SH.K.FORMANOV

AKTUAR MATEMATIKA

TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SH.K.FORMANOV

AKTUAR MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan darslik sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT – 2019

UO'K: 519(075.8)
KBK 22.1ya7
F 84

F 84 Sh.K.Formanov. Aktuar matematika. –T.: «Fan va texnologiya», 2019, 424 bet.

ISBN 978–9943–6150–6–9

Ushbu darslik universitetlar bakalavriat va magistratura yo'nalishidagi o'quv rejalarida "Aktuar matematika" fanining amaldagi dasturlari asosida yozilgan. Darslikda fan bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumotlar keltirilgan va ularga oid misol va masalalar yechib ko'rsatilgan. Mazkur darslikdan matematika, tatbiqiy matematika, informatika hamda iqtisodiyot, moliyaviy fanlar yo'nalishidagi talabalar, magistrantlar va ehtimolliklar nazariyasini mustaqil o'rganuvchilar, sug'urta faoliyati bilan shug'ullanadigan xodimlar ham foydalanishlari mumkin.

***

Настоящий учебник написан на основе действующих программ по предмету "Актуарная математика" для бакалавров и магистров университетов. В учебнике приведены основные результаты современной актуарной математики и решения задач, относящихся к функционированию страховой деятельности. Предлагаемым учебником могут пользоваться бакалавры и магистры, обучающиеся по специальностям прикладной математики, информатики и финансово-экономического направления. Также, настоящий учебник будет полезным для лиц, изучающих теорию вероятностей и математическую статистику самостоятельно, и занимающихся непосредственно актуарной (страховой) деятельностью.

UO'K: 519(075.8)
KBK 22.1ya7

Taqrizchilar:
R.N.G'anixo'jayev – f.-m. f. doktori, professor;
Sh.Sh.Sharahmetov – f.-m. f. doktori, professor.

ISBN 978–9943–6150–6–9

SO'Z BOSHI

Aktuar matematika (sug'urta matematikasi) fan sifatida XX asr davomida shakllandi. Bu fanda sug'urta faoliyati bilan bog'liq bo'lgan masalalar ko'riladi. Sug'urta faoliyatining asosida ro'y berishini oldindan aytib berish mumkin bo'lmagan baxtsiz hodisalardan muhofazalanish, bu hodisalar keltirgan zararlarni kamaytirish masalalari yotadi.

Birinchi sug'urta kompaniyalari hozirgi davrdan taxminan 300 yil oldin tashkil etila boshlangan. Hozirgi davrda sug'urta faoliyati dunyo miqyosida katta sanoat ko'rinishini oldi. O'z navbatida, sug'urta faoliyati tasodifiy (baxtsiz) hodisalarni o'rganish bilan bog'liq bo'lgani uchun unda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika metodlari keng qo'llaniladi.

Bugungi kunda sug'urtalash O'zbekiston Respublikasida tez sur'atlar bilan rivojlanayotgan sohalardan bo'lib, sug'urtalash umumiy iqtisodiy xavfsizlikni va barqarorlikni ta'minlovchi asosiy vositalardan biri hisoblanadi. Bundan tashqari, sug'urta tadbirkorlikni rivojlantirishni, ko'plab tabiiy, texnik va boshqa qaltisliklardan samarali himoyalashni ta'minlaydi.

Respublikamizda bozor iqtisodiyoti rivojlanishi sug'urta bozorini tez sur'atlar bilan o'sishiga olib kelmoqda. Sug'urta bozoridagi sug'urta turlari ko'payib murakkablashmoqda. O'zbekiston sug'urta bozoridagi ijobiy o'zgarishlar talablariga kerakli darajada javob berishi uchun sug'urtani boshqarish, undagi kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirish va kapital shakllanishining samarali tizimini yaratishni taqozo etmoqda.

Hozirgi kunda sug'urta kompaniyasining o'z faoliyatini uzoq vaqt samarali olib borishi uchun kompaniyaning kasodga uchrash ehtimolini baholay olish talab etiladi. Bu masalalar esa aktuar hisoblar qatoriga kiradi. Aktuar hisoblarni sug'urtalovchi va sug'urtalanuvchi o'rtasidagi o'zaro munosabatlarni tartibga soluvchi matematik va statistik qonuniyatlar sistemasi sifatida tasavvur etish mumkin.

Taklif etilayotgan “Aktuar matematika” qo‘llanmasi muallifning O‘zbekiston Milliy universiteti “Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika” kafedrasi magistrlari uchun 2014-yildan boshlab o‘qib kelinayotgan “Aktuar matematika kursi” (ikki semestr davomida) predmeti mavzulari, ma’ruza matnlari asosida yozilgan. Kitobning mazmuni M.V.Lomonosov nomidagi Moskva davlat universiteti Mexanika-matematika fakulteti talabalari uchun 1996-yildan boshlab o‘qilib kelinayotgan “Aktuar matematika” kursi dasturiga mos keladi. Muallif Moskva davlat universiteti “Ehtimolliklar nazariyasi” kafedrasi mudiri akademik A.N.Shiryayev, “Matematik statistika” kafedrasi mudiri, professor, V.Y.Korolyev, AQSH Kaliforniya universiteti (San-Diego) professori V.I.Rotarlar bilan ko‘p marta muloqotda bo‘lib, kitobning qo‘lyozma variantini muhokama qilgan. Ularga muallif chuqur minnatdorchilik izhor etadi.

Mazkur darslikning yuzaga kelishida, uning uchun zaruriy adabiyotni to’plashda va tartiblab chiqishda fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent T.A.Formanovaning xizmati behisobdir. Bundan tashqari, u kitob qo’lyozmasining “oilaviy taqrizchi-muharrir” vazifasini bajargan. Unga ham chuqur minnatdorchiligimni bildiraman.

Kitobni nashrga tayyorlashda O‘zbekiston Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining katta ilmiy xodimlari J.B.Azimov, X.Q.Jumaqulov va ilmiy xodimlar S.O.Sharipov, A.A.Qo‘shmurodov faol ishtirok etdilar. Bu xodimlarga muallif o‘zining minnatdorchiligini qayd etadi.

Har qanday risk sug'urta
qilingan bo'lishi kerak!
(AQSH Aktuariylar
Jamiyati shiori).

KIRISH

Broukgauz va Efronlarning mashhur ensiklopedik lug'atida (1901-yil) aktuar so'zi registrator (hisobchi) vazifasini bajaruvchi shaxs, qadimgi Rim tarixida esa, sud qarorlarini qayd etuvchi kotib sifatida talqin etiladi. Keyinroq bu so'z bilan sug'urta kompaniyalarida matematik hisoblar bilan shug'ullanadigan xodimlar aytila boshlandi.

Sug'urta faoliyati tarixini quyidagi 3 ta davrga bo'lish mumkin:

1) deterministik davr – 1693-yilda Edmund Galley (uning nomi bilan astronomiyadagi mashhur kometa atalgan) tomonidan tuzilgan "o'limlik jadvali", Daniel Bernullining maksimal foydalilik g'oyalari bilan bog'liq;

2) stoxastik davr – aktuar hisoblarda Ehtimolliklar nazariyasi metodlarini tatbiqlari keng qo'llanishi bilan bog'liq (xususan, markaziy limit teorema, katta sonlar qonuni, tasodifiy jarayonlar nazariyasi elementlari). Bu davrda (1930–1980) erishilgan eng ahamiyatli natijalardan biri – F.Lundberg va G.Kramer tomonidan yaratilgan kollektiv risk nazariyasi hisoblanadi;

3) oxirgi uchinchi davr – o'tgan XX asrning 80-yillaridan boshlab, sug'urta kompaniyalari faoliyati nazariyasida (aktuar matematikada) zamonaviy martingallar nazariyasi, umumiy stoxastik hisob elementlari, matematik statistikadagi eng yangi natijalarni va boshqa matematik metodlarni qo'llanishi bilan xarakterlanadi.

Hozirgi zamonda sug'urta faoliyati yuridik va jismoniy shaxslar uchun har qanday shakldagi mulklarni tabiiy ofatlardan (tasodifiy baxtsiz hodisalardan) muhofaza qilishning universal usuli hisoblanadi.

Har qanday sug'urta faoliyati strukturasini quyidagi

sug'urtalovchi	*to'lovlar*
↑	↓
premiyalar	*sug'urtalanuvchilar*

2 ta pul oqimi ko'rinishida ifodalash mumkin:

1) sug'urtalanuvchilar to'lovlari (premiyalar, sug'urta badali, sug'urta polisi);

2) sug'urta to'lovlari (yoki sug'urta shartnomasida qayd qilingan talofatlarni qoplash).

Demak, sug'urta kompaniyasi baxtsiz hodisalardan (sug'urta hodisalaridan) muhofazalanuvchi shaxslar (sug'urtalanuvchilar) bilan yuqoridagi 2 ta pul oqimini aniq ko'rinishini belgilovchi shartnomalar tuzadi, boshqacha aytganda, sug'urta polislarini sotadi va sug'urta hodisasi ro'y berganda, shartnomada qayd qilingan talofatlar uchun sug'urta to'lovlarini bajaradi. O'z navbatida, sug'urtalanuvchi yuridik yoki jismoniy shaxs, shartnomada ko'rsatilgan sug'urta badallarini (polislarni, mukofotlarni) to'laydi. O'z-o'zidan tushunarliki, sug'urta to'lovlari, sug'urta badalidan (premiyadan) ancha katta bo'lgandagina (va faqat shu holdagina) sug'urta shartnomalari tuziladi.

XX asrning ikkinchi yarmida, matematik statistika, jarayonlarni boshqarish nazariyasi, o'yinlar nazariyasi, matematik iqtisod fanlari asosida risklar nazariyasi deb ataluvchi yo'nalish yuzaga keldi va uning uchun risk tushunchasini ta'riflanmaydigan asosiy (boshlang'ich) tushuncha sifatida qabul qilinishi tobora aniq ma'noga ega bo'lib bormoqda.

Aktuar matematika umumiy nuqtayi nazardan risklar nazariyasining qismi deb qaralishi mumkin. Lekin sug'urta risk holatlarini analizi bilan shug'ullanuvchi aktuar matematika fani o'zining predmeti va unda qo'llaniladigan metodlari, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika uchun ham o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lganligi uchun uni mustaqil matematik fan sifatida qabul qilishga olib keldi.

Risk tushunchasi aktuar matematikada turli xil ma'nolarga ega bo'lishi mumkin:

1) sug'urtagalangan obyekt;

2) sug'urtaga kirmagan mol-mulk qismi, ya'ni sug'urtalanuvchi shaxsning riski;

3) talofatlarga olib keluvchi tasodifiy hodisalar, shuning uchun ham ulardan sug'urta orqali muhofazalanish kerak.

Keltirilgan izohlardan uchinchi, oxirgi izoh ta'riflanmaydigan risk tushunchasiga ko'proq mos keladi va u umumiy risklar nazariyasiga asos bo'lib xizmat qilishi mumkin. Bu nazariyada ko'proq konkret xarakterdagi jismoniy (tabiiy) risklar o'rganiladi va bu risklarning "manbaalari" tasodifiy ro'y beradigan yer qimirlashlari, iqtisodiy inqirozlar, ob-havoning keskin o'zgarishi kabi kundalik hayotga ta'sirini o'tkazadigan tabiiy jarayonlar bo'lishi mumkin.

Har qanday risk sug'urtalanish kerakmi, degan savol o'z-o'zidan yuzaga keladi. Yo'q, albatta, sug'urtalash uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

a) faqat kelgusida ro'y berishi mumkin bo'lgan "baxtsiz hodisalarnigina" sug'urtalash mumkin. Yonib ketgan uy, shikastlangan texnika vositasi sug'urta qilinmaydi;

b) talofat yetkazadigan va tasodifan ro'y beradigan hodisalardan sug'urtalanish mumkin, ya'ni ro'y berishi yoki ro'y bermasligi oldindan ma'lum bo'lmagan "baxtsiz hodisalar" sug'urta etilishi mumkin (masalan, avtomobil o'g'irlash, yoki piyodani bosib o'tish, biror kasallikka uchrash va hokazo). Ro'y berishi muqarrar, lekin qachon ro'y berishi noma'lum bo'lgan hodisalar ham sug'urtalanuvchi hodisalar qatoriga kiradi (masalan, sug'urtalangan shaxsning o'limi);

c) "sug'urta hodisalarining" ro'y berishi sug'urtalangan shaxsga bog'liq bo'lmasligi kerak. Shuning uchun ham sug'urta kompaniyasi o'zini "bu bog'liqlikni" taftish qiladigan ekspertlariga ega bo'lishi kerak. Bu ekspertlar bo'lib o'tgan yong'inning "tashkil etilganini", yoki firma iqtisodiy inqirozga uchraganda, uni tasdiqlovchi hujjatlar "yo'q qilinganini" aniqlay bilishlari kerak va ularning xulosasiga asoslanib, sug'urta kompaniyasi mos sug'urta to'lovidan voz kechishi mumkin. Masalan, oxirgi paytda ko'p sug'urta kompaniyalari hayot sug'urta to'lovlarini, sug'urtalangan shaxsning o'limi, sug'urta shartnomalari tuzilgan vaqtdan kamida bir yoki ikki yil keyin bo'lib o'tgandagina amalga oshirayotganligi kuzatilmoqda (chunki, hayot sug'urtasi shartnomasi uchun mijoz jiddiy tibbiy nazoratdan o'tishi kerak).

Sug'urta qilinadigan riskning tasodifiy ekanligini hisobga olgan holda, umuman, sug'urta faoliyatini ikki xil turga ajratish mumkin: hayot sug'urtasi va hayot sug'urtasi bo'lmagan variantlar (mos ravishda ingliz tilida – Life insurance va Non-life insurance, boshqacharoq qilib, ba'zi hollarda, General insurance deb ataladi). O'zbek tilida Non-life insurance variantini *mol-mulk sug'urtasi* deb atalishi qulayroq bo'ladi, chunki bu ham hayot sug'urtasi bo'lmagan sug'urta mohiyatiga mos keladi.

Matematika nuqtayi nazaridan hayot sug'urtasi ancha sodda hisoblanadi, chunki bu holda barcha tasodifiylik o'lim hodisalarining ro'y berish momentaridagina joylashgan bo'ladi. Shuning uchun ham tasodifiy hodisalarning ehtimolliklari va tasodifiy miqdor o'rta qiymatlari xossalarini bilish sug'urta polislarining (premiyalarni) qiymatlarini belgilash bilan bog'liq masalalarni yechish uchun yetarli bo'ladi.

Non-life (ya'ni mol-mulk) sug'urta varianti haqida so'z borganda, sug'urta hodisasi tasodifiy bo'lishidan tashqari, bu hodisalarning ro'y berish momentlari noma'lum ekanligini ham qayd etishga to'g'ri keladi. Demak, bu holda sug'urta to'lovlari tasodifiy miqdorlar bo'lib qolmasdan, bu to'lovlarni amalga oshiradigan vaqt momentari ham tasodifiy jarayonni tashkil qiladi. Bulardan tashqari, bitta shartnoma polisi bo'yicha bir necha marta sug'urta to'lovlarini bajarilshini hisobga olinsa, sug'urtaning bu varianti ancha murakkab ekanligi ayon bo'lib qoladi.

Yuqorida aytib o'tilgan fikrlardan kelib chiqadiki, sug'urtaning mol-mulk (non-life) varianti bilan bog'liq masalalarni o'rganishda mukammal bo'lgan matematik apparatlarga ehtiyoj yuzaga keladi (ba'zi hollarda oson yechiladigan masalalar bilan bir qatorda).

Yana bir marta sug'urtaning bu ikki xil variantlari bir-biridan nimalar bilan farq qilishiga e'tibor berib o'tamiz. Birinchi holda (hayot sug'urtasi – life insurance) tuziladigan sug'urta shartnomalari uzoq muddatli bo'ladi (masalan, umr oxirigacha tuziladigan shartnomalar muddati 50 yildan kam emas). Aksincha, mol-mulk (Non-life) sug'urta variantida tuziladigan shartnomalar harakati muddati asosan 1 yildan oshmaydi. Qisqa muddatga tuziladigan life-sug'urtalar analizi, Non-life sug'urta polislari bilan deyarli bir xil bo'ladi.

Hayotiy sug'urta uchun risk manbai mijozning o'limi va sug'urta uchun tayinlangan foiz stavkasidan iborat. Mol-mulk sug'urta variantida esa sug'urta to'lovlari momentlari va ularning miqdori risk manbasini tashkil etadi. Mol-mulk sug'urta tizimida ba'zi hollarda to'lov momentlari xos tasodifiy miqdor (sug'urta hodisalari erta yoki kech albatta ro'y beradi), boshqa hollarda esa bu tasodifiy miqdor xosmas bo'lishi mumkin (bu holda sug'urta hodisalari ro'y bermaslik ehtimolligi musbat). Hayot sug'urtasida to'lov miqdori deterministik miqdor (sug'urta summasi – aniq son), faqat qachon to'lash kerakligi noma'lum bo'ladi, xolos. Mol-mulk sug'urtasida esa (Non-life) to'lovlar soni va ularning miqdori tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarga asoslanib, Non-life (mol-mulk) sug'urta tizimini o'rganish bilan chegaralanib qolamiz.

I bob. SUG‘URTA RISK MODELLARI

Bu bobda aktuariylarga yaxshi tanish bo‘lgan sug‘urta kompaniyasining berilgan vaqt davomidagi (kontrakt muddati) natijaviy talofat risklarini umumiy ko‘rinishlari topiladi va ular taqqoslash usullari orqali tahlil etiladi. Bunda yetarli kichik vaqt davr (odatda 1 yil) oralig‘idagi sug‘urta faoliyati o‘rganilib, unga inflatsiya va investitsiyadan kutilgan daromadlar hisobga olinmaydi. Bundan tashqari sug‘urta premiyalari (badallari) shartnoma muddatining boshida to‘plangan deb hisoblanadi. Sug‘urtaning bu modellari qisqa muddatli “hayot sug‘urtasida”, mulk, tibbiy va “fuqoralik mas’uliyat” sug‘urta faoliyatida ko‘p uchraydi.

Chekli muddatdagi sug‘urta kontraktlarida yuzaga keladigan umumiy (natijaviy) talofatlarning taqsimotini o‘rganish va ularni oldindan baholay bilish (prognoz), sug‘urta kompaniyasining aniq qarorlar qabul qilishida, asosan, premiya va rezerv kapital hajmlarini belgilashda muhim rol o‘ynaydi.

1.1. Risk va uni sug‘urtalash imkoniyatlari

Risk (risk-frans.) – aktuar matematikada asosiy tushuncha hisoblanib, unga ta’rif berilmaydi. Ensiklopedik lug‘atlarning ko‘pchiligida bu so‘zga quyidagi talqinlar (interpretatsiyalar) keltirilgan.

1. Sug‘urta faoliyatida: sug‘urta qilinadigan xavf ba’zida sug‘urta to‘lovining hajmi o‘z navbatida o‘lim xavfi bilan, yong‘in va suv toshqinlari natijasida yuzaga keladigan talofatlar va boshqa risk holatlari sug‘urta qilinadi. Sug‘urtalanuvshi shaxs sug‘urta tashkilotiga (kompaniyasiga) sug‘urta qilinadigan risk uchun sug‘urta mukofoti (badali) to‘laydi.

2. Tadbirkorlik faoliyati bilan bog‘liq bo‘lgan tasodifiy zarar miqdori, bozor konyunkturasida ro‘y beradigan narx o‘zgarishi natijasida yuzaga keladigan talofat va boshqalar.

3. Shaxsning psixologik xususiyatlari bilan bog'liq harakatlari: tavakkal qilishlik, boshlangan ishning yaxshi (foydali) natijalar keltirishiga ishonish, omadli bo'lishga umidvorlik. Risk bilan qilingan harakat – o'zini tasodifiy (turg'un bo'lmagan) va xavfli jarayonlarda tekshirib ko'rish, natijalari noaniq bo'lgan faoliyat bilan shug'ullanishdan qo'rqmaslik va boshqalar.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, risk tushunchasi turli xil ma'noda ishlatiladi. Masalan, uni

a) sug'urta obyekti;

b) sug'urta shartnomasiga kiritilmagan mulkning qismi, ya'ni sug'urtalanuvchi shaxs ushun risk bo'lib qoladigan mulk;

d) risk holatlarini ta'rifikatsiyalash masalalarida (ya'ni uni katta, o'rtacha, kichik deb baholashda) muhim bo'lgan xarakteristika;

e) ro'y berishi katta talofatlarga olib keluvchi hodisa deb tushunish mumkin.

"O'z-o'zidan har qanday riskni sug'urta qilish kerakmi?" – degan savol kelib chiqishi tabiiy. Albatta, shart emas, uni (sug'urta qilish) amalga oshirish uchun quyidagi shartlar bajarllishi kerak:

1) faqat kelgusida ro'y beradigan hodisalarni sug'urtalash mumkin. Masalan, yonib bo'lgan uy yoki halokatga uchragan samolyotni sug'urtalab bo'lmaydi;

2) sug'urta qilinadigan hodisa tasodifiy bo'lishi kerak, ya'ni bu hodisaning ro'y berishi yoki bermasligini oldindan bilib bo'lmaydi (masalan, avtomobil o'g'irlash, piyoda kishini mashina urib ketishi, shaxsning kasal bo'lib qolishi hodisalari va boshqalar) yoki bo'lmasam, hodisaning ro'y berishi muqarrar, lekin uning qachon ro'y berishi ma'lum emas (sug'urtalangan shaxsning o'limi).

3) hodisaning ro'y berishi sug'urta shaxsining xohishiga butunlay bog'liq bo'lmasligi kerak. Shu sababli sug'urta kompaniyalari maxsus ekspertlar yordamida ro'y bergan sug'urta hodisasining maxsus tashkil qilinganligini tekshirish imkoniga ega bo'ladilar (masalan, firma binosida ro'y bergan yong'in o't qo'yib yuborish natijasi emasligini, qotillik natijasida ro'y bergan o'limni suiqasd oqibati bo'lmaganligini).

Sug'urta turlari

Sug'urta obyekti (manbayi) tasodifiy risk ekanligini hisobga olgan holda hamma sug'urtalash faoliyatini ikki xil turga bo'lish mumkin: hayot sug'urtasi, hayot bilan bog'liq bo'lmagan sug'urta va ularning ingliz tilida mos ravishda – *Life Insuranse* va *Non-life Insuranse* deb atashadi.

Hayot sug'urtasi matematikasi ma'lum ma'noda sodda hisoblanadi, chunki undagi risk tasodifiyligi o'lim voqeasining ro'y berish momentlarida mujassamlangan bo'ladi. Shu munosabat bilan qayd etish mumkinki, ehtimollik nazariyasining asosiy tushunchalari bo'lgan hodisaning ehtimolligi, tasodifiy miqdorlarning o'rta qiymatlari bilan tanish bo'lishlik hayot sug'urtasi matematikasining ko'p masalalarini yechish uchun yetarli bo'ladi.

Aksincha, hayot bilan bog'liq bo'lmagan (Non-life Insuranse) sug'urta matematikasida qo'llaniladigan metodlar ancha jiddiy xarakterda bo'llb, ular variatsion hisob, optimal boshqarish, ehtimolliklar nazariyasining limit teoremalari, stoxastik ekstremal muammolar bilan tanish bo'lishni taqozo qiladi. Bu turdagi sug'urtalar har xil ko'rinishda bo'lib, mol-mulklardan tashqari gumanitar xarakterdagi fuqarolarni yuridik, meditsina sohalarida risklardan ham himoyalash mas'uliyatini oladi. Masalan, iqtisodda ular stabillik (turg'unlik) holatini yuzaga keltirishga xizmat qiladi.

Non-life tipidagi sug'urtalarning murakkabligi unda sug'urta manbayi bo'lgan risklarni yuzaga kelishi momentlari ham, ular uchun to'lov ham tasodifiy miqdorlar bo'lishi bilan bog'liqdir.

Matematika nuqtayi nazaridan sug'urta manbayi – risk hodisalarining ro'y berishi momentlari hayot-Life sug'urtalash ushun xos tasodifiy miqdorlar bo'ladi (chunki risk hodisasi (o'lim) ertami yoki kechmi albatta ro'y beradi). Non-life sug'urtalar ushun esa bu tasodifiy miqdorlar xosmas bo'ladi (chunki risk hodisasi ro'y bermasligi ham mumkin). Bundan tashqari, Life Insuranse turkumida ro'y bergan risk hodisasining oqibatida ko'rilgan zarar uchun to'lov (sug'urta to'lovi) tasodifiy bo'lmasdan aniq bir (determinilashtirilgan) summa bo'ladi. Aksincha, Non-life Insuranse sug'urtasi ushun esa sug'urta to'lovlari soni va hajmi tasodifiy miqdorlar bo'ladi, chunki bu sug'urtalar uchun risk hodisalarining ro'y berishlari sonini va bo'ladigan zarar miqdorini oldindan aytib bo'lmaydi.

Aytib o'tilganlardan tashqari bu ikki sug'urta turi bir-biridan faoliyat olib borish prinsiplari bilan tubdan farq qiladi: Life Insuranse holida – bu kapitallashtirish yoki boshqacha aytganda jamlash prinsipi, Non-life Insuranse holida esa taqsimlash prinsiplari ustuvor hisoblanadi. Birinchi holda berilgan kontrakt bo'yicha olingan sug'urta badallari (mukofotlar) risk hodisasining ro'y berganiga qadar sug'urta to'lovini amalga oshirish uchun yig'ilib boriladi. Ikkinchi holda esa (Non-life) birovdan olingan sug'urta badallari, risk hodisasi ro'y berganda boshqa mijozlarga sug'urta to'lovlari sifatida tarqatilishi (taqsimlanishi) mumkin, ya'ni boshqacha aytganda, yig'ilgan sug'urta badallari qayta taqsimlanadi. Qayd qilib o'tilgan prinsiplar bu ikki turdagi sug'urtalar faoliyatini qonunlashtirish turlicha bo'lishiga sabab bo'ladi. Ko'pgina mamlakatlarda, masalan, Fransiyada, bitta kompaniya bir vaqtda Life va Non-life sug'urtalari bilan shug'ullanishi mumkin emas (taqiq etilgan), chunki aks holda hayot sug'urtasi mijozlari manfaatlari suiiste'mol qilinib, ularning sug'urta badali pullari, mol-mulk sug'urtasi bo'yicha zaruriy to'lovlarni qoplash uchun sarf etilib yuborilgan bo'lar edi.

Keltirilgan sug'urta turlari o'zlarining risk manbalari bilan ham tubdan farqli bo'ladi. Life sug'urtasi risk manbayi – bu mijoz o'limi va ustama to'lov (protsennaya stavka), Non-life sug'urtasi uchun esa risk manbayi – bu zaruriy bo'lgan sug'urta to'lovlari yoki boshqacha aytganda, tuzilgan shartnomalar bo'yicha talab etilgan to'lovlar jarayoni (claims prosess).

Sug'urta faoliyatining asosiy prinsiplari

Yuqorida keltirilgan fikrlar asosida sug'urta faoliyatining asosiy prinsiplarini bayon qilish mumkin.

1. Sug'urta kompaniyasi (sug'urta qiluvchi) mumkin qadar ko'proq kontraktlarga (shartnomalarga) ega bo'lishi kerak. Biz quyida bu tezisni ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikada

juda muhim bo'lgan katta sonlar qonuni orqali asoslashga harakat qilamiz.

Eslatib o'tamizki, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ uchun quyidagicha ifodalanadi: agar $EX_1 = EX_2 = ... = EX$ o'rta qiymat mavjud bo'lsa, u holda

$$P\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \to EX\right) = 1,$$

ya'ni $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ tasodifiy miqdorlarning o'rta qiymati $n \to \infty$ da EX ga bir ehtimollik bilan yaqinlashadi. Bunda n qanchalik katta bo'lsa, katta sonlar qonunidagi yaqinlashish shuncha tez bo'ladi.

Sug'urta qiluvchi shaxs (kompaniya) nuqtayi nazaridan EX toza yoki netto-mukofot (inglizsha netto premium) sifatida qabul qilinishi mumkin. Shu bilan bir qatorda yuklamali mukofot (yoki $EX + \varepsilon$) brutto-mukofot (inglizcha prime brutte) deb ataladi.

E'tibor qilish kerak bo'ladiki, sug'urta kompaniyasining portfeli (tuzilgan kontraktlar soni) doim kamayib boradi – kontrakt muddatlari tugab boradi, ba'zi kontraktlar muddatdan oldin bekor qilinadi, ba'zi kontraktlar uchun asos bo'lgan risklarga nisbatan yo'qolish trendi paydo bo'ladi va hokazo.

Aytib o'tilgan mulohazalardan kelib chiqadiki, sug'urta kompaniyasi "qayta ishlab chiqarish", ya'ni yangi kontraktlar tuzish bilan doimo shug'ullanishi kerak bo'ladi. Shu bilan bir qatorda eslatib o'tamizki, sug'urta kompaniyasining faoliyati boshqa ixtiyoriy ishlab chiqarish korxonasi ish uslubidan keskin farq qiladi, chunki uning ushun "inversion ishlab shiqarish sikli" xarakterli hisoblanadi. Bu degani sug'urta kompaniyasi faoliyatida "mahsulot" uchun to'lov (mukofot), mahsulot ishlab chiqarishdan oldin olinadi (risk hodisasi ro'y berganga qadar). Odatda esa "mahsulot" oldin ishlab chiqiladi va unga baho beriladi, so'ngra esa sotiladi.

2. Risklarni kompensatsiyalash (qoplash) ushun sug'urta portfeli bir jinsli, ya'ni risklarni ro'y berish ehtimolliklari bir xil va

ular yetkazadigan zarar har xil bo'lishi kerak. Demak, sug'urta kompaniyasi risklarni tanlab olishi (seleksiya o'tkazishi) kerak.

- Aytib o'tilgan tanlov asosida kompaniya ro'y berishi deyarli muqarrar bo'lgan risklarni sug'urta qilishdan voz kechish kerak (masalan, uy egasi ogohlantirish tizimini tuzmasdan oldin uyni o'g'irlanishi risk bo'yicha sug'urta etilmaydi). Life sug'urta o'tkazishdan oldin mijozni tibbiy ko'rikdan o'tkazish zarur bo'ladi, aks holda kompaniya tez orada katta sug'urta to'loviga uchrashiga to'g'ri keladi.
- Ixtiyoriy risk ma'lum belgilarga asoslanib tuzilgan ta'rifikatsiyalash guruhlariga kiradi (masalan, yog'ochdan va g'ishtdan qurilgan uylar turli guruhlarga tegishli bo'ladi. Bunda yog'och uylar yong'indan sug'urtalash, g'ishtli uylarga nisbatan ancha qimmat bo'lishi kerak. Xuddi shuningdek, qon bosimi yuqori bo'lgan shaxslarning sug'urtasi, sog'lom odamlar sug'urtasidan qimmat qilib tayinlanishi tabiiy).

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, 1- va 2-prinsiplar sug'urta kompaniyasining portfeliga qarama-qarshi talablar qo'yiladi.

3. Shartnomalar shunday tuzilishi kerakki, hamma risklar bir vaqtda ro'y berishi kuzatilmasin. Aks holda kichik hajmdagi to'lovlarni qoplash muammolari ham yuzaga kelishi mumkin (masalan, bir regiondagi hamma xo'jaliklarni do'ldan sug'urta qilish maqsadga muvofiq emas).

4. Haddan tashqari katta risklarni sug'urta qilish kerak emas, chunki bitta sug'urta hodisasi ro'y berganda ham, to'plangan sug'urta badallarining hammasini sarflab yuborish zaruriyati yuzaga kelishi mumkin (masalan, juda baland ko'p qavvatli uylarni sug'urtalashga harakat qilish kerak emas).

Shunday qilib, 3 va 4-prinsiplar sug'urta portfelini oshirishni cheklab qo'yadi. Lekin amalda sug'urta kompaniyalari katta riskli shartnomalarni boshqa kompaniyalar bilan sheriklik asosida tuzishga harakat qilishi mumkin.

1.2. Individual risk modeli

Sug'urta faoliyatining asosiy qismi bo'lgan moliyaviy risklarni tahlil qilish, sug'urtaning individual risk modelini o'rganishdan boshlanadi. Lekin keyingi o'n yilliklar davomida bu risk variantining yangidan-yangi modifikatsiyalari yuzaga keldi va ular haqida quyidagi punktlarda so'z boradi.

1.2.1. Klassik variant

Faraz qilamizki, sug'urta kompaniyasining portfelida n ta kontrakt (shartnoma) bo'lib, uning har biridan sug'urta hodisalari ro'y berganda to'lov talabi tushishi mumkin bo'lsin. Bunda kontraktlar (risklar) o'zaro bog'liqsiz bo'lib, ularning bir xil bo'lishi shart bo'lmasin. Agar $V_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ $i-$nchi kontrakt bo'yicha to'lanishi kerak bo'lgan mablag' miqdori bo'lsa, ularni o'zaro bog'liqsiz manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorlar (umuman, turli xilda taqsimlangan) deb tushunish mumkin. Hodisa $\{V_i=0\}$ ning ro'y berishi, $i-$nchi kontrakt bo'yicha sug'urta birligi davomida hech qanday to'lov talabi tushmaganligini bildiradi.

Hodisa $\{V_i>0\}$ ning indikatorini I_i orqali belgilaylik $\left(I_i=I_{V_i>0}(\omega)\right)$. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$q_i=P\left(V_i>0\right),\ F_i(x)=P\left(V_i\le x\right),$$
$$G_i(x)=q_i^{-1}\left[F_i(x)-\left(1-q_i\right)\right],\ x\ge 0,\ i=\overline{1,n}.$$

Endi o'zaro bog'liqsiz va G_i taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar u_i larni ko'ramiz va ularni I_i lardan bog'liqsiz deb hisoblaymiz. Aytilganlardan kelib chiqadiki,

$$P\left(u_i=0\right)=0,\ V_i\overset{d}{=}I_i u_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Boshqacha aytganda, u_i – bu $i-$nchi kontrakt bo'yicha umumiy to'lovlar miqdori (bunda hech bo'lmaganda, $i-$nchi kontrakt bo'yicha bitta to'lov talabi bor deb hisoblanadi).

Agar sug'urta davomida har bir kontrakt bo'yicha bittadan to'lov talabi tushadi deb hisoblansa,

$$N^*=\sum_{i=1}^{n} I_i$$

yig'indi tushgan to'lov talablari soni bo'ladi. Bu holat "hayot sug'urtasida" xarakterli bo'ladi. Haqiqatan ham, agar q_j deb, $j-$

nchi sug'urtalangan shaxsning o'lim ehtimolligini belgilasak, unga mos keluvchi sug'urta to'lovi b_j bo'lsa, tasodifiy miqdor V_i quyidagi

$$P(V_j = b_j) = q_j,\ P(V_j = 0) = 1 - q_j$$

ehtimolliklar bilan faqat ikkita qiymatlar qabul qiladi.

Sug'urta portfelidagi hamma n ta kontraktlar bo'yicha yig'indi talofat miqdori individual model uchun

$$S_n^{ind} = \sum_{i=1}^{n} V_i,$$

ya'ni har bir ayrim to'lovlar yig'indisiga teng bo'ladi.

Tasodifiy miqdorlar $\{V_1, ..., V_n\}$ o'zaro bog'liqsiz deb hisoblangani uchun

$$ES_n^{ind} = \sum_{i=1}^{n} EV_i,\ DS_n^{ind} = \sum_{i=1}^{n} DV_i,$$

taqsimot funksiya

$$F_n^{ind}(x) = P\left(S_n^{ind} \le x\right) = \prod_{j=1}^{n} F_j = F_1 * ... * F_n$$

formula bilan topiladi.

Umuman, manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorlar taqsimotlarini tahlil etishda,

$$L_X(u) = Ee^{-ux},\ u \ge 0$$

Laplas almashtirishidan foydalanish qulay bo'ladi. Bunda bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining Laplas almashtirishi

$$L_{S_n^{ind}}(u) = \prod_{i=1}^{n} L_{V_i}(u). \tag{1}$$

Quyidagi tenglik

$$L_{V_j}(x) = 1 - q_j + q_j L_{u_j}(u)$$

o'rinli bo'lishini hisobga olsak, (1) tenglikni

$$L_{S_n^{ind}}(u) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - q_j + q_j L_{u_j}(u)\right) \tag{2}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(2) formulada differensiallash amalini bajarib, S_n^{ind} tasodifiy miqdorning hamma tartibdagi momentlarini hisoblash mumkin bo'ladi. Haqiqatan ham, manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorning $\left(P(X \geq 0)=1\right)$ Laplas almashtirishi

$$L_X(u)=Ee^{-uX}=\int_0^{\infty} e^{-ux} dF_X(x),\ u \geq 0$$

bo'lib, undan $EX^k<\infty$ bo'lganda

$$L_X^{(k)}(u)=(-1)^k \int_0^{\infty} x^k e^{-ux} dF_X(x),\ k \geq 1$$

formula kelib chiqadi. Demak, oxirgidan

$$EX^k=(-1)^k L_X^{(k)}(0)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Aytib o'tilganlarni Gamma-taqsimot misolida namoyish qilib o'tamiz. Eslatib o'tamizki, tasodifiy miqdor X parametrlari $\lambda>0$ va $\alpha>0$ bo'lgan Gamma-taqsimotga ega deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},\ x>0 \qquad (3)$$

formula bilan aniqlansa. Bu yerda

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,\ \alpha>0$$

Eylerning klassik Gamma-funksiyasi. Eslatib o'tamizki,

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

tenglik o'rinli bo'lib, undan α ning butun qiymatlari uchun sodda

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$$

formula kelib chiqadi. Har qanday $x \geq 0$ bo'lganda $p(x) \geq 0$ bo'lgani uchun

$$\int_0^{\infty} p(x) dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\alpha x)^{-1} e^{-\lambda x} d(\lambda x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du=1.$$

Demak, (3) formula bilan aniqlangan $p(x)$ funksiyani qandaydir manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deb qabul qilish mumkin ekan.

Umumiy holda X ning taqsimot funksiyasi $F_X(x)=F_\alpha(x)$ ni elementar funksiyalar orqali ifoda etib bo'lmaydi. Shuning uchun ham taqsimot funksiyasi

$$F_\alpha(x)=\int_0^x p(u)du$$

maxsus funksiyalar sinfiga tegishli bo'ladi. Lekin parametr α butun son bo'lganda, $F_\alpha(x)$ funksiya oson hisoblanishi mumkin (bu holda $F_\alpha(x)$ maxsus funksiya bo'lmaydi). Haqiqatan ham, bu holda bo'laklab integrallash formulasini qo'llab quyidagi rekurrent tengliklarga ega bo'lamiz:

$$F_\alpha(x)=\int_0^x \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1}e^{-\lambda u}du=-\int_0^x \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1}de^{-\lambda u}=$$

$$=-\frac{\lambda^{\alpha-1}u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda u}\Big|_0^x+\int_0^x \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda u}du^{\alpha-1}=$$

$$=-\frac{\lambda^{\alpha-1}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}+\int_0^x \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}e^{-\lambda u}u^{\alpha-2}du=$$

$$=F_{\alpha-1}(x)-\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}=F_{\alpha-1}(x)-\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{-\lambda x}.$$

Demak, biz butun $\alpha>0$ uchun

$$F_\alpha(x)=F_{\alpha-1}(x)-\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{-\lambda x}$$

rekurrent formulani hosil qilamiz va undan $F_1(x)=1-e^{-\lambda x}$ bo'lishini hisobga olib

$$F_\alpha(x)=1-e^{-\lambda x}\left(1+\lambda x+\frac{(\lambda x)^2}{2}+\ldots+\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right)$$

aniq ko'rinishdagi taqsimotga kelamiz.

Taqsimot $F_\alpha(x)$ ning o'rta qiymati

$$EX = \int_0^\infty xp(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^\alpha x^\alpha e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}x^\alpha d\left(e^{-\lambda x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}x^\alpha e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Shunga o'xshash ravishda

$$\sigma_X^2 = DX = VarX = \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{4}$$

tenglikni isbotlaymiz va undan o'rta kvadratik og'ish

$$\sigma_X = \sqrt{VarX} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda},$$

variatsiya koeffitsiyenti

$$CV(X) = \frac{\sigma_X}{EX} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Parametr α ning qiymatiga bog'liq holda variatsiya koeffitsiyenti $(0,\infty)$ oraliqda ixtiyoriy o'zgarishga ega bo'lishi mumkin.

Gamma taqsimotning o'rta qiymati va dispersiyasi X tasodifiy miqdorning Laplas almashtirishi yordamida ham hisoblanishi mumkin:

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}p(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(s+\lambda)x}dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du\cdot\frac{1}{(s+\lambda)^\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{(s+\lambda)}\right)^\lambda = \left(1-\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Endi

$$EX = -\psi'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha-1}\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$EX^2 = -\psi''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\cdot\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha-2}\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},$$

$$DX = VarX = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Izoh berib o'tamizki, Gamma-taqsimot sug'urta to'lovlari ma'lum bir qiymat atrofida gruppalashib, katta bo'lmagan to'lovlar kichik ehtimolliklarga ega bo'lgan holatlarni yaxshi modellashtiradi.

Umuman, Aktuar matematikada Gamma-taqsimot muhim rol o'ynaydi, chunki u bir qator o'zaro bog'liq bo'lmagan masalalarda yuzaga keladi. Masalan,

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz bo'lib, o'rta qiymati 0, dispersiyasi 1 bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsin. Matematik statistikada, bu tasodifiy miqdorlarni kvadratlari yig'indisidan tashkil topgan $\chi^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$ statistika, nazariy va amally tadqiqotlarda juda ko'p qo'llaniladi. Tasodifiy miqdor χ^2 ham parametrlari $\alpha = \frac{n}{2}$, $\lambda = 0{,}5$ bo'lgan $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 0{,}5\right)$ – taqsimotga ega bo'ladi.

Individual risk modelida i–nchi kontraktlar bo'yicha to'lovlarni belgilaydigan tasodifiy miqdor V_i lar o'zaro bog'liqsiz bo'lib, $\Gamma(\alpha_i, \lambda)$–taqsimotga ega bo'lsin, ya'ni zichlik funksiyasi

$$P_{V_i}(x) = \frac{\lambda^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Yuqoridagi (1) va (2) formulalardan foydalanib, sug'urta portfelidagi hamma n ta kontratlar bo'yicha yig'indi talofat S_n^{ind} ning taqsimoti $\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \lambda\right)$ bo'lishligini isbot etish mumkin.

1.2. Markaziy limit teorema va uning S_n^{ind} yig'indi taqsimotiga tatbiqlari

Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaning ko'p masalalari va ularning amaliyotdagi tatbiqlari tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotini tahlil etish bilan bog'liq bo'ladi. O'z navbatida, bu masalalarni yechish jarayonlari hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining juda muhim bo'lgan "Tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasi" bo'limini tashkil qiladi. Biz bu sohaga tegishli va yig'indi risk S_n^{ind} taqsimotini approksimatsiyalashda tatbiq etiladigan natijalardan bir nechtasini keltiramiz.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$X_1, X_2, ..., X_n, ...$

uchun markaziy limit teorema o'rinli deyiladi, agar shunday $\{A_n\}, \{B_n, B_n > 0\}$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lib,

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right) - \Phi(x) \right| \to 0, \quad n \to \infty$$

limit munosabatlar o'rinli bo'lsa. Bu yerda

$$S_n = X_1 + ... + X_n, \; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du .$$

Ko'p hollarda bu ketma-ketliklar $A_n = ES_n$, $B_n^2 = DS_n$ tengliklar orqali aniqlanadi.

Markaziy limit teoremaning umumiy xarakterdagi va amaliyotda ko'p qo'llaniladigan variantlaridan biri quyidagicha Lindeberg teoremasi hisoblanadi.

Teorema 1. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi,

$$X_1, X_2, ..., X_n, ... \tag{1}$$

o'zaro bog'liqsiz bo'lib, $\sigma_i^2 = DX_i < \infty$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ shartlar bajarilsin. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \to \infty$ da

$$L_n(\varepsilon) = B_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x - EX_i| > \varepsilon B_n} (x - EX_i)^2 dF_{X_i}(x) \to 0 \tag{2}$$

limit munosabatlar bajarilsa, u holda (1) ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi. Bu yerda

$$B_n^2 = D(X_1 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 .$$

Teorema 1dagi (2) shart $L_n(\varepsilon)\to 0, \forall\varepsilon>0, n\to\infty$ Lindeberg sharti deyiladi.

Eslatib o'tamizki, $\{X_n, n\geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi cheksiz kichiklik shartini qanoatlantiradi, deyiladi, agar har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq n} P\left(|X_j|\geq \varepsilon B_n\right)=0.$$

Klassik Chebishev tengsizligidan oson ko'rinadiki, $\sigma_i<\infty$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ bo'lgan holda bu cheksiz kichiklik shartini

$$\frac{1}{B_n^2}\max_{1\leq i\leq n}\sigma_i^2\to 0 \qquad (3)$$

ko'rinishida ifoda etish mumkin.

Teorema 2. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema (CLT) o'rinli bo'lishi va (3) cheksiz kichiklik sharti bajarilishi uchun, (2) Lindeberg sharti bajarilishi zarur va yetarli bo'ladi.

Teorema 2 ehtimolliklar nazariyasida Lindeberg-Feller teoremasi deb ataladi, uni quyidagi qisqa logik sxema,

$$(CLT)\ \&\ (3)\Leftrightarrow(2) \qquad (4)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Markaziy limit teorema uchun juda muhim bo'lgan (2) Lindeberg shartining amalda bajarilishini tekshirish oson masala bo'lmaydi. Shuning uchun ham CLT o'rinli bo'lishini tekshirish osonroq bo'ladigan yetarli (lekin zaruriy bo'lmagan) shartlarni topish diqqatga sazovor bo'ladigan masalalar qatoriga kiradi. Quyida biz aytib o'tilgan fikrlarni tasdiqlaydigan A.Lyapunov teoremasini keltiramiz. Oldin quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\gamma_i=E|X_i|^3,\ i=1,2,\dots,n,\quad L_n=L_{n3}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}{B_n^3}.$$

Ifoda L_{n_3} ehtimolliklar nazariyasida "Lyapunov kasri" nomi bilan yaxshi ma'lum.

Teorema 3 (A.Lyapunov). Agar $n\to\infty$da

$$L_n\to 0 \qquad (5)$$

limit munosabat o'rinli bo'lsa, $\{X_n, n\geq 1\}$ ketma-ketlik uchun CLT bajariladi.

Teorema 3ning isboti oson va uni quyidagi satrlarda keltiramiz. Buning uchun esa (5) shart bajarilganda, teorema 2ning o'rinli bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi (bu yerda izoh berib o'tish joizki, L_n belgilash kiritilganda hamma X_i tasodifiy miqdorlarni o'rta qiymatlari $EX_i=0$ deb hisoblangan va bu faraz umumiylikni chegaralamaydi). Haqiqatan ham, teorema 2dagi

$$L_n(\varepsilon)=B_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon B_n} x^2 dF_{X_i}(x)\le\varepsilon^{-1}B_n^{-3}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon B_n}|x|^3 dF_{X_i}(x)=$$

$$=\varepsilon^{-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}{B_n^3}=\varepsilon^{-1}L_n.$$

Demak, (5) shart bajarilganda har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$L_n(\varepsilon)\to 0,\ n\to\infty.$$

Isbot etilgan markaziy limit teoremaning (CLT) konkret tatbiqlarida qoldiq had

$$\rho(F_n,\Phi)=\sup_x\left|P\left(\frac{S_n}{B_n}<x\right)-\Phi(x)\right|$$

ifodaning nolga intilish tartibi muhim rol o'ynaydi va $\rho(F_n,\Phi)$ning 0ga yaqinlashish tezligi, (4) munosabatga asosan, "Lyapunov kasri" L_n bilan xarakterlanadi.

Hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida CLTdagi qoldiq had $\rho(F_n,\Phi)$ning baholariga tegishli muammolar mashhur Berri-Esseen teoremasida hal etilgan.

Teorema 4 (Berri Esseen). Har qanday $n\ge 1$ uchun

$$\rho(F_n,\Phi)\le cL_n \tag{6}$$

bu yerda c-absolyut son va qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlar X_i larni taqsimotlariga bog'liq bo'lmaydi.

Teorema 4dagi (6) tengsizlik Berri-Esseen nomi bilan ataladi va uni bir xil taqsimlangan X_i $(i=\overline{1,n})$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$\rho(F_n,\Phi)\le c_0\frac{\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \tag{7}$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda $n\ge 1$, c_0-absolyut son, $\sigma^2=EX^2$, $\beta_3=E|X|^3$.

Berri-Esseenning (6),(7) tengsizliklaridan kelib chiqadiki, ularni konkret masalalarni yechishda qo'llash uchun absolyut son

c_0 uchun aniq va universal baholarga ega bo'lish kerak. Bu sonning eng minimal (kichik) qiymatini topish masalasiga o'z paytida A.N.Kolmogorov (1903-1987) ham katta e'tibor bergan. 1953-yilda u konstanta $c_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bo'lishi kerak degan gipotezani ilgari surgan. Bu gipoteza asosli, chunki binomial taqsimot uchun klassik Muavr-Laplas teoremasiga asosan $c_0\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ baho o'rinli.

Lekin A.N.Kolmogorovning $c_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ tenglik o'rinliligi haqidagi gipotezasi oxirigacha aniq bo'lib chiqmadi. 1956-yilda K.F.Esseen bu gipotezadan farqli bo'lgan masalani yechish jarayonida (7) tengsizlikdagi o'zgarmas c_0

$$C_E=\frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+0.0107...=0.4097...$$

sondan kichik bo'la olmasligini isbotladi.

Berri-Esseenning (7) tengsizligiga asoslangan holda o'zgarmas son 1)

$$C_*=\sup_F\limsup_{n\to\infty}\rho(F_n,\Phi)\frac{\sigma^3}{\beta_3}$$

CLTdagi asimptotik to'g'ri konstanta deb hisoblanishi mumkin, chunki u

$$\rho(F_n,\Phi)\leq C_*\frac{\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n\to\infty$$

asimptotik munosabatni ta'min etuvchi eng kichik musbat son bo'ladi. K.G.Esseen $C_*=C_E$ tenglik to'g'ri bo'lishini isbotladi. Konstanta C_* ning ta'rifidagi supremum ikki qiymatli Bernulli taqsimotlar sinfida erishiladi.

Aytib o'tilganlardan asimptotik to'g'ri konstanta C_* Berri-Esseen tengsizlikdagi c_0 uchun quyi chegara bo'lar ekan ($c_0\geq C_*=C_E$).

1) Bu yerda supremum

$$\{F;\ \int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)=0,\ \sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}xdF,\ \beta_3=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF<\infty\}$$

F taqsimotlar sinfi bo'yicha hisoblanadi.

Berry-Esseen tengsizligidagi yaqinlashish tezligi $1/\sqrt{n}$ tartib optimal ekanligi klassik Muavr-Laplas teoremasidan kelib chiqadi.

Umumiy holda bu fakt quyidagi Esseen teoremasida ham o‘z tasdig‘ini topadi.

Teorema 5. O‘zaro bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$EX_1 = 0,\ EX_1^2 = \sigma^2,\ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF(x) < \infty$$

bo‘lib, taqsimot $F(x) = P(X_1 < x)$ “panjarasimon” bo‘lmasin. U holda

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi}\sigma^3\sqrt{n}}(1-x^2)e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

bu yerda $\alpha_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dF(x)$.

Eslatib o‘tamizki, X tasodifiy miqdor “panjarasimon bo‘lmagan” deyiladi, agar uning qiymatlarini biror arifmetik progressiya

$$A_h = \{a + kh,\ a \in R,\ h > 0,\ k = ... -1, 0, 1, ...\}$$

ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lmasa. Demak, $F(x)$ taqsimot “panjarasimon bo‘lmagan” deyiladi, agar unga mos keluvchi ehtimollik taqsimoti $P_F(\cdot)$ uchun $P_F(A_h) = 1$ tenglik o‘rinli bo‘lmasa $(P_F(A_h) < 1)$. Markaziy limit teoremaga tegishli bo‘lgan teorema 1-5lar [14] kitobda to‘la isbotlari bilan keltirilgan.

Izoh. Monografiya [1] mualliflarining guvohliklari bo‘yicha Berri-Esseen teoremasidagi $c_0 < 0.5152$ baho 2006-2011-yillar davomida isbot etilgan. Demak, c_0 konstantaning aniqlik tartibi 0.1 ga teng (c_0 uchun quyi chegara C_E ni yuqori chegaradan farqi 0.1).

Endi CLTga oid keltirilgan teoremalar sug‘urta individual risk modelidagi yig‘indi risk S_n^{ind} ning taqsimotini approksimatsiyalash masalalari tatbiqlariga o‘tamiz. Eslatib o‘tamizki,

$$S_n^{ind} = \sum_{i=1}^{n} V_i \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} I_i U_i .$$

Faraz qilamiz,

$$V_1, V_2, ..., V_n, ... \tag{8}$$

bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun $EV_i, DV_i\ (i=\overline{1,n})$lar mavjud bo‘lib, (8) ketma-ketlik Lindeberg shartini qanoatlantiradi, ya’ni $n \to \infty$ da

$$B_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x-EV_i|\ge\varepsilon B_n}(x-EX_i)^2\,dF_{V_i}(x)\to 0$$

bu yerda $B_n^2=\sum_{i=1} DV_i$. U holda teorema 1ga asosan, $n\to\infty$ da

$$P\left(\frac{S_n^{ind}-\sum_{i=1}^{n}EV_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}DV_i}}<x\right)\to \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Demak, bu holda $F_n^{ind}(x)=P(S_n^{ind}<x)$ taqsimot uchun

$$F_n^{ind}(x)\approx\Phi\left(\frac{x-\sum_{i=1}^{n}EV_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}DV_i}}\right)$$

normal approksimatsiya (yaqinlashishi) qo‘llanilishi mumkin.

Agar (8) ketma-ketlikdagi tasodifiy miqdorlar uchun $\gamma_i=E|V_i|^3$ momentlar mavjud bo‘lsa, $n\to\infty$ da

$$\sup_x\left|F_n^{ind}(x)-\Phi\left(\frac{x-\sum_{i=1}^{n}EV_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}DV_i}}\right)\right|=O(L_n).$$

Bu natija teorema 3dan kelib chiqadi.

Endi

$$\Phi_n(x)=\Phi(x)+\frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi}\sigma^3\sqrt{n}}(1-x^2)e^{-x^2/2}$$

belgilashni kiritamiz. Bu yerda

$$\alpha_3=EV_1^3,\ \sigma^2=DV_1.$$

Agar (8) ketma-ketlikdagi tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lib, ularning umumiy taqsimoti

$$F_{V_1}(x)=P(V_1<x)=F(x)$$

“panjarasimon” bo‘lmasin. Bundan tashqari,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF(x)<\infty$$

moment mavjud bo‘lsa, u holda $n\to\infty$ da

$$\sup_x \left| F_n^{ind}(x) - \Phi\left(\frac{x - nEV_1}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (9)$$

Keltirilgan oxirgi limit munosabat teorema 5 ning xulosasi bo'ladi. Agar (8) ketma-ketlikdagi tasodifiy miqdorlarning umumiy taqsimoti $F(x)$ "panjarasimon" bo'lsa, approksimatsiya funksiyasi $\Phi_n(x)$ ni ko'rinishida "panjara xarakteristikasi h ga" bog'liq bo'lgan qo'shimcha had yuzaga keladi va (9) limit munosabat o'rinli bo'lib qolaveradi.

1.3. Risk holatlarining miqdoriy xarakteristikalari

1.3.1. Individual risk taqsimoti

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdor (risk) sug'urta hodisasi ro'y berganda, sug'urta kompaniyasining shartnoma asosida to'laydigan to'lov miqdorini (hajmini) ifoda qilsin. Odatda X tasodifiy miqdor uzluksiz taqsimotga ega deb hisoblanadi. Haqiqatan ham, meditsina sug'urtasida (shaxsning davolanish bilan bog'liq xarajatlar), mol-mulk sug'urtasida (sug'urtalangan shaxsning mol-mulkiga yetkazilgan zararni qoplash) fuqarolik mas'uliyati sug'urtasida (boshqa bir shaxs tomonidan yetkazilgan zarar, yuridik va sud jarayonlari bilan bog'liq xarajatlar) tasodifiy miqdor X ning qiymati sifatida $[0,\infty)$ oraliqdagi ixtiyoriy sonni olish mumkin. Ayniqsa, sug'urta badalini bir valutadan boshqasiga o'tkazishdagi hisob-kitob jarayonlarida tasodifiy miqdor X ning taqsimotini uzluksiz deb hisoblash kerakligi ayon bo'lib qoladi.

Quyida biz sug'urta holatlarida ko'p uchraydigan va o'ziga xos ma'noda standart variantdagi bir qator uzluksiz taqsimotlarni keltiramiz va ulardan murakkab bo'lgan taqsimotlarni paydo qilishning bir nechta usullarini keltiramiz (musbat songa ko'paytirish, ya'ni masshtab almashtirishi, darajaga ko'tarish, eksponenta olish, parametr bo'yicha o'rtalashtirish "qorishma" taqsimotlar va boshqalar).

Tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasini va zichlik funksiyasini mos ravishda $F_X(\cdot)$ va $f_X(\cdot)$ deb belgilaylik. Quyida keltirilgan normal taqsimotdan boshqa hamma taqsimotlar uchun $X>0$, ya'ni $F_X(0)=0$ deb hisoblaymiz va belgilashlarni soddalashtirish uchun indeksdagi X belgisini tushirib qoldiramiz.

1) To'la bo'lmagan gamma-taqsimot

$$G(\alpha,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x u^{\alpha-1}e^{-u}du,\ \alpha>0,x>0$$

bu yerda

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du.$$

Agar $\alpha=n$ butun musbat son bo'lsa, $(n\in\{1,2,...\})$,

$$G(n,x)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}e^{-x}. \qquad (1)$$

Oxirgi tenglik (1)ni induksiya metodidan foydalanib isbot etamiz. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$G(n,x)=1-\frac{1}{\Gamma(n)}\int_x^\infty u^{n-1}e^{-u}du=1-\bar{G}(n,x).$$

O'z-o'zidan ko'rinadiki, $x>0$ bo'lganda

$$\bar{G}(1,x)=\int_x^\infty e^{-u}du=e^{-x}.$$

Demak, $n=1$ bo'lganda (1) formula o'rinli ekan. Endi faraz qilamiz, $n=N$ bo'lganda

$$\bar{G}(n,x)=\frac{1}{\Gamma(N)}\int_x^\infty u^{N-1}e^{-u}du=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$$

o'rinli bo'lsin. Bu holda bo'laklab integrallash yordamida $n=N+1$ uchun

$$\bar{G}(N+1,x)=\frac{x^Ne^{-x}}{\Gamma(N+1)}+\frac{N}{\Gamma(N+1)}\int_x^\infty u^{N-1}e^{-u}du=$$

$$=\frac{x^N}{N!}e^{-x}+\frac{1}{\Gamma(N_1)}\int_x^\infty u^{N-1}e^{-u}du=\frac{x^N}{N!}e^{-x}+\bar{G}(N,x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!}e^{-x} \qquad (2)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu yerda Eyler integrali $\Gamma(\alpha)$ uchun

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha),\quad \alpha>0$$

formuladan foydalanildi. Natijada (2) tenglikdan (1) formulaning to‘g‘ri ekanligini hosil qilamiz.

1) To‘la bo‘lmagan beta-funksiya

$$B(\alpha,\beta,x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ 0<x<1.$$

2) Standart normal taqsimot

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du,\quad -\infty<x<\infty.$$

3) Parametrlari α va $\sigma^2>0$ bo‘lgan normal taqsimot

$$\Phi_{\alpha,\sigma^2}(x)=\Phi\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$$

formula bilan aniqlanadi.

4) $[0,1]$ oraliqdagi tekis taqsimot. Uning taqsimot funksiyasi

$$U(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

5) O‘rta qiymati 1 bo‘lgan ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimot. Uning taqsimot funksiyasi $G(1,x)$. Yuqoridagi (1) formulaga ko‘ra

$$F_X(x)=G(1,x)=1-e^{-x},\ f_x(x)=e^{-x},\ x>0.$$

Endi berilgan taqsimot $F(x)$ ni “parametrlash” usuli bilan unga mos bo‘lgan taqsimot funksiyalari sinfini tuzish masalasiga o‘tamiz.

Ta’rif 1. Taqsimotlar sinfi masshtab-invariant deyiladi, agar X tasodifiy miqdorning taqsimoti bilan birga $Y=cX$ tasodifiy miqdorning taqsimoti har qanday $c>0$ uchun shu sinfga tegishli bo‘lsa.

Ta’rif 2. Masshtab-invariant sinf uchun θ masshtab parametri deyiladi, agar $Y=cX$ tasodifiy miqdor uchun faqat θ parametr $c\theta$ ga almashtirilib, qolgan hamma parametrlari X tasodifiy miqdorning θtadan boshqa hamma parametrlari bilan ustma-ust tushsa.

Aktuar matematikada qo‘llaniladigan taqsimotlarning ko‘pchiligi masshtab-invariant sinf tashkil qiladi. Bu sinfga tegishli taqsimotlar uchun inflatsiya jarayonlarini hisobga olish oson bo‘ladi, agar inflatsiya hamma to‘lovlar diapazonlari bo‘yicha tekis tarqalgan bo‘lsa. Masshtab-invariant parametrlar mavjud bo‘lganda, bo‘lg‘usi inflatsiya jarayonlarini modellashtirish imkoniyati yuzaga keladi.

Tasodifiy miqdorni biror musbat songa ko‘paytirish yangi taqsimotlar hosil qilishning usullaridan biri hisoblanadi.

Lemma 1. Agar $Y=\theta X(\theta>0))$ bo‘lsa,

$$F_Y(x)=F_X(x/\theta),\ f_Y(x)=\theta^{-1}f_X(x/\theta),\ x>0\ .$$

Keltirilgan birinchi tenglikni isboti bevosita taqsimot funksiyasining ta’rifidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$F_Y(x)=P(Y<x)=P(\theta X<x)=P(X<x/\theta)=F_X(x/\theta)\,.$$

Zichlik funksiyasi uchun esa

$$f_Y(x)=\frac{d}{dx}F_Y(x)=\frac{1}{\theta}f_X\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

tengliklar o‘rinli.

Natija. Lemma 1dagi parametr θ masshtab parametri bo‘ladi.

Keltirilgan lemma 1ning yordamida parametri $1/\theta$ ga teng bo‘lgan ko‘rsatkichli taqsimotlar

$$\{Y\sim\exp(1/\theta)\}$$

sinfini hosil qilish mumkin:

$$Y=\theta X,\ \theta>0,\ X\sim\exp(1),\ F_Y(x)=1-e^{-x/\theta},\ f_Y(x)=\theta^{-1}e^{-x/\theta}\,.$$

Oson ishonch hosil qilish mumkinki, $EY=\theta$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Aytib o‘tilganlarga o‘xshash holda ikki parametrli $\Gamma=\Gamma(\alpha,\theta^{-1})$–gamma taqsimotni kiritamiz. Musbat α parametrga bog‘liq gamma taqsimot $G(\alpha,x)$ zichlik funksiyasi

$$f(x,\alpha)=\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)},\ \alpha>0$$

orqali aniqlanadi. Agar X tasodifiy miqdor $G(\alpha,x)$ taqsimotga ega bo‘lsa, $Y=\theta X$ tasodifiy miqdor θ^{-1} masshtab parametriga ega bo‘lgan ikki parametrli $\Gamma(\alpha,\theta^{-1})$ gamma-taqsimot bilan taqsimlanadi. Bu taqsimotning taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyasi mos ravishda

$$F(x)=G(\alpha,x/\theta),\ f(x,\alpha,\theta^{-1})=\frac{(x/\theta)^{\alpha}e^{x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}$$

formulalar orqali aniqlanadi $(x>0)$.

Endi $(0,1)$ oraliqda aniqlangan standart betta taqsimotga masshtab parametri θni kiritsak, uch parametrli $B(\alpha,\beta,\theta^{-1},x)$ betta taqsimotni olamiz. Uning taqsimot va zichlik funksiyalari mos ravishda

$$F(x)=B(\alpha,\beta,x/\theta),$$

$$f(x,\alpha,\beta,\theta^{-1})=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{x},\quad 0<x<\theta$$

funksiyalardan iborat bo‘ladi. Bu taqsimotning massasi $(0,\theta)$ oraliqda joylashgan bo‘ladi.

Endi aktuar matematika modellarida juda ko‘p uchraydigan quyidagi uzluksiz tipda bo‘lgan taqsimotni keltiramiz.

Pareto taqsimoti. Tasodifiy miqdor X parametrlari $\lambda>0$ va $\alpha>0$ bo‘lgan Pareto taqsimotiga ega deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1},\ 0<x<+\infty$$

formula bilan aniqlansa.

Funksiya $p(x)\geq 0$ bo‘lgani uchun

$$\int_0^{\infty}p(x)dx=-\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\lambda}\Bigg|_0^{\infty}=1$$

tenglikdan $p(x)$ni ehtimollik taqsimoti zichlik funksiyasi bo‘lishligi kelib chiqadi. Pareto taqsimotiga ega bo‘lgan X tasodifiy miqdorning o‘rta qiymati

$$EX=\int_0^\infty(1-F_X(x))dx=\int_0^\infty\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha dx=\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}\cdot\frac{\lambda}{-\alpha+1}\Bigg|_0^\infty=\frac{\lambda}{\alpha-1}.$$

Shunday qilib, Pareto taqsimoti faqat $\alpha>1$ bo'lganligida o'rta qiymatga ega bo'ladi. Shunga o'xshash ikkinchi tartibli moment uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$EX^2=2\int_0^\infty x(1-F(x))dx=2\int_0^\infty x\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha dx=\frac{2\lambda}{-\alpha+1}\int_0^\infty xd\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}=$$

$$=\frac{2\lambda}{-\alpha+1}x\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}\Bigg|_0^\infty-\frac{2\lambda}{-\alpha+1}\int_0^\infty\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}dx=$$

$$=\frac{2\lambda}{\alpha-1}\cdot\frac{\lambda}{-\alpha+2}\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+2}\Bigg|_0^\infty=\frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

Oxirgidan

$$DX=VarX=\frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}-\left(\frac{\lambda}{\alpha-1}\right)^2=\frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

bo'ladi. Demak, Pareto taqsimoti parametr $\alpha>2$ bo'lganidagina dispersiyaga ega bo'lar ekan. Bu holda o'rta kvadratik og'ish

$$\sigma_X=\sqrt{VarX}=\frac{\lambda}{\alpha-1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}},$$

variatsiya koeffitsiyenti esa

$$CV(X)=C_X=\frac{\sigma_X}{EX}=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}},$$

ya'ni Pareto taqsimotining variatsiya koeffitsiyenti $C_X>2$ bo'ladi.

Pareto taqsimoti uchun X riskning katta qiymatlarini ro'y berish ehtimolliklari $1-F_X(x)$ (Pareto taqsimotining "qoldig'i") x bo'yicha kamayishi $(x\to\infty)$ eksponensial ko'rinishda bo'lmasdan, darajali tartibda bo'ladi. Boshqacha aytganda, Pareto taqsimotiga katta risklarning ko'proq ro'y berishi mos keladi. Masalan, X riskning o'rta qiymat EX dan 10 marta katta bo'lishi ehtimolligi

$$P(X>10EX)=\left[\frac{\lambda}{\lambda+10\dfrac{\lambda}{\alpha-1}}\right]^\alpha=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+9}\right)^\alpha.$$

Xususan, bu ehtimollik $\alpha=3$ bo'lganda $6\cdot10^{-3}$ ga teng. Shu bilan bir vaqtda, eksponensial taqsimot uchun bu ehtimollik $4{,}5\cdot10^{-5}$ bo'lib, ular bir-biridan 10^{-2} tartibda farq qiladi.

1.3.2. Yangi taqsimotlarni yuzaga keltiradigan amallar

Agar X tasodifiy miqdor, $g(\cdot)$ to'g'ri chiziq Rdagi Borel funksiyasi bo'lsa, superpozitsiya

$$Y=g(X)=g\circ X \tag{1}$$

almashtirishi X tasodifiy miqdorning taqsimoti F_X ga nisbatan yangi bo'lgan $F_{g(X)}$ taqsimotlarni yuzaga keltiradi.

Aktuar matematikada (1) formulani qo'llab hosil qilingan taqsimotlar ko'p qo'llaniladi. (Masalan, optimal stavka tarif sistemalarini tanlashda X tasodifiy miqdor taqsimoti F_X dan yangi $F_{g(X)}$ taqsimotga o'tish foydali va qulay hisoblanadi). Quyida biz (1) ko'rinishdagi konkret almashtirishlar natijasida yuzaga keladigan taqsimotlarni keltiramiz.

1. Darajaga ko'tarish amali yuzaga keltiradigan ehtimollik taqsimotlari.

Lemma 1. Agar $Y=X^{1/r}$ bo'lsa, $r>0$ bo'lganda

$$F_Y(x)=F_X(x^r),\ f_Y(x)=rx^{r-1}f_X(x^r),\ x>0.$$

Aksincha, $r<0$ bo'lganda

$$F_Y(x)=1-F_X(x^r),\ f_Y(x)=-rx^{r-1}f_X(x^r),\ x>0.$$

Bu lemmaning isboti

$$F_Y(x)=P(Y<x)=P(X^{1/r}<x)=\begin{cases}P(X<x^r), & r>0,\\ P(X\geq x^r), & r<0\end{cases}$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Ta'rif 1. Agar $r>0$ bo'lsa, Y tasodifiy miqdor taqsimoti almashtirilgan, $r=-1$ bo'lganda teskari, $r<0$ $(r\neq-1)$ qiymatlarida teskari almashtirilgan deyiladi.

Izoh 1. Ko'p hollarda teskari almashtirilgan taqsimot parametri r ni musbat son deb qarash maqsadga muvofiq bo'ladi. Shuning uchun $r<0$ bo'lgandagi $F_Y(x)=1-F_X\left(x^r\right)$ formuladagi $r$ni $-r$ bilan almashtirib, quyidagi

$$F_Y(x)=1-F_Y(x^{-r}),\ f_Y(x)=rx^{-r-1}f_Y\left(x^{-r}\right)$$

formulalarni hosil qilamiz. (Bunda, albatta, $x>0$ deb hisoblash kerak bo'ladi).

Izoh 2. Agar almashtirilgan taqsimotga parametr kiritish kerak bo'lsa, bu holda $Y=\theta X^{1/r}$ tasodifiy miqdorni ko'rish kerak bo'ladi. Masalan, shu usul yordamida yana bitta bir parametrli – teskari eksponensial taqsimotlar

$$F_Y(x)=F_\theta(x)=e^{-\theta/x},$$

$$f_Y(x)=f_\theta(x)=\frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2},\ x>0$$

sinfini tashkil qilish mumkin. Bu holda almashtiriladigan (bazaviy) taqsimot sifatida parametri 1ga teng bo'lgan

$$F_X(x)=1-e^{-x},\ x>0$$

eksponensial taqsimot olinadi. Aytib o'tilganlarga o'xshash ravishda quyidagi ikki parametrli taqsimotlar sinfini hosil qilamiz:

1) Veybull taqsimoti

$$F(x)=1-\exp\left[-(x/\theta)^r\right],\ f(x)=\frac{r(x/\theta)^r e^{-(x/\theta)^r}}{x},$$

2) teskari Veybull taqsimoti

$$F(x)=\exp\left[-(\theta/x)^r\right],\ f(x)=\frac{r(\theta/x)^r e^{-(\theta/x)^r}}{x},$$

3) teskari Gamma taqsimot

$$F(x)=1-G(\alpha,\theta/x),\ f(x)=\frac{(\theta/x)^\alpha e^{-\theta/x}}{x\Gamma(\alpha)}.$$

Bu formulalarni hammasida $x>0$ deb hisoblash kerak bo'ladi.

Shunday qilib, biz bir parametrli taqsimotlar sinfiga asoslanib, ikki parametrli shu tipdagi taqsimotlar sinfini kiritish usulini namoyish qilib o'tdik. Xuddi shunga o'xshash zaruriyat yuzaga kelganda, uch parametrli, to'rt parametrli taqsimotlar sinfini tashkil qilish mumkin.

2. Funksiya $y=e^x$ orqali yangi taqsimotlar hosil qilish.

Lemma 2. Tasodifiy miqdor $Y=e^X$ ning taqsimoti X ning taqsimot funksiyasi F_X orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$F_Y(x)=F_X(\ln x),\ f_Y(x)=x^{-1}f_X(\ln x),\ x>0.$$

Bu lemmaning isboti

$$F_Y(x)=P(Y<x)=P(e^X<x)=P(X<\ln x),\ x>0$$

tengliklardan kelib chiqadi.

Eksponensial funksiyaga o'tish orqali yaxshi ma'lum va parametrlari (μ,σ^2) bo'lgan lognormal taqsimotni hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham, X tasodifiy miqdor parametrlari (μ,σ^2) $(\mu\in R,\sigma>0)$ juftlikdan iborat normal taqsimotga ega bo'lsin, ya'ni

$$X\sim N(\mu,\sigma^2),\ F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Agar $Y=e^X$ deb belgilasak, $x>0$ bo'lganda

$$F_Y(x)=P(Y<x)=P(e^X<x)=P(Y<\ln x)=F_X(\ln x)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$$

Bundan

$$f_Y(x)=F_Y'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]=\left[\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)\right]'.$$

3. Qayta sug'urtalash bilan bog'liq masalalarda quyidagi Benktander taqsimoti muhim rol o'ynaydi. Ular odatdagi taqsimot yoki zichlik funksiyalari orqali emas, balki shartli matematik kutilma

$$r(x)=E(X-x/X>x)$$

orqali aniqlanadi.

Bunda X tasodifiy miqdor uchun $E|X|<\infty$ shart bajarilishi talab qilinadi. Oson ko'rinadiki, $F(x)$ va $r(x)$ orasida bir qiymatli moslik mavjud, chunki

$$r(x)=\frac{\int_x^{\infty}(u-x)dF(u)}{1-F(x)}=\frac{\int_x^{\infty}udF(u)-x(1-F(x))}{1-F(x)}=$$

$$=\frac{E(X,X>x)-x(1-F(x))}{1-F(x)}.$$

Aksincha,

$$1-F(x)=\frac{E(X,X>x)}{r(x)+x}.$$

O‘quvchiga shartli matematik kutilma $E(Y/B)$, $(P(B)>0$ bo‘lganda) ta’rifini eslatib o‘tamiz: agar $E|X|<\infty$ mavjud bo‘lsa, har qanday $A\in F$ uchun

$$E(X,A)=\int_A XdP=\int_\Omega XI_A dP,\ E(X/B)=\frac{E(X,B)}{P(B)},\ P(B)>0.$$

Bektander I (BI) taqsimoti uchun

$$r(x)=x(a+2b\ln x)^{-1},\ x>0.$$

Bektander $II(BII)$ taqsimoti uchun

$$r(x)=\frac{x^{1-b}}{a},\ x>0.$$

E’tibor berib o‘tamizki, oxirigidan $b=1$ bo‘lganda, eksponensial taqsimotni, $b=0$ bo‘lganda esa bir parametrni Pareto taqsimotini hosil qilamiz.

Bu punktda keltirilgan taqsimotlar va aktuar matematikada ko‘p qo‘llaniladigan taqsimotlar bilan almashtirish, teskari taqsimotlarga o‘tish usullari haqida [1],[2],[4],[6] adabiyotlarda yetarli ma’lumotlar keltirilgan.

4. Berilgan parametrik ko‘rinishda bo‘lgan taqsimotlardan yangi taqsimotlar hosil qilisb usullaridan biri – bu parametrni tasodifiylashtirish yoki randomizatsiya hisoblanadi. Bu usul sug‘urta portfelini bir jinsli emasligini va oldinda yuzaga keladigan inflatsiyaning noaniqlik darajasini hisobga olish imkoniyatini beradi.

Haqiqatan ham, faraz qilamizki, X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_X(x,\theta)$ biror parametr θga bog‘liq bo‘lsin. Buni sug‘urta faoliyatida har bir kontrakt θ parametr bilan xarakterlanadi deb tushunish mumkin. O‘z navbatida, θ ni biror tasodifiy miqdor $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}(\omega)$ ni kuzatilgan qiymati deb qabul qilish mumkin. Agar θ fiksirlangan bo‘lsa, sug‘urta to‘lovi X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_X(x,\theta)$ bo‘ladi. Parametr θdan uning tasodifiy varianti $\tilde{\theta}$ga o‘tish tasodifiylashtirish (randomizatsiya) deb ataladi va $\tilde{\theta}$ning taqsimotini (zichlik funksiyasini) sug‘urta portfelining struktura funksiyasi deb qabul qilinadi. Agar struktura funksiyasi ($\bar{\theta}$ tasodifiy miqdor taqsimoti) $u(\theta)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, sug'urta to'lovi X riskning zichlik funksiyasi

$$f_X(x) = Ef_X\left(x,\bar{\theta}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x,\theta)u(\theta)d\theta \tag{2}$$

formula bilan aniqlanadi. O'z navbatida, $f_X(x)$ zichlik funksiyasi $f_X(x,\theta)$ taqsimotdagi parametr θni randomizatsiyalash usuli bilan hosil qilingan yangi taqsimot deb tushunaladi.

Misol sifatida

$$P(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-k},\ k = 0,1,2,...$$

parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotini ko'raylik. Agar bunda λ ni $(0,\infty)$ oraliqda qiymatlar qabul qiladigan $\tilde{\lambda} = \lambda(\omega)$ tasodifiy miqdor deb tushunsak va $\tilde{\lambda}$ ning taqsimoti $u(\lambda)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, (2) formulaga asosan X riskning taqsimoti

$$P_X(k) = P(X = k) = Ep\left(k,\tilde{\lambda}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}u(\lambda)d\lambda,\ k = 0,1,2,... \tag{3}$$

formula bilan aniqlanadi va uni Puasson taqsimotining randomizatsiyasi deb ataladi.

Agar $u(\cdot)$ zichlik funksiyasi parametrlari (α,β) bo'lgan

$$u(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}\exp(-\lambda/\beta)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)},\ \lambda > 0$$

$\Gamma(\alpha,\beta)$ – gamma funksiya bo'lsa, (3) formulaga asosan $P_X(k)$ manfiy – binomial $NB(\alpha,\beta)$ taqsimot

$$P(X = k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{k},\ k = 0,1,...$$

yuzaga keladi. Demak, parametri $\lambda > 0$ bo'lgan Puasson taqsimotini randomizatsiyalash orqali unga umuman o'xshash bo'lmagan yangi manfiy binomial $NB(\alpha,\beta)$ taqsimotni hosil qilish mumkin ekan.

Tasodifiy miqdor Xning shartli bo'lmagan taqsimotiga sug'urta portfelidan tavakkaliga tanlangan risk mos keladi. Bunday interpretatsiya ishonchlilik nazariyasining (credibility theory) asosini tashkil qiladi. Boshqacha interpretatsiya θ masshtab parametri bo'lganda yuzaga kelishi mumkin. Aytilganlarni quyidagi misolda izoblab o'tamiz.

Tasodifiy miqdor X ning masshtab almashtirish (parametri) $Y=CX$ ni ko'ramiz va parametr C ni X ga bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor deb qabul qilamiz. Agar C tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_C(\cdot)$ bo'lsa, $f_{CY}(x)$ taqsimotni (2) integral ko'rinishda yozish mumkin ekanligini isbotlaymiz.

Bu holda $\tilde{N}\in(0,\infty)$ parametrni randomizatsiyalash, C ni $(0,\infty)$ oraliqda zichlik funksiyasi $f_C(c)$ bo'lgan $C=c(\omega)$ tasodifiy miqdor deb hisoblash kerakligini anglatadi. O'z-o'zidan ravshanki, $Y=CX$ deb olsak,

$$F_Y(x)=P(CX<x)=P\left(X<\frac{x}{C}\right)=F_X\left(\frac{x}{C}\right).$$

Bundan

$$f_Y(x)=\frac{\partial}{\partial x}F_X\left(\frac{x}{C}\right)=f_X\left(\frac{x}{C}\right)\frac{1}{C}=f_X(x,C).$$

Endi (2) formulani qo'llasak,

$$f_Y(x)=\int_0^\infty f_X\left(\frac{x}{C}\right)\cdot\frac{1}{C}f_C(c)dc$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda (2) formuladagi zichlik funksiyasi $u(c)=f_C(c)$. Endi $EC=E\tilde{C}=1$ bo'lsa,

$$DY=D(CX)\geq DX$$

ekanligini ko'rsataylik. Haqiqatan ham, $C=C(\omega)$ va X tasodifiy miqdorlarni bog'liqsiz ekanligidan foydalanib quyidagi munosabatlarni yozish mumkin:

$$DY=D(CX)=E(CX)^2-(ECX)^2=EC^2X^2-(ECEX)^2=$$
$$=EC^2EX^2-(EX)^2\geq EX^2-(EX)^2=DX.$$

Bu yerda $1=(EC)^2\leq EC^2$ tengsizlikdan foydalanildi.

Keltirilgan misollar tahlili "randomizatsiyalash" amalini umumiy holda kiritish mumkin ekanligini ko'rsatadi. Aytaylik, X riskning taqsimoti $F_Y(x)$ qo'shimcha parametr θ ga bog'liq bo'lsin va parametrning $\theta=y$ ma'lum qiymatida bu bog'liqlik $F(x,y)$ ko'rinishida yozilsin. Endi θ parametrni $\theta=\theta(\omega)$ tasodifiy miqdor deb hisoblab, uning taqsimot funksiya uchun $G(y)=P(\theta<y)$ belgilashni qabul qilaylik. Bu holda X riskning shartsiz taqsimoti

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dG(y)=EF(x,\theta). \qquad (4)$$

O'z-o'zidan tushunarli bo'ladiki, yuqoridagi (2) formula (4) tenglikning xususiy holi bo'ladi.

"Randomizatsiya" amali sug'urta portfelining bir turli (bir jinsli) emasligini hisobga oladigan yangi taqsimotlarni yuzaga kelishi imkonini beradi va bu taqsimotlar kuzatilgan statistik ma'lumotlarni yuqori darajadagi aniqlik bilan ifoda etadi.

Bu punkti quyidagi misolning tahlili bilan yakunlaymiz. Aytaylik, X riskning taqsimoti parametri θ bo'lgan eksponensial taqsimot bo'lib, uning qiymati shartnomadan shartnomaga o'zgarsin va bu o'zgarish parametrlari λ va α bo'lgan $\Gamma(\lambda,\alpha)$ – gamma taqsimotga bo'ysunsin, ya'ni θ parametrni taqsimoti $\Gamma(\lambda,\alpha)$ bo'lgan tasodifiy miqdor deb tushunamiz. Demak,

$$F(x,\theta)=P(X<x),\ f(x,\theta)=F'_x\ (x,\theta),$$

$$f(x,\theta)=\theta e^{-\theta x}, G(y,\lambda,\alpha)=P(\theta(\omega)<y),$$

$$g(y)=G'_y(y,\lambda,\alpha),\ g(y)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\lambda y},\ \ y>0.$$

"Randomizatsiya" amalini qo'llash natijasida yuzaga kelgan taqsimotning zichlik funksiyasi (2) va (4) formulalarga asosan

$$f(x)=\int_0^\infty ye^{-xy}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}dy=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^\alpha e^{-(x+\lambda)y}dy.$$

Oxirgi integralda $u=(x+\lambda)y$ almashtirishni bajarsak,

$$f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(x+\lambda)^{\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}du=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(x+\lambda)^{\alpha+1}}\cdot\Gamma(\alpha+1).$$

Agar bu yerda $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ tenglikdan foydalansak,

$$f(x)=\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha+1}$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi formula $f(x)$ parametrlari α va λ bo'lgan Pareto taqsimotining zichlik funksiyasi ekanligini anglatadi. Demak, Pareto taqsimotini parametri $\Gamma(\lambda,\alpha)$– gamma taqsimotga ega bo'lgan eksponensial taqsimot deb tushunish mumkin ekan.

1.3.3. Foydalilik funksiyasi

Umuman, tasodifiy miqdorlar (risklar) to'plamida to'laroq bo'lgan tartiblash kiritish uchun oldingi paragrafdagi (2) taqqoslash munosabatining o'ng tomonini o'zgartirishga to'g'ri keladi. Bunda foydalilik funksiyasi tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Bu tushuncha Aktuar matematika bilan bir qatorda, o'yinlar nazariyasida, matematik iqtisodda, optimal boshqarish va qarorlar qabul qilish nazariyasida ko'p qo'llaniladi (Fon Neyman, Morgenshtern (1970), De Groot (1974), Fishbern (1978) va boshqalar). Masalan, Aktuar matematikada sug'urta kompaniyasi yoki mijoz ma'lum risk holatida o'zlari uchun ozmi-ko'pmi qulayroq bo'lgan shartnomalar tuzishda qabul qilingan foydalilik funksiyasiga (utility functions) asoslanadilar.

Foydalilik tushunchasi risk holatlarni analiz qilish jarayonida yuzaga keladi. Agar tasodifiy bo'lmagan x daromadga $U(x)$ soni mos qo'yilgan bo'lib, $U(\cdot)$ni Kramer ta'biri bilan aytganda, x daromadga ega bo'lgan individuumning (shaxs) bu daromaddan "qoniqarli bo'lishining" yoki bu daromadning "foydalilik" miqdori deb tushunilsa, $U(\cdot)$ni daromadlar to'plami $\{x, y, \ldots\}$da aniqlangan foydalilik funksiyasi sifatida qabul qilish mumkin. Masalan,

$$U(x) = ax + b, \quad a > 0 \tag{1}$$

chiziqli funksiya, "foydalilik" daromadga nisbatan proporsional ravishda o'zgarishini anglatadi. Agar bunda $a=1$, $b=0$ bo'lsa, oldingi paragrafdagi (2) formuladagi tasodifiy risklar X va Y larni taqqoslash usuliga kelamiz.

Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasi mijozi o'zining tasodifiy risklarini foydalilik funksiyasi $U(x)$ga nisbatan

$$X \le Y \Leftrightarrow EU(X) \le EU(Y) \tag{2}$$

qoida bilan tartiblab chiqqan bo'lsin, ya'ni Y daromad X daromadga nisbatan "ustuvorroq" bo'ladi, agar uning foydalilik o'rta qiymati $EU(Y)$, X daromadning foydalilik o'rta qiymati $EU(X)$

dan kichik bo‘lmasa. Bu yerda $\Leftrightarrow$ belgi oldingidek “shu holda va faqat shu holda” iborasini belgilaydi.

Agar $P(X=x)=P(Y=y)=1$ deb hisoblasak, (2) munosabatga asosan

$$X \le Y \Leftrightarrow x \le y \Leftrightarrow EU(X) \le EU(Y) \Leftrightarrow U(x) \le U(y)$$

teng kuchlilik munosabatlari sistemasiga ega bo‘lamiz va ulardan

$$(x \le y) \Leftrightarrow U(x) \le U(y)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ uchun tabiiy ravishda kamaymovchi bo‘lmaslik shartini qanoatlantirishini olamiz.

Oxirgi mulohazalardan

$$X \sim Y \Leftrightarrow EU(X) = EU(Y)$$

ekvivalentlik (teng kuchlilik) munosabati o‘rinli bo‘lishligi kelib chiqadi. Tasodifiy miqdor X va Y lar risk sifatida manfiy bo‘lmagan qiymatlarni qabul qilishi shart emasligidan foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ manfiy ishorali bo‘lishi ham mumkinligini qayd etamiz.

Tushunarli bo‘ladiki, $EU(X)$ miqdor kutilayotgan (kutish mumkin bo‘lgan) foydalilik deb atash mumkin va

$$EU(X) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,dF_X(x), \quad F_X(x) = P(X < x)$$

formula taqsimot funksiyalari sinfida chiziqli funksionalni ifoda etadi. Shuning uchun (2) munosabat bilan aniqlanadigan tasodifiy miqdor X va Y lar uchun “ustuvorlik” ni chiziqli foydalilik tartibi nomi bilan atash mumkin.

Umuman, aktuar matematikada chiziqli foydalilik tartibi tasodifiy risk holatlarini taqqoslash masalalarida keng qo‘llaniladi. Lekin aktuariy faoliyat bilan shug‘ullanadigan mutaxassislar ko‘pchiligining fikrlari bo‘yicha chiziqli foydalilik nazariyasiga asoslangan sug‘urta modellari bir qator kamchiliklarga ham ega bo‘ladi. Bu modellar universal ma’noda ba’zi sug‘urta-risk holatlarini to‘la analiz qilish imkonini bermaydi. Masalan, psixologiya sohasidagi tadqiqotlarda uchraydigan risk holatlarining ko‘pchiligi, chiziqli foydalilik modellari orqali ifoda etilmaydi.

Quyida biz bunday risk holatlari mavjudligini isbotlaydigan misol keltiramiz.

Tasodifiy miqdor X va Y lar daromad ma'nosida uchta bir xil $x_1 > x_2 > x_3$ qiymatlarni mos ravishda

$$(p_1, p_2, p_3),\ p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \geq 0,\ i = 1,2,3$$

$$(q_1, q_2, q_3),\ q_1 + q_2 + q_3 = 1,\ q_i \geq 0,\ i = 1,2,3$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsin. Misolni yechishga kirishishdan oldin foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ ning bir qiymatli aniqlangan bo'lmasligi xossasiga e'tibor qilamiz: agar $U(x)$ foydalilik funksiyasi bo'lsa, bu funksiyaning chiziqli kombinatsiyasi

$$V(x) = aU(x) + b,\ a > 0,\ b \in R, \tag{4}$$

ham foydalilik funksiyasi bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$EU(X) \leq EU(Y)$$

tengsizlikdan

$$EV(X) = aEU(X) + b \leq aEU(Y) + b = EV(Y)$$

baho o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, (2) munosabatga asosan

$$X < Y \Leftrightarrow EV(X) \leq EV(Y), \tag{5}$$

ya'ni (2) va (5) munosabatlar teng kuchli bo'lar ekan (yoki (4) formula bilan $V(x)$ ni foydalilik funksiyasi deb hisoblash mumkin).

Aytilganlardan kelib chiqadiki, foydalilik funksiyasi chiziqli almashtirish aniqligida ta'riflanadi.

Umuman aytganda, foydalilik har doim daromad x ga nisbatan proporsional ravishda o'zgaradi deb bo'lmaydi. Masalan, million dollarga ega bo'lgan shaxsning 1 dollar yutgandagi uning yutuqdan "qoniqish darajasi" bor-yo'g'i 1 dollarga ega bo'lgan shaxsning 1 dollar yutishidagi "qoniqish darajasi"dan keskin farq qiladi. Masalan, foydalilik orttirmasi, daromad x ning absolyut qiymatiga emas, uning nisbiy o'zgarishiga proporsional bo'lsa, ya'ni

$$dU(x) = k\frac{dx}{x}$$

formula o'rinli bo'lsa, foydalilik funksiyasi

$$U(x) = k \log x + const$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Yuqorida keltirilgan misolda foydalilik funksiyasi $U(x) = \log x$ deb qabul qilinsa, hech qanday qarama-qarshilik yuzaga kelmaydi. Bu holda

$$EU(X) = \log 2 \sum k \frac{1}{2^k} = 2\log 2 .$$

Yuqoridagi (4) va (5) munosabatlarni hisobga olgan holda, foydalilik funksiyasini kamaymovchi emasligidan foydalanib, ko'rilayotgan misol uchun umumiylikni chegaralamasdan

$$U(x_1) = 1 \quad va \quad U(x_3) = 0$$

tengliklar o'rinli deb hisoblash mumkin. Demak, $U(x)$ foydalilik funksiyasi uning bitta qiymati $U(x_2)$ bilan aniqlanadi. Bu sonni $\gamma = U(x_2)$ deb belgilasak, γ $(0,1)$ oraliqdagi son bo'lib, u $P = (\gamma, 0, 1-\gamma)$ va $(0,1,0) = Q$ ehtimolliklar taqsimotlarini teng kuchliligini ta'min etadigan yagona son bo'ladi. Bu esa quyidagi tengliklardan kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$EU(X) = E_P U(X) = U(x_1)p_1 + U(x_2)p_2 + U(x_3)p_3 = 1\cdot\gamma + \gamma\cdot 0 + 0\cdot(1-\gamma) = \gamma$$
$$EU(Y) = E_Q U(X) = U(x_1)q_1 + U(x_2)q_2 + U(x_3)q_3 = 1\cdot 0 + \gamma\cdot 1 + 0\cdot(1-\gamma) = \gamma \quad ,$$

ya'ni

$$EU(X) = E_P U(X) = E_Q U(Y) = EU(Y)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

P va Q ehtimolliklar taqsimotlari teng kuchli ekanligiga quyidagicha izoh berish mumkin. Lotoreya o'yinida x_1 yutuqni γ ehtimollik bilan, x_3 yutuqni $1-\gamma$ ehtimollik bilan ta'min etadigan lotoreya bileti, x_2 yutuqni, albatta, ta'min etadigan boshqa lotoreya bileti bilan teng kuchli bo'ladi.

Foydalilik funksiyasining ta'rifiga asoslanib quyidagini yozish mumkin:

$$X \succ Y \Leftrightarrow U(X) - U(Y) = (p_1 - q_1) + \gamma(p_2 - q_2) \geq 0 .$$

Oxirgi tengsizlikdan ko'rinadiki, X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi "ustuvorlik" munosabati faqat $p_1 - q_1$, $p_2 - q_2$ ayirmalarga bog'liq bo'ladi, xolos. Masalan, faqat foydalilik funksiyasining mavjudligi

$$(0.3;\ 0.1;\ 0.6) \succ (0.2;\ 0.3;\ 0.5), \quad (0.5;\ 0.4;\ 0.6) \succ (0.4; 0.6;\ 0) \qquad (6)$$

"ustuvorlik" munosabatlarining teng kuchli ekanligini isbotlaydi. Bu holda

$$U(X) - U(Y) = (p_1 - q_1) + \gamma(p_2 - q_2) = 0.1(1 - 2\gamma) .$$

Oxirgidan ko‘rinadiki, $\gamma<1/2$ yoki $\gamma>1/2$ bo‘lganda mos ravishda $X\succ Y$, (6), $X\prec Y$ munosabatlar o‘rinli va $\gamma=1/2$ bo‘lsa, $X\sim Y$.

Albatta, yuqorida qayd qilib o‘tilganidek, foydalilik funksiyasiga qo‘yilgan kamaymovchilik sharti tabiiy hisoblanadi. Bunda foydalilik funksiyasining qanday o‘sishi mijozning o‘rganilayotgan riskka bo‘lgan munosabatini belgilaydi. Bu fikrni asoslash uchun ancha taniqli bo‘lgan Iensen tengsizligiga murojaat qilamiz. Agar foydalilik funksiyasi $U(x)$ pastga qavariq bo‘lsa, ya’ni har qanday x_1, x_2 va har qanday $\alpha\in(0,1)$ uchun

$$U(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha U(x_1)+(1-\alpha)U(x_2) \tag{7}$$

tengsizlik bajarilsa,

$$EU(X)\geq U(EX) \tag{8}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ yuqoriga qavariq bo‘lsa, ((7) tengsizlikni chap tomoni o‘ng tomonidan kichik bo‘lmasa), u holda

$$EU(X)\leq U(EX) \tag{9}$$

tengsizlik bajariladi. Bu (8), (9) munosabatlar Iensen tengsizliklari deb ataladi.

Faraz qilaylik, sug‘urta kompaniyasi mijozi $U(\cdot)$ foydalilik funksiyasiga ega bo‘lib, $U(\cdot)$ yuqoriga qavariq bo‘lsin.

Agar mijozga daromadga tasodifiy X risk bilan o‘yin taklif qilinsa, (9) tengsizlikdan

$$X\prec EX \tag{10}$$

munosabatni olamiz, ya’ni mijozga har doim tasodifiy bo‘lmagan EX miqdorni olish yaxshiroq (yutug‘i tasodifiy X bo‘lgan stoxastik o‘yinga kirishmasdan). Demak, bu holda mijozning risk holatdagi o‘yinlarga qatnashmaslik xohishi kuzatiladi (risk averce).

Agar mijoz pastga qavariq bo‘lgan foydalilik funksiyasini qabul qilsa, oldingi jumladagi mulohazalar orqali (8) tengsizlikdan

$$X\succ EX \tag{11}$$

munosabatni hosil qilamiz. Demak, mijoz shunday (pastga qavariq) foydalilik funksiyasini tanlasa, tasodifiy bo‘lmagan EX miqdorni qabul qilgandan ko‘ra yutug‘i X tasodifiy miqdor bo‘lgan o‘yinga rozi bo'lgani yaxshiroq, ya'ni bu holda mijozning risk holatlar bilan ish ko'rishga tayyorligi kuzatiladi (risk lower).

Keltirilgan mulohazalardan umumiy holda foydalilik funksiyasi qanday bo'lishligi haqida quyidagilarni aytish mumkin:

1) Juda katta bo'lmagan daromadlar (risklar) uchun $U(\cdot)$ funksiya deyarli chiziqli bo'ladi.

2) Katta daromadlar oraliqlarida bu funksiya keskin tez o'zgarmaydi, ya'ni "to'yinish effekti" kuzatiladi.

3) Katta talofatlar oraliqlarida bu funksiyani absolyut miqdori keskin "o'sishi, keyin esa" deyarli o'zgarmas funksiyaga yaqin bo'lishi kuzatiladi.

Foydalilik funksiyasiga qo'shimcha shartlar qo'yilsa, sug'urta faoliyatida qatnashadigan shaxslarni riskka "moyillik" darajasini aniqlash mumkin. Masalan, sug'urta kapitali orttirmasini qanday o'zgarishi qiziqtirmaydigan shaxslarda riskga "moyillik" kamroq bo'ladi.

Sug'urta faoliyatida quyidagi foydalilik funksiyalari ko'proq uchraydi:

$$U(x) = x \ (chiziqli),$$
$$U(x) = -(b-x)^2 \quad (kvadratik),$$
$$U(x) = \log(\alpha + x) \ (\log arifmik),\ \alpha > 0$$
$$U(x) = -\alpha e^{-\alpha x},\ \alpha > 0.$$

Bu yerda, albatta, x argumentning foydalilik funksiyasi $U(x)$ mavjud bo'lgan qiymatlari hisobga olinadi, xolos. Kvadratik foydalilik funksiyasi uchun $x = b$ "to'yinish" nuqtasi bo'ladi, x ning katta qiymatlarida esa foydalilik keskin o'zgarmaydi. Shu sababli, teng kuchli foydalilik funksiyalari sinfidan $U(0) = 0,\ U'(0) = 1$ tengliklari bajariladiganlari tanlanadi.

Quyidagi

$$\alpha(x) = -U''(x)/U'(x)$$

ifoda riskka "moyil" bo'lmaslik koeffitsiyenti deb ataladi. Masalan, logarifmik funksiya uchun $(\alpha = 1)$ bo'lganda

$$U(0) = 0, U'(0) = 1,\ \alpha(x) = -(1+x).$$

Peterburg paradoksi va uning yechimi.

Yuqoridagi (2) munosabatdan risklarni taqqoslashda foydalanish qarama -qarshi paradoks xarakteridagi fikrlarga olib kelishi mumkin. Munosabat (2) dan kelib chiqadiki,

$$(X \le Y) \Leftrightarrow (EX \le EY). \qquad (2')$$

Misol (Peterburg paradoksi). Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasi mijozi quyidagi holatga tushib qoldi: 1) Unga quyidagi

$$P\left(X = 2^k\right) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor orqali ifoda qilinadigan o'yin taklif etiladi, ya'ni u 2^{-k} ehtimollik bilan 2^k dollar oladi; yoki, 2) unga hech qanday o'yinga bog'liq bo'lmagan va fiksirlangan y miqdordagi pul to'lanadi. Mijoz hech qanday tasodifga bog'liq bo'lmagan fiksirlangan qanday y summaga rozi bo'lishi kerak degan savol qo'yiladi. Har qanday sog'lom fikrdagi odam uchun bunday y chekli miqdor mavjudligi tushunarli bo'ladi. Shunday qilib, biz birlik taqsimotga $P(Y = y) = 1$ ega bo'lgan tasodifiy miqdor Yni topishimiz kerak bo'ladiki, uning uchun

$$X \le Y \text{ yoki } \quad X \le y$$

munosabatlar bajarilishi zarur bo'ladi. O'z navbatida (2′) munosabatga, asosan

$$EX \le EY = y \qquad (2'')$$

tengsizlik bajarilishi kerak. Lekin

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

ya'ni (2″) munosabat y ning har qanday chekli qiymatida bajarilmaydi. Bu xulosa oddiy haqiqatga qarama-qarshi, chunki har qanday sog'lom fikrdagi odam stoxastik (natijalari tasodifiy bo'lgan) o'yinlar o'ynash o'rniga yetarli darajada katta bo'lgan y summani olish bilan chegaralanib qoladi. Keltirilgan "sug'urta" variantini Peterburg paradoksi deb ataladi.

Bu yerda qayd etish joiz bo'ladiki, Peterburg paradoksida mijozning foydalilik funksiyasi $U(x) = ax + b, \quad a > 0$ ko'rinishida bo'ladi. Bu paradoksni yechish (bartaraf etish) uchun tabiiy ravishda foydalilik funksiyasini o'zgartirish kerak bo'ladi.

Agar mijozning foydalilik funksiyasining orttirmasi $dU(x)$ daromad x ning absolyut o'zgarishiga emas, balki uning nisbiy o'zgarishiga proporsional bo'lsin deb faraz qilinsa,

$$dU(x) = k \cdot \frac{dx}{x} \qquad (*)$$

munosabat bajariladi. Bu (*) munosabatni differensial tenglama deb qabul qilib

$$U(x) = k \log x + const$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Keltirilgan mulohazalarga asoslanib, mijozning foydalilik funksiyasi

$$U(x) = \log x$$

deb qabul qilinsa, Peterburg paradoksining yechimini olish mumkin. Haqiqatan ham, bu holda

$$EU(x) = \log 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2^n} = 2\log 2.$$

Demak, $y \geq 2\log 2$ tengsizlik bajarilganda, $P(Y = y) = 1$ bo'lgani uchun

$$EX \leq EY$$

munosabat bajariladi.

1.4. Mijoz nuqtayi nazaridan sug'urta varianti

Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasi mijozining daromadlarga bo'lgan munosabati $U(x)$ foydalilik funksiyasi orqali tavsif etilsin va uning boshlang'ich kapitali S miqdorni tashkil qilsin. Odatdagidek mijozga ziyon yetkazishi mumkin bo'lgan va sug'urta qilinishi kerak bo'ladigan risk (tasodifiy miqdor) X deb belgilangan bo'lsin. Mijozni sug'urta kompaniyasiga to'laydigan badal miqdorini G deb olsak, mijoz uchun $S-X<S-G$ munosabat bajarilishi kerak. O'z navbatida, bu munosabat

$$EU(S-X) \leq EU(S-G) = U(S-G) \qquad (1)$$

tengsizlikka teng kuchli bo'ladi. Agar foydalilik funksiyasi $U(x)$ ni uzluksiz deb hisoblasak (1) tengsizlikning o'ng tomonidan shunday $G=G_{max}$ qiymatni mavjudligi kelib chiqadiki, uning uchun

$$EU(S-X)=U(S-G_{max}) \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, har qanday G uchun

$$G\le G_{max} \qquad (3)$$

tengsizlik bajarilganda mijoz sug'urta tuzishga rozi bo'ladi.

Hozirgina keltirilgan sug'urta variant quyidagicha modifikatsiya qilinishi mumkin. Birinchidan, e'tibor qilish zarur bo'ladiki, sug'urta kompaniyasi yetkazilgan ziyon (risk) X ni to'la qoplamaydi, ya'ni X ning biror $I(X)$ funksiya orqali ifodalanadigan qismini to'laydi xolos. Bu holda $I(X)\le X$ tengsizlik bajarilgan bo'lib,

$$E(S-X)\le EU(S-G-I(X))$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak va $G=G_{max}$ uchun

$$EU(S-X)=EU(S-G-I(X)).$$

Izoh. Sug'urtalash oqibatida X risk yo'q bo'lmaydi, aksincha, $X-I(X)$ risk mijozda qolaveradi, $I(X)$ qism risk esa kompaniya ixtiyoriga o'tadi. Demak, sug'urtalash natijasida X risk qayta taqsimlanadi, xolos.

Agar foydalilik funksiyasi $U(x)$ yuqoriga qavariq bo'lsa, oldingi punktdagi (8) va (9) munosabatlar quyidagi tengsizliklarga olib keladi:

$$U(S-G_{max})=EU(S-X)\le U(S-EX). \qquad (4)$$

Foydalilik funksiyasi $U(x)$ monoton o'suvchi bo'lgani uchun (4) munosabatdan kelib chiqadiki, (bu holda $U(x)$ funksiyaning qat'iy monoton bo'lishi talab etiladi),

$$EX\le G_{max} \qquad (5)$$

Xuddi aytilganlarga o'xshash ravishda, $U(x)$ funksiya pastga qavariq bo'lgan holda

$$EX\ge G_{max}. \qquad (6)$$

1.5. Kompaniya nuqtayi nazaridan sug'urta varianti

Endi sug'urta kompaniyasi nuqtayi nazaridan sug'urta variantlarini ko'ramiz. Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasining boshlang'ich kapitali S_I, foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ va u (kompaniya) mijozning X tasodifiy talofatlarini sug'urta qilishga tayyor bo'lsin. Belgi H_I mijoz to'laydigan sug'urta polisining bahosini ifoda qilsin. Bu holda sug'urta kompaniyasi uchun tuziladigan sug'urta ma'noga ega bo'ladi, agar

$$S_I \prec S_I - X + H_I$$

munosabat bajarilsa yoki foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ uchun

$$U_I(S_I) \le EU_I(S_I - X + H_I) \tag{1}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ uzluksiz deb hisoblagan holda (1) tengsizlikdan sug'urta polisining minimal qiymati $H_I^{\min}$ mavjud bo'ladiki, uning uehun

$$U_I(S_I) = EU_I\left(S - X + H_I^{\min}\right) \tag{2}$$

tenglik bajariladi va sug'urta kompaniyasi uchun

$$H_I \ge H_I^{\min} \tag{3}$$

tengsizlik bajarilsa, sug'urta tuzishning ma'nosi bo'ladi.

Agar sug'urta kompaniyasining foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ yuqoriga qavariq bo'lsa, (2) tenglikdan

$$U_I(S_I) = EU_I\left(S - X + H_I^{\min}\right) \le U\left(S_I - EX + H_I^{\min}\right) \tag{4}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ monoton o'suvchi bo'lishidan va (4) munosabatga asosan

$$EX \le H_I^{\min}. \tag{5}$$

Xuddi shunga o'xshash, foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ pastga qavariq bo'lsa,

$$EX \ge H_I^{\min}. \tag{6}$$

Endi mijoz va sug'urta kompaniyasi nuqtayi nazariga asoslangan sug'urta variantlarini bir vaqtda hisobga olgan holda, agar

$$G_{\max} \ge H_I^{\min} \tag{7}$$

bo'lsagina sug'urta tuzish mumkin degan xulosaga kelamiz.

Quyida biz shunday holat yuzaga kelishi mumkin ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham, (5) va (6) tengsizliklardan (7) munosabat kelib chiqadi, ya'ni agar mijozning foydalilik funksiyasi $U(x)$ yuqoriga qavariq, aksincha, sug'urta kompaniyasining foydalilik funksiyasi $U_I(x)$ pastga qavariq bo'lsa, sug'urta tuzilishi mumkin.

Xuddi shunga o'xshash, oldingi punktdagi (6) va shu punktdagi (7) tengsizliklardan faqat

$$G_{max} = H_I^{min} \tag{8}$$

tenglik bajarilgandagina sug'urta tuzish mumkinligi kelib chiqadi.

1.6. Yakuniy kapital taqsimoti

Biz n ta sug'urta polisi chiqargan va hammasini sotgan qandaydir sug'urta kompaniyasini kuzatamiz. Kompaniyaning zaxira kapitali (boshlang'ich kapitali) S ga teng bo'lsin. Faraz qilamizki, har bir sug'urta shartnomasi mijozlarga sug'urta to'lashga olib keluvchi bitta yoki bir nechta baxtsiz hodisalar ro'y berishi bilan bog'liq bo'ladi. X_i orqali i-mijoz to'laydigan sug'urta to'lovi va $F_i(x)$ orqali uning taqsimotini belgilaymiz.

Umuman olganda, shunday hollar bo'lishi mumkinki, X_i tasodifiy kattaliklar manfiy qiymatlar ham qabul qilishi mumkin, biroq biz ularni manfiy emas deb hisoblaymiz.

Bu sug'urta polislari to'plamidan hosil bo'lgan umumiy sug'urta to'lovlari

$$X = X_1 + ... + X_n$$

X tasodifiy kattalikning taqsimoti funksiyasini

$$F(x) = P\{X < x\}, x \in R$$

orqali belgilaymiz. Bu funksiyani ko'pincha sug'urta kompaniyasining tavakkal taqsimoti deyiladi.

Faraz qilamiz, X tasodifiy kattalik chekli matematik kutilmaga ega va uni biz

$$\mu = EX$$

bilan belgilaymiz.

Agar sug'urta kompaniyasi polislarini

$$\mu_n = \frac{\mu}{n}$$

narxda sotsa, kompaniyasining o'rtacha daromadi nolga teng bo'ladi. μ_n soni polisning tannarxi (yoki tavakkal mukofoti) deb ham ataladi va sug'urta polislarining haqiqiy narxining μ_n ga teng bo'lgan holida ekvivalentlik prinsipi (tamoyili) amalga oshgani haqida gapirish mumkin. Hayotda esa sug'urta kompaniyalari, albatta, μ_n dan tashqari yuklama deyiluvchi kompaniyaga daromad keltiruvchi qo'shimcha summasi ham qo'shiladi. Rivojlangan davlatlarda yuklama ma'lum darajada amaldagi qonunlar bilan reglamentlashtirilgan. v_i bilan i-sug'urta polisiga mos keluvchi yuklamani (tavakkallik qo'shimchasi) belgilaymiz. Natijada sug'urta to'lovchilarini to'lashdan oldin kompaniya quyidagi kapitalga ega bo'ladi:

$$S + \sum_{i=1}^{n} v_i + \mu = R + \mu,$$

R kattalikni erkin zaxira deyiladi.

Shunday qilib, tavakkalchilik vaziyati ikkita element bilan xarakterlanadi: R va $F(x)$, ya'ni ($R, F(x)$ juftligi bilan)

$$Y = R + \mu - X$$

bo'lsin, u holda Y tasodifiy kattalik kompaniyaning oxirgi yakuniy kapitalini ifodalaydi. Biz Y tasodifiy kattalikning taqsimot funksiyasini $G(y)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$G(y) = P\{Y < y\}$$

u holda $R + \mu \le y$ da $G(y) \equiv 1$, $R + \mu > y$ da esa

$$G(y) = 1 - F\big((R + \mu - y) + 0\big).$$

Shunday qilib, taqsimot funksiyasi $G(y)$ va $(R, F(x))$ risk holatlari juftligi orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'ladi. Demak, risk holatlari $(R, F(x))$ juftlik o'rniga $G(y)$ ehtimollik taqsimotini o'rganish yetarli bo'ladi. Pirovardida, $(R, F(x))$ risk holatlarini taqqoslash, taqsimot funksiyalari sinfida qandaydir tartib o'rnatish masalasiga keltiriladi.

