1) va (2) xossalariga ko'ra:

$$M\widehat{F}_{k^2}(x)=F(x);$$

$$P\left(|\widehat{F}_{k^2}(x)-F(x)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{k^2\varepsilon^2}F(x)(1-F(x))\leq\frac{1}{4k^2\varepsilon^2}; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

Bu yerda $k=k(n)$ va $n\to\infty$ da $k\to\infty$. (5) dan Borel-Kantelli lemmasiga asosan $\widehat{F}_{k^2}(x)\xrightarrow{1\ \text{eht}}F(x)$. $\forall k$, $k=k(n)$ uchun: $k^2\leq n<(k+1)^2=k^2+2k+1$, $0\leq n-k^2\leq 2k$ bo'ladi.

$$|\widehat{F}_n(x)-\widehat{F}_{k^2}(x)|=\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k^2}\right)\sum_{i=1}^{k^2} I(X_i\le x)+\frac{1}{n}\sum_{i=k^2+1}^{n} I(X_i\le x)\right|\le$$

$$\frac{n-k^2}{nk^2}k^2+\frac{n-k^2}{n}==\frac{2(n-k^2)}{n}\le\frac{4k}{n}\le\frac{4k}{k^2}=\frac{4}{k}\to 0.$$

Demak,

$$|\widehat{F}_n(x)-F(x)|\le|\widehat{F}_n(x)-\widehat{F}_{k^2}(x)|+|\widehat{F}_{k^2}(x)-F(x)|\le$$

$$\le\frac{4}{k}+|\widehat{F}_{k^2}(x)-F(x)|\xrightarrow{1\text{ eht}} 0.$$

(4) yaqinlashish har bir x nuqtada o'rinlidir. Ammo $\widehat{F}_n(x)$ taqsimot uchun yuqoridagi teoremadan ham kuchli bo'lgan da'vo, ya'ni (4) yaqinlashish aslida barcha $x\in R$ uchun tekis bajarilishi haqidagi quyidagi Glivenko-Kantelli teoremasi o'rinlidir.

2-teorema (Glivenko–Kantelli). Bir ehtimol bilan

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widehat{F}_n(x)-F(x)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Isboti. z_{jm} orqali x larning shunday eng kichik qiymatini belgilaymizki, $F(x-0)\le\frac{j}{m}\le F(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Quyidagi hodisalarni kiritamiz:

$$C_{jm}^{-}=\left\{\widehat{F}_n(z_{jm})\underset{n\to\infty}{\to}F(z_{jm})\right\},\ C_{jm}^{+}=\left\{\widehat{F}_n(z_{jm}+0)\underset{n\to\infty}{\to}F(z_{jm}+0)\right\},$$

1-teoremaga asosan $P(C_{jm}^{-})=P(C_{jm}^{+})=1$. Agar $C_{jm}=C_{jm}^{-}\cap C_{jm}^{+}$ desak, u holda $C_m=\bigcap_{j=1}^{m}C_{jm}=\left\{\sup_{1\le j\le m}\left|\widehat{F}_n(z_{jm}\pm 0)-F(z_{jm}\pm 0)\right|\underset{n\to\infty}{\to}0\right\}$, bu yerda $F(x+0)=F(x)$, $\widehat{F}_n(x+0)=\widehat{F}_n(x)$. Endi ikkilanganlik prinsipiga asoslansak,

$$P(\overline{C}_m)=P(\bigcup_{j=1}^{m}\overline{C}_{jm})\le\sum_{j=1}^{m}P(\overline{C}_{jm})=0.$$

Bu yerdan $P(C_m)=1$. Xuddi shu usul bilan $C=\bigcap_{m=1}^{\infty}C_m$ hodisa uchun $P(C)=1$ ekanini ko'rsatish mumkin. Endi $x\in(z_{jm},z_{j+1,m}]$ nuqtalar uchun

$$F\left(z_{jm}\right) \le F(x) \le F\left(z_{j+1\,m}\right),\ \widehat{F}_n\left(z_{jm}\right) \le \widehat{F}_n(x) \le \widehat{F}_n\left(z_{j+1\,m}\right)$$

va har bir $z_{jm}<z_{j+1,m}$ uchun $0 \le F\left(z_{j+1,m}\right)-F\left(z_{jm}\right)<\frac{1}{m}$. Demak,

$$\widehat{F}_n(x) - F(x) \le \widehat{F}_n\left(z_{j+1,m}\right) - F\left(z_{j+1}+0\right) \le \widehat{F}_n\left(z_{j+1,m}\right) - F\left(z_{j,m}\right) + \frac{1}{m}$$

va $\widehat{F}_n(x)-F(x) \ge \widehat{F}_n\left(z_{jm}\right)-F\left(z_{j+1,m}\right) \ge \widehat{F}_n\left(z_{jm}\right)-F\left(z_{jm}\right)-\frac{1}{m}$.

Bu yerdan ixtiyoriy m uchun

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widehat{F}_n(x)-F(x)\right| \le \sup_{1\le j\le m}\left|\widehat{F}_n\left(z_{jm} \pm 0\right) - F\left(z_{jm} \pm 0\right)\right| + \frac{1}{m}$$

ekani kelib chiqadi. Demak,

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widehat{F}_n(x)-F(x)\right|_{n\to\infty} \to 0\right) \ge P(C)=1.$$

Empirik taqsimot funksiyani $X^{(n)}$ tanlanma elementlari tartiblansa, hisoblash uchun qulay ko'rinishda ifodalash mumkin. Buning uchun tanlanmaning $X_1, X_2, \ldots, X_n$ elementlarini o'sish tartibida joylashtiramiz va qaytadan raqamlab chiqamiz, natijada biz quyidagi variatsion qator deb ataluvchi to'plamga ega bo'lamiz:

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}, \tag{6}$$

bu yerda $X_{(1)} = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$,

$$X_{(2)} = \max\left\{\min\{X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n\}, i=1,\ldots,n\right\},$$

$\ldots\ldots$

$$X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}.$$

(6) variatsion qatorni $X_{(i)}$ elementi i-tartiblangan statistika (yoki varianta) deyiladi. Bunday qatorni amalda olingan $x^{(n)}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ tanlanma elementlari uchun ham yozish mumkin:

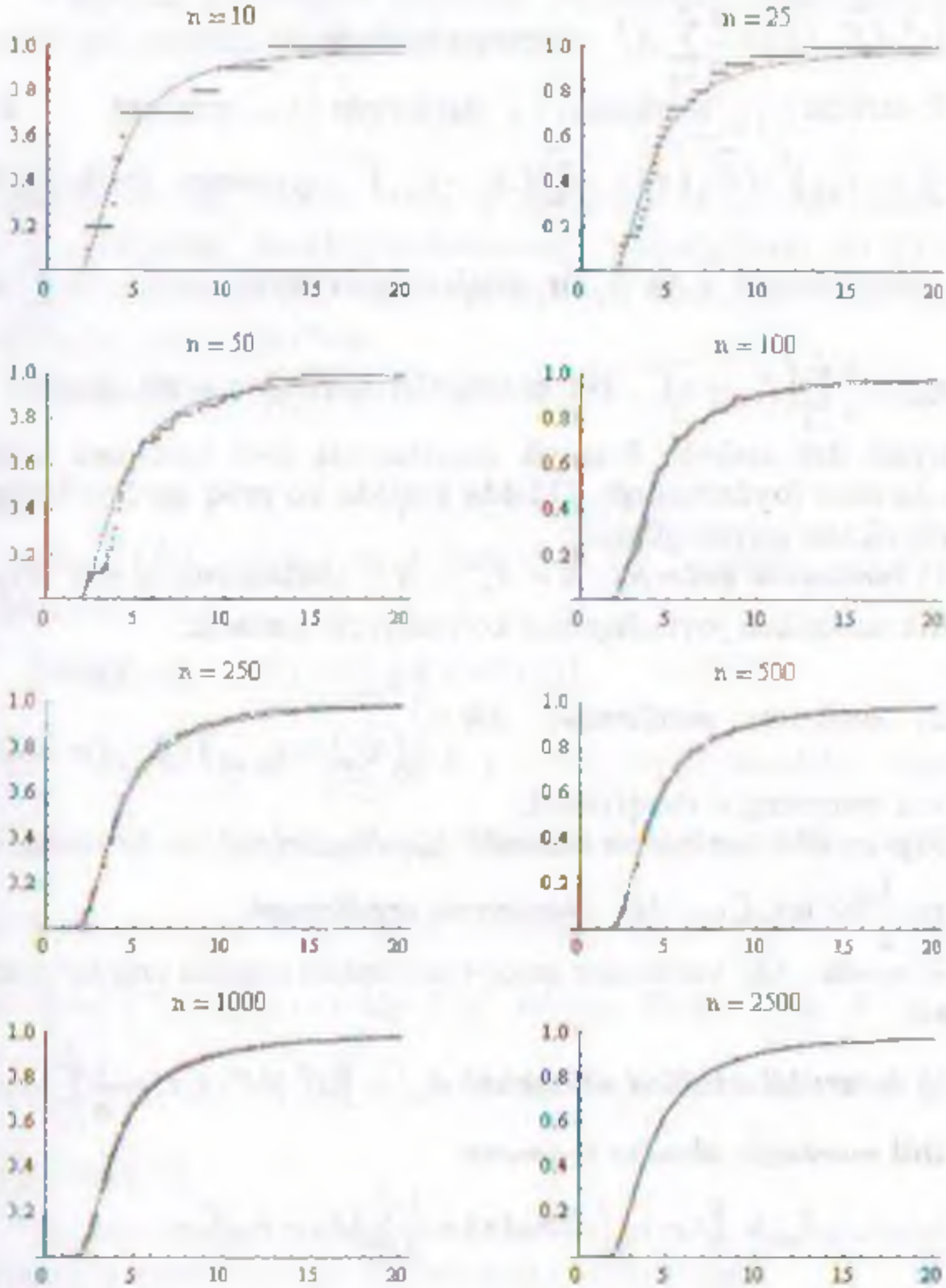
$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}. \tag{6'}$$

Endi (6') to'plam yordamida $\widehat{F}_n(x)$ ni boshqa ko'rinishda yoza olamiz:

$$\widehat{F}_n(x)=\begin{cases} 0, & x<x_{(1)}, \\ k/n, & x_{(k)} \le x < x_{(k+1)},\ k=1,\ldots,n-1, \\ 1, & x \ge x_{(n)}. \end{cases}$$

Demak, $\widehat{F}_n(x)$ grafigi zina shaklida siniq chiziqlardan iborat bo'lib, har bir $x_{(i)}$ nuqtada uning sakrash kattaligi $\frac{1}{n}$ ga teng ekan.

Tanlanma hajmi ortib borishi bilan empirik taqsimot funksiyaning nazariy taqsimot funksiya $F(x)$ga yaqinlashishi grafiklarini solishtirishdagi ko'rinishi quyidagi rasmda keltirilgan.



3-§. Tanlanma xarakteristikalar

$X^{(n)}$ tanlanmaning turli o'lchovli funksiyalari, xususan, empirik taqsimotga bog'liq bo'lgan o'lchovli funksionallar odatda ***tanlanma xarakteristikalari*** deyiladi. Ular orasida keng qo'llaniladiganlari ***tanlanma (empirik) momentlardir***.

k-tartibli boshlang'ich tanlanma moment deb, $\nu_{nk} = \int x^k d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ qiymatga aytiladi.

k-tartibli markaziy tanlanma moment deb, $m_{nk} = \int (x-\nu_{n1})^k d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\nu_{n1})^k$ qiymatga aytiladi. ν_{n1} va m_{n2} larni maxsus $\overline{x}$ va S^2 lar orqali belgilaymiz: $\overline{x} = \nu_{n1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = m_{n2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2$. Bu momentlar tanlanma o'rta qiymati va dispersiyasi deb ataladi. Statistik masalalarda turli tanlanma xarakteristikalaridan foydalaniladi. Odatda amalda ko'proq qo'llaniladigan xarakteristikalar quyidagilardir:

1) ***tanlanma qulochi***: $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ tanlanmaning son o'qida qanchalik uzoqlikda joylashganini ko'rsatuvchi kattalik;

2) ***tanlanma medianasi***: $Me = \begin{cases} x_{(m)}, & n = 2m-1; \\ \left(x_{(m)} + x_{(m+1)}\right)/2, & n = 2m; \end{cases}$ – variatsion qatorning o'rta qiymati;

3) ***p-tartibli tanlanma kvantili***: $\zeta_{(p)}=X_{(l)}$, $l=[np]+1$. Xususan, n – toq va $p=\frac{1}{2}$ bo'lsa, $\zeta_{(1/2)}=Me$ – ***tanlanma medianasi;***

4) ***moda***: Mo variatsion qator elementlari orasida eng ko'p uchraydigani.

5) ***k-tartibli absolut moment***: $d_{nk} = \int |x|^k d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|^k$;

k**-tartibli *markaziy absolut moment***:

$$\delta_{nk} = \int |x-\nu_{n1}|^k d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \nu_{n1}|^k .$$

6) ***variatsiya koeffitsiyenti***: $V = \frac{S}{\bar{x}} 100\%$, bu yerda $S = \sqrt{S^2}$.

7) ***asimmetriya***: $As = \frac{m_{n3}}{S^3}$.

8) ***eksses***: $E = \frac{m_{n4}}{S^4} - 3$.

Yuqorida keltirilgan tanlanma momentlar umumlashmalarini ham ko'rish mumkin. Bulardan biri

$$\hat{\mu}_n(\hat{F}_n) = h\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\hat{F}_n(x)\right) = h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right)$$

funksionali bo'lib, bunda h va g lar biror o'lchovli funksiyalar. Quyida tanlanma xarakteristikalarning yaqinlashishi to'g'risidagi teoremani keltiramiz. $X^{(n)}$ tanlanma taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin.

3.1-teorema. $\hat{\mu}_n(\hat{F}_n)$ uchun $n \to \infty$ da quyidagi munosabat o'rinli

$$\hat{\mu}_n(\hat{F}_n) \xrightarrow{1\ \text{eht}} \mu(F).$$

Bu yerda $\mu(F)$ mavjud va h funksiya MX_1 nuqtada uzluksiz deb hisoblanadi.

Isboti. $\mu(F) = h\left(\int g(x) dF(x)\right)$ bo'lsin, u holda $S(\hat{F}_n) = \int g(x) d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$ – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisi va uning matematik kutilmasi $Mg(X_1) = \int g(x) dF(x)$ ga teng. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan $S(\hat{F}_n) \xrightarrow{1\ \text{eht}} Mg(X_1)$. Agar $A = \left\{X^{(n)} : S(\hat{F}_n) \to Mg(X_1)\right\}$ bo'lsa, $P(A)=1$ va $X^{(n)} \in A$ da $S(\hat{F}_n) \to Mg(X_1)$, $h\left(S(\hat{F}_n)\right) \to h\left(Mg(X_1)\right)$. Demak, A to'plamda $\hat{\mu}_n(\hat{F}_n) \to \mu(F)$.

Bu teoremadan tanlanma momentlari $n \to \infty$ da 1 ehtimol bilan mos nazariy momentlariga yaqinlashishi kelib chiqadi:

$$\nu_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{1 eht}} MX_1^k;\ m_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k \xrightarrow{\text{1eht.}} M\left(X_1 - MX_1\right)^k.$$

Xususan, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{1eht.}} MX_1$; $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2 \xrightarrow{\text{1eht.}} DX_1$.

VII BOBGA DOIR MASALALAR

1. Tavakkaliga tanlangan 30 ta talabalarning bo'y uzunliklaridan iborat quyidagi tanlanma berilgan:

178	160	154	183	155	153	167	186	155	163
157	175	170	166	159	173	182	167	169	171
179	165	156	179	158	171	175	173	172	164

Ushbu tanlanma uchun interval variatsion qator tuzing.

2. Chastotali taqsimoti berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini toping:

a)

X_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

b)

X_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

3. Quyidagi tanlanma uchun:

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	8	14	20	25	30	24	16	12	7	4

nisbiy chastotali gistogramma yasang.

4. Quyidagi tanlanma uchun:

X_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	4	5	6	5	2	1

poligon yasang.

5. Quyidagi tanlanmaning o'rta qiymati va dispersiyasini hisoblang:

Interval chegarasi	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46
n_i	2	3	30	40	20	5

6. Agar har bir variantani: a) d songa kattalashtirilsa (yoki kichiklashtirilsa); b) k marta kattalashtirilsa (yoki kichiklashtirilsa) tanlanma o'rta qiymati va dispersiyasi qanday o'zgaradi?

7. Talabalardan 24 savoldan iborat test sinovi o'tkazildi. Ushbu test natijalariga ko'ra talabalar quyidagicha taqsimlanishdi:

To'g'ri javoblar soni	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Talabalar soni	2	4	8	12	16	10	3

Tanlanma sonli xarakteristikalarini hisoblang.

8. $X_1,...,X_n$ tanlanma $R[\theta_1;\theta_2]$ taqsimotdan olingan bo'lsa, $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ statistika uchun $M\overline{x}$, $D\overline{x}$ larni hisoblang.

9. $X_1,...,X_n$ tanlanma $N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$ taqsimotdan olingan bo'lsa, $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ statistika uchun $M\overline{x}$, $D\overline{x}$ larni hisoblang.

10. $X_1,...,X_n$ tanlanma $R[\theta_1;\theta_2]$ taqsimotdan olingan bo'lsa, $X_{(1)}=\min\{X_1,...,X_n\}$ statistika uchun $MX_{(1)}$, $DX_{(1)}$ larni hisoblang.

11. $X_1,...,X_n$ tanlanma $R[\theta_1;\theta_2]$ taqsimotdan olingan bo'lsa, $X_{(n)}=\max\{X_1,...,X_n\}$ statistika uchun $MX_{(n)}$, $DX_{(n)}$ larni hisoblang.

12. $X_1,...,X_n$ tanlanma $N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$ taqsimotdan olingan bo'lsa, $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{x}\right)^2$, $\overline{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{x}\right)^2$ statistikalar uchun MS^2, $M\overline{S}^2$ larni hisoblang.

VIII BOB. NOMA'LUM PARAMETRLARNI BAHOLASH

1-§. Statistik model. Statistika

Ma'lumki, $X^{(n)}$ tanlanma $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)})$ o'lchovli fazoni yaratadi. $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)})$ fazoda taqsimotlarning $\{P\}$ oilasi aniqlangan bo'lib, har bir fiksirlangan P taqsimotda $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}, P)$ uchlik ***tanlanma fazo*** deb ataladi.

1-ta'rif. $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}, \{P\})$ uchlik statistik model deb ataladi.

Agar $\{P\}$ oila parametrlashtirilgan, ya'ni biror noma'lum vektor yoki skalyar parametr θ aniqligida $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\})$ uchlik ***parametrik statistik model*** deb ataladi.

Umuman, parametrni mos ravishda tanlash yordamida taqsimotlarning $\{P\}$ oilasini har doim parametrlashtirish mumkin. Shu sababli, biz asosan parametrik statistik modellarni ko'ramiz.

$(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}, \{P_\theta, \theta\in\Theta\})$ modelni ko'raylik. Agar barcha $\theta\in\Theta$ parametrlar uchun P_θ o'lchovlar μ o'lchovga nisbatan absolut uzluksiz bo'lsa, ya'ni $\mu(B)=0$ ekanidan $P_\theta(B)=0$, $\theta\in\Theta$ ekanligi kelib chiqsa, $\mathscr{B}$ da aniqlangan σ-chekli μ o'lchov taqsimotlarning $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ oilasini dominirlaydi deyiladi. Bu holda Radon-Nikodim teoremasiga ko'ra μ ga nisbatan $f(x,\theta)=\dfrac{dP_\theta}{d\mu}(x)$ taqsimot zichliklari mavjud va barcha $B\in\mathscr{B}$ lar uchun

$$P_\theta(B)=\int_B f(x,\theta)\mu(dx).$$

Biz μ o'lchov sifatida yoki Lebeg o'lchovini (absolut uzluksiz taqsimotlar uchun) yoki sanoqli o'lchovni (diskret taqsimotlar uchun) ishlatamiz. Bunday xossaga ega bo'lgan P_θ va μ o'lchovlar uchun biz $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}\ll\mu$ belgini ishlatamiz. $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ oila uchun dominant o'lchovlarni ko'p usullar bilan tanlash mumkin. Masalan, agar μ_1 va μ_2

shunday o'lchovlar bo'lsa, u holda mos $f_1(x,\theta)$ va $f_2(x,\theta)$ zichliklar θ ga bog'liq bo'lmagan ko'paytmagagina farq qiladi:

$$\frac{dP_\theta}{d(\mu_1+\mu_2)}(x)=f_1(x;\theta)\frac{d\mu_1}{d(\mu_1+\mu_2)}(x)=f_2(x;\theta)\frac{d\mu_2}{d(\mu_1+\mu_2)}(x).$$

Statistik izlanishlar uchun bunday o'lchovlardan qaysi birini tanlash ahamiyatga ega emas.

$\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\ll\mu$ bo'lsin. U holda $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)})$da aniqlangan $\{P_\theta=P_\theta^{(n)},\theta\in\Theta\}$ o'lchovlar oilasi $\mathscr{B}^{(n)}$ dagi $\mu^{(n)}=\mu\times\cdots\times\mu$ o'lchovga nisbatan absolut uzluksiz bo'lib, uning ehtimollik zichlik funksiyalari oilasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{dP_\theta^{(n)}}{d\mu^{(n)}}(x^{(n)})=f_n(x^{(n)};\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);\ (x^{(n)},\theta)\in\mathscr{X}^{(n)}\times\Theta.\ (1)$$

Bizga ihtiyoriy $(\mathscr{Y},\mathscr{U})$ o'lchovli fazo berilgan bo'lsin.

2-Ta'rif. $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P\})$ statistik modeldagi ihtiyoriy $T:(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)})\to(\mathscr{Y},\mathscr{U})$ o'lchovli akslantirish ***statistika*** deyiladi.

Demak, tanlanmaning ihtiyoriy o'lchovli $T=T(X^{(n)})$ funksiyasi statistika bo'lar ekan. O'z navbatida T statistika $(\mathscr{Y},\mathscr{U},\{Q\})$ - statistik modelni yaratadi. Bu yerda $Q(A)=P(T^{-1}(A))$ – T-statistika yaratgan taqsimot, $A\in\mathscr{U}$. Masalan, variatsion qator $(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$ statistika bo'ladi.

3-Ta'rif. $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta\ ,\ \theta\in\Theta\ \}),\Theta\subset R^{(s)}$ ***eksponensial statistik model*** deb ataladi, agar $f(x,\theta)$, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_s)$ zichlik funksiyasi ko'rinishi umumiy o'lchov μ uchun quyidagicha bo'lsa:

$$f(x,\theta)=h(x)\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}A_i(\theta)t_i(x)+B(\theta)\right\}.\qquad(2)$$

(1) va (2) tengliklardan ko'rinadiki, $X^{(n)}$tanlamaga mos kelgan zichlik funksiya ham eksponensial oilani tashkil etadi:

$$f_n(x^{(n)};\theta)=h_n(x^{(n)})\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}A_i(\theta)T_i(x^{(n)})+nB(\theta)\right\},\qquad(3)$$

bu yerda $h_n(x^{(n)})=\prod_{i=1}^{n}h(x_i)$; $T_i(x^{(n)})=\sum_{j=1}^{n}t_i(x_j)$. (3) model uchun $T=(T_1,\ldots,T_n)$ statistikaga misol bo'la oladi.

Misollar.

1. $\mathscr{X}^{(n)}=R^{(n)}$, $\mathscr{B}^{(n)}$ esa $R^{(n)}$ dagi Borel to'plamlari σ-algebrasi va $P=P_F$ taqsimot quyidagi n o'lchovli $F(x_1),...,F(x_n)$ taqsimot funksiyasi bilan aniqlanadi. Agar biz bir o'lchovli F taqsimot funksiyasidan uzluksizlik, simmetriklik, ... kabi biror xossalarni talab qilsak, $\{P_F\}$ sinf taqsimotlarning parametrlashtirilmagan (yoki noparametrik) oilasini hosil qiladi. Demak, ($R^{(n)}$, $\mathscr{B}^{(n)}$, $\{P_F\}$) statistik model bo'ladi.

2. $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ oila zichlik funksiyasi α – siljish va σ – masshtab parametrlari bilan berilgan bo'lsin:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sigma}p\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right),\ \theta=(\alpha,\sigma)\in\Theta.$$

Bu yerda $p(x)$ berilgan zichlik funksiya, $\sigma>0$, $-\infty<x<\infty$, $\Theta\in R\times(0,\infty)$. Bunday taqsimotlarga $N(\alpha,\sigma^2)$-normal taqsimotlar oilasi misol bo'la oladi. Bu oilaning $\mathscr{X}^{(n)}=R^{(n)}$ dagi zichlik funksiyasi ko'rinishi:

$$f_n(x^{(n)};\theta)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\alpha}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\alpha^2}{2\sigma^2}-n\ln\sigma\right\}. \quad (4)$$

Demak, (3) ga asosan normal taqsimotlar oilasi eksponensial oilaga misol bo'lar ekan.

3. 1-misoldagi $\{P_F\}$ taqsimotlar oilasi absolyut uzluksiz bo'lib, $f=F'$ – zichlik funksiyasi bo'lsin. $T(X^{(n)})=\left(X_{(1)},\dots,X_{(n)}\right)$ statistika variatsion qatordan iborat bo'lsin. U holda T statistika yaratgan $\{Q\}$ taqsimotlar oilasi quyidagi zichlik funksiyasi bilan beriladi:

$$q(t^{(n)})=\begin{cases} n!\prod_{j=1}^{n}f(t_j), & t_1\le...\le t_n, \\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases} \quad (5)$$

2-§. Statistik baholash masalasining qo'yilishi. Talofat va risk funksiyasi

$\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\left\{P_\theta^{(n)},\theta\in\Theta\right\}\right)$ statistik model va $\varphi(\theta):(\Theta,\mathfrak{B})\to(\mathscr{M},\mathscr{N})$ o'lchovli funksiya bo'lsin. Noma'lum parametr θ ni $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ tanlanma bo'yicha baholash masalasini ko'ramiz. $\varphi(\theta)$ uchun baho sifatida qiymatlari to'plami $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ bo'lgan tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $T(X^{(n)})$ ni olish mumkin. $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ to'plamda aniqlangan $W(u,v)$ – musbat va haqiqiy qiymatlarni qabul qiluvchi funksiya bo'lsin.

$\varphi(\theta)$ning o'rniga uning bahosi $T(X^{(n)})$dan foydalanganda ma'lum yo'qotish (talofat)ga yo'l qo'yamiz. Bunday yo'qotish $W(T(X^{(n)}),\theta)$ni ***talofat funksiyasi*** deyiladi. Talofat funksiyasini turli ko'rinishlarda berish mumkin. Quyida ularning ayrim ko'rinishlari keltirilgan:

$W(T(X^{(n)}),\theta)=\left(T(X^{(n)})-\theta\right)^2$ – kvadratik talofat;

$W(T(X^{(n)}),\theta)=\left|T(X^{(n)})-\theta\right|$ – absolyut talofat;

$W(T(X^{(n)}),\theta)=\left|T(X^{(n)})-\theta\right|^p$ – L_p talofat;

agar $\theta=T(X^{(n)})$ bo'lsa, $W(T(X^{(n)}),\theta)=0$, yoki agar $\theta\neq T(X^{(n)})$ bo'lsa, $W(T(X^{(n)}),\theta)=1$ – nol-bir talofat;

$W(T(X^{(n)}),\theta)=I\left(\left|T(X^{(n)})-\theta\right|>c\right)$ – katta tarqoqlik talofati;

$W(T(X^{(n)}),\theta)=\int\ln\left(\frac{f(x,\theta)}{f(x;T)}\right)f(x;\theta)dx$ – Kulbak-Leybler talofati.

Yuqorida keltirilgan talofatlar funksiyalari orasida kvadratik talofat funksiyasi ko'p qo'llaniladi.

Statistik baholash nazariyasida quyidagi xossalarni qanoatlantiruvchi talofat funksiyalaridan foydalaniladi:

1) $W(u,v)=w(u-v)$;

2) $w(u)$ funksiya R^s da aniqlangan va manfiy emas, bu yerda s – parametrik to'plam o'lchami;

3) w funksiya simmetrik: $w(-u)=w(u)$;

4) barcha $c>0$ uchun $\{u: w(u)<c\}$ to'plam qavariq.

Bunday $w(u)$ funksiya ham talofat funksiyasi deyiladi.

Talofat funksiyasi $W(T(X^{(n)}),\theta)$ ning matematik kutilmasi

$$R_W(T,\theta)=M_\theta\big(W(T(X^{(n)}),\theta)\big) \qquad (1)$$

risk (tavakkallik) funksiyasi deyiladi.

Risk funksiyasi yordamida $\varphi(\theta)$ uchun baholarni tartiblash mumkin: agar $\forall\theta\in\Theta$ uchun $R_W(T_1,\theta)\le R_W(T_2,\theta)$ bo'lsa, T_1 baho T_2 ga nisbatan afzalroq bo'ladi.

3-§. Yetarli statistikalar

$(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\})$ – statistik model va $\mathscr{X}^{(n)}$ dagi P_θ taqsimot yordamida tuzilgan $P_\theta\{X^{(n)}\in B/T(X^{(n)})\}$ shartli taqsimot bo'lsin, $B\in\mathscr{B}^{(n)}$.

4-ta'rif. Agar $P_\theta(X^{(n)}\in B/T)$ shartli taqsimotning θ ga bo'g'liq bo'lmagan varianti mavjud bo'lsa, u holda $T(X^{(n)})$ statistika $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila (yoki θ parametr) uchun ***yetarli statistika*** deyiladi.

Demak, T yetarli statistika bo'lsa, $T=t$ sirtda aniqlangan shartli taqsimot θ ga bog'liq bo'lmas ekan. Bu esa o'z navbatida θ parametr haqidagi barcha ma'lumot T statistika qiymatida ekanini anglatadi. Amalda, agar biz noma'lum P_θ taqsimot haqida biror xulosa qilmoqchi bo'lsak, buning uchun katta hajmdagi $X^{(n)}$ tanlanma o'rniga yetarli statistikani qo'llashimiz mumkin. Tabiiyki, yetarli statistika o'lchami tanlanma o'lchami n ga nisbatan kichik bo'lishi zarur. Biz yuqorida yetarli statistika uchun keltirilgan ta'rif parametrlashtirilmagan taqsimotlar oilasi uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

Misollar.

1. 1-§ ning 3-misolidagi variatsion qator yetarli statistika bo'ladi. Haqiqatan,

$$f(x^{(n)}/T(x^{(n)})=t^{(n)})=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}, & \text{agar } x^{(n)} \text{ nuqta } t^{(n)}=(t_1,\dots,t_n) \text{ning} \\ & \text{biror o'rin almashtirishidan iborat bo'lsa;} \\ 0, & \text{aks holda,}\end{cases}$$

Ya'ni tenglikning o'ng tomoni f ga bog'liq emas. Demak, $T=\left(X_{(1)},\dots,X_{(n)}\right)$ yetarli statistika bo'ladi.

2. $X^{(n)}$ tanlanma θ parametrli Puasson taqsimotidan olingan bo'lsin. U holda $\theta \in \Theta = (0,\infty)$ uchun

$$f_n(x^{(n)};\theta) = \frac{1}{e^{n\theta}} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}, \tag{2}$$

bu yerda $x_i = 0,1,\dots$; $i=1,\dots,n$. Puasson taqsimoti ushun $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ yetarli statistika ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun $X^{(n)}$ vektorning $\sum_{i=1}^{n} x_i = t$ sirtdagi taqsimoti θ ga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Quyidagi shartli ehtimolni hisoblaymiz:

$$P_\theta\left(X^{(n)}=x^{(n)} \Big/ T(X^{(n)})=t \right) = \frac{P_\theta(X^{(n)}=x^{(n)}, T(X^{(n)})=t)}{P_\theta(T(X^{(n)})=t)} = \frac{P_\theta(X^{(n)}=x^{(n)})}{P_\theta(T(X^{(n)})=t)} =$$

$$= \frac{P_\theta(X_1=x_1)\dots P(X_n=x_n)}{P_\theta(\sum_{i=1}^{n} X_n=t)} = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}\right)^{-1} e^{-n\theta}\theta^t \prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i!}, & \sum_{i=1}^{n} x_i = t, \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i \neq t, \end{cases} =$$

$$= \frac{t!}{n^t \prod_{i=1}^{n} x_i!} I\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = t\right)$$

Oxirgi ifoda θ ga bog'liq emas. Demak, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ statistika θ uchun yetarli statistika ekan.

Yetarli statistikasining mavjudligini Neyman-Fisherning quyidagi ***faktorlashtirish teoremasi*** yordamida osongina tekshirish mumkin. $\{P_\theta, \theta \in \Theta\} \ll \mu$ bo'lsin.

1-teorema. T statistika θ parametr uchun yetarli statistika bo'lishi uchun $f_n(x^{(n)};\theta)$ zichlik funksiyasining $\mu^{(n)}$ o'lchovga nisbatan deyarli hamma yerda quyidagicha ifodalanishi zarur va yetarlidir:

$$f_n(x^{(n)};\theta) = \Psi_n(T(x^{(n)};\theta))h_n(x^{(n)}). \tag{3}$$

Bu yerda $\Psi_n \geq 0, h_n \geq 0$ funksiyalar mos ravishda $\mathscr{Y}$ va $\mathscr{B}^{(n)}$da $\mathscr{U}$ va $\mathscr{B}^{(n)}$-o'lchovli va faqat o'z argumentlariga bog'liq funksiyalardir.

Ishoti. Biz faqat diskret va absolut uzluksiz hollarni ko'ramiz. Diskret holda $\mathscr{X}^{(n)}$-sanoqli ($\mu^{(n)}$-sanovchi o'lchov) va $f_n(x^{(n)};\theta) = P_\theta(X^{(n)} = x^{(n)})$. Biror T-statistika uchun $P_\theta\left(T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})\right) > 0$ bo'lib, (2) tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $\left\{X^{(n)} = x^{(n)}, T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})\right\} = \left\{X^{(n)} = x^{(n)}\right\}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$P_\theta\left(X^{(n)} = x^{(n)} \Big/ T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})\right) = \frac{P_\theta(X^{(n)} = x^{(n)})}{P_\theta\left(T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})\right)} =$$

$$= \frac{f_n(x^{(n)};\theta)}{\sum\limits_{\{y^{(n)}: T(y^{(n)}) = T(x^{(n)})\}} f_n(y^{(n)};\theta)} = \frac{h_n(x^{(n)})}{\sum\limits_{\{y^{(n)}: T(y^{(n)}) = T(x^{(n)})\}} h_n(y^{(n)})}.$$

Oxirgi ifoda θ ga bog'liq emas. Demak, T – yetarli statistika bo'ladi. Aksincha, T – yetarli statistika bo'lsin. U holda

$$f_n(x^{(n)};\theta) = P_\theta(X_n = x^{(n)}, T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})) =$$

$$= P_\theta\left(X^{(n)} = x^{(n)} \Big/ T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})\right) P_\theta\left(T(X^{(n)}) = T(x^{(n)})\right).$$

Shartli ehtimol θ ga bog'liq emas. Uni $h_n(x^{(n)})$ orqali va 2- ehtimolni $\Psi_n\left(T(x^{(n)});\theta\right)$ orqali belgilasak, (3) o'rinli bo'ladi.

Endi absolut uzluksiz bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $f_n\left(x^{(n)},\theta\right)$ funksiya $\mathscr{X}^{(n)}$dagi $\mu^{(n)}$-Lebeg o'lchoviga nisbatan zichlik funksiya bo'ladi. Faraz qilaylik. $T = \left(X_1, \ldots, X_r\right)$, $r \leq n$ ($r > n$ bo'lgan hol ma'noga ega emas) bo'lsin. $\mathrm{X}^{(n)}$da aniqlangan biror $S = \left(S_1, \ldots, S_{n-r}\right)$ statistika tanlab $\left(T_1, \ldots, T_r, S_1, \ldots, S_{n-r}\right)$-vektor statistika uchun quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilamiz:

$$x^{(n)} = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \leftrightarrow \left(T_1(x^{(n)}), \ldots, T_r(x^{(n)}), S_1(x^{(n)}), \ldots, S_{n-r}(x^{(n)})\right)$$

almashtirish o'zaro bir qiymatli bo'lib, T va S ning birgalikdagi $g_\theta^{T,S}(u,v)$ zichlik funksiyasi mavjud bo'lsin. U holda, ma'lumki, $X^{(n)}$ va (T,S) ning zichlik funksiyalari uchun

$$|J|\cdot f_n(x^{(n)},\theta)=g_\theta^{T,S}\left(T(x^{(n)}),S(x^{(n)})\right), \qquad (4)$$

tenglik o'rinlidir. Bu yerda $J\neq 0$ – almashtirish yakobiani. Endi S ning T sharti ostida zichlik funksiyasi, mahraji 0 dan farqli deb faraz qilsak,

$$P_\theta^{S/T=t}(v_1,\dots,v_{n-r})=\frac{g_\theta^{T,S}(t_1,\dots,t_r,v_1,\dots,v_{n-r})}{\int g_\theta^{T,S}(t_1,\dots,t_r,v_1',\dots,v_{n-r}')dv_1'\dots d_{n-r}'}, \qquad (5)$$

tenglik bilan aniqlanadi. (3) o'rinli bo'lsin. U holda (4) va (5) tengliklardan

$$P_\theta^{S/T=t}(v)=\frac{\Psi_n(t;\theta)h_n(x^{(n)})|J|}{\int\Psi_n(t;\theta)h_n(x^{(n)})|J|dv'}=\frac{h_n(x^{(n)})|J|}{\int h_n(x^{(n)})|J|dv'}.$$

Oxirgi ifoda θ ga bog'liq emas. Demak, S ning va o'z navbatida $X^{(n)}$ning T ga nisbatan shartli taqsimoti θ ga bog'liq emas. Bu esa T – yetarli statistika ekanini anglatadi.

Aksincha, T – yetarli statistika bo'lsa, $P_\theta^{S/T}$ θ ga bog'liq bo'lmaydi. Bu holda

$$f(x^{(n)};\theta)=\left[|J|\right]^{-1}\cdot P_\theta^{S/T=t}(v)\int g_\theta^{T,S}(t,v')dv'.$$

Endi bu ifodadagi integralni $\Psi'_n(t;\theta)$ orqali va qolgan kasrni $h_n(x^{(n)})$ orqali belgilasak, (2) ifoda hosil bo'ladi.

Misollar.

3. 8-bobning 1-§ dagi (3) formuladan ko'rinadiki, eksponensial model uchun $T=(T_1,\dots,T_k)$ statistika yetarli statistika bo'lar ekan. Demak, (3) ifodani qanoatlantiruvchi Puasson, Bernulli, normal, masshtab parametri bilan berilgan ko'rsatkichli va shu kabi eksponensial oilalar uchun biz faktorlashtirish teoremasiga asosan yetarli statistikani osongina aniqlashimiz mumkin. Masalan, (4) ga asosan normal taqsimotning θ=(α,σ^2) parametri uchun $T=\left(\sum_{i=1}^n X_i,\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ vektor yetarli statistika bo'lar ekan.

4. (θ_1,θ_2) oraliqdagi tekis taqsimot zichlik funksiyasi:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1<x<\theta_2;\ |\theta_i|<\infty,\ i=1,2,\\ 0, & x\le\theta_1,\ x\ge\theta_2.\end{cases}$$

Tanlanma zichlik funksiyasini variatsion qatorning $X_{(1)},...,X_{(n)}$ elementlari va indikator funksiyasi yordamida quydagicha ifodalash mumkin:

$$f_n(x^{(n)};\theta)=(\theta_2-\theta_1)^{-1}I(\theta_1\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le\theta_2).$$

Demak, (2) ga asosan $f_n(x^{(n)};\theta)=\Psi_n(x_{(1)},x_{(n)};\theta)$, $h_n(x^{(n)})=1$ va $T=(X_{(1)},X_{(n)})$ vektor $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ uchun yetarli statistika bo'ladi.

5. (5) formuladan ko'rinadiki, zichlik funksiyaga ega bo'lgan ixtiyoriy taqsimot uchun $T_1=(X_{(1)},...,X_{(n)})$ variatsion qator yetarli statistika bo'lar ekan. Uni odatda trivial yetarli statistika deb ataladi. Umuman, $T_2=X^{(n)}$ tanlamaning o'zi ham ixtiyoriy taqsimot uchun trivial yetarli statistika bo'ladi va shu sababdan T_1 va T_2 lar ekvivalent bo'ladi. Shunday taqsimotlar ham borki, ular uchun T_1 yoki T_2 dan boshqa yetarli statistika mavjud emas. Masalan, $\theta=(\alpha,\sigma^2)$ parametrli quyidagi Koshi:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\pi\sigma}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)^2},\ |x|<\infty,\ \theta\in\Theta=R\times(0,\infty)$$

taqsimoti uchun (2) tenglik $f_n(x^{(n)};\theta)=\Psi_n(x^{(n)};\theta)$, $h_n(x^{(n)})=1$ bo'lgan holdagina o'rinli bo'ladi. Xususan, agar $\alpha=0$ va $\theta=\sigma^2$ bo'lsa, u holda $f(x;\theta)=f(-x;\theta)$, ya'ni taqsimot simmetrik bo'ladi va (2) tenglikdan $T=(X_1^2,...,X_n^2)$ yetarli statistika ekanligi kelib chiqadi.

4-§. Mukammal, ozod va minimal yetarli statistikalar

1-ta'rif. $(\mathcal{Y},\mathcal{G})$ o'lchovli fazoda aniqlangan $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ taqsimotlar oilasi ***mukammal*** deb ataladi, agar ixtiyoriy $\mathcal{G}$ o'lchovli *φ(y)* funksiya uchun

$$\int\varphi(y)Q_\theta(dy)=0,\theta\in\Theta,\qquad(1)$$

tenglikdan $\{Q_\theta\}$ ga nisbatan deyarli hamma yerda $\varphi(y)=0$ ekanligi kelib chiqsa.

2-ta'rif. $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\})$ statistik modelda aniqlangan, $T:(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)})\to(\mathscr{U},\mathscr{Y})$ statistika ***mukammal*** deb ataladi, agar uning

$$Q_\theta(A)=P_\theta(x^{(n)}:T(x^{(n)})\in A),\ A\in U,$$

ehtimollar taqsimotlari oilasi mukammal bo'lsa.

Agar 1-ta'rifda φ funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda $\{Q_\theta\ ,\theta\in\Theta\}$ oila ***chegaralangan mukammal*** deb aytiladi.

1-ta'rif $(T_1,...,T_k)$ – vektor statistika va $\theta=(\theta_1,...,\theta_s)$ – vektor parametrlar uchun ham o'rinlidir. Odatda $k\geq s$ bo'ladi. $(\mathscr{U},\mathscr{Y})=(R^{(k)},\mathscr{B}^{(k)})$ va $\varphi:R^{(k)}\to R^{(s)}$-o'lchovli funksiya bo'lsin. Bu holda (1) tenglik vektor ko'rinishda bo'ladi.

Ko'p hollarda $\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}\right)$dagi $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila mukammal emas, ammo T statistika orqali hosil bo'lgan $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila mukammal bo'ladi.

3-ta'rif. $B\in\mathscr{B}^{(n)}$ to'plam $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ oilaga nisbatan ***ozod*** deb aytiladi, agar $P_\theta(B)$ taqsimot θ ga bog'liq bo'lmasa.

4-ta'rif. Agar $T:\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}\right)\to(\mathscr{Y},\mathscr{U})$ statistikaning taqsimoti θ ga bog'liq bo'lmasa, ya'ni $\left\{x^{(n)}:T\left(x^{(n)}\right)\in A\right\}$ to'plam ozod bo'lsa, u holda $T:\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}\right)\to(\mathscr{Y},\mathscr{U})$ statistika ***ozod*** deb aytiladi.

Demak, ozod statistika noma'lum θ parametr haqida hech qanday ma'lumotga ega bo'lmas ekan. Aksincha, yetarli statistika esa θ haqida $X^{(n)}$da qancha malumot bo'lsa, o'shancha ma'lumotga ega bo'lar ekan.

Misollar.

1. $\theta\in\Theta=(0.1)$ parametrlik binomial taqsimot uchun $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ statistikaning taqsimoti

$$Q_\theta(t)=P_\theta(T=t)=\begin{cases} C_n^t\theta^t(1-\theta)^{n-t}, & t\in Y=\{0,1,...,n\},\\ 0, & \text{aks holda}.\end{cases}$$

berilgan. (2) ga asosan T yetarli statistika bo'ladi.

$\varphi=\varphi(t)$ haqiqiy funksiya uchun

$$\sum_{t=0}^{n}\varphi(t)Q_\theta(t)=(1-\theta)^n\sum_{t=0}^{n}C_n^t\,\varphi(t)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t=0,\theta\in\Theta,$$

bo'lsin. Bu tenglamani chap tomonida darajasi n dan oshmagan $\frac{\theta}{1-\theta}$ ning polinomi turibdi. Bu polinom ko'pi bilan n ta turli nuqtalarda nolga teng bo'ladi. Ammo bu tenglik barcha $\theta\in\Theta$ lar uchun o'rinli bo'lmoqda. Bu esa, o'z navbatida barcha $t=0,1,...,n$ lar uchun $\varphi(t)=0$ ekanini ko'rsatadi. Demak, $\{Q_\theta(t),\theta\in\Theta\}$ oila va $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ statistika mukammal bo'lar ekan.

2. $(\mathcal{Y},\mathcal{U},\{Q_\theta,\theta\in\Theta\})$ modelda $\mathcal{Y}=\{-1,0,1,2,...\}$, $\mathcal{U}$ to'plam $\mathcal{Y}$ ning to'plam ostisidan iborat, $\Theta=[0,1)$, $T(x)=x$ va $Q_\theta(t)=P_\theta(T=t)$ taqsimot:

$$Q_\theta(-1)=\theta,\ Q_\theta(n)=(1-\theta)^2\theta^n,\ n=0,1,2,...$$

bo'lsin. Biz $T(x)$ ni chegaralangan mukammal ekanini, ammo mukammal bo'lmasligini ko'rsatamiz. Integrallanuvchi φ uchun barcha $\theta\in\Theta$ larda

$$\sum_{t=-1}^{\infty}\varphi(t)Q_\theta(t)=\varphi(-1)\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n)(1-\theta)^2\theta^n=0$$

tenglik bajarilsin. $\theta=0$ da $\varphi(0)=0$, demak,

$$\varphi(-1)\theta+(1-\theta)^2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\theta^n=0,\quad 0<\theta<1,$$

ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\theta^{n-1}=-\frac{\varphi(-1)}{(1-\theta)^2}=-\varphi(-1)\sum_{n=1}^{\infty}n\,\theta^{n-1},\ 0<\theta<1.$$

Demak, $\varphi(n) = -\varphi(-1)n$, $n=1,2,\dots$. Agar φ – chegaralangan bo'lsa, u holda ixtiyoriy n uchun $\varphi(n)=0$. Bu esa T ning chegaralangan mukammal ekanini bildiradi. Ammo T mukammal emas. Masalan, agar $\varphi(-1)=-1$; $\varphi(n)=n$, $n=1,2,\dots$ desak, yuqoridagi tengliklar bajarilaveradi, ammo $\varphi \neq 0$.