Yuqorida kiritilgan

$$Y = R + \mu - X$$

miqdor sug'urta kompaniyasining umumiy kapitalini yoki sug'urta faoliyati natijasidan olingan "foydani" ifoda etadi. Shuning uchun ham

$$\psi(s) = P\{Y \le 0\}$$

ehtimollikni sug'urta kompaniyasi uchun kasod (bankrot) bo'lishi ehtimolligi deb tushunish mumkin.

1.7. Zaxira kapitalini shakllantirishda foydalilik funksiyasining roli

Sug'urta kompaniyasi S boshlang'ich zaxira kapitaliga ega bo'lsin. Uning taqsimot funksiyasi $u(y)$ ga teng bo'lsin. Kompaniya n ta mijoz bilan ish olib borsin va X_i – mijozga mos keluvchi mumkin bo'lgan zarar tasodifiy kattaligi bo'lsin. Faraz qilamiz, mijozlar shu ma'noda bir jinsliki, ularning har biri uchun $\bar{u}(x)$ bir xil, ularning boshlang'ich kapitali I ga teng, X_i- tasodifiy miqdorlar bir xilda taqsimlangan.

$$X = X_1 + ... + X_n$$

zararni qoplash uchun lozim bo'lgan jami sug'urta summasi bo'lsin, a esa bitta sug'urta polisining narxi bo'lsin. U holda $D = na$ yig'ilgan sug'urta badali bo'ladi.

Kutilgan foydalilikka yo'naltirib, sug'urta kompaniyasi mijozlarini sug'urtalashga kelishadi. Faraz qilaylik,

$$Eu(S + D - X) \ge u(S)$$

bajarilib, $D^* - D$ sonining eng kichkinasi bo'lsin, ya'ni bu tengsizlik to'g'ri bo'lgani uchun o'xshash tarzda mijoz bu holatda sug'urtalashga o'tadi. Aytaylik,

$$\bar{u}(I - d) \ge E\bar{u}(I - X_i)$$

va $d^* - d$ sonidan kattasi bo'lsin. Bu tengsizlik to'g'riligi uchun $D^* \le nd^*$ bo'lsa, unda sug'urtalash mumkin va $\left[D^*, nd^*\right]$ kesmasidan d sug'urta badali tanlovi muammosi kelib chiqadi. Tanlangan d bitta sug'urta kompaniyasi mavjudligida ko'rinadiki, d^* ga yaqin. Agarda bir qancha sug'urta kompaniyalari konkurensiyasi (raqobat) mavjud bo'lsa, ya'ni sug'urtalash ustida davlat nazorati mavjudligida tanlangan d ga yaqin. Yana oraliq yechimlar ham bo'lishi mumkin.

1.8. Foydalilik funksiyaning empirik aniqlanishi

Sug'urta kompaniyasining mijozi foydalilik funksiyasini empirik aniqlash masalasini ko'raylik. Eng sodda o'zgartirishlar yordamida bu algoritmni sug'urta kompaniyasi uchun foydalanish funksiyasini topishga ham qo'llash mumkin. Empirik ravishda aniqlangan bu algoritm sodda va uni kompyuter yordamida modifikatsiyalash orqali foydalilik funksiyasini xohlagan aniqlik bilan daromadning ixtiyoriy o'zgarish intervalida topish mumkin bo'ladi.

Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasi noma'lum $U(x)$ foydalilik funksiyasiga ega bo'lsin. Uni taxminan yetarli darajadagi aniqlik bilan topish (ko'rish) uchun mijozning risk holatidagi faoliyatini kuzatish imkoniga ega bo'lish kerak bo'ladi.

O'rganilayotgan masala foydalilik funksiysi $U(x)$ ni $[0,s]$ oraliqda taxminan aniqlashdan iborat bo'ladi. Foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ chiziqli almashtirish ma'nosida yagona aniqlangan bo'lgani uchun uni 0 va s nuqtalarda normallashtirish mumkin, ya'ni $a>0$ va b sonlarni shunday tanlash mumkin bo'ladiki,

$$\begin{cases} aU(0)+b=0 \\ aU(s)+b=0 \end{cases}$$

tengliklar sistemasi o'rinli bo'ladi. Ulardan

$$a=\frac{1}{U(s)-U(0)}>0,\ b=\frac{U(0)}{U(0)-U(s)}$$

ekanini topamiz. Demak, eng avvalo,

$$U(0)=0 \text{ va } U(s)=1 \tag{1}$$

deb hisoblash mumkin.

Sug'urta-risk holatini quyidagi "soxta" lotoreya yordamida modellashtirish mumkin. Faraz qilaylik, birinchi qadamda mijozga "lotoreya biletini sotib olsh" taklif etilgan bo'lsin. Buni biz tasodifiy miqdor X_1 bilan aniqlanadigan risk holat deb tushunib, X_1 quyidagi taqsimotga ega deb hisoblaymiz:

$$P(X_1=0)=p_1,\ P(X_1=s)=1-p_1,\ p_1\in(0,1),$$

ya'ni biz uchun ma'lum bo'lgan p_1 ehtimollik bilan lotoreya biletini yutug'i 0, $1-p_1$ ehtimollik bilan esa yutuq s ga teng. Faraz qilamizki, mijoz bu biletga ega bo'lishi uchun x_1 miqdordagi "bilet puli" to'lashga rozi. Oxirgi jumlani

$$X_1 \sim x_1$$

teng kuchlilik munosabati o'rinli deb tushunish mumkin yoki bo'lmasa, sug'urta modeli doirasida

$$(X_1 \Leftrightarrow x_1) \Leftrightarrow EU(X_1)=U(0)p_1+U(s)(1-p_1)=U(x_1).$$

Demak, (1) tengliklarga asosan,

$$U(x_1)=1-p_1, \qquad (2)$$

ya'ni birinchi qadamda $U(x_1)$ qiymat aniqlanadi.

Ikkinchi qadamda mijozga X_2 ko'rinishdagi "lotoreya biletini sotib olish" taklif etiladi:

$$P(X_2=0)=p_2,\quad P(X_2=x_1)=1-p_2,\quad p_2\in(0,1),$$

ya'ni biz uchun ma'lum bo'lgan p_2 ehtimollik bilan lotoreya biletini yutug'i 0, $1-p_2$ ehtimollik bilan esa lotoreya yutug'i x_1 ga teng. Bunda ham faraz qilinadiki, mijoz bu biletga ega bo'lishi uchun x_1 miqdordagi pulni to'laydi. Oxirgi jumladan

$$X_2 \sim x_2$$

ekanligini olamiz, ya'ni

$$EU(X_2)=U(0)p_2+U(x_1)(1-p_2)=U(x_2).$$

Endi (1) va (2) formulalarga asosan

$$U(x_2)=(1-p_1)(1-p_2), \qquad (3)$$

tenglikni olamiz. Shunday qilib, ikkinchi qadamda $U(x_2)$ qiymat aniqlanadi.

Keyingi qadamlarda mijozga X_3, X_4 "lotoreya" biletlari taklif etiladi:

$$P(X_3=x_1)=p_3,\ P(X_3=x_2)=1-p_3,\ p_3\in(0,1)$$
$$P(X_4=x_2)=p_4,\ P(X_4=x_3)=1-p_4,\ p_4\in(0,1)$$

va hokazo. Demak, $U(\cdot)$ foydalilik funksiyasining qiymatlari qadam-qadam bilan "lotoreya biletini sotish" bilan ixtiyoriy chekli sondagi nuqtalarda aniqlash mumkin.

1.9. Errou modeli

Bu punktda Errou tomonidan taklif qilingan sug'urta kompaniyasi mijozi manfaatlari nuqtayi nazaridan tuzilgan sug'urta modeli o'rganiladi.

Sug'urta kompaniyasi mijozining daromadlari "tabiat holatlari" deb ataluvchi tasodifiy faktlarga bog'liq bo'lsin. "Tabiat holatlari" sanoqli sonda bo'lib, k-chi holatning ro'y berish ehtimolligini p_k deb qabul qilsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Mavjud risklarni kamaytirish maqsadida mijoz sug'urta kompaniyasi bilan narxi d bo'lgan kontrakt tuzadi.

Mijozning "tabiat" k - chi holatda bo'lgan holda kontrakt tuzilganiga qadar va undan keyingi daromadlarini mos ravishda a_k va x_k deb belgilaylik. "Tabiat" k - chi holatda bo'lganda sug'urta kompaniyasining mijozga to'laydigan "sug'urta to'lovini" i_k, bu to'lovning o'rta qiymatini E deb olsak, $\alpha = Ed^{-1}$ – miqdor yuklama koeffitsiyenti sifatida qabul qilinadi. Tushunarliki, keltirilgan miqdorlar

$$x_k = a_k + i_k - d, \quad \sum_{k=1}^{\infty} i_k p_k, \quad E = \alpha d, \quad \alpha \in [0, 1],$$

munosabatlar bilan bog'langan bo'ladi.

Mijozning foydalilik funksiyasini $U(x)$ bilan belgilaymiz, ya'ni $U(x)$ – daromad x ning foydaliligi.

Yechiladigan masalaning mohiyati – mijozning yakuniy daromadining o'rta qiymati E va $d$lar fiksirlangan bo'lganda maksimumga erishishi uchun sug'urta to'lovlari $i_k$larni qanday tanlash kerakligidan iborat. Boshqacha aytganda, sug'urta kompaniyasi o'rtacha to'lovlarni turg'unlik (stabillik) xarakterda bo'lishidan manfaatdor va mijozga uning uchun optimal bo'lgan sug'urta variantini taklif qiladi. Shunday qilib, E va d lar fiksirlangan bo'lganda

$$w(d, E) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k U(a_k - d + i_k)$$

miqdorni i_k lar bo'yicha maksimallashtirish kerak bo'ladi.

Quyidagi masalani yechishda foydalilik funksiyasi

$$U'(x) > 0,\ U''(x) \leq 0$$

shartlarni qanoatlantiradi deb hisoblanadi.

Isbot etish mumkinki, izlanayotgan optimal yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$i_k = \begin{cases} \overline{a} - a_k, & \text{agar } k \in A \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } k \notin A \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

bu yerda A to'plam a_k larni $\overline{a}$ dan katta bo'lmagan indekslar to'plami, ya'ni

$$A = \{k : a_k \leq \overline{a}\}$$

va $\overline{a}$ quyidagi

$$\overline{a} = \frac{\sum\limits_{k \in A} p_k a_k + E}{P(A)}, \qquad P(A) = \sum_{k \in A} p_k$$

tenglamani yechimi va u fiksirlangan d ga bog'liq bo'lmaydi.

Errou $w(d, E)$ funksiyaning foydalik funksiyasi $U(x)$ uchun turli xil shartlar bajarilgan holdagi xossalarini o'rgangan va α fiksirlangan bo'lganda $w(d, E)$ funksiyaning maksimumini ta'minlaydigan E va d larning qiymatlarini topgan. Bunda Lagranjning mashhur aniqlanmagan ko'paytiruvchilar metodidan foydalanilgan.

II bob. RISKLARNI TAQQOSLASH

Risklarni taqqoslash metodlarini bayon qilishdan oldin, yana bir marta asosiy tushuncha sifatida qabul qilingan "risk" terminining ma'nosiga qaytamiz. Eslatib o'tamizki, risk deganda, stoxastik holat (tasodifiy hodisalar) bilan bog'liq talofatlar va ularning ro'y berish ehtimolliklari tushuniladi. Aytilgan fikrga matematik nuqtayi nazaridan konkret bo'lgan aniq ma'no berish uchun risklarni biror umumiy ehtimolliklar fazosi (Ω, F, P) dagi tasodifiy miqdorlar deb, agar o'rganiliyotgan tasodifiy miqdorlar sistemasini bitta ehtimolliklar fazosida aniqlash mumkin bo'lmasa, har xil ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlarning taqsimotlarini tushunish kerakligini kelishib olgan edik. Aytilganlardan "eng katta bo'lmagan" risklarni tanlash maqsadida risklarni bir-biridan farq qilish, masalan, bittasini ikkinchisiga nisbatan "ustuvorroq" deb tushunishga yoki umumiy qilib aytganda, risklarni taqqoslash masalasi bilan shug'ullanishga to'g'ri keladi. O'z navbatida, risklarni taqqoslash, ularning ifoda etadigan tasodifiy miqdorlarni yoki ehtimolliklar taqsimotlarini taqqoslash masalalariga (turlariga) reduksiya qilinadi. Bu reduksiyaning o'ziga hosligi shundan iborat bo'ladiki, u haqiqiy sonlarni taqqoslashga hech ham o'xshamaydi (tasodifiy miqdorlar elementar xodisalar funksiyasi, taqsimot funksiyalari esa – haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari bo'lib, uning argumenti tasodifiy hodisa ro'y berganda yuzaga keladigan zararni (talofatni) ifoda qiladi).

Keltirilgan fikrlardan kelib chiqadiki, tasodifiy miqdorlarni (risklarni) taqqoslash, keyingi paytda ahamiyati oshib borayotgan "qarorlar qabul qilish" nazariyasi bilan bog'liqligi yaqqol ko'rinadi. Tasodifiy miqdorlarni yoki ehtimollik taqsimotlarini taqqoslash metodlari tasodifiy miqdorlar to'plamida yoki taqsimot funksiyalari fazosida aniqlangan to'la yoki to'la bo'lmagan "ustuvorliklar" tartiblanishi bilan bevosita bog'liq bo'ladi.

Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasining risklari (daromadi yoki talofatlari) sug'urta holatiga bog'liq holda $a, b, \ldots$, harflar bilan belgilangan bo'lsin ($a, b, \ldots$ lar tasodifiy bo'lmagan miqdorlar). Haqiqiy sonlar to'plamidagi tabiiy bo'lgan "$\leq$" munosabat daromadlar (talofatlar) to'plamida "$\prec$ – ustuvorlik" munosabatini yuzaga keltiradi:

$$a \prec b \Leftrightarrow a \leq b, \tag{1}$$

a daromad b dan "yomon emas" yoki "ustuvorroq" deyiladi, agar b daromad a dan kichik bo'lmasa (daromad qancha katta bo'lsa, shuncha yaxshi).

Aslida esa sug'urta kompaniyasining daromadi yoki talofati $X, Y, \ldots$ tasodifiy miqdorlardan iborat bo'ladi. Demak,

$$X \prec Y$$

munosabat nimani bildiradi (tasodifiy Y daromad X ga nisbatan "ustuvorroq") degan savol o'z-o'zidan yuzaga keladi.

Ko'p hollarda to'la ma'noda tabiiy bo'lib ko'rinadigan munosabat

$$X \prec Y \Leftrightarrow EX \leq EY, \tag{2}$$

ya'ni Y tasodifiy daromad X ga nisbatan "ustuvorroq", agar Y ning matematik kutilmasi X ning matematik kutilmasidan kichik bo'lmasa.

Keltirilgan (2) "ustuvorlik" ni quyidagicha asoslash mumkin: faraz qilaylik, yetarli ko'p vaqtda sug'urta kompaniyasi bir xil risklarini sug'urtalash faoliyati bilan band bo'lgan bo'lsin va X tasodifiy miqdor bu risk yuzaga keltirgan daromadni belgilasin. Bu holatda X tasodifiy miqdorni xarakterlaydigan tasodifiy miqdorni qo'polroq variantda bo'lsa ham qanday qilib baholash mumkin degan savol bilan qiziqaylik. Agar sug'urta kompaniyasi yetarlicha katta n sondagi bir xil va bir-biri bilan bog'lanmagan mijozlarni sug'urtalagan bo'lsa (yoki sug'urta portfeli katta sondagi n ta bir xil va bog'liqsiz kontraktlardan iborat), unda $X_1, \ldots, X_n$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar kompaniyaning daromadlarini ifoda qiladi. Bu holda sug'urta kompaniyasining bitta kontraktdan keladigan o'rtacha daromadi (yoki eslatilgan portfelning daromadi)

$$\overline{X}=\frac{X_1+...+X_n}{n}$$

ko'rinishda bo'ladi. Katta sonlar qonuniga asosan $\overline{X}$ miqdor katta n lar uchun EX matematik kutilmaga yaqin bo'ladi. Shuning uchun tasodifiy daromad X ni uning EX matematik kutilmasi bilan taqqoslash tabiiy bo'ladi, ya'ni (2) munosabat bilan moslanadi. E'tibor qilib o'tish mumkinki, (2) munosabatni sug'urta kompaniyasi mijozi nuqtayi nazardan tuzilgan kontraktlarda risk holatini aniqlanish uchun qo'llash qulay bo'ladi.

Umuman aytganda, (2) munosabat bilan aniqlangan "ustuvorlikni" doim ham haqiqatga yaqin deb bo'lmaydi. Masalan, sug'urta kompaniyasi mijozga quyidagi "o'yin" variantini taklif qilish mumkin:

1) "o'yin" oxirida kompaniya mijozga 50000 dollar to'laydi;

2) kompaniya mijozga tanga tashlashni taklif qiladi. Agar tanga gerb (G) tomoni tushsa kompaniya mijozga 200000 dollar to'laydi, agar tanga raqam (R) tomoni bilan tushsa mijoz kompaniyaga 50000 dollar to'laydi.

Variant 1) dagi riskni X desak, bu tasodifiy miqdor uchun $P(X=50000)=1$. Variant 2) dagi riskni Y desak, u holda

$$Y=\begin{cases}200000, & \text{ehtimolligi}\ \frac{1}{2}\\ -50000, & \text{ehtimolligi}\ \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Demak, $EX=50000, EY=75000$ tengliklarga ega bo'lamiz. Lekin mijozlarning ko'pchiligi tasodifiylikdan holi bo'lgan 1) variantni tanlashgan bo'lar edilar. Keltirilgan misoldagi risk holatini umumlashtiruvchi quyidagi "o'yin" variant; 2) munosabat butunlay noo'rin (absurd) natijalarga ham olib kelishi mumkinligini ko'rsatadi.

2.1. Stoxastik taqqoslash (tartib)

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdor Y tasodifiy miqdor X ga nisbatan stoxastik "ustuvor' deyiladi, agar har qanday x uchun

$$P(X<x)\geq P(Y<x) \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa. Bu munosabat $X \prec_{st} Y$ ko'rinishda belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifga asosan quyidagini aytish mumkin: Taqsimot funksiyasi $F_2(x)$, $F_1(x)$ taqsimotga nisbatan stoxastik kichik emas deyiladi, agar har qanday x uchun $F_1(x) \geq F_2(x)$ bajarilsa va bu munosabat $F_1 \prec_{st} F_2$ ko'rinishda yoziladi. Stoxastik "ustuvorlik' $X \prec_{st} Y$ ni (1) ga teng kuchli ravishda

$$P(X > x) \leq P(Y > x) \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Tushunarliki, $\prec_{st}$ - munosabat to'la bo'lmagan tartib yaratadi.

Teorema 1. Agar $F_1 \prec_{st} F_2$ stoxastik tartib o'rinli bo'lsa, bitta umumiy ehtimollik fazosi (Ω, F, P) da aniqlangan X_1 va X_2 tasodifiy miqdorlar mavjud bo'lib, ular uchun

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \ \forall \omega \in \Omega, \quad P(X_k < x) = F_k(x), \quad k = 1,2$$

munosabatlar bajariladi.

Isbot. Elementar hodisalar fazosi Ω=[0,1], F - [0,1] oraliqdagi borel to'plamlari σ-algebrasi, $P(\cdot)=\lambda(\cdot)$ - Lebeg o'lchovi bo'lsin. Tasodifiy miqdor $X_k(\omega) = F_k^{-1}(\omega), \quad k = 1,2$ deb qabul qilaylik. Eslatib o'tamizki, teskari funksiya

$$F^{-1}(\omega) = \inf\{x : F(x) > \omega\}, \ \omega \in \Omega$$

formula bilan aniqlanadi.

Teoremaning sharti bo'yicha, (2) asosan,

$$F_1(x) \geq F_2(x) \qquad (3)$$

tengsizlik bajariladi. O'z navbatida (3) tengsizlikdan

$$F_1^{-1}(\omega) \geq F_2^{-1}(\omega), \quad \omega \in \Omega \qquad (4)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini olamiz. Oxirgidan esa teoremaning isboti kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$P(X_k < x) = \lambda(\{\omega : F_k^{-1}(\omega) < x\}) = F_k(x)$$

boshqacha aytganda, $X_1 \prec_{lor} X_2$ munosabatdan shunday tasodifiy miqdorlar $X'_k \overset{d}{=} X_k$ mavjud ekanligi va ularning taqsimoti $F_{X_k}(x) = F_{X'_k}(x)$ bo'lib, (4) tengsizlikdan

$$P(\{\omega : X'_1(\omega) \leq X'_2(\omega)\}) = 1$$

tenglik kelib chiqadi. Teorema 1 isbot bo'ldi.

Qiyin bo'lmagan mulohazalar yordamida ishonch hosil qilish mumkinki, 1 ehtimollik bilan o'rinli bo'lgan tartiblashdan stoxastik tartiblash kelib chiqadi, ya'ni $\prec_1$ ustuvorlik $\prec_{st}$ dan kuchli bo'ladi. Bu xulosaga keltirilgan fikrdan umumiyroq bo'lgan quyidagi lemma asos bo'ladi.

Lemma 1. Agar $X_1 \prec_1 X_2$, $X_1' \overset{d}{=} X_2$ munosabat o'rinli bo'lsa, $X_1 \prec_{st} X_2'$ taqqoslash bajariladi.

Isbot. Tasodifiy miqdorlar X_2 va X_2' umumiy taqsimotga ega bo'lishidan lemma 1 quyidagi tenglik va tengsizliklardan kelib chiqadi:

$$F_2(x) = P(X_2' < x) = P(X_2 < x) \leq P(X_1 < x) = F_1(x).$$

Quyidagi teoremada belgilash

$$dF_X(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{agar } X \text{ diskret}, \\ f_X(x), & \text{agar } X \text{ uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa,} \end{cases}$$

qo'llaniladi. Bu yerda $f_X(\cdot)$ tasodifiy miqdor X ning zichlik funksiyasi.

Teorema 2. Shunday musbat $C > 0$ mavjud bo'lib, $x < C$ bo'lganda $dF_X(x) \geq dF_Y(x)$ tengsizlik, $x \geq C$ bo'lganda esa $dF_X(x) \leq dF_Y(x)$ tengsizlik bajarilsin. Bu holda $X \prec_{st} Y$.

Isbot. O'z-o'zidan tushunarliki, $y < C$ bo'lganda

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} dF_X(u) \geq \int_{-\infty}^{y} dF_Y(u) = F_Y(y)$$

tengsizlik, $y > C$ bajarilgan holda esa

$$P(X > y) = 1 - F_X(y) = \int_{y}^{\infty} dF_X(u) \leq \int_{y}^{\infty} dF_Y(u) = 1 - F_Y(y) = P(Y > y)$$

tenglik va tengsizliklar bajariladi. Bulardan $X \prec_{st} Y$ munosabat kelib chiqadi.

Endi stoxastik "ustuvorlik" o'rinli bo'lishi uchun yetarli va zaruriy shartlarni keltiramiz. Buning uchun to'g'ri chiziq R da aniqlangan monoton kamaymovchi $f(x)$ funksiyalar to'plami $K(R)$ ni kiritamiz:

$$K(R) = \{f(x), x \in R, f(x) - \textit{monoton kamaymovchi}\}$$

Teorema 3. Farz qilaylik $f \in K(R)$ va quyida keltirilgan integrallar mavjud bo'lsin. Bu holda

1) agar $F_1 \prec_{st} F_2$ munosabat o‘rinli bo‘lsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)dF_1(u) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(u)dF_2(u) \tag{5}$$

2) aksincha, agar F_1 va F_2 funksiyalar har qanday $f \in K(R)$ uchun (5) shartni qanoatlantirsa,

$$F_1 \prec_{st} F_2$$

munosabat bajariladi.

3) agar haqiqiy funksiya $f(\cdot)$ uchun (5) tengsizlik hamma $F_1 \prec_{st} F_2$ taqsimotlar bo‘lganda bajarilsa, bu funksiya $f(\cdot)$ monoton kamaymovchi bo‘ladi (ya’ni $f \in K(R)$).

Isbot. 1) Faraz qilaylik $F_1 \prec_{st} F_2$ munosabat bajarilib, $f(\cdot)$ funksiya teoremaning shartlarini qanoatlantirsin (ya’ni $f \in K(R)$ va mos integrallar mavjud). Yuqorida biz (3) va (4) tengsizliklarga asoslanib, bitta umumiy ehtimollik fazosida F_1 va F_2 taqsimotlarga ega bo‘ladigan X_1 va X_2 tasodifiy miqdorlar mavjud va ular uchun $P(X_1 \le X_2) = 1$ tenglik bajarilishini isbot etgan edik. Demak, $f \in K(R)$ bo‘lganda

$$P(f(X_1) \le f(X_2)) = 1$$

tenglik o‘rinli va $Ef(X_1) \le Ef(X_2))$. Bu esa (5) tengsizlik bilan teng kuchli, chunki

$$Ef(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)dF_k(u), \quad k = 1, 2.$$

Teoremadagi 2) tasdiqning isboti ham oson. Haqiqatan ham, $E_x(u)$ to‘g‘ri chiziqda $u = x$ nuqtaga joylashgan birlik taqsimot bo‘lsa

$$E_x(\cdot) \in K(R), \ \forall x \in R.$$

Teoremadagi (5) tengsizlikdagi integrallar mavjud va

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_x(u)dF_k = \int_{-\infty}^{\infty} dF_k(u) = 1 - F_k(x), \ k = 1, 2.$$

Demak, bu holda (5) tengsizlik stoxastik taqqoslashning ta’rifiga aylanadi.

3) punktdagi tasdiqni isbotlash uchun to‘g‘ri chiziqdagi $E_{x_1}(\cdot)$ va $E_{x_2}(\cdot)$ birlik taqsimotlarni ko‘ramiz va bunda $x_1 \le x_2$ deb hisoblaymiz. Ochiq ko‘rinadiki,

$E_{x_1} \prec_{st} E_{x_2}$ stoxastik tartib o'rinli va bu munosabat $x_1 \le x_2$ tengsizlik bilan teng kuchlidir. Bevosita ayon bo'ladiki ((5) dan),

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)dE_{x_1}(u) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(u)dE_{x_2}(u) = f(x_2).$$

Demak, oxirgidan $f \in K(R)$ ekanligi kelib chiqadi.

Isbot etilgan teoremadan quyidagi natijaga ega bo'lamiz: agar manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorlar (risklar) uchun $X_1 \prec_{st} X_2$ munosabat o'rinli bo'lsa,

$$EX_1^r \le EX_2^r,\ 0 \le r < \infty,\ EX_1^r \ge EX_2^r,\ r < 0$$

tengsizliklar bajariladi.

Lemma 2. Foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ ga asoslangan

$$X \prec Y \Leftrightarrow EU(X) \le EU(Y)$$

risklarni taqqoslash usuli, $\prec_{st}$-stoxastik tartib bilan teng kuchli bo'ladi.

Keltirilgan 2-lemmadagi tasdiqning isboti juda ham sodda: X va Y orasida stoxastik tartib $X \prec_{st} Y$ o'rinli, $U(\cdot)$ foydalilik funksiyasi bo'lsin. Bu holda $U(\cdot)$ monoton kamaymovchi funksiya ekanligidan $U(\cdot) \in K(R)$ va (5) da $f = U$ deb olib

$$EU(X) \le EU(Y) \tag{6}$$

tengsizlikka, ya'ni foydalilik funksiyasiga asoslangan $X \prec Y$ tartibga ega bo'lamiz. Aksincha, teoremaning 2) va 3) punktlariga asoslanib, (6) munosabatning (5) tengsizlikka teng kuchli bo'lishini keltirib chiqaramiz.

Aytib o'tilganlar o'rganilgan $X_1 \prec_{st} X_2$(yoki $F_1 \prec_{st} F_2$) stoxastik tartibga teng kuchli bo'lgan quyidagi tasdiqlarni keltirish imkonini beradi:

- Har qanday $x \in R$ uchun $F_1(x) \ge F_2(x)$ yoki

$$\overline{F}_1(x) = 1 - F_1(x) \le 1 - F_2(x) = \overline{F}_2(x).$$

Birlik taqsimotlar $E_x(\cdot)$ orqali $\prec_{st}$ -tartib

$$E(E_x(X_1)) \le E(E_x(X_2))$$

ko'rinishida ifoda etilishi mumkin.

- Har qanday $f \in K(R)$ (ya'ni kamaymovchi bo'lmagan va mos integrallar mavjud) funksiya uchun

$$Ef(X_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF_1(x)\le\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF_2(x)=Ef(X_2)$$

tengsizlik o'rinli.

- Stoxastik tartib $X_1\prec_{st}X_2$ har qanday foydalilik funksiyasi $U(\cdot)$ uchun $EU(X_1)\le EU(X_2)$ tengsizlikni bajarilishiga teng kuchli bo'ladi (stoxastik tartibning ko'rinishda ta'rif etilishi aktuar matematika uchun juda muhim hisoblanadi).

2.2. Stop-loss tartibi

Quyida biz risklar uchun yuqoridagi stoxastik tartibga nisbatan kuchsizroq bo'lgan taqqoslash usulini keltiramiz. Bu usulni ham teng kuchli bo'lgan har xil ta'riflar orqali kiritilishi mumkin (ba'zi hollarda uni ikkinchi darajali stoxastik tartib – second degree stochastic order deb ham nomlashadi).

Ta'rif. Risk X_1 boshqa X_2 riskga nisbatan stop-loss ma'nosida "ustuvor" deyiladi, agar harqanday $d>0$ uchun

$$E(X_1-d)^+\le E(X_2-d)^+ \tag{1}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa (bu yerda har qanday a son uchun $a^+=\max(0,a)$ belgi ishlatiladi). X_1 va X_2 tasodifiy miqdorlar orasidagi stop-loss munosabatni $X_1\prec_{s\ell}X_2$ ko'rinishida belgilanadi.

Keltirilgan risklarni taqqoslash usulining nomini quyidagicha sharhlab o'tish mumkin). Agar X – sug'urta kompaniyasining ma'lum muddat davomidagi (odatda bir yil) yakuniy to'lov miqdori bo'lib, qandaydir $d>0$ son uchun $X\le d$ tengsizlik bajarilsa, sug'urtalangan shaxsga hech qanday to'lov berilmaydi (ya'ni biror baxtsiz (sug'urta) hodisasi ro'y berishi natijasida yetkazilgan zarar d dan kichik bo'lsa, u qoplanmaydi). Bu d sonni sug'urta shartnomasining garovi yoki kompaniyaning sug'urta faoliyatidagi sarflangan xarajatlarni hisobga oladigan chegara deb tushunish mumkin. Demak sug'urta kompaniyasining to'lov miqdori

$$\left(X-d\right)^+=\begin{cases}X-d, & X>d,\\ 0, & X\le d.\end{cases}$$

Aytib o'tilgan qoida bilan tuzilgan sug'urta shartnomalari stop-loss (Stop loss – zarar to'xtatiladigan) nomi bilan ataladi. Undagi d son sug'urta franshizasi hisoblanib, uni belgilash amaldagi yuridik qonunlar asosida amalga oshiriladi.

Quyidagi lemma risklarni (tasodifiy miqdorlar) taqqoslash stop-loss usulining mohiyatini oydinlashtiradi.

Lemma 1. Agar X tasodifiy miqdor uchun EX mavjud bo'lsa,

$$E|X-d|^{+} = E\max(d,X) = \int_{d}^{\infty}(1-F(x))dx \tag{2}$$

tenglik o'rinli.

Bu yerda $F(x)=F_X(x)=P(X<x)$ tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasi.

Isbot. Agar $S(x)=1-F(x)$ deb belgilab, bo'laklab integrallash formulasidan foydalansak, har qanday $A>d$ bo'lganda

$$\int_{d}^{A}(x-d)dF(x)=(a-d)S(A)+\int_{d}^{A}S(x)dx$$

tenglikni yozish mumkin va

$$0<(A-d)S(A)<AS(A)=A\int_{A}^{\infty}dF(x)\leq\int_{A}^{\infty}xdF(x)$$

baho o'rinli bo'ladi. Demak

$$\int_{d}^{\infty}(x-d)dF(x)=\lim_{A\to\infty}\int_{d}^{A}S(x)dx=\int_{d}^{\infty}(1-F(x))dx.$$

Lemma isbot etildi.

Yuqoridagi ta'rifda keltirilgan stop-loss munosabati hamma tasodifiy miqdorlar sinfida qismiy tartib o'rnatadi. Haqiqatan ham bu munosabatning tranzitivlik va refleksivlik xossalari oson tekshiriladi. "Ustuvorlik" $\prec_{Sl}$ ning antisimmetriklik xossasi bajarilishini quyidagicha tekrishib ko'rish mumkin. Lemmadagi (2) tenglikka asosan

$$E(X_k-d)^{+}=\int_{d}^{\infty}(1-F_k(x))dx,\ k=1,2 \tag{3}$$

va oxirgidan bir vaqtda $X_1\prec_{Sl}X_2$, $X_2\prec_{Sl}X_1$ munosabatlar bajarilganda

$$\int_d^{\infty} \bar{F}_1(x)dx = \int_d^{\infty} \bar{F}_2(x)dx \qquad (4)$$

tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi $(\bar{F} = 1 - F)$. Demak, (3) va (4) tengliklarga asosan $F_1 = F_2$. Bu yerda stop-loss tartib $(\prec_{sl})$ham, stoxastik tartib $(\prec_{St})$ kabi tasodifiy miqdorlar orasidagi tartib, mos taqsimot funksiyalarini taqqoslash tartibi deb tushuniladi. Stop-loss tartibi ma'nosida nisbatan "yengil qoldiq $(\bar{F}(x) = 1 - F(x))$" ga ega bo'lgan taqsimotlar "ustuvor" bo'ladi.

Lemma 2. Munosabat $X \prec_{St} Y$ dan $X \leq_{St} Y$ o'rinli bo'lishligi kelib chiqadi.

Bu lemmaning isboti (3) va (4) tengliklardan bevosita oson ko'rinadi.

Lemma 3. Munosabat $X \prec_{St} Y$ har qanday $d > 0$ uchun $E\max(d, X) \leq E\max(d, Y)$ tengsizlik bajarilishiga teng kuchli bo'ladi. Bu xulosa

$$E\max(d, X_1) = d + \int_d^{\infty} (1 - F_k(x)dx, k = 1, 2, \qquad (5)$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Endi K(R) kamaymovchi bo'lmagan funksiyalar sinfining quyidagi to'plamostisi

$$K_1(R) = \{f;\ f \in K(R),\ f - \text{ qavariq }\}$$

ya'ni $K(R)$ ga kiruvchi qavariq funksiyalar sinfini ko'ramiz.

Teorema 1. Agar $F_1 \prec_{St} F_2$ munosabat bajarilsa, har qanday $f \in K_1(R)$ uchun

$$Ef(X_1) \leq Ef(X_2).$$

Bu teoremaning isbotida yuqoridagi lemmalardan (lemma 1-3) foydalaniladi.

Teorema 2. Tasodifiy miqdorlar X_1 va X_2 lar uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) bu tasodifiy miqdorlarning o'rta qiymatlari o'zaro teng, ya'ni $EX_1 = EX_2 = m$.

2) Shunday $[x_1,x_2]$ oraliq mavjud bo'lib $(x_1 \leq x_2)$, bu oraliqda mos taqsimot funksiyalari o'zaro teng, ya'ni

$$F_1(x) = F_2(x),\ x \in [x_1, x_2],$$

shu bilan bir vaqtda $x < x_1$ bo'lganda $F_1(x) \leq F_2(x)$, $x > x_2$ bo'lganda esa $F_1(x) \geq F_2(x)$, tengsizliklar o'rinli bo'lsin. U holda $F_1 \prec_{St} F_2$ munosabat bajariladi.

Isbot. Lemma 3 ning isbotidagi (5) tenglikga asosan $x \geq x_1$ bo'lganda

$$E\max(x, X_1) \leq E\max(x, X_2)$$

tengsizlik bajariladi. Oson ko'rinadiki $x \leq x_2$ bo'lganda esa

$$E\min(x, X_1) \geq E\min(x, X_2). \qquad (6)$$

Sodda mulohazalar yordamida ishonch hosil qilish mumkinki, har qanday $d > 0$ uchun $EX_k = m$ bo'lganda

$$E\min(d, X_k) + E\max(d, X_k = EX_k + d = m + d \qquad (7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi va undan foydalanib, hamma x lar uchun bajariladigan

$$E\max(X_1, x) \leq E\max(X_2, x) \qquad (8)$$

bahoni olamiz. Endi teorema 2 ning isboti lemma 3 va (6), (8) munosabatlardan kelib chiqadi.

Quyidagi teoremada taqqoslanadigan tasodifiy miqdorning o'rta qiymatlarini teng bo'lishi talab etilmaydi.

Teorema 3. Faraz qilaylik X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin: $EX \leq EY$ va shunday $C \geq 0$ mavjud bo'lsinki, $x < c$ bo'lganda $F_X(x) \leq F_Y(x)$ tengsizlik, $x \geq c$ bo'lganda esa $F_X(x) \geq F_Y(x)$ tengsizlik bajarilsin. U holda $X \prec_{St} Y$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Quyidagi

$$m_X(d) = E(X-d)^+ = \int_d^\infty (1 - F_X(u))\,du$$

stop-loss almashtirishni (funksionalni) kiritamiz va

$$\Delta(d) = m_Y(d) - m_X(d) = \int_d^\infty (F_X(u) - F_Y(u))\,du$$

deb belgilaymiz. Agar $d_1 < d_2 < c$ bo'lsa

$$\Delta(d_1) - \Delta(d_2) = \int_{d_1}^{d_2} (F_X(u) - F_Y(u))du \le 0$$

tengsizlik bajariladi. Demak $d < c$ bo'lganda $\Delta(d)$ o'suvchi bo'ladi. Aksincha, $d \ge c$ bo'lganda esa funksiya $\Delta(d)$ kamayadi. O'z-o'zidan ravshan bo'lgan $m_X(0) = EX$ tenglikdan $\Delta(0) \ge 0,\ \Delta(\infty) = 0$ munosabatlarni olamiz. Oxirgllarni va teoremadagi $EX \le EY$ shartlarni hisobga olgan holda har qanday $d > 0$ uchun $m_X(d) \le m_Y(d)$, ya'ni $X \prec_{St} Y$ munosabatga kelamiz.

Eslatib o'tamizki, $X \overset{d}{=} Y$ tenglik X va Y tasodifiy miqdorlarni bir xil taqsimlanganligini, ya'ni $P(X < x) = P(Y < x)$ tenglikni ifoda etadi. Tasodifiy miqdorlar orasidagi $\prec_{St}$ – stop-loss va bir xil umumiy taqsimotga ega bo'lishlik $\left(\overset{d}{=}\right)$ munosabatlarini aniqlashtirishga yo'naltirilgan quyidagi teorema qiziqarli va foydali bo'ladi.

Teorema 4. Agar $X \prec_{St} Y$ munosabat va $EX = EY,\quad DX = DY$ tengliklar bajarilsa, $X \overset{d}{=} Y$, ya'ni X va Y tasodifiy miqdorlar bir xil umumiy taqsimotga ega bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartlarida kelib chiqadiki, $EX^2 = EY^2$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bo'laklab integrallash yordamida

$$EX^2 = \int_0^\infty x^2 dF_X(x) = -\int_0^\infty x^2 d(1 - F_X(x)) =$$

$$= 2\int_0^\infty x(1 - F_X(x))dx = -2\int_0^\infty x dm_X(x) = 2\int_0^\infty m_X(x)dx = EY^2$$

tengliklarni yoza olamiz. Demak

$$\int_0^\infty (m_X(x) - m_Y(x))dx = 0 \qquad (9)$$

tenglik bajariladi. Lekin teoremaning shartiga asosan $X \prec_{St} Y$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun (9) dagi integral ostidagi ayirma $m_X(x) - m_Y(x) \ge 0$ bo'ladi. Demak $m_X(x) = m_Y(x)$ tenglik bajariladi.

Endi teoremaning isboti $m(x)$ funksiyalar mos taqsimotni bir qiymatli aniqlashidan kelib chiqadi.

2.2.1. Stop-loss tartiblashning invariantlik xossalari

1. Eng avvalo taqsimotlarning kuchsiz yaqinlashishining stop-loss tartibi saqlanib qolishini qayd etamiz.

Teorema 1. Faraz qilaylik ikkita

$$\{F_{1,n}, n\geq 1\},\ \{F_{2,n}n, n\geq 1\}$$

taqsimotlar ketma-ketligi mos ravishda F_1 va F_2 taqsimotlarga kuchsiz yaqinlashsin, ya'ni

$$F_{1,n}\xrightarrow{d}F_1,\ F_{2,n}\xrightarrow{d}F_2,\ n\to\infty .$$

Bulardan tashqari $(\overline{F}=1-F)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \overline{F}_{k,n}(u)du=\int_0^\infty \overline{F}_k(u)du,\ k=1,2$$

shart bajarilib, har qanday $n\geq 1$ uchun $F_{1,n}\prec_{St}F_{2,n}$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, $F_1\prec_{St}F_2$.

Isbot. Haqiqatan ham teoremaning shartlari bajarilsa, har qanday x uchun

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^\infty \overline{F}_{k,n}(u)du=\int_x^\infty \overline{F}_k(u)du,\ k=1,2$$

limit munosabatlar o'rinli bo'ladi. Oxirgidan esa hamma $x\geq 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^\infty \overline{F}_{1,n}(u)du\leq \lim_{n\to\infty}\int_x^\infty \overline{F}_{2,n}(u)du,$$

ya'ni

$$\int_x^\infty \overline{F}_1(u)du\leq \int_x^\infty \overline{F}_2(u)du$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak $F_1\prec_{St}F_2$ munosabat bajariladi.

2. Endi taqsimotlarning kompozitsiyasini ko'ramiz. Eslatib o'tamizki X va Y yig'indisining taqsimoti

$$F_{X+Y}(x)=P\left(X+Y<x\right)=F_X*F_Y=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(x-u)dF_Y(u)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F_Y(x-u)dF_X(u)=F_Y*F_X$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda qo'llanilgan $(*)$ amalini taqsimotlarning kompozitsiyasi deb atashadi.

Lemma 1. Tasodifiy miqdorlarni qo'shishda stop-loss tartibi saqlanadi.

Isbot. Oson ko'rish mmkinki stop-loss tartibi to'g'ri chiziqdagi

$$F_{S\ell}=\{\ell_x(u)\},\quad x\in R$$

funksiyalar sinfi bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$\ell_x(u)=\int_{-\infty}^{u}E_x(y)dy=(u-x)^+$$

va haqiqatan ham, $d>0$ uchun

$$E|X-d|^+=\int_{-\infty}^{\infty}(x-d)^+dF_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell_d(x)dF_X(x)=\int_{d}^{\infty}\left(1-F_X(x)\right)dx$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bevosita ko'rinadiki, $F_{S\ell}$ funksiyalar sinfi argumentni siljishiga nisbatan invariant bo'ladi. Oxirgi tengliklardan kelib chiqadiki

$$\left(X\prec_{S\ell}Y\right)\Leftrightarrow\left(E\ell_d(X)\le E\ell_d(Y)\right).$$

Endi lemma 1 ning isboti $F_{S\ell}$ funksiyalar sinfining invariant bo'lishligidan va oxirgi teng kuchlilik munosabati bilan yakunlanadi. Shunday qilib, agar $X_1,...,X_n$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar, $Y_1,...,Y_n$ ham bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib

$$X_i\prec_{S\ell}Y_i,\qquad i=1,2,...,n$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\prec_{S\ell}\sum_{i=1}^{n}Y_i.$$

3. Taqsimotlarning "qorishmasi" amalida stop-loss tartibi saqlanadi. Birinchi navbatda taqsimotlarning "qorishmasi" tushunchasini eslatib o'tamiz. Quyidagi θ parametrga bog'liq

bo'lgan taqsimotlar uyushmasi $\{F(x,\theta)\}$ ni ko'raylik. Bu yerda $x\in R, \theta\in\Theta\subseteq R^m$ deb hisoblaymiz. Demak $F(x,\theta)$ taqsimot $R\times\Theta$ to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy fiksirlangan $\theta=\theta_0\in\Theta$ uchun $F(x,\theta_0)$ taqsimot funksiyasi bo'ladi. Parametrik fazo Θ va uning Borel to'plamlari sistemasi ($\sigma-$algebrasi) $\sum$ dan iborat $(\Theta,\sum)$ juftlik o'lchovli fazo deb ataladi. Aytilganlardan kelib chiqadiki, $F(x,\theta)$ funksiya x bo'yicha taqsimot, θ argument bo'yicha esa o'lchovli funksiya deb hisoblanadi, ya'ni har qanday x va s haqiqiy sonlar uchun

$$\{\theta; F(x,\theta)<c\}\in\sum$$

munosabat o'rinli. O'lchovli $(\Theta,\sum)$ fazoda aniqlangan ehtimollik o'lchovi $Q(\cdot)$ uchun

$$H(x)=\int_{\Theta}F(x,\theta)Q(d\theta),\ x\in R$$

formula bilan aniqlangan taqsimot $H(x)$, $F(x,\theta)$ni $Q-$ ehtimollik bilan "qorishmasi" deb ataladi. Masalan, aytaylik $A(x)$ yarim to'g'ri chiziq $(0,\infty)$ da aniqlangan ehtimollik taqsimoti bo'lsin. U holda

$$H(x)=\int_0^{\infty}\Phi\left(x/\sqrt{u}\right)dA(u)=\int_{(0,\infty)}\Phi\left(x/\sqrt{u}\right)A(\mathrm{d}u) \qquad (1)$$

formula bilan aniqlangan taqsimot normal taqsimotni A- ehtimollik bo'yicha "qorishmasi" deb tushuniladi. Oson ko'rinadiki, agar standart normal taqsimot uchun $\Phi_{0,1}(x)=\Phi(x)$ bo'lsa, parametrlari $(0,\sigma^2)$ bo'lgan normal qonunning taqsimoti

$$\Phi_{0,\sigma^2}(x)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar oxirgida parametr σ^2 $(0,\infty)$ oraliqda qiymatlar qabul qiladigan $u(\omega)=\sigma^2(\omega)$ tasodifiy miqdor deb tushunilib, uning taqsimotini

$$A(x)=P\left(\sigma^2(\omega)<x\right),\ x>0$$

bilan belgilasak, (1) formula bilan aniqlangan taqsimot, normal va $A(x)$ taqsimotlarning "qorishmasi" bo'ladi. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \ldots$ berilgan bo'lib, mos taqsimot funksiyalari ketma-ketligi $F_1, F_2, \ldots$ bo'lsin. Butun natural qiymatlarni qabul qiluvchi ν tasodifiy miqdor uchun, $\nu, X_1, X_2, \ldots$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. Ushbu

$$X_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} I(\nu = n) X_n$$

tasodifiy miqdor, $\{X_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlikni ν tasodifiy momentda to'xtatilgan qiymati deyiladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun

$$F_\nu(x) = P(X_\nu < x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_\nu < x, \nu = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(\nu = n) P(X_n < x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu tenglikda

$$p_n = P(\nu = n), \ n = 1, 2, \ldots$$

va

$$F_\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x). \tag{2}$$

Oxirgi (2) tenglik bilan aniqlangan taqsimot $F_\nu(x), \{F_n, n \geq 1\}$ taqsimotlarni $\{p_n, n \geq 1\}$ ehtimolliklar taqsimoti bilan "qorishmasi" bo'ladi. Endi X_i va Y_i tasodifiy miqdorlar mos ravishda F_i va G_i taqsimot funksiyalariga ega bo'lsin $(i = 1, 2, \ldots)$ va $\{P_i, i \geq 1\}$ ketma-ketlik ehtimollik taqsimotini tashkil qilsin, ya'ni ular uchun

$$p_i \geq 0, \quad i \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Teorema 2. Agar $F_i \prec_{st} G_i$, $i \geq 1$ munosabatlar bajarilsa

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i F_i \prec_{st} \sum_{i=1}^{\infty} P_i G_i.$$

Isbot. Bernulli taqsimotiga ega bo'lgan $\{I_i, i \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlarni ko'ramiz, ya'ni I_i lar uchun

$$P(I_i = 1) = p_i = 1 - P(I_i = 0), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, \; X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,$$
$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, \; Y_1, Y_2, \ldots, \; Y_n, \ldots$$

bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlardan tashkil topgan bo‘lsin. Quyidagi tasodifiy miqdorlarni

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} I_i X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{\infty} I_i Y_i$$

ko‘ramiz. Agar ularni taqsimot funksiyalarini mos ravishda F va G deb belgilasak,

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} P_i F_i, \quad G = \sum_{i=1}^{\infty} P_i G_i$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Demak, F va G lar $\{F_i, i \geq 1\}, \{G_i, i \geq 1\}$ taqsimot sistemalarining "qorishmalari" bo‘ladi. Aytib o‘tilganlarga asoslanib quyidagini yoza olamiz:

$$E(X-d)^+ = \int_d^{\infty} (x-d)dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \int_d^{\infty} (x-d)dF_i(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_i E(X_i - d)^+ \leq \sum_{i=1}^{\infty} P_i E(Y_i - d)^+ = E(Y-d)^+.$$

Demak $X \prec_{St} Y$ munosabat o‘rinli.

4. Tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisi (tasodifiy yig‘indilar).

Teorema 3. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari

$$N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$
$$N, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$$

bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlardan tashkil topgan bo‘lsin. Bu yerda N butun natural qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo‘lib,

$$P_n = P(N = n), \; n = 1, 2, \ldots$$

taqsimotga ega bo‘lsin. Agar $\{X_n, n \geq 1\}, \{Y_n, n \geq 1\}$ ikkita o‘zaro bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, $X_i \prec_{St} Y_i$ munosabat bajarilsa,

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{St} \sum_{i=1}^{N} Y_i.$$

Isbot. To‘la ehtimollik formulasi va bog‘liqsizlik shartlaridan foydalanib

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i < x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i < x,\ N = n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < x\right) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x) p_n \qquad (3)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu yerda

$$F(x) = P(X_i < x) = P(X_1 < x)$$

X_i - tasodifiy miqdorlarning umumiy taqsimoti.

Yuqoridagi (3) tenglikni isbotlashda o'tkazilgan mulohazalarni so'zma-so'z qaytarib

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i < x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x) p_n \qquad (4)$$

tenglikni hosil qilamiz va unda $G(x) = P(Y_1 < x)$. Teoremaning shartiga asosan

$$F(x) \prec_{St} G(x) \qquad (5)$$

stop-loss o'rinli bo'ladi. Endi (3)-(5) munosabatlar ko'rsatadiki, teorema 2ning shartlari

$$F_i = F^{*i},\ G_i = G^{*i},\ i = 1,2,...$$

bo'lganda bajariladi. Demak, teorema 2 ga asosan

$$\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x) p_n \prec_{St} \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x) p_n .$$

Teorema 3 isbot etildi.

Teorema 4. Faraz qilaylik $\{X_n, n \geq 1\}$ risklar bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan, musbat butun qiymatli N_1 va N_2 tasodifiy miqdorlar esa ularga bog'liq bo'lmasin. Agar $N_1 \prec_{St} N_2$ bo'lsa,

$$S_{N_1} \prec_{St} S_{N_2},\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n = 1,2,...$$

stop-loss munosabati o'rinli bo'ladi.

Isbot. Manfiy bo'lmagan $d \geq 0$ sonini fiksirlangan deb hisoblab,

$$f(n) = E(S_n - d)^+$$

funksiyani ko'ramiz. Agar har qanday $d \geq 0$ uchun

$$Ef(N_1) \leq Ef(N_2) \qquad (6)$$

tengsizlik bajarilsa, teorema isbot etilgan bo'ladi. Buning uchun esa (6) tengsizlikdagi $f(\cdot)$ funksiyani kamaymaydigan va qavariq ekanligini ko'rsatish yetarli (stop-loss taqqoslashning ma'lum xossalaridan biriga asosan). Odatda risk $X_i \geq 0$ – manfiy bo'lmagan miqdor deb tushunilgani uchun, $S_{n-1} \leq S_n$, demak $f(n-1) \leq f(n)$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $f(n)$ funksiya kamaymaydigan bo'ladi.

Funksiya $f(n)$ ni qavariq bo'lishligini isbotlash uchun

$$f(n)-f(n-1) \geq f(n-1)-f(n-2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini tekshiramiz. Aytaylik, $x, y \in R, z \geq 0$ bo'lsin. Bu holda

$$(x+y+z-d)^{+}+(x-d)^{+} \geq (x+y-d)^{+}+(x+z-d)^{+}. \qquad (7)$$

Bunga oxirgi tengsizliklarni har ikki tomonini $a^{+}=\max(0, a)$ ifoda orqali olib chiqish yetarli bo'ladi. Endi (7) tengsizlikda $x=S_{n-2}, y=X_{n-1}, z=X_n$ deb hisoblaymiz va unda

$$S_{n-2}+X_{n-1}+X_n=S_n, \quad S_{n-1}+X_{n-1}=S_{n-1}, \quad S_{n-2}+X_n \stackrel{d}{=} S_{n-1}$$

ekanligidan foydalasak

$$f(n)+f(n-2) \geq 2f(n-1)$$

tengsizlikni olamiz. Oxirgidan $f(n)$ funksiyani qavariq bo'lishligi kelib chiqadi.

Natija. Faraz qilaylik, $\{X_n, n \geq 1\}$ va $\{Y_n, n \geq 1\}$ ikkita bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari bo'lsin. Butun va musbat qiymatli N_1 va N_2 tasodifiy miqdorlar mos ravishda $\{X_n\}$ va $\{Y_n\}$ larga bog'liq bo'lmasdan $N_1 \prec_{st} N_2$ munosabat bajarilsin. U holda

$$\sum_{i=1}^{N_1} X_i \prec_{st} \sum_{i=1}^{N_2} Y_i.$$

Isbot. Haqiqatan ham, teorema 3 asosan

$$\sum_{i=1}^{N_1} X_i \prec_{st} \sum_{i=1}^{N_1} Y_i \prec_{st} \sum_{i=1}^{N_2} Y_i.$$

2.2.2. Murakkab Puasson taqsimotlari va Koks taqsimoti

Tasodifiy yig'indi

$$S_N = X_1 + ... + X_N$$

qo'shiluvchilar soni N parametri λ ga teng bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. Agar X_i bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar umumiy $F(x) = P(X_1 < x)$ taqsimot funksiyasi bilan taqsimlangan bo'lsa (4) formulaga asosan

$$P(S_N < x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ma'lumki Puasson taqsimotining hosil qiluvchi funksiyasi

$$\pi_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$$

Oxirgidan Puasson taqsimoti uchun hosil qiluvchi momentlar funksiyasi

$$g_N(z) = Ee^{zN} = \pi_\lambda\left(e^z\right) = \exp\left\{\lambda\left(e^z - 1\right)\right\} \qquad (2)$$

ekanligini olamiz. Tasodifiy yig'indi S_N uchun

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0,1,2,...$$

bo'lgan holda, S_N Puasson tasodifiy yig'indisi deyiladi. Agar S_N yig'indidagi qo'shiluvchi X_i larning hosil qiluvchi momentlar funksiyasini $f(z) = Ee^{zX_1}$ deb belgilasak, Puasson yig'indisi S_N ning hosil qiluvchi momentlar funksiyasi

$$f_N(z) = Ee^{zS_N} = \pi_\lambda(f(z)) = e^{\lambda(f(z)-1)} \qquad (3)$$

formula bilan aniqlanishini topamiz.

Tasodifiy Puasson yig'indisining taqsimotini murakkab Puasson taqsimoti deb ataladi. Formula (2) dan hosila olish yordamida oson kelib chiqadiki

$$EN = DN = \lambda.$$

Bu tengliklar diskret taqsimotlar sinfida Puasson taqsimotini oxirigacha xarakterlaydi.

Agar $EX_1 = a$ deb belgilasak (3) dan

$$ES_N = \lambda a$$

mashhur Vald ayniyatini hosil qilamiz. Quyidagi jumlalar Puasson tasodifiy yig'indilarini o'rganishda foydali bo'ladi.

Lemma 2. Parametrlari $\lambda_1,...\lambda_n$ bo'lgan n ta bog'liqsiz Puasson tasodifiy miqdorlarining yig'indisi, parametri $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Isbot. Agar $S_n = X_1 + ... + X_n$ bo'lib, X_i bog'liqsiz parametrlari λ_i bo'lgan Puasson taqsimotlariga ega bo'lsa, (2) dan

$$Ee^{zS_n} = Ee^{z}\left(X_1 + ... + X_n\right) = Ee^{zX_1}...Ee^{zX_n} = e^{\lambda_1\left(e^z-1\right)}...e^{\lambda_n\left(e^z-1\right)} = e^{(\lambda_1+...+\lambda_n)\left(e^z-1\right)}$$

lemmaning tasdiqini isbot etadigan tenglikni olamiz.

Teorema 5. Faraz qilalaylik, biror N hodisaning ro'y berishlar soni, parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. Hodisalar m ta guruh hodisalariga ajratilgan bo'lib, aniq hodisaning i - nchi guruhga tegishli bo'lishlik ehtimolligi boshqalarga bog'liq bo'lmagan holda P_i ga teng bo'lsin $(P_1 + ... + P_m = 1)$. Agar N_i deb i - nchi guruhga tegishli bo'lgan hodisaning ro'y berishlari sonini belgilasak, $N_1,...,N_m$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz, parametri λP_i bo'lgan Puasson qonuni bilan taqsimlanadi.

Isbot. To'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P\left(N_i = n_i\right) = \sum_{n=n_i}^{\infty} P\left(N_i = n_i / N = n\right) P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=n_i}^{\infty} C_n^{n_i} P_i^{n_i}\left(1 - P_i\right)^{n-n_i} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{\left(P_i\lambda\right)^{n_i}}{n_i!} e^{-P_i\lambda}.$$

Bundan tashqari

$$P\left(N_1 = n_1,...,N_m = n_m\right) = P\left(N_1 = n_1,...,N_m = n_m / N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right) \cdot P\left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right) =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)!}{n_1!...n_m!} P_1^{n_1}...P_m^{n_m} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{m} n_i}}{\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)!} e^{-\lambda} = \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(P_i\lambda\right)^{n_i}}{n_i!} \cdot e^{-P_i\lambda}.$$

Oxirgi tenglik $N_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ larni Puasson tasimotlariga ega bo'lishligini va bog'liqsizligini isbotlaydi.

Agar Puasson taqsimotining parametri λ ni $(0,\infty)$ oraliqda taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblab, uni λ ning taqsimoti bo'yicha olingan "qorishmasiga" Koks taqsimoti deyiladi. Bu taqsimotning qat'iy ta'rifini quyidagicha keltirish mumkin: faraz qilaylik, $(0,\infty)$ oraliqda qiymatlar qabul qiluvchi, struktiv deb ataluvchi shunday Λ tasodifiy miqdor mavjud bo'lib, N tasodifiy miqdorning $\Lambda=\lambda$ bo'lgandagi shartli taqsimoti, parametri λ bo'lgan Puasson qonuni bilan aniqlansa, bu N tasodifiy miqdor Koks taqsimotiga ega deyiladi. Demak, $W(\lambda)=P(\Lambda<\lambda)$ - tasodifiy miqdor Λ ning taqsimot funksiyasi bo'lsa,

$$P(N=n)=\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}dW(\lambda), \quad n=0,1,... \tag{7}$$

Quyidagi teoremada qo'shiluvchilar soni N Koks taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy yig'indilarda stop-loss tartibi saqlanishi isbot etiladi.

Teorema 6. Tasodifiy miqdorlar $\{X_n, n\geq 1\}$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan bo'lsin. Ikkita

$$Z_j=\sum_{i=1}^{N_j} X_i, \quad j=1,2$$

tasodifiy yig'indilardagi qo'shiluvchilar soni N_j lar, Λ_j struktiv funksiyalari $(j=1,2)$ uchun $\Lambda_1 \prec_{St} \Lambda_2$ munosabat bajarilsin. Bu holda $Z_1 \prec_{St} Z_2$.

Isbot. Teorema 4 ga asosan, $N_1 \prec_{St} N_2$ munosabatning bajarilishini tekshirish yetarli bo'ladi. Buning uchun oldin $k\leq d<k+1$ bo'lganda, $E(N_j-d)^+$ ifodani hisoblaymiz

$$E(N_j-d)^+=\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k-d+k)P(N_j=n)=$$

$$=E(N_j-k)^+ +(d-k)P(N_j\geq k+1),$$

ya'ni d ning funksiyasi sifatida, bu matematik kutilma $k\leq d<k+1$ oraliqda chiziqli o'zgaradi. Shuning uchun ham

$$E(N_j-k)^+, \ j=1,2, k\geq 0$$

ifodani o'rganish yetarli bo'ladi. Yuqoridagi (7) tenglikdan va gamma-taqsimotning ko'rinishidan foydalanib quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$E\left(N_j-k\right)^+=\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k)P\left(N_j=n\right)=$$

$$=\int_0^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}dW_j(\lambda)=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\lambda}(\lambda-u)\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-u}dudW_j(\lambda)=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}e^{-u}\left[\int_u^{\infty}(\lambda-u)dW_j(\lambda)\right]du.$$

Bu yerdagi qavs ichidagi ichki integral $E\left(\Lambda_j-u\right)^+$ ga teng bo'lgani uchun, $N_1\prec_{St}N_2$ munosabat teoremadagi $\Lambda_1\prec_{St}\Lambda_2$ shartdan kelib chiqadi.

Natija. O'rta qiymatlar teng bo'lganda manfiy binomial taqsimot, Puasson taqsimotiga nisbatan ko'proq riskga ega bo'ladi.

Isbot. Oldingi teoremadan foydalanishga harakat qilamiz.

Faraz qilaylik, N_1 tasodifiy miqdor parametri λ ga teng Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. Bu holda (7) ko'rinadiki N_1 ga mos keluvchi struktiv tasodifiy miqdor Λ_1 uchun

$$P\left(\Lambda_1=\lambda\right)=1.$$

Eslatib o'tamizki, manfiy binomial taqsimot $NB(\alpha,q)$ ikkala α va $q(0<q<1)$ parametrlarga bog'liq bo'lib

$$P\left(N_2=k\right)=C_{k+\alpha-1}^{k}\,q^k(1+q)^{-(\alpha+k)}\qquad(8)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $k=0,1,2,...$ qiymatlarni qabul qiladi. Agar $\alpha=1$ bo'lsa, (8) dan ko'rinadiki

$$P\left(N_2=k\right)=\overline{q}^k\,\overline{p},\ k=0,1,2,...$$

geometrik taqsimotni aiqlaydi va bu yerda

$$\overline{p}=\frac{1}{1+q},\quad \overline{q}=1-\overline{p}=\frac{q}{1+q}.$$

Faraz qilaylik, struktiv tasodifiy miqdor Λ_2 ning zichlik funksiyasi

$$P_{\alpha,q}(\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha-1}}{q^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda/q}$$

bo‘lsin. Bu holda (7) formula

$$P(N_2=k)=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{k+\alpha-1}}{k!\Gamma(\alpha)q^{\alpha}}e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{q}\right)}d\lambda=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{q^k}{(1+q)^{\alpha+k}}$$

bo‘lib, oxirgi formula (8) bilan ustma-ust tushadi. Endi $EN_2=\alpha q,\ DN_2=\alpha\cdot q(1+q)$ bo‘ladi va $\alpha q=\lambda$ bo‘lsa, $N_1\prec_{st}N_2$ munosabat bajariladi. $(EN_1=EN_2, DN_1<DN_2)$.

Teorema 7. O‘rta qiymatlar teng bo‘lganda, binomial taqsimot Puasson taqsimotiga nisbatan kamroq riskka ega bo‘ladi.

Isbot. Quyidagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisi

$$S_n=I_{A_1}+\ldots+I_{A_n}$$

bo‘lib, bu yerda I_{A_j} – bog‘liqsiz va Bernulli

$$P\left(I_{A_j}=1\right)=q_j=1-P\left(I_{A_j}=0\right),\ j=1,\ldots,n$$

taqsimotiga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. Boshqacha aytganda, S_n – binomial-puasson sxemasidagi n ta bog‘liqsiz tajribalarda “yutuqlar” soni, har bir j – nchi tajribada “yutuq” ro‘y berishi ehtimolligi q_j bo‘lsin $(j=1,\ldots,n)$. Tasodifiy miqdor B_n esa, oddiy Bernulli sxemasida har bir tajribadagi “yutuq”

$$\overline{q}=\frac{1}{n}(q_1+\ldots+q_n)$$

ehtimollik bilan ro‘y beradigan, n ta bog‘liqsiz tajribalardagi “yutuqlar” sonini belgilansin. Demak, B_n parametrlari n va $\overline{q}$ bo‘lgan $Bi(n,\overline{q})$ binomial taqsimotiga ega bo‘ladi. O‘z-o‘zidan ko‘rinadiki

$$EB_n=n\overline{q}=\sum_{i=1}^{n}q_i=ES_n\,.$$

Endi $S_n \prec_{St} B_n$ munosabat o'rinli ekanligini induksiya orqali isbotlaymiz. Agar tajribalar soni $n=1$ bo'lsa, $S_1 \overset{d}{=} B_1$, ya'ni induksiyaning asosi to'g'ri bo'ladi. Hamma ro'y berishlar ehtimolliklari

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \overline{q},$$

o'zaro teng bo'lsa, bu holda ham $S_n \overset{d}{=} B_n$. Agar bu ehtimolliklar o'zaro teng bo'lmasa, kamida bir-biridan farq qiladigan ikkita q_1 va q_2 ehtimolliklar mavjud bo'ladi. Aniqlik uchun $q_1 < \overline{q} < q_2$ deb hisoblab, $S_{n-1} \prec_{St} B_{n-1}$ musobatning bajarilishini faraz qilamiz.

Endi o'zaro bog'liqsiz va oldingi kiritilgan tasodifiy miqdorlardan ham bog'liq bo'lmagan I_{C_1}, I_{C_2} tasodifiy miqdorlarni ko'ramiz. Ularning taqsimotlarini

$$P(I_{C_1} = 1) = \overline{q} = 1 - P(I_{C_1} = 0),$$

$$P(I_{C_2} = 1) = q_1 + q_2 - \overline{q} = P(I_{C_2} = 0)$$

formulalar bilan aniqlaymiz. Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki

$$I_{A_1} + I_{A_2} \prec_{St} I_{C_1} + I_{C_2}$$

munosabat bajariladi. Demak, stop-loss taqqoslashning kompozitsiya amaliga nisbatan invariant bo'lishligidan

$$S_n = I_{A_1} + I_{A_2} + \ldots + I_{A_n} \prec_{St} I_{C_1} + I_{C_2} + I_{A_3} + \ldots + I_{A_n}.$$

Lekin $q_1 + q_2 - \overline{q} + q_3 + \ldots + q_n = n\overline{q} - \overline{q} = (n-1)\overline{q}$ tenglik o'rinli bo'lib, undan induksiya farazigi asoslangan holda $I_{C_2} + I_{A_3} + \ldots + I_{A_n} \prec_{St} B_{n-1}$ munosabatni yoza olamiz. Oxirgidan $I_{C_1} + B_{n-1} \overset{d}{=} B_n$ tenglikni hisobga olib, $S_n \prec_{St} B_n$ munosabat o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. Demak, induksiya oxiriga yetdi.

Tasodifiy miqdor B_n taqsimoti (binomial $Bi(n,\overline{q})$) S_{n+1} tasodifiy miqdorning taqsimoti $q_i = \overline{q},\ i = \overline{1,n},\ q_{n+1} = 0$ bo'lgan holdagilar bilan bir xil. Yuqorida isbot etilgan induksiyaga asosan

$$S_{n+1} \prec_{St} B_{n+1}$$

va B_{n+1} tasodifiy miqdor binomial

$$Bi\left(n+1, \sum_{i=1}^{n+1} q_i / n+1\right) = Bi(n+1, n\overline{q} / n+1)$$

taqsimotga ega bo‘ladi. Agar $nq=\lambda$ belgilashni kiritib, $Bi(n,\lambda/n)$ binomial taqsimotning parametri λ bo‘lgan Puasson taqsimotiga yaqinlashishi haqidagi klassik teoremadan va taqsimotlarning sust yaqinlashuvida stop-loss munosabatini saqlanish xossasidan foydalansak, teoremaning to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin bo‘ladi.

2.3. Taqsimotlarni taqqoslash

Aktuar matematikada taqsimotlar sinfida (fazosida) ustuvorlik ma’nosida turli xil taqqoslash usullarini kiritishga to‘g‘ri keladi. Yuqorida biz tasodifiy miqdorlar uchun taqqoslashning 1 ehtimollik bilan (yoki “deyarli hamma joyda” "$\leq_{a.s}$"), "$\leq_{stop}$","$\leq_{s-l}$" usullari bilan tanishib o‘tdik. Keltirilgan usullar uchun umumiy bo‘lgan kamchiliklardan biri – taqqoslanayotgan tasodifiy miqdorlarni bitta ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\Im,P)$da aniqlanishi kerak bo‘lishi bilan bog‘liq. Taqsimotlar fazosi

$$\overline{F}=\{F,G,...\}$$

uchun quyida keltiriladigan taqqoslash usullarida mos tasodifiy miqdorlarni umumiy ehtimollik fazosida aniqlanishi shart bo‘lmaydi.

$\overline{F}$to‘plamning elementlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar to‘plami $\overline{F}\times\overline{F}=\overline{F}^2$da aniqlangan "$\leq$" munosabat ustuvorlik deb aytiladi, agarda bu munosabat quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) refleksivlik, ya’ni har qanday $F\in\overline{F}$ uchun $F\leq F$,
2) tranzitivlik, ya’ni agar $F\leq G, G\leq Q$ bo‘lsa, $F\leq Q$,
3) har qanday $(F,G)\in\overline{F}^2$uchun yoki $F\leq G$, yoki $G\leq F$.

Juftlik $(\overline{F},\leq)$ ustuvorlik maydoni deb ataladi.

Ustuvorlik hisobi. Keltirilgan "$\leq$" munosabat 1)-3) xossalar orqali aksiomatik ravishda aniqlanadi va $(\overline{F},\leq)$ maydon elementlari “sifatini” aniqlash uchun sonli xarakteristikalar topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, ta'riflangan "ustuvorlik" $(\preceq)$ taqsimotlar fazosi $\overline{F}$da tartiblash munosabati bo'ladi.

Ta'rif 1. Munosabat "$\preceq$" hisoblanuvchi deb ataladi, agar $\overline{F}$da shuningdek $U(F)$ funksional mavjud bo'lib

$$F \preceq G \Leftrightarrow U(F) \leq U(G)$$

ekvivalalentlik munosabati o'rinli bo'lsa. Bunday $U(\cdot)$ funksional ustuvorlik indikatori deb ataladi va bu funksional yagona bo'lmaydi: agar $g(x)$ haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da aniqlangan qa'tiy o'suvchi funksiya bo'lsa,

$$V(F) = g(U(F)) \tag{1}$$

funksional ustuvorlik munosabati "$\preceq$" indikator bo'ladi. Aytilgan fikrni teskarisi ham o'rinli.

Lemma. Aytaylik U va F funksionallar $(\overline{F},\preceq)$ maydon elementlari uchun indikatorlar bo'lsin. U holda $U(F)$, $F \in \overline{F}$ funksional qiymatlari to'plami Kda shuningdek qat'iy o'suvchi funksiya $g(x)$ aniqlanishi mumkinki, (1) tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Agar $x \in \mathbb{R}$ bo'lsa, $A_x = \{F : U(F) = x\}$ to'plamni aniqlaymiz. U va F lar bitta ustuvorlik munosabati "$\preceq$" uchun indikatorlar bo'lgani sababli, $V(F) = V(F')$ tenglik hamma $F, F' \in A_x$ lar uchun o'rinli bo'ladi.

Endi $g(x) = V(F), F \in A_x$, funksiyani aniqlaymiz. Bu holda (1) tenglik o'rinli. Agar $x, y \in K$ va $x < y$ bo'lsa, u holda $F \in A_x, G \in A_y$ taqsimotlar uchun $F \preceq G$ munosabat bajariladi. Demak

$$g(x) = V(F) < V(G) = g(y)$$

munosabatlar o'rinli bo'lib, $g(x)$ funksiya qa'tiy o'suvchi bo'ladi.

Misol 1. Haqiqiy sonlar juftliklari to'plami $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ("tekislikda") "leksiografik tartib" deb ataluvchi $<_0$ –munosabatni quyidagicha kiritish mumkin: agar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ bo'lsa, bu holda

$$(x_1,x_2) <_0 (y_1,y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \text{yoki } x_1 = y_1 \text{ va } x_2 < y_2 .$$

Uncha murakkab bo'lmagan mulohazalar yordamida kiritilgan "$<_0$" munosabatni hisoblanuvchi emasligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Misol 2. Ikkinchi tartibli momentlari mavjud bo'lgan taqsimotlar

$$\overline{F_2} = \left\{ F; \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty \right\}$$

fazosini ko'raylik. $F \in \overline{F_2}$ taqsimot uchun

$$m_F = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),\ \sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_F)^2 dF(x)$$

belgilashlarni kiritaylik.

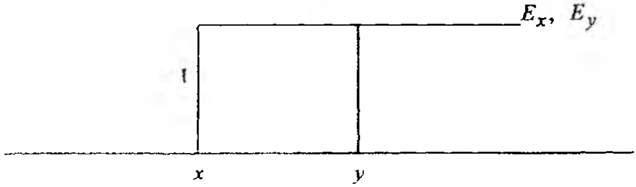
Agar $\overline{F_2}$ to'plamiga kiruvchi taqsimotlarni "kelgusida foydali" risklarni (tasodifiy miqdorlarni) taqsimot funksiyalari deb tushunsak, bu holda matematik kutilmani (funksional m_F) maksimallashtirish, $m_F = m_G$ bo'lganda esa mos dispersiyalarni minimallashtirish masalalari yuzaga keladi. Qayd qilib o'tilgan masalalar o'z navbatida

$$F < G \Leftrightarrow (m_F, \sigma_F^{-1}) <_0 (m_G, \sigma_G^{-1})$$

munosabatlarni $\overline{F_2}$ ga kiruvchi ixtiyoriy F va G taqsimotlar uchun o'rinli bo'lishi bilan teng kuchli bo'ladi. Bu usul bilan aniqlangan $F < G$ munosabat hisoblanuvchi bo'lmaydi.

Agar E_x deb, bir elementli $\{x\}$ to'plamda joylashgan "buziladigan" ehtimollik taqsimotining taqsimot funksiyasini tushunsak, u holda quyidagi shakldan ko'rinadiki,

$$(x \le y) \Rightarrow (E_x \ge E_y), \tag{2}$$



Ko'p hollarda taqsimot funksiyasi F ni biror bir tasodifiy miqdor (risk) X ning taqsimoti deb tushuniladi va uning natijasida (2) munosabatni kuchaytirish mumkin (ixtiyoriy taqsimot uchun).

Ixtiyoriy $F,G \in \overline{F}$ taqsimotlar uchun $F \leq G$ munosabat o'rinli deymiz, agar

$$F(x) \geq G(x), x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

tengsizlik bajarilsa.

Keltirilgan "$\leq$" munosabat F va G taqsimotlarga ega bo'lgan X va Y tasodifiy miqdorlar (risklar) uchun aniqlangan $X \leq_{stoh} Y$ munosabat bilan teng kuchli bo'ladi. Buni simmetrik taqsimotlar uchun namoyish etamiz. Eslatib o'tamizki, F taqsimot $x = m$ nuqtaga nisbatan simmetrik deyiladi, agar hamma $x > 0$ uchun

$$F(m-x) = F(m+x+0)$$

tenglik bajarilsa. Agar tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsa, oxirgi tenglik

$$P(X-m > x) = P(X-m < -x),\ x > 0$$

ekanligini bildiradi. Bu yerda $x = m$ simmetriya markazi hisoblanadi.

Agar $F,G \in \overline{F}$ taqsimotlar umumiy simmetriya markazi m ga ega bo'lib,

$$F(x) \geq G(x),\ x \leq m, \tag{4}$$

tengsizlik bajarilsa, $F \leq G$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda F va G simmetrik taqsimotlarga ega bo'lsa, (4) munosabat hamma $x > 0$ lar uchun

$$P(|X-m| > x) \geq P(|Y-m| > x),$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatadi.

Misol 3. Matematik kutilmasi m, dispersiyasi $\sigma^2 > 0$ bo'lgan normal taqsimotni $\Phi_{m,\sigma}$ deb belgilaylik va $F = \Phi_{m\sigma_1}, G = \Phi_{m\sigma_2}, \sigma_1 < \sigma_2$ bo'lsin.

Bu holda $F \leq G$ munosabat o'rinli, chunki

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),\ \Phi(x) = \Phi_{0,1}(x)$$

tengliklar va $\sigma_1 < \sigma_2$ tengsizlik (4) ni hamma $x$lar uchun to'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Olib borilgan mulohazalar asosida simmetrik bo'lmagan yoki har xil simmetriya markaziga ega bo'lgan taqsimotlarni taqqoslash oson masalalar emasligiga ishonch hosil qilish mumkin. Masalan, Φ_{m_1,σ_1} va Φ_{m_2,σ_2} taqsimotlarni parametrlar $m_1 > m_2, \sigma_1 < \sigma_2$ tengsizliklarni qanoatlantirganda taqqoslash uchun, matematik kutilmalarni kattalashtirish "xohishini", dispersiyalarni (qiymatlarni tarqoqligi) kamaytirish "xohishi" bilan kelishtirishiga to'g'ri keladi. Bu "kelishtirish" jarayonida esa ko'p xatoliklar yuzaga kelishi mumkin.

2.3.1. Taqsimotlarni taqqoslashning hisoblanuvchi usullari

Ikkinchi tartibli momentlari mavjud bo'lgan taqsimotlar

$$\overline{F_2} = \left\{ F, F \in \overline{F}, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty \right\}$$

sinfini ko'ramiz va

$$m_F = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),\ \sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_F)^2 dF(x),\ F \in \overline{F_2}$$

belgilashlarni kiritamiz.

Taqsimotlar sinfi $\overline{F_2}$da(m_F, σ_F) juftliklarni taqqoslashga asoslangan ustuvorlik munosabatlarini o'rganamiz. Umumiy nuqtayi nazardan qaraganda, Misol 2 dagi leksiografik munosabat juda "qo'pol" - bu holda $F < G$ deb hisoblanadi, agar $m_F < m_G$ tengsizlik o'rinli bo'lsa va bunda $\sigma_F$va $\sigma_G$lar orasidagi munosabatlar hisobga olinmaydi.

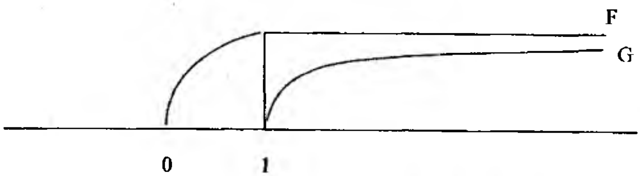
Aniqlangan $\overline{F_2}$ sinfda taqsimotlarning hisoblanuvchi bo'lgan ustuvorlik munosabatlarini o'rganamiz va bu masala $\overline{F_2}$ dagi taqsimotlarda aniqlangan $U(F)$funksionallarni o'rganish bilan teng kuchli bo'ladi. Ko'pincha tatbiqiy tadqiqotlarda ustuvorlik indikatori sifatida

$$U(F) = m_F - k\sigma_F,\ k > 0 \qquad (5)$$

funksional qabul qilinadi.

Agar, masalan $\overline{F_2} = \{\Phi_{m,\sigma}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$ bo'lib, faqat normal taqsimotlardan tashkil topgan bo'lsa, (5) funksional "qolganlariga nisbatan hech ham yomon bo'lmaydi". Lekin yetarli darajada keng bo'lgan $\overline{F_2'} \subseteq \overline{F_2}$ taqsimotlar sinfi uchun (5) funksionaldan foydalanib bo'lmaydi.

Misol 4. Faraz qilaylik, F taqsimot $[0,1]$ oraliqda, G taqsimot esa $[1,\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lsin. Quyidagi



sxematik shakldan $(F(1+) - F(1-) = 1)$ ko'rinadiki, har qanday $x \in \mathbb{R}$ uchun (3) tengsizlik o'rinli bo'ladi $(F(x) \geq G(x))$. Demak, $F \leq G$ ustuvorlik munosabati bajariladi. Aytib o'tilganlar bilan bir vaqtning o'zida dispersiyasi yetarli darajada katta bo'lgan G taqsimotni shuningdek tanlash mumkinki (matematik kutilma kichik bo'lganda), uning uchun

$$U(G) \leq U(F)$$

tengsizlik har qanday $k > 0$ bo'lganda bajariladi. Demak, bu holda (5) kriteriydan foydalanish mumkin bo'lmaydi.

Endi taqsimotlarni taqqoslashda (ustuvorlik munosabati "$\leq$" ni kiritishida) argumentlari m_F va σ_F lardan iborat bo'lgan qanday $f(m_F, \sigma_F)$ funksiyalardan foydalanish mumkinligi haqidagi masalani ko'ramiz. Boshqacha aytganda qanday $f(\cdot,\cdot)$ funksiyalar orqali ustuvorlik indikatorini

$$U(F) = f(m_F, \sigma_F)$$

ko'rinishda yozish mumkinligini o'rganamiz.

Yuqorida qayd qilib o'tilgan fikrlardan kelib chiqadiki, $f(\cdot,\cdot)$ funksiya birinchi argument bo'yicha o'suvchi, ikkinchi argument bo'yicha esa kamayuvchi bo'lishi kerak, ya'ni

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)>0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)<0 \tag{6}$$

shartlar bajarilishi talab etiladi.

Lemma. Agar (6) shartlar bajarilsa, har qanday F taqsimot uchun, shunday G taqsimotni topish mumkinki, F va G taqsimotlar uchun (3) munosabat o'rinli, lekin

$$f\left(m_G,\sigma_G^2\right)<f\left(m_F,\sigma_F^2\right).$$

Isbot. Tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasi $F(x)\ (F_X=F)$ bo'lsin. Boshqa tasodifiy **miqdor** Y ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$Y=X+\varepsilon^2 Z_0,\quad 0<\varepsilon<1,\quad Z_0=\begin{cases}\varepsilon^{-3}, \textit{ ehtimolligi } \varepsilon^3,\\ 0, \textit{ ehtimolligi } 1-\varepsilon^3,\end{cases}$$

va X, Z_0 tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz bo'lsin. Demak, bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$EX=m_F=m,\ DX=\sigma_F^2=\sigma^2, EZ_0=1,$$

$$DZ_0=EZ_0^2-\left(EZ_0\right)^2=\frac{1}{\varepsilon^3}-1\sim\varepsilon^{-3},$$

$$EY=m+\varepsilon^2,\ DY=DX+\varepsilon^4 DZ_0=\sigma^2+\varepsilon+o(\varepsilon)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Endi Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiayasini $G=F_Y$ deb belgilasak,

$$G(x)=F_Y(x)=\int_0^\infty F_X(x-u)\,dP\left(\varepsilon^2 Z_0<u\right)\le F_X(x)=F(x)$$

ekanligidan $F(x)\ge G(x)$ tengsizlik hamma x uchun bajarlishi kelib chiqadi. Demak $X\le_{stoh} Y$ ustuvorlik munosabati o'rinli ekan. Agar

$$f_1(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f_2(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

belgilashlarni kiritsak, (6) shartga va yuqoridagiga asosan

$$f\left(m_G,\sigma_G^2\right)=f\left(m,\sigma^2\right)+f_1\left(m,\sigma^2\right)\varepsilon^2+f_2\left(m,\sigma^2\right)\varepsilon+o\left(\varepsilon\right)=$$
$$=f\left(m,\sigma^2\right)+\left|f_1\left(m,\sigma^2\right)\right|\varepsilon^2-\left|f_2\left(m,\sigma^2\right)\right|\varepsilon+o\left(\varepsilon\right)$$

yoza olamiz. Demak, shuningdek $\varepsilon>0$ topiladiki

$$f\left(m_G,\sigma_G^2\right)<f\left(m,\sigma^2\right)=f\left(m_F,\sigma_F^2\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot etilgan lemmadan kelib chiqadiki, $U\left(F\right)=f\left(m_F,\sigma_F^2\right)$ funksional, $f\left(x,y\right)$ funksiya (6) shartni qanoatlantirganda ham ustuvorlik indikatori bo'lmas ekan. Keyingi punktlarda taqsimotlarni taqqoslashning bir nechta "yaxshi" kriteriylarini ko'rib o'tamiz. Bunday kriteriylardan ikkitasi mavjud. Birinchisi – marjinalistik deb atalib, u "qulay" $U\left(F\right)$funksionalning qiymatlari "foydalilikning" sonli baholari sifatida qabul qilinadi. Ikkinchi yo'nalishning tarafdorlari (ularni ordinalist deb atashadi) har bir ustuvorlikka juda ko'p indikator funksionallar mos kelishini hisobga olgan holda, bevosita taqsimotlarning $"\le"$(ustuvorlik) munosabatlarini o'zini o'rganishni afzal deb hisoblaydilar. Aytilganlardan kelib chiqadiki, marjinalistlar o'z tasdiqlarini $U\left(F\right)$funksional termini orqali, ordinalistlar esa bevosita $"\le"$munosabat orqali ifoda etadilar.

Lekin ordinalistlarning yakuniy mulohazalari ustuvorlik $"\le"$ munosabatini belgilovchi $U\left(F\right)$indikator funksionallarni tafsiflashga asoslangan bo'lsada (bu yerda farqlik teoremalar shartlarida va $U\left(F\right)$ funksionallarni ularni belgilovchi teoremalar bilan almashtirishda yuzaga keladi), ordinalistik yo'nalish ko'pchilik tomonidan "zamonaviyroq" deb hisoblanadi. Keltirilgan fikrga qaramasdan quyida biz, "yaxshi" indikatorlik funksionallaridan ba'zilarini ta'riflab o'tamiz, chunki ular isbotlangan teoremalarning shartlarini matematik ma'nosini izohlashda va teoremalarni isbotlash jarayonini soddalashtirish imkonini beradi.

Bayon etiladigan mulohazalarning mantiqiy ma'nosi quyidagicha: oldin $U\left(F\right)$funksionallarga qo'yiladigan sodda va tushunarli bo'lgan shartlarni keltiramiz, so'ngra esa qanday funksionallar bu shartlarni qanoatlantirishini o'rganamiz.

2.3.2. Uzluksizlik shartlari

O'z-o'zidan tushunarliki, $U(F)$va $U(G)$funksionallar yaqin bo'lganda, qandaydir ma'noda taqqoslanayotgan F va G taqsimotlar yaqin bo'ladi. Bu fakt qat'iy matematik ma'noda, taqsimotlar ketma-ketligi $F_n \to F$ bo'lganda, $U(F_n)$va $U(F)$ funksionallar yaqin bo'lishi (o'zaro uzluksizlik mosligi) o'rinli ekanligini bildiradi va asosiy masala bu yaqinlik qanday konkret ma'noda ro'y berishini tushuntirishdan iborat bo'ladi. Qo'yilgan savolga javob bir qiymatli bo'lmasdan, u aytib o'tilgan holatni o'ziga xos xususiyatlari bilan bog'liq bo'ladi.

Misol 5. Faraz qilaylik "iqtisodiy faoliyat yurituvchi shaxsning " daromadi qat'iy narxi $\bar{x}$ bo'lgan tovarni sotib olishga mo'ljallangan bo'lsin. Agar aytib o'tilgan daromadni $x$deb belgilasak, $x < \bar{x}$ – son qanchalik $\bar{x}$ga yaqin bo'lmasin, $E_x$va $E_{\bar{x}}$ birlik taqsimotlarning "foydaliklari" $U(E_x)$va $U(E_{\bar{x}})$lar o'zaro yaqin bo'lishi shart bo'lmaydi. Bunga $E_{\bar{x}-1/n}$va $E_{\bar{x}}$ taqsimotlarni taqqoslash orqali ishonch hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham, $x_n < \bar{x}$, $x_n \to \bar{x}$bo'lganda $E_{x_n} \to E_{\bar{x}}$ kuchsiz yaqinlashish o'rinli, lekin $U(E_{x_n}) \to U(E_{\bar{x}})$yaqinlashish o'rinli bo'lmasligi mumkin. Umumiy nuqtayi nazardan qaralganda kuchsiz yaqinlashish (taqsimot bo'yicha) $F_n \to F$dan $U(F_n) \to U(F)$yaqinlashish kelib chiqmaydi ya'ni $U(F)$funksional kuchsiz yaqinlashish $F_n \to F$ga nisbatan uzluksiz bo'lishi shart emas. Ammo

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0 \qquad (*)$$

tekis yaqinlashish o'rinli bo'lsa, bu holda $U(F_n) \to U(F)$o'rinli bo'lishini kutish tabiiy hisoblanadi, ya'ni $U(F)$ funksional taqsimot funksiyalarini tekis yaqinlashishiga nisbatan uzluksiz bo'lishi mumkin. O'z navbatida, taqsimotlarning tekis yaqinlashishini xaridorning sotuvchi kamroq narxda sotishga ko'ndirganligi yoki yetmagan pul miqdorini birovdan qarz olish imkoniyatlari bilan sharhlash mumkin.

Quyida ikkita bir xil tipdagi shartlarni keltiramiz:

Shart V1. $U(F_n) \to U(F)$, agar $F_n \to F$ kuchsiz ma'noda.

Shart V2. $U(F_n) \to U(F)$, agar har qanday borel to'plami A uchun $F_n(A) \to F(A)$.

O'z-o'zidan ko'rinadiki, **V1**$\Rightarrow$**V2**. Qayd qilib o'tamizki, agar $U(\cdot)$taqsimotlarning tekis yaqinlashishi (*) ga nisbatan uzluksiz bo'lsa, **V2** shart bajariladi.

2.3.3. O'rta qiymat kriteriysi

Agar Xva Y – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning taqsimot funksiyalari F,Gbo'lsa, $F \circ G$ simvol bilan $\frac{X+Y}{2}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini belgilaymiz. U holda

$$(F \circ G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(2x - y)\,dG(y) = F(2x) * G(x).$$

Belgi $\circ$ bilan aniqlangan amalni kompozitsiya amali $*$ga asoslangan o'rta qiymat deb tushunish mumkin. Bu amal bog'liqsiz ravishda "daromad" olishning ikkita varianti mavjud bo'lgan holga mos keladi va ko'p hollarda quyidagi shart tabiiy bo'lib ko'rinadi.

Shart S. Agar $U(F) = U(G) = t$ bo'lsa, $U(F \circ G) = t$.

Eslatib o'tamizki, yuqorida va quyidagi o'rganadigan taqsimotlar sinfi hamma birlik (buzilgan) E_x taqsimotlarni o'z ichiga oladi va (2) munosabatga asosan har qanday ustuvorlik indikatori $U(F)$uchun $U(F_x)$funksiya o'suvchi bo'ladi.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $\overline{F_0}$ taqsimot sinfi quyidagi shartlar bilan aniqlangan bo'lsin:

a) Hamma $F \in \overline{F_0}$uchun matematik kutilma $m_F$mavjud va chegaralangan,

b) Taqsimot $F \circ F \in \overline{F_0}$.

d) Taqsimotlar sinfi $\overline{F_0}$ da aniqlangan $U(F)$ qandaydir uzluksiz va kamayuvchi funksional bo'lsin.

Bu holda, agar hamma x lar uchun $U(E_x)=x$ ya'ni "deterministik daromadning foydaliligi shu daromadning o'zi bilan ifodalansa"

$$U(F)=m_F \tag{8}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Oxirgi (8) tenglikning isboti oson. Haqiqatan ham, (7) da $F=E_x$ deb olsak, $m_{E_x}=x$ ekanligidan $v(x)=U(E_x)$ bo'ladi.

Endi $v(x)$ funksiyaning kamayuvchi bo'lishligi (2) dan, $U(\cdot)$ ning uzluksizligi esa **V1** shartdan kelib chiqadi. Qo'shimcha qilib, oxirgi jumlani tushuntiramiz. Agar $x_n \to x$ bo'lsa, $E_{x_n} \to E_x$ kuchsiz ma'noda. Demak

$$v(x_n)=U(E_{x_n})\to U(E_x)=v(x).$$

Endi (7) formulani isbot etamiz. Taqsimotlar sinfi $\overline{F_0}$ da ixtiyoriy taqsimot F ni olib $G_1,G_2,\dots,G_n,\dots$ – taqsimotlar ketma-ketligini $G_1=F\circ F, G_2=G_1\circ G_1,\dots,G_n=G_{n-1}\circ G_{n-1}$ rekkurent tengliklar orqali tashkil qilamiz. Shart b) ga asosan $G_n\in\overline{F_0}$ hamma $n=1,2,\dots$ uchun, c) shartga ko'ra esa

$$U(F)=U(G_1)=U(G_2)=\dots \tag{9}$$

Induksiya orqali ishonish mumkinki, G_n taqsimot, tasodifiy miqdor

$$\eta_n=\frac{1}{2^n}(X_1+X_2+\dots+X_n)$$

uchun taqsimot funksiyasi bo'ladi. Bu yerda X_i lar o'zaro bog'liqsiz va umumiy F taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Shart a) ga asosan $|EX_1|=|m_F|<\infty$. Demak $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n,\dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi va ma'lum Xinchin teoremasiga asosan

$$\eta_n \xrightarrow{P} m_F=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$$

munosabat bajariladi. O‘z navbatida oxirgidan kuchsiz ma’noda

$$G_n \to E_{m_F},\ n \to \infty$$

ekanligini olamiz. Bu munosabatdan va **V1** shartdan foydalanib

$$U(G_n) \to U\left(E_{m_F}\right),\ n \to \infty$$

bo‘lishiga ishonch hosil qilamiz. Endi (9) tengliklar sistemasiga asosan

$$U(F) = U\left(E_{m_F}\right) = v\left(m_F\right).$$

Teorema 1 isbot bo‘ldi.

E’tirof etlshga to‘g‘ri keladiki, isbotlangan teorema 1 ni, ko‘rilgan taqsimotlar sinfi $\overline{F_0}$”anchagina tor bo‘lgandagina” qo‘llash mumkin. Buni quyida keltirilgan jumla ham tasdiqlaydi.

Teorema 1 ning natijasi. Agar $\overline{F_1}$ –matematik kutilmalari chekli bo‘lgan taqsimotlar sinfi bo‘lib, hamma taqsimotlar sinfi $\overline{F_0}$ da aniqlangan $U(F)$funksional **V1** va **S** shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$U(F) = const.$$

Isbot. Har qanday a va b sonlar uchun shunningdek $\{F_n, n \geq 1\}$ taqsimotlar ketma-ketligini topish mumkinki, $m_{F_n} \to a$, lekin kuchsiz ma’noda $F_n \to E_b\,(n \to \infty)$. Masalan, F_n sifatida

$$X_n = \begin{cases} b + (a-b)n, & ehtimollik\ {}^{1}\!/_{n}, \\ b, & ehtimollik\ 1 - {}^{1}\!/_{n}, \end{cases}$$

tasodifiy miqdorning taqsimotini olish mumkin. Bu holda

$$m_{F_n} = EX_n = \left[b + (a-b)n\right] \cdot \frac{1}{n} + b\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a,$$

$$X_n \xrightarrow{P} b,\ n \to \infty$$

Teorema 1 dagi (7) ga va **V1** shartga asosan

$$v(b) = v\left(m_{E_b}\right) = U\left(E_b\right) = \lim_{n\to\infty} U\left(F_n\right) = \lim_{n\to\infty} v\left(m_{F_n}\right) = v(a)$$

ya’ni $v(b) = v(a)$ har qanday a va b uchun, demak, $v(\cdot) = const$.

Isbot etilgan natijadan kelib chiqadiki, teorema 1 faqat $U(F) = m_F$ funksional uzluksiz bo'lgan taqsimotlar sinfi uchungina foydali bo'lishi mumkin xolos (ya'ni $F_n \to F$ kuchsiz ma'noda bo'lganda, $m_{F_n} \to m_F$, $n \to \infty$). Aytilganlardan kelib chiqadiki, albatta, $\overline{F}_1$ sinfdagi taqsimotlarni taqqoslashda matematik kutilmalardan foydalanish mumkin, lekin bunda m_F funksionalni uzluksizligiga aloqador bo'lgan mulohazalardan foydalanish mumkin emas.

2.3.4. Foydalilik funksiyasi orqali taqqoslash

Avvalgi bo'limdagi (8) indikator

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x) \tag{10}$$

funksionalning xususiy ko'rinishi bo'ladi va bu yerda $u(x)$ – qandaydir $(-\infty, \infty)$da integrallanuvchi bo'lgan funksiya. (10) funksionaldagi $u(x)$ funksiya foydalilik funksiyasi deb ataladi. Keltirilgan ta'rif oldin eslatib o'tilgan foydalilik funksiyasining aniqlanishiga qarama-qarshi bo'lmasdan, bu funksuyaning asl ma'nosiga mos keladi.

Endi (10) tenglik bilan aniqlangan foydalilik indikatori $U(F)$ funksionalning ba'zi xossalarini keltiramiz:

(D). Manfiy bo'lmagan $\alpha, \beta \geq 0$ sonlar uchun $\alpha + \beta = 1$ tenglik bajarilsin va F, G taqsimotlar $U(\cdot)$ funksionalning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsin. U holda

$$U(\alpha F + \beta G) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)d[\alpha F(x) + \beta G(x)] = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x) + \beta \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dG(x)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Demak,

$$U(\alpha F + \beta G) = \alpha U(F) + \beta U(G). \tag{11}$$

Isbot etilgan (11) tenglikni qanoatlantiruvchi $U(\cdot)$ larni affin funksionallari deb atashadi. **(D)** xossani esa quyidagicha sharhlash mumkin. Taqsimoti F bo'lgan daromad α ehtimollik, taqsimoti G

bo‘lgan daromad esa $\beta = 1 - \alpha$ ehtimollik bilan tanlansin. Bu holda yakuniy daromadning taqsimoti $Q = \alpha F + \beta G$ bo‘ladi va uni F, G taqsimotlarni "qorishmasi" deb ta'rif etiladi. Bulardan kelib chiqadiki, (11) tenglik "qorishmalarning" foydalliligi, foydaliliklarning "qorishmasiga" teng ekanligini bildiradi.

Agar $u(x)$ uzluksiz va chegaralangan funksiya bo‘lsa, taqsimotlarning kuchsiz yaqinlashishi ta'rifiga asosan, (10) tenglik bilan aniqlangan $U(F)$ funksional VI shart ma'nosida uzluksiz bo‘ladi. Funksiya $u(x)$ chegaralangan o‘lchovli (uzluksizlik shart emas) bo‘lgan holda ham $u(x) = I_A(x)$ indikator funksiya bo‘lsa,

$$U(F_n) = F_n(A) = \int_{\mathbf{R}} I_A dF_n \to \int_{\mathbf{R}} I_A dF = F(A) = U(F), n \to \infty$$

munosabatlardan **V2** shartni bajarilishi kelib chiqadi. Bu shartni hamma o‘lchovli chegaralangan $u(x)$ funksiyalar uchun bajarilishi, ularni o‘lchovli sodda funksiyalar orqali approksimatsiyalash mumkin ekanligiga asoslanadi. Oxirgi jumla bilan bog‘liq bo‘lgan va qiyin bo‘lmagan mulohazalarni takrorlashni mustaqil mashq sifatida o‘quvchiga havola etamiz.

Quyidagi teorema keltirilgan tasdiqlarga teskari (ya'ni zaruriy) bo‘lgan fikrlar ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Teorema 2. Hamma ehtimolliklar taqsimoti fazosi $\overline{F}$da aniqlangan $U(\cdot)$funksional (2), **V2** va **(D)** shartlarni qanoatlantirsin. U holda ba'zi chegaralangan va kamayuvchi $u(x)$ funksiyalar uchun (10) formula o‘rinli bo‘ladi. Bunda agar **V1** shart bajarilsa, $u(x)$ funksiya uzluksiz bo‘ladi.

Teoremaning isbotida umumiy topologik fazolarda ehtimollik taqsimoti ketma-ketligini yaqinlashishi bilan bog‘liq muammolarga tegishli bo‘lgan natijalardan foydalaniladi.Lekin $u(x)$funksiyaning monoton bo‘lishligi isbot etiladi. Haqiqatan ham (10) formula o‘rinli bo‘lganda $u(x) = U(E_x)$tenglik bajarilib, uning monotonligi (2) munosabatdan kelib chiqadi. Bu funksiya chegaralangan, chunki aks holda (10) formula hamma ehtimollik taqsimoti $F \in \overline{F}$ uchun aniqlangan bo'lmaydi.

Ushbu punktning so'nggida quyidagini izohlab o'tamiz. Agar $\overline{F}$ sifatida hamma ehtimolliklar taqsimoti sinfining konkret qism to'plam ostilarini olsak, foydalilik funksiyalari $u(x)$ larga qo'yiladigan shartlarni kamaytirish mumkin bo'ladi. Xususan, $\overline{F}$ – to'g'ri chiqizdagi chekli to'plamlarda joylashgan ehtimollik taqsimotlari to'plami bo'lsa, teorema 2 ning tasdiqi chegaralanmagan $u(x)$ funksiyalar uchun ham o'rinli bo'ladi. Masalan, $u(x) = x$ bo'lishi mumkin.

2.3.5. Foydalilik funksiyasi va (3) shartning bajarilishi

Yuqorida biz (2) shartga asoslanib, foydalilik funksiyasi $u(x)$ ((10) formuladagi) kamayuvchi bo'lishini qayd qilib o'tgan edik. O'z navbatida (2) shart (3) ga nisbatan kuchsizroq bo'lgani uchun, (3) shart bajarilganda $u(x)$ kamayuvchi funksiya bo'lmaydi. Bunga teskari bo'lgan tasdiq ham o'rinli.

Teorema 3. Foydalilik funksiyasi $u(x)$ kamayuvchi emas va taqsimot sinfi

$$\overline{F} = \left\{ F;\ \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dF(x) < \infty \right\}$$

bo'lsin. Bu holda (3) shart bajariladi.

Isbot. Funksiya $u(x)$ monoton bo'lishligidan, (10) formulada bo'laklab integrallash mumkin. Natijada quyidagiga ishonch hosil qilamiz:

$$U(G) - U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,d(G - F) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(x) - G(x)\right] d\mu(x).$$

Bu yerda $\mu(\cdot)$ o'lchov $\mu([a,b]) = u(b) - u(a), a < b$ tenglik bilan aniqlanadi.

Funksiya $u(x)$ kamayuvchi emasligidan va oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, $U(G) \ge U(F)$, ya'ni $F \le G$ va $F(x) \ge G(x)$, $x \in \mathbb{R}$ munosabat yoki (3) tengsizlik har qanday $x \in \mathbb{R}$ uchun bajariladi.

2.3.6. Foydalilik funksiyasi va (4) shartning bajarilishi

Yuqorida (4) shart bajarilganda umumiy simmetriya markazi m bo'lgan F va G simmetrik taqsimotlar uchun $F \le G$ munosabat o'rinli bo'lishi qayd qilib o'tilgan edi. Endi bu shartga teng kuchli bo'lgan va foydalilik funksiyasi $u(x)$ orqali ifodalangan tasdiqni keltiramiz.

Teorema 4. Foydalilik funksiyasi $u(x)$ ning yuqoriga qavariq bo'lishligi (4) shartning bajarilishi uchun yetarli va zaruriydir.

Isbot. Funksiya $f(x)$ning yuqoriga qavariq bo'lishligi (4) shartini eslatib o'tamiz. Bu to'g'ri chiziq $\mathbb{R}$ da $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqatalar mavjud bo'lib

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} < f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

tengsizlik bajarilishini anglatadi. Induksiya orqali bu tengsizlikni $n = 2$ bajarilishi yetarli bo'lishligiga ishonch hosil qilish mumkin va biz bundan quyida foydalanamiz.

a) **Yetarlilik.** Faraz qilaylik, F simmetrik taqsimot bo'lsin. Umumiylikka zarar yetkazmasdan simmetriya markazi $m = 0$ va $u(0) = 0$ deb hisoblash mumkin. Aks holda

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (u(x) - u(0))dF(x) + u(0)$$

tenglikdan foydalanish kerak bo'lar edi. Taqsimot $F(x)$ning simmetriya markazi $x = 0$ nuqta bo'lgani uchun, $F(x) = 1 - F(-x)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Natijada quyidagi tengliklarni yozishimiz mumkin:

$$\int_0^{\infty} u(x)dF(x) = \int_0^{\infty} u(x)d(1-F(-x)) = \int_{-\infty}^{0} u(-x)d(1-F(x)) =$$

$$= -\int_0^{-\infty} u(-x)dF(x) = \int_{-\infty}^{0} u(-x)dF(x),$$

$$U(F) = \int_{-\infty}^{0} u(x)dF(x) + \int_0^{\infty} u(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{0} u(x)dF(x) + \int_{-\infty}^{0} u(-x)dF(x) =$$

$$= -2\int_{-\infty}^{0} v(x)dF(x),\ v(x) = -\frac{[u(x)+u(-x)]}{2}$$

Bu yerda $u(0)=0$ tenglik hisobga olindi. Agar $u(x)$foydalilik funksiyasi yuqoriga qavariq bo'lsa, $v(x)$funksiya $(-\infty,0)$oraliqda o'suvchi bo'lmaydi. Oxirgi integralda bo'laklab integrallashni amalga oshirib

$$U(F) = 2\int_{-\infty}^{0} F(x)dv(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa $F(x) \geq G(x), x \leq 0$ bo'lganda, funksional $U(\bullet)$uchun $U(F) \leq U(G)$tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (4) munosabat bajariladi.

Endi, aksincha, $u(x)$yuqoriga qavariq bo'lmagan funksiya bo'lsin. Bu esa, shuningdek $x_1$va $x_2$nuqtalar topilib, ular uchun

$$\frac{u(x_1)+u(x_2)}{2} \geq u\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

tengsizlik bajarilishini anglatadi.

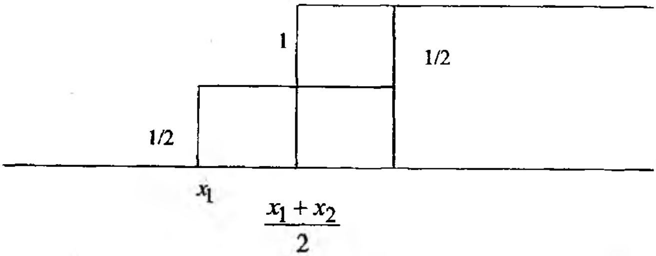
Faraz qilamizki

$$F(\{x_1\}) = F(\{x_2\}) = 1/2$$

va G taqsimot $\frac{x_1+x_2}{2}$nuqtada joylashgan birlik taqsimot bo'lsin, ya'ni

$$G\left(\left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right]\right) = 1.$$

Keltirilgan Fva Glar umumiy simmetriya markazi $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ nuqtada joylashgan simmetrik taqsimotlar bo‘ladi. Bu taqsimotlar grafigini ($x_1 < x_2$deb hisoblab) ko‘ramiz,



$F(x) \geq G(x)$ munosabat $x \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

Lekin

$$U(F) = \frac{U(x_1) + U(x_2)}{2},\ U(G) = U\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Demak, $U(F) > U(G)$ tengsizlik bajarilib, (4) munosabat o‘rinli bo‘lmaydi. Teorema 4 isbot etildi.

2.3.7. Teorema 2 ning umumlashgan varianti

Punkt 2 da isbot etildiki, har qanday hisoblanuvchi ustuvorlik munosabati monoton almashtirish aniqligida o‘ziga xos indikatorni yuzaga keltiradi. Buni hisobga olganda **(D)** shartni, monoton almashtirish aniqligida affin xossalarga ega bo‘lgan funksionallarga o‘tish orqali umumlashtirish tabiiy deb hisoblash mumkin bo‘ladi. Odatdagidek, quyida, o‘rganilayotgan funksionalni aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lgan taqsimotlargina ko‘riladi xolos.

Funksional $V(F)$ uchun **(E)** shart bajariladi deymiz, agar $V(F) = V(G)$tenglikni qanoatlantiruvchi Fva Gtaqsimotlar va ixtiyoriy Q taqsimot uchun

$$V\left(\frac{F+Q}{2}\right)=V\left(\frac{G+Q}{2}\right)$$

tenglik bajarilsa.

Keltirilgan **(E)** shartni quyidagicha izohlash mumkin: agar F va G taqsimotlar ekvivalent (teng kuchli) bo'lsa, bu taqsimotlarning har birini ixtiyoriy taqsimot bilan "o'rtalashtirish" yana ekvivalent taqsimotlarga olib keladi.

Teorema 5. Faraz qilamizki, $\bar{F}$–hamma taqsimotlar fazosi bo'lib, unda aniqlangan V funksional (2), **V2,** va **(E)** shartlarni qanoatlantirsin. U holda, shuningdek o'suvchi $v(x)$ funksiya mavjud bo'lib

$$V(F)=v(U(F)), \tag{12}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda funksional $U(F)$ formula (10) bilan aniqlanib, unga mos keluvchi foydalilik funksiyasi $u(x)$ kamaymaydigan va chegaralangan bo'ladi.

Agar **VI** shart bajarilib, $u(x)$ va $V(x)$ funksiyalar uzluksiz va $V(E_x)=x$ bo'lsa, u holda

$$V(F)=u^{-1}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}u(x)dF(x)\right)\right], \tag{12'}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $u(\cdot)$ –o'suvchi, $u^{-1}(\cdot)$ esa unga teskari bo'lgan funksiya.

Keltirilgan teorema 5 ning isboti murakkab va u funksional analizning ancha nozik hisoblangan sohalariga tegishli bo'lgan natijalaridan foydalanadi. Shuning uchun ham (12) formulaning o'rinli bo'lishini ta'min etuvchi aniq shartlarni sharhlab o'tish bilan chegaralanib qolamiz. Aktuar va moliyaviy matematikada quyidagi funksionalning tatbiqlari ko'p uchraydi.

Misol 5 (Masse kriteriysi). $\bar{F}$ chekli oraliq $[0,L]$ da joylashgan ehtimolliklar taqsimoti sinfi va foydalilik funksiyasi sifatida

$$u(x)=e^{cx},\ c>0$$

funksiya qabul qilingan bo'lsin. Bu holda (12) formulani

$$U(F)=\frac{1}{c}\ln\int_{0}^{L}e^{cx}dF(x) \tag{13}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Funksional (13) quyidagi xossaga ega: $\bar{F}$ga kiruvchi Fva G taqsimotlar uchun

$$U(F*G)=U(F)*U(G). \tag{14}$$

Bu yerda $*$belgi odatdagidek taqsimotlarning kompozitsiya amalini bildiradi. Oxirgi (14) tenglikni quyidagicha sharhlash mumkin: Faraz qilaylik, bir-biriga bog'liqsiz bo'lgan 2 ta daromadni ro'yobga chiqarish masalasi o'rganilayotgan bo'lsin. Ulardan birinchisi taqsimoti F bo'lgan tasodifiy miqdor X bilan, ikkinchisi esa taqsimoti G bo'lgan Y tasodifiy miqdor ifoda etilsin. Bu holda (14) formula yig'indi $X+Y$daromadning foydaliligi ayrim olingan daromadlarni foydaliligi yig'indisiga teng bo'lishini ifoda etadi va keltirilgan xulosa (14) formula (13) ning natijasi ekanligi bilan isbotlanadi. Haqiqatan ham,

$$U(F*G)=\frac{1}{c}\ln E\exp\big(c(X+Y)\big)=\frac{1}{c}\ln\left[Ee^{cX}\cdot Ee^{cY}\right]=U(F)+U(G)$$

Quyidagi qiziqarli faktni qayd qilib o'tamiz: (13) funksional **E**, **V1** va (14) shartlarni qanoatlantiruvchi yagona foydalilik indikatori bo'ladi.

2.4. Alle paradoksi va chiziqli bo'lmagan funksionallar

Chiziqli foydalilik funksionallari anchagina tor sinfni tashkil qiladi va ulardan ko'p konkret holatlarda foydalanib bo'lmaydi. Quyida keltirilgan Alle va Sevidj tomonidan o'rganilgan misol "anchagina sun'iy" bo'lishiga qaramasdan, aytib o'tilgan fikrga namuna bo'ladi.

Misol 6. Quyidagi F_1, F_2, F_3, F_4 taqsimotlar tasodifiy daromadlarni ifoda etib, ular {0 so'm, 5mln.so'm., 25 mln.so'm} to'plamda joylashgan bo'lsin. Mos ehtimolliklar quyidagi jadvalda keltirilgan:

F, x	0 so'm	5 mln. so'm	25 mln. so'm
F_1	0	1	0
F_2	0,01	0,89	0,1
F_3	0,9	0	0,1
F_4	0,89	0,11	0

Javdaldan ko'rinadiki, ko'pchilik uchun $F_1 > F_2$"ustuvorlik" haqiqatga yaqin hisoblanadi. Bunda "osmondagi 25 mln.dan ko'ra (0.1 ehtimollik bilan), cho'ntakdagi 5 million yaxshi (1 ehtimollik bilan)" tipidagi mulohazalar ham butunlay "safsata" bo'lib ko'rinmaydi. Buning ustiga nol daromadi ro'y berganda (0,01 ehtimollik bilan), 100 foizli "cho'ntakni boyitish" imkoniyatini yo'qotish riski ham qo'shiladi.

Aytib o'tilgan fikrlarni (10) formula bilan aniqlanadigan $U(F)$ foydalilik funksionali orqali asoslash mumkin. Haqiqatan ham

$$U(F_1) = 0\cdot 0 + 5\cdot 1 + 25\cdot 0 = 5$$
$$U(F_2) = 0\cdot 0,01 + 5\cdot 0,89 + 25\cdot 0,1 = 4.45$$

hisoblar $U(F_1) > U(F_2)$ekanligini ko'rsatadi.

Xuddi shuningdek

$$2.5 = U(F_3) > U(F_4) = 0,55$$

munosabatni hosil qilamiz. Demak, $F_1 > F_2, F_3 > F_4$ustuvorlik munosabatlari o'rinli bo'ladi. O'z navbatida (11) formuladan foydalanib

$$U\left(\frac{F_1 + F_3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(U(F_1) + U(F_3)\right) = \frac{1}{2}(5 + 2.5),$$
$$U\left(\frac{F_2 + F_4}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(U(F_2) + U(F_4)\right) = \frac{5}{2}$$

tengliklarni olamiz. Oxirgidan esa

$$\frac{F_1 + F_3}{2} > \frac{F_2 + F_4}{2} \qquad (*)$$

ustuvorlik munosabatini hosil qilamiz. Lekin yuqorida keltirilgan jadvalga asoslanib,

F, x	0 so‘m	5 mln. so‘m	25 mln. so‘m
$\frac{F_1+F_3}{2}$	$\frac{0,9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0,1}{2}$
$\frac{F_2+F_4}{2}$	$\frac{0,9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0,1}{2}$

mos taqsimotlar jadvalini tashkil qilamiz va undan

$$U\left(\frac{F_1+F_3}{2}\right)=U\left(\frac{F_2+F_4}{2}\right)=\frac{25}{4}$$

tenglikni olamiz.

Oxirgi tenglik va (*) munosabat hisobiga yuzaga kelgan qarama-qarshilik aktuar matematikada Alle paradoksi deb ataladi. Bu paradoks shuningdek risk holatlari mavjud bo‘lib, ularda (10) formula bilan aniqlangan chiziqli foydalilik funksionallari $U(F)$ lardan foydalanish mumkin emasligini va risk holatlari analizida taqsimotlarni “chiziqli bo‘lmagan” taqqoslash usullariga o‘tish kerak bo‘lishini ko‘rsatadi.

Quyida biz risklarni taqqoslashda “chiziqli bo‘lmagan” funksionallarni kiritishning ikkita variantini keltiramiz. Ulardan biri bevosita

$$U(F)=\iint_{R} u(x,y)dF(x)dF(y) \tag{15}$$

kvadratik funksionallarga, umuman esa, n-chi tartibli

$$U(F)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,\ldots,x_n)dF(x_1)\ldots dF(x_n) \tag{16}$$

formalarga o‘tish bilan bog‘liq bo‘ladi.

Funksional (16) ni quyidagicha sharhlash mumkin: faraz qilaylik F taqsimotga mos keluvchi daromad n marta foydalanilsin va $X_j, j=\overline{1,n}$ $j-$nchi marta foydalanilgan daromadning tasodifiy miqdori bo‘lsin, ya’ni boshqacha aytganda, $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$tasodifiy miqdorlar majmuasi o‘zaro bog‘liqsiz va umumiy F taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlardan tashkil topsin. Bu $n-$o‘lchovli tasodifiy vektorning qiymatlarini $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ desak, bu daromadlarning foydaliligi biror $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya bilan ifoda etilgan bo'lsin. Masalan, agar $u(x)$ bir martalik x daromadning foydalilik funksiyasi bo'lsa, va bizning harakatimiz "o'rtacha foydalilikga yo'naltirilgan bo'lsa"

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\left[u(x_1) + \dots + u(x_n)\right] \quad . \tag{17}$$

deb qabul qilish mumkin.

Agar bizni faqat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymatlarning maksimal bo'lganlari qiziqtirsa, tabiiy ravishda

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

deb, minimal daromad qiziqtirgan holda esa

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

deb qabul qilish mumkin.

Eslatib o'tilgan hollarning barchasida funksional (16) tasodifiy vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ning foydaliligini matematik kutilmasi, ya'ni

$$U(F) = Eu(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

formula bilan aniqlanadi. Xususiy holda, (17) formula o'rinli bo'lganda, funksional (16) oldingi (10) formulaga aylanadi.

Yuqorida (15) formula bilan aniqlangan kvadratik funksional yordamida 6 misolda yuzaga kelgan "paradoksal" holatni tushuntirish mumkin, ya'ni Alle paradoksini yechish mumkin. Yuqorida eslatib o'tilgan chiziqsiz bo'lgan indikator funksionallardan biri nisbiy foydalilik funksiyasi deb ataluvchi $u(x, y)$ larga asoslanadi: bu funksiya bizning tasavvurimizda "x daromad y daromaddan qanchalik yaxshiroq" kabi fikrlarni shakllantiradi. Bunda $x \geq y$ bo'lganda $u(x, y) \geq 0$ deb, $x \leq y$ bo'lganda esa $u(x, y) \leq 0$ va $u(x, y) = 0$ deb olish tabiiy hisoblanadi.

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdorning taqsimoti F bo'lsin. U holda

$$g(y) = Eu(X, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) dF(x)$$

funksiyani X tasodifiy miqdorni tasodifiy bo'lmagan y daromadga nisbatan o'rtacha foydaliligi (yoki bo'lmasa F taqsimotning) deb tushunish mumkin. Indikatorlik funksionali $U(F)$ sifatida esa

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) dF(x) = 0 \tag{18}$$

tenglamaning yechimini olish mumkin. Bu ildiz-X tasodifiy miqdorga nisbatan o'rtacha foydaliligi nol bo'lgan tasodifiy bo'lmagan daromad va u o'rta qiymat ma'nosida X tasodifiy miqdorga ekvivalent bo'ladi. Agar

$$u(x,y) = u(x)(u(x) - u(y)) \tag{19}$$

deb qabul qilsak, (18) tenglamaning yechimi

$$U(F) = u^{-1}\left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} u(x)w(x)dF(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dF(x)}\right) \tag{20}$$

ifodadan iborat bo'ladi. Bu yerda $u^{-1}(\cdot)$ – teskari funksiya, $w(x)$ esa, odatdagidek "muvozanat" funksiyasi. Formula (20) dagi $u(x)$ tasodifiy miqdorning o'rta qiymati "muvozanat funksiyasi" $w(x)$ bilan hisoblanadi. Agar $w(x) \equiv 1$ bo'lsa, (20) formula (12) tenglikka aylanadi.

Endi kiritilgan ikkita foydaliliklar funksionallarini taqqoslaymiz. Faraz qilamizki, tasodifiy bo'lmagan $x_1,\dots,x_n$ daromadlar ketma-ketligining foydalilik funksiyasi $u(x_1,\dots,x_n)$ quyidagi xossaga ega bo'lsin:

$$u(c,\dots,c) = c. \tag{21}$$

Boshqacha aytganda teng daromadlar ketma-ketligining foydaliligi, shu daromadlarning har biriga teng bo'lsin. Bu holda $u(x_1,\dots,x_n)$ funksiyaning qiymati $(x_1,\dots,x_n)$ to'plamning markazi ham deb hisoblanadi. Masalan, (21) tenglikni (17) munosabat bajarilgan holda ta'min etish uchun formula (17) ni quyidagi

$$u(x_1,\dots,x_n)=u^{-1}\left(\frac{u(x_1)+\dots+u(x_n)}{n}\right) \qquad (22)$$

tenglik bilan almashtirishga to‘g‘ri keladi. “Muvozanat funksiyasi” orqali o‘rtalashtirish esa

$$u(x_1,\dots,x_n)=u^{-1}\left(\frac{u(x_1)w(x_1)+\dots+u(x_n)w(x_n)}{w(x_1)+\dots+w(x_n)}\right) \qquad (23)$$

formula bilan amalga oshiriladi.

Funksiya $u(x_1,\dots,x_n)$ uchun keltirilgan oxirgi ikkita (22), (23) formulalar, bu funksiyaning quyidagi aniqlanishining xususiy hollari bo‘ladi. Aytaylik, $u(x,y)$ – nisbiy foydalilik funksiyasi bo‘lsin. Foydalilik ketma-ketligi $(x_1,\dots,x_n)$ ning markazi uchun

$$\frac{1}{n}\left(u(x_1,y)+\dots+u(x_n,y)\right)=0, \qquad (24)$$

tenglamaning y ga nisbatan yechimi deb qabul qilamiz, ya’ni o‘rtacha nisbiy foydalilik nolga teng bo‘ladi. Tenglik (19) bajarilgan holda (24) tenglamaning yechimi (23) formula bilan aniqlanadi, $w(x)\equiv 1$ bo‘lgan holda esa bu yechim (22) formula bilan topiladi.

Endi $(X_1,\dots,X_n)$ tasodifiy miqdorlardan tashkil topgan daromadlar ketma-ketligini ko‘ramiz. Bu yerda $X_1,\dots,X_n$ o‘zaro bog‘liqsiz va umumiy F taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi deb qabul qilinadi. Formula (24) bilan moslashtirilgan holda, $(X_1,\dots,X_n)$ ketma-ketlikning foydaliligi

$$\left(\frac{1}{n}\right)\left(u(x_1,y)+\dots+u(x_n,y)\right)=0, \qquad (25)$$

tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Oxirgi (25) tenglikning chap tomonidagi tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan ekanligidan, katta sonlar qonuni bo‘yicha (25) ning chap tomoni, (18) formulaning chap tomonidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)dF(x)$$

ifodaga intiladi. Shuning uchun ham (25) tenglamaning yechimi (ildizi) ehtimollik bo'yicha, (18) tenglamaning yechimiga intiladi deb hisoblash mumkin bo'ladi. Bu oxirgi xulosa, $u(\cdot,\cdot)$ funksiya birinchi argument bo'yicha o'suvchi, ikkinchi argument bo'yicha esa kamayuvchi bo'lganda bajariladi. Haqiqatan ham, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son, y_0 (18) tenglamaning yechimi, $K(y)-(25)$ tenglamaning chap tomonidagi tasodifiy miqdor, $Z_n = Z_n(X_1,\dots,X_n)-$ tasodifiy miqdor (25) tenglamani yechimi, $\delta = g(y_0-\varepsilon)$ bo'lsin. Bu holda $\delta > 0$ bo'lib, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$K(Z_n)=0,\ P(Z_n > y_0-\varepsilon) = P\left(K(y_0-\varepsilon)<0\right) =$$

$$= P\left(K(y_0-\varepsilon)<0, \left|K(y_0-\varepsilon)-\delta\right| \le \frac{\delta}{2}\right)+$$

$$+P\left(K(y_0-\varepsilon)<0, \left|K(y_0-\varepsilon)-\delta\right| > \frac{\delta}{2}\right) \le$$

$$\le P\left(K(y_0-\varepsilon)<0, K(y_0-\varepsilon) \le \frac{\delta}{2}\right) + P\left(\left|K(y_0-\varepsilon)-\delta\right| > \frac{\delta}{2}\right)$$

Oxirgi tengsizlikdagi birinchi qo'shiluvchi nolga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa $n\to\infty$da nolga intiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n > y_0-\varepsilon\right)=0 \tag{26}$$

tenglik ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun bajariladi. Munosabat

$$P\left(Z_n < y_0+\varepsilon\right) \to 0,\ n\to\infty \tag{27}$$

o'rinli ekanligi (26) tenglikning isbotiga o'xshash bo'ladi. Endi (26), (27) munosabatlarga asoslanib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n-y_0\right| > \varepsilon\right)=0$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2.5.Lorens tartibi. Teng kuchli ta'riflar

Bu tartib iqtisodiyotda ko'p ishlatiladigan Lorens egri chiziqlarini nuqtada taqqoslashga asoslangan. Aytaylik L–musbat o'rta qiymatga ega bo'lgan va manfiy bo'lmagan tasodifoy miqdorlar to'plami bo'lsin. Oldingidek F_X orqali X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini, F_X^{-1} orqali esa unga teskari bo‘lgan funksiyani belgilaymiz.

$$F_X^{-1}(u)=\sup\{x;\, F_X(x)\le u\}$$

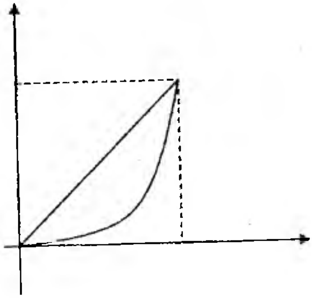
Tasodifiy miqdor X bilan bog‘liq bo‘lgan Lorens egri chizig‘i deb

$$L_X(u)=\frac{\int_0^u F_X^{-1}(t)dt}{\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt},\ u\in[0,1], \tag{1}$$

funksiyani grafigiga aytiladi. Teskari funksiyani ta’rifidan kelib chiqib, soda mulohazalar yordamida

$$\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt=EX$$

tenglik orinli bo‘lishiga ishonch hosil qilish mumkin. Lorens egri chizig‘i – bu $[0,1]$ oraliqda uzluksiz, kamaymovchi bo‘lmaydi va $L_X(0)=0,\ L_X(1)=1$ tengliklar bajariladi. Demak, $L_X(u)$ Lorens funksiyasining sxematik grafigi kamon ko‘rinishida bo‘lib, uning ipi birlik kvadratning diognali, kamonning o‘zi esa diagonalning tagida joylashadi.



Agar X tasodifiy miqdor biror guruhga kiruvchi shaxslar foydasining o‘lchovi bo‘lsa, $L_X(u)$ $(0\le u\le 1)$ umumiy foydaning 100% ulushiga davogar bo‘ladigan guruhning eng “kambag‘al” shaxslari qismiga mos keladi. Agar X tasodifiy miqdor $[0,1]$

oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsa, bu hol $L_X(u)=u$ tenglik bilan ifoda etilib, guruhdagi xohlagan shaxs "kambag'al" bo'lishi mumkinligini bildiradi (kamon yoyi "egriligi" qancha katta bo'lsa, guruhdagi shaxslar orasida "tengsizlik" ham shuncha katta bo'ladi).

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdorlar X va Y risklar sinfi L ga tegishli bo'lsin. Risk Lorens ma'nosida Y riskdan kichik deyiladi, agar

$$L_X(u) \geq L_Y(u), \text{ hamma } u \in [0,1].$$

Bu munosabat $X \prec_{Lor} Y$ ko'rinishida yoziladi.

Eslatib o'tamizki, tasodifiy miqdorl X tasodifiy miqdor Y dan qavariq ma'noda kichik deyiladi, agar har qanday uzluksiz qavariq funksiya uchun

$$Eh(X/EX) \leq Eh(Y/EY) \tag{2}$$

tengsizlik bajarilsa. Bu munosabat

$$(X/EX) \prec_{cx} (Y/EY)$$

ko'rinishida yoziladi.

Teorema 1. Har qanday X va Y risklar uchun

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow (X/EX) \prec_{cx} (Y/EY). \tag{3}$$

Qayd etib o'tish kerak bo'ladiki, risklar qavariq tartib ($\prec_{cx}$) ma'nosida, faqat o'rta qiymatlar $EX = EY$ bo'lgandagina amalga oshirilishi mumkin (bu esa bevosita (2) tengsizlikda kuzatiladi). Lekin Lorens tartibi bu shartni talab etmaydi.

Natija 1. Agar $EX = EY$ bo'lsa, (3) ni

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow X \prec_{cx} Y \tag{3}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Bu natijaning isboti o'z-o'zidan ravshan, chunki qavariq funksiya $h(\cdot)$ ga asoslangan $\prec_{cx}$ tartib, bu funksiyaning argumentini masshtab o'zgarishiga nisbatan invariant bo'ladi.

Natija 2. Faraz qilaylik $X, Y \in L$ lar mos ravishda $f_X(\cdot)$, $f_Y(\cdot)$ zichlik funksiyalariga ega bo'lib, $EX = EY$ bo'lsin. Bu holda $X \prec_{Lor} Y$ bajarilishi uchun $f_X(x) - f_Y(x)$ ayirmaning $(0,\infty)$ oraliqda ikki marta $-,+,-$ (oldin manfiy, keyin musbat, yana manfiy) tartibda ishora almashtirish yetarli bo'ladi. Keltirilgan natijalar to'g'ri ekanligiga

$$F_X(u)-F_Y(u)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du-\int_{-\infty}^{x} f_Y(u)du=\int_{-\infty}^{x}\left(f_X(u)-f_Y(u)\right)du$$

ayirmaning ishorasini $(0,\infty)$ oraliqda o'zgarishini kuzatib va (4) munosabatdan foydalanib ishonish mumkin.

Izoh. Oson ko'rish mumkinki, $X \prec_{Lor} Y$ munosabat, har qanday $a,b\in(0,\infty)$ lar uchun $aX \prec_{Lor} bY$ munosabatni o'rinli bo'lish bilan teng kuchli bo'ladi. Ko'p hollarda berilgan X, Y va o'rta qiymatlari har xil bo'lgan tasodifiy risklarni taqqoslash o'rniga, o'rta qiymatlari teng bo'lgan XEY, YEX tasodifiy miqdorlarni taqqoslash qulay bo'ladi.

Quyidagi teoremada Lorens tartibi $\prec_{Lor}$ ni alternativ ravishda xarakterizatziyalash masalasi yechiladi.

Teorema 2. Lorens tartibi $X \prec_{Lor} Y$ bajarilishi uchun qandaydir musbat son $c>0$ uchun, shunday Y' va Z' tasodifiy miqdorlar mavjud bo'lib,

$$Y\overset{d}{=}Y',\ X\overset{d}{=}cE\left(Y'/Z'\right)$$

munosabatlarni o'rinli bo'lishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Misol sifatida ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimotni Lorens ma'nosida Pareto taqsimoti bilan "dominan" (kichik) bo'lishini ko'ramiz.

Natija 3. Tasodifiy miqdor X o'rta qiymati λ bo'lgan ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimotga, Y esa "siljigan" Pareto

$$F_Y(x)=1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ x>0,\alpha>1$$

taqsimotiga ega bo'lsin. Bu holda $X \prec_{Lor} Y$.

Isbot. Eslatib o'tamizki, parametrlari $\alpha>0,\lambda>0$ bo'lgan Gamma taqsimot $\Gamma(\alpha,\lambda)$ ning zichlik funksiyasi

$$f(x,\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\ x>0$$

formula bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik X va Z – bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$X \sim \Gamma\left(1,\lambda^{-1}\right), Z \sim \Gamma(\alpha,1),$$

ya'ni ular mos ravishda parametrlari (α,λ) bo'lgan Gamma taqsimotga ega bo'lsin. Agar $Y\overset{d}{=}X/Z$ deb qabul qilsak, $Y'\overset{d}{=}Y$ va $Z'\overset{d}{=}Z^{-1}$ tasodifiy miqdorlar teorema 2 dagi shartlarni qanoatlantiradi. Haqiqatan ham Y ni taqsimot funksiyasi

$$F_Y(x)=P\left(XZ^{-1}<x\right)=1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ x>0,\alpha>1$$

bo'ladi. Ikkinchidan esa shartli matematik kutilma

$$E(Y/X)=E\left(XZ^{-1}/X\right)=XE\left(Z^{-1}\right).$$

Demak, X tasodifiy miqdorni

$$X=\frac{E(Y/X)}{E\left(Z^{-1}\right)}=\frac{1}{E\left(Z^{-1}\right)}E(Y'/Z')$$

ko'rinishda yozamiz va teorema 2 ga asosan $X\prec_{Lor}Y$.

Aktuar matematikada sug'urta risk holatlarni taqqoslash, asosan tasodifiy miqdorlar uchun qo'llaniladigan $\prec_{sl}$ yoki $\prec_{cx}$ tartiblash qoidalaridan foydalaniladi va bunda sug'urtalovchi shaxs (kompaniya) har qanday risk uchun bir xil "sug'urta badali" belgilaydi deb qabul qilinadi. Ko'p hollarda bu qoida sug'urta holatlariga adekvat ravishda mos kelmaydi va natijada sug'urta faoliyatini chegaralab qo'yadi. Masalan, amalda yuqori "sug'urta to'lovlari" hisobiga kam "yoqimli" bo'lgan risklarni sug'urta kompaniyasi uchun "qiziqarli" bo'ladiganlari qatoriga qo'yish imkonini beradi.

Aytilganlardan kelib chiqadiki, sug'urta faoliyatini (X,P) juftlik orqali ifoda qilish va bunda X – sug'urta to'lovi (risk), P – uning uchun to'laniladigan "mukofot" (sug'urta badali) deb hisoblash ahamiyatli bo'ladi. Sug'urta "mukofoti" P qandaydir qabul qilingan ta'rif (prinsip) H orqali belgilanadi, ya'ni $P=H(X)$ funksional bilan aniqlanadi. Masalan, teng kuchlilik prinsipi qabul qilinganda $H(X)=EX=P$, sug'urta yuklamasi α bo'lgan o'rta qiymat prinsipi asosida $H(X)=(1+\alpha)EX$ va hokazo.

Ko'p hollarda sug'urta kompaniyasining faoliyati $X/H(X)$ tasodifiy miqdor bilan ifoda qilinadi va u "mukofot" birligiga mos keladigan risk miqdori deb qabul qilinadi yoki $X/H(X)$ ni kompaniya uchun nisbiy "chiqim" xarajat, talofat (ziyon) deb atash mumkin. Umumiy ma'noda, bu miqdorni nisbiy risk sifatida qabul qilinadi.

Lemma 1. X va Y risklarni Lorens tartibi, $(X,(1+\alpha)EX)$ va $(Y,(1+\alpha)EY)$ kontraktlar (shartnomalar) bilan bog'liq nisbiy risklarni "qavariq" tartibiga teng kuchli bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham (2) munosabatga asosan (teorema 1)

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow \frac{X}{(1+\alpha)EX} \prec_{cx} \frac{Y}{(1+\alpha)EY},$$

ya'ni riskga "mayli" bo'lgan hamma shaxslarni, X bilan bog'liq kontraktlarning nisbiy risklari qiziqtiradi xolos (agar shartnoma ta'rifikatsiyalari α yuklamali o'rta qiymat prinsiplariga asoslangan bo'lsa). Oxirgi jumladan Lorens tartibi aktuariylar uchun X va Y risklarni, ularga mos kelgan "munosabatlarni" hisobga olgan holda taqqoslash imkonini yaratish mumkinligi kelib chiqadi.

Endi sodda k – tartib nomi bilan ataladigan risklarni taqqoslash usuliga o'tamiz. Eslatib o'tamizki, tasodifiy X riskning stop-loss almashtirishi

$$m_X(x) = \int_x^{\infty} (1 - F_X(u))du$$

formula bilan aniqlanadi (ba'zi hollarda $m_X(x)$ franshiza x ga mos keluvchi stop-loss "mukofot" deb ham ataladi). Funksiya $K_X(x)$ ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$K_X(x) = \frac{1}{EX} m_X(xEX).$$

Ta'rif 2. Tasodifiy risk X k– tartib ma'nosida Y riskdan kichik deyiladi, agar

$$K_X(x) \le K_Y(x)$$

tengsizlik hamma $x \ge 0$ uchun bajarilsa. Bu munosabat $X \prec_k Y$ ko'rinishda belgilanadi.

Keltirilgan $\prec_k$ tartib, teng kuchli ma'noda, berilgan tasodifiy miqdorlar bilan bog'liq bo'lgan boshqa tasodifiy miqdorlar uchun stoxastik $\prec_{st}$ tartib sifatida qayta ta'riflanishi mumkin. Haqiqatan ham F_X^* – tasodifiy miqdor $X^* = \frac{X}{EX}$ ning taqsimoti bo'lsa, ya'ni

$F_X^* = F_X(xEX)$. Yangi tasodifiy miqdor $\bar{X}$ ning taqsimotini, to'g'rirog'i uning zichlik funksiyasini

$$f_{\bar{X}}(x) = \int_x^{\infty} dF_X^*(u) = 1 - F_X^*(x), \quad x > 0$$

tenglik bilan kiritamiz. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini $\bar{F}_X$ deb belgilaymiz.

Lemma 2. Agar X va Y berilgan ikkita risk bo'lsa,

$$X \prec_k Y \Leftrightarrow \bar{X} \prec_{st} \bar{Y}. \qquad (5)$$

Isbot. Haqiqatan ham

$$\bar{X} \prec_{st} \bar{Y} \Leftrightarrow 1 - \bar{F}_X(x) \le 1 - \bar{F}_Y(x).$$

Endi lemmani isboti quyidagi almashtirish tengliklaridan kelib chiqadi:

$$1 - \bar{F}_X(x) = 1 - \int_0^x \left(1 - F_X(uEX)\right) du = \frac{1}{EX} \int_{x \in X}^{\infty} \left(1 - F_X(u)\right) du = \frac{m_X(xEX)}{EX} = K_X(x),$$

$$1 - \bar{F}_Y(x) = \frac{m_Y(xEY)}{EY} = K_Y(x).$$

Bu tengliklar birgalikda lemma 2 ni, ya'ni (5) munosabatni isbot etadi.

Sug'urta iqtisodiyotida risklarni nisbiy o'zgarishini "o'lchovi" sifatida variatsiya koeffitsiyenti

$$CV(X) = \sqrt{DX}/EX$$

foydalaniladi ($\sqrt{DX}$ – standart og'ish).

Natija 5. Agar $X \prec_k Y$ bo'lsa, $CV(X) \le CV(Y)$.

Oxirgi tengsizlikni isboti uchun bevosita hisoblash orqali quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$E\bar{X} = \int_0^{\infty} K_X(u) du = \frac{1}{EX} \int_0^{\infty} m_X(xEX) du = \frac{EX^2}{2(EX)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{DX + (EX)^2}{(EX)^2} = \frac{1}{2}\left((CV(X))^2 + 1\right).$$

Endi $\prec_{st}$ stoxastik tartib uchun

$$\bar{X} \prec_{st} \bar{Y} \Rightarrow E\bar{X} \le E\bar{Y}$$

ekanligini hisobga olgan holda, yuqoridagi tenglikdan foydalansak

$$\frac{1}{2}\left((CV(X))^2 + 1\right) \le \frac{1}{2}\left((CV(Y))^2 + 1\right).$$

Oxirgidan va lemma 2 da (5) munosabatdan natija 5 ning tasdig‘i o‘rinli ekanligini olamiz.

Teorema 3. Quyidagi

$$X \prec_k Y \Leftrightarrow X^* \prec_{sl} Y^*$$

teng kuchlilik munosabati o‘rinli.

Haqiqatan ham $m_{X^*}(x) = K_X(x)$ tenglik teorema 3 ning to‘g‘ri ekanligini isbot etadi.

Natija 6. Har qanday $X, Y \in L$ uchun

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow X \prec_k Y .$$

Keltirilgan natijaning isboti teoremalar 1 va 3 ni, natija 3 dagi (4) munosabatning kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Sug‘urta faoliyatida Lorens chizig‘ining quyidagi talqini mavjud: $L_X(u)$ umumiy riskning 100% hajmi bilan bog‘liq eng arzon kontraktlar qismi.

Amaliy sug‘urta faoliyatida Lorensning “dual” chizig‘i

$$L_X^{(dual)}(u) = 1 - L_X(1-u),\ u \in [0, 1]$$

ham ahamiyatli hisoblanadi. $[0,1]$ oraliqda fiksirlangan u uchun $L_X^{(dual)}(u)$ umumiy talofatning eng qimmat kontraktlarning 100% qismi. Lorens tartibining ta’rifiga asosan hamma $u \in [0, 1]$ lar uchun

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow L_X^{(dual)}(u) \le L_Y^{(dual)}(u) .$$

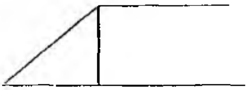
Teng kuchlilik munosabati o‘rinli bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin bo‘lmaydi. Bu punkt oxirida $\prec_{st}$ va $\prec_k$ tartiblar orasidagi munosabatlarga aniqlik kiritamiz. Umumiy holda stoxastik tartibdan k - tartib kelib chiqmasligini isbotlaymiz, ya’ni

$$X \prec_{st} Y \not\Rightarrow X \prec_k Y .$$

Quyidagi tasodifiy miqdorlarni ko‘ramiz:

$$X \sim U(0,2),\ Y \sim U(1,2).$$

Bu yerda $U(a,b)-[a, b]$ oraliqdagi tekis taqsimotni belgilaydi. Quyidagi shakllarda F_X va F_Y taqsimot funksiyalarining grafiklari keltirilgan.



Bu taqsimotlardan ko‘rinadiki, har qanday $x \geq 0$ uchun

$$F_X(x) \geq F_Y(x) \qquad (6)$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, $X \prec_{st} Y$ munosabat bajariladi. Berilgan X va Y tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari

$$P_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}, u \in [0, 2] \\ 0, u \notin [0, 2], \end{cases} \quad P_Y(u) = \begin{cases} 1, u \in [1, 2] \\ 0, u \notin [1, 2]. \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bulardan ham (6) tengsizlikning bajarilishi oson ko‘rinadi. Endi quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$EX = \int_0^\infty x dF_X(x) = \int_0^\infty x P_X(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1,$$

$$EY = \int_0^\infty x dF_Y(x) = \int_0^\infty x P_Y(x) dx = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2},$$

$$m_X(x) = \int_x^\infty (1 - F_X(u)) du = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

$$m_Y(x) = \int_x^\infty (1 - F_Y(u)) du = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

$$K_X(x) = \frac{1}{EX} m_X(xEX) = m_X(x),$$

$$K_Y(x) = \frac{1}{EY} m_Y(xEY) = \frac{2}{3} m_Y\left(\frac{3x}{2}\right) = \begin{cases} \frac{4}{3}\left(1 - \frac{3x}{4}\right), & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3x}{4}\right)^2, & \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3} \\ 0, & x > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Bulardan ko‘rinadiki,

$$K_X(x) \leq K_Y(x)$$

tengsizlik $0 \leq x \leq 2$ bo‘lganda bajarilmaydi. Demak, k – tartib ma’nosidagi

$$X \prec_k Y$$

munosabat $X \sim U(0,2)$, $Y \sim U(1,2)$ tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli bo'lmaydi. O'z navbatida, endi

$$X \prec_k Y \not\Rightarrow X \prec_{st} Y$$

ekanligini ham ko'rsatamiz.

Tasodifiy miqdorlar

$$X \sim Exp(1),\ Y \sim Exp(2)$$

bo'lsin. Bu yerda $Exp(a)$, $(a > 0)$ – parametri a bo'lgan ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot, ya'ni mos taqsimot funksiyasi

$$F_a(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ishonish mumkinki

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

ya'ni $Exp(a)$ taqsimotning o'rta qiymati $\frac{1}{a}$ ga teng bo'ladi. Demak, ko'rilayotgan misol uchun

$$EX = 1,\ EY = \frac{1}{2}.$$

Bevosita hisoblashlar orqali quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$m_X(x) = \int_x^{\infty} (1 - F_X(u))du = \int_x^{\infty} e^{-u} du = e^{-x},$$

$$m_Y(x) = \int_x^{\infty} (1 - F_Y(u))du = \int_x^{\infty} e^{-2u} du = \frac{1}{2} e^{-2x},$$

$$K_X(x) = \frac{1}{EX} m_X(xEX) = m_X(x) = e^{-x},$$

$$K_Y(x) = \frac{1}{EY} m_Y(xEY) = 2m_Y\left(\frac{x}{2}\right) = e^{-x}.$$

Demak $K_X(x) = K_Y(x)$, $\forall x > 0$ uchun va $X \prec_k Y$. Lekin har qanday $x \ge 0$ uchun

$$1 - F_X(x) = e^{-x} \le 1 - F_Y(x) = e^{-2x}$$

tengsizlik bajarilmaydi, ya'ni $X \prec_{st} Y$ munosabat o'rinli bo'lmaydi.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni takrorlab quyidagi xulosaga kelish mumkin. Agar

$$X \sim Exp(1),\ Y \sim Exp(a),\ a > 0$$

bo‘lsa, har qanday $a > 0$ uchun

$$m_Y(x) = \frac{1}{a} e^{-ax}$$

formula o‘rinli bo‘lib,

$$K_X(x) = \frac{1}{EX} m_X(xEX) = e^{-x},$$

$$K_Y(x) = \frac{1}{EY} m_Y(xEY) = am_Y\left(\frac{x}{a}\right) = e^{-x}$$

tengliklar bajariladi. Demak, har qanday $a > 0$ uchun $X \prec_k Y$ munosabat o‘rinli. Lekin $a > 1$ bo‘lganda stoxastik munosabat $X \prec_{st} Y$ bajarilmaydi.

O‘quvchiga mashq sifatida quyidagi misollarni taklif etamiz. Agar tasodifiy miqdorlar

$$X \,\square\, (1,3,1/2),\ Y \,\square\, (1,3,1/3)$$

bo‘lsa, $X \prec_{st} Y$ munosabat o‘rinli, lekin $X \prec_k Y$ bajarilmaydi. Bu yerda (a,b,p) Bernulli taqsimoti, ya’ni

$$P(x = a) = 1 - P(x = b) = p,\ 0 \le a < b,\ 0 < p < 1.$$

2.6. “Yuklama” va “qorishma” taqsimotlar

Hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasi va uning tatbiqlarida taqsimot funksiyalari sinfida ma’lum “almashtirishlar” orqali hosil qilingan taqsimotlar muhim rol o‘ynaydi. Bulardan bittasi – “yuklama” funksiyalar vositasida integral almashtirishlar bajarish usuli bilan yuzaga keladigan “yuklama taqsimotlar” sinfidir.

Agar berilgan tasodifiy miqdor X bo‘lsa, uning o‘rniga taqsimot funksiyasi

$$P(X_g < x) = \int_0^x g(u) dF_X(u) / Eg(X) \tag{1}$$

formula bilan aniqlanadigan X_g tasodifiy miqdorni ko‘ramiz. Bu yerda $g(\cdot)$ manfiy bo‘lmagan o‘lchovli funksiya bo‘lib

$$Eg(X) = \int_0^\infty g(u) dF_X(u) < \infty.$$

Analizda bunday $g(\cdot)$ larni "yuklama" funksiyalar deb atashadi. Shuning uchun ham (1) formula bilan aniqlangan funksiyalarni "yuklama" taqsimotlar deb ataladi.

Agar $X \in$£, ya'ni $EX < \infty$ bo'lsa, tasodifiy miqdor X_g ham £ ga tegishli bo'lishi uchun

$$0 < EXg(X) = \int_0^{\infty} xg(x)dF_X(x) < \infty$$

shartni qabul qilishga to'g'ri keladi.

Endi Lorens ma'nosida tartibni saqlaydigan "yuklama" funksiyalar sinfini G_1 deb belgilaymiz, ya'ni

$$G_1 = \{g;\ X <_{Lor} Y \Rightarrow X_g <_{Lor} Y_g\}.$$

Ta'kidlab o'tamizki G_1 bo'sh to'plam emas, chunki $g(x) = x$ funksiya unga kiradi. Quyidagi teoremadan ko'rinadiki, bu sinfga kiruvchi funksiyalar o'zgarmas sonlardan kam farq qiladi.

Teorema 1. Funksiya $g \in G_1$ bo'lishi uchun, uning $g(0) = a,\ \ g(x) = b,\ \ x > 0$ ko'rinishida bo'lishligi yetarli va zaruriy shart (bu yerda $a \geq b > 0$).

Bu teoremaning isboti sodda va u 2.5. punktdagi lemma 1 ga asoslanadi.

Lorens ma'nosidagi tartibni pasaytiradigan "yuklama" funksiyalar

$$G_2 = \{g;\ X_g <_{Lor} X\}$$

sinfining strukturasi ham G_1 ga o'xshash bo'ladi.

Teorema 2. Funksiya $g \in G_1$ bo'lishi uchun, uning $g(0) = a, g(x) = b, x > 0$ ko'rinishida bo'lishligi yetarli va zaruriy shart (bu yerda $b > 0$ va $0 \leq a \leq b$).

Endi £ sinfga tegishli X tasodifiy miqdorlarning "qorishma" larini o'rganamiz.

Ta'rif. Faraz qilaylik X, Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va $X, Y \in$£, $\alpha \in (0,1)$, I_α –Bernulli taqsim$(P(I_\alpha = 1) = \alpha = 1 - P(I_\alpha = 0))$

ega bo'lib, X va Y larga bog'liq bo'lmasin. Tasodifiy miqdor X va Y larni "qorishmasi" deb

$$X_\alpha = I_\alpha X + (1 - I_\alpha)Y \qquad (2)$$

tasodifiy miqdorga aytiladi.

Quyidagi teoremadan $X_\alpha <_{Lor} X$ munosabat qachon o'rinli bo'ladi degan savolga javob olish mumkin.

Teorema 3. Tasodifiy miqdorlar $X, Y \in £$, va X_α formula (2) bilan aniqlangan bo'lsin. Agar $EX = EY$ va $Y <_{Lor} X$ munosabat bajarilsa, u holda $X_\alpha <_{Lor} X$.

Isbot. Umumiylikni chegaralamagan holda $EX = EY = 1$ deb hisoblash mumkin. Demak, bu holda $EX_\alpha = 1$. Lorens tartibining xossasiga asosan $X <_{Lor} Y \Rightarrow X <_{cx} Y$, ya'ni har qanday uzluksiz qavariq funksiya $h(\cdot)$ uchun

$$Eh(X) \le Eh(Y) \qquad (3)$$

tengsizlik bajariladi. Qavariq funksiyaning xossasiga asoslanib,

$$Eh(X_\alpha) = \alpha Eh(X) + (1-\alpha)Eh(Y) \qquad (4)$$

tenglikni yoza olamiz. Teoremaning sharti $Y <_{Lor} X$ munosabatdan foydalanib, (3) tengsizlikni hisobga olgan holda (4) tenglikning o'ng tomoni

$$\alpha Eh(X) + (1-\alpha)Eh(X) = Eh(X)$$

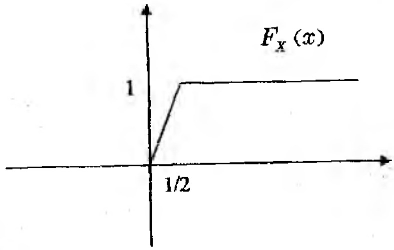
ifodadan katta bo'lmasligini olamiz, ya'ni $Eh(X_\alpha) \le Eh(X)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Oxirgidan yana bir marta (3) dan foydalanib isbot etsih kerak bo'lgan $X_\alpha <_{Lor} X$ munosabatni hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema 3 ning shartlari zarurlik darajasiga yaqin bo'lib ko'rinsada, ular zaruriy bo'lmaydi. Haqiqatan ham

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & x > 1/2, \end{cases} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2, \\ 2x, & 1/2 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

taqsimot funksiyalariga ega bo'lgan X va Y tasodifiy miqdorlarni ko'ramiz. (2) formula bo'yicha "qorishma" tasodifiy miqdor

$X_{1/3} = I_{1/3}X + I_{2/3}Y$ ni kiritamiz. Berilgan taqsimot funksiyalari F_X va F_Y larning grafiklari quyidagi shaklda keltirilgan.



Shakldan ko'rinadiki, F_X va F_Y funksiyalar mos ravishda $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ hamda $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ oraliqlarda tekis taqsimlangan taqsimotlar bo'ladi va har qanday x uchun $F_X(x) \geq F_Y(x)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, mos tasodifiy miqdorlar uchun $X <_{st} Y$ munosabat bajarilib, undan teorema 3 ning sharti $Y <_{Lor} X$ munosabat kelib chiqadi.

Qayd qilib o'tamizki,

$$EX = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4},$$

$$EY = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Endi $X_{1/3}$ va X tasodifiy miqdorlarning Lorens chiziqlari $L_{X_{1/3}}(x) \leq L_X(x)$ tengsizlikni qanoatlantirishiga bevosita ishonch hosil qilamiz. Demak, $X_{1/3} <_{Lor} X$ munosabat o'rinli, lekin $EX \neq EY$.

Keltirilgan misoldan kelib chiqadigan xulosani hisobga olganda ham quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema 4. Faraz qilaylik $X, Y \in £$ tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning "qorishmasi" X_α (2) formula bilan aniqlangan bo'lsin. Agar $F_X^{-1}(0) > 0$ bo'lib, $X_\alpha <_{Lor} X$ munosabat bajarilsa, $EX = EY$ tenglik va $Y <_{Lor} X$ taqqoslash o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremaning sharti $F_X^{-1}(0) > 0$ tengsizlik 1 ehtimollik bilan X tasodifiy miqdor noldan ajratilganligini anglatadi

$(P(X>0)=1)$. Bu holda $EX \neq EY$ tengsizlik $X_\alpha < X$ munosabat bajarilishini ta'min etadi. Bu tasdiqni isbotlash uchun birinchi navbatda $F_{X_\alpha}^{-1}(0) \leq F_X^{-1}(0)$, $F_{X_\alpha}^{-1}(1) \geq F_X^{-1}(1)$ tengsizliklar bajarilishini e'tirof etamiz. Demak, agar $EX > EY$ bo'lsa, $EX > EX_\alpha$, $L_X'(0) < L_{X_\alpha}'(0)$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, ulardan $X_\alpha <_{Lor} X$ taqqoslash kelib chiqadi. Agar aksincha, $EX < EY$ tengsizlik bajarilsa, $L_X'(1) > L_{X_\alpha}'(1)$ bo'lib, yana $X_\alpha <_{Lor} X$.

Endi $EX = EY = 1$ tengsizlikni bajarllishini (umumiylikni chegaralamagan holda), lekin $Y <_{Lor} X$ bo'lishini faraz qilamiz. Bu holda Lorens tartibi xossasiga, asosan, shunday uzluksiz qavariq funksiya $h(\cdot)$ mavjud bo'lib $Eh(Y) > Eh(X)$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. Lekin ushbu holda, bu funksiya uchun $Eh(X_\alpha) > Eh(X)$ tengsizlik bajariladi, demak $X_\alpha < X$.

2.7. Risklar orasidagi tartibning boshqa turlari

Yuqorida keltirilgan risklarni (tasodifiy miqdorlarni) taqqoslash usullari umumiy xarakterda bo'lib, ular abstrakt to'plamlarda elementlar orasidagi tartibni aksiomatik (formal) usul bilan aniqlash muammolariga asoslangan edi. Aktuar matematikada bu usullardan tashqari yechiladigan masalalarni o'ziga xos tomonlarini hisobga olishga asoslangan, maxsus ko'rinishdagi, xususiy xarakterda bo'lgan tartiblash tamoyillari ham mavjud. Quyida biz risklarni (tasodifiy miqdorlarni) taqqoslash maxsus usullaridan bir nechtasini keltiramiz. Bunda adabiyotlar ro'yxatidagi [2], [9]-[11] manbaalardan foydalaniladi.

2.7. 1. n-chi darajadagi Stop-loss tartibi

Ta'rif. Tasodifiy miqdor Y, tasodifiy miqdor X ga nisbatan "n-chi darajadagi stop-loss" tartibida "ustuvor" deyiladi, agar har qanday $d \geq 0$ uchun

$$E\left[\left((X-d)^+\right)^n\right] \leq E\left[\left((Y-d)^+\right)^n\right]$$

tengsizlik bajarilsa va bu holat $X <_{(n)} Y$ ko‘rinishida belgilanadi. Bu yerda har qanday $a \in \mathbb{R}$ uchun $a^+ = \max(0, a)$.

Teorema 1. Foydalilik funksiyasi $u(x)$ n –marta differensiallanuvchi bo‘lib, uning birinchi $(n-1)$ tartibdagi hosilalari uzluksiz va ishoralarini almashtiruvchi funksiyalar bo‘lsin, ya’ni

$$(-1)^{k-1} u^{(k)}(x) \geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

tengsizliklar bajarilsin. Bulardan tashqari $u^{(n)}(x)$ funskiya x bo‘yicha o‘suvchi bo‘lmasdan uning uchun ham $(-1)^{n-1} u^{(n)}(x) \geq 0$ tengsizlik bajarilsin. U holda

$$\left(X <_{(n)} Y\right) \Leftrightarrow \left(Eu(X) \leq Eu(Y)\right).$$

Isbot. 1. Faraz qilaylik $Eu(X) \leq Eu(Y)$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. Agar $u(x) = \left[(x-a)^+\right]^n$ deb olsak, bu holda $k = 1, 2, \ldots, n$ bo‘lganda

$$u^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\left[(x-d)^+\right]^{n-k} \geq 0$$

tengsizliklar bajarilib, $u(x)$ funksiya teoremadagi hosila shartlarini qanoatlantiradi. Demak

$$E\left[(X-d)^+\right]^n \leq E\left[(Y-d)^+\right]^n$$

tengsizlik bajariladi. Xuddi shunimgdek, $EX^k \leq EY^k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ tengsizliklarning o‘rinli bo‘lishi ham oson tekshirilib ko‘riladi.

2. Endi aksincha, $X <_{(n)} Y$ munosabat o‘rinli, foydalilik funksiyasi $u(x)$ teoremadagi shartlarni qanoatlantirsin. Bu holda $u^{(n)}(x) \geq 0$ $(k = \overline{1,n})$, $u^{(n)}(x)$ funksiya esa x bo‘yicha o‘suvchi bo‘lmaydi. Teylor formulasiga asoslanib, quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \ldots + u^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_{0+}^{x}(x-t)^n \, du^{(n)}(t). \qquad (1)$$

Oxirgi qo‘shiluvchi hadni

$$\frac{1}{n!}\int_{0+}^{\infty}\left[(x-t)^{+}\right]^{n}du^{(n)}(t)$$

ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. Taqqoslash tartibi $<_{(n)}$ ta'rifidan har qanday $t\geq 0$ uchun $E\left[(X-t)^{+}\right]^{n}\leq E\left[(Y-t)^{+}\right]^{n}, n\geq 1$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi teoremaning isboti (1) formuladan va $X<_{(n)}Y$ munosabatdan kelib chiqadi.

Teorema 2. Agar $m>n$ bo'lsa, $\left(X<_{(n)}Y\right)\Rightarrow\left(X<_{(m)}Y\right)$ impikatsiya o'rinli.

Isbot. Funksiyalar $u(x)=\left[(x-d)^{+}\right]^{m}$ va $u(x)=x^{k}$, $k=\overline{1,m-1}$, $x\geq 0$ oldingi teorema 1 ning shartlarini qanoatlantiradilar. Demak,

$$\left(X<_{(n)}Y\right)\Rightarrow\left(Eu(X)\leq Eu(Y)\right)\Leftrightarrow\left(X<_{(m)}Y\right),$$

ya'ni $X<_{(m)}Y$ munosabat o'rinli.

Quyidagi misol ko'rsatadiki, teoremadagi teskari munosabat o'rinli bo'lmaydi. Faraz qilaylik, tasodifiy miqdor X va Y lar 0,1,2,3 qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qilsin:

$$P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\tfrac{1}{4},$$

$$P(Y=0)=\tfrac{1}{3},\quad P(Y=2)=\tfrac{1}{2},\quad P(Y=3)=\tfrac{1}{6}.$$

Oson ko'rinadiki

$$EX=EY=1{,}5,\qquad EX^{2}=EY^{2}=3{,}5.$$

Stop-loss tartibining quyidagi qiziqarli bo'lgan xossasini eslatib o'tamiz: agar $X<_{sl}Y$ bo'lib, $EX=EY$, $DX=DY$ tengliklar bajarilsa, bu tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, keltirilgan misoldagi X va Y tasodifiy miqdorlar stop-loss $<_{sl}\Leftrightarrow<_{(1)}$ qoidasi bilan taqqoslash mumkin bo'lmaydi. Lekin bu tasodifiy miqdorlar $<_{(2)}$ –ikkinchi tartibli stop-loss qoidasi orqali taqqoslash mumkin.

Isbotlangan teorema 2 dan $<_{(n)}$ taqqoslash daraja n ning o'sishi bilan "kuchaymaydi", aksincha, "pasayadi". Bundan tashqari, stoxastik tartib $<_{st}$ –bu 0-nchi tartibdagi stop-loss $\left(<_{(0)}\right)$, $<_{(1)}$ –

birinchi tartibli stop-loss, oldingi $<_{sl}$ tartib bilan bir xil ekanligini eslatib o'tamiz.

2.8. Haqiqatga o'xshashlik nisbati tartibi

Bu nom bilan ataladigan tartib $<_{LR}$ belgi bilan yoziladi va u quyidagicha aniqlanadi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorlar uchun $X <_{LR} Y$ munosabat o'rinli deyiladi, agar $0 \le x < y$ bo'lganda

$$\frac{dF_X(x)}{dF_Y(x)} \ge \frac{dF_X(y)}{dF_Y(y)}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa (boshqacha aytganda, haqiqatga o'xshashlik nisbati $dF_X(x)\big/dF_Y(x)$ argument x bo'yicha o'suvchi bo'lmasa).

Tasodifiy miqdorlar sinfidagi bu $<_{LR}$-tartib matematik statistikada muhim rol o'ynaydi. Haqiqatan ham $dF_X(x)$ funksiya, X tasodifiy miqdorning qiymatlaridan tashkil topgan bosh toplamda aniqlangan bo'lib, ko'pincha, u

$$dF_X(x) = P_X(x)dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $P_X(x)$ tasodifiy miqdor X taqsimotining zichlik funksiyasi bo'lib, uni haqiqatga o'xshashlik funksiyasi deb ataladi. Demak,

$$\frac{dF_X(x)}{dF_Y(x)} = \frac{P_X(x)}{P_Y(x)}$$

ifoda X va Y tasodifiy miqdorlarning haqiqatga o'xshashlik funksiyalarining nisbati deb ataladi.

Teorema 1. Tartib $<_{LR}$ stoxastik tartibdan kuchli, ya'ni $(X <_{LR} Y) \Rightarrow (X <_{st} Y)$ munosabat o'rinli.

Isbot. Tartib $<_{LR}$ ning ta'rifidan kelib chiqadiki, $\frac{dF_X}{dF_Y}=\frac{P_X(x)}{P_Y(x)}$ nisbat o'suvchi bo'lmaydi va $\int_0^{\infty} dF_X(x)=\int_0^{\infty} dF_Y(x)=1$.

Demak, $\frac{P_X(x)}{P_Y(x)}$ nisbat uchun $x=x_0>0$ nuqta mavjudki, $x\le x_0$ bo'lganda

$$\frac{P_X(x)}{P_Y(x)}\ge 1, \quad P_X(x)\ge P_Y(x), \tag{1}$$

$x>x_0$ bo'lganda esa

$$\frac{P_X(x)}{P_Y(x)}<1, \quad P_X(x)<P_Y(x) . \tag{2}$$

Bu (1) va (2) tengsizlikdan $x\le x_0$ uchun

$$F_X(x)=\int_0^x P_X(u)du\ge \int_0^x P_Y(x)dx=F_Y(x), \quad F_X(x)\ge F_Y(x),$$

$x>x_0$ uchun esa

$$1-F_X(x)=\int_x^{\infty} dF_X(u)=\int_x^{\infty} P_X(u)du\ge \int_x^{\infty} P_Y(u)dy=1-F_Y(x), \quad F_X(x)\ge F_Y(x).$$

Demak, har qanday $x\in\mathbb{R}$ uchun $F_X(x)\ge F_Y(x)$ tengsizlik, ya'ni $X<_{st} Y$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Izoh. Agar X va Y diskret tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ya'ni A va B to'plamlar sanoqli bo'lib,

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}, \quad P(X\in A)=1,$$
$$B=\{b_1,b_2,...,b_n,...\}, \quad P(Y\in B)=1,$$

munosabatlar bajarilsa, bu holda
$P_X(x)=P(X=x)$, $x\in A$, $P_Y(x)=P(Y=x)$, $x\in B$, har qanday $u\in\mathbb{R}$ uchun

$$F_X(u)=\sum_{\{k:a_k<u\}} P(X=a_k), \quad F_Y(u)=\sum_{\{k:b_k<u\}} P(Y=b_k)$$

belgilashlardan foydalanishga to'g'ri keladi.

Endi taqsimotlar (yoki tasodifiy miqdorlar) sinfida "yuklama taqsimotlarga" o'tish amalida $<_{LR}$ tartib saqlanishini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, tasodifiy miqdor $X \in £$, $g(x)$ manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}^+$ da aniqlangan borel funksiyasi bo'lib,

$$\int_0^\infty g(u)\,dF_X(u) < \infty,\; g(x) \in £$$

integral mavjud bo'lsin. Eslatib o'tamizki, X_g tasodifiy miqdor deb,

$$P(X_g < x) = \frac{\int_0^x g(u)\,dF_X(u)}{\int_0^\infty g(u)\,dF_X(u)} = \frac{1}{Eg(X)} \int_0^x g(u)\,dF_X(u)$$

taqsimotga ($g(\cdot)$ – yuklamali funksiya yuzaga keltiradigan) aytiladi.

Demak, bu holda

$$dF_{X_g}(x) = \frac{g(x)\,dF_X(x)}{Eg(X)}.$$

Teorema 2. Faraz qilaylik X va Y shunday tasodifiy miqdorlarki, ular uchun $X <_{LR} Y$ munosabat o'rinli, funksiya $g(\cdot)$ uchun esa mos tasodifiy miqdorlar $X_g, Y_g \in £$. Bu holda $X_g <_{LR} Y_g$ va $EX_g \le EY_g$.

Isbot. Quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishini eslatib o'tamiz:

$$dF_{X_g}(x) = \frac{g(x)\,dF_X(x)}{Eg(X)},$$

$$dF_{Y_g}(x) = \frac{g(x)\,dF_Y(x)}{Eg(X)}.$$

Bulardan

$$\frac{dF_{X_g}(x)}{dF_{Y_g}(x)} = c\,\frac{dF_{X_g}(x)}{dF_Y(x)},$$

bu yerda o'zgarmas $c = \frac{Eg(Y)}{Eg(X)}$. Oxirgi tenglikdan va $X <_{LR} Y$ munosabatdan "yuklama" tasodifiy miqdorlar X_g va Y_g uchun $X_g <_{LR} Y_g$ tartib bajarilishi kelib chiqadi. Yuqorida keltirilgan teoremaga asoslangan holda oxirgi munosabatdan $X_g <_{St} Y_g$ ekanligini va undan esa $EX_g \le EY_g$ tengsizlikni hosil qilamiz.

2.9. Eksponensial (ko'rsatkichli) tartib

Quyidagi tasodifiy risklarni taqqoslash usuli oldin kiritilgan stoxastik tartiblarga nisbatan eng kuchsiz bo'ladi. Bu tartibni foydalilik funksiyasi sifatida

$$u_\alpha(x) = -e^{-\alpha x},\ \alpha > 0$$

eksponensial (ko'rsatkichli) funksiyani qabul qiladigan shaxslar qarori deb tushunish mumkin.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdor Y, tasodifiy miqdor Xdan eksponensial tartibda "ustuvor" deyiladi, agar

$$Eu_\alpha(-X) \ge Eu_\alpha(-Y),\ \alpha > 0$$

tengsizlik bajarilsa. Bu tartib $X <_\varepsilon Y$ ko'rinishida belgilanadi.

Lemma 1. Har qanday $n = 0,1,...,$ uchun $\left(X <_{(n)} Y\right) \Rightarrow \left(X <_\varepsilon Y\right)$.

Bu lemmaning isboti oson, chunki $u_\alpha(x)$ funksiya ishoralari almashinadigan bo'ladi, ya'ni har qanday k uchun $(-1)^{k-1} u_\alpha^{(k)}(x) \ge 0,\ \alpha > 0$ tengsizlik bajarilib, $u_\alpha(x)$ oldingi bo'limdagi teorema 1 ning hamma shartlarini qanoatlantiradi.

Ta'rif 2. Tartib $X <_\varepsilon Y$ o'rinli deyiladi, agar har qanday $\alpha > 0$ uchun $Ee^{\alpha X} \le Ee^{\alpha Y}$ tengsizlik bajarilsa.

Bu ta'rifning oldingi ta'rif 1 bilan teng kuchliligi o'z-o'zidan ravshan. Ma'lumki, X tasodifiy miqdorning momentlar hosil qiluvchi funksiyasi

$$g_X(\alpha) = Ee^{\alpha X},\ \alpha > 0$$

tenglik bilan aniqlanadi va undan

$$\left(g_X(\alpha) \le g_Y(\alpha)\right) \Leftrightarrow \left(X <_\varepsilon Y\right)$$

teng kuchlilik munosabati o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Eslatib o'tamizki

$$Eu_\alpha(P - X) = u_\alpha(0) \qquad (*)$$

tenglamaning P ga nisbatan yechish $P = P(X,\alpha)$ foydalilik funksiyasi $u_\alpha(x)$ uchun foydaliligi 0 bo'lgan premia (sug'urta to'lovi, sug'urta badali) deb ataladi.

Lemma 2. Quyidagi

$$\left(P(X,\alpha)\le P(Y,\alpha)\right)\Leftrightarrow\left(X<_{\varepsilon}Y\right)$$

teng kuchlilik munosabati oʻrinli.

Isbot. Tenglama (*) yechimi $P=P(X,\alpha)$ uchun $Ee^{\alpha X}=e^{\alpha P}$, $P=\alpha^{-1}\ln g_X(\alpha)=P(X,\alpha)$. Agar $P(X,\alpha)\le P(Y,\alpha)$ boʻlsa, hamma $\alpha>0$ uchun

$$g_X(\alpha)\le g_Y(\alpha), \qquad (**)$$

tengsizlik bajariladi. Demak, bu holda $X<_{\varepsilon}Y$.

Tengsizlik (**) dan $P(X,\alpha)\le P(Y,\alpha)$ munosabat trivial ravishda kelib chiqadi. Lemma 2 isbot etildi.

Isbot etilgan lemma 1 va 2 lardan, oldin keltirilgan risklar orasidagi taqqoslashlarni xossalarini hisobga olganda $<_{\varepsilon}$ – taqqoslash eng kuchsiz boʻlishiga ishonch hosil qilish mumkin, ya'ni quyidagi $(m>n)$

$$<_{LR}\Rightarrow<_{St}\Rightarrow<_{SI}\Rightarrow<_{(n)}\Rightarrow<_{(m)}\Rightarrow<_{\varepsilon}$$

implikatsiyalar zanjiri oʻrinli boʻladi.

Quyida keltirilgan misoldan, eksponensial tartib $<_{\varepsilon}$ toʻla boʻlmasligini olamiz. Boshqacha aytganda, shunday X va Y tasodifiy miqdorlar mavjud boʻladiki, ular uchun $\alpha>0$ ning biror qiymatida $g_X(\alpha)\le g_Y(\alpha)$ tengsizliklar bajariladi, lekin $\beta\ne\alpha$ boʻlganda qarama-qarshi tengsizlik $g_X(\beta)>g_Y(\beta)$ oʻrinli boʻladi.

Misol. Tasodifiy miqdor X parametri 1 boʻlgan eksponensial taqsimot, Y esa

$$F_Y(x)=\tfrac{2}{3}E_0(x)+\tfrac{1}{3}E_2(x)$$

"qorishma" taqsimot boʻlsin (bu yerda $E_0(x)-0$ nuqtada joylashgan birlik taqsimot, $E_2(x)$ parametri 2 ga teng boʻlgan eksponensial taqsimot). Bu misol uchun $t<1$ boʻlganda $Ee^{tX}=\dfrac{1}{1-t}$, $t<\tfrac{1}{2}$ boʻlganda esa $Ee^{tY}=\tfrac{2}{3}+(1-2t)^{-1}\cdot\tfrac{1}{3}$. Natijada $\Delta(t)=g_X(t)-g_Y(t)$ deb olsak, $0<t<\tfrac{1}{4}$ oraliqda $\Delta(t)>0$, $\tfrac{1}{4}<t<\tfrac{1}{2}$ oraliqda esa $\Delta(t)<0$ tengsizliklar oʻrinli boʻlishiga ishonish qiyin boʻlmaydi.

2.10. Tartibni saqlaydigan va kuchaytirmaydigan (pasaytiradigan) amallar

Manfiy bo'lmagan va o'rta qiymatlari mavjud tasodifiy miqdorlar to'plami $\Im$ da aniqlangan va Lorens tartibini saqlaydigan yoki kuchaytiradigan almashtirishlar (amallar) amaliy nuqtayi nazardan muhim hisoblanadi. Boshqacha aytganda, shunday g funksiyalar sinfini topish zarurati yuzaga keladiki, ular uchun

$$X \prec_{lor} Y \Rightarrow (g(x) \prec_{lor} g(y)) \vee (g(x) \prec_{lor} X)$$

mantiqiy munosabatlar bajariladi. Bu masalani yechishda ikki qiymatli tasodifiy miqdorlar sinfidagi Lorens tartibiga oid quyidagi lemmalar foydali bo'ladi.

Lemma 1. Tasodifiy miqdorlar X va Y larni qiymatlari $0 < a_1 < a_2$ bo'lib, ularning taqsimotlari

$$P(X = a_1) = p_1, \ P(X = a_2) = 1 - p_1$$
$$P(Y = a_1) = q_1, \ P(Y = a_2) = 1 - q_1$$

bo'lsin. Bu holda X va Y lar Lorens ma'nosida faqat trivial $p_1 = q_1, p_1q_1 = 0$ yoki $(1-p_1)(1-q_1) = 0$ holatlardagina taqqoslanishi mumkin.

Lemma 2. Tasodifiy miqdorlar X va Y larning qiymatlari $0, a > 0$ bo'lib,

$$P(X = 0) = p_1, \ P(X = a) = 1 - p_1$$
$$P(Y = 0) = q_1, \ P(Y = a) = 1 - q_1$$

bo'lsin. Bu holda $p_1 \le q_1 \Rightarrow X \prec_{lor} Y$.

Bu ikki lemmaning to'g'ri ekanligini X va Y tasodifiy miqdorlar uchun mos Lorens chiziqlari $L_X(u)$ va $L_Y(u)(u \in [0,1])$ larni yozib olib, ularni taqqoslash orqali ishonish mumkin.

Lorens tartibini saqlaydigan funksiyalar sinfini G bilan belgilaymiz, ya'ni

$$G = \{g : X \prec_{lor} Y \Rightarrow g(X) \prec_{lor} g(Y)\}.$$

Lorens tartibini aniqlash uchun $g(\cdot)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak bo'ladi:

$$g : R^+ = (0,\infty) \to R^+, \ X \in \Im \Rightarrow g(X) \in \Im.$$

Teorema 1. To'plam G ga kiruvchi har qanday $g(\cdot)$ funksiya, quyidagi uch xil ko'rinishdan bittasiga kiradi.

$$g_{1,a}(x) = ax,\ x \ge 0,\ a \in (0,\infty),$$
$$g_{2,b}(x) = b,\ x \ge 0,\ b \in (0,\infty),$$
$$g_{3,c}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c, & x > 0,\ c \in (0,\infty). \end{cases}$$

Tartibni pasaytiradigan (kuchaytirmaydigan) funksional almashtirishlar haqida [5] da quyidagi teorema isbot etilgan.

Teorema 2. Faraz qilaylik, $g: R^+ \to R^1$- o'lchovli akslantirish, tasodifiy miqdor $X \in \Im$ bo'lsin. Bu holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli bo'ladi:

(1) $g(X) \prec_{lor} X$;

(2) hamma $x > 0$ uchun $g(x)$ funksiya R^+ da kamaymovchi emas, $\frac{g(x)}{x}$ funksiya esa $x \in R^+$ bo'lganda o'suvchi bo'lmaydi.

Isbot. Mantiqiy $(2) \Rightarrow (1)$ implikatsiyani ko'ramiz. Tasodifiy miqdor X uchun o'rta qiymat EX mavjud bo'lib, $(X \in \Im), Y = g(X)$ tasodifiy miqdorni (2) shartlarni qanoatlantiruvchi $g(\cdot)$ funksiya orqali aniqlaymiz. Demak, biz

$$(2) \Rightarrow g(X) \prec_{lor} X$$

implikatsiyani, ya'ni $g(\cdot)$ funksiya $\prec_{lor}$ munosabatni kuchaytirmasligini isbot qilamiz. Funksiya $g(x) > 0 (x > 0$ uchun) bo'lgani sababli $Eg(X) > 0$. Bunda biz $EX > 0$ ekanligidan foydalandik, aks holda $X \in \Im$ ekanligini hisobga olsak, $P(X = 0) = 1$ ehtimollikga ega bo'lamiz. Funksiya $g(X)$ to'plam $(0,\infty)$ da kamaymovchi bo'lmasligidan $X \le 1$ bo'lgan holda $g(X) \le 1$ tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan tashqari $X \ge 1$ bo'lganda $\frac{g(x)}{x} \le \frac{g(1)}{1}$ yoki $g(X) \le g(1)X$, chunki $\frac{g(x)}{x}$ funksiya $(0,\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'lmaydi. Shunday qilib, umumiy holda $g(X) \le (X+1)g(1)$ ekanligini olamiz. Demak, $Eg(X) < \infty$, ya'ni $g(X) \in \Im$.

Har qanday tasodifiy miqdor X uchun

$$X \overset{d}{=} X^1 = F_X^{-1}(U)$$

tenglik o'rinli va bu yerda U-[0,1] oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor. Bu tenglikdan foydalanib Lorens egri chizig'i $L_X(u)$ ni

$$L_X(u) = E[X'I_{[0,1]}(U)] / EX'$$

ko'rinishda yoza olamiz (bunda odatdagi kabi $I_{[0,u]}$-[0,u] oraliq indikatori). Xuddi shuningdek $Y \overset{d}{=} g(F_X^{-1}(U))$ yozuvdan foydalanib $u \in [0,1]$ uchun

$$L_Y(u) - L_X(u) = \int_0^u [g(F_X^{-1}(s)) - F_X^{-1}(s)\frac{EY}{EX}]\frac{ds}{EY}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Funksiya $\frac{g(x)}{x}$ oraliq $(0,\infty)$ da o'suvchi emasligidan integral ostidagi funksiya oldin musbat, keyin manfiy (argument s noldan 1 gacha o'zgarganda) bo'ladi. Demak, integral $u=1$ bo'lganda minimal qiymatga erishadi. Lekin $L_X(1) = L_Y(1) = 1$ bo'lgani uchun har qanday $u \in [0,1]$ bo'lganda

$$L_Y(u) \geq L_X(u),$$

ya'ni $Y \prec_{lor} X$ munosabat bajariladi.

Mantiqiy implikatsiya $(1) \Rightarrow (2)$ yuqoridagi 1- va 2-lemmalarga asoslangan holda teskarisini faraz qilish usuli bilan isbot etiladi. Haqiqatan ham, $y = g(x)$ funksiya uchun shunday $x = x^*$ nuqta mavjud bo'lib, $g(x^*) = 0$ va $x^* > 0$ munosabatlar bajarilishini faraz qilamiz. Tasodifiy miqdor X uchun $P(X = x^*) = 1$ tenglik bajarilsin (to'g'rirog'i $x = x^*$ nuqtada joylashgan birlik taqsimoti $E_{x^*}(x)$ ga ega bo'lgan tasodifiy miqdor X ni ko'ramiz). Bu tasodifiy miqdor $X \in \Im$, lekin $P(g(X) = 0) = 1$ bo'lgani uchun $g(X) \notin \Im$ va shu sababli X va $g(X)$ tasodifiy miqdorlarni Lorens ma'nosida taqqoslab bo'lmaydi.

Endi hamma $x > 0$ lar uchun $g(x) > 0$ bo'lsin, lekin bu funksiya $(0,\infty)$ da kamaymovchi bo'lish shartini qanoatlantirmasin. Demak, shunday x va y mavjudki, $0 \leq x < y$ va $g(y) < g(x)$. Shunday tasodifiy miqdor X ni ko'ramizki, uning uchun

$$P(X = x) = p,\ P(X = y) = 1 - p$$

taqsimot o'rinli bo'lsin. Quyidagi ikki holat yuzaga kelishi mumkin:

1. $x=0,\ g(y)>0$. Bu holda
$$p<\frac{g(0)-g(y)}{2g(0)-g(y)}$$
bo'lganda $g(X)$ va X tasodifiy miqdorlarni Lorens ma'nosida taqqoslab bo'lmaydi ($g(X)\prec_{lor} X$).

2. $x>0,\ g(y)>0$. Bu holda
$$p\geq\frac{(y/x)-1}{((g(y)/g(x))+(y/x)-2)}$$
bo'lganda $g(X)\prec_{lor} X$.

Endi oxirida funksiya $g(\cdot)$ hamma $x>0$ uchun $g(x)>0$, $\frac{g(x)}{x}$ oraliq $(0,\infty)$ da o'suvchi bo'lmagan funksiya bo'lmasin. Demak, shunday x va y mavjudki, $0<x<y$ va
$$\frac{g(x)}{x}<\frac{g(y)}{y}$$
shartlar bajariladi. Simmetrik Bernulli taqsimotiga ega tasodifiy X miqdorni ko'raylik va uning taqsimoti
$$P(X=x)=P(X=y)=\frac{1}{2}$$
bo'lsin. Bu tasodifiy miqdor uchun
$$L_{g(X)}(\tfrac{1}{2})<L_X(\tfrac{1}{2})$$
munosabat o'rinli va biz yana qarama-qarshilikka duch kelamiz.

Isbot etilgan teoremani soliq siyosati terminlarida qiziqarli sharhlash mumkin. Aytaylik, X - soliq to'langanga qadar "daromad", $g(X)$-soliq to'langandan keyingi "daromad" bo'lsin. Soliq siyosati risk X ni har qanday taqsimotga ega bo'lgan holida "daromadlar" orasida tengsizlikni kamaytirishga yo'naltirilgan bo'lishi kerakligini hisobga olinsa, 2-teoremaning (2) shartini ta'min etish zarur bo'ladi. Haqiqatan ham, hamma $x>0$ uchun $g(x)>0$ bo'lishligi, soliq to'lanishiga qadar "daromadi" bo'lgan har qanday shaxsning soliq to'langandan keyin ham "daromadi" saqlanishini ifoda etadi ($g(x)>0$). Funksiya $g(x)$ ning monoton bo'lishlik sharti esa, biror shaxs boshqalarga nisbatan ko'proq "daromad" qilsa, soliq to'langandan keyingi "daromadi" ham kamaymaydi. Oxirgi $\frac{g(x)}{x}$ funksiyaning kamayuvchi bo'lishlik sharti esa, soliq to'lovi tizimining progressiv bo'lish shartini, ya'ni boy kishilar "daromad" larining ko'p qismi, kambag'allarga nisbatan soliq to'lashga jalb etilishi kerakligini anglatadi.

Quyidagi natija 2-teoremadan oson keltirilib chiqarilishi mumkin.

Natija. Faraz qilaylik g_1 va g_2- R^+ ni R^+ ga akslantiradigan, kamaymovchi bo'lmagan uzluksiz funksiyalar bo'lsin va $X \in \Im$ shart bajarilsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

(1)'. $g_1(X) \prec_{lor} g_2(X)$,

(2)'. Funksiya $g(x) = g_1 \circ g_2^{-1}(x) = g_1(g_2^{-1}(x))$ 2-teoremaning (2) shartini qanoatlantiradi (bu yerda $g(\cdot)$ funksiya g_1 va g_2^{-1} lar superpozitsiyasi, g_2^{-1} funksiya g_2 ga teskari funksiya).

III bob. SUG‘URTA TO‘LOVI VA PREMIYALAR MODELLARI

Oldin Life (hayot) sug‘urtasiga oid holatlarni qayd etib o‘tamiz. Bu sug‘urta variantida sug‘urta kompaniyasi bir yil davomida sug‘urta qilingan mijoz vafot qilsa (kontrakt tuzilgan davrdan boshlab) uning qarindoshlariga b so‘m miqdorida sug‘urta to‘lovi beradi, agar shu davr davomida sug‘urta qilingan shaxs vafot etmasa, kompaniya hech narsa to‘lamaydi. Sug‘urta hodisasining ro‘y berishi ehtimolligi q bo‘lsa, sug‘urta to‘lovi X ni quyidagicha

$$X = Ib \tag{1}$$

ifoda etish mumkin. Bu yerda I – sug‘urta hodisasining indikatori, ya’ni $I=1$ bo‘ladi, agar sug‘urta risk holati ro‘y bersa, $I=0$ bo‘ladi, agar sug‘urta risk holati ro‘y bermasa.

Shunday qilib, X sug‘urta to‘lovi bo‘lib,

$$P(X=x)=\begin{cases} 1-q, \text{ agar } x=0 \text{ bo'lsa;} \\ q, \quad \text{agar } x=b \text{ bo'lsa;} \\ 0, \quad \text{qolgan hollarda} \end{cases}$$

taqsimotga ega bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_X(x)=P(X<x)=\begin{cases} 0, \text{ agar } x\le 0 \text{ bo'lsa;} \\ 1-q, \text{ agar } 0\le x<b \text{ bo'lsa;} \\ 1, \text{ agar } x\ge b \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo‘ladi. Yuqoridagi (1) formuladan foydalanib

$$EX=bq,\ EX^2=b^2q,\ DX=b^2q(q-1)$$

tengliklarni yozish mumkin.

Aktuar matematikada o‘rta qiymat EX, dispersiya DX lardan tashqari, o‘rta kvadratik og‘ish $\sigma_X=\sqrt{DX}$ va variatsiya koeffitsiyenti

$$C_X=\frac{\sigma_X}{m_X},\ m_X=EX$$

xarakteristikalaridan ham ko‘p foydalaniladi.

3.1. Sug'urta to'lovlarining diskret modellari

Sug'urta kompaniyasining moliyaviy to'lovlarini tashkil etuvchi asosiy komponentlardan biri bu individual to'lov hisoblanadi. O'rganilayotgan to'lov holatiga bog'liq holda individual to'lov deganda, har qanday konkret bitta sug'urta shartnomasi yuzaga keltirgan to'lov tushuniladi. Ko'p hollarda (masalan, hayot sug'urtasida) shartnoma faqat bitta to'lovga olib keladi, boshqa hollarda esa (masalan, avtomobil sug'urtasida) bitta shartnoma o'zining harakat davri davomida bir nechta to'lovlarga olib kelishi mumkin (masalan, takroriy avtohalokatlar ro'y berishi mumkin). Risk nazariyasi chegarasida faqat X individual to'lovning qandaydir pul birliklari bilan o'lchanadigan qiymatlari qiziqtiradi, xolos. Bu to'lov miqdori X ni tasodifiy miqdor deb tushunish tabiiy va $P(X=0)>0$ (agar sug'urta holati ro'y bermasa, hech qanday to'lov yuzaga kelmaydi) bo'lgani uchun X diskret tipdagi tasodifiy miqdor bo'ladi.

Sug'urta sistemasining sodda sxemalarida individual to'lov X tasodifiy miqdor chekli sondagi $b_0=0, b_1,\dots,b_n$ qiymatlarni qabul qiladi va uning taqsimoti

X	b_0	b_1	...	b_n
P	p_0	p_1	...	p_n

jadval bilan ifoda etiladi. Bu yerda $P(X=b_k)=p_k,\ k=0,1,2,\dots,n$.

Misol sifatida bir yil muddatga tuzilgan hayot sug'urtasini ko'raylik. Bu sxemada mijoz sug'urta kompaniyasiga ma'lum miqdordagi summani sug'urta (premiyasi) badali sifatida to'laydi (bu summa aktuar matematikada "mukofot" deb ataladi). Sug'urta kompaniyasi, o'z navbatida, sug'urta qilingan shaxs bir yil davomida vafot etsa, uning qarindoshlariga b so'm to'lash majburiyatini oladi (sug'urta etilgan shaxs yil oxirigacha yashasa, hech narsa to'lamaydi). Keltirilgan sug'urta sxemasida individual to'lov X uchun

$$P(X=0)=p,\ P(X=b)=q=1-p, 0\le p\le 1$$

bo‘lib, q ni shaxsning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi deb tushunish mumkin. O‘z-o‘zidan ma’lumki, bu ehtimollik shaxsning sug‘urta qilinayotgan vaqtdagi yoshi $x$ga bog‘liq va uni aktuar matematikada q_x deb belgilanadi va uning qiymatlari to‘plamini “umr davomligi” jadvali deyiladi. Demak, sug‘urta shartnomasi tuzilayotganda, bu jadvaldan informatsiya (axborot) manbayi sifatida foydalaniladi. Bundan tashqari, mazkur davlatdagi demografik jarayonlarni o‘rganish uchun ham bu davlat uchun alohida “umr davomligi” jadvallari tuziladi.

Ayniqsa, o‘lim sabablarini hisobga oluvchi sug‘urta shartnomalari murakkabroq ko‘rinishga ega bo‘ladi. Sodda hollarda bunday shartnomalarning ma’nosi quyidagicha: Shaxs sug‘urta kompaniyasiga ma’lum miqdordagi pulni to‘laydi, sug‘urta kompaniyasi esa sug‘urtalangan shaxs baxtsiz hodisa (masalan, avtomobil halokati) natijasida halok bo‘lsa, b_1 so‘m, agar uning bir yil davomidagi vafoti “tabiiy (ya’ni hech qanday baxtsiz hodisalar bilan bog‘liq bo‘lmagan)” bo‘lsa, b_2 so‘m to‘laydi. Odatda, $b_1 > b_2$ deb hisoblanadi. Keltirilgan sug‘urta varianti uchun to‘lov

$$X = \begin{cases} 0, & \text{ehtimolligi } p; \\ b_1, & \text{ehtimolligi } q^{(1)}; \\ b_2, & \text{ehtimolligi } q^{(2)}; \end{cases}$$

tasodifiy miqdor bo‘ladi. Agar sug‘urtalangan shaxsning yoshi shartnoma buzilgan vaqtda x bo‘lsa, $q^{(1)}$ va $q^{(1)}$ ehtimolliklar oldin kiritilgan q_x ehtimollik bilan $q_x = q^{(1)} + q^{(2)}$ munosabatda bo‘lishi o‘z-o‘zidan ko‘rinadi.

Empirik ma’lumotlarning analizi namoyon etadiki, bir yil davomida “o‘lim” hodisasi ro‘y berishi ehtimolligi q_x, shaxsning yoshi x bilan bog‘liqligi

$$q_x = A + Be^{\alpha x} \qquad \text{(Meykxam modeli)}$$

funksiya bilan ifodalanadi. Bu yerda qo‘shiluvchi A shaxsning yoshiga bog‘liq bo‘lmaydigan, uning baxtsiz hodisalar natijasidagi vafotiga mos keladi, $Be^{\alpha x}$ qo‘shiluvchi esa shaxsning yoshini uning o‘limiga ta’sirini hisobga olgan holda, “tabiiy vafot” ro‘y berishiga mos keladi. Aniq o'tkazilgan analiz baxtsiz hodisalar natijasida ro'y beradigan voqealar bilan shaxsning yoshi orasida ma'lum bog'liqlik mavjudligini tasdiq etadi, keltirilgan Meykxam modelida birinchi yaqinlashishda

$$q^{(1)} = A,\ q^{(2)} = Be^{\alpha x}$$

deb hisoblash mumkin bo'ladi.

Qo'shiluvchi A shaxsning yoshi $x$ga bog'liq emas, shuning uchun ham uni baxtsiz hodisalar natijasida yuzaga kelgan o'limlarga mos keladi, $Be^{\alpha x}$ qo'shiluvchi esa shaxsning o'limi uning yoshiga bog'liq bo'lishini ifoda etadi va shu ma'noda "tabiiy o'lim" holatlariga mos keladi.

Tatbiqiy masalalarda individual to'lov Xning sonli xarakteristikalari muhim rol o'ynaydi. Bular qatoriga o'rta qiymat $m_X = EX$, dispersiya $VarX = EX^2 - (EX)^2$, o'rta kvadratik og'ish $\sigma_X = \sqrt{VarX}$, variatsiya koeffitsiyenti $C_X = {\sigma_X}/{m_X}$ va boshqalar kiradi.

Diskret tasodifiy miqdor X ning taqsimoti

$$p_0 = P(X = b_0), \ldots, p_n = P(X = b_n)$$

bo'lsa, ehtimolliklar nazariyasining umumiy formulalariga asosan

$$EX = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k \tag{1}$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{n} b_k^2 p_k \tag{2}$$

Yuqorida keltirilgan bir yilga tuziladigan sodda hayot sug'urtasi uchun

$$EX = 0 \cdot p + b \cdot q = b \cdot q\ , \tag{3}$$

$$EX^2 = 0^2 \cdot p + b^2 \cdot q = b^2 \cdot q\ , \tag{4}$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = b^2 q - (bq)^2 = b^2 pq\ . \tag{5}$$

Mashq sifatida quyidagi misollarni ko'ramiz.

Misol 1. Bir yil muddatga tuziladigan sodda hayot sug'urtasi modelida, shaxsning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi $q = 0{,}0025$, sug'urta to'lovi $b = 100000$ so'm. Individual to'lov Xning o'rta qiymati va dispersiyasi topilsin.

Yuqoridagi (1) formula bo'yicha

$$m_X = EX = b \cdot q = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250 \text{ so'm}.$$

Formula (2) ga, asosan,

$$VarX = b^2 pq = 10^{10}\left(1 - 25 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 25 \cdot 10^6.$$

Shunday qilib, o'rta kvadratik og'ish

$$\sigma_X = \sqrt{VarX} = 5000 \text{ so'm}.$$

Variatsiya koeffitsiyenti

$$C_X = {}^{\sigma_X}\!\!\diagup_{m_X} = {}^{5000}\!\!\diagup_{250} = 20.$$

Misol 2. Bir yilga tuziladigan va sug'urta to'lovi o'lim holatining turiga bog'liq bo'lgan hayot sug'urtasi uchun m_X va $VarX$ topilsin. Bunda "tabiiy sabablarga" bog'liq bo'lgan sug'urta to'lovi $b_2 = 100000$ so'm, baxtsiz hodisalar bilan bog'liq sug'urta to'lovi $b_1 = 500000$ so'm. Baxtsiz hodisa tufayli o'limning ehtimolligi $q^{(1)} = 0{,}005$ va bir yil davomida "tabiiy sabablar" tufayli ro'y beradigan o'lim ehtimolligi $q^{(1)} = 0{,}02$.

Yechish. (1) formulaga asosan, $m_X = EX = b_1 \cdot q^{(1)} + b_2 \cdot q^{(2)} = 450$ so'm.

(2) formulaga asosan esa $VarX = 145 \cdot 10^6$. Bu holda o'rta kvadratik og'ish $\sigma_X = \sqrt{VarX} = 12042$, variatsiya koeffitsiyenti $C_X = {}^{\sigma_X}\!\!\diagup_{m_X} = 16{,}76$.

3.2. Sug'urta to'lovlarining strukturalangan modellari

Aktuar matematikada sug'urta to'lovni ifoda etuvchi tasodifiy miqdor Xni ma'lum ma'noda strukturalash qabul qilingan. Masalan, yuqorida ko'rilgan hayot sug'urtasining eng sodda variantida tasodifiy miqdor Xni

$$X = IY \qquad (1)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bunda tasodifiy miqdor

$$I = \begin{cases} 1, \text{ agar sug'urta hodisasi ro'y bersa,} \\ 0, \text{ agar sug'urta hodisasi ro'y bermasa,} \end{cases}$$

Y tasodifiy miqdor esa, sug'urta hodisasi ro'y berganda talab qilingan sug'urta to'lovining miqdorini anglatadi.

Tushunarliki,

$$I=\begin{cases}1, \text{ agar } X>0 \text{ bo'lsa,}\\ 0, \text{ agar } X=0 \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$

ya'ni $I=I(X>0)$ – tasodifiy hodisa $\{X>0\}$ ning indikatori. Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, tasodifiy miqdor I ni taqsimoti, sug'urta to'lovi taqsimoti orqali quyidagi formulalar bilan aniqlanishi mumkin:

$$P(I=0)=P(X=0)=p_0,\ P(I=1)=P(X>0)=1-P(X=0)=1-p_0.$$

Tasodifiy miqdor Y ning taqsimoti esa X sug'urta to'lovini, $X>0$ shartiga nisbatan shartli taqsimoti bo'ladi yoki bo'lmasa

$$P(Y=b_i)=P(Y=b_i|X>0)=\frac{P(Y=b_i,X>0)}{P(X>0)}=$$

$$=\frac{P(Y=b_i)}{P(X>0)}=\frac{p_i}{1-p_0},\ i=1,2,..,n$$

Aksincha, I va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari ma'lum bo'lsa, X individual to'lov taqsimotini aniqlash mumkin. Bunda, eng avvalo, $P(X=0)=P(I=0)$ ekanligini e'tirof etamiz. So'ng esa $b_i>0$ bo'lganda quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$P(X=b_i)=P(IY=b_i)=P(IY=b_i|(I=1))P(I=1)+$$
$$+P(IY=b_i|(I=0))P(I=0)=P(Y=b_i|(I=1))P(I=1)$$

Oxirgida to'la ehtimollik formulasidan va $P(Y=b_i,I=0)=0$ ekanligidan foydalanildi. Tushunarliki, haqiqiy Y iskning taqsimotini, $(I=1)$ bo'lgandagina o'rganish ma'noga ega, xolos. Shuning uchun ham quyidagi mulohazalarda bu shart $(ya'ni, I=1)$ tushurib qoldiriladi. Aytilganlardan kelib chiqadiki,

$$P(X=b_i)=P(Y=b_i)\cdot P(I=1).$$

Demak, individual to'lovning keltirilgan ikkita izohlari bir-biriga teng kuchli bo'ladi. Mashq uchun quyidagi aniq misollarni ko'ramiz.

Misol 1. Sug'urta badali (to'lovi) $b = 100000$ va sug'urta qilingan shaxsning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi $q = 0,0025$ bo'lgan sug'urta shartnomasini ko'ramiz. Bu shartnoma uchun I va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdor I mumkin bo'lgan 0 va 1 qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(I=1) = P(X>0) = q = 0,0025,$$
$$P(I=0) = P(X=0) = 1 - P(X>0) = 1 - q = 0,9975$$

Tasodifiy miqdor Y esa o'zgarmas son, ya'ni $P(Y=b) = P(Y=100000) = 1$.

Misol 2. Bir yilga tuzilgan va sug'urta to'lovlari, o'lim baxtsiz hodisa natijasida ro'y beradigan bo'lsa $b_1 = 500000$ (bu hodisaning ro'y berish ehtimolligi $q^{(1)} = 0,0005$), agar o'lim "tabiiy sabablar" bilan bog'liq bo'lganda $b_2 = 100000$ (bu hodisaning ro'y berish ehtimolligi $q^{(2)} = 0,0020$ deb qabul qilinadi) miqdorlardan iborat bo'lgan sug'urta shartnomasi o'rganiladi. Bu shartnoma uchun I va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdor I mumkin bo'lgan 0 va 1 qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(I=1) = P(X>0) = q^{(1)} + q^{(2)} = 0,0025,$$
$$P(I=0) = P(X=0) = 1 - P(I=1) = 0,9925.$$

Tasodifiy miqdor Y ikkita $b_1 = 500000$ va $b_2 = 100000$ qiymatlarni

$$P(Y=500000) = P(X=500000 | X>0) = \frac{P(X=500000)}{P(X>0)} = \frac{0,0005}{0,0025} = 0,2,$$
$$P(Y=100000) = P(X=100000 | X>0) = \frac{P(X=100000)}{P(X>0)} = \frac{0,0020}{0,0025} = 0,8,$$

ehtimolliklar bilan qabul qiladi.

Ba'zida sug'urta variantlarida bitta shartnoma bir nechta isk holatlarini yuzaga keltirishi mumkin (masalan, avtomobil sug'urta qilinganda). Bu hollarda tasodifiy miqdor (isk) X ni

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu \qquad (2)$$

yig'indi ko'rinishida yozish mumkin. Bunda tasodifiy miqdor ν, shartnoma muddati davomida yuzaga kelgan isklar sonini, $Y_1, Y_2, \dots$ tasodifiy miqdorlar esa haqiqiy ravishda ro'y bergan isk miqdorlarini belgilaydi.

Qayd qilib o'tamizki, hayot sug'urtasining (1) modeli, sug'urta iski X formula (2) bilan aniqlanadigan modelning xususiy holi bo'ladi. Bunga ishonish uchun (2) da $P(\nu=1)=1$ deb hisoblash kifoya bo'ladi.

Odatda (2) modelda qo'shiluvchilar soni tasodifiy miqdor ν bevosita qo'shiluvchi Y_i larning hech biriga bog'liq emas deb, ya'ni

$$\nu, Y_1, Y_2, \dots,$$

bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lishligi faraz qilinadi. Bunga qaramasdan (2) modelning aniqroq analizi ko'rsatadiki, ba'zi hollarda sharhlab o'tilgan bog'liqsizlik sharti bajarilmaydi. Masalan, ta'mirlangan avtomobilning buzilish ehtimolligi va uning natijasida yuzaga keladigan xarajatlar ko'proq bo'lishi mumkin.

Individual X iskni (1) va (2) formulalar bilan aniqlash, har xil faktorlarning unga (X ga) bo'lgan ta'sirini miqdoriy jihatdan o'rganish qulay ekanligi bilan ajralib turadi, chunki I va ν tasodifiy miqdorlar orqali ifodalangan sug'urta hodisalarini qaytarilishiga va Y_i tasodifiy miqdorlar xarakterlaydigan haqiqiy iskga esa boshqa faktorlar ta'sir etishi mumkin. Aytib o'tilganlarga asoslanib, (1) va (2) formulalarni, to'lov X ning struklashtirilgan (yo'naltirilgan) variantlari deb hisoblash mumkin.

Masalan, avtomobilni yo'l-transport halokatlari natijasida ro'y beradigan harakatlardan sug'urtalashni o'rganaylik. Tushunarliki, yo'l-transport halokatlari yuzaga kelishi hodisalaning ehtimollikalari birinchi navbatda, sug'urta etilgan shaxsning yoshiga bog'liq. Bu ehtimolliklar yosh haydovchilar (ortiqcha "epchillik" va "o'ziga ishonish" tufayli) va keksa yoshdagi kishilar uchun (yo'l hodisasi va holatlariga reaksiya kamaygani tufayli) kattaroq bo'ladi. Lekin yo'l-transport halokatlari yuzaga keltirgan xarajatlar hech qanday ravishda shaxsning yoshiga bog'liq bo‘lmaydi (u avtomobil rusumiga (markasiga) ko‘proq bog‘liq bo‘ladi).

Endi (2) formula orqali struklashtirilgan X sug‘urta to‘lovi uchun foydali bo‘lgan quyidagi moment formulalarini keltiramiz:

$$EX = E(Y_1 + Y_2 + ... + Y_v) = \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) E(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n | (v=n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP(v=n) \cdot EY = Ev \cdot EY. \qquad (3)$$

Xususan, (1) model uchun moment

$$EX^2 = E(Y_1 + Y_2 + ... + Y_v)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) E(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) \cdot E(Y_1^2 + ... + Y_n^2 + 2(Y_1 \cdot Y_2 + ... + Y_{n-1} \cdot Y_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(v=n) \left(nEY^2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} EY \cdot EY \right) =$$

$$= Ev \cdot EY^2 + Ev(v-1)(EY)^2. \qquad (4)$$

Oxirgidan quyidagi tenglikni olamiz:

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = Ev \cdot EY^2 + (Ev^2 - Ev)(EY)^2 - (Ev)^2 (EY)^2 =$$

$$= Ev(VarY + (EY)^2) + (Ev^2 - (Ev)^2)(EY)^2 - Ev(EY)^2 =$$

$$= Ev \cdot VarY + Varv \cdot (EY)^2. \qquad (5)$$

Xususan, (1) model uchun

$$VarX = VarY \cdot P(I=1) + (EY)^2 P(I=1) P(I=0). \qquad (6)$$

Keltirilgan formulalar

$$v, Y_1, Y_2, ...,$$

tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lganda, Y iskning ixtiyoriy taqsimoti uchun o‘rinli (uni diskret tipdagi taqsimot bo‘lishi shart emas).

X individual isklarni struklashtirishning boshqa variantlari ham mavjud. Masalan, X tasodifiy miqdor (isk) aviatsion halokatlar bilan bog‘liq bo‘lganda, uni

$$X = I(L \cdot b_1 + b_2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda I – “halokat ro‘y berdi” hodisasining indikatori, L – havo transportidagi passajirlar soni, b_1 –

bitta shaxs uchun sug'urta to'lovi, b_2 –havo transporti uchun sug'urta to'lovi.

3.3. Uzluksiz modellar

Sug'urta to'lovi X uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor bo'la olmaydi, chunki $P(X=0)$ ehtimollik musbat bo'libgina qolmasdan, u 1 ga juda yaqin bo'ladi. Shuning uchun ham sug'urta to'lovi uzluksiz modellari haqida so'z borganda, strukturalashtirilgan $X=IY$ yoki $X=Y_1+Y_2+...+Y_v$ formulalardagi tasodifiy miqdor Y (to'lanishi kerak bo'lgan haqiqiy to'lov) taqsimotini uzluksiz tipda bo'lishi tushuniladi.

Ehtimolliklar nazariyasi kursidan yaxshi ma'lumki, uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdorlarni taqsimoti

$$F(x)=P(Y\le x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du$$

yoki

$$p(x)=F'(x)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Tasodifiy miqdor Yning qiymatlari musbat bo'lgani uchun uning taqsimoti $[0,\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda joylashadi. Demak, $x<0$ bo'lganda $F(x)=p(x)\equiv 0$. To'lovlarni baholashda ularning sonli xarakteristikalari muhim rol o'ynaydi. Oxirgi tenglikni hisobga olgan holda tasodifiy miqdor Yning makroxarakteristikalari - o'rta qiymat va ikkinchi tartibli momenti uchun quyidagi formulalarni keltirish mumkin:

$$EY=\int_0^\infty x dF(x),\ EY^2=\int_0^\infty x^2 dF(x)$$

va agar taqsimot zichlik funksiyasi $p(x)=F'(x)$ mavjud bo'lsa,

$$EY=\int_0^\infty xp(x)d(x),\quad EY^2=\int_0^\infty x^2p(x)d(x).$$

Ko'p hollarda

$$EY=\int_0^\infty (1-F(x))dx,\quad EY^2=2\int_0^\infty x(1-F(x))dx$$

formulalardan foydalanish qulay bo'ladi. Bulardan oxirgi EY^2 uchun keltirilgan formulani to'g'ri ekanligini isbotlaymiz (birinchi formulaning isboti sodda). Quyidagi

$$\int_0^A x^2 dF(x) = -\int_0^A x^2 d(1-F(x)),\ A>0$$

integralni ko'ramiz. Bu yerda bo'laklab integrallash amalini bajarib

$$\int_0^A x^2 dF(x) = -A^2(1-F(A)) + 2\int_0^A x(1-F(x))dx \quad .$$

tenglikni hosil qilamiz. Lekin $A\to\infty$da

$$A^2(1-F(A)) = A^2\int_A^\infty dF(x) < A^2\cdot\frac{1}{A^2}\int_A^\infty x^2 dF(x).$$

Endi oxirgi tenglikda $A\to\infty$da limitga o'tib

$$EY^2 = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x^2 dF(x) = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x(1-F(x))dx = 2\int_0^A x(1-F(x))dx$$

keltirilgan formulaning isbotini olamiz.

Misol. Faraz qilaylik, umumiy narxi 6 mln. so'mdan iborat bo'lgan obyekt yong'in falokatidan sug'urta qilingan bo'lsin. Obyektda yong'in ro'y berishi ehtimolligi $q=10^{-4}$, yong'in natijasida keltirilgan zarar tasodifiy miqdor bo'lib, u nol va obyektning to'la narxi oralig'ida tekis taqsimlangan bo'lsin. To'lov $Y=I$. Uning o'rta qiymati va dispersiyasi topilsin.

Yechish. $[0,a], a>0$ oraliqda tekis taqsimlangan Y tasodifiy miqdorni qaraylik. Bu miqdorning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a},\text{agar } x\in[0,a] \text{ bo'lsa,}\\ 0,\ \text{agar } x\notin[0,a] \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Demak,

$$EY=\int_0^a xp(x)dx=\frac{1}{a}\cdot\int_0^a xdx=\frac{a}{2},$$

$$EY^2=\int_0^a x^2p(x)dx=\frac{1}{a}\cdot\int_0^a x^2dx=\frac{a^2}{3},$$

$$VarY=EY^2-(EY)^2=\frac{a^2}{3}-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{12}.$$

Ko'rilayotgan misolda $a=6\cdot10^6$ va bu holda

$$EY=\frac{6\cdot10^6}{2}=3\cdot10^6,$$

$$VarY=\frac{\left(6\cdot10^6\right)^2}{12}=\frac{36}{12}\cdot10^{12}=3\cdot10^{12}.$$

Oldingi punktda keltirilgan (4) va (6) formulalarga asosan

$$EX=EY\cdot q=3\cdot10^6\cdot10^{-4}=3\cdot10^2=300$$

$$VarX=VarY\cdot q+\left(EY\right)^2q\left(1-q\right)=3\cdot10^{12}\cdot10^{-4}+\left(3\cdot10^6\right)^2\cdot10^{-4}\cdot\frac{99999}{10^4}=$$

$$=12\cdot10^8.$$

O'rta kvadratik og'ish σ_X va variatsiya koeffitsiyenti C_X uchun

$$\sigma_X=\sqrt{VarX}\approx3.46\cdot10^4$$

$$C_X=\frac{\sigma_X}{EX}\approx115$$

baholar kelib chiqadi.

3.4. Sug'urta premiyalarini (badalini) belgilash prinsiplari

Sug'urtaning individual risk modelidagi P miqdor – sug'urta premiyasi (premiya) yoki sug'urta to'lovi deb ataladi. Bu modelning asosiy xususiyatlarini eslatib o'tamiz.

Faraz qilaylik, sug'urta kompaniyasining boshlang'ich kapitali S bo'lib, uning foydalilik funksiyasi $u(x)$ bo'lsin. Kompaniya n ta mijoz bilan sug'urta shartnomalari (kontraktlar) tuzgan bo'lib, X_i –tasodifiy miqdor i –nchi mijozning sug'urta hodisasi ro'y berish oqibatidagi ko'radigan talofatini belgilasa,

$$X=X_1+...+X_n$$

yig'indi tasodifiy miqdor bo'lib o'tgan baxtsiz hodisa uchun sug'urta polisining bahosini ifoda etadi. Aktuariy faoliyatida ko'pincha $X_1,...,X_n$ lar bir xil taqsimlangan deb hisoblanadi. Demak, $EX=nEX_1$ tenglik bajariladi.

Agar kutiladigan foydalilikga yo'naltirilgan siyosat qabul qilinsa, sug'urta kompaniyasi

$$Eu(S+P-X)\geq u(S) \qquad (*)$$

tengsizlik bajarilganda mijozlar bilan shartnomalar tuzishga rozi bo'ladi.

Endi faraz qilamizki, hamma mijozlar bitta umumiy foydalilik funksiyasi $\overline{U}(x)$ ni qabul qilgan bo'lib, ular bir xil I – boshlang'ich kapitalga ega bo'lsinlar. Aytib o'tilganlardan tashqari tasodifiy miqdorlar $X_1,...,X_n$ lar bir xil taqsimlanganligini hisobga olsak, mijozlar to'plami bir jinsli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Tengsizlik (*) bilan o'xshash bo'lgan holda mijoz

$$\overline{U}(I-P)\geq E\overline{U}(I-X_1) \qquad (**)$$

tengsizlik bajarilganda, kompaniya bilan shartnoma tuzadi.

Endi (*) tengsizlikni qanoatlantiradigan P larning eng kichigini P^*, (**) qanoatlantiradigan P larning eng kattasini p^* bilan belgilaylik. Eslatib o'tamizki, $\overline{U}(\cdot)$ foydalilik funksiyasining ko'rinishi, mijozning riskka bo'lgan munosabatini ifoda qiladi. Masalan, $\overline{U}(\cdot)$ funksiya yuqoriga qavariq bo'lsa, ya'ni $\alpha\in(0,1),x_1,x_2$ har qanday sonlar uchun

$$\overline{U}(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geq\alpha\overline{U}(x_1)+(1-\alpha)\overline{U}(x_2)$$

tengsizlikni bajarilsa, mashhur Iensen tengsizligiga asosan

$$\overline{U}(I-p^*)=E\overline{U}(I-X_1)\leq\overline{U}(I-EX_1)$$

munosabatni olamiz. Oxirgidan foydalilik funksiya monoton bo'lishidan

$$I-p^*\leq I-EX_1,$$

ya'ni

$$p^*\geq EX_1$$

tengsizlikni olamiz. Bu munosabatlarni o'rinli bo'lishi uchun foydalilik funksiyasi

$$\overline{U}'(x)>0,\overline{U}''(x)\leq 0$$

shartlarni bajarishi yetarli bo'ladi.

Aytib o'tilganlardan mijoz o'zini tasodifiy talofat X_1 dan muhofaza qilishi uchun tasodifiy bo'lmagan EX_1 miqdorni to'lashga roziligi kelib chiqadi. Bu holda mijozning hech qanday riskga moyilligi yo'qligi kuzatiladi. Xuddi shuningdek, foydalilik funksiyasi $\overline{U}(x)$ pastga qavariq bo'lsa,

$$p^* \le EX_1$$

tengsizlikni olamiz va bu holda mijoz riskga "moyil" hisoblanadi.

Umuman,

$$\rho = \frac{\overline{U}''(x)}{\overline{U}'(x)}$$

miqdor riskka "moyil bo'lmaslik" koeffitsiyenti deb ataladi. Agar $\alpha-$ o'zgarmas son bo'lsa, mijozning riskka munosabati uning kapitaliga (x) va sug'urta portfeli hajmiga bog'liq bo'lmaydi.

Endi yuqorida keltirilgan sug'urta variantiga qaytamiz. Agar yuqoridagi (*) tengsizlikni qanoatlantiradigan P larni eng kichigini P^* bilan belgilasak,

$$P^* \le np^*$$

bo'lganda sug'urta ma'noga ega bo'lmaydi. Aksincha,

$$P^* \ge np^*$$

tengsizlik bajarilganda sug'urta ma'noga ega bo'lib, $\left[P^*/_n, p^*\right]$ oraliqdan sug'urta badali p ni maqsadga muvofiq qilib tanlash masalasi yuzaga keladi. Bitta sug'urta kompaniyasi faoliyatida, p ni p^* ga yaqin qilib tanlash kerak bo'ladiganga o'xshaydi. Agar raqobat qiluvchi bir nechta sug'urta kompaniyalari mavjud bo'lsa (bundan tashqari sug'urta kompaniyalarining faoliyati Davlat tashkilotlari tomonidan nazorat qilinsa), tanlangan p boshlang'ich chegara $P^*/_n$ ga yaqin bo'ladi. Aytilganlarni p ni tanlashning boshqa variantlari ham borligi bilan to'ldirib o'tamiz.

Formal nuqtayi nazardan qaralganda, sug'urta badalini (premia) tanlash masalalarida foydalilik funksiyalarini qo'llash asosli bo'lib, ular hech qanday e'tiroz holatlarini yuzaga keltirmaydi. Lekin sug'urta masalalarida foydalilik funksiyalaridan foydalanishning o'ziga xos kamchiliklari ham mavjud. Birinchidan amaliyotida sug'urtalanuvchi shaxslar va sug'urta kompaniya-larining "ustuvorlik" prinsiplarini foydalilik funksiyalari orqali formallashtirish yechimi juda qiyin bo'lgan masalaga aylanishi mumkin. Shuning uchun ham sug'urta faoliyatida P-premiyani (premia, sug'urta badali) tanlashda, ko'pchilik uchun umumiy bo'lgan va sodda, aniq formulalar orqali ifoda etiladigan qoidalar (prinsiplar) ahamiyatli hisoblanadi. Quyida biz ulardan bir nechtasini keltiramiz.

Oldingidek P - sug'urta badali miqdori, X-sug'urta hodisasi ro'y berishi oqibatida yuzaga keladigan talofotni ifodalaydigan tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasini $F(x)$ bilan belgilaymiz. O'rganilayotgan masala mohiyati nuqtayi nazaridan qaralganda P taqsimot funksiyalari sinfida aniqlanganligidan tashqari sug'urta matematikasida P hal qiluvchi ahamiyatga ega bo'lgan qo'shimcha parametr λ ga ham bog'liq bo'ladi. Bu parametr sug'urta faoliyatining tashkil etilishi bilan bog'liq bo'lib, u tomonlarning boshlang'ich shartlarini muvofiqlashtirishga yo'naltirilgan bo'ladi. Aytilganlardan umumiy holda P ni tanlash masalalari

$$P=\psi(F,\lambda)$$

funksionalning ko'rinishini belgilashga (fiksirlash) reduksiya qilinishi kelib chiqadi. Quyida biz $\psi(\cdot,\cdot)$ funksionalning bir nechta konkret variantlarini keltiramiz va ularni Aktuar matematikada qabul qilingan prinsiplar deb aytamiz.

1.Kutiladigan qiymat prinsipi. Bu holda

$$P=(1+\lambda)EX,\ \lambda>0.$$

bo'lib, parametr λ ni "yuklama koeffitsiyenti" deb atashadi. Bu parametr λ, sug'urta badali kutiladigan o'rta qiymat EX dan (ziyondan) katta bo'lishini belgilaydi. Agar $\lambda=0$ bo'lsa, $P=EX$ tenglik o'rinli bo'lib, bu holda yuqorida bir necha marta eslatilgan "teng kuchlilik prinsipi" kuzatiladi va sug'urta tuzilish ma'noga ega bo'lmaydi. Parametr $\lambda>0$ qiymatlar esa sug'urta faoliyatini nazorat etuvchi tashkilotlar tomonidan belgilanadi.

2.Dispersiya (dispersion) prinsipi. Bu holda

$$P=EX+\lambda DX,\ \lambda>0.$$

Parametr λ dispersiya DX uchun "yuklama koeffitsiyenti" bo'lib, λ qancha katta bo'lsa, sug'urta badali P shuncha talafot dispersiyasi DX ga bog'liq bo'lishini bildiradi. Demak, "dispersiya prinsipi" qabul qilinganda premiya

$$P=P(X)=EX+\lambda\sqrt{DX}$$

formula orqali hisoblanar ekan. Bu holda Aktuar matematika uchun muhim bo'lgan quyidagi masala yuzaga keladi. Qandaydir taqqoslash $\prec$–ma'nosida X va Y risklar uchun $X > Y$ munosabat o'rinli bo'lishidan $P(X) < P(Y)$ munosabat kelib chiqadimi? Xususan, shunday X va Y tasodifiy miqdorlar mavjud bo'lar ekanki. Ular uchun $X <_{st} Y$ munosabat bajarilib,

$$P(X) > P(Y)$$

tengsizlik bajariladi.

3. Standart og'ish prinsipi. Bu holda

$$P = EX + \lambda\sqrt{DX}, \quad \lambda > 0. \qquad (1)$$

Eslatib o'tamizki, X tasodifiy miqdorning "o'zgarish koeffitsiyenti" (variatsiya) deb

$$CV(X) = \frac{EX}{\sqrt{DX}}$$

songa aytiladi. Tasodifiy miqdor X ning standart varianti deb esa

$$X_S = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$$

miqdorga aytiladi. Standart og'ish formulasi (1) dan

$$\lambda = \frac{P - EX}{\sqrt{DX}} = \frac{E(P - X)}{\sqrt{D(P - X)}} = CV(P - X).$$

Demak, bu holda parametr λ, tasodifiy miqdor $P - X$ ning (foyda, ziyon farqi) variatsiya koeffitsiyentini ifoda etar ekan.

4. Foydaliligi nol bo'lgan prinsip. Sug'urtalanuvchi shaxsning foydalilik funksiyasi $U(x)$ bo'lib, u odatdagi

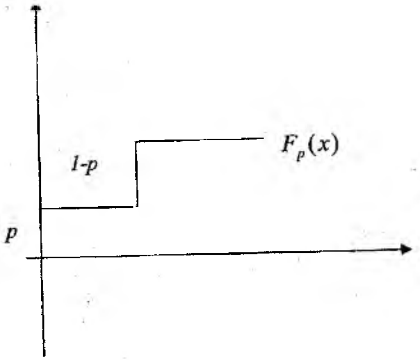
$$U'(x) > 0, \ U''(x) \le 0, \ x \in R$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Quyidagi Bernulli taqsimotiga ega bo'lgan $\{X_p, 0 \le p \le 1\}$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$P(X_p = 0) = p = 1 - P(X_p = 10/\lambda), \quad \lambda > 0$$

bo'lsin. Tasodifiy miqdor X_p ning taqsimot funksiyasi $F_p(x) = P(X_p < x)$ ning grafigi



shakl ko'rinishda bo'ladi va undan hamma $x \in R$ uchun $p_1 \le p_2$ bo'lganda

$$F_{p_2}(x) \ge F_{p_1}(x)$$

tengsizlik bajarilib, $X_{p_2} <_{St} X_{p_1}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Oxirgidan

$$p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n \le \ldots, \quad p_n \to 1, \quad n \to \infty$$

bo'lganda, $X_{p_n} <_{St} X_{p_{n-1}}$ munosabat kelib chiqadi. Premiya P quyidagi tenglamaning yechimi bo'ladi:

$$EU(S + P - X) = U(S) \qquad (2)$$

tenglamaning yechimi bo'ladi, ya'ni sug'urta badali P shunday tanlanadiki, uning uchun sug'urtagacha va sug'urtadan so'nggi o'rtacha foydalilik bir xil bo'ladi. Agar foydalilik funksiyasi

$$u(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{a}, \; a > 0$$

eksponensial ko'rinishida bo'lsa, oxirgi tenglamaning yechimi

$$P = a^{-1} \log\left(E \exp\{aX\}\right)$$

bo'ladi va bu hol eksponensial prinsip deb ataladi.