3. ξ va η bog'liq bo'lmagan va bir xil $\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$ taqsimotga ega. Demak, $T=(\xi,\eta)$ vektor taqsimot funksiyasi $\{Q_\theta(x,y)=F_\theta(x)F_\theta(y),\ \theta\in\Theta\}$ oilaga tegishli. $\varphi=\varphi(\xi)$ funksiya Q_θ ga nisbatan integrallanuvchi bo'lib, uning dispersiyasi barcha $\theta\in\Theta$ larda chekli va noldan farqli bo'lsin. U holda

$$\iint[\varphi(x)-\varphi(y)]\,dF_\theta(x)\,dF_\theta(y)=0,\quad \theta\in\Theta.$$

Ammo $P_\theta(\varphi(\xi)\neq\varphi(\eta))>0$ barcha $\theta\in\Theta$ lar uchun. Aks holda ξ va η bog'liq bo'lar edi. Demak, $\{Q_\theta(x,y)=F_\theta(x)F_\theta(y),\ \theta\in\Theta\}$ oila mukammal bo'lmas ekan.

Endi shu misolda $F_\theta=N(\alpha,\sigma^2)$ bo'lsin. Malumki, $T^*=\xi+\eta$ tasodifiy miqdor taqsimoti $Q_\theta^*=N(2\alpha,2\sigma^2)$ – normal taqsimotdan iboratdir. $\{Q_\theta^*, \theta=(\alpha,\sigma^2)\in R\times(0,\infty)\}$ oilaning mukammal bo'lishini ko'rsatamiz. Integrallanuvchi φ funksiya uchun barcha (α,σ^2) larda

$$\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\exp\left\{-\frac{1}{4\sigma^2}(x-2\alpha)^2\right\}dx=0,$$

ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\tau x\}\varphi(x)\exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right\}dx=0.$$

Demak, $g(x)=\varphi(x)\exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right\}$ funksiyaning ikki tomonlama Laplas almashtirishi $\tau=\alpha/\sigma^2\in(-\infty,\infty)$ ning barcha qiymatlarida nolga teng ekan. Bu yerdan F_θ – deyarli hamma yerda $g(x)=0$, ya'ni $\varphi(x)=0$ ekani kelib chiqadi.

4. $X^{(n)}$ tanlanmaning har bir elementi $N(\alpha,\sigma^2)$ – normal taqsimotga ega bo'lsin, $\theta=(\alpha,\sigma^2)\in\Theta=R\times(0,\infty)$. Biz

$$T(X^{(n)})=\left(\frac{X_1-\bar{x}}{\sigma},\dots,\frac{X_n-\bar{x}}{\sigma}\right)$$

statistikani ozod ekanini ko'rsatamiz. Bu yerda $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. $\eta_1,\dots,\eta_n$ bog'liq bo'lmagan va bir xil standart $N(0,1)$ normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda $X_i=\sigma\eta_i+\alpha$, $i=1,\dots,n$ va $T(X^{(n)})=T(\eta_1,\dots,\eta_n)$. Demak, T ning taqsimoti α va σ ga bog'liq emas.

Endi statistikaning yana bir muhim turlaridan biri – minimal yetarli statistikani ko'ramiz. Ma'lumki, yetarli statistika taqsimot haqidagi ma'lumotni kamaytirmagan holda, tanlanma ma'lumotni kamaytirish imkonini berar ekan. Ammo, har bir taqsimotlar oilasi uchun bunday yetarli statistikalar yagona bo'lmasligi mumkin. Bu holda ulardan qaysi birini tanlash kerak degan savol tug'ilishi tabiiydir. Albatta, bu holda tanlanmani eng ko'p qisqartirish imkonini beruvchi statistikani tanlash lozimdir. $T(X^{(n)}):(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)})\to(\mathscr{Y},\mathscr{U})$ statistika $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila uchun yetarli statistika bo'lsin. U holda ixtiyoriy $S=S(T)$ statistika ***zaruriy*** statistika deb ataladi. Umuman, zaruriy S statistika θ parametr haqidagi butun ma'lumotga ega bo'lmasligi, ya'ni yetarli statistika bo'lmasligi mumkin.

5-ta'rif. Agar $S=S(T)$ zaruriy va yetarli statistika bo'lsa, u ***minimal yetarli statistika*** deb ataladi.

Demak, S – minimal yetarli statistika tanlanma ma'lumotini mumkin qadar eng ko'p qisqartirish imkonini berar ekan. $\mathscr{T}$ orqali qiymatlari $(\mathscr{Y},\mathscr{U})$da bo'lgan T yetarli statistikalar sinfini: $\mathscr{T}=\{T\}$ belgilaymiz. $\mathscr{A}_T=T^{-1}(\mathscr{U})$ to'plam σ-algebra $\mathscr{U}$ ning T

akslantirishdagi proobrazi bo‘lsin. Biz 3-§ da $P_\theta\left(X^{(n)}\in B/T\right)$ shartli taqsimot orqali yetarli statistika ta’rifini bergan edik. O‘sha ta’rifni σ - algebralar tilida quyidagicha ifodalash mumkin: “T statistika θ uchun yetarli statistika deb ataladi, agar $P_\theta\left(X^{(n)}\in B/\mathscr{A}_T\right), \theta\in\Theta$, $B\in\mathscr{B}^{(n)}$, shartli ehtimolning θ ga bog‘liq bo‘lmagan varianti mavjud bo‘lsa”. $\mathscr{A}_T\subset\mathscr{B}^{(n)}$ – σ - algebra ***yetarli σ -algebra*** deb ataladi. Agar T va S yetarli statistikalar bo‘lib, $S=S(T)$ bo‘lsa, $\mathscr{A}_S\subseteq\mathscr{A}_T$ bo‘ladi. Demak, “T_0 – minimal yetarli deyiladi, agar ixtiyoriy $T\in\mathscr{T}$ uchun $\mathscr{A}_{T_0}\subseteq\mathscr{A}_T$ bo‘lsa”. Minimal yetarli statistika har doim mavjuddir. Biz uni izlashning bir usulini ko‘rib o‘tamiz. $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\ll M$ bo‘lsin. Ixtiyoriy T statistika, xususan yetarli statistika, $\mathscr{X}^{(n)}$ tanlanma fazoni ekvivalentlik sinflariga, ya’ni $T\left(x^{(n)}\right)$ qiymatlari bir xil bo‘lgan $x^{(n)}$ nuqtalar to‘plamiga bo‘linishini hosil qiladi. Agar $S=S(T)$ bo‘lsa, u holda T ning ekvivalentlik sinflari S ning ekvivalentlik sinflari ichida yotadi. Demak, minimal yetarli statistikaga mos kelgan bo‘linish yetarli statistikalar hosil qilgan bo‘linishlarining “eng kattasi” bo‘lar ekan. $x^{(n)}$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi ekvivalentlik sinfini $C\left(x^{(n)}\right)$ orqali belgilaymiz. C sinflarga bo‘linishini yetarli bo‘linish deymiz, agar

$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\varphi_n\left(x^{(n)};\theta\right)h_n\left(x^n\right)$$

bo‘lib, bunda $x^{(n)}\in C\left(x_0^{(n)}\right)$ uchun $\varphi_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\varphi_n\left(x_0^{(n)};\theta\right)$ bo‘lsa. Demak, yetarli statistikaga yetarli bo‘linish mos kelar ekan. Endi $C\left(x_0^{(n)}\right)$ ni quydagicha tuzamiz: $x^{(n)}\in C\left(x_0^{(n)}\right)$ deb olamiz, agar $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)/f_n\left(x_0^{(n)};\theta\right)=h_n\left(x^{(n)};x_0^{(n)}\right)$ nisbatga bog‘liq bo‘lmasa, ya’ni

$$C\left(x_0^{(n)}\right)=\left\{x^{(n)}\in\mathscr{X}^{(n)}:\frac{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{f_n\left(x_0^{(n)};\theta\right)}=h_n\left(x^{(n)};x_0^{(n)}\right),\forall\theta\in\Theta\right\}.$$

Agar $x_1^{(n)},x_2^{(n)}\in C\left(x_0^{(n)}\right)$ bo‘lsa, u holda $C\left(x_2^{(n)}\right)=C\left(x_2^{(n)}\right)=C\left(x_0^{(n)}\right)$. Quyidagi da’voni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $T\in\mathscr{T}$ uchun $T\left(x_1^{(n)}\right)=T\left(x_2^{(n)}\right)$, $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}\in C\left(x_0^{(n)}\right)$, $x_0^{(n)}\in\mathscr{X}^{(n)}$, bo'lsa, u holda T – minimal yetarli statistika.

Misollar.

5. $\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right)$ statistik modelda $\mathscr{X}=\{0,1\}$, P_θ – binominal taqsimot, $\theta\in\Theta=(0,1)$ bo'lsin. Demak,

$$f(x;\theta)=P_\theta(\xi=x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}.$$

Quyidagi yetarli statistikalarni ko'ramiz:

$T_1\left(X^{(n)}\right)=X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$, $X_i=0,1; i=1,...,n;$

$T_2\left(X^{(n)}\right)=(X_1+X_2,X_3,...,X_n)$,

$T_3\left(X^{(n)}\right)=(X_1+X_2+X_3,X_4,...,X_n)$,

$\vdots$

$T_0\left(X^{(n)}\right)=X_1+...+X_n.$

$\mathscr{A}_{T_k}=T_k^{-1}\left(\mathscr{B}^{(n)}\right)$ – σ-algebralar ichida $\mathscr{A}_{T_1}$ maksimal va $\mathscr{A}_{T_0}$ minimaldir. Demak, T_0 – minimal yetarli statistika. Buni quyidagi $\dfrac{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{f_n\left(x_0^{(n)};\theta\right)}=\left(\dfrac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum\limits_{i=1}^n x_i-\sum\limits_{i=1}^n x_{i0}}$ nisbat θ ga faqat $\sum\limits_{i=1}^n x_i=\sum\limits_{i=1}^n x_{i0}=m$, $m\in\{0,1,...,n\}$, bo'lganidagina bog'liq emasligidan ham ko'rish mumkin. Bu holda

$$C\left(x_0^{(n)}\right)=\left\{x^{(n)}\in\mathscr{X}^{(n)}:\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x_{i0}\right\}.$$

6. 3-§ ning 5-misoldagi simmetrik Koshi taqsimoti uchun $T=\left(X_1^2,...,X_n^2\right)$ yetarli statistika ekanini ko'rgan edik. Ushbu

$$\frac{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{f_n\left(x_0^{(n)};\theta\right)}=\prod_{i=1}^n\frac{x_{i0}^2+\sigma^2}{x_i^2+\sigma^2},\ \theta=\sigma^2,$$

nisbat θ ga $\left(x_1^2,...,x_n^2\right)$ va $\left(x_{10}^2,...,x_{n0}^2\right)$ nuqtalar bir-biridan faqat va faqat koordinatalari o'rnini almashtirish bilangina farq qilgandagina bog'liq bo'lmaydi. Demak, T – minimal yetarli statistika ekan.

Endi biz mukammal va minimal yetarli statistikalar orasidagi munosabatni ko'rsatuvchi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2-teorema. $T:\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right)\to\left(\mathscr{Y},\mathscr{U},\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}\right)$ statistika $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila uchun yetarli statistika bo'lib, $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila mukammal bo'lsin. U holda T – minimal yetarli statistika bo'ladi.

Isboti. $S\left(X^{(n)}\right)=\psi\left(T\left(X^{(n)}\right)\right)$ statistika $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ oila uchun ixtiyoriy boshqa yetarli statistika bo'lsin. $\mathscr{A}_T$ – o'lchovli $\varphi(T)=T-M(T/S)$ funksiyani ko'ramiz. S yetarli statistika bo'lganligi uchun $\varphi(T)$ funksiya $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ ga bog'liq emas. Shartga ko'ra

$$\int\varphi(t)\,Q_\theta(d\,t)=0,\ \theta\in\Theta$$

va T ning mukammal ekanligidan $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ga nisbatan deyarli hamma yerda $\varphi(T)=0$, ya'ni $T=M(T/S)$ tenglik kelib chiqadi. Bu esa T ning $\mathscr{A}_S$ – o'lchovli, ya'ni zaruriy ekanini ko'rsatadi. Demak, T-statistika $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ uchun zaruriy va yetarli, ya'ni minimal yetarli statistika bo'lar ekan.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, yetarli statistikaning mukammal ekani uning minimal yetarli statistika bo'lishini anglatsada (2-teorema), ammo teskari da'vo o'rinli emas, ya'ni minimal yetarli statistikaning mukammal bo'lishi shart emas.

Misol. 7. 3-§ ning 4-misolida $\theta_1=\theta,\theta_2=1+\theta,|\theta|<\infty$ bo'lsin. U holda $T=\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)$ yetarli statistikaning minimal yetarli bo'lishini ham 1-teorema yordamida osongina ko'rsatish mumkin, chunki $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=I\left(\theta\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le 1+\theta\right)$. Ammo T mukammal statistika emas. Buni tekshirish uchun 1-ta'rifda $\varphi(T)=X_{(n)}-X_{(1)}-\frac{n-1}{n+1}$ deb tanlasak, (1) tenglik bajariladi, ammo $\varphi(T)\ne 0$. Endi o'z navbatida

(1) tenglik bajarilishini ko'rsatish uchun biz dastlab T ning zichlik funksiyasi $q_{\theta}(u,v)$ ni hisoblaymiz. Quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$Q_{\theta}(u,v)=P_{\theta}\left(X<u,X_{(n)}<v\right)=P_{\theta}\left(X_{(n)}<v\right)-Q_{\theta}^{*}(u,v),$$

$$Q_{\theta}^{*}(u,v)=P_{\theta}\left(X_{(1)}\geq u,X_{(n)}<v\right)=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta}\left(X_{i}\in[u,v)\right)=(v-u)^{n},$$

$$u\geq\theta,\ v\leq 1+\theta,\ v>u.$$

$$q_{\theta}(u,v)=-\frac{\partial^{2}Q(U,V)^{*}}{\partial u\partial v}=\begin{cases} n(n-1)(v-u)^{n-2}, & u\geq\theta,\ v\leq 1+\theta,\ v>u,\\ 0, & \text{qolgan hollarda}.\end{cases}$$

Agar $t=\frac{v-u}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{v+u}{\sqrt{2}}$ almashtirishlar bajarsak, u holda $\Delta=\{u\geq\theta,\ v\leq 1+\theta,\ v>u\}$ soha bo'yicha hisoblovchi (1) integral, ixtiyoriy $\theta\in\Theta=(-\infty,\infty)$ uchun:

$$\iint_{\Delta}\left(v-u-\frac{n-1}{n+1}\right)q_{\theta}(u,v)\,dudv=n(n-1)\int_{0}^{1}\left(x-\frac{n-1}{n+1}\right)x^{n-2}(1-x)\,dx=0.$$

Demak, minimal yetarli $T=\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)$ statistika mukammal emas.

5-§. Eksponensial model uchun mukammal statistika

$\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_{\theta},\theta\in\Theta\}\right),\{P_{\theta},\theta\in\Theta\}<<\mu$ – eksponensial statistik model zichlik funksiyasi

$$f_{n}(x^{(n)};\theta)=h_{n}(x^{(n)})\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}A_{i}(\theta)T_{i}(x^{(n)})+nB(\theta)\right\}$$

formula bilan berilgan bo'lsin. Faktorlashtirish teoremasidan $T=(T_{1},...,T_{k})$, $T_{i}=\sum_{j=1}^{n}t_{i}\left(X_{j}\right)$, $i=\overline{1,k}$ -vektor $\theta=(\theta_{1},...,\theta_{s})$ parametr uchun yetarli statistika ekani kelib chiqadi. Demak, $X^{(n)}$ tanlanmaning hajmi n qanday bo'lishidan qat'iy nazar, k-o'lchovli yetarli statistika mavjuddir.

Yetarli statistika $T=\left(T_1,\ldots,T_k\right)$ yordamida $X^{(n)}$ni yetarlili bo'linmalar birlashmasi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathscr{X}^{(n)}=\bigcup_{t}\left\{x^{(n)}:T\left(x^{(n)}\right)=t\right\} \qquad (1)$$

Quyidagi

$$\frac{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{f_n\left(x_0^{(n)};\theta\right)}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}A_i(\theta)\left[T_i\left(x^{(n)}\right)-T_i\left(x_0^{(n)}\right)\right]\right\} \qquad (2)$$

nisbat θ ga ikki holda bog'liq bo'lmaydi: agar $T\left(x^{(n)}\right)=T\left(x_0^{(n)}\right)$ bo'lsa, yoki $\left\{1,A_1(\theta),\ldots,A_k(\theta)\right\}$ sistema chiziqli bog'liq bo'lib, $C_i=T_i\left(x^{(n)}\right)-T_i\left(x_0^{(n)}\right), i=1,\ldots,k$, koeffitsiyentlar uchun

$$C_1A_1(\theta)+\ldots+C_kA_k(\theta)=Const,\theta\in\Theta \qquad (3)$$

bo'lsa. Agar biror $C_1,\ldots,C_k$ lar uchun $C_1^2+\ldots+C_k^2>0$ va (3) bajarilsa, u holda $\left\{1,\ A_1(\theta),\ldots,A_k(\theta)\right\}$ sistemadan maksimal chiziqli bog'liq bo'lmagan sistema ostini olib, (3) dagi qolgan $A_i(\theta)$ larni bu sistema orqali chiziqli ifodalash bilan biz modelni qisqartirishimiz mumkin. Shu sababli biz $\left\{1,A_1(\theta),\ldots,A_k(\theta)\right\}$ – sistema Θda chiziqli bog'liq emas, deb faraz qilamiz. Demak, (2)ga nisbatan ekvivalentlilik sinflariga bo'linish (1) yetarli bo'linish bilan ustma-ust tushadi va 1-teoremaga asosan u minimal yetarli T statistikaga mos keladi. Endi (3) ifoda $\left(T_1,\ldots,T_k\right)$ ga nisbatan simmetrik funksiya bo'lgani uchun tartiblangan $\left(T_{(1)},\ldots,T_{(k)}\right)$ – vektor minimal yetarli statistika bo'ladi. Shuni ta'kidlash lozimki, $n=1$ bo'lgan holda, $\left(t_1(x),\ldots,t_n(x)\right)$ statistika (2) model uchun minimal yetarli bo'ladi. Ixtiyoriy n uchun quyidagi ikki holni farqlash kerak: 1) $k\geq n$ bo'lganida, tanlanma ma'lumotni qisqartirish nuqtayi nazaridan, minimal yetarli $\left(T_{(1)},\ldots,T_{(k)}\right)$ statistika $\left(X_{(1)},\ldots,X_{(k)}\right)$ ga ekvivalentdir. 2) $k<n$ bo'lgan holda esa, $\left(T_{(1)},\ldots,T_{(k)}\right)$ statistika tanlanma ma'lumotni ma'lum darajada qisqartirishga olib keladi.

Xususan, $A_i(\theta)=\theta_i,\ i=1,...,k$ bo'lgan holda

$$f(x;\theta)=h(x)\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i t_i(x)+B(\theta_1,...,\theta_k)\right\},\theta=(\theta_1,...,\theta_k). \quad (4)$$

– zichlik funksiya, k – ***parametrik eksponensial tipdagi*** (Darmua-Kupmen oilasi) yoki ***kanonik ko'rinishidagi*** oila deb ataladi. Bu holda, Θ – parametrik to'plam k ta chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlarni o'z ichiga oladi, deb faraz qilamiz. Bunday k – o'lchovli Θ to'plamni ***tabiiy parametrik fazo*** deb ataladi. Aslida (2) ko'rinishdagi umumiy eksponensial modeldan (4) ko'rinishga $\gamma_i=A_i(\theta),\ i=1,...,k$ – qayta parametrlashtirish yordamida o'tish mumkin. Chunki, (2)dagi $\exp\{B(\theta)\}$ ifoda normallovchi ifoda bo'lib, u aslida $A_i(\theta),\ i=\overline{1,k}$ larning funksiyasidir:

$$\exp\{-B(\theta)\}=\int_{\mathscr{X}}\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}A_i(\theta)t_i(x)\right\}h(x)\mu(dx).$$

Shu sababli, biz quyida (4) oilani o'zini o'rganish bilangina chegaralanamiz.

Biz oldingi paragrafda minimal yetarli statistikaning mukammal bo'lmasligi shart emasligini ta'kidlab o'tgan edik. Ammo, eksponensial model uchun Θ ga qo'yilgan shartlarda $T=(T_1,...,T_k)$ statistikaning mukammal bo'lishini ko'rsatish mumkin. Demak, 4-§dagi 2-teoremaga asosan, T ning minimal yetarli bo'lishini quyidagi teoremadan osongina keltirib chiqarishimiz mumkin.

1-teorema. $X^{(n)}=(X_1,...,X_k)$ tanlanmaning elementlari σ-chekli μ o'lchovga nisbatan son o'qida (4) ko'rinishdagi zichlik funksiyaga ega bo'lsin. Agar Θ to'plam k-o'lchovli parallelepipedni o'z ichiga olsa, u holda $T(X^{(n)})=(T_1(X_1),...,T_k(X_k))$ statistika mukammal bo'ladi.

Isboti: 4-§dagi 2-ta'rifga asosan, biz T statistikaning $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ taqsimotlari oilasi mukammal bo'lishini tekshiramiz, ya'ni 1-ta'rif shartlarining bajarilishini ko'rsatishimiz lozim. $(\mathscr{Y},\mathscr{U})=(R^{(k)},\mathscr{B}^{(k)})$ da T statistika taqsimoti Q_θ ning zichlik funksiyasi

$$\nu(A)=\int\limits_{T^{-1}(A)} h_n(x^{(n)})\mu^{(n)}(dx^{(n)}),\ A\in\mathcal{B}^{(k)},$$

o‘lchovga nisbatan

$$q(t:\theta)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i t_i+nB(\theta)\right\},\ t=(t_1,...,t_k)\in R^{(k)},\qquad(5)$$

ko‘rinishga ega. Bu esa, o‘z navbatida quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi.

$$Q_\theta(A)=P_\theta\left(x^{(n)}:T(x^{(n)})\in A\right)=\int\limits_{T(x^{(n)})\in A} q\left(T(x^{(n)});\theta\right)h_n(x^{(n)})\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)=$$

$$=\int\limits_{t\in A} q\left(t;\theta\right)\nu\left(dt\right).$$

$\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ oilaning mukammal ekanini ko‘rsatish uchun $R^{(k)}$dagi ixtiyoriy o‘lchovli $\varphi\left(t_1,\dots,t_k\right)$ funksiya uchun, barcha $\theta\in\Theta$ larda

$$\int\limits_{R^{(k)}}\varphi(t_1,...,t_k)Q_\theta(dt_1...dt_2)=0,\qquad(6)$$

tenglikdan $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ga nisbatan deyarli hamma yerda $\varphi\left(t_1,\dots,t_k\right)=0$ ekanini ko‘rsatamiz. φ^+ va φ^- lar mos ravishda φ ning musbat va manfiy qismlari bo‘lsin: $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^\pm\geq 0$. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda, biz Θ fazo k-o‘lchovli $I^{(k)}=\left\{\theta:|\theta_i|\leq a, i=\overline{1,k}\right\}$, $0<a<\infty$ parallelepipedni o‘z ichiga oladi, deb faraz qilamiz. Agar Θ bunday bo‘lmasa, uni $I^{(k)}$ ni o‘z ichiga oladigan qilib o‘zgartirish mumkin. U holda (6) dan ixtiyoriy $\theta\in I^{(k)}$ uchun

$$\int\limits_{R^{(k)}}\varphi^+\left(t_1,\dots,t_k\right)Q_\theta\left(dt_1,\dots,dt_k\right)=\int\limits_{R^{(k)}}\varphi^-\left(t_1,\dots,t_k\right)Q_\theta\left(dt_1,\dots,dt_k\right)\ (7)$$

σ-chekli $\nu^\pm\left(dt_1,\dots,dt_k\right)=\varphi^\pm\left(t_1,\dots,t_k\right)\nu\left(dt_1,\dots,dt_k\right)$ o‘lchovlarni kiritsak, u holda (5) va (7)dan

$$\int\limits_{R^{(k)}}\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\theta_j t_j\right\}\nu^+\left(dt_1,\dots,dt_k\right)=\int\limits_{R^{(k)}}\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\theta_j t_j\right\}\nu^-\left(dt_1,\dots,dt_k\right).\ (8)$$

Xususan, $\theta_j = 0,\ j = \overline{1,k}$, bo'lganda,

$$\int_{R^{(k)}} \nu^{+}\left(dt_1,\dots,dt_k\right) = \int_{R^{(k)}} \nu^{-}\left(dt_1,\dots,dt_k\right). \tag{9}$$

(9) integrallar qiymatini 1 ga teng desak bo'ladi (chunki agar bu qiymat biror $C, 0 < C < \infty$ ga teng bo'lsa, φ ni C ga bo'lib bunga har doim erishish mumkin). Demak, ν^{+}, ν^{-} lar ehtimol o'lchovlari bo'lar ekan:

$$\nu^{\pm}(A) = \int_{t\in A} \varphi^{\pm}(t)\nu(dt),\ t \in R^{(k)},\ A \in \mathcal{B}^{(k)}.$$

Ma'lumki,

$$\int \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} Z_j t_j\right\} \nu^{\pm}\left(dt_1,\dots,dt_k\right)$$

integrallar $Z_1,\dots,Z_k$, $Z_j = \theta_j + iu_j$ – kompleks o'zgaruvchilarning $\left\{|\theta_j| \le a, |u_j| \le \infty, j = \overline{1,k}\right\}$ oraliqdagi analitik funksiyalari bo'ladi. Bu esa (8) integrallarni oraliqqa analitik davom ettirish imkonini beradi. Xususan, $\left\{\theta_j = 0, |u_j| \le \infty, j = \overline{1,k}\right\}$ oraliqdagi haqiqiy $u_1,\dots,u_k$ lar uchun (8) dan

$$\int_{R^{(k)}} \exp\left\{i\sum_{j=1}^{k} u_j t_j\right\} \nu^{+}(dt) = \int_{R^{(k)}} \exp\left\{i\sum_{j=1}^{k} u_j t_j\right\} \nu^{-}(dt). \tag{10}$$

(10) tenglik ν^{+} va ν^{-} ehtimollik o'lchovlariga mos kelgan xarakteristik funksiyalarning tengligini ko'rsatadi. U holda xarakteristik funksiya va uning taqsimot funksiyasi orasidagi o'zaro bir qiymatli moslikka asosan, ν^{+} va ν^{-} lar ham deyarli hamma yerda ustma-ust tushar ekan. Bu esa, o'z navbatida, $\left\{Q_\theta, \theta \in \Theta\right\}$ ga nisbatan deyarli hamma yerda $\varphi(t) = \varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = 0$ ekanini, ya'ni $\left(T_1,\dots,T_k\right)$ ning mukammal statistika ekanini ko'rsatadi.

6-§. Parametrlarni baholash. Nuqtaviy baholar va ularning xossalari

Aniqlanish sohasi $\{P\}$-taqsimotlar oilasidan iborat bo'lgan skalyar yoki vektor funksional $g(P)$ ni qaraymiz. $\{P\}$ oila parametrik yoki noparametrik bo'lishi mumkin. Statistikada bu oila noma'lum bo'lgani uchun $g(P_i)$ funksional ham noma`lumdir. Masalan, P – taqsimotning kvantili, momentlari $g(P)$ga misol bo'la oladi. $g(P):\{P\}\to\Psi$ bo'lsin. $X^{(n)}$ tanlanma yordamida qiymatlari to'p-lami ψ bo'lgan ixtiyoriy $\hat{g}_n=\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)$ statistikalar ketma-ketligi $g(P)$ funksional uchun ***baho*** (yoki ***nuqtaviy baho***) deb ataladi. Demak, $g(P)$ uchun baho yagona emas ekan.

Misollar.

1. Empirik taqsimot funksiyasi $\widehat{F}_n(x)$ taqsimot funksiya $F(x)=P(\xi\leqslant x)$ga bahodir. Bu yerda $\Psi=[0,1]$.

2. $g(P)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(x)dF(x)$ bo'lsin. U holda

$$\hat{g}_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(x)dF_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a(X_i).$$

Xususan, ξ ning k- tartibli momenti uchun $\hat{v}_{kn}$ bahodir (I bobdagi 3-§ ga qarang).

3. $(\theta,1+\theta)$ oraliqdagi tekis taqsimot uchun $g(P_\theta)=\theta$, $\theta\in\Theta=\Psi=(-\infty,\infty)$ bo'lsin, θ uchun $\hat{g}_{1n}=X_{(1)}$ va $\hat{g}_{2n}=X_{(n)}-1$ lar baho bo'la oladi.

4. $P_\theta=N(\alpha,\sigma^2)$ normal taqsimotlar oilasi, $\theta=(\alpha,\sigma^2)\in\Theta=$ $=R^{(1)}\times(0,\infty)$, $g(P_\theta)=\theta,\Psi=\Theta$ bo'lsin. Bu holda $\hat{g}_{1n}=(\overline{x},S^2)$, $\hat{g}_{2n}=(\overline{x},\overline{S}^2)$ lar $g(P_\theta)$ ga baho bo'la oladi. Bu yerda

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2,\ \overline{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2.$$

Nuqtaviy baholashda biz $g(P)$ fuksional uchun biror aniq $\hat{g}_n$ ketma-ketlikni taklif etamiz.

Nuqtaviy baholarning xossalarini ko'rib o'tamiz. M_P (yoki M_θ) orqali P (yoki P_θ) taqsimotiga nisbatan hisoblangan matematik kutilma operatorini belgilaymiz.

1-ta'rif. $\hat{g}_n$ baho $g(P)$ uchun ***siljimagan*** baho deb ataladi, agar barcha $P \in \{P\}$ uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$M_P\left\{\hat{g}\left(X^{(n)}\right)\right\} = g(P) \tag{1}$$

Agar (1) bajarilmasa, $\hat{g}_n$ baho ***siljigan*** deb ataladi. Agar $n \to \infty$ da barcha $P \in \{P\}$ lar uchun

$$M_P\left\{\hat{g}\left(X^{(n)}\right)\right\} - g(P) = B_n(P) \to 0, \tag{2}$$

bo'lsa, $\hat{g}_n$ baho $g(P)$ uchun ***asimptotik siljimagan*** baho deb ataladi.

2-ta'rif. $\hat{g}_n$ baho $g(P)$ uchun ***asosli*** (yoki ***kuchli asosli***) baho deb ataladi, agar $n \to \infty$ da ehtimollik (yoki bir ehtimollik) bilan $\hat{g}_n \to g(P)$. Biz buni $\hat{g}_n \xrightarrow{P} g(P)$ (yoki $\hat{g}_n \xrightarrow{1\ \text{eht}} g(P)$) orqali belgilaymiz. Bu yaqinlashishlar $\left(\mathscr{X}^{(\infty)}, \mathscr{B}^{(\infty)}, P^{(\infty)}\right)$ ehtimollik fazosida tushuniladi.

Demak, $\widehat{F}_n(x)$ empirik taqsimot funksiya $F(x)$ uchun (VII bob, 2-§ ga qarang) siljimagan va tekis kuchli asosli baho bo'lar ekan.

Taqsimotlar oilasi $\{P\}$ – noparametrik bo'lsa, $g(P)$ uchun qaralayotgan baholar ham noparametrik deb ataladi. Xususan, 1-, 2- va 4-misollardagi baholar aslida noparametrikdir. Masalan, 4- misoldagi $\hat{g}_{1n}, \hat{g}_{2n}$ baholar ixtiyoriy P taqsimotda $g(P) = \left(M_P\xi, D_P\xi\right)$ uchun baho bo'ladi va barcha P larda

$$M_P\overline{x} = M_P\xi, \; M_P S^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) D_P\xi, \; M_P\overline{S^2} = D_P\xi.$$

Demak, $\hat{g}_{1n}$ va $\hat{g}_{2n}$ baholar $g(P)$ uchun mos ravishda siljigan va siljimagan baholar ekan. ($\hat{g}_{1n}$ – asimptotik siljimagan, chunki $M_P S^2 \to D_P\xi$). (1) tenglik siljimaganlik tenglamasi deb ataladi. Berilgan $g(P)$ uchun bu tenglamani qanoatlantiruvchi $\hat{g}_n$ baho mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Misol.

5. $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ – Puasson taqsimotlari oilasi bo'lsin:

$$f(x;\theta)=P_\theta(\xi=x)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta},\ \Theta=(0,\infty),\ x\in\mathscr{X}=\{0,1,2,\ldots\}.$$

$g(P_\theta)=\frac{1}{\theta}$ funksiya uchun siljimagan $\hat{g}_n$ bahoni qidiramiz. (1) ga asosan

$$M_\theta\,\hat{g}(X^{(n)})=\sum_{\substack{x_i\geq 0\\ i=\overline{1,n}}}\hat{g}_n(x^{(n)})\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}e^{-\theta}=\frac{1}{\theta},\ \forall\theta\in\Theta.$$

yoki

$$\sum_{\substack{x_i\geq 0\\ i=\overline{1,n}}}\hat{g}_n(x^{(n)})\left[\prod_{i=1}^{n}x_i!\right]^{-1}\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{e^{n\theta}}{\theta},\forall\theta\in\Theta,$$

tenglik bajarilishi kerak. Ammo bu mumkin emas. Demak, $\frac{1}{\theta}$ uchun siljimagan baho mavjud emas ekan.

Baholanayotgan $g(P)$ funksional uchun bir necha baho taklif etilganda, ularning ichidan "eng yaxshisini" tanlash masalasi tabiiy ravishda kelib chiqadi. Demak, biz biror alomatga asoslangan holda baholar orasida tartib o'rnatishimiz kerak. Bunday alomatlardan biri baholarni o'rtacha kvadratik chetlanish yordamida solishtirishdir. Biz batafsil $\{P\}=\{P_\theta,\theta\in\Theta\},\Theta\in R^{(s)},\ g(P_\theta)=\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_s)$ – parametrik holni ko'rib chiqamiz. Dastlab, $s=1$, ya'ni skalyar parametrik baholanayotgan bo'lsin. θ uchun qurilgan baholarning $\mathbb{C}$ sinifidan bir xil $B_n(\theta)$ siljishga ega bo'lgan baholarning $\mathbb{C}_B$ sinf ostini belgilaymiz. ($\mathbb{C}_0$ – siljimagan baholar sinfi: $\mathbb{C}_0\subset\mathbb{C}_B\subset\mathbb{C}$).

3-ta'rif. $\theta_n^* \in \mathbb{C}$ baho $\mathbb{C}$ sinfida ***effektiv*** deb ataladi, agar ixtiyoriy boshqa $\hat{\theta}_n \in \mathbb{C}$ baho uchun barcha $\theta_n \in \Theta$ larda $M_\theta\left(\theta_n^* - \theta\right)^2 \leq M_\theta\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2$ o'rinli bo'lsa.

Demak, $\mathbb{C}_0$ dagi effektiv baho ***minimal dispersiyalik siljimagan baho*** (MDSB) ekan.

4-ta'rif. $\theta_n^* \in \mathbb{C}$ baho $\mathbb{C}$ sinfda ***asimptotik effektiv*** deb ataladi, agar ixtiyoriy boshqa $\hat{\theta}_n^* \in \mathbb{C}$ baho uchun har bir $\theta \in \Theta$ da

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_\theta\left(\theta_n^* - \theta\right)^2}{M_\theta\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2} \leq 1,$$

tengsizlik bajarilsa. $\theta = \left(\theta_1, \ldots, \theta_s\right)$ vektor parametr uchun ham yuqorida keltirilgan ta'riflar o'rinlidir. Bu holda ixtiyoriy $v = \left(v_1, \ldots, v_s\right) \in R^{(s)}$ vektor uchun $\left(v, \theta\right) = v_1\theta_1 + \ldots + v_s\theta_s$ – skalyar parametrga baho $\left(v, \hat{\theta}_n\right)$, $\hat{\theta}_n \in C$, bo'lib, $\theta_n^* \in \mathbb{C}$ ning effektivligi barcha $\theta \in \Theta$ larda o'rtacha kvadratik tarqoqliklar uchun

$$M_\theta\left(v, \theta_n^* - \theta\right)^2 \leq M_\theta\left(v, \hat{\theta}_n - \theta\right)^2,$$

ya'ni

$$\sum_{i,j=\overline{1,s}} M_\theta\left(\theta_{in}^* - \theta_i\right)\left(\theta_{jn}^* - \theta_j\right)v_i v_j \leq \sum_{i,j=\overline{1,s}} M_\theta\left(\hat{\theta}_{in} - \theta_i\right)\left(\hat{\theta}_{jn} - \theta_j\right)v_i v_j$$

tengsizlikni o'rinli bo'lishi bilan aniqlanadi.

Misol.

6. 4-misoldan $\theta = \sigma^2$ uchun ikkita baho $\theta_{1n} = S^2, \theta_{2n} = \overline{S}^2$ larni olaylik. $\alpha = 0$ bo'lsin. Hisoblash natijasida

$$D_\theta S^2 = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}, \quad D_\theta \overline{S}^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1},$$

ekanini ko'rish mumkin. Ammo,

$$d_{1n}(\theta) = M_\theta\left(\theta_{1n} - \theta\right)^2 = D_\theta S^2 + \left[M_\theta S^2 - \sigma^2\right]^2 =$$

$$= \frac{\sigma^4(2n-1)}{n^2} < d_{2n}(\theta) = M_\theta\left(\theta_{2n} - \theta\right)^2 = D_\theta \overline{S}^2.$$

Demak, S^2 – siljigan va $\overline{S}^2$ – siljimagan baho bo'lsada, S^2 baho $\overline{S}^2$ ga nisbatan effektiv ekan. Bu baholar asimptotik ekvivalentdir, chunki

$$d_{1n}(\theta)\left[d_{2n}(\theta)\right]^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

5-ta'rif. $\hat{g}_n$ baho $g(P)$ uchun *asimptotik normal baho* deyiladi, agar $\sqrt{n}\left(\hat{g}_n - g(P)\right) \Rightarrow N(0;\sigma^2)$ (yoki $\dfrac{\sqrt{n}\left(\hat{g}_n - g(P)\right)}{\sigma^2} \Rightarrow N(0;1)$) shart bajarilsa.

VIII BOBGA DOIR MISOLLAR

1. Quyidagi taqsimotlar oilasi eksponensial oilaga tegishlimi?

a). $R[-\theta,\theta]$. *b*). $\overline{Bi}(r,\theta)$.

c). $N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$. *d*). $f(x,\theta)=\begin{cases} e^{\theta-x}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta. \end{cases}$

2. Quyidagi taqsimotlar uchun yetarli statistikalarni ko'rsating.

a). $R(\theta_1,\theta_2)$. *b*). $E(\theta)$.

c). $N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$. *d*). $f(x,\theta)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & x\in(0;1), \theta>0, \\ 0, & x\overline{\in}(0;1). \end{cases}$

3. $E(\theta)$ taqsimot uchun $\sum_{i=1}^{n} X_i$ to'la statistika bo'lishini ko'rsating.

4. $N(0;\theta^2)$ taqsimot uchun $\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ statistika to'la statistika bo'ladimi?

5. Zichlik funksiyasi $f(x,\theta)=\begin{cases} e^{\theta-x}, & x\ge\theta, \\ 0, & x<\theta \end{cases}$ bo'lgan taqsimot uchun $X_{(1)}$ statistika to'la statistika bo'ladimi?

6. $X_1,...,X_n$ tanlanma $R[0;\theta]$ taqsimotdan olingan bo'lsin, noma'lum parametr θ uchun $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ bahoni siljimaganlik va asoslilikka tekshiring.

7. $X_1,...,X_n$ tanlanma $N(\theta_1,\theta_2^2)$ taqsimotdan olingan bo'lsin, $\bar{x}$ va S^2 larni mos ravishda θ_1 va θ_2^2 lar uchun siljimaganlik va asoslilikka tekshiring.

8. $X_1,...,X_n$ tanlanma zichligi $f(x,\theta)=\begin{cases} e^{\theta-x}, x\geq\theta \\ 0, \ x\leq\theta \end{cases}$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin, noma'lum parametr θ uchun quyidagi baholarni siljimaganlik va asoslilikka tekshiring: a) $X_{(1)}$; b) $\bar{x}-1$.

9. $X_1,...,X_n$ tanlanma $MX_1=a$ ma'lum va MX_1^2 chekli bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. $T(x^{(n)})=\overline{x^2}-a^2$ statistika noma'lum dispersiya uchun siljimagan va asosli baho bo'ladimi?

10. $X_1,...,X_n$ tanlanma $MX_1=a$ ma'lum va MX_1^2 chekli bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. $T(x^{(n)})=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2$ statistika noma'lum dispersiya uchun siljimagan va asosli baho bo'ladimi?

11. Quyidagi Pareto taqsimoti noma'lum parametri $\theta=(a,\lambda)$ uchun minimal yetarli statistikani toping.

$$f(x,\theta)=\frac{a}{\lambda}\left(\frac{a}{x}\right)^{\lambda+1}, x>a, a>0, \lambda>0.$$

IX BOB. SILJIMAGAN BAHOLASH

1-§. Eng yaxshi siljimagan baholar

Baholanayotgan $g(\theta), \theta \in \Theta \subseteq R$ funksiya uchun bir necha siljimagan baho taklif etilganda, ularning ichidan "eng yaxshi siljimagan" bahoni tanlash masalasi tabiiy ravishda kelib chiqadi. $\hat{g}_n, g_n^* \in \mathbb{C}_0$ – siljimagan baholar bo'lsin.

1-ta'rif. $\hat{g}_n$ baho $g(\theta)$ uchun ***MDSB*** deb ataladi, agar $\forall g_n^* \in \mathbb{C}_0$ baho uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$D_\theta \hat{g}_n \leq D_\theta g_n^*. \tag{1}$$

1-teorema. $\theta_{1n}, \theta_{2n} \in \mathbb{C}_0$ – baholar MDSB lar bo'lsin. U holda θ_{1n} va θ_{2n} baholar ekvivalentdir, ya'ni

$$P_\theta(\theta_{1n} = \theta_{2n}) = 1, \forall \theta \in \Theta.$$

Isboti. $d_n(\theta) = D_\theta \theta_{in}, i = 1,2$ va $\theta_{3n} = \frac{1}{2}(\theta_{1n} + \theta_{2n})$ bo'lsin. U holda $M_\theta \theta_{3n} = \theta$, $D_\theta \theta_{3n} \geq d_n(\theta)$. Ammo

$$D_\theta \theta_{3n} = \frac{1}{4}\left[D_\theta \theta_{1n} + D_\theta \theta_{2n} + 2Cov_\theta(\theta_{1n}, \theta_{2n})\right] \leq d_n(\theta),$$

chunki Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$Cov_\theta(\theta_{1n}, \theta_{2n}) \leq \left[D_\theta \theta_{1n} \cdot D_\theta \theta_{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = d_n(\theta).$$

Shunga asosan, $D_\theta \theta_{3n} = d_n(\theta), Cov_\theta(\theta_{1n}, \theta_{2n}) = d_n(\theta)$ va

$$D_\theta(\theta_{1n} - \theta_{2n}) = D_\theta \theta_{1n} + D_\theta \theta_{2n} - 2Cov_\theta(\theta_{1n}, \theta_{2n}) = 0.$$

Bu esa o'z navbatida $P_\theta(\theta_{1n} = \theta_{2n}) = 1$ tenglikka ekvivalentdir.

Misollar.

1. $X_1, \ldots, X_n$ tanlanma $Bi(1;\theta)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. $\theta^m, m \leq n$ uchun MDSBni toping.

Ma'lumki, $T(x^{(n)})=\sum_{i=1}^{n} x_i$ statistika noma'lum parametr θ uchun yetarli va to'la statistika bo'ladi hamda uning taqsimoti $Bi(n;\theta)$ dir. $M\left(\hat{g}_n(T)\right)=\theta^m$ shartdan $\hat{g}_n(T)$ ni topamiz:

$$M\left(\hat{g}_n(T)\right)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \hat{g}_n(k)\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

$M\left(\hat{g}_n(T)\right)=\theta^m$ ekanligini inobatga olsak,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \hat{g}_n(k)\theta^{k-m}(1-\theta)^{n-m-(k-m)}=1$$

bo'ladi. Agar $m<k$ bo'lsa, $\theta^{k-m}\to\infty$ ekanligidan $\hat{g}_n(T)=0$, k=0,1 olishimiz kerak. Bularni inobatga olsak,

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k \hat{g}_n(k)\theta^{k-m}(1-\theta)^{n-m-(k-m)}=1$$

bo'ladi. Binomial taqsimot xossasiga ko'ra:

$$\sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} \hat{g}_n(k)\theta^{k-m}(1-\theta)^{n-m-(k-m)}=1.$$

Bu ikkala tengliklarni tenglashtirsak, $C_n^k \hat{g}_n(T)=C_{n-m}^{k-m}$, $k=m,\dots,n$ ifodaga ega bo'lamiz. Demak, $\theta^m, m\le n$ uchun MDSB

$$\hat{g}_n(T)=\begin{cases}\dfrac{C_{n-m}^{k-m}}{C_n^k}, & T=m,\dots,n,\\ 0, & T=0,1,\dots,m-1\end{cases}$$

bo'ladi.

2. $X_1,\dots,X_n$ tanlanma $N(a;\sigma^2)$ taqsimotdan olingan bo'lib, $a\in R$ noma'lum va $\sigma^2>0$ ma'lum bo'lsin.

a) a^3 va a^4 larning MDSB larini toping.

b) $P(X_1\le t)$ va $\frac{d}{dt}P(X_1\le t)$ ($t\in R$ fiksirlangan son) larning MDSB larini toping.

a) Bu taqsimot uchun $\bar{x}$ statistika yetarli va to'la statistika bo'ladi. Agar

$$0=M\left(\bar{x}-a\right)^3=M\left(\bar{x}^3-3a\bar{x}^2+3a^2\bar{x}-a^3\right)=M\left(\bar{x}^3\right)-3a\sigma^2/n-a^3$$

ekanligini inobatga olsak, u holda

$$M\left(\overline{x}^3 - 3(\sigma^2/n)\overline{x}\right) = M\left(\overline{x}^3\right) - 3a\sigma^2/n = a^3$$

bo'ladi. Demak, a^3 uchun $\overline{x}^3 - 3(\sigma^2/n)\overline{x}$ baho MDSB bo'ladi.