Endi X va Y tasodifiy miqdorlar uchun stoxastik tartib $X <_{St} Y$ o'rinli deb faraz qilamiz. Bu holda (2) tenglamaning yechimlari sifatida aniqlangan sug'urta premiyalari $P(X)$ va $P(Y)$ uchun $P(X) \le P(Y)$ tengsizlik bajariladi. Lekin o'rtacha foydalilik nol bo'lgan prinsipga asoslangan sug'urta badallari $P(X)$ va $P(Y)$ uchun stoxastik tartib $<_{St}$ ning asosiy xossasiga ko'ra shunday tasodifiy X' va Y' miqdorlar mavjud bo'ladiki, ular uchun

$$X' \stackrel{d}{=} X, \quad Y' \stackrel{d}{=} Y, \quad P(X' \le Y') = 1 \qquad (3)$$

munosabatlar bajariladi. Matematik kutilmalar tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari orqali aniqlangan bo'lishini hisobga olsak, (3) munosabatlardan foydalanib

$$E(S+P-X) = E(S+P-X') \ge E(S+P-Y') = E(S+P-Y)$$

tenglik va tengliksizlarni yoza olamiz. Bulardan esa o'z navbatida $P(X) \ge P(Y)$ munosabat kelib chiqadi.

5. Foydaliligi nol bo'lgan prinsipning umumlashgan varianti.

Faraz qilamizki, boshlang'ich kapital S tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu holda sug'urta badali (premia) P

$$Eu(S+P-X) = Eu(S) \qquad (4)$$

tenglamaning yechimi ko'rinishida aniqlanadi. Bu prinsip noklassik xarakterda bo'ladi, chunki (4) tenglamaning yechimi P, tasodifiy miqdorlar X va S larning birgalikda taqsimotiga bog'liq bo'ladi. Masalan, foydalilik funksiyasi eksponensial ko'rinishda bo'lganda

$$P = a^{-1}\left[\log E\exp\{\alpha(X-S)\} - E\exp\{-\alpha S\}\right],\ a > 0$$

va a ning cheksiz kichik qiymatlari uchun

$$D \approx EX + \frac{a}{2}DX - aCov(X,\ D) \approx EX + \frac{a}{2}DX - aCov(X, D) \approx$$

$$\approx EX + \frac{a}{2}DX - aCov(X,S).$$

Oxiridan D ning ko'rinishi X va S tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimotiga bog'liqligi yaqqol ko'rinadi.

6. Essher prinsipi. Oldin tasodifiy miqdorlar uchun Essher almashtirishini kiritamiz. Berilgan tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi momentlar funksiyasi

$$g_X(h) = Ee^{hX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} dF_X(x),\ h \in R$$

ifoda bilan aniqlanadi. Taqsimoti

$$dF_{X,h}(x) - e^{hx} dF_X(x) / g_X(h) \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadigan tasodifiy miqdor X_h ni ko'ramiz. Bu tasodifiy miqdorni qiymatlari X tasodifiy miqdorning qiymatlari bilan ustma-ust tushadi, lekin bu qiymatlarning ehtimolliklari turlicha bo'ladi. Tenglik (5) dan $h=0$ bo'lganda $F_{X,0}(x)=F_X(x)$ ekanligi ko'rinadi.

Agar $h>0$ bo'lsa,

$$\frac{dF_{X,h}(x)}{dF_X(x)}=\frac{e^{hx}}{g_X(h)}$$

nisbat x ning katta qiymatlarida o'suvchi bo'ladi. Demak, shunday $x=x_0$ nuqta mavjud bo'ladiki, $x>x_0$lar uchun esa 1 dan kichik bo'ladi. Bu xulosa $F_{X,n}(x), F_X(x)$ larni taqsimot funksiyalari bo'lishligidan oson ko'rinadi va undan

$$X<_{St}X_h,\ h>0$$

stoxastik tartib o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Aksincha, $h<0$ bo'lganda, teskari $X_h<_{St}X$ stoxastik tartib bajariladi.

Essher premiyasi

$$P=P(x)=EX_h=\frac{EX\exp(hX)}{E\exp(hX)},\ h\geq 0$$

formula bilan aniqlanadi. Bundan integral

$$\int_0^{\infty} xe^{hx}dF_X(x)$$

biror $h=h_0>0$ bo'lganda yaqinlashadi deb tushuniladi.

Tasodifiy miqdor X_h formula (5) bilan aniqlanadigan Essher almashtirishi orqali hosil qilingan deb ataladi. Tasodifiy miqdorlar majmuasi $\{X_h, h\geq 0\}$ stoxastik tartib $\prec_{St}$ ga nisbatan o'suvchi bo'ladi, ya'ni $0\leq h_1<h_2$ bo'lganda

$$X_{h_1}\prec_{St}X_{h_2} \tag{6}$$

munosabat bajariladi.

Haqiqatan ham, (5) formulaga asosan

$$\frac{dF_{X,h_2}}{dF_{X,h_1}}=\frac{\dfrac{dF_{X,h_2}}{dF_X}}{\dfrac{dF_{X,h_1}}{dF_X}}=e^{(h_2-h_1)x}\cdot\frac{g_X(h_1)}{g_X(h_2)}. \tag{7}$$

Oxirgidan oson ko'rinadiki,

$$x \le \frac{1}{h_2 - h_1} \ln \frac{g_X(h_1)}{g_X(h_2)}$$

bo‘lganda (7) tenglik o‘ng tomoni 1 dan kichik, teskari tengsizlik bajarilganda esa 1 dan katta bo‘ladi. Demak, (6) munosabat isbot etildi. Munosabat (6) dan $X_0 = X(h=0)$ ekanligini hisobga olgan holda har qanday $h > 0$ uchun $X \prec_{St} X_h$ tartib o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi biz oldin isbot etilgan $\prec_{St}$ tartibning quyidagi xossasini eslatib o‘tamiz:

$$(X \prec_{St} Y)\Psi(EX, EY < \infty) \Rightarrow (EX \le EY).$$

Bundan $h > 0$ bo‘lganda

$$P = P(X) = EX_h > EX$$

munosabat o‘rinli, ya’ni Essher premiyasi “yuklamali” bo‘ladi. Lekin bu premiya ham dispersiya prinsipida kuzatilgan kamchilikka ega: Essher prinsipida stoxstik tartib saqlanmaydi, ya’ni katta miqdordagi risklar kichik premiyalarda ega bo‘lishi mumkin.

Essher prinsipi tabiiy ravishda sug‘urta bozorining hamma qatnashshchilari eksponensial foydalilik funksiyalariga ega bo‘lgan modellarida uchraydi.

Essher prinsipining mohiyatini osonroq qilib, quyidagiga tushuntirish mumkin. Aytaylik,

$$p(x) = F'_X(x)$$

X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo‘lsin. Quyidagi formula

$$\bar{p}_\lambda(x) = \exp\{\lambda x\}\, p(x) \left(\int_0^\infty \exp(\lambda x) p(x) dx \right)^{-1}$$

orqali yangi “zichlik” funksiyasi $\bar{p}(x)$ ni aniqlaymiz. Bu holda Essher premiyasi

$$P = P(\lambda) = \int_0^\infty \bar{p}_\lambda(x) dx, \ \lambda > 0.$$

Essher premiyasi $P(\lambda)$ har qanday tasodifiy miqdor uchun λ argument bo‘yicha o‘suvchi bo‘ladi.

Haqiqatan ham

$$P'(\lambda)=\int_0^\infty x^2\tilde{p}_\lambda(x)dx-\left(\int_0^\infty x\tilde{p}_\lambda(x)dx\right)^2\geq 0.$$

Aytilganlarning natijasi sifatida,

$$P(x)\geq P(0)=\int_0^\infty xp(x)dx=EX,\quad \lambda\geq 0$$

munosabatlarni keltirish mumkin.

Essher premiyasi $P=P(\lambda)$ o'suvchi bo'lgani uchun ham parametr λ sug'urta kompaniyasining "riskka bormaslik" xohishini ifodalaydi deb tushunish mumkin.

Yuqorida eslatib o'tilgan Essher prinsipining kamchiligini quyidagi misol bilan tasdiqlash mumkin. Tasodifiy bo'lgan ikkita X va Y risklarning birgalikdagi taqsimoti quyidagicha: qandaydir $\lambda>0$ uchun

$$P(X=0,Y=0)=1/3,\ P(X=0,\ Y=2/3\lambda)=1/3,$$
$$P(X=3/\lambda,\ Y=3/\lambda)=1/3.$$

Berilganlardan X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotini topamiz:

$$P(X=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=2/3\lambda)+$$
$$+\ P(X=0,Y=3/\lambda)=2/3,$$
$$P(X=3/\lambda)=P(X=3/\lambda,Y=0)+P(X=3/2,Y=2/3\lambda)+$$
$$+\ P(X=0,Y=3/\lambda)=1/3,$$
$$P(Y=0)=P(Y=0,X=0)+P(Y=0,X\neq 0)=$$
$$=1/3+P(X=3/\lambda,Y=0)=1/3,$$
$$P(Y=3/\lambda)=P(Y=3/3\lambda,X=0)+P(Y=2/3\lambda,X\neq 0)=$$
$$=1/3+P(X-3/\lambda,Y=2/3\lambda)=1/3,$$
$$P(Y=3/\lambda)=P(Y=3/\lambda,X=0)+P(Y=3/\lambda,X\neq 0)=$$
$$=P(Y=3/\lambda,X=3/\lambda)=1/3.$$

Demak, $F_X(x)$ va $F_Y(x)$ taqsimot funksiyalari quydagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2/3, & 0\leq x<3/\lambda,\\ 1, & x\geq 3/\lambda,\end{cases}$$

$$F_Y(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/3, & 0\le x<2/3\lambda,\\ 2/3, & 2/3\lambda\le x<3/\lambda,\\ 1, & x\ge 3/\lambda.\end{cases}$$

Bu formulalardan ko'rinadiki, X tasodifiy miqdor uchun

$$P(X=0)=2/3=1-P(X=3/\lambda)$$

va Y tasodifiy miqdor $\{0,2/3\lambda,3/\lambda\}$ to'plamda

$$P(Y=0)=P(Y=2/3\lambda)=P(Y=3/\lambda)=1/3$$

tekis taqsimotga ega bo'lar ekan.

Yuqoridagi taqsimot funksiyalari F_X va F_Y uchun formulalardan ko'rinadiki, har qanday $x\in[0,\infty)$ uchun $F_X(x)\ge F_Y(x)$ tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$X<_{St}Y$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Endi bu tasodifiy miqdorlarning Essher almashtirishlarini hisoblaymiz, buning uchun esa $g_X(\lambda)=Ee^{\lambda X}$ va $g_Y(\lambda)=Ee^{\lambda Y}$ momentlar hosil qiluvchi funksiyalarni topish kerak bo'ladi. Bevosita hisoblash ko'rsatadiki,

$$g_X(\lambda)=Ee^{\lambda X}=\frac{1}{3}\left(2+e^3\right),$$

$$g_Y(\lambda)=Ee^{\lambda Y}=\frac{1}{3}\left(1+e^{2/3}+e^3\right),$$

$$P_X=\frac{E\left(X\exp(\lambda X)\right)}{g_X(\lambda)}=\frac{e^3/\lambda}{\left(2+e^3\right)/3}=\frac{3e^3}{\lambda\left(2+e^3\right)},$$

$$P_Y=\frac{E\left(Y\exp(\lambda Y)\right)}{g_Y(\lambda)}=\frac{\left(2/9e^{2/3}+e^3\right)/\lambda}{\left(1+e^{2/3}+e^3\right)/3}=\frac{3\left(2/9e^{2/3}+e^3\right)}{\lambda\left(1+e^{2/3}+e^3\right)},$$

$$\frac{P_Y}{P_X}=\frac{2/9e^{2/3}+e^3}{1+e^{2/3}+e^3}\cdot\frac{2+e^3}{e^3}=\frac{2/9e^{2/3}+e^3}{e^3}\cdot\frac{2+e^3}{2+e^3+\left(e^{2/3}-1\right)}<0{,}989\ldots$$

Oxirgidan $P_Y<P_X$ munosabatni aniqlaymiz va undan Essher prinsipida stoxastik tartib saqlanmasligi haqidagi xulosaga kelamiz.

Essher prinsipi sug'urta kompaniyasining talofat funksiyasi

$$L(x,P)=\left(P-x\right)^2\exp(\lambda x)$$

ko'rinishda bo'lganda o'rtacha talofatni minimallashtirish masalasida uchraydi.

7. Shveysar (Swiss principle) prinsipi. Haqiqiy funksiya $f(x)$ ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ x \in R$$

shartlar bajarilsin.

Agar premiya P

$$Ef(X - hP) = f\left((1-h)P\right),\quad h \in [0,1]$$

tenglamaning yechimi bo'lsa, uni shveysar (Swiss) prinsipi deyiladi. Premiya P umumiylik xossalariga ega bo'ladi. Masalan $h=1$ bo'lganda, bu tenglama

$$Ef(X - P) = f(0)$$

ko'rinishda bo'ladi, ya'ni biz foydaliligi nol bo'lgan prinsipga kelamiz. Bu holda foydalilik funksiyasi sinfida $u(x)$ funksiya qabul qilinadi. Agar

$$f(x) = x\exp(\lambda x),\ x \in R$$

bo'lsa, $h=1$ deb hisoblab Essher prinsipiga kelamiz.

Aytib o'tilganlarni yakunlab, quyidagi xulosalarga kelamiz:

1. Ko'p hollarda sug'urta risklarini taqqoslash tasodifiy miqdorlar to'plamida kiritilgan tartib turlari orqali amalga oshiriladi (masalan, stoxastik tartib $\prec_{St}$, stop–poss $\prec_{SL}$, qabariq $\prec_{\alpha}$ yoki unga teng kuchli bo'lgan o'rta qiymatlar tengligi prinsipini kuchaytirilgan variantlari). Bunda sug'urta kompaniyasi turli xil taqqoslash variantlarida yagona (umumiy) premiya P ni belgilaydi. Albatta, bu qoida sug'urta faoliyatini chegaralaydi, chunki unchalik "ustuvor" bo'lmagan risklar, yuqori premiya belgilash hisobiga, ancha foydali va qiziqarli bo'lgan risklarga aylantirilishi mumkin.

2. Premiya P ni turli xil qilib tanlanganda (yoki boshqacha aytganda, sug'urta "yuklamasi" har xil tanlanganda) risklar uchun kiritilgan stoxastik tartiblar aniqlanmasligi oqibatida boshqarish qiyin bo'lgan sug'urta holatlari yuzaga kelishi mumkin. Bu holda, o'z-o'zidan ravshan bo'ladiki, ixtiyoriy qabul qilingan premiya prinsipi risklarni tartiblash imkonini yaratadi.

3. Izohlab o'tilgan holatlarni tahlil qilish asosida quyidagi umumiy xulosaga kelish mumkin: eng kam premiya P larga mos keluvchi risklar, qolganlariga nisbatan "ustuvorroq" bo'ladi.

3.5. Individual risklarning faktorizatsion modeli

Bu bo'limda sug'urta to'lovi faqat ko'rilgan zararning tasodifiy xarakterda bo'lishiga bog'liq bo'lmasdan (bu zarar miqdori sug'urta hodisasi ro'y berib o'tgandan so'ng ma'lum bo'ladi), kompaniya uchun "masshtab risk" rolini o'ynaydigan "sug'urta yig'indining" taqsimotini ham hisobga oladigan individual risk (statik) modellari o'rganiladi.

Faraz qilamizki, sug'urta portfelining har bir j - nomerli shartnomasiga hamma elementar hodisalar (ω lar) uchun musbat bo'lgan $S_j = S_j(\omega)$ tasodifiy miqdor mos qo'yiladiki, har bir individual risk to'lovi Y_j, hamma ω lar uchun $Y_j \le S_j$ shartni qanoatlantiradi. Tasodifiy miqdor S_j mos j-nchi shartnoma uchun sug'urta yig'indisi, to'g'rirog'i, sug'urta summasi deb ataladi. Tasodifiy miqdor $X_j = Y_j / S_j$ doim aniqlangan bo'lib, uni nisbiy risk, aniqrog'i, S_j sug'urta summasi birligidagi risk deb ham ataladi. Demak, j-nchi kontrakt uchun sug'urta to'lovi (riski)

$$Y_j = X_j S_j \tag{1}$$

ya'ni X_j va S_j tasodifiy miqdorlarning ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bu (1) tenglikni qanoatlantiruvchi Y_j risklar, faktorizatsiyalangan risklar deyilib, (1) tenglik asosida qurilgan individual risk modellari F-modellar (faktorizatsion modellar) deb yuritiladi. F-modellarning asosiy xususiyati (1) tenglikdagi X_j va S_j tasodifiy miqdor bog'liqsiz deb hisoblanishi bilan aniqlanadi (bu talabning bajarilishi quyida asoslanadi).

Sug'urta portfelidagi j-nchi sug'urta shartnomasi uchun to'lanadigan sug'urta premiyasi Z_j, tasodifiy sug'urta summasi S_j orqali $Z_j = ZS_j$ tenglik bilan aniqlanishi mumkin. Bu yerda Z- musbat o'zgarmas son va $Z_j \le S_j$ bo'lishi kerak bo'lgani uchun $0 \le Z \le 1$ tengsizlik bajariladi. O'z-o'zidan ravshanki, sug'urta premiyasi o'zgarmas son bo'lgan individual risk modellari F-modelning xususiy holi bo'ladi.

Aytib o'tilganlardan tashqari bir jinsli obyektlarni proporsional sug'urtasi F-model uchun qiziqarli va amalda qo'llanish nuqtayi nazardan muhim bo'lgan misol bo'ladi. Proporsional sug'urta variantida sug'urta summasi (konkret shartnoma uchun) mazkur obyektning haqiqiy bahosi asosida belgilanadi (bu baho, ko'p hollarda, sug'urta bahosi deb ham aytiladi).

Aniqlangan F-model doirasida konkret sug'urta bilan bog'liq masalalarni yechish uchun quyidagi shartlarni kiritish kerak bo'ladi: komponentlari (X_j, S_j) lardan iborat bo'lgan

$$(X_1, S_1), \ldots, (X_N, S_N)$$

ikki o'lchovli tasodifiy vektorlar sistemasi birgalikda bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan. Agar sug'urta portfeli hajmi (shartnomalar soni) N tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$(N, (X_j, S_j)), \; j = 1, 2, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz (birgalikda) deb hisoblanadi.

Keltirilgan talablarni quyidagicha asoslash mumkin: keyingi yozuvlarni soddalashtirish uchun S tasodifiy miqdor S_j lar bilan, X tasodifiy miqdor X_j lar bilan bir xil taqsimlangan bo'lsin deb hisoblaymiz. Agar sug'urta bahosini C bilan belgilab, obyektiga (mol-mulkka) yetkazilgan haqiqiy zararni Y desak,

$$S \le C, \; 0 \le Y \le C$$

tengsizliklar bajarilib, sug'urta to'lovi (risk) $V = (Y/C)S$ bo'ladi. Bu yerda Y/C miqdor nisbiy risk X ga teng. Endi $X = Y/C$ va S tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligini, ularning turli xil miqdorlar uchun xarakteristikalar bo'lishi bilan tushuntirish mumkin. Haqiqatan ham $X = Y/C$ tasodifiy miqdorning qiymatlari konkret sug'urta holatlarini yuzaga kelishi bilan bog'liq hodisalar orqali, sug'urta yig'indisi (summasi) S esa, sug'urta shartnomasini harakatga kelish momentlari bilan bog'liq bo'lib, sug'urtalanuvchi shaxsning moliyaviy imkoniyatlari ta'sirida bo'ladi.

Endi faraz etamizki, sug'urta premiyasi Z_j (j-nchi kontrakt uchun) sug'urta summasi S_j ni hisobga olgan holda $Z_j = zS_j$ tenglik bilan aniqlansin va z hamma kontraktlar uchun bir xil bo'lsin. Bu z miqdor premiya stavkasi (yoki sug'urta stavkasi) deb ataladi. Boshqa sug'urta modellaridan farqli ravishda, F-modeldagi sug'urta premiyalari S_j larga bog'liq bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'ladi. O'z-o'zidan tabiiyki, sug'urta premiyasi Z_j sug'urta summasi S_j dan katta bo'la olmaydi. Shuning uchun ham kelgusida z ni $(0,1]$ oralig'idagi musbat son deb hisoblaymiz.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, F-modelda yakuniy sug'urta fondi (risk)

$$R = r + \bar{Z} - \bar{Y} = r + \sum_{j=1}^{N} Z_j - \sum_{j=1}^{N} Y_j \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi va bu yerda $r-$ boshlang'ich kapital (rezerv) bo'ladi.

Sug'urtaning (2) tenglik bilan aniqlangan F-modeli uchun birinchi navbatda yuzaga keladigan masalalaridan biri, sug'urta stavkasi z ma'lum bo'lganda, yakuniy sug'urta riski $R-$ tasodifiy miqdorning asimptotik taqsimotini topish hisoblanadi. Ikkinchi masala - bu sug'urta stavkasi z ning shunday minimal qiymatini topishdan iborat bo'ladiki, F-model asosida olib borilgan sug'urta faoliyatidan, ba'zi aniq ma'noda, sug'urta kompaniyasi foyda bilan chiqishi kerak. Sug'urta stavkasi z ning optimal bo'lganini aniqlash imkonini beradigan quyidagi shartlar, yetarli darajada tabiiy deb hisoblanishi mumkin:

1) sug'urta stavkasi z, nisbiy to'lov X_j ning o'rta qiymatidan kichik bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$Z \geq EX_j, \; j = 1,2,\dots,N \qquad (3)$$

tengsizliklar bajariladi. Bu (3) shart "o'rtacha ziyonsizlik" deb ataladi.

2) sug'urtasi stavkasi z

$$P(R \geq 0) \geq Q > 0 \qquad (4)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan etib tanlanishi kerak. Bu (4) shart "yakuniy kasodga uchramaslik" (ziyonsizlik) deb ataladi va u an'anaviy xarakterda bo'lib, tabiiy hisoblanadi. Tengsizlik (4) dagi Q son $(0 < Q < 1)$ sug'urta kompaniyasi tomonidan belgilanadi. Bunda kompaniyaning "riskka qanchalik loyiq bo'lishi" muhim rol o'ynaydi. Tatbiqiy adabiyotning ko'pchiligida Q ning 0,9 va 0,95 qiymatlari tavsiya qilinadi va ular matematik statistikadan olingan.

Unchalik qiyin bo‘lmagan mulohazalar yordamida ishonch hosil qilish mumkin bo‘ladiki, $Q>0,5$ va sug‘urta portfeli hajmi N ning yetarli katta qiymatlarida (ya’ni, CLT o‘rinli bo‘lganda) (3) tengsizlik (4) shartdan kelib chiqadi. Lekin, umumiy holda, bu tasdiq o‘rinli emas. Aslida (3) shart yig‘indi sug‘urta premiyalari va yig‘indi sug‘urta to‘lovlari orasidagi farqning o‘rta qiymati manfiy bo‘lmasligini, ya’ni

$$E\left(\sum_{j=1}^{N}(Z_j - Y_j)\right) \geq 0 \qquad (5)$$

tengsizlikning bajariliganini ta’min etish uchun kiritilgan. Quyidagi misol (5) tengsizlikning bajarilmasligi sug‘urta kompaniyasi manfaati uchun ko‘ngilsiz bo‘lgan holatlarni yuzaga kelishi mumkinligini namoyish etiladi. Masalan,

$$r = 0,\ S_1 = 1,\ Y_1 = \begin{cases} 1, \text{ehtimolligi } 1-Q, \\ 0, \text{ehtimolligi } Q \end{cases}$$

bo‘lsin.

Bu holda $R = Z - Y_1$ bo‘lib, (4) tengsizlik $Z=0$ bo‘lganda ham bajariladi, lekin $Z=0$ bo‘lsa, kompaniya uchun hech qanday sug‘urta masalasi ma’noga ega bo‘lmaydi. Ko‘rilgan misolda (3) shartning bajarilishidan, $Z=1-Q$ tenglik kelib chiqadi va sug‘urtalash masalasi ma’noli bo‘ladi. Ikkinchi tomondan, faqat (3) shartdan foydalanish ham sug‘urtalash masalasining effektli bo‘lishini ta’minlash uchun yetarli bo‘lmaydi. Haqiqatan ham, (3) shartdan shartnomalar soni N yetarli darajada katta bo‘lganda, CLT ga asoslanib, “yakuniy kasodga uchramaslik” ehtimolligi 0,5 ga yaqin bo‘lishiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu esa, sug‘urta kompaniyasining manfaatlariga zid bo‘ladi (sug‘urtalash faoliyatining foydali bo‘lishligi $Q>0{,}5$ ehtimollik bilan bog‘liq).

Aytib o‘tilganlardan kelib chiqadiki, sug‘urta premiyasi stavkasi z ning bir vaqtda (3) va (4) shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlarini optimal deb hisoblash kerak bo‘ladi. Oxirgidan quyidagi xulosaga kelamiz: sug‘urta premiyasi stavkasining (3) va (4) shartlarni bir vaqtda qanoatlantiradigan qiymatlarning quyi chegarasi

$$Z_0 = \inf\left\{Z,\ Z \geq EX_j,\ j = \overline{1,N},\ P\left(R = R(Z) \geq 0\right) \geq Q > 0\right\}$$

sug'urta premiyasi stavkasining optimal qiymati deb ataladi.

3.5.1. Faktorizatsion modelning optimal sug'urta stavkalarini topish masalalari

Umuman aytganda, sug'urta portfelining hajmi (tuzilgan sug'urta shartnomalarining soni) N tasodifiy miqdor deb hisoblanishi zarur bo'ladi. Quyida biz ahamiyati xususiy hollar sifatida $P(N=n)=1$, ya'ni $DN=0$ bo'lgan, N Puasson taqsimotiga ega bo'lgan (bu holda $EN=DN=\lambda>0$), N umumlashgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan hollarni ko'rib chiqamiz.

Faraz qilamizki, barcha sug'urta to'lovlari Y_j lar faktorizatsiyalashgan

$$\left(S_j, X_j\right),\ j=1,2,...$$

tasodifiy vektorlar va N tasodifiy miqdor birgalikda bog'liqsiz. Bundan tashqari, hamma to'lovlar "nisbiy bir jinslik" xususiyatiga ega, ya'ni hamma tasodifiy miqdorlar

$$S_1, S_2, ...$$
$$X_1, X_2, ...$$

bir xil taqsimlangan deb hisoblanadi. Sug'urta portfeli bo'yicha yig'ilgan tasodifiy premiyalar yig'indisi

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{N} Z_j .$$

Hamına sug'urta to'lovlarining yig'indisi

$$\overline{Y} = \sum_{j=1}^{N} Y_j .$$

Agar boshlang'ich kapital r deb belgilansa, yakuniy sug'urta fondi (berilgan sug'urta portfeli bo'yicha)

$$R = r + \overline{Z} - \overline{Y}$$

ifodani tashkil qiladi.

Keltirilgan sug'urta modeli bilan bog'liq yuzaga keladigan masalalaridan birinchisi R tasodifiy miqdorning asimptotik taqsimotini sug'urta stavkasi Z ma'lum bo'lgan holda o'rganishdan iborat bo'ladi. Ikkinchi masala – tashkil etilgan sug'urta portfeli doirasida ba'zi ma'noda sug'urta kompaniyasini qanoatlantiradigan Z ning minimal qiymatini topishga yo'naltiriltiriladi. Sug'urta stavkasini aniqlash imkonini beradigan quyidagi shartlar yetarli darajada tabiiy deb hisoblanishi mumkin:

1) "O'rtacha zararsizlik" sharti. Bu shart sug'urta stavkasi Z uchun

$$Z \geq EX_j \tag{2}$$

tengsizlikning bajarilishini talab etadi.

2) "Yakuniy kasod bo'lmaslik" sharti. Bu shart bo'yicha sug'urta stavkasi Z

$$P(R \geq 0) \geq Q \tag{3}$$

tengizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlanishi kerak bo'ladi. Bu yerda Q oldindan belgilanadigan qandaydir son $(0 < Q < 1)$. Keltirilgan (3) shart yetarli darajada tabiiy hisoblanib, amaliyotda keng qo'llaniladi. Undagi Q miqdor sug'urta kompaniyasi uchun mumkin bo'lgan minimal "kasod bo'lmaslik" (zararsizlik) ehtimolligini ifodalaydi. Bu Q miqdorni tanlash imkoniyati sug'urta kompaniyasining ixtiyorida bo'lib, u riskka moyillik darajasini belgilaydi. Amaliy sug'urta faoliyatida Q ning standart ko'rinishda 0,9 va 0,95 qiymatlari tavsiya etiladi.

Yuqoridagi (2) shart $Q > 0{,}5$ va sug'urta portfeli hajmi N ning katta qiymatlarida (bu holda tasodifiy miqdor R ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo'ladi), tabiiy ravishda, (3) dan kelib chiqadi. Lekin umumiy holda bunday emas. Aslida ham (2) shart to'plangan sug'urta premiyalari va to'langan sug'urta to'lovlari ayirmasining o'rtacha qiymati manfiy bo'lmasligini ta'min etish uchun kiritiladi $\left(E\overline{Z} \geq E\overline{Y}\right)$. Bu shartdan voz kechish esa noqulay holatlarni yuzaga keltirishi mumkin. Buni quyidagi misolda namoyish etish mumkin. Aytaylik,

$$r = 0,\ N = 1, S_1 = 1,\ Y_1 = 1$$

munosabatlar $1 - Q$ ehtimollik va $\{Y_1 = 0\}$ hodisa esa Q ehtimollik bilan bajarilsin. Bu holda

$$R = Z - Y_1$$

bo‘lib, (3) munosabat hattoki $Z=0$ bo‘lganda ham bajariladi. O‘z-o‘zidan tushunarliki, bu holat sug‘urta kompaniyasini qanoatlantirmaydi. Keltirilgan misolda (2) shartning qabul qilinishi tabiiy yechim $z=1-Q$ tenglikga olib keladi. Ikkinchi tomondan, riskning katta qiymatlarida faqat (2) shartdan foydalanish, sug‘urta shartnomalarning soni katta bo‘lganda “yakuniy kasod bo‘lmaslik” ehtimolligini 0,5 ga yaqinlashtiradi. Bu holat ham sug‘urta kompaniyasining manfaatlariga zid bo‘ladi.

Agar sug‘urta premiyasi stavkasi z, (2) va (3) shartlarni birvaqtda bajarilishini ta’min etsa, uni “yetarli” yoki “yetarlilik” shartlarini qanoatlantiradi deb tushunish mumkin. Foydalanilgan “yetarlilik” sharti bilan bir qatorda, “kichikroq yetarlilik” yoki “kamroq yetarlilik” shartlarini kiritish mumkin. Bu holda sug‘urta premiyasining stavkasi sifatida “yetarlilik” shartini qanoatlantiradigan Z larning quyi chegarasi (inf)

$$Z_0=\inf\{Z;Z\geq EX_1,\ P(R\geq 0)\geq Q\}$$

qabul etiladi va bu tanlov $z=Z_0$ bo‘lganda (2), (3) shartlarni birvaqtda bajarililashni ta’min etadi. Bu miqdor Z_0 optimal sug‘urta stavkasi deb ataladi.

F-sug‘urta modellari uchun asosiy belgilashlar.

Bu bo‘limda sug‘urtaning F-modeliga tegishli bo‘lgan natijalarni bayon qilishda zarur bo‘ladigan asosiy belgilashlarni kiritamiz.

Soddalik uchun S_j va X_j $(j=1,2,...)$ tasodifiy miqdorlar bilan bir xil taqsimotlangan tasodifiy miqdorlarni mos ravishda S va X deb belgilaymiz, ya’ni

$$S\overset{d}{=}S_j,\ X\overset{d}{=}X_j$$

belgilashlarni qabul qilamiz. Tasodifiy miqdor S ning birinchi va ikkinchi tartibli momentlari mavjud bo‘lishini faraz qilamiz. Tasodifiy miqdor $Y\leq S$ bo‘lgani uchun, $X=\frac{Y}{S}$ tasodifiy miqdorning har qanday tartibli momentlari mavjud bo‘ladi. Aytaylik, $A=EX,\ B^2=DX$ bo‘lsin. Tasodifiy miqdor S ning variatsiya koeffitsiyenti deb

$$V^2 = \frac{DS}{(ES)^2} = \frac{ES^2}{(ES)^2} - 1$$

ifodaga aytiladi.

Agar qandaydir sug'urta stavkasi z berilgan bo'lsa,

$$d = d(z) = z - A$$

belgilashni kiritamiz. Bu miqdor d "risk" yoki "sug'urta qo'shimchasi" deb nomlanadi (xorijiy adabiyotlarda "security loading" yoki "safety loading" terminlari ishlatiladi).

Endi

$$H_j = S_j(z - X_j), \quad j = 1,2,...$$

belgilasini kiritsak,

$$H_1, H_2, ..., H_n, ...$$

bir xil taqsimlangan va bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'ladi. Bu holda tasodifiy miqdor

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} H_j$$

tenglik bilan ifoda etilishi mumkin va uning taqsimoti

$$P(R < x) = P\left(\sum_{j=1}^{N} H_j < x - r\right).$$

Soddalik uchun $H \stackrel{d}{=} H_j$ munosabat bilan H tasodifiy miqdorni kiritamiz. Tasodifiy miqdor (S_j, X_j) ning xossalari H ning d ga bog'liq bo'lgan o'rta qiymati va dispersiyasini hisoblash imkonini beradi:

$$h = EH = ES \cdot d,$$

$$g^2 = DH = DS \cdot d + (ES)^2 (1 + V^2) B^2.$$

Endi $\gamma^2 = EH^2 = h^2 + g^2$ belgilashni qabul qilamiz.

Faraz qilamizki, sug'urta shartnomalarning soni N (umumiy holda tasodifiy miqdor) uchun $\Lambda = EN, M^2 = DN$ momentlar mavjud bo'lsin. Bu holda

$$ER = r + \Lambda \cdot h, \; DR = \Lambda g^2 + M^2 h^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Oldingilardek kabi $\Phi(x)$ bilan standart normal taqsimotni, $\psi(y)$ bilan esa, $\Phi(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiya belgilanadi. Eslatib o'tamizki, $P(\xi=0)\neq 1$ bo'lgan tasodifiy miqdor ξ uchun $L(\xi)=E|\xi|^3/(E\xi^2)^{3/2}$ ifodani Lyapunov kasri deb aytaymiz. Buni hisobga olgan holda $L(\xi-E\xi)$ ifoda klassik Lyapunov kasri deb ataladi va u markaziy limit toremadagi Berri-Esseen bahosining asosini tashkil qiladi.

Agar X tasodifiy miqdor umumlashgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsa, uni tasodifiy yig'indi

$$X=\sum_{k=1}^{N_\lambda}\xi_k$$

ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. Bu yerda N_λ – parametri $\lambda>0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor, $\{\xi_k,k\geq 1\}$– o'zaro bog'liqsiz va bir xil taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib,

$$N_\lambda,\xi_1,\xi_{2,\dots}$$

tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liqsiz deb hisoblanadi. Oldingidek tasodifiy miqdor X uchun $X=\{N_\lambda,\xi_1\}$ belgilash qo'llaniladi.

Simvol C orqali (indeks raqamini hisobga olgan holda) absolyut o'zgarmas sonlar belgilanadi. Simvol $C(\cdot,\cdot)$ esa qavs ichidagi parametrlarga bog'liq bo'lgan o'zgarmas sonlarni anglatadi.

3.5.2. Markaziy limit teoremaga asoslangan sug'urta stavkasi formulasi

Individual risk sug'urta variantining Φ-modelini ko'ramiz. Qoldiq sug'urta fondi R uchun boshlang'ich kapital $r=0$, N– tasodifiy bo'lmagan musbat butun son bo'lsin. Bu holda

$$R=\sum_{j=1}^{N}H_j$$

va tasodifiy miqdor R ning taqsimotini Markaziy limit teoremaga asosan normal qonun bilan yaqinlashtirish mumkin. Aytilgan fikr $N\to\infty$ da

$$P\left(\sum_{j=1}^{N} H_j < x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - NdES}{g\sqrt{N}}\right)$$

asimptotik formulani o‘rinli bo‘lishini isbotlaydi.

Demak, oxirgidan $N \to \infty$ da

$$P(R > 0) \approx \Phi\left(\frac{dES}{g} \cdot N^{1/2}\right) \qquad (1)$$

munosabatni olamiz.

Agar “yakuniy kasod bo‘lmaslik” ehtimolligi $P(R \geq 0)$ uchun $P(R \geq 0) \geq Q$ tengsizlikni bajarilishini talab etilsa,

$$\Phi\left(\frac{dES}{g} N^{1/2}\right) \geq Q$$

tengsizlik bajarilib, (1) munosabat argumentga nisbatan kvadratik tengsizlikni yechish bilan teng kuchli bo‘ladi. Bu tengsizlikni yechib, sug‘urta stavkasi qiymati z optimal stavka z_0 dan kichik bo‘lmaganda bajarilishiga va z_0 uchun

$$Z_0 \approx A + \frac{B\left(1+V^2\right)^{1/2} \psi(Q)}{\left[N - V^2\psi^2(Q)\right]^{1/2}}, \quad N \to \infty$$

asimptotik formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

3.5.3. Sug‘urta premiyalari uchun asimptotik formulalar

Bu bo‘limda sug‘urta yakuniy fondi R ning taqsimotini normal qonun bilan approksimatsiyalash usuli bilan sug‘urta premiyalari uchun konkret asimptotik formulalar hosil qilish mumkinligi namoyish etiladi. Keltirilgan fakt, masalan, sug‘urta portfeli hajmi (tuzilgan shartnomalar soni) N tasodifiy miqdor bo‘lmagan yoki $N-$ parametri EN o‘suvchi Puasson taqsimotiga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor hollari uchun tabiiy hisoblanadi. Tasodifiy miqdor R ning taqsimoti uchun normal approksimatsiya o‘rinli bo‘lishi mumkin bo‘lgan boshqa holatlar ham mavjud bo‘ladi. Asosan, bizni N tasodifiy miqdorning o‘rta qiymati $\Lambda = EN$ bilan bir vaqtda uning dispersiyasi $M^2 = DN$ ham o‘suvchi miqdor bo‘lgan holatlar ko‘proq qiziqtiradi.

Umumiy teorema. Quyida biz R tasodifiy miqdorning taqsimotini normal qonun bilan approksimatsiyalash mumkin boʻlgan va sugʻurta portfeli hajmi N ning birinchi $\Lambda = EN$ va ikkinchi $M^2 = DN$ momentlari maʼlum hollarda optimal sugʻurta stavkasi Z_0 uchun hisoblash qiyin boʻlmagan asimptotik formulalar keltiramiz.

Teorema 1. Faraz qilamizki, $\Lambda = EN \to \infty$ da tasodifiy miqdor R asimptotik normal taqsimotga ega boʻlsin, yaʼni $EN = \Lambda \to \infty$ da

$$\delta = \sup_x \sup_{0 \le Z \le 1} \left| P\left(\bar{R} < x\right) - \Phi(x) \right| \to 0,$$

bu yerda,

$$\bar{R} = \frac{R - ER}{\sqrt{DR}}.$$

Berilgan $Q(1/2 < Q < 1)$ son uchun $\psi(Q) = q$ belgilashni kiritamiz ($q > 0$ ekanligi oʻz-oʻzidan aniq). Faraz qilamizki,

$$W = V^2 + \frac{M^2}{\Lambda} = o(\Lambda),\ \Lambda \to \infty \qquad (1)$$

(bu yerda V^2 tasodifiy miqdor S ning variatsiya koeffitsiyenti).

Bu holda

1°. Agar shunday $C' < 1$ oʻzgarmas absolyut son mavjud boʻlib,

$$r / ES \le C' q \left(1 + V^2\right)^{1/2} B \left[\Lambda - W q^2\right]^{1/2}$$

tengsizlik bajarilsa, shunday Λ_0 mavjud boʻladiki (C' oʻzgarmasga bogʻliq), $\Lambda > \Lambda_0$ boʻlganda, optimal sugʻurta stavkasi quyidagi koʻrinishda boʻladi:

$$Z_0 = A + \frac{q\left(1 + V^2\right)^{1/2} B}{\left[\Lambda - W q^2\right]^{1/2}} - \frac{r / ES}{\Lambda - W q^2} + \varepsilon$$

va bu yerda

$$|\varepsilon| \le C(Q) \frac{\left(1 + V^2\right)^{1/2} B}{\Lambda^{1/2}} \left[1 + \frac{W}{\Lambda}\right] \qquad (2)$$

2°. Agar

$$q\left(1 + V^2\right)^{1/2} B \left(\Lambda - W q^2\right)^{1/2} \le r / ES \le q\left(1 + V^2\right)^{1/2} B \Lambda^{1/2}$$

tengsizlik bajarilsa, shunday Λ_1 mavjud boʻladiki, $\Lambda > \Lambda_1$ uchun optimal sugʻurta stavkasi

$$Z_0 = A + \varepsilon$$

koʻrinishda boʻladi (bu yerda ε tengsizlik (2) ni qanoatlantiradi).

3°. Agar shunday $C'' > 1$ mavjud boʻlib,

$$r / ES \geq C'' q \left(1 + V^2\right)^{1/2} B \Lambda^{1/2}$$

tengsizlik bajarilsa, shunday Λ_2 mavjud bo'ladiki (C'' o'zgarmasga bog'liq), $\Lambda > \Lambda_2$ bo'lganda optimal sug'urta stavkasi uchun $Z_0 = A$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Izoh berib o'tamizki, teorema 1 ning 3° sharti bajarilganda optimal sug'urta stavkasi Z_0 aniq (asimptotik emas) ko'rinishga ega bo'ladi ($\Lambda > \Lambda_2$ uchun). Bundan tashqari teorema (1) ning isboti jarayoni davomida (2) bahodagi o'zgarmas $C(Q)$ ning aniq ko'rinishini hosil qilish mumkin. Lekin bu ifoda murakkab bo'lgani uchun va uning aniqlik darajasi noma'lumligi sababli $C(Q)$ ning mos formulasini keltirmadik. Bunda biz asosiy diqqat (2) tengsizlikning o'ng tomondagi ifodani Λ ga nisbatan qanday tartibda nolga intilishiga berilganiga ilova qilib o'tamiz.

Keltirilgan teoremadagi (1) shart dispersiya M^2 ning ($M^2 = DN$) tasodifiy miqdor N ning o'rta qiymatining kvadrati Λ^2 ga nisbatan sekinroq o'sishini anglatadi va bu shart N ning taqsimoti birlik qonun $E_n(x)$ $\left(P(N = n) = 1\right)$ yoki Puasson qonuni bo'lganda bajariladi. Agar tasodifiy miqdor "murakkab Puasson" qonuni bilan taqsimlansa, ya'ni $N = \{N_\lambda, v\}$ bo'lsa,

$$\Lambda = \lambda E v, \quad M^2 = \lambda E v^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu holda (1) shart

$$E v^2 = o\left(\lambda \left(E v^2\right)^2\right), \quad \lambda \to \infty \tag{*}$$

munosabat bilan teng kuchli bo'ladi. Oxirgi (*) shart, masalan,

$$\lambda \to \infty, \quad \frac{E v^2}{(E v)^2} \leq C < \infty$$

bo'lganda bajariladi.

Qayd qilib o'tish kerak bo'ladiki, teoremadagi δ ga W miqdorlarga quyilgan shartlar (2) dagi qoldiq hadning tartibi $o\left(\Lambda^{-1/2}\right)$ bo'lishini ta'min etadi.

3.6. Sug'urta portfeli hajmining taqsimotini xususiy hollari

Yuqorida keltirilgan teorema 1 dagi umumiy natija N tasodifiy miqdorning taqsimoti ba'zi xususiy qonunlar bilan ifoda etilgan hollarda aniqlanishi mumkin. Oldin qayd qilib o'tilganidek, sug'urta portfeli hajmi N tasodifiy miqdorning taqsimoti $E_n(x)(P(N=n)=1)$, Puasson va "umumlashgan Puasson" taqsimotlari bo'lgan hollar asosiy hisoblanadi va bu hollarda δ miqdor uchun isbot etilgan baholarning o'ng tomoni "Lyapunov kasrlari" bilan ifoda etiladi. Shu sababli H tasodifiy miqdorga mos keluvchi "Lyapunov kasrlarining" Z parametr bo'yicha tekis baholarini tahlil qilishga to'g'ri keladi va ularda $d \geq 0$, $0 < Z < 1$ ekanligi hisobga olinadi.

Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$d = z - A \leq \bar{d} = 1 - A, \quad h = EH = ESd \leq ES\bar{d},$$

$$g^2 = DH \geq (ES)^2(1+Y^2)B^2, \quad \gamma^2 = EH^2 \geq (ES)^2(1+Y^2)B^2.$$

Agar S tasodifiy miqdorning uchinchi tartibli momenti mavjud bo'lsa,

$$E|H|^3 = ES^3 \cdot E|Z-X|^3 \leq ES^3,$$

$$E|H-h|^3 \leq 4\left[E|H|^3 + h^2\right] \leq 4\left[ES^3 + (ES)^3\bar{d}^3\right],$$

$$L(H) \leq \bar{L} = \frac{ES^3}{(ES)^3\left(1+V^2\right)^{3/2}B^3}, \tag{1}$$

$$L_0(H) \leq \overline{L_0} = \frac{4ES^3\left(1+\bar{d}^3\right)}{(ES)^3\left(1+V^2\right)^{3/2}B^3}. \tag{2}$$

Natija 1. Agar N tasodifiy miqdor bo'lmasa va S uchinchi tartibli momentga ega bo'lsa, teorema 1 $\Lambda = N$, $M = 0$, $W = V^2$ bo'lganda o'rinli va bu holda

$$d' = \frac{q\left(1+V^2\right)^{1/2}B}{\left[N - V^2q^2\right]^{1/2}} - \frac{r/ES}{N - V^2q^2}, \quad \delta \leq C_0\frac{\overline{L_0}}{N^{1/2}}.$$

Bu yerda $C_0 = 0{,}4784$ deb qabul qilish mumkin. Keltirilgan natijaning isboti bevosita bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli bo'lgan mashhur Berri-Eseen bahosidan kelib chiqadi.

Natija 2. Agar N parametri Λ bo'lgan Puasson taqsimotiga, tasodifiy miqdor S esa uchinchi tartibli momentga ega bo'lsa, teorema 1 ning tasdiqi $M^2=\Lambda, W=1+V^2$ bo'lganda o'rinli bo'ladi va bu holda

$$d'=\frac{q\left(1+V^2\right)^{1/2}B}{\left[\Lambda-\left(1+V^2\right)q^2\right]^{1/2}}-\frac{r/ES}{\Lambda-(1+Y^2)q^2},\quad \delta\le C_0\frac{\overline{L}}{\Lambda^{1/2}}.$$

Keltirilgan natijaning isboti (1) bahodan va teorema 1 dan kelib chiqadi.

Natija 3. Agar N "umumlashgan Puasson" taqsimotiga ega bo'lib, tasodifiy miqdorlar N,S lar uchun uchinchi tartibli momentlar mavjud bo'lsa, teorema 1 ning tasdiqi

$$\frac{E\left(N-EN\right)^3}{\Lambda^{3/2}}=o(1),\quad \Lambda\to\infty$$

shart bajarilganda o'rinli bo'ladi va bu holda

$$\delta\le\tilde{N}_0\overline{L}_0\frac{E|N-EN|^3}{\Lambda^{3/2}}.$$

Bu natijaning isboti "umumlashgan puasson" taqsimotlarini normal taqsimot bilan approksimatsiyalash tezligini baholaydigan tengsizliklardan kelib chiqadi (В.Ю.Королев, В.Е.Бенинг, С.Я.Шоргин. "Математические основы теории риска" kitobining (Москва, 2011, Физматлит, 619стр.) 1.7.4 va 5.6.7 punktlariga qaralsin).

Quyidagi "Sug'urta portfelining chekli manbaali modeli" deb ataluvchi sug'urtalash variantini ko'raylik: faraz qilaylik, konkret sug'urta kompaniyasi bilan shartnoma tuzishi mumkin bo'lgan N' sondagi "potensial sug'urtalanuvchi" shaxslar mavjud bo'lsin (N'-sezilarli darajadagi katta son bo'lishi mumkin). Shartnomalar sug'urta kompaniyasining qo'ygan shartlari asosida tuziladi. Bunda k-nchi potensil sug'urtalanuvchi boshqa sug'urtalanuvchilarga bog'liq bo'lmagan holda s_k ehtimollik bilan shartnoma tuzadi, $1-s_k$ ehtimollik bilan esa shartnoma tuzmaydi. Bunday tuzilgan sug'urta fondining hajmini N desak, bu tasodifiy miqdorni

$$N=\sum_{k=1}^{N'}\eta_k$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda

$$\eta_k = \begin{cases} 1 & ehtimolligi\ S_k \\ 0 & ehtimolligi\ 1-S_k \end{cases}$$

va $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{N'}$ birgalikda bog‘liqsiz bo‘lgan tasodifiy miqdorlar bo‘ladi. Parametrlar $N', S_1, ..., S_{N'}$ tasodifiy miqdor N ning momentlari orqali bir qiymatli aniqlanmaydi va ular

$$\Lambda = EN = \sum_{k=1}^{N'} S_k, \quad M^2 = DN = \sum_{k=1}^{N'} S_k(1-S_k)$$

munosabatlarni qanoatlantiradi.

Ko‘rilayotgan model chegarasida N ning taqsimoti umumlashgan binomial taqsimot bo‘lib, uni ko‘p hollarda Puasson – binomial taqsimot deb ham atashadi.

O‘z-o‘zidan ravshanki, $M^2 < \Lambda$, $\Lambda \to \infty$ bo‘lganda,

$$W = o(\Lambda)$$

munosabat o‘rinli.

Endi

$$\delta = \sup_x \sup_{0 \le r \le 1} \left| P\left(\overline{R} < x\right) - \Phi(x) \right|$$

miqdorni o‘rganamiz. Ko‘rilayotgan holda

$$R = r + \sum_{k=1}^{N'} \eta_k H_k$$

va η_k, H_k lar har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘ladi. Berri-Eseen tengsizligining har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun variantidan foydalanib

$$\delta \le \frac{C^*}{(DR)^{3/2}} \sum_{k=1}^{N'} E|\eta_k H_k - S_k h|^3 \tag{3}$$

tengsizlikni yoza olamiz va unda o‘zgarmas son $C^* = 0{,}5600$ deb qabul qilish mumkin.

Tasodifiy miqdorlar η_k va H_k lar bog‘liqsiz hamma H_k lar bir xil taqsimlangan ekanligidan

$$E|\eta_k H_k - S_k h|^3 \le 4\left[E/\eta_k - S_k{}^3 E|H|^3 + S_k^3 E|H-h|^3\right] \le$$
$$\le 4\left[S_k(1-S_k) E|H|^3 + S_k^3 E|H-h|^3\right]$$

tengsizliklarni yozish mumkin. Ulardan foydalanib

$$\sum_{k=1}^{N'} E|\eta_k H_k - S_k h|^3 \le 4\left[M^2 E|H|^3 + \left(\Lambda - M^2\right) E|H-h|^3\right]$$
$$\le 4M^2 ES^3 + 16\left(\Lambda - M^2\right)\left[ES^3 + (ES)^3 \bar{d}^3\right]$$

munosabatlar kelib chiqadi.

Endi (5) munosabat va $\overline{L}, \overline{L}_0$ miqdorlarning ta'rifiga asoslanib

$$\delta = C * \left[4\frac{M^2}{L^{3/2}}\overline{L} + 4\frac{\Lambda - M^2}{\Lambda^{3/2}}\overline{L}_0 \right] \qquad (4)$$

bahoning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, $\Lambda \to \infty$ da $\delta \to 0$ va teorema 1 ning hamma shartlari bajariladi.

Odatdagidek, $\{\cdot\}$ simvol bilan qavs ichidagi sonning kasr qismini belgilaymiz. Har qanday butun qiymatli tasodifiy miqdor ξ uchun

$$\{E\xi\}(1 - \{E\xi\}) \leq D\xi$$

tengsizlik o'rinli ekanligini oson isbot etish mumkin. Bu tengsizlikdan ixtiyoriy manfiy bo'lmagan Λ va M sonlar uchun

$$\{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\}) \leq M^2 < \Lambda \qquad (*)$$

tengsizliklar bajarilganda, umumlashgan binomial taqsimotga ega bo'lgan shunday N tasodifiy miqdor mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$\Lambda = EN, \quad M^2 = DN$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, sug'urtaning chekli manbaali modeli faqat (*) tengsizliklar bajarilgan holda ma'noga ega bo'ladi. Demak, quyidagi natija o'rinli bo'ladi.

Natija 4. Agar $\{\Lambda\}(1 - \{\Lambda\}) \leq M^2 < \Lambda$ tengsizliklar bajarilib, sug'urta portfeli chekli manbali sug'urta modeli asosida tuzilgan bo'lsa, optimal sug'urta stavkasi uchun teorema 1 dagi asimptotik formulalar δ miqdor uchun (4) baho o'rinli bo'ladi.

IV bob. TASODIFIY YIG'INDILARNING BA'ZI XOSSALARI

Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy masalalari tasodifiy miqdorlarning yig'indisini o'rganishga reduksiya qilinadi Shuning uchun ham tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotlari tahlili hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida o'ziga xos yo'nalish – tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasi yuzaga keldi. Bu nazariyaning asoschilari sifatida XX asrning mashhur matematiklaridan A.N.Kolmogorov, P.Levi, A.Ya.Xinchin, W.Feller, B.V.Gnedenko, Yu.V.Proxorov, A.A.Borovkov nomlarini sanab o'tish mumkin.

Faraz qilaylik

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \qquad (1)$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \qquad (2)$$

ularning yig'indisi bo'lsin. Tasodifiy miqdor S_n taqsimot funksiyasi $P(S_n < x)$ ni n ning ancha kichik qiymatlarida ham aniq hisoblashni, yechish mumkin bo'lmagan masalalar qatoriga qo'shish mumkin.

Eng umumiy holda, (1) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi "seriyalar sxemasini" tashkil qilganda (ya'ni $X_k = X_{nk}$ bo'lganda) S_n yig'indi uchun limit taqsimotlar sinfini aniqlash masalasi ehtimolliklar nazariyasi uchun markaziy limit problemasi (muammosi) deb ataladi (M.Loyevning fundamental "Теория вероятностей" (M., 1962, 597 c.)) monografiyasining XXII-XXIV boblariga qaralsin). Bu yerda

$$P(X_{n1} + \dots + X_{nn} < x) \to F(x), \quad n \to \infty \qquad (3)$$

limit munosabatini qanoatlantiruvchi $F(x)$ taqsimot funksiyalar sinfini topish nazarda tutiladi.

Xususiy hol $F(x)=\Phi(x)$ (standart normal taqsimot funksiyasi) bo'lganda, (3) limit munosabat markaziy limit teorema (CLT) deb ataladi.

Keyingi boblarda keltirilgan faktlardan ma'lum bo'ladiki, aktuar matematikaning ko'p modellarida yig'indidagi qo'shimluvchilar soni $n=N(\omega)$ ni musbat butun qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb hisoblashga to'g'ri keladi va bu holda ham

$$S_N = Y_1 + ... + Y_N \tag{4}$$

belgilashdan foydalanish qulay bo'ladi. Bunday (4) ko'rinishdagi yig'indilarni tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi deb tushunish kerak bo'ladi. Lekin biz ularni qisqaroq qilib "tasodifiy yig'indilar" deb ataymiz (В.М.Крючков, В.Ю.Королев "Предельные теоремы для случайных сумм» (М., 1990, Изд. МГУ) kitobiga qaralsin).

Formal nuqtayi nazardan (4) tenglikdagi $S_N = S_N(\omega)$ (1) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi aniqlangan (Ω, F, P)– ehtimollik fazosidagi o'lchovli funksiya (ya'ni tasodifiy miqdor) va uning taqsimot funksiyasi

$$F_S(x) = P\left(\{\omega; S_N(\omega) < x\}\right) = P(S_N < x).$$

Tasodifiy yig'indi S_N ning taqsimoti $P(S_N \in A)(A \in F)$ taqsimot funksiyasi $F_{S_N}(x)$ bilan to'la va bir qiymatli aniqlanadi.

4.1. Tasodifiy yig'indilarning elementar xossalari

4.1.1. Hosil qiluvchi funksiyalar

Butun qiymatli manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorlarni o'rganishning asosiy usullaridan biri – hosil qiluvchi funksiyalar metodi hisoblanadi.

Ta'rif. Butun manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor X ning ehtimollik taqsimoti

$$P(X=k) = p_k, \; k = 0,1,2,...$$

bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasi deb (yoki $\{P_k, k \geq 0\}$ ketma-ketlikning)

$$\psi_{\bar{o}}(s)=\psi(s)=Es^X=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k,\ |s|\le 1 \qquad (1)$$

darajali qatorga aytiladi.

Har qanday darajali qator o'zining koeffitsiyenti bilan bir qiymatli aniqlanadigan bo'lgani uchun, ehtimollik taqsimotlari va hosil qiluvchi funksiyalar orasidagi moslik bir qiymatli bo'ladi. Demak (1) hosil qiluvchi funksiya $\psi(s)$ tasodifiy miqdor X ning taqsimoti $P(X\in A)$ $(A\in B(R))$ ni bir qiymatli aniqlaydi. Masalan, birlik taqsimot $E_n(x)$ $(P(X=n)=1)$, binomial taqsimot, Puasson taqsimotlarining hosil qiluvchi funksiyalari mos ravishda

$$\psi(s)=s^n,\ \psi(s)=(1-p+ps)^n,\ \psi(s)=e^{-\lambda(1-s)}.$$

$\psi(s)$ hosil qiluvchi funksiya birlik doirada $(|s|\le 1)$ analitik bo'ladi, to'g'rirog'i hosil qiluvchi funksiyani $[-1,1]$ oraliqdan kompleks sohaning birlik doirasiga analitik davom ettirish mumkin. Hosil qiluvchi funksiya ma'lum bo'lganda, mos ehtimollik taqsimoti

$$p_k=\frac{1}{k!}\psi^{(k)}(0),\ k=0,1,2,...$$

tengliklar orqali topiladi.

Tasodifiy miqdorning $m-$nchi tartibli faktorial (ko'paytma) momenti

$$EX^{(m)}=EX(X-1)...(X-m+1)$$

quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$EX^{(m)}=\psi^{(m)}(1),\quad m\ge 1.$$

Xususan,

$$EX=EX^{(1)}=\psi'(1),\quad DX=\psi''(1)+\psi'(1)-[\psi'(1)]^2.$$

Faktorial momentlarni hisoblashda hosil qiluvchi funksiyanng

$$\psi(s+1)=\sum_{m=0}^{\infty}D_m s^m,\ D_m=\frac{EX^m}{m!}$$

ko'rinishidan foydalanish qulay bo'ladi. Oxirgi formuladan oson ko'rinadiki, birlik taqsimot $E_n(x)$ $(P(X=n)=1)$ uchun

$$EX=n,\quad DX=0,$$

binomial taqsimot uchun

$$EX=np,\ DX=np(1-p),\ EX^3=np(1-3p+2p^2),$$

$$EX^4 = 3n^2(p-p^2)^2 + n(p - 7p^2 + 12p^3 - 6p^4),$$

Puasson taqsimoti uchun esa

$$EX = DX = EX^3 = \lambda, \quad EX^4 = \lambda + 3\lambda^2.$$

Hosil qiluvchi funksiyaning kompleks sohaga analitik davomidan foydalanib, mos ehtimollik taqsimoti $\{p_k,\ k \geq 0\}$

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\psi(s)}{s^{k+1}}ds, \quad k = 0,1,...$$

formulalar orqali ifodalanishi mumkin. Bu yerda kontur $C = \{s; |s| = 1\}$– birlik doiraning aylanasi.

4.1.2. Tasodifiy yig'indi taqsimotlari, xarakteristik funksiyalari

Faraz qilaylik,

$$X_1, X_2, ..., X_n, ...$$

bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $N, X_1,..., X_n,...$ umumiy bitta (Ω, F, P)– ehtimollik fazosida aniqlangan bo'lib, N – manfiy bo'lmagan butun qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdor,

$$N, X_1,..., X_n,...$$

har qanday $n \geq 1$ uchun birgalikda bog'liq bo'lmasin. Oldingiday tasodifiy yig'indi deb, $S_N = X_1 + ... + X_N$ tasodifiy miqdorni tushunamiz.

Demak, har qanday elementar hodisa ω uchun $(\omega \in \Omega)$,

$$S_N = S_{N(\omega)}(\omega) = X_1(\omega) + ... + X_{N(\omega)}(\omega).$$

Aniqlik uchun $\sum_{k=1}^{0} = 0$ deb hisoblaymiz. Tasodifiy miqdor N ning taqsimoti uchun $p_n = P(N = n)$, $n = 0,1,2,...$ belgilashlarni qabul qilamiz. Bu taqsimotning hosil qiluvchi funksiyasini $\psi(s)$, $|s| \leq 1$ bilan belgilaymiz. O'z navbatida X_1 tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun $F(x)$, zichlik funksiyasi (agar u mavjud bo'lsa) uchun $p(x)$, xarakteristik funksiyasi uchun $f(t)$ belgilashlarni ishlatamiz. Tasodifiy yig'indilar taqsimotlari haqidagi asosiy ma'lumotlar quyidagi teoremada keltiriladi.

Teorema 1. Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1) Tasodifiy yig'indi S_N ning taqsimot funksiyasi

$$F_{S_N}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nF^{*n}(x) \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda F^{*n} - taqsimot $F(\cdot)$ning n–karrali kompozitsiyasi ($F^{*0}(x)=E_0(x)$, ya'ni $x=0$ nuqtada yagona birlik sakrashga ega bo'lgan taqsimot).

2) Agar $p_0>0$ bo'lsa, hattoki X_1 absolyut uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor bo'lganda ham taqsimot funksiyasi $F_{S_N}(x)$ absolyut uzluksiz bo'lmaydi. Agar $p_0=0$ bo'lib, X_1 zichlik funksiyasi $p(x)$ ega bo'lsa, tasodifiy yig'indi S_N ning zichlik funksiyasi $p_{S_N}(x)$ mavjud va

$$p_{S_N}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_np^{*n}(x) \qquad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $p^{*n}(x)$- zichlik funksiyasi $p(x)$ning n–karrali kompozitsiyasi.

3) Tasodifiy yig'indi S_N ning xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_N}(t)=\psi(f(t)) \qquad (4)$$

funksional tenglik bilan aniqlanadi.

4) Tasodifiy miqdor S_N ning o'rta qiymati va dispersiyasi quyidagi

$$ES_N=EN\cdot EX_1,\ DS_N=EN\,DX_1+DN(EX_1)^2$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Isbot. 1) To'la ehtimollik formulasiga asosan

$$F_{S_N}(x)=P(S_N<x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(S_N<x,N=n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(S_n<x,\ N=n)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)P(S_n<x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nF^{*n}(x).$$

Demak, (2) formula isbot etildi.

2) Isbot etilish kerak bo'lgan (3) tenglik (2) dan differensiallash orqali kelib chiqadi.

3) Eng avvalo, $n \geq 1$ bo'lganda har qanday t uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{*n}(x) = E\exp[it(X_1 + ... + X_n)] = f^n(t)$$

tenglik o'rinli ekanligini qayd qilib o'tamiz. Endi isbot etilgan (2) formulaga asoslangan holda

$$f_{S_N}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{S_N}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^n(t) = \psi(f(t))$$

tengliklarni yoza olamiz.

Oxirgi 4) punktni isbot etish uchun hozirgina isbotlangan (4) tenglikdan foydalanamiz. Haqiqatan ham xarakteristik funksiyaning xossasidan

$$ES_N = \frac{1}{i} \cdot \frac{df_{S_N}(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{i}\frac{d\psi(f(t))}{dt}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{i} EN \cdot iEX_1 = EN \cdot EX_1.$$

Xuddi shu usul bilan tasodifiy yig'indi S_N ning dispersiyasini hisoblaymiz:

$$ES_N^2 = -\frac{d^2 f_{S_N}(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{df(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=0} =$$

$$= -\frac{d^2\psi(f(t))}{d(f(t))^2} \cdot \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2\bigg|_{t=0} - \frac{d\psi(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} =$$

$$= EN(N-1)(EX_1)^2 + EN \cdot EX_1^2 = EN^2(EX_1)^2 + EN \cdot DX_1.$$

Oxirgidan

$$DS_N = ES_N^2 - (ES_N)^2 = EN^2(EX_1)^2 - (EN)^2(EX_1)^2 = DN(EX_1)^2 + EN\, DX_1.$$

Isbot etilgan

$$ES_N = EN \cdot EX_1$$

tenglik Vald ayniyati nomi bilan ataladi va matematik statistikada juda muhim rol o'ynaydi.

Tasodifiy yig'indi S_N ning taqsimoti $P(S_N < x)$ uchun isbotlangan (2) tenglikdan ko'rinadiki, u qo'shiluvchi soni N ning taqsimoti $\{p_n, n \geq 0\}$ va $\{F^{*n}(x), n \geq 0\}$ taqsimotlar kompozitsiyalarining "qorishmasidan" (ruscha – смесь) iborat bo'ladi. Shuning uchun ham $F_{S_N}(x)$ taqsimot murakkab tarkibli deb hisoblanadi va uni ba'zida $\{N, X\}$ ko'rinishida belgilanadi.

4.2. Puasson tasodifiy yig'indilari

Tasodifiy yig'indidagi qushiluvchilar soni N Puasson taqsimotiga ega bo'lsin, ya'ni

$$P(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad n = 0,1,2,...$$

Bu holda S_N Puasson tasodifiy yig'indisi yoki oddiy ma'noda Puasson yig'indisi deb ataladi.

4.2.1. Puasson yig'indilarining elementar xossalari

Teorema 1. Faraz qilaylik, tasodifiy miqdor N parametri $\lambda > 0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin.

1) Puasson tasodifiy yig'indisi S_N ning xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_N}(t) = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\}$$

ko'rinishida bo'ladi. Demak, Puasson tasodifiy yig'indisi taqsimoti "cheksiz qisqaradigan" bo'ladi.

2) Agar $EX_1^2 < \infty$ bo'lsa,

$$ES_N = \lambda EX_1, \quad DS_N = \lambda EX_1^2.$$

Umuman,

$$EX_1^k, \quad k = 1,...,n, \quad n \geq 1,$$

momentlar mavjud bo'lsa, quyidagi rekurrent formula o'rinli:

$$ES_N^k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k ES_N^k \cdot EX_1^{n-k}, \quad ES_N^0 = 1.$$

Isbot. Puasson taqsimoti hosil qiluvchi funksiyasi

$$\psi_N(s) = \exp\{\lambda(s-1)\}$$

oldingi bo'limdagi teorema 1 ning 3) punktiga asosan

$$f_{S_N}(t) = \psi(f(t)) = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\}. \qquad (1)$$

Demak, teoremaning 1) punkti isbotlandi.

Haqiqatan ham $f_{S_N}(t)$ xarakteristik funksiyasi "cheksiz qisqaradigan ekanligini isbot etish uchun har qanday $n \geq 1$ uchun

$$f_{S_N}(t) = [g_n(t)] \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'lib, $g_n(t)$ qandaydir taqsimotning xarakteristik funksiyasi bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Agar

$$g_n(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{n}(f(t)-1)\right\}$$

deb olsak, bu funksiya $X_1 + ... + X_{N_k}$ Puasson yig'indisining xarakteristik funksiyasi bo'ladi. Bu yerda

$$X_1 \overset{d}{=} X_2 \overset{d}{=} ... \overset{d}{=} X_n \overset{d}{=} X, \quad f_X(t) = f(t)$$

ya'ni $X_1 ... X_N$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan bo'lib, ular N_n - parametri λ / n bo'lgan Puasson tasodifiy miqdoridan bog'liqsiz.

Izoh. Aslida biz (1) formulaning to'g'ri ekanligini (2) formuladan foydalanib isbotladik.

Puasson tasodifiy yig'indisining dispersiyasini hisoblash uchun (1) formulani har ikki tomonida ikki marta differensiallash amalini bajaramiz va hosil bo'lgan formulalarda $t=0$ deb hisoblaymiz. Bunda Puasson taqsimoti uchun xarakteristik xossa bo'lgan

$$EN = DN = \lambda$$

tenglikdan foydalanamiz. Oqibat natijada

$$DS_N = DN(EX_1)^2 + EN\,DX_1 = \lambda\left[(EX_1)^2 + DX_1\right] = \lambda EX_1^2$$

tenglikni hosil qilamiz.

Teoremaning 2) punktini isbot etish uchun (1) tenglikdan foydalanamiz va undan

$$\frac{df_{S_N}(t)}{dt} = \lambda f_{S_N}(t) \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

ekanligiga ishonamiz. Oxirgi formuladan yuqori tartibli hosilalar uchun Leybnis qoidasini qo'llab

$$i^n ES_N^n = \left.\frac{d^n f_{S_N}(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{df_{S_N}(t)}{dt}\right)\right|_{t=0} =$$

$$=\lambda\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(f_{S_N}(t)\frac{df(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=0}=$$

$$=i^n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\frac{d^k\left(f_{S_N}(t)\right)}{dt^k}\cdot\frac{d^{n-k}f(t)}{dt^{n-k}}\Bigg|_{t=0}=$$

$$=i^n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k ES_N^k EX_1^{n-k}$$

isbot etilishi talab qilingan tenglikni olamiz.

4.2.2. Umumlashgan Puasson taqsimotlari

Odatdagidek $G(x)$ ixtiyoriy taqsimot funksiyasi bo‘lsa,

$$G^{*n}=\underbrace{G*G*...*G}_{n},\ n\geq 0 \tag{1}$$

simvol G ning o‘z-o‘zi bilan n-karrali kompozitsiyasini belgilaydi va bu yerda

$$G^{*0}=E_0, G^{*1}=G*E_0,\ G^{*2}=G*G=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-u)dG(u)\ .$$

Agar (1) da n ni parametri $\lambda>0$ bo‘lgan Puasson tasodifiy miqdori deb, tushunsak

$$H(x)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}G^{*n}(x) \tag{2}$$

“qorishma” taqsimotni hosil qilish mumkin.

Ta’rif. Ko‘rinishi (2) formula bilan berilgan taqsimotlar umumlashgan Puasson taqsimoti deb ataladi.

Bevosita hisoblash bilan ishonch hosil qilamizki (2) taqsimotning xarakteristik funksiyasi uchun

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dH(x)=e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda g(t))^j}{j!}=e^{\lambda(g(t)-1)} \tag{3}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $g(t)$ – taqsimot G ning xarakteristik funksiyasi. Formula (2) va (3) larni taqqoslab, agar

$$X_1, X_2,..., X_n,...$$

bog‘liqsiz va umumiy G taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, $\quad S_{N_n}=X_1+...+X_{N_n},\ P(N_n=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ n=0,1,...$

Puasson tasodifiy yig‘indisi ekanligini olamiz (bu yerda aniqlik uchun $N_0=0$ bo‘lganda $S_0=0$ deb hisoblanadi).

Misol 1. Statistik ma'lumotlar asosida tasodifiy yuzaga keladigan epidemiya, texnik halokatlar oqibatida qurbon bo'lgan shaxslar sonini Puasson taqsimoti orqali yuqori aniqlikda modellashtirish mumkin va bunda ro'y berishi mumkin bo'lgan epidemiya, texnik halokatlari oldingilariga bog'liq bo'lmaydi. Agar j ta shaxsning qurbon bo'lishiga olib keladigan baxtsiz hodisalar epidemiya yoki texnik halokatlar sonini z_j bilan belgilasak, uni parametri $\lambda_j > 0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga bo'ysunadi deb hisoblash mumkin, ya'ni

$$P(Z_j = n) = \frac{\lambda_j^n}{n!} e^{-\lambda_j}, \quad j = 1,2,...$$

Bir tomondan, har qanday epidemiya va texnik halokatlar oqibatida qurbon bo'lishi mumkin bo'lgan shaxslarning umumiy soni

$$Z = Z_1 + 2Z_2 + ... + kZ_k + ... \qquad (4)$$

bo'ladi. Bu yerda k maksimal ko'paytma koeffitsiyenti deb ataladi. Endi (4) tenglik bilan aniqlangan Z tasodifiy miqdorning taqsimotini o'rganaylik. Bu tenglikdagi Z_j larni Puasson taqsimotiga bo'ysunishini quyidagicha asoslash mumkin. Tushunarliki, n ta texnik halokat natijasida j ta shaxs qurbon bo'lishi ehtimolligi, parametrlari n va p bo'lgan $Bi(n,p)$- binomial taqsimot orqali aniqlanadi va bu yerda p-ayrim olingan (konkret) texnik halokatning ro'y berish ehtimolligi. Bu $Bi(n,p)$ modelda n ni yetarli darajada katta miqdor, p ni esa n ga nisbatan kichik miqdor deb tushunish mumkin (haqiqatan ham texnik vositalari juda ko'p, ayrim avariya (halokat) ehtimolligi ancha kichik bo'ladi).

Demak, biz $Bi(n,p)$ binomial taqsimotga klassik Puasson teoremasini qo'llashimiz mumkin. Aytilganlardan, Z_j larni bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deb hisoblab, jZ_j lar esa

$$Ee^{itjZ_j} = \exp\{\lambda_j (e^{itj} - 1)\}, \quad j = 1,2,...$$

xarakteristik funksiyalarga ega bo'lishiligi kelib chiqadi. Bu holda Z tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi uchun (4) asosan

$$Ee^{itjZ}=\prod_j \exp\{\lambda_j(e^{itj}-1)\}=\exp\left\{\sum_j \lambda_j(e^{itj}-1)\right\}=$$
$$=\exp\{\lambda(f(t))-1\} \quad (5)$$

tenglikni olamiz. Bu yerda

$$\lambda=\sum_j \lambda_j \quad f(t)=\sum_j \frac{\lambda_j}{\lambda}e^{itj},$$

ya'ni $f(t)$ butun j qiymatlarni λ_j/λ ehtimollik bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdorlarning xarakteristik funksiyasi. Isbot etilgan (5) dan ko'rinadiki, Z tasodifiy Puasson yig'indisi bo'lar ekan va uni

$$Z\stackrel{d}{=}X_1+...+X_N$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lar ekan. Bu yerda $X_1,X_2,...,X_n,...$ ... bog'liqsiz va umumiy $f(t)$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, N esa bu ketlik-ketlikka bog'liq bo'lmagan, parametri λ bo'lgan Puasson tasodifiy miqdori.

(4) tenglik bilan aniqlangan Z tasodifiy miqdorning (5) taqsimoti, maksimal ko'paytma koeffitsiyentini va λ_j parametrlarning turli qiymatlarida kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan Puasson-binomial, Ermit, Stirling-Ermit taqsimotlarining umumlashgan variantlari bo'ladi.

Misol 2. Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida (boshqacha aytganda navbatchilik nazariyasida) xizmat ko'rsatish tizimiga tushgan talablar soni (mijozlar soni) chegaralangan bo'lmasa, ya'ni bir vaqtda bir nechta buyurtmalar tushsa, bu buyurtmalar paydo bo'lish momentlari, intensivlik ko'rsatkichi (parametri) λ bo'lgan $N_\lambda(t)$ Puanson jarayonini tashkil qiladi. Matematika nuqtayi nazaridan $N_\lambda(t)$ tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimoti

$$P(N_\lambda(t)=\mathrm{k})=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,...$$

bo'ladi.

Agar j–nchi momentda tushgan buyurtmalar sonini X_j desak,

$$S_\lambda=X_1+...+X_{N_\lambda}(t)$$

yig'indi $[0,t]$ oralig'i davomida xizmat ko'rsatish tizimiga tushgan talablar soni bo'ladi.

Misol 3. Faraz qilaylik, m_n - natural son

$$X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{1,m_1}$$
$$X_{2,1}, X_{2,2}, \dots, X_{2,m_2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,m_n}$$

tasodifiy miqdorlar seriylari ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Har bir seriyadagi tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz deb hisoblab,

$$S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,m_n} \qquad (6)$$

yig'indini ko'raylik.

Bu yig'indidagi har bir qo'shiluvchi $X_{n,k}$ ning xarakteristik funksiyasini $f_{n,k}(t)$ deb belgilab, unga xarakteristik funksiyasi

$$g_{n,k}(t) = \exp\{f_{n,k}(t) - 1\}, \quad k = \overline{1, m_n}$$

bo'lgan "kuzatuvchi" tasodifiy miqdor $Y_{n,k}$ mos qo'yilgan bo'lsin. Bu "kuzatuvchi" tasodifiy miqdorlar yig'indisini

$$\overline{S}_n = Y_{n,1} + \dots + Y_{n,m_n} \qquad (7)$$

deb belgilaylik. Oson ko'rinadiki, $f(t)$ ixtiyoriy xarakteristik funksiya bo'lsa, unga mos qo'yilgan

$$g(t) = \exp\{f(t) - 1\}$$

xarakteristik funksiya "cheksiz qisqaradigan" bo'ladi. Bu tasdiq, $g(t)$ funksiya parametri 1 ga teng bo'lgan Puasson tasodifiy yig'indisining xarakteristik funksiyasi bo'lishidan kelib chiqadi. Demak, (7) yig'indining hamma qo'shiluvchilari "cheksiz qisqaradigan" tasodifiy miqdorlar bo'lar ekan. Bundan esa, $\overline{S}_n$ yig'indi ham "cheksiz qisqaradigan" bo'lishi kelib chiqadi.

O'tgan XX asrning 30-yillarida yuzaga kelgan "bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shish" nazariyasining asosiy xulosalaridan biri quyidagicha ifodalanadi: tasodifiy miqdorlarning (6) yig'indisi limit taqsimot mavjud bo'lishi uchun, unga mos bo'lgan (7) "kuzatuvchi" tasodifiy miqdorlar yig'indisi $\overline{S}_n$ uchun limit taqsimot mavjud bo'lishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi. Bunda ikkita limit taqsimotlar ustma-ust tushadi. Bu teoremaning isboti

$$\exp\{f_{n,k}(t)-1\}=e^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_{n,k}^{j}(t)}{j!}$$

tenglikka asoslanadi. Keltirilgan tenglik "kuzatuvchi" yig'indining xarakteristik funksiyasi bir vaqtda $X_{n,k}$ lardan tashkil topgan, parametri 1 bo'lgan tasodifiy Puasson yig'indisi uchun ham xarakteristik funksiya ekanligini anglatadi. Xususan, agar har qanday n uchun $X_{n,k}$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'lsa,

$$\overline{S}_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{m_n}\sum_{j=1}^{N_i} X_{n,j}^{(i)} \tag{8}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda N_i o'zaro bog'liqsiz va parametri 1 bo'lgan Puasson taqsimoti bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular $X_{n,j}^{(i)}$ tasodifiy miqdorlarga bog'liq bo'lmaydi va bu yerda

$$X_{n,j}^{(i)} \stackrel{d}{=} X_{n,j},\quad j=\overline{1,m_n}.$$

$\overline{S}_n$ yig'indining (8) munosabat orqali hisoblanadigan xarakteristik funksiyasi ko'rinishidan foydalanib

$$\overline{S}_n \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{N_n} X_{n,j} \tag{9}$$

munosabatning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz (bu yerda N_n parametri m_n bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor va u $X_{n,j}\,(j\geq 1)$ larga bog'liq bo'lmaydi).

Keltirilgan (9) munosabatga asoslangan va "bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shish" nazariyasida qo'llaniladigan miqdorlarni umumiy nom bilan "kuzatuvchi taqsimotlar usuli" deb ataladi. Ehtimollik nazariyasining "Limit teoremalar" nomi bilan ataluvchi yo'nalishidagi erishilgan yutuqlarning ko'pchiligi bu universal metodning qo'llanishlari bilan bog'liq.

4.2.3. Diskret tipdagi umumlashgan Puasson taqsimotlari

Bu bo'limda diskret tipdagi umumlashgan Puasson taqsimotlarini o'rganamiz va biz faqat umumlashgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar bilan chegaralanib qolamiz. Ehtimolliklar taqsimoti $\{p_k, k \geq 0\}$ ga mos keluvchi hosil qiluvchi funksiya

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,$$

bu taqsimotning taqsimot funksiyasini $G(x)$ bilan belgilaylik. Bu holda

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} G^{*n}(x) e^{-\lambda}$$

umumlashgan Puasson taqsimotiga mos keluvchi hosil qiluvchi funksiya

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n = \exp\{\lambda(P(s)-1)\} \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Ba'zi hollarda (1) tenglikni

$$h(s) = \exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} h_j (s^j - 1)\right\}, \; h_j = \lambda p_j \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish qulay bo'ladi.

Hosil qiluvchi funksiyasini (1) ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan diskret taqsimotlarni umumlashgan Puasson taqsimotlari deb ataladi.

Misol 1. Eng avvalo bu – Puasson taqsimoti. Bu holda $P(s) = s$.

Misol 2. Tasodifiy miqdor $Z = Z_1 + 2Z_2$. Bunda Z_1, Z_2 bog'liqsiz va parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega.

Bu holda (2) formula

$$h(s) = \exp\{h_1(s-1) + h_2(s^2 - 1)\}, \; |s| \leq 1$$

ko'rinishda yoziladi. Bu holda

$$h_1 = p_1\lambda, \quad h_2 = p_2\lambda, \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

Demak, bu holda $h_1 + h_2 = \lambda$. Murakkab bo'lmagan mulohazalar yordamida ishonch hosil qilish mumkin bo'ladiki, q_n ehtimolliklar

$$q_n = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{h_1^{n-2j},h_2^j}{(n-2j)!j!}, \quad n = 0,1,2,... \tag{3}$$

munosabatlarni qanoatlantiradi. Kombinatorikada bu (3) ehtimolliklar Ermit taqsimoti nomi bilan ko'p uchraydi. Bu taqsimotni ko'paytma koeffitsiyenti $k > 2$ bo'lgan hol uchun ham umumlashtirish mumkin.

Diskret tipdagi tasodifiy miqdorlarning "cheksiz qisqaradigan" xossasini uning hosil qiluvchi funksiyasi orqali kiritish mumkin: manfiy bo'lmagan butun qiymatlarda taqsimlangan diskret taqsimot $\{p_n, n \geq 0\}$ "cheksiz qisqaradigan" deyiladi, agar hosil qiluvchi funksiyasi $P(S)$ ni

$$P(s) = [h_n(s)]^n, \forall n \geq 1$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa. Bu $h_n(s)$ qiymatlari $\{0,1,2,...\}$ to'plamda joylashgan qandaydir tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasi, ya'ni

$$h_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{nk}s^k, \quad h_{nx} \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_{nk} = 1, \ |s| \leq 1.$$

Masalan, umumlashgan parametri $\lambda > 0$ bo'lgan Puasson taqsimoti $q_n, n \geq 0$ ning hosil qiluvchi funksiyasi

$$q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n = exp\{\lambda(P(s)-1)\}, \ \lambda > 0, |s| \leq 1$$

ko'rinishda bo'ladi ($P(s)$– qandaydir diskret tipdagi ehtimollik taqsimotining hosil qiluvchi funksiyasi). Agar

$$h_n(s) = \exp\left\{\frac{\lambda}{n}(P(s)-1)\right\}$$

deb olsak, har qanday $n \geq 1$ uchun

$$q(s) = [h_n(s)]^n, \ |s| \leq 1$$

tenglik o'rinli bo'ladi va $h_n(s)$ parametri $\frac{\lambda}{n}$ bo'lgan umumlashgan Puasson taqsimoti. Demak, umumlashgan Puasson taqsimoti diskret tipdagi "cheksiz qisqaradigan" ehtimollik taqsimoti bo'ladi (to'g'rirog'i, har qanday diskret tipdagi umumlashgan Puasson taqsimoti "cheksiz qisqaradigan" bo'ladi).

Diskret tipdagi "cheksiz qisqaradigan" taqsimotlar quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1) "Cheksiz qisqaradigan" ehtimolliklar taqsimotining hosil qiluvchi funksiyasi $q(s)$ birorta ham nuqtada nolga aylanmaydi, ya'ni $q(s) \neq 0, \forall |s| \leq 1$.

2) "Cheksiz qisqaradigan" diskret tipdagi hosil qiluvchi funksiyalarning ko'paytmasi "cheksiz qisqaradigan" ehtimolliklar taqsimotining hosil qiluvchi funksiyasi bo'ladi. Haqiqatan ham, $q_1 = q_1(\cdot)$, $q_2 = q_2(\cdot)$ "cheksiz qisqaradigan" hosil qiluvchi funksiyalar bo'lsa, har qanday $n \geq 1$ uchun

$$q_1 = \left[h_n^{(1)}\right]^n, \; q_2 = \left[h_n^{(2)}\right]^n$$

tengliklar o'rinli, $h_n^{(1)}$ va $h_n^{(2)}$ ehtimolliklar taqsimotlarining hosil qiluvchi funksiyalari bo'ladi. Endi

$$q = q_1 \cdot q_2 = \left[h_n^{(1)}, h_n^{(2)}\right]^n$$

tenglik 2) Xossani isbot etadi.

3) Agar

$$q_1(s), q_2(s), ..., q_n(s), ...$$

"cheksiz qisqaradigan" ehtimolliklar taqsimotlarining hosil qiluvchi funksiyalari ketma-ketligi bo'lsa,

$$q(s) = \lim_{n \to \infty} q_n(s)$$

"cheksiz qisqaradigan" ehtimollik taqsimotining hosil qiluvchi funksiyasi bo'ladi.

Keltirilgan 1) va 3) xossalarning isboti "cheksiz qisqaradigan" ehtimolliklar taqsimotlari uchun umumiy holdagi isbotlaridan farq qilmaydi (diskret bo'lmagan taqsimotlar uchun ham).

Yuqorida biz diskret tipdagi umumlashgan Puasson taqsimotining "cheksiz qisqaradigan" bo'lishligini ko'rgan edik. Bu taqsimotlarning 1)-3) punktlarda keltirilgan xossalaridan foydalanib bu fikrga teskari bo'lgan tasdiqni ham o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin. Demak, quyidagi teoremani isbotlash mumkin bo'lar ekan.

Teorema 1. Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida joylashgan diskret ehtimolliklar taqsimoti "cheksiz qisqaradigan" bo'lishi uchun, uning umumlashgan Puasson taqsimotlar tipiga tegishliligi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Quyida keltirilgan natija diskret tipdagi "cheksiz qisqaradigan" taqsimotlarning strukturasini oydinlashtiradi.

Natija 1. Faraz qilaylik,

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, N-diskret tipdagi "cheksiz qisqaradigan" taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin. Agar $N, X_1, X_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liqsiz bo'lsa,

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

tasodifiy yig'indi umumlashgan Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Isbot. Yuqoridagi teorema 1 ga asosan tasodifiy miqdor N (1) yoki (2) ko'rinishdagi $h(s)$ hosil qiluvchi funksiyaga ega bo'lib, uning taqsimoti umumlashgan Puasson tipida bo'ladi. Tasodifiy yig'indining elementar xossalaridan, S_N tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi

$$g(t) = h(f(t))$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda $f(t)$– qo'shiluvchi X_n tasodifiy miqdorlarning umumiy xarakteristik funksiyasi. Demak,

$$g(t) = h(f(t)) = \exp\{\lambda(p(f(t)) - 1)\} = \exp\{\lambda(\overline{p}(t) - 1)\} \qquad (4)$$

va bu yerda $\overline{p}(t) = p(f(t))$ tasodifiy

$$S_M = X_1 + \ldots + X_M$$

yig'indining xarakteristik funksiyasi (M – hosil qiluvchi funksiyasi $P(s)$ bo'lgan tasodifiy miqdor va u $X_1, X_2, \ldots$ larga bog'liq bo'lmaydi). Endi natijaning isboti (4) tenglikdan kelib chiqadi.

4.3. Puasson tasodifiy yig'indilari uchun normal approksimatsiya

4.3.1. Puasson tasodifiy yig'indining taqsimoti uchun limit teoremalar

Faraz qilaylik,

$$X_1, X_2, ..., X_n, ...$$

bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va N_λ- tasodifiy miqdor parametri $\lambda > 0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. Tasodifiy miqdorlar $N_\lambda, X_1, X_2, ...$ birgalikda bog'liqsiz deb hisoblab

$$S_\lambda = X_1 + ... + X_{N_\lambda}$$

belgilashni kiritamiz (aniqlik uchun $\sum_{j=1}^{0} = 0$ deb hisoblanadi). S_λ tasodifiy miqdor Puasson tasodifiy yig'indisi deb ataladi.

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun isbot etilgan klassik limit teoremalardan kelib chiqadiki, $P(S_\lambda < x)$ taqsimotning $\lambda \to \infty$ dagi limiti, $S_n = X_1 + ... + X_n$ tasodifiy miqdor taqsimotining $n \to \infty$ dagi limiti bilan ustma-ust tushadi va bu tasdiq bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasidagi "kuzatuvchi limit taqsimotlar" metodining asosini tashkil qiladi.

Quyida biz Puasson tasodifiy yig'indilari taqsimotlarini normal qonun bilan approksimatsiyalash masalalariga oid bo'lgan teoremalarni keltiramiz. Bu teoremalarni isboti har xil usullarni qo'llash bilan o'tkazilishi mumkin. Lekin, biz isbotlash kerak bo'lgan tasdiqni umumiy xarakterdagi teoremalardan keltirib chiqaramiz. Oldingidek, $\Phi(x)$ orqali standart normal taqsimot funksiyasini belgilaymiz.

Teorema 1. Faraz qilaylik $EX_1^2 < \infty, a = EX_1, \sigma^2 = DX_1$ belgilashlar o'rinli bo'lsin. Bu holda $\lambda \to \infty$ da

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x \right) - \Phi(x) \right| \to 0.$$

Isbot. Bu teoremani, qo'shiluvchilar soni oshib boradigan tasodifiy yig'indilar uchun isbot etilgan "o'tkazish" teoremalaridan foydalanib isbot etamiz. Biz foydalanadigan yordamchi tasdiqlarni lemmalar ko'rinishida keltiramiz.

Oldingi kabi $X_1, X_2, \dots$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, $\{N_n, n \geq 1\}$ shunday manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdorlar deb tushunamizki, har bir $n \geq 1$ uchun

$$N_n, X_1, X_2, \dots$$

birgalikda bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Lemma 1. Faraz qilaylik $S_n = X_1 + \dots + X_n$ va $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ shunday sonli ketma-ketliklar bo'ladiki,

$$b_n \to \infty, \quad d_n \to \infty, \quad n \to \infty$$

bo'lganda, ular uchun Y, U va V tasodifiy miqdorlar mavjud bo'lib, $n \to \infty$ da

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to Y, \tag{1}$$

$$\left(\frac{b_{N_n}}{d_n}, \frac{a_{N_n} - c_n}{d_n}\right) \Rightarrow (U, V) \tag{2}$$

limit munosabatlar o'rinli.

Bu holda $n \to \infty$ da

$$\frac{S_{N_n} - c_n}{d_n} \to YU + V \tag{3}$$

va bu munosabatda Y va (U, V) juftlik bog'liqsiz bo'ladi. Bu yerda $\Rightarrow$ simvol kuchsiz yaqinlashishni belgilaydi.

Keltirilgan lemmaning isboti [4] monografiyada isbotlangan umumiy "o'tkazish" teoremalaridan kelib chiqadi.

Endi teorema 1 ning isbotini davom ettiramiz. Dispersiya $\sigma^2 = DX_1$ mavjud ekanligidan ma'lum Levi teoremasiga asosan $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ketma-ketlik uchun CLT o'rinli bo'ladi. Bundan esa (1) limit munosabatdagi Y tasodifiy miqdor parametrlari

$$\left(0, \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}\right)$$

bo'lgan normal taqsimotga ega bo'ladi.

Chebishev tengsizligiga asosan

$$P\left(\left|\frac{N_\lambda}{\lambda}-1\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\left(\frac{N_\lambda}{\lambda}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\lambda\varepsilon^2}\to 0,\ \lambda\to\infty.$$

Demak, (2) limit munosabatdagi U tasodifiy miqdor uchun $P(U=1)=1$ tenglik bajariladi.

Endi (2) va (3) munosabatlardagi tasodifiy miqdor V ni topishga lemma kerak bo‘ladi.

Lemma 2. Har qanday $\lambda>0$ uchun

$$\sup_x\left|P\left(\frac{N_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}<x\right)-\Phi(x)\right|\leq\frac{0{,}3041}{\sqrt{\lambda}}. \tag{4}$$

Isbot. Har qanday $n\geq1$ uchun N_λ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini

$$\exp\{isN_\lambda\}=\exp\left\{\lambda\left(e^{is}-1\right)\right\}=\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{n}\left(e^{is}-1\right)\right\}\right)^n$$

ko‘rinishida yozish mumkin. Bu esa

$$N_\lambda\overset{d}{=}N_{n,1}+\ldots+N_{n,n}$$

ekanligini anglatadi. Bu yerda $N_{n,1},\ldots,N_{n,n}$ – bog‘liqsiz va umumiy parametri λ/n bo‘lgan Puasson taqsimotiga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlar va

$$EN_{n,1}=DN_{n,1}=\frac{\lambda}{n}=\nu.$$

Bu holda har qanday $n\geq1$ uchun

$$\frac{N\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\overset{d}{=}\frac{1}{n\nu}\left(\sum_{i=1}^{n}N_{n,i}-n\nu\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Z_i$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerda

$$Z_i=\left(N_{n,i}-\nu\right)/\sqrt{\nu},\ i=1,\ldots,n.$$

Demak, $Z_1,\ldots,Z_n$ bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ular uchun $EZ_1=0, DZ_1=1$. Keltirilgan mulohazalarda n ixtiyoriy natural son bo‘lgani uchun, $n\geq\lambda$ deb hisoblaymiz. Bu holda

$$E\left|N_{n,1}-\nu\right|^3=E\left(N_{n,1}-\nu\right)^3+2\nu^3e^{-\nu}=$$
$$=\nu+2\nu^3e^{-\nu}\leq\nu\left(1+2\nu^2\right).$$

Oxirgidan

$$E|Z_1|^3 = \frac{E|N_{n,1}-\nu|^3}{\nu^{3/2}} \le \frac{\nu(1+2\nu^2)}{\nu^{3/2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\left[1+2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Endi (4) tengsizlikning chap tomonini $d[\lambda]$ orqali belgilamiz. Eslatib o'tilgan [1] monografiyaning 79-betidagi teorema 1.6.3 da keltirilgan Berri-Esseen bahosiga asosan, (5) tengsizlikni hisobga olib, $n \ge \lambda$ bo'lganda

$$N(x) = \sup_x \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Z_i < x\right) - \Phi(x)\right| \le$$

$$\le 0{,}3041 \cdot \frac{E|Z_1|^3+1}{\sqrt{n}} \le \frac{0{,}3041}{\sqrt{\lambda}}\left[1+\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2\right] + \frac{0{,}3041}{\sqrt{N}}$$

tengsizliklarni yoza olamiz. Oxirgidan $\lambda \le n$ ning ixtiyoriy natural son ekanligidan isbotlanishi kerak bo'lgan

$$d(\lambda) \le \frac{0{,}3041}{\sqrt{\lambda}}$$

tengsizlikni olamiz. Lemma 2 isbot etildi.

Lemma 2 dan kelib chiqadiki, (2) munosabatdagi V tasodifiy miqdor parametrlari

$$\left(0, \frac{a^2}{a^2+\sigma^2}\right)$$

bo'lgan normal taqsimotga ega bo'ladi. Shunday qilib (3) munosabatdagi limit tasodifiy miqdor bog'liqsiz Y va V larning yig'indisidan iborat bo'ladi. Ya'ni bu limit tasodifiy miqdor parametrlari

$$\left(0, \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2} + \frac{a^2}{a^2+\sigma^2}\right) = (0,1)$$

bo'lgan normal taqsimot $\Phi(x)$ ga ega bo'ladi. Teorema 1 isbotlandi.

Faraz qilaylik, $a(\lambda) \in R$ va $b(\lambda) > 0$ qandaydir funksiyalar bo'lsin. Tasodifiy miqdor

$$\frac{S_\lambda - a(\lambda)}{b(\lambda)} = \frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}{b(\lambda)} + \frac{a\lambda - a(\lambda)}{b(\lambda)}$$

ko'rinishda ifoda etilishi mumkin. Bundan va teorema 1 dan quyidagi formal nuqtayi nazardan umumiyroq teoremani keltirib chiqarish mumkin.

Teorema 2. Ikkinchi moment $EX_1^2 < \infty$ bo'lsin. Yarim to'g'ri chiziq $(0,\infty)$ da aniqlangan $a(\lambda) \in R$, $b(\lambda) > 0$ funksiyalar uchun $\lambda \to \infty$ da

$$\frac{\lambda\left(a^2+\sigma^2\right)}{b^2(\lambda)} \to 1, \quad \frac{a\lambda - a(\lambda)}{b(\lambda)} \to 0$$

shartlar bajarilsin (bu yerda $a = EX_1, \sigma^2 = DX_1$). Bu holda

$$P\left(\frac{S_\lambda - a(\lambda)}{b(\lambda)} < x\right) \Rightarrow \Phi(x), \ \lambda \to \infty.$$

Keltirilgan teoremani tasodifiy yig'indilar uchun klassik Levi teoremasining umumlashgan varianti deb tushunish mumkin. (Bir xil taqsimlangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun dispersiya $\sigma^2 < \infty$ bo'lganda CLT o'rinli).

4.3.2. Puasson tasodifiy yig'indilari uchun Berri-Esseen tengsizligi

Tasodifiy Puasson yig'indilari uchun teorema 1 dagi normal approksimatsiyaning yaqinlashish tezligini o'rganamiz. Bu yerdan boshlab $a = EX_1$ va $0 < \sigma^2 = DX_1 < \infty$ momentlar mavjud bo'lishligi talab etiladi. Oldingilardek $X_1, X_2, \ldots$ – tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan, ular uchun $EX_1 = a, DX_1 = \sigma^2$ deb hisoblaymiz. Manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor N ni $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bilan birgalikda bog'liq emas deb hisoblagan holda

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

belgilashni kiritamiz.

Lemma 3. Uchinchi absolyut moment $E|X_1|^3 < \infty$ mavjud bo'lsin. U holda har qanday $q \in (0,1)$ uchun

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_N - ES_N}{\sqrt{DS_N}} < x\right) - \Phi(x)\right| \le \frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{qEN}} +$$

$$+W(\mathrm{q})\frac{E|N-EN|}{EN}+\operatorname{Sup}_x\left|P\left(\frac{N-EN}{\sqrt{DN}}<x\right)-\Phi(x)\right|. \tag{1}$$

Bu yerda

$$L_0^3=\frac{E|X_1-a|^3}{\sigma^3}, \tag{2}$$

C_0 – Berri-Esseen teoremasidagi absolyut o'zgarmas son $(C_0 \le 0{,}5152)$,

$$W(q)=\max\left\{\frac{1}{1-q},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi eq}\left(1+\sqrt{q}\right)}\right\}. \tag{3}$$

Tenglik (2) bilan aniqlangan L_0^3 ni klassik Lyapunov kasri deb atashadi. Bu lemma [4] monografiyaning 2.4.2 punkt, 139-betida keltirilgan.

Ma'lum Lyapunov tengizligini qo'llab

$$\frac{E|N_\lambda-EN_\lambda|}{EN_\lambda}\le\frac{\sqrt{DN_\lambda}}{EN_\lambda}\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{4}$$

baholarni olamiz (bu yerda N_λ – parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor).

Oldingi punktdagi lemma 2 ga asosan

$$\operatorname{Sup}_x\left|P\left(\frac{N_\lambda-EN_\lambda}{\sqrt{DN_\lambda}}<x\right)-\Phi(x)\right|\le\frac{0{,}3041}{\sqrt{\lambda}}. \tag{5}$$

Endi (4), (5) baholarni (1) ga qo'ysak va lemma 3 dan foydalansak quyidagi teoremadagi natijaga kelamiz.

Teorema 1. Faraz qilamizki, $E|X_1|^3<\infty$ mavjud bo'lsin. U holda

$$\Delta(x)=\operatorname{Sup}_x\left|P\left(\frac{S_\lambda-\lambda a}{\sqrt{\lambda\left(a^2+\sigma^2\right)}}<x\right)-\Phi(x)\right|\le$$

$$\le\frac{0{,}3041}{\sqrt{\lambda}}\left[1+\inf_{0<q<1}\left[\frac{1{,}5732}{\sqrt{q}}+W(q)\right]\right]. \tag{6}$$

Bu yerda $W(q)$ miqdor (3) formula bilan aniqlanadi.

Yuzaki qaraganda teorema 1 dagi (6) tenglikning o'ng tomoni Berri-Esseen bahosidan kichik emasdek bo'lib ko'rinadi, chunki tasodifiy yig'indi taqsimotlarida qo'shishga "xalaqit beruvchi" parametr – tasodifiy indeks paydo bo'ladi. Lekin aslida, bu teoremada biz ikkita "cheksiz qisqaradigan" taqsimotlar orasidagi tekis ($\sup$) metrikadagi "masofani" baholayotganligimizni e'tiborga olsak, hech ham kutilmagan natijalarga uchraymiz.

Keltirilgan teorema 1 dagi (6) tengsizlik bilan bir qatorda, undan farq qiladigan va klassik "Lyapunov kasri" o'rniga

$$L_1^3 = \frac{E|X_1|^3}{\left(a^2+\sigma^2\right)^{3/2}} \tag{7}$$

miqdoriy xarakteristika qatnashadigan baholarni isbotlash mumkin. (7) tenglik bilan aniqlanadigan bu xarakteristikada markazlashtirilmagan momentlar qatnashadi (oson ko'rinadiki, $a^2+\sigma^2 = EX_1^2$). Shuning uchun ham L_1^3 xarakteristikani "markazlashtirilmagan" Lyapunov kasri deyish mumkin (yoki markaziy bo'lmagan Lyapunov kasri). Agar $EX_1 = 0$ bo'lsa, L_1^3 xarakteristika Lyapunov kasriga aylanadi, ya'ni "markazlashtirilmagan" va klassik Lyapunov kasrlari ustma-ust tushadi.

Bu L_1^3 xarakteristika orqali Puasson yig'indisi taqsimotini normal qonun bilan approksimatsiyalash tezligi quyidagi teoremada keltirilgan.

Teorema 2. Agar $E|X_1|^3 < \infty$ mavjud bo'lsa

$$\Delta(\lambda) \le C_1 \frac{L_1^3}{\sqrt{\lambda}} \tag{8}$$

va bu yerda $C_1 \le 0{,}3041$.

4.3.3. Qo'shiluvchilar soni "cheksiz qisqaradigan" taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy yig'indilar uchun normal approksimatsiya

Bu bo'limda qaralayotgan hamma tasodifiy miqdorlar bitta umumiy ehtimollik fazosi (Ω, F, P) da aniqlangan deb hisoblanadi. X va Y tasodifiy miqdorlarni bir xil taqsimotga ega ekanligini, ya'ni $F_X = F_Y$ tenglikni oldingilardan $X \overset{d}{=} Y$ ko'rinishida belgilaymiz. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va xarakteristik funksiyasini mos ravishda $F_X(x)$ $(x \in R)$, $f_X(t)$ $(t \in R)$ deb, nomanfiy butun qiymatli $N = N(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasini $P_N(s)(|s| \le 1)$ deb belgilaymiz.

Faraz qlaylik, $N-$ manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor, $X-$ ixtiyoriy tasodifiy miqdor bo'lsin. Xarakteristik funksiyasi $P_N(f_X(t))$ bo'lgan tasodifiy miqdorni $\{N, X\}$ deb belgilasak, tasodifiy yig'indining xossasiga asosan

$$\{N,X\} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{N} X_j = S_N, \quad S_0 = \sum_{j=1}^{0} = 0,$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda $X_1, X_2, \ldots -$ bog'liqsiz va umumiy F_X taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar. Demak, $\{N, X\}$ tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$F_{\{N,X\}}(x) = F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F_X^{*n}(x).$$

Bu formuladan ko'rinadiki, tasodifiy yig'indining taqsimoti murakkab bo'lib, u

$$\{P(N = n), n \ge 0\} \text{ va } F_X$$

ehtimolliklar taqsimotlari orqali aniqlanar ekan.

Aytib o'tilganlarga asoslanib, $\{N, X\}$ tasodifiy miqdorni tasodifiy yig'indi deb, N ni tasodifiy yig'indining indeksi, X tasodifiy miqdorni esa, tasodifiy qo'shiluvchi deb hisoblash mumkin bo'ladi. O'z-o'zidan ravshanki, agar X – manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor bo'lsa, $\{N, X\}$ – manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor – bo'ladi. Bu holda $\{N, X\}$ ning hosil qiluvchi funksiyasi

$$P_{\{N,X\}}(s) = P_N(P_X(s))$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Agar X tasodifiy miqdor uchun $P(X = 0) \ne 1$ bo'lib, uning uchinchi tartibli absolyut momenti mavjud bo'lsa,

$$L_1(X) = \frac{E|X|^3}{\left(EX^{3/2}\right)}$$

ifodani markaziy bo'lmagan Lyapunov kasri deb ataladi. Bu ifoda $EX = 0$ bo'lganda klassik Lyapunov kasri $L_0(X) = L_1(X - EX)$ bilan ustma-ust tushadi. Eslatib o'tamizki, CLT dagi Berri-Esseen tengsizligining o'ng tomonida $L_0(X)$ qatnashadi.

Endi faraz qilamizki, N tasodifiy miqdorning taqsimoti manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdorlar sinfida "cheksiz qisqaradigan" bo'lsin, ya'ni har qanday natural son m uchun, manfiy bo'lmagan butun qiymatli N_m' mavjud bo'lib

$$N \stackrel{d}{=} \{m, N_m'\}$$

munosabat bajariladi. Bu holda N tasodifiy miqdorning taqsimoti umumlashgan Puasson taqsimoti bo'ladi, ya'ni uning xarakteristik funksiyasi

$$f_N(\mathrm{t}) = \exp\{\lambda(f_Y(t) - 1)\}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda $\lambda > 0, f_Y(t) -$ qandaydir manfiy bo'lmagan butun qiymatli Y tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi, yoki boshqacha aytganda

$$N \stackrel{d}{=} \{N_\lambda, Y\}$$

munosabat o'rinli bo'ladi ($N_\lambda -$ parametri λ bo'lgan Puasson tasodifiy miqdor).

Bu bo'limda $S \stackrel{d}{=} \{N, X\}$ tasodifiy miqdorning normal approksimatsiyasi aniqligini baholash masalalarini o'rganamiz va bunda N tasodifiy miqdor "cheksiz qisqaradigan" taqsimotga ega deb hisoblanadi. Oson ko'rinadiki, bu holda

$$S \stackrel{d}{=} \{\{N_\lambda, Y\} X\}$$

munosabat bajariladi. Demak, asosiy masala

$$\Delta_\lambda = \sup_x |F_S(x) - \Phi(x)|$$

miqdorning $\lambda \to \infty$ da, nolga yaqinligi darajasini o'rganishdan iborat bo'ladi (bu yerda oldingilardek, $\Phi(x)$ standart normal taqsimot funksiyasi).

Teorema 3. Uchinchi tartibli momentlar $EN^3, E|X|^3$ mavjud bo'lgan holda,

$$\Delta_\lambda \le \frac{C_1}{\sqrt{X}} \frac{EY(Y-1)(Y-2)\left[E|X|^3 + 3EY(Y-1)\right]E|X|EX^2 + EYE|X|^3}{\left[EY^2(EX)^2 + EYDX\right]^3} \qquad (1)$$

va bu yerda $0{,}2344 \le C_1 \le 0{,}3041$.

Alohida qayd etib o'tamizki, manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor Y uchun

$$EY(Y-1)\geq 0, \quad EY(Y-1)(Y-2)\geq 0.$$

Teorema 3. ning isbotida quydagi sodda lemma ahamiyatli bo'ladi.

Lemma 4. Agar Y manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$S\stackrel{d}{=}\{\{N_\lambda,Y\},X\}\stackrel{d}{=}\{N_\lambda,\{Y,X\}\}.$$

Lemmaning isboti quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$f_s(t)=P_{\{N,Y\}}\left(f_X(t)\right)=P_{N_\lambda}\left(P_Y\left(f_X(t)\right)\right)=$$

$$=P_{N_\lambda}\left(f_{\{Y,X\}}(t)\right)=f_{\{N_\lambda,\{Y,X\}\}}(t).$$

Isbot etilgan lemmadan tasodifiy miqdor

$$S\stackrel{d}{=}\{\{N_X,Y\}X\}$$

indeksi $\{N_\lambda,Y\}$– umumlashgan Puasson tasodifiy miqdori, qo'shiluvchisi esa X tasodifiy miqdor bo'lgan tasodifiy yig'indi bo'ladi va bir vaqtning o'zida bu miqdor, indeksi N_λ, qo'shiluvchisi esa $\{Y,X\}$ bo'lgan tasodifiy yig'indi bo'ladi. Bundan esa S tasodifiy miqdorning analiz qilganda, indeksi Puasson tasodifiy miqdori bo'lgan tasodifiy yig'indilar uchun ma'lum natijalardan foydalanish mumkinligi kelib chiqadi.

Teorema 3 ning isboti. Lemma 4 ga asosan

$$S\stackrel{d}{=}\{N_\lambda\{Y,X\}\}.$$

Aytaylik, tasodifiy miqdor $U\stackrel{d}{=}\{Y,X\}$ bo'lsin. Oldingi bo'limdagi teorema 3.3.3 ga asosan

$$\left|F_s(x)-\Phi(x)\right|=\left|F_{\{N_\lambda,U\}}(x)-\Phi(x)\right|\leq C_1\frac{E|U|_3}{\sqrt{\lambda}\left(EU^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$

va quyidagi munosabatlarning to'g'ri ekanligi oson ko'rinadi:

$$E|U|^3\leq E\left\{Y|X|^3\right\}=\left(EY^3-3EY^2+2EY\right)\left(E|X|\right)^3+$$

$$+3\left(EY^2-EY\right)E|X|EX^2+EN\,E|X|^3,$$

$$EU^2=\left(EY^2-EY\right)(EX)^2+EYEX^2 \tag{3}$$

Endi teorema 3 ning isboti

$$(2)\&(3)\Rightarrow(1)$$

implikatsiyadan iborat bo'ladi.

Teorema 3 dagi (1) tengsizlikning o'ng tomoni murakkab ifoda. Lekin uni ancha soddaroq va tushunarli variantga keltirishi mumkin.

Natija 1. Quyidagi baho o'rinli:

$$\Delta_\lambda \le \frac{C_1}{\lambda}\cdot\frac{E|Y|^3 \cdot E|X|^3}{\left[EY^2\cdot(EX)^2+EY\,DX\right]^{1/2}}=$$

$$=C_1\cdot\frac{L_1(X)L_1(Y)}{\lambda^{1/2}}\cdot\left[\frac{EX^2\cdot EY^2}{EY^2(EX)^2+EY\cdot DX}\right]^{1/2}. \qquad (4)$$

(4) tengsizlik teorema 3 dan

$$(E|X|)^3\le E|X|^3,\ E|X|\cdot EX^2\le E|X|^3,$$

$$Y(Y-1)(Y-2)+3Y(Y-1)+Y=Y^3$$

munosabatlarni hisobga olgan holda kelib chiqadi. Qayd qilib o'tish kerak bo'ladiki, (4) tengsizlikning o'ng tomoni, (1) tengsizlikning o'ng tomoni bilan

$$P(X=0)=1 \text{ yoki } P(Y=1)=1$$

bo'lganda ustma-ust tushadi. Boshqa hollarning hammasida (4) tengsizlik (1) ga nisbatan "yomonroq" bo'ladi.

Endi

$$L_0^1(N)=\frac{E(N-EN)^3}{(DN)^{3/2}}$$

belgilashni kiritamiz. Agar

$$E(N-EN)^2=\gamma EY^2$$

ekanligini hisobga olsak,

$$L_0^1(N)=L_1(Y)/\lambda^{1/2}$$

tenglikning to'g'ri bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin.

(1) tengsizlikni, teng kuchlilikni saqlagan holda faqat N va X tasodifiy miqdorlarni momentlaridan foydalanib, qayta yozib chiqish mumkin (ya'ni CLT da yaqinlashishda tasodifiy miqdor Y ning momentlarini bilish shart bo'lmaydi).

Natija 2. Quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\Delta_\lambda\le C_1\frac{E(N-EN)^3\cdot E|X|^3}{\left[DN(EX)^2+EN\,DX\right]^{3/2}}=$$

$$=C_1\cdot L_1(X)\cdot L_0^1(N)\left[\frac{EX^2\cdot EN^2}{(EX)^2EN^2+EN\cdot DX}\right]^{3/2}. \qquad (5)$$

Bu natija ham (1) tengsizlikdan va N tasodifiy miqdorning momentlari xossasidan kelib chiqadi.

Yaxshi ma'lum $EY^2\ge EY$ tengsizlikdan foydalanib, (1) tengsizlikning maxrajidagi $EY^2(EX)^2+EY\cdot DX$ ifoda uchun quyidagi quyi baholarni olish mumkin:

$$EY^2(EX)^2+EY\cdot DX\ge EY^2\cdot(EX)^2, \qquad (6)$$

va

$$EY^2(EX)^2+EY\cdot DX\ge EY\cdot EX^2.$$

Haqiqatan ham,

$$EY^2(EX)^2+EY\cdot DX\ge EY^2\cdot(EX)^2,$$

$$EY^2(EX)^2+\left[EY\cdot DX\ge EY\left((EX)^2+DX\right]\ge EY(EX)^2\right..$$

Endi (6) tengsizliklardan va teorema 5 dan quyidagi xulosaga kelamiz.

Natija 3. Tengsizlik

$$\Delta_\lambda\ge\frac{C_1}{\lambda^{1/2}}\min\left\{L_1(Y)\cdot\frac{E|X|^3}{|EX|^3},L_1(X)\cdot\frac{EY^3}{(EY)^{2/3}}\right\}$$

o'rinli.

O'z-o'zidan tushunarli bo'ladiki, oxirgi tengsizlik va keltirilgan natijalarning hammasi o'zgarmas absolyut son C_1 ning qiymatini saqlagan holda teorema 3 dagi

$$\Delta_\lambda\le\frac{C_1\cdot L_1^3}{\sqrt{\lambda}} \qquad (*)$$

Berri-Esseen tengsizligini umumlashtiradi. Teorema 3 va natija 1-3 lardan (*) tengsizlikni olish uchun ularda $Y\overset{d}{=}1$, ya'ni $P(Y=1)=1$ deb hisoblash yetarli bo'ladi. Bu esa $N\overset{d}{=}N_\lambda$ munosabat bilan teng kuchli.

4.4. Geometrik tasodifiy yig'indilar

Faraz qilaylik, tasodifiy

$$\{N,X\} = S_N = X_1 + ... + X_N$$

yig'indining indeksi N (ya'ni qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlar soni) geometrik taqsimot deb ataluvchi, quyidagi

$$P(N=n) = p(1-p)^n, \quad n = 0,1,2... \qquad (1)$$

taqsimotga ega bo'lsin. Bu yerda p $(0<p<1)$ geometrik taqsimotning parametri deb ataladi. Bu taqsimotning ehtimollik ma'nosi quyidagicha: klassik Bernulli sxemasida (tanga tashlashda) qatoriga n marta yutuqlar seriyasi paydo bo'lishi (tajribalar soni chegaralanmagan bo'lganda) (1) taqsimot $P(N=n)$ bilan aniqlanadi va bu ehtimolliklar geometrik progressiya (maxraji p bo'lgan) tashkil qiladi. Agar $\{N,X\}$ tasodifiy yig'indida N (1) geometrik taqsimotga ega bo'lsa, S_N geometrik tasodifiy yig'indi yoki geometrik yig'indi deb ataladi.

Oddiy, murakkab bo'lmagan mulohazalar yordamida, geometrik taqsimotning hosil qiluvchi funksiyasi

$$P_N(s) = Es^N = \frac{1}{1-(1-p)s}, \ |s| \le 1 \qquad (2)$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu (2) tenglikdan differensiallash orqali

$$EN = \frac{1-p}{p}, \ DN = \frac{1-p}{p^2} \qquad (3)$$

ifodalarni hosil qilamiz.

Agar $\{N,X\}$ tasodifiy yig'indida X tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiya $f(t)$ bo'lsa, geometrik yig'indi S_N ning xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_N(t)} = P_N\left(f(t)\right) = \frac{p}{1-(1-p)f(t)} \qquad (4)$$

formula bilan aniqlanadi.

Parametri 1 bo'lgan ko'rsatkichli taqsimotni $G(x)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Parametr p ning kichik qiymatlaridagi $(p\to 0)$ geometrik yig'indining asimptotik xususiyatlari quyidagi teoremada keltiriladi.

Teorema 1. Tasodifiy yig'indi S_N da indeks N–tasodifiy miqdor (1) geometrik taqsimotga ega bo'lsin.

1) Faraz qilaylik, $X\overset{d}{=}X_1$ tasodifiy miqdor nomanfiy qiymatlarni qabul qilib, $0<\alpha_1=EX_1<\infty$ bo'lsin. U holda

$$\sup_{x>0}\left|P\left(p\alpha_1^{-1}S_N<x\right)-G(x)\right|\to 0,\quad p\to 0.$$

2) Faraz qilaylik, tasodifiy miqdor X_1 nomanfiy, $\alpha_1=EX_1>0,\alpha_2=EX_1^2<\infty$ bo'lsin. U holda

$$\sup_{x>0}\left|P\left(p\alpha_2^{-1}S_N<x\right)-G(x)\right|\le\frac{p\alpha_2}{(1-p)\alpha_1^2}.$$

3) Faraz qilaylik, $\alpha_1=EX_1=0,0<\alpha_2=EX_1^2<\infty$. U holda, $p\to 0$ da

$$\sup_{x}\left|P\left(\sqrt{p}\alpha_2^{-1/2}S_N<x\right)-\Lambda(x)\right|\to 0$$

munosabat bajariladi. Bu yerda $\Lambda(x)$–Laplas taqsimoti bo'lib, uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\Lambda^1(x)=2^{-1/2}e^{-\sqrt{2}|x|},\ x\in R$$

formula bilan aniqlanadi.

4) Faraz qilaylik, $\alpha_1=EX_1=0,\ 0<\alpha_2=EX_1^2$ va $\beta_r=E|X_1|^r<\infty,\ 2<r\le 3$. U holda absolyut o'zgarmas $C(r)<(0,\infty)$ mavjud bo'lib,

$$(1-p)\sup_{x}\left|P\left(\sqrt{p}\alpha_2^{-1/2}S_N<x\right)-\Lambda(x)\right|\le$$

$$\le C(r)p^{r/2-1}\frac{\beta_r}{\alpha_2^r}+p/2$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerda $C(r)$ faqat r ga bog'liq o'zgarmas son bo'lib,

$$C(r)\le C_0\Gamma(2-r/2)\,(\log 2)^{2-r/2},$$

C_0– Berri-Esseen tengsizligidagi absolyut o'zgarmas son. Xususan, $C(3)\le 0{,}5152.$

Keltirilgan teoremani isbotiga to'xtamasdan, Puasson va geometrik tasodifiy yig'indilarning o'zaro aloqadorligi haqidagi masalalarga o'tamiz.

Lemma 1. Faraz qilaylik, M – butun qiymatli umumlashgan Puasson tasodifiy miqdori bo'lsin, $X_1, X_2, ...$ tasodifiy miqdorlar esa, umumiy xarakteristik funksiyasi $f(t)$ bo'lgan taqsimotga ega bo'lsin (ya'ni ular bir xil taqsimlangan). Agar $M, X_1, X_2, ...$ birgalikda bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, $S_M = X_1 + ... + X_M$ tasodifiy miqdor Puasson tasodifiy yig'indisi bo'ladi.

Isbot. Tasodifiy miqdor M ning hosil qiluvchi funksiyasi

$$P_M(s) = \exp\{\lambda(\psi(s) = 1)\}$$

ko'rinishida bo'ladi va bu yerda $\psi(s)$ qandaydir ehtimolliklar taqsimoti hosil qiluvchi funksiyasi. S_M tasodifiy yig'indining xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_M}(t) = P_M(f(t)) = \exp\{\lambda\psi(f(t)) - s\}. \tag{5}$$

Demak, (5) tenglikni o'ng tomoniga e'tibor qilinsa, $f_{S_M}(t)$ Puasson yig'indisi $Y_1 + ... + Y_N$ ning xarakteristik funksiyasi bo'lishi kelib chiqadi va bu yerda N parametri $\lambda > 0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor,

$$Y_j \overset{d}{=} X_1 + ... + X_j, \quad j = 1, 2, ..., L,$$

$L-$ hosil qiluvchi funksiyasi $\psi(s)$ bo'lgan tasodifiy miqdor, tasodifiy miqdorlar

$$N, Y_1, ..., Y_n, ...$$

birgalikda bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar. Xuddi shuningdek $L, X_1, X_2, ...$ tasodifiy miqdorlar ham birgalikda bog'liqsiz bo'ladi. Boshqacha aytganda

$$S_M \overset{d}{=} Y_1 + ... + Y_N$$

lemmani isbot etadigan munosabat o'rinli bo'ladi.

Lemma 2. Agar $M-$ geometrik

$$P(M = n) = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsa, M umumlashgan Puasson tasodifiy miqdori bo'ladi.

Isbot. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\lambda = \log\frac{1}{p}, \quad \psi(s)\frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-(1-p)s}, \quad |s| \le 1.$$

Ko‘rish qiyin emaski, M tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasi

$$P_M(s)=\exp\{\lambda(\psi(s)-1)\}$$

ko‘rinishda ifoda etilishi mumkin. Lemmaning to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilish uchun, $\psi(s)$ funksiyani qandaydir ehtimollik taqsimoti uchun hosil qiluvchi funksiya bo‘lishini isbotlash yetarli bo‘ladi. Ma’lumki, $y=\log\frac{1}{1-x}(|x|\le 1)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi

$$\log\frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}.$$

Bu yerda $x=(1-p)s$ deb, olsak

$$\psi(s)=\frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{1}{1-(1-p)s}\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1-p)s]^k}{k}$$

yoyilmaga ega bo‘lamiz. Bundan

$$\psi(1)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k}=1.$$

Demak,

$$\left\{\frac{(1-p)^k}{k\lambda}\right\}_{k=1}^{\infty},\qquad \lambda=\frac{1}{p} \tag{6}$$

ketma-ketlik diskret ehtimolliklar taqsimotini tashkil qilar ekan va (6) ni logarifmik yoki logarifmik qator taqsimoti deb atashadi. Lemma 2 isbot bo‘ldi.

Isbot etilgan lemma 1.-2. lardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema 2. Har qanday geometrik yig‘indi Puasson tasodifiy yig‘indisi bo‘ladi. Bundan tashqari

$$M, X_1, X_2, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar birgalikda bog‘liq bo‘lmasdan, M tasodifiy miqdor geometrik taqsimotga ega bo‘lib, $X_1, X_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar esa, xarakteristik funksiyasi $f(t)$ bo‘lgan umumiy taqsimot bilan taqsimlangan bo‘lsa,

$$X_1+\ldots+X_M\overset{d}{=}Y_1+\ldots+Y_N$$

munosabat bajariladi. Bu yerda N – parametri $\log\frac{1}{p}$ bo'lgan Puasson tasodifiy miqdori,

$$N, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liq bo'lmaydi, $Y_1, Y_2, \dots$ tasodifiy miqdorlar esa xarakteristik funksiyasi

$$f_{Y_1}(t) = \frac{1}{\log 1/p} \cdot \log\left(\frac{1}{1-(1-p)f(t)}\right)$$

bo'lgan umumiy taqsimotga ega. Demak,

$$Y_j \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_L, \quad j = 1, 2, \dots$$

munosabatlar bajarilib, bu yerda L tasodifiy miqdor logarifmik

$$P(L=k) = \left(\log\frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \frac{(1-p)^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

taqsimotga ega bo'lib, $X_1, X_2, \dots$ tasodifiy miqdorlarga bog'liq bo'lmaydi.

Natija 1. Aytaylik, S_N – Puasson tasofiy yig'indisi bo'lib, uning xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_N}(t) = \exp\{\lambda(f(t)-1)\}$$

bo'lsin. Agar

$$g(t) = \frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}}$$

xarakteristik funksiya bo'lsa, S_N – tasodifiy miqdor geometrik yig'indi bo'ladi, ya'ni

$$S_N \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots Y_M$$

munosabat bajarilib,

$$M, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liq bo'lmasdan, M tasodifiy miqdor parametri $p = e^{-\lambda}$ bo'lgan (1) geometrik taqsimotga ega bo'ladi, $Y_1, Y_2, \dots$ tasodifiy miqdorlar esa, xarakteristik funksiyasi $g(t)$ bo'lgan taqsimot bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Natija 2. Har qanday geometrik yig'indi "cheksiz qisqaradigan" taqsimotga ega bo'ladi.

4.5. Manfiy binomial tasodifiy yig'indilar

Eslatib o'tamizki, tasodifiy miqdor M manfiy binomial taqsimotga ega deyiladi, agar

$$P(M=n)=\frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)}p^r(1-p)^n,\ n=0,1,... \qquad (1)$$

bu yerda $\Gamma(\alpha)-(\alpha>0)-$ Eylerning gamma funksiyasi, $r>0$ va $p\in(0,1)-$ manfiy binomial taqsimotning parametrlari hisoblanadi. Agar parametr r butun son bo'lsa, tasodifiy miqdor M klassik Bernulli sxemasida r ta "yutuq" yuzaga kelishi uchun o'tkazilishi kerak bo'lgan tajribalar sonini ifoda etadi va har bir tajribada "yutuq" ro'y berish ehtimolligi p ga teng deb hisoblanadi. Bu (1) taqsimot Paskal, Poya taqsimotlari nomi bilan atalib, ehtimolliklar nazariyasining diskret masalalarida juda muhim rol o'ynaydi.

Xususan, manfiy binomial taqsimot aktuar matematikada ko'p sug'urta holatlari uchun matematik model bo'ladi. Yuqorida (1) taqsimot uchun keltirilgan interpretatsiyadan kelib chiqadiki, fiksirlangan sug'urta fondini tashkil qilish uchun, sug'urta portfelining hajmi (sug'urtalanuvchi shaxslar soni) qanday kattalikda bo'lishi degan aniq masala (1) taqsimot (manfiy binomial) qo'llanilib yechiladigan muammolar qatoriga kiradi. Aytib o'tilgan fikrdan (formal nuqtayi nazardan), (1) taqsimotga ega bo'lgan M tasodifiy miqdor

$$\{M,X\}=S_M=X_1+...+X_M$$

tasodifiy yig'indining indeksi rolini o'ynashi kerakligi kelib chiqadi.

Lemma 1. Tasodifiy miqdor M manfiy binomial (1) taqsimotga ega bo'lsa, u umumlashgan Puasson tasodifiy miqdori bo'ladi.

Isbot. Unchalik murakkab bo'lmagan hisoblashlar yordamida, (1) manfiy binomial taqsimotning hosil qiluvchi funksiyasi

$$P_M(s)=\left(\frac{p}{1-(1-p)s}\right)^r,\ |s|\le 1$$

bo'lishini ko'rish mumkin (bu formulani mustaqil keltirib chiqarishni o'quvchiga maslahat qilamiz). Bu formulani quyidagicha boshqacharoq yozamiz:

$$P_M(s)=\exp\left\{r\log\frac{p}{1-(1-p)s}\right\}=\exp\left\{r\left(\log\frac{1}{1-(1-p)s}+\log p\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{r\log\frac{1}{p}\left[\frac{1}{\log 1/p}\log\frac{p}{1-(1-p)s}-1\right]\right\}.$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\lambda=r\log\frac{1}{p},\quad \psi(s)=\frac{r}{\lambda}\log\frac{1}{1-(1-p)s}. \tag{2}$$

Demak, hosil qiluvchi funksiya

$$P_M(s)=\exp\{\lambda(\psi(s)-1)\} \tag{3}$$

va oxirgi (3) formuladan ko'rinadiki, lemmaning isboti uchun (ψ) dagi $\psi(s)$ funksiyaning biror qandaydir ehtimolliklar taqsimoti uchun hosil qiluvchi funksiya bo'lishi yetarli bo'ladi.

Haqiqatan ham Teylor qatoriga yoyishni bajarsak

$$\psi(s)=\frac{r}{\lambda}\log\left(\frac{1}{1-(1-p)s}\right)=\frac{1}{\log\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1-p)s]^k}{k}$$

formulalarni yoza olamiz.

Endi e'tibor qilamizki, birinchidan $\psi(s)$ r ga bog'liq bo'lmaydi, ikkinchidan esa

$$\frac{1}{\log\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k}=1,$$

ya'ni

$$\frac{1}{\log\frac{1}{p}}\cdot\frac{(1-p)^k}{k},\qquad k=1,2,... \tag{4}$$

sonli ketma-ketlik diskret ehtimolliklar taqsimotini tashkil qiladi. Oldin eslatib o'tilganidek, (4) ketma-ketlik logarifmik yoki logarifmik qator taqsimoti deb ataladi. Shuning uchun ham

$$\psi(s)=P_Y(s)=Es^Y,\ |s|\le 1$$

va bu yerda

$$P(Y=k)=\frac{1}{\log 1/p}\cdot\frac{(1-p)^k}{k},\qquad k=1,2,... \tag{5}$$

Demak, $M \stackrel{d}{=} \{N_\lambda, Y\}$ – Puasson tasodifiy yig'indi $\left(\lambda = r\log\frac{1}{p}\right)$.

Lemma isbot etildi.

Lemma 1 dan kelib chiqadiki, manfiy binomial taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor M Puasson tasodifiy yig'indining indeksi sifatida "cheksiz qisqaradigan" tasodifiy miqdor bo'ladi. Odatdagidek $S_M = X_1 + ... + X_M$ tasodifiy miqdorni manfiy binomial tasodifiy yig'indi deb ataymiz.

Kitobning oxirida keltirilgan adabiyotlar ro'yxatidagi [4] monografiyaning 159-160 betlarida, indeksi "cheksiz qisqaradigan" taqsimotga ega bo'lgan $\{N, X\}$ tasodifiy yig'indi uchun normal approksimatsiyada yaqinlashish tezligining bahosi keltirilgan ([4], teorema 2.4.8). Bunday tasodifiy yig'indini oldingi bo'limlarda

$$S_N = \{N, X\} = \{\{N_\lambda, Y\}, X\} \tag{6}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekanligini isbotlagan edik. Bu yerda N_λ – parametri λ bo'lgan Puasson tasodifiy miqdori, Y esa manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor. Shunday qilib, (6) tenglik ko'rinishidagi S_N tasodifiy yig'indilar uchun quyidagi natijaga ega bo'lamiz: agar

$$\Delta_\lambda = \sup_x \left| P\left(S_N < x\sqrt{EN}\right) - \Phi(x) \right|, \ \beta_3 = E|X|^3$$

belgilashlarni kiritsak,

$$\Delta_\lambda \le 1{,}5205 \cdot \frac{\beta_3}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{E|Y|^{3/2}}{(EY)^{3/2}} \tag{7}$$

Berri-Esseen tipidagi baho o'rinli bo'ladi.

Manfiy binomial S_M tasodifiy yig'indi uchun (6) formula, lemma 1 ga asosan

$$S_M = \{M, X\} = \{\{N_\lambda, Y_0\}, X\} = \{N_\lambda, \{Y_0, X\}\}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda Puasson tasodifiy miqdorining parametri

$$\lambda = r\log\frac{1}{p},$$

Y_0 esa nomanfiy butun qiymatli tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimoti parametri r bo'lgan va (4) tengliklar bilan aniqlanadigan logarifmik taqsimot bo'ladi.

Aytib o'tilganlarga asoslanib, (7) Berri-Esseen tengizligidan foydalanib

$$\Delta = \operatorname*{Sup}_x \left| P\left(S_M < x\sqrt{EM}\right) - \Phi(x) \right| \le 1{,}5205 \frac{\beta_3}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{EY_0^{3/2}}{(EY_0)^{3/2}}$$

bahoni yoza olamiz.

Agar binomial tasodifiy miqdor M ning parametrlariga qaytsak, oxirgi tengizlik

$$\Delta \le 1{,}5205 \cdot K(p) \cdot \frac{\beta_3}{\sqrt{r}} \tag{8}$$

bahoga aylanadi va bu yerda

$$K(p) = \frac{EY_0^{3/2}}{(EY_0)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{p}}}.$$

Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$EM = \frac{r(1-p)}{p},$$

va Vald ayniyatidan foydalansak

$$ES_M = 0, \quad DS_M = \frac{r(1-p)}{p}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Demak,

$$\Delta = \Delta_r \equiv \sup_x \left| P\left(S_M < x\sqrt{\frac{2(1-p)}{p}} \right) - \Phi(x) \right|.$$

Endi (4) tenglik bilan aniqlangan Y_0 tasodifiy miqdorning taqsimotini hisobga olgan holda, $K(p)$ ifodani baholashga kirishamiz. Quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$EY_0 = \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(1-p)^k}{k} = \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1-p}{p\log\frac{1}{p}},$$

$$EY_0^{3/2} = \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{3/2} \frac{(1-p)^k}{k} = \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}(1-p)^k.$$

Quyidagi $g(x)=x^{1/2}(1-p)^x$ funksiyani koʻramiz. Bu funksiya

$$\left[0,\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-1}\right]$$

oraliqda oʻsuvchi, $x>\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-1}$ boʻlganda esa kamayuvchi boʻladi. Bu $g(x)$ funksiyaga tegishli faktlarni hisoblab, baholashda ulardan foydalanamiz. Oson koʻrinadiki,

$$EY_0^{3/2}\le\frac{1}{\log\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty x^{1/2}(1-p)^x\,dx+\right.$$

$$\left.+(1-p)^{1/2\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Bundan keyin

$$\int_0^\infty x^{1/2}(1-p)^x\,dx=\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-1}\int_0^\infty t^{1/2}e^{-4t}\,dt=$$

$$=\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-\frac{3}{2}}\Gamma(3/2)=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Bu yerda $\Gamma(\alpha)$, $\alpha<0$ – Eylerning gamma funksiyasi

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}\,du.$$

Shunday qilib,

$$EY_0^{3/2}\le\frac{1}{\log\frac{1}{p}}\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-p)^{1/2}\left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-1}\log\frac{1}{1-p}\right].$$

Ushbu

$$\log\frac{1}{1-p}\le p\left(1+\frac{p}{2(1-p)}\right)$$

tengsizlik oʻrinli boʻlgani uchun

$$EY_0^{3/2} \le \frac{1}{2\log\frac{1}{p}} \cdot \left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\sqrt{\pi} + \frac{p}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)\right]. \qquad (9)$$

Baholanayotgan miqdor $EY_0^{3/2}$ uchun yana bir bahoni keltiramiz. Eslatib o'tamizki,

$$EY_0^{3/2} \le \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}(1-p)^k.$$

Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi yig'indini Koshi tengsizligi orqali baholaymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}(1-p)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k(1-p)^k} \cdot \sqrt{(1-p)^k} \le$$

$$\le \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k\right]^{1/2}$$

Endi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1-p}{p},$$

va

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{1-p}{p^2}$$

tengliklarni hisobga olsak,

$$EY_0^{3/2} \le \frac{1-p}{p^{3/2}\log\frac{1}{p}}.$$

Shunday qilib, $EY_0^{3/2}$ uchun ikkita har xil bahoni oldik. Ifoda $K(p)$ da (9) tengsizlikdan foydalansak

$$K(p) \le \frac{1}{\left(\log\frac{1}{p}\right)^{1/2} \cdot \frac{p^{3/2}}{(1-p)^{3/2}} \cdot \left(\log\frac{1}{p}\right)^{3/2}} \times$$

$$\times \frac{1}{2\log\frac{1}{p}} \left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-3/2} \left[\sqrt{\pi} + \frac{p}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)\right]. \qquad (10)$$

Oson tekshirilib ko'riladigan

$$\log\frac{1}{1-p} > p\left(1+\frac{p}{2}\right)$$

tengsizlikni qo'llab, (10) bahoning davomi sifatida

$$K(p) \le \frac{p^{3/2}}{2(1-p)^{3/2}} \cdot \left(\log\frac{1}{1-p}\right)^{-3/2} \left[\sqrt{\pi} + \frac{p}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)\right] \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{(1-p)^{3/2}(2+p)^{3/2}}\left[\sqrt{\pi} + \left(\frac{2-p}{1-p}\right)\right] \qquad (11)$$

tengsizliklarni hosil qilamiz.

End (11) bahoni $K(p)$ ifodaga qo'ysak,

$$K(p) \le \frac{1}{\left(\log\frac{1}{p}\right)^{1/2}} \cdot \frac{p^{3/2}}{(1-p)^{3/2}}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \cdot \frac{1-p}{p^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-p}}. \qquad (12)$$

O'z-o'zidan tushunarliki, p ning kichik qiymatlarida (11) baho yaxshiroq, chunki $\sqrt{\pi}/2 < 1$. Lekin p ning noldan sezilarli darajada fapq qilinadigan qiymatlarida (12) baho aniqroq bo'ladi. Demak, (11) va (12) baholarni p ning hamma qiymatlarida taqqoslab bo'lmaydi. Shuning uchun ham $K(p)$ ifodaning yakuniy baholarini

$$K(p) \le \frac{1}{\sqrt{1-p}} \min\left\{1, \frac{\sqrt{2}}{(1-p)(2+p)^{3/2}}\left[\sqrt{\pi} + \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2-p}{1-p}\right)\right]\right\}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Yuqorida keltirilgan munosabatlarning natijaviy samarasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 1. Faraz qilaylik

$$EX = 0, \quad DX = 1, \quad \beta_3 = E|X|^3 < \infty$$

shartlar bajarilsin. U holda manfiy binomial tasodifiy yig'indi S_M ning taqsimoti uchun (parametrlari $r > 0, p \in (0,1)$ bo'lgan)

$$\Delta_r = \sup_x \left| P\left(S_M < x\sqrt{\frac{r(1-p)}{p}}\right) - \Phi(x)\right| \le K(p)\frac{\beta_3}{\sqrt{r}}.$$

Bu yerda

$$K(p)=\frac{1{,}5205}{\sqrt{1-p}}\min\left\{1,\frac{\sqrt{2}}{(1-p)(2+p)^{3/2}}\left[\sqrt{\pi}+\frac{p}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)\right]\right\}.$$

Keltirilgan teorema 1 dan kelib chiqadiki, amaliyotda keng qo'llaniladigan geometrik tasodifiy yig'indining taqsimoti, parametr p ning fiksirlangan qiymatlarida normal qonun taqsimoti $\Phi(x)$ bilan approksimatsiya qilinishi mumkin ekan va parametr r ning katta bo'lgan qiymatlarida bu approksimatsiya aniqroq bo'lib, qoldiq had $\Delta_r=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ tartibda nolga yaqinlashadi.

4.6. Umumlashgan Puasson taqsimotlari uchun asimptotik yoyilmalar

Faraz qilaylik, $X_1,X_2,...$ – bog'liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, N_λ esa parametri $\lambda>0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lgan butun qiymatli tasodifiy miqdor bo'lsin. Parametr λ ning har bir qiymatida

$$N_\lambda, X_1, X_2, ...$$

tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liq bo'lmasin. Puasson tasodifiy yig'indisini

$$S_\lambda = X_1+...+X_{N_\lambda},\quad \lambda>0$$

deb belgilaymiz. Faraz qilamizki, $EX_1=a$ va $DX_1=\sigma^2>0$ mavjud bo'lsin. Hamma $k\geq 1$ qiymatlar uchun $EX_1^k=\alpha_k$ bo'lsin. Bu holda $\alpha_1=a,\ \alpha_2=\sigma^2+a^2$ tengliklar bajariladi. Tasodifiy X_1 va S_λ miqdorlarning xarakteristik funksiyalarini mos ravishda f(t) va $h_\lambda(t)$ deb belgilaymiz. Yaxshi ma'lumki, agar f(t) r marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, $t\to 0$ da

$$f(t)=1+iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}+(it)^2\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(it)^k\alpha_{k+2}}{(k+2)!}+o(t^r), \qquad (1)$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. Quyidagi ta'riflarni eslatib o'tamiz.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdor X panjarasimon taqsimotga ega deyiladi, agar uning qiymatlar to'plami $\{x_n,\ n=0,\pm1,\pm2,...\}$

$$\{b+nh,\ n=0,\pm1,\pm2,...\}$$

to'plam bilan ustma-ust tushsa, ya'ni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = x_n) = 1$$

tenglik bajarilsa. Bu yerda $b \in R$, $n > 0$ – haqiqiy va musbat sonlar.

Yaxshi ma'lumki, tasodifiy miqdor X ning panjarasimon bo'lishi uchun, $t = t_0 \neq 0$ mavjud bo'lib,

$$E\exp\{it_0X\} = f(t_0) = 1 \tag{2}$$

tenglik bajarilishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi. Bundan tashqari, agar (2) tenglik biror $t_0 \neq 0$ uchun bajarilsa, X tasodifiy miqdor taqsimotining qadami $h = 2\pi / t_0$ deb qabul qilish mumkin, chunki $t_0 > 0$ deb hisoblaymiz ($f(t_0) = f(-t_0) = 1$).

Ta'rif 2. Tasodifiy miqdor X Kramerning (S) shartini qanoatlantiradi deymiz, agar

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |f(t)| = \lim_{|t|\to\infty} \operatorname{Sup} |f(t)| < 1 \tag{3}$$

munosabat bajarilsa.

Odatdagidek $\Phi(x)$ bilan standart normal taqsimot funksiyasini, $\varphi(x)$ bilan uning zichlik funksiyasini belgilaymiz, ya'ni

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Ta'rif 3. Haqiqiy sonlar to'plami R ni o'ziga akslantiradigan $H_k(x)$ funksiyani

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)}, \; k = 0,1,2,...$$

tenglik bilan aniqlaymiz va bu funksiyani k–nchi tartibli polinom (ko'phad) bo'lishi ravshan, uni k–nchi tartibli Ermit polinomi deb ataladi.

Oson ishonish mumkinki,

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x,$$
$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \quad H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x,$$
$$H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$$

Butun manfiy bo'lmagan m, $q_k \in R$, $k = \overline{0,m}$ lar uchun

$$q(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$$

polinomni (m–nchi tartibli) ko'ramiz.

Aytaylik, $H_0(x),...,H_m(x)$ Ermit polinomlari bo'lsin. Quyidagi polinomni

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{m} q_k H_k(x)$$

formula bilan kiritamiz. Oson ko'rish mumkinki

$$\psi(\mathrm{t})=q(it)\exp\left\{-t^2/2\right\}$$

funksiya, quyidagi

$$\bar{\psi}(x)=Q(x)\varphi(x)$$

tenglik bilan aniqlanadigan - funksiyaning Furye almashtirishi bo'ladi.

Bu bo'lim davomida $r\geq 3-$ fiksirlangan butun son deb hisoblanadi.

Kompleks z o'zgaruvchi uchun

$$\tilde{f}(z)=\sum_{k=1}^{r-2}\frac{\alpha_{k+2}z^k}{(x+2)!}$$

ifodani ko'ramiz. Bu $\tilde{f}(z)-$ darajasi $r-2$ dan katta bo'lmagan, koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo'lgan polinom bo'lib, $\tilde{f}(0)=0$. Yuqoridagi (1) tenglikka asoslanib, $t\to 0$ da

$$f(t)-1-iat+\frac{\alpha_2 t^2}{2}=(it)^2\tilde{f}(it)+o\left(t^2\right)$$

munosabat o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Kompleks z o'zgaruvchi va $\lambda>0$ uchun

$$P_\lambda(z)=\sum_{k=1}^{r-2}\frac{1}{k!}\left[\frac{z^2}{\alpha_2}\tilde{f}\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\right)\right]^k, \tag{4}$$

funksiyani aniqlaymiz. Insonish mumkinki, $m\geq 3$ butun son va koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo'lgan (λ ga bog'liq bo'lmagan)

$$q_k(z),\ k=3,...,\mathrm{m}$$

polinom mavjud bo'ladiki, ular uchun

$$P_\lambda(z)=\sum_{k=3}^{m}\lambda^{-r/2+1}q_k^{(z)} \tag{5}$$

tenglik o'rinli bo'ladi (har qanday $\lambda>0$ va kompleks z uchun). Bunda $q_3(z),...,q_m(z)$ polinomlar (4) va (5) tengliklar orqali bir qiymatli aniqlanadi. Aytaylik

$$q_k(z)=\sum_{j=3}^{L_k} q_{k,j}z^j \tag{6}$$

polinom $q_k(z)$ ni $q_{k,j}\in R\ (j=3,...,L_k)$ va $L_k\geq 3\ (k=3,...,m)$ lar orqali aniqlaydigan formula bo'lsin. Funksiya $H_j(x)$ ni Ermit polinomi deb hisoblab, $x\in R$ va $k=3,...,m$ lar uchun

$$R_k(x)=-\sum_{j=3}^{L_k} q_{k,j}H_{j-1}(x) \tag{7}$$

polinomlarni kiritamiz.

Izoh 1. Elementar hisoblashlar yordamida (4) va (5) tengliklardan hamma $\lambda>0$ va kompleks z uchun

$$P_\lambda(z)=\sum_{k=3}^{(z-2)^2+2}\lambda^{-k/2+1}\sum_{\frac{k-2}{r-z}\leq j<k-2}\alpha_{k,j}z^{k+2(j-1)}$$

tenglikni yoza olamiz va bu yerda

$$j!\alpha_{k,j}=\sum_{\substack{3\leq n_1\leq...\leq n_j\leq r\\ n_1+...+n_j=k+z/j-1}}\frac{\alpha_{n_1}...\alpha_{n_j}}{n_1!...n_j!}\alpha_2^{-k/2-j+1}.$$

Shunday qilib, (5) va (6) lardan kelib chiqadiki,

$$m=(r-z)^z+2,\quad L_k=3(x-2),\quad k=3,...,m$$

tengliklar bajariladi.

Ta'rif 4. Tenglik (7) bilan aniqlangan $R_k(x)$ funksiya k-nchi tatibli Edjvort polinomi deb ataladi.

Har qanday $x\in R$ uchun

$$G_{\lambda,r}(x)=\Phi(x)+\varphi(x)\sum_{k=3}^{r}\lambda^{-k/2+1}R_k(x)$$

belgilashni kiritamiz.

Izoh 2. Agar $r=3$ bo'lsa,

$$R_3(x)=-\frac{\alpha_3}{6\alpha_2^{3/2}}H_2(x),$$

$$G_{\lambda,3}(x)=\Phi(x)-\frac{\alpha_3}{6\alpha_z^{3/2}\sqrt{\lambda}}(x^2-1)\varphi(x). \tag{8}$$

Agar $r=4$ bo'lsa,

$$R_4(x)=-\frac{\alpha_4}{24\alpha_2^2}H_3(x)-\frac{\alpha_3^2}{72\alpha_2^3}H_5(x),$$

$$G_{\lambda,4}(x)=\Phi(x)-\frac{\alpha_3}{6\alpha_2^{3/2}}(x^2-1)\varphi(x)-$$

$$-\frac{\varphi(x)}{\lambda}\left[\frac{\alpha_4}{24\alpha_2^2}\right](x^3-3x)-\frac{\alpha_3^2}{72\alpha_2^3}(x^5-10x^3+15x) \qquad (9)$$

Bulardan tashqari, $a_3(S_\lambda)$ va $\ell_4(S_\lambda)$ - mos ravishda S_λ tasodifiy yig'indining asimmetriya koeffitsiyenti va eksessi bo'lsa,

$$a_3(S_\lambda)=E\left(\frac{S_\lambda-ES_\lambda}{\sqrt{DS_\lambda}}\right)^3=E\left(\frac{S_\lambda-a_1\lambda}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\right)^3=\frac{\alpha_3}{\sqrt{\lambda}\alpha_2^{3/2}},$$

$$\ell_4(S_\lambda)=E\left(\frac{S_\lambda-ES_\lambda}{\sqrt{DS_\lambda}}\right)^4-3=E\left(\frac{S_\lambda-a_1\lambda}{\sqrt{\lambda\alpha_2}}\right)^4-3=\frac{\alpha_4}{\sqrt{\lambda}\alpha_2^2}$$

tengliklar o'rinli bo'lib, (8) va (9) munosabatlarni

$$G_{\lambda,3}(x)=\Phi(x)-\frac{a_3(S_\lambda)}{6}\Phi^{(3)}(x),$$

va

$$G_{\lambda,4}(x)=\Phi(x)-\frac{a_3(S_\lambda)}{6}\Phi^{(3)}(x)+\frac{a_4(S_\lambda)}{24}\Phi^{(4)}(x)+\frac{a_3^2(S_\lambda)}{72}\Phi^{(6)}(x)$$

ko'rinishlarda yozish mumkin.

Funksiya $G_{\lambda,r}(x)$ chekli variatsiyaga ega bo'lib, uning "zichlik funksiyasi"

$$g_{\lambda,r}(x)=\frac{dG_{\lambda,r}(x)}{dx}=\varphi(x)+\varphi(x)\sum_{k=3}^{m}\lambda^{-k/2+1}\sum_{j=1}^{L_k}q_{k,j}H_j(x) \qquad (10)$$

$$\bar{g}_{\lambda,r}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}g_{\lambda,r}(x)dx=(1+P_\lambda(it))\exp\{-t^2/2\}. \qquad (11)$$

Kelgusida biz quyidagi belgilashni qo'llaymiz:

$$h_\lambda(t)=E\exp\left\{it\frac{S_\lambda-ES_\lambda}{\sqrt{DS_\lambda}}\right\}=E\exp\left\{it\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\right\}.$$

Oson ko'rinadiki,

$$\tilde{h}_\lambda(t)=\exp\left\{-\frac{i+a\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a^2+\sigma^2}}\right\}\cdot h_\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\right).$$

Endi ehtimolliklar nazariyasida yaxshi ma'lum bo'lgan Esseenning fundamental tengsizligidan foydalanamiz.

Lemma 1. $F(x)$- taqsimot funksiyasi, $f(t)$- unga mos keluvchi xarakteristik funksiya bo'lsin. Haqiqiy funksiya $G(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\lim_{x\to-\infty} G(x)=0, \qquad \lim_{x\to\infty} G(x)=1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|G'(x)|dx<\infty$$

va $\quad A=\sup_x|G'(x)|<\infty.$

Faraz qilamizki, $G(x)$ funksiyaning Furye almashtirishi $g(t)$ uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $g(0)=1$. Bu holda har qanday $T>0$ uchun quyidagi

$$\sup_x|F(x)-G(x)|\le\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt+\frac{24A}{\pi T} \tag{12}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu lemmaning isboti ko'p kitoblarda, xususan [12] monografiyada keltirilgan.

Yuqorida keltirilgan $G_{\lambda,r}(x)$ va $\overline{g}_{\lambda,r}(t)$ funksiyalar lemma 1 ning shartlarini qanoatlantirishi va

$$A_{\lambda,r}=\sup_x|g_{\lambda,r}(x)|<\infty$$

bo'lishi oson tekshirib ko'riladi.

Demak, lemma 1 ga asosan

$$\sup_x\left|P\left(\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}<x\right)-G_{\lambda,r}(x)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{|\widetilde{h}_\lambda(t)-\overline{g}_{\lambda,r}(t)|}{|t|}dt+\frac{24A_{\lambda,r}}{\pi T}. \tag{13}$$

Oxirgi (13) tengsizlik quyidagi teoremaning isbotida muhim rol o'ynaydi.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $r=3$ bo'lganda X_1 tasodifiy miqdorning taqsimoti panjarasimon bo'lmasin, $r>3$ bo'lganda esa X_1 tasodifiy miqdorni taqsimoti Kramerning (S) ((3)) shartini qanoatlantirsin. Bu holda $(\lambda\to\infty)$

$$\sup_x\left|P\left(\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}<x\right)-G_{\lambda,r}(x)\right|=o\left(\lambda^{-r/2+1}\right),$$

ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{r/2-1} \operatorname{Sup}_x \left| P\left(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \right) - G_{\lambda,r}(x) \right| = 0.$$

Aytalik, $\varepsilon > 0$ fiksirlangan ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Lemma 1 da

$$A = A(\varepsilon) = \frac{r8A_{\lambda,r}}{\pi\varepsilon}, \quad T = T(\varepsilon,\lambda) = A(\varepsilon)\lambda^{r/2-1}$$

deb qabul qilamiz. Bu holda (13) tengsizlikka asosan

$$\lambda^{r/2-1} \sup_x \left| P\left(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \right) - G_{\lambda,r}(x) \right| \le$$

$$\le \frac{\lambda^{r/2-1}}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{\tilde{h}_\lambda(t) - \bar{g}_{\lambda,r}(t)}{t} \right| dt + \varepsilon/2. \tag{14}$$

Oxirgi (14) munosabatdan ko'rinadiki, teoremani isbotlash uchun har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ mavjud bo'lib

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{r/2-1} \int_{|t|\le\delta\sqrt{\lambda\cdot a_2}} \left| \frac{\tilde{h}_\lambda(t) - \bar{g}_{\lambda,r}(t)}{t} \right| dt \le \varepsilon \tag{15}$$

munosabatni bajarilishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Oxirgi (15) munosabatning isboti [12] monografiyadagi tasodifiy bo'lmagan S_n yig'indi uchun o'tqazilgan mulohazalarni takrorlaydi. (15) tengizlikning to'la isboti [4] monografiyada keltirilgan.

V bob. KOLLEKTIV RISK MODELLARI

5.1. Kollektiv risk masalalari

Umuman, risk jarayoni deganda sug'urta kompaniyasiga tegishli kapitalning o'zgarishi tushuniladi va bu o'zgarish ikki xil sabablar orqali ro'y beradi:

1) mijozlarning soni ko'payganda ulardan yig'iladigan fondi sug'urta badali (premiyasi) oshib borishi hisobiga, sug'urta (kapitali) o'sib boradi;

2) sug'urta to'lovi oshib borgan sari bu kapital kamayadi. Odatda (doimo bo'lmasa ham) qulaylik uchun sug'urta modellarida sug'urta premiyasi deterministik (tasodifiy bo'lmagan) funksiyalar orqali ifodalanadi deb qabul qilinadi. Lekin sug'urta to'lovlari jarayoni hamma vaqtda tasodifiy deb hisoblanadi. Oqibat natijada, risk jarayonini stoxastik jarayonlar sinfiga tegishli deb hisoblashga to'g'ri keladi.

Risk jarayonlari sug'urta kompaniyasining faoliyatini optimal boshqarishning matematik modellari sifatida qabul qilinadi. Bunda sug'urta jarayonining asosiy xarakteristikalari hisoblanadigan sug'urta tariflari (premiya stavkalari) va sug'urta to'lovlari kabi parametrlarni optimallashtirish masalalari muhim hisoblanadi. Bu parametrlar haqida konkret qarorlar qabul qilishda esa, turli xil optimallik kriteriyalaridan (belgilaridan) foydalanishga to'g'ri keladi. Masalan, risk jarayoni stoxastik bo'lganda, sug'urta to'lovlarining yakuniy yig'indisining taqsimotini topish juda muhim masala hisoblanadi, chunki bu taqsimot orqali yakuniy sug'urta to'lovlari yig'indisining hajmini (total claim size) aniq baholash mumkin. O'z navbatida, bu masalani hal qilish esa zamonaviy ehtimolliklar nazariyasining limit teoremalari metodlari yordamida yechiladi.

Sug'urta kompaniyasi faoliyatining optimalligini belgilaydigan kriteriylardan yana biri bu – sug'urta kompaniyasining "kasod bo'lishlik" ehtimolligiga asoslanadi. Bu ehtimollik risk jarayonini ma'lum vaqt oralig'ida (chekli yoki cheksiz) belgilangan darajadan pastga tushib ketishi bilan bog'liq hodisalar uchun aniqlanadi. "Kasod bo'lishlik" ehtimolligini o'rganish bilan bog'liq masalalar kollektiv risk nazariyasi uchun asosiy muammolardan hisoblanadi. Oxirgi jumlani quyidagi mulohazalar ham tasdiqlaydi. Haqiqatan ham yakuniy sug'urta yig'indisining taqsimotini topish bilan bog'liq bo'lgan masalalarining ko'pchiligi, individual risk nazariyasi metodlarini qo'llash orqali yechilishi mumkin. Lekin bu usullar bilan "kasod bo'lishlik" ehtimolligini o'rganish bilan bog'liq bo'lgan masalalarni yechib bo'lmaydi. Shuning uchun ham "kasod bo'lishlik" ehtimolligini o'rganish bilan bog'liq masalalar Aktuar matematikaning zamonaviy bir vaqtda mustaqil yo'nalishlaridan birini tashkil qiladi.

"Kasod bo'lishlik" ehtimoli risk jarayonining asosiy parametrlarini funksiyasi deb qaraladi. Kollektiv risk modelining asoschilaridan biri sifatida shved matematigi F.Lundberg hisoblanadi. Uning XX asming boshlang'ich yillarida o'tkazgan tadqiqotlarida birinchi marta "kasod bo'lishlik" ehtimolliklarini topish va ularni tahlil etish masalalari qo'yilgan. Lekin F.Lundberg-ning ishlarida matematik aniqlik va qat'iylik saqlanmagan. Shu sababli ham kollektiv risk nazariyasining yuzaga kelishi boshqa Shvetsiya olimi G.Krasler nomi bilan bog'liq deb hisoblanadi. 1930-yillarda o'tkazgan tadqiqotlarida "kasod bo'lishlik" ehtimol-liklari bilan bog'liq masalalarda ishonchli darajadagi qat'iylik, yetarli me'yorda matematik umumiylik kuzatila boshlandi. Shuning uchun ham Aktuar matematikaning kollektiv risk sohasidagi natijalar Lundberg-Kramer nomi bilan bog'liq bo'lib kelmoqda (Lundberg-Kramer teoremasi, tengsizligi va hokazo). G.Kramerning "kasod bo'lishlik" ehtimolligining boshlang'ich kapitalga bog'liq asimptotikalarni tadqiqi bo'yicha erishgan klassik natijalari, katta bir soha – risklarni asimptotik nazariyasi uchun bo'ldi. Bu soha hozirgi zamon Aktuar matematikasida o'zining dolzarbligi va foydalinigini yo'qotmagan. Bu fikrning isbotini Aktuar matematikaning klassik modellarini tahlil etishda Viner-Xopf faktorizatsiya metodlari, Spitser ayniyati, Martingallar nazariyasi elementlarini qo'llanishida ham ko'rish mumkin. Haqiqatga yaqin bo'lgan yangi aktuariy modellarni topishda va ularning tahlilida inflatsiya, qayta sug'urtalash kabi yangi faktorlarni hisobga olishga to'g'ri keladi.

5.2. Kollektiv riskning diskret dinamik modeli

Oldingi bobda sug'urtaning individual risk (statik) modelini o'rgangan edik. Bu modelning tahlili sug'urta to'lovlarini faktorizatsiyalash imkoniyatini ro'yobga chiqarish imkoniyatini berib, bunda bevosita tuzilgan shartnomalar to'plamini o'rganishga o'tish mumkinligini eslatib o'tamiz.

Bu va keyingi boblarda sug'urta faoliyatini tahlil etishda hech qanday konkret shartnomalarga bog'liq bo'lmagan "abstrakt" sug'urta to'lovlari to'plami (demak, konkret sug'urta premiyalariga ham bog'liq bo'lmagan) asosiy obyekt bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, bu bobning materialini sug'urtaning individual variantlaridan umumiyroq bo'lgan dinamik modellarga o'tish deb tushunish mumkin bo'ladi.

Ushbu va keyingi punktlarda sug'urta to'lovlarini faktorizatsiyalash imkoniyatidan foydalanishni davom ettiramiz. Bunda faktorizatsion model chegarasida dinamik sxemalarga mos bo'lgan qanday masalalar yechilishi mumkinligini o'rganamiz.

Sug'urtaning dinamik modelining umumiy ko'rinishini (to'g'rirog'i sug'urta fondini)

$$R(t)=U+P(t)-S(t). \qquad (1)$$

formula bilan ifoda etish mumkin. Bu yerda U – boshlashg'ich kapital, $P(t)$ – sug'urta premiyasini shakllanish jarayoni, $S(t)$ – sug'urta to'lovlari jarayoni. Keltirilgan (1) formulada $P(t)$ – deterministik (ya'ni tasodifiy bo'lmagan), $S(t)=S(t,w)$ esa tasodifiy (stoxastik) jarayon deb qabul qilinadi va

$$R(t)=\overline{U}(t)$$

tasodifiy jarayon deb hisoblash tabiiy bo'ladi. Yana (1) formuladan kelib chiqib, $P(t)$ni $[0,t]$ oralig'ida to'plangan sug'urta premiyalari miqdori, $S(t)$ni esa shu oraliqda o'tkazilgan sug'urta to'lovlari summasi (miqdori) deb tushunish mumkin bo'ladi. Xususan, Lundberg-Kramerning klassik dinamik modeli

$$R(t) = U + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $R(t)$ – sug'urta kompaniyasining $[0,t]$ oraliqdagi qoldiq (surplus) fondi, U – boshlashg'ich kapital, c – sug'urta premiyalari to'planishi intensivligini xarakterlaydigan koeffitsiyent, $N(t)$ – sug'urta to'lovlari to'lanadigan momentlar (boshqacha aytganda $[0,t]$ oraliqda sug'urta hodisalari ro'y berishi soni),

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar esa, $N(t)$ jarayonning i – nchi sakrash momentidagi sug'urta to'lovi miqdorini belgilaydi.

Ko'p hollarda $N(t)$ – oddiy "tiklanish" (renewal) jarayoni deb hisoblanadi. Bu holda

$$N(t) = \max\left\{ n > 0, \ \sum_{i=1}^{n} T_i \le t \right\},$$

tenglik bilan aniqlanadi, $\{T_i, \ i \ge 1\}$ – bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar bilan birgalikda bog'liqsiz deb hisoblanadi. Aytib o'tilgan shartlar bajarilsa, sug'urta kompaniyasining qoldiq (rezerv) fondi $R(t)$ ni

$$t_i = T_1 + \dots + T_i, \ \ i \ge 1,$$

momentlarda,

$$R(t_i) = R(t_{i-1}) + cT_i - Y_i \ , \qquad (3)$$

ko'rinishida yozish mumkin $(i = 1,2,\dots, \ t_0 = 0, \ R(t_0) = u)$. Oxirgi yozuvlar

$$\{R_i = R(t_{i-1}), \ i \ge 1\},$$

miqdorlar tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$cT_1 - Y_1, cT_2 - Y_2, \dots, cT_n - Y_n, \dots,$$

tasodifiy miqdorlar "yuzaga keltirgan tasodifiy daydishlar" jarayonini tashkil etishini namoyish etadi.

Ta'rif. Quyidagi

$$\psi(u) = P\left(\min_{1 \le i < \infty} R_i < 0\right) \tag{4}$$

formula bilan aniqlanadigan miqdor, sug'urta kompaniyasining "kasod bo'lishlik" ehtimolligi deb ataladi.

Keltirilgan (3), (4) formulalardan kelib chiqadiki, "kasod bo'lishlik" ehtimolligini o'rganish, $\{R_i,\ i \ge 1\}$ tasodifiy "daytish" uchun chegaraviy masalalarni yechishga reduksiya yetilishi mumkin ekan (aniqroq qilib aytganda, $\{R_i,\ i \ge 1\}$ tasodifiy "daytishni" $(y = 0)$ to'g'ri chiziqni kesib o'tish ehtimolligini tahlil qilishga to'g'ri keladi).

Dinamik modellarning sug'urta jarayonining statik tizimlaridan farqi shundan iboratki, ularda hodisalar o'zgarishi (1) tenglikka moslangan holda vaqtga bog'liq tasodifiy jarayonlar ko'rinishida bo'ladi. Bu jarayonlarning tarkibiy qismlari faqat ikkita bo'lib, 1) premiyalar to'planishi (tashkil topishi); 2) sug'urta to'lovlarini ifoda etadigan tasodifiy jarayonlar iborat deb tushunish mumkin. Bu ikki jarayon har xil vaqt masshtablarida va turli o'lchov masshtablarida ro'y beradi. Haqiqatan ham premiyalar, sug'urta hodisalarga qaraganda tezroq (ko'proq) bo'lib o'tadi, lekin premiyalar miqdori sug'urta to'lovlarga nisbatan juda kichik bo'lishi tabiiy hol. Shuning uchun ham asosiy jarayon sifatida sug'urta to'lovlari oqimi deb qabul qilinsa, bu jarayonning ro'y berishi masshtabi ma'nosida premiyalar jarayonini tasodifiy bo'lmagan (determinik) uzluksiz voqealar tizimi deb qabul qilinsa bo'ladi ((1) tenglikda $P(t) = ct$ deb tanlanganiga e'tibor bering).

Eng sodda holatda premiyalar to'planishi jarayoni yagona parametr – sug'urta badalini tushish tezligi c bilan aniqlanadi. Bu holda (2) tenglik bilan aniqlangan sug'urta tizimi Lundberg-Kramerning klassik dinamik modeli deb ataladi va unda parametr s ning roli yaqqol namoyon bo'ladi. Haqiqatan ham biror t momentda sug'urta kompaniyasining rezerv fondi $R(t)$ bo'lsa va $t+h$ $(h>0)$ momentga qadar sug'urta hodisasi ro'y bermasa, sug'urta fondi $t+h$ momentda

$$R(t+h) = R(t)+ch$$

ifoda bilan aniqlashadi (bunda biz mos matematik modelni murakkablashtirmaslik maqsadida inflatsiya kapitali protsentlarini hisobga olmadik). Oxirgi tenglikdan

$$c = \frac{R(t+h) - R(t)}{h}, \quad h > 0$$

ekanligi kelib chiqib, c parametrning premiyalar to'planishi tezligi deb tushunish mumkinligini tasdiqlaydi.

Endi yuqorida kiritilgn sug'urta kompaniyasining "kasod bo'lishlik" ehtimolligi tushunchasini batafsil sharhlab o'tamiz. Boshlang'ich $t = 0$ momentda sug'urta kompaniyasining kapitali $R(0) = u$. Birinchi sug'urta to'lovi $T_1 = \tau_1$ momentiga qadar $R(\cdot)$ sug'urta fondi $u + c\tau_1$ miqdorga o'sadi. Lekin T_1 momentda sug'urta kompaniyasi Y_1 miqdorda mijozga sug'urta to'lovi beradi. Natijada, rezerv fond

$$R(\tau_1) = u + c\tau_1 - Y_1$$

miqdorga kamayadi. Ikkinchi sug'urta to'lovi $T_2 = \tau_2$ momentiga qadar rezerv fond $c(T_2 - T_1) = c\tau_2$ miqdorga ko'payadi va

$$R(\tau_1 + \tau_2) = u + c\tau_1 - Y_1 + c\tau_2 = u + c(\tau_1 + \tau_2) - Y_1$$

tenglik bajariladi.

Agar

$$u + c\tau_1 - Y_1 \geq 0,$$

$$u + c(\tau_1 + \tau_2) - (Y_1 + Y_2) \geq 0,$$

....

....

$$u + c(\tau_1 + \tau_{n-1}) - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1}) \geq 0$$

tengsizliklar bajarilib, lekin

$$u + c(\tau_1 + \tau_n) - (Y_1 + \ldots + Y_n) > 0 \qquad (5)$$

munosabat bajarilsa, n-nchi sug'urta to'lovi ro'y bergan T_n momentda kompaniya "kasodga" uchraydi.

Qulaylik uchun sug'urta kompaniyasini "kasodga uchratgan" sug'urta to'lovi nomeriga teng bo'lgan tasodifiy miqdor (μ ni kiritamiz). Bu holda $\{\mu = \infty\}$ hodisa, kompaniya hech qachon "kasodga uchramasligini" anglatadi. O'z navbatida, $P(\mu < \infty)$ ehtimollik (4) formulada aniqlangan kompaniyaning "kasod bo'lishlik" ehtimolligini bildiradi, ya'ni

$$P(\mu<\infty)=\psi(u)$$
$$P(\mu=\infty)=1-\psi(u)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Tenglik (3) ni

$$R_i = R_{i-1} + H_i$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda H_i tasodifiy miqdorlar $(t_{i-1}, t_i]$ oraliqda tushgan premiyalar va t_i momentda amalga oshirilgan sug'urta to'lovlarining ayirmasini ifoda etadi. Umuman R_{i-1} va H_i tasodifiy miqdorlarni o'zaro bog'liqsiz deb bo'lmaydi. Bu tasodifiy miqdorlar faqat sug'urta to'lovlarini faktorizatsiyalash mumkin bo'lib, R_{i-1} summaga faqat $t=t_i$ momentda to'lanadigan sug'urta to'lovlariga hech qanday aloqador bo'lmagan premiyalar kirgan holdagina bog'liqsiz bo'ladi. O'z navbatida, bu holat faqatgina har bir t_i momentdagi to'lovdan keyin, bu momentdan oldin tuzilgan shartnomalar o'z kuchini yo'qotgan deb hisoblangandagina va H_i miqdorlarni esa $(t_{i-1}, t_i]$ oraliqda tuzilgan shartnomalarning premiyalari va to'lovlar tashkil etgandagina ro'y beradi. Demak, to'lovlarini faktorizatsiyalash mumkin bo'lgan, "statik" individual modelni dinamik modelga "joylashtirish" mumkin bo'ladi, agar t_i larni individual shartnomalar bo'yicha to'lov momentlari deb hisoblanmasdan, ba'zi kamroq uchraydigan va ularga nisbatan shu momentgacha tuzilgan shartnomalarning harakati to'xtatilishi haqida kelishuviga ega bo'lingan, ya'ni navbatdagi $(t_i, t_{i+1}]$ davrga kompaniya faqat $(0, t_i]$ oraliqda to'plangan premiyalardan tashkil topgan sug'urta fondi R_i lar bilan "kirishi" mumkin bo'ladi, xolos.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, sug'urtaning diskret dinamik modelida, sug'urta kompaniyasi o'zining boshlang'ich faoliyatida $u-$ boshlang'ich kapitalga (fond) ega bo'lib, bir necha vaqt davomida (uni test-davri deb ataladi) kompaniyasining sug'urta fondiga, tuzilgan shartnomalarga asosan, sug'urta premiyalari tusha boshlaydi va ulardan sug'urta to'lovlarini bajarishda foydalaniladi. Sug'urta kompaniyasi zaruriyat yuzaga kelganda, test-davri davomida "protsentsiz" qisqa muddatli kreditlar hisobiga "kasod" bo'lishdan o'zini saqlaydi. Test-davrining oxirida sug'urta portfelidagi mavjud hamma shartnomalar o'z kuchini yuqotgan deb hisoblanadi va navbatdagi test-davri davomida bu shartnomalar bo'yicha "e'tirozlar" qabul qilinmaydi. Amaliyot nuqtayi nazaridan bunday model har bir shrtnomaning muddati test-davriga nisbatan ancha kichik bo'lganda ma'noga ega bo'ladi yoki har bir test-davridagi mavjud shartnomalar birvaqtda test-davrining boshida shu test-davri muddatiga tuzilgan bo'lishi kerak.

5.3. Diskret dinamik (DD) modelda minimal sug'urta stavkasini tanlash masalasi

Ko'rilayotgan dinamik modelda sug'urta kompaniyasining "kasod bo'lishlik" ehtimolligi deb, hech bo'lmaganda bitta test-davrida kompaniyaning to'lov majburiyatlarini bajara olmaslik holati ro'y berishi ehtimolligi tushuniladi. Bunda test-davrida tushgan to'lov talablarini shu test-davrining oxirida bajarilishini hisobga olish kerak bo'ladi. Demak, sug'urtaning DD modeli unga "ichma-ich qo'yilgan" statik (individual risk) modellar ketma-ketligidan tashkil topar ekan (bu statik modellarning har biri bitta test-davri davomida harakatda bo'ladi).

Oldingi boblarda statik (individual risk) modellarda minimal sug'urta stavkasi bitta test-davrida fiksirlangan "kasod bo'lmaslik ehtimolligini" ta'min etadigan qilib tanlanishi aytib o'tilgan edi. Dinamik modelda esa minimal sug'urta stavkasi cheksiz ko'p test-davrlar davomida "kasod bo'lmaslik ehtimolligini" kerakli darajada kichik bo'lmasligini ta'minlashi talab etiladi.

DD modelda ham test-davrida tuzilgan sug'urta shartnomalari sonini N bilan belgilaymiz va uni birinchi ikkita momentlari $EN = \Lambda$, $DN = M^2$ ma'lum deb hisoblaymiz.

Hamma to'lov portfeli (hamma test-davrlarida tuzilgan sug'urta shartnomalari) faktorizatsiyalashgan sug'urta to'lovlardan iborat, ya'ni ular $Y_j = S_j X_j$ ko'rinishda bo'lsin. Quyidagi paragrafda kiritilgan

$$A = EX_j,\ B^2 = DX_j,\ V^2 = \frac{DS_j}{(ES_j)^2} = \frac{ES_j^2}{(ES_j)^2} - 1$$

parametrlarni ko‘ramiz.

Aytaylik, $\mu = ES_j$ bo‘lsin. Sug‘urta kompaniyasining bitta test-davridagi daromadi

$$W = \sum_{j=1}^{N} H_j$$

bo‘lib, bu yerda tasodifiy miqdorlar $H_j = S_j(z - X_j)$ yuqorida keltirilgan ma’noga ega. Oldingilardan sug‘urta kompaniyasining boshlang‘ich kapitali $u = \mu\rho$.

Agar k ta ketma-ket test-davrlari ko‘rilsa, kompaniyasining sug‘urta fondi

$$R_k = u + \Omega_k \tag{1}$$

tenglik aniqlamib, bu yerda,

$$\Omega_k = W_1 + ... + W_k,$$

tasodifiy miqdorlar yig‘indisidan iborat. O‘z navbatida, $\{W_m,\ m \geq 1\}$– bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib,

$$P(W_1 < x) = (W_2 < x) = ... = P(W < x)\ .$$

O‘z-o‘zidan ravshanki, $\{\Omega_k,\ k \geq 1\}$– tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog‘liqsiz orttirmaga ega bo‘lgan tasodifiy jarayon bo‘ladi. Quyidagi

$$\{R_k < 0\} = \{\Omega_k < -u\},\ k = 1,2,...$$

hodisalarning hech bo‘lmaganda k ning birorta qiymatida ro‘y berishi ehtimolligi, sug‘urta kompaniyasining DD-modeldagi cheksiz vaqt davomida “kasod bo‘lishlik” ehtimolligi bo‘ladi. Bu ehtimollikni fiksirlangan sug‘urta stavkasi z uchun $\psi(u,z)$ bilan belgilaymiz. Bu funksiya $\psi(u,z)$ fiksirlangan boshlang‘ich kapital u ning qiymatlarida Z ga nisbatan o‘suvchi bo‘lmaydi. Demak, qandaydir $Z = Z'$ sug‘urta stavkasi uchun

$$\psi(u,z) \leq \varepsilon \tag{2}$$

tengsizlik bajarilsa, bu tengsizlik hamma $Z = Z'$ lar uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

DD-model doirasida minimal sug‘urta stavkasi sifatida

$$Z_0 = \inf\{Z : \psi(u,z) \leq 1 - Q,\ Z \geq A\}$$

miqdor qabul qilinadi. Bu yerda $Q<1$. Ehtimollik sug'urta kompaniyasini qoniqtiradigan "kasod bo'lmaslik" ehtimollik chegarasi.

Quyidagi teoremada keltirilgan natija sug'urta modellarining "kasod bo'lishlik" ehtimolligini baholash masalalarida muhim rol o'ynaydi.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $U(s)=E\exp\{-sW\}$ funksiya qandaydir $s\in[0,S')$ oraliqda chegaralangan bo'lsin. Agar shu oraliqda $u(s)=1$ tenglama $s=s_0>0$ yechimga ega bo'lsa,

$$\psi(u,z)\le\exp\{-s_0u\}$$

tengsizlik bajariladi.

Keltirilgan natijaga qo'shimcha ravishda

$$\lim_{s\to s'}u(s)>1$$

munosabat bajarilgan holda, $u(s)=1$ tenglama musbat yechimga ega bo'lishini qayd qilib o'tish mumkin.

Endi tasodifiy miqdor W parametrlari

$$\alpha=EW=\Lambda h,\quad \beta^2=DW=\Lambda g^2+M^2h,$$

bo'lgan normal taqsimotga ega deb hisoblaymiz. Eslatib o'tamizki, bu yerda

$$h=EH=ESd,\quad \beta^2=DW=\Lambda g^2+M^2h,$$

$$g^2=DH=DSd^2+(ES)^2(1+V^2)B^2,$$

$d=d(z)=z-A$ sug'urta "yuklamasi". Oldingilar kabi $\omega=V^2+M^2/\lambda$ belgilashni kiritamiz.

Teorema 2. Agar W normal taqsimotga ega bo'lsa, har qanday fiksirlangan Q uchun boshlang'ich kapital u

$$\rho=\frac{u}{\mu}>\frac{\omega(1-A)^2+(1+V^2)B^2}{2(1-A)}\ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{3}$$

shartni qanoatlantirganda (bunda $0<Q<1$, $\varepsilon=1-Q$), minimal sug'urta stavkasi z_0 quyidagi

$$z_0\le z'=A+d', \tag{4}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi va bu yerda

$$d'=\frac{2(1+V^2)B^2}{\rho x+\left[\rho^2x^2-4\omega(1+V^2)B^2\right]^{1/2}},\quad x=\frac{2}{\ln 1/\varepsilon}.$$

Tekshirib ko'rish qiyin emaski (4) munosabatning o'ng tomoni minimal sug'urta z_0 uchun trivial bo'lmagan (ya'ni birdan kichik) bahoni beradi.

Natija 2. Teorema 2 ning shartlari bajarilib, ya'ni (3) tengsizlik o'rinli bo'lsa, minimal sug'urta stavkasi z_0 uchun $z_0 \le z' = A + d'$ tengsizlik o'rinli bo'lib,

$$z' \sim A + \frac{(1+V^2)\mu B^2}{2u}, \quad u \to \infty,$$

asimptotik munosabat bajariladi.

5.4. "Tiklanishlar" jarayoni

Aytaylik,

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar biror (Ω, F, P) da aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 1. Parametri $t \ge 0$ bo'lgan tasodifiy miqdorlar uyushmasi $\{\eta(t),\ t \ge 0\}$ biror (Ω, F, P) ehtimollik fazosida aniqlangan bo'lsin. Bu uyushma "tiklanishlar" jarayonini tashkil etadi deyiladi, agar u (1) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi orqali

$$\eta(t) = \min\{k_j\ S_k > t\},\ t \ge 0 \tag{2}$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsa.

Bu yerda

$$S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k,\ \ k \ge 1,\ S_0 = 0.$$

Tenglik (2) $\eta(t)$ miqdorlarni to'la aniqlamaydi. Haqiqatan ham t daraja kesib o'tilmaydigan ω elementar hodisalarda $\eta(t)$ nimaga tengligini bilmaymiz. Bu holda

$$\eta(t) = \infty, \text{ agar hamma } S_k \le t \text{ bo'lsa,} \tag{3}$$

deb aniqlash tabiiy hisoblanadi.

Odatda, (1) ketma-ketlikdagi $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlarni bir xil taqsimlangan va ularning matematik kutilmasa mavjud deb faraz qilinadi.

Agar ξ_i lar musbat tasodifiy miqdorlar bo'lsa, (2) tenglik bilan aniqlangan $\eta(t)$ tasodifiy funksiyani quyidagicha izohlash mumkin:

sonlar o‘qida $S_0=0,\ S_1,S_2,...$ nuqtalarni belgilaymiz. Bu holda $[0,S)$ oraliqda $\eta(0)=1$, $[S_1,S_2)$ oraliqda $\eta(t)=2$ va umuman,

$$\eta(t)=k,\ \text{agar}\ t\in[S_{k-1},S_k),\ k\geq 1$$

tengliklar bajariladi.

Ko‘p hollarda

$$S_0=0,\ S_1,S_2,...,S_n,...$$

ketma-ketlikning o‘zini “tiklanish” jarayoni deb e’lon qilinadi. Ba’zi hollarda esa $\{S_k,k\geq 0\}$ ketma-ketlik tasodifiy “daydish” deb ham ataladi.

“Tiklanish jarayoni” termini tasodifiy funksiya $\eta(t)$ va $\{S_k;k\geq 0\}$ ketma-ketlik elementlarini almashtirib turish kerak bo‘lgan qandaydir fizik qurilmalarning ish jarayonini o‘rganishda foydalanish mumkin ekanligi bilan bog‘liq. Masalan, agar ξ_j biror uskunaning uzluksiz ishlash muddati bo‘lib, undan keyin uni almashtirish yoki remont qilish kerak bo‘lsa (“tiklash”), S_k vaqt uskunaning $k-$ “tiklanishi” momenti bo‘ladi. Agar $S_0=0$ vaqt ham shartli ravishda “tiklanish” momenti deb hisoblansa, $\eta(t)$ tasodifiy miqdor $[0,t]$ oraliqda o‘tkazilgan “tiklanishlar” soni bo‘ladi.

“Tiklanishlar” jarayoni ehtimolliklar nazariyasining chegaraviy masalalarini yechishda, ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi, moliyaviy va aktuar matematikaning dolzarb masalalarini hal etishda ko‘p qo‘llaniladi.

Ta’rif 2. Quyidagi

$$H(t)=E\eta(t),\ t\geq 0$$

tenglik bilan aniqlangan funksiya

$$S_0,\ S_1,\ ...,S_n,...$$

ketma-ketlikning tiklanish funksiyasi deb ataladi.

Ko‘p adabiyotlarda tiklanish funksiyasiga boshqacha ta’rif beriladi.

Ta’rif 3. Ketma-ketlik $\{S_k,k\geq 1\}$ ning tiklanish funksiyasi

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}P(S_j\leq t)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar $\xi_j \geq 0$ bo'lsa, keltirilgan ta'riflar teng kuchli bo'ladi. Haqiqatan ham

$$\nu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} I(S_j \leq t), \quad I(A) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \omega \in A, \\ 0, & \text{агар } \omega \overline{\in} A \end{cases}$$

tasodifiy miqdorga e'tibor qilamiz. Bu tasodifiy miqdor $\nu(t), \{S_j, j \geq 0\}$ ketma-ketlik trayektoriyasining $[0,t]$ oralig'idagi o'tkazgan vaqti va u $\xi_j \geq 0$ bo'lganda $[0,t]$ oralig'idagi tiklanishlar soniga teng, ya'ni $\nu(t) = \eta(t)$.

Yuqorida keltirilgan $H(t)$ va $U(t)$ funksiyalar o'ngdan uzluksiz bo'ladi. Ko'pgina adabiyotlarda tiklanish funksiyasining quyidagi chapdan uzluksiz variantlari ham ko'riladi:

$$H(t-0) = E\min\{k; S_k \leq t\}, \quad U(t-0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(S_j < t).$$

Agar ξ_j lar bir xil taqsimlangan bo'lib, $F^{*k}(t)$ taqsimot funksiyasi $F(t) = P(\xi_j < t)$ ning $k-$ nchi tartibli kompozitsiyasi bo'lsa, chapdan uzluksiz bo'lgan ikkinchi funksiyani $\sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(t)$ $(F^0 = E_0 - 0$ nuqtada joylashgan birlik taqsimot) ko'rinishda yozish mumkin.

Tiklanish funksiyasini qo'llab yechiladigan masalalar nuqtayi nazaridan qanday uzluksizlik variantini tanlashning ahamiyati bo'lmaydi.

Teorema 1. (Integral tiklanish teoremasi). Tasodifiy miqdor ξ_i lar bir xil taqsimlangan va $E\xi_j = a > 0$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a}.$$

Agar $a = \infty$ bo'lsa, $\frac{1}{\infty} = 0$ deb tushuniladi. Endi tiklanish jarayonlari uchun katta sonlar qonuni va Markaziy limit teoremaning o'rinli bo'lish masalalarini o'rganamiz.

Aytaylik, soddalik uchun (1) ketma-ketlikdagi tasodifiy miqdorlar manfiy qiymatlar qabul qilmasin. $(P(\xi_i \leq 0) = 1)$.

Teorema 2. Agar $0 < E\xi_i = a < \infty$ bo'lsa, (2) tiklanish jarayoni $\eta(t)$ uchun

$$\frac{\eta(t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{a}, \quad t \to \infty.$$

Isbot. Tiklanish jarayoni $\eta(t)$ va uni tashkil qiluvchi

$$\{S_k = \xi_1 + ... + \xi_k, k \geq 1\}$$

ketma-ketlik orasida juda ham muhim bo'lgan

$$\{\eta(t) > k\} = \{S_k \leq t\}, \; t \geq 0 \tag{4}$$

munosabat mavjud. Quyidagi

$$P\left(\frac{\eta(t)}{t} - \frac{1}{a} > \varepsilon\right) = P\left(\eta(t) > \frac{t}{a} + \varepsilon t\right),$$

tenglikdan foydalanib va soddalik uchun $N = t/a + \varepsilon t$ ifodani butun son deb hisoblab, (4) tenglikka asosan,

$$P\left(\frac{\eta(t)}{t} - \frac{1}{a} > \varepsilon\right) = P\left(S_N \leq \frac{N}{1/a + \varepsilon}\right) = P\left(\frac{S_N}{N} \leq a - \varepsilon_1\right)$$

tengliklarni yoza olamiz va bu yerda:

$$\varepsilon_1 = a\left(1 - \frac{1}{1 + a\varepsilon}\right) > 0.$$

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli bo'lgan katta sonlar qonunini qo'llab

$$P\left(\frac{S_N}{N} \leq a - \varepsilon_1\right) = P\left(\frac{S_N}{N} < \frac{a}{1 + a\varepsilon}\right) \to 0$$

limit munosabatni olamiz. Demak,

$$P\left(\frac{\eta(t)}{t} - \frac{1}{a} < \varepsilon\right) \to 0, \; t \to \infty, \; \forall \varepsilon > 0.$$

Xuddi shunga o'xshash ravishda,

$$P\left(\frac{\eta(t)}{t} - \frac{1}{a} < -\varepsilon\right) \to 0, \; t \to \infty$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Keltirilgan teoremaning isbotida $N = t/a + \varepsilon t$ ifodani butun son deb hisoblangan edi. Agar bu ifoda butun son bo'lmasa, N ni $N_t = [t/a + \varepsilon t]$ bilan almashtirish yetarli bo'lar edi.

Izoh. A.A.Borovkovning ("Теория вероятностей", M. УРСУ, 2000, kitobida 10 bob, paragraf 3)

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{1\,\text{эхт}} a, \; n \to \infty,$$

katta sonlar qonuni isbot etilgan. Agar shu natijadan foydalansak,

$$\frac{\eta_t}{t} \xrightarrow{1\,\text{эхт}} 1/a, \; t \to \infty$$

katta sonlar qonuni isbotlash mumkin. Quyidagi teoremada tiklanish jarayonlari uchun Markaziy Limit Teorema keltiriladi.

Teorema 3. Agar $E\xi_1 = a, \; D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$ bo'lsa,

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{\eta(t) - t/a}{\sqrt{t\sigma^2/a^3}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du .$$

Isbot. Yuqoridagi (4) tenglikka asosan,

$$P(\eta(t) > k) = P\left(\frac{S_k - ak}{\sigma\sqrt{k}} \le \frac{t - ak}{\sigma\sqrt{k}}\right) \tag{5}$$

tenglikka ega bo'lmiz. Klassik Levi teoremasiga (5) tenglikning o'ng tomoniga markaziy limit teoremani qo'llash mumkin. Demak,

$$P\left(\frac{S_k - ak}{\sigma\sqrt{k}} < u\right) \to \Phi(u), \; k \to \infty .$$

Endi $t \to \infty$ da k shunday o'zgarsinki,

$$u = \frac{t - ak}{\sigma\sqrt{k}},$$

chegaralangan miqdor bo'lsin. Bu miqdorni fiksirlangan deb hisoblab, oxirgi tenglikdan k ni topamiz ($\sqrt{k}$ ga nisbatan kvadrat tenglamani yechib):

$$k = \frac{t}{a} + \frac{u\sigma\left(u\sigma \pm 2\sqrt{at}\sqrt{1 + \left(u^2\sigma^2\right)/4(at)}\right)}{2a^2} = \frac{t}{a} + \frac{u\sigma}{a^2}\left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) .$$

Topilgan k ning qiymatini (5) ga qo'ysak, $t \to \infty$ da,

$$P(\eta(t) > k) = P\left(\frac{\eta(t) - t/a}{\left(\sigma\sqrt{t}\right)/\left(a^{3/2}\right)} \ge \pm u + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \to \Phi(u) \tag{6}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Oxirgi munosabatni tahlili ko'rsatadiki, unda minus ishorasini qoldirish kerak bo'ladi, chunki faqat shu holdagina (6) ning har ikki tomonida u ga nisbatan o'suvchi funksiyalar turadi.

Normal taqsimot funksiya $\Phi(u)$ uzluksiz ekanligidan, (6) munosabatni

$$P\left(\frac{\eta(t)-t/a}{\left(\sigma\sqrt{t}\right)/\left(a^{3/2}\right)}>-u\right)\to\Phi(u)=1-\Phi(-u),$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $t\to\infty$ da,

$$P\left(\frac{\eta(t)-t/a}{\left(\sigma\sqrt{t}\right)\left(a^{3/2}\right)}\le u\right)\to\Phi(u).$$

Teorema 3 isbot etildi.

5.5. Sparre Andersen risk jarayonlari (Klassik risk jarayoni)

Kompaniyaning sug'urta faoliyati davomidagi rezerv fondini ko'ramiz. U boshlang'ich kapital va har bir $[0,t]$vaqt oralig'ida tuzilgan har bir shartnoma bo'yicha mijozlardan yig'ilgan sug'urta premiyalardan, shu oraliqda ro'y bergan sug'urta hodisalari bo'yicha yig'indi sug'urta to'lovlari ayirmasidan iborat bo'ladi. Aytaylik, ξ_i – i – mijozning sug'urta badali (premiyasi) bo'lsin. Bu holda sug'urta kompaniyasining $[0,t]$oraliqdagi daromadi

$$R_+(t)=\sum_{i=1}^{N_+(t)}\xi_i$$

bo'lib, bu yerda $N_+(t)$ – $[0,t]$ oraliqda tuzilgan shartnomalar ketma-ketliklari

$$T_i,\ X_i,\ i=1,2,\ldots,$$

mos ravishda sug'urta to'lovlari yuzaga kelgan (sug'urta hodisalari ro'y bergan) momentlar, sug'urta to'lovlari miqdorlari (hammalari) bo'lsin $(0\le T_1\le T_2\le\ldots)$. Bu holda sug'urta kompaniyasining $[0,t]$vaqt oralig'idagi talofatlari

$$R_-(t)=\sum_{i=1}^{N_-(t)}X_i$$

yig'indini tashkil qiladi. Demak, sug'urta kompaniyasining rezerv fondining t momentdagi "dinamik komponenti"

$$R_d(t)=R_+(t)-R_-(t)=\sum_{i=1}^{N_+(t)}\xi_i-\sum_{i=1}^{N_-(t)}X_i\,. \qquad (1)$$

Sug'urta kompaniyasining boshlang'ich kapitalini u bilan belgilaylik.

Ta'rif 1. Risk jarayoni deb,

$$R(t) = u + R_d(t)$$

ifodaga aytiladi. Bu yerda $R_d(t)$ yuqoridagi (1) formula bilan aniqlanadi. Sug'urta kompaniyasining kasod bo'lish momenti

$$\tau = \inf\{t; R(t) < 0\}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

R_+; R_- jarayonlar va T_i, X_i $(i \geq 1)$ miqdorlar tasodifiy bo'lganlari uchun, risk jarayon $R(t)$ va kasodlikga uchrash momenti τ lar ham tasodifiy bo'ladi. Amaliyot bilan bog'liq masalalarda tasodifiy miqdor τ ni $P(\tau < \infty) < 1$ tengsizlik bajarilishi ma'nosida xosmas deb hisoblashga to'g'ri keladi.

Ta'rif 2. Quyidagi

$$\psi(u) = P(\tau < \infty / R(0) = u)$$

tenglik bilan aniqlangan shartli ehtimollik cheksiz vaqt davomida "kasod bo'lishlik" ehtimolligi deb ataladi. Aytaylik, $t \geq 0$ bo'lsin. Quyidagi:

$$\psi(t,u) = P(\tau \leq t / R(0) = u)$$

tenglik bilan aniqlangan shartli ehtimollik chekli $[0,t]$ oraliqda "kasod bo'lishlik" ehtimolligi deb ataladi.

Keltirilgan ta'rifdagi shartli ehtimolliklarda boshlang'ich kapital $R(0) = u$ deb hisoblanishni qayd qilib o'tamiz. Ba'zi hollarda

$$\Phi(u) = 1 - \psi(u), \; u > 0$$

"kasod bo'lmaslik" ehtimolligidan foydalanish qulay bo'ladi ($u < 0$ bo'lganda $\Phi(u) = 0$ deb hisoblanadi).

Formula (1) bilan aniqlangan modelda bitta jiddiy kamchilik mavjud: undagi $R_+(t)$ va $R_-(t)$ tasodifiy jarayonlar bog'liqsiz bo'lmaydi, chunki har doim $N_-(t) \leq N_+(t)$ tengsizlik bajarilishi kerak (aks holda $[0,t]$ oraliqda sug'urta to'lovlari soni, shu oraliqdagi premiyalar (shartnomalar) sonidan ko'p bo'lib, sug'urta faoliyatining ma'nosi bo'lmaydi). Haqiqatan ham, sug'urta shartnomasi tuzilishi va shu shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovi voqealari ro'y berish vaqtlari orasida ma'lum muddat o'tishi kerak.

Model (1) ni soddalashtirish uchun, undagi $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlarni o'zaro bog'liqsiz va $N_+(t)$ jarayon bilan esa birgalikda bog‘liqsiz deb hisoblab, ular bir xil taqsimlangan va o‘rta qimmat $b = E\xi_i$ mavjudligi faraz etiladi. Eng sodda holda tasodifiy jarayon $N_+(t)$ - oddiy bir jinsli va $\lambda_+ > 0$ intensivlikka ega bo‘lgan Puasson jarayoni deb qabul qilinadi, ya’ni

$$P(N_+(t) = k) = \frac{(\lambda_+ t)^2}{k!} e^{-\lambda_+ t}, \quad k = 0,1,\dots .$$

Bu holda Vald ayniyatiga asosan,

$$ER_+(t) = E\left[\sum_{i=1}^{N_+(t)} \psi_i\right] = b\lambda_+ t, \quad t \geq 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bulardan tashqari, ξ_i tasodifiy miqdorning o‘rta qiymat b atrofidagi tarqoqligi (ya’ni $D\xi_i$) yetarli darajada kichik bo‘lganda, sug‘urta kompaniyasining daromadini ifodalaydigan zinapoyasimon ko‘rinishdagi $R_+(t)$ jarayonni, uning chiziqli funksiyadan iborat bo‘lgan o‘rta qiymat bilan approksimatsiyalash mumkin, ya’ni

$$R_+(t) \approx ER_+(t) = ct, \quad c = b\lambda_+ .$$

Oxirgi mulohazalar Ehtimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuniga asoslanishini eslatib o‘tish mumkin. Endi va bundan so‘ng tasodifiy miqdorlar X_i lar o‘zaro bog‘liqsiz va $N_-(t)$ jarayondan bog‘liqsiz deb, ya’ni

$$N_-(t), X_1, \dots, X_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar sistemasini birgalikda bog‘liqsizligi faraz etiladi. Bulardan tashqari, X_i tasodifiy miqdorlar umumiy $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega deb hisoblanadi. Sug‘urta kompaniyasining talofatini (ziyonini) ifoda qiladigan tasodifiy jarayon $N_-(t)$ esa “tiklanishlar” jarayoni deb, ya’ni

$$\theta_i = T_i - T_{i-1}, \quad i = 1,2,\dots$$

tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz va bir xil taqsimlanganligi talab qilinadi. Bunda o‘rta qiymatlar $EX_1 = \mu < \infty$, $E\theta_1 = \alpha < \infty$ mavjud bo‘lishligi shartlari qabul qilinadi.

Model (1) uchun keltirilgan soddalashtiruvchi shartlarni hisobga olgan holda quyidagi modelga kelamiz.

Ta’rif 3. Sparre Andersenning risk jarayoni deb

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \ t \ge 0$$

ko‘rinishidagi tasodifiy jarayonga aytiladi.

Bunda $c \ge 0$, $N(t)$ – “tiklanishlar” jarayoni, $X_1, X_2, \ldots$ – bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar jarayonga bog‘liq bo‘lmasdan, ularning taqsimot funksiyasi $F(x), F(0)=0$ shartni qanoatlantiradi.

Ta’rif 4. Quyidagi

$$\rho = \frac{c\alpha - \mu}{\mu} = \frac{c\alpha}{\mu} - 1,$$

miqdor xavfsizlik koeffitsiyenti deb ataladi.

Ko‘p hollarda ρ ni xavfsizlik yuklamasi deb ham atashadi (aslida uni nisbiy xavfsizlik yuklamasi deb atash to‘g‘riroq bo‘ladi, chunki uni sug‘urta kompaniyasining birlik vaqt davomidagi “daromadi” sifatida qabul qilish mumkin).

Ta’rif 5. Sparre Andersenning risk jarayoni klassik risk jarayoni deb ataladi, agar unda $N(t)$ – intensivligi $\lambda > 0$ bo‘lgan Puasson jarayoni bo‘lsa.

Klassik risk jarayoni uchun xavfsizlik yuklamasi

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

Sparre Andersen risk jarayoni $R(t)$ uchun

$$ER(t) = u + (c - \mu / \alpha)t$$

tenglik o‘rinli ekanligiga ishonish qiyin bo‘lmaydi. Shuning uchun ham, agar $c\alpha < \mu$ (bu esa xavfsizlik yuklamasining manfiy son bo‘lishiga mos keladi) bo‘lsa, sug‘urta rezerv fondining o‘rtacha qiymati t ga nisbatan chiziqli funksiya ko‘rinishida o‘sadi. Bu holda boshlang‘ich kapital u ning har qanday qiymatida “kasodlik” ehtimolligi $\psi(u) = 1$ ekanligini isbotlash mumkin.

VI bob. KASODLIK EHTIMOLLIKLARI

Eslatib o'tamizki, sug'urtaning dinamik (kollektiv risk) modelidagi risk jarayoni

$$R(t) = u + P(t) - S(t),\ P(0) = S(0) = 0,$$

ko'rinishda bo'lib, bu yerda u–boshlang'ich kapital, $P(t)$–sug'urta premiyalari shakllanishi jarayoni, $S(t)$–sug'urta to'lovlari jarayoni ($R(0) = u$).

Quyidagi:

$$\tau = \inf\{t;\ R(t) < 0\}$$

miqdor sug'urta kompaniyasining kasodga uchrash momenti va

$$\psi(u) = P(\tau < \infty / R(0) = u)$$

cheksiz oraliq davomida kasodlik ehtimolligi deb ataladi. Agar $t \geq 0$ bo'lsa,

$$\psi(t,\ u) = P(\tau \leq t / R(0) = u)$$

miqdor sug'urta kompaniyasining $[0, t]$ oralig'ida kasod bo'lishlik ehtimolligi deb ataladi. Bunda $R(0) = u$ tenglik sug'urta kompaniyasining boshlang'ich kapitali u ga tengligini anglatadi.

6.1. Sug'urta kompaniyasi kasodligining dinamik modeli

Sug'urta faoliyatining dinamik modellari individual risk (statik) sxemalardan, ularda hodisalar vaqtga nisbatan bog'liq holda o'zgarishi bilan farq qiladi. Dinamik modellarining sodda ko'rinish hollarida faqat ikkita jarayon hisobga olinadi xolos: premiyalar to'lanishi jarayoni va sug'urta to'lovi jarayoni. Bu ikkita jarayon har xil vaqt masshtabida ro'y beradi va ular turli masshtablarda o'lchanadi.

Haqiqatan ham, premiyalar to'lash hodisalari, sug'urta to'lovini amalga oshiradigan hodisalarga nisbatan tez-tez ro'y beradi va premiya to'lovi miqdori, sug'urta to'lovi miqdoridan ancha kam bo'ladi. Shuning uchun ham, agar asosiy jarayon sifatida sug'urta to'lovi tushunilsa, premiyalar yig'ish jarayonini tasodifiy bo'lmagan uzluksiz hodisalar oqimi deb tushunish mumkin bo'ladi.

Ko'p hollarda premiyalar tushimi (yig'ish) jarayonini yagona parametr c- premiya tushim tezligi (intensivligi) bilan aniqlanadi deb hisoblasak bo'ladi. Bu fikrni quyidagicha sharhlab o'tish mumkin: agar qandaydir t vaqt momentida sug'urta kompaniyasining rezerv fondi U_t bo'lib, $t+n$ momentgacha qadar hech qanday sug'urta to'lovi ro'y bermasa, kompaniyasining $t+n$ momentdagi rezerv fondi $U_{t+n} = U_t + ch$ miqdorni tashkil qiladi, ya'ni

$$\frac{U_{t+n} - U_t}{n} = c$$

tenglik bajariladi.

Odatda, (ko'p hollarda) sug'urta to'lovi jarayonini oddiy Puasson jarayoni deb qabul qilinadi. Bu esa jarayonning statsionarlik, ordinarlik, orttirmalari bog'liqsiz tasodifiy miqdor bo'llshi xossalari bilan teng kuchli bo'ladi.

Agar T_n bilan n- sug'urta to'lovining ro'y berishi momentini belgilasak,

$$\tau_n = T_n - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar n- va $n-1$- to'lov momentlari orasidagi interval uzunligini anglatadi. Sug'urta to'lovi jarayoni parametri λ bo'lgan Puasson jarayoni bo'lsa,

$$P(\tau_n < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

ya'ni $\tau_1, \tau_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, umumiy ko'rsatkichli taqsimot funksiyasiga ega bo'ladi.

Ketma-ket ro'y beradigan sug'urta to'lovlarini $Y_1, Y_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar deb belgilaymiz va ularni sug'urta to'lovlari momentlarini $T_1, T_2, \ldots$ lardan va o'zaro bog'liqsiz deb hisoblaymiz. Bulardan tashqari $Y_1, Y_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar umumiy $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega deb hisoblanadi.

Endi sug'urta kompaniyasining rezerv fondining o'zgarishini quyidagicha ifoda etish mumkin: $t = 0$ momentda kompaniya boshlang'ich $u_0 = u$ kapitalga ega, $T_1 = \tau_1$ birinchi to'lov momentida kapital $u+c\tau_1$ miqdorgacha o'sadi (premiyalar tushishi hisobiga). Lekin T_1 momentda kompaniya Y_1 miqdorda sug'urta to'lovi o'tkazadi va rezerv fondi $u+c\tau_1-Y_1$ miqdorga kamayadi. Ikkinchi sug'urta to'lovi moment T_2 ga qadar rezerv fondi $c(T_2-T_1)=c\tau_2$ miqdorga o'sadi va

$$u+c\tau_1-Y_1+c\tau_2=u+c(\tau_1+\tau_2)-Y_1$$

miqdorga teng bo'ladi.

Umuman, sug'urta rezerv fondining T_n momentdagi kapitali

$$u+cT_n-(Y_1+...+Y_n)\geq 0,\ n=1,2,...$$

miqdor bilan ifoda etiladi.

Agar

$$u+c\tau_1-Y_1\geq 0,$$
$$u+c(\tau_1+\tau_2)-(Y_1+Y_2)\geq 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u+c(\tau_1+\tau_{n-1})-(Y_1+...+Y_{n-1})\geq 0$$

tengsizliklar bajarilib,

$$u+c(\tau_1+\tau_n)-(Y_1+...+Y_n)<0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, n - sug'urta to'lovi o'tkazilgan T_n momentda sug'urta kompaniyasi kasodga uchradi deb hisoblanadi.

Aniqlangan dinamik modelning asosiy xarakteristikasi bo'lib, rezerv fondi miqdori

$$R_n(u)=u+c(\tau_1+\tau_n)-(Y_1+...+Y_n)$$

hisoblanadi. Bu model uchun asosiy masala sifatida

$$\psi(u)=\min\{n\geq 1,\ R_n(u)<0\}$$

kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ ning xossalarini o'rganish hisoblanadi.

Keyingi yozuvlarni soddalashtirish uchun, kasodlikka olib kelgan sug'urta to'lovi nomeri $\mu=\mu(\omega)$ tasodifiy miqdorni kiritamiz. Bu tasodifiy miqdor orqali kompaniyaning hech qachon kasod bo'lmaslik ehtimolligi $\{\mu=\infty\}$ hodisaning ehtimolligiga teng ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Kasodlik ehtimolligi esa

$$\psi(u)=P(\mu<\infty)=1-P(\mu=\infty)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Endi

$$m=EY_1=EY_2=...$$

belgilashni kiritib,

$$c > \lambda m$$

shart bajarilgan deb hisoblaymiz. Bu shartni quyidagicha sharhlash mumkin: birlik vaqt oralig'ida o'rtacha λ sug'urta to'lovlari yuzaga kelib, ular o'rtacha λm miqdordagi sug'urta to'loviga olib keladi. Boshqa tomondan, shu vaqt davomida sug'urta kompaniyasi premiyalar ko'rinishida

$$c = (1+\theta)\lambda m$$

miqdordagi pulni qabul qiladi. Bu yerda θ-kompaniya belgilaydigan sug'urta yuklamasi.

6.2. Momentlar hosil qiluvchi funksiya. Xarakteristik koeffitsiyent

Tasodifiy miqdor X ning momentlar hosil qiluvchi funksiyasi deb

$$E(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} dF(x), \quad t \in R$$

integralga aytiladi. Bu yerda $F(x) = P(X < x)$ tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasi bo'lib, y $F(+0) = 0$ shartni qanoatlantiradi, ya'ni mos tasodifiy miqdor X uchun $P(X \geq 0) = 1$ deb hisoblanadi.

Qayd qilib o'tamizki, $E(t)$ integral uchun Abel teoremasi o'rinli bo'ladi: agar integral $E(t)$ biror $t = t_0 > 0$ nuqtada yaqinlashsa, u $-t_0 \leq t < t_0$ oraliqda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $F(x)$ taqsimot funksiyasining Laplas almashtirishi

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$$

bo'lsa,

$$E(t) = Ee^{tx} = \varphi(-t) = \int_0^{\infty} e^{tx} dF(x) \qquad (1)$$

tengliklardan ko'rinadiki, $E(t)$ funksiya $t \leq 0$ qiymatlarda ham aniqlangan bo'ladi. Demak, X ni sug'urta to'lovi miqdori deb tushunsak, $E(t)$ funksiya sug'urta to'lovining ($-t$) nuqtadagi Laplas almashtirishini ifoda etar ekan. Sug'urta to'lovi taqsimotlarining ko'pchiligi uchun $E(t)$ funksiya $t \in (0, \infty)$ oraliqning biror nuqtasida ham aniqlanmagan bo'lishi mumkin. Masalan, $F(x)$ taqsimotning zichlik funksiyasi $p(x)$ bo'lsa, (1) tenglikning o'ng tomonidagi integral

$$e^{tx}p(x)\to 0,\quad p(x)=o\left(e^{-tx}\right),\ x\to\infty$$

munosabat bajarilgandagina yaqinlashadi. Misol sifatida, Aktuar matematikada ko'p qo'llaniladigan Pareto taqsimotini ko'rish mumkin. Eslatib o'tamizki, tasodifiy miqdor X Pareto taqsimotiga ega deyiladi, agar uning zichligi funksiyasi

$$p(x)=\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1},\quad \min(\alpha,\lambda)>0,\ x\in(0,\infty)$$

tenglik bilan aniqlansa. Bu taqsimot uchun

$$p(x)e^{tx}\to\infty,\ t>0,\ x\to\infty.$$

Aytilgan fikrlarni hisobga olgan holda, biz kelgusida faqat biror $t>0$ nuqtada $E(t)$ funksiya mavjud bo'lgan sug'urta to'lovi taqsimotlari ko'riladi xolos (bu shart Kramer sharti deb ataladi). Bu shart bajarilganda mos $F(x)$ taqsimot funksiyaning hamma momentlari mavjud bo'ladi va ular uchun:

$$EX^k=\int_0^\infty x^k dF(x)=(-1)^k\varphi^{(k)}(0),\ k\geq 1$$

formula o'rinli bo'ladi. Demak, bu formulani hisobga olgan holda

$$Ee^{tx}=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Ex^k}{k!}t^k$$

tengliklarni yoza olamiz va ulardan $E(t)$ funksiya

$$\frac{EX}{1},\frac{EX^2}{2!},\dots,\frac{EX^n}{n!},\dots$$

ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli $E(t)$ funksiyani momentlar hosil qiluvchi funksiya deb ataladi.

O'z-o'zidan ravshanki, $0<t_1<t_2$ bo'lganda, $e^{t_1x}\leq e^{t_2x}$ tengsizlik bajariladi. Demak, Ee^{t_2x} mavjud bo'lishidan Ee^{t_1x} chekli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $E(t)$ funksiyani mavjudlik sohasi $(-\infty,t^*)$ yoki $(-\infty,t^*]$ ko'rinishidagi to'plam bo'ladi (yaqinlashish abssissasi t^* Kramer shartiga asosan musbat son bo'lib, $t^*\in(0,\infty]$).

Masalan, $p(x)=\beta e^{-\beta x}$ – parametri $\beta>0$ bo'lgan eksponensial taqsimot bo'lsa, funksiya $E(t)$ argument $t<\beta$ bo'lganda mavjud va

$$E(t)=\frac{\beta}{\beta-t}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar sug'urta to'lovi X chegaralangan tasodifiy miqdor bo'lsa ($X\le const$),

$$E(t)=Ee^{tX}<\infty,\quad t\in(-\infty;\infty).$$

Ko'p hollarda $F(x)=P(X<x)$ taqsimotlar uchun momentlar hosil qiluvchi $E(t)$ funksiyaning aniqlanish sohasi o'ngdan yopiq bo'lgan $(-\infty,t^*]$ oraliqdan iborat bo'ladi. Faraz qilaylik, $G(x)$ taqsimot uchun uning Laplas-Stiltes almashtirishi $\varphi_G(s)$ faqat $s\ge 0$ qiymatlardagina aniqlangan bo'lsin (masalan, Pareto taqsimoti). Quyidagi:

$$F(x)=\frac{1}{\varphi_G(t^*)}\int_0^x e^{-t^*y}dG(y),\quad x>0$$

funksiyani ko'raylik. Bu funksiya taqsimot funksiyasining hamma xossalarini qanoatlantiradi, ya'ni u manfiy emas, o'suvchi, o'ngdan uzluksiz ($F(+0)=0$) va $F(+\infty)=1$. Demak, $F(x)$ taqsimot funksiyasi bo'lar ekan. Uning Laplas-Stiltes almashtirishi

$$\varphi_F(t)=\int_0^\infty e^{-ts}dF(s)=\frac{1}{\varphi_G(t^*)}\int_0^\infty e^{-(s+t^*)y}dG(y)=\frac{\varphi_G(s+t^*)}{\varphi_G(t^*)}.$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, $\varphi_F(t)$ funksiya $t+t^*\ge 0$, ya'ni $t\ge -t^*$ qiymatlarda aniqlangan. Mos momentlar hosil qiluvchi funksiya $E_F(t)$argumentning $t\le t^*$ qiymatlarida, ya'ni $(-\infty,t^*]$oraliqda aniqlangan.

Agar momentlar hosil qiluvchi funksiya $E(t)$ ochiq $(-\infty,t^*)$ oraliqda mavjud bo'lsa,

$$\lim_{t\to t^*}E(t)=\infty,$$

chunki aks holda, mashhur Levi teoremasiga asosan $E\exp(t^*x)<\infty$ munosabat bajarilgan bo'lar edi. Bu holda $t^*=\infty$ bo'lsa (ya'ni $E(t)$ to'g'ri chiziq R da mavjud),

$$E(t)\ge 1+tEX+t^2EX^2/2,\quad t\in R$$

tengsizlikdan $E(t)$ funksiyaning har qanday chiziqli funksiyaga nisbatan tezroq o'sishi kellb chiqadi.

Agar momentlar hosil qiluvchi $E(t)$ funksiyaning aniqlanish sohasi o'ngdan yopiq $(-\infty,t^*]$ oralıqdan iborat bo'lsa, Lebeg teoremasiga asosan,

$$\lim_{t\to t^*} E(t)=E(t^*)<\infty$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Har qanday t uchun

$$E'(t)=E(Xe^{tX})\geq 0,$$

$$E''(t)=E(X^2e^{tX})\geq 0$$

tengsizliklar bajarilgani uchun, $E(t)$ funksiya monoton o'suvchi va uning grafigi pastga qavariq bo'ladi. Bundan tashqari

$$E(0)=1,\quad E'(0)=m<(1+\theta)m.$$

Demak, $E(t)$ funksiyaning grafigi $(0,1)$ nuqtadan, $y=1+(1+\theta)mt$ to'g'ri chiziqga nisbatan kichikroq burchak ostidan chiqadi.

Agar $E(t)$ funksiya ochiq $(-\infty,t^*)$ oraliqda aniqlangan bo'lsa, yuqorida aytilganlardan kelib chiqadiki, $E(t)$ funksiya va $y=1+(1+\theta)mt$ to'g'ri chiziqning grafiklari $t>0$ bo'lganda, yagona bitta nuqtada kesishadi – shu kesishish nuqtasining abssissasi xarakteristik koeffitsiyent deb ataladi. Demak, xarakteristik koeffitsiyent

$$E(t)=Ee^{tX}=1+(1+\theta)mt \tag{2}$$

tenglamaning yechimi bo'lar ekan.

Agar $E(t)$ funksiyaning aniqlanish sohasi- o'ngdan yopiq $(-\infty,t^*]$ oraliq bo'lsa, xarakteristik koeffitsiyent

$$E(t^*)\geq 1+(1+\theta)mt^*$$

tengsizlik bajarilgandagina (faqat shu holdagina) mavjud bo'ladi.

Keltirilgan va umumiyroq xarakterda bo'lgan mulohazalarni konkret sug'urta risk taqsimotlarida namoyish etaylik.

Masala 1. Sug'urta risk taqsimoti parametri $\beta=\frac{1}{m}$ bo'lgan eksponensial zichlik funksiyasiga ega bo'lsin. Bu riskning xarakteristik koeffitsiyenti topilsin.

Yechish. Eksponensial taqsimot uchun zichlik funksiya

$$p(x)=\beta e^{-\beta x},\quad x\geq 0.$$

Demak, bu taqsimotning momentlar hosil qiluvchi funksiyasi

$$E(t)=Ee^{tx}=\beta\int_0^{\infty}e^{tx}e^{-\beta x}dx=\beta\int_0^{\infty}e^{-(\beta-t)x}dx=\frac{\beta}{\beta-t},\ t<\beta.$$

Bu funksiya $(-\infty,\beta)$ oraliqda aniqlangan. Masalaning sharti bo'yicha $\beta=\frac{1}{m}$ va uni hisobga olgan holda

$$E(t)=\frac{1}{1-mt},\ t<\frac{1}{m}$$

tenglikni olamiz. Demak, xarakteristik tenglama (2) quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{1}{1-mt}=1+(1+\theta)mt,$$

ya'ni

$$(1+\theta)m^2t^2-\theta mt=0.$$

Oxirgi tenglama trivial yechim $t=0$ va yagona musbat

$$t_0=\frac{\theta}{(1+\theta)m}<\frac{1}{m}$$

yechimga ega bo'ladi. Shu yechim xarakteristik koeffitsiyent bo'ladi.

Masala 2. Agar sug'urta riski $[0,2m]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsa, xarakteristik koeffitsiyent topilsin.

Yechish. Berilgan tekis taqsimot uchun

$$E(t)=\int_0^{2m}e^{tx}\frac{1}{2m}dx=\frac{e^{tx}}{2mt}\Big|_{x=0}^{2m}=\frac{e^{2mt}-1}{2mt}.$$

Bu holda (2) tenglama

$$\frac{e^{2mt}-1}{2mt}=1+(1+\theta)mt,$$

ya'ni

$$e^{2mt}=2(1+\theta)(mt)^2+2mt+1.$$

Oxirgi tenglikdan xarakteristik koeffitsiyent $r=r(\theta,m)$ nisbiy sug'urta yuklamasi θ va sug'urta riskning o'rta qiymati m ga bog'liq bo'ladi. Bevosita tekshirib ko'rish mumkin bo'ladiki,

$$r(\theta,m)=\frac{r(\theta,1)}{m}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Koeffitsiyent $r(\theta,1)$ uchun ancha sodda bo'lgan

$$e^{2y}=2(1+\theta)y^2+2y+1$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning analitik yechimini topib bo'lmaydi. Lekin uning sonli yechimini hisoblash katta qiyinchiliklarga uchramaydi. Buning uchun birinchi navbatda, xarakteristik koeffitsiyentni qanday oraliqda bo'lishini aniqlaymiz. Shu maqsadda,

$$e^{2y} > 1 + 2y + 2y^2 + 4y^3/3$$

tengsizlikka e'tibor beramiz. Unga asoslanib,

$$F(y) = e^{2y} - 2(1+\theta)y^2 - 2y - 1 > \frac{4}{3}y^3 - 2\theta y^2 = \frac{4}{3}y^2\left(y - \frac{3}{2}\theta\right).$$

tengsizlikni yoza olamiz. Bu tengsizlikning o'ng tomoni $y = \frac{3}{2}\theta$ bo'lganda nolga aylanadi. Demak, bu tengsizlikning o'ng tomonini nolga tenglaydigan nuqta $\frac{3}{2}\theta$ dan chaproq tomonda , ya'ni $(0, \frac{3}{2}\theta)$ oraliqda yotadi va xarakteristik koeffitsiyent $r < \frac{3}{2}\theta$. Endi $(0, \frac{3}{2}\theta)$ oraliqni teng ikkiga bo'lib, so'ng hosil bo'lgan teng bo'laklarni, yana teng bo'laklarga bo'lishni davom ettirib, $F(y)$ ifodani nolga tenglaydigan $y = r$ nuqtaga xohlagan aniqlik bilan yaqinlashish mumkin.

6.3. Kasodlik ehtimolligi uchun Lundberg tengsizligining diskret varianti

Oldingi paragrafda kasodlikka olib keladigan sug'urta to'lovining nomerini ifoda etadigan tasodifiy miqdor μ va rezerv fondi miqdori

$$R_n(u) = u + c(\tau_1 + \tau_n) - (Y_1 + ... + Y_n)$$

kiritilgan edi. Bu tasodifiy miqdorlar sug'urta kompaniyasining kasod bo'lishlik ehtimolligini aniqlaydi:

$$\psi(u) = \min\{n \geq 1,\ R_n(u) < 0\} = P(\mu < \infty / R_0(u) = u) = 1 - P(\mu = \infty / R_0(u) = u).$$

Sug'urta kompaniyasining birinchi n sug'urta to'lovi yuzaga kelmasdan oldin kasodlikga uchrash ehtimolligi

$$\psi_n(u) = P(\mu \leq n / R_0(u) = u) = P(\mu \leq n),$$

tenglik bilan aniqlanishi mumkin. Ko'pincha,

$$1 - \psi_n(u) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_1 + ... + Y_n \leq u + c(\tau_1 + ... + \tau_k)\}\right) \qquad (1)$$

ehtimollik, birinchi n sug'urta to'lovlari, kompaniyani kasodlikka olib bormaslik ehtimolligini anglatadi. Ehtimollikning uzluksizlik xossasiga, asosan, kasodlik ehtimolligi

$$\psi(u)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(u)=\lim_{n\to\infty}P(\mu\le n)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{\mu\le k\}\right).$$

Bu tengliklar (1) munosabatda hisobga olingan. To'la ehtimollik formulasiga asosan,

$$1-\psi_n(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}P(x,t)dF(x)dt \qquad (2)$$

va bu yerda

$$P(x,t)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_1+\ldots+Y_k\le u+ct(\tau_1+\ldots+\tau_k)\}/Y_1=x,\ \tau_1=t\right). \qquad (3)$$

Agar $\tau_1=t,\ Y_1=x\in[0,u+ct]$ shartlar bajarilsa, $\{Y_1\le u+c\tau_1\}$-muqarrar hodisa bo'ladi. Shuning uchun ham (3) formuladagi hodisalar ko'paytmasida uni hisobga olmasa bo'ladi. Bundan tashqari $k\ge 2$ bo'lganda,

$$\{Y_1+Y_2+\ldots+Y_k\le u+c(\tau_1+\ldots+\tau_k)\}$$

hodisani

$$\{Y_1'+Y_2'+\ldots+Y_{k-1}'\le u'+c(\tau_1'+\ldots+\tau_{k-1}')\}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $u'=u+ct-x,\ Y_i'=Y_{i+1},\ \tau_i'=\tau_{i+1}$.

Tasodifiy miqdor Y_i,τ_i lar birgalikda bog'liq emasligidan

$$P(x,t)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_1'+\ldots+Y_k'\le u'+c(\tau_1'+\ldots+\tau_k')\}\right)$$

tenglikni yoza olamiz.

Tasodifiy miqdorlar $Y_1,Y_2,\ldots$ bir xil taqsimlangan bo'lgani uchun

$$Y_1',Y_2',\ldots\overset{d}{=}Y_2,Y_3,\ldots$$

ketma-ketlik taqsimot bo'yicha,

$$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n,\ldots$$

ketma-ketlik bilan ustma-ust tushadi. Shu sababli,

$$\tau_1',\tau_2',\ldots\overset{d}{=}\tau_2,\tau_3,\ldots$$

ketma-ketlik taqsimot bo'yicha

$$\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n,\ldots$$

ketma-ketlik bilan ustma-ust tushadi.

Bularni hisobga olib,

$$P(x,t)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_1+\ldots+Y_k\le u'+ct(\tau_1+\ldots+\tau_k)\}\right)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu ehtimollikni (1) formulaning o'ng tomoni bilan taqqoslab,

$$P(x,t)=1-\psi_{n-1}(u')=1-\psi_{n-1}(u+ct-x)$$

tenglikga olib kelamiz. Endi (2) formulani va oxirgi tenglikni hisobga olgan holda

$$1-\psi_n(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}\left(1-\psi_{n-1}(u+ct-x)\right)dF(x)\,dt \qquad (4)$$

tenglama ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. O'z navbatida, bu tenglamani

$$\psi_n(u)=\int_0^{\infty}\left(1-F(u+ct)\right)\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}\psi_{n-1}(u+ct-x)\,dF(x)\,dt \qquad (5)$$

formulada ham ifodalash mumkin. Keltirilgan (4) tenglikning isboti "tiklanish" nazariyasining elementlariga asoslangan va uning g'oyasini quyidagicha tushuntirish mumkin: agar $T_1=\tau_1$ birinchi sug'urta to'lovi yuzaga kelgan momentda kompaniya kasodga uchramasa (ya'ni $Y_1\le u+c\tau_1$ tengsizlik bajarilsa), u yangidan faoliyatini boshlang'ich rezervi $u+c\tau_1-Y$ bo'lgan holda davom ettiraveradi. Shunday qilib, to'lov momentlari $T_1,T_2,\ldots$ lar "regeneratsiya" (qayta tiklanish) nuqtalari bo'ladi.