Xuddi shunday,

$$3\sigma^4 = M\left(\overline{x}-a\right)^4 = M\left[\overline{x}\left(\overline{x}-a\right)^3\right] = M\left(\overline{x}^4 - 3a\overline{x}^3 + 3a^2\overline{x}^2 - a^3\overline{x}\right) =$$

$$= M\left(\overline{x}^4\right) - 3a\left(3a\sigma^2/n + a^3\right) + 3a^2\left(\sigma^2/n + a^2\right) - a^4 =$$

$$= M\left(\overline{x}^4\right) - 6a^2\sigma^2/n - 4a^4 = M\left(\overline{x}^4\right) - (6\sigma^2/n)M\left(\overline{x}^2 - \sigma^2/n\right) - 4a^4$$

Demak, a^4 uchun $\left[\left(\overline{x}^4\right) - (6\sigma^2/n)\left(\overline{x}^2 - \sigma^2/n\right) - 3\sigma^4\right]/4$ baho MDSB bo'ladi.

b) $M\left(P(X_1 \le t/\overline{x})\right) = P(X_1 \le t)$ ekanligidan $P(X_1 \le t)$ uchun MDSB $P(X_1 \le t/\overline{x})$ bo'ladi. Normal taqsimot xarakterizatsion xossasiga ko'ra $\left(X_1, \overline{x}\right)$ tasodifiy vektor matematik kutilmalari (a,a) va kovariatsion matritsasi $\sigma^2\begin{pmatrix} 1 & n^{-1} \\ n^{-1} & n^{-1}\end{pmatrix}$ bo'lgan ikki o'lchovli normal taqsimotga ega. Bulardan foydalanib, X_1 ning $\overline{x}$ shartli taqsimoti $N\left(\overline{x}, \left(1-n^{-1}\right)\sigma^2\right)$ ekanligini topamiz. Demak, $P(X_1 \le t)$ uchun MDSB $\Phi\left(\dfrac{t-\overline{x}}{\sigma\sqrt{1-n^{-1}}}\right)$ bo'ladi. Bu yerda $\Phi(t)$ standart normal taqsimot funksiyasi. Endi

$$\frac{d}{dt}P(X_1 \le t) = \frac{d}{dt}M\left[\Phi\left(\frac{t-\overline{x}}{\sigma\sqrt{1-n^{-1}}}\right)\right] = M\left[\frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{t-\overline{x}}{\sigma\sqrt{1-n^{-1}}}\right)\right]$$

ni inobatga olsak, u holda $\dfrac{d}{dt}P(X_1 \le t)$ uchun

$$\frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{t-\overline{x}}{\sigma\sqrt{1-n^{-1}}}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{1-n^{-1}}}\Phi'\left(\frac{t-\overline{x}}{\sigma\sqrt{1-n^{-1}}}\right)$$

baho MDSB bo'ladi.

2-§. Minimal riskga ega bo'lgan siljimagan baholar

$\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right),\Theta\in R^{(s)}$-parametrik statistik model va $g(\theta):\Theta\to\mathscr{Y}\subseteq R^{(r)}$, r-o'lchovli vektor funksiya bo'lsin. $g(\theta)$ funksiyani effektiv baholash masalasini qaraymiz. VIII bob 6-§da keltirilgan effektivlik haqidagi ta'riflar albatta $g(\theta)$ vektor funksiya uchun ham o'rinlidir.

$V(\theta)-r\times r$ – o'lchovli musbat aniqlangan matritsa va $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right):\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)}\right)\to\left(\mathscr{Y},\mathscr{S}\right)$ – statistika $g(\theta)$ uchun baho bo'lsin. Bu yerda $\mathscr{S}$ to'plam $\mathscr{Y}$ ning to'plam ostilari σ-algebrasi. $\mathscr{Y}\times\mathscr{Y}$ da aniqlangan kvadratik tarqoqlik funksiyasini matritsa ko'rinishida

$$L\left(\hat{g}_n,g\right)=\left(\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)-g(\theta)\right)^{\tau}V\left(\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)-g(\theta)\right)$$

va uning matematik qutilmasi – ***risk funksiyasini*** kiritamiz:

$$R\left(\hat{g}_n,g\right)=M_\theta L\left(\hat{g}_n,g\right),$$

(bu yerda τ – transponirlash belgisi).

Biz risk funksiyasiga ega kichik qiymatni beruvchi – effektiv bahoni qurish masalasi bilan shug'ullanamiz. Buning uchun dastlab quyidagi lemmani isbotlaymiz.

1-lemma. $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)$ vektor $g(\theta)$ uchun baho va

$$T\left(X^{(n)}\right):\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right)\to\left(\mathscr{Y},\mathscr{U}^{T},\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}\right)$$

biror statistika bo'lsin. U holda

$$R\left(\hat{g}_n,g\right)=M_\theta\left\{L\left(\hat{\Psi}_\theta(T),g(\theta)\right)\right\}+M_\theta\left\{M_\theta\left\{L\left(\hat{g}_n,\hat{\Psi}_\theta(T)\right)/\mathscr{U}^{T}\right\}\right\},\theta\in\Theta,\quad(1)$$

bu yerda $\Psi_\theta(T)=M_\theta\left(\hat{g}_n/\mathscr{U}^{T}\right)$.

Isboti: L ni quyidagicha ifodalaymiz:

$$L\left(\hat{g}_n,g\right)=L\left(\hat{g}_n,\hat{\Psi}_\theta(T)\right)+$$

$$+L\left(\hat{\Psi}_\theta(T),g\right)+2\left(\hat{g}_n-\hat{\Psi}_\theta(T)\right)^{\tau}V\left(\hat{\Psi}_\theta(T)-g\right).$$

$\widehat{\Psi}_{\theta}(T)$ funksiya $\mathcal{U}^{T}$ -o'lchovli va

$$M_{\theta}\left\{\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)-\widehat{\Psi}_{\theta}(T)/\mathcal{U}^{T}\right\}=0$$

(deyarli hamma yerda $\forall\theta\in\Theta$ uchun) ekanidan va shartli matematik kutilma xossasidan foydalansak,

$$R\left(\hat{g}_{n},g\right)=M_{\theta}L\left(\hat{g}_{n},g\right)=M_{\theta}\left\{M_{\theta}\left\{L\left(\hat{g}_{n},g\right)/\mathcal{U}^{T}\right\}\right\}=$$

$$=M_{\theta}\left\{M_{\theta}\left\{L\left(\hat{g}_{n},\widehat{\Psi}_{n}(T)\right)/\mathcal{U}^{T}\right\}\right\}+M_{\theta}\left\{L\left(\widehat{\Psi}_{\theta}(T),g\right)\right\}.$$

Bu lemmadan foydalangan holda siljimagan baholash nazariyasining eng asosiy teoremasini isbotlaymiz.

1-teorema (Blekuell–Rao–Leman–Sheffe). $\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)$ – baho $g(\theta)$ uchun biror siljimagan baho va $\mathcal{U}^{T}$ esa $\left\{P_{\theta},\theta\in\Theta\right\}$ oila uchun yetarli σ -algebra osti bo'lsin. U holda $\widehat{\Psi}(T)=M_{\theta}\left(\hat{g}_{n}/\mathcal{U}^{T}\right)$ baho $g(\theta)$ uchun siljimagan baho bo'lib, barcha $\theta\in\Theta$ uchun

$$R\left(\widehat{\Psi}(T),g(\theta)\right)\leq R\left(\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right),g(\theta)\right) \tag{2}$$

bo'ladi. Bu yerda tenglik faqat va faqat $\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)$ baho $\mathcal{U}^{T}$-o'lchovli bo'lganidagina erishiladi.

Isboti: $\mathcal{U}^{T}$ - yetarli σ-algebra osti ekanidan $\hat{\psi}(T)$ statistika θ ga bog'liq emas va demak $g(\theta)$ga baho bo'ladi. U siljimagan bahodir:

$$M_{\theta}\widehat{\Psi}(T)=M_{\theta}\left\{M_{\theta}\left(\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)/\mathcal{U}^{T}\right)\right\}=M_{\theta}\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)=g(\theta).$$

1–lemmadan va $L\left(\hat{g},\widehat{\Psi}(T)\right)\geq 0$ ekanidan

$$M_{\theta}\left\{L\left(\hat{g}\left(X^{(n)}\right),\widehat{\Psi}(T)\right)/\mathcal{U}^{T}\right\}\geq 0,\quad \theta\in\Theta.$$

Bu tengsizlikdan va (1) dan (2) kelib chiqadi. Endi (2) da tenglik faqat va faqat $\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)$ baho $\mathcal{U}^{T}$-o'lchovli bo'lgandagina erishiladi. Bu holda deyarli hamma yerda

$$\hat{g}_{n}\left(X^{(n)}\right)=\widehat{\Psi}\left(T\left(X^{(n)}\right)\right).$$

1-natija. $s=1$, $r=1$, $g(\theta)=\theta$, $\hat{g}_n=\hat{\theta}_n \in \mathbb{C}_B$ va $T\left(X^{(n)}\right)$ – yetarli statistika bo'lsin. U holda:

1. $\theta_n^* = M_\theta\left(\hat{\theta}_n / T\right) \in \mathbb{C}_B$.

2. Barcha $\forall\theta\in\Theta$ uchun $M_\theta\left(\theta_n^* - \theta\right)^2 \le M_\theta\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2$ bo'ladi. Agar P_θ ga nisbatan deyarli hamma yerda $\theta_n^* = \hat{\theta}_n$ bo'lsa, bu yerda tenglik bajariladi.

Demak, $\mathbb{C}_B$-sinfda $\hat{\theta}_n$ ga $M_\theta(\cdot / T)$ operatorning qo'llanishi $\hat{\theta}_n$ bahoni tekis yaxshilar ekan va VIII bob 6-§ dagi 3-ta'rifdan θ_n^* baho $\mathbb{C}_B$ da effektiv bo'ladi.

Endi θ_n^* bahoning yagonaligi haqidagi quyidagi da'voni isbotlaymiz.

2-teorema (Leman-Sheffe). $T\left(X^{(n)}\right):\left(\mathscr{X}^{(n)}, \mathscr{B}^{(n)}, \{P_\theta, \theta\in\Theta\}\right) \to \to\left(\mathscr{Y}, \mathscr{U}^T, \{Q_\theta, \theta\in\Theta\}\right)$ – mukammal yetarli statistika va $\mathbb{C}_0^g = \left\{\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\right\}$ – noma'lum $g(\theta)$ uchun siljimagan baholar sinfi bo'lsin. U holda $\mathbb{C}_0^g$ sinfda θ bo'yicha tekis minimal kvadratik riskka ega bo'lgan yagona baho mavjuddir.

Isbot. $\forall\hat{g}_n \in \mathbb{C}_0^g$ bo'lsin, u holda $\hat{\Psi}(T) = M_\theta\left(\hat{g}_n / T\right) \in \mathbb{C}_0^g$ va (2) bajariladi. Faraz qilaylik, $\Psi^*(T) \in \mathbb{C}_0^g$ ixtiyoriy boshqa baho bo'lsin. Ammo shartga ko'ra $\{Q_\theta, \theta\in\Theta\}$ oila mukammaldir. Demak, $\forall\theta\in\Theta$ uchun

$$\int_{\mathscr{Y}} \left[\hat{\Psi}(t) - \Psi^*(t)\right] Q(dt) = 0,$$

ekanidan $\{Q_\theta, \theta\in\Theta\}$ ga nisbatan deyarli hamma yerda $\hat{\Psi}(t) = \Psi^*(t)$ tenglik kelib chiqadi.

Demak, 1-natijada, agar T mukammal yetarli statistika bo'lsa, u holda $\theta_n^* \in \mathbb{C}_B$ baho yagona effektiv (yoki optimal) baho bo'lar ekan.

Misol.

1. $(0,\theta), \theta\in\Theta=(0,\infty)$ oraliqdagi tekis taqsimotni qaraymiz. Bu holda, $f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\theta^{-n}I\left(0\le x_{(n)}\le\theta\right)$, demak $T=X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$ yetarli statistika. θ ni baholash uchun

$$M_\theta X_i=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta xdx=\frac{\theta}{2}$$

tenglikdan foydalanamiz. Bu yerdan $\hat\theta_n=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ – siljimagan bahoni topamiz. Hisoblab ko'rish mumkinki, $D_\theta\hat\theta_n=\frac{\theta^2}{3n}\to 0,\ n\to\infty$ va Chebishev tengliksizligidan $\hat\theta_n$ ning asosli baho ekanini topamiz: $\hat\theta_n\xrightarrow{P}\theta,\ n\to\infty$. Demak, $\hat\theta_n$ yaxshi baho ekan. Ammo bu baho optimal emas. Biz optimal θ_n^* bahoni T yordamida qidiramiz.

1-teoremadan $\theta_n^*=M_\theta\left(\hat\theta_n/T\right)$ – eng yaxshi baho ekanini topamiz. T – mukammal ekanini ko'rsatamiz:

$$Q_\theta(t)=P_\theta(T<t)=P_\theta\left(X_i<t,i=\overline{1,n}\right)=\prod_{i=1}^n P_\theta(X_i<t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0<t\le\theta,\\ 1, & t>\theta.\end{cases}$$

$$q(t,\theta)=\frac{\partial Q_\theta(t)}{\partial t}=\begin{cases}0, & t\le 0, t>\theta,\\ \frac{n}{\theta^n}t^{n-1}, & 0<t\le\theta.\end{cases}$$

$$M_\theta\varphi(T)=\int_0^\theta\varphi(t)q(t,\theta)dt=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta\varphi(t)t^{n-1}dt=0,\ \forall\theta\in\Theta.$$

Oxirgi tenglamani ikki tomonini θ ga nisbatan differensiallaymiz va natijada $\varphi(\theta)\theta^{n-1}=0$, ya'ni $\varphi(\theta)=0, \forall\theta\in(0,\infty)$ ekanini topamiz. Demak, T – mukammal va $M_\theta T\left(X^{(n)}\right)=\frac{n}{n+1}\theta$. Bu yerda

$\Psi_n^*(T)=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ ham θ uchun siljimagan baho bo'lar ekan. Demak, 1 ehtimollik bilan

$$\theta_n^*=M_\theta\left(\hat{\theta}_n/T\right)=\Psi_n^*(T).$$

va θ_n^* – optimal baho bo'lar ekan.

3-§. Lokal minimal dispersiyali siljimagan baholar

Biz avvalgi paragrafda MDSBlarni ko'rib o'tdik. MDSBlar mavjudligining asosiy sharti ko'rilayotgan statistik modeldagi taqsimotlar oilasining mukammalligidir. Taqsimotlar oilasi mukammal bo'lmasa MDSB mavjud bo'lmaydi, lekin ***lokal minimal dispersiyali siljimagan baholar*** (LMDSB) mavjud bo'lishi mumkin.

1-ta'rif. Agar $\hat{g}_n\in\mathbb{C}_0$ va $\forall g_n^*\in\mathbb{C}_0$ baho uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$D_{\theta_0}\hat{g}_n\le D_{\theta_0}g_n^* \tag{1}$$

u holda $\hat{g}_n$ baho θ nuqtada LMDSB deb ataladi

Xuddi shunday, lokal minimal riskga ega baholarni ham aniqlash mumkin.

3-teorema. $\hat{g}_n$ siljimagan baho $g(\theta)$ uchun LMDSB bo'ladi faqat va faqat, agar $\mathrm{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n(x^{(n)}),f(x^{(n)})\right)=0$ bo'lsa, bu yerda $f(x^{(n)})$ nolning ixtiyoriy siljimagan bahosi, $D_{\theta_0}f(x^{(n)})<\infty$.

Isboti. $f(x^{(n)})$ nolning ixtiyoriy notrivial siljimagan bahosi bo'lsin. $\hat{g}_n$ bahoning $\theta=\theta_0$ nuqtada LMDSB bo'lishi uchun $\mathrm{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n(x^{(n)}),f(x^{(n)})\right)=0$ shart zarur va yetarli ekanligini ko'rsatamiz.

Zarurligi. Teskarisini faraz qilaylik: $\hat{g}_n$ baho $\theta=\theta_0$ nuqtada LMDSB, lekin $\mathrm{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n(x^{(n)}),f(x^{(n)})\right)>0$ bo'lsin. Quyidagi siljimagan bahoni ko'ramiz: $g_1=\hat{g}_n+\lambda f$, bu yerda

$2\left[\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, f\right)/D_{\theta_0}(f)\right] < \lambda < 0$. g_1 ning $\theta=\theta_0$ nuqtadagi dispersiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$D_{\theta_0}(g_1)=D_{\theta_0}(\hat{g}_n)+2\lambda\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, f\right)+\lambda^2 D_{\theta_0}(f). \qquad (2)$$

λ ga qo'yilgan shartga ko'ra

$$2\lambda\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, f\right)+\lambda^2 D_{\theta_0}(f)=2\lambda\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, f\right)\left\{1+\lambda\frac{D_{\theta_0}(f)}{2\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, f\right)}\right\}<0. \qquad (3)$$

Bundan, $D_{\theta_0}g_1 < D_{\theta_0}\hat{g}_n$ keli bchiqadi. Bu esa $\hat{g}_n$ ning LMDSB ekanligiga zid. Xuddi shunday, agar $\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n(x^{(n)}), f(x^{(n)})\right)<0$ bo'lsa, $\hat{g}_n$ baho $\theta=\theta_0$ nuqtada LMDSB bo'lmasligini ko'rsatish mumkin.

Yetarliligi. $f(x^{(n)})$ nolning ixtiyoriy siljimagan bahosi uchun $\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n(x^{(n)}), f(x^{(n)})\right)=0$ o'rinli bo'lsin. $\hat{g}_n$ bahoning $\theta=\theta_0$ nuqtada $g(\theta)$ uchun LMDSB bo'lishini ko'rsatamiz. g_1 baho $g(\theta)$ uchun biror siljimagan baho va $U=\hat{g}_n-g_1$ bo'lsin. U nolning silgimagan bahosi ekanligidan

$$\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, U\right)=\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, \hat{g}_n-g_1\right)=D_{\theta_0}(\hat{g}_n)-\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, g_1\right)=0. \qquad (4)$$

Shvars tengsizligiga ko'ra:

$$\operatorname{cov}_{\theta_0}\left(\hat{g}_n, g_1\right)\le\left[D_{\theta_0}(\hat{g}_n)\cdot D_{\theta_0}(g_1)\right]^{1/2}. \qquad (5)$$

(4) va (5) lardan

$$D_{\theta_0}\hat{g}_n \le D_{\theta_0}g_1 \qquad (6)$$

ifoda kelib chiqadi. Demak, $\hat{g}_n$ baho $\theta=\theta_0$ nuqtada $g(\theta)$ uchun LMDSB bo'ladi.

Misol.

1. $X_1,\dots,X_n \sim N(a;\sigma_1^2)$, $Y_1,\dots,Y_n \sim N(a;\sigma_2^2)$ hamda $X_1,\dots,X_n$ va $Y_1,\dots,Y_n$ lar o'zaro bog'liqsiz bo'lsin. Bu yerda $a,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho=\sigma_2^2/\sigma_1^2$

parametrlar noma'lum. Ushbu modelda $T_n = \left(\bar{x}, \bar{y}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2\right)$ statistika minimal yetarli statistika bo'ladi. a parameter uchun $\hat{a}(\rho_0) = \frac{\rho_0 \bar{x} + \bar{y}}{1+\rho_0}$ bahoning LMDSB bo'lishini ko'rsatamiz.

$f = f(T_n)$ nolning ixtiyoriy siljimagan bahosi bo'lsin, u holda

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\rho_0 \bar{x} + \bar{y}}{1+\rho_0}, f\right) = \frac{\rho_0}{1+\rho_0}\operatorname{cov}\left(\bar{x}, f\right) + \frac{1}{1+\rho_0}\operatorname{cov}\left(\bar{y}, f\right),$$

bo'ladi. $\bar{x} \sim N(a, \sigma_1^2 / n)$, $\bar{y} \sim N(a, \sigma_1^2 \rho / n)$ ekanligidan $\operatorname{cov}\left(\bar{y}, f\right) = \rho^{1/2}\operatorname{cov}\left(\bar{x}, f\right)$ bo'ladi. U holda

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\rho_0 \bar{x} + \bar{y}}{1+\rho_0}, f\right) = \frac{\sigma \rho_0^{1/2}\left(1+\rho_0\right)^{1/2}}{\sqrt{n}\left(1+\rho_0\right)}\operatorname{cov}(u, f),$$

bu yerda $u \sim N(0,1)$. $f = f(T_n)$ nolning ixtiyoriy siljimagan bahosi bo'lsa, u siljishga nisbatan invariant bo'lishi kerak, ya'ni

$$f\left(\bar{x}, \bar{y}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2\right) = f^*\left(\bar{x} - \bar{y}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2\right).$$

Bundan tashqari $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2$ va $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2$ lar $\bar{x} - \bar{y}$ ga bog'liq emas, hamda $\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right)$ uchun mukammal ekanligidan deyarli har yerda

$$M_\theta f^*\left(\bar{x} - \bar{y}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2\right) = 0$$

bo'ladi. Bundan deyarli har yerda

$$f^*\left(\bar{x} - \bar{y}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2\right) =$$

$$= -f^*\left(-\left(\bar{x} - \bar{y}\right), \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})^2\right)$$

bo'lishi kelib chiqadi. $\bar{x} - \bar{y}$ ning taqsimoti simmetrik ekanligidan foydalansak,

$$\operatorname{cov}(u, f(T_n)) = M_\theta\left(uf^*\left(\bar{x}-\bar{y}, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2\right)\right) =$$

$$= M\left[\frac{1}{2}f^*\left(\left|\bar{x}-\bar{y}\right|, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2\right)M\left(u/\left|\bar{x}-\bar{y}\right|\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}f^*\left(-\left|\bar{x}-\bar{y}\right|, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2, \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2\right)M\left(u/\left|\bar{x}-\bar{y}\right|\right)\right] = 0.$$

Bu esa $\hat{a}(\rho_0)$ bahoning LMDSB ekanligini bildiradi. Agar bu xossa barcha ρ_0 larda bajarilsa, u holda $\hat{a}(\rho_0)$ baho MDSB bo'ladi.

IX BOBGA DOIR MASALALAR

1. $X_1,\ldots,X_n$ tanlanma $Bi(1;p)$ taqsimotdan olingan bo'lsin.

a) $P(X_1+\ldots+X_m=k)$; $m,k\le n$ uchun MDSBni toping.

b) $P(X_1+\ldots+X_{n-1}>X_n)$ uchun MDSBni toping.

2. $X_1,\ldots,X_m$ tanlanma $N(a_x;\sigma_x^2)$ taqsimotdan, $Y_1,\ldots,Y_n$ tanlanma $N(a_y;\sigma_y^2)$ taqsimotdan olingan bo'lib, X_i va Y_i lar bog'liqsiz bo'lsin.

a) a_x-a_y va σ_x/σ_y lar uchun MDSBlarini toping;

b) agar $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ bo'lsa, σ_y^2 va $\left(a_x-a_y\right)/\sigma_x$ lar uchun MDSBlarini toping;

c) agar $a_x=a_y$, hamda $\sigma_x^2/\sigma_y^2=\gamma$ ma'lum bo'lsa, a_x uchun MDSBni toping;

d) agar $a_x=a_y$ bo'lsa, a_x uchun MDSB mavjud emasligini ko'rsating;

e) $P(X_1\le Y_1)$ uchun MDSBni toping;

f) agar $\sigma_x=\sigma_y$ bo'lsa, $P(X_1\le Y_1)$ uchun MDSBni toping.

3. $X_1,\ldots,X_n$ tanlanma $R(\theta_1-\theta_2,\theta_1+\theta_2)$, $\theta_1\in R$, $\theta_2>0$ taqsimotdan olingan va $n>2$ bo'lsin. θ_1,θ_2 va θ_1/θ_2 lar uchun MDSBlarini toping.

4. $X_1,\ldots,X_n$ tanlanma zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}e^{-(x-\alpha)/\beta}, & x>\beta,\alpha\in R,\beta>0,\\ 0, & x\le\beta\end{cases}$$

bo‘lgan taqsimotdan olingan bo‘lsin.

a) agar β ma’lum bo‘lsa, α uchun MDSBni toping;

b) agar α ma’lum bo‘lsa, β uchun MDSBni toping;

c) α va β lar uchun MDSBlarini toping;

d) agar β ma’lum bo‘lsa, fiksirlangan $t>\alpha$ da $P(X_1\ge t)$ va $\frac{d}{dt}P(X_1\ge t)$ lar uchun MDSBlarini toping;

e) fiksirlangan $t>\alpha$ da $P(X_1\ge t)$ uchun MDSB ni toping.

5. $X_1,\ldots,X_n$ tanlanma zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\beta\alpha^{\beta}x^{-(\beta+1)}, & x>\alpha,\alpha,\beta>0,\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

bo‘lgan taqsimotdan olingan bo‘lsin.

a) agar β ma’lum bo‘lsa, α uchun MDSBni toping.

b) agar α ma’lum bo‘lsa, β uchun MDSBni toping.

c) α va β lar uchun MDSBlarini toping.

6. $X_1,\ldots,X_m$ tanlanma $E(\alpha_x;\beta_x)$ taqsimotdan, $Y_1,\ldots,Y_n$ tanlanma $E(\alpha_y;\beta_y)$ taqsimotdan olingan bo‘lib, X_i va Y_i lar bog‘liqsiz bo‘lsin.

a) $\alpha_x-\alpha_y$ va β_x/β_y lar uchun MDSBlarini toping;

b) agar $\beta_x=\beta_y$ bo‘lsa, β_x va $(\alpha_x-\alpha_y)/\beta_x$ lar uchun MDSBlarini toping;

c) agar $\alpha_x=\alpha_y$ va lekin noma’lum bo‘lsa, α_x uchun MDSB mavjud emasligini ko‘rsating.

7. $X_1,\ldots,X_m$ tanlanma $R(0;\theta_x)$ taqsimotdan, $Y_1,\ldots,Y_n$ tanlanma $R(0;\theta_y)$ taqsimotdan olingan bo‘lib, X_i va Y_i lar bog‘liqsiz, $n>1$ bo‘lsin. θ_x/θ_y uchun MDSBni toping.

X BOB. EFFEKTIV BAHOLASH

1-§. Effektiv baholash. Kramer-Rao tengsizligi

Biz nuqtaviy statistik baholarning xossalarini oʻrganishda ularning asosligi, siljimaganligi va risk funksiyalariga alohida e'tibor berib oʻtdik. Bahoning asosli boʻlish xossasi tanlanma hajmi cheksiz orttirilgandagina namoyon boʻlsada, kichik hajmda baho xossasi asosan risk funksiyasi va xususan kvadratik risk orqali oʻrganiladi. Siljimagan baho uchun kvadratik risk dispersiya bilan ustma-ust tushadi. Bu holda dispersiyasi eng kichik boʻlgan baho eng yaxshi deb hisoblanadi. Taqsimotlar oilasi uchun ma'lum shartlar qoʻyilganida bunday dispersiyalar uchun quyi chegarani koʻrsatish mumkin ekan. Ushbu paragrafda biz skalyar parametr boʻlgan holda Kramer–Raoning tengsizligini isbotlaymiz.

$$\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right),\ \{P_\theta,\theta\in\Theta\}<<\mu,\ \Theta\subseteq R,$$

– parametrik statistik modelni qaraymiz. Har bir X_i kuzatilmaning $f(x,\theta)$ zichlik funksiyasi uchun ***regulyarlik shartlari*** kiritamiz:

(I) $N(f)=\{x:f(x,\theta)>0\}$ – toʻplam θ ga bogʻliq emas;

(II) $\Theta=R$ yoki Θ – toʻplam R dagi interval;

(III) $\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)$ – hosila mavjud va $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ ga nisbatan deyarli hamma yerda $\forall\theta\in\Theta$ uchun chekli;

(IV) $\forall\theta\in\Theta$ va i=1,2 uchun $\int\limits_{\mathscr{X}}\left|\frac{\partial^i}{\partial\theta^i}f(x,\theta)\right|\mu(dx)<\infty$;

(V) $\forall\theta\in\Theta$: $0<I(\theta)=M_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi,\theta)\right]^2<\infty$.

Biz $X^{(n)}$ tanlanmaning $f_n(x^{(n)},\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$ – zichlik funksiyasini qarayotganimizda (I)–(V) shartlarda f oʻrnida f_n ni ishlatamiz va integrallar $\mathscr{X}^{(n)}$ to'plam bo'yicha tushuniladi. $I(u)$ funksiya ξ t.m.dagi u parametr haqidagi ***Fisher informatsiyasi*** deyiladi.

Ushbu

$$l_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\sum_{i=1}^{n}l\left(x_i,\theta\right),$$

$$l\left(x_i,\theta\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_n\left(x_i,\theta\right),\ i=1,\ldots,n,$$

– funksiyalar ***informantlar*** deb ataladi.

1-lemma. Agar (I)–(IV) shartlar bajarilsa,u holda

$$M_\theta l\left(\xi,\theta\right)=0,\ \forall\theta\in\Theta. \qquad (1)$$

Isboti. $\int f\left(x,\theta\right)\mu\left(dx\right)=1$ tenglikni u bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int f\left(x,\theta\right)\mu\left(dx\right)=0,\ \forall\theta\in\Theta$$

yoki

$$\int\frac{\partial}{\partial\theta}f\left(x,\theta\right)\mu\left(dx\right)=\int l\left(x,\theta\right)P_\theta\left(dx\right)=M_\theta l\left(\xi,\theta\right)=0,\ \forall\theta\in\Theta$$

bu esa 1-lemmani isbotlaydi.

$I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)=M_\theta\left[l_n\left(X^{(n)},\theta\right)\right]^2$ – tanlanmaga mos kelgan Fisher informatsiya funksiyasi bo'lsin.

2-lemma. $\left\{f_n\left(x^{(n)},\theta\right),\theta\in\Theta\right\}$ uchun (I)–(V) shartlar bajarilsin. U holda

$$I_{X^{(n)}}\left(\theta\right)=nI\left(\theta\right),\theta\in\Theta. \qquad (2)$$

Isboti. Induksiya metodi bilan osongina o'rnatiladi. Demak, informatsiya funksiyasi additivlik xossasiga ega ekan.

3-lemma. Agar (I)–(V) shartlar bajarilsa, u holda $\forall\theta\in\Theta$ uchun

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\xi;\theta\right)\right)^2=-M_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f\left(\xi;\theta\right)\right). \qquad (3)$$

Isboti. $M_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right)$ ifodani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$M_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right)=\int\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(\xi;\theta)\cdot f(\xi;\theta)-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}f(\xi;\theta)\right)^2}{f^2(\xi;\theta)}f(\xi;\theta)\mu(dx)=$$

$$=\int\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(\xi;\theta)\mu(dx)-M_\theta I^2(\xi;\theta).$$

(IV) xossaga ko'ra

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int f(x,\theta)\mu(dx)=\int\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(x,\theta)\mu(dx)=0,\quad\forall\theta\in\Theta.$$

Bu esa 3-lemmani isbotlaydi.

$$T\left(X^{(n)}\right):\left(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right)\to\left(\mathscr{Y},\mathscr{U},\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}\right)$$

– statistikaning informatsiya funksiyasi $I_T(\theta)$ bo'lsin. Isbotsiz quyidagi muhim da'voni keltiramiz.

4-lemma. $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ va $\{Q_\theta,\theta\in\Theta\}$ taqsimotlar qoidasi uchun (I)–(V) regulyarlik shartlari bajarilsin. U holda

$$I_T(\theta)\le I_{X^{(n)}}(\theta),\forall\theta\in\Theta. \tag{4}$$

Bu yerda tenglik faqat va faqat T – yetarli statistika bo'lganidagina erishiladi.

Demak, T – variatsion qator bo'lsa, (4) da tenglik bajarilar ekan. Bu esa kuzatmalarni tartiblash natijasida informatsiyaning kamaymasligini bildiradi (chunki bu holda T va $X^{(n)}$ ekvivalent trivial yetarli statistikalardir).

Quyidagi teoremada siljimagan baholar dispersiyasi uchun quyi chegara mavjudligi ko'rsatilgan.

1-teorema (Kramer-Rao). $\left\{f_n\left(x^{(n)},\theta\right),\theta\in\Theta\right\}$ oila uchun (I)–(V) shartlar bajarilsin va differensiallanuvchi $g(\theta)$ funksiyaga siljimagan $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)$ bahosi uchun $\forall\theta\in\Theta$ larda

(VI). $\int\left|\hat{g}_n\left(x^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\right|\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)<\infty$ va $D_\theta\hat{g}_n<\infty$

shartlar o'rinli bo'lsin. U holda $\forall\theta\in\Theta$ uchun

$$D_\theta\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\geq\frac{\left[g'(\theta)\right]^2}{nI(\theta)}. \tag{5}$$

(5)da tenglik bajarilishining zarur va yetarli sharti $f_n\left(x^{(n)},\theta\right)$ – zichlik quyidagi eksponensial oilaga tegishli bo'lishidan iboratdir:

$$f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\exp\left\{\hat{g}_n\left(x^{(n)}\right)\Psi_1(\theta)+\Psi_2(\theta)+k_n\left(x^{(n)}\right)\right\} \tag{6}$$

bu yerda $\Psi_1'(\theta)\neq 0$.

Isboti. (1) ni e'tiborga olgan holda Koshi–Bunyakovskiy tengsizligidan foydalansak,

$$\left|\mathrm{Cov}_\theta\left(l_n\left(X^{(n)},\theta\right),\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\right)\right|=\left|M_\theta\left[l_n\left(X^{(n)},\theta\right)\left(\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)-g(\theta)\right)\right]\right|\leq$$

$$\leq\left[nI(\theta)D_\theta\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Bu yerda

$$M_\theta\left[l_n\cdot\left(\hat{g}_n-g(\theta)\right)\right]=M_\theta\left[l_n\cdot\hat{g}_n\right]=\hat{g}\left(x^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}M_\theta\hat{g}_n=g'(\theta) \tag{8}$$

(7) va (8) dan (5) kelib chiqadi. Endi (5) da tenglik bo'lishining zarur va yetarli sharti $\hat{g}_n$ va l_n ning chiziqli bog'liq bo'lishidir:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=a_1(\theta)\hat{g}_n\left(x^{(n)}\right)+a_2(\theta),\ a_1(\theta)\neq 0,\ x^{(n)}\in\mathscr{X}^{(n)}.$$

Bu tenglikni biror $(\theta_0,\theta)\subset\Theta$ interval bo'yicha integralaymiz va natijada (6) ni olamiz. Demak, $\forall\theta\in\Theta$:

$$\Psi_i(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}a_i(u)\,du,\ i=1,2;\ \Psi_1'(\theta)\neq 0.$$

1-natija. Agar $g(\theta)=\theta$, $\hat{g}_n\in\mathbb{C}_B$ bo'lsa, u holda $\forall\theta\in\Theta$: uchun $M_\theta\left(\hat{g}_n-\theta\right)^2=D_\theta\hat{g}_n+B^2{}_n(\theta)\geq B^2{}_n(\theta)+\frac{\left[1+B_n'(\theta)\right]^2}{nI(\theta)}$.

Xususan, $\hat{g}_n = \hat{\theta}_n \in \mathbb{C}_0$ uchun

$$D_\theta \hat{\theta}_n \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \forall \theta \in \Theta.$$

Agar (5)da tenglik o'rinli bo'lsa, $\hat{g}_n$ baho ***effektiv*** (Kramer-Rao ma'nosida) deb ataladi. $n \to \infty$da baholarning asimptotik effektivligini quyidagi kattalik bilan hisoblash mumkin:

$$0 \leq eff\left(\hat{g}_n, \theta\right) = \frac{1}{nI(\theta) D_\theta \hat{g}_n} \leq 1.$$

Misollar.

1. $(0,\theta)$ dagi tekis taqsimot uchun (I) shart bajarilmaydi. Demak, bu oila uchun (5) o'rinli emas.

2. $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x \in \mathscr{X} = (0,\infty), \theta \in \Theta = (0,\infty), \\ 0, x \notin \mathscr{X}. \end{cases}$ $T(X^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} X_i -$

mukammal yetarli statistika; $g(\theta) = \theta$; $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} T\left(X^{(n)}\right)$ – MDBS; $M_\theta \hat{\theta}_n = \theta$; $\left[D_\theta \hat{\theta}_n\right]^{-1} = \frac{n}{\theta^2}; I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}; eff\left(\hat{\theta}_n, \theta\right) = 1;$

$$f_n\left(x^{(n)}, \theta\right) = \exp\left\{\hat{\theta}_n \left(-\frac{n}{\theta}\right) - n \ln \theta\right\}.$$

Demak, $\hat{\theta}_n$ – effektiv baho.

2-§. Battachariyaning quyi chegaralari sistemasi

Kramer-Rao tengsizligini (III)–(V) regulyarlik shartlarini kuchaytirish natijasida yaxshilash mumkin. Biz siljimagan baholar dispersiyasi uchun aniqroq bo'lgan Battachariya quyi chegaralar sistemasini kiritamiz. Shunday MDSBlar borki, ularning dispersiyasi Kramer-Rao quyi chegarasiga erishmasada, Battachariyaning biror k-tartibli (k>1) quyi chegarasiga teng bo'lishi mumkin. Kramer-Rao chegarasi Battachariyaning k=1-tartibli chegarasiga tengdir. Battachariyaning regulyarlik shartlari quyidagi teoremada keltirilgan. Ushbu paragrafda biz skalyar parametrlik statistik modelni ko'ramiz.

1-teorema. (Battachariya teoremasi). $\left\{ f_n\left(x^{(n)},\theta\right),\theta\in\Theta\right\}$ – oila uchun Kramer-Raoning (I), (II) regulyarlik shartlari va quyidagilar bajarilsin:

(III)* Har bir $i=1,\dots,k$ va $\forall\theta\in\Theta$ uchun $\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f_n\left(x^{(n)},\theta\right)$ hosilalar mavjud, $\left\{P_\theta,\theta\in\Theta\right\}$ ga nisbatan deyarli hamma yerda chekli;

(IV)* Har bir $i=1,\dots,k$ va $\forall\theta\in\Theta$ uchun:

$$\int\left|\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\right|\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)<\infty;$$

(V)* barcha $i,j=1,\dots,k$ va $\forall\theta\in\Theta$ lar uchun

$$\int\left|\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\cdot\frac{\partial^j}{\partial\theta^j} f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\right|\frac{\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)}{f_n\left(x^{(n)},\theta\right)}<\infty;$$

(VI)* k marta differensiallanuvchi $g(\theta)$ funksiyaning siljimagan $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)$ bahosining dispersiyasi chekli bo'lib, quyidagi shart bajarilsin:

Barcha $i=1,\dots,k$ va $\forall\theta\in\Theta$ lar uchun

$$\int\left|\hat{g}_n\left(x^{(n)}\right)\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f_n\left(x^{(n)},\theta\right)\right|\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)<\infty.$$

$V(\theta)=\left\|V_{ij}(\theta)\right\|_{i,j=\overline{1,k}}$ – musbat aniqlangan matritsa, θ – nuqtada xos bo'lmasin,

$$V_{ij}(\theta)=M_\theta\left[\frac{1}{f_n^2\left(X^{(n)},\theta\right)}\cdot\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f_n\left(X^{(n)},\theta\right)\cdot\frac{\partial^j}{\partial\theta^j} f_n\left(X^{(n)},\theta\right)\right].$$

U holda $\forall\theta\in\Theta$ uchun

$$D_\theta\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\geq\sum_{i,j=1}^{k}V^{ij}(\theta)g^{(i)}(\theta)g^{(j)}(\theta) \qquad (1)$$

Bu yerda $\left\|V_{ij}(\theta)\right\|_{i,j=\overline{1,k}}=V^{-1}$ – matritsa V uchun teskari,

$g^{(i)}(\theta)=d^i g(\theta)/d\theta^i, i=\overline{1,k}$. (1) da tenglik bo'lishining zarur va yetarli sharti

$$\hat{g}_n\left(x^{(n)}\right)-g(\theta)=\sum_{i=1}^{k}c_i(\theta)\frac{1}{f_n\left(x^{(n)},\theta\right)}\frac{\partial^i}{\partial\theta^i}f_n\left(x^{(n)},\theta\right), x^{(n)}\in\mathscr{X}^{(n)}, \quad (2)$$

tenglikdan iborat bo'lib, C_i koeffitsiyentlar

$$\sum_{j=1}^{k}V^{ij}(\theta)C_j(\theta)=g^{(i)}(\theta), i=1,\ldots,k \quad (3)$$

– sistemani qanoatlantiradi.

1-natija. Hisoblab ko'rish mumkinki,

$$\left(\hat{g}_n, l_n^{(1)},\ldots,l_n^{(k)}\right), \quad l_n^{(i)}\left(x^{(n)},\theta\right)=\frac{1}{f_n\left(x^{(n)},\theta\right)}\frac{\partial^i}{\partial\theta^i}f_n\left(x^{(n)},\theta\right),$$

– vektorning kovariyatsiya matritsasi $\sum(\theta)$ ning determinanti

$$\det\left\{\sum(\theta)\right\}=\begin{vmatrix} D_\theta\hat{g}_n & g^{(1)}, & \ldots, & g^{(k)} \\ g^{(1)} & V_{11}, & \ldots, & V_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{(k)} & V_{1k}, & \ldots, & V_{kk}\end{vmatrix}\geq 0.$$

Bu tengsizlikdan foydalanib, (1) o'rniga quyidagini yozish mumkin:

$$D_\theta\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\geq-\frac{1}{\det\{V(\theta)\}}\begin{vmatrix} 0 & g^{(1)}(\theta), & \ldots, & g^{(k)}(\theta) \\ g^{(1)}(\theta) & V_{11}(\theta), & \ldots, & V_{1k}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{(k)}(\theta) & V_{1k}(\theta), & \ldots, & V_{kk}(\theta)\end{vmatrix}. \quad (4)$$

1) $g(\theta)=\theta$ bo'lsa, (4) dan

$$D_\theta\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)\geq\begin{cases}\dfrac{1}{\det\{V(\theta)\}}\begin{vmatrix} V_{22}(\theta) & \ldots, & V_{2k}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{2k}(\theta) & \ldots, & V_{kk}(\theta)\end{vmatrix}, & k\geq 2, \\ \dfrac{1}{nI(\theta)} & , k=1.\end{cases}$$

2) Agar $k=2$ bo'lsa, (4) ni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$D_\theta \hat{g}_n\left(X^{(n)}\right) \geq \frac{\left[g^{(1)}(\theta)\right]^2}{nI(\theta)} + \frac{\begin{vmatrix} g^{(1)}(\theta) & V_{11}(\theta) \\ g^{(2)}(\theta) & V_{22}(\theta) \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} V_{11}(\theta) & V_{12}(\theta) \\ V_{12}(\theta) & V_{22}(\theta) \end{vmatrix} V_{11}(\theta)},$$

bu yerda $V_{11}(\theta) = nI(\theta)$. Demak, Battachariyaning 2-tartibli quyi chegarasi Kramer-Rao quyi chegarasini yaxshilar ekan.

(5) tengsizlikda tenglik bo'lishining zarur va yetarli sharti $f_n\left(x^{(n)},\theta\right)$ning (6) eksponensial ko'rinishda bo'lishi edi. Quyidagi teoremadan eksponensial tipdagi oila uchun (1) da tenglik bajarilishi shartlari keltirilgan.

2-teorema (Fend). $\left\{f_n\left(x^{(n)},\theta\right),\theta\in\Theta\right\}$ oila uchun Battachariya regulyarlik shartlari o'rinli va u eksponensial tipda bo'lsin:

$$f_n\left(x^{(n)},\theta\right) = \exp\left\{t_n\left(x^{(n)}\right)\Psi_1(\theta) + \Psi_2(\theta) + k_n\left(x^{(n)}\right)\right\}, \Psi_1'(\theta) \neq 0,$$

k marta differensiallanuvchi $g(\theta)$ funksiyaning siljimagan $\hat{g}_n$ bahosi uchun (VI)* shart bajarilsin. Agar $V(\theta)$ matritsa musbat aniqlangan bo'lib, $\hat{g}_n$ning dispersiyasi Battachariyaning ($k-1$)- emas, k-chegarasiga erishsa, u holda $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)$ baho $t_n\left(X^{(n)}\right)$ning k- darajali ko'phadi bo'ladi. Aksincha, $t_n\left(X^{(n)}\right)$ning k-darajali ixtiyoriy ko'phadi dispersiyasi k-chegaraga erishadi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, regulyarlikning (I) shartni quyidagi kuchsizroq shart bilan almashtirishimiz mumkin:

(I)* $\sup\limits_{\theta\in\Theta} P_\theta\left(X^{(n)} \in \bigcup\limits_{\theta\in\Theta}\left\{x^{(n)} \in \mathscr{X}^{(n)} : f_n\left(x^{(n)},\theta\right) = 0\right\}\right) = 0$.

Misollar.

1. $f(x,\theta) = \theta^{-\frac{1}{m}} \exp\left\{-x\theta^{-\frac{1}{m}}\right\}$, $\theta\in\Theta = (0,\infty), x\in\mathscr{X} = (0,\infty)$, $m>1-$ butun son. Bu yerda

$$f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}x_i\theta^{-\frac{1}{m}}-\frac{n}{m}\ln\theta\right\}.$$

$g(\theta)=\theta$ uchun $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)=\frac{1}{m!}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]^m$ – sijimagan bahodir. U

$t_n\left(X^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ – mukammal yetarli statistikaning m-darajali ko'phadidir. Demak, $D_\theta\hat{g}_n$ – Battachariyaning m-quyi chegarasiga teng va $\hat{g}_n$ – yagona MDSB.

2. 1-misolda m=1 desak, $f(x,\theta)$ – ko'rsatkichli taqsimot bo'ladi. $g(\theta)=\theta^k$ uchun $\hat{g}_n\left(X^{(n)}\right)=\frac{(n-1)!}{(n+k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]^k$ – yagona MDSB va uning dispersiyasi Battachariyaning k-tartibli quyi chegarasiga teng. U holda $g^*(\theta)=\sum_{j=1}^{k}a_j\theta^j$ uchun $g^*\left(X^{(n)}\right)=\sum_{j=1}^{k}a_j\frac{(n-1)!}{(n+k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]^j$ – yagona MDSBning dispersiyasi o'zining k-tartibli quyi chegarasiga teng.

$V(\theta)$ – matrisa ***Battachariyaning informatsiya matritsasi*** deb ataladi. $k=1$ bo'lganida u Fisher informatsiyasi bilan ustma-ust tushadi.