Oxirgi (5) formuladan va induksiyadan foydalanib,

$$\psi_n(u)\le e^{-ru} \qquad (6)$$

Lundberg tengsizligini isbotlaymiz. Bu yerda r - xarakteristik koeffitsiyent.

Haqiqatan ham $\psi_0(u)=0$ bo'lgani uchun $n=0$ holda (6) tengsizlik bajariladi.

Endi $n=k-1$ da (6) tengsizlik bajariladi deb hisoblaymiz. Bu holda (5) tenglamadan foydalanamiz:

$$\psi_n(u)\le\int_0^{\infty}\left(1-F(u+ct)\right)\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}\exp[-r(u+ct-x)]dF(x)\,dt=$$

$$=e^{-ru}\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}e^{-rct}\left(e^{r(u+ct)}\int_{u+ct}^{\infty}dF(x)+\int_0^{u+ct}e^{rx}dF(x)\right)dt.$$

Integral $\int_{u+ct}^{\infty}dF(x)$ da o'zgaruvchi $x\ge u+ct$ bo'lgani uchun:

$$e^{r(u+ct)}\int_{u+ct}^{\infty}dF(x)\le\int_{u+ct}^{\infty}e^{rx}dF(x)$$

tengsizlik bajariladi.

Endi $R_k(u)$ ehtimollikni baholashni davom ettirish mumkin:

$$R_k(u) \le e^{-ru}\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda t+rc)t}\left(\int_{u+ct}^{\infty} e^{rx}dF(x)+\int_0^{u+ct} e^{rx}dF(x)\right)dt=$$

$$=e^{-ru}\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda t+rc)t}\int_0^{\infty}e^{rx}dF(x)dt=e^{-ru}\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda t+rc)t}E(r)dt=$$

$$=e^{-ru}\frac{\lambda E(r)}{\lambda+rc}=e^{-ru}.$$

Oxirgi tenglikda r xarakteristik koeffitsiyent bo'lgani uchun ifoda

$$\frac{\lambda E(r)}{\lambda+rc}=1$$

ekanligini bevosita tekshirib ko'rish mumkin. Demak, tengsizlik (6) isbot etildi. Bu tengsizlikda limitga o'tib,

$$\psi(u) \le e^{-ru} \tag{7}$$

Lundberg tengsizligini hosil qilamiz.

Tengsizlik (7) isboti jarayonidagi o'tkazilgan mulohazalarni aniqlashtirib,

$$\psi(u) \sim \frac{\theta m}{E'(r)-(1+\theta)m}e^{-ru}, \quad n\to\infty \tag{8}$$

asimptotik munosabatni isbotlash mumkin. Asimptotik munosabat (8) Lundberg-Kramer teoremasi nomi bilan yaxshi ma'lum va u Aktuar matematikaning juda muhim bo'lgan natijalari qatoriga kiradi.

Lundberg tengsizligi (7), Kramer-Lundberg teoremasi (8) munosabatlardan quyidagi xulosalarga kelish mumkin: agar xarakteristik koeffitsiyent r katta bo'lsa, kasodlik ehtimolligi kichik bo'ladi; xarakteristik koeffitsiyent r, sug'urta faoliyatining asosiy parametrlarini o'z ichiga oladi (sug'urta to'lovlari yuzaga kelishi intensivligi λ, sug'urta to'lovi taqsimoti $F(x)$, premiyalar tushishi tezligi c) hamda sug'urta kompaniyasining moliyaviy xavfsizligini belgilaydi.

6.4. Kasodlik ehtimolligining aniq hisoblari

Bu paragrafda o'tkaziladigan mulohazalarda kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ qanoatlantiradigan

$$\psi(u)=\int_0^\infty(1-F(u+ct))\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}\psi(u+ct-x)dF(x)dt \qquad (1)$$

integral tenglamadan foydalaniladi. Bu tenglamaga oldingi punktdagi (5) tenglamada $n\to\infty$ da limitga o'tib, yoki u tenglamani hosil qilish jarayonida o'tkazilgan mulohazalarni takrorlash orqali kelish mumkin. Integrallash o'zgaruvchisi t ni $y=u+ct$ bilan almashtirsak, (1) tenglamani quyidagi

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\left(\int_u^\infty(1-F(y))e^{-\lambda y/c}dy+\int_u^\infty e^{-\lambda y/c}\int_0^y\psi(y-x)dF(x)dy\right)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Oxirgi tenglikda differensiallash amalini o'tkazib (u bo'yicha)

$$\psi'(u)=\frac{\lambda^2}{c^2}e^{\lambda u/c}\left(\int_u^\infty(1-F(y))e^{-\lambda y/c}dy+\int_u^\infty e^{-\lambda y/c}\int_0^y\psi(y-x)dF(x)dy\right)-$$

$$-\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\left[(1-F(u))e^{-\lambda u/c}+e^{-\lambda u/c}\int_0^u\psi(u-x)dF(x)\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}(1-F(u))-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-x)dF(x) \qquad (2)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglamada funksiyalar kompozitsiyasi amali borligini hisobga olgan holda, quyidagi Laplas almashtirishlarini kiritamiz:

$$\rho(s)=\int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du,\quad \varphi(s)=\int_0^\infty e^{-su}dF(u).$$

Lundberg tengsizligiga, asosan, funksiya $\rho(s)$ argumentning $s>-r$ qiymatlarida aniqlangan bo'ladi (r-xarakteristik koeffitsiyent);

Quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du=e^{-su}\psi(u)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\psi(u)se^{-su}du=-\psi(0)+s\rho(s),$$

$$\int_0^\infty e^{-su}du\int_0^u\psi(u-x)dF(x)=\int_0^\infty dF(x)e^{-sx}\int_x^\infty du e^{-s(u-x)}\psi(u-x)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)\int_0^\infty e^{-st}\psi(t)dt=\varphi(s)\rho(s),$$

$$\int_0^\infty e^{-su}(1-F(u))du=-\frac{1}{s}\int_0^\infty(1-F(u))de^{-su}=-\frac{1}{s}(1-F(u))e^{-su}\Big|_0^\infty-\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su}dF(u)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\varphi(s).$$

Bu tengliklar (2) tenglamani Laplas almashtirishlari orqali

$$-\psi(0)+s\rho(s)=\frac{\lambda}{c}\rho(s)-\frac{\lambda}{c}\varphi(s)\rho(s)-\frac{\lambda}{c}\frac{1-\varphi(s)}{s}$$

ko'rinishga olib keladi.

Oxirgi tenglamani yechib, kasodlik ehtimolligining Laplas almashtirishini topamiz:

$$\rho(s)=\frac{\psi(0)-\dfrac{1-\psi(s)}{s}\dfrac{\lambda}{c}}{s-\dfrac{\lambda}{c}(1-\varphi(s))}. \tag{3}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi kasrning maxraji $s=0$ bo'lganda nolga aylanadi. Shu bilan bir vaqtda $\rho(0)<\infty$ (Biz oldin Lundberg tengsizligidan $\rho(s)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-r;\infty)$ oraliqdan iborat bo'lishini eslatib o'tgan edik). Aytib o'tilganlardan (3) dagi kasrning surati ham $s=0$ bo'lganda nolga aylanishi kerakligini olamiz. Demak,

$$R(0)=\frac{1}{1+\theta} \tag{4}$$

bajarilishi kerak bo'lib, unga asoslangan holda (3) tenglikni

$$\rho(s)=\frac{1-\varphi(s)-ms}{s\left[1-\varphi(s)-(1+\theta)ms\right]} \tag{5}$$

formula ko'rinishida yozish mumkinligini olamiz.

Bu formula kasodlik ehtimolligini Laplas almashtirishlari orqali aniq ifodalash imkonini beradi. Pirovardida, Laplas almashtirishlariga teskari almashtirish formulalarini qo'llab, $\psi(u)$ ehtimollikning analitik ifodalarini topamiz.

Aytib o'tilgan mulohazalarni quyidagi konkret sug'urta risk taqsimotlarida namoyish etamiz.

Masala 3. Sug'urta to'lovi taqsimoti eksponensial zichlik funksiyasiga ega bo'lganda, kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ topilsin.

Yechish. Masalaning sharti bo'yicha sug'urta to'lovi X ning taqsimoti o'rta qiymati m bo'lgan eksponensial zichlik funksiyasiga ega. Biz bilamizki, bu taqsimotning Laplas almashtirishi

$$\psi(s)=\frac{1}{1+ms},\quad s\geq 0.$$

Shu sababli, bu holda (5) umumiy tenglama

$$\rho(s)=\frac{m}{\theta+(1+\theta)ms}=\frac{m}{\theta}\frac{\dfrac{\theta}{(1+\theta)m}}{\dfrac{\theta}{(1+\theta)m}+s} \tag{6}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Eksponensial zichlik funksiyasi

$$p(x)=\alpha e^{-\alpha x},\ x\geq 0,\ \alpha>0$$

Laplas almashtirishi

$$\int_0^\infty e^{-sx}p(x)dx=\frac{\alpha}{\alpha+s}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda (6) tenglikdan va Laplas almashtirishiga teskari bo‘lgan formuladan foydalanib,

$$\psi(u)=\frac{m}{\theta}\frac{\theta}{(1+\theta)m}\exp\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right)=\frac{1}{(1+\theta)}\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right) \tag{7}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$uchun olingan (7) formulani Kramer-Lundberg teoremasi bilan taqqoslaymiz. Oldingi paragrafda eksponensial taqsimotga ega bo‘lgan sug‘urta to‘lovlarining xarakteristik koeffitsiyenti

$$r=\frac{\theta}{(1+\theta)m}$$

formula bilan aniqlanishini hisoblab ko‘rsatilgan edi.

Bu formula (6) tenglikni

$$\psi(u)=\frac{\theta}{(1+\theta)m}e^{-ru}$$

ko‘rinishida yozishga imkoniyat beradi.

Bundan tashqari

$$Ee^{rx}=E(r)=\varphi(-r)=\frac{1}{1-mr}$$

ekanligidan

$$E'(r)=m(1-mr)^{-2}=m(1+\theta)^2$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, eksponensial taqsimot uchun Kramer-Lundberg asimptotikasi

$$\psi(u)\sim\frac{1}{1+\theta}e^{-ru},\quad u\to\infty$$

ko‘rinishida bo‘lib, u kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ning aniq formulasi bilan bir xil bo‘ladi.

Kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ ni Ludberg bahosi

$$\psi(u)\leq e^{-ru}$$

bilan almashtirilganda yuzaga keladigan nisbiy xatolik

$$\frac{|\psi(u)-e^{-ru}|}{e^{-ru}}=\frac{\theta}{1+\theta}$$

bo'lib, bu xatolik boshlang'ich kapitalga bog'liq bo'lmaydi. Ko'p hollarda, amaliyotda sug'urta yuklamasi $\theta \approx 20\%$ deb qabul qilinadi. Bu holda nisbiy xatolik taxminan 17% ni tashkil qiladi.

Masala 4. Faraz qilaylik, sug'urta to'lovlari intensivligi $\lambda=3$, sug'urta premiyalari tezligi $c=1$ bo'lib, sug'urta to'lovi $1/9$ ehtimollik bilan o'rta qiymati $1/3$ bo'lgan ekaponensial taqsimotga, $8/9$ ehtimollik bilan esa o'rta qiymati $1/6$ bo'lgan ekaponensial taqsimotga ega bo'lsin (demak, sug'urta to'lovi koeffitsiyentlari $(1/9, 8/9)$ bo'lgan "qorishma" eksponensial taqsimotga ega bo'ladi). Kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ ni boshlang'ich kapital u dan bog'liqligi, ya'ni $\psi(u)$ funksiyaning aniq ko'rinishi topilsin.

Yechish. Masalaning shartlari bo'yicha, sug'urta to'lovi taqsimotining zichlik funksiya

$$p(x)=\frac{1}{9}p_1(x)+\frac{8}{9}p_2(x)$$

"qorishma " ko'rinishida bo'lib, unda:

$$p_1(x)=3e^{-3x}, \quad p_2(x)=6e^{-6x}, x>0$$

bo'ladi. Demak,

$$p(x)=\frac{1}{9}3e^{-3x}+\frac{8}{9}6e^{-6x}=\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{16}{3}e^{-6x}.$$

Bu zichlik funksiyasi $p(x)$ ning Laplas almashtirishi

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}p(x)dx, \quad x\geq 0$$

koeffitsiyentlari $(1/9, 8/9)$ bo'lgan $p_1(x)$ va $p_2(x)$ zichlik funksiyalarning mos ravishda Laplas almashtirishlarining "qorishmasi" ga teng bo'ladi:

$$\varphi(s)=\frac{1}{9}\frac{3}{3+s}+\frac{8}{9}\frac{6}{6+s}=\frac{17s+54}{3(s^2+9s+13)} \qquad (8)$$

Xuddi shuningdek, $p(x)$ zichlik funksiyasining o'rta qiymati

$$m=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{27}.$$

Nisbiy "himoya" yuklamasi

$$\theta = \frac{c}{\lambda m} - 1 = \frac{c - \lambda m}{\lambda m} = \frac{1}{3 \cdot \frac{5}{27}} - 1 = \frac{4}{5}.$$

Keltirilgan bu aniq qiymatlarni (5) formulaga qo'yib, murakkab bo'lmagan algebrayik soddalashtirishlarni amalga oshirib,

$$\rho(s) = \frac{5s+18}{9(s^2+6s+8)} = \int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du$$

formulani hosil qilamiz.

Laplas almashtirishlaridan original funksiyalarga o'tish maqsadida, oxirgi formulaning o'rtasida turgan ifodani "sodda kasrlar" yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$\rho(s)\frac{4/9}{s+2} + \frac{1/9}{s+4} = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{s+2} + \frac{1}{36}\cdot\frac{4}{s+4}$$

Endi

$$\int_0^\infty e^{-sx}\left(ae^{-ax}\right)dx = \frac{a}{a+s},\ a > 0$$

formuladan foydalanib, Laplas almashtirishidan original funksiyaga o'tib, quyidagi yakuniy natijani olamiz:

$$\psi(u) = \frac{2}{9}2e^{-2u} + \frac{1}{36}4e^{-4u} = \frac{4}{9}e^{-2u} + \frac{1}{9}e^{-4u}. \qquad (9)$$

Kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ uchun keltirilgan aniq formulani Lundberg tengsizligi bilan taqqoslaymiz. Bundan oldin xarakteristik koeffitsiyent r ni hisoblaymiz.

Sug'urta to'lovi X ning taqsimotini Laplas almashtirishi $\varphi(s)$ oraliq $(-3;\infty)$da aniqlangan bo'lib, (8) formula ko'rinishiga ega bo'ladi. Shu sababli, momentlar hosil qiluvchi funksiya $E(t)$ yarim to'g'ri chiqiz $(-\infty;3)$da

$$E(t) = \frac{-17t+54}{3(t^2-9t+18)} \qquad (10)$$

formula bilan aniqlanadi.

Alohida qayd qilib o'tamizki, (10) tenglikning o'ng tomonidagi funksiya hamma $t \neq 3, 6$ nuqtalarda aniqlangan bo'lsada, u faqat $t \in (-\infty;3)$lar uchun $E(t)$ funksiyani ifoda etadi, xolos. Buni hisobga olgan holda xarakteristik koeffitsiyent r

$$\frac{-17t+54}{3(t^2-9t+18)} = 1 + \frac{t}{3}$$

tenglamaning yechimi bo‘lishi kerakligiga ishonch hosil qilamiz. Bu tenglama sodda almashtirishlardan so‘ng

$$t^3-6t^2+8t=0 \tag{11}$$

tenglamaga keltiriladi. Bu tenglama

$$t_0=0,\ t_1=2,\ t_3=4$$

yechimlarga ega bo‘ladi. Lekin (10) tenglik faqat $t<3$ qiymatlarda o‘rinli bo‘lishidan (11) tenglamaning yagona musbat $t_1=r=2$ yechimi mavjudligi kelib chiqadi.

O‘rganilayotgan masala shartlari bajarilganda Lundberg tengsizligi

$$\tfrac{4}{9}e^{-2u}+\tfrac{1}{9}e^{-4u}\le e^{-2u}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ni Lundberg bahosi bilan almashtirganda yuzaga keladigan nisbiy xatolik uchun

$$\frac{\left|\psi(u)-e^{-ru}\right|}{e^{-ru}}=\frac{5}{9}-\frac{1}{9}e^{-2u}$$

tenglik bajariladi. Ammo e^{-2u} miqdor kichik bo‘lgani uchun, bu xatolik $\frac{5}{9}\approx 56\%$. Agar biz bu formulalarni, fiksirlangan kichik ε tartibdagi kasodlik ehtimolligini ta’min etadigan rezerv fondi $R_u$ni topish uchun qo‘llasak, nisbiy xatolik ancha kichik bo‘ladi.

Masalan, $\varepsilon=0.1\%$ uchun aniq formula $u\approx 3.04$ qiymatni beradi, shu bilan bir vaqtda Lundberg tengsizligi $u\approx 3.45$ taqribiy qiymatni ta’min etadi va nisbiy xatolik taxminan 12% ni tashkil etadi.

Bulardan tashqari,

$$\psi'(r)=\frac{17r^2-108r+100}{3\left(r^2-9r+18\right)}=\frac{2}{3}.$$

Demak, o‘rganilayotgan masala uchun Kramer-Lundberg asimptotikasi

$$R(u)\sim\frac{4}{9}e^{-2u},$$

xuddi kutilganidek, aniq formula (9) ning bosh hadi bilan ustma-ust tushadi. Bu holda $\psi(u)$ni Kramer-Lundberg asimptotikasi bilan almashtirishda yuzaga keladigan nisbiylik xatolik

$$\frac{R(u)-\tfrac{4}{9}e^{-2u}}{\tfrac{4}{9}e^{-2u}}=\frac{1}{4}e^{-2u}$$

ifodaga teng bo'ladi. Masalan, $u=3$ uchun bu xatolik 0.1% dan kam bo'ladi.

6.5. Klassik risk jarayonida kasodlik ehtimolligi uchun Pollachek-Xinchin-Beekman formulasi

Eslatib o'tamizki, klassik risk jarayoni

$$R(t)=u+ct-\sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $N(t)$ – oddiy Puasson jarayoni,

$$X_1, X_2, ..., X_n, ...$$

umumiy $F(x)$ taqsimotga ega bo'lgan va bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ular $N(t)$ jarayonga bog'liqsiz deb hisoblanadi. Odatdagidek, $F(0)=0$ shartning bajarilganligini faraz qilamiz (chunki X_i lar sug'urta to'lovi miqdori deb tushuniladi).

O'rta qiymat:

$$\mu=\int_0^\infty xdF(x)=\int_0^\infty (1-F(x))dx$$

mavjud va chekli son deb hisoblanadi.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $Y_1, Y_2, ...$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, umumiy

$$h(x)=\frac{1}{\mu}(1-F(x)),\ x>0$$

zichlik funksiyasiga ega bo'lsin.

Zichlik funksiyasi $h(x)$ ga mos keluvchi taqsimot funksiyasini $H(x)$ deb belgilaylik.

Musbat butun qiymatli m tasodifiy miqdor $Y_1, Y_2, ...$ tasodifiy miqdorlarga bog'liq bo'lmasdan parametri $p=\frac{1}{1+\rho}$ bo'lgan geometrik taqsimotga ega bo'lsin, ya'ni

$$P(M=n)=(1-p)p^n=\frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}},\ n=0,1,2,...\ .$$

Bu holda:

$$\psi(u) = P(Y_1 + ... + Y_M > u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n}. \quad (1)$$

Isbot. Birinchi marta sug'urta to'lovi ro'y bergan vaqt momentini T_1 bilan belgilaylik. Bu holda $R(T_1) = cT_1 - X_1$. Tushunarliki, $(0, T_1)$ vaqt oraligida kompaniya kasod bo'lmaydi. Oson ko'rinadiki, Puasson jarayoni "tiklanish jarayoni" bo'lib, unda tasodifiy miqdor T_1 "kelajakdan bog'liq bo'lmaslik" xossasiga ega bo'ladi. Oxirgi jumlani quyidagicha tushunish kerak: agar

$$F_{s,t} = \sigma(N(s),...,N(t)),\ s < t$$

ya'ni $F_{s,t}$ – tasodifiy miqdorlar sistemasi

$$\{N(\tau),\ s \le \tau \le t\}$$

yuzaga keltirgan hodisalar σ–algebrasi bo'lsa, $\{T_1 \le t\}$ hodisa har qanday $t > 0$ uchun $F_{t+t_0,\infty}$ hodisalar σ–algebrasiga bog'liq bo'lmaydi (boshqacha aytganda, har qanday $A_a \in F_{t+t_0,\infty}$ hodisa uchun

$$P(\{T \le t_1\} \cap A) = P(\{T \le t\}) \cdot P(A)$$

tenglik bajariladi).

Oldingidek, $\psi(u)$ orqali kompaniyaning "kasod bo'lishlik" ehtimolligini belgilaylik (bu yerda $u = R(0)$– kompaniyaning boshlang'ich kapitali). U holda:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u)$$

sug'urta kompaniyasining "kasod bo'lmaslik" ehtimolligi bo'ladi.

Aytib o'tilganlardan va T_1 tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $\lambda e^{-\lambda s}$ (λ– Puasson jarayoni $N(t)$ ning intensivligi) bo'lganidan, quyidagi tenglikning o'rinili bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin:

$$\varphi(u) = E\varphi(u + cT_1 - X_1) = \int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda s}\int_0^{u+cs}\varphi(u + cs - y)dF(y)ds.$$

Agar $x = u + cs$ almashtirishni bajarsak, oxirgi tenglikni

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x/c}\int_0^{x}\varphi(x - z)dF(z)dx, \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Demak, $\varphi(\cdot)$ funksiya absolyut uzluksiz bo'ladi. Formula (2) da hosila olish amalini qo'llab,

$$\varphi'(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\varphi(u-z)dF(z), \tag{3}$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi (3) tenglikning har ikki tomonini $(0,t)$ oraliq bo'yicha integrallab,

$$\varphi(t)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t\varphi(u)du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u\varphi(o-z)d(1-F(z))du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^t\varphi(u)du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\big(\varphi(0)[1-F(u)]-\varphi(u)\big)+$$

$$+\int_0^u\varphi'(u-z)(1-F(z)dz)du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t[1-F(u)]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t(1-F(z))\int_0^t\varphi'(u-z)dudz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t[1-F(u)]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t[1-F(z)]\big(\varphi(t-z)-\varphi(0)\big)dz.$$

Shunday qilib,

$$\varphi(u)=\varphi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\varphi(u-z)[1-F(z)]dz, \tag{4}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Lebegning monoton yaqinlashish haqidagi teoremasini (4) ga tatbiq etsak $(u\to\infty)$,

$$\varphi(\infty)=\varphi(0)+\frac{\lambda\mu}{c}\varphi(\infty). \tag{5}$$

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan,

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=c-\lambda\mu\right)=1.$$

Xavfsizlik koeffitsiyenti musbat bo'lganda (ya'ni $c>\lambda\mu$), oxirgi tenglikdan shunday xos ma'nodagi tasodifiy miqdor T mavjud bo'lishi $(P(N<\infty)=1)$ kelib chiqadiki, hamma $t>T$ uchun

$R(t) > 0$ tengsizlik bajariladi. Moment T ga qadar $(t \le T)$ faqat chekli sonda sug'urta to'lovlari amalga oshishi mumkin ekanligidan tasodifiy miqdor $\inf_{t>0} R(t)$ ning 1 ehtimollik bilan chekli bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni,

$$P\left(\inf_{t>0} R(t) < \infty\right) = 1.$$

Bundan esa $\varphi(\infty) = 1$ ekanligini olamiz. Demak, (5) dan kelib chiqadiki,

$$1 = (1 - \psi(0)) + \frac{\lambda\mu}{c},$$

ya'ni

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho}, \tag{6}$$

tenglik $c > \lambda\mu$ bo'lganda bajariladi.

Maxsus ravishda izoh berib o'tamizki, (6) munosabat $\varphi(0)$ ehtimollikning F taqsimotga nisbatan befarqligini (turg'unligini) namoyish etadi, chunki $\varphi(0)$ faqat ρ ga, demak, pirovardida, faqat $\mu = EX_1$ ga bog'liq bo'ladi xolos.

Endi quyidagi Laplas-Stiltes almashtirishlarini kiritamiz:

$$f(u) = \int_0^\infty e^{-uz} dF(z),\ g(u) = \int_0^\infty e^{-uz} d\varphi(z),\ u > 0.$$

U holda (4) va (6) lardan bevosita,

$$g(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + g(u)\frac{\lambda(1 - f(u))}{cu},$$

tenglikni olamiz. Oxirgidan esa,

$$g(u) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{1 - \frac{\lambda(1 - f(u))}{cu}} = \frac{1 - \frac{1}{1+\rho}}{1 - \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1 - f(u)}{\mu u}\right)}, \tag{7}$$

tenglik kelib chiqadi.

Munosabat (7) ni Pollachek-Xinchin formulasi deb atashadi.

Endi formal ravishda bog'liqsiz va umumiy

$$h(x) = \frac{1}{\mu}[1 - F(x)],\ x > 0,$$

zichlik funksiyasiga ega bo'lgan,

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlarni ko'ramiz. Bu zichlik funksiyasiga mos keladigan taqsimot funksiyasini $H(x)$ bilan belgilaymiz. Faraz qilaylik, butun musbat qiymatni va $Y_1, Y_2, \dots$ larga bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor M parametri $p = \frac{1}{1+\rho}$ bo'lgan geometrik taqsimotga ega bo'lsin, ya'ni

$$P(M = n) = (1-p)p^n = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Endi,

$$Q = Y_1 + \dots + Y_M$$

tenglik bilan aniqlanadigan va geometrik tasodifiy yig'indi deb ataladigan tasodifiy miqdorni kiritaylik.

To'la ehtimollik formulasi yordamida

$$P(Q < u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho)^n} \tag{8}$$

tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu yerda $H^{*n}(x)$ belgi taqsimot funksiyasi $H(x)$ ning o'z-o'zi bilan n karrali kompozitsiyasini anglatadi, ya'ni

$$H^{*n}(x) = \int_0^{\infty} H^{*(n-1)}(x-u)\,dH(u),$$

$H^{*0}(x) = E_0(x)$ nol nuqtada joylashgan birlik taqsimot ($E_0(x) = 0$ agar $x \le 0$, $E_0(x) = 1$ agar $x > 0$ bo'lsa).

Qiyin bo'lmagan mulohazalar va bo'laklab integrallash yordamida $H(x)$ taqsimot funksiyasining Laplas-Stiltes almashtirishi

$$h(u) = \int_0^{\infty} e^{-us}\,dH(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-us}}{\mu}(1 - F(s))\,ds = \frac{1 - f(u)}{\mu u}, \tag{9}$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Bu holda (8) taqsimot funksiyasining (ya'ni tasodifiy miqdor Q ning) Laplas-Stiltes almashtirishi

$$g(u)=\int_0^\infty e^{-us}dP(Q<s)=\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^\infty\frac{h^n(u)}{(1+\rho)^n}=$$

$$=\frac{\rho}{1+\rho}\cdot\frac{1}{1-\frac{h(u)}{1+\rho}}=\frac{1-\frac{1}{1+\rho}}{1-\frac{h(u)}{1+\rho}}=\frac{1-\frac{1}{1+\rho}}{1-\frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1-f(u)}{\mu u}\right)}. \tag{10}$$

Bu tengliklarda (9) formula hisobga olindi. Endi (7) va (10) munosabatlarning o'ng tomonlari teng ekanligiga e'tibor qilamiz. Taqsimot funksiyalari va ularning Laplas-Stiltes almashtirishlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligidan va izohlab o'tilgan munosabatdan

$$\varphi(u)=P(Y_1+...+Y_M<u)=\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^\infty\frac{H^{*n}(x)}{(1+\rho)^n},$$

tenglikni hosil qilamiz va undan $\psi(u)=1-\psi(u)$ ekanligini hisobga olib, teoremadagi (1) tenglikning isbotini olamiz. Teorema 1 isbot etildi.

Isbotlangan (1) munosabatni Beekman formulasi yoki ((7) va (10) tengliklarning o'ng tomonlari bir xil ekanligini hisobga olib) Pollachek-Xinchin-Beekman formulasi deb ataladi.

Misol 1. Faraz qilaylik, sug'urta to'lovlari X_k lar eksponensial taqsimotga ega bo'lsin, ya'ni

$$F(x)=1-e^{-x/\mu},\ x\geq 0.$$

Bu holda klassik risk jarayoni Markov jarayoni bo'ladi va (3) tenglama

$$\varphi'(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u\varphi(u-z)e^{-z/\mu}dz=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u\varphi(z)e^{-(u-z)/\mu}dz \tag{11}$$

ko'rinishida yoziladi.

Oxirgi (11) tenglikda differensiallash amalini o'tkazib,

$$\varphi''(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi'(u)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\varphi'(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\right)\varphi(u)=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}\right)\varphi'(u)=\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}\varphi'(u), \tag{12}$$

tenglamani olamiz.

Differensial tenglama (12) ning yechimi,

$$\varphi(u = c_1 - c_2 \exp\left\{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right\}. \tag{13}$$

Agar $\rho > 0$ bo‘lsa,

$$\varphi(\infty) = 1, \ \varphi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho},$$

tengliklar bajariladi. Bulardan foydalanib (13) quyidagicha yoza olamiz:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}.$$

Demak,

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right\}. \tag{14}$$

Endi “kasod bo‘lish” ehtimolligini (1) formula orqali hisoblaymiz. Taqsimot funksiyasi $H^{*n}(x)$ ning zichlik funksiyasi

$$\left(H^{*n}\right)'(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x/\mu}}{\mu^n (n-1)!}, \quad x \geq 0$$

ekanligini tekshirib ko‘rish qiyin bo‘lmaydi. Bu holda (1) formulaga asosan,

$$\psi(u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{*n}(u)}{(1+\rho_u)^n}\right] =$$

$$= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^n} \int_0^u \frac{x^{n-1} e^{-x/\mu}}{\mu^n (n-1)!} dx\right] =$$

$$= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \int_0^u \frac{e^{-x/\mu}}{\mu(1+\rho)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\mu(1+\rho)^{n-1}(n-1)!}\right) dx\right] =$$

$$= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \int_0^u \frac{e^{-x/\mu}}{\mu(1+\rho)} \exp\left\{\frac{x}{\mu(1+\rho)}\right\} dx\right] = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right\}.$$

Oxirgi ifoda tabiiy ravishda (14) formula bilan ustma-ust tushadi.

Pollachek-Xinchin-Beekman formulasi orqali “kasodlik” ehtimolliklarini topish masalasi sug‘urta to‘lovining taqsimoti ko‘rsatkichli taqsimot orqali ifodalanadigan ko‘p hollarda, masalan bir nechta eksponensial taqsimotning "qorishmasi" bo'lgan gipereksponensial tipdagi taqsimotlar uchun yechiladi.

6.6. Beekman-Bauers empirik approksimatsiyasi

Quyidagi

$$B(u) = P\left(\inf_{t\geq 0} R(t) < -u \,/\, \inf_{t\geq 0} R(t) < 0\right)$$

belgilashni kiritamiz.

Kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ uchun $c > \lambda\mu$ bo'lganda o'rinli bo'lgan ((6) ga qarang)

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\rho}$$

tenglikka asoslanib $(\varphi(u) = 1 - \psi(u))$

$$B(u) = \frac{\psi(u) - \psi(0)}{1 - \varphi(0)} = 1 - (1+\rho)\psi(\text{u})$$

yoki

$$\psi(u) = \frac{1 - B(u)}{1+\rho}$$

munosabatning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Sodda mulohazalar yordamida, formal nuqtayi nazardan $B(u)$ funksiya qandaydir manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lishiga ishonamiz. Beekman tomonidan taklif qilingan, Bauers tomonidan esa modifikatsiya qilingan metodning asosini taqsimot funksiyasi $B(u)$ ni forma parametri α, masshtab parametri γ bo'lgan gamma taqsimot $\Gamma_{\alpha,\gamma}(u)$ bilan almashtirish tashkil qiladi va bunda α,γ parametrlar shunday tanlanadiki, $B(u)$ va $\Gamma_{\alpha,\gamma}(u)$ taqsimotlarning birinchi ikkita momentlari ustma-ust tushadi. Faraz qilaylik μ_B va σ_B^2 – mos ravishda $B(u)$ taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi bo'lsin. Biz oldingidan

$$\mu = \mu_1 = EX_1,\ \mu_2 = EX_1^2,\ \mu_3 = EX_1^3$$

belgilashlardan foydalanamiz.

Funksiya $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ ning Laplas-Stiltes almashtirishi $g(s)$ ni, taqsimot funksiyasi $F(x)$ ning Laplas-Stiltes almashtirishi $f(s)$

bilan ifoda etadigan Pollachek-Xinchin formulasini qo‘llab quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\int_0^\infty e^{-su}dB(u)=\frac{g(s)-1-\lambda\mu/c}{\lambda\mu/c}=$$

$$=\frac{cg(s)}{\lambda\mu}-\rho=\frac{\rho}{1-\frac{1}{1+\rho}\cdot\frac{1-f(s)}{\mu s}}-\rho=$$

$$=\frac{\rho(1+\rho)}{1+\rho-\left(1-\frac{\mu_2 s}{2\mu}+\frac{\mu_3 s^2}{\sigma\mu}+0\left(s^3\right)\right)}-\rho=$$

$$=1-\frac{\mu_2(1+\rho)s}{2\rho\mu}+(1+\rho)\left(\frac{\mu_3}{2\rho\mu}+\frac{\mu_2^2}{2\rho^2\mu^2}\right)\frac{s^2}{2}+0(s^3)$$

va ulardan

$$\mu_B=\frac{\mu_2(1+\rho)}{2\rho\mu},\sigma_B^2=\frac{\mu_2(1+\rho)}{2\rho\mu}\left(\frac{2\mu_3}{3\mu_2}+\frac{\mu_2(1-\rho)}{21-\rho\mu}\right)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Bunda taqsimot funksiyasi $\Gamma_{\alpha,\gamma}(u)$ ning parametrlari α va γ

$$\alpha=\frac{\mu_B^2}{\sigma_B^2},\ \gamma=\frac{\mu_B}{\sigma_B^2}$$

tengliklar bilan tanlanadi.

Parametrlari α va β yuqoridagi formulalar orqali tanlangan gamma-taqsimot funksiyasi $\Gamma_{\alpha,\gamma}(u)$ dan foydalanib,

$$\psi(u)\approx\psi_{BB}(u)=\frac{1-\Gamma_{\alpha,\gamma}(u)}{1+\rho}$$

Beekman-Bauers approksimatsiyasini hosil qilamiz.

6.7. Xavfsizlik yuklamasining kichik qiymatlaridagi “kasodlik” ehtimolligi uchun taqribiy formulalar

Quyidagi

$$R(t)=ct-\sum_{k=1}^{N(t)}X_k,\ k\geq 0$$

klassik risk jarayonini o‘rganishda davom etamiz. Bu yerda $c>0$, $N(t)$ – intensivligi $\lambda>0$ bo‘lgan Puasson jarayoni,

$X_1, X_2, \ldots$ umumiy $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib,

$$F(0)=0,\ EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu > 0$$

deb hisoblanadi. Bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{X_k, k \geq 1\}$ tasodifiy jarayon $N(t)$ ga bog'liq bo'lmaydi.

Oldingilarda $X_1, X_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar sug'urta kompaniyasining sug'urta to'lovi miqdorlarini ifodalaydi, $N(t)$ jarayon esa, qandaydir vaqt t momentga qadar (demak, $[0,t]$ oraliqda) ro'y bergan sug'urta hodisalari sonini belgilaydi, $c>0$ o'zgarmas son sug'urta premiyasi jarayonining intensivligini anglatadi. Qayd etib o'tilganlardan kelib chiqadiki, $u+R(t), u-$ boshlang'ich kapital, t vaqt momentidagi sug'urta kompaniyasining rezerv fondi miqdorini tashkil qiladi.

Xavfsizlik yuklamasi (koeffitsiyenti) deb

$$\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

miqdorga aytiladi.

Sug'urta kompaniyasining kasodlik ehtimolligi

$$\psi(u) = P(u + R(t) < 0) \text{ (vaqt } t \text{ ning biror qiymatida)}$$

$$= P\left(\inf_{t>0} R(t) < -u\right)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Kelgusida hamma joyda $\lambda > 0$ deb hisoblaymiz. Amaliy faoliyat nuqtayi nazaridan, xavfsizlik yuklamasi ρ ni unchalik katta bo'lmagan son deb hisoblash maqsadga muvofiq bo'ladi (chunki, sug'urta kompaniyasining taklif qilgan xizmatlari mizojlar uchun qiziqarli bo'lishi kerak). Aytib o'tilganlarni nazarda tutsak, xavfsizlikning kichik qiymatlarida (ya'ni $\rho \to 0$ bo'lganda) kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ ni tahlil etish masalasiga kelamiz.

Teorema 1. Faraz etaylik, $EX_1^2 < \infty$ bo'lsin. Bu holda, $\rho \to 0$ da

$$\sup_{u>0} \left| \psi(u) - \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{ -\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)EX_1^2} \right\} \right| = o(1)$$

limit munosabat o'rinli bo'ladi.

Keltirilgan natijaning isbotida mashhur venger matematigi Reni (1921-1972) teoremasidan foydalaniladi. Biz bu teoremani quyidagi lemma ko'rinishida bayon etamiz.

Faraz qilaylik,

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

manfiy bo'lmagan va bir xil taqsimlangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, N – parametri $1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$

$$P(N-k)=\varepsilon(1-\varepsilon)^{k-1}, \ k=1,2,\ldots$$

geometrik taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin. Tasodifiy miqdorlar $N, \xi_1, \xi_2, \ldots$ birgalikda bog'liq emas deb hisoblab,

$$S_N^\varepsilon = \xi_1 + \ldots + \xi_N$$

belgilashni kiritamiz.

Agar $\alpha = E\xi_1$ bo'lsa,

$$ES_N^\varepsilon = \alpha\varepsilon^{-1},$$

tenglikni to'g'ri ekanligini tekshirib ko'rish qiyin bo'lmaydi.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$F_\varepsilon(x) = P\left(\frac{S_N^\varepsilon}{ES_N^\varepsilon} < x\right) = P\left(\varepsilon\alpha^{-1}S_N^\varepsilon < x\right).$$

Umuman aytganda, tasodifiy yig'indilar S_N^ε larni $\varepsilon \to 0$ dagi asimptotik xossalarini o'rganish qiyin bo'lgan matematik masalalar qatoriga kiradi, chunki yig'indilar ε parametrga nisbatan "seriyalar sxemasini" tashkil qiladi.

Lemma. Tasodifiy miqdorlar

$$N, \{\xi_k, \ k \ge 1\}$$

yuqoridagi shartlarni qanoatlantirsa,

$$\sup_{x>0}\left|F_\varepsilon(x) - 1 + e^{-x}\right| = 0(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Teorema 1 ning isboti. Pollachek-Xinchin-Beekman formulasiga asosan,

$$\psi(u) = P\left(Y_1 + \ldots + Y_{M_p} > u\right)$$

va bu yerda $Y_1, Y_2, \ldots$ bog'liqsiz, umumiy zichlik funksiyasi

$$\frac{1}{\mu}[1 - F(x)], \quad x \ge 0$$

bo'lgan tasodifiy miqdorlar, M_ρ – tasodifiy miqdorlar Y_i larga bog'liq bo'lmagan,

$$P(M_\rho = n) = \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2...$$

geometrik taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni belgilaydi.

Faraz qilaylik, N_ρ – tasodifiy miqdorlar Y_i larga bog'liq bo'lmagan va

$$P(N_\rho = n) = \frac{\rho}{(1+\rho)^n}, \quad n = 1,2,...$$

taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin.

Quyidagi tengliklar

$$EN_\rho = \frac{1+\rho}{\rho},$$

$$(1+\rho)\psi(u) = P\left(Y_1 + ... + Y_{N_\rho} > u\right) \tag{1}$$

oson isbot etiladi.

Tenglik (1) ning o'ng tomonidagi taqsimot funksiyasiga lemmani qo'llasak (bunda $\varepsilon = \frac{\rho}{1+\rho}$ deb hisoblanadi),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Sup}_{u \geq 0} \left| (1+\rho)\psi(u) - \exp\left\{ -\frac{\rho u}{(1+\rho)EY_1} \right\} \right| = 0 \tag{2}$$

limit munosabatni olamiz.

Bevosita hisoblashlar orqali

$$EY_1^k = \frac{EX_1^{k+1}}{(k+1)EX_1}, \quad k = 1,2,... \tag{3}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Xususiy holda,

$$EY_1 = \frac{EX_1^2}{2\mu}$$

ekanligiga e'tibor qilsak, (2) munosabat teorema 1 ni isbotlaydi.

Isbot etilgan teorema 1 dan klassik risk jarayonidagi kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ uchun (xavfsizlik yuklamasi kichik bo'lganda) quyidagi taqribiy formulani olamiz:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{ -\frac{2\pi\mu u}{(1+\rho EX_1^2)} \right\}. \tag{4}$$

Sug‘urta to‘lovlari X_i tasodifiy miqdorlarning taqsimoti $F(x)$

$$EX_1^3 = \int_0^\infty x^3 dF(x) < \infty \tag{5}$$

Shartni qanoatlantirganda (4) taqribiy formulaning aniqlik darajasini baholash mumkin.

Teorema 2. Agar (5) shart bajarilsa,

$$\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{2\rho\mu u}{(1+\rho)EX_1^2}\right\}\right| \le \frac{4\mu EX_1^3}{3\left(EX_1^2\right)^2}\cdot\frac{\rho}{1+\rho}.$$

Bu teoremaning isboti ancha murakkab bo‘lib, unda tasodifiy miqdorlarni qo‘shish nazariyasining keyingi yillardagi natijalaridan foydalaniladi.

Keltirilgan 2-teoremaning to‘la isboti [1] monografiyada bayon qilingan.

6.8. Klassik risk jarayonida kasodlik ehtimolligi uchun empirik approksimatsiyalar

Bu bo‘limda kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ uchun empirik approksimatsiyalash formulalari muhokama etiladi. Bu yaqinlashish formulalarini matematik statistika nuqtayi nazaridan qat’iy asoslangan deb hisoblash mumkin bo‘lmasada, ular amaliy hisoblashlar jarayonida muhim bo‘lib, yaxshi natijalarga olib keladi.

De Vilder empirik approksimatsiyasi.

Oldingi 6.5. punktda juda muhim bo‘lgan konkret klassik risk jarayoni o‘rganilgan (misol.1). Unda sug‘urta to‘lovlari taqsimoti sifatida

$$P(X_1 < x) = F(x) = 1 - e^{-x/\mu},\ x \ge 0.$$

Eksponensial (ko‘rsatkichli) taqsimot funksiyasi olingan. Bu holda kasodlik ehtimolligi

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\rho u/\mu(1+\rho)},$$

ekanligi isbot etilgan. Bu formuladan kasodlik ehtimolligi $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ tenglikni hisobga olingan holda, uchta λ, μ, ρ parametrlar orqali aniqlanishi kelib chiqadi. Eslatib o'tamizki, bu yerda oddiy Puasson jarayonining intensivligini, ρ esa xavfsizlik yuklamasini belgilaydi. De Vildering kasodlik ehtimolligi uchun empirik approksimatsiyalari (formulalari) Matematik statistikaning "o'rin almashtirish" va "momentlar metodi" g'oyalariga asoslangan.

Aytaylik,

$$R(t) = ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

Sparre-Andersen risk jarayoni bo'lib, uning intensivligi λ, $EX_j = \mu$ va xavfsizlik yuklamasi ρ bo'lsin.

Parametrlari λ^*, μ^*, ρ^* va sug'urta to'lovining taqsimoti eksponensial taqsimot funksiyasi bo'lgan klassik risk jarayonini $R^*(t)$ bilan belgilaylik. Demak, $R^*(t)$ jarayon uchun kasodlik ehtimolligi

$$\psi(u) = \psi(u, \lambda^*, \mu^*, \rho^*) = \psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\rho^*} \exp\left\{ \frac{\rho^* u}{\mu^*(1+\rho^*)} \right\}.$$

De Vilder λ^*, μ^*, ρ^* parametrlarni

$$ER^*(t) = ER(t),\ E\left[R^*(t)\right]^2 = E\left[R(t)\right]^2,$$

$$E\left[R^*(t)\right]^3 = E\left[R(t)\right]^3$$

tengliklar sistemasining yechimi sifatida aniqlashni taklif qilgan.

Quyidagi

$$\mu_1 = \mu = EX_1,\ \mu_2 = EX_1^2,\ \mu_3 = EX_1^3$$

belgilashlardan foydalanamiz.

Murakkab Puasson taqsimotining xarakteristik funksiyasini ifoda etadigan formuladan foydalanib, har qanday $\theta \in R$ uchun

$$\log Ee^{i\theta R(t)} = t\left\{ i\theta c + \lambda\left(Ee^{-i\theta X_1} - 1 \right) \right\} =$$

$$= t\left[i\theta c + \lambda\left(1 - i\theta\mu\right) - \frac{\mu_2\theta^2}{2} + \frac{i\mu_3\theta^3}{6} + 0\left(\theta^3\right) - 1 \right] =$$

$$= t\left[i\theta\left(c + \lambda\mu\right) - \frac{\lambda\mu_2\theta^2}{2} + \frac{i\lambda\mu_3\theta^3}{6} + 0\left(\theta^3\right) \right]$$

tengliklarni yoza olamiz.

Eslatib o'tamizki, agar

$$f(\theta)=Ee^{i\theta\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}dF(x)$$

tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi bo‘lsa,

$$f^{k}(0)=i^{k}E\xi^{k}.\ k=1,2,$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan va yuqoridagi tengliklardan foydalanib

$$ER(t)=(c-\lambda\mu)t=\rho\lambda\mu t,\ E[R(t)]^{2}=\lambda\mu_{2}t+(\rho\lambda\mu t)^{2},$$

$$E[R(t)]^{3}=-\lambda\mu_{3}t+3\lambda^{2}t^{2}\rho\mu\mu_{2}+(\rho\lambda\mu t)^{3},$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bulardan λ^{*},μ^{*} va ρ^{*} parametrlar quyidagi

$$\rho\lambda\mu=\rho^{*}\lambda^{*}\mu^{*},\ \lambda\mu_{2}=2\lambda^{*}(\mu^{*})^{2},\lambda\mu_{3}=6\lambda^{*}(\mu^{*})^{3},$$

tengliklarni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Demak

$$\mu^{*}=\frac{\mu_{3}}{3\mu_{2}},\ \rho^{*}=\frac{2\rho\mu\mu_{3}}{3\mu_{2}^{2}},\ \lambda^{*}=\frac{9\lambda\mu\mu_{2}^{3}}{2\mu_{3}^{2}},$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi. Endi “kasod bo‘lishlik” ehtimolligi $\psi(u)$ ning aniq ko‘rinishini hisobga olib,

$$\psi(u)=\psi(u,\lambda,\mu,\rho)\approx\psi(u,\lambda^{*},\eta^{*},\rho^{*})=\psi_{DV}(u),$$

taqribiy munosabatlarni olamiz.

Isbot etilgan taqribiy formula

$$\psi(u)\approx\psi_{DV}(u),$$

De Vilder approksimatsiyasi deb atalib, uning ko‘rinishi quyidagi

$$\psi(u)\approx\frac{3\mu_{2}^{2}}{3\mu_{2}^{3}+2\rho\mu\mu_{3}}\exp\left\{-\frac{6\rho\mu\mu_{2}u}{3\mu_{2}^{2}+2\rho\mu\mu_{3}}\right\},$$

taqribiy formula bilan aniqlanadi.

6.9. Klassik risk jarayonida kasodlik ehtimolligi uchun baholar. Lundberg tengsizligi

Kasodlik ehtimolligi uchun teorema 1 da keltirilgan Kramer-Lundberg asimptotik formulasini “ehtimollik o‘lchovini almashtirish” (Kramer) metodini qo‘llab aniqlashtirish mumkin. Bunda boshlang‘ich kapital U fiksirlangan qiymatga ega deb hisoblanadi va shu maqsadda o'tkazilgan mulohazalarda Pollachek-Xinchin-Beekman formulasi asosiy ro'l o'ynaydi.

Faraz qilaylik,

$$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$$

tasodifiy miqdorlar manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qilsin va ular bir xil ehtimollik taqsimotiga ega bo'lsin. Har qanday $x \geq 0$ uchun

$$\nu(x)=\min\{n;\xi_1+\ldots+\xi_n \geq x\}$$

belgilashni kiritamiz.

Parametri $1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ bo'lgan geometrik taqsimot bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorni N deb belgilaylik,

$$P(N=n)=\varepsilon(1-\varepsilon)^{n-1},\ n-1,2,\ldots$$

Tasodifiy miqdorlar $N,\xi_1,\xi_2,\ldots$ larni bog'liqsiz deb hisoblab

$$P_\xi(x)=P(\xi_1+\ldots+\xi_N<x)$$

belgilashni qo'llaymiz.

Lemma 1. Taqsimot funksiyasi $P_\xi(x)$ quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$P_\xi(x)=1-E(1-\varepsilon)^{\nu(x)}.$$

Isbot. Oson ko'rinadiki,

$$\{\nu(x)\leq k-1\} \text{ va } \{\xi_1+\ldots+\xi_k>x\}$$

hodisalar teng kuchli bo'ladi. Shuning uchun ham to'la ehtimollik formulasi bo'yicha

$$1-P_\xi(x)=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^{k-1}P(\xi_1+\ldots+\xi_k>x)=$$

$$=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^{k-1}P(\nu(x)\leq k-1)=$$

$$=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}P(\nu(x)=j). \qquad (1)$$

Munosabat (1) ning o'ng tomonidagi musbat hadli qator yaqinlashadi. Shuning uchun ham Fubini teoremasiga asosan bu qatordagi yig'indilar tartibini almashtirish mumkin. Bu almashtirishni bajarib, teoremani isbotlaydigan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$1-P_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}P(\nu(x)=j)\sum_{k=j+1}^{\infty}\varepsilon(1-\varepsilon)^{k-1}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}P(\nu(x)=j)(1-\varepsilon)^{j}=E(1-\varepsilon)^{\nu(x)}. \quad (2)$$

Endi sxematik ko'rinishda "ehtimollik o'lchovini almashtirish" metodini eslatib o'tamiz.

O'lchovli (Ω,F) fazo, $f:\Omega\to R^1$ - o'lchovli funksiya, R va Q – ehtimolliklar o'lchovlari F da aniqlangan, $P\square\ Q-P$ ehtimollik, Q ehtimollikka nisbatan absolyut uzluksiz bo'lsin. Ehtimolliklar R va Q ga mos keluvchi matematik kutilmalar E_P va E_Q deb belgilansin.

Odatdagidek, R o'lchovning Q o'lchovga nisbatan Radon-Nikodim hosilasini

$$\frac{dP}{dQ}(\omega),\quad \omega\in\Omega$$

bilan belgilaymiz. Standart variantda "ehtimollik o'lchovini almashtirish" amali quyidagi tengliklar bilan ifodalanadi:

$$E_P f=\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)=\int_\Omega f(\omega)\frac{dP}{dQ}(\omega)Q(d\omega)=E_Q\left(f\frac{dP}{dQ}\right). \quad (3)$$

Biz (3) munosabatning quyidagi aniq variantidan foydalanamiz.

Faraz qilaylik,

$$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$$

bog'liqsiz va umumiy $H(x)$ taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar, $N-$ shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga nisbatan "to'xtalish" momenti bo'lsin. Har qanday $n\geq 1$ uchun

$$f_n(x_1,\dots,x_n):R^n\to R^1$$

funksiyalar o'lchovli bo'lsin. Quyidagi

$$E_H f_N(\xi_1,\dots,\xi_N)$$

matematik kutilmalarni ko'ramiz. Bu yerda matematik kutilmadagi indeks N, tasodifiy miqdorlar ξ_i lar $(i\geq 1)$ umumiy $N(x)$ taqsimotga ega ekanligini anglatadi. Endi $G(x)$ –boshqa taqsimot funksiyasi bo'lib, N taqsimot G ga nisbatan absolyut uzluksiz bo'lsin. Bu holda (3) munosabat quyidagi

$$E_H f_N(\xi_1,...,\xi_N) = E_G\left[f_N(\xi_1,...,\xi_N)\cdot\omega(\xi_1)...\omega(\xi_N)\right] \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi va bu yerda

$$\omega(x) = \frac{dH}{dG}(x).$$

Yuqorida lemma 1 dan oldingi belgilashlarga qo'shimcha qilib

$$\eta(x) = \xi_1 + ... + \xi_{\nu(x)+1} - x$$

tasodifiy miqdorni kiritamiz. Tasodifiy miqdor

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n, \; n \geq 1$$

"tiklanish" jarayonining chegara x dan yuqoriga "sakrash" miqdori bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\xi_1, \xi_2,...$ tasodifiy miqdorlar umumiy taqsimot funksiyasi $H(x)$ Kramer shartini qanoatlantirsin (R ko'rsatkich bilan), ya'ni

$$(1-\varepsilon)\int_0^\infty e^{Rx}dH(x) = 1 \qquad (5)$$

(Haqiqatan ham, agar

$$H(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1-F(z)]dz, \; \varepsilon = \frac{\rho}{1+\rho}$$

deb olsak, (5) munosabat Kramer sharti bilan ustma-ust tushadi).

Endi $G(x)$ taqsimotni

$$G(dx) = (1-\varepsilon)e^{Rx}H(dx)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

Kramer shartiga ((5) munosabat) asosan, $G(x)$ taqsimot funksiyasi F taqsimotga teng kuchli (ekvivalent) bo'ladi va Rodon-Nikodim hosilasi

$$\omega(x) = \frac{dH}{dG}(x) = \frac{e^{-Rx}}{1-\varepsilon}.$$

Lemma 2. Tasodifiy miqdorlar

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$$

ketma-ketligining umumiy taqsimot funksiyasi $H(x)$ (5) Kramer shartini qanoatlantirsin. Bu holda

$$1 - P_\varepsilon(x) = e^{-Rx}E_Q e^{-R\eta(x)}, \; x \geq 0.$$

Isbot. Yuqoridagi (4) formulani (2) tenglikni hisobga olgan holda

$$f_n(x_1,...,x_n)=(1-\varepsilon)^n$$

funksiyaga tatbiq etamiz:

$$1-P_\varepsilon(x)=E_H(1-\varepsilon)^{\nu(x)}=E_Q\left[(1-\varepsilon)^{\nu(x)}\omega(\xi_1)...\omega(\xi_{\nu(x)})\right]=$$

$$=E_Q\exp\left\{-R\left(\xi_1+...+\xi_{\nu(x)}\right)\right\}=e^{-Rx}E_G e^{-R\eta(x)}.$$

Lemma isbot etildi.

Endi lemma 2 ning yordami bilan klassik risk jarayonidagi kasodlik ehtimolligining boshlang'ich kapital $u$ning har qanday qiymatidagi ifodasini topamiz. Oldingidek

$$Y_1, Y_2,..., Y_n,...$$

bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, ularning umumiy taqsimot funksiyasi

$$H(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x[1-F(z)]dz$$

formula bilan aniqlansin.

Har qanday $x>0$ uchun

$$M(x)=\min\{n;Y_1+...+Y_n>x\}$$

tasodifiy miqdorni kiritamiz.

Teorema 1. Sug'rta to'lovlari $X_1,X_2,...$ larning umumiy taqsimot funksiyasi $F(x)$ Kramer shartini Rko'rsatkich bilan qanoatlantirsin. Bu holda har qanday $u>0$ uchun

$$\psi(u)=e^{-Ru}E\exp\left\{-R\left(Y_1+...+Y_{M(u)}-u\right)\right\}.$$

Isbot. Pollachek-Xinchin-Beekman formulasi va lemma 1 ga asosan kasodlik ehtimolligi

$$\psi(u)=1-P_\varepsilon(u)$$

ko'rinishiga ega bo'ladi. Bunda parametr $\varepsilon=\dfrac{\rho}{1+\rho}$, $\xi_i=Y_i$, $i\geq 1$. Endi lemma 2 ning qo'llash teoremaning isbotini beradi.

Ta'rif bo'yicha

$$Y_1+...+Y_{M(u)}-u>0$$

bo'lgani uchun teorema 1 dan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija 1. Faraz qilaylik, sug'urta to'lovlari $X_1, X_2, \ldots$ larning umumiy taqsimoti $F(x)$ Kramer shartini R ko'rsatkich bilan qanoatlantirsin. Bu holda har qanday $u > 0$ uchun

$$\psi(u) \le e^{-Ru}. \tag{6}$$

Oxirgi (6) munosabat Lundberg tengsizligi deb ataladi.

6.9.1. Kasodlik ehtimolligi uchun ikki tomonlama tengsizliklar (Martingallar tatbiqi)

Quyidagi tasodifiy

$$Z(t) = \exp\{-R[R(t) + u]\} \tag{7}$$

funksiyani ko'ramiz. Bu yerda $R-$ Lundberg ko'rsatkichi. Bu holda har qanday $s > 0$ uchun

$$E[Z(t+s) / Z(t)] = e^{-R[R(t)+u]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} e^{-Rcs} \times$$

$$\times E \exp[R(X_1 + \ldots + X_k)] = Z(t).$$

Demak, tasodifiy jarayon $Z(t)$ martingal bo'lar ekan. Aytaylik τ - kasodlik momenti, ya'ni

$$\tau = \inf\{t, R(t) < u\}. \tag{8}$$

Bir ehtimollik bilan, $R(t) \to \infty$, $t \to \infty$ bo'lgani uchun (8) dan

$$E[Z(\tau), \tau < \infty] = Z(0) = e^{-Ru}$$

tenglik kelib chiqadi.

Boshqa tomondan $\psi(u) = P(\tau < \infty / R(0) = 0)$ va biz quyidagi

$$\psi(u) = \frac{\exp\{-Ru\}}{E[Z(\tau) / \tau < \infty]} \tag{9}$$

tenglikni hosil qilamiz (teorema 1 bilan taqqoslang). Qayd qilib o'tamizki, tengsizlik $Z(\tau) > 1$ bajarilgani uchun (9) dan Lundberg tengsizligi (6) munosabatini olamiz. Munosabat (9) kasodlik ehtimolligini $E[Z(t) / \tau < \infty]$ miqdor bilan bog'laydi va bu munosabatdan elementar hisoblashlar o'tkazib

$$\underline{C} e^{-Ru} \le \psi(u) \le \overline{C} e^{-Ru} \tag{10}$$

ikki tomonlama bahoni olamiz. Bu yerda

$$\underline{C} = \inf_{y>0} \left\{ e^{-Ry}(1 - F(y)) \left(\int_y^\infty e^{Rz} dF(z) \right)^{-1} \right\},$$

$$\overline{C} = \sup_{y>0} \left\{ e^{-Ry}(1 - F(y)) \left(\int_y^\infty e^{Rz} dF(z) \right)^{-1} \right\}.$$

Kasodlik ehtimolligi uchun quyi baholarni (6) munosabatdan foydalanib isbot etish qiyin bo'lmaydi.

Oldin kiritilgan

$$H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(x)) dx$$

belgini takroran qo'llaymiz.

Teorema 2. Xavfsizlik yuklamasi ρ musbat son bo'lsin. U holda har qanday $u > 0$ uchun

$$\psi(u) \geq \frac{1 - H(u)}{\rho + 1 - H(u)} \tag{11}$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Taqsimot funksiyasi $H(x)$ ning zichlik funksiyasi uchun

$$h(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x))$$

belgilashni qo'llab, xavfsizlik yuklamasi ρ ning ta'rifidan foydalanib (6) munosabatni

$$\psi(u) = \frac{1 - H(u)}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \int_0^x \psi(u - z) \mathrm{h}(z) \mathrm{d}z \tag{12}$$

ko'rinishida yozamiz.

O'z-o'zidan tushunarliki kasodlik ehtimolligi $\psi(u)$ argument u bo'yicha o'suvchi bo'lmaydi, ya'ni $0 \leq z \leq u$ bo'lganda,

$$\psi(u - z) \geq \psi(u).$$

Shuning uchun ham (12) dan

$$\psi(u) \geq \frac{1 - H(u)}{1 + \rho} + \frac{H(u)}{1 + \rho} \psi(u).$$

Oxirgi tengsizlikni $\psi(u)$ ga nisbatan yechib, teorema 2 ning isbotini olamiz.

Ta'kidlab o'tish kerak bo'ladiki, teorema 2 ning tasdiqi, sug'urta to'lovi taqsimoti Kramer shartini bajarmagan holda ham o'rinli bo'lib qolaveradi. Bundan tashqari (11) tengsizlikni, sug'urta to'lovlari taqsimoti subeksponensial qonunlar sinfiga tegishli bo'lganda yaxshilab bo'lmaydi.

Ta'rif 1. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni subeksponensial qonunlar sinfiga tegishli deyimiz, agar har qanday $n \geq 1$ butun son uchun

$$1 - F^{*n}(x) \sim n(1 - F(x)), \ x \to \infty$$

asimptotik munosabat o'rinli bo'lsa.

Yuqorida ko'rgan edikki, agar sug'urta to'lovi taqsimoti Kramer shartini qanoatlantirsa, teorema 1 ga asosan kasodlik ehtimolligi eksponensial asimptotik bahoga ega bo'ladi. Agar sug'urta to'lovi taqsimoti subeksponensial tipda bo'lsa, quyidagi teoremani isbot etish mumkin.

Teorema 3. Faraz qilaylik, sug'urta to'lovining taqsimot funksiyasi $A(\cdot)$ subeksponensial qonunlar sinfida tegishli bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{1 - H(u)} = \frac{1}{\rho}.$$

Bu yerda oldingidek

$$H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - Fz)dz, \ x > 0.$$

6.10. Chekli vaqt davomidagi kasodlik ehtimolligi

Eslatib o'tamizki, $R(t)$ klassik risk jarayoni bo'lsa, uning uchun kasodlik ehtimolligi (cheksiz vaqt oralig'ida)

$$\psi(u) = P\left(u + R(t) < 0 \text{ biror } t > 0 \text{uchun}\right) = P\left(\inf_{t>0} R(t) < -u\right)$$

tenglik bilan aniqlanadi va bu ehtimollik Pollachek-Xinchin-Beekman tipidagi formulalar bilan ifodalanadi.

Quyidagi

$$\psi(u,t) = P\left(\inf_{0 \leq \tau \leq t} R(\tau) < -u\right)$$

ehtimollikni $R(t)$ jarayonning chekli $[0,t]$ oraliqda "kasod bo'lish" ehtimolligi deb atash tabiiy bo'ladi. Bu ehtimollik uchun Pollachek-Xinchin-Beekman tipidagi formulalar o'rinli bo'lmaydi va ular uchun ma'noga ega bo'lgan munosabatlar taqribiy xarakterda bo'ladi. Bu munosabatlardan ba'zilarini keltiramiz.

Yuqorida Lundberg ko'rsatkichi R

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}[1-F(x)]dx=1$$

tenglamaning yechimi ko'rinishida kiritilgan va unda

$$K(r)=\int_0^\infty e^{rz}dF(z)-1$$

funksiya aniqlangan edi.

Vaqtga bog'liq bo'lgan Lundberg tengsizligi

Ma'lumki,

$$R(t)=\sup_{r\ge R}\left\{r-\frac{t(\lambda k(r)+r)}{u}\right\}$$

tenglik bilan aniqlangan R_t miqdorni t vaqtga bog'liq bo'lgan Lundberg ko'rsatkichi deb ataladi. Xarakteristika $R(t)$ ni hisobga olgan holda,

$$\psi(u,t)\le e^{-R_t u}$$

vaqtga bog'liq bo'lgan Lundberg tengsizligi deb ataluvchi munosabatni isbot etish mumkin ([1]).

6.11. Ehtimollik $\psi(u,t)$ uchun asimptotik approksimatsiyalar

Aytib o'tilganidek, $\psi(u,t)$ ehtimollik uchun mavjud munosabatlarning ko'pchiligi asimptotik xarakterda bo'ladi. Bularning orasida diffuzion approksimatsiyaga asoslangan Segerdal formulasi muhim hisoblanadi.

Quyidagi

$$y_0 = \frac{1}{\lambda K'(R) - c}, \quad u_0 = \frac{\lambda K''(R)}{(\lambda K'(R) - c)^3}$$

belgilashlarni kiritamiz.

Kramer-Lundberg teoremasidagi o'zgarmas sonni C bilan belgilaymiz:

$$C = \frac{\rho\mu}{K'(R) - c/\lambda} = \rho\mu\lambda y_0$$

Segerdal (1978), $u \to \infty$, $t \to \infty$ shunday o'zgarsaki, $(t - uy_0)u^{-1/2}$ chekli miqdor bo'lsa,

$$\psi(u,t) \sim C\Phi\left(\frac{t - uy_0}{\sqrt{tu_0}}\right)e^{-Ru} \qquad (1)$$

asimptotik formula o'rinli bo'lishini isbotlagan. Bu yerda, odatdigidek, $\Phi(x)$– standart normal taqsimotni belgilaydi. Munosabat (1) dan ko'rinadiki, kasodlik momenti $t = T_u$ ning $T_u < \infty$ sharti bilan olingan shartli ehtimolligi, $u \to \infty$, $t \to \infty$ shunday o'zgarib, $(t - uy_0)u^{-1/2}$ chekli miqdor bo'lsa, o'rta qiymati uy_0 va dispersiyasi uu_0 bo'lgan normal taqsimotga yaqinlashadi. Bundan xususiy holda, ya'ni u ning katta qiymatlarida $\left(uy_0 - 2\sqrt{uu_0}, uy_0 + 2\sqrt{uu_0}\right)$ vaqt oralig'ida "kasod bo'lishlik" 0,95 ehtimollik bilan ro'y berishi kelib chiqadi.

Sug'urta kompaniyasining kasodlik ehtimolliklarini o'rganish masalalarida diffuzion approksimatsiyaning qo'llanishi – klassik risk jarayonining trayektoriyalari masshtablarini mos ravishda o'zgartirib, ularni Viner jarayonining trayektoriyalari bilan almashtirish mumkinligini anglatadi. Diffuzion approksimatsiyadan foydalanib

$$\psi(u,\mathrm{t}) \approx 1 - \Phi\left(\frac{u + \rho\lambda\mu t}{\sqrt{\lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}}\right) + \Phi\left(\frac{-u + \rho\lambda\mu t}{\sqrt{\lambda t(\mu^2 + \sigma^2)}}\right)\exp\left\{-\frac{2\rho\lambda\mu u}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}}\right\}$$

taqribiy formulaning o'rinli bo'lishini isbot etish mumkin.

Bu approksimatsiyaning amaliy hisoblashlarda qo'llanishini ta'minlaydigan shartlar [4] monografiyada keltirilgan.

6.12. Boshlang'ich kapital katta bo'lganda kasodlik ehtimolligi uchun asimptotik formula. Kramer-Lundberg teoremasi

Ta'rif 1. Taqsimot funksiya $F(x)$ Kramer-Lundberg shartini qanoatlantiradi deyiladi, agar shunday musbat R son mavjud bo'lib,

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}(1-F(x))dx=1 \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa. Bunda R Lundberg ko'rsatkichi (yoki koeffitsiyenti) deb ataladi.

Har qanday $r>0$ uchun

$$K(r)=\int_0^\infty e^{rx}dF(x)-1$$

belgilashni kiritamiz.

Bu punkt davomida $c>\lambda\mu$ tengsizlik bajarilgan deb hisoblaymiz, ya'ni xavfsizlik yuklamasi $\rho>0$.

Teorema 1. Sug'urta to'lovlari taqsimoti $F(x)$ Kramer-Lundberg shartini qanoatlantirsin va shunday $r_0>0$ musbat son mavjud bo'lib,

$$K(r)\uparrow\infty,\ r\uparrow r_0$$

limit munosabat bajarilsin. Bu holda

$$\lim_{u\to\infty}e^{Ru}\varphi(u)=\frac{\rho\mu}{K'(R)-c/\lambda}.$$

Isbot. 6.3. punktdagi (4), (6) tengliklardan

$$1-\psi(u)=1-\frac{\lambda\mu}{c}+\frac{\lambda}{c}\int_0^u[1-\psi(u-z)][1-F(z)]dz=$$

$$=1-\frac{\lambda}{c}\left[\mu-\int_0^u[1-F(z)]dz+\int_0^u\psi(u-z)[1-F(z)]\right].$$

Ya'ni quyidagi

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-z)[1-F(z)]dz \qquad (2)$$

taqsimot funksiyasi F Kramer shartini qanoatlantirgani uchun

$$\frac{\lambda}{c}e^{Rx}[1-F(x)]$$

biror bir ehtimollik taqsimotining zichlik funksiyasi bo‘ladi. Tenglik (2) ning har ikki tomonini e^{Ru} ga ko‘paytirib

$$e^{Ru}\psi(u)=\frac{\lambda e^{Ru}}{c}\int_0^u[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^u e^{R(u-z)}\psi(u-z)e^{Rz}[1-F(z)]dz \qquad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama “tiklanish” jarayonlarida muhim rol o‘ynaydi. Mashhur “tiklanish teoremasiga” asosan,

$$\lim_{u\to+\infty}e^{Ru}\psi(u)=\frac{c_1}{c_2}. \qquad (4)$$

Bu yerda

$$c_1=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}e^{Ru}\int_u^{\infty}[1-F(z)]dzdu, \qquad (5)$$

$$c_2=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}ze^{Rz}[1-F(z)]dz. \qquad (6)$$

Kramer shartidan va $K(r)$ funksiyani aniqlaydigan tenglikdan

$$\frac{c}{\lambda}=\int_0^{\infty}e^{Kz}[1-F(z)]dz=\frac{1}{R}\left[\int_0^{\infty}e^{Rz}dF(z)-1\right]=\frac{K(R)}{R}$$

munosabatlar kelib chiqadi. Shunday qilib, Lundberg koeffitsiyenti R

$$K(r)=\frac{cr}{\lambda} \qquad (7)$$

tenglamaning musbat yechimi bo‘ladi. Bu yechimning mavjudligi teoremadagi $K(r)$ funksiyaning $r\uparrow r_0$ da cheksiz o‘sib borishi shartidan kelib chiqadi.

O‘zgarmas sonlar C_1 va C_2 uchun ancha sodda bo‘lgan ifodalarni topamiz. Quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$C_1=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}e^{Ru}\int_u^{\infty}(1-F(z))dzdu=$$

$$=\frac{\lambda}{cR}\int_0^{\infty}[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{cR}\int_0^{\infty}e^{Rz}[1-F(z)]dz=$$

$$=\frac{1-\frac{\lambda\mu}{c}}{R}=\frac{\rho}{R(1+\rho)}. \qquad (8)$$

Unda qiyin bo'lmagan mulohazalar yordamida

$$K'(R)=\int_0^{\infty}ze^{Rz}dF(z),\quad \int ze^{Rz}dz=\frac{e^{Rz}}{R}\left(z-\frac{1}{R}\right)$$

munosabatlar o'rinli ekanligini tekshirib ko'rish mumkin va ularga asoslanib,

$$C_2=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}ze^{Rz}[1-F(z)]dz=$$

$$=\frac{\lambda}{cR}\left[\frac{1}{R}+\int_0^{\infty}\left(z-\frac{1}{R}\right)e^{Rz}dF(z)\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{cR}\left(\frac{1}{R}+K'(R)-\frac{K(R)+1}{R}\right)=\frac{\lambda}{cR}\left(K'(R)-\frac{c}{\lambda}\right)=$$

$$=\frac{\lambda\mu\left[K'(R)-\frac{c}{\lambda}\right]}{cR\mu}=\frac{\left[K'(R)-\frac{c}{\lambda}\right]}{(1+\rho)R\mu}, \qquad (9)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Endi (8) va (9) larni (4) tenglikka qo'yib teoremaning isbotini olamiz.

Isbot etilgan teoremadan boshlang'ich kapital u ning katta qiymatlarida

$$\psi(u) \approx \frac{\rho\mu e^{-Ru}}{K'(R) - c/\lambda}, \tag{10}$$

taqribiy formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Munosabat (10) Kramer-Lundberg approksimatsiyasi deb ataladi.

Kramer-Lundberg shartining bajarilishi uchun sug'urta to'lovlari taqsimotining eksponensial momentlari

$$E\exp(\gamma X_1) = \int_0^{\infty} e^{\gamma x} dF(x) < \infty,$$

qandaydir $\gamma > 0$ uchun mavjudligi zaruriy shart (lekin umuman aytganda, yetarli emas) bo'ladi. Bu tasdiqni isbotlaydigan misollarning ko'pini keltirish mumkin.

VII BOB. PARAMETRIK BAHOLASH VA QAYTA SUG'URTALASH MASALALARI

7.1. Statistik baholar nazariyasi elementlari

Sug'urta to'lovi taqsimotining ko'rinishi ma'lum, lekin uning tarkibidagi parametrlar noma'lum bo'lganda, ularni berilgan tanlanmaga mos qilib baholash, sug'urta faoliyatining mukammalroq bo'lishiga xizmat qiladi.

Parametrik baholash masalalariga o'tishdan oldin, umumiy statistik baholash nazariyasining asosiy tushunchalarini va metodlarini eslatib o'tamiz. Oldingidek, $x_1,...,x_n$ – tasodifiy miqdor X ning n ta realizatsiyalaridan iborat tanlanma bo'lsin. Faraz qilamizki, bu tasodifiy miqdorning taqsimoti, unga kiruvchi noma'lum parametr θ aniqligida ma'lum bo'lsin (parametr $\theta=(\theta_1,...,\theta_r)$ ko'p o'lchovli bo'lishi mumkin). Tasodifiy miqdor X ning taqsimot funksiyasini $F(x,\theta)$ deb belgilaymiz.

Demak,

$$F(x,\theta)=P(X<x)=P_\theta(X<x),\ x\in R$$

bo'lib, oxirgi tenglikda P ehtimollik θ parametrga bog'liq bo'ladi ($P=P_\theta$). Tasodifiy miqdor X absolyut uzluksiz bo'lganda, $f(x,\theta)$ simvol bilan ehtimollik zichlik funksiyasini belgilaymiz. Eslatib o'tamizki, $f(x,\theta)$ shunday funksiya bo'ladiki, har qanday $x\in R$ uchun

$$F(x,\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(u,\theta)du.$$

Tasodifiy miqdor X diskret bo'lganda, $f(x,\theta)$ simvol bilan uning ehtimollik taqsimotini belgilaymiz:

$$P(X=x)=f(x,\theta),\ x=0,1,...,n,...$$

Parametr θ ning baholash deganda, tanlanma $x=(x_1,...,x_n)$ ning funksiyasi tushuniladi (bu funksiya parametr θ ning qiymatlari to'plamida o'zgaradi).

Hamma tanlanma x ning funksiyalaridan shunday

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$$

funksiyani tanlab olish ma'qul bo'ladiki, uning uchun

$$\tilde{\theta}(x_1,...,x_n) \approx \theta$$

munosabat bajarilsin. Bu yerda $\approx$ simvolning ma'nosi quyidagi ta'riflarda aniqlashtiriladi:

1) funksiya $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$ siljimas baho deyiladi, agar

$$E_\theta \tilde{\theta}(x_1,...,x_n) = \theta \tag{1}$$

tenglik bajarilsa (bu yerda matematik kutilma belgisiga indeks θ ni kiritilgani $X_1,...,X_n$ tasodifiy miqdorlarning har birining taqsimoti θ parametrga bog'liq ekanligiga ishora qiladi). Bahoning siljimaslik xossasi $\tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$ bahoning har xil tanlanmalar bo'yicha hisoblangan qiymatlari θ parametrning haqiqiy qiymati atrofida quyuqlashib borishini anglatadi.

2) funksiya $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$ parametr θ uchun ma'noli baho deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|\tilde{\theta}(x_1,...,x_n) - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1 \tag{2}$$

munosabat bajarilsa. Siljimas baholar uchun, ularning ma'noli bo'lish xossasi

$$\left\{\tilde{\theta}(x_1,...,x_n),\ n \geq 1\right\}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli ekanligini ko'rsatadi. Bu esa tanlanmaning hajmi o'sib borishi bilan, θ ni $\tilde{\theta}$ orqali baholash aniqligi oshishini bildiradi.

Umuman, statistik bahoning aniqligi risk funksiyalari bilan xarakterlanadi. Odatda

$$S_\theta(\tilde{\theta}) = E_\theta\left(\tilde{\theta}(x_1,...,x_n) - \theta\right)^2$$

kvadratik risk funksiyasidan foydalaniladi. Agar $\tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$ baho siljimaslik xossasiga ega bo'lsa,

$$S_\theta(\tilde{\theta}) = D\tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi va uni riski kichik bo'lgan baholar ustuvorroq deb tushunish mumkin. Tanlanma hajmi n fiksirlangan chekli son bo'lganda, trivial bo'lmagan baholarning kvadratik risk funksiyasi quyidan bitta miqdor bilan chegaralangan bo'ladi (Rao–Kramer tengsizligi).

3) funksiya $\tilde{\theta}(x_1,...,x_n)$ optimal baho deyiladi, agar boshqa har qanday $\hat{\theta}(x_1,...,x_n)$ baho uchun

$$S_\theta(\tilde{\theta}) \le S_\theta(\hat{\theta})$$

tengsizlik θ parametrning har qanday qiymatlarida o'rinli bo'lsa.

Statistik baholar qurishda, ya'ni tanlanmadan olingan funksiyalarni topishda "momentlar metodidan" foydalaniladi. Bu metodni sharhlab o'tamiz. Faraz qilaylik, parametr $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$ o'lchovi r bo'lgan vektor bo'lsin. Taqsimot $F(x,\theta)$ parametr θ ga bog'liq bo'lgani uchun $E_\theta X^k$ tasodifiy miqdor X ning k-chi tartibli momentlari ham θ ga bog'liq bo'ladi. Quyidagi

$$\mu_k(\theta_1,...,\theta_r) = E_\theta X^k,\ k \ge 1$$

belgilashni kiritamiz. Empirik momentlar deb

$$\frac{1}{n}\left(x_1^k + ... + x_n^k\right)$$

ifodalarga aytiladi.

Momentlar metodining ma'nosi nazariy momentlar $\mu_k(\theta_1,...,\theta_r)$ larni empirik momentlariga tenglashtirib

$$\mu_k(\theta_1,...,\theta_r) = \frac{1}{n}\left(x_1^k + ... + x_n^k\right),\ k = 1,2,...,r \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasini tashkil etishdan iborat bo'ladi. Tenglamalar sistemasi (3) ni $\theta_1,...,\theta_r$ larga nisbatan yechib

$$\tilde{\theta}(x_1,...,x_n) = \tilde{\theta}_1(x),...,\tilde{\theta}_r(x), \quad x = (x_1,...,x_n)$$

vektor bahoni hosil qilamiz. Bu baholar ma'noli bo'ladi.

Tasodifiy miqdor X uzluksiz tipda bo'lib, uning zichlik funksiyasi $f(x,\theta)$ bo'lgan holda $(X_1,...,X_n)$ tanlanmaning zichlik funksiyasi

$$L(x_1,...,x_n,\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j,\theta)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu $L(...,\theta)$ funksiya "haqiqatga o'xshashlik" funksiyasi deb ataladi.

Statistik baholar nazariyasida ko'p qo'llaniladigan "maksimal haqiqatga o'xshashlik" metodining asosida haqiqatga o'xshashlik funksiyasi $L(x_1,...,x_n,\theta)$ ning maksimal (eng katta) qiymatini ta'min etadigan $\theta = \theta^*(x_1,...,x_n)$ funksiyani topish yotadi, ya'ni

$$L\left(x_1,...,x_n,\theta^*\right)=\max_{\theta}\prod_{j=1}^{n}f(x_j,\theta)$$

tenglikni qanoatlantiradigan $\theta^*(...)$ funksiyani topish kerak bo'ladi. Bunday usul bilan topilgan statistik baho θ^* – maksimal haqiqatga o'xshashlik baho deb ataladi.

Bu bahoni mohiyatini X tasodifiy miqdor diskret tipda bo'lgan holda namoyish etish qulay bo'ladi. Bunda funksiya $L(x_1,...,x_n,\theta)$ tajribada aynan $x_1,...,x_n$ qiymatlar kuzatilishi ehtimolligini ifoda qiladi.

Intuitiv ravishda tushunarliki, ehtimolliklari katta bo'lgan hodisalar, qolganlariga qaraganda ko'proq ro'y beradi. Shu sababli quyidagi xulosaga kelish mumkin: agar $x_1,...,x_n$ tanlanmaning tarkibi bizga ma'lum bo'lsa, uni ro'yobga chiqargan hodisaning ehtimolligi katta ekanligi asosli bo'ladi. Aytilganlardan kelib chiqadiki, $L(x_1,...,x_n,\theta)$ haqiqatga o'xshashlik funksiyani maksimallashtiradigan (kattalashtiradigan) parametr θ ning qiymatlarini topish maqsadga muvofiq bo'ladi. O'z navbatida, bu qiymatlar

$$\frac{\partial L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta}=0$$

tenglamaning yechimlari bo'ladi. Demak, maksimal haqiqatga o'xshashlik baho $\theta=\theta^*(...)$ oxirgi tenglamaning yechimi bo'ladi.

7.2. Sug'urta faoliyatida ko'p qo'llaniladigan diskret taqsimotlar va ularning parametrlarini baholari

Binomial taqsimot. Agar sug'urta riski X tasodifiy miqdor diskret tipda bo'lib, uning qabul qiladigan qiymatlari

$$x_1,x_2,...,x_n,...$$

ketma-ketlikni tashkil etsa,

$$f(x,\theta)=P_\theta(X=x)=P(X=x,\theta),\ x=x_1,\ x_2,...$$

ehtimolliklar, X tasodifiy miqdor taqsimotining chastota funksiyalari deb ataladi.

Chastota funksiyasi

$$f(x,\theta)=f\left(x,(m,p)\right)=C_m^x p^x(1-p)^{m-x},\ x=0,1,...,m$$

bo'lgan taqsimot–binomial taqsimot deb ataladi. Bu taqsimotning parametrlari:

$$m \in \{1,2,...,n,...\},\ p \in (0,1).$$

Agar X diskret tasodifiy miqdor, parametrlari m va p bo'lgan binomial taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX = mp,\ DX = mp(1-p),\ EX^3 = mp(1-p)(1-2p).$$

Parametrlari m va p bo'lgan binomial taqsimotni bog'liqsiz m ta Bernulli tajribalarida ehtimolligi $p = P(A)$ bo'lgan hodisaning ro'y berishlari sonini ifodalaydigan tasodifiy miqdorning taqsimoti deb qabul qilish mumkin. Agar $\theta = (m, p)$ deb qabul qilsak, ya'ni ikkala parametrlar ham noma'lum bo'lsa, momentlar metodi yordamida

$$\overline{m} = \overline{m}(x_1,...,x_n) = \left[\frac{\overline{x}}{\overline{x} - s^2}\right], \qquad \overline{p} = 1 - \frac{s^2}{x}$$

baholarni olish mumkin. Bu yerda

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right)^2$$

va $[a]$ simvol esa, haqiqiy son a ning butun qismini anglatadi.

Agar $\theta = p$ bo'lsa, ya'ni faqat parametr p noma'lum bo'lsa, maksimal haqiqatga o'xshashlik metodi orqali

$$\overline{p} = \overline{p}(x_1,...,x_n) = \frac{\overline{x}}{m}$$

bahoni topish mumkin. Bu holda haqiqatga o'xshashlik funksiyasi uchun

$$L(x,p) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j, p) = p^{n\overline{x}}(1-p)^{m-n\overline{x}}\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu $L(x,p)$ funksiyani p bo'yicha maksimallashtirish

$$\max_{0<p<1} \log L(x,p)$$

qiymatni topish masalasi bilan teng kuchli bo'lgani uchun, haqiqatga o'xshashlik tenglamasini

$$\frac{\partial \log L(x,p)}{\partial p} = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Endi

$$\log L(x,p)=n\bar{x}\log p+(m-n\bar{x})\log(1-p)+\sum_{i=1}^{n}\log C_n^{x_i}$$

tenglikni hisobga olgan holda, oxirgi tenglamani

$$\frac{\partial \log L(x,p)}{\partial p}=\frac{n\bar{x}}{p}-(m-n\bar{x})\frac{1}{1-p}=0$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamani yechimi

$$p=\bar{p}=\frac{\bar{x}}{m}$$

maksimal haqiqatga o'xshash bo'lgan statistik baho bo'ladi. Oson tekshirib ko'rish mumkinki, $\bar{p}=\frac{\bar{x}}{m}$ noma'lum parametr p uchun optimal baho ham bo'ladi.

Manfiy binomial taqsimot. Chastota funksiyasi

$$f(x,\theta)=C_{m+x-1}^{x-1}p^m(1-p)^{x-1}, \qquad x=1,2,...$$

bo'lgan taqsimot - manfiy binomial taqsimot deb ataladi. Bu taqsimotning parametri $\theta=(m,\ p)$:

$$m\in\{1,2,...\},\ 0<p<1.$$

Manfiy binomial taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor X uchun

$$EX=\frac{m(1-p)}{p},\ DX=\frac{m(1-p)}{p^2},\ EX^3=\frac{m(1-p)(2-p)}{p^3}.$$

Parametrlari m va p bo'lgan manfiy binomial taqsimotga ega tasodifiy miqdorni

$$X=\tilde{X}+1$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lib, bu yerda $\tilde{X}$ tasodifiy miqdor ehtimolligi $p=P(A)$ bo'lgan biror A hodisaning bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligidagi bu hodisaning ro'y bermagan m- chi tajribagacha ro'y berishlar sonini ifoda etadi.

Agar $\theta=(m,p)$ bo'lsa, ya'ni ikkala parametrlar noma'lum bo'lsa, m va p uchun momentlar metodi orqali topilgan baholari

$$\tilde{m}=\tilde{m}(x)=\left[\frac{(\bar{x}-1)^2}{s^2-\bar{x}+1}\right],\ \tilde{p}=1-\frac{\bar{x}-1}{s^2} \tag{6}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar $\theta = p$ bo‘lsa, ya’ni faqat p parametr noma’lum bo‘lsa,

$$\overline{p} = \overline{p}(x) = \frac{\overline{x}}{\overline{x} + m - \frac{1}{n}} \tag{7}$$

ifoda p uchun optimal baho bo‘ladi.

Ba’zi hollarda manfiy binomial taqsimot sifatida chastota funksiyasi

$$f(x,\theta) = C_{m+x-1}^{x} p^{m} (1-p)^{x},\ x = 0,1,2,... \tag{8}$$

yoki chastota funksiyasi

$$f(x,\theta) = C_{x-1}^{m-1} p^{m} (1-p)^{m-x},\ x = m, m+1,... \tag{9}$$

bo‘lgan taqsimot tushuniladi.

Formulalar (6) va (7) bilan berilgan baholardan bu ikki holda foydalanish mumkin bo‘lmaydi. Keltirilgan formulalardan (baholardan) foydalanish mumkin bo‘lishi uchun $x = (x_1, ..., x_n)$ tanlanmaning elementlarini quyidagicha almashtirish kerak bo‘ladi: (8) holda x tanlanmaning har bir elementiga 1 ni qo‘shib $(x_1 + 1, ..., x_n + 1)$ tanlanmaga, (9) holda esa, x tanlanmaning har bir elementini $m - 1$ ga kamaytirib, $(x_1 - m + 1, ..., x_n - m + 1)$ tanlanmaga o‘tish kerak bo‘ladi.

Geometrik taqsimot. Chastota funksiyasi

$$f(x,p) = p(1-p)^{x-1},\ x = 1,2,...$$

bo‘lib, parametr $p \in (0,1)$.

Agar tasodifiy miqdor X geometrik taqsimotga ega bo‘lsa,

$$EX = \frac{1-p}{p},\ DX = \frac{1-p}{p^2},\ EX^3 = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}$$

bo‘ladi. Geometrik taqsimot manfiy binomial taqsimotning parametri $m = 1$ qiymatidagi xususiy holi bo‘ladi.

Parametr p ning optimal siljimas statistik bahosi

$$\hat{p} = \hat{p}(x) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\overline{x} + 1 - \frac{1}{n}}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Puasson taqsimoti. Chastota funksiyasi

$$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x=0,1,2,...$$

formula bilan aniqlanadi. Parametr $\lambda\in(0,\infty)$.

Agar tasodifiy miqdor X Puasson taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX=DX=\lambda$$

bo'ladi. Alohida qayd qilib o'tamizki, oxirgi tengliklar Puasson taqsimot uchun xarakteristik belgi (kriteriya) bo'lib xizmat qiladi.

Parametr λ uchun

$$\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}(x)=\bar{x}$$

funksiya optimal statistik baho bo'ladi.

7.3. Sug'urta to'lovi miqdorining ko'p qo'llaniladigan uzluksiz tipdagi taqsimotlari va ularning parametrlarini baholari

Tekis taqsimot. Zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta)=\frac{1}{b-a}I_x([a,b]),\ x\in R$$

formula bilan aniqlanadi, parametr $-\infty<a<b<\infty$.

Agar X tasodifiy miqdor parametrlari a va b bo'lgan tekis taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX=\frac{a+b}{2},\ DX=\frac{(b-a)^2}{12},\ EX^k=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)},\ k=1,2,...$$

bo'ladi. Agar $\theta=(a,b)$ bo'lsa, ya'ni ikkala parametrlar ham noma'lum bo'lsa, a va b larning optimal siljimas statistik baholari

$$\tilde{a}=\tilde{a}(x)=\frac{1}{n-1}\left[n\min_{1\le j\le n}x_j-\max_{1\le j\le n}x_j\right],$$

$$\tilde{b}=\tilde{b}(x)=\frac{1}{n-1}\left[n\max_{1\le j\le n}x_j-\min_{1\le j\le n}x_j\right]$$

bo'ladi. Agar $a=0$ va $\theta=b$ bo'lsa, parametr b ning optimal bahosi

$$\tilde{b}=\tilde{b}(x)=\frac{n+1}{n}\max_{1\le j\le n}x_j$$

funksiya ko'rinishida aniqlanadi.

Gamma – taqsimot. Mos keluvchi zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa} \\ \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}, & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu yerda $\Gamma(\alpha)$–Eylerning Gamma funksiyasi

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Parametrlar: $\lambda>0$ (masshtab parametri), $\alpha>0$ (forma parametri).

Agar tasodifiy miqdor X parametrlari α va λ bo'lgan Gamma–taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX=\frac{\alpha}{\lambda},\ DX=\frac{\alpha}{\lambda^2},\quad EX^k=\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{\lambda^k},\quad k=1,2,...$$

bo'ladi. Agar $\theta=(\alpha,\lambda)$, ya'ni ikkala parametrlar ham noma'lum bo'lsa, momentlar metodi baholari

$$\overline{\alpha}=\overline{\alpha}(x)=\frac{\overline{x}^2}{s^2},\quad \overline{\lambda}=\overline{\lambda}(x)=\frac{\overline{x}}{s^2},$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar $\theta=\lambda$, ya'ni faqat λ parametr noma'lum bo'lsa, optimal siljimas baho

$$\hat{\lambda}=\hat{\lambda}(x)=\frac{1-\frac{1}{n}}{\overline{x}}$$

formula orqali topiladi.

Ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot. Mos keluvchi zichlik funksiyasi

$$f(x,\lambda)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa} \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Parametr: $\lambda>0$.

Ko'rsatkichli taqsimot Gamma – taqsimotning $\alpha=1$ qiymatidagi xususiy holi bo'ladi.

Agar X tasodifiy miqdor parametri λ bo'lgan ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX=\frac{1}{\lambda},\quad DX=\frac{1}{\lambda^2},\quad EX^k=\frac{k!}{\lambda^k},\quad k=1,2,...$$

bo'ladi.

Parametr λ uchun optimal siljimas statistik baho

$$\hat{\lambda}=\hat{\lambda}(x)=\frac{1-\frac{1}{n}}{\overline{x}}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Erlang taqsimoti. Mos keluvchi zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa} \\ \frac{(\mu m)^m}{(m-1)!}x^{m-1}e^{-\mu mx}, & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Parametrlar: forma parametri $m\in\{1,2,...\}$, masshtab parametri $\mu>0$.

Erlang taqsimoti Gamma – taqsimotning parametrlari $\alpha=m, \lambda=\mu m$ qiymatlariga teng bo'lgandagi xususiy holi bo'ladi.

Agar tasodifiy miqdor X Erlang taqsimotiga ega bo'lsa (m va μ parametrlar bilan),

$$EX=\frac{1}{\mu},\quad DX=\frac{1}{m\mu^2},\quad EX^k=\frac{(m-k+1)}{(m-1)!(m\mu)^k},\quad k=1,2,...$$

tengliklar bajariladi.

Agar $\theta=(m,\mu)$, ya'ni ikkala parametrlar ham noma'lum bo'lsa, momentlar metodi baholari

$$\overline{m}=\left[\frac{\overline{x}^2}{s^2}\right]+1,\quad \overline{\mu}=\frac{1}{\overline{x}},$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar $\theta=\mu$, ya'ni faqat μ parametr noma'lum bo'lsa, optimal siljimas baho μ uchun

$$\overline{\mu}=\overline{\mu}(x)=\frac{m-\frac{1}{n}}{m\overline{x}}$$

funksiya bilan aniqlanadi.

Giperaksponensial taqsimot. Mos keluvchi zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa}\\ \sum\limits_{k=1}^{m} p_k\lambda_k e^{-\lambda_k x}, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Parametrlar: $m\in\{1,2,...\}$ va

$p=(p_1,...p_m),\quad p_1+...+p_m=1,\quad k=1,2,...,m\quad \lambda=(\lambda_1,...\lambda_m),$

$\lambda_k>0,\quad k=1,2,...,m$.

Zichlik funksiyasi $f(x,\theta)$ ning ko'rinishidan ma'lum bo'ladiki, giperaksponensial taqsimot chekli sondagi eksponensial taqsimotlarning $p=(p_1,...p_m)$ ehtimolliklar bilan "qorishmasidan" tashkil topadi.

Agar tasodifiy miqdor X giperaksponensial taqsimotiga ega bo'lsa,

$$EX^k=k!\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{\lambda_j^k},\qquad DX=2\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{\lambda_j^2}-\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{\lambda_j}\right]^2$$

formulalar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin bo'lmaydi.

Giperaksponensial taqsimot parametrlari statistik baholari uchun aniq ko'rinishdagi formulalar topib bo'lmaydi. Lekin amaliyotda $\theta=(m,p,\lambda)$ parametrlarning statistik baholari haqiqatga o'xshashlik funksiyasi

$$L(x,\theta)=\prod_{j=1}^{n}f(x_j,\theta)$$

ifodaning sonli maksimallashtirish usuli yordamida yetarli darajadagi aniqlik bilan hisoblash mumkin.

Veybull taqsimoti. Mos keluvchi zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa}\\ \lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Parametrlar: $\lambda>0$ (masshtab parametri), $\alpha>0$ (forma parametri).

Agar tasodifiy miqdor X parametrlari λ va α bo'lgan Veybull taqsimotiga ega bo'lsa,

$$EX=\lambda^{-1/\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right), \qquad DX=\lambda^{-2/\alpha}\left\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha^2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\},$$

$$EX^k=\lambda^{-k/\alpha}\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}+1\right),\ k=1,2,...$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Veybull taqsimoti $\alpha=1$ bo'lganda, ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimotga aylanadi.

Parametr α ning statistik bahosi (В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шорген Математические основа теории риска, 2011, 496 стр.)

$$\bar{\gamma}_3=\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)-3\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^3}{\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}^{3/2}}$$

tenglamani yechimi ko'rinishida topiladi. Bu yerda

$$\bar{\gamma}_3=\bar{\gamma}_3(x)=\frac{1}{ns^3}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\bar{x}\right)^3$$

taqsimotning asimmetriya tanlanma koeffitsiyenti.

Parametr α ning qiymatlari ma'lum bo'lganda va $n\alpha>1$ tengsizlik bajarilganda, λ parametrning siljimas optimal bahosi

$$\bar{\lambda}=\bar{\lambda}(x)=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{\alpha}\right)}\cdot\frac{1}{[T(x)]^{1/\alpha}},\ T(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j^{\ 3}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Ko'pchlik mualliflarning fikricha, Veybull taqsimoti, Gamma-taqsimot bilan bir qatorda sug'urta to'lovlari uchun eng qulay taqsimot modellaridan biri hisoblanadi.

Lognormal taqsimoti. Mos zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa}\\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Parametrlar: $\sigma>0$ (masshtab parametri), $-\infty<m<\infty$ (forma parametri).

Agar tasodifiy miqdor X parametrlari σ va m bo'lgan lognormal taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2} + m\right\}, \qquad DX = e^{\sigma^2 + 2m}\left(e^{\sigma^2} - 1\right),$$

$$EX^k = \exp\left\{\frac{k^2\sigma^2}{2} + km\right\}, \ k = 1,2,...$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tasodifiy miqdorning sug'urtaviy ko'rinishi juda ham aniq: agar Y tasodifiy miqdor parametrlari m va σ^2 bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsa,

$$X = e^Y$$

tasodifiy miqdor parametrlari σ^2 va m bo'lgan lognormal taqsimotga ega bo'ladi.

Parametr m ning optimal siljimas statistik bahosi

$$\bar{m} = \bar{m}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln x_j,$$

parametr σ^2 uchun esa, optimal siljimas statistik baho

$$\breve{\sigma}^2 = \breve{\sigma}^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln x_j\right)$$

formulalar bilan topiladi.

Xi-kvadrat taqsimot. Ozodlik darajasi m bo'lgan Xi-kvadrat taqsimotning zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta,m) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0 \text{ bo'lsa} \\ \dfrac{\theta^m x^{m-1} \exp\left\{-\dfrac{(\theta x)^2}{2}\right\}}{2^{m/2-1}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar tasodifiy miqdor X ozodlik darajasi m bo'lgan Xi-kvadrat taqsimotga ega bo'lsa,

$$EX^k = \frac{2^{k/2}\Gamma\left(\dfrac{m+k}{2}\right)}{\theta^k \Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}, \ k = 1,2,...$$

$$DX = \frac{m}{\theta^2} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\theta^2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right]^2.$$

Parametrlar θ va m uchun momentlar metodi bilan hosil qilinadigan statistik baholar

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\theta\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \\ \theta^2 s^2 = m + \left(2+\sqrt{2}\right)\left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right]^2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimlari bo'ladi.

Reley-Rays taqsimoti. Ozodlik darajasi $m=2$ bo'lgan Xi-kvadrat taqsimot Reley-Rays taqsimoti deb ataladi. Bu taqsimotning zichlik funksiyasi

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0 \text{ bo'lsa} \\ \theta^2 x \exp\left\{-\dfrac{(\theta x)^2}{2}\right\}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Reley-Rays taqsimoti parametri θ uchun momentlar usuli orqali topilgan eng sodda statistik baho

$$\bar{\theta}_n = \bar{\theta}_n(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

7.4. Ekspremental ma'lumotlarning sug'urta to'lovi taqsimot modeliga muvofiqligini tekshirish. Xi-kvadrat muvofiqlik kriyeriyasi

Biror stoxastik holatning matematik modelini o'rganilayotgan jarayonga adekvat bo'lishini statistik muvofiqlik kriteriylari orqali tekshiriladi. Bu bandda tanlanmada beriladigan eksperimental ma'lumotlarning, sug'urta to'lovini ifoda etadigan X tasodifiy miqdorning taqsimoti $F(x)=P(X<x)$ ga muvofiqligini Xi-kvadrat kriteyriy orqali o'rganamiz.

Faraz qilaylik,

$$X_1,...,X_n$$

noma'lum $F(x)$ taqsimotga ega bo'lgan bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lsin (ya'ni $X_1,...,X_n$ bog'liqsiz va umumiy $F(x)$ taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar). Bu $F(x)$ taqsimot funksiyasining ko'rinishini belgilaydigan $F_0(x)$ taqsimot (model) taklif etilgan deb faraz qilamiz. Tanlanma $X_1,...,X_n$ bo'yicha bu modelni adekvat (muvofiq) bo'lishini tekshirish (o'rganish), $F(x)\equiv F_0(x)$ ekanligi haqidagi statistik gipotezani tekshirish bilan teng kuchli bo'lgan masala bo'ladi. Masalani yechishda Xi-kvadrat muvoqlik kriteriysidan foydalanish mumkin. Quyida biz keltirilgan fikrni sharhlab o'tamiz.

Berilgan $X_1,...,X_n$ tanlanmani tartiblab

$$X_{(1)}<X_{(2)}<...<X_{(n)}$$

variatsion qator ko'rinishida yozamiz. Bu yerda $X_{(1)}$ – tanlanmaning eng kichik elementi, $X_{(n)}$ esa – tanlanmaning eng katta elementi ekanligini eslatib o'tamiz.

Faraz qilaylik, a va b – sonlar

$$a<X_{(1)},\quad b>X_{(n)}$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Demak, $X_1,...,X_n$ tanlanmaning hamma elementlari (a,b) oraliqda joylashgan bo'ladi. Endi $[a,b]$ oraliqni o'zaro kesishmaydigan k ta

$$\Delta_1,...,\Delta_k$$

teng bo'laklarga ajratamiz. Formal ravishda

$$\Delta_j=[a+(j-1)\delta,a+j\delta],\quad j=1,...,k,\quad \delta=\frac{b-a}{k}$$

belgilashlardan foydalanish mumkin. Δ_j ga joylashgan $X_1,...,X_n$ tanlanma elementlari sonini v_j deb qabul qilamiz. Gipoteza sifatida qabul qilingan $F_o(x)$ taqsimot funksiyasi orqali

$$p_j^{(o)}=F_o(j\delta)-F_o((j-1)\delta),\quad j=1,...,k$$

sonlarni aniqlaymiz. Bundan ko'rinadiki, $p_j^{(o)}$ – bosh to'plamning xohlagan elementini Δ_j oraliqqa tushish ehtimolligi bo'ladi va u $F(x) \equiv F_0(x)$ gipoteza o'rinli deb faraz qilinadigan holda hisoblangan.

Xi-kvadrat statistika deb

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_j - np_j^{(o)}\right)^2}{np_j^{(o)}}$$

miqdorga aytiladi.

Tanlanma

$$\bar{p}_j = \frac{\nu_j}{n},\ j = 1,\ldots,k$$

chastotalari orqali Xi-kvadrat statistikani

$$\chi^2 = n\sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\bar{p}_j - p_j^{(o)}\right)^2}{p_j^{(o)}}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Xi-kvadrat statistika tanlanma (tajribada kuzatiladigan) chastotalari yig'indisini, noma'lum bosh to'plamning (gipoteza sifatida qabul qilingan taqsimotning) chastotalaridan farqini xarakterlaydigan miqdor bo'ladi. Bu statistika qiymatlarini oshib borishi, qabul qilingan (gipoteza ko'rinishida) $F_o(x)$ taqsimotning eksperimental ma'lumotlar bilan adekvat emasligi (muvofiq bo'lmasligi) haqidagi statistik xulosalarga olib keladi. Haqiqatan ham, bu statistikaning qiymati qanchalik katta bo'lsa, gipotetik taqsimotning adekvatligi shunchalik kamroq bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin bo'lmaydi. Buni ko'pchilikka ma'lum bo'lgan Pirson teoremasi ham tasdiqlaydi: agar $F_o(x) = F(x)$ gipoteza o'rinli bo'lsa, tanlanma hajmi katta bo'lganda ($n \to \infty$) χ^2 – statistikaning taqsimoti, ozodlik darajasi $k-1$ bo'lgan, Xi-kvadrat taqsimotga yaqinlashadi.

Musbat kichik son α ni fiksirlab (amaliyotda $\alpha = 0{,}01$ yoki $\alpha = 0{,}05$ qiymatlar qabul qiladi), ozodlik darajasi $k-1$ bo'lgan, Xi-kvadrat taqsimotning $1-\alpha$ kvantili $\chi^2_{k-1}(1-\alpha)$ miqdorni ko'ramiz.

Gipoteza ($F_o \equiv F$) ni tekshirish jarayoni quyidagidan iborat bo'ladi. Xi-kvadrat statistikaning qiymati $\chi^2_{k-1}(1-\alpha)$ miqdor bilan taqqoslanadi: agar

$$\chi^2 > \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$$

tengsizlik bajarilsa, $F(x) \equiv F_o(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lishi haqidagi gipoteza rad etiladi, agar

$$\chi^2 \le \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$$

tengsizlik bajarilsa, eksperimental ma'lumotlar, taklif qilingan gipoteza ($F \equiv F_o$) ga qarama-qarshi emasligi haqidagi statistik xulosaga kelinadi. Bunda, $F \equiv F_0$ gipotezani, aslida bu tenglik o'rinli bo'lgan holda, rad etilishi ehtimolligi α ga teng bo'ladi.

Amaliyotda Xi-kvadrat kriteriyni

$$\min\left(np_1^{(o)},...,np_k^{(o)}\right) \ge 5$$

tengsizlik bajarilganda qo'llash mumkinligi tavsiya etilgan.

Qabul qilingan gipotezada $F_0(\cdot)$ taqsimot bosh to'plamni bir qiymatli ifoda etmagan holda ham Xi-kvadrat kriteriydan foydalanish mumkin. Masalan, gipoteza

$$F(x) \equiv F_0(x,\theta_1,...,\theta_r)$$

bo'lganda, ya'ni $F_0(\cdot)$ taqsimot bosh to'plam taqsimoti $F(\cdot)$ ni noma'lum parametr $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$ darajasida aniqlasa, Xi-kvadrat kriteriyni qo'llashdan oldin noma'lum parametr θ uchun $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1,...,\bar{\theta}_r)$ statistik bahoni topib, $p_j^{(o)}$ ehtimolliklarni

$$p_j^{(o)} = F_0(j\delta, \bar{\theta}_1,...,\bar{\theta}_r) - F_0((j-1)\delta, \bar{\theta}_1,...,\bar{\theta}_r), \quad j = 1,...,k$$

formulalar orqali hisoblash zaruriyati yuzaga keladi. Lekin, bu holda χ^2 tasodifiy miqdorning limit taqsimoti, ozodlik darajasi $k-r-1$ bo'lgan, Xi-kvadrat taqsimot bo'ladi. Demak, pirovard natijada, χ^2 miqdorni $(1-\alpha)$ kvantili bo'lgan $\chi^2_{k-r-1}(1-\alpha)$ son bilan taqqoslashga to'g'ri keladi. O'z-o'zidan tushunarli bo'ladiki, bu holda, $P\left(\chi^2_{k-1} < x\right)$ taqsimotdan ozodlik darajasi kichik bo'lgan $P\left(\chi^2_{k-r-1} < x\right)$ taqsimotga o'tish kerak bo'ladi va uning, oqibatida,

$x_1,...,x_n$ tanlanma orqali ro'yobga kelgan informatsiya miqdori kamayadi.

Demak, $F(x) \equiv F_o(x,\theta_1,...,\theta_r)$ gipotezaga asoslanib o'tkazilgan statistik baholash jarayonining ishonchliligi, $F(x) \equiv F_o(x)$ gipoteza holidagina sezilarli darajada farq qiladi.

Yuqorida keltirilgan fikrlarga asoslanib, Xi-kvadrat kriteriyni qo'llashda quyidagi holatlarni e'tiborga olish kerakligini eslatib o'tamiz:

1) Xi-kvadrat kriteriy asimptotik xarakterda bo'lib, χ^2 tasodifiy miqdorning taqsimoti faqat tanlanma hajmi "cheksiz katta bo'lgandagina", Xi-kvadrat taqsimot bilan ustma-ust tushadi. Funksional

$$P\left(\chi^2 < x\right) = P\left(\chi_n^2 < x\right) = F_n(x)$$

taqsimotlar ketma-ketligining Xi-kvadrat limit taqsimotga yaqinlashish tezligining darajasi, umuman aytganda, ma'lum emas. Shu sababli ham gipoteza o'rinli bo'lganda, uni qabul qilmaslik – xatoligi ehtimolligi α bilan ustma-ust tushmaydi;

2) agar tekshirilayotgan gipoteza $F(x) \equiv F_o(x)$ bosh to'plam taqsimotini bir qiymatli aniqlamasa, (ya'ni $F_o(x) = F_o(x,\theta)$ taqsimot noma'lum parametr θ ga bog'liq bo'lsa), $\chi^2 = \chi_n^2$ statistikaning limit taqsimoti (mos ozodlik darajalari bilan) Xi-kvadrat taqsimot bilan ustma-ust tushishi, faqat noma'lum parametr θ, maxsus polynomiall haqiqatga maksimal o'xshashlik metodi bilan baholangan holdagina isbot etilgan. Demak, $\chi^2 = \chi_n^2$ statistika uchun

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\chi_n^2 < x\right) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^x x^{k/2 - 1} e^{-x/2} dx, \; x > 0$$

limit teorema faqat shu holdagina o'rinli bo'ladi;

3) Xi-kvadrat statistika $\chi^2 = \chi_n^2$ miqdorning qiymatlarini hisoblash berilgan $x_1,...,x_n$ tanlanmaning elementlarini gistogrammalar ko'rinishida guruhlashga asoslangan bo'lgani uchun, bu statistikaning konkret qiymatlari tanlanmaning elementlarini guruhlash usuliga bog'liq bo'ladi, ya'ni ular intervallar soni k ga, a va b ($a < X_{(1)}$, $b > X_{(n)}$) nuqtalarni tanlashga bog'liq bo'ladi;

4) Xi-kvadrat kriteriysi tajribalarda kuzatilgan natijalarni u yoki bu gipotezaga muvofiq emasligi haqidagi xulosalar chiqarish imkonini beradi. Lekin bu kriteriy yordamida empirik natijalar konkret gipotezaga muvofiq bo'lishligi haqidagi xulosaga kelish mumkin xolos;

5) yuqorida aytilganlardan va $\chi^2 = \chi_n^2$ statistikaning ko'rinishidan kelib chiqadiki, empirik ma'lumotlarni konkret gipotezaga muvofiq bo'lishligini tekshirish jarayonida, Xi-kvadrat statistikaning haddan tashqari kichik bo'lgan (nolga yaqin) qiymatlari yuzaga kelishi mumkin. Bu esa tanlanma $X_1,...,X_n$ elementlari uchun bog'liqsizlik yoki bir xil taqsimlanish (bir jinslik) shartlari buzilganligini bildiradi. Demak, bu holatlarda Xi-kvadrat kriteriysi bo'yicha statistik xulosalar chiqarishdan oldin, tanlanmaning bog'liqsiz va bir jinsli bo'lishini tekshirib ko'rishga to'g'ri keladi. Matematik statistikada buni amalga oshirish uchun ishonchli bo'lgan statistik usullar mavjud.

7.5. Kolmogorovning muvofiqlik kriteriyasi

Agar bosh to'plamning taqsimoti $F(x)$ uzluksiz tipga tegishli bo'lsa, tanlangan modelning adekvatlik (muvofiqlik) xossasini tekshirish Kolmogorov kritetriysi orqali amalga oshiriladi. Bu kriteriyni tavsiflab o'tamiz.

Faraz qilaylik, bosh to'plam X tasodifiy miqdor bilan ifoda etilsin va bu to'plamdan hajmi n ga teng bo'lgan

$$X_1,...,X_n$$

tanlanma olingan bo'lsin. Demak, X_i tasodifiy miqdorlar birgalikda bog'liqsiz bo'lib,

$$F(x) = P(X < x) = P(X_1 < x) = ... = P(X_n < x)$$

tengliklar bajariladi.