3-§. Ko'p o'lchovli parametr bo'lgan holda Kramer-Rao va Battachariya tengsizliklari

$\left\{f_n\left(x^{(n)};\theta\right),\theta\in\Theta\right\}$ – zichlik funksiyalar oilasi vektor parametr $\theta=(\theta_1,\theta_2,...\theta_s)\in\Theta\subseteq R^{(s)}$ ga bog'liq bo'lsin.

$\left\{\frac{\partial^{i_1+...+i_s}}{\partial\theta_1^{i_1}...\partial\theta_s^{i_s}}=V^{(m_s)},1\le m_s=i_1+...+i_s\le k\right\}$ – differensiallash operatorlar sistemasini kiritamiz.

Biz Kramer-Rao tengsizligini Battachariya tengsizligining xususiy holi sifatida keltirib chiqaramiz.

Quyidagi tasodifiy funksiyalarni qaraymiz:

$$l_n^{i_1,\dots,i_s}\left(X^{(n)};\theta\right)=\frac{1}{f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}\nabla^{(m_s)}f_n\left(X^{(n)};\theta\right),\quad 1\le m_s\le k.$$

Bundan nisbatlar umumiy sonini r bilan belgilab, ulardan quyidagi vektorni tuzamiz:

$$L_n\left(X^{(n)};\theta\right)=\left(l_{1n}\left(X^{(n)};\theta\right),\dots,l_{rn}\left(X^{(n)};\theta\right)\right).$$

Masalan, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$, $s=2$, uchun $r=5$, $L_n=\left(l_n^{1,0},l_n^{0,1},l_n^{1,1},l_n^{2,0},l_n^{0,2}\right)=(l_{1n},\dots l_{5n})$.

Battachariya regulyarlik shartlarini kiritamiz.

(I)** Kramer-Raoning (I) (yoki (I)*) sharti o'rinli bo'lsin;

(II)** $\Theta=R^{(s)}$ yoki Θ fazo $R^{(s)}$ dagi parallelepiped;

(III)** Barcha $\theta\in\Theta$ va $1\le m_s\le k$ uchun $\nabla^{(m_s)}f_n\left(x^{(n)};\theta\right)$ – hosilalar mavjud va $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ ga nisbatan deyarli hamma yerda chekli;

(IV)** Barcha $\theta\in\Theta$ va $1\le m_s\le k$ uchun

$$\int\left|\nabla^{(m_s)}f_n\left(x^{(n)};\theta\right)\right|\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)<\infty$$

(V)** Barcha $\theta\in\Theta$ va $1\le i,\ j\le r$ uchun $J_{ij}(\theta)=M_\theta\left[l_{in}l_{jn}\right]$ mavjud, chekli va $W(\theta)=\left\|J_{ij}(\theta)\right\|_{i,j=\overline{1,r}}$ – matritsa $\forall\theta\in\Theta$ uchun musbat aniqlangan bo'lsin.

(VI)** Baholanayotgan $G(\theta)=(g_1(\theta),\dots g_m(\theta))$ vektor va uning siljimagan bahosi $\hat{G}_n\left(X^{(n)}\right)=\left(\hat{g}_{1n}\left(X^{(n)}\right),\dots\hat{g}_{mn}\left(X^{(n)}\right)\right)$ uchun $\nabla^{(m_s)}G(\theta)=\left(\nabla^{(m_s)}g_1(\theta),\dots\nabla^{(m_s)}g_m(\theta)\right)$ hosilalar mavjud va barcha $j=\overline{1,m}$; $1\le m_s\le k$; $\theta\in\Theta$ larda

$$\int\left|\hat{g}_{jn}\left(x^{(n)}\right)\nabla^{(m_s)}f_n\left(x^{(n)};\theta\right)\right|\mu^{(n)}\left(dx^{(n)}\right)<\infty$$

bo'lsin.

$D(\theta)$ orqali $\left\{\nabla^{(m_i)}G(\theta), 1\le m_i\le k\right\}$ hosilalardan tuzilgan $(r\times m)$-matritsani va $B(\theta)=M_\theta\left\{\widehat{G}_n\left(X^{(n)}\right)\cdot \widehat{G}^{\tau}_n\left(X^{(n)}\right)\right\}$ ni belgilaymiz. Bunda $D(\theta)$ matritsaning satrlaridagi hosilalarning tartiblanishi L_n vektordagidek.

1-teorema (Bolshev). (I)*-(IV)** shartlari o'rinli bo'lsin. U holda $B(\theta)-D(\theta)W^{-1}(\theta)D^{\tau}(\theta)$ nomanfiy aniqlangan, ya'ni $\forall z=(z_1,...z_m)\in R^{(m)}$ uchun

$$zB(\theta)z^{\tau}\ge zD(\theta)W^{-1}(\theta)D^{\tau}(\theta)z^{\tau},\quad \forall\theta\in\Theta \tag{1}$$

tengsizlik o'rinli. (1)da tenglik bajarilishi zarur va yetarli sharti

$$\widehat{G}_n\left(X^{(n)}\right)-G(\theta)=L\left(X^{(n)};\theta\right)W^{-1}(\theta)D^{\tau}(\theta) \tag{2}$$

tenglikdan iborat.

1-natija. 1) $k=1$ bo'lganida, (1) tengsizlik Kramer-Raoning vektor parametr uchun quyi chegarasini aniqlaydi. Bu holda (2) tenglikni quyidagi ekvivalent formada ham yozish mumkin: $\forall\left(x^{(n)};\theta\right)\in \mathscr{X}^{(n)}\times\Theta$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(\theta)\left[\widehat{g}_{jn}\left(x^{(n)}\right)-g_j(\theta)\right],\ j=1,...,s.$$

Bu tengsizliklar sistemasi esa, o'z navbatida, maxsus eksponensial oilani aniqlaydi:

$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\widehat{g}_{jn}\left(x^{(n)}\right)\Psi_j(\theta)+\Psi_0(\theta)+k_n\left(x^{(n)}\right)\right\}. \tag{3}$$

2) $m=1$, ya'ni skalyar funksiya uchun (2) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin: $\forall\left(x^{(n)};\theta\right)\in \mathbf{X}^{(n)}\times\Theta$,

$$\widehat{g}_n\left(x^{(n)}\right)-g(\theta)=\frac{1}{f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}\left\{\sum_{i=1}^{s}c_i(\theta)\frac{\partial f_n}{\partial\theta_i}+\sum_{i,j=1}^{s}c_{ij}(\theta)\frac{\partial^2 f_n}{\partial\theta_i\partial\theta_j}+...+\right.$$

$$\left.+\sum_{m_s=1}^{k}c_{l_1...l_s}(\theta)\frac{\partial^{m_s}f_n}{\partial\theta_1^{l_1}...\partial\theta_s^{l_s}}\right\} \tag{4}$$

Agar (1) da tenglik bajarilsa, baho ***effektiv*** ($k=1$ da Kramer-Rao va $k>1$da Battachariya ma'nosida) deyiladi.

Misollar.

1. $P_\theta=N(\theta_1,\theta_2)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=R^{(1)}\times(0,\infty)$, $g_1(\theta)=\theta_1$, $g_2(\theta)=\theta_2$ bo'lsin. $G(\theta)=\left(g_1(\theta),g_2(\theta)\right)$ uchun $\widehat{G}_n\left(\widehat{g}_{1n},\widehat{g}_{2n}\right)$ baho siljimagan bahodir. Bu yerda $\widehat{g}_{1n}=\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\widehat{g}_{1n}=\overline{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2$.

Ammo $\widehat{G}_n$ baho Kramer-Rao ma'nosida effektiv baho emas, ya'ni $k=1$da (1)da tenglik bajarilmaydi. Buning sababi esa (2) ning bajarilmasligidan kelib chiqadi:

$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\exp\left\{\widehat{g}_{1n}(x^{(n)})\frac{n\theta_1}{\theta_2}+\widehat{g}_{2n}(x^{(n)})\left(-\frac{n-1}{2\theta_2}\right)+\left[\widehat{g}_{1n}(x^{(n)})\right]^2\left(-\frac{n}{2\theta_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[-\left(\frac{n\theta_1^2}{2\theta_2}+\frac{n}{2}\ln\theta_2\right)\right]+\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi)\right)\right\},$$

– eksponenta ostida $\widehat{g}^{\,2}_{1n}$ qatnashmoqda. Ammo to'g'ridan-to'g'ri hisoblab, $\widehat{G}_n$ ning Kramer-Rao ma'nosida asimptotik effektivligini ko'rsatish mumkin. Bu holda

$$B(\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\theta_2}{n} & 0\\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n-1}\end{pmatrix},\quad D(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad W^{-1}(\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\theta_2}{n} & 0\\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n}\end{pmatrix},$$

$$\det\{B(\theta)\}=\frac{2\theta_2^3}{n(n-1)},\quad \det\{W^{-1}(\theta)\}=\frac{2\theta_2^3}{n^2}.$$

Demak,

$$eff\left(\widehat{G}_n:G\right)=\frac{\det\{D(\theta)D^T(\theta)\}\det\{W^{-1}(\theta)\}}{\det\{B(\theta)\}}=1-\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}1.$$

2. $P_\theta=N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$, $k=2$, $g(\theta)=\theta_2^2$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$, $m=1$ bo'lsin. $\widehat{g}_n=\overline{S}^2$ baho siljimagan bo'ladi. Bu holda (4) bajariladi:

$$\widehat{g}_n-g(\theta)=\frac{1}{f_n}\left\{\frac{\theta_2^3}{n-1}\frac{\partial f_n}{\partial\theta_2}-\frac{\theta_2^4}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f_n}{\partial\theta_1^2}\right\}.$$

Demak, $D_\theta \hat{g}_n$ Battachariyaning 2-tartibli quyi chegarasiga teng va $\hat{g}_n$ baho Battachariya ma'nosida effektiv bo'lar ekan.

4-§. Asimptotik effektiv baholash

Ko'p hollarda baholarni asimptotik ma'noda solishtirishga to'g'ri keladi.

1-ta'rif. Agar $n \to \infty$ da ixtiyoriy $g^* \in \Theta$ uchun

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_\theta\left(\hat{g}_n - g(\theta)\right)^2}{M_\theta\left(g^* - g(\theta)\right)^2} \le 1 \tag{1}$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $\hat{g}_n \in \Theta$ baho $g(\theta)$ uchun ***asimptotik effektiv*** deyiladi.

Ushbu ta'rifni ma'lum baholar sinflari uchun ham keltirish mumkin. Agar $\mathbb{C}_0$ – siljimagan baholar sinfini olsak, (1) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_\theta \hat{g}_n}{Dg^*} \le 1. \tag{2}$$

$\mathbb{C}_\Phi$ – asimptotik normal baholar sinfi bo'lsin, ya'ni $\forall \theta^* \in \mathbb{C}_\Phi$ uchun

$$\left(\theta^* - \theta\right)\sqrt{n} \Rightarrow N\left(0; \frac{\sigma^2}{a}\right)$$

o'rinli.

2-ta'rif. θ^* baho θ uchun asimptotik effektiv deyiladi, agar ixtiyoriy $\theta_n \in \mathbb{C}_\Phi$ uchun

$$\sigma^2(\theta) \le \sigma_1^2(\theta) \tag{3}$$

munosabat o'rinli bo'lsa. Bu yerda $\sigma^2(\theta)$ va $\sigma_1^2(\theta)$ lar mos ravishda θ^* va θ_n baholarning tarqoqlik koeffitsiyentlaridir.

Bu ikki ta'rif ekvivalentdir: $\theta^* \in \mathbb{C}_\Phi$ bo'lsin, u holda $n \to \infty$ da

$$M_\theta\left(\theta^* - \theta\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + r_n(\theta)\right), \quad r_n(\theta) \to 0.$$

(1) ifodaga asosan

$$M_\theta\left(\theta^* - \theta\right)^2 \le M_\theta\left(\theta_n - \theta\right)^2\left(1 + r_n'(\theta)\right), \; r_n' \to 0,$$

ixtiyoriy $\theta^* \in \mathbb{C}_\Phi$ da (3) ga ekvivalent. $\mathbb{C}_\kappa$ orqali quyidagi shartlar o'rinli bo'ladigan baholar sinfini qaraylik:

$$|b(\theta)| \le \varepsilon(\theta;n)/\sqrt{n}, \quad |b'(\theta)| \le \varepsilon(\theta;n), \quad M_\theta(\theta^*)^2 < c < \infty,$$

bu yerda $n \to \infty$ da $\varepsilon(\theta,n) = 0(1)$ va $b(\theta)$ siljish kattaligi, ya'ni $M_\theta(\theta^* - \theta) = b(\theta)$.

Teorema. Regulyarlik shartlari o'rinli bo'lsin. U holda $\mathbb{C}_\kappa$ da ixtiyoriy Kramer-Rao ma'nosidagi asimptotik effektiv baho $\mathbb{C}_\kappa$ da asimptotik effektiv bo'ladi.

Isboti. θ^* Kramer-Rao ma'nosida asimptotik effektiv baho bo'lsin, u holda

$$M_\theta\left(\theta^* - \theta\right)^2 = \frac{1 + o(1)}{nI(\theta)}$$

Kramer-Rao tengsizligiga ko'ra barcha $\theta_n^* \in \mathbb{C}_\kappa$ uchun:

$$\liminf_{n\to\infty} M_\theta n(\theta^* - \theta)^2 \ge I^{-1}(\theta) = \lim_{n\to\infty} M_\theta n(\theta_n - \theta)^2.$$

5-§. Bahadur bo'yicha asimptotik effektivlik

$\left(\mathscr{X}^{(n)}, \mathscr{B}^{(n)}, \left\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\right\}\right)$ statistik model va T_n noma'lum parametr θ uchun baho bo'lsin.

$\{T_n\}$ baholar asimptotik effektivligini $P_\theta(|T_n - \theta| < \gamma)$ ehtimollik bilan o'lchashni R.Bahadur taklif qilgan.

Har bir kuzatilmaning zichlik funksiyasi $f(x;\theta)$ bo'lsin.

Teorema. T_n noma'lum parametr θ uchun asosli baho bo'lsin. U holda $\forall \gamma' > \gamma$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta\{|T_n - \theta| > \gamma\} \ge \int_X \ln \frac{f(x;\theta+\gamma')}{f(x;\theta)} f(x;\theta+\gamma')\nu(dx). \quad (1)$$

Isboti. Yensen tengsizligiga ko'ra:

$$-K = -\int_x \ln \frac{f(x;\theta+\gamma')}{f(x;\theta)} f(x;\theta+\gamma') d\nu \le \ln \int_x f(x;\theta) d\nu = 0.$$

$$\lambda_n = \lambda_n(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1, & |T_n - \theta| > \gamma, \\ 0, & |T_n - \theta| \le \gamma, \end{cases}$$ bo'lsin, u holda ixtiyoriy $d > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P_\theta\{|T_n - \theta| > \gamma\} = M_\theta \lambda_n \ge M_\theta\left\{\lambda_n \chi\left\{\prod_{j=1}^n \frac{f(x_j;\theta+\gamma')}{f(x_j;\theta)} < e^d\right\}\right\} \ge$$

$$\ge e^{-d} M_{\theta+\gamma'}\left\{\lambda_n \chi\left\{\prod_{j=1}^n \frac{f(x_j;\theta+\gamma')}{f(x_j;\theta)} < e^d\right\}\right\} \ge$$

$$\ge e^{-d}\left(P_{\theta+\gamma'}\{|T_n - \theta| > \gamma\} - P_{\theta+\gamma'}\left\{\prod_{j=1}^n \frac{f(x_j;\theta+\gamma')}{f(x_j;\theta)} > e^d\right\}\right)$$

T_n – asosli baho ekanligidan $\lim\limits_{n\to\infty} P_{\theta+\gamma'}\{|T_n - \theta| > \gamma\} = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $d = n(K+\varepsilon), \varepsilon > 0$ ixtiyoriy kichik son. Katta sonlar qonuniga ko'ra

$$P_{\theta+\gamma'}\left\{\prod_{j=1}^n \frac{f(x_j;\theta+\gamma')}{f(x_j;\theta)} > e^d\right\} = P_{\theta+\gamma'}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left(\ln\frac{f(x_j;\theta+\gamma')}{f(x_j;\theta)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M_{\theta+\gamma'} \ln\frac{f(x_j;\theta+\gamma')}{f(x_j;\theta)}\right) > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Demak, barcha katta n larda

$$P_\theta\{|T_n - \theta| > \gamma\} \ge \frac{1}{2}e^{-d} = \frac{1}{2}e^{-n(K+\varepsilon)} \tag{1}$$

tengsizlik quyidagi Bahadur bo'yicha asimptotik effektiv bahoga keladi: $\forall T_n$ – asosli baho uchun

$$\lim_{j\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma^2 n}\ln P_\theta\{|T_n - \theta| > \gamma\} \ge \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma^\alpha}\int_x \ln\frac{f(x;\theta)}{f(x;\theta+\gamma)} f(x;\theta+\gamma)dv. \tag{2}$$

$f(x,\theta)$ chekli $I(\theta)$ Fisher informatsiyasiga ega bo'lsin. U holda (2) ifodada $\alpha = 2$ deb olish kerak.

T_n bahoning effektiv standart og'ishi $\tau_n = \tau_n(\theta;\gamma,T_n)$

$$P_\theta\{|T_n-\theta|>\gamma\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\gamma/\tau_n}^{\infty} e^{-u^2/2}du = P\left\{|\xi| \geq \frac{\gamma}{\tau_n}\right\}.$$

ifoda orqali aniqlanadi. Bu yerda $\xi \sim N(0;1)$.

Demak, T_n – asosli baho bo'lishi uchun zarur va yetarli shart $\forall\gamma>0$: $\tau_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Agar

$$\frac{z}{1+z^2}e^{-z^2/2} < \int_z^{\infty} e^{-u^2/2}du < \frac{1}{z}e^{-z^2/2}$$

tengsizlikdan foydalansak, u holda

$$\lim_{\gamma\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\gamma^2}\ln P_\theta\{|T_n-\theta|>\gamma\} = -\frac{1}{2}\lim_{\gamma\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau_n^2}$$

o'rinli bo'ladi.

X BOBGA DOIR MASALALAR

Quyidagi modellarda keltirilgan baholarni effektivlikka tekshiring.

№	Model	Baho
1.	$N(\theta;\sigma^2)$	$\hat\theta = X_1$
2.	$N(a;\theta^2)$	$\hat\theta^2 = S^2$
3.	$Ge(\theta)$	$\hat\theta = 1/(1+\bar x)$
4.	$\Gamma_{\theta,\lambda}$	$\hat\theta = \bar x/\lambda$
5.	$f(x,\theta)=e^{-x+\theta}\left(1+e^{-x+\theta}\right)^{-2}; x,\theta\in R$	$\hat\theta = \bar x$
6.	$E(\theta)$	$\hat\theta = \frac{1}{\bar x}$

XI BOB. NUQTAVIY BAHOLASH USULLARI

1-§. O'rniga qo'yish usuli. Momentlar usuli

Statistik model $\left(\mathscr{X}^{(n)}, \mathscr{B}^{(n)}\right)$ dagi taqsimotlarning $\{P\}$ oilasi bilan berilgan bo'lsin. Biz VIII bob 6-§ da baholarning ta'rifi, xossalarini va ularga misollar ko'rgan edik. Endi nuqtaviy baholarni qurishning ba'zi keng tarqalgan usullari bilan tanishib chiqamiz. Biror $\theta = \theta(P)$ (vektor yoki skalyar) funksionalni baholash masalasini qaraymiz. $\widehat{P}_n$ orqali empirik taqsimotni belgilaymiz:

$$\widehat{P}_n(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(X_i \in B\right), \ B \in \mathscr{B}.$$

Bu yerda $\widehat{F}_n(x) = \widehat{P}_n((-\infty, x))$ (VII bobni 2-§iga qarang). θ ni baholashning tabiiy usullaridan biri – ***o'rniga qo'yish usuli***dir. Bu usulga ko'ra, $\hat{\theta}_n = \theta(\widehat{P}_n)$ baho P o'rniga $\widehat{P}_n$ni qo'yish yordamida quriladi. Bunday baholarning xossalari, albatta $\theta(P)$ funksionalning xossalariga bog'liqdir. Masalan, VII-bob 3-§ oxirida ko'rilgan $\widehat{\mu}_n(\widehat{F}_n)$ statistika $\mu(F) = h\left(\int g(x)dF(x)\right)$ funksional uchun o'rniga qo'yish usuli bahosi bo'lib, h – funksiya uzluksiz bo'lgan holda kuchli asosli baho bo'ladi. Ko'p hollarda $\theta(P)$ funksional biror $E(\theta, P) = 0$ tenglamaning yechimi sifatida noaniq shaklda beriladi. Bunday hollarda $\theta = \theta(P)$ uchun baho $E(\theta, \widehat{P}_n) = 0$ tenglamaning yechimi sifatida aniqlanadi. Endi o'rniga qo'yish usulining ba'zi xususiy hollari bilan tanishib chiqamiz.

Statistik model $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subseteq R^{(s)}$ oila bilan berilgan bo'lib, $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_s)$ noma'lum parametr bo'lsin.

Momentlar usuli. $G(\theta)=(g_1(\theta),...,g_s(\theta))$ vektor funksiya uchun biror asosli $\tilde{G}_n(X^{(n)})=(\tilde{g}_{1n}(X^{(n)}),...\tilde{g}_{sn}(X^{(n)}))$ baho mavjud bo'lsin. Momentlar usuliga asosan, $\theta=(\theta_1,...\theta_s)$ uchun $\tilde{\theta}=(\tilde{\theta}_{1n},...,\tilde{\theta}_{sn})$ baho sifatida $G(\theta)=\tilde{G}_n$ tenglamaning, ya'ni

$$g_i(\theta)=\tilde{g}_{in}(X^{(n)}),\ i=1,...,s, \tag{1}$$

sistemaning yechimi olinadi. Bunday baholarning xossalari $g_i, i=\overline{1,s}$, funksiyalarning xossalari bilan aniqlanadi. Odatda $g_i(\theta)=M_\theta a_i(\xi)$, $i=\overline{1,s}$, (masalan, $a(\xi)=\xi^i$) ko'rinishda tanlanadi. Bu holda katta sonlar qonunidan foydalanib, $\tilde{g}_{in}$ sifatida $a_i(\xi)$ ning empirik momentini tanlash mumkin:

$$\tilde{g}_{in}(X^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_i(X_j),\ i=\overline{1,s}.$$

1-teorema. Faraz qilaylik, $g_i(\theta)$ $i=\overline{1,s}$ funksiyalar Θ da uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, $J_g(\theta)=\det\left\{\left\|\frac{\partial g_i(\theta)}{\partial\theta_j}\right\|_{i,j=\overline{1,s}}\right\}$ - yakobian noldan farqli bo'lsin. Agar (1) sistema yechimi $\tilde{\theta}_n$ yagona bo'lsa, u holda bu yechim θ uchun asosli baho bo'ladi.

Isboti. $G:\Theta\to\mathscr{H}$ desak, $G^{-1}:\mathscr{H}\to\Theta$ – bir qiymatli va uzluksizdir. $\tilde{g}_{in}\xrightarrow[n\to\infty]{P}g_i$, $i=\overline{1,s}$, ekanidan, 1 ga yetarlicha yaqin ehtimollik bilan $\tilde{G}_n\in\mathscr{H}$. U holda (1) dan $\tilde{\theta}_n=G^{-1}(\tilde{G}_n)$ va G^{-1} ning uzluksiz ekanidan, $n\to\infty$ da $\tilde{\theta}_n\xrightarrow{P}G^{-1}(G(\theta))=\theta$.

Misollar.

1. $P_\theta=N(\theta_1,\theta_2^2)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=R\times(0,\infty)$ noma'lum parametrning momentlar usuli bahosini topamiz: $g_1(\theta)=M_\theta\xi=\theta_1$, $g_2(\theta)=M_\theta\xi^2=\theta_1^2+\theta_2$ ekanidan

$$\begin{cases} \tilde{g}_{1n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \theta_1; \\ \tilde{g}_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \theta_1^2 + \theta_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\theta}_{1n} = \bar{x} = \tilde{g}_{1n}; \\ \tilde{\theta}_{2n} = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2; \end{cases}$$

$J_g(\theta) = 1$. Demak, $\tilde{\theta}_n = \left(\bar{x}, S\right)$ baho (θ_1, θ_2) uchun asosli baho bo'lar ekan.

2. $P_\theta = R(0,\theta)$, $\theta > 0$ modelda noma'lum parametrning momentlar usulida bahosini topamiz. Avval momentlar usuli bahosini 1-moment orqali topamiz. Ma'lumki, $g_1(\theta) = M_\theta \xi = \frac{\theta}{2}$ ekanligidan, $\tilde{\theta}_{1n} = 2\bar{x}$ momentlar usuli bahosi bo'ladi. Endi momentlar usuli bahosi k-tartibli momenti orqali topamiz:

$$g_k(\theta) = M_\theta \xi^k = \int_0^\theta x^k \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta^k}{k+1},$$

u holda $\tilde{\theta}_{kn} = \sqrt[k]{(k+1)\overline{x^k}}$ momentlar usuli bahosi bo'ladi.

3. $P_\theta = N(\theta, 1)$, $\theta > 0$ bo'lsin, noma'lum parametrni momentlar usuli bahosini topamiz: $g(\theta) = M_\theta \xi = \theta$ ekanligidan $\tilde{\theta}_n = \bar{x}$ momentlar usuli bahosi bo'ladi. Shartga ko'ra $\theta > 0$, lekin $\bar{x}$ manfiy bo'lishi ham mumkin. Shuning uchun agar $\bar{x} < 0$ bo'lsa, baho sifatida 0 ni olish kerak va agar $\bar{x} > 0$ bo'lsa, baho sifatida $\bar{x}$ olinadi. Demak, $\theta^* = \max\left\{0, \bar{x}\right\}$ – momentlar usulining "to'g'rilangan" bahosi bo'ladi.

2-§. Haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli

Faraz qilaylik, $\{P_\theta, \theta \in \Theta\} << \mu$, $f(x;\theta) = \frac{dP_\theta}{d\mu}(x)$ va $\theta_1 \neq \theta_2$ θ_1, $\theta_2 \in \Theta$ uchun $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ bo'lsin. Biz $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_s) \in \Theta \subseteq R^{(s)}$ – vektor parametrni baholash masalasini qaraymiz. ***Haqiqatga o'xshashlik funksiyasi*** deb, $\mathscr{X}^{(n)} \times \Theta$ da aniqlangan nomanfiy $f_n^*(x^{(n)};\theta) = Cf_n(x^{(n)};\theta)$, $(x^{(n)};\theta) \in \mathscr{X}^{(n)} \times \Theta$ ko'rinishdagi funksiyaga aytiladi. Bu yerda $C \in (0,\infty)$ – ko'paytuvchi θ ga bog'liq emas, ammo $x^{(n)}$ga bog'liq bo'lishi mumkin va $f_n(x^{(n)};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_n(x_i;\theta)$ – tanlanmaning zichlik funksiyasi.

1-ta'rif. ***Haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli bahosi*** (HMO'UB) deb, quyidagi munosabatni qanoatlantiruvchi $\mathscr{B}^{(n)}$-o'lchovli $\hat{\theta}_n(X^{(n)})$: $\mathscr{X}^{(n)} \to \Theta$ statistikaga aytiladi:

$$f_n^*(X^{(n)};\hat{\theta}_n) = \max_{\theta\in\Theta}\{f_n^*(X^{(n)};\theta)\}. \qquad (1)$$

Demak, $\hat{\theta}_n$ni topish, f_n^* ning maksimumini topishga ekvivalent masala ekan. f_n^* va $\ln f_n^*$ funksiyalar bir xil nuqtalarda ekstremumga erishishi sababli, (1) tenglikni $\ln f_n^*$ uchun ham quyidagi ekvivalent ko'rinishda yozish mumkin:

$$\hat{\theta}_n(X^{(n)}) = Arg\max_{\theta\in\Theta}\left\{\int \ln f(x;\theta)\hat{P}_n(dx)\right\} = Arg\max_{\theta\in\Theta}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i;\theta)\right\}. \qquad (2)$$

Ba'zi hollarda (1) tenglama yechimga ega bo'lmasligi ham mumkin. Odatda HMO'UB fiksirlangan $x^{(n)} \in \mathscr{X}^{(n)}$ da $f_n^*(x^{(n)};\theta)$ – θ ning uzluksiz funksiyasi bo'lgan hollarda qo'llaniladi. HMO'UBlari yagona bo'lmasligi mumkin. Endi bahoning bunday nomlanishini biz faqat diskret holdagina (μ – sanoqli o'lchov) tushuntiramiz. Bu holda $f(x;\theta) = P_\theta(\xi = x)$ va

$$f_n(x^{(n)};\theta) = P_\theta(X^{(n)} = x^{(n)}) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(\xi = x_i).$$

Demak, biz $\hat{\theta}_n$ sifatida f_n ehtimollikni maksimallashtiruvchi parametr qiymatini tanlar ekanmiz.

1. Agar $\Theta \subset R^{(s)}$ bo'lib, ixtiyoriy $x^{(n)} \in \mathscr{X}^{(n)}$ uchun $f_n^*(x^{(n)};\theta)$ funksiya θ bo'yicha differensiallanuvchi va o'z maksimumiga Θning ichki nuqtasida (Θga biror oralig'i bilan tegishli bo'lgan nuqtada) erishsa, u holda $\hat{\theta}_n$ baho quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\left.\frac{\partial f_n^*\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n}=0 \text{ yoki } \left.\frac{\partial \ln f_n^*\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n}=0, \qquad (3)$$

bu yerda

$$\frac{\partial \ln f_n}{\partial\theta}=\left(\frac{\partial \ln f_n}{\partial\theta_1},\dots,\frac{\partial \ln f_n}{\partial\theta_s}\right).$$

2. Agar Kramer-Rao ma`nosida effektiv baho mavjud bo'lsa, uni HMO'UB yordamida topish mukin (X-bob 3-§ dagi 1-natijaga qarang).

3. Yana shuni ta'kidlab o'tamizki, agar HMO'UBsi $\hat{\theta}_n$ yagona bo'lsa, u yetarli statistika T ning funksiyasi bo'ladi. Haqiqatan ham, VIII-bob 3-§ dagi Neyman-Fisher alomatiga asosan:

$$\left.\frac{\partial \ln f_n\left(x^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n}=\left.\frac{\partial \ln \Psi_n\left(T\left(x^{(n)}\right);\theta\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n}=0.$$

Ammo $\hat{\theta}_n$ ning o'zi yetarli statistika bo'lishi shart emas. Bunga biz quyida misol keltiramiz.

HMO'UBsining yana bir muhim xossalaridan biri – uning parametrni almashtirishga nisbatan invariantligidir. Bu trivial da'voning isbotsiz keltiramiz. Θ – fazo $R^{(s)}$ dagi interval bo'lsin.

1-teorema (Invariantlik prinsipi (Zexna)). $g(\theta):\Theta\to\mathscr{K}$ funksiya berilgan bo'lib, $\mathscr{K}$ – fazo $R^{(k)}\,(k\le s)$dagi interval bo'lsin. Agar $\hat{\theta}_n$ baho θ parametr uchun HMO'UBsi bo'lsa, u holda $g(\theta)$ uchun $\hat{g}_n=g(\hat{\theta}_n)$ HMO'UB bo'ladi.

Misollar.

1. P_θ – binominal taqsimot bo'lsin:

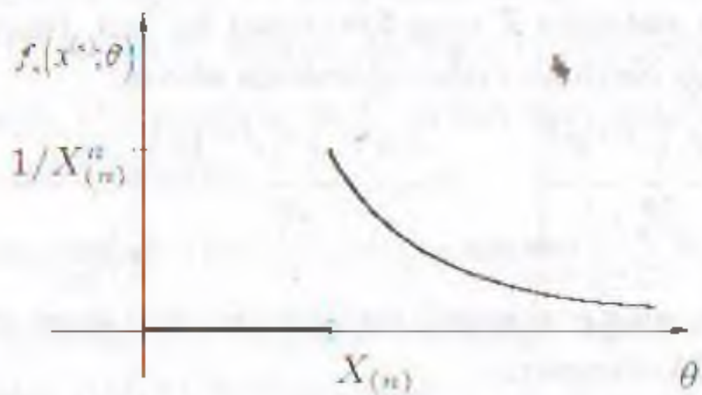
$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=C\theta^{T\left(x^{(n)}\right)}(1-\theta)^{n-T\left(x^{(n)}\right)},\; C=\prod_{i=1}^{n}C_n^{x_i},$$

Bu yerda $\theta\in\Theta=(0,1)$, $T\left(X^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ – yetarli statistika. (3) dan

$$\frac{\partial \ln f_n^*}{\partial \theta}=\frac{\partial \ln f_n}{\partial \theta}=\frac{1}{\theta}T\left(x^{(n)}\right)-\frac{1}{1-\theta}\left(n-T\left(x^{(n)}\right)\right)=0.$$

Demak, $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}T\left(X^{(n)}\right)$ –HMO'UB.

2. P_θ – $R(0,\theta)$, $(0,\theta)$ intervaldagi tekis taqsimot bo'lsin. $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\theta^{-n}I\left(0\le X_{(n)}\le\theta\right)$, $\theta\in\Theta=(0,\infty)$, bu yerda $T\left(X^{(n)}\right)=X_{(n)}=\max\limits_{1<i<n}\{X_i\}$ – yetarli statistika.



Chizmadan ko'ramizki, $\hat{\theta}_n=X_{(n)}$ baho θ uchun HMO'UBsidir.

3. P_θ taqsimot $\left(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right)$ intervaldagi tekis taqsimot uchun $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=I\left(\theta-\frac{1}{2}\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le\theta+\frac{1}{2}\right)=I\left(x_{(n)}-\frac{1}{2}\le\theta\le x_{(1)}+\frac{1}{2}\right)$, $\theta\in\Theta=(-\infty,\infty)$. Bu holda HMO'UBsi yagona emas. $\hat{\theta}_n$ sifatida $\left(X_{(n)}-\frac{1}{2},X_{(1)}+\frac{1}{2}\right)$ intervaldagi ixtiyoriy nuqtani olish mumkin:

$$\hat{\theta}_n^{(1)}=\frac{1}{2}\left(X_{(1)}+X_{(n)}\right);\ \hat{\theta}_n^{(2)}=\left(X_{(n)}-\frac{1}{2}\right)+\left(X_{(1)}-X_{(n)}+1\right)Cos^2X_1;$$

$$\hat{\theta}_n^{(3)}=\left(X_{(1)}+\frac{1}{2}\right)-\left(X_{(1)}-X_{(n)}+1\right)Cos^2X_1;\cdots.$$

Bu holda $T\left(X^{(n)}\right)=\left(X_{(1)};X_{(n)}\right)$ yetarli statistika, ammo $\hat{\theta}_n^{(2)}$, $\hat{\theta}_n^{(3)}$ lar T ning funksiyasi emas.

4. $P_\theta = N\left(\theta_1, \theta_2^2\right), \theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta=R^{(1)}\times(0,\infty)$. U holda

$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\frac{1}{\theta_2^n(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta_1\right)^2\right\},$$

va

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln f_n}{\partial\theta_1}=\dfrac{1}{\theta_2^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1\right]=0, \\ \dfrac{\partial \ln f_n}{\partial\theta_2}=-\dfrac{n}{\theta_2}+\dfrac{1}{\theta_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta_1\right)^2=0. \end{cases}$$

Bu sistemadan $\hat{\theta}_{1n}=\overline{x}$, $\hat{\theta}_{1n}^2=S^2$ baholarni topamiz. Bu baholar yetarli statistika $T\left(X^{(n)}\right)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i;\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ ning funksiyasidir.

5. $P_\theta=\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$ – parametrli logarifmik normal taqsimot bo'lsin. U holda $Y=\ln\xi$ taqsimoti $N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$ bo'ladi. Ma'lumki,

$$g_1(\theta)=M_\theta\xi=\exp\left(\theta_1+\frac{\theta_2^2}{2}\right),$$

$$g_2(\theta)=D_\theta\xi=g_1^2(\theta)\left[\exp\left(\theta_2^2\right)-1\right].$$

1-teorema va 4-misoldan $g(\theta)=\left(g_1(\theta),g_2(\theta)\right)$ uchun baho $\hat{g}_n=\left(\hat{g}_{1n},\hat{g}_{2n}\right)$ bu yerda

$$\hat{g}_{1n}=g_1\left(\hat{\theta}_n\right)=\exp\left(\overline{y}+\frac{1}{2}S_y^2\right),$$

$$\hat{g}_{2n}=g_2\left(\hat{\theta}_n\right)=\hat{g}_{1n}^2\left[\exp\left(S_y^2\right)-1\right],$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i;\ S_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln X_i-\overline{y}\right]^2.$$

Biz ushbu paragrafning oxirida HMO'UBlarining eng muhim xossalaridan biri – asimptotik effektivligi haqidagi quyidagi da'voni isbotsiz keltiramiz. Bunday xossaga ega baholar eng yaxshi asimptotik normal baholar deb ataladi.

2-teorema. $\hat{\theta}_n = \left(\hat{\theta}_{1n},...,\hat{\theta}_{sn}\right)$ baho $\theta = \left(\theta_1,...\theta_s\right)$ parametr uchun HMO'UBsi quyidagilar o'rinli bo'lsin:

1) $\hat{\theta}_n - \theta = o_p(1)\ n \to \infty$;

2) Barcha $i = 1,...,s$ va $\theta \in \Theta$ lar uchun $\dfrac{\partial \ln f_r\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial \theta_i}$ hosilalar mavjud va 1 ehtimollik bilan chekli bo'lsin;

3) $\varepsilon \to 0$ da

$$\sup_{|\theta-\theta_0|\le\varepsilon}\left|\frac{\partial^2 \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}-\frac{\partial^2 \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right| \le H\left(X^{(n)};\theta\right)o_p(1)$$

bu yerda $H\left(X^{(n)};\theta\right) \ge 0$ – tasodifiy funksiya P_{θ_0} ga nisbatan integrallanuvchi;

4) Fisher informatsiya matritsasi $I(\theta) = \left\|I_{ij}(\theta)\right\|_{i,j=\overline{1,s}}$ – musbat aniqlangan.

Bu yerda $I_{ij}(\theta) = M_\theta\left[\dfrac{\partial \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial^2 \ln f_n\left(X^{(n)};\theta\right)}{\partial\theta_j}\right]$.

U holda $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \nu\left(0, I^{-1}(\theta)\right)$. Bu yerda $\nu\left(0, I^{-1}(\theta)\right)$-taqsimoti $N\left(0, I^{-1}(\theta)\right)$ bo'lgan s-o'lchovli tasodifiy vektor.

5-misoldan $\hat{g}_n = \left(\bar{x}, S^2\right)$, $g(\theta) = \left(\theta_1, \theta_2^2\right)$ uchun HMO'UBsi ekani ma'lum. X bob 3-§ dagi 3-misoldan Fisher matritsasiga teskari matritsa ko'rinishi

$$I^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_2^2 & 0 \\ 0 & 2\theta_2^4 \end{pmatrix}.$$

2-teoremadan

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar{x}-\theta_1 \\ S^2-\theta_2^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \nu\left(0, I^{-1}(\theta)\right).$$

Demak, $\left(\bar{x}, S^2\right)$ va $\left(\bar{x}, \bar{S}^2\right)$ baholar asimptotik ekvivalent ekanidan ularning eng yaxshi asimptotik normal baholar ekanligi kelib chiqar ekan.

3-§. Bayes baholash usuli

Parametrni baholashning Bayes yondashuvi mohiyati noma'lum parametr θ ni tasodifiy miqdor deb qarashdan iborat. Bu parametrning zichlik funksiyasi ***aprior zichlik*** (aprior – tajribadan oldingi) deb ataladi. Bayes yondashuvida noma'lum θ parametr zichlik funksiyasi $h(\theta)$ bo'lgan taqsimotdan tasodifiy ravishda tanlangan deb faraz qilinadi.

Bayes sxemasida yechim qabul qilishning to'rt asosiy elementlarini ko'rib o'tamiz:

1. $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, P)$ statistik modelda P taqsimot $\mathscr{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ oilaga tegishli, Θ esa k-o'lchovli Evklid fazosidagi intervaldir.

2. $h(\theta)$ ning $\mathscr{H}$-aprior taqsimotlar oilasi $(\Theta, \mathscr{F})$ o'lchovli fazoda aniqlangan, bu yerda $\mathscr{F}$ – Θ dagi σ-algebra.

3. $\mathscr{D}$ - bo'lishi mumkin bo'lgan shunday yechimlar to'plamiki, ixtiyoriy $d\in\mathscr{D}$ element $\mathscr{X}$ dagi $\mathscr{B}$-o'lchovli funksiyadir.

4. $L(\theta, d)$ talofatlar funksiyasi $\Theta\times\mathscr{D}$ da aniqlangan.

Tanlanmaning zichlik funksiyasi $f_n(x^{(n)};\theta)$, $X^{(n)}$ ning θ berilganidagi shartli taqsimot zichligi, aprior zichlik funksiya esa $h(\theta)$ bo'lsin. U holda $X^{(n)}$ va θ ning birgalikdagi zichlik funksiyasi

$$g(x^{(n)}, \theta) = f_n(x^{(n)};\theta)h(\theta)$$

bo'ladi. Bayes formulasiga ko'ra θ ning $X^{(n)} = x^{(n)}$ berilganidagi shartli zichlik funksiyasi

$$h(\theta / x^{(n)}) = \frac{f_n(x^{(n)};\theta)h(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f_n(x^{(n)};\theta)h(\theta)d\theta} \quad (1)$$

ga teng. (1) zichlik funksiya ***aposterior zichlik*** (aposterior – tajribadan keyingi) deb ataladi. Shartli matematik kutilma xossasiga ko'ra: barcha $\theta^* = \varphi(x^{(n)})$ funksiyalar orasida θ uchun eng yaxshi baho **kvadratik** risk funksiyasi $M(\theta - \varphi(x^{(n)})^2$ ni minimallashtirish ma'nosida

$$\theta_H^* = M(\theta / x^{(n)}) = \int\limits_{\Theta} \theta h(\theta / x^{(n)}) d\theta \quad (2)$$

hisoblanadi.

1-ta'rif. (2) va (1) formulalar orqali θ uchun aniqlangan θ_H^* baho aprior zichlik funksiyasi $h(\theta)$ bo'lgan ***Bayes bahosi*** deb ataladi.

Misol. $X_1,...,X_n \sim N(\theta;1)$ va θ parametr taqsimoti $N(0;\sigma^2)$ (σ^2 – ma'lum) bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini tuzamiz.

Noma'lum parametr θ taqsimoti $N(0;\sigma^2)$ bo'lganligi uchun uning zichlik funksiyasi $h(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\theta^2/2\sigma^2}, \theta \in R, \sigma > 0$ bo'ladi. $X^{(n)}$ tanlanmaning zichlik funksiyasi esa

$$f_n(x^{(n)},\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}.$$

$h(\theta / x^{(n)})$ aposterior zichlik $h(\theta) \cdot f_n(x^{(n)},\theta)$ ga proporsional:

$$\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{\theta^2(1/\sigma^2+n)}{2} + \bar{x}n\theta - \frac{n\overline{x^2}}{2}\right\}.$$

Har ikkala tomon darajalarini tenglashtirsak,

$$\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+n\right) + \bar{x}\theta n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+n\right)\left(\theta - \frac{\bar{x}n}{1/\sigma^2+n}\right)^2 + \frac{(\bar{x}n)^2}{2(1/\sigma^2+n)}$$

hosil bo'ladi. Bu tenglikdan $h(\theta / x^{(n)})$ aposterior zichlik

$N\left(\frac{\bar{x}n\sigma^2}{1+n\sigma^2};\frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}\right)$ taqsimotga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, θ uchun Bayes bahosi quyidagiga teng:

$$\theta_n^* = \int_{\Theta}\theta h(\theta / x^{(n)})d\theta = \frac{\bar{x}n\sigma^2}{1+n\sigma^2}$$

Endi Bayes ma'nosida yetarli statistikalarni aniqlaymiz.

2-ta'rif. $S(x^{(n)}):(\mathscr{X},\mathscr{B},\mathrm{P})\to(\mathscr{Y},\mathscr{U},Q')$ statistika $\mathscr{H}$ uchun Bayes ma'nosida yetarli deyiladi, agar barcha $H\in\mathscr{H}$ uchun, deyarli hamma yerda

$$h(\theta / S(x^{(n)})) = h(\theta / x^{(n)}) \tag{3}$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Demak, Bayes yondashuvida yetarli statistika orqali hosil bo'lgan aposterior zichlik tanlanma orqali hosil bo'lgan aposterior zichlikka ekvivalentdir.

Misol.

2. $N(\theta_1,\theta_2^2)$ modelni ko'raylik, bunda $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ noma'lum parametr va $\Theta=\{(\theta_1,\theta_2):-\infty<\theta_1<+\infty,\ 0<\theta_2<+\infty\}$. $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ tanlanma berilgan $\theta=(\theta_1,\theta_2)$larda shartli zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x_1,\dots,x_n:\theta_1,\theta_2)=(2\pi)^{-n/2}\theta_2^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-\frac{n}{2\theta_2^2}(\bar{x}-\theta_1)^2\right\}.$$

θ_1 va θ_2 lar aprior zichlik funksiyasi $h(\theta_1,\theta_2)$ bo'lsin, u holda ular uchun aposterior zichlik funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$h(\theta_1,\theta_2 / x_1,\dots,x_n)=\frac{\theta_2^{-n}h(\theta_1,\theta_2)\exp\left\{-(n/2\theta_2^2)(\bar{x}-\theta_1)^2-(1/2\theta_2^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}d\theta_1\int_0^{\infty}d\theta_2\cdot\theta_2^{-n}h(\theta_1,\theta_2)}\times$$

$$\times\exp\left\{-(n/2\theta_2^2)(\bar{x}-\theta_1)^2-(1/2\theta_2^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}. \tag{4}$$

(4) ifodadan ko'rinadiki, (θ_1,θ_2) ning aposterior zichlik funksiyasi $\left(\bar{x},\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)$ statistikaga bog'liq. Bu statistika $N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$ model uchun Bayes yondashuvi bo'lmagan holda minimal yetarli statistika edi. Ma'lumki, $\bar{x}$ va $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ statistikalar bog'liqsiz va ularning zichlik funksiyalari mos ravishda

$$f_{\bar{x}}\left(x;\theta_1,\theta_2\right)=\frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}\theta_2^{-1}\exp\left\{-\frac{n}{2\theta_2^2}\left(x-\theta_1\right)^2\right\},\ -\infty<x<\infty, \quad (5)$$

va

$$f\left(s;\theta_2\right)=\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(2\theta_2^2\right)^{(n-1)/2}\right]^{-1}s^{(n-3)/2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}s\right\},\ 0\le s\le\infty \quad (6)$$

ga teng. (5) va (6) ga ko'ra berilgan $\left(\bar{x},\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)$ da (θ_1,θ_2) ning aposterior zichligi

$$h\left(\theta_1,\theta_2\,/\,\bar{x},\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{\theta_2^{-n}h(\theta_1,\theta_2)\exp\left\{-\left(n/2\theta_2^2\right)\left(\bar{x}-\theta_1\right)^2-\left(1/2\theta_2^2\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}d\theta_1\int_0^{\infty}\theta_2^{-n}h(\theta_1,\theta_2)\exp\left\{\left(n/2\theta_2^2\right)\left(\bar{x}-\theta_1\right)^2-\left(1/2\theta_2^2\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right\}d\theta_2} \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi. (4) va (7) ni solishtirsak,

$$h\left(\theta_1,\theta_2\,/\,\bar{x},\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)=h\left(\theta_1,\theta_2\,/x_1,\dots,x_n\right) \quad (8)$$

bo'ladi.

Demak, $\left(\bar{x},\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)$ Bayes ma'nosida yetarli statistika ekan.

Bu misolda Bayes va nobayes ma'nosidagi yetarli statistikalar bir xil ekan. Quyida keltiriladigan da'voda bu ikki statistikalar ta'riflari ekvivalent ekanligini ko'rsatiladi.

Teorema. $\left(\mathscr{X}\times\Theta,\mathscr{B}\times\mathscr{F},\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{H}\right)$ ehtimollik fazosidagi ixtiyoriy Bayes modelida $S\left(x^{(n)}\right):\left(\mathscr{X},\mathscr{B},\boldsymbol{P}\right)\to\left(\mathscr{Y},\mathscr{U},Q^s\right)$ statistika

$\mathscr{H}$ uchun Bayes ma'nosida yetarli statistika bo'ladi, agar u faqat va faqat $\mathscr{P}$ uchun yetarli statistika bo'lsa.

Isboti. Avval, agar S statistika $\mathscr{P}$ uchun yetarli bo'lsa, u holda u Bayes ma'nosida ham yetarli statistika bo'lishini ko'rsatamiz. Agar S – yetarli statistika bo'lsa, faktorlashtirish teoremasiga ko'ra:

$$f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\psi\left(S\left(x^{(n)}\right),\theta\right)\cdot k\left(x^{(n)}\right) \tag{9}$$

kenglik o'rinli. U holda aposterior zichlik

$$h\left(\theta / x^{(n)}\right)=\frac{h(\theta)\psi\left(S\left(x^{(n)}\right),\theta\right)}{\int\limits_{\Theta} h(\theta)\psi\left(S\left(x^{(n)}\right),\theta\right)d\theta} \tag{10}$$

(9) ga ko'ra $S\left(x^{(n)}\right)$ statistika hosil qilgan zichlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f_S\left(x^{(n)},\theta\right)=J\left(x^{(n)}\right)\psi\left(x^{(n)},\theta\right). \tag{11}$$

$S\left(x^{(n)}\right)=s$ dagi θ ning aposterior zichligi

$$f\left(\theta / S\left(x^{(n)}\right)=s\right)=\frac{h(\theta)\psi(s;\theta)}{\int\limits_{\Theta} h(\theta)\psi(s;\theta)d\theta},\ \theta\in\Theta,$$

ko'rinishda bo'ladi. Bulardan $h\left(\theta / x^{(n)}\right)=h\left(\theta / S\left(x^{(n)}\right)\right)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, S – Bayes ma'nosida yetarli statistika bo'lar ekan.

Endi, agar S Bayes ma'nosida yetarli statistika bo'lsa, u nobayes ma'nosida ham yetarli statistika bo'lishini ko'rsatamiz. Ta'rifga ko'ra $h(\theta / x)$ aposterior zichlik funksiya $\mathscr{B}_s$ – o'lchovli funksiya θ va fiksirlangan θ_0 da $h(\theta)>0$ va $h(\theta_0)>0$ bo'lsin. U holda (1) ga ko'ra

$$\ln\frac{h(\theta / x)}{h(\theta_0 / x)}=\ln\frac{f_n\left(x^{(n)},\theta\right)}{f_n\left(x^{(n)},\theta_0\right)}+\ln\frac{h(\theta)}{h(\theta_0)}. \tag{12}$$

Bu yerda $\psi\left(x^{(n)},\theta\right)=\ln\left[f_n\left(x^{(n)},\theta\right) / f_n\left(x^{(n)},\theta_0\right)\right]$ – haqiqatga o'xshashlik funksiyasi logarifmi. Ixtiyoriy fiksirlangan θ da $\psi\left(x^{(n)},\theta\right)$

funksiya $\mathscr{B}_s$ -o'lchovlidir. U holda $h(\theta)>0$, $h(\theta_0)>0$ lar o'rinli bo'lgan ixtiyoriy θ va θ_0 lar hamda (12) ga ko'ra:

$$\ln f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=\ln f_n\left(x^{(n)},\theta_0\right)+\psi\left(S\left(x^{(n)}\right),\theta\right), \qquad (13)$$

bu yerda

$$\psi\left(S\left(x^{(n)}\right),\theta\right)=\ln\frac{h(\theta/x)}{h(\theta_0/x)}-\ln\frac{h(\theta)}{h(\theta_0)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v}$$

va $k\left(x^{(n)}\right)=f_n\left(x^{(n)},\theta_0\right)$ deb olsak, u holda

$$f_n\left(x^{(n)},\theta\right)=k\left(x^{(n)}\right)\exp\left\{\psi\left(S\left(x^{(n)}\right),\theta\right)\right\}.$$

o'rinli bo'ladi. Demak, $S\left(x^{(n)}\right)$ – (nobayes) yetarli statistika ekan.

Demak, agar $S\left(x^{(n)}\right)$ statistika $\mathscr{P}$ uchun yetarli statistika bo'l-sa, u holda $H\left(\theta / x^{(n)}\right)=H(\theta / S)$ bo'lar ekan.

4-§. Minimaks baholash

T_1 va T_2 baholarni "yomon" nuqtalarda solishtirib, minimaks baho tushunchasiga kelamiz. $R(T,\theta)$ funksiya θ ni baholashda T statistika qo'llanilgandagi risk funksiyasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\forall T\in\Theta_1$ uchun

$$\sup_{\theta\in\Theta_1} R_n(T_0;\theta)=\inf_T\sup_{\theta\in\Theta_1} R_n(T;\theta), \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $T_0\in\Theta_1\subset\Theta$ baho noma'lum parametr θ uchun minimaks baho deyiladi.

1-misol. $X_1,\dots,X_n \sim Bi(1;\theta)$ bo'lsin. Ma'lumki, $S^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}X_i$ statistika bu taqsimot uchun yetarli statistika bo'ladi va uning taqsimoti

$$P(S^{(n)}=k)=C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k},\ k=0,1,\dots,n$$

bo'ladi. Demak, $S^{(n)}\sim Bi(n;\theta)$. Noma'lum parametr θ ni baholash masalasini ko'ramiz. Bu taqsimot noma'lum parametrik θ uchun momentlar va haqiqatga maksimal o'xshashlik usullari bahosi tanlanma o'rta qiymatidir: $T(X^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. O'rta qiymat baho sifatida quyidagi xossalarni qanoatlantiradi:

siljimaganlik: $M_\theta T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i=MX_1=\theta$;

Rao-Kramer ma'nosida effektivlik: uning dispersiyasi

$$D_\theta T=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{D_\theta X_1}{n}=\frac{\theta(1-\theta)}{n}=\frac{1}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}}=\frac{1}{nI(\theta)};\qquad(2)$$

asoslilik: Chebishev katta sonlar qonuniga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ uchun

$$P_\theta\left(|T-\theta|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D_\theta T}{\varepsilon^2}=\frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Lekin tanlanma o'rta qiymati minimaks baho bo'lmaydi. Buni ko'rsatish uchun quyidagi bahoni ko'ramiz:

$$T^*(X^{(n)})=T(X^{(n)})\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}+\frac{1}{2(\sqrt{n}+1)}=\frac{T(X^{(n)})n+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.\qquad(3)$$

(3) bahoning matematik kutilmasini hisoblaymiz:

$$M_\theta T^*=\frac{nM_\theta T+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=\frac{n\theta+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=\frac{\theta+\frac{1}{2\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\underset{n\to\infty}{\to}\theta.\qquad(4)$$

Demak, (3) baho asimptotik siljimagan baho ekan. Endi (3) bahoning kvadratik riskini hisoblash uchun daslab 2-tartibli momentini hisoblaymiz:

$$M_\theta(T^*)^2=\frac{nM_\theta\left(\sqrt{n}T+\frac{1}{2}\right)^2}{(n+\sqrt{n})^2}=\frac{n}{(n+\sqrt{n})^2}\left[nM_\theta T^2+\sqrt{n}M_\theta T+\frac{1}{4}\right]=$$

$$=\frac{n}{(n+\sqrt{n})^2}\left\{n\left[\frac{\theta-\theta^2}{n}+\theta^2\right]+\sqrt{n}\theta+\frac{1}{4}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}\left[\theta(1-\theta)+n\theta^2+\sqrt{n}\theta+\frac{1}{4}\right], \tag{5}$$

(4) va (5) ni inobatga olsak, kvadratik risk funksiyasi

$$M_\theta(T^*-\theta)^2=M_\theta(T^*)^2-2\theta\cdot M_\theta T^*+\theta^2=$$

$$=\frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}\left[\theta(1-\theta)+n\theta^2+\sqrt{n}\theta+\frac{1}{4}\right]-$$

$$-2\theta\left(\frac{\sqrt{n}\theta+\frac{1}{2}}{1+\sqrt{n}}\right)+\theta^2=\frac{\theta}{(1+\sqrt{n})^2}-\frac{\theta^2}{(1+\sqrt{n})^2}+\frac{n\theta^2}{(1+\sqrt{n})^2}+\frac{\sqrt{n}\theta}{(1+\sqrt{n})^2}+$$

$$+\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}-\frac{2\sqrt{n}\theta^2}{1+\sqrt{n}}-\frac{\theta}{1+\sqrt{n}}+\theta^2=\theta^2\left[-\frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}+\frac{n}{(1+\sqrt{n})^2}-\frac{2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}+1\right]+$$

$$+\theta\left[\frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}+\frac{\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n})^2}-\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right]+\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}=$$

$$=\theta^2\left[\frac{-1+n-2\sqrt{n}(1+\sqrt{n})+(1+\sqrt{n})^2}{(1+\sqrt{n})^2}\right]+\theta\left[\frac{1+\sqrt{n}-1-\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n})^2}\right]+$$

$$+\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}=\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}. \tag{6}$$

(6) tenglik noma'lum parametr θ ga bog'liq emas. (1) va (6) ga ko'ra

$$\sup_{\theta\in\Theta}M_\theta(T-\theta)^2=\sup_{\theta\in\Theta}\frac{\theta(1-\theta)}{n}=\frac{1}{4n},$$

$$\sup_{\theta\in\Theta}M_\theta(T^*-\theta)^2=\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}\le\frac{1}{4n},$$

ya'ni

$$\sup_{\theta\in\Theta}M_\theta(T^*-\theta)^2\le\sup_{\theta\in\Theta}M_\theta(T-\theta)^2. \tag{7}$$

(7) ga ko'ra T^* baho T bahoga nisbatan kichik riskga ega ekan. Demak, T o'rta qiymat noma'lum parametr θ uchun minimaks baho bo'lmas ekan. T^* baho T ga nisbatan yaxshi ekan. Endi T^* baho Bayes bahosi ham bo'lishini ko'rsatamiz. $H(\theta)$ aprior taqsimot va uning zichlik funksiyasi [0, 1] da

$$h(\theta)=(\theta(1-\theta))^{\frac{\sqrt{n}}{2}-1}\left(\int_0^1(\theta(1-\theta))^{\frac{\sqrt{n}}{2}-1}d\theta\right)^{-1} \qquad (8)$$

bo'lsin. Ma'lumki, Bayes bahosi:

$$\tilde{T}(X^{(n)})=\frac{\int_\Theta \theta f_n(X^{(n)};\theta)h(\theta)d\theta}{\int_\Theta f_n(X^{(n)};\theta)h(\theta)d\theta}, \qquad (9)$$

tenglikdan hisoblanadi. $f_n(X^{(n)};\theta)=P_\theta(S(X^{(n)})=k)$ va (8) ni (9) ga qo'ysak, Bayes bahosi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\tilde{T}(X^{(n)})=\frac{\int_0^1 \theta^{k+1}(1-\theta)^{n-k}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta}{\int_0^1 \theta^{k}(1-\theta)^{n-k}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta}=\frac{a+k}{a+b+n}, \qquad (10)$$

bu yerda $a=b=\frac{1}{2}\sqrt{n}$, $k=S(X^{(n)})=\sum_{i=1}^n X_i$.

$$\frac{a+k}{a+b+n}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}+nT}{\frac{1}{2}\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{n}+n}=\frac{T\cdot n+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}},$$

ya'ni: $\tilde{T}(X^{(n)})=T^*(X^{(n)})$. Shunday qilib, T^* baho ham Bayes ma'nosida ham minimaks baho va demak, $T(X^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ uchun nisbatan opimal baho bo'lar ekan.

1-misolda binomial taqsimot noma'lum parametri θ ni baholashda barcha yaxshi xossalarga ega bo'lgan va eng ko'p qo'llaniladigan o'rta qiymat minimaks baho bo'la olmasligi ko'rsatildi. Quyida biz baholarning minimakslik xossasini batafsil o'rganamiz. Odatda minimaks baholar Bayes baholari orasidan qidiriladi. Minimaks bahoni topayotganda tayin aprior taqsimot $H(\theta)$ da quyidagi o'rtacha riskni minimallashtirish muhim ahamiyat kasb etadi:

$$r_w(H)=\int_\Theta M_\theta W(T;\theta)dH(\theta)=\int_\Theta R_w(T;\theta)dH(\theta). \qquad (11)$$

1-teorema (Leman). Ushbu tenglik o'rinli bo'lsin:

$$\int_{\Theta} R_{w}(T;\theta)dH(\theta) = \sup_{\theta\in\Theta} R(T;\theta) \quad (12)$$

U holda:

(1) T – minimaks baho;

(2) agar aprior taqsimot H ga mos T yagona yechim bo'lsa, u holda u yagona baho bo'ladi.

(2) shartga ko'ra, $R_W(T,\theta)$ riskning o'rtachasi uning maksimumiga teng. Bu teoremaning quyidagi foydali natijalarini keltiramiz.

1-natija. Agar aprior taqsimot H ga mos $T_H = T_H(X^{(n)})$ Bayes bahosi o'zgarmas riskga ega bo'lsa, u minimaks baho bo'ladi.

2-natija. T_H bahoning risk funksiyasi maksimum qiymatini qabul qiluvchi parametrlari to'plami Q_H bo'lsin:

$$Q_H = \left\{\theta\in\Theta : R_w(T;\theta) = \sup_{\theta'\in\Theta} R_w(T_H;\theta')\right\}. \quad (13)$$

Agar T_H – minimaks baho bo'lsa, u holda

$$H(Q_H) = \int_{Q_H} h(\theta)d\theta = 1. \quad (14)$$

1-misoldagi T^* bahoning kvadratik riski o'zgarmas $M_\theta(T^*-\theta)^2 = = \frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}$ bo'lgani uchun 1-teoremaga ko'ra bu baho minimaksdir. Arifmetik o'rta qiymatning kvadratik riski esa $M_\theta(T-\theta)^2 = D_\theta T = = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ ga teng va shuning uchun u minimaks baho emas.

3-natija. Bayes bahosining minimaksligi xossasi talofat funksiyasi $W(u,v)$ ni tanlashga bog'liqdir.

Agar 1-misolda talofat funksiyasini

$$W(u;v) = \frac{(u-v)^2}{v(1-v)},\ u,v\in(0,1) \quad (15)$$

ko'rinishda tanlasak, u holda o'rta qiymatning riski

$$M_\theta W(T;\theta) = M_\theta \frac{(T-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} = \frac{1}{n}, \quad (16)$$

ga teng, ya'ni o'zgarmas va T baho (15) talofat funksiyasiga nisbatan minimaks baho bo'ladi.

$T = T(X^{(n)})$ statistika aprior taqsimot H ga nisbatan Bayes bahosi bo'lsin.

2-teorema (Leman). Agar $T = T(X^{(n)})$ uchun $\theta \in \Theta$ da

$$M_\theta W(T;\theta) \le \limsup_{k\to\infty} \int_\Theta M_\theta W(T^{(k)};\theta)\,dH^{(k)}(\theta),$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda T minimaksdir.

Bu teoremadan Xodjes va Lemanning quyidagi natijasi kelib chiqadi. $Q_H = \{\theta \in \Theta : 0 < H(\theta) < 1\}$ – H taqsimotning bardori bo'lsin.

3-teorema (Xodjes, Leman). Agar:

(1) $\theta \in \Theta_H$ uchun $M_\theta W(T,\theta) = C$;

(2) barcha $\theta \in \Theta$ lar uchun $M_\theta W(T,\theta) \le C$ bo'lsa, u holda T – minimaks baho bo'ladi.

2-misol. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\theta,1)$ bo'lsin. U holda $X^{(n)}$ tanlanmaning zichlik funksiyasi

$$f_n(X^{(n)};\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2\right\}.$$

bo'ladi. $\{T^{(k)} = T^{(k)}(X^{(n)}), k=1,2,\ldots\}$ – aprior normal taqsimot $\{H^{(k)}(\theta) = N(0,k), k=1,2,\ldots\}$ ga nisbatan Bayes baholari ketma-ketligi bo'lsin:

$$T^{(k)}(X^{(n)}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta f_n(X^{(n)};\theta)\,dH^{(k)}(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(X^{(n)};\theta)\,dH^{(k)}(\theta)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{k}\right\}d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{k}\right\}d\theta} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta \exp\left\{\theta\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{(k+1)\theta^2}{2k}\right\}d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\theta\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{(k+1)\theta^2}{2k}\right\}d\theta} = \frac{nkT(X^{(n)})}{nk+1},$$

bu yerda $T(X^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Shu sababli,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_\theta\,(T^{(k)}-\theta)^2\,dH^{(k)}(\theta)=\left(\frac{nk}{nk+1}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty} M_\theta\,(T-\theta)^2\,dH^{(k)}(\theta)+$$

$$+\frac{1}{(nk+1)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\theta^2\,dH^{(k)}(\theta)=\frac{(nk)^2}{(\sqrt{n}\,(nk+1))^2}+\frac{k}{(nk+1)^2}=$$

$$=\frac{nk^2+k}{(nk+1)^2}=\frac{k}{(nk+1)}=\frac{1}{(n+\frac{1}{k})}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{n}.$$

Barcha $\theta\in\Theta$ uchun

$$M_\theta\,(T(X^{(n)})-\theta)^2=\frac{1}{n}D_\theta X_i=\frac{1}{n}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M_\theta\,(T^{(k)}(X^{(n)})-\theta)^2\,dH^{(k)}(\theta)$$

Bo'lgani sababli 2-teoremaga ko'ra $T(X^{(n)})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ o'rta qiymat $N(\theta,1)$ taqsimot noma'lum parametrik θ uchun minimaks baho bo'ladi.

Shunday qilib, risk funksiyasi noma'lum parametr θ ga bog'liq bo'lmagan Bayes baholarini topish minimaks baholashning asosiy masalasi hisoblanadi.

XI BOBGA DOIR MASALALAR

1. Quyidagi taqsimotlar noma'lum parametrlarini momentlar usulida bahosini tuzing:

a) $\Gamma_{\theta_1,\theta_2}$.   b) $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & x\in[0,1],\\ 0, & x\bar{\in}[0,1].\end{cases}$

c) $N(\theta_1,\theta_2^2)$.   d) $\Gamma_{2\theta,1}$

e) $R[\theta_1,\theta_2]$.   f) $F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x\ge\theta_1,\ \theta_2>0,\\ 0, & x<\theta_1.\end{cases}$

2. Quyidagi taqsimotlar noma'lum parametrlarini haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli bilan baholang:

$a)\ \Gamma_{\theta_1,\theta_2}$. $\qquad b)\ \overline{Bi}(r,\theta)$.

$c)\ N\left(\theta_1,\theta_2^2\right)$. $\qquad d)\ R[\theta-1,\theta+1]$.

$e)\ P(\theta_1,\theta_2)$. $\qquad f)\ F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x\geq\theta_1,\ \theta_1,\theta_2>0,\\ 0, & x<\theta_1.\end{cases}$

3. $X_1,...,X_n \sim \pi(\theta)$ va θ parametr aprior taqsimoti $Bi(1;1/2)$ bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini tuzing.

4. $X_1,...,X_n$ tanlanma zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{\theta-x}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$ bo'lgan taqsimotdan olingan va θ parametr aprior taqsimoti $R[0,1]$ bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini tuzing.

5. $X_1,...,X_n \sim E(\theta)$ va θ parametr aprior taqsimoti $E(1)$ bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini tuzing.

6. $X_1,...,X_n \sim Bi(1;\theta)$ va θ parametr aprior taqsimoti $\begin{cases}\theta: 1/2 \quad 1/3\\ P_\theta: 1/2 \quad 1/2\end{cases}$ bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini tuzing.

7. $X_1,...,X_n \sim G(\theta)$ va θ parametr aprior taqsimoti $\begin{cases}\theta: \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}\\ P_\theta: \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\end{cases}$ bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini toping.

8. $X_1,...,X_n \sim \pi(\theta)$ va θ parametr aprior taqsimoti $Bi\left(1;\frac{1}{3}\right)$ bo'lsin. Noma'lum parametr θ ning Bayes bahosini tuzing.

XII BOB. INTERVAL BAHOLASH

1-§. Ishonchlilik intervallarini qurish. Aniq ishonchli intervallar

Oldingi paragraflarda noma'lum parametrlarni nuqtaviy baholash usullari va baholarning xossalari bilan tanishdik. Lekin ba'zi hollarda parametrga bahoni taklif etishdan tashqari shu parametrni biror oldindan berilgan 1 ga yaqin ehtimollik bilan qoplovchi sohani ko'rsatish talab qilinadi.

Statistik model $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ taqsimotlar oilasi bilan berilgan bo'lib, θ – skalyar parametr bo'lsin, $\theta \in \Theta \subset R$ (Θ fazo R dagi biror interval).

1-ta'rif. $\left[\theta^-\left(X^{(n)}\right), \theta^+\left(X^{(n)}\right)\right] \in \Theta$ interval γ – me'yoridagi ishonchli interval deyiladi, $0<\gamma<1$, agar barcha $\theta \in \Theta$ va 1 ga yetarlicha yaqin γ uchun

$$P_\theta\left\{\theta \in \left[\theta^-\left(X^{(n)}\right), \theta^+\left(X^{(n)}\right)\right]\right\} \geq \gamma \tag{1}$$

tengsizlik bajarilsa.

Oldindan berilgan son γ ni ishonch me'yori, θ^-, θ^+ statistikalar esa mos ravishda quyi va yuqori ishonch chegaralari deb ataladi. Ba'zi hollar uchun faqat quyi yoki yuqori chegarani aniqlash talab qilinadi. Bunday hollarda 1 ehtimollik bilan yoki $\theta^+\left(X^{(n)}\right) = \infty$ yoki $\theta^-\left(X^{(n)}\right) = -\infty$ etib tanlanadi.

Ishonchli interval $[\theta^-, \theta^+]$ noma'lum parametr θ uchun interval baho deb ataladi. Odatda $1-\gamma$ sifatida kichik son olinadi. $\theta^\pm$ statistikalar aslida γ ga bog'liq bo'ladi: $\theta^\pm = \theta^\pm\left(X^{(n)}; \gamma\right)$. $\left[\theta^-, \theta^+\right]$ – tasodifiy interval qurilganidan so'ng biz $\theta \in \left[\theta^-, \theta^+\right]$ ekanini e'lon qilamiz. Bunda biz yo'l qo'ygan xatolik $100(1-\gamma)\%$ga teng bo'ladi.

Ishonch me'yor γ ga bir necha ishonchli intervallar mos kelishi mumkin. Bu holda albatta bunday intervallardan uzunligi eng kichigini tanlashimiz kerak. Ishonchli intervalning o'rtacha uzunligi deb $M_\theta\left[\theta^+\left(X^{(n)}\right)-\theta^-\left(X^{(n)}\right)\right]$ kattalikka aytiladi.

Demak, $\left\{\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\right\}$ model θ parametr uchun $S\left(X^{(n)}\right)\subset\Theta$, $S^{-1}(\theta)=\left\{x^{(n)}:\theta\in S\left(x^{(n)}\right)\right\}\in\mathscr{B}^{(n)},\forall\theta\in\Theta$ shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirish interval baho deb atalar ekan.

Ishonchlilik intervallarini tuzishning asosiy usullari nuqtaviy baholardan foydalanishga asoslanadi. Endi haqiqatga eng katta o'xshashlik prinspining interval bahosini ko'rib o'tamiz. $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}\ll\mu$ va $f_n\left(x^{(n)};\theta\right)$ – tanlanmaning zichlik funksiyasi bo'lsin.

2-ta'rif. $S\left(x^{(n)}\right)$ – interval baho haqiqatga eng katta o'xshashlik bahosi deyiladi, agar $\theta_1\in S\left(x^{(n)}\right)$, $f_n\left(x^{(n)};\theta_2\right)\geq f_n\left(x^{(n)};\theta_1\right)$ ekanidan $\theta_2\in S\left(x^{(n)}\right)$ munosabat kelib chiqsa. Bunday baho $S\left(x^{(n)}\right)=\left\{\theta:f_n\left(x^{(n)};\theta\right)\geq\alpha\left(x^{(n)}\right)\right\}$ ko'rinishida bo'ladi, α – biror funksiya.

Misollar. 1. $P_\theta=N(0,1)$ bo'lsin. Ma'lumki, $\sqrt{n}(\bar{x}-\theta)$ tasodifiy miqdor taqsimoti $N(0,1)$ – standart normal taqsimotdir. U holda

$$P_\theta\left(|\bar{x}-\theta|\leq c_\gamma n^{-1/2}\right)=P\left(\sqrt{n}|\bar{x}-\vartheta|\leq c_\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c_\gamma}^{c_\gamma}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\gamma.$$

Masalan, $c_\gamma=3$ bo'lsa, $\gamma=0,99730...$ – ehtimollik bilan noma'lum parametr θ ning asl qiymati $S\left(x^{(n)}\right)=\left[\bar{x}-\frac{3}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{3}{\sqrt{n}}\right]$ kesmada yotar ekan. Demak, kamida 99,7% ishonch bilan $\theta\in S(x^{(n)})$ desak bo'lar ekan.

2. P_θ – ko'rsatkichli taqsimot bo'lsin:

$$f_n\left(x^{(n)};\theta\right)=\theta^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i\right\},\theta\in\Theta=(0,\infty).$$

Ma'lumki, $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ statistikaning taqsimoti $\zeta = 2\theta\chi^2(2n)$ tasodifiy miqdor taqsimotiga tengdir. Bu yerda $\chi^2(\beta)$ – ozodlik darajasi β bo'lgan xi-kvadrat taqsimotiga ega tasodifiy miqdor. Agar $c_\gamma^2(2n)$ orqali $\chi^2(2n)$ – taqsimotning γ -me'yordagi kvantilini belgilasak, u holda

$$P_\theta\left\{\theta \geq \frac{T\left(X^{(n)}\right)}{c_\gamma^2(2n)}\right\} = \gamma, \quad \forall\theta \in \Theta.$$

Demak, θ uchun γ -ishonchli chegara $\theta^-\left(X^{(n)}\right) = \frac{T\left(X^{(n)}\right)}{c_\gamma^2(2n)}$ va demak, $S(X^{(n)}) = [\theta^-(X^{(n)}), +\infty]$ ekan.

Endi ishonchlilik intervalini tuzishning umumiy prinsiplarni ko'rib o'tamiz.

Statistika yordamida ishonchlilik intervalini tuzish. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $G(x^{(n)};\theta)$ statistika berilgan bo'lsin:

1. $G(x^{(n)};\theta)$ statistikaning taqsimoti $H(x)$ noma'lum parametr θ ga bog'liq emas.
2. $G(x^{(n)};\theta)$ funksiya θ bo'yicha uzluksiz va qat'iy monoton.

3-ta'rif. Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi $G(x^{(n)};\theta)$ statistika ***markaziy statistika*** deyiladi.

$g(x)$ funksiya $G(x^{(n)};\theta)$ ning zichlik funksiyasi bo'lsin. U holda ixtiyoriy $0<\gamma<1$ uchun g_1 va g_2 larni

$$P\left(g_1 \leq G(x^{(n)};\theta) \leq g_2\right) = \int_{g_1}^{g_2} g(t)\,dt = \gamma \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'ladigan qilib tanlash mumkin. (2) dagi $g_1 \leq G(x^{(n)};\theta) \leq g_2$ tengsizlikni θ ga nisbatan yechib, $T_1(x^{(n)}) \leq \theta \leq T_2(x^{(n)})$ ishonchlilik intervalini hosil qilamiz.

1-teorema. $G(x;\theta)$ statistika taqsimoti $H(B) = P_\theta\left(G\left(x^{(n)};\theta\right) \in B\right)$ noma'lum parametr θ ga bog'liq emas; har bir x da $G(x;\theta)$ funksiya θ bo'yicha uzluksiz va monoton bo'lib, τ^-, τ^+ lar $H((\tau^-,\tau^+))=\gamma$ ni qanoatlantirsin. U holda:

agar $G(\cdot;\theta)$ o'suvchi bo'lsa, $\theta^- = G^{-1}(x^{(n)};\tau^-)$, $\theta^+ = G^{-1}(x^{(n)};\tau^+)$

va agar $G(\cdot;\theta)$ kamayuvchi bo'lsa, $\theta^- = G^{-1}(x^{(n)};\tau^+)$, $\theta^+ = G^{-1}(x^{(n)};\tau^-)$ statistikalar ishonchlilik intervali chegaralari bo'ladi.

Bu yerda $G^{-1}(x^{(n)};\tau)$ statistika $G(\theta;x^{(n)})=\tau$ tenglamaning yechimi.

Isboti. $G(x;\theta)$ monoton bo'lganligi uchun $\{G^{-1}(x^{(n)};\tau^-)<\theta<G^{-1}(x^{(n)};\tau^+)\}$ hodisa $A=\{y^-<G(\theta;x^{(n)})<y^+\}$ hodisa bilan teng kuchlidir. U holda

$$P_\theta(\theta^-<\theta<\theta^+)=P_\theta\left(G^{-1}(y^-,x^{(n)})<\theta<\right.$$
$$\left.<G^{-1}(y^+,x^{(n)})\right)=P_\theta(A)=H((y^-,y^+))=\gamma.$$

Izoh. Teoremaning asimptotik analogini ko'rish mumkin. $\{G_n(x^{(n)};\theta)\}$ ketma-ketlik θ bo'yicha monoton va uzluksiz hamda $n\to\infty$. $P_\theta(G_n(x^{(n)};\theta)\in B)\to H(B)$ ekani yetarlidir, bu yerda $H(\cdot)$ funksiya θ ga bog'liq emas.

Endi $G(x;\theta)$ ni tanlash usulini keltiramiz.

2-teorema. $F_\theta(x)=P_\theta(X_1<x)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $F_\theta(x)$ funksiya x bo'yicha $\forall\theta\in\Theta$ larda uzluksiz;

2) $F_\theta(x)$ funksiya fiksirlangan x da θ bo'yicha uzluksiz va monoton.

U holda

$$G(\theta,x)=-\sum_{i=1}^{n}\ln(F_\theta(x_i))$$

funksiya 1-teoremaning shartlarini qanoatlantiradi.

Agar $\tau^{\pm}$ sonlar

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\tau^-}^{\tau^+} x^{n-1}e^{-x}\,dx=\gamma \qquad (3)$$

munosabatni qanoatlantirsa, u holda $\theta^{\pm}=G^{-1}\left(x^{(n)};\tau^{\pm}\right)$ lar ishonchlilik intervali chegaralari bo'ladi.

Ishoti. 1-teoremaning shartlarini bajarilishini tekshiramiz. 1-shartga ko'ra $F_\theta\left(X_i\right)$ funksiya $[0,1]$ da tekis taqsimlangan ekanidan $-\ln F_\theta\left(x_i\right)\sim\Gamma_{1,1}$ va $G\left(x^{(n)};\theta\right)\sim\Gamma_{1,n}$ va $H=\Gamma_{1,n}$ bo'ladi. Demak, $P_\theta\left(G\left(x^{(n)};\theta\right)\in B\right)=\Gamma_{1,n}(B)$, ya'ni θ ga bog'liq emas. $G(x;\theta)$ ning har bir x da monoton va uzluksizligi 2-shartdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (3) ga ko'ra

$$H\left(\left(\tau^-,\tau^+\right)\right)=\Gamma_{1,n}\left(\left(\tau^-,\tau^+\right)\right)=\gamma$$

2-§. Asimptotik ishonchli intervallar

1-ta'rif. $\left[\theta^-\left(X^{(n)}\right),\theta^+\left(X^{(n)}\right)\right]\in\Theta$ – interval γ – me'yoridagi asimptotik ishonchli interval deyiladi. $0<\gamma<1$, agar barcha $\theta\in\Theta$ va 1 ga yetarlicha yaqin γ uchun

$$\liminf_{n\to\infty} P_\theta\left\{\theta\in\left[\theta^-\left(X^{(n)}\right),\theta^+\left(X^{(n)}\right)\right]\right\}\geq\gamma$$

tengsizlik bajarilsa.

Biz X bob 4-§ da asimptotik normal baholar bilan tanishgan edik. Quyida biz asimptotik normal baholar asosida asimptotik ishonchlilik intervallarini qurishni ko'rib o'tamiz.

θ^* – asimptotik normal baho, ya'ni $(\theta^*-\theta)\sqrt{n}\Rightarrow N\left(0;\sigma^2(\theta)\right)$ va $\sigma(\theta)$ – uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $\theta^*\xrightarrow{p}\theta$ munosabatdan $\sigma(\theta^*)\xrightarrow{p}\sigma(\theta)$ o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\frac{\left(\theta^*-\theta\right)\sqrt{n}}{\sigma\left(\theta^*\right)}\Rightarrow N(0,1). \qquad (1)$$

$t_{1-\delta}$ orqali standart normal taqsimotning $1-\delta$ tartibli kvantilini belgilaymiz: $\Phi((-\infty, t_{1-\delta}))=1-\delta$ (yoki agar $\xi \sim N(0,1)$ bo'lsa, u holda $P(|\xi|<t_{1-\delta})=1-2\delta$).

U holda (1) ga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|\frac{(\theta^*-\theta)\sqrt{n}}{\sigma(\theta^*)}\right|<t_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)=\gamma .$$

Bu ifodani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\theta^*-t_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\sigma(\theta^*)}{\sqrt{n}}<\theta<\theta^*+t_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\sigma(\theta^*)}{\sqrt{n}}\right)=\gamma .$$

Shunday qilib, quyidagi statistikalar

$$\theta^{\pm}=\theta^*\pm t_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\sigma(\theta^*)}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

ishonchlilik darajasi γ bo'lgan asimptotik ishonchlilik intervalining chegaralari bo'lar ekan.

Misol. $X_1,\dots,X_n$ tanlanma $\Gamma_{\theta,1}$ – gamma taqsimotdan olingan bo'lsin. Bu taqsimot noma'lum parametri θ uchun $\theta^*=\frac{n-1}{n\bar{x}}$ baho effektiv bahodir. (2) ga ko'ra

$$\theta^*=\frac{n-1}{n\bar{x}}\left(1\pm t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{n}\right). \tag{3}$$

Endi bu interval ishonchlilik darajasini topamiz. Buning uchun

$$\frac{n-1}{n\bar{x}}\left(1-t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{n}\right)<\theta<\frac{n-1}{n\bar{x}}\left(1+t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{n}\right)$$

yoki

$$1-t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{n}<\frac{n\theta\bar{x}}{n-1}<1+t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{n}$$

tengsizlikning ehtimolligini hisoblash kerak. Ma'lumki, agar $X_1,...,X_n \sim \Gamma_{\theta,1}$ bo'lsa, $n\theta\bar{x} \sim \Gamma_{1,n}$ va $2n\theta\bar{x} \sim \Gamma_{1/2,n} = H_{2n}$ bo'ladi. (3) intervalning ishonchlilik darajasi quyidagiga teng

$$\int\limits_{2(n-1)\left(1-t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{n}\right)} k_{1/2,n}(x)\,dx \tag{4}$$

bu yerda $k_{1/2,n}(x)$ – gamma taqsimot zichlik funksiyasi. (2) ishonchlilik intervali θ^* bahoni tanlashga bog'liq. Interval chegaralarining ko'rinishiga ko'ra, tanlanma hajmi n ni kattalashtirish yoki $\sigma(\theta^*)$ ni kichiklashtirish hisobiga interval uzunligini kichraytirish mumkin. Demak, agar tanlanma hajmlari teng bo'lsa, eng yaxshi ishonchlilik intervalini tarqoqligi kichik bo'lgan baho yordamida tuzish mumkin. Eng yaxshi asimptotik ishonchlilik intervallari asimptotik effektiv baholar yordamida tuziladi.

θ^* baho $\mathbb{C}_K \cap \mathbb{C}_\Phi$ sinfga tegishli bo'lib, Kramer-Raoning regulyarlik shartlari o'rinli bo'lsin. U holda chegarasi

$$\theta^{\pm} = \theta^* \pm t_{\frac{1-\gamma}{2}}/\sqrt{nI(\theta^*)},$$

bo'lgan interval eng yaxshi asimptotik ishonchlilik intervali bo'ladi. Bu yerda θ^* – ixtiyoriy asimptotik effektiv bahodir.

3-§. Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar

I. Gamma taqsimot va uning xossalari.

1-ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \tag{1}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda ξ tasodifiy miqdor gamma taqsimotiga ega deyiladi, bu yerda $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ va $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t}\,dt$ – gamma funksiya: $\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)\Gamma(\lambda-1)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Gamma taqsimotni $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ orqali belgilaymiz.

$\xi \sim \Gamma_{\alpha\lambda}$ tasodifiy miqdor xarakteristik funksiyasini hisoblaymiz:

$$\phi_\xi(t) = M\left(e^{it\xi}\right) = \int_0^\infty e^{itx} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-(\alpha-it)x} dx =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)(\alpha-it)^\lambda} \underbrace{\int_0^\infty ((\alpha-it)x)^{\lambda-1} e^{-(\alpha-it)x} d(\alpha-it)x}_{\Gamma(\lambda)} = \frac{\alpha^\lambda}{(\alpha-it)^\lambda} = \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}.$$

Demak, $\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}$. Xarakteristik funksiya yordamida gamma taqsimot momentlarini oson hisoblash mumkin: $M\xi = \frac{\lambda}{\alpha}$, $D\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$.

Xossalari:

1) Agar $\xi_1,...,\xi_n$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $\xi_i \sim \Gamma_{\alpha\,\lambda_i}$, $i = 1,...,n$, bo'lsa, u holda $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ ning taqsimoti $\Gamma_{\alpha,\sum_1^n \lambda_j}$ bo'ladi.

Bu xossani isbotlash uchun xarakteristik funksiyalardan foydalanamiz. $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ taqsimotning xarakteristik funksiyasi $\varphi_\xi(t) = \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}$ ga teng. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining xarakteristik funksiyasi xarakteristik funksiyalar ko'paytmasiga teng ekanligidan foydalansak, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ tasodifiy miqdor xarakteristik funksiyasi

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{\xi_j}(t) = \prod_{j=1}^n \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda_j} = \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

bo'ladi. $\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j}$ xarakteristik funksiya esa $\Gamma_{\alpha,\sum_1^n \lambda_j}$ taqsimotning xarakteristik funksiyasidir.

2) Agar ξ standart normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda ξ^2 tasodofiy miqdor $\Gamma_{1/2,1/2}$ taqsimotga ega bo'ladi. Buni ko'rsatish uchun avval ξ^2 tasodifiy miqdorning taqsimotini topamiz. Agar $x \leq 0$ bo'lsa: $F_{\xi^2}(x) = P(\xi^2 < x) = 0$, $x > 0$ bo'lsa:

$$F_{\xi^2}(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x})$$

bo'ladi. Bu yerda $F_\xi(x)$ – standart normal taqsimotning taqsimot funksiyasi. Endi ξ^2 tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz. $x > 0$ da:

$$f_{\xi^2}(x) = \left(F_{\xi^2}(x)\right)' = F'_\xi(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + F'_\xi(-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_\xi(\sqrt{x}) + f_\xi(-\sqrt{x})\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot f_\xi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}.$$

$x \leq 0$ da: $f_{\xi^2}(x) = 0$.

Demak, ξ^2 tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f_{\xi^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x/2}, \ x > 0.$$

$\Gamma_{1/2,1/2}$ taqsimot zichlik funksiyasiga teng ekan.

3) $\Gamma_{\alpha,1}$ taqsimot α parametrli ko'rsatkichli taqsimotdir.

Agar $\xi \sim \Gamma_{\alpha,1}$ bo'lsa, uning zichlik funksiyasi $f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ – α parametrli ko'rsatkichli taqsimot zichlik funksiyasidir.

4) Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ bog'liqsiz va standart normal taqsimotga ega tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_k^2 \sim \Gamma_{1/2,k/2}$ bo'ladi.

Bu xossaning isboti 1- va 2-xossalardan kelib chiqadi.

II. Xi-kvadrat taqsimot va uning xossalari.

Gamma taqsimotning 4-xossasiga ko'ra:

agar $\xi_1,...,\xi_k$ bog'liqsiz standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$\chi_k^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_k^2$$

Tasodifiy miqdor $\Gamma_{1/2,k/2}$ taqsimotga ega bo'ladi.

k ta standart normal taqsimlangan t.m.lar kvadratlarining yig'indisining taqsimoti ozodlik darajasi k bo'lgan xi-kvadrat taqsimotdir va uni H_k deb belgilaymiz. Natijaga ko'ra, $H_k = \Gamma_{1/2,k/2}$ bo'ladi. Demak, H_k taqsimot zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0, \tag{2}$$

va asosiy sonli xarakteristikalari $M\chi_k^2 = (k/2)/(1/2) = k$, $D\chi_k^2 = (k/2)/(1/2)^2 = 2k$ ga teng.

Xossalari:

1) Agar $\chi_k^2 \sim H_k$, $\chi_m^2 \sim H_m$, hamda χ_k^2 va χ_m^2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\chi_k^2 + \chi_m^2 \sim H_{k+m}$.

Buni ko'rsatish uchun $\chi_k^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_k^2$ va $\chi_m^2 = \xi_{k+1}^2 + ... + \xi_{k+m}^2$ deb bilish yetarlidir. Bu holda $\chi_k^2 + \chi_m^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_{k+m}^2$ ning taqsimoti H_{k+m} bo'ladi.

2) Agar $\xi_1,...,\xi_k$ bog'liqsiz va $N(a,\sigma^2)$ taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\xi_i - a}{\sigma}\right)^2$$

ning taqsimoti H_k – xi-kvadrat taqsimoti bo'ladi.

III. Styudent taqsimoti va uning xossalari.

Agar $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k$ bog'liqsiz va standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$t_k = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\left(\xi_1^2 + ... + \xi_k^2\right)}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\chi_k^2}{k}}}$$

tasodifiy miqdor taqsimotini ozodlik darajasi k bo'lgan Styudent taqsimoti deyiladi va uni T_k bilan belgilaymiz. Ozodlik darajasi k bo'lgan Styudent taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f_k(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k}\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}. \tag{3}$$

Bu taqsimotning sonli xarakteristikalari: $Mt_k = 0$, $Dt_k = \frac{k}{k-2}$.

Katta sonlar qonuniga ko'ra $k \to \infty$ da:

$$\frac{\chi_k^2}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 \xrightarrow{p} M\xi^2 = M\chi_1^2 = 1.$$

u holda $k \to \infty$ da $t_k \Rightarrow N(0,1)$ bo'ladi.

IV. Fisher taqsimoti va uning xossalari.

Agar $\chi_k^2 \sim H_k$, $\chi_m^2 \sim H_m$ va χ_k^2 va χ_m^2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$f_{k,m} = \frac{\chi_k^2/k}{\chi_m^2/m} = \frac{m\chi_k^2}{k\chi_m^2}.$$

Tasodifiy miqdorning taqsimoti ozodlik darajalari k va m bo'lgan Fisher taqsimoti deyiladi va uni $F_{k,m}$ bilan belgilaymiz. Ozodlik darajalari k va m bo'lgan Fisher taqsimoti zichlik funksiyasi

$$f_{k,m}(x) = \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k+m}}\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)\Gamma(m)}, \quad x > 0. \tag{4}$$

Agar $f_{k,m}$ tasodifiy miqdor $F_{k,m}$ Fisher taqsimotiga ega bo'lsa, u holda $1/f_{k,m}$ tasodifiy miqdorning taqsimoti $F_{m,k}$ Fisher taqsimoti bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan xossalardan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. $X_1, X_2, \dots, X_n$ bog'liqsiz va $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar va $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2$,

$\overline{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{x}\right)^2$ bo'lsin. U holda yuqoridagilarni e'tiborga olsak, har bir n uchun:

$$1.\ \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma}\sim N(0,1). \tag{5}$$

$$2.\ \frac{n\overline{S}^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-a}{\sigma}\right)^2\sim H_n. \tag{6}$$

$$3.\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^2\sim H_{n-1}. \tag{7}$$

$$4.\ \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sqrt{S^2}}\sim T_{n-1}. \tag{8}$$

4-§. Parametr funksiyalari uchun delta usulning qo'llanilishi

Delta usul baholanayotgan noma'lum parametr funksiyalarni Teylor qatoriga yoyishga asoslanadi. Faraz qilaylik, biz ξ tasodifiy miqdorni n ta bog'liqsiz tajribada kuzatib, $X^{(n)}=\left(X_1,...,X_n\right)$ statistik tanlanmaga ega bo'laylik va unga mos statistik model $\left(\mathcal{X}^{(n)},\mathcal{B}^{(n)},\mathcal{P}\right)$ noma'lum $\theta=\left(\theta_1,...,\theta_s\right)$ parametr aniqligida berilgan bo'lsin:

$$\mathcal{P}=\left\{P_\theta,\theta\in\Theta\right\}.$$

Bu holda matematik statistikaning asosiy masalasi $X^{(n)}$ tanlanma bo'yicha noma'lum θ parametrni baholashdan iboratdir. Buning uchun biz haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli, momentlar usuli, Bayes usuli, kichik kvadratlar usuli va boshqa usullarni qo'llab, θ uchun biror $\theta_n=\left(\theta_{1n},...,\theta_{sn}\right)$ bahoni tuzib olishimiz mumkin. Agarda bizdan θ ning funksiyasi $\psi(\theta)$ ni baholash talab etilayotgan bo'lsa, tabiiyki, uning bahosini $\psi(\cdot)$ ning xossalarini e'tiborga olgan holda o'rniga qo'yish usuli asosida $\psi\left(\theta_n\right)$ kabi qurishimiz mumkin. U holda $\psi\left(\theta_n\right)$ ning $\psi(\theta)$ ga baho sifatida asimptotik xossalarini uning Teylor qatoriga yoyilmasi

$$\psi(\theta_n) = \psi(\theta) + \psi'(\theta)(\theta_n - \theta) + \dots \tag{1}$$

orqali θ_n ning θ ga qanchalik yaqinligini e'tiborga olgan holda polinomial approksimatsiyaga asoslangan holda aniqlashimiz mumkin. Aynan mana shu usul delta usulning mohiyatini tashkil etadi. Albatta umumiy holda (1) qatorni vektor funksiyani vektor parametr bo'yicha qatorga yoyilmasi deb qarash lozim.