Har qanday $x \in R$ uchun $\nu(x)$ tanlanmadagi x dan kichik bo'lgan X_i lar soni bilan aniqlanadigan tasodifiy miqdorni kiritamiz. Agar odatdagidek, $I_A(u)$ deb A to'plamning indikator funksiyasini belgilasak, ya'ni

$$I_A(u)=\begin{cases}1, & \text{agar } u\in A \text{ bo'lsa}\\ 0, & \text{agar } u\notin A \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$

tasodifiy miqdor $\nu(x)$ ni

$$\nu(x)=\sum_{j=1}^{n} I_{(-\infty,\, x)}(x_j)$$

ko'rinishida yozishimiz mumkin.

Eslatib o'tamizki, $(X_1,\dots,X_n)$ tanlanmaga mos keluvchi empirik taqsimot funksiya

$$F_n(x)=\frac{\nu(x)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{(-\infty,\, x)}(x_j), \quad -\infty<x<\infty$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Empirik taqsimot funksiyasi x ning har qanday fiksirlangan qiymati uchun tasodifiy miqdor bo'lib,

$$EF_n(x)=F(x), \quad DF_n(x)=\frac{1}{n}F(x)\big(1-F(x)\big)$$

tengliklar bajariladi. Demak, tanlanma hajmi n oshib borgan sari, empirik taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ noma'lum taqsimot funksiyasi $F(x)$ ga tobora yaqinlashib boradi. Haqiqatan ham, Chebishev tengsizligiga asosan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$P\big(|F_n(x)-F(x)|>\varepsilon\big)\le\frac{DF_n(x)}{\varepsilon^2}=\frac{F(x)\big(1-F(x)\big)}{n\varepsilon^2}\to 0, \quad n\to\infty$$

munosabat bajariladi. Aslida oxirgi munosabatni kuchaytiradigan va aniqlashtiradigan quyidagi tasdiq o'rinli: agar

$$D_n=\max_x|F_n(x)-F(x)|$$

belgilash kiritsak, $P(D_n\to 0)=1$ tenglik bajariladi. Bu tasdiq Glivenko-Kantelli teoremasi nomi bilan matematik statistikaning asosiy natijalaridan biri bo'lib hisoblanadi.

Faraz qilaylik, bosh to'plamning noma'lum taqsimoti $F(x)$ uchun $F(x)\equiv F_o(x)$ gipoteza taklif etilgan bo'lsin. Bu $F(x)$ taqsimot funksiyasi uzluksiz tipga tegishli deb hisoblaymiz. Oldingilardek $X_1,\dots,X_n$ tanlanmaga mos keluvchi empirik taqsimot funksiyasini $F_n(x)$ deb belgilaymiz. Berilgan tanlanmaning $F(x)\equiv F_o(x)$ gipotezaga muvofiq (adekvat) bo'lishini tekshirish uchun A.N.Kolmogorov (1903-1987) tomonidan quyidagi

$$D_n^{(o)} = \max_x |F_n(x) - F_o(x)|$$

statistika taklif etilgan bo'lib, uning asosiy xossalari o'rganilgan.

Kolmogorov statistikasi $D_n^{(o)}$ ning ma'nosi ancha ravshan bo'lib, u empirik $F_n(x)$ taqsimotning bosh to'plam taqsimoti uchun gipoteza ko'rinishida taklif etilgan $F_o(x)$ uzluksiz taqsimotdan og'ish (chetlanish) miqdorini belgilaydi. Bu statistikaning qiymatini tartiblangan variatsion qator

$$X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(n)}$$

orqali quyidagi formula yordamida ham hisoblash mumkin:

$$D_n^{(o)} = \max_{1 \le j \le n} |F_n(X_j) - F_o(X_j)|.$$

Ehtimollar nazariyasidan yaxshi ma'lum bo'lgan funksional markaziy limit teoremadan (Donsker-Proxorov invariantlik prinsipi, A.A.Боровков, Математическая статистика. M. Наука, 2002. § 1.6.11) quyidagi natija kelib chiqadi.

Teorema (A.N.Kolmogorov). Statistika $D_n^{(o)}$ uchun quyidagi limit munosabat o'rinli:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sqrt{n} D_n^{(o)} < x\right) = K(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Bu yerda $K(x)$ – limit funksiya Kolmogorov taqsimot funksiyasi deb ataladi.

Amaliyotda $X_1, ..., X_n$ tanlanma qiymatlar (eksperimental ma'lumotlar) $F(x) \equiv F_o(x)$ gipotezaga muvofiq bo'lishligi (ya'ni bu gipotezaga qarama-qarshi bo'lmasligi) quyidagicha tekshiriladi: ixtiyoriy kichik α musbat sonni fiksirlab, Kolmogorov taqsimot funksiyasining $1-\alpha$ ga mos keluvchi kvantilini $k(1-\alpha)$ orqali belgilaymiz. Bu holda, agar $\sqrt{n} D_n^{(o)} > k(1-\alpha)$ bo'lsa, $F(x) \equiv F_o(x)$ gipoteza rad etiladi. Agar $\sqrt{n} D_n^{(o)} \le k(1-\alpha)$ tengsizlik bajarilsa, eksperimental ma'lumotlar (tanlanma $X_1, ..., X_n$) $F(x) \equiv F_o(x)$ gipotezaga qarama-qarshi bo'lmasligi haqidagi xulosaga kelinadi va bunda bu gipotezaning noto'g'ri rad etilishi (ya'ni aslida, gipoteza o'rinli bo'lganda) ehtimolligi α ga teng bo'ladi. Izohlab o‘tilgan gipotezalarni qabul qilish usuli – *Kolmogorovning muvofiqlik kriteriysi* deb ataladi.

Kolmogorovning muvofiqlik kriteriysi faqat taklif qilingan gipoteza bosh to‘plamning noma’lum uzluksiz taqsimotini bir qiymatli aniqlagan holdagina qo‘llash mumkin bo‘ladi, xolos, ya’ni gipotezadagi $F_0(x)$ taqsimot hech qanday noma’lum parametrlarga bog‘liq bo‘lmasligi kerak. Masalan, bu kriteriya yordamida “bosh to‘plamning taqsimoti normal taqsimot funksiyasi bo‘ladi”, degan gipotezani tekshirib bo‘lmaydi, chunki normal taqsimotlar oilasi (uyushmasi) cheksiz katta bo‘lib, ulardan har biri $\left(a,\sigma^2\right)$ juft parametrlar bilan aniqlanadi. Lekin “bosh to‘plamning taqsimoti parametrlari $(0,1)$ bo‘lgan normal taqsimot funksiyasi” degan gipotezani tekshirish mumkin. Aytib o‘tilgan fikrni quyidagicha asoslash mumkin: bosh to‘plamning gipotetik taqsimoti $F_0(x)=F_0(x,\theta)$ noma’lum parametr θ ga bog‘liq bo‘lib, noma’lum parametr o‘rniga uning statistik bahosi $\tilde{\theta}(X_1,...,X_n)$ qo‘yilganda, $D_n^{(o)}$ statistikaning limit taqsimoti

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}D_n^{(o)}(\theta)<x\right)=P(x)$$

o‘zgarib, $P(x)$ taqsimot funksiyasi gipotetik $F_0(x,\theta)$ taqsimotning konkret ko‘rinishga va unga kiruvchi θ parametrni statistik baholash usuliga bog‘liq bo‘ladi. Bu esa o‘z navbatida, $F=F_0(x,\theta)$ gipotezani qabul qilish ehtimolligi uchun “statistik turg‘unlik” holati kuzatilmasdan, uni (bu ehtimollikni) fiksirlangan α ehtimollik bilan taqqoslash imkonini bermaydi.

7.6. Optimal modellarni tanlash

Yuqorida biz qabul qilingan sug‘urta to‘lovining konkret analitik modellar variantlarida noma’lum taqsimot funksiyasining parametrlari qiymatlari noma’lum bo‘lgani uchun, konkret ma’noda optimal bo‘lgan sug‘urta modellarini tanlashda statistik metodlardan foydalanishga to‘g‘ri kelishini eslatib o‘tgan edik. Bunda bosh to‘plamdan olingan tanlanmadagi ekspremental ma’lumotlarni bosh to‘plamning taqsimotiga muvofiqligini tekshirish imkoniyatini beradigan Kolmogorov kriteriyasining qo'llanishi ancha chegaralangan ekanligiga ham e'tibor berib o'tgan edik.

Bu punktda bosh to'plamning gipotetik taqsimotlari noma'lum parametrlarini (to'g'rirog'i ularning statistik baholarini) hisobga oladigan Xi-kvadrat kriteriyasi yordamida eng yaxshi bo'lgan (optimal) taqsimot modellarini tanlash masalasini o'rganamiz.

Sug'urta to'lovi uchun model taqsimot sifatida qabul qilinishi mumkin bo'lgan taqsimotlar ketma-ketligini $\{F_k, k \geq 1\}$ deb belgilaylik, ya'ni taqsimot funksiyalari $\{F_k\}$ bo'lgan bosh to'plamlar ketma-ketligini ko'ramiz (ixtiyoriy $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ taqsimotlar uyushmasi (sistemasi) uchun umumlashtirish trivial ravishda amalga oshiriladi). Quyida biz $\{F_k, k \geq 1\}$ modellar ketma-ketligidan kuzatilgan $(X_1,...,X_n)$ tanlanmaga eng muvofiq (adekvat) bo'lgan tanlash usulini keltiramiz.

Har bir bosh to'plam modeli uchun, ekspremental ma'lumotlarni guruhlash jarayonlarida noma'lum parametrlar olingan statistik baholarni bilgan holda Xi-kvadrat statistikaning qiymatlarini

$$T_k = T_k(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(n_j - np_j^{(k)}\right)^2}{np_j^{(k)}}$$

formula orqali hisoblaymiz. Bu yerda k – model taqsimot nomeri, $(x_1,...,x_n)$ – tanlanma $(X_1,...,X_n)$ qiymatlari vektori, m – guruhlash intervallar soni, $n_j - j-$ nchi intervalda (guruhga) joylashgan x_j lar soni, $p_j^{(k)} - k-$ model uchun kuzatilgan natijaning $j-$ nchi intervalga tushish ehtimolligi (ya'ni $k-$ nchi model taqsimot funksiyasi bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning qiymatini $j-$ intervalga joylashishi ehtimolligi).

Endi $r(k)$ deb, $k-$ taqsimotning tanlanma $(x_1,...,x_n)$ orqali baholangan parametrlari sonini belgilaymiz va har bir k uchun

$$P_k = 1 - X_{m-r(k)-1}(\tau_k)$$

ehtimolliklarni hisoblaymiz. Bu yerda $X_l(x)$ – ozodlik darajasi l bo‘lgan Xi-kvadrat taqsimot funksiyasi. Bu taqsimot

$$p(x)=\frac{x^{l/2-1}e^{-x/2}}{2^{l/2}\Gamma(l/2)},\ x>0$$

zichlik funksiyasi bilan aniqlanadi.

Tushunish qiyin emaski, P_k sonlar n ning yetarli katta qiymatlarida empirik taqsimot funksiyasining model taqsimotdan shunchalik va undan katta miqdorlarga og‘ishlik ehtimolliklariga teng bo‘ladi, ya’ni

$$P_k \approx P\left(\left|F_n(x)-F_k(x)\right|\le\tau_k\right).$$

Oxirgi munosabatdan eksprementaI ma’lumotlarga eng muvofiq (adekvat) bo‘ladigan model sifatida k_0 nomerli model qabul qilinishi ma’qul etganligi ko‘rinadiki, uning uchun

$$P_{k_0}=\max_k P_k$$

tenglik bajariladi.

7.7. Sug‘urta premiyalari va to‘lovlari orasidagi stoxastik bog‘liqliklar. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti

Sug‘urtalarning individual risk modellarini faktorizatsion variantlarini o‘rganishda sug‘urta predmetlarini tasodifiy miqdor Z ning qiymatlari deb tushunish kerakligini ko‘rib o‘tgan edik. Bu tasodifiy miqdor Z va sug‘urta to‘lovini ifodalaydigan X tasodifiy miqdor orasidagi korelatsiya koeffitsiyentini $r(Z,X)$ deb belgilasak,

$$r(Z,X)=\frac{E\left[(Z-EZ)(X-EX)\right]}{\sqrt{DZ}\sqrt{DX}}$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bu miqdor Z va X orasidagi stoxastik bog‘liqlikning sonli xarakteristikasi bo‘lib xizmat qiladi. Bosh to‘plam (Z,X) ikki o‘lchovli tasodifiy vektorning qiymatlaridan tashkil topgan

$$(Z_1,X_1),...,(Z_n,X_n)$$

tasodifiy vektorlar sistemasi tanlanma deb ataladi va unda

$$(Z_i,X_i),\ (Z_j,X_j),\ i\ne j,\ i,j=1,...,n$$

tasodifiy vektorlar bog‘liqsiz va umumiy

$$P(Z_i < z, X_i < x) = P(Z < z, X < x) = F(z, x)$$

taqsimotga ega deb hisoblanadi.

Korrelatsiya koeffitsiyenti $r(Z, X)$ uchun statistik baho

$$\overline{r}_n(Z,X) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(z_j - \overline{z})(x_j - \overline{x})}{n s_z s_x} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(z_j - \overline{z})(x_j - \overline{x})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(z_j - \overline{z})^2 \sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j x_j - n\overline{z}\overline{x}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(z_j - \overline{z})^2 \sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}}$$

tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti deb atalib, u kelgusida foydalaniladigan bir necha xil statistik xossalarga ega bo'ladi. Bu yerda

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j,\ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j,\ s_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(z_j - \overline{z})^2,\ s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$$

belgilashlar ishlatilgan.

Chiziqli regressiya. Eng kichik kvadratlar metodi

Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlik analizi bilan bog'liq masalalarni o'rganishda tasodifiy miqdorlar uchun kiritilgan korrelatsiya koeffitsiyenti tushunchasi muhim rol o'ynaydi.

Faraz qilaylik, Z va X tasodifiy miqdorlar orasidagi o'zaro bog'liqlik darajasini aniqlash uchun

$$EZ = aEX + b \qquad (1)$$

tenglik bajarilgan bo'lsin (ya'ni EZ qiymat EX ning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin).

Keltirilgan (1) tipidagi bog'lanishlar bevosita kuzatilgan (Z_j, X_j) miqdorlarga aloqador bo'lmasdan ularning o'rta qiymatlari EZ va EX larni "bog'laydi". Matematik statistikada (1) ko'rinishidagi bog'liqliklar Z ni X ga chiziqli regressiyasi deb ataladi. Munosabat (1) ga (Z_j, X_j) kuzatilgan miqdorlar orasidagi

$$Z_j = aX_j + b + \varepsilon_j \tag{2}$$

munosabatlar mos keladi va bunda $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$E\varepsilon_1 = ... = E\varepsilon_n = 0$$

tengliklar bajariladi.

Modellar (1) va (2) dagi a va b parametrlar noma'lum deb hisoblanib, ularning statistik baholarini

$$(Z_1, X_1),...,(Z_n, X_n)$$

tanlanma orqali topish kerak bo'ladi. Bu noma'lum parametrlarni effektiv baholash usuli Z_j miqdorni $aX_j + b$ dan og'ishlari kvadratlari yig'indisini minimallashtirishdan iborat bo'ladi: agar a va b lar uchun

$$\hat{a}(Z_j, X_j), \quad \hat{b}(Z_j, X_j)$$

funksiyalar statistik baholar bo'lsa,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - \hat{a}x_j - \hat{b}\right)^2 = \min_{a,b}\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - ax_j - b\right)^2$$

yoki a va b larning mumkin bo'lgan hamma qiymatlari uchun

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - \hat{a}x_j - \hat{b}\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n}\left(z_j - ax_j - b\right)^2 = \psi(a,b)$$

tengsizlik bajarilishi kerak bo'ladi. Statistik baholar $\hat{a}$, $\hat{b}$ lar

$$\frac{\partial}{\partial a}\psi(a,b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b}\psi(a,b) = 0$$

tenglamalar sistemasini yechimi bo'ladi. Olding punktda kiritilgan belgilashlardan foydalansak, quyidagi yechimlarga ega bo'lamiz:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{j=1}^{n} z_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{j=1}^{n} z_j - \bar{x}\bar{z}}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - (\bar{x})^2}, \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}.$$

Statistik baho $\hat{a}$ uchun yozilgan formulani soddalashtirib

$$\hat{a} = \bar{r}_n(Z, X)\cdot\frac{s_z}{s_x}$$

tenglikni olamiz.

7.8. Sug'urta riskni qayta sug'urtalash orqali kamaytirish.

Qayta sug'urtalash shartnomalarining mohiyati va turlari

Yaxshi ma'lumki, har qanday sug'urta shartnomalarining asosida jismoniy va huquqiy shaxslarning baxtsiz (sug'urta) hodisalarni ro'y berishi bilan bog'liq bo'lgan talofatlardan saqlanish yotadi. Sug'urta shartnomasi tuzilgunga qadar mijozda qandaydir risk mavjud bo'lib, u bilan bog'liq hodisalar ro'y berganda tasodifiy miqdor X bilan ifodalanadigan talofatlar yuzaga kelgan bo'lar edi. Bunda sug'urta hodisalarining ro'y berish ehtimolligini kichikligi, lekin ulardan talofatlarni juda katta bo'lishi hal qiluvchi rol o'ynaydi. Sug'urta shartnomasi tuzilishi oqibatida, mijoz sug'urta kompaniyasiga tasodifiy bo'lmagan $\rho=(1+\theta)EX$ to'lov hisobiga o'ziga xavf tug'diradigan riskdan qutulganday bo'ladi (bu yerda θ – sug'urta "yuklamasi" bo'lib, uni sug'urta kompaniyasi belgilaydi). Lekin risk yo'qolmaydi, uni sug'urta kompaniyasi qabul qiladi va sug'urta portfeli hajmi yetarli darajada katta bo'lganda (sug'urtalanuvchi shaxslar ko'p bo'lgan holda) kompaniyaning kasod bo'lishli ehtimolligini mumkin qadar kichraytirish imkoniyatiga ega bo'ladi. Shunga qaramasdan, kompaniya katta miqdordagi sug'urta to'lovlarini amalga oshirishga to'g'ri kelishi mumkin. Buning oqibatida sug'urta kompaniyasi kasod bo'lishi mumkin.

Aytib o'tilgan muammoni yechish uchun sug'urta kompaniyasida yagona – o'z risklarini boshqa kompaniyada sug'urta qilish imkoniyati qoladi, xolos. Sug'urtaning bu varianti qayta sug'urtalash (reinsurance) deb ataladi.

Bevosita sug'urta qiluvchi va o'zidagi riskning bir qismini boshqa kompaniyada sug'urtalovchi kompaniya, uzatuvchi kompaniya (ceding company), boshlang'ich kompaniyani sug'urta qiluvchi kompaniyani esa, qaytasug'urtalovchi kompaniya (reinsurance company) deb yuritiladi.

Qayta sug'urtalash jarayonida haddan tashqari katta bo'lgan individual risklar, yoki ma'lum bir davrdagi (masalan, bir yil) yig'indi risklar sug'urta qilinishi mumkin. Iqtisodiy va huquqiy ma'noda tubdan farq qiladigan sug'urta variantlari matematika nuqtayi nazaridan, qayta sug'urtalash deb qabul qilinishi mumkin. Masalan, bir nechta kompaniyalar o'zaro sug'urtalash (so-insurance) shartnomalari tuzganda, yoki bir nechta kompaniyalar ishtirokida mijoz bilan jamoa shartnoma tuzilganda, mijozlar guruhi (masalan, bitta korxonada xizmat qiladigan) bilan birgalikda tuzilgan shartnomalar qayta sug'urtalash modellari sifatida qaralishi mumkin.

Qayta sug'urtalash shartnomalarini har xil tiplarga bo'linganida, birinchi navbatda, uzatuvchi va qayta sug'urtalovchi kompaniyalari o'ziga oladigan mas'uliyatlar muhim rol o'ynaydi.

Agar uzatuvchi kompaniya har bir sug'urta to'lovining $\alpha(0 \le \alpha \le 1)$ qismini, qayta sug'urtalovchi kompaniya esa qolgan $1-\alpha$ qismini qoplasa, bunday qayta sug'urtalash proporsional sug'urtalash deb ataladi. Shunday qilib, proporsional qayta sug'urtalashda har qanday sug'urta to'lovi X miqdor qayta sug'urtalash kompaniyasiga $X^* = (1-\alpha)X$ miqdordagi to'lov talabini yuzaga keltiradi. Buning oqibatida, uzatuvchi kompaniyaning sug'urta to'lovi X dan $X_{(\alpha)} = X - X^* = X - (1-\alpha)X = \alpha X$ miqdorga kamayadi.

Endi faraz qilamizki, uzatuvchi kompaniya mustaqil ravishda r so'mdan katta bo'lmagan hamma sug'urta to'lovlarini qoplash majburiyatini olib, qolgan r so'mdan katta bo'lgan to'lovlarni esa qayta sug'urtalash kompaniyasiga o'tkazadi.

Agar bu qoida har bir individual riskga qo'llansa, bunday sug'urta modeli-talofatdan yuqori yoki ekssedentli qayta sug'urtalash (excess of loss reinsurance) nomi bilan amalga oshiriladi. Parametr r chegaralash limiti deb ataladi. Agar bu qoida ma'lum davr davomida yuzaga kelgan umumiy (yig'indi) sug'urta to'lovlariga nisbatan qo'llansa, mos qayta sug'urtalash modeli-talofatni to'xtatadigan qayta sug'urtalash yoki ziyonli ekssedent asosidagi qayta sug'urtalash deb ataladi. Bu holda parametr r franshiza yoki chegirmali franshiza (deductible) deb hisoblanadi.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, talofatni to'xtatadigan (ekssedentli) qayta sug'urtalash modellarida har bir X miqdordagi sug'urta to'lovi, qayta sug'urtalash kompaniyasiga qo'shimcha ravishda

$$X^{*}=(X-r)^{+},\ \left(a^{+}=\max(a,0)=\begin{cases}a, a\geq 0\\ 0, a<0\end{cases}\right)$$

miqdordagi sug'urta to'lovini o'tkazadi. Shunday qilib, o'tkazuvchi sug'urta kompaniyasining haqiqiy to'lovi

$$X^{r}=X-X^{*}=X-(X-r)^{+}=\min(X,r)$$

so'mni tashkil qiladi. Oxirgi tenglik qayta sug'urtalash oqibatida boshlang'ich (o'tkazuvchi) sug'urta kompaniyasining talofat miqdori X dan, $X^{(r)}=\min(X,r)$ miqdorgacha kamayishini ko'rsatadi.

Turli xil tipdagi qayta sug'urtalash shartnomalarini, umumiy nuqtayi nazardan, x talofat yuzaga kelganda, qayta sug'urtalash kompaniyasi to'lashi kerak bo'lgan $h(x)$ miqdor (funksiya) orqali ifodalash mumkin bo'ladi. Masalan, proporsional qayta sug'urtalash modelida $h(x)=(1-\alpha)x$, talofatni to'xtatadigan (ekssedentli) sug'urta variantida esa, $h(x)=(x-r)^{+}$ tengliklar bajariladi.

Qayta sug'urtalash kompaniyasi o'tkazuvchi kompaniyadan risklarni ma'lum biror bir aniq premiyalar hisobiga o'ziga qabul qiladi va bu hodisa oddiy sug'urtalash faoliyatiga o'xshash bo'ladi. Shuning uchun ham qayta sug'urtalash premiyalarini tanlash ham oddiy sug'urtalash variantlaridagi qoidalarga asoslanadi, ya'ni qayta sug'urtalash kompaniyasi X miqdordagi riskni sug'urtalash uchun

$$P=\left(1+\theta^{*}\right)Eh(X)$$

miqdordagi premiyani talab qiladi. Bu yerda $Eh(X)-$ qayta sug'urtalash kompaniyasi uchun kutilgan risk, $\theta^{*}-$ bu kompaniya belgilaydigan sug'urta yuklamasi.

Biz qayta sug'urtalash shartnomalarini o'tkazuvchi kompaniya nuqtayi nazaridan o'rganamiz. Shuning uchun ham qayta sug'urtalash kompaniyasi belgilagan sug'urta yuklamasi (θ^{*}) fiksirlangan deb hisoblanadi. Asosiy muammo qayta sug'urtalash shartnomasini tanlashdan iborat bo'lib, unda birinchi navbatda, asosiy sonli xarakteristika bo'lgan – talofatni chegaralaydigan parametrni optimal tanlash muhim hisoblanadi. Bu muammoning analitik analizi juda ham murakkab ekanligidan, quyida biz uni sonli misollarda bayon etish bilan chegaralanib qolamiz.

7.9. Individual risk modelida qayta sug'urtalash

Eslatib o'tamizki, sug'urtaning individual risk modeli – kompaniyaning kasodlik ehtimolligini hisoblashda eng sodda bo'lgan sug'urta varianti hisoblanadi. U quyidagi soddalashtirish uchun kiritilgan shartlarga asoslanadi:

1) sug'urta faoliyati fiksirlangan va nisbatan qisqa vaqt davomida (inflatsiya va investitsiyadan keladigan daromadlari hisobga olmaslik mumkin bo'lgan holda) odatda – 1 yillik muddatda o'rganiladi;

2) shartnomalar soni N fiksirlangan va tasodifiy bo'lmagan son deb hisoblanadi;

3) sug'urta uchun to'lov (premiya) sug'urta faoliyatining boshida o'tkaziladi (sug'urta faoliyati davomida hech qanday premiyalar yig'ilmaydi);

4) biz har bir sug'urta shartnomasini alohida urganamiz va natijada sug'urta to'lovini ifoda etadigan tasodifiy miqdor X haqida statistik ma'lumotlarga ega bo'lamiz. Bunda hamma sug'urta shartnomalari sug'urta to'lovlariga olib kelmasligi hisobga olinadi, ya'ni $i-$ shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovini X_i deb belgilasak,

$$X_1, X_2, ..., X_N$$

tasodifiy miqdorlar orasida nolga teng bo'lganlari ham mavjud bo'lishi mumkin.

Keltirilgan sug'urta modeli doirasida sug'urta kompaniyasining kasodga uchrashi ehtimolligi umumiy (yig'indi)

$$S_N = X_1 + ... + X_N$$

risk bilan aniqlanadi. Agar bu yig'indi S_N riskning qiymatlari, kompaniyasining rezerv fondidan katta bo'lsa, kompaniya o'z majburiyatlarini bajara olmaydi va kasodga uchraydi. Shuning uchun kompaniyaning kasod bo'lishligi ehtimolligi

$$\psi(u) = P\left(X_1 + ... + X_N > u\right)$$

formula bilan aniqlanadi (bu yerda $u-$ kompaniyaning boshlang'ich kapitali). Boshqacha aytganda, kasodlik ehtimolligi – yig'indi risk S_N ning taqsimotiga to'ldiruvchi bo'lgan taqsimot funksiyasi.

Proporsional qayta sug'urtalash

Bu sug'urtalash variantida, agar har bir individual risk X tasodifiy miqdor bilan ifoda etilsa, shunday α $(0 \le \alpha \le 1)$ son tayin etiladiki, αX riskni uzatuvchi sug'urta kompaniyasi, $(1-\alpha)X$ riskni esa qayta sug'urtalash kompaniyasi qoplaydi.

Bu holda qayta sug'urtalashdan keyin uzatuvchi kompaniyaning yig'indi riski $S_N = X_1 + ... + X_N$ kamayib,

$$\alpha S = \alpha X_1 + ... + \alpha X_N$$

miqdorga teng bo'ladi.

Lekin, shu bilan bir vaqtda uzatuvchi kompaniyaning kapitali ham kamayadi. Qayta sug'urtalash shartnomasi tuzilgunga qadar bu kapital

$$u + (1+\theta)ES$$

miqdorga teng bo'ladi. Bu yerda u-boshlang'ich kapital, θ–nisbiy sug'urta yuklamasi. Qayta sug'urtalash shartnomasi tuzilishi oqibatida qayta sug'urtalash kompaniyasiga

$$\left(1+\theta^*\right)\left(1-\alpha\right)ES$$

miqdordagi kapitalni to'lash to'g'ri keladi. Bu yerda $(1-\alpha)ES$ – kutilgan yig'indi risk qayta sug'urtalash kompaniyasiga taqdim etiladi, θ^*– nisbiy sug'urta yuklamasi va u qayta sug'urtalash kompaniyasi tomonidan belgilanadi. Aytilganlardan qayta sug'urtalash shartnomasi tuzilgandan keyin kompaniyaning rezerv fondi

$$u + (1+\theta)ES - (1+\theta^*)(1-\alpha)ES = u + \left[\theta - \theta^* + (1-\theta^*)\alpha\right]ES$$

miqdorga teng bo'ladi.

Mos ravishda, kasodlik ehtimolligi uchun

$$P\left(\alpha S > u + \left[\theta - \theta^* + \left(1 + \theta^*\right)\alpha\right] ES\right) = P\left(S > \left[1 + \theta^* + \left(u / ES + \theta - \theta^*\right)\alpha\right] ES\right).$$

tenglik bajariladi.

Agar $\theta^* < \theta + u / ES$ bo'lsa, αko'rsatkich 1 dan (qayta sug'urtalash bo'lmaydi), to 0 gacha (to'la qayta sug'urtalash) kamayganda, kasodlik ehtimolligi boshlang'ich $P(S > [1 + \theta + u / ES] \cdot ES)$ qiymatdan 0 gacha kamaydi. Lekin, shu bilan bir vaqtda uzatuvchi kompaniyaning daromadi

$$I = (1 + \theta)ES - (1 + \theta^*)(1 - \alpha)ES - \alpha ES = \left[\theta - \theta^* + \alpha\theta^*\right] ES$$

ham kamayadi. Bunda $\theta^* > \theta$ bo'lgan holda, kompaniya uchun to'la qayta sug'urtalash holati ro'y berganda, $(\theta^* - \theta)ES$ miqdor ham kamayadi. Bu holda, o'z-o'zidan ko'rinadiki, parametr α ning qiymati $(\theta^* - \theta)/\theta^*$ ifodadan kichik bo'lganda, kutilgan daromad 0 ga teng bo'ladi.

Agar $\theta^* > \theta + u / ES$ bo'lsa, α ko'rsatkich kamayganda, kasodlik ehtimolligi o'sib boradi va shu sababli qayta sug'urtalashdan voz kechish kerak bo'ladi.

Agar $\theta^* = \theta + u / ES$ tenglik bajarilsa, kasodlik ehtimolligi, umuman, α ko'rsatkichga bog'liq bo'lmaydi. Lekin α ko'rsatkich kamayganda, uzatuvchi kompaniyaning kutilgan daromadi I ham kamayib borgani uchun, bu holda ham qayta sug'urtalash imkoniyatidan voz kechishga to'g'ri keladi.

7.10. Talofatdan yuqori (ekssedentli) qayta sug'urtalashlar

Sug'urta hodisasidan keladigan talofatlar uchun qandaydir r chegara tayinlanadi. Agar individual risk miqdori X chegara r dan katta bo'lmasa, $(X \le r)$ uzatuvchi kompaniya bunday risklarni o'zi mustaqil ravishda qoplaydi. Agar $X > r$ bo'lsa, uzatuvchi kompaniya $X - r$ riskni qayta sug'urtalash kompaniyasiga o'tkazadi. Shunday qilib, X risk uzatuvchi kompaniya uchun

$$X^{(r)} = \min(X, r)$$

riskka, qayta sug'urtalash kompaniyasi uchun esa

$$\max(X - r, 0) = X - X^{(r)}$$

riskka aylanadi. Demak, bunday qayta sug'urtalash sxemasida X sug'urta riski $\min(X,r)$ yoki $\max(X-r,0)$ miqdorga kamayadi va uni "riskni chegaralaydigan yoki ekssedentli" sug'urtalash deb ataladi.

Faraz qilamiz, uzatuvchi kompaniya N ta bir xil tipdagi shartnomalar portfeliga ega bo'lib, X_i – i–nchi shartnomadagi sug'urta riskini ifoda etsin. Bu holda

$$X_1, X_2, ..., X_N, \quad N \geq 1$$

tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan deb hisoblanadi. Aytilganlardan kelib chiqadiki, bunday qayta sug'urtalash amalga oshirilishi oqibatida, uzatuvchi kompaniyaning umumiy (yig'indi) sug'urta riski

$$S = X_1 + ... + X_N$$

kamayadi va u

$$S^{(r)} = X_1^{(r)} + ... + X_N^{(r)}$$

miqdorga teng bo'ladi. Lekin, shu bilan bir vaqtda uzatuvchi kompaniyaning kapitali ham kamayadi. Qayta sug'urtalash shartnomasi tuzilgunga qadar bu kapital (soddalashtirish uchun faqat sug'urta badali (premiyasi) hisobga olingan holda)

$$NP = N(1+\theta)P_0$$

va bu yerda $P_0 = EX$ – netto premiya, θ – nisbiy sug'urta yuklamasi.

Qayta sug'urtalash shartnomasi uzatuvchi kompaniyaning qayta sug'urtalash kompaniyasiga

$$N(1+\theta^*) \cdot (EX - EX^{(r)})$$

so'm miqdorini o'tkazishni taqozo qiladi. Bu yerda $(EX - EX^{(r)})$ – qayta sug'urtalash kompaniyasidan talab etiladigan individual sug'urta to'lovining matematik kutilmasi, θ^* – qayta sug'urtalash kompaniyasi belgilagan nisbiy sug'urta yuklamasi.

Demak, qayta sug'urtalash shartnomasi tuzilgandan keyin uzatuvchi kompaniyaning kapitali

$$N(1+\theta)EX - N(1+\theta^*)(EX - EX^{(r)}) = N(\theta - \theta^*)EX + N(1+\theta^*)EX^{(r)}$$

miqdorga teng bo'ladi.

Bularga mos ravishda kasodlik ehtimolligi

$$P(S^{(r)} > N(\theta - \theta^*)EX + N(1+\theta^*)EX^{(r)})$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Markaziy limit teoremadan (Gauss approksimatsiyasi) foydalanib, qayta sug'urtalash shartnomasi tuzilgandan keyin bu ehtimollik uchun

$$P\left(\frac{S^{(r)}-NEX^{(r)}}{\sqrt{NDX^{(r)}}}>\frac{N\left(\theta-\theta^{*}\right)EX+N\theta^{*}EX^{(r)}}{\sqrt{N\,DX^{(r)}}}\right)\approx$$

$$\approx 1-\Phi\left(\sqrt{N}\frac{\left(\theta-\theta^{*}\right)EX+\theta^{*}EX^{(r)}}{\sqrt{DX^{(r)}}}\right)$$

taqribiy formulani yozish mumkin.

Bu formuladan tushunarli bo'ladiki, kasodlik ehtimolligini minimizatsiyalash masalasi, $\Phi(\cdot)$ funksiyaning argumentini maksimizatsiyalash masalasiga teng kuchli bo'ladi. Shunday qilib, qayta sug'urtalash maqsadga muvofiqligi yoki muvofiq bo'lmasligi haqidagi masalani yechish uchun, talafot chegarasi r ga bog'liq

$$\varphi(r)=\frac{\left[\left(\theta-\theta^{*}\right)\cdot EX+\theta^{*}.E\min(X,r)\right]^{2}}{D\left(\min(X,r)\right)}$$

funksiyaning $r\in[0,\infty]$ oraliqdagi global maksimumni aniqlash kerak bo'lar ekan. $\varphi(r)$ ning ko'rinishidan, bu funksiya $r=\infty$ yoki $r=0$ bo'lgandagina maksimum qiymatga erishishi kelib chiqadi. Agar bu maksimum $r=\infty$ bo'lganda erishilsa, qayta sug'urtalash maqsadga muvofiq emas. Agar bu maksimum $r=0$ bo'lganda erishilsa, hamma shartnomalarni qayta sug'urtalash kerak bo'ladi.

Agar kompaniyaning sug'urta portfeli turli xil shartnomalardan tashkil topgan bo'lsa, yuqoridagilarga o'xshash formulalarni yozish mumkin, lekin ulardan aniq analitik xulosalarga kelib bo'lmaydi. Shunga qaramasdan, ba'zi konkret masalalarda ma'noga ega bo'lgan analiz o'tkazish mumkin.

Masala 1. Faraz qilamizki, sug'urta kompaniyasi N=10000 bir xil tipdagi hayot sug'urta shartnomalarini 1 yil muddatga imzolagan bo'lsin. Shartnomaga asosan, sug'urtalangan Shaxs qarindoshlari, agar u 1 yil davomida baxtsiz hodisa sababli vafot etsa 1000000 so'm, tabiiy o'lim bilan vafot etsa 100000 so'm sug'urta to'lovlari oladi (agar u yil davomida vafot etmasa, qarindoshlarga hech narsa to'lanmaydi). Baxtsiz hodisa sababli o'lim ro'y berishi ehtimolligi $5\cdot10^{-4}$, tabiiy sabablar bilan o'lim ro'y berishi ehtimolligi $2\cdot10^{-3}$ bo'lsin. Kompaniya sug'urta premiyasini kasodlik ehtimolligini 5%, ya'ni 0,05 ehtimollikni ta'min etadigan qilib tanlaydi. Talofat chegarasi 100000 so'mdan, 1000000 so'mgacha o'zgarganda, qayta sug'urtalash kompaniyasi qayta sug'urtalash narxini, sug'urta to'lovi o'rta qiymatining 160% qilib tayinlanganda (ya'ni qayta sug'urtalash banki nisbiy sug'urta yuklamasini 60% deb belgilaydi), qayta sug'urtalash shartnomalari tuzish maqsadga muvofiq bo'lishi masalasini o'rganamiz.

Yechish. Individual risk $10^6, 10^5$ va 0 qiymatlarni mos ravishda $5\cdot10^{-4}$, $2\cdot10^{-3}$ va $1-25\cdot10^{-4}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Individual riskning o'rta qiymati (ya'ni, netto premiya)

$$P_0 = EX = 5\cdot10^{-4}\cdot10^6 + 2\cdot10^{-2}\cdot10^5 = 500 + 200 = 700,$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 5\cdot10^{-4}\cdot10^{12} + 2\cdot10^{-3}\cdot10^{10} - 700^2 =$$

$$= 5\cdot10^6 + 2\cdot10^7 - 49\cdot10^4 \square\, 5{,}2\cdot10^8.$$

Kompaniya kasodlik ehtimolligini 0,95 ga teng qilib tayinlaganini hisobga olib premiya

$$P = EX + \frac{x_{0,0/5}\sqrt{DX}}{\sqrt{N}} = 700 + \frac{1{,}645\sqrt{5{,}2}.10^4}{10^7} \approx 1075 \text{ so'm}.$$

Nisbiy sug'urta yuklamasi

$$\theta = \frac{x_{0,0/5}}{\sqrt{N}}\cdot\frac{DX}{EX} \approx \frac{1{,}645\sqrt{5{,}2}\cdot10^4}{10^7\cdot700} \approx 53{,}59\%.$$

Bu yerda x_α $(0\le\alpha\le1)$ $-\alpha$ ehtimollikka mos keluvchi normal taqsimot kvantili. Individual riskning variatsiya koeffitsiyenti

$$\frac{\sqrt{DX}}{EX} = \frac{\sqrt{5{,}2}.10^4}{700} \approx 32{,}58.$$

Nisbiy sug'urta koeffitsiyenti θ ning qiymati ancha kattaligini variatsiya koeffitsiyentining kattaligi bilan tushuntirish mumkin.

Endi faraz etamizki, kompaniya 100000 so'mdan katta qiymatdagi risklarni qaytasug'urtalashga qaror qilgan bo'lsin. Demak, talofot chegarasi $r = 100000 = 10^5$. Bu holda uzatuvchi kompaniyaning sug'urta riski ikkita qiymat qabul qiladi: 100000 va 0 ni mos ravishda $25\cdot10^{-4}$ va $1-25\cdot10^4$ ehtimolliklar bilan. Bu risklarni o'rta qiymati va dispersiyasi

$$EX^{(r)} = 10^5\cdot25\cdot10^{-4} = 250,$$

$$DX^{(r)} = 25 \cdot 10^{-4} \left(1 - 25 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 10^{10} \approx 25 \cdot 10^{6}.$$

Bu individual sug'urta riskning variatsiya koeffitsiyenti ancha kamayadi:

$$\frac{\sqrt{DX^{(r)}}}{EX^{(r)}} = \frac{5.10^{3}}{250} = 20.$$

Bu esa kasodlik ehtimolligini kamayishiga olib kelishi mumkin. Lekin, shu bilan bir vaqtda uzatuvchi kompaniyaning kapitali ham kamayadi, chunki ma'lum miqdordagi mablag'ni qayta sug'urta bankiga to'lash kerak bo'ladi. Qayta sug'urtalashning foydali bo'lishi haqidagi savolga javob bu ikki faktorga bog'liq bo'ladi.

VIII bob. AKTUAR MATEMATIKA BO'YICHA MASALALAR YECHISH

Bu bo'limda Aktuar matematika kursi bo'yicha masalalar to'plami keltirilgan va ular Kaliforniyadagi (AQSH)' San- Diego universiteti professori V.I.Rotar tomonidan yozilgan "Actuarial Models" (Chapman and Hall Press, 2007) va Moskva Davlat universiteti professori G.I.Falin tomonidan yozilgan "Теория риска для актуариев в задачах." (Изд-во «Мир», Moskva, 2004) kitoblaridan olingan.

8.1. Individual risk modeli

Individual risk modeli – sug'urta kompaniyasining kasodlik ehtimolini hisoblashga mo'ljal qilingan eng sodda modellardan hisoblanadi va u sug'urta holatlari uchun quyidagi shartlarning bajarilishini talab qiladi.

1. Nisbatan qisqa – fiksirlangan vaqt (odatda 1 yil) davomidagi sug'urta holatlarini tahlil etiladi. Bunda, demak, inflatsiya va investitsiya oqibatida olingan daromadlarni hisobga olinmaydi.
2. Shartnomalar soni (sug'urta qilingan shaxslar) N fiksirlangan va tasodifiy emas.
3. Sug'urta mukofotlari shartnoma tuzilgunga qadar kiritiladi va shartnoma davomida hech qanday pul tushumi bo'lmaydi.
4. Har bir sug'urta shartnomasi alohida kuzatiladi va u bilan bog'liq sug'urta to'lovi muddatini ifoda etadigan X tasodifiy miqdor o'rganiladi.

8.1.1. Uzluksiz tipdagi individual risk modellari bo'yicha masalalar

Sug'urta modelidagi individual risklarni belgilaydigan

$X_1,...,X_N$

tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liqsiz deb hisoblanadi (xususan, bir vaqtda bir nechta shartnomalar bo‘yicha sug‘urta to‘lovlarini amalga oshirilmaydi).

Individual risk modelida yuzaga keladigan mumkin bo‘lgan kasod bo‘lishlik hodisalari

$$S = X_1 + \ldots + X_N$$

sug‘urta portfelidagi hamma yig‘indi talofatlar bilan aniqlanadi. Agar bu yig‘indi to‘lovlar kompaniyaning aktivi u miqdordan katta bo‘lsa, kompaniya shartnomalar bo‘yicha o‘z faoliyatini davom ettira olmaydi, ya’ni kasodga uchraydi. Shuning uchun ham kompaniyaning kasod bo‘lishlik ehtimolligi

$$R = P\left(X_1 + \ldots + X_N > u\right)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, kasodlik ehtimolligi - S tasodifiy miqdorga nisbatan qo‘shimcha deb hisoblanishi mumkin bo‘lgan taqsimot sifatida qabul qilinishi mumkin (ya’ni $R = 1 - P\left(X_1 + \ldots + X_N \le u\right)$).

Demak, yig‘indi to‘lovlari miqdori S bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar yig‘indisi bo‘lgani uchun, uning taqsimotini ehtimolliklar nazariyasining klassik metodlari orqali o‘rganish mumkin. Bu metodlarning asosiylaridan biri – taqsimotlar kompozitsiyasi. Eslatib o‘tamizki, agar η_1 va η_2 - ikkita o‘zaro bog‘liqsiz manfiy bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning har biri mos ravishda $F_1(x)$ va $F_2(x)$ taqsimot funksiyalariga ega bo‘lsa, $\eta_1 + \eta_2$ yig‘indining taqsimot funksiyasi

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) = \int_0^x F_1(x-y)\,dF_2(y)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu formulani bir necha marta qo‘llab, ixtiyoriy sondagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisi uchun

$$F_S(x) = F_1 * F_2 * \ldots * F_N = \int_0^x F_{N-1}^S(x-y)\,dF_N(y)$$

formulani hosil qilamiz.

Agar η_1 va η_2 tasodifiy miqdorlar absolyut uzluksiz tipdagi taqsimotlarga ega bo‘lib, ular mos ravishda $p_1(x)$ va $p_2(x)$ zichlik funksiyalariga ega bo‘lsa, $\eta_1 + \eta_2$ yig‘indining zichlik funksiyasi

$$p(x) = p_1 * p_2 = p_2 * p_1 = \int_0^x p_1(x-y)\,p_2(y)\,dy$$

formula bilan aniqlanadi. Agar tasodifiy miqdorlar η_1 va η_2 diskret tipdagi (xususan, ular manfiy bo‘lmagan qiymatlar qabul qilsa)

$$P_1(n) = P(\eta_1 = n),\ P_2(n) = P(\eta_2 = n)$$

taqsimotlarga ega bo‘lsa, $\eta_1 + \eta_2$ yig‘indi taqsimoti

$$p(n) = P(\eta_1 + \eta_2 = n)$$

uchun

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} P_1(k) P_2(n-k) = P_1 * P_2$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Kompozitsiya metodi tasodifiy miqdorlar yig‘indisining taqsimotlarini hisoblashda prinsipial qiyinchiliklarga uchraydi. Shuning uchun ham yig‘indi sug‘urta to‘lovlari taqsimotlarini konkret hisoblashlarga qo‘llash jarayonida, ularni sodda va aniq taqsimotlar bilan approksimatsiyalash metodlari birinchi qatorga o‘tadi. Bunda Markaziy Limit Teoremaga asoslangan normal (Gauss) taqsimoti bilan N ning katta qiymatlarida $S = S_N$ yig‘indini taqsimotini approksimatsiyalash muhim hisoblanadi. Bu xulosani quyidagi qisqa iborada keltirish mumkin: agar $X_1, ..., X_N$ o‘zaro bog‘liqsiz va umumiy bir xil taqsimotga ega bo‘lib, ular uchun ikkinchi tartibli moment

$$\int x^2 dP(X_1 < x) < \infty$$

mavjud bo‘lsa

$$S_N^* = \frac{X_1 + ... + X_N - Na}{\sigma\sqrt{N}},\ a = EX_1,\ \sigma^2 = DX_1$$

tasodifiy miqdorlarning taqsimoti uchun

$$\sup_x \left| P(S_N^* < x) - \Phi(x) \right| \to 0,\ N \to \infty$$

limit munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Markaziy Limit Teoremaning juda ko‘p har xil umumlashgan variantlari mavjud (masalan, har xil taqsimlangan bog‘liqsiz va sust tartibda bog‘liq bo‘lgan tasodifiy miqdorlar uchun). Amaliy nuqtayi nazardan bu teorema

$$P(S_N < x) \approx \Phi\left(\frac{x - ES_N}{\sqrt{\mathrm{Var} S_N}} \right)$$

approksimatsiyaning o'rinli ekanligini asoslaydi (N ning katta qiymatlari uchun). Ehtimolliklar nazariyasida standart normal taqsimot funksiyasi $\Phi(x)$ va unga mos keluvchi zichlik funksiyasi

$$\Phi'(x) = p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

juda chuqur tahlil etilgan va ulardan amaliyotda foydalanish uchun bu funksiyalarning aniq bo'lgan sonli jadvallari tuzilgan.

Masala 1. Sug'urta kompaniyasi 300 ta yong'indan saqlanish bo'yicha sug'urta polislari sotgan. Sug'urta portfelining ko'rinishi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Shartnomalar soni	Shartnomadagi sug'urta summasi	Bitta shartnoma uchun sug'urta hodisasi ehtimolligi
100	400	0,05
200	300	0,06

Quyidagilar ma'lum:

1) har bir shartnoma uchun sug'urta hodisasi ro'y berganda, ko'riladigan talofat miqdori 0 va sug'urta summasi oralig'ida tekis taqsimlangan;

2) shartnomadagi sug'urta hodisalarining bittadan ko'pi ro'y berish ehtimolligi 0;

3) sug'urta hodisalari bir-biri bilan bog'liqsiz ravishda ro'y beradi.

Hamma sug'urta portfeli bo'yicha yig'indi to'lovlarning dispersiyasi topilsin. Javoblar:

A) 150000 B) 300000 C) 450000 D) 600000 E) 750000.

Yechish. k- shartnomadagi sug'urta hodisasi indikatorini I_k deb belgilaylik, bu sug'urta hodisasi ro'y bergandagi ko'rilgan talofat miqdorini Y_k deb belgilasak, k- shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovini $X_k = I_k \cdot Y_k$ ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. Bulardan tashqari $N = 300$-shartnomalar soni, $q_k = P(I_k = 1)$, $M_k - k$- shartnoma bo'yicha yig'indi sug'urta to'lovini belgilaydi. Bu holda sug'urta portfeli bo'yicha yig'indi to'lovlar miqdori

$$S = X_1 + ... + X_n$$

formula bilan aniqlanadi. Demak,

$$\mathrm{Var}S = \mathrm{Var}X_1 + ... + \mathrm{Var}X_n .$$

Berilgan 2 ta guruhdagi shartnomalar statistik ma'noda bir-biridan farq qilmagani uchun

$$\mathrm{Var}S = N^I \mathrm{Var}X^I + ... + N^{II} \mathrm{Var}X^{II}$$

tenglik o'rinli bo'ladi va bu yerda $N^I = 100$, $N^{II} = 200$ mos ravishda birinchi va ikkinchi tipdagi shartnomalar soni, $\mathrm{Var}X^I$, $\mathrm{Var}X^{II}$ – birinchi va ikkinchi tipdagi to'lovlar dispersiyalari. Sug'urta to'lovini ifoda etadigan tasodifiy miqdor

$$X = I \cdot Y$$

ko'rinishda bo'lib, undagi X va Y - tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz, I - sugurta hodisasi indikatori ($P(I=1)=q$), $Y-(0;M)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'ladi. Bevosita hisoblashlarni bajarib

$$\mathrm{Var}X = \frac{qM^2}{12}(4-3q)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Oxirgi munosabatlardan

$$\mathrm{Var}X^I = 2567,$$

$$\mathrm{Var}X^{II} = 1719$$

munosabatlar kelib chiqadi va demak,

$$\mathrm{Var}S = 100 \cdot 2567 + 200 \cdot 1719 = 650000 .$$

To'g'ri javob: D) variant.

Masala 2. Faraz qilaylik kompaniyada $N = 3000$ kishi hayot (life) sug'urtasi qayd etilgan bo'lsin. Bunda mijozning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi 0,3%. Bir yil davomida mijoz vafot etsa, kompaniya $b = 250000$ so'm to'laydi, vafot etmasa hech narsa to'lamaydi.

Kasodlik ehtimolligi 5% (0,05) bo'lishini ta'min etish uchun kompaniya qanday miqdorda sug'urta premiyalari to'plashi (yig'ishi) kerak.

Yechish. Odatda, yig'indi sug'urta to'lovlari pul o'lchovi birligi sifatida qabul qilinadi. Bu holda i-nchi shartnoma bo'yicha X_i-sug'urta to'lovi ikkita 0 va 1 qiymatlarni mos ravishda $1-q$ va q ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Shuning uchun ham

$$EX_i = (1-q)\cdot 0 + q\cdot 1 = q = 0,003,$$
$$EX_i^2 = (1-q)\cdot 0 + q\cdot 1^2 = q,$$
$$\mathrm{Var}X_i = EX_i^2 - (EX)^2 = q - q^2 \approx 0,003.$$

Endi yig'indi sug'urta to'lovi
$$S = X_1 + ... + X_n$$
uchun
$$ES = NEX_i = 3000\cdot 0,003 = 9,$$
$$\mathrm{Var}S = N\mathrm{Var}X_i \approx 3000\cdot 0,003 = 9$$
qiymatlarga ega bo'lamiz.

Agar markazlashtirilgan va normallashtirilgan yig'indi sug'urta to'lovi miqdori s uchun Markaziy Limit teoremadan foydalansak, kompaniyaning kasod bo'lmaslik ehtimolligi uchun quyidagi natijaga kelamiz:
$$P(S \le u) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \le \frac{u-ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}}\right) \approx P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \le \frac{u-9}{3}\right) \approx \Phi\left(\frac{u-9}{3}\right).$$

Agar biz kasodlik ehtimolligini 5% bo'lishini tayin etsak, $\frac{u-9}{3}$ miqdor
$$x_{95\%} = x_{95} = 1,645$$
songa teng bo'lishi kerak (bular normal taqsimot $\Phi(x)$ uchun mavjud jadvallardan olindi). Demak, absolyut raqamlarda
$$u = [3\cdot 1,645 + 9]\cdot ES = 13,935\cdot ES = 3483750 \text{ so'm}$$
bo'lishi kerak.

Quyidagi masalalarni mustaqil yechish o'quvchiga taklif qilinadi.

Masala 3. Meditsina sug'urtasi bo'yicha umumiy to'lov miqdorining zichlik funksiyasi
$$p(x) = \frac{1}{1000}e^{-x/1000},\ x > 0.$$

Shartnoma bo'yicha bu summa uchun to'lovdan 100 so'mga oshiq premiya belgilangan.

Agar 100 ta shartnoma tuzilgan bo'lsa, sug'urta kompaniyasining talofati to'plangan premiyadan katta bo'lishining taqribiy ehtimolligi topilsin. Javoblar:

A) 0,001 B) 0,159 C) 0,333 D) 0,407 E) 0,460.

To'g'ri javob: B) ($P \approx 15,87\%$) variant.

Masalani yechish uchun ko'rsatma. Agar bitta shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovini X tasodifiy miqdor bilan belgilasak, uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0,\ \lambda=\frac{1}{1000}.$$

Bevosita hisoblashlar bilan

$$EX=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=1000,$$

$$EX^2=2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}=2000000,$$

$$\text{Var}X=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}=1000000$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, bitta shartnoma premiyasi

$$p=EX+100=1100,$$

ya'ni to'plangan hamma premiya

$$P=N\cdot p=110000.$$

Hamma shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovi

$$S=X_1+...+X_N$$

bo'lib, bu yerda $N=100$ (shartnomalar soni), X_i-i- shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovi miqdori (tasodifiy) va uning taqsimot funksiyasi

$$P(X_i<x)=F(x)=1-e^{-\lambda x},\ x>0.$$

Endi bizni qiziqtirayotgan

$$P(S>Np)=P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\text{Var}S}}>\frac{Np-ES}{\sqrt{\text{Var}S}}\right)$$

ehtimollik uchun Markaziy Limit teoremani tatbiq etish yetarli bo'ladi.

Masala 4. Kompaniya 1 yil muddatli hayot (life) sug'urta shartnomalarini sotadi. Sug'urta to'lovi haqidagi informatsiya quyidagi jadvalda keltirilgan:

Sug'urta summasi	Vafot etish sababi	Ehtimollik
500000	Tabiiy baxtsiz	0,10
1000000	hodisa	0,01

Nisbiy himoya yuklamasi 20%.

Kompaniya qancha sug'urta sotish kerak bo'ladiki, to'plangan premiya miqdori 95% ehtimollik bilan yig'indi sug'urta summasini qoplasin. Javoblar:

A) 550 B) 560 C) 570 D) 580 E) 590.

To'g'ri javob: E) variant.

Eslatma. Har bir shartnoma sug'urta to'lovini X - tasodifiy miqdor bilan belgilasak, bitta sug'urta shartnomasi premiyasi

$$p=(1+\theta)EX$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$\theta=\frac{p-EX}{EX}$$

miqdor nisbiy himoya yuklama koeffitsiyenti deb ataladi.

Masala 5. Kompaniya uchta θ, K va L shaharlardagi uylarning sug'urta himoyasini bajaradi. Bu shahar bir-biridan uzoq masofada joylashgani uchun, kompaniyaning bu shaharlardagi sug'urta to'lovlarini bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deb tushunish mumkin.

Bu shaharlardagi sug'urta to'lovlarini ifoda qiladigan tasodifiy miqdorlarni mos ravishda X_θ, X_K va X_L deb belgilasak, ularning momentlar hosil qiluvchi funksiyalari

$$M_\theta(t)=(1-2t)^{-3},$$
$$M_K(t)=(1-2t)^{-2,5},$$
$$M_L(t)=(1-2t)^{-4,5}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar X tasodifiy miqdor kompaniyaning hamma uchta shahardagi umumiy talofatini ifoda etsa, EX^3 moment hisoblansin.

Javoblar:

A) 1320 B) 2082 C) 5760 D) 8000 E) 10560.

To'g'ri javob: E) variant.

Yechish uchun ko'rsatma. Eslatib o'tamizki, X tasodifiy miqdorning momentlar hosil qiluvchi funksiyasi deb

$$\psi_X=Ee^{tX},\ t\in R$$

ifodaga aytiladi.

Yuqoridagi X_θ, X_K va X_L tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz deb hisoblangani uchun kompaniyaning umumiy talofatini aniqlaydigan $X = X_\theta + X_K + X_L$ tasodifiy miqdorning momentlar hosil qiluvchi funksiyasi

$$\psi_X(t) = E\left(e^{t(X_\theta+X_K+X_L)}\right) = E\left(e^{tX_\theta}\cdot e^{tX_K}\cdot e^{tX_L}\right) = Ee^{tX_\theta}\cdot Ee^{tX_K}\cdot Ee^{tX_L} =$$
$$= (1-2t)^{-3-2,5-4,5} = (1-2t)^{-10}$$

formula bilan topiladi.

Endi masalani oxirigacha yechish uchun

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

yoyilmadan foydalanish kerak bo'ladi. Bu yerda

$$\binom{\alpha}{n} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$$

binomial koeffitsiyentlarni ifoda etadi.

Masala 6. Kompaniya 32 ta sug'urta shartnomasi tuzdi. Har bir shartnoma uchun sug'urta hodisasini ro'y berish ehtimolligi $\frac{1}{6}$, sug'urta to'lovi esa B (sug'urta hodisasi ro'y berganidan so'ng) uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor bo'lib, uning zichlik funksiyasi

$$p_B(y) = \begin{cases} 2(1-y), \text{ agar } 0 < y < 1, \\ 0, \quad \text{aks holda.} \end{cases}$$

Sug'urta portfeli hamma shartnomalar bo'yicha yig'indi to'lovi S bo'lsa, $P(S>4)$ ehtimollik baholansin.

Yechish. Sug'urta portfeli bo'yicha hamma to'lov

$$S = X_1 + \ldots + X_N$$

miqdorni tashkil qiladi. Bu yerda $N = 32$, X_i – i- shartnoma bo'yicha to'lovni ifoda etadigan tasodifiy miqdor, demak,

$$ES = EX_1 + \ldots + EX_N = N\cdot EX_1$$
$$\mathrm{Var}S = \mathrm{Var}X_1 + \ldots + \mathrm{Var}X_N = N\cdot \mathrm{Var}X_1.$$

Tasodifiy miqdor X_i ni

$$X_i = I_i B_i$$

ko'rinishda belgilash qulay bo'ladi. Bu yerda I_i – i-nchi shartnoma bo'yicha sug'urta hodisasi indikatori, B_i – i-nchi shartnomadagi sug'urta hodisasi ro'y berganda to'lanadigan to'lov. To'la ehtimollik formulasi bo'yicha

$$EX_i = P(I_i = 0)E(X_i/I_i = 0) + P(I_i = 1)E(X_i/I_i = 1) =$$

$$= 0 + P(I_i = 1)E(B_i / I_i = 1) = qE(B_i), \; q = P(I_i = 1),$$

$$EX_i^2 = P(I_i = 0)E(X_i^2 / I_i = 0) + P(I_i = 1)E(X_i^2 / I_i = 1) =$$

$$= 0 + P(I_i = 1)E(B_i^2 / I_i = 1) = qE(B_i^2).$$

Shunday qilib, masala B tasodifiy miqdorning birinchi va ikkinchi tartibli momentlarini hisoblashga keltiriladi:

$$EB = \int_0^1 u p_B(u) du = 2\int_0^1 y(1-y) dy = \left(y^2 - \frac{2y^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$EB^2 = \int_0^1 u^2 p_B(u) du = 2\int_0^1 y^2(1-y) dy = \left(\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Endi individual talofat X_i larni momentlarini hisoblaymiz:

$$EX_i = \frac{1}{18}, \; ES = \frac{32}{18},$$

$$EX_i^2 = \frac{1}{36}, \; \mathrm{Var}S = \frac{64}{81},$$

$$\mathrm{Var}X_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{2}{81},$$

Markaziy Limit teoremaga asosan,

$$P(S > 4) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} > \frac{4 - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \right) \approx 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} > \frac{4 - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \right).$$

Demak,

$$P(S > 4) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} > \frac{4 - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{4 - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \right) = 1 - \Phi(2{,}5) \approx 0{,}62\%.$$

Masala 7. Kompaniya quyidagi shartnomalarni sotadi:

1) sug'urta hodisasi ro'y berishi ehtimolligi $\frac{1}{2}$;

2) sug'urta to'lovi (sug'urta hodisasi ro'y berganidan so'ng) $1000e^{-0,05T}$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda T tasodifiy miqdor $(0;20)$ oraliqda tekis taqsimlangan;

3) sug'urta portfeli N ta bog'liqsiz shartnomalardan iborat;

4) shartnoma premiyasi 350 ga teng;

5) umumiy premiya yig'indi to'lovning matematik kutilmasini, yig'indi to'lovni o'zining o'rta qiymatidan standart og'ishi 125% bilan yig'indisiga teng.

Shartnomalar soni N topilsin. Javoblar:

A) 158 B) 160 C) 162 D) 164 E) 166.

To'g'ri javob A) variant.

Eslatma. Masalaning shartiga asosan umumiy premiya

$$P = ES + 1,25\sqrt{\mathrm{Var}S} = N \cdot EX + 1,25\sqrt{N}\sqrt{\mathrm{VarX}}.$$

Demak, bitta shartnoma uchun sug'urta premiyasi

$$p = EX + \frac{1,25\sqrt{\mathrm{VarX}}}{\sqrt{N}}.$$

Masala 8. Sug'urta kompaniyasi avtomobil sug'urtasi bilan shug'ullanadi. Aytaylik X-tasodifiy miqdor kompaniyaning avtomobil avariyaga uchrash bilan bog'liq sug'urta to'lovini, Y-tasodifiy miqdor esa haydovchining fuqorolik mas'uliyati bilan bog'liq talofatni ifoda etsin (fuqorolik mas'uliyati deganda haydovchining tabiiy holati (kasalligi), spirtli ichimlik qabul qilish oqibatida, keksaligi bilan bog'liq xarajatlar). Hamma pul million (mln) dollar bilan o'lchanadi.

(X, Y) tasodifiy juftlik taqsimoti zichlik funksiyasi

$$p(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 - y, & \text{agar } 0 < x, 1,\ 0 < y < 2 \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{aks holda}. \end{cases}$$

Kamida umumiy talofat 1 mln dollarni tashkil qilish ehtimolligini topilsin. Javoblar:

A) 0,33 B) 0,38 C) 0,41 D) 0,71 E) 0,75.

Yechish. Qidirilayotgan ehtimollik

$$P = P(X + Y \geq 1)$$

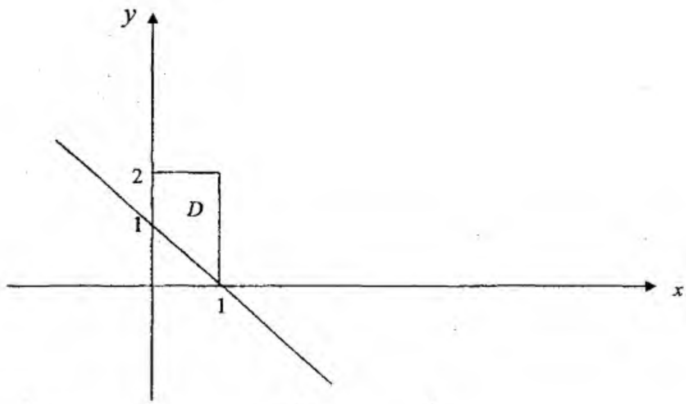
bo'ladi va uni

$$P = \iint_D p(x, y)dxdy$$

ikki karrali integral ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda D sohani (x, y) tekislikda quyidagi shartlar bilan aniqlash mumkin:

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ 0 < x < 1, \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

va bu soha quyidagi shaklda ifoda etilgan.



Keltirilgan shaklga asoslanib D sohani

$$\{(x,y):0<x<1,\ 1-x\le y<2\}$$

ko'rinishda yozib, yuqoridagi karrali integralni

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2}\frac{2x+2-y}{4}dy$$

takroriy integralga olib kelish mumkin. Oldin ichki integralni hisoblaymiz:

$$\int_{1-x}^{2}\frac{2x+2-y}{4}dy=\frac{2xy+2y-0,5y^2}{4}\Bigg|_{y=1-x}^{y=2}=\frac{5x^2+6x+1}{8}.$$

Endi tashqi integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^1\frac{5x^2+6x+1}{8}dx=\frac{\frac{5}{3}x^3+3x^2+x}{8}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{17}{24}\approx 0,7083.$$

Demak, D) variant to'g'ri javob bo'lar ekan.

Masala 9. Korxona o'z xodimlarini baxtsiz hodisalardan himoyalash uchun sug'urta kompaniyasi bilan quyidagi shartlarda guruh shartnomalarini tuzdi:

1) shartnoma muddati – 1 yil;

2) agar baxtsiz hodisa invalidlik holatiga keltirsa, jabrlanuvchi 1 (mln) pul oladi, bundan tashqari shuncha so'mni har bir oila a'zosi ham oladi;

3) shartnoma bo'yicha birinchi to'lovni sug'urtalanuvchi kiritadi, qolganlarini esa sug'urta kompaniyasi kiritadi. Boshqacha aytganda, franshizasi $d=1$ bo'lgan stop loss sug'urta shartnomasi tuziladi.

Quyidagi shartlar bajarilganda:

a) individual risklar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bilan ifodalanadi;

b) bir yil davomida invalidlik holatiga keltiruvchi baxtsiz hodisaning ro'y berish ehtimolligi q;

c) korxona xodimlari soni N;

d) xodimning oila a'zolari sonining o'rta qiymat a.

Shartnomaning netto-premiyasi topilsin.

Yechish. n-nchi xodimga sug'urta to'lovini X_n tasodifiy miqdor bilan belgilansin. Bu tasodifiy miqdorni

$$X_n = I_n(1+Y_n),\ n=1,2,...$$

struktaviy ko'rinishda yozamiz. Bu yerda I_n– "n-nchi xodimni invalidlik holatiga keltirgan baxtsiz hodisa ro'y berishi" hodisasining indikatori, Y_n– n-nchi xodimning oila a'zolari soni.

Tuzilgan shartnoma bo'yicha ko'rilgan talofat miqdori

$$S=\sum_{n=1}^{N} X_n .$$

Kompaniyaning sug'urta riski

$$(S-1)^+ = \max(S-1,0)$$

miqdorga teng. Shuning uchun ham netto-premiya P_0 uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P_0 = E(S-1)^+ = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(S=k) = \sum_{k=1}^{\infty}kP(S=k) - \sum_{k=1}^{\infty}P(S=k) =$$
$$= ES-(1-P(S=0)) = N\cdot EX_n - 1 + (1-q)^N = Nq(1+a)-1+(1-q)^N .$$

Masala 10. Kompaniya o'zining xodimlari uchun guruh-guruh hayot (life) sug'urtasi o'tkazadi. Xodimlar strukturasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Kasb sinfi	Xodimlar soni	Sug'urta summasi	O'lim ehtimoli
1	100	1	0,1
2	100	1	0,2
3	200	2	0,1
4	200	2	0,2

Kompaniya sug'urta fondiga kutiladigan sug'urta to'lovlari hajmidagi summani kiritadi.

Har bir xodim o'z navbatida kutilgan to'lovning p qismini fondga kiritishi kerak. Bu qism shunday aniqlanadiki, to'plangan sug'urta fondi 0,95 ehtimollik bilan sug'urta to'lovlarini qoplasin.

To'rtinchi kasb xodimlari kiritgan sug'urta premiyasi hajmi aniqlansin. Javoblar:

A) 0,060 B) 0,066 C) 0,072 D) 0,078 E) 0,084.

To'g'ri javob: B) variant.

Ko'rsatma. Aytaylik $q-$ xodimning vafot qilish ehtimolligi, $s-$ sug'urta to'lovi miqdori bo'lsin. Individual talofat miqdori faqat 2 ta qiymat qabul qiladi: 0 ni $1-q$ ehtimollik bilan, s ni q ehtimollik bilan. Shuning uchun

$$EX = qS, \ \mathrm{Var}S = q(1-q)S^2.$$

Endi bulardan foydalanib va xodimlarning o'limi vaqtlari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lishini hisobga olgan holda, har bir kasb sinfi uchun yig'indi sug'urta to'lovlarini o'rta qiymatlari va dispersiyalarini hisoblab chiqish mumkin (berilgan jadvaldagi qiymatlar asosida).

8.1.2. Induvidual talofatlar modeli masalalari

Sug'urta kompaniyasining moliyaviy risklarining asosiy qismini individual shartnomalar bo'yicha sug'urta to'lovlari tashkil qiladi. Ba'zi hollarda (masalan, Life-hayot sug'urtasida) faqat bitta sug'urta hodisasi ro'y berishi mumkin. Boshqa hollarda esa (masalan, avtomobil sug'urtasi, umuman, Nonlife – mol-mulk sug'urtasida) bitta shartnoma muddati davomida bir nechta sug'urta hodisalari ro'y berishi mumkin. Shu sababli sug'urta faoliyati individual talofatlarga olib keluvchi baxtsiz hodisalarni tahlil qilishdan boshlanadi. Risklar nazariyasi doirasida faqat individual talofatlarni ifoda qiluvchi miqdor X (o'z navbatida bu miqdor u yoki bu pul birliklarida belgilangan deb tushuniladi) o'rganiladi xolos. Biror konkret sug'urta shartnomasiga nisbatan bu miqdor haqida aniq bir fikrga kelib bo'lmaydi (faqat bu talofat yuzaga kelganini yoki kelmaganini qayd etiladi, xolos). Lekin biz katta hajmdagi bir xil shartnomalar bilan ish ko'rganimizda ehtimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuniga asosan, sug'urta talofatini X ni tasodifiy miqdor deb tushunish kerak bo'lishi haqidagi xulosaga kelamiz.

Individual talofatlarning hajmini ifoda qiluvchi tasodifiy miqdor X larni butunlay ixtiyoriy deb bo'lmaydi, chunki ularni qandaydir o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lganligi aniq bo'lib qoladi. Aktuar matematika yuzaga kelishi va rivojlanishi davrida tasodifiy talofatlarni belgilovchi tasodifiy miqdorlar sinfini ajratib olish va ular bilan bajariladigan asosiy amallar aniqlanib olingan. Bu tasodifiy miqdorlar faqat sug'urta faoliyatining qanday ko'rinishlarini modellashtirish mumkinligi haqidagi masalalar ushbu bobda keltiriladi va ulardan ba'zilari namunaviy misol sifatida yechimi bilan bayon etiladi.

Risk nazariyasidan tasodifiy miqdor X ni (individual talofat miqdori) ma'lum ma'noda struklashtirish qabul qilingan. Masalan, ko'p hollarda tasodifiy miqdor

$$X = I \cdot Y \qquad (1)$$

ko'rinishda yozish foydali bo'ladi. Bu yerda tasodifiy miqdor I, sug'urta hodisasi ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq holda 1 va 0 qiymatlar qabul qiladi. Y miqdor esa sug'urta hodisasi ro'y berganda sug'urta to'lovi miqdorini bergilaydi.

Agar har bir shartnoma harakati davrida bir nechta sug'urta hodisalari ro'y berishi mumkin bo'lsa, X ni

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_v \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Bu yerda v-tasodifiy miqdor sug'urta shartnomasi harakati davrida ro'y bergan sug'urta hodisalari soni, Y_2-tasodifiy miqdor i-sug'urta hodisasi ro'y berganda to'laniladigan pul miqdori.

Agar odatdagidek, $\sum_{i=1}^{0} Y_2 = 0$ shartli tenglikni qabul qilsak, (1) model (2) modelning xususiy holi bo'ladi. Qayd qilib o'tish mumkin bo'ladiki, (2) tenglik matematik ma'noda sug'urtaning kollektiv risk modelidagi kompaniyaning umumiy yig'indi to'lovlari formulasi bilan bir xil bo'ladi.

Individual talofatning (1) va (2) formulalar bilan ifoda etilishi, har bir konkret shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovini yuzaga keltiradigan faktorlarni aniqlash va identifikatsiya qilish imkonini beradi. Aslida ham sug'urta holatlarini ro'y berish ehtimolligi

$$q = P(I = 1)$$

miqdoriga ta'sir etadigan faktorlar, sug'urta to'lovi Y tasodifiy miqdor bilan bog'liqligi kuzatilmaydi. Bu esa tasodifiy miqdorlar I va Y larni ehtimollik ma'nosida bog'liq bo'lmagan miqdorlar deb tushunish mumkinligi imkoniyatini beradi. Masalan, avtomobil sug'urtasida halokatga uchrash ehtimolligi $q = P(I = 1)$ haydovchining yozishiga ko'proq bog'liq: birinchidan bu ehtimollik yoki haydovchilar guruhida (harakat qoidalariga itoat etmaslik oqibatida) ikkinchidan esa keksa haydovchilar orasida (jismoniy reaksiya susayishi natijasida) kattaroq bo'ladi. Lekin halokatga uchragan avtomobilning ta'mirlash narxlari (sug'urta to'lovi) haydovchining yoshiga bog'liq bo'lmaydi.

Aktuar faoliyatga tegishli adabiyotlarda sug'urta to'lovining o'rta qiymati $m = EY$ uchun mean severity (o'rtacha to'lov hajmi) iborasi ishlatiladi. Miqdor

$$EX = P(I = 1) \cdot EY = qm$$

sug'urta shartnomasi bo'yicha kutilgan to'lovni ifoda qiladi. Shuning uchun ham sug'urta kompaniyasi sug'urta premiyasini (badalini) tayin etishda bu miqdorni hisobga olishiga to'g'ri keladi. Sug'urta faoliyatida qm miqdorni netto premiya deb ataladi. O'z navbatida, sug'urta to'la to'loviga (brutto premiya) sug'urta kompaniyasining ish faoliyati bilan bog'liq harakatlar ham kiradi. Ko'p hollarda, netto premiya kompaniyaning to'la premiyasining 10% ini tashkil etadi.

Individual talofatni ifodalaydigan tasodifiy miqdor X uzluksiz taqsimotga ega bo'lmaydi, chunki

$$P(X = 0) = P(I = 0) = 1 - q > 0 .$$

Lekin bu ehtimollik 1 ga ancha yaqin bo'lishiga qaramasdan $X = I \cdot Y$ tenglikdagi sug'urta to'lovi Y ni uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor ko'rinishida ifoda etish qulay bo'ladi.

Sodda sug'urta holatlarida individual talofat X tasodifiy miqdor chekli sondagi

$$b_0 = 0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n$$

diskret qiymatlarni qabul qiladi. Ehtimolliklar nazariyasining umumiy kursidan ma'lumki, diskret tasodifiy miqdor X ning taqsimoti

$$P_0 = P(X = b_0),\ \ldots,\ P_n = P(X = b_n)$$

ehtimolliklar bilan aniqlanadi va yana shu manbadan ma'lumki, uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor Y ning taqsimot funksiyasi

$$F(X) = P(Y < x)$$

yoki zichlik funksiyasi

$$P(x) = F'(x),$$

bu tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$P_Y(A) = P(Y \in A)$$

ehtimollik o'lchovini bir qiymatli aniqlaydi (A to'g'i chiziq R dagi ixtiyoriy barel to'plami).

Aktuar matematika tatbiqlarida Y tasodifiy miqdor musbat qiymatlarni qabul qilgani uchun, $x < 0$ bo'lganda

$$F(x) = P(x) = 0$$

tengliklar bajariladi. Demak, $F(x)$ va $P(x)$ funksiyalar uchun $x \geq 0$ deb, hisoblash mumkin.

Individual risk X tasodifiy miqdorning quyidagi

$$m_x = EX \text{ (o'rta qiymat)},$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 \text{ (dispersiya)},$$

$$\sigma_x = \sqrt{V\,\mathrm{ar}\,X} \text{ (o'rta kvadratik og'ish)},$$

$$C_x = \sigma_x / m_x \text{ (variatsiya koeffitsiyenti)},$$

$$\gamma_x = \frac{E(X - EX)}{C_x^3} \text{ (assimetriya koeffitsiyenti)}$$

sonli xarakteristikalari muhim hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasining umumiy formulalari bilan mos ravishda, ehtimollik taqsimoti

$$P_0 = P(X = b_0),\ \ldots,\ P_n = P(X = b_n)$$

bo'lgan diskret tasodifiy miqdor X uchun

$$EX = \sum_{i=0}^{n} b_i P_i,$$

$$EX^2 = \sum_{i=0}^{n} b_i^2 P_i$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Taqsimot funksiyasi $F(x) = P(Y < x)$ va zichlik funksiyasi $P(x) = F'(x)$ bo‘lgan uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor Y uchun

$$EY = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty x P(x) dx$$

$$EY^2 = \int_0^\infty x^2 dF(x) = \int_0^\infty x^2 P(x) dx$$

formulalar bajariladi.

Masala 1. Muddati 1 yil bo‘lgan hayot (life) sug‘urta shartnomasi ko‘riladi. Sug‘urta summasi $b = 100000$ so‘m, mijozning 1 yil davomida vafot etish ehtimolligi $q = 0{,}0025$. Sug‘urta to‘lovi X ning variatsiya koeffitsiyenti topilsin.

Yechish. Bu holda

$$EX = bq = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250 \text{ (so‘m)},$$

$$VarX = b^2(1-q)q = 10^{10}\left(1 - 25 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 25 \cdot 10^{-4} \approx 25 \cdot 10^6$$

X ning o‘rta kvadratik og‘ishi

$$\sigma_x = \sqrt{V\text{ar}\,X} \approx 5000 \text{ (so‘m)}$$

demak, variatsiya koeffitsiyenti

$$C_x = \sigma_x / EX \approx 5000/250 = 20.$$

Masala 2. Induvidual sug‘urta talofati (shartnoma ma’lum muddatga tuzilgan) tasodifiy miqdor

$$X = I \cdot Y$$

ko‘rinishda ifoda etiladi. Bu yerda I sug‘urta hodisasi indikatori, Y sug‘urta hodisasi ro‘y berish oqibatida yuzaga kelgan talofat miqdori.

Agar quyidagilar:

1) netto premiya 2 ga teng,

2) Y tasodifiy miqdorning dispersiyasi 16 ga teng,

3) X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 30 ga tengligi,

ma’lum bo‘lsa, sug‘urta hodisasining ro‘y berish ehtimolligi va sug‘urta to‘lovi o‘rta qiymati topilsin.

Yechish. Faraz qilaylik, sug'urta hodisasi ro'y berishi ehtimolligi $q=P(I=1)$, sug'urta to'lovi Y ning o'rta qiymati $m=EY$ bo'lsin.

Bu holda to'la matematik kutilma formulasiga asosan,

$$EX=P(I=0)E(X/I=0)+P(I=0)E(X/I=1)=$$
$$=0+P(I=1)E(Y/I=1)=P(I=1)EY=qm,$$
$$EX^2=P(I=0)E\left(X^2/I=0\right)+P(I=1)E\left(X^2/I=1\right)=0+P(I=1)EY^2=qEY^2$$

Shunday qilib,

$$VarX=EX^2-(EX)^2=qVarY+q(1-q)m^2$$

tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgilardan quyidagi tengliklar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} qVarY+q(1-q)m^2=30 \\ qm=2,\ VarY=16. \end{cases}$$

Bu sistema q ga nisbatan

$$8q^2-17q+2=0$$

kvadrat tenglama bilan teng kuchli bo'ladi. Oxirgi tenglamaning yechimlari $q=2$ va $q=1/8$ bo'ladi. Demak, q-ehtimollik bo'lgani uchun sug'urta hodisasining ro'y berish ehtimolligi $1/8$ ga teng bo'ladi. Bundan va yuqoridagi tenglamalar sistemasidan foydalanib, sug'urta to'lovi X ning o'rta qiymati $m=EX=16$ ekanligini olamiz.

Masala 3. Omborxonada ro'y berishi mumkin bo'lgan yong'in oqibatida ko'riladigan zarar miqdori X ning taqsimoti quyidagi jadvalda keltirilgan:

Zarar miqdori X	Ehtimollik
0	0,9
500	0,060
1000	0,030
10000	0,008
50000	0,001
100000	0,001

Yong'in oqibatida yuzaga kelgan zararning o'rta qiymati topilsin.

Javoblar:

(A) 290, (B) 322, (C) 1704, (D) 2900, (E) 32222.

Izoh. Bu yerda va boshqa joylardagi masalalarda keltirilgan javoblardan (A, B, C, D va E) qaysinisi to'g'ri ekanligini ko'rsatish talab etiladi.

Yechish. Faraz qilaylik, I-omborxonada yong'in bo'lishi hodisasi indikatori, Y - yong'in oqibatining sug'urta to'lovi, $X = I \cdot Y$ sug'urta shartnomasi bo'yicha talofat miqdori bo'lsin. Tasodifiy miqdor X ning taqsimoti yuqoridagi jadvalda keltirilgan. Bizga Y ning o'rta qiymatini topish kerak bo'ladi. Birinchi navbatda bu tasodifiy miqdorlar taqsimotlari orasidagi bog'liqlik munosabatlarini topamiz:

$$P(X=n)=\begin{cases} P(I=1)\cdot P(Y=n), & \text{agar } n>0, \\ P(I=0), & \text{agar } n=0. \end{cases}$$

Haqiqatan ham, shartnoma bo'yicha zarar 0 ga teng, agar yong'in ro'y bermasa. Boshqacha aytganda

$$\{X=0\}=\{Y=0\},$$

ya'ni bu hodisalar uchun

$$P(X=0)=P(Y=0)=P(I=0).$$

Agar omborxonada yong'in ro'y bersa, $n>0$ va sug'urta to'lovi n ga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda

$$\{X=n\}=\{I=1, Y=n\}$$

ya'ni,

$$P(X=n)=P(I=1, Y=n)=P(I=1)P(Y=n)$$

oxirgilardan

$$EX=P(I=1)\cdot EY$$

tenglikni hosil qilamiz va undan

$$EY=\frac{EX}{P(I=n)}.$$

Ehtimollik $P(I=1)$ berilgan jadvalning birinchi satridan topiladi:

$$P(I=1)=1-P(I=0)=1-P(X=0)=0{,}1.$$

Shartnoma bo'yicha sug'urta to'lovi X ning o'rta qiymati

$$EX = \sum_n nP(X=n) = 500\cdot 0{,}060 + 1000\cdot 0{,}030 + 10000\cdot 0{,}008 + 50000\cdot 0{,}001 +$$

$$+100000\cdot 0{,}001 = 30+30+80+50+100 = 290.$$

Demak,

$$EY = 290/0{,}1 = 2900$$

va (D) javob to‘g‘ri ekan.

Masala 4. Sug‘urta to‘lovlarining qandaydir shartnomalar portfeli bo‘yicha o‘tkazilgan statistik tahlillar shuni ko‘rsatdiki, agar Y sug‘urta to‘lovi miqdorini ifodalaydigan tasodifiy miqdor bo‘lsa, $Z=\ln Y$ tasodifiy miqdor parametrlari

$$EZ = 6{,}012,\ VarZ = 1{,}792$$

bo‘lgan normal qonun bilan taqsimlangan bo‘ladi (Individual to‘lovning bunday taqsimoti logarifmik normal (log-normal) qonun deb ataladi).

Sug‘urta to‘lovi Y miqdorning 200 dan katta, 500 dan kichik bo‘lishi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Izlanayotgan $P = P(200 < Y < 500)$ ehtimollikni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$P = P\left(200 < e^Z < 500\right) = P(\ln 200 < Z < \ln 500)$$

Gauss tasodifiy miqdorini chiziqli almashtirib, ya’ni

$$Z_0 = \frac{Z-EZ}{\sqrt{VarZ}}$$

standart normal taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorga o‘tib, P ehtimollik uchun quyidagi tenglikni olamiz:

$$P = P\left(\frac{\ln 200 - EZ}{\sqrt{VarZ}} < \frac{Z-EZ}{\sqrt{VarZ}} < \frac{\ln 500 - EZ}{\sqrt{VarZ}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\ln 200 - 6{,}012}{\sqrt{1{,}792}} < Z_0 < \frac{\ln 500 - 6{,}012}{\sqrt{1{,}792}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln 500 - 6{,}012}{\sqrt{1{,}792}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{\ln 200 - 6{,}012}{\sqrt{1{,}792}}\right) \approx \Phi(0{,}151) - \Phi(-0{,}533).$$

Bu yerda odatdagidek

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$$

standart Gauss tasodifiy miqdori Z_0 ning taqsimot funksiyasi.

Maxsus funksiya $\Phi(x)$ sonli qiymatlarini ko'p kitoblarda keltirilgan jadvallardan topish mumkin, yoki Microsoft Excel yordamida

$$\Phi(x)=НОРМСТРАС\pi(x)$$

funksiya orqali hisoblanishi mumkin:

$$\Phi(0{,}151)=НОРМСТРАС\pi(0{,}151)\approx 0{,}560,$$

$$\Phi(-0{,}533)=НОРМСТРАС\pi(-0{,}533)\approx 0{,}297.$$

Demak, $P\approx 0{,}263$.

Qayd qilib, o'tamizki, P ehtimollik bevosita

$$ЛОГНОРМСТРАС\pi(x,a,\sigma)$$

funksiya Microsoft Excel yordamida hisoblanishi ham mumkin. Buning uchun quyidagi funksiyalar satrini terib olish yetarli bo'ladi:

$$ЛОГНОРМСТРАС\pi(500;\,6{,}012;\,КОРЕНЬ(1{,}792))-$$

$$-ЛОГНОРМСТРАС\pi(200;\,6{,}012;\,КОРЕНЬ(1{,}792))\approx 0{,}263.$$

Masala 5. Sug'urta kompaniyasining bir oylik sug'urta to'lovi (risk) musbat qiymatli va zichlik funksiyasi

$$P(x)=\frac{C}{(1+x)^4},\quad x>0,\qquad C=const,\ C>0$$

bo'lgan tasodifiy miqdor orqali modellashtirlgan. Kompaniyaning bir oylik to'lovining o'rta qiymati topilsin.

Javoblar:

(A) $\frac{1}{6}$, (B) $\frac{1}{3}$, (C) $\frac{1}{2}$, (D) 1, (E) 3.

Yechish. Birinchi navbatda proporsionallik koeffitsiyenti C ni topish kerak bo'ladi. Zichlik funksiyasining xossasiga asosan,

$$1=\int_0^\infty P(x)dx=\int_0^\infty\frac{C}{(1+x)^4}dx=-\frac{C}{3}(1+x)^{-3}\Big|_0^\infty=\frac{C}{3}$$

Demak, $C=3$ va zichlik funksiyasi

$$P(x)=\frac{3}{(1+x)^4},\quad x>0.$$

Noma'lum miqdor EX uchun quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$EX=\int_0^\infty xP(x)dx=\int_0^\infty\frac{3x}{(1+x)^4}dx=3\int_0^\infty\frac{x+1-1}{(1+x)^4}dx=3\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)^3}-\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)^4}=$$

$$=\left[\frac{3(x+1)^{-2}}{-2}+(x+1)^{-3}\right]\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$

Shuning uchun ham to'g'ri javob (C), bo'ladi. Keltirilgan zichlik funksiyasi Pareto taqsimotining xususiy holi bo'ladi. Bu taqsimot ikkita $\lambda>0$ va $\alpha>0$ parametrlarga bog'liq bo'lib, uning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1}, \qquad 0<x<+\infty$$

Ko'rinishga ega bo'ladi. Oson ishonch hosil qilish mumkinki,

$$EX=\frac{\lambda}{\alpha-1}.$$

Quyidagi masalalar o'quvchilarga mustaqil yechish uchun tavsiya etiladi.

Masala 6. Magazinda ro'y berishi mumkin bo'lgan yong'in oqibatida yuzaga keladigan talofatni ifodalaydigan tasodifiy miqdor X ning zichlik funksiyasi

$$P_x(x)=\begin{cases}0{,}005(20-x), & \text{agar } 0<x<20,\\ 0, & \text{qarama-qarshi holda}\end{cases}$$

Agar yong'in natijasida talofat $x>8$ bo'lsa, bu talofatning 16 dan katta bo'lishi ehtimolligi

$$P=P(x>16/x>8)$$

topilsin. Javob: $P=1/9$.

Masala 7. Sug'urta xodimi (aktuariy) qandaydir baxtsiz hodisa ro'y berishi natijasida ko'riladigan talofatni ifoda etadigan tasodifiy miqdor X ning taqsimoti hosil qiluvchi funksiyasi

$$\psi_x(t)=\frac{1}{(1-2500t)^4}, \qquad t\in R$$

ko'rinishida bo'lishini aniqlagan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorning o'rta kvadratik og'ishi $\sigma_x=\sqrt{Varx}$ topilsin. Javob: $\sigma_x=5000$.

Masala 8. Sug'urta to'lovi o'rta qiymati 1000 bo'lgan eksponensial taqsimotga ega bo'lgan tasodifiylik Y bilan ifoda etilgan bo'lsin. Sug'urta kompaniyasi qiymati $d=100$ bo'lgan

$$Y_{(d)}=\begin{cases}0, & \text{agar } Y\le d,\\ Y-d, & \text{agar } Y>d\end{cases}$$

to'lovlarni amalga oshiradi. Bu tasodifiy miqdor $Y_{(d)}$ ning dispersiyasi $VarY_{(d)}$ topilsin. Quyidagi

(A) 810000, (B) 860000, (C) 900000,
(D) 990000, (E) 1000000
javoblardan qaysi biri to'g'ri.
Hisoblash natijasida:

$$VarY_{(d)} \approx 990944$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, (D) javob to'g'ri.

Masala 9. Kvartiralarni sug'urta etuvchi kompaniyaga 1 oyda 20 ta ariza tushdi. Bu arizalar bo'yicha sug'urta to'lovlari miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

250	280	50	314	250
90	450	180	150	250
150	250	309	2100	206
146	220	300	220	688

Sug'urta to'lovining o'rta qiymati $\bar{x}$ va uning o'rta kvadratik og'ishi

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

baholari topilsin. Javob: $\bar{x} = 322{,}65$ va $S^2 \approx 183687{,}6$.

Masala 10. Aktuariy (sug'urta xodimi) avtomobil sug'urtasi bo'yicha to'lovlar miqdori eksponensiya taqsimot bo'lishligi va to'lovning 1000 dan kam bo'lishi ehtimolligi 0,25 ga teng ekanligini aniqladi. Oradan 10 yil o'tgandan so'ng avariyalar soni kamaymadi, lekin inflatsiya oqibatida sug'urta to'lovlari oldingi 10 yilga nisbatan 2 marta oshdi. Hozirgi paytda sug'urta to'lovining 1000 dan kam bo'lishi ehtimolligini toping. Javoblar:

(A) 0,063, (B) 0,125, (C) 0,134,
(D) 0,163, (E) 0,250

To'g'ri javob: (C).

8.2. Kollektiv risk modeliga oid masalalar

Sug'urtaning kollektiv risk modelida ham individual risk modelidagi kabi qisqa vaqt davomidagi sug'urta premiyalari to'la ravishda sug'urta jarayoni boshida kiritiladi. Individual risk modelidan farqli o'laroq bunda sug'urta portfeli butun bir shartnomalar majmuasi deb qaralib, sug'urta hodisalarining ro'y berishi konkret shartnomalar bilan bog'liq bo'lmaydi. Shunday qilib, bu holda ro'y bergan sug'urta hodisalari konkret sug'urta shartnomalariga aloqasi bo'lmaydi va bu hodisalar kompaniya uchun yig'indi risk bo'lib hisoblanadi.

Kollektiv risk modeli individual modeldan yana bir muhim farqi shundan iborat bo'ladiki, ketma - ket ravishda ro'y bergan sug'urta voqealaridan yuzaga keladigan sug'urta to'lovlarini ifoda etadigan

$$Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$$

tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan deb hisoblanadi. Bu qilingan faraz hamma sug'urta hodisalarini teng kuchli deb hisoblash mumkin bo'lib, ularni umumiy sug'urta risk natijalari deb qabul qilinishi mumkin. Bundan tashqari tasodifiy miqdorlar Y_i lar faqat real talofatni ifoda etadi.

Kollektiv risk modelida ham sug'urta hodisalari soni talofatni ifodalaydigan $Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$ tasodifiy miqdorlarga bog'liq bo'lmaydi va ular umumiy riskni ifoda etadi.

Individual risk modelidagi kabi, kollektiv risk modelida ham kompaniyaning "kasodligi" yig'indi to'lovlari S ga bog'liq bo'ladi. Bu holda

$$S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

ko'rinishda bo'ladi va kollektiv risk modelidagi kasodlik ehtimolligi

$$R = P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_\nu > u)$$

formula bilan topiladi. Bu yerda u - kompaniya aktivi-boshlang'ich kapitali, kuzatilyotgan vaqtdagi sug'urta hodisalari sonini ν deb belgilaymiz.

Ko‘p marta o‘tkazilgan kuzatuvlar ko‘rsatadiki, fiksirlangan oraliqda ro‘y beradigan sug‘urta hodisalari soni ν Puasson

$$P(\nu = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

taqsimotiga yoki manfiy binomial taqsimotga

$$P(\nu = i) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1)}{i!} p^{\alpha} (1-p)^{\alpha}$$

ega bo‘ladi.

Individual sug‘urta to‘lovlari taqsimotlari sinfi yetarli darajada keng bo‘lib, ular ehtimolliklar nazariyasida ko‘p uchraydi. Ayniqsa, Y_i tasodifiy miqdorning taqsimoti diskret tipda bo‘lganlari ahamiyatli, chunki sug‘urta to‘lovlari asosan butun sonlarda ifodalanadi (ba’zida 100 yoki ming sumlarga qadar yaxlitlanadi). Kollektiv risk modelini belgilaydigan (ν, Y_i) tasodifiy miqdorlar juftligini maxsus tanlash o‘rganilayotgan kollektiv risk modelini mohiyatini ochishga yordam qiladi.

Masala 1. Yig‘indi sug‘urta to‘lovlari

$$S = S_\nu = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\nu$$

Formula bilan aniqlanadi. Bu yerda:

1) ν teng ehtimollik bilan faqat uchta 0,1 va 2 qiymatlarini qabul qiladi;

2) har bir Y_i tasodifiy miqdor eksponensial taqsimotga ega va uning o‘rta qiymati 0.5,

3) $\nu, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ birgalikda bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar.

$E\left[e^S\right]$miqdor hisoblansin.

Javoblar: A) 0.9, B) 2.1, C) 2.3, D) 2.5, E) 2.7.

Yechish. To‘la matematik kutilma formulasidan foydalansak,

$$E\left[e^S\right] = \sum_n P(\nu = n) E\left(e^{Y_1+Y_2+\dots+Y_\nu} \middle| \nu = n\right) = \sum_n P(\nu = n)\left(Ee^{Y_1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + Ee^{Y_i} + \left(Ee^{Y_i}\right)^2\right)$$

tengliklarni yoza olamiz. Tasodifiy miqdor Y_i lar eksponensial taqsimotga ega bo‘lgani uchun uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \quad EY_1 = 0.5$$

Demak, $\lambda = \frac{1}{0.5} = 2$. Shuning uchun ham

$$E\left(e^{Y_i}\right) = \int_0^\infty e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda-1)x} dx = \frac{1}{\lambda - 1}\int_0^\infty (\lambda-1) e^{-(\lambda-1)x} dx$$

Parametr $\lambda > 1$ bo'lgani uchun funksiya $(\lambda-1)e^{-(\lambda-1)x}$ eksponensial taqsimot zichlik funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$\int_0^\infty (\lambda-1)e^{-(\lambda-1)x} dx = 1$$

Demak, $E\left(e^{Y_i}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = 2$. keltirilgan natijalarni birlashtirib,

$$E\left(e^S\right) = \frac{1}{3}(1+2+5) = 2\frac{1}{3} \approx 2.3$$

natijani olamiz. Demak, to'g'ri javob varianti C).

Masala 2. Yig'indi sug'urta to'lovi $S_v = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_v$ kollektiv risk modelini tashkil qiladi. Quyidagilar ma'lum:

1) v parametri (tajribalar soni) $N = 5$ va "yutuq" ehtimolligi $p = 0.1$ bo'lgan binomial taqsimotga ega;

2) har bir Y_i tasodifiy miqdor $P(Y_i = 1) = P(Y_i = 2) = 0.5$ taqsimotga ega;

3) $v, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ birgalikda bog'liq emas.

Agar $M_S(t) = Ee^{tS}$ –sug'urta to'lovining momentlar hosil qiluvchi funksiyasi bo'lsa, $M_S(0,2)$ topilsin.

Javoblar: A) 1,15, B) 1.17, C) 1.19, D) 1.21, E) 1.23.

Yechish. To'la matematik kutilma formulasidan foydalansak,

$$M_S(t) = Ee^{tS} = \sum_{k=0}^{N} P(v = k) E\left(e^{tY_1 + \ldots + tY_v} \middle| v = k\right) = \sum_{k=0}^{N} P(v = k)\left(Ee^{tY_i}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (0.1)^k (0.9)^{5-k} \left(0.5e^t + 0.5e^{2t}\right)^k = \left((0.1 \cdot 0.5)\left(e^t + e^{2t}\right) + 0.9\right)^5 \approx 1.191486.$$

Keltirilgan formulalardan

$$M_S(0,2) = \left(0.05 \cdot \left(e^{0.2} + e^{0.4}\right) + 0.9\right)^5 \approx 1.191486.$$

Shunday qilib to'g'ri javob varianti C).

Masala 3. Kollektiv risk modelida yig'indi sug'urta to'lovi taqsimoti quyidagilar bilan xarakterlanadi:

1) sug'urta hodisalari soni v ning taqsimoti

$$P(\nu=n)=\binom{n+3}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}, n=0,1,2,...$$

2) sug'urta to'lovi taqsimoti zichlik funksiyasi $p(x)=4xe^{-2x}, x>0$. Yig'indi sug'urta taqsimotining dispersiyasi topilsin.

Javoblar: A) 2, B) 4, C) 6, D) 8, E) 10.

Yechish. Birinchi navbatda, sug'urta hodisalari sonining hosil qiluvchi funksiyasini topamiz:

$$\pi(x)=Ex^{\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\binom{n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^{n+4}}=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}x^{k-3}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{12}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right)'''=\frac{1}{16}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-4}.$$

Endi sug'urta to'lovining Laplas almashtirishini topamiz:

$$\psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}4xe^{-2x}dx=\frac{4}{2+s}\int_0^{\infty}x(2+s)e^{-(2+s)x}dx.$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi integral parametri $\lambda=2+s$ bo'lgan eksponensial taqsimotning o'rta qiymati bo'ladi. Ma'lumki, bu o'rta qiymat $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}+s$. Demak,

$$\psi(s)=\frac{4}{(2+s)^2}.$$

Yig'indi sug'urta to'lovi

$$S=Y_1+Y_2+...+Y_{\nu}$$

Laplas almashtirishini ham topish mumkin. Bu yerda Y_1 - birinchi ro'y bergan sug'urta hodisasi to'lovi, Y_2 - ikkinchi ro'y bergan sug'urta hodisasi to'lovi va hokazo. U holda

$$\psi(s)=Ee^{-s(Y_1+Y_2+...+Y_{\nu})}=\sum E\left(e^{-s(Y_1+Y_2+...+Y_{\nu})}|\nu=n\right)P(\nu=n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi(s))^nP(\nu=n)=E(\psi(s))^{\nu}=\pi(\psi(s))=\frac{1}{16}\left(1-2(2+s)^{-2}\right)^{-4}.$$

Oxirgi formulada $s=0$ nuqtada differensiallash amalini bajarib

$$ES=-\psi'(0)=-\frac{1}{16}(-4)\left(1-2(2+s)^{-2}\right)^{-5}=\left(-2\cdot(-2)\cdot(2+s)^{-3}\right)\Big|_{s=0}=4.$$

ekanligini olamiz. Xuddi shunga o'xshash $ES^2=\psi''(0)=26$, ya'ni

$$VarS=ES^2-(ES)^2=10.$$

Demak, to'g'ri javob varianti E).

Quyidagi masalalar o'quvchiga mustaqil yechish uchun taklif qilinadi.

Masala 4. Umumiy talofat taqsimoti quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) sug'urta hodisalari soni taqsimoti:

$$P(\nu=0)=0.5, P(\nu=1)=0.3, P(\nu=2)=0.2.$$

2) individual talofat taqsimoti:

$$P(Y=1)=0.8, P(Y=4)=0.2.$$

Yig'indi sug'urta talofatining o'zini o'rta qiymatidan 2 martta katta bo'lishi ehtimolligi topilsin.

Javoblar: A) 0.132, B) 0.138, C) 0.144, D) 0.150, E) 0.156.

To'g'ri javob varianti A).

Masala 5. Quyidagi jadvalda qandaydir sug'urta portfeli uchun sug'urta hodisalari sonining taqsimoti keltirilgan:

n	$P(\nu=n)$
0	0.7
2	0.2
3	0.1

Sug'urta hodisasi ro'y berganda uning uchun to'lanadigan sug'urta to'lovi Y uchun

$$P(Y=10)=0.2, \quad P(Y=0)=0.8.$$

Sug'urta hodisalari soni ν va sug'urta to'lovi Y bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deb hisoblanadi. Yig'indi sug'urta to'lovining (portfel bo'yicha) o'zining o'rta qiymatidan 2 ta standart og'ishga katta bo'lish ehtimolligi topilsin.

Javoblar: A) 0.02, B) 0.05, C) 0.07, D) 0.09, E) 0.12.

To'g'ri javob varianti E).

Ko'rsatma. Ma'lumki, S tasodifiy miqdorning standart og'ishi deb $\sigma_S=\sqrt{VarS}$ miqdorga aytiladi. Demak, yig'indi sug'urta to'lovi S uchun

$$P=P(S>ES+2\sigma_S)$$

ehtimollikni topish taklif etiladi.

Masala 6. Kollektiv risk modelida yig'indi talofat miqdori S parametri $\lambda = 63$ bo'lgan murakkab Puasson taqsimotiga ega va sug'urta to'lovi miqdorining taqsimoti quyidagi

x	$P(Y=x)$
1	0.5
5	0.3
10	0.2

jadvalda keltirilgan. Normal approksimatsiya yordamida $P(S>315)$ ehtimollik hisoblansin.

Javoblar: A) 0.03, B) 0.04, C) 0.05, D) 0.06, E) 0.07.

To'g'ri javob varianti E).

Yechish uchun eslatma. Yig'indi talofat miqdori murakkab parametri λ bo'lgan murakkab taqsimotga ega, ya'ni u $S = \{\pi_\lambda, Y\}$ ko'rinishdagi tasodifiy yig'indi bo'ladi:

$$S = Y_1 + \ldots + Y_{\pi_\lambda} = Y_1 + \ldots + Y_{\nu(\lambda)}$$

va bu yerda $Y_1, Y_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va berilgan Y tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan, ular taqsimoti π_λ bo'lgan

$$P(\nu(\lambda)=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Tasodifiy miqdor $\nu = \nu(\lambda)$ bilan ham bog'liq emas. Oson ko'rinadiki,

$$\varphi(z) = Ez^Y = 0.5z + 0.3z^5 + 0.2z^{10}.$$

Demak, S tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasi

$$G(z) = Ez^S = \sum_n P(\nu = n) E\left(z^{Y_1 + \ldots + Y_\nu} \middle| \nu = n\right) = \pi(\varphi(z)) = e^{-\lambda} \cdot e^{\varphi(z)}.$$

Oxirgi tenglikdan differensiallash yo'li bilan ES va $VarS$ miqdorlar osonlik bilan topiladi. Oxirgi yechimni topish uchun

$$P(S>315) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}} > \frac{315-ES}{\sqrt{VarS}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{315-ES}{\sqrt{VarS}}\right)$$

munosabatdan foydalanish yetarli bo'ladi.

Masala 7. Sug'urta kompaniyasi konsert zalini elektr ta'minlash sistemasi buzilishidan sug'urtalaydi. Quyidagilar ma'lum:

1) elektr ta'minlash sistemalarining buzilishlar soni parametri 1 bo'lgan Puasson taqsimotiga ega, ya'ni

$$P(v=n)=\frac{1}{n!}e^{-1}, n=1,2,...$$

2) elektr ta'minlash sistemasini 1 marta buzilishidan ko'riladigan zarar (talofat) quyidagi jadvalda berilgan;

x	$P(Y=x)$
10	0.3
20	0.3
50	0.4

3) Elektr ta'minlash sistemasi buzilishi soni va undan yetkaziladigan zarar Y bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar;

4) agar ko'rilgan zarar 30 dan ko'p bo'lmasa, uni kompaniyaning o'zi to'laydi.

Sug'urta kompaniyasining 1 yildagi sug'urta to'lovining o'rta qiymati topilsin.

Javoblar: A) 5, B) 8, C) 10, D) 12, E) 14.

To'g'ri javob varianti E).

Masala 8. Guruh modelini sug'urtalashda 1 yilda ro'y berishi mumkin bo'lgan sug'urta hodisalari soni parametr $\lambda=500$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega.

Har bir sug'urta hodisasi uchun to'lov miqdorining taqsimoti quyidagi jadvalda keltirilgan.

x	$P(Y=x)$
50	0.3
100	0.2
200	0.2
300	0.1
400	0.1
500	0.1

Kompaniya xodimi (aktuariy) 1 yilda sug'urta hodisasi bilan bog'liq bo'lgan inflatsiya oqibatida tibbiy xarajatlarni har bir sug'urta hodisasi bo'yicha 20% ga oshishini taxmin etadi.

Shartnoma bo'yicha sug'urta kompaniyasining 1 yildagi umumiy talofati o'rta qiymati va variatsiya koeffitsiyenti hisoblansin.

Javob: $ES = 10800, \frac{ES}{\sqrt{VarS}} \approx 1,6\%$.

Masala 9. Sug'urta hodisalari ro'y berishlari sonining tahlil etilayotgan oraliqdagi taqsimoti o'rta qiymati 9 ga teng bo'lgan geometrik taqsimot, ya'ni

$$\pi_n = P(v = n) = (0.9)^n \cdot 0.1, \quad n = 0,1,2,...$$

Bu hodisa oqibatida ko'rilgan talofat o'rta qiymati 1 bo'lgan eksponensial taqsimot, ya'ni

$$P(Y_i < x) = 1 - e^{-x}, x > 0$$

bo'lsin. Kompaniyaning kasodlik ehtimolligini boshlang'ich kapital-aktiv orqali ifoda eting.

Yechish. Tasodifiy miqdor $v-$ sug'urta hodisalari soni, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ ketma-ket ro'y bergan sug'urta hodisalaridan kutilgan talofat miqdori bo'lsin.

Yaxshi ma'lumki, tasodifiy miqdor $Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ parametri $\lambda = 1, \alpha = n$ bo'lgan Gamma taqsimotga ega bo'ladi. Shuning uchun ham umumiy talofatni ifodalaydigan $S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_v$ tasodifiy yig'indining zichlik funksiyasi

$$p_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(v = n) p_{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n \cdot 0.1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} =$$

$$= 0.09 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.9x)^n}{n!} e^{-x} = 0.09 e^{0.9x - x} = 0.09 e^{-0.1x}.$$

Agar u-kompaniyaning aktivi (boshlang'ich kapitali) bo'lsa, kasodlik ehtimolligi

$$R(u) = P(S > u) = \int_u^{\infty} p_S(x) dx = 0.9 e^{-0.1u}.$$

Masala 10. Meditsina sug'urtasi tuzilishi uchun asos bo'ladigan sug'urta hodisalari ikki xil kasalliklardan iborat: oddiy va stomatologik kasalliklar va ular bog'liqsiz ravishda ro'y berishlari parametrlari λ bo‘lgan murakkab Puasson taqsimotiga ega bo‘ladi. Sug‘urta to‘lovi taqsimotlari quyidagi jadvalda berilgan:

Kasallik turi	Meditsina xarajatlari miqdori taqsimoti	λ
Oddiy	$(0,1000)$ oraliqda tekis taqsimlangan	2
Stomatologik	$(0,200)$ oraliqda tekis taqsimlangan	3

Sug‘urta shartnomasi bo‘yicha qandaydir sug‘urta hodisasi oqibatidagi tibbiy xarajatlar 100 dan kam bo‘lsa, bu xarajatlarni hammasini sug‘urtalanovchi shaxs to‘laydi. Agar bu xarajatlar 100 dan ko‘p bo‘lsa, sug‘urtalovchi shaxs 100 so‘m to‘laydi, qolganlarini esa kompaniya to‘laydi. Bitta sug‘urta to‘lovining o‘rta qiymati topilsin.

Javoblar: A) 161, B) 167, C) 172, D) 177, E) 183.

To‘g‘ri javob varianti D).

Ko‘rsatma. Faraz qilaylik $S_1, S_2, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog‘liqsiz va murakkab Puasson taqsimotlariga ega bo‘lib, ular

$S_i = \{\lambda_1, F_1\}$, $S_2 = \{\lambda_2, F_2\}$, ...

ko‘rinishda bo‘lsin. Ya’ni $S_i = X_1^{(i)} + \dots + X_{v_i}^{(i)}$ yig‘indilarda

$$P\left(X_j^{(i)} < x\right) = F_i(x), P(v_i = n) = \frac{\lambda_i^n}{n!} e^{-\lambda_i}, n = 1,2,\dots$$

va $v_i, X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots$ tasodifiy miqdorlar birgalikda bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. Umumiy yig‘indi

$$S = S_1 + S_2 + \dots$$

tasodifiy miqdorning taqsimotini topamiz. Buning uchun

$$\psi_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_i(x), i = 1,2,\dots$$

Laplas almashtirishlarini kiritamiz. Bu holda S miqdorning Laplas almashtirishi

$$\Phi(s) = E\exp\{-sS\} = E\exp\left(-s\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} E\exp(-sS_i) =$$

$$=\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\lambda}\psi_i(s)-\lambda\right).$$

Bu yerda

$$\lambda=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$$

(bu qatorning yaqinlashishi talab etiladi).

Endi

$$\psi(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\lambda}\psi_i(s)$$

ifodani

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\lambda}F_i(x)$$

Tenglik bilan aniqlangan taqsimot funksiyasining Laplas almashtirishi deb hisoblasa bo'ladi. Demak,

$$\Phi(s)=\exp\{\lambda\psi(s)-\lambda\}$$

formula o'rinli ekan.