Ushbu usulni yaxshiroq aniqlash uchun biz θ parametr va uning funksiyasi $\psi(\theta)$ skalyar, ya'ni bir o'lchovlik bo'lgan holga to'xtalib o'tamiz.

Quyidagi misolni ko'rib o'taylik. Ma'lumki, agar $X^{(n)}$ tanlanma $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ parametrlik $N(\theta_1, \theta_2^2)$ normal taqsimotdan olingan bo'lsa, $\theta_1 = M_\theta \xi$, $\theta_2^2 = D_\theta \xi \in (0, \infty)$ bo'lib, θ_2 ma'lumligida θ_1 ning bahosi – o'rta arifmetik qiymat $\theta_{1n} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ning asimptotik taqsimoti markaziy limit teoremaga asosan standart normaldir:

$$\frac{n^{1/2}(\overline{x} - \theta_1)}{\theta_n} \xrightarrow[t \to \infty]{d} N(0,1). \tag{2}$$

Ammo ko'p hollarda bizni $\overline{x}$ o'rniga uning biror funksiyasi $\psi(\overline{x})$ ning asimptotik xossalari qiziqtiradi. Bunday hollarda matematik statistikada delta usuldan foydalaniladi. Biz bu usul mohiyatini quyidagi teoremada asoslab beramiz.

Teorema (delta usul). Faraz qilamiz, $\{T_n, n \ge 1\}$ shunday statistikalar ketma-ketligiki, u uchun $n \to \infty$ da

$$\frac{T_n - a}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

bo'lsin. Bu yerda a biror o'zgarmas va $\{\sigma_n, n \ge 1\}$ esa shunday sonlar ketma-ketligiki, $n \to \infty$ da $\sigma_n \to 0$. Agar $\psi(x)$ – haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasi $x = a$ nuqtada differensiallanuvchi va $\psi'(a) \ne 0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{\psi(T_n) - \psi(a)}{\psi'(a)\sigma_n} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1). \tag{3}$$

Demak, biz (3) yaqinlashishni $T_n = \overline{x}$ uchun qo'llasak, u holda (2) ga asosan,

$$\frac{n^{1/2}\left(\psi(\overline{x})-\psi(\theta_1)\right)}{\psi'(\theta_1)\theta_2} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1). \tag{4}$$

Endi (4) ga asosan yetarlicha katta n larda taqsimot bo'yicha quyidagi

$$\psi\left(\overline{x}\right) \approx N\left(\psi(\theta_1), \left[\psi'(\theta_1)\right]^2 \cdot \theta_2^2 / n\right) \tag{5}$$

taqribiy tenglikka ega bo'lamiz. Masalan, $\psi(x) = x^2$ bo'lsa, u holda (5) dan $\overline{x^2}$ statistikaning taqribiy taqsimotini normal taqsimot orqali quyidagidek aniqlaymiz:

$$\overline{x^2} \approx N\left(\theta_1^2,\ 4\theta_1\theta_2^2 / n\right). \tag{6}$$

Demak, delta usul mohiyatida $\psi(x)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi

$$\psi(x) = \psi(a) + \psi'(a)(x-a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

yotibdi. Yuqorida biz mana shu yoyilmaning yuqori tartibli hadlarini tashlab yuborish natijasida olinadigan

$$\psi(x) \approx \psi(a) + \psi'(a)(x-a)$$

– chiziqli approksimatsiyasidan foydalandik. Agarda yoyilmada $\psi'(a) = 0$ bo'lib qolsa, u holda biz delta usulni quyidagi kvadratik approksimatsiyaga asoslangan holda amalga oshiramiz:

$$\psi(x) \approx \psi(a) + \frac{1}{2}\psi''(a)(x-a)^2 \tag{7}$$

va h.k. Shuni ta'kidlaymizki, (6) taqribiy tenglik $\theta_1 \neq 0$ da o'rinlidir. Agarda $\theta_1 = 0$ bo'lsa, u holda (2) dan $\overline{x^2} \approx N\left(0, \theta_2^2 / n\right)$ va (7) dan esa

$$n\overline{x^2} = \left(-\sqrt{n}\,\overline{x}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} N^2\left(0, \theta_2^2\right) = \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta_2^2}}$$

ya'ni $\overline{x^2} \approx \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{n}{2\theta_2^2}}$. Bu yerda $\Gamma_{a,b}$ – gamma taqsimot.

Demak, delta usul orqali ko'plab murakkab funksional xarakteristikalarning taqribiy (asimptotik) taqsimotlarini aniqlashda foydalanish qulay ekan.

Mashq. Markaziy limit teorema shartlarida $\theta_1 = M_\theta \xi \neq 0$, $\theta_2^2 = D_\theta \xi \in (0,\infty)$, $\psi(\overline{x}) = \frac{1}{\overline{x}}$ ning taqribiy taqsimotini aniqlang. Javob: $\frac{1}{\overline{x}} \approx N\left(\frac{1}{\theta_1}, \frac{\theta_2^2}{\theta_1^4 n}\right)$.

5-§. Normal taqsimot parametrlari uchun ishonchlilik intervallari

a) $N(\theta,\sigma^2)$ **model (σ^2-ma'lum).** Noma'lum parametr θ uchun ishonchlilik intervalini tuzamiz. Normal taqsimotning xarakterizatsion xossasiga ko'ra: agar $\xi_1 \sim N(a_1,\sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim N(a^2,\sigma_2^2)$ va $\xi_1 \perp \xi_2$ bo'lsa, $\eta = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimotga ega va uning parametrlari $M\eta = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma$, $D\eta = \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2$ bo'ladi. Ushbu xarakterizatsion xossadan foydalanamiz:

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ – statistikaning taqsimoti $N(n\theta, n\sigma^2)$;

$\sum_{i=1}^{n} x_i - na$ – statistikaning taqsimoti $N(0, n\sigma^2)$;

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - na}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n}\frac{\overline{x}-\theta}{\sigma}$ – statistikaning taqsimoti $N(0,1)$.

Demak, $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\theta}{\sigma}$ standart normal taqsimotga ega, ya'ni taqsimot noma'lum parametrga bog'liq emas. Markaziy statistika sifatida aynan shu statistikani olamiz:

$$P_\theta\left(g_1 \le G(x^{(n)};\theta) \le g_2\right) = P_\theta\left(g_1 \le \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma} \le g_2\right) =$$

$$= P_\theta\left(\bar{x} - \frac{g_2}{\sqrt{n}}\sigma \le \theta \le \bar{x} + \frac{g_1}{\sqrt{n}}\sigma\right) \quad (1)$$

Bu yerda $g_1 < g_2$ lar $\Phi(g_2) - \Phi(g_1) = \gamma$ shartni qanoatlantiruvchi normal taqsimot kvantillari. g_1 va g_2 larni interval uzunligi minimal bo'ladigan qilib tanlash kerak: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(g_2 - g_1) \to \min$. Buning uchun Lagranj funksiyasini ko'ramiz:

$$L(g_1, g_2, \lambda) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(g_2 - g_1) + \lambda\left(\Phi(g_2) - \Phi(g_1) - \gamma\right),\ \lambda > 0.$$

$L(g_1, g_2, \lambda)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini aniqlaymiz:

$$\frac{\partial L(g_1, g_2, \lambda)}{\partial g_1} = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \lambda\varphi(g_1) = 0,\ \frac{\partial L(g_1, g_2, \lambda)}{\partial g_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \lambda\varphi(g_2) = 0,$$

bu yerda $\varphi(x)$ standart normal taqsimot zichlik funksiyasi. Bundan $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ ekanligi kelib chiqadi. Barcha $x \in R$ da $\varphi(x) = \varphi(-x)$ o'rinliligidan, $g_1 = g_2$, yoki $g_1 = -g_2$ bo'ladi. Lekin $\Phi(g_2) - \Phi(g_1) = \gamma \ne 0$ dan $g_1 = -g_2$ bo'ladi. $\Phi(g_2) - \Phi(-g_2) = \gamma$ va $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ tengliklardan foydalanib, $\Phi(g_2) = \frac{1+\gamma}{2}$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $g_2 = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$. Kvantillarni (1) ga qo'ysak, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$P_\theta\left(\bar{x} - \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma \le \theta \le \bar{x} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma\right) = \gamma$$

Demak, $N(\theta, \sigma^2)$ modelda (σ^2 – ma'lum) noma'lum parametr θ uchun $\left(\bar{x} - \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma;\ \bar{x} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma\right)$ ishonchlilik intervali bo'ladi.

b) $N(a,\theta^2)$ **model (a – ma'lum).** Noma'lum dispersiya θ^2 uchun ishonchlilik intervalini tuzamiz. Ma'lumki, agar $x_1,\dots,x_n \sim N(a,\theta^2)$ bo'lsa, $\frac{x_i-a}{\theta} \sim N(0,1)$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{\theta^2} \sim H_n$ bo'ladi.

Demak, markaziy statistika sifatida $G(x,\theta)=\frac{nS_1^2}{\theta^2}$ ni olamiz. Bu yerda $S_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$, g_1 va g_2 **lar ozodlik darajasi n bo'lgan xi-kvadrat** taqsimot kvantillari. g_1 va g_2 **kvantillarni** $\int_{g_1}^{g_2} k_n(x)dx=\gamma$ **($k_n(x)$ – xi-kvadrat taqsimot zichligi) shartdan aniqlaymiz:** $\int_0^{g_1} k(x)dx=\frac{1-\gamma}{2}$, $\int_{g_2}^{\infty} k(x)dx=\frac{1-\gamma}{2}$. Demak, $g_1=\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n}$, $g_2=\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n}$.

Yuqoridagilarni inobatga olib,

$$P\left(g_1\le\frac{nS_1^2}{\theta^2}\le g_2\right)=P\left(\frac{nS_1^2}{g_2}\le\theta^2\le\frac{nS_1^2}{g_1}\right)=P\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n}}\le\theta^2\le\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n}}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. **Demak,** $N(a,\theta^2)$ **(a –** ma'lum) **modelda noma'lum dispersiya θ^2 uchun ishonchlilik intervali** $\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n}};\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n}}\right)$ bo'lar ekan.

Yuqoridagilar va qolgan modellar uchun markaziy statistika, uning taqsimoti va ishonchlilik intervalining chegaralari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Model	Noma'lum parametr	Markaziy statistika va uning taqsimoti	(T_1,T_2) – γ ishonchlilik intervali
$N(\theta,\sigma^2)$	θ	$G(x^{(n)};\theta)=\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma}$; $N(0,1)$	$T_{1,2}=\bar{x}\mp\sigma\frac{c_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$
$N(a,\theta^2)$	θ^2	$G(x^{(n)};\theta)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{\theta^2}$; H_n	$T_{1,2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{\chi^2_{\frac{1\pm\gamma}{2},n}}$
$N(\theta_1,\theta_2^2)$	θ_1	$G(x^{(n)};\theta)=\sqrt{n-1}\frac{\bar{x}-\theta_1}{S}$; T_{n-1}	$T_{1,2}=\bar{x}\mp S\frac{t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}{\sqrt{n-1}}$
$N(\theta_1,\theta_2^2)$	θ_2^2	$G(x^{(n)};\theta)=\frac{nS^2}{\theta_2^2}$; H_{n-1}	$T_{1,2}=\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{1\mp\gamma}{2},n-1}}$
$N(\theta^{(1)},\sigma_1^2)$, $N(\theta^{(2)},\sigma_2^2)$	$\tau=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}$	$G(x^{(n)},y^{(n)};\tau)=\frac{\bar{x}-\bar{y}-\tau}{\sigma}$; $N(0,1)$	$T_{1,2}=\bar{x}-\bar{y}\mp\sigma c_{\frac{1+\gamma}{2}}$, $\sigma^2=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}$
$N(\theta_1^{(1)},\theta_2^2)$, $N(\theta_1^{(2)},\theta_2^2)$	$\tau=\theta_1^{(1)}-\theta_1^{(2)}$	$G(x^{(n)},y^{(n)};\tau)=\sqrt{\frac{nm(m+n-2)}{m+n}}\cdot\frac{\bar{x}-\bar{y}-\tau}{\sqrt{nS_x^2+mS_y^2}}$ T_{m+n-2}	$T_{1,2}=\bar{x}-\bar{y}\mp t_{\frac{1+\gamma}{2},m+n-2}\times$ $\times\sqrt{\frac{m+n}{mn(m+n-2)}\left(nS_x^2+mS_y^2\right)}$
$N(\theta_{11},\theta_{21}^2)$, $N(\theta_{12},\theta_{22}^2)$	$\tau=\theta_{21}^2/\theta_{22}^2$	$G(x^{(n)},y^{(n)};\tau)=\frac{n(m-1)S_x^2}{m(n-1)S_y^2}\Big/\tau$; $F_{n-1,m-1}$	$T_{1,2}=\frac{n(m-1)S_x^2}{m(n-1)S_y^2}\Big/f_{\frac{1\pm\gamma}{2},n-1,m-1}$

1. $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ tanlanma $N(\theta_1,\theta_2^2)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ_2^2 uchun ishonchlilik intervalini tuzing.

2. $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ tanlanma $R[0,\theta],\theta > 0$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ uchun ishonchlilik intervalini tuzing.

3. $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ tanlanma $\Gamma_{\theta,\lambda}$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ uchun asimptotik ishonchlilik intervalini tuzing.

4. $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ tanlanma $E(\theta)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ uchun asimptotik ishonchlilik intervalini tuzing.

5. $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ tanlanma $Bi(n;\theta)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ uchun asimptotik ishonchlilik intervalini tuzing.

6. $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ tanlanma $Ge(\theta)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ uchun asimptotik ishonchlilik intervalini tuzing.

XIII BOB. STATISTIK GIPOTEZALARNI TEKSHIRISH

1-§. Statistik gipotezalarni tekshirish nazariyasining umumiy tushunchalari

Matematik statistikaning eng asosiy bo'limlaridan biri – **statistik gipotezalarni tekshirish nazariyasidir**. ***Statistik gipoteza*** – kuzatilayotgan tasodifiy miqdor taqsimot qonuni (agar u butunlay noma'lum bo'lsa) yoki uning parametrlari (agar u parametrlar aniqligida berilgan bo'lsa) haqidagi taxmindan iboratdir. $(\mathscr{X}^{(n)},\mathscr{B}^{(n)},\mathscr{P})$ statistik model va $F(x)=P(\xi\le x)$ ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsin.

1) $F(x)$ – umuman noma'lum, biror $\mathscr{F}=\{F\}$ oilaga tegishli bo'lsin. Bu hol noparametrik hol deb ataladi.

2) $F(x)$ – taqsimot funksiya biror noma'lum $\theta=(\theta_1,...,\theta_s)\in\Theta\subseteq R^s$ parametr aniqligida berilgan bo'lsin $\mathscr{F}=\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$. Bu hol parametrik hol deb ataladi.

Yuqoridagi ikki holatni e'tiborga olgan holda gipotezalar ham noparametrik va parametrik ko'rinishda bo'lishi mumkin. Noparametrik gipoteza aynan taqsimot haqida, parametrik gipoteza esa parametr haqida bo'ladi. Bunday gipotezalarga masalan, "bosh to'plamning taqsimoti normal taqsimotdan iborat" yoki "statistik tanlanma matematik kutilmasi 0 bo'lgan normal taqsimotdan iborat", degan taxminlar misol bo'la oladi. Bunda birinchi gipoteza taqsimot qonuni haqida bo'lsa, ikkinchisi esa uning parametri haqidadir. Demak, agar gipotezada aniq taqsimot haqida biror ma'lumotlar bo'lmasa u ***noparametrik gipoteza*** va aksincha bunday ma'lumot mavjud bo'lsa, u ***parametrik gipoteza*** deb ataladi. Bundan tashqari, har ikki ko'rinishdagi gipotezalarning o'zi ham ikki turga bo'linadi: sodda va murakkab gipoteza. Gipotezalarning murakkablik darajasi ham turlicha bo'lishi mumkin. Masalan, gipotezalar yuqorida keltirib o'tilganidek kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimoti haqida; ikki yoki undan ortiq statistik tanlanmalar bir jinsliligi haqida; o'rganilayotgan bosh to'plamning biror sonli xarakteristikalari haqida va hokazo turlicha bo'lishi mumkin. Masalan, agar λ eksponensial taqsimot parametri bo'lib, biz taxminni $\lambda = 1$ ko'rinishda yozsak, u sodda gipotezaga, ammo agar $\lambda \geq 1$ ko'rinishda yozsak, u holda u murakkab parametrik gipotezaga misol bo'la oladi. 1-holda gipoteza aniq taqsimotni, 2-holda esa taqsimotlar oilasini ifodalaydi. Statistik gipotezalar H harfi bilan belgilanadi. U *Hypotesis* – gipoteza so'zidan olingan. Odatda asosiy gipotezani H_0, alternativ (qarama-qarshi) gipotezani H_1 bilan belgilanadi.

Demak, murakkab gipotezani chekli yoki cheksiz sondagi sodda gipotezalar ko'rinishida ham ifodalash mumkin ekan. Bundan tashqari, yana gipotezalar ***asosiy*** (yoki **nolinchi**) va **alternativ** (***konkurent, qarama-qarshi***) gipotezalarga ham bo'linadi. Odatda asosiy gipoteza H_0 orqali, alternativi esa H_1 orqali belgilanadi.

Misollar. 1) $F \in \mathscr{F}$ bo'lsin. $H_0 : F = F_0$; $H_1 : F \neq F_0$ gipotezalarni ko'raylik. Bu yerda H_0 – asosiy gipoteza sodda gipoteza, H_1 esa murakkab gipoteza bo'ladi.

2) $\mathscr{P} = \{ P_\theta, \theta \in \Theta \}$, $F(x) = F(x, \theta)$ bo'lsin.

a) $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1; \theta_0, \theta_1 \in \Theta$ gipotezalarning ikkalasi ham sodda gipoteza bo'ladi.

b) $H_0 : \theta \in \Theta_0$; $H_1 : \theta \in \Theta_1$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$ gipotezalarning har ikkisi ham murakkab gipoteza bo'ladi.

Demak, alternativ gipoteza ma'no jihatidan asosiy gipotezaga zid, ya'ni uni inkor etar ekan. Masalan, yuqoridagi $H_0 : \lambda = 1$ gipotezaga, $H_1 : \lambda \neq 1$ yoki $H_2 : \lambda < 1$ yoki $H_3 : \lambda > 1$ gipotezalar alternativ bo'lishi mumkin ekan. Ammo, ko'rish mumkinki H_2 va H_3 gipotezalar H_1 ni ergashtiradi, chunki $\{\lambda \neq 1\} = \{\lambda < 1\} \cup \{\lambda > 1\}$.

Agar biz parametrik gipotezalarni qarayotgan bo'lsak, θ esa noma'lum parametr va Θ – unga mos parametrik fazo, ya'ni θ ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami bo'lsa, u holda $H_0 : \theta \in \Theta_0$ va $H_1 : \theta \in \Theta_1$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, gipotezalar asosiy H_0 va unga alternativ H_1 gipotezani aniqlaydi. Bunda $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ bo'lishi ham mumkin. Doimo asosiy H_0 gipotezaga qarama-qarshi H_1 gipotezani tuzish mumkin. Odatda asosiy gipoteza sifatida sodda gipotezalarni olish maqsadga muvofiqdir, chunki qat'iy da'voni tekshirish amaliyotda qulaydir.

Demak, yuqoridagi fikrlarni jamlab, statistik gipotezalar parametrik yoki noparametrik, sodda yoki murakkabligiga ko'ra quyidagi turlarda bo'lishi mumkin ekan:

- kuzatilayotgan tasodifiy miqdor taqsimoti ko'rinishi haqida;
- o'rganilayotgan bosh to'plam sonli xarakteristikalari haqida;
- ikki va undan ortiq statistik tanlanmalar bir jinsliligi yoki ular sonli xarakteristikalari ustma-ust tushishi haqida.

Faraz qilaylik, bizni qiziqtirayotgan tasodifiy miqdor X bo'lib, uni n ta bog'liq bo'lmagan va bir xil sharoitda o'tkazilgan tajribalarda olingan qiymatlari $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ bo'lib, u biror chekli yoki cheksiz N hajmdagi bosh to'plamdan olingan bo'lsin ($1 \le n \le N \le \infty$). Statistik gipotezalarni tekshirish $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ tanlanma orqali amalga oshiriladi va asosiy gipoteza ma'nosidan kelib chiqqan holda biror $T(x^{(n)})$ statistika kiritiladi. Bu statistikaning qiymatlari to'plami $\mathscr{X}^{(n)}$ bo'lsin, ya'ni $P\left(T\left(x^{(n)}\right) \in \mathscr{X}^{(n)}\right) = 1$. Endi $\mathscr{X}^{(n)}$ to'plamning shunday $\mathscr{X}_1^{(n)}$ qism to'plamini ajratamizki, $\mathscr{X}_1^{(n)} \subset \mathscr{X}^{(n)}$, agar $T\left(x^{(n)}\right) \in \mathscr{X}_1^{(n)}$ bo'lsa, H_0 – gipoteza rad etiladi va H_1 tajriba natijalariga zid emas, deb qabul qilinadi. Aks holda, agar $T\left(x^{(n)}\right) \in \mathscr{X}^{(n)} \setminus \mathscr{X}_1^{(n)} = \mathscr{X}_0^{(n)}$ bo'lsa, u holda H_0 qabul qilinadi. Yuqorida keltirilgan jarayon statistik kriteriy (alomat) deyiladi. Demak, $\mathscr{X}^{(n)} = \mathscr{X}_0^{(n)} \cup \mathscr{X}_1^{(n)}$, $\mathscr{X}_0^{(n)} \cap \mathscr{X}_1^{(n)} = \varnothing$, $\mathscr{X}_k^{(n)} - H_k$, $k = 0,1$ gipotezaga mos to'plam:

$$\mathscr{X}_0^{(n)} = \left\{ x^{(n)} \in \mathscr{X}^{(n)} : H_0 \text{ gipoteza qabul qilinadi} \right\},$$

$$\mathscr{X}_1^{(n)} = \left\{ x^{(n)} \in \mathscr{X}^{(n)} : H_0 \text{ gipoteza rad etiladi} \right\}.$$

$\mathscr{X}_1^{(n)}$ – asosiy gipoteza H_0 rad etiladigan to'plam ***kritik to'plam*** deyiladi.

$\mathscr{X}_1^{(n)}$ to'plam ma'lum ehtimollik asosida maxsus tanlanadi. Gipotezalarni tekshirish jarayonida ma'lum xatolikka yo'l qo'yishimiz mumkin. Ba'zi hollarda asosiy gipoteza H_0 rad etilib qolinishi mumkin, ammo aslida bosh to'plam bo'yicha u to'g'ri (o'rinli) bo'lishi mumkin. Bunday xatolik ***1-tur xatolik***, uning ehtimolligi esa ***qiymatdorlik me'yori (sathi)*** deb ataladi va α orqali belgilanadi. Bu holda α xatolik bilan H_1 gipoteza qabul qilinadi. ***2-tur xatolik*** β ehtimollik bilan belgilanadi va u to'g'ri bo'lmagan H_0 gipotezani aslida H_1 to'g'riligida qabul qilingan holda ro'y beradi. ***Ishonch ehtimolligi*** $1-\alpha$ bo'lib, u to'g'ri bo'lgan H_0 gipotezani qabul qilib, 1-tur xatolikka yo'l qo'ymaslikdan iboratdir. $1-\beta$ ehtimollik ***statistik kriteriyning quvvati*** deb ataladi: $1-\beta = P(H_1 / H_1)$.

Asosiy H_0 gipotezaga nisbatan qabul qilingan yechimni quyidagi jadvalda tasvirlash mumkin.

Gipoteza tekshirishdagi xulosalar

Asosiy gipoteza H_0	Nolinchi H_0 gipotezaga nisbatan qabul qilinadigan yechim	
	Rad etiladi	Qabul qilinadi
To'g'ri	***1-tur xatolik***, uning ehtimolligi $\alpha = P(H_1 / H_0)$	***To'g'ri yechim***, uning ehtimolligi $1-\alpha = P(H_0 / H_0)$
Noto'g'ri	***To'g'ri yechim***, uning ehtimolligi $1-\beta = P(H_1 / H_1)$	***2-tur xatolik***, uning ehtimolligi $\beta = P(H_0 / H_1)$

Tushunurliki, amaliyotda har ikki xatolik ham yetarlicha kichik bo'ishi maqsadga muvofiqdir. Ammo bu o'ta murakkab masaladan iboratdir. Shu sababli, amaliyotda tajriba shunday tashkil qilinishi va u asosida tuzilgan statistik kriteriy shunday bo'lishi zarurki, asosiy hisoblangan 1-tur xatolik ehtimolligi α kichik bo'lishi lozim. Odatda

α ning qiymatlari sifatida quyidagi sonlar olinadi: 0,1; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005; 0,001. Yuqoridagi masala yechimi kriteriy tanlash orqali amalga oshiriladi. Bu xatoliklarning ehtimolliklarini hisoblaymiz: I tur xatolik ehtimolligi

$$P(H_1 / H_0) = P\left(T\left(x^{(n)}\right) \in \mathscr{X}_1^{(n)} / H_0\right) = \alpha$$ – ***kriteriyning muhimlik darajasi*** deyiladi. Demak, $\mathscr{X}_1^{(n)}$, kritik to'plamni shunday tanlash kerakki, I tur xatolik ehtimolligi α juda kichik bo'lishi zarur. II tur xatolik ehtimolligi:

$$P(H_0 / H_1) = P\left(T\left(x^{(n)}\right) \in \mathscr{X}_0^{(n)} / H_1\right) = P\left(T\left(x^{(n)}\right) \bar{\in} \mathscr{X}_1^{(n)} / H_1\right) =$$

$$= 1 - P\left(x^{(n)} \in \mathscr{X}_1^{(n)} / H_1\right) = \beta$$

bo'lib, undan $1 - \beta$ – ehtimollik ***kriteriyning quvvati*** hisoblanadi. Demak, α va β xatoliklar $\mathrm{X}_1^{(n)}$ – kritik to'plamga bo'liq ekan.

2-§. Statistik gipotezani tekshirish uchun kriteriy tanlash prinsiplari

Biz endi eng muhim masala – statistik kriteriyni tuzish masalasini ko'rib o'tamiz. Statistik kriteriy – tanlanma natijalari ilgari surilgan H_0 gipotezaga mosligini aniqlovchi qoidadir. H_0 gipotezani tekshirish uchun maxsus tanlangan tasodifiy miqdor (statistika) qo'llaniladi. Uning taqsimoti aniq yoki taqriban ma'lum bo'lishi zarur. Bu statistikani o'zi ham ***statistik kriteriy*** deb ataladi. Demak, nolinchi H_0 gipotezani tekshirish uchun ishlatiladigan $T = T(X^{(n)})$ statistika ***statistik kriteriy*** (yoki ***kriteriy***) deb ataladi. H_0 gipotezani tekshirish uchun T kriteriyni tanlagandan so'ng uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami $\mathscr{K}$ kesishmaydigan ikki qism to'plamlarga ajratiladi:

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}_0 \cup \mathscr{K}_1, \quad \mathscr{K}_0 \cap \mathscr{K}_1 = \varnothing. \tag{1}$$

Bu yerda, agar $T \in \mathscr{K}_1$ bo'lsa, u holda H_0 inkor etiladi, aks holda ($T \in \mathscr{K}_0$) H_0 qabul qilinadi. H_0 gipotezani rad etuvchi T ning qiymatlari to'plami, ya'ni $\mathscr{K}_1$ to'plam ***kritik to'plam*** deb ataladi. Bunda $\mathscr{K}_0$ to'plam H_0 ni ***qabul qilinishi to'plami*** deb ataladi.

a) O'ng tomonlik kritik to'plamni aniqlash.

Ma'lumki, o'ng tomonlik kritik $\mathscr{K}_1$ to'plam $T > t_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlanadi, bu yerda $t_{kr} > 0$. Demak, bu yerda t_{kr} – kritik nuqtani aniqlash kifoyadir. Bu uchun dastlab qiymatdorlik sathi α ni yetarlicha kichik tanlab, t_{kr} ni nolinchi H_0 gipoteza o'rinliligi shartida $T > t_{kr}$ tengsizlik ehtimolligi α ga teng qilib olinadi:

$$P(T > t_{kr} / H_0) = \alpha. \tag{2}$$

So'ng (2) tenglik T ning aniq yoki taqribiy (ya'ni yetarlicha katta n da limit) taqsimoti jadvalidan t_{kr} ga nisbatan yechib olinadi. Bunday jadvallar deyarli barcha matematik statistika bo'yicha yozilgan adabiyotlar oxirida ilova sifatida keltiriladi. Bunday jadvallarni o'z ichiga olgan asosiy adabiyotlardan biri L. Bolshev va N.Smirnovlarning [4] kitobidir. Biz endi (2) tenglik asosida quyidagi xulosalarni qilamiz. t_{kr} – nuqta aniqlanganidan so'ng kuzatilgan (1) tanlanma bo'yicha T statistika (kriteriy) qiymati T_{kuz} hisoblanadi. Agar $T_{kuz} > t_{kr}$ bo'lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi, agarda $T_{kuz} \le t_{kr}$ bo'lsa, u holda bizda H_0 ni rad etishga asos bo'lmaydi. T kriteriyning T_{kuz} qiymati t_{kr} – kritik nuqtadan katta bo'lishi nafaqat u o'rinli bo'lmaganligi uchun, balki boshqa sabablarga ko'ra, masalan, tanlanma hajmi n kichikligi, tajriba uslubiyati kamchiliklari mavjudligi va boshqalarga ko'ra ham bo'lishi mumkin. Bu holda to'g'ri bo'lgan H_0 gipotezani rad etib, α ehtimollik bilan 1-tur xatolikka yo'l qo'yiladi.

Faraz qilaylik, H_0 gipoteza qabul qilingan bo'lsin. Ammo bunday gipoteza to'g'ri degan fikr noto'g'ridir. Haqiqatan ham, biror umumiy da'voni tasdiqlovchi birgina misol uni isbotlay olmaydi. Shu sababli, quyidagicha fikr yuritish to'g'ri bo'ladi: agar $T_{kuz} \le t_{kr}$ bo'lsa, u holda (1) tanlanma H_0 gipotezaga mos keladi va demak u H_0 ni rad etishimizga asos bo'lmas ekan. Shuning uchun, amaliyotda H_0 ning qabul qilinishi ishonchli bo'lishi uchun uni yana boshqa kriteriylar bilan ham yetarlicha katta n larda tekshiriladi. Ma'lumki, biror da'voni rad etish uchun yagona misol yetarlidir. Shu sababli, biror T kriteriy uchun $T_{kuz} > t_{kr}$ bo'lishi H_0 ni rad etishga asos bo'ladi.

b) Chap tomonlik va ikki tomonlik kritik to‘plamlarni aniqlash. Bu hollarda mos kritik nuqtalarni aniqlaymiz. Chap tomonlik kritik to‘plamni $T < t_{kr}$ $(t_{kr} < 0)$ tengsizlik bilan aniqlaymiz. t_{kr} ni berilgan qiymatdorlik sathi α ga mos qilib

$$P\left(T < t_{kr} / H_0\right) = \alpha \tag{3}$$

tenglikdan T ning aniq yoki limit taqsimotidan aniqlaymiz.

Ikki tomonlik kritik to‘plam $T < t_{kr}^{(1)}$ $(t_{kr}^{(1)} < 0)$ va $T > t_{kr}^{(2)}$ $(t_{kr}^{(2)} > 0)$ tengsizliklar yordamida aniqlanadi. Bunda kritik nuqtalar $t_{kr}^{(1)}$ va $t_{kr}^{(2)}$ larni

$$P\left(T < t_{kr}^{(1)} / H_0\right) + P\left(T > t_{kr}^{(2)} / H_0\right) = \alpha \tag{4}$$

tenglikdan aniqlaymiz. Bu holda (4) tenglama ikki noma’lumga nisbatan birgina tenglama bo‘lganligi uchun kritik nuqtalarni ko‘pgina usullar bilan tanlash mumkin. Agar T kriteriy taqsimoti nolga nisbatan simmetrik bo‘lsa, u holda $-t_{kr}^{(1)} = t_{kr}^{(2)} = t_{kr}$ deb, t_{kr} ni (4) ga asosan

$$P\left(T < -t_{kr} / H_0\right) = P\left(T > t_{kr} / H_0\right) = \frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

tengliklardan tanlash mumkin.

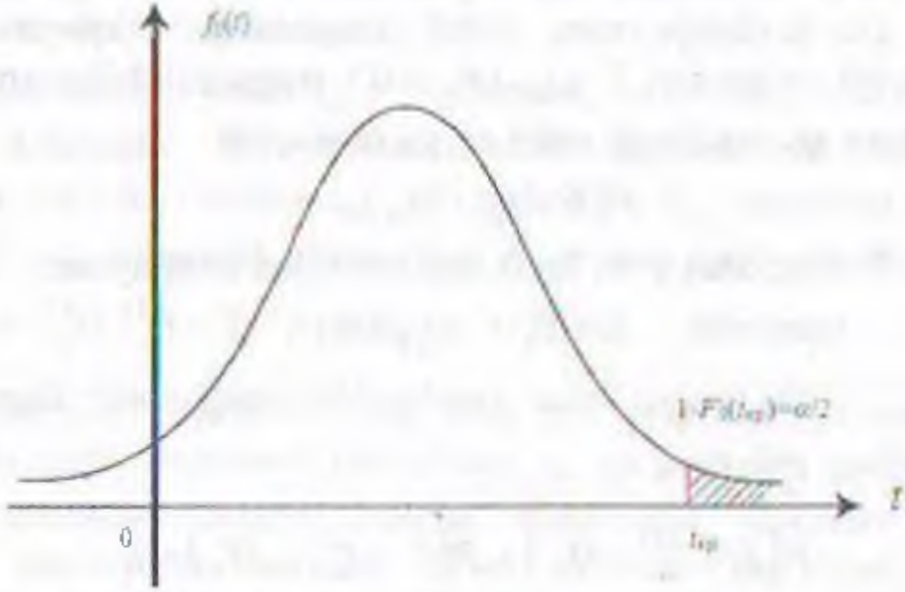
Endi yuqorida a va b-hollarda aytilgan ko‘rsatmalarni T statistikaning H_0 gipoteza o‘rinliligi shartidagi aniq yoki taqribiy (limit) taqsimoti zichligi $f_0(t)$ va uning taqsimot funksiyasi $F_0(t) = \int_{-\infty}^{t} f_0(u)\,du$ orqali tushuntirib o‘tamiz. Demak,

$$F_0(t) = (\text{yoki} \approx) P\left(T < t / H_0\right). \tag{6}$$

Odatda (6) taqsimot yoki uning zichligi f_0 jadvallashtirilgan bo‘ladi. O‘ng tomonlik kritik nuqta t_{kr} (2) tenglik, ya’ni

$$\int_{t_{kr}}^{+\infty} f_0(u)\,du = \alpha \tag{7}$$

tenglikdan jadval yordamida aniqlanadi. (7) tenglikni grafik bilan tasvirlash mumkin (1-rasm).

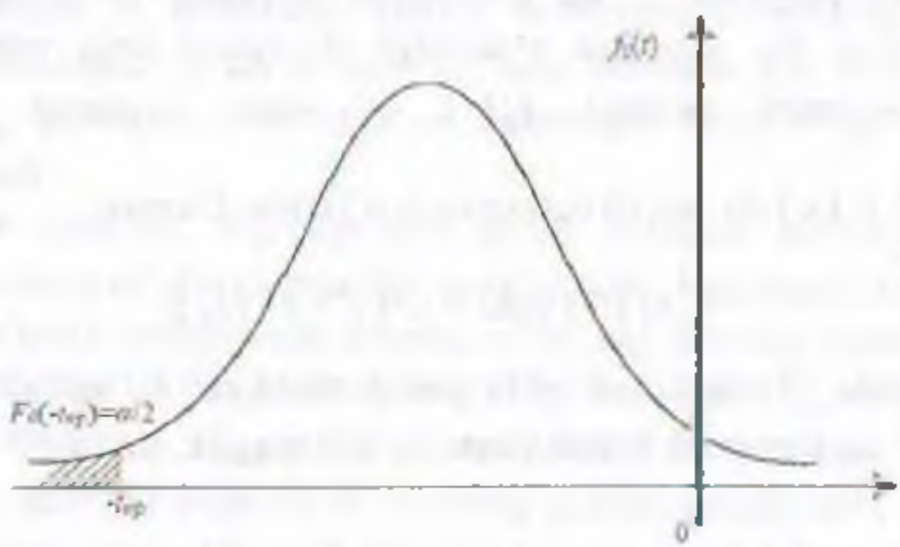


1-rasm.

Chap tomonlik kritik nuqta t_{kr} (3) tenglik, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{-t_{kr}} f_0(u)\,du = \alpha \qquad (8)$$

tenglikdan jadval yordamida aniqlanadi. (8) tenglikni grafik bilan tasvirlash mumkin (2-rasm).

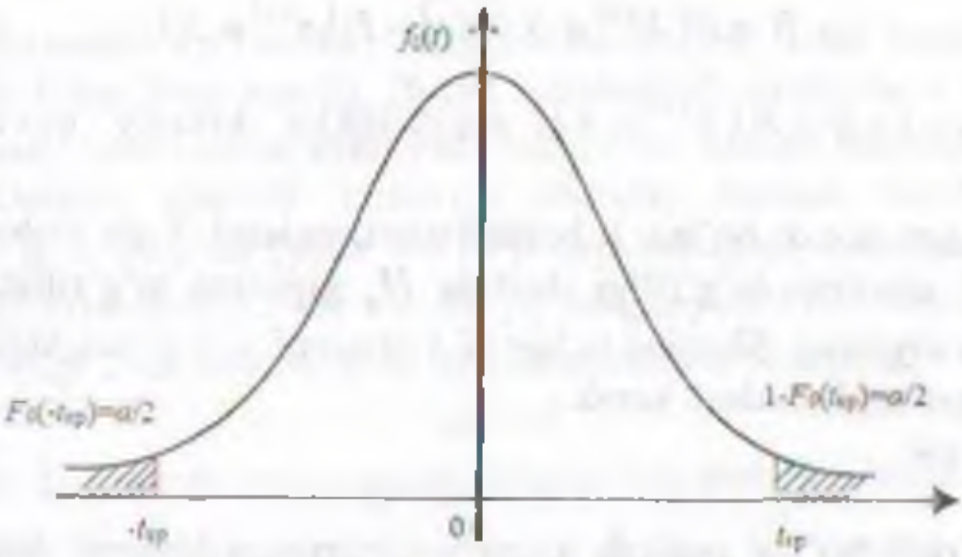


2-rasm.

Agar $f_0(t)$ funksiya simmetrik bo'lsa, ($f_0(-t) = f_0(t)$), u holda t_{kr} ni (4) va (5) tengliklar, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{t_{kr}} f_0(u)\,du = \int_{t_{kr}}^{+\infty} f_0(u)\,du = \frac{\alpha}{2} \tag{9}$$

tengliklar orqali aniqlanadi. Bu holda grafik tasvir 3-rasmdagi kabi bo'ladi.



3-rasm.

3-§. Optimal kriteriy qurish

Faraz qilaylik, bizni qiziqtirayotgan ξ tasodifiy miqdorni kuzatib, bog'liqsiz $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma hosil qilingan bo'lsin. Ushbu tanlanma yordamida kriteriy kuzatiladi. Odatda kriteriy asosiy gipoteza ko'rinishiga qarab quriladi. Bu kriteriy orqali H_0 gipoteza qabul qilinishi yoki rad etilishi mumkin. Statistik kriteriy yordamida S kritik soha aniqlanadi. Agar kuzatilmalar, ya'ni kriteriyning kuzatilmalar bo'yicha qiymati kritik soha S ga tegishli bo'lsa, asosiy H_0 gipoteza rad etiladi va alternativ H_1 gipoteza qabul qilinadi. Aksincha bo'lsa, ya'ni kritik sohaga tegishli bo'lmasa, u holda asosiy gipoteza qabul qilinadi. Avvalgi paragraflardan ma'lumki, statistik gipotezalarni tekshirishda biz ikki turdagi xatolikka yo'l qo'yamiz:

- asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lganligi shartida ularni rad etilishi 1-tur xatolik deb ataladi va α bilan belgilanadi:

$$\alpha = P\left(X^{(n)} \in S / H_0\right) = P_0\left(X^{(n)} \in S\right).$$

- alternativ gipoteza H_1 to'g'riligi shartida uni rad etib asosiy gipoteza H_0 ning qabul qilinishi 2-tur xatolik deb ataladi va β bilan belgilanadi:

$$\beta = P\left(X^{(n)} \notin S / H_1\right) = P_1\left(x^{(n)} \notin S\right).$$

$w = 1 - \beta = P_1\left(X^{(n)} \in S\right)$ -ehtimollikka kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar $w < \alpha$ bo'lsa, u holda kuzatilmalarni S ga nisbatan tuzilishi H_1 gipoteza to'g'riligi shartida H_0 gipoteza to'g'riligi shartiga nisbatan qiyinroq. Shuning uchun S kriteriyni $w > \alpha$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan qilib tanlash kerak.

Agar

$$\alpha \le w = 1 - \beta$$

shart o'rinli bo'lsa statistik kriteriy siljimagan kriteriy deb ataladi. Odatda ikkala ehtimolliklar α va β larni bir vaqtda kichiklashtirish mumkin emas. Shuning uchun 1-tur xatolik α fiksirlanadi va 2-tur xatolikni kichiklashtirishga harakat qilinadi:

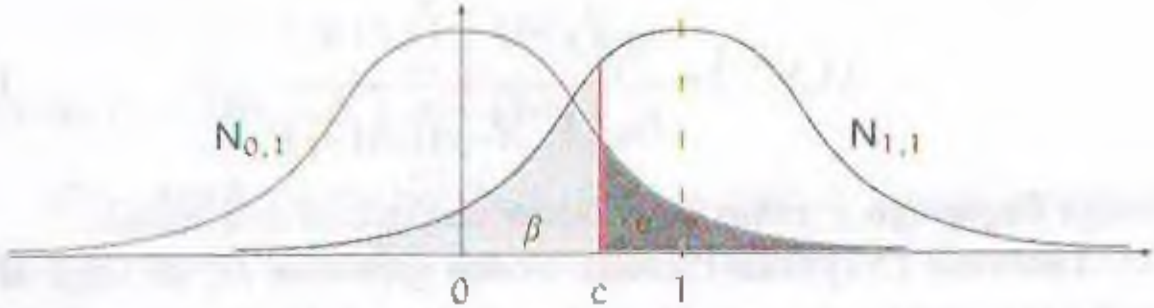
$$\begin{cases} \alpha \le \alpha_0 \\ \beta \to \min\limits_{S} \end{cases} (\alpha_0 \text{ fiksirlangan son}) \text{ yoki } \begin{cases} \alpha \le \alpha_0 \\ w \to \max\limits_{S} \end{cases}.$$

Misol. $(a,1)$ parametrli normal taqsimotni kuzatish natijasida X_1 kuzatilma olingan bo'lsin. $H_0 : a = 0$ va $H_1 : a = 1$ sodda gipotezalarni quraylik. Statistik kriteriyni quyidagicha olamiz:

agar $X_1 \le c$ bo'lsa, H_0 ni,

agar $X_1 > c$ bo'lsa, H_1 ni qabul qilamiz.

U holda 1-tur xatolik $\alpha = P_0\left(X_1 > c\right)$ va 2-tur xatolik $\beta = P_1\left(X_1 \le c\right)$ lar va gipotezalarga mos zichliklarni grafik ifodalaymiz (4-rasm).



4-rasm.

Rasmdan ko'rinadiki c ni kattalashtirsak, 1-tur xatolik α kamayadi, lekin 2-tur xatolik β esa kattalashadi, aksincha c ni kichiklashtirsak, 2-tur xatolik kamayadi, lekin 1-tur xatolik kattalashadi.

Demak, statistik kriteriyni shunday tanlash kerakki, 2-tur xatolik β eng kichik (yoki $w = 1-\beta$ eng katta) qiymatni qabul qilsin. Agar S_0 kriteriydagi 2-tur xatolik β_0 ning qiymati ixtiyoriy boshqa S kriteriydagi 2-tur xatolik β ni qiymatidan katta bo'lmasa:

$$\beta_0 \le \beta,$$

u holda S_0 kriteriy eng quvvatli kriteriy deb ataladi. Ushbu tengsizlik ixtiyoriy S_0^* uchun o'rinli bo'lsa, u holda S_0 kriteriy tekis eng quvvatli kriteriy deb ataladi.

ξ tasodifiy miqdorni kuzatish natijasida $X^{(n)} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ bog'liqsiz tanlanma hosil qilingan bo'lsin. Quyidagi ikki sodda gipotezani ko'ramiz: $H_0 : X_i$ kuzatilmalar taqsimoti $F_0(x)$ va $H_1 : X_i$ kuzatilmalar taqsimoti $F_1(x)$. f_0 va f_1 orqali mos taqsimotlar zichlik funksiyalarini belgilaymiz. Har ikkala taqsimot F_0 va F_1 lar bir vaqtda yoki diskret yoki uzluksiz bo'lsin. H_0 gipoteza o'rinliligida

$$P_{H_0}\left(X^{(n)}\right) = \prod_{i=1}^{n} f_0(X_i), \tag{1}$$

H_1 gipoteza o'rinliligida esa

$$P_{H_1}\left(X^{(n)}\right) = \prod_{i=1}^{n} f_1(X_i), \tag{2}$$

haqiqatga o'xshashlik funksiyalari bo'lsin. Ma'lumki, haqiqatga o'xshashlik funksiyasi bu tanlanmaning zichlik funksiyasidir.

$$L\left(X^{(n)}\right)=\frac{P_{H_1}\left(X^{(n)}\right)}{P_{H_0}\left(X^{(n)}\right)}=\frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(X_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(X_i)} \tag{3}$$

nisbatga ***haqiqatga o'xshashlik nisbati statistikasi*** deb ataladi.

Teorema (Neyman-Pirson). Sodda gipoteza H_0 ni unga alternativ bo'lgan sodda gipoteza H_1 bo'lgan holda tekshirish uchun tekis eng quvvatli kriteriy mavjud va uning kritik sohasi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_0=\left\{x^{(n)},\ l\left(x^{(n)}\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(X_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(X_i)}\geq C\right\}, \tag{4}$$

bu yerda C kritik nuqta $P_{H_0}\left(l\left(x^{(n)}\right)\geq C\right)=\alpha$ shartdan aniqlanadi.

Misol. $X^{(n)}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ tanlanma $\left(\theta;\sigma^2\right)$ parametrli normal taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipotezani ko'ramiz:

$$H_0:\theta=\theta_0 \text{ va } H_1:\theta=\theta_1 \quad \left(\theta_0<\theta_1\right).$$

1-tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy qurish masalasini ko'ramiz: Neyman-Pirson teoremasiga ko'ra kritik sohani aniqlaymiz:

$$l\left(x^{(n)}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\theta_1\right)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\theta_0\right)^2}{2\sigma^2}\right\}}\geq C$$

yoki

$$l\left(x^{(n)}\right)=\exp\left\{\frac{n\bar{x}\left(\theta_1-\theta_0\right)}{\sigma^2}-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\theta_1^2-\theta_0^2\right)\right\}\geq C,$$

bu yerda $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – tanlanma o'rta qiymati tengsizlikning har ikki tomonini logarifmlab, $\theta_1>\theta_0$ ekanligini hisobga olib, quyidagi ekvivalent tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\bar{x} \geq C_1,$$

bu yerda $C_1 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1) + \frac{\sigma^2 \ln c}{(\theta_1 - \theta_0)n}$.

C_1 – kritik nuqta bo'lib, u 1-tur xatolik α orqali aniqlanadi. Odatda $\alpha = 0,05$ beriladi va u orqali C_1 hamda β – 2-tur xatolikni topamiz.

Normal taqsimot xarakterizatsion xossasiga ko'ra: agar $X_1, X_2, ..., X_n$ lar bog'liqsiz tasodifiy miqdor bo'lib, har biri (θ, σ^2) parametrli normal taqsimlangan bo'lsa, u holda: $X_1 + X_2 + ... + X_n \sim N(\theta_n; \sigma^2 n)$ bo'ladi. Bu xossani inobatga olsak, $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ bo'ladi, chunki,

$$M\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = \frac{1}{n}(MX_1 + ... + MX_n) = \frac{1}{n}\theta \cdot n = \theta,$$

$$D\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(DX_1 + ... + DX_2) = \frac{1}{n^2}\sigma^2 n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Demak,

$$\alpha = P_{H_0}(\bar{x} > c_1) = P_{H_0}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{c_1 - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(c_1 - \theta_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

bu yerda $\Phi(\cdot)$ standart normal taqsimotning taqsimot funksiyasidir. Agar t_α orqali α – tartibli kvantilni belgilasak, $\Phi(t_\alpha) = \alpha$, u holda

$$t_{1-\alpha} = \frac{c_1 - \theta_0}{\sigma}\sqrt{n}. \qquad (5)$$

(5) tenglikdan c_1 – kritik chegarani topamiz:

$$c_1 = \theta_0 + \frac{t_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (6)$$

(6) tenglikdan ko'rinadiki, c_1, soni θ_0 ga bog'liq, lekin θ_1 ga bog'liq emas. Endi 2-tur ehtimollik β ni aniqlaymiz:

H_1 gipoteza o'rinliligida

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \sim N\left(\theta_1, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$$

ekanligidan

$$\beta = P_{H_1}\left(\overline{x} < c_1\right) = P_{H_1}\left(\frac{\overline{x}-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c_1-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{c_1-\theta_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\theta_0-\theta_1}{\sigma} + t_{1-\alpha}\right)$$

bo'ladi.

Endi $n=25$, $\sigma^2=25$, $\theta_0=0$, $\alpha=0,05$ bo'lganda 2-tur xatolik β ning qiymatini hisoblaymiz:

agar $\theta_1 = 1$ bo'lsa, $\beta = \Phi\left(\sqrt{25}\frac{0-1}{\sqrt{25}} + 1,645\right) = 0,741;$

agar $\theta_1 = 5$ bo'lsa, $\beta = \Phi\left(\sqrt{25}\frac{0-5}{\sqrt{25}} + 1,645\right) = 0,001.$

Yuqorida keltirilganlardan ko'rinadiki, θ_1 ni θ_0 dan uzoqlashtirsak, 2-tur xatolik ehtimolligi kichiklashar ekan.

Asosiy va alternativ gipotezalar sodda bo'lgan hollar nisbatan kam uchraydi. Ko'p hollarda asosiy va alternativ gipotezalarning har ikkalasi ham (yoki ulardan biri) murakkab bo'lgan hol uchraydi. Quyidagi ko'p uchraydigan holni ko'ramiz: $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma noma'lum parametr aniqligida berilgan va asosiy gipoteza H_0 – sodda, alternativ gipoteza esa murakkab.

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

bu yerda θ – noma'lum parametr, Θ – noma'lum parametr θ aniqlangan soha, ya'ni parametrik fazo, $\Theta_1 = \Theta \setminus \{\theta_0\}$.

Neyman-Pirson teoremasiga ko'ra, $\forall(\theta_0, \theta_1)$, $\theta_1 \in \Theta_1$ nuqtadan asosiy gipoteza $H_0 : \theta = \theta_0$ ni unga alternativ gipoteza $H_1 : \theta = \theta_1$ bo'lgan holda eng quvvatli kriteriy qurish mumkin.

Agar eng quvvatli kriteriylar aynan shu S kritik sohaga ega bo'lsa, u holda statistik kriteriy alternativ gipotezaning ixtiyoriy Θ_1 dagi qiymatida kriteriy quvvatini maksimallashtiradi. Shuning uchun bunday kriteriyni sodda gipoteza H_0ni tekshirishda unga alternativ gipoteza $H_1 : \theta \in \Theta_1$ bo'lgandagi tekis eng quvvatli kriteriy deb ataladi. Agar S alternativa θ_1 ga bog'liq bo'lsa, u holda $\forall \theta_1 \in \Theta_1$

uchun eng yaxshi kritik soha mavjud emas. Bu esa ushbu holda tekis eng quvvatli kriteriy mavjud emasligini bildiradi. Quyida tekis eng quvvatli kriteriy qurishga misol ko'ramiz:

Misol. $X^{(n)}=(X_1,X_2,...,X_n)$ tanlanma (θ,σ^2) parametrli normal taqsimotdan olingan bo'lsin. Alternativ gipoteza $H_1:\theta>\theta_0$ bo'lganda asosiy gipoteza $H_1:\theta=\theta_0$ ni tekshirish masalasini ko'ramiz. Neyman-Pirson kriteriysini qo'llab ikki sodda gipoteza uchun $H_1:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_0<\theta_1$, $\bar{x}>c_1$ kritik sohaga ega bo'lamiz (S kritik sohani topish yuqorildagi misolda keltirilgan).

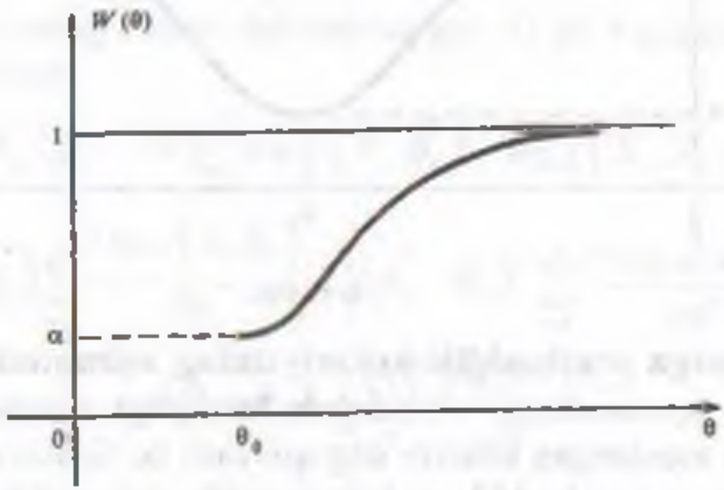
Bu yerda $c_1=\theta_0+t_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ya'ni alternativ θ_1 ga bog'liq emas. Shuning uchun S kriteriy sodda $H_1:\theta=\theta_0$ va murakkab $H_1:\theta\in\Theta_1$ larni tekshirishda tekis eng quvvatli kriteriy bo'ladi. Ushbu kriteriy quvvati

$$w=1-\Phi\left(\frac{c_1-\theta}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{\theta_0-\theta}{\sigma}\sqrt{n}+t_\alpha\right) \qquad (7)$$

ga teng. $\theta_0-\theta<0$ ekanligidan, $\forall\theta>\theta_0$ da

$$w\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Bu xossa o'rinli bo'lgan kriteriy asosli kriteriy deb ataladi. (7) kriteriy grafigi 5-rasmda keltirilgan.



5-rasm.

θ ni θ_0 ga intilishida quvvat α miqdorgacha kichiklashadi:

$$w \to 1 - \Phi(t_\alpha) = 1 - (1-\alpha) = \alpha ,$$

hamda 2-tur xatolik $\beta = 1 - w$ esa $1-\alpha$ ga intiladi.

Qurilgan misolda kritik soha bir tomonlama edi, endi ikki tomonlama bo'lgan holni ham ko'ramiz.

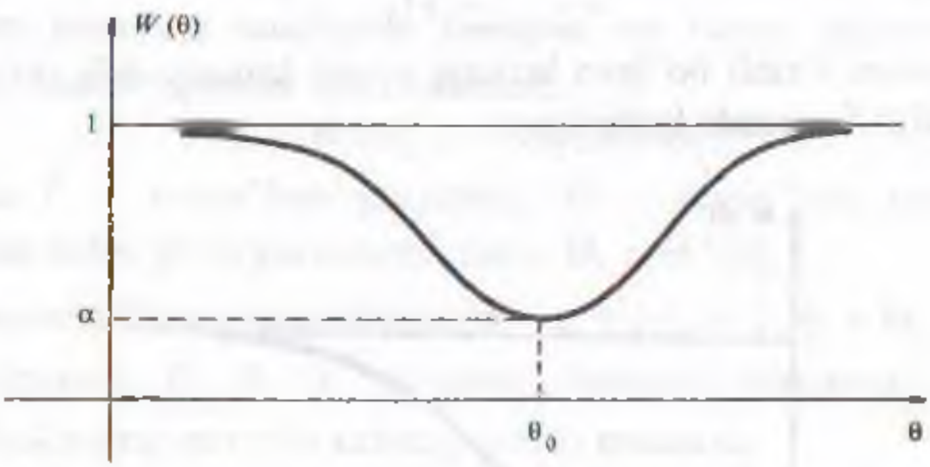
Avvalgi misol shartida $H_1 : \theta = \theta_0$ va $H_1 : \theta \neq \theta_0$ bo'lsin. Bu holda $\theta < \theta_0$ va $\theta > \theta_0$ qiymatlar uchun Neyman-Pirson kriteriysi turli kriteriylarni beradi: $\bar{x} < c'$ va $\bar{x} > c$, ya'ni barcha $\theta \neq \theta_0$ nuqtalarda w quvvatni maksimallashtiruvchi kriteriy mavjud emas. Shu sababli ikki tomonlama kriteriydan foydalanishga to'g'ri keladi:

$$|x - a| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Kvantilni $t_{\frac{\alpha}{2}}$ tanlash 1-tur xatolikni α ga teng bo'lishini taminlaydi. Ushbu kriteriyning quvvati

$$w = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma} \sqrt{n} + t_{\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma} \sqrt{n} - t_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

ga teng, grafigi 6-rasmda keltirilgan.



6-rasm.

Haqiqatga o'xshashlik kriteriysining asimptotik taqsimoti. Biz statistik gipotezalarni tekshirishda haqiqatga o'xshashlik nisbati statistikasiga asoslangan kriteriy eng quvvatli bo'lishini ko'rib o'tdik. Endi haqiqatga o'xshashlik nisbati statistikasining asimptotik taqsimotini topishni ko'rib o'tamiz.

$X^{(n)} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ bog'liqsiz, takroriy tanlanma noma'lum parametr θ aniqligida berilgan bo'lsin. $\theta \in \Theta \subset R^S$, $s \geq 1$. Quyidagi gipotezalarni ko'ramiz: $H_0 : \theta = \theta_0$ va $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Ushbu gipotezalarni tekshirish uchun haqiqatga o'xshashlik statistikasini kiritamiz:

$$L_n\left(X^{(n)}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f\left(X_i, \widehat{\theta_n}\right)}{f\left(X_i, \theta_0\right)}, \qquad (1)$$

bu yerda $\widehat{\theta_n}$ – haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli bahosi.

Teorema (Uilks). Regulyarlik shartlari hamda asosiy gipoteza H_0 o'rinliligida (1)-haqiqatga o'xshashlik nisbati statistikasi uchun

$$2L_n\left(X^{(n)}\right) \stackrel{d}{\Rightarrow} Y \sim \chi_1^2, \qquad (2)$$

munosabat o'rinli.

Bu yerda $\stackrel{d}{\Rightarrow}$ taqsimot bo'yicha yaqinlashishni, χ_1^2 – ozodlik darajasi 1 bo'lgan xi-kvadrat taqsimotni bildiradi.

Isboti. Teorema shartlari va H_0 gipoteza o'rinliligida

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta_n} - \theta_0\right) \stackrel{d}{\Rightarrow} N\left(0, I^{-1}(\theta)\right)$$

munosabat o'rinli, ya'ni $\widehat{\theta_n}$ – haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli bahosi asimptotik normal baho bo'ladi. Bu yerda

$$I(\theta) = M\left(\frac{\partial \log f(X_1, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 = -M\left(\frac{\partial^2 \log f(X_1, \theta)}{\partial \theta}\right)$$

bitta kuzatilmaning Fisher informatsiyasi (1) ni logarifmlab, Teylor qatoriga yoyamiz:

$$\log L_n\left(X^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\log f\left(X_i, \widehat{\theta_n}\right) - \log f\left(X_i, \theta_0\right)\right] =$$

$$= \left(\theta_0 - \widehat{\theta_n}\right)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f\left(X_i, \widehat{\theta_n}\right)}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\left(\widehat{\theta_n} - \theta_0\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta_n)}{\partial \theta^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} n\left(\widehat{\theta_n} - \theta_0\right)^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f\left(X_i, \theta_n^*\right)}{\partial \theta^2},$$

bu yerda $\theta_n^* \in \left(\widehat{\theta_n}, \theta_0\right)$.

Regulyarlik shartlari o'rinliligida va H_0 gipoteza o'rinliligida

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \log f\left(X_i,\theta_n^*\right)}{\partial\theta^2}\xrightarrow{p}-M_{\theta_0}\left(\frac{\partial^2 \log f(X_1,\theta_0)}{\partial\theta^2}\right)=I(\theta_0).$$

Ikkinchi tomondan,

$$n\left(\widehat{\theta_n}-\theta_0\right)^2\overset{d}{\Rightarrow}\frac{Y}{I(\theta_0)}$$

Slutskiy teoremasidan teoremaning tasdig'i kelib chiqadi.

Misol. $X_1, X_2,...,X_n$ tanlanma θ parametrli Puasson taqsimotidan olingan bo'lsin. $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta\neq\theta_0$ gipotezalarni tekshirish masalasini ko'ramiz.

Ma'lumki, bu taqsimot noma'lum parametri θ uchun haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli bahosi $\widehat{\theta_n}=\bar{x}$ dir. Haqiqatga o'xshashlik nisbati statistikasini yozib olamiz:

$$L_n\left(X^{(n)}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{f\left(X_i,\widehat{\theta_n}\right)}{f(X_i,\theta_0)}=\frac{e^{\widehat{\theta_n}n}\,\widehat{\theta_n}^{\sum X_i}}{e^{\theta_0 n}\cdot\theta_0^{\sum X_i}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{X_i!}{X_i!}=$$

$$=\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\cdot\exp\left\{n\left(\bar{x}-\theta_0\right)\right\}$$

$$2\log L_n\left(X^{(n)}\right)=2\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\log\left(\frac{\bar{x}}{\theta_0}\right)+n\left(\bar{x}-\theta_0\right)\right\}=$$

$$=2n\left\{\bar{x}\log\left(\frac{\bar{x}}{\theta_0}\right)+\left(\bar{x}-\theta_0\right)\right\}$$

Uilks teoremasiga ko'ra

$$2n\left\{\bar{x}\log\left(\frac{\bar{x}}{\theta_0}\right)+\left(\bar{x}-\theta_0\right)\right\}\sim\chi_1^2.$$

Demak, asosiy gipoteza H_0 ni tekshirishda 1-tur xatolikni $\alpha=0{,}05$ olsak, kritik soha

$$S_\alpha = \left\{ x : 2n\left\{ \bar{x}\log\left(\frac{\bar{x}}{\theta_0}\right) + \left(\bar{x} - \theta_0\right) \right\} \geq \chi_1^2, (0{,}95) \right\} =$$

$$= \left\{ x : 2n\left\{ \bar{x}\log\frac{\bar{x}}{\theta_0} + \left(\bar{x} - \theta_0\right) \right\} \geq 3{,}84 \right\}.$$

ga teng bo'ladi.

4-§. Ba'zi muhim statistik kriteriylar

Amaliyotda keng qo'llaniladigan kriteriylar odatda bir tanlanmalik va ikki tanlanmalik bo'ladi. Bir tanlanmalik kriteriylar tanlanma to'plam gipotetik bosh to'plam bilan solishtiriladi. Bunda bosh to'plam xarakteristikalari gipotezada aniqlanadi yoki bosh to'plam orqali hisoblanadi. Ikki tanlanmalik kriteriylar ikkita tanlanmani solishtirish, masalan biologik, tibbiy, pedagogik sohalarda nazorat va tajriba guruhlariga mos tanlanmalari solishtiriladi. Bunda ikki tanlanma to'plamlarni solishtirishdan ko'ra ular o'rta qiymatlari farqi 0 ga nisbatan, dispersiyalari nisbati 1 ga nisbatan yoki umumiy holda ularning taqsimotlari farqi biror funksionali 0 ga nisbatan solishtiriladi.

Masalan:

a) ***Z*-kriteriylar**. Tanlanma normal taqsimotga ega va uning dispersiyasi ma'lumligida tanlanma o'rta qiymat va bosh to'plam o'rta qiymatlarini solishtirishdan iborat. U ikki tanlanmalik bo'lishi ham mumkin;

b) ***t*-kriteriylar** turli shartlarda o'rta qiymatlarni solishtirishdan iborat;

v) **proporsiyalar kriteriylari** o'rta qiymatlar kriteriylariga o'xshash bo'lib, ehtimolliklarni solishtirishdan iboratdir;

g) **xi-kvadrat kriteriylari** ham bir tanlanmalik va ikki tanlanmalik bo'lib, nisbiy chastotalar farqlari kvadratlarini o'rganishdan iboratdir;

d) ***F*-kriteriy** (dispersiyani tahlil qilish: ANOVA (analysis of variance));

Endi quyidagi jadvalda biz ba'zi keng qo'llaniladigan kriteriylarning mos statistikalari va ularning qo'llanish shartlarini keltiramiz.

Bir va ikki tanlanmalik kriteriylar

Kriteriylarn nomi	Statistika formulasi va ν – ozodlik darajasi	Qo'llanilishi shartlari
Bir tanlanmali Z-kriteriy	$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Bosh to'plam $N(\mu,\sigma^2)$ normal taqsimotga ega yoki $n>30$ va σ – ma'lum
Ikki tanlanmali Z-kriteriy	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, $d_0=\mu_1-\mu_2$	Ikki $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ va $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ bog'liq bo'lmagan normal bosh to'plamlar σ_1^2 va σ_2^2 dispersiyalari ma'lum
Bir tanlanmalik t-kriteriy (Styudent, Kramer-Uelch)	$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\bar{S}/\sqrt{n}}$, $\bar{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2$, $\nu=n-1$	Bosh to'plam $N(\mu,\sigma^2)$ normal taqsimlangan yoki $n>30$ va σ – noma'lum
Juftlangan t-kriteriy (Styudent, Kramer-Uelch)	$t=\frac{\bar{d}-d_0}{\bar{S}_d/\sqrt{n}}$, $d_0=\mu_1-\mu_2$, $\nu=n-1$, $\bar{d}$ – ayirmalar o'rta arifmetigi, S_d^2 – ayirmalar dispersiyasi	Ayirmalar bosh to'plami normal yoki $n>30$ va σ – noma'lum
Ikki tanlanmalik birlashtirilgan t-kriteriy, dispersiyalar teng (Styudent, Kramer-Uelch)	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\bar{S}_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$, $\nu=n_1+n_2-2$, $\bar{S}_p^2=\frac{(n_1-1)\bar{S}^2+(n_2-1)\bar{S}_2^2}{n_1+n_2-2}$	Ikki tanlanma bog'liqsiz $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ va $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ normal taqsimotlarga ega yoki $n_1+n_2>40$ va $\sigma_1=\sigma_2$ noma'lum

Ikki tanlanmalik birlashtirilgan t-kriteriy, dispersiyalar turlicha (Styudent, Kramer-Uelch)	$t=\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$, $\nu=\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$	Ikki tanlanma bog'liqsiz $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ va $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ normal taqsimotlarga ega yoki $n_1+n_2>40$ va $\sigma_1\neq\sigma_2$ lar noma'lum
Bir proporsiyalik Z-kriteriy	$z=\dfrac{(\hat{p}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$np_0>10$ va $n(1-p_0)>10$
Ikki proporsiyalik va $H_0: p_1=p_2$ bo'yicha birlashtirilgan Z-kriteriy	$z=\dfrac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$, $\hat{p}=\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$	$n_1p_1>5$ va $n_1(1-p_1)>5$; $n_2p_2>5$ va $n_2(1-p_2)>5$; tanlanmalar bog'liq emas
Ikki proporsiyalik birlashtirilmagan Z-kriteriy	$z=\dfrac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-d_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$, $\hat{p}_1=\dfrac{\hat{m}_1}{n_1}$, $\hat{p}_2=\dfrac{\hat{m}_2}{n_2}$	$n_1p_1>5$ va $n_1(1-p_1)>5$; $n_2p_2>5$ va $n_2(1-p_2)>5$; tanlanmalar bog'liq emas
Moslikbaqidagi xi-kvadratkriteriy (Pirson)	$\chi^2=\sum_{i=1}^{l}\dfrac{(\text{kuzatilgan-kutilayotgan})^2}{\text{kutilayotgan}}=\sum_{i=1}^{l}\dfrac{(\nu_i-\nu_i')^2}{\nu_i'}$, l – intervallar soni, ν_i – empirik va $\nu_i'=np_i$ – kutilayotgan chastota	Barcha kutilayotgan miqdorlar 5 dan kam emas $(\nu_i,\nu_i'\geq 5)$. Kriteriy ozodlik darajasi $\nu=l-s-1$ bo'lib, bu yerda s - baholanayotgan noma'lum parametrlar soni

Ikki tanlanmali dispersiyalar tengligi haqidagi F-kriteriy (Fisher-Snedekor)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	Bosh to'plam normal taqsimlangan, $S_1^2 \geq S_2^2$. $H_0: \sigma_1=\sigma_2$ gipoteza $F > F_{kp}\left(\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1\right)$ bo'lganida rad etiladi

Izoh. Yuqoridagi jadvalda quyidagi belgilar ishlatilgan: 0 indeksi H_0 ga mos keladi, 1 va 2 lar esa 1- va 2-tanlanmalarga mos keladi;

α – I tur xatolik ehtimolligi (kriteriy hajmi);

n_1, n_2, n – tanlanmalar hajmlari;

$\overline{x}_1$, μ_1 – birinchi tanlanma va bosh to'plamlar o'rta qiymatlari;

$\overline{x}_2$, μ_2 – ikkinchi tanlanma va bosh to'plamlar o'rta qiymatlari;

$\overline{x}$ va $\overline{S}^2$ – tanlanma o'rta qiymati va to'g'rilangan dispersiya;

μ_0 – nolinchi gipotezadagi o'rta qiymat;

$\sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ – bosh to'plamlar dispersiyalari;

$\hat{p}=\frac{\hat{m}}{n}$, $\hat{p}_1=\frac{\hat{m}_1}{n_1}$, $\hat{p}_2=\frac{\hat{m}_2}{n_2}$ – tanlanmalar proporsiyalari;

$m_1 = np_1$, $m_2 = np_2$ – kutilayotgan chastotalar;

$\overline{S}_1^2$ va $\overline{S}_2^2$ – tanlanmalarning to'g'rilangan dispersiyalari:

$$\overline{S}_k^2=\frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ki}-\overline{x}_k)^2,\ k=1,2.$$

Endi biz yuqoridagi jadvalda keltirilgan statistikalarni kriteriy tuzishda qo'llanilishiga doir bir qator misollar keltirib o'tamiz.

A. μ haqidagi gipotezani tekshirish (Z va t-kriteriylar).

1-hol. Z-kriteriyning bosh to'plam dispersiyasi σ^2 ma'lumligida qo'llanilishi.

Masala. Oziq-ovqat shoxobchalari rahbariyati quyidagi xulosaga kelgan: xaridorlarga xizmat ko'rsatish normal taqsimlangan bo'lib, xizmatni o'rtacha vaqti 3,5 minut va standart og'ishi esa 1,3 minutga teng. Xizmat sifatini nazorat qiluvchi boshqarma 40 ta xaridorga xizmat ko'rsatilishini tahlil qilib, o'rtacha xizmat vaqti 4,8 min. ekanini aniqladi. $\alpha = 0,05$ qiymatdorlik sathi bilan oziq-ovqat shoxobchalari rahbariyatining o'rtacha xizmat vaqti haqidagi xulosasini tekshiring.

Yechim. Demak, $\mu_0 = 3,5$; $\sigma = 1,3$; $n = 40$; $\bar{x} = 4,8$ va $\alpha = 0,05$. Biz $H_0 : \mu = \mu_0$ gipotezani Z statistika orqali tekshiramiz. Dastlab ikki tomonlama kriteriyni ko'rib o'tamiz. Demak, $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Normal taqsimot jadvalidan ikki tomonlama kritik nuqtani topib olamiz:

$$t_{kr} = \pm z_{\alpha/2} = \pm z_{0,25} = \pm 1,96.$$

Statistikani hisoblaymiz

$$z_{kuz} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{4,8 - 3,5}{1,3/\sqrt{40}} = \frac{1,3}{0,2055} = 6,328.$$

Ammo $z_{kuz} > 1,96$, demak H_0 gipotezani $(1-\alpha)100\% = 95\%$ ishonch bilan rad etamiz. Bu esa o'rtacha xizmat vaqti 3,5 min. emasligini ko'rsatadi.

2-hol. S ma'lumligida t kriteriyning qo'llanishi.

Misol. 12 ta tajribada quyidagi tanlanma kuzatilgan: 4,3,2,2,3,5,2,3,3,4,4,6. Bosh to'plam o'rta qiymati $\mu = 3$ degan taxminni $\alpha = 0,01$ – kriteriy hajmida tekshiring. Alternativani $H_1 : \mu > 3$ – o'ng tomonlama oling.

Yechim. Demak, $\mu_0 = 3$; $n = 12$; $\bar{x} = 3,4167$; $\bar{S}^2 = 1,538$; $\bar{S} = 1,2401$ va $\bar{S}_{\bar{x}} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} = 0,3580$. t – statistikani hisoblaymiz:

$$t_{kuz} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}} = \frac{3,4167 - 3}{0,3580} = 1,1640.$$

t – statistika ozodlik darajasi $\nu = n - 1$ bo'lgan Styudent taqsimotiga ega bo'lgani uchun uning $\alpha = 0,01$ ga mos kritik nuqtasi

$$t_{kr} = t_{11;0,1} = 2,7181.$$

Ammo, $t_{kuz} = 1,1640 < t_{kr} = 2,7181$ bo'lgani uchun $H_0 : \mu = 3$ gipotezani qabul qilamiz.

V. Bog'liq bo'lmagan tanlanmalarga mos bosh to'plamlar o'rta qiymatlari farqlari haqidagi gipotezani tekshirish.

1-hol. Bosh to'plamlar uchun σ_1 va σ_2 lar ma'lum ekanida *Z*-statistikaning qo'llanilishi.

Masala. Biror kompaniya o'z ishchilarining ishlash samaradorligini aniqlash maqsadida mahalliy aholi va chet eldan kelib ishlayotgan xodimlari ishlab chiqayotgan mahsulotlari o'rtacha sonini solishtirdi. Ularga mos standart xatoliklar mos ravishda $\sigma_1 = 8$ va $\sigma_2 = 10$ bo'lib, mahalliy ishchilardan $n_1 = 32$ va chet elliklardan $n_2 = 38$ kishi faoliyati solishtirildi. Bu ikki guruh ishchilardan har biri uchun o'rta mahsulotlar soni $\overline{x}_1 = 50$ va $\overline{x}_2 = 40$ birlikdan iborat. Kriteriy satxini $\alpha = 0{,}01$ deb tanlab, guruhlar samaradorligini aniqlang.

Yechim. Demak, $n_1 = 32$; $\overline{x}_1 = 50$; $\sigma_1 = 8$ va $n_2 = 38$; $\overline{x}_2 = 40$; $\sigma_2 = 10$; $\alpha = 0{,}01$. Biz asosiy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ gipotezani $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ alternativga qarshi tekshiramiz. Ikki tanlanmali *Z*-statistika qiymati

$$z_{kuz} = \frac{\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{50-40}{\sqrt{\frac{64}{32} + \frac{100}{38}}} = \frac{10}{\sqrt{2+2{,}6316}} = 4{,}6466.$$

Ammo, $z_{kuz} = 4{,}6466 > z_{kr} = 2{,}33$, demak, H_0 gipoteza rad etiladi va H_1 gipoteza qabul qilinadi. Bu esa mahalliy aholining ish samaradorligi chet elliklarnikidan yuqoriligini ko'rsatadi.

2-hol. Agar tanlanmalarning $\overline{S}_1$ va $\overline{S}_2$ – standart og'ishlari ma'lum va ular σ_1^2 va σ_2^2 dispersiyalari teng bo'lgan $(\sigma_1 = \sigma_2)$ bosh to'plamlardan olingan bo'lsa, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ gipotezani t-kriteriy yordamida tekshiring.

Masala. Ikki oliy o'quv yurtida bir xil fan bo'yicha maksimal ball 50 bo'lganida test-sinovlari o'tkazilib, ular uchun o'rtacha o'zlashtirish ko'rsatkichlari $\overline{x}_1 = 41{,}93$ va $\overline{x}_2 = 44{,}56$ hamda ularga mos standart og'ishlar $\overline{S}_1 = 2{,}86$ va $\overline{S}_2 = 1{,}42$ lardan iborat. Har bir o'quv yurtida $n_1 = n_2 = 40$ talaba bilimi tekshiriladi. Ushbu ma'lumot-larga asoslangan test-sinovlari o'tkazuvchilar har ikki guruh talabalari bilimlari orasida sezilarli farq yo'q, degan fikrni (ya'ni H_0 gipotezani) ilgari surdilar. Qiymatdorlik sathini $\alpha = 0,05$ deb tanlab yuqoridagi fikr to'g'riligini tekshiring.

Yechim. Demak, $n_1 = 40$; $\bar{x}_1 = 41,93$; $\bar{S}_1 = 2,86$ va $n_2 = 40$; $\bar{x}_2 = 44,56$; $\bar{S}_2 = 1,42$; $\alpha = 0,05$. Biz ikki tanlanmalik birlashtirilgan t-kriteriyni qo'llaymiz. Bu holda ozodlik darajasi $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 78$ va unga mos $(1-\alpha)100\% = 5\%$ lik kritik nuqta Styudent taqsimoti jadvalidan topiladi: $t_{kr} = \pm t(78;0,5/2) = \pm t(78;0,25) = \pm 1,9908$. Standart og'ishni hisoblaymiz:

$$\bar{S}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \bar{S}_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(40-1)(2,86)^2 + (40-1)(1,42)^2}{40+40-2}\right)\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{40}\right)} = 0,5049.$$

Alternativ gipotezani ikki tomonlama qilib tanlaymiz: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. t-statistikani hisoblaymiz:

$$t_{\text{kuz}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{S}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{41,93 - 44,56}{0,5049} = -5,2090.$$

Kriteriy ikki tomonlamilik va $t_{kuz} = -5,2090 < t_{kr} = -1,9908$. Demak, H_0 gipoteza rad etiladi va H_1 gipoteza qabul qilinadi. Bu esa $(1-\alpha)100\% = 95\%$ ishonch bilan ikki oliy o'quv yurtida tekshirilgan fan bo'yicha bilim ko'rsatkichlari farqli degan xulosaga kelamiz.

D. Bosh to'plamlar proporsiyalari haqidagi gipotezani tekshiramiz. Quyidagi kriteriy binomial (dixotomik) taqsimotlar uchun katta hajmdagi tanlanmalar ($n \geq 30$) uchun qo'llaniladi.

Misol. Hodisa ro'y berish ehtimolligi nolinchi gipotezada $p \geq 0,8$ deb faraz qilinadi. Tajriba $n = 600$ marta o'tkazilganida ushbu hodisa $m = 468$ marta ro'y beradi. Demak, nisbiy chastota, ya'ni tanlanma proporsiya $\hat{p} = \frac{m}{n} = \frac{468}{600} = 0,78$ va standart og'ish

$\sigma_{p_0} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0,2}{600}} = 0,0163$. Bu holda $np_0 = 600 \cdot 0,8 = 480$ va $n(1-p_0) = 600 \cdot 0,2 = 120$. Hodisa ro'y berish ehtimolligi haqidagi $H_0 : p \geq 0,8$ gipotezani alternativ $H_1 : p < 0,2$ gipotezaga nisbatan $\alpha = 0,05$ kritik hajmda tekshiring.

Yechim. Demak, $p_0 = 0,8$; $\hat{p} = 0,78$; $\sigma_{p_0} = 0,0163$ va $\alpha = 0,05$. Kritik nuqtani hisoblaymiz: $t_{kr} = z_{0,05} = -1,65$. Statistikani hisoblaymiz:

$$z_{\text{kuz}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{p_0}} = \frac{0,78-0,80}{0,0163} = -1,2247.$$

Ammo, $z_{\text{kuz}} = -1,2247 < -1,65 = t_{\text{kr}}$ bo'lgani uchun H_0ni qabul qilamiz.

D. Ikki bosh to'plamlar proporsiyalari p_1 va p_2 lar farqi haqidagi gipotezani tekshirish.

Ushbu kriteriy binomial taqsimotga ega tanlanmalar hajmi katta ($n \geq 30$) bo'lgan holda qo'llaniladi.

Masala. Talabalar shaharchasida o'tkazilgan so'rovnomada tavakkaliga tanlangan 200 yigitdan 40 ta va 250 qizlardan 85 tasi O'zbekiston Milliy universiteti (O'zMU) talabasi ekanligi aniqlandi. $\alpha = 0,1$ qiymatdorlik sathida talabalar shaharchasidagi O'zMU talaba qizlari proporsiyasi p_1 O'zMU talaba yigitlari proporsiyasidan katta, degan taxminni tekshiring.

Yechim. Demak, $n_1 = 200$; $m_1 = 40$; $\hat{p}_1 = 0,2$; $n_2 = 250$; $m_2 = 85$; $\hat{p}_2 = 0,34$; $\hat{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{40+85}{200+250} = 0,2778$. Mos dispersiyani hisoblaymiz:

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{0,2778(1-0,2778)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{250}\right)} = 0,0425.$$

Asosiy gipoteza $H_0 : p_1 = p_2$, alternativa esa $H_1 : p_1 < p_2$. Berilgan kritik hajm $\alpha = 0,1$ ga mos Z-kriteriy kritik nuqtasi $t_{kr} = -t(0,1) = -1,28$. Z-statistika qiymati

$$z_{kuz} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{0,2-0,34}{0,0425} = -3,2941.$$

Ammo $z_{kuz} = -3,2941 < -1,28 = t_{kr}$, demak H_0 rad etiladi va H_1 ni qabul qilamiz, ya'ni yigitlar proporsiyasi qizlarnikidan kam ekan.

E. Ikkita normal taqsimotga ega bosh to'plamlarning dispersiyalarini solishtirish.

Berilgan α kritik hajmda ikki bosh to'plamlar dispersiyalari tengligi haqidagi nolinchi $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gipotezani Fisher-Snedekor statistikasi

$$F_{kuz} = \frac{S^2_{katta}}{S^2_{kichik}}$$

– nisbat bilan hisoblanadi, bu yerda suratda dispersiyalarning kattasi olinadi. F-kriteriyning kritik nuqtasi ozodlik darajalari $v_1 = n_1 - 1$ va $v_2 = n_2 - 1$ bo'lganida Fisher-Snedekor taqsimoti jadvalidan aniqlanadi.

Misol. Ikki korxonalar guruhi (har birida 13 tadan korxonalar) oylik ishlash vaqtlari (kunlarda) quyidagi ko'rsatkichlarda ifodalanadi: $\bar{x}_1 = 23$ kun, $\bar{x}_2 = 26$ kun. $S_1^2 = 3$ kun va $S_2^2 = 6$ kun. $\alpha = 0,1$ – qiymatdorlik sathida har ikki guruh korxonalari uchun o'rtacha ish vaqtlaridan og'ishlari bir xilligi haqidagi $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gipotezani tekshiring.

Yechim. Biz alternativ gipotezani ikki tomonlama $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ deb tanlaymiz. Ozodlik darajalari $v_1 = v_2 = 13 - 1 = 12$. F-statistikani hisoblaymiz:

$$F_{kuz} = \frac{S^2_{katta}}{S^2_{kichik}} = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ikki tomonlama kriteriy kritik nuqtalarini $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$ sath va $v_1 = v_2 = 12$ bo'lgan holda jadvaldan aniqlaymiz:

$$F_{kr}\left(\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right) = F_{kr}(0,05;12;12) = 2,69.$$

Ammo $F_{kuz} = 2 < F_{kr} = 2,69$, demak bizda H_0 gipotezani rad etishga asos yo'q.

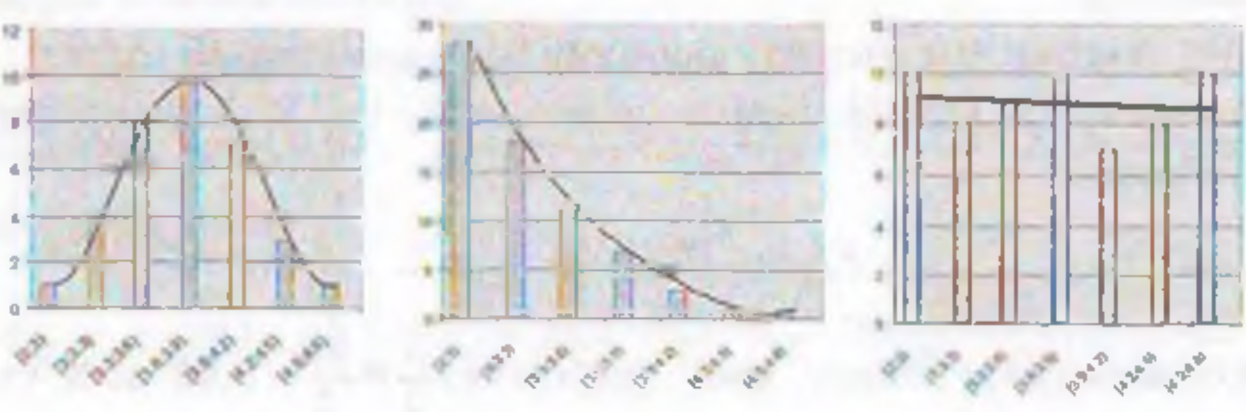
Masala. Maktab o'quvchilari ikki guruhiga arifmetikadan masalalar berilib, ulardan biriga ijobiy natija, ya'ni testdan o'tganlar haqida, ikkinchisiga esa salbiy natija, ya'ni testdan o'tmaganlar haqida ma'lumot beriladi. Tajriba natijasida vaqt ko'rsatkichlari bo'yicha ma'lumotlar quyidagicha: $n_1 = 13$; $\overline{S}_1^2 = 4,06$ va $n_2 = 12$; $\overline{S}_2^2 = 20,25$. Kriteriy hajmi $\alpha = 0,01$ bo'lganida $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gipotezani $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ alternativaga qarshi tekshiring.

Yechim. F - statistika qiymati: $F_{kuz} = \dfrac{\overline{S}_2^2}{\overline{S}_1^2} = \dfrac{20,25}{4,06} \approx 4,99.$

$\alpha = 0,01$ ga va $\nu_1 = 12 - 1 = 11$, $\nu_2 = 13 - 1 = 12$ larga mos kritik nuqta $F_{kr}(0,01;11;12) = 4,22 < F_{kuz} = 4,99$. Demak, H_0 rad etilib, H_1 qabul qilinadi.

5-§. Muvofiqlik kriteriylari

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, \dots, X_n$ lar bog'liqsiz n ta tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning olingan kuzatilmalari bo'lsin. X tasodifiy miqdorning taqsimoti noma'lum $F(x)$ funksiyadan iborat bo'lsin. Taqsimot ko'rinishi to'g'risidagi gipotezani gistogramma yoki poligon ko'rishiga ko'ra ham aniqlash mumkin:



a b v

Izoh: a) normal taqsimot; b) ko'rsatkichli taqsimot; v) tekis taqsimot.

Noparametrik asosiy gipotezaga ko'ra $H_0:F(x)=F_0(x)$. Mana shu statistik gipotezani tekshirish talab etilsin.

I. A. Kolmogorovning muvofiqlik alomati

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ kuzatilmalar asosida $\widehat{F}_n(x)$ empirik taqsimot funksiyasini tuzamiz. Faraz qilamiz, $F(x)$ uzluksiz taqsimot funksiyasi bo'lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz

$$D_n = D_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right|$$

Glivenko-Kantelli teoremasiga ko'ra n yetarli katta bo'lganida D_n kichik qiymat qabul qiladi. Demak, agar asosiy gipoteza H_0 o'rinli bo'lsa D_n statistika kichik bo'lishi kerak. Kolmogorovning muvofiqlik alomati D_n statistikaning shu xossasiga asoslangandir.

Teorema (Kolmogorov). Ixtiyoriy uzluksiz $F(x)$ taqsimot funksiyasi va λ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}D_n < \lambda\right\} = K(\lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2\lambda^2}$$

bo'ladi.

D_n– statistikaga asoslangan statistik alomat kritik to'plami quyidagicha aniqlanadi

$$S_{1\alpha} = \left\{t : t = D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) > t_\alpha\right\}.$$

Bu yerdan $0 < \alpha < 1$ – alomatning qiymatdorlik darajasi.

Kolmogorov teoremasidan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

a) D_n – statistikaning H_0 gipoteza to'g'ri bo'lgandagi taqsimoti $F(x)$ ga bog'liq emas;

b) amaliy nuqtayi nazardan $n \geq 20$ bo'lgandayoq teoremadagi yaqinlashish juda yaxshi natija beradi, ya'ni $P\left\{\sqrt{n}D_n < \lambda\right\}$ ni $K(\lambda)$ bilan almashtirishdan yo'l qo'yiladigan xatolik yetarlicha kichikdir.

Bu xulosalardan kelib chiqadiki, $n \geq 20$ bo'lsa kritik chegara t_α ni $\lambda_\alpha/\sqrt{n}$ ga teng deb olish mumkin. Bu yerda $\lambda_\alpha K(\lambda_\alpha) = 1-\alpha$ tenglamaning ildizlaridan iborat. Haqiqatan ham berilgan $0<\alpha<1$ uchun

$$P\left\{D_n \in S_{1\alpha} / H_0\right\} = P\left\{\sqrt{n}D_n \geq \lambda_\alpha / H_0\right\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha.$$

Shunday qilib, Kolmogorov alomati quyidagicha aniqlanadi:

1) berilgan α orqali $K(\lambda_\alpha) = 1\text{-}\alpha$ tenglama yechimi λ_α jadval yordamida topiladi;

2) berilgan tajriba natijalari $x_1, x_2, ..., x_n$ larga ko'ra $t=D_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ qiymati hisoblanadi,

3) $\sqrt{n}t$ va λ_α solishtiriladi, agar $\sqrt{n}t \geq \lambda_\alpha$ bo'lsa, asosiy gipoteza H_0 rad etiladi, aks holda tajriba H_0 ni tasdiqlaydi.

1. K.Pirsonning xi-kvadrat muvofiqlik alomati.

Amaliyotda Kolmogorov statistikasini hisoblash ancha murakkab va undan tashqari Kolmogorov alomatini qo'llash faqat taqsimot funksiya $F(x)$ uzluksiz bo'lgandagina mumkindir. Shuning uchun, amaliyotda ko'p hollarda Pirsonning xi-kvadrat alomati qo'llaniladi. Bu alomat universal xarakterga ega bo'lib, kuzatilmalarni guruhlash usuliga asoslangandir.

Faraz qilaylik, $\mathscr{X}$ – kuzatilayotgan va taqsimot funksiyasi noma'lum $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning qiymatlari to'plami bo'lsin. $\mathscr{X}$ ni k ta kesishmaydigan oraliqlarga ajratamiz:

$$\mathscr{X} = \bigcup_{i=1}^{k} \varepsilon_i \,, \varepsilon_i \bigcap \varepsilon_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,...,k$$

Takrorlanishlar vektori deb ataladigan $\nu = (\nu_1,...,\nu_k)$ vektorni olaylik. Bu vektorning i-koordinatasi kuzatilmalardan ν_i tasi ε_i oraliqqa tushganligini anglatadi. Ko'rinib turibdiki, takrorlanishlar vektori ν tanlanma $(X_1,...,X_n)$ orqali bir qiymatli aniqlanadi va $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k = n$. Asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lgandagi kuzatilmaning ε_i oraliqqa tushish ehtimolligini p_{i0} bilan belgilaylik:

$$p_{i0} = P\{X \in \varepsilon_i / H_0\},\ i = 1,2,...,k.$$

Quyidagi statistikani kiritamiz:

$$\mathbb{X}_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_k - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

va $H_0\colon F = F_0$ asosiy gipotezani to'g'riligini tekshiramiz.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan nisbiy chastota ν_r / n bir ehtimollik bilan nazariy ehtimollik p_{r0} ga intiladi. Demak, agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, u holda χ_n^2 statistikaning qiymati yetarli darajada kichik bo'lishi kerak. Demak, Pirsonning χ^2 mezoni χ_n^2 statistikaning katta qiymatlarida asosiy gipoteza H_0 ni rad etadi, ya'ni alomatning kritik sohasi $S_{1\alpha}=\{t:t>t_\alpha\}$ ko'rinishda bo'ladi. Asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lganida Y_n^2 statistikaning aniq taqsimotini hisoblash ancha murakkab, bu esa o'z navbatida alomatning kritik chegarasi t_α ni topishda qiyinchilik tug'diradi. Ammo, n yetarli katta bo'lsa H_0 gipoteza to'g'ri bo'lganida χ_n^2 statistikaning taqsimotini limit taqsimot bilan almashtirish mumkin.

Teorema(Pirson). Agar $0<p_{i0}<1$, $i=1,2,...,k$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mathbb{X}_n^2<t/H_0\right)=P\left\{\chi_{k-1}^2<t\right\}.$$

Bu yerda χ_{k-1}^2 erkinlik darajasi k-1 bo'lgan xi-kvadrat taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdordir:

$$P\left\{\chi_{k-1}^2<t\right\}=\frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^t x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx ,$$

bu yerda, $\Gamma(n)$ – gamma funksiya.

Amaliyotda bu teorema natijasidan $n\geq 50$, $v_i\geq 45$, $i=1,2,...,k$ bo'lganda foydalanish mumkin. Bu holda t_α kritik nuqta $P\left\{\chi_{k-1}^2>t_\alpha\right\}=\alpha$, $0<\alpha<1$ tenglamadan topiladi.

6-§. Statistik kriteriy quvvatini hisoblash (*Z*-kriteriy misolida)

Biz oldingi bobda qiymatdorlik sathi (yoki kriteriy hajmi) α bo'lgan kriteriy quvvati alternativ gipoteza H_1 to'g'riligi shartida asosiy gipoteza H_0 ni rad etish va demak H_1 ni qabul qilishdan iborat to'g'ri yechim ehtimolligi $1-\beta=P(H_1/H_1)=P(T\in\mathscr{X}_1/H_1)$ dan iborat ekanini ko'rdik. Bu formuladan ko'rinadiki, kriteriy quvvatini hisoblash T statistikaning alternativ gipoteza H_1 o'rinligi shartidagi aniq (yoki taqribiy) taqsimotini bilishni talab qiladi. Statistik gipotezalarni tekshirish nazariyasida bu yechilishi qiyin bo'lgan masalalar toifasiga kiradi. Ushbu paragrafda biz kriteriy quvvatini hisoblashni Z-kriteriy misolida ko'rib o'tamiz. Bu kriteriyning Z-statistikasi quyidagicha aniqlanadi. $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ tanlanma o'rta qiymati noma'lum μ parametrdan va dispersiyasi ma'lum $\sigma^2=4$ normal taqsimotga ega bo'lgan bosh to'plamdan olingan bo'lib, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ tanlanma o'rta arifmetik qiymati μ uchun statistik bahosi bo'lsin. U holda Z-statistika standart normal $\Phi_0(t)$ taqsimotga ega va

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}-\mu}{2/\sqrt{n}}$$

formula bilan aniqlanadi. Biz tanlanma hajmini $n=25$ deb tanlaymiz va asosiy H_0 va alternativ H_1 gipotezalarni quyidagicha ifodalaymiz:

$$H_0:\mu=0\,;\;\; H_1:\mu>0\,.$$

Demak, H_0 sodda va H_1 esa murakkab gipotezalar ekan. Biz qiymatdorlik sathi (1-tur xatolikni) $\alpha=0{,}05$ deb tanlab, unga mos kritik nuqtani integral funksiyasi jadvalidan

$$1-\alpha=0{,}95=0{,}5+\Phi_0^{\prime}(t_{\text{kp}})$$

tenglama yechimi sifatida $t_{kr}=1.645$ – kritik nuqtani aniqlab olamiz. Endi H_0 ni rad etuvchi kritik to'plamni $\mathcal{K}_1=\{Z_{\text{kuz}}>t_{\text{kr}}\}$ tengsizlikdan H_0 o'rinliligi shartida aniqlab olamiz:

$$Z_{\text{kuz}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}\sqrt{25}}{2}=2{,}5\bar{x}>1{,}645=t_{\text{kr}}\,,$$

bu yerdan, H_0 gipoteza $\bar{x}>\frac{1{,}645}{2{,}5}=0{,}658$ bo'lganida rad etilishini bilib olamiz. Endi alternativ gipoteza $H_1:\mu=1$ bo'lganida kriteriy quvvatini hisoblaymiz:

$$1-\beta=P\left(Z_{\text{kuz}}\in\mathcal{K}_1/H_1\right)=P\left(Z_{\text{kuz}}>1{,}645/\mu=1\right)=P\left(\bar{x}>0{,}658/\mu=1\right)=$$

$$=P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{0{,}658-1}{2/\sqrt{25}}/\mu=1\right)=P(Z>-0{,}855)=1-\Phi_0(-0{,}855)=$$

$$=\Phi_0(0{,}855)=0{,}5+\Phi_0^{\prime}(0{,}855)=0{,}5+0{,}3=0{,}8\,.$$

Bu yerdan 2-tur xatolik ehtimolligini topamiz: $\beta=1-0{,}8=0{,}2$.

Endi yuqoridagi gipotezalarni tekshirish uchun Z-kriteriy qiymatdorlik sathini 1% lik etib, ya'ni $\alpha = 0{,}01$ etib oldingidan 5 marta kam tanlaymiz. U holda Z-kriteriy kritik nuqtasi t_{kr}=2,32 ni jadvaldan aniqlab, H_0 ni quyidagi tengsizlik orqali rad etiladi:

$$Z_{kuz} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{x}\sqrt{25}}{2} = 2{,}5\bar{x} > 2{,}32.$$

Demak, $\bar{x} = \frac{2{,}32}{2{,}5} = 0{,}928$ tengsizlik bajarilganida H_0 gipoteza rad etiladi. Bu holda biz kriteriy quvvatlarini H_1 alternativalar $\mu = 1$ va $\mu = 2$ bo'lganida quyidagicha hisoblaymiz:

$$1 - \beta = P(\bar{x} > 0{,}928 / \mu = 1) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{0{,}928 - 1}{2 / \sqrt{25}} / \mu = 1 \right) = P(Z > -0{,}18) =$$

$$= 1 - \Phi_0(-0{,}18) = \Phi_0(0{,}18) = 0{,}5 + \Phi_0^+(0{,}18) = 0{,}5 + 0{,}0714 = 0{,}5714$$

va 2-tur xatolik $\beta = 1 - 0{,}5714 = 0{,}4286$. Shu kabi

$$1 - \beta = P(\bar{x} > 0{,}928 / \mu = 2) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{0{,}928 - 2}{2 / \sqrt{25}} / \mu = 2 \right) = P(Z > -2{,}68) =$$

$$= 1 - \Phi_0(-2{,}68) = \Phi_0(2{,}68) = 0{,}5 + \Phi_0^+(2{,}18) = 0{,}5 + 0{,}4963 = 0{,}9963.$$

Bu yerdan 2-tur xatolik $\beta = 1 - 0{,}9963 = 0{,}0037$ ni topamiz. Endi tanlanma hajmini $n = 100$ ga orttirib, 1-tur xatolik $\alpha = 0{,}01$, alternativ $\mu = 1$ va dispersiya qiymatlari $\sigma^2 = 4$ va $\sigma^2 = 1$ bo'lgan hollarda yuqoridagi jarayonni takrorlab, kriteriy quvvatlarini hisoblaymiz:

$$Z_{kuz} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{x}}{2 / \sqrt{100}} > 2{,}32 = t_{kr}.$$

Demak, H_0 gipoteza

$$\bar{x} > 2{,}32 \cdot \frac{2}{10} = 0{,}464$$

bo'lganida inkor etiladi va bunday kriteriyning $\mu = 1$ dagi quvvati

$$1 - \beta = P(\bar{x} > 0{,}464 / \mu = 1) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{0{,}464 - 1}{2 / \sqrt{100}} / \mu = 1 \right) = P(Z > -2{,}68) =$$

$$= 1 - \Phi_0(-2{,}68) = \Phi_0(2{,}68) = 0{,}5 + \Phi_0^+(2{,}68) = 0{,}9963.$$

Shu kabi, $\sigma = 1$ da

$$Z_{\text{kuz}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}}{1/\sqrt{100}} = 10\bar{x} > 2,32 = t_{\text{kr}}.$$

Bu holda H_0 gipoteza $\bar{x} > 2,32 \cdot \frac{1}{10} = 0,232$ tengsizlik o'rinli bo'lganida rad etilib, bu kriteriyning $\mu = 1$ alternativa qiymatidagi quvvati

$$1-\beta = P(\bar{x} > 0,232 / \mu = 1) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0,232-1}{1/\sqrt{100}} / \mu = 1\right) = P(Z > -7,68) =$$

$$= 1 - \Phi_0(-7,68) = \Phi_0(7,68) = 0,5 + \Phi_0^*(7,68) = 0,5 + 0,5 = 1.$$

Bundan 2-tur xatolik qiymati $\beta = 0$ ekanini ko'ramiz.

Yuqoridagi barcha hisoblarni e'tiborga olib quyidagi jamlovchi jadvalni tuzib olamiz.

Asosiy gipoteza: $H_0 : \mu = 0$

№	Tanlanma hajmi	Dispersiya	Alternativ	Qiymatdorlik sathi (1-tur xatolik)	Kriteriy quvvati
1.	n=25	$\sigma^2 = 4$	$H_1 : \mu = 1$	$\alpha = 0,05$	$1-\beta = 0,8$
2.	n=25	$\sigma^2 = 4$	$H_1 : \mu = 1$	$\alpha = 0,01$	$1-\beta = 0,5414$
3.	n=25	$\sigma^2 = 4$	$H_1 : \mu = 2$	$\alpha = 0,01$	$1-\beta = 0,9963$
4.	n=100	$\sigma^2 = 4$	$H_1 : \mu = 1$	$\alpha = 0,01$	$1-\beta = 0,9963$
5.	n=100	$\sigma^2 = 1$	$H_1 : \mu = 1$	$\alpha = 0,01$	$1-\beta = 1$

Bu jadvaldan ko'rinadiki, normal taqsimot o'rta qiymati haqidagi $H_0 : \mu = 0$ gipotezani uning dispersiyasi σ^2 ma'lum bo'lganida $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ – statistikaga asoslangan kriteriyning qiymatdorlik sathi 1% ($\alpha = 0,01$) bo'lgan holda tanlanma hajmi ortgani sari eng katta quvvatga ega bo'lar ekan.

7-§. Tanlanmalar bir jinsliligini tekshirish uchun noparametrik kriteriylar

Biz ikki tanlanma o'rta qiymatlari tengligi haqidagi quyidagi

Z-kriteriy (dispersiyalar ma'lumligida bosh to'plamlar normal taqsimotlarga ega);

t-kriteriy (Styudent kriteriysi, dispersiyalar noma'lumligida bosh to'plamlar normal taqsimotlarga ega);

t-kriteriy (Kramer-Uelch kriteriysi, dispersiyalar noma'lumligida bosh to'plamlar ixtiyoriy taqsimotlarga ega);

hamda dispersiyalar tengligi haqidagi Fisher-Snedekorning F-kriteriylari bilan tanishib, ularga turli misollar ko'rib o'tdik. Ularni ikki tanlanma sonli xarakteristikalar tengligi haqidagi parametrik gipotezalar deb qaraymiz.

Ushbu paragrafda biz yana ham umumiy masala, ya'ni ikki tanlamaning taqsimotlari ustma-ustligi haqidagi gipotezalarni tekshirishga doir kriteriylarni ko'rib o'tamiz. Bular noparametrik kriteriylardir.

Tajribalar natijasida olingan ikki statistik tanlanmalar $X^{(n)}=(X_1,X_2,...,X_n)$ va $Y^{(m)}=(Y_1,Y_2,...,Y_m)$ larning bir jinsliligi, ya'ni yagona bosh to'plamdan olinganligini tekshirish statistik gipotezalarni tekshirish nazariyasining asosiy masalalaridan biridir. Biz $X^{(n)}$ ni taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdorni va $Y^{(m)}$ ni esa taqsimot funksiyasi $G(y)$ bo'lgan Y tasodifiy miqdorni kuzatish natijasida olingan mos n va m hajmlardagi statistik tanlanmalar deb qaraymiz. Asosiy gipoteza:

$$H_0: F(x)=G(x), \text{ barcha } x \text{ larda;} \qquad (1)$$

bu ikki taqsimotlar ustma-ust tushishi haqidadir.

Asosiy H_0 gipotezaning bajarilmasligi, ya'ni tanlanmalarning bir jinslik emasligi hech bo'lmaganda biror x_0 uchun $H_1: F(x_0)\neq G(x_0)$ gipoteza o'rinli ekanini anglatadi. Agar tanlanmalar bir jinsliligi asoslansa, u holda ular yagona bosh to'plamdan olingan deb hisoblanib, ularni birlashtirib yuborish mumkin. Agarda (1) gipoteza o'rinli bo'lsa, u holda tanlanmalarning o'rta qiymatlari tengligi haqidagi

$H_0'' : \mu_1 = \mu_2$ gipoteza ham o'rinli bo'ladi, ammo teskarisi o'rinli emas. H_0 gipotezani Styudent va Kramer-Uelch kriteriylari orqali tekshirib bo'lmaydi, chunki ular yordamida H_0' nigina tekshirish mumkin. (1) gipotezani tekshirish uchun noparametrik kriteriylar Smirnov, omega-kvadrat (Leman-Rozenblatt), Vilkoksok-Mann-Uitni, Van-der-Varden, Sevij, xi-kvadrat (Pirson) va shular kabi statistikalar asosida qurilishi mumkin.

a) Smirnov kriteriysi. F va G taqsimotlar uzluksiz bo'lsin. $X^{(n)}$ va $Y^{(m)}$ tanlanmalar bo'yicha $F(x)$ va $G(y)$ larning mos empirik baholari, ya'ni empirik taqsimot funkiyalarini hisoblaymiz:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x), \quad x \in R,$$

$$G_m(y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Y_j \le y), \quad y \in R,$$

bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikatori belgilangan. Smirnov statistikasi

$$D_{n,m} = \sup_{x \in R} \left| F_n(x) - G_m(x) \right| \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi. (2) statistikaning kritik nuqtalari jadvali [4] da keltirilgandir. Jadvaldan alternativ gipoteza asosida bir yoki ikki tomonlama kritik nuqtalar aniqlanganidan so'ng H_0 ni qabul qilish yoki inkor etilishi odatdagi uslubiyatda amalga oshiriladi. (2) statistika 1939-yilda N.V.Smirnov tomonidan tavsiya etilgan.

b) Leman-Rozenblattning omega kvadrat kriteriysi. Omega kvadrat statistika

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{nm}{n+m}\int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(x) - G_m(x)\right)^2 dH_{n,m}(x), \qquad (3)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$H_{n,m}(x) = \frac{n}{n+m}F_n(x) + \frac{m}{n+m}G_m(x)$$

- birlashtirilgan tanlanma bo'yicha tuzilgan empirik taqsimot funksiyadir. (3) statistikaning ham kritik nuqtalari jadvali [4] da keltirilgan. (3) statistika 1951-yilda E.Leman va 1952-yilda M.Rozenblatt tomonidan taklif etilgan.

v) Ikki bog'liqsiz tanlanma uchun xi-kvadrat kriteriysi. $X^{(n)}$ va $Y^{(m)}$ tanlanmalar elementlarini guruhlarga taqsimlab olamiz. L orqali guruhlar sonini belgilab, n_i va m_i lar orqali i-guruhga tushgan $X^{(n)}$ va $Y^{(m)}$ tanlanmalarga mos kelgan elementlar sonini belgilab olamiz. U holda $\frac{n_i}{n}$ va $\frac{m_i}{m}$ lar i-guruhga tushgan tanlanma elementlari nisbiy takrorlanishlar sonini anglatadi. Bu yerda

$$\sum_{i=1}^{L} n_i = n, \quad \sum_{i=1}^{L} m_i = m.$$

Ikki tanlanma uchun xi-kvadrat statistikasi

$$X^2_{n,m} = n \cdot m \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(\frac{n_i}{n} - \frac{m_i}{m}\right)^2}{n_i + m_i} \tag{4}$$

amaliyotda juda keng qo'llaniladi va shu sababli uning taqsimoti (xi-kvadrat taqsimot) kritik nuqtalari jadvali ko'pgina adabiyotlarda va xususan [4] da ham keltirilgandir. Bu statistika kritikasi nuqta berilgan qiymatdorlik sathi α va ozodlik darajasi $\nu = L - 1$ ga qarab jadvaldan tanlanadi. Biz misol sifatida $\alpha = 0{,}05$ uchun bu kritik nuqtalarning 9 tasini quyidagi jadvalda keltiramiz.

Xi-kvadrat kriteriyning $\alpha = 0{,}05$ uchun kritik nuqtalari

$\nu = L-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_{\text{kp}} = \chi^2_{0,05}$	3,84	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,52	16,92

Xi-kvadrat kriteriyning amalga oshirilishi quyidagi algoritm asosida olib boriladi:

1. Xi-kvadrat statistika qiymati (4) formula asosida hisoblanadi.

2. $X^2_{n,m}$ qiymati t_{kr} nuqta qiymati bilan solishtiriladi: agar $X^2_{n,m} \le \chi^2_{0,05} = t_{kr}$ bo'lsa, u holda solishtirilayotgan tanlanmalar taqsimotlari 0,05 qiymatdorlik sathida ustma-ust tushadi;

agarda $X^2_{n,m} > \chi^2_{0,05} = t_{kr}$ bo'lsa, u holda solishtirilayotgan tanlanmalar farqlanishi muqarrarligi 95% ni tashkil etadi.

Masala. Ikki tumanda bir fan bo'yicha test-sinov ishlari olib borildi. Tajribada har ikki tumandan $n = m = 50$ tadan o'quvchilar ishtirok etdi. Mashqlarni bajarilishiga qarab, har bir o'quvchi quyi, o'rta, yaxshi va yuqori, deb ajratilgan guruhlardan biriga o'tadi. Biz birinchi har ikki tuman o'quvchilari bilimlari deyarli farqlanmaydi, ya'ni ularning bilim darajalari sonli ko'rsatkichlari mos taqsimotlari F va G lar tengligi haqidagi (1) gipotezani ikki tomonlama alternativ $H_1 : F \neq G$ ga nisbatan tekshiramiz. Test-sinov natijalari quyidagichadir:

Tanlanmalar	quyi	o'rta	yaxshi	yuqori
1-tanlanma n=50	n_1=3	n_2=19	n_3=18	n_4=10
2-tanlanma m=50	m_1=9	m_2=24	m_3=12	m_4=5

Xi-kvadrat statistikani hisoblaymiz:

$$\chi^2_{50;50} = 50^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{\left(\frac{n_i}{50} - \frac{m_i}{50}\right)^2}{n_i + m_i} = 2500 \left[\frac{\left(\frac{3}{50} - \frac{9}{50}\right)^2}{3+9} + \frac{\left(\frac{19}{50} - \frac{24}{50}\right)^2}{19+24} + \frac{\left(\frac{18}{50} - \frac{12}{50}\right)^2}{18+12} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{10}{50} - \frac{5}{50}\right)^2}{10+5} \right] = 6,45.$$

Ozodlik darajasi $\nu = 4 - 1 = 3$. U holda $\alpha = 0,05$ uchun jadvaldan kritik nuqtani topamiz:

$$t_{kr} = \chi^2_{0,05} = 7,82.$$

Ammo $\chi^2_{50;50} = 6,45 < 7,82$, demak H_0 qabul qilinadi. Bu esa bizda ma'lum bir fan bo'yicha o'quvchilar bilimlari farqlanadi, degan taxminni inkor etishga asos bo'ladi.

XIII BOBGA DOIR MASALALAR

1. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma $N(a;\theta^2)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1>\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

2. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma $Bi(n;\theta)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1>\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

3. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma $\pi(\theta)$ taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1>\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

4. ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti $F(x)$ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:F(x)=R[-a;a]$ va $H_1:F(x)=N(0;\sigma^2)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

5. ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti $F(x)$ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:f(x)=\dfrac{1}{2},|x|<1$ va $H_1:F(x)=N(0;1)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

6. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}$, $x>\theta$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parameter θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1>\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

7. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=\theta x^{-2}$, $x>\theta$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parameter θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1\neq\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

8. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=2\theta^{-2}(\theta-x), x\in(0;\theta)$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1>\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

9. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=2(\theta x+(1-\theta)(1-x))$, $x\in(0;1)$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parameter θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(0\leq\theta_1<\theta_0\leq1)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

10. $X^{(n)}=(X_1,...,X_n)$ tanlanma zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=2x/\theta^2$, $x\in(0;\theta)$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. Noma'lum parametr θ to'g'risida quyidagi ikki sodda gipoteza ko'ramiz: $H_0:\theta=\theta_0$ va $H_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1>\theta_0)$. I tur xatoligi α bo'lgan tekis eng quvvatli kriteriy quring va II tur xatolik β ni hisoblang.

11. Quyidagi misollarga berilgan tanlanma bo'yicha muvofiqlik kriteriylari yordamida H_0 gipotezani tekshiring.

a) $n=100$ ta detal uzunligini o'lchatib, quyidagi jadval tuzildi (*mm* da):

Uzunligi	98	98,5	99	99,5	100	100,5	101	101,5	102	102,5
Chastotasi	2	5	9	16	18	20	14	10	4	2

$H_0: X\sim N(100,25;1)$.

b) Tasodifiy sonlar jadvalidan $n=150$ ta son tanlanadi. $[10_i,10_i+9](i=0,1,...,9)$ oraliqqa tushgan sonlar chastotalari n_i: 16,15,19,13,14,19,14,11,13,16 ga teng.

$H_0: X \sim R[0,100]$.

v) Telefon stansiyasida har minutda noto'g'ri ulanishlar soni ξ ustida kuzatishlar olib borilib 1 soat davomida quyidagi ma'lumotlar olindi: 3; 1; 3; 1; 4; 2; 2; 4; 0; 3; 0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1; 4; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 0; 3; 4; 1; 3; 2; 7; 2; 0; 0; 1; 3; 3; 1; 2; 4; 2; 0; 2; 3; 1; 2; 5; 1; 1; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 1; 5.

Muhimlik me'yorini $\alpha=0,05$ deb tanlab, bu tanlanmaning nazariy taqsimoti Puasson taqsimotidan iboratligi haqidagi H_0 gipotezani tekshiring.

TESTLAR

(New York Universiteti 2-kurs bakalavrlariga 1990-yilda berilgan test savollari)

1. R, S va T bog'liqsiz hodisalar va ular bir xil $\frac{1}{3}$ ehtimollikka ega. $P(P \cup S \cup T)$ ni toping?

A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{19}{27}$ D. $\frac{26}{27}$ E. 1.

2. X va Y t.m.larning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan bo'lsin:

$$f(x,y) = \begin{cases} 25, 0 \le x \le 2,\ x-2 \le y \le x \\ \mathbf{0}, \text{ aks holda.} \end{cases}$$

MX^3Y ni hisoblang.

A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4 E. $\frac{24}{5}$.

3. $X_1, X_2, ..., X_{36}$ va $Y_1, Y_2, ..., Y_{49}$ bog'liqsiz t.m.lar mos matematik kutilmasi $MX = 30.4$ va $MY = 32.1$, o'rtacha kvadratik tarqoqligi $\sigma_X = 12$ va $\sigma_Y = 14$ bo'lgan taqsimotga ega bo'lsin. $P(\bar{x} > \bar{y})$ ni hisoblang.

A. 27 B. 34 C. 50 D. 66 E. 73.

4. X va Y diskret t.m.larning birgalikdagi taqsimot qonuni berilgan:

Y \ X	-1	0	1
0	1	1	2
1	1	3	2

$Cov(X,Y)$ ni hisoblang.

A. -0,02 B. 0 C. 0,02 D. 0,10 E. 0,12.

5. Nomerlangan kub toki 2 raqami tushmaguncha qadar tashlanadi. X t.m. tashlashlar soni bo'lsa, $P(X \le x) \ge \frac{1}{2}$ ni qanoatlantiruvchi eng kichik x ning qiymatini toping.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6.

6. X va Y t.m. lar matematik kutilmasi μ, dispersiyasi $\sigma^2 > 0$ bo'lgan normal taqsimotga ega va ρ bu t.m.lar korrelyatsiya koeffitsiyenti. Quyidagi mulohazalarning qaysilari to'g'ri?

I. X va Y t.m.lar bog'liqsiz bo'ladi, faqat va faqat $\rho = 0$ bo'lsa;

II. $Y - X$ normal taqsimlangan bo'ladi, faqat va faqat $\rho > 0$ bo'lsa;

III. $D(X+Y) < 2\sigma^2$ faqat va faqat $\rho < 0$ bo'lsa;

A. faqat I va II; B. faqat I va III;
C. faqat II va III; D. I va III; E. to'g'ri javob yo'q.

7. Zichlik funksiyasi $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x \le 0 \\ 2\lambda e^{-2\lambda x}, \text{ agar } x > 0 \end{cases}$ bo'lgan ξ tasodifiy miqdor uchun $M\xi$ ni toping.

A. 1 B. $\frac{1}{\lambda}$ C. $\frac{1}{2}$; D. λ E. $\frac{1}{2\lambda}$.

8. $X_1,...,X_4 \sim N(3;\sigma^2), \sigma^2$ – noma'lum bo'lsin. Agar tanlanmaning tajribadagi qiymatlari 4, 8, 5 va 3 bo'lsa, σ^2 uchun HMO'UB ni qiymatini toping.

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{14}{3}$ D. 5 E. $\frac{15}{2}$.

9. X va Y t.m.larning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan.

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1,2,3,\ y = 2,3, \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$ $U = X + Y$ bo'lsin, u holda U t.m. ning zichlik funksiyasini toping.

A. $g(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, u = 3,4,5,6 \\ 0, \text{aks holda} \end{cases}$ B. $g(u) = \begin{cases} \frac{2}{3}, u = 3 \\ \frac{1}{5}, u = 4,5,6 \\ 0, \text{aks holda} \end{cases}$

C. $g(u)=\begin{cases} \frac{1}{6}, u=3,6 \\ \frac{1}{3}, u=4,5 \\ 0, \text{aks holda} \end{cases}$ D. $g(u)=\begin{cases} \frac{1}{5}, u=2,3,4,5,6 \\ 0, \text{aksholda} \end{cases}$

E. $g(u)=\begin{cases} \frac{1}{4}, u=2,3,4,5,6 \\ 0, \text{aksholda} \end{cases}$

10. $X_1,...,X_n$ matematik kutilmasi MX va dispersiyasi $DX>0$ va $Y_1,...,Y_n$ esa matematik kutilma MY va dispersiya $DY>0$ taqsimotlardan olingan bo'lsin. Asosiy $H_0: MX=MY$ gipotezani va alternativ $H_1: MX\neq MY$ gipotezani ko'raylik. $Z_i=X_i-Y_i$ ga asoslangan Styudent kriteriysi bo'yicha H_0 gipotezani tekshirishda quyida keltirilgan qaysi mulohazadan foydalaniladi?

I. Z_i normal taqsimotga ega. II. $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$.

III. $Cov(X_i,Y_i)=0,\ i=1,...,n$.

A. I,II va III B. I C. II D.III E. to'g'ri javob yo'q.

11. X_1, X_2 va X_3 diskret t.m.lar va $g(x)=\begin{cases} \frac{x}{10}, & \text{agar } x=1,2,3,4 \\ 0, & \text{aksholda} \end{cases}$ zichlik funksiyasi bo'lsin. $P(X_1<X_2<X_3)$ ni hisoblang.

A. 0,030 B. 0,050 C. 0,167 D. 0,250 E. 0,350.

12. X uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{agar } x>0 \\ 0, & \text{aksholda.} \end{cases}$$

Agar bu taqsimotning medianasi $\frac{1}{3}$ bo'lsa, λ ni toping.

A. $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}\ln 2$ C. $2\ln\frac{3}{2}$ D. $3\ln 2$ E. 3.

13. $M_X(t)$ funksiya X t.m.ning hosil qiluvchi funksiyasi bo'lsin. Quyida keltirilgan mulohazalardan qaysilari to'g'ri?

I. $M_X(0)=1$.

II. $\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}=Var[X]$.

III. $M_X(t)$ X t.m.ning taqsimotini o'zaro bir qiymatli aniqlaydi.

A. I va II B. I va III C. II va III D. I,II va III;

E. to'g'ri javob yo'q.

14. Noma'lum θ parametr uchun uchta bog'liqsiz ishonchlik intervallari tuzilgan. Agar har bir interval ishonchliligi 0,98 bo'lsa, bu intervallardan birortasi ham θ ni o'z ichiga olmasligi ehtimolligini toping.

A. 0,0192 B. 0,0297 C. 0,0588 D. 0,9412 E. 0,9703.

15. $X_1,X_2 \sim \pi(\theta)$ bo'lsin. Asosiy gipoteza $H_0:\theta=5$ ni $H_1:\theta\neq5$ alternativ gipotezaga qarshi tekshirishda $\bar{x}=\frac{X_1+X_2}{2}$ statistikadan foyalaniladi. Agar $|\bar{x}-5|\geq4$ kritik soha bo'lsa, 1-tur xatolik ehtimolligini toping.

A. $1-\sum_{y=2}^{8}\frac{e^{-5}5^y}{y!}$; B. $1-\sum_{y=1}^{9}\frac{e^{-5}5^y}{y!}$; C. $1-\sum_{y=2}^{8}\frac{e^{-10}10^y}{y!}$;

D. $1-\sum_{y=0}^{17}\frac{e^{-10}10^y}{y!}$; E. $1-\sum_{y=3}^{17}\frac{e^{-10}10^y}{y!}$.

16. X uzluksiz t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x(4-x)\text{agar}\,0<x<3\\ 0,\quad \text{aks holda.}\end{cases}$$

X ning moddasini toping.

A. $\frac{4}{9}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{4}$ E. 2.

17. X va Y t.m. larning birgalikdagi taqsimot qonuni berilgan:

$Y \backslash X$	1	5
2	$\theta_1+\theta_2$	$\theta_1+2\theta_2$
4	$\theta_1+2\theta_2$	$\theta_1+\theta_2$

θ_1 va θ_2 parametrlar birgalikdagi taqsimot xossalarini va $-0.25\le\theta_1\le0.25$, $0\le\theta_2\le0.35$ shartlarni qanoatlantiradi. (θ_1,θ_2)ning qanday qiymatida X va Y t.m.lar bog'liqsiz bo'ladi?

A. $\left(0,\frac{1}{6}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4},0\right)$ C. $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$ E. $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{8}\right)$.

18. X,Y va Z bog'liqsiz normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar va $MX=2, MY=1, MZ=2$ va $DX>0$ bo'lsin. Agar $W=c\left[\frac{4(X-2)^2}{(Y-1)^2+(Z-2)^2}\right]$ bo'lsa, c ning qanday qiymatida W t.m. F_{12} Fisher taqsimotiga ega bo'ladi?

A. 0,25 B. 0,50 C. 1 D. 2 E. 4.

19. $X_1,...,X_{15}\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ va $\bar{x}=\sum_{i=1}^{15}\frac{X_i}{15}$ va $T=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\left(X_i-\bar{x}\right)^2$ bo'lsin. Asosiy gipoteza $H_0:\sigma^2\le10$ ga qarshi alternativ $H_1:\sigma^2>10$ gipotezani ko'raylik. $1-\alpha=0.05$ bo'lganda kritik sohani toping.

A. H_0 rad etiladi, agar $T\ge23.69$;

B. H_0 rad etiladi, agar $T\ge25.00$;

C. H_0 rad etiladi, agar $T\ge236.90$;

D. H_0 rad etiladi, agar $T\ge250.00$;

E. H_0 rad etiladi, agar $T\ge261.20$.

20. Quyida keltirilgan hodisalarning qaysilari $(B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C')$ hodisaga teng kuchli:

I. $B\cap(A'\cup C)$ II. $(A'\cap B)\cup(B\cap C)$

III. $(A'\cap C')\cup(B\cap C)$.

A. I va II B. I va III C. II va III;

D. I, II va III E. to'g'ri javob yo'q;

21. Yashikda 100 shardan r tasi qizil, qolganlari esa oq rangda. Tavakkaliga 20 ta shar olinadi. Agar olingan sharlardan hech bo'lmasa 10 tasi qizil bo'lsa, asosiy gipoteza $H_0: r=30$ rad etilib, $H_1: r>30$ alternativ gipoteza qabul qilinadi. $r=40$ bo'lsa, 2-tur xatolik ehtimolligini hisoblang.

A. $\dfrac{\binom{40}{10}}{\binom{100}{20}}$ B. $\sum\limits_{k=10}^{20}\dfrac{\binom{30}{k}\binom{70}{20-k}}{\binom{100}{20}}$; C. $\sum\limits_{k=0}^{9}\dfrac{\binom{30}{k}\binom{70}{20-k}}{\binom{100}{20}}$;

D. $\sum\limits_{k=10}^{20}\dfrac{\binom{40}{k}\binom{60}{20-k}}{\binom{100}{20}}$; E. $\sum\limits_{k=0}^{9}\dfrac{\binom{40}{k}\binom{60}{20-k}}{\binom{100}{20}}$.

22. $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \text{agar}\, \theta_1\le x\le\theta_2\\ 0, & \text{aks holda}\end{cases},\ \theta_2>0,\ \theta_1<0$$

bo'lgan taqsimotdan olingan. Asosiy $H_0: \theta_1=-\theta_2$ va unga alternativ $H_1: \theta_1\neq-\theta_2$ gipotezalarni ko'raylik. H_0 gipotezani tekshirish uchun qurilgan haqiqatga o'xshashlik nisbati statistikasining kritik sohasini toping.

A. $\dfrac{\max(X_i)-\min(X_i)}{\max(X_i)}\le k$; B. $\dfrac{\max|X_i|-\min|X_i|}{\max(X_i)}\le k$;

C. $\dfrac{\max(X_i)-\min(X_i)}{\max|X_i|}\le k$; D. $\dfrac{\max(X_i)}{\max(X_i)-\min(X_i)}\le k$;

E. $\dfrac{\max|X_i|}{\max(X_i)}\le k$.

23. X_1, X_2, X_3 lar bog'liqsiz va mos ravishda $\theta, 2\theta, 3\theta$ parametrli Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan bo'lsin. Noma'lum parametr θ uchun HMO'UB toping.

A. $\frac{1}{2}\overline{x}$ B. $\overline{x}$ C. $\frac{X_1+2X_2+3X_3}{6}$;

D. $\frac{3X_1+2X_2+X_3}{6}$ E. $\frac{6X_1+3X_2+2X_3}{11}$.

24. $X_1,...,X_n \sim N(\mu,50)$ bo'lsin. $\overline{x} \geq 13.75$ kritik soha yordamida asosiy gipoteza $H_0:\mu=10$ alternativ gipoteza $H_1:\mu=15$ qarshi tekshiriladi. 2-tur xatolik 0,31 dan kichik yoki teng bo'lishi uchun eng kichik tanlanma hajmini toping.

A. 2 B. 4 C. 5 D. 8 E. 20.

25. $X_1,...X_n$ tanlanma zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\theta(a-x)^{\theta-1} \text{ agar } a-1\leq x\leq a\\ 0, \quad \text{aks holda.}\end{cases}$$

$a>0$, $\theta>0$ bo'lgan taqsimotdan olingan bo'lsin. Asosiy gipoteza $H_0:\theta=\theta_0$ va unga alternativ gipoteza $H_1:\theta>\theta_0$ bo'lsin. U uchun eng quvvatli kritik sohani toping.

A. $\sum_{i=1}^{n}\ln(a-X_i)\geq k$ B. $\sum_{i=1}^{n}\ln(a-X_i)\leq k$ C. $\sum_{i=1}^{n}X_i\geq k$;

D. $\sum_{i=1}^{n}X_i\leq k$ E. $\prod_{i=1}^{n}\ln(X_i-a)\leq k$.

26. X t.m. zichlik funksiyasi $f(x;\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\theta}\right)x^{(1-\theta)/\theta} \text{ agar } 0<x<1\\ 0, \quad \text{aks holda.}\end{cases}$

$\theta>0$ bo'lsin. Noma'lum parameter θ uchun MUB ni toping.

A. $\frac{1-\overline{x}}{\overline{x}}$ B. $\frac{\overline{x}-1}{\overline{x}}$ C. $\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$ D. $\frac{\overline{x}}{\overline{x}-1}$ E. $\frac{1}{1+\overline{x}}$

27. $X_1,X_2 \sim N(0,1)$ va $M(c\,|X_1-X_2|)=1$ bo'lsa, c ni toping.

A. $\sqrt{\pi}$ B. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ C. $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ D. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ E. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

28. Agar ξ t.m. t.f. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-cx}, & x\geq 0\end{cases}$ bo'lib, $F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ bo'lsa, c ni toping.

A. $3\ln 2$ B. $2\ln\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{3}\ln 2$ D. 3 E. 1.

29. X,Y va Z lar bog'liqsiz va Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. $MX=3, MY=1$ va $MZ=4$ bo'lsa, $P(X+Y+Z\leq 1)$?

A. $13e^{-12}$ B. $9e^{-8}$ C. $\frac{13}{12}e^{-1/12}$ D. $9e^{-1/8}$ E. $\frac{9}{8}e^{-1/8}$.

30. Agar ξ t.m. $N(2;1)$ normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, $P(\xi<M\xi)$ ni toping.

A. 1/2 B. 1/3 C. 1/4 D. 1/5 E. 1/6.

31. Agar $X_1,...,X_{10}$ t.m.lar dispersiyasi $\sigma^2>0$ bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsa, 95% aniqlikda σ^2 ishonchlilik intervalini tuzing.

A. $(10.162,\infty)$ B. $(8.589,\infty)$ C. $(2.00,\infty)$;

D. $(1.848,\infty)$ E. $(1.720,\infty)$.

32. Idishda 4 ta qizil va 6 ta oq shar bor. Tavakkaliga 3 ta shar olinadi. Tanlangan sharlardan hech bo'lmasa 2 tasi oq rangda bo'lsa, 1 ta qizil va 2 ta oq shar olinishi ehtimolini toping.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{9}{11}$ E. $\frac{54}{55}$.

33. Anketalar tarqatilganda 50% aholi tezda javob qaytaradi, 40% aholi esa 2-marta yuborilganda javob qaytaradi. Agar anketa 4 ta kishiga yuborilgan bo'lsa va 1 ta anketa takroran javob bermagan ixtiyoriy 4 kishidan 1 tasiga yuborilsa, kamida 3 ta kishi umuman javob bermasligi ehtimolligini toping.

A. $(0.3^4)+4(0.3^3)(0.7)$ B. $4(0.3^3)(0.7)$

C. $0.1^4+4(0.1^3)(0.9)$ D. $0.4(0.3)(0.7^3)+0.7^4$

E. $0.9^4+4(0.9^3)(0.1)$

ILOVA

1-jadval

Normal taqsimot qiymatlari $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42785	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	3.0	3.5	4.0	5.0
$\Phi_0(x)$	0.49865	0.49977	0.499968	0.49999997

2-jadval

$N(0,1)$ – *normal taqsimot kvantillari*

p	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
U_p	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

3-jadval

$t_p(k)$ – Styudent taqsimoti kvantili

k – ozodlik darajasi; p – kvantil tartibi

$$f_T(x) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)(\pi k)^{-1/2}\left(1+\frac{\chi^2}{k}\right)^{-(k+2)/2}$$

k \ p	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.3
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.2
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

4-jadval

$\chi^2_p(k)$ – taqsimoti kvantili

k – ozodlik darajasi; p – kvantil tartibi

k \ p	0.90	0.95	0.99	k \ p	0.90	0.95	0.99
1	2.71	3.84	6.63	**20**	28.41	31.14	37.57
2	4.61	5.99	9.21	**21**	29.62	32.67	38.93
3	6.25	7.81	11.34	**22**	30.81	33.92	40.29
4	7.78	9.49	13.28	**23**	32.01	35.17	41.64
5	9.24	11.07	15.09	**24**	33.20	36.42	42.98
6	10.64	12.59	16.81	**25**	34.38	37.65	44.31
7	12.02	14.07	18.48	**26**	35.56	38.89	45.64
8	13.36	15.51	20.09	**27**	36.74	40.11	46.96
9	14.68	16.92	21.67	**28**	37.92	41.34	48.28
10	15.99	18.31	23.21	**29**	39.09	42.56	49.59
11	17.28	19.68	24.72	**30**	40.26	43.77	50.89
12	18.55	21.03	26.22	**40**	51.80	55.76	63.69
13	19.81	22.36	27.69	**50**	63.17	67.50	76.15
14	21.06	23.68	29.14	**60**	74.40	79.08	88.38
15	22.31	25.00	30.58	**70**	85.53	90.53	100.42
16	23.54	26.30	32.00	**80**	96.58	101.88	112.33
17	24.77	27.59	33.41	**90**	107.56	113.14	124.12
18	25.99	28.87	34.81	**100**	118.50	124.34	135.81
19	27.20	30.14	36.19				

Xi-kvadrat taqsimoti zichlik funksiyasi $\chi^2(k)$:

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2^{-k/2}\Gamma^{-1}(k/2)x^{(k-2)/2}e^{-x/2}, & x > 0. \end{cases}$$

5-jadval

$F_p(k_1, k_2)$ – Fisher taqsimoti kvantili

k_1, k_2 – ozodlik darajalari; p – kvanti ltartibi

	p=0.95								
$k_2 \setminus k_1$	**4**	**6**	**12**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	224.6	234.0	244.9	249.0	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.2	19.3	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	9.1	8.9	8.7	8.6	8.6	8.6	8.6	8.5	8.5
4	6.4	6.2	5.9	5.8	5.7	5.7	5.7	5.7	5.6
5	5.2	5.0	4.7	4.5	4.5	4.5	4.4	4.4	4.4
6	4.5	4.3	4.0	3.8	3.8	3.8	3.7	3.7	3.7
7	4.1	3.9	3.6	3.4	3.4	3.3	3.3	3.3	3.2
8	3.8	3.6	3.3	3.1	3.1	3.0	3.0	3.0	2.9
9	3.6	3.4	3.1	2.9	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7
10	3.5	3.2	2.9	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5
11	3.4	3.1	2.8	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4
12	3.3	3.0	2.7	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3
13	3.2	2.9	2.6	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2
14	3.1	2.8	2.5	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1
15	3.1	2.8	2.5	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1
16	3.0	2.7	2.4	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0
17	3.0	2.7	2.4	2.2	2.1	2.1	2.1	2.0	2.0
18	2.9	2.7	2.3	2.1	2.1	2.1	2.1	2.0	1.9
19	2.9	2.6	2.3	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9
20	2.9	2.6	2.3	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8
22	2.8	2.5	2.2	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
24	2.8	2.5	2.2	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7
26	2.7	2.5	2.1	1.9	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7
28	2.7	2.4	2.1	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7
30	2.7	2.4	2.1	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6
40	2.6	2.3	2.0	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5
60	2.5	2.3	1.9	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4
120	2.4	2.2	1.8	1.6	1.6	1.5	1.4	1.4	1.3
∞	2.4	2.1	1.8	1.5	1.5	1.4	1.3	1.2	1.0

$F(k_1, k_2)$ – Fisher taqsimoti zichlik funksiyasi:

$$f_F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k_2}{2}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2} x^{(k_1/2)-1}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-(k_1+k_2)/2}, & x > 0. \end{cases}$$

k_1, k_2 – natural sonlar .

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Abdushukurov A.A.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. – T., Universitet, 2010. 169 b.
2. *Abdushukurov A.A., Azlarov T.A., Djamirzaev A.A.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to'plami. – T., Universitet, 2003. 153 b.
3. *Farmonov Sh.Q., Abdushukurov A.A.* Matematik statistika. Parametrlarni baholash. Metodik qo'llanma. – T., Universitet, 1994. 67 b.
4. *Большев Л. Смирнов Н.* Таблицы математической статистики. М., Наука, 1983. 415 с.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – М.: Либроком. 2009. 656 с.
6. *Боровков А.А.* Математическая статистика. – Новосибирск, Наука, Из-во инс. мат. 1997.
7. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория вероятностей. Математическая статистика. 2-е изд. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2005. 296 с.
8. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М., Наука, 1987.
9. *Дейвид Г.* Порядковые статистики. – М., Наука, 1979. 336 с.
10. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М., Мир, 1975. 776 с.
11. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. – М., Наука, 1979. 527 с.
12. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Введение в математическую статистику: Учебник. М., Издательство ЛКИ, 2010. 600 с.
13. *Козлов М.В., Прохоров А.В.* Введение в математическую статистику. – Изд-во Московского университета, 1987.
14. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач по математической статистике: учебное пособие. 2-е изд. – Новосибирск, Изд-во инс. мат., 2004. 127 с.
15. *Леман Э.* Теория точечного оценивания. – М., Наука, 1991. 444 с.
16. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. – М., Наука, 1979. 408 с.
17. *Ширяев А.Н.* Вероятность-1, 3-е изд. – М., МЦНМО, 2004. 520 с.
18. *Ширяев А.Н.* Вероятность-2, 3-е изд. – М., МЦНМО, 2004. 408 с.
19. *Jun Shao* Mathematical Statistics. Springer. 2003. 591 p.
20. *Van der Vaart A.W.* Asymptotic Statistics. Cambridge Univ. Press. 1998. 443 p.

MUNDARIJA

Abdushukurov A.A., Zuparov T.M.

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

Oliy o'quv yurtlarining bakalavr yo'nalishi talabalari uchun darslik

«TAFAKKUR BO'STONI»
TOSHKENT — 2015

Muharrir *Sh. Rahimqoriyev*
Musahhih *S. Abduvaliyev*
Tex. muharrir *D. O'rinova*
Sahifalovchi *U. Vohidov*

Litsenziya AI № 190, 10.05.2011-y.

Bosishga 2015-yil 20-noyabrda ruxsat etildi. Bichimi $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Ofset qog'ozi. «Times» garniturasi. Shartli bosma tabog'i 26,0.
Nashr tabog'i 26,9. Shartnoma №31/30. Adadi 700. Buyurtma №35/30.

«TAFAKKUR BO'STONI» MCHJ.
100190, Toshkent shahri, Yunusobod tumani, 9-mavze, 13-uy.
Telefon: 199-84-09. E-mail: tafakkur0880@mail.ru

«TAFAKKUR BO'STONI» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent shahri, Chilonzor ko'chasi, 1-uy.