Berilgan misolda $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=2+3=5$, sug'urta hodisalari ro'y bergandan so'ng meditsina xarajatlarini belgilaydigan Y tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi "qorishma"

$$f_Y(x)=\frac{2}{5}p_1(x)+\frac{3}{5}p_2(x)$$

funksiyadan iborat. Bu yerda mos ravishda $p_1(x)$ va $p_2(x)$ oraliqlar $(0,1000)$ va $(0,200)$ lardagi tekis taqsimot zichlik funksiyalari. Bularni hisobga olib meditsina xarajatlari Y ning zichlik funksiyasi

$$f_Y(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<0,\\ \frac{17}{5000}, & agar \quad 0<x<200,\\ \frac{2}{5000}, & agar \quad 200<x<1000,\\ 0, & agar \quad x>1000 \quad bo'lsa.\end{cases}$$

8.3. Qayta sug'urtalash masalalari

Sug'urtalash shartnomasini tuzgunga qadar sug'urtalovchi shaxs X miqdorda talofat yetkazilgan qandaydir riskka ega bo'ladi.

Shartnoma tuzilgandan so'ng sug'urtalanuvchi shaxs ozgina premiya to'plami hisobiga bu riskdan himoyalanadi. Boshqacha aytganda, sug'urtalanuvchi shaxs oz miqdorda bo'lgan premiya to'lovchi hisobiga katta talofatlar keltirishi mumkin bo'lgan tasodifiy risklardan qutiladi. Lekin, tahdidli bo'lgan risk yo'q bo'lmaydi, uni sug'urta kompaniyasi o'ziga oladi. Bunda kompaniya sug'urta potrfeli hajmini oshirishi hisobiga kasod bo'lishlik ehtimolligini kamaytirishga erishadi. Lekin sug'urta hodisalari ro'y berganda kompaniyaga katta hajmdagi sug'urta to'lovlarini oshirishga to'g'ri keladi. Bunday holatlardan kamroq talofatlar bilan chiqish uchun sug'urta kompaniyasi o'zining riskini boshqa kompaniyada sug'urtalashga harakat qiladi. Sug'urtaning bu turini *qayta sug'urtalash* deb atash tabiiy bo'ladi.

Qayd qilib o'tish zarurki, sug'urta kompaniyasi qayta sug'urtalash jarayonidan boshqa sabablar hisobiga ham manfaatdor bo'lishi mumkin. Masalan, yangi bisnesni moliyalashtirish qo'shimcha ish joylari yaratish zarurligida qayta sug'urtalash kompaniyaning moliyaviy turg'unligini ta'min etishi mumkin.

Mijozlar bilan bevosita shartnomalar tuzgan va o'zining riskini biror qismini boshqa kompaniyada sug'urtalaydigan kompaniya *uzatuvchi kompaniya* deb ataladi. Uzatuvchi kompaniyaning riskini sug'urtalaydigan kompaniya *qayta sug'urtalash* kompaniyasi deb nomlanadi.

Amaliyotda qayta sug'urtalashning quyidagi varianti ko'proq qo'llaniladi. Uzatuvchi kompaniya o'z mijozlariga sug'urta to'lovi R so'mdan kam bo'lgan hamma talofatlarni qoplaydi. Agar sug'urta to'lovi R so'mdan katta bo'lsa, uzatuvchi kompaniya mustaqil ravishda bu to'lovlarning R qismini qoplaydi, R dan katta hajmini esa qayta sug'urtalash kompaniyasi to'laydi. Demak, to'lanishi kerak bo'lgan X sug'urta to'lovi bo'lsa, uzatuvchi va qayta sug'urtalash kompaniyalari mos ravishda

$$X_C = \begin{cases} X, & агар \quad X \le R, \\ r, & агар \quad X > R, \end{cases} \qquad \text{va} \qquad X_{K,C} = \begin{cases} 0, & агар \quad X \le R, \\ X - r, & агар \quad X > R, \end{cases}$$

pul miqdorlarini to'laydilar.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, qayta sug'urtalash jarayoni boshlang'ich risk X ni kamaytiradi. Bundagi R miqdorni chegaralash *parametri* deb ataladi.

Masala 1. Sug'urta kompaniyasining portfeli bog'liqsiz hayot sug'urtalaridan (1 yil muddatli) tashkil topgan. Bu biznes blokining strukturasi quyidagi 1-jadvalda keltirilgan:

1-jadval

Shartnomalar soni	Sug'urta summasi
500	100
300	50
100	40

Hajmi 860 bo'lgan qayta sug'urtalash premiyasi uchun qayta sug'urtalovchi kompaniya har bir shartnomaning chegaralovchi parametri 40 bo'lgan hamma individual to'lovlarni qoplash majburiyatini oladi.

Qayta sug'urtalovchi kompaniyaning yuklama koeffitsiyenti sug'urtalovchi kompaniyaning nisbiy himoyaviy qo'shimcha yuklamasidan 2 barobar katta.

Bitta shartnoma bo'yicha qayta sug'urtalash nuqtayi nazaridan sug'urta hodisasi bo'lgan hodisaning ro'y berishlik ehtimolligi topilsin.

Javoblar: (A) 0,014 (B) 0,018 (C) 0,022 (D) 0,026 (E) 0,030

Yechish. Oldin to'g'ridan-to'g'ri sug'urta holatlarini o'rganaylik. Har bir bir turdagi bitta shartnoma bo'yicha kutilishi mumkin bo'lgan talofatlar quyidagi 2-jadvalda keltirilgan:

2-jadval

Guruhdagi shartnomalar soni	Bitta shartnoma bo'yicha kutilgan to'lovlar soni	Shartnomalar guruhi bo'yicha kutilgan to'lovlar
500	100*0,02=2	500*2=1000
300	50*0,02=1	300*1=300
100	40*0,02=0,8	100*0,8=80

Bu shartnomaning uchinchi ustunidagi ma'lumotlarga, asosan, ko'rilayotgan portfel bo'yicha kutiladigan to'lovlar

$$1000+300+80=1380$$

yig'indiga teng. Bu yig'indi netto-premiya miqdori. Umumiy premiyalar miqdori 2000 bo'lgani uchun, sug'urta kompaniyasining nisbiy himoyaviy yuklamasi

$$\theta = \frac{2000-1380}{1380} \approx 0{,}45.$$

Mos ravishda qayta sug'urtalovchi kompaniyaning nisbiy himoyaviy yuklamasi

$$\theta' = 2.0 \approx 0{,}9.$$

Endi qayta sug'urtalash nuqtayi nazaridan yuzaga kelgan sug'urta holatini ko'ramiz. Bu kompaniya faqat chegaralash parametrlaridan katta bo'lgan individual to'lovlarni qoplagani uchun birinchi guruhdagi shartnomalar bo'yicha 60 so'm, ikkinchi guruhdagi shartnomalar bo'yicha 10 so'm, uchinchi guruhdagi shartnomalar bo'yicha hech narsa to'lamaydi (0 so'm). Bularni hisobga olib quyidagi 3-jadvalda qayta sug'urtalash kompaniyasining har bir guruhdagi to'lovlar miqdori keltirilgan:

3-Jadval

Guruhdagi shartnomalar soni	Bitta shartnoma bo'yicha kutilgan to'lovlar	Shartnomalar guruhi bo'yicha kutilgan to'lovlar
500	60*q=60q	500*60q=30000q
300	10*q=10q	300*10q=3000q
100	0	0

Bu yerda q-qayta sug'urtalash kompaniyasi uchun sug'urta hodisasi ehtimolligi. Keltirilgan 3-jadvaldan ko'rinadiki, qayta sug'urtalash kompaniyasi uchun qayta sug'urtalash portfeli bo'yicha kutilgan to'lov miqdori 33000q – bu qayta sug'urtalash netto-premiyasi. Yuqorida ko'rgan edikki, qayta sug'urtalash nisbiy himoyaviy yuklama koeffitsiyenti 0,9 ga teng. Demak, umumiy qayta sug'urtalash premiyasi 62700q ga teng. Lekin masalaning sharti bo'yicha bu premiya 860 ga teng, ya'ni

$$62700q = 80$$

bo'lib, $q \approx 0{,}0137 \approx 0{,}014$. To'g'ri javob: (A) variant.

Masala 2. Sug'urta kompaniyasining bir yillik umumiy sug'urta to'lovi murakkab manfiy binomial taqsimoti bilan ifoda etiladi. Bir yil davomidagi ro'y beradigan sug'urta hodisalari sonining o'rta qiymati 9, uning kvadratidan og'ishi 6 ga teng. Individual to'lov miqdori faqat 1 va 3 qiymatlarni mos ravishda 1/3 va 2/3 ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Kompaniya boshlang'ich riskni kamaytiradigan va chegaralovchi parametri R=3 bo'lgan qayta sug'urtalash shartnomasini imzoladi.

Qayta sug'urtalash kompaniyasining sug'urta to'lovi miqdorining o'rta qiymatini topilsin.

Javoblar: (A) 18,1 (B) 18,3 (C) 18,5 (D) 18,7 (E) 18,9

Yechish. Bir yilda ro'y beradigan sug'urta hodisalari sonini ν bilan belgilaylik. Masalaning sharti bo'yicha tasodifiy miqdor ν- manfiy binomial taqsimotga ega bo'ladi, ya'ni

$$P(\nu = n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} p^{\alpha} q^{n-\alpha}, \qquad n = 1,2,...$$

va odatdagidek, bu yerda $q = 1-p,\ 0 < p \leq 1$.

Parametrlar α va p tasodifiy miqdor ν ning o'rta qiymati $E\nu$ va dispersiyasi $Var\nu$ bilan

$$E\nu = \frac{\alpha q}{p}, \qquad Var\nu = \frac{\alpha q}{p^2}$$

tengliklar orqali bog'langan. Masalaning shartlaridan foydalansak,

$$\alpha = 3, \quad p = 1/4$$

tengliklarni olamiz. Demak,

$$P(\nu = n) = \frac{(n+1)(n+2)}{1284}\left(\frac{3}{4}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,...$$

Oxirgidan bu taqsimotning hosil qiluvchi funksiyasi

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\nu = n) = \left(\frac{p}{1-2q}\right)^{\alpha} = \frac{1}{(4-3z)^3}$$

ekanligini olamiz.

Endi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$Y_1,\ Y_2, \ldots$$

individual sug'urta to'lovlari miqdorini ifoda qilsin. Masalaning shartiga, asosan,

$$EY_i = 1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{3}, \qquad Ez^{Y_i}=Ez^{Y_1}=\frac{z+2z^3}{3}.$$

Agar $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_v$ belgilashni kiritsak, S -- bir yil davomidagi talofatlar miqdorini ifoda etadi. Bu miqdorning, hosil qiluvchi funksiyasi

$$Ez^S = \sum_{n=0}^{\infty} E(z^S / v = n)\cdot P(v=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(Ez^{Y_1}\right)^n P(v=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2z^3}{3}\right)^n P(v=n) = \pi\left(\frac{z+2z^3}{3}\right) = \frac{1}{(4-z-2z^3)^3}.$$

Oxirgi formulada $z=1$ nuqtada differensiallash amalini bajarsak, $ES=21$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan tashqari, hosil qiluvchi funksiya Ez^S ni z bo'yicha qatorga yoyib (z^2 darajaga qadar) quyidagilarni olamiz:

$$Ez^S = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z+2z^3}{4}\right)^3} = \frac{1}{64}\left(1+\frac{z+2z^3}{4}+\frac{(z+2z^3)^2}{16}+\cdots\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{64}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}+\cdots\right)^3 = \frac{1}{64}\left(1+\frac{3z}{4}+\frac{3z^2}{8}+\cdots\right)$$

Bu formula yig'indi talofatning 0, 1, 2 nuqtalardagi taqsimoti

$$P(S=0) = P(v=0) = \frac{1}{64},$$

$$P(S=1) = P(v=1)P(Y_1=1) = \frac{9}{256}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{256},$$

$$P(S=2) = P(v=2)P(Y_1=1)P(Y_2=1) = \frac{27}{512}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{512}$$

ehtimolliklarini topish imkonini beradi.

Qayta sug'urtalovchi kompaniya chegaralovchi parametr R=3 dan katta talofatlarni qoplaydi, xolos va uning sug'urta to'lovi miqdori

$$S' = \begin{cases} 0, & агар \quad S \le 3, \\ S-3, & агар \quad S > 3 \end{cases}$$

formula bilan aniqlanadi.

Demak,

$$ES' = \sum_{n=0}^{\infty} nP(S' = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(S - 3 = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(S = n + 3) =$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty}(n-3)P(S = n) = \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)P(S = n) - \sum_{n=0}^{2}(n-3)P(S = n) =$$
$$= ES - 3 + 3 \cdot P(S = 0) + 2 \cdot P(S = 1) + 1 \cdot P(S = 2) =$$
$$= 21 - 3 + \frac{3}{64} + \frac{6}{256} + \frac{3}{512} = 18\frac{39}{512} \approx 18{,}076.$$

Shuning uchun ham (A) variant to'g'ri javob bo'ladi.

Quyidagi masalani mustaqil yechish uchun o'quvchiga tavsiya etamiz.

Masala 3. Sug'urta kompaniyasining shartnomalar portfelining strukturasi quyidagi jadvalda keltirilgan.

4-jadval

Shartnoma turi	Guruhlardagi shartnomalar soni	Sug'urta nomi	Sug'urta hodisalari ehtimolligi
1	50	4	0,05
2	100	10	p

Qayta sug'urtalash kompaniyasi chegaralovchi parametr $R = 2$ dan katta bo'lgan talofatga ega bo'lgan har qanday shartnomani, hajmi 1 ga teng bo'lgan riskni qoplash uchun 0,02 miqdordagi qayta sug'urtalash premiyasi belgilash bilan qayta sug'urtalash majburiyatini oladi.

Chegaralangan yig'indi talofatining va qayta sug'urtalash bahosining 30 dan katta bo'lish ehtimolligi 0,10 ga teng.

Ikkinchi guruhdagi shartnomalar uchun sug'urta hodisasi ro'y berish ehtimoli p topilsin.

Javoblar: (A) 0,01 (B) 0,03 (C) 0,05 (D) 0,07 (E) 0,09

Eslatma. Qayta sug'urtalash nuqtayi nazaridan, qayta sug'urtalash shartnomalari tuzilganidan so'ng yuzaga keladigan sug'urta holati quyidagi 5-jadvalda keltirilgan.

5-jadval

Shartnoma turi	Guruhlardagi shartnomalar soni	Qayta sug'urta majburiyati	Sug'urta hodisasi ehtimolligi
1	50	2	0,05
2	100	8	P

Endi v_1 va v_2 tasodifiy miqdorlar mos ravishda birinchi va ikkinchi turdagi sug'urta hodisalari ro'y berishlari soni bo'lsin, ya'ni $v = v_1 + v_2$-- umumiy sug'urta hodisalari soni bo'lsin. Sug'urta kompaniyasi $R = 2$ summani qoplash kerak, xolos. Demak, kompaniyaning umumiy yig'indi to'lovi

$$S = 2(v_1 + v_2)$$

bo'lib, masalaning shartiga ko'ra:

$$P(S + 18 > 30) = 0{,}1. \qquad (*)$$

O'z navbatida, umumiy qayta sug'urtalash premiyasi:

$$0{,}02(50{,}2 + 100{,}8) = 18.$$

Yuqoridagi (*) munosabatni p ga nisbatan tenglama deb qarab, unda

$$P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} < x\right) \cong \Phi(x)$$

Approksimatsiyadan foydalananib, so'ngra hosil bo'lgan tenglamadan noma'lum p ehtimollikni topamiz. Bunda:

$$Ev_1 = 50 \cdot 0{,}05 = 2{,}5, \qquad Ev_2 = 100p,$$

tengliklardan foydalanishga to'g'ri keladi.

8.4. Kasodlikning dinamik modellari bo'yicha masalalar

Sug'urtaning dinamik modellari individual (statik) modellaridan farqi shundaki, ulardagi xodimlarni o'zgarishi vaqtga bog'liq bo'ladi. Bu modellarning eng soddasi faqat ikki jarayondan iborat bo'ladi: premiyalar tushimi jarayoni va sug'urta to'lovlari jarayoni. Premiyalar sug'urta hodisalari ro'y berishiga nisbatan aneha tez to'planadi va bunda premiyalar miqdori sug'urta to'lovlariga nisbatan ancha kam bo'ladi. Shuning uchun ham sug'urta hodisalari ro'y berishi jarayonini asosiy deb hisoblansa, bu jarayonning masshtabi chegarasida premiyalar jamlanishini uzluksiz deterministik (tasodifiy bo'lmagan) jarayon sifatida tushunish mumkin.

Eng sodda holda premiyalar tushimi faqat bitta parametr c – pul mablag'lari tushimi tezligi bilan aniqlanadi deb hisoblash mumkin. Oxirgi jumlani quyidagicha tushunish mumkin: agar biror t momentda kompaniyaning aktivi (kapitali) u_t bo'lsa va $t+h$ vaqt momentiga qadar hech qanday sug'urta hodisasi ro'y bermasa, kompaniyaning $t+h$ momentdagi kapitali

$$u_{t+h} = u_t + ch$$

miqdor bo'ladi. Oxiridan esa

$$\frac{u_{t+h} - u_t}{h} = c = const$$

ekanligini olamiz. Bu xulosadan investitsiyadan olingan daromad va inflatsiya hisobi olinadi.

Sug'urta hodisalari ro'y berishi jarayoning eng sodda variantlari sifatida Puasson jarayonini qabul qilish mumkin. Aytaylik, λ – bu jarayonning intensivligi bo'lib, T_n – n- sug'urta hodisasining ro'y berishi momenti,

$$\tau_n = T_n - T_{n-1}$$

n- va $n-1$- sug'urta hodisalari orasidan vaqt intervalini belgilasin ($T_0 = 0$ deb hisoblanadi). Ko'rilayotgan modelda sug'urta hodisasi ro'y bergan vaqtning o'zida sug'urta to'lovi amalga oshiriladi. Sug'urta to'lovlarini ifoda etadigan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$Y_1, Y_2, \ldots$$

bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan deb hisoblanadi va ular sug'urta hodisasi ro'y bergan

$$T_1, T_2, \ldots$$

momentlarga bog'liq emas deb hisoblanadi.

Endi kompaniya aktivining vaqt bo'yicha o'zgarishini quyidagicha izohlab o'tish mumkin. Vaqtning $t=0$ momentida kompaniya qandaydir $u_0=u$ aktivga (kapitalga) ega. Birinchi sug'urta hodisasi ro'y berishi $T_1=\tau_1$ momentda kompaniyaning aktivi $u+c\tau_1$ miqdorga o'sadi (premiyalar tushimi hisobiga). Lekin T_1 momentda kompaniya Y_1 miqdorda sug'urta to'lovi o'tkazadi. Demak, T_1 momentda kompaniyanig aktivi

$$u+c\tau_1-Y_1$$

miqdorga kamayadi. T_2 momentda – ikkinchi sug'urta hodisasi ro'y berganda kompaniyaning aktivi

$$c(T_2-T_1)=c\tau_2$$

miqdorga o'sadi va u

$$u+c\tau_1-Y_1+c\tau_2=u+c(\tau_1+\tau_2)-Y_1$$

so'mni tashkil qiladi. T_2 momentda kompaniya Y_2 miqdorda sug'urta to'lovi to'laydi va uning aktivi

$$u+c(\tau_1+\tau_2)-(Y_1+Y_2)$$

miqdorga kamayadi.

Bu izohlab o'tilgan jarayon cheksiz davom etishi mumkin, toki kompaniyaning qandaydir sug'urta hodisasi ro'y berishidagi sug'urta to'lovi uchun mablag'i yetmasa. Bu holda biz sug'urta kompaniyasining kasodga uchraganligi haqida gapiramiz. Shunday qilib, tahlil etilgan model chegarasida kompaniya kasodga uchraydi, agar

$$u+cT_n-(Y_1+...+Y_n)\ge 0,\ n=1,2,...$$

hodisalar ro'y bersa. Aksincha, agar

$$u+c\tau_1-Y_1\ge 0,$$

$$u+c(\tau_1+\tau_2)-(Y_1+Y_2)\ge 0,$$

....

$$u+c(\tau_1+...+\tau_{n-1})-(Y_1+...+Y_{n-1})\ge 0,$$

lekin

$$u+c(\tau_1+...+\tau_n)-(Y_1+...+Y_n)<0$$

bo'lsa, n- sug'urta hodisasi ro'y bergan T_n momentda kompaniya kasodga uchraydi.

Keltirilgan modelning asosiy xarakteristikasi bo‘lib $R = R(u)$ kasodlik ehtimolligi hisoblanadi.

Butun bir birlik vaqt davomida o‘rtacha λ sug‘urta hodisalari ro‘y beradi va bu holat kompaniyaning o‘rtacha λm miqdorda sug‘urta to‘loviga olib keladi (bu yerda $m = EY_1 = ... = EY_n = ...$). Ikkinchi tomondan bu vaqt oralig‘ida kompaniya premiya ko‘rinishida c so‘m pul to‘laydi. Bu summa o‘rtacha “yuklama” to‘lov

$$c = (1+\theta)\lambda m$$

miqdorga teng bo‘lishi kerak. Bu yerda $\theta -$ nisbiy himoya qo‘shimchasi. Shuning uchun ham $c > \lambda m$ tengsizlik bajarilishi kerak.

Kasodlik dinamik modellariga tegishli masalalarni yechishda izohlab o‘tilgan modellar uchun isbot etilgan quyidagi natijalar muhim rol o‘ynaydi.

1. Kasodlik ehtimolligini Laplas almashtirishi (sug‘urta kompaniyasining boshlang‘ich aktivi (kapitali) funksiyasi sifatida)

$$\rho(s) = \int_0^\infty e^{-su} R(u)du = \frac{1-\varphi(s)-ms}{s(1-\varphi(s)-(1+\theta)ms)} \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$\varphi(s) = Ee^{-sY_1}$$

individual to‘lov miqdorining Laplas almashtirishi, $m = EY_1 -$ individual sug‘urta to‘lovi o‘rta qiymati,

$$\theta = \frac{c-\lambda m}{\lambda m}$$

nisbiy himoya qo‘shimchasi.

2. Kasodlik ehtimolligi

$$R(u) \le e^{-ru} \qquad (2)$$

Lundberg tengsizligini qanoatlantiradi. Bu yerda $r -$ noma’lum z ga nisbatan xarakteristik

$$\psi(z) = 1+(1+\theta)mz \qquad (3)$$

tenglamani musbat qiymatli yechimi. Bu yerda

$$\psi(z) = \varphi(-z) = Ee^{zY_1}$$

individual sug‘urta to‘lovining momentlar hosil qiluvchi funksiyasi.

3. Kramer-Lundbergning asimptotik

$$R(u) \sim \frac{\theta m}{\psi'(r) - (1+\theta)m} e^{-ru}, \ u \to \infty \qquad (4)$$

formulasi o'rinli.

4. Lundberg tengsizligidan va Kramer-Lundbergning asimptotikasidan kelib chiqadiki, agar xarakteristik koeffitsiyent r ning qiymatlari katta bo'lsa, kasodlik ehtimolligi kichik bo'ladi. Shu o'rinda qayd etib o'tish kerak bo'ladiki, xarakteristik koeffitsiyent r sug'urta faoliyatining asosiy parametrlarini (sug'urta hodisasining ro'y berishlari intensivligi λ, individual talofat miqdori Y_i larni, premiya tushumi tezligi c) o'ziga qamrab oladi va uni kompaniyaning moliyaviy xavfsizligi uchun asosiy xarakteristika sifatida qabul qilish mumkin.

Masala 1. Sug'urta kompaniyasining boshlang'ich kapitali (aktivi) 1 va uning shartnomalar portfeli shundayki, u eng ko'pi bilan bitta sug'urta hodisasini yuzaga keltirish mumkin.

Yana qo'shimcha ravishda quyidagilar ma'lum:

1) sug'urta hodisasi ro'y berishda ko'riladigan talofat miqdori 5 ga teng;

2) sug'urta hodisasi ro'y berish ehtimolligi $\frac{1}{3}$;

3) sug'urta hodisasi ro'y berish vaqti (u albatta ro'y berishi sharti ostida) taqsimotining zichlik funksiyasi

$$p(t) = 2t^{-3}, \ t > 1.$$

Premiya tushimi uzluksiz va u 3 ga teng.

Kasodlik ehtimolligi topilsin. Javoblar:

A) 0,03 B) 0,06 C) 0,09 D) 0,12 E) 0,15.

Yechish. Agar yagona (bitta) mumkin bo'lgan sug'urta hodisasi ro'y bermasa (uning ehtimolligi $\frac{2}{3}$), kompaniya hech qachon kasodga uchramaydi.

Agar yagona sug'urta hodisasi ro'y bersa (bu hodisaning ehtimolligi $\frac{1}{3}$ ga teng), kompaniya kasod bo'lishligi yoki bo'lmasligi, kompaniyaning sug'urta hodisasi ro'y berishi T momentdagi uning aktivi, ko'rilgan ziyondan (uning miqdori 5 ga teng) kichik bo'lishiga yoki katta bo'lishiga bog'liq bo'ladi. O'z-o'zidan tushunarliki, T momentdagi kompaniyaning aktivi

$1+3T$

miqdorga teng. Demak, kompaniya kasodga uchraydi, agar $1+3T<5$ tengsizlik bajarilsa. Shunday qilib, kompaniyaning kasodlik ehtimolligi

$$P=\frac{1}{3}\cdot P(1+3T<5)=\frac{1}{3}\cdot P\left(T<\frac{4}{3}\right)$$

va masalaning yechimi tasodifiy miqdor T ning taqsimot funksiyasini $t=\frac{4}{3}$ nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiriladi. O‘z navbatida,

$$P(T<t)=\int_1^t\frac{2}{u^3}du=-u^{-2}\Big|_1^t=1-\frac{1}{t^2},\ t\geq 1$$

va

$$P=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right)=\frac{7}{48}\approx 0{,}1458\,.$$

Demak, to‘g‘ri javob E) variant.

Masala 2. Qandaydir bir korxonani sug‘urtalash uchun maxsus sug‘urta kompaniyasi tuzildi. Sug‘urtaning riski yagona bitta sug‘urta hodisasidan iborat. Quyidagilar ma’lum:

1) sug‘urta to‘lovi (sug‘urta hodisasi ro‘y berganda) miqdorini taqsimoti quyidagi jadvalda keltirilgan:

Summa	Ehtimollik
100	0,60
200	0,40

2) sug‘urta hodisasini t vaqtgacha ro‘y bermaslik ehtimolligi $\frac{1}{1+t}$;

3) kompaniyaning t momentdagi aktivining miqdori

$$u(t)=60+20t-S(t)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $S(t)$ – t vaqtga qadar yig‘indi to‘lov miqdori;

4) sug‘urta to‘lovi sug‘urta hodisasi ro‘y berganda darrov to‘lanadi.

Sug'urta kompaniyasini kasod bo'lishligi ehtimolligi topilsin.
Javoblar:

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$.

Yechish. Sug'urta hodisasi ro'y berishi momentini T bilan, bu hodisa ro'y berishi oqibatidagi talofat miqdorini Y bilan belgilaylik. Masalaning sharti bo'yicha T va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz,

$$P(T>t)=\frac{1}{1+t}$$

tenglik bajariladi. Demak, T tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$P(T<t)=1-P(T\geq t)=\frac{t}{1+t}.$$

Bu taqsimotni zichlik funksiyasi

$$p_T(t)=\left(\frac{t}{1+t}\right)'=\frac{1}{(1+t)^2}.$$

Tasodifiy miqdor Y uchun

$$P(Y=100)=0{,}60,\ P(Y=200)=0{,}40.$$

Endi kompaniyaning kasodlikka uchrash hodisasi R uchun "to'la ehtimollik" formulasiga, asosan,

$$P(R)=\int_0^\infty P(R/T=t,\ Y=100)P(Y=100)p_T(t)dt+\int_0^\infty P(R/T=t,\ Y=200)P(Y=200)p_T(t)dt=$$

$$=0{,}6\int_0^\infty I(60+20t<100)p_T(t)dt+0{,}4\int_0^\infty I(60+20t<200)p_T(t)dt=$$

$$=0{,}6\int_0^\infty I(t<2)p_T(t)dt+0{,}4\int_0^\infty I(t<7)p_T(t)dt=0{,}6\int_0^2 p_T(t)dt+0{,}4\int_0^7 p_T(t)dt=$$

$$0{,}6P(T<2)+0{,}4P(T<7)=0{,}6\cdot\frac{2}{3}+0{,}4\cdot\frac{7}{8}=\frac{3}{4}.$$

Demak, to'g'ri javob D) variant.

Masala 3. Sug'urta kompaniyasining aktivlari haqida quyidagilar ma'lum:

1) sug'urta to'lovlari miqdori bog'liqsiz va $(0;10)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlar;

2) har bir 1, 2, 3, ... momentlarda aniq bitta sug'urta hodisasi ro'y beradi;

3) boshqa momentlarda sug'urta hodisalari ro'y bermaydi;

4) nisbiy himoya qo'shimcha yuklamasi $0{,}2$ ga teng;

5) premiyalar uzluksiz to'lanadi;

6) boshlang'ich aktivlar (kapital) 1 ga teng.

Moment $t=2$ da kasodlik ro'y berishi ehtimolligi topilsin. Javoblar:

A) 0,05 B) 0,06 C) 0,07 D)0,08 E)0,09.

Yechish. Har bir birlik momentda aniq bitta sug'urta hodisasi ro'y beradi va uning uchun o'rtacha sug'urta to'lovi 5 ga teng bo'ladi ($(0;10)$ oraliqdagi tekis taqsimot o'rta qiymati). Nisbiy himoyaviy qo'shimcha $0,2$ ga teng bo'lgani uchun birlik vaqt davomida tushgan premiya miqdori

$$(1+0,2)\cdot 1\cdot 5 = 1,2\cdot 5 = 6.$$

Demak, premiyalar tushimi tezligi 6 ga teng ekan va kompaniyaning $t=1$ momentdagi aktivi $1+6=7$ ga teng. Bu momentda kompaniya kasodga uchramasligidan, $t=1$ momentda ro'y bergan sug'urta to'lovining miqdori $Y_1 \le 7$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Bu to'lov amalga oshirilgandan so'ng kompaniyaning aktivi $7-Y_1$ bo'lib, u $t=2$ momentga qadar

$$7-Y_1+6=13-Y_1$$

miqdorga oshadi. Bu momentda ikkinchi sug'urta hodisasi ro'y berib, kompaniya Y_2 miqdorda sug'urta to'lovi to'lashi kerak. Kompaniyaning $t=2$ momentda kasodga uchrashi uchun sug'urta to'lovi Y_2, kompaniyaning aktividan katta bo'lishi kerak, ya'ni

$$Y_2 > 13-Y_1$$

tengsizlik bajarilishi kerak. Demak, izlanayotgan ehtimollik

$$P = P(Y_1 \le 7,\, Y_2 > 13-Y_1)$$

bo'ladi. Uni geometrik ehtimollik sifatida hisoblash oson bo'ladi. Haqiqatan ham, Y_1 va Y_2 bog'liqsiz va $(0;10)$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lgani uchun, tasodifiy nuqta (Y_1, Y_2) tekislikdagi

$$K=\{(x,y): 0<x,\ y<10\}$$

kvadratda tekis taqsimlangan bo'ladi.

Izlanayotgan P ehtimollik, tasodifiy nuqta (Y_1, Y_2) ni

$$D=\{(x,y): 0<x\le 7,\ y>13-x\}$$

sohaga tushish ehtimolligi bo'ladi. Demak,

$$P=\frac{mesD}{mesK}.$$

Kvadrat K ning yuzasi $mesK = 10 \cdot 10 = 100$. Oson ko'rinadiki, D soha tekislikdagi teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, uning kateti 4 ga teng bo'ladi. Shuning uchun ham

$$mesD = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$

Demak,

$$P = \frac{8}{100} = 0,08$$

va to'g'ri javob D) variant bo'ladi.

Masala 4. Agar individual sug'urta to'lovi miqdori o'rta qiymati m bo'lgan eksponensial taqsimotga ega bo'lsa, xarakteristik koeffitsiyent topilsin.

Yechish. Eksponensial taqsimotning Laplas-Stiltes almashtirishi

$$\varphi(s) = \frac{1}{1+ms}.$$

Bu taqsimotning hosil qiluvchi funksiyasi

$$\psi(z) = \frac{1}{1-mz}.$$

Bularni hisobga olgan holda xarakteristik tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1}{1-mz} = 1 + (1+\theta)mz$$

yoki

$$(1+\theta)m^2z^2 - \theta mz = 0.$$

Bu tenglamani trivial $z=0$ va yagona musbat

$$z = \frac{\theta}{(1+\theta)m} = \frac{c-\lambda m}{cm}$$

yechimga ega. Bu yechim ta'rif bo'yicha xarakteristik koeffitsiyent r bo'ladi.

Masala 5. Agar individual sug'urta to'lovi miqdori eksponensial taqsimotga ega bo'lsa, kasodlik ehtimolligi $R(u)$ topilsin.

Yechish. Eksponensial taqsimotning Laplas almashtirishi

$$\varphi(s) = \frac{1}{1+ms}.$$

Bunda $m-$ eksponensial taqsimotning o'rta qiymati. Shuning uchun ham kasodlik ehtimolligini Laplas almashtirishi uchun umumiy (1) tenglama

$$\rho(s)=\frac{m}{\theta+(1+\theta)ms}=\frac{m}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{(1+\theta)m}}{\frac{\theta}{(1+\theta)m}+s}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Kasr funksiya $\frac{a}{a+s}$ eksponensial zichlik funksiyasi ae^{-au} ning Laplas almashtirishi bo'lgani uchun, almashtirish formulasidan foydalanib quyidagi natijaga kelamiz:

$$R(u)=\frac{m}{\theta}\cdot\frac{\theta}{(1+\theta)m}\exp\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right)=\frac{1}{1+\theta}\exp\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right).$$

Quyidagi masalalarni o'quvchiga mustaqil yechish uchun taklif qilamiz.

Masala 6. Boshiang'ich kapitali 2 bo'lgan sug'urta kompaniyasi uchun:

1) bir yillik yig'indi to'lovlar miqdori s ning taqsimoti

$$P(S=0)=0{,}6,\ \ P(S=3)=0{,}3,\ \ P(S=8)=0{,}1\,;$$

2) sug'urta hodisalari yetkazgan zarar yil oxirida to'lanadi;
3) har yil boshida 2 (pul birligi) hajmida premiya to'lanadi;
4) kompaniya aktivining yildan-yilga o'zgarish sxemasi:

$\text{yil oxirida aktiv}=(\text{yil boshida aktiv})(1+i)-S$ va bu yerda $i=0{,}08$.

Kompaniya uchinchi yil oxirida kasod bo'lmaslik ehtimolligi topilsin. Javoblar:

A) 0,74 B) 0,77 C) 0,80 D) 0,85 E) 0,86.

To'g'ri javob A) variant.

Masala 7. Sug'urta kompaniyasi $t=0$ momentda boshlang'ich aktiv 3 (pul birligi) bilan faoliyat boshladi. Har yilning boshida kompaniya hajmi 2 (pul birligi) bo'lgan premiya to'laydi va yil davomida taqsimoti

Summa	Ehtimollik
0	0,15
1	0,25
2	0,40
4	0,20

jadvalda keltirilgan tasodifiy miqdor hajmida sug'urta to'lovlari to'laydi. Har xil yillar uchun sug'urta to'lovlari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Agar kompaniyaning yil oxirida aktivi 3 dan katta bo'lsa, yuzaga kelgan farq dividend sifatida aksionerlarga tarqatiladi (shunday qilib aktiv miqdori 3 ga teng bo'lib qolaveradi).

Agar kompaniya sug'urta to'lovlarini to'lay olmasa yoki uning aktivi 0 gacha kamaysa, u kasodga uchraydi.

Kompaniyaning adminstrativ xarajatlari yo'q va uning aktivi investitsiya qilinmaydi deb hisoblab, uning (kompaniyaning) uch yil davomida kasodga uchramaslik ehtimolligini toping. Javob: 0,902.

Yechish uchun ko'rsatma. Kompaniyaning n- yil oxiridagi aktivini u_n bilan (sug'urta to'lovlari bajarilgandan va dividendlar tarqatilib bo'lganidan keyin), n-nchi yil davomidagi umumiy sug'urta to'lovlari miqdorini S_n bilan belgilaylik. Bundan, agar

$$u_{n-1}+2\le S_n$$

bo'lsa (ya'ni n-nchi yilning davomida kompaniya kasodga uchrasa),

$$u_n=u_{n+1}=\ldots=0$$

deb hisoblanadi.

Masalani shartlari bajarilsa, unga qiyin bo'lmagan mulohazalar yordamida

$$u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n,\, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi holatlar to'plami $\{0,1,2,3\}$ (0 – abadiy holat) bo'lgan Markov zanjirini tashkil etishga ishonch hosil qilish mumkin. Bu zanjirning o'tish ehtimolliklari

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,25 & 0,15 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

stoxastik matritsani tashkil qiladi.

Masala 8. Kompaniyaning dinamik modeli murakkab Puasson jarayoni bilan ifoda etilib, sug'urta to'lov miqdori eksponensial taqsimotga ega bo'ladi.

Premiyalar tushumi jarayoni uzluksiz bo'lib, uning tezligi 5. Bulardan tashqari quyidagilar ma'lum:

1) boshlang'ich kapital $u=50$ bo'lganda, kasodlik ehtimolligi 1%=0,01;

2) nisbiy himoyaviy qo'shimcha yuklama $\theta=25\%=0,4$.

Vaqt birligida ro'y bergan sug'urta hodisalari sonining o'rta qiymati topilsin. Javoblar:

A) 1,75 B) 2,00 C) 2,25 D) 2,50 E) 2,75.

To'g'ri javob A) variant.

Yechish uchun ko'rsatma. Masalaning shartlari bajarilganda, kasodlik ehtimolligi boshlang'ich kapitali u orqali

$$R(u)=\frac{1}{1+\theta}\exp\left\{-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right\}$$

formula bilan ifodalanadi. Bu yerda m–sug'urta to'lovi miqdorining o'rta qiymati, θ–nisbiy himoyaviy qo'shimcha yuklama. O'z navbatida, (c–premiyalar tushimi tezligi)

$$c=(1+\theta)\lambda m$$

va bu yerda λ–aniqlanishi kerak bo'lgan miqdor. Keltirilgan formulalar asosida

$$\lambda=\frac{c}{(1+\theta)m}=-\frac{c\ln((1+\theta)R(u))}{\theta u}=\frac{\ln 80}{2,5}\approx 1,7528$$

munosabatni hosil qilamiz.

Masala 9. Sug'urtaning dinamik modeli, murakkab Puasson jarayoni bilan ifoda etiladi. Quyidagilar ma'lum:

1) t momenda kutilayotgan sug'urta hodisalarining soni $5t$ $(t>0)$;

2) hamma sug'urta to'lovlari o'zgarmas bo'lib k ga teng;

3) premiyalar tushimi tezligi 50.

4) xarakteristik koeffitsiyent $r=0,85$.

Miqdor k ning qiymatini aniqlang. Javoblar:

A) 2,6 B) 2,8 C) 3,2 D) 3,2 E) 3,4.

To'g'ri javob: A) variant ($k\approx 2,6485$).

Masala 10. Murakkab Puasson taqsimoti bilan ifoda etiladigan sug'urtaning dinamik modeli bo'yicha quyidagilar ma'lum:

1) birlik vaqt davomida ro'y beradigan sug'urta hodisalari sonining o'rta qiymati 2;

2) sug'urta to'lovlari miqdori faqat 1,2 va 3 bo'lishi mumkin (teng ehtimollik bilan).

Xarakteristik koeffitsiyentining $0{,}5$ ga teng bo'lishini ta'min etadigan premiya tushumi intensivligini hisoblang.

Yechish. Masalaning shartlari bajarilgan holda sug'urta to'lovi miqdorining momentlar hosil qiluvchi funksiyasi

$$\psi(z)=\frac{1}{3}\left(e^{z}+e^{2z}+e^{3z}\right).$$

Bu formuladan va bevosita xarakteristik tenglamadan premiyalar tushumi intensivligi uchun

$$c=\frac{\lambda}{r}(\psi(r)-1)=\frac{2}{0{,}5}\left(\frac{1}{3}\left(e^{0{,}5}+e^{1}+e^{1{,}5}\right)-1\right)\approx 7{,}798.$$

Demak, javob $c\approx 7{,}798$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теорий риска. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011, 619 с.

2. Rotar V.I. Actuarial models. The Mathematics and insurance. Chapman&Hall/CRC-London; New York, 2007, 627 pp.

3. Bowers N.L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics. Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986, 644 pp.

4. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Часть I. Упорядочивание рисков. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2001, 127 с.

5. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Часть II. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2006, 155 с.

6. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. – М.: Российский юридический издательский дом, 1994, 130 с.

7. Фалин Г.И., Фалин А.И. Теория риска для актуариев в задачах, –М.: Изд-во «Мир», 2004, 239.

8. Фёльмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. –М.: МЦНМО, 2008, 776 с.

9. Шахов В.В. Введение в страхование. – М.: Финансы и статистика, 1992, 337 с.

10. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. – М.: Фазис, 1998, 512 с.

11. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Теория.– М.: Фазис, 1998, 544 с.

12. Ротарь В. И., Бенинг В. Е. Введение в математическую теорию страхования. // Обозрение прикладной и промышленной математики, сер. "Финансовая и страховая математика", 1994, т. 1, вып. 5, 698-779 с.

13. Эмбрехтс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. // Теория вероятности. и ее применение., 1993, т. 38, в. 2, с. 375–416.

14. Formanov Sh.Q. Ehtimolliklar nazariyasi. Darslik. – T.: Universitet, 2014, 268.

VINER VA PUASSON JARAYONLARI

Aktuar matematikada kollektiv risk modellarida uzluksiz parametr t ga bog‘liq bo‘lgan tasodifiy jarayonlar nazariyasi muhim rol o‘ynaydi. Umuman, tasodifiy jarayonlarning amaliyotdagi tatbiqlari Viner va Puasson jarayonlari orqali namoyon bo‘ladi.

I.1. Viner jarayoni

Biz oldin holatlari diskret to‘plamlarni tashkil etadigan Puasson tasodifiy jarayonini o‘rgangan edik. Bu punktda trayektoriyalari uzluksiz funksiyalardan iborat bo‘lgan tasodifiy jarayonlardan birini o‘rganamiz.

Ta’rif. Tasodifiy miqdorlar uyushmasi $\{\xi_t, t \geq 0\}$ Viner jarayoni deb ataladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. ξ_t - orttirmalari bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar bo‘lgan jarayon.
2. Har qanday $t_1 < t_2$, s uchun

$$\xi_{t_2} - \xi_{t_1},\ \xi_{t_2+s} - \xi_{t_1+s}$$

orttirmalar bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

3. $\xi_0(\omega) = 0,\ \omega \in \Omega$.
4. $h \to 0$ da

$$E\xi_h = ah + o(h),\ E|\xi_h|^3 = o(h)$$

$$E\xi_h^2 = bh + o(h),\ -\infty < a < \infty,\ 0 < b < \infty.$$

Teorema. Agar ξ_t Viner jarayoni bo‘lsa,

$$P(\xi_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-at)}{2bt}} du.$$

Isbot. Tasodifiy miqdor ξ_t ning xarakteristik funksiyasi uchun

$$f_t(u) = Ee^{iu\xi_t}$$

belgilashni kiritamiz.

Ixtiyoriy $h > 0$ uchun shart 2 dan foydalanib quyidagi tengliklarni yozamiz:

$$f_{t+h}(u) = e^{iu\xi_{t+h}} = Ee^{iu(\xi_{t+h} - \xi_t + \xi_t)} = e^{iu\xi_t} \cdot Ee^{iu(\xi_{t+h} - \xi_t)} =$$

$$= Ee^{iu\xi_t} \cdot Ee^{iu\xi_h} = f_t(u) \cdot f_h(t) \qquad (1)$$

Teylor formulasidan foydalanib har qanday $x \in R$ uchun

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} + o\left(|x|^3\right)$$

tenglikni yoza olamiz va uni qo'llab,

$$f_h(u) = Ee^{iu\xi_h} = 1 + iuE\xi_h - \frac{u^2}{2}E\xi_h^2 + o\left(|u|^3 E|\xi_h|^3\right)$$

munosabatni olamiz. Endi shart 4 ni hisobga olsak, $h \to 0$ da

$$f_h(u) = 1 + iu(ah) - \frac{bhu^2}{2} + o(h)|u|^3 .$$

Tenglik (1) ga oxirgi ifodani qo'yib

$$f_{t+h}(u) = \left(1 + iu(ah) - \frac{bhu^2}{2} + o\left(h|u|^3\right)\right) f_t(u) .$$

Xarakteristik funksiyaning argumenti u chekli haqiqiy son ekanligidan va oxirgi formuladan foydalanib

$$\frac{f_{t+h}(u) - f_t(u)}{h} = \left(iua - \frac{u^2 b}{2}\right) f_t(u) + o(1)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Oxirgi tenglikda $h \to 0$ da limitga o'tsak,

$$\frac{df_t(u)}{dt} = \left(iua - \frac{u^2 b}{2}\right) f_t(u) \qquad (2)$$

differensial tenglamani olamiz.

Endi (2) tenglamani xarakteristik funksiyaning xossasidan kelib chiqadigan $f_0(u) = 1$ boshlang'ich shart (3-shartga qarang) bilan yechib $f_t(u) = e^{iatu - \frac{(bt)u^2}{2}}$ formulani topamiz. Keltirilgan xarakteristik funksiya $f_t(u)$ parametrlari (at, bt) bo'lgan normal taqsimotga mos keladi. Teorema isbot etildi.

Viner jarayoni ξ_t ning birgalikdagi

$$P\left(\xi_{t_1} < x_1,\ \xi_{t_2} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n\right)$$

taqsimotini topamiz. Buning uchun

$$\eta_k = \xi_{t_{k+1}} - \xi_{t_k},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

orttirmalarning birgalikdagi taqsimotini topish yetarli bo'ladi. Haqiqatan, oson ishonish mumkinki

$$P\left(\xi_{t_1} < x_1,\ \xi_{t_2} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n\right) = P\left(\eta_1 < x_1, \eta_1 + \eta_2 < x_2, \ldots, \eta_1 + \ldots + \eta_n < x_n\right)$$

tenglik o'rinli va bunda Viner jarayonining shart 1 dagi xossasidan foydalaniladi.

Endi isbot etilgan teoremani qo'llasak,

$$P(\eta_1 < x_1, \eta_1 + \eta_2 < x_2, \ldots, \eta_1 + \ldots + \eta_n < x_n) =$$

$$= \int_G \ldots \int \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{[u_k - a(t_k - t_{k-1})]^2}{2b(t_k - t_{k-1})}} du_1 du_2 \ldots du_n$$

va bu yerda

$$G = \{(u_1, \ldots, u_n); u_1 < x_1, u_1 + u_2 < x_2, \ldots, u_1 + u_2 + \ldots + u_n < x_n\}.$$

I.2. Puasson tasodifiy jarayoni

Puasson taqsimoti va Puasson tasodifiy jarayonlari sug'urta kontraktlari modellarida muhim rol o'ynaydi. Bu punkt oddiy Puasson jarayonining sodda xossalarini tahliliga bag'ishlanadi.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdorlar uyushmasi $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ Puasson tasodifiy jarayoni deb ataladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. $\xi(t)$ - orttirmalari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lgan jarayon, ya'ni har qanday $n, t_0, \ldots, t_n$ (n – natural, $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ – haqiqiy sonlar) uchun

$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

2. $\xi(t)$– bir jinsli jarayon, ya'ni har qanday s, t va $h > 0$ uchun

$$\xi(t+h) - \xi(t),\ \xi(s+h) - \xi(s)$$

tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan.

3. $\xi(0) = 0$.

4. Qandaydir $\lambda > 0$ uchun $h \to 0+$ bo'lganda

$$P(\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$P(\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h),$$

$$P(\xi(h) \geq 2) = o(h)$$

Keltirilgan 1-4 shartlar har qanday $t > 0$ uchun $\xi(t)$ tasodifiy miqdorning aniq taqsimotini topish imkonini beradi. Buni amalga oshirish uchun $\xi(t)$ ning

$$\psi_t(x) = Ex^{\xi(t)},\ |x| \leq 1$$

hosil qiluvchi funksiyasini ko‘ramiz. Ixtiyoriy $h>0$ uchun 1-4 shartlardan foydalanib quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\psi_{t+h}(x)=Ex^{\xi(t+h)}=Ex^{\xi(t+h)-\xi(t)+\xi(t)}=Ex^{\xi(t)}\cdot Ex^{\xi(t+h)-\xi(t)}=$$

$$=Ex^{\xi(t)}\cdot Ex^{\xi(h)}=\psi_t(x)\cdot\psi_h(x). \qquad (1)$$

Hosil qiluvchi funksiyaning argumenti x chekli son ekanligidan va 4) shartdan foydalansak,

$$\psi_h(x)=\left(1-\lambda h+o(h)\right)+x\left(\lambda h+o(h)\right)+o(h)=1-\lambda(h)+(1-x)+o(h),\ h\to\infty.$$

Oxirgi ifodani (1) ga qo‘ysak,

$$\psi_{t+h}(x)=\psi_t(x)\left(1+\lambda h\right)(x-1)+o(h),$$

ya’ni

$$\frac{\psi_{t+h}(x)-\psi_t(x)}{h}=\lambda(x-1)\psi_t(x)+o(1). \qquad (2)$$

Oxirgi (2) tenglikda limitga o‘tib $(h\to 0)$,

$$\frac{d\psi_t(x)}{dt}=\lambda(x-1)\psi_t(x)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani $\psi_0(x)=1$ (shart 3 ga asosan) boshlang‘ich shart bilan yechib

$$\psi_t(x)=\exp\left\{\lambda t\left(x-1\right)\right\} \qquad (3)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi (3) funksiyani darajali qatorga yoyib

$$\psi_t(x)=\sum_{k=0}^{\infty}P\left(\xi(t)=k\right)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot x^k \qquad (4)$$

tenglikni olamiz.

Har qanday darajali qator o‘zining koeffitsiyentlari bilan bir qiymatli aniqlanishini hisobga olib, (3), (4) tengliklardan

$$P\left(\xi\left(t\right)=k\right)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,... \qquad (5)$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, har qanday $t\geq 0$ uchun $\xi(t)$ tasodifiy miqdor parametri λt bo‘lgan Puasson taqsimotiga ega bo‘lar ekan.

Oxirgi xulosadan va (5) dan ko‘rinadiki, Puasson tasodifiy jarayon $\xi(t)$ faqat manfiy bo‘lmagan butun qiymatlarni qabul qilgan ekan. Shart 4 ga asosan, Puasson jarayonining trayektoriyalari kamaymovchi, qisman - qisman o‘zgarmas, o‘ngdan uzluksiz, 0, 1,

..., n,... nuqtalarda sakrashi 1 ga teng bo‘lgan funksiyalardan iborat bo‘ladi.

Oson hisoblashlar ko‘rsatadiki,

$$E\xi(t) = D\xi(t) = \lambda t .$$

Bu tenglikdan parametr λ vaqt birligidagi puasson tasodifiy jarayonining sakrashlari o‘rta qiymati bo‘lishi kelib chiqadi, shuning uchun ham λ puasson jarayonining intensivligi deb ataladi.

Aytaylik,

$$\tau_0 = 0,\ \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$$

Puasson tasodifiy jarayonining sakrash nuqtalari bo‘lsin. Bu belgilashda

$$\tau_1, \tau_2 - \tau_1, ..., \tau_n - \tau_{n-1}, ... \qquad (6)$$

tasodifiy miqdorlar Puasson jarayonining sakrash nuqtalari orasidagi intervallar uzunligini ifoda etadi va ularning taqsimotini topish qiziqarli va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan masala hisoblanadi.

Qayd qilib o‘tamizki, puasson jarayoni bir jinsli ekanligidan (2 shartga asosan) $\{\tau_n - \tau_{n-1}, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimotga ega bo‘ladi. Puasson jarayonining orttirmalari bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligidan (1 shartga asosan) bu tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liqsiz bo‘ladi. Bir jinslik shartidan (6) ketma-ketlikdagi tasodifiy miqdorlarning bittasining (masalan, $\tau_1 - \tau_0 = \tau_1$ ni) taqsimotini aniqlash yetarli bo‘lishligi kelib chiqadi. O‘z navbatida,

$$\{\tau_1 > t\} = \{\xi(t) = 0\}$$

ekanligidan

$$P(\tau_1 \leq t) = 1 - P(\tau_1 > t) = 1 - P(\xi(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

tengliklar kelib chiqadi. Bulardan $t \geq 0$ bo‘lganda

$$P(\tau_1 \leq t) = P(\tau_n - \tau_{n-1} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

formulalar o‘rinli bo‘lishini olamiz, ya’ni Puasson jarayonining konkret holatda (masalan, 0 nuqtada) bo‘lish ehtimolligi parametri λ bo‘lgan ko‘rsatkichli taqsimot bilan aniqlanar ekan. Oxirgidan Puasson jarayoni uzluksiz vaqtdagi va holatlar to‘plami sanoqli bo‘lgan Markov zanjirlari bo‘lishligi kelib chiqadi.

Agar Puasson jarayonining sakrash nuqtalari qandaydir bir xil tipdagi hodisalarning qayd etilishi momentlari deb talqin etilsa, $\xi(t)$ shu hodisalarning t momentga qadar (ya'ni $[0,t]$ oralig'ida) qayd etilganlarining umumiy soni bo'ladi. Keltirilgan ma'noda Puasson jarayonlarini $[0,\infty)$ oraliqda aniqlangan nuqtani (ruschada "точечный") jarayon sifatida tushunish foydali bo'ladi.

Endi nuqtali jarayonlarning ta'rifini eslatib o'tamiz.

Ta'rif 2. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n,...$ nuqtali jarayon deyiladi, agar ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) Agar $\tau_n<\infty$ bo'lsa, $\tau_{n+1}>\tau_n$,

2) Har qanday chekli $t>\infty$ uchun shunday nomer n mavjudki, uning uchun $\tau_n>t$ bo'ladi.

I.3. Puasson jarayoni uchun markaziy limit teorema

Faraz qilaylik, $\{N(t),t\geq 0\}$ – intensivligi $\lambda>0$ bo'lgan puasson jarayoni bo'lsin. Demak, bu jarayonning qiymatlar to'plami $\{0,1,2,...\}$ sonlardan iborat va

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,... .$$

Bu bo'limda $N(t)$ jarayonning taqsimoti $\lambda t\to\infty$ da

$$P\left(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}<x\right)\Rightarrow\Phi(x) \qquad (1)$$

kuchsiz yaqinlashish ma'nosida asimptotik normal bo'lishini ko'ramiz.

Aslida bu jarayon uchun ancha kuchli bo'lgan tasdiqning o'rinli bo'lishini namoyish etamiz va undan markaziy limit teorema ((1) limit munosabat) xususiy hol ko'rinishida kelib chiqadi.

Teorema 1. Har qanday $\lambda>0, t>0$ uchun

$$\sup_x\left|P\left(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}<x\right)-\Phi(x)\right|\leq\frac{C_1}{\sqrt{\lambda t}}. \qquad (2)$$

Bu yerda C_1 – Puasson tasodifiy yig'indisi uchun Berri-Esseen tengsizligidagi absolyut o'zgarmas son va $C_1\leq 0{,}3041$.

Ancha murakkab texnik vositalardan foydalanib Puasson jarayoni uchun markaziy limit teoremada keltirilgan Berri-Esseen bahosidan aniqligi yuqori bo'lgan quyidagi notekis bahoni isbot etish mumkin.

Teorema 2. Har qanday $\lambda>0, t>0, x\in R$ uchun

$$\left|P\left(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}<x\right)-\Phi(x)\right|\le\frac{22,7707}{\sqrt{\lambda t}\left(1+|x|^3\right)}.$$

Keltirilgan teoremalardan ko'rinadiki, Puasson jarayoni $N(t), \lambda t\to\infty$ da asimptotik normal taqsimotga ega bo'lar ekan. Bu xossaning sharti $(\lambda t\to\infty)$, masalan, intensivlik λ fiksirlangan, lekin vaqt cheksizga intilganda yoki vaqt chegaralangan, lekin intensivlik cheksiz o'sib borganda bajariladi.

Puasson jarayoni $N(t)$ uchun markaziy limit teoremaning lokal limit teoremalari variantlari ham bajariladi.

Teorema 3. Parametr $\lambda t\to\infty$ da

$$\sup_k\left|\sqrt{\lambda t}\,P(N(t)=k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u_{k\lambda}^2/2}\right|=o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}\right).$$

Bu yerda

$$u_{k\lambda}=\frac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}},\ k=0,1,2,\dots .$$

I.3.1. Sug'urta to'lovlari yig'indisining taqsimoti

Sparre Andersen risk jarayoni bilan ifodalanadigan sug'urta kompaniyasining rezerv fondi fiksirlangan vaqt momenti t da tasodifiy miqdor bo'ladi va u

$$R(t)=u+ct-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j$$

formula bilan aniqlanadi. Eslatib o'tamizki, bu yerda sug'urta holatlari ro'y beradigan momentlar jarayoni $N(t)$ – intensivligi $\lambda>0$ bo'lgan puasson jarayoni,

$$X_1,X_2,\dots$$

sug'urta to'lovlari ketma-ketligi. Tasodifiy miqdorlar $N(t)$, $X_1,X_2,\dots$ birgalikda bog'liqsiz deb hisoblanishini e'tiborga olib, to'la ehtimollik formulasidan foydalanib, $R(t)$ ning taqsimoti uchun quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$P\left(R(t)<x\right)=P\left(u+ct-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j<x\right)=$$
$$=1-P\left(\sum_{j=1}^{N(t)}X_j\le u+ct-x\right)=$$
$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}P(N(t)=n)P\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\le u+ct-x\right)=$$
$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N(t)=n\right)F^{*n}\left(y+0\right), \qquad (1)$$

bu yerda $y=u+ct-x$, F^{*n} belgi taqsimot funksiyasi $F(x)=P\left(X_1<x\right)$ ni o'z-o'zi bilan n marta kompozitsiyasini belgilaydi, ya'ni $F^{*0}(x)=\mathrm{E}_0(x)$ nol nuqtada sakrashi 1 ga teng bo'lgan birlik taqsimot, $F^{*1}(x)=F(x)$, $n\ge 2$ bo'lganda esa

$$F^{*n}(x)=\int_0^x F^{*(n-1)}(x-y)dF(y)\,.$$

Klassik risk jarayonida tasodifiy miqdor $N(t)$ parametri λt bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'ladi va bu holda

$$P\left(R(t)<x\right)=1-e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^2}{n!}F^{*n}\left(u+ct-x+0\right)$$

tenglik bajariladi.

Hattoki $F(x)$ taqsimot funksiyasining aniq ko'rinishi ma'lum bo'lganda ham keltirilgan formulalar orqali rezerv fondning taqsimoti $P\left(R(t)<x\right)$ ni hisoblash qiyin masalalarga aylanadi. Shuning uchun ham bu taqsimot uchun to'lov jarayonlarining intensivligi λ yoki to'lov momentlari t ning katta qiymatlarida (ya'ni umuman $\lambda t\to\infty$ bo'lganda) qulay asimptotik formulalar topish masalasini yechish zaruriyati yuzaga keladi.

Ko'p adabiyotlardan yaxshi ma'lumki, klassik risk jarayoni $\lambda t\to\infty$ da asimptotik normal taqsimotga ega bo'ladi. Biz bu faktni, umumiylikni chegaralanmagan holda, uzluksiz vaqtdagi $R(t)$ jarayonni, diskret vaqtdagi

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots,\ R_n=R(n)$$

jarayon bilan almashtirgan holda isbot etamiz. Haqiqatan ham, birinchidan qat'iy matematik nuqtayi nazardan $\lim\limits_{n\to\infty} R(n)=\lim\limits_{t\to\infty} R(t)$, ikkinchidan bu almashtirish amaliyot bilan muvofiq bo'ladi, chunki to'lov momentlari diskret vaqt birliklarida (sutkalar, soatlar, daqiqa) bilan o'lchanadi (sug'urta kompaniyasining to'lov momentlarini sekundlar aniqligida fiksirlashini tasavvur qilish real voqealar qatoriga kirmaydi). Aytib o'tilganlarga o'xshash ravishda $N(t)$ jarayonni

$$N_1, N_2, \dots, N_n, \dots,\ N_n = N(n)$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bilan almashtiramiz.

Shunday qilib, boshidan boshlab, $\{X_j,\ j\geq 1\}$ tasodifiy miqdorlarni bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan va

$$EX_1=\mu,\ DX_1=\sigma^2<\infty$$

deb hisoblaymiz.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $N(t)-$ intensivligi $\lambda>0$ bo'lgan puasson jarayoni bo'lsin. U holda, klassik risk jarayoni asimptotik normal taqsimotga ega bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{R_n-n(c-\mu)-u}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}}<x\right)=\Phi(x).$$

Isbot. Tenglik

$$R_n-n(c-\mu\lambda)-u=-\left(\sum_{j=1}^{N_n} X_j-n\mu\lambda\right), \tag{2}$$

o'rinli ekanligidan

$$E\left(\sum_{j=1}^{N_n} X_j\right)=\mu n\lambda,\ D\left(\sum_{j=1}^{N_n} X_j\right)=n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\mu_n=n\mu,\ c_n=n\mu\lambda,\ b_n=\sigma\sqrt{n},\ d_n=\sqrt{n\lambda\left(\sigma^2+\mu^2\right)}.$$

Puasson taqsimotining xossasiga, asosan,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}<x\right)=\Phi(x),\ x\in R.$$

Demak, bu holda $n\to\infty$ da,

$$\frac{\mu N_n-c_n}{dn}=\frac{\lambda\left(N_n-n\lambda\right)}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}}=\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}}\cdot\frac{N_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\Rightarrow V \tag{3}$$

va bu yerda

$$P(V<x)=\Phi\left(x\sqrt{\frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu^2}}\right),\ x\in R.$$

Yuqoridagi belgilashlarni hisobga olsak,

$$\frac{bN_n}{d_n}=\sqrt{\frac{N_n}{n\lambda}\cdot\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}}.$$

har qanday $\varepsilon>0$ uchun $n\to\infty$ da Chebishev tengsizlikdan

$$P\left(\left|\frac{N_n}{n\lambda}-1\right|>\varepsilon\right)\le\frac{DN_n}{\varepsilon^2n^2\lambda^2}=\frac{1}{\varepsilon^2n\lambda}\to 0$$

munosabatni olamiz. Demak,

$$\frac{bN_n}{d_n}\Rightarrow\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}}=U,\ n\to\infty. \qquad (4)$$

O'z navbatida, markaziy limitga, asosan, $n\to\infty$ da

$$\frac{1}{bn}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j-\mu_n\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j-n\mu\right)\Rightarrow Y \qquad (5)$$

va

$$P(Y<x)=\Phi(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Endi

$$Z_n=\frac{\sum_{j=1}^{N_n}X_j-n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}},$$

belgilashni kiritsak, (3)-(5) munosabatlardan

$$Z_n\Rightarrow YU+V,$$

limit yaqinlashuvini olamiz. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}P(Z_n<x)=P(YU+V<x).$$

Agar limit tasodifiy miqdorlar Y,U,V larning yuqorida keltirilgan ko'rinishlarini hisobga olsak,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_n}X_j-n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}}<x\right)=P(YU+V<x)=$$

$$=\Phi\left(x\sqrt{\frac{\mu^2+\sigma^2}{\sigma^2}}\right)*\Phi\left(x\sqrt{\frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu^2}}\right)=\Phi(x),$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda parametrlari $(0,\sigma^2)$ bo'lgan normal taqsimotning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{\sigma}(x)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

va $\Phi_{\sigma_1}(x)*\Phi_{\sigma_2}(x)=\Phi_{\sigma_1+\sigma_2}(x)$ ekanligidan foydalanildi. Oxirgi tengliklarga, asosan,

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}+\frac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2}=1.$$

Yana shu narsani qayd qilib o'tamizki, limit tasodifiy miqdor U uchun

$$P\left(U=\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}\right)=1$$

Demak, U tasodifiy miqdor hech qanday tasodifiy miqdorga bog'liq bo'lmaydi va shu sababli

$$\left(Z_n,\frac{b_{N_n}}{d_n}\right)\Rightarrow(Y,U)$$

birgaligida bo'lgan kuchsiz yaqinlashish, marginal taqsimotlarni kuchsiz yaqinlashuviga teng kuchli bo'ladi.

Keltirilgan izohdan va (2) tenglikdan foydalanib

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{R_n-n(c-\mu\lambda)-u}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}}<x\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_n}X_j-n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}}<-x\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_n}X_j-n\mu\lambda}{\sqrt{n\lambda\left(\mu^2+\sigma^2\right)}}<-x\right)=1-\Phi(-x)=\Phi(x),\ x\in\square$$

limit munosabat o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Teorema isbot etildi.

Keltirilgan teoremaning isbotida o'tkazilgan munohazalarga e'tibor bergan holda quyidagi xulosaga kelish mumkin: sug'urta to'lovi miqdorlari $X_1, X_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar chekli dispersiyaga ega bo'lgan va sug'urta hodisalari jarayoni $N(t)$ asimptotik normal taqsimlashi xossasini qanoatlangan holda, mos Sparre Andersen risk jarayoni

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

asimptotik normal taqsimotga bo'ysunadi.

Isbot etilgan teorema 1 $\lambda t \to \infty$ da

$$P\big(R(t) < x\big) \approx \Phi\big(z(x)\big) \qquad (6)$$

taqribiy formulani qo'llash mumkinligini asoslaydi va bu yerda

$$z(x) = \frac{x - t(c - \lambda\mu) - u}{\sqrt{\lambda t\left(\mu^2 + \sigma^2\right)}}.$$

Keltirilgan (6) munosabatdagi approksimatsiya ifodasida faqat sug'urta to'lovlari X_i larning birinchi va ikkinchi tartibli momentlari haqidagi ma'lumotdan foydalaniladi, xolos. Agar sug'urta to'lovlari panjarasimon taqsimot ega bo'lmasalar va ular uchinchi tartibli moment EX_1^3 mavjud bo'lsa,

$$P\big(R(t) < x\big) \approx \Phi\big(z(x)\big) - \frac{EX_1^3}{\sigma\sqrt{\lambda t}\left(\mu^2 + \sigma^2\right)}\left(z^2(x) - 1\right)\varphi\big(z(x)\big) \qquad (7)$$

taqribiy formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $z(x)$ – yuqorida aniqlangan ifoda,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi. Keltirilgan (7) taqribiy formuladagi xatolik $o\left((\lambda t)^{-1}\right)$ tartibda bo'ladi.

1. UMR DAVOMI XARAKTERISTIKALARI

1.1. Tiriklik funksiyalari. O‘lim jadvallari

Har bir insonning umr davrini qandaydir ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\Im,P)$ da aniqlangan usluksiz tasodifiy miqdor X bilan ifoda etish mumkin. Inson har xil tabiiy jamoa sharoitlarida yashaydi. Jamiyatda turli xil mashg‘ulotlar bilan shug‘ullanishi mumkin. U umri davomida turli xil kasalliklar bilan og‘rishi mumkin. Keltirilgan va boshqa faktorlar uning necha yil yashashiga ta’sir etadi. Shularga qaramasdan X tasodifiy miqdorning (t.m) taqsimot funksiyasi (t.f) ma’lum deb hisoblash mumkin va uni $F(x)$ bilan belgilaymiz. Amaliyotda esa, bu yetarli katta hajmdagi bir xil umir tarziga ega bo‘lgan yoki bir xil kasb bilan shug‘ullanuvchi insonlar guruhi uchun o‘lim statistikasi ma’lum bo‘lishini talab etadi va bu statistika asosida $F(x)$ funksiyani aniqlash mumkin bo‘ladi. Kelgusida x yoshdagi individiumni x yoshdagi hayot deb hisoblab, uni (x) deb belgilaymiz: bu holda $1-F(x)$ ayirmaga $S(x)$ bilan belgilab, uni tiriklik funksiyasi deb ataymiz. Tiriklik funksiyasi $S(x)$ uzluksiz kamayuvchi va $S(0)=1, S(+\infty)=0$. keltirilgan ta’rifdan ko‘rinadiki

$$P(a<X<b)=S(a)-S(b), \quad a,b>0.$$

bu formuladan kelib chiqadiki, (x) hayotning $(x,x+t)$ intervalda o‘limi ehtimolligi

$P(x<X<x+t\,/\,X>x)=\dfrac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}=1-\dfrac{S(x+t)}{S(x)}=1-{}_tp_x$ va bu erda ${}_tp_x$

individium X ning x yoshgacha yashashi sharti bilan, uning $x+t$ yoshga qadar yashash shartli ehtimlolligi (u belgilash halqaro miqyosida aktuar fanlar tizimida qabul qilingan). Agar $1-{}_tp_x$ ayirmani ${}_tq_x$ bilan belgilasak bu (x) hayotning $x+t$ yoshgacha o‘limi ro‘y berishi ehtimolligini bildiradi va (x) hayotning kelgusidagi (x) dan keyingi umr davrini $T(x)$ t.m. bilan ifoda etsak, $P(T(x)<t)={}_tq_x$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, ${}_tq_x$ ehtimollik $T(x)$ t.m. uchun t.f. bo‘ladi. O‘z-o‘zidan ma’lumki, $x=0$ bo‘lganda,

${}_t p_x = S(t)$. Bundan tashqari $t=1$ bo'lganda, mos ravishda ${}_1 p_x = p_x$, ${}_1 q_x = q_x$ belgilashlarni kiritsak (x) hayotning $(x+t, x+t+u)$ intervalda o'limi ro'y berish ehtimolligi

$${}_{t/u} q_x = P\left(t < T(x) < t+u\right) = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}$$

Demak,

$${}_{t/u} q_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t+u)}{S(x)} = \frac{S(x+t)S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x)S(x+t)} = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}$$

Ehtimollik ${}_{z/1} q_x$ ($u=1$ bo'lganda) soddaroq ravishda ${}_{t/} q_x$ ko'rinishda belgilanadi. Biz hozirga qadar hayot davomi bilan bog'liq bo'lgan t.m. larni o'rganayotgan edik. Lekin statistik jadvallar, asosan, diskret qiymatli t.m. larni kuzatish orqali tuziladi. Shu munosabat bilan qiymatlari "butunlashtirilgan" (yillar bo'yicha) kelgusidagi umr vaqtini ifoda etadigan t.m. tushunchasini kiritamiz: $K(x) = \left[T(x)\right]$

($[x]$ miqdor x ning butun qismi). Bu t.m. $K(x)$ uchun

$$P\left(K(x) = k\right) = P\left(k < T(x) < k+1\right) = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = {}_{k/} q_x = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tengliklardan, xususan,

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{k/} q_x = {}_{n+1} q_x$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi x yoshdagi individiumlarni bo'lish intinsivligi tushunchasini kiritamiz. Ehtimollik ${}_z q_x$ argument t ning kichik qiymatida

$$\frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = -\frac{S^1(x)}{S(x)} \cdot t$$

ifodaga teng bo'ladi. Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi t ga bog'liq bo'lmagan

$$\mu_x(-) = -\frac{S^1(x)}{S(x)}$$

ifoda x yoshdagi individiumlarni o'lim intensivligi deb ataladi. Ushbu

$$-\mu_x = \frac{d}{d(x)}\left(\log S(x)\right)$$

tenglikdan

$$\log({}_n p_x) = \log\frac{S(x+n)}{S(x)} = -\int_0^{x+n} \mu_t dt$$

ekanligi va oxirgi tengliklardan esa

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^k \mu_{x+t} dt\right)$$

munosabatni olamiz.

O‘z navbatida keltirilgan munosabatdan $x=0$. bo‘lganda $S(x) = \exp\left\{-\int_0^n \mu_{x+t}\right\}$ formula kelib chiqadi. Demak t.m.ning zichlik funksiyasi

$$f(x) = -S^1(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right)\mu_x = S(x)\mu(x)$$

ifodaga teng bo‘ladi.

Keyingi mulohazalardan esa, t.m. $T(x)$ ning zichlik funksiyasi uchun

$$g(t) = \frac{d}{dt}({}_t q_x) = \left(1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\right)^{/} = -\frac{S^{/}(x+t)}{S(x)} = -\frac{S^{/}(x+t)S(x+t)}{S(x+t)S(x)} = {}_t p_x \mu_{t+x}$$

tenglik bajariladi. Oxirgi tenglikdan, xususan,

$$\int_0^{\infty} {}_z p_x \mu_{x+z} dt = 1$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi ${}_n p_x \to 0$ $(n \to \infty)$ limit munosabatdan quyidagi

$$-\log({}_z p_x) \to \infty, \quad \int_x^{x+n} \mu_t dt \to \infty, \ n \to \infty$$

asimptotik mulohazalar bajarilishini olamiz.

Misol. Aytaylik, $0 < t < 1$ bo‘lib A va B hodisalar

$$A = \{T(x) \le t\}, \quad B = \{t < T(x)\}$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Bevosita ishonch hosil qilish mumkin bo‘ladiki,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikdan esa

$$q_x = {}_t q_x + {}_t p_x + {}_{1-t} q_{x+t}$$

ekanligi kelib chiqadi va bu tenglik (x) hayot uchun yaqin bir yilda o'lim ehtimolligi, yilning birinchi t-nchi qismida o'lim ehtimolligi va yilning qolgan $(1-t)$-nchi qismida o'lim (yilning birinchi t-nchi qismida tiriklik sharti bilan) ehimolliklarini ko'rsatadi.

Endi yuqorida ko'rilgan t.m. lar uchun statistik jadval tuzish sxemasini keltiramiz. Faraz qilaylik, bizda l_0 sondagi (masalan, $l_0 = 100000$) bir vaqtda tug'ilgan individiumlar haqida ma'lumotlar mavjud bo'lib, ulardan $\overline{L}(x)$ tasi x yoshga qadar yashagan bo'lsin. Yana bir marta $\overline{L}(x)$ t.m. bo'lishini eslatib o'tamiz. Agar har qanday j nomerli ($j = 1,2,...,l_0$) individium uchun $I_j(x)$ uning x yoshgacha yashash indikatori bo'lsa (ya'ni $I_j(x) = 1$, agar j nomerli individium x yoshda tirik bo'lsa, $I_j(x) = 0$ aks holda), hamma individiumlar bir xil o'lim xarakteristikalariga ega deb hisoblab (ya'ni $I_j(x)$ t.m. lar bir xil taqsimlangan) $EI_j(x) = S(x)$ tenglikdan foydalanib ekanligini olamiz.

$$E\overline{L}(x) = l_0 S(x)$$

Shu yerdan boshlab kelgusida x yoshga qadar tirik bo'lgan individiumlarning o'rta qiymatini (ya'ni $E\overline{L}(x)$ ni) l_x harfi bilan belgilaymiz. Miqdor $\overline{L}(x)$ bilan bir qatorda $(x, x+n)$ intervalda vafot etgan individiumlar soni ${}_n\overline{D}_x$ - t.m. ni (ya'ni boshlang'ich l_0 guruhdagi x yoshga qadar yashamaganlar soni) o'rganamiz. Bu holda ${}_n\alpha_x$ bilan $(x, x+n)$ intervalda vafot etgan individiumlar o'rtacha sonini belgilab

$${}_n\alpha_x = E\left({}_n\overline{D}_x\right) = l_0\left(S(x) - S(x+n)\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Oldin kiritilgan bir nechta miqdorlarni l_x miqdor orqali quyidagicha ifoda etish mumkin:

$$ {}_t p_x=\frac{l_{x+1}}{l_x},\quad d_x=l_x-l_{x+1},\quad q_x=\frac{d_x}{l_x},\quad {}_{n/m}q_x=\frac{l_{x+n}-l_{x+n+m}}{l_x},\quad {}_{n/}q_x=\frac{d_x}{l_x}, $$

$$ \mu_x=-\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{l_x'}{l_x}\Leftrightarrow -dl_x=l_x\mu_x dx,\quad l_x=l_0\exp\left(-\int_0^x\mu_t dt\right),\quad l_{x+n}=l_x\exp\left(-\int_x^{x+n}\mu_t dt\right), $$

$$ l_x-l_{x+n}=\int_x^{x+n}l_t\mu_t dt. $$

Yuqorida keltirilgan mulohazalarga asoslanib, x-individiumning umr davomini xarakterlaydigan miqdorni butun musbat son deb hisoblash mumkin bo'ladi va uni matematik statistika metodlarini qo'llab tahlil etish mumkin. Lekin bu metodlarni amaliyotda qo'llash bir qancha jiddiy to'siqlarni yengib o'tishini taqozo qiladi. Masalan, katta sondagi individiumlar gruppasini kuzatish (statistik ma'lumotlar yig'ish) jarayonini tashkil etish jiddiy texnik muammo bo'ladi, chunki har bir konkret holatda o'lim statistikasi jadvallarini tuzish, shu holatga mos keluvchi talablarni kiritlshga to'g'ri keladi. Bundan tashqari to'plangan statistika ma'lumotlari to'la bo'lmaydi. Shuning uchun ham individiumlarni o'lim jadvallarni oldindan berilgan bo'lishi talab etiladi. Masalan, katta yoshdagi kishilar gruppasida jarrohlik operatsiyalarini o'tkazish, oldindan chegaraviy umr ko'rish parametri ω ni shunday tanlash kerak bo'ladiki, uning uchun $S(\omega)=0$ shart bajarilishi talab etiladi.

Kiritilgan $\mu_x, l_x, l_x\mu_x$ funksiyalarini grafiklarini ko'rish qiyin bo'lmaydi. Bu grafiklardan va

$$ \frac{d}{dx}(l_x\mu_x)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{dl_x}{dx}\right)=-\frac{d^2}{dx^2}l_x $$

tengliklardan foydalansak, $l_x\mu_x$ funksiya ekstremum nuqtalari l_x funksiyaning egilish nuqtalariga mos bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Misol. Quyidagi l_x miqdorning 30-50 yoshdagi individiumlar uchun o'lim jadvali keltirilgan:

x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
l_x	93757	93551	93336	93111	92876	92629	92369	92096	91807	91502	91179

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
90836	90472	90084	89671	89231	88760	88257	87718	87141	86523

Bu jadvaldan foydalanib quyidagi ehtiolliklar hisoblansin :

a) 30 invidiumning 45 yoshgacha yashash ehtimolligi

b) 30 invidiumning 40 yoshgacha o'limi ehtimolligi

d) 30 invidiumning 5-nchi 40-50 yillarda vafot etishi ehtimolligi

Yechish. a) $_{15}p_{30}=\frac{l_{45}}{l_{30}}=\frac{89231}{93757}=0{,}9517,$

b) $_{10}q_{30}=1-\frac{l_{40}}{l_{30}}=1-\frac{91179}{93757}=0{,}0275,$

d) $_{10/10}q_{30}={}_{10}p_{30}\cdot{}_{10}q_{40}=\frac{l_{40}}{l_{30}}\left(1-\frac{l_{50}}{l_{40}}\right)=0{,}04617.$

Endi $T(x)$ va $K(x)$ tasodifiy miqdorlarning momentlari uchun ifodalar keltiramiz. Buning uchun quyidagi ikkita lemmalarni isbotlaymiz. Bu lemmalarning birinchisi uzluksiz tipdagi t.m.larga ikkinchisi diskret tipdagi t.m.larga taalluqli bo'ladi.

Lemma 1. Faraz qilaylik X t.m. $(x\geq 0)$ uzluksiz tipda bo'lib uning t.f. $F(x)$ bo'lsin, $R^{+}=[0,\infty)$ oraliqda aniqlangan $Z(t)$- monoton funksiya differensiallanuvchi bo'lib, uning qiymatlari manfiy bo'lmagan sonlar bo'lsin. Agar $EZ(x)<\infty$ bo'lsa,

$$EZ(x)=Z(0)+\int_{0}^{\infty}(1-F(x))dZ(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. Har qanday $N>0$ son uchun

$$\int_{0}^{N}Z(x)dF(x)=-\int_{0}^{N}Z(x)d(1-F(x))=Z(0)-Z(N)(1-F(x))+\int_{0}^{N}(1-F(x))dZ(x)$$

tenglik bajariladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish yetarli bo'ladi. Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, lemmani isbotlash uchun

$$\lim_{N\to\infty}Z(N)(1-F(N))=0$$

munosabatni isbotlash yetarli bo'ladi.

Agar $Z(x)$ monoton o'suvchi funksiya bo'lmasa oxirgi tenglikning to'g'riligi o'z-o'zidan ravshan. Agar $Z(x)$ funksiya monoton kamayuvchi bo'lsa

$$0 \le Z(N)(1-F(N)) = Z(x)\int_N^\infty dF(x) \le \int_N^\infty Z(x)dF(x)$$

Integral

$$EZ(x) = \int_0^\infty Z(x)dF(x)$$

yaqinlashuvchi bo'lgani uchun

$$\int_N^\infty Z(x)dF(x) \to 0, \quad N \to \infty$$

munosabat bajariladi. Lemma 1 isbot etildi.

Isbot etilgan lemmadan foydalanib, (x) hayotning kelgusidagi o'rta qiymatini topish mumkin. Haqiqatan ham isbot etilgan lemma 1 da $Z(x) = x$ deb olsak

$$ET(x) = \int_0^\infty xdp(T(x) < u) = \int_0^\infty t\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt$$

Aktuar matematikada hamma joyda o'rta qiymat uchun

$$ET(x) = l_x^0$$

belgilashdan foydalaniladi. Agar $Z(\cdot)$ funksiyani $Z(x) = x^2$ deb tanlasak, u holda $T(x)$ t.m. ning ikkinchi momentlari uchun

$$E[T(x)]^2 = 2\int_0^\infty t\,{}_t p_x dt$$

formula hosil qilamiz.

Bundan $T(x)$ t.m.ning dispersiyasi uchun

$$\mathrm{var}(T(x)) = 2\int_0^\infty t\,{}_t p_x dt - \left(l_x^0\right)^2$$

formulani keltirib chiqaramiz.

Endi ixtiyoriy $n = 0,1,2,...,$ qiymatlarni

$$g(x) = P(X = k), \quad k = 0,1,2,...,$$

ehtimolliklar bilan qabul qiluvchi diskret t.m. X ni ko'raylik. Uning t.f.

$$G(x)=P(X<x)=\sum_{\{k,\, k<x\}} g(k)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu formuladan

$$g(x)=G(x)-G(k-1)=\Delta G(k-1),\quad G(-1)=G(0)=0$$

tengliklar kelib chiqadi.Bulardan tashqari quyidagi lemma o'rinli bo'ladi.

Lemma 2. Faraz qilaylik, $\{0,1,2,...,\}$ to'plamda aniqlangan ixtiyoriy, manfiy bo'lmagan, monoton funksiya $Z(\cdot)$ uchun $EZ(x)$ o'rta qiymat mavjud bo'lsin.
Bu holda

$$EZ(x)=\sum_{k=0}^{\infty} Z(k)g(k)=Z(0)+\sum_{k=0}^{\infty}(1-G(k))\Delta Z(k)$$

tenglama o'rinli bo'ladi.

Isbot. Eng avvalo $S(k)=1-G(k)$ belgilashni kiritamiz va undan foydalanib quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\sum_{o=0}^{n} Z(j)g(j)=\sum_{j=0}^{n} Z(j)(S(j-1)1-S(j))=Z(0)S(-1)-Z(0)S(0)+Z(1)S(0)-Z(1)S(1)+...Z(k)S(k-1)$$

$$-Z(k)S(k-1)=Z(0)-Z(k)S(k-1)+\sum_{j=0}^{n-1} S(j)\Delta Z(j)$$

Lemmaning isboti

$$\lim_{n\to\infty} Z(n)S(n-1)=0 \qquad (*)$$

munosabatdan kelib chiqadi. Bu munosabat $Z(\cdot)$ funksiya monoton va o'suvchi bo'lmagan holda

$$\lim_{n\to\infty} S(n)=0$$

ekanligidan o'rinli bo'ladi.

Kamaymaydigan monoton $Z(\cdot)$ funksiya uchun (*) tenglik quyidagi munosabatlarga asoslanadi:

$$0\le Z(n)S(n-1)=Z(n)\sum_{j=n}^{\infty} g(j)\le \sum_{j=n}^{\infty} Z(j)g(j)$$

va bunda matematik kutilma $EZ(\cdot)$ mavjudligidan

$$\sum_{j=n}^{\infty} Z(j)g(j) \to 0, \quad n \to \infty$$

Lemma 2 isbot etildi.

Tasodifiy miqdor $X = K(x)$ uchun

$$1 - G(k) = {}_{k+1}p_x$$

tenglik bajariladi. Demak

$$EZ(K(x)) = Z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta Z(k)_{k+1} p_x$$

Endi $Z(k) = k$ deb qabul qilib

$$EZ(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x$$

tenglikga kelamiz.

Agar $Z(k)$ funksiya sifatida $.k^2.$ ni qabul qilsak, t.m. $K(x)$ ning ikkinchi momenti uchun quyidagi sodda ifodani hosil qilish mumkin:

$$E(K(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)_{k+1} p_x$$

Endi $EK(x)$ miqdorni l_x bilan belgilab quyidagi

$$\operatorname{var}(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\ {}_{k+1}p_x - l_x^2$$

tenglikni o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

1.2. O'lim xarakteristikasining boshqa turlari

Oldingidek umumiy umr xarakteristikasiga ega bo'lgan va l_0 sondagi individiumlar gruppasini ko'ramiz. Bu gruppaga boshidan tegishli bo'lgan individiumlar uchun L_x deb, $(x, x+1)$ intervalda yashab o'tilgan umumiy o'rtacha yillar sonini belgilaymiz.

U holda

$$L_x = l_{x+1} + \int_0^4 t l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

Bu ifodada bo'laklab integrallash amalini bajarib

$$L_x = l_{x+1} - \int_0^1 t dl_{x+t} = l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t}dt - tl_{x+t}\Big/_0^1 = \int_0^1 l_{x+t}dt$$

tenglikni olamiz.

Endi L_x xarakteristika orqali x yoshda o'limning markazlashtirilgan koeffitsiyenti deb ataluvchi

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

miqdorni kiritamiz.

Ko'rilayotgan individiumlar gruppasi (l_0 sondagi) uchun $T(x)$ deb, x yoshdan keyin shu gruppa individiumlari tirik bo'lgan yillar sonini belgilaymiz. U holda

$$T_x = \int_0^\infty tl_{x+t}\mu_{x+t}dt = -\int_0^\infty tdl_{x+t} = \int_0^\infty l_{x+t}dt$$

Bu xarakteristika uchun keltirilgan oxirgi i$\overset{0}{\underset{x}{l}} \cdot l_x$ fodadan

$$\frac{T_x}{l_x} = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \overset{0}{\underset{x}{l}}$$

tenglikni olamiz. Demak, T_x miqdorni ko'paytma ko'rinishida yozish mumkin ekan.

Yana bitta o'lim xarakteristikasini kiritamiz. Umr intervali $(x, x+1)$ da vafot etgan individiumlar yashab o'tgan o'rtacha yillar soni

$$a(x) = \frac{\int_0^t tl_{x+z}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt} = \frac{\int_0^t t\, {}_t p_x \mu_{x+t}dt}{\int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t}dt} = E\left(T(x)/T(x) < 1\right)$$

Oxirgi ifodadagi X tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasi (biror B hodisaga nisbatan)

$$E(X/B) = \frac{\int_B XdP}{P(B)} = \frac{E(X:B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

Agar umr intervali $(x, x+1)$ da o‘limlar soni tekis taqsimotga ega bo‘lsa,

$$l_{x+t}\mu_{x+1} = dx$$

tenglik bajarilib, $dx = 0{,}5$ bo‘ladi.

Aytib o‘tilganlardan tashqari

$$dx = \frac{L_x - l_x}{l_x - l_{x+1}}$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, undan

$$L_x = a(x)l_x + (1 - a(x))l_{x+1} \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

munosabatlar o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Hozirga qadar biz ${}_t p_x$, l_x tiriklik funksiyalarining argumentlari t *va* x larni butun qiymatli deb hisoblagan edik. Bu o‘z navbatida, $K(x)$ tasodifiy miqdorning taqsimotini aniqlovchi jadvallar mavjudligi bilan teng kuchli bo‘ladi. Bu jadvallar asosida tiriklik funksiyalarining qiymatlari $x+t$, $t \in (0,1)$ ko‘rinishidagi kasrlar bilan ifodalangan umr xarakteristikalari uchun ham foydalanish mumkin.

Buning uchun esa, quyidagi uchta asosiy shartlar bajarilishi talab etiladi:

A. Har bir umr intervali $(x, x+1)$ da ($x-$ butun musbat son) o‘lim holatlari tekis taqsimotga ega. Bu holda

$$S(x+t) = (1-t)S(x) + tS(x+t), \quad t \in (0,1)$$

formula qabul qilinadi.

B. O‘lim intensivligi har bir $(x, x+1)$ ($x-$butun musbat son) intervalda o‘zgarmas son. Bu holda

$$S(x+t) = S(x)\exp(-\mu t), \quad t \in (0,1), \quad \mu = -\log p_x$$

formula qabul qilinadi.

C. (Balduchchi gipotezasi). Bu holda

$$\frac{1}{S(x+t)} = \frac{1-t}{S(x)} + \frac{t}{S(x+t)}$$

formula qabul qilinib, $S(\cdot)$ funksiyaning $x+t$ nuqtadagi qiymati

O'lim holatlari taqsimoti tekis taqsimot bo'lgan holda (ya'ni A gipoteza bajarilgan bo'lsa) $T(x)$ va $K(x)$ tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari va o'rta qiymatlari

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}, \quad Var(T(x)) = Var(K(x)) + \frac{1}{12}$$

tengliklar bilan bog'langan bo'ladi. Bu munosabatlar $S(x)$ tasodifiy miqdorning $(0,1)$ oraliqda tekis taqsimotga ega bo'lishidan va $T(x)$ va $S(x)$ tasodifiy miqdorlarni bog'liqsiz ekanligidan kelib chiqadi.

1.3. Kasr yoshdagi hayot vaqtining integral xarakteristikasi

Bu punktda 1 yil davomida o'lim ro'y bergan momentlar (vaqtlar) taqsimotlarining integral ko'rinishidagi xarakteristikalarini kiritamiz.

Yoshi x (x–butun son) bo'lgan shaxsni ko'ramiz va faraz qilamizki, uning qoldiq hayot vaqti $T_x < 1$ bo'lsin. Bir yil orasida ro'y beradigan o'lim holatlari taqsimotining eng sodda integral ko'rinishlari xarakteristikalaridan biri

$$a(\mathrm{x}) = E(T_x / T_x < 1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu xarakteristika sharti qo'shimcha taqsimot funksiyasi $P(T_x > t/T_x < 1)$ orqali hisoblanadi (tushunarliki, bu taqsimot $t \geq 1$ bo'lganda 0 ga teng):

$$a(\mathrm{x}) = \int_0^1 P(T_x > t/T_x < 1)dt.$$

Ehtimollik

$$P(T_x > t/T_x < 1) = \frac{P(t < T_x < 1)}{P(T_x < 1)} = \frac{P(t < T - x/\mathrm{T} > \mathrm{x})}{P(T < x + 1/T_x > x)} =$$

$$= \frac{P(x + t < T < x + 1/\mathrm{T} > \mathrm{x})}{P(T < x < x + 1)} = \frac{s(x+t) - s(x+1)}{s(x) - s(x+1)}$$

tengliklarni qanoatlantirgani uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$a(x)=\int_0^1 \frac{S(x+t)-S(x+1)}{S(x)-S(x+1)}dt \qquad (*)$$

Endi $a(x)$ xarakteristikani $(*)$ formuladan foydalanib, A va B (Balduchchi) gipotezalari bajarilgan holda hisoblaymiz.

1. O'lim holatlari tekis taqsimotga ega bo'lsin. Bu holda

$$a(x)=\int_0^1 \frac{(1-t)S(x)+tS(t+1)-S(x+1)}{S(x)-S(x+1)}dt=\int_0^1 (1-t)dt=\frac{1}{2}$$

2. O'lim holatlari taqsimoti Balduchchi (B) gipotezasini qanoatlantirsin. Bu holda

$$a(x)=\frac{S(x+t)}{S(x)-S(x+1)}\int_0^1\left(\frac{1}{P_x+tq_x}-1\right)dt=\frac{P_x}{q_x}\left\{\frac{\ln(P_x+tq_x)}{q_x}\Big/_0^1-1\right\}=\frac{P_x}{q_x}(q_x+\ln P_x)$$

Oxirgi tenglikdagi ifodani q_x darajalari bo'yicha qatorga yoyib, $a(x)$ uchun

$$a(x)=\frac{1}{2}-\frac{q_x}{6}+o(q_x), \quad x\to 0$$

asimptotik munosabatni olamiz.

2. HAYOT SUG'URTASINING QISQA MUDDATLI MODELLARINI TAHLILI

2.1. Qisqa muddatli hayot sug'urtasi

Aktuar matematikada hayot sug'urtalarining modellari ikki turga bo'linadi va bu bo'linish yig'ilgan premiyalarni investitsiyalashtirishdan tushadigan foyda hisobga olinishi yoki olinmasligi bilan bir-biridan farq qiladi. Agar bu foyda hisobga olinmasa, biz qisqa muddatli sug'urta modellari bilan ish ko'rgan bo'lamiz (Short – term insurance). Odatda "qisqa - muddatli" vaqt intervali sifatida 1 yil – muddat olinadi. Albatta, bu bo'linish shartli xarakterda bo'lib, uzoq muddatli sug'urtalar bir qator boshqa holatlar bilan ham bog'langan bo'ladi.

2.2. Qisqa – muddatli hayot sug'urta variantida yuzaga keladigan risklar tahlili

Oddiy hayot sug'urtasining ma'nosi quyidagidan iborat: sug'urtalanuvchi shaxs, sug'urta kompaniyasiga p so'm to'laydi (bu summa sug'urta premiyasi deb ataladi - premium). O'z navbatida sug'urta kompaniyasi, o'zaro tuzilgan sug'urta shartnomasiga asosan, sug'urta hodisasi ro'y berganda (1 yil davomida sug'urtalanuvchi shaxs vafot etsa) b so'm to'laydi. Agar sug'urtalanuvchi shaxs 1 yil davomida vafot etmasa yoki sug'urta shartnomasida ko'rsatilgan boshqa sabablar bilan vafot etsa, kompaniya hech narsa to'lamaydi. Sug'urtalanuvchi shaxs sifatida boshqa odam ham bo'lishi mumkin (masalan, ish beruvchi shaxs yoki tashkilot).

Sug'urta to'lovining miqdori (benefit), albatta, sug'urta premiyasidan ancha katta bo'lishi kerak ($b \cdot p$) va bu summalar orasidagi «to'g'ri munosabatlarni» topish Aktuar matematikaning asosiy masalalaridan biri bo'ladi.

Sug'urtalanuvchi shaxs, p so'mga sug'urta polisi sotib olib, o'zini to'satdan vafot etishi bilan bog'liq moliyaviy risklardan xolis qiladi. Bu risklarni sug'urta kompaniyasi o'z hisobiga oladi. Sug'urta kompaniyasi uchun risk sug'urta hodisasining ro'y berishi tasodifiy hodisa bo'lishiga asoslanadi. Demak, sug'urta kompaniyasi riski b so'mdan iborat bo'ladi, agar sug'urtalanuvchi shaxs 1 yil davomida vafot etsa, 0 so'm vafot etmasa. Bu riskni ma'nosi bo'yicha uni individual talofot (individual claim) deb qabul qilish mumkin va u kompaniyaning moliyaviy riskining elementar qismini tashkil qiladi. Shuning uchun ham sug'urta kompaniyasining faoliyatini o'rganish individual talofot risklarini tahlil qilishdan boshlanadi.

Eng avvalo qayd etamizki, individual talofot (risk) X tasodifiy miqdor bo'ladi. Shuning uchun ham X ni taqsimot funksiyasini aniqlash, sug'urta kompaniyasi faoliyatining tahlilini asosiy qismi bo'ladi.

Yuqoridagi keltirilgan sodda hayot sug'urtasida X tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$\pi_i = P(X=i) = \begin{cases} p_x, & agar\ \ i=0\ \ bo'lsa \\ q_x, & agar\ \ i=b\ \ bo'lsa \end{cases}$$

ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu yerda x-sug'urtalanuvchi shaxsning yoshi, q_x-x yoshdagi shaxsning yaqin 1 yil davomida sug'urta shartnomasida keltirilgan sabab bilan vafot etish ehtimolligi, $p_x = 1 - q_x$.

O'rtacha talofat

$$EX = 0 \cdot \pi_0 + b \cdot \pi_1 = b \cdot q_x$$

va uning dispersiyasi

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = 0^2\pi_0 + b^2\pi_1 - (bq_x)^2 = b^2 q_x - b^2 q_x^2 = b^2 p_x q_x$$

ko'p hollarda tasodifiy miqdor X ni

$$X = I \cdot \beta$$

ko'rinishida yozish juda qulay bo'ladi. Bu yerda I- sug'urta hodisasi indikatori:

$$I = \begin{cases} 0, & \text{agar sug'urta hodisasi ro'y bermasa} \\ 1, & \text{agar sug'urta hodisasi ro'y bersa} \end{cases}$$

β- sug'urta hodisasi ro'y berganda, sug'urta to'lovining miqdori.

Yuqorida eslatib o'tilgan sodda sug'urta variantida I tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$P(I=0) = p_x, \qquad P(I=1) = q_x$$

β esa tasodifiy bo'lmagan b miqdor.

Keltirilgan tasodifiy miqdor X bilan bir vaqtda $L = X - p$ tasodifiy miqdorni kiritamiz. Bu tasodifiy miqdor kompaniyaning sug'urta shartnomasidan ko'rgan talofatni ifodalaydi va u ikkita $-p$ va $b - p > 0$ qiymatlarga ega bo'ladi va

$$L = \begin{cases} -p, & P(I=0) = p_x \ \ ehtimollik\, bilan \\ b-p, & P(I=1) = q_x \ \ ehtimollik\, bilan \end{cases}$$

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, kompaniya p_x ehtimollik bilan p so'm foyda ko'radi, q_x ehtimollik bilan $b - p$ so'm talofatga uchraydi.

Kompaniyaning o'rtacha talofati

$$EL = EX - p = bq_x - p$$

Bu formula sug'urta premiyasi Pning qanday tayinlash haqida muhim xulosalar chiqarish imkonini beradi. O'z-o'zidan tushunarliki, kompaniyaning o'rtacha talofatlari manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni $p > bq_x$ miqdor p ning mumkin bo'lgan eng katta qiymati $p_0 = bq_x$ va u kompaniyaning o'rtacha talofoti 0 bo'lishiga mos keladi. Shu sababli p_0 ni netto-premiya (net premium) deb ataladi. Aslida sug'urta uchun to'lanadigan premiya (brutto - premiya) netto premiyadan katta bo'lishi kerak. Bu premiyalar orasidagi farq (ayirma) yuklama (nagruzka) deb atalib, u kompaniya uchun ofis xarajatlarini qoplashga yordam beradi.

Hayot sug'urtasining murakkab variantlarida, sug'urta hodisasi ro'y berish sababli ko'rilgan talofot β ni tasodifiy miqdor deb hisoblanadi.

Oxirgi jumladagi vaziyatni quyidagi misollarda namoyish etamiz.

Misol 1. Quyidagi sug'urta shartnoamasini ko'ramiz: agar sug'urtalangan shaxsning ulumi qandaydir baxtsiz hodisa natijasida ro'y bersa, unga 500000 so'm beriladi, agar uning o'limi "tabiiy" hodisalar natijasida ro'y bersa, unga 250000 to'lanadi. Odatdagidek shartnoma 1 yilga tuziladi va kompaniya hech narsa to'lamaydi, agar sug'urtalangan shaxs yll davomida vafot etmasa. Sonli hisoblarni amalga oshirish uchun, o'lim baxtsiz hodisalar natijasida ro'y berishi ehtimolligi 0,0005, tabiiy o'lim ro'y berishi ehtimolligi 0,002 deb hisoblanadi.

Yechish. Sug'urta shartnomasi shartlariga asosan I va β miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti

$P(I=1,\beta=500000)=P($o'lim baxtsiz xodisa oqibatida ro'y berdi$)=0{,}0005,$,

$P(I=1,\beta=250000)=P($o'lim tabiiy sabablar natijasida ro'y berdi$)=0{,}002.$

Talofatlar miqdorining, sug'urta hodisasi ro'y bergani sharti bilan shartli ehtimolliklari

$$P(\beta=250000/I=1)=P(\beta=250000,I=1)/P(I=1)=\frac{0{,}0020}{0{,}0025}=0{,}8,$$

$$P(\beta=500000/I=1)=P(\beta=500000,I=1)/P(I=1)=\frac{0{,}0005}{0{,}0025}=0{,}2.$$

Talofat miqdori (ya'ni tasodifiy miqdor X) uchta 0,250000, 500000 qiymatlarni quyidagi mos

$$P(I=0)=0,9975,$$
$$P(I=1,\beta=250000)=0,0020,$$
$$P(I=1,\beta=500000)=0,0005$$

ehtimolliklar bilan qabul etadi. Demak,

$$EX=0\cdot 0,9975+250000\cdot 0,0020+500000\cdot 0,0005=500+250=750(\text{so'm}),$$

$$EX^2=0^2\cdot 0,9975+250000^2\cdot 0,0020+500000^2\cdot 0,0005=125000000=$$
$$=125000000+125000000=250000000(\text{so'm}),$$

$$VarX=EX^2-(EX)^2=249437500,\quad \sqrt{VarX}\approx 15794(\text{so'm}).$$

Endi quyidagi test savoli ko'rinishidagi masalani Yechimi bilan keltiramiz.

Misol 2.

Ma'lumki $q_x=0,12$. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari bajariladi?

I. ${}_{\frac{1}{3}}q_{x+\frac{1}{2}}=0,0426$, agar o'lim holatlari taqsimoti tekis taqsimot bo'lish haqidagi A gipoteza o'rinli bo'lsa.

II. ${}_{\frac{1}{2}}q_x=0,0435$, agar Balduchchi gipotezasi (B) o'rinli bo'lsa.

III. ${}_{\frac{1}{2}}q_x=0,0619$, agar o'lim holatlari intensivligi o'zgarmas bo'lishi haqidagi (C) gipoteza o'rinli bo'lsa.

Javoblar:

a) Faqat I va II

b) Faqat I va III

c) Faqat II va III

d) I,II va III

e) to'g'ri javob a), b), c), d) variantlarning birortasida ham berilmagan.

Yechim. Masaladagi hamma miqdorlarni hisoblab chiqamiz, keyin esa ularni taqqoslab aniq javobga kelamiz.

I.Ehtimollik ${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}$ ni $S(x)=1-F(x)$ funksiya orqali ifodasidan foydalanamiz.

Bu holda

$$ {}_{\frac{1}{3}}q_{x+\frac{1}{2}}=1-\frac{S\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{S\left(x+\frac{1}{2}\right)}=1-\frac{S\left(x+\frac{5}{6}\right)}{S\left(x+\frac{1}{2}\right)}=1-\frac{\frac{1}{6}S(x)+\frac{5}{6}S\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}S(x)+\frac{1}{2}S(x+1)}= $$

$$ =\frac{2S(x)-2S(x+1)}{2S(x)+3S(x+1)}=\frac{2-2(1-q_x)}{3+3(1-q_x)}=\frac{2q_x}{6-3q_x}\approx 0,0426. $$

II. Bu holda

$$ {}_{\frac{1}{2}}q_x=1-\frac{S\left(x+\frac{1}{3}\right)}{S(x)}=1-\frac{S(x+1)}{P_x+\frac{1}{3}\left(S(x)-S(x+1)\right)}=1-\frac{P_x}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P_x}=\frac{1-P_x}{1+2P_x}= $$

$$ =\frac{q_x}{1+2(1-q_x)}\approx 0,0435. $$

III. Bu holda

$$ {}_{\frac{1}{2}}q_x=1-\frac{S\left(x+\frac{1}{2}\right)}{S(x)}=1-\frac{S(x)P_x^{\frac{1}{2}}}{S(x)}=1-(1-q_x)^{\frac{1}{2}}\approx 0,0619. $$

Berilgan misolning shartlarini o‘rganib va ularni I, II , III punktdagi javoblar bilan taqqoslab, d) javob to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Misol 3. O‘lim holatlari tekis taqsimotga ega bo‘lgan holda (gipoteza A) $l_x^0=F$, Balduchche gipotezasi o‘rinli bo‘lgan holda $l_x^0=b$

$$ \lim_{q_x\to 0}\frac{F-G}{q_x^2} $$

hisoblansin.

Yechish. Yuqoridagi formulalardan (A) gipoteza bajarilganda

$$ F=\frac{1}{s(x)}\int_x^{x+1}s(u)du=\frac{1}{s(x)}\int_0^1 s(x+t)dt=\frac{1}{s(x)}\int_0^1\left[(1-t)s(x)+ts(x+1)\right]dt= $$

$$ =\frac{1}{s(x)}\left[(1-0.5)s(x)+0.5s(x+1)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{s(x+1)}{s(x)}\right)=\frac{1}{2}(1+1-q_x)=1-0.5q_x. $$

$$ G=\frac{1}{s(x)}\int_0^1 s(x+t)dt=\frac{1}{s(x)}\int_0^1\frac{s(x+t)}{p_x+tq_x}dt=\frac{s(x+t)}{s(x)}\cdot\frac{1}{q_x}\ln(p_x+tq_x)\Big|_0^1=\frac{1-q_x}{q_x}\left[-\ln(1-q_x)\right]. $$

Keltirilgan ifodalardan

$$F-b=1-0.5q_x+\frac{1-q_x}{q_x}\ln(1-q_x)=1-0.5q_x+\frac{1-q_x}{q_x}\left(-q_x-\frac{q_x^2}{2}-\frac{q_x^3}{3}+o\left(q_x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{q_x^2}{6}+o\left(q_x^2\right),$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak

$$\lim_{q_x\to 0}\frac{F-b}{q_x^2}=\frac{1}{6}.$$

3. UMR DAVOMIYLIGI JADVALLARI

3.1.Umumiy umr davomiyligi jadvallari asosiy xarakteristikalari

Umr davomiyligi haqidagi statistik ma'lumotlar umr davomiyligi jadvalida jamlangan. Oddiy ko'rinishdagi jadval deb o'zida faqatgina yoshi ma'lum bo'lgan, tasodifiy tanlangan insonning umr davomiyligining statistik xususiyatlari (xossalari) ma'lumotlarini o'zida jamlagan jadvalga aytiladi. Bunday jadvalni umumiy yoki qisqartirilgan (aggregate tables) deyiladi. Ular umumiy o'lim holatini yaqqol ko'rinishini olish imkonini beradi. Umuman olganda ixtiyoriy masalani yechish uchun $s(x)$ tiriklik funksiyasini bilish yetarli, biroq aniqlik uchun jadvalga odatda x yoshgacha bo'lgan chaqaloqlarning $l_0=100000$ dan olingan ayrim guruhlari-tirik vakillarining o'rtacha qiymatini ifodalovchi $l_x=l_0s(x)$ kattalikni kiritishadi.

Jadvaldan foydalanish qulay bo'lishi uchun odatda hosila kattaliklarini kiritishadi: x yoshdan $x+1$ yosh oralig'ida vafot etgan guruh vakillari soni– $dx=l_x-l_{x+1}$; x yoshgacha tirik qolib, yaqin yillar davomida vafot etadigan guruh vakillari ulushi $q_x={}^{d_x}\!/_{l_x}$.

Jadvalda qadam sifatida odatda 1 yil qaraladi, ya'ni $x=0,1,2,...$ yil uchun x ga bog'liq har xil funksiyalarning qiymatlari jadvallashtiriladi. Xususiy holda, odatda jadvalga qo'shilgan quyidagi kattaliklar foydali bo'lishi mumkin: $L_x - x$ yoshdan $x+1$ yoshgacha yashagan guruh vakillari o'rtacha qo'shilgan yoshlari soni; $\Im_x - x$ yosh va undan kattaroq yoshdagi guruh vakillari o'rtacha qo'shilgan yoshlari soni; e_x^0 o'rtacha qoldiq umr.

e_x^0ni $\Im_x$ va l_x yordamida, $\Im_x$ esa L_x yordamida aniqlanishi mumkin, qulaylik maqsadida jadvalda barcha uchta kattaliklar kiritiladi.

Shunday qilib hayot davomiyligining odatiy jadvali quyidagi ko'rinishga ega:

x	q_x	l_x	d_x	L_x	$\Im_x$	$\overset{\circ}{e}_x$
0	0.011890	100000	1189	99403.13	7805063.61	78.05
1	0.000982	98811	97	98762.48	7705660.48	77.98
2	0.000709	98714	70	98678.99	7606898.00	77.06
3	0.000507	98644	50	98619.00	7508219.01	76.11
4	0.000426	98594	42	98573.00	7409600.01	75.15
5	0.000386	98552	38	98533.00	7311027.02	74.18
6	0.000335	98514	33	98497.50	7212494.02	73.21
7	0.000315	98481	31	98465.50	7113996.52	72.24
8	0.000264	98450	26	98437.00	7015531.02	71.26
9	0.000224	98424	22	98413.00	6917094.02	70.28
10	0.000213	98402	21	98391.50	6818681.03	69.29
11	0.000203	98381	20	98371.00	6720289.53	68.31
12	0.000244	98361	24	98349.00	6621918.53	67.32
13	0.000305	98337	30	98322.00	6523569.53	66.34
14	0.000448	98307	44	98285.00	6425247.53	65.36
15	0.000631	98263	62	98231.99	6326962.53	64.39
16	0.000815	98201	80	98160.99	6228730.54	63.43
17	0.000927	98121	91	98075.49	6130569.55	62.48
18	0.001071	98030	105	97977.48	6032494.07	61.54
19	0.001144	97925	112	97868.98	5934516.58	60.60

20	0.001268	97813	124	97750.97	5836647.61	59.67
21	0.001321	97689	129	97624.47	5738896.63	58.75
22	0.001374	97560	134	97492.97	5641272.16	57.82
23	0.001437	97426	140	97355.97	5543779.19	56.90
24	0.001501	97286	146	97212.96	5446423.23	55.98
25	0.001565	97140	152	97063.96	5349210.26	55.07
26	0.001639	96988	159	96908.46	5252146.30	54.15
27	0.001714	96829	166	96745.95	5155237.85	53.24
28	0.001800	96663	174	96575.95	5058491.89	52.33
29	0.001886	96489	182	96397.94	4961915.95	51.42
30	0.001973	96307	190	96211.94	4865518.00	50.52
31	0.002070	96117	199	96017.43	4769306.07	49.62
32	0.002179	95918	209	95813.42	4673288.63	48.72
33	0.002288	95709	219	95599.42	4577475.21	47.83
34	0.002409	95490	230	95374.91	4481875.79	46.94
35	0.002540	95260	242	95138.90	4386500.89	46.05
36	0.002673	95018	254	94890.89	4291361.99	45.16
37	0.002828	94764	268	94629.87	4196471.10	44.28
38	0.002984	94496	282	94354.86	4101841.23	43.41
39	0.003142	94214	296	94065.84	4007486.37	42.54
40	0.003322	93918	312	93761.83	3913420.52	41.67
41	0.003515	93606	329	93441.31	3819658.70	40.81
42	0.003709	93277	346	93103.79	3726217.39	39.95
43	0.003928	92931	365	92748.26	3633113.61	39.09
44	0.004159	92566	385	92373.23	3540365.34	38.25
45	0.004404	92181	406	91977.70	3447992.11	37.40
46	0.004664	91775	428	91560.67	3356014.41	36.57
47	0.004937	91347	451	91121.13	3264453.74	35.74
48	0.005237	90896	476	90657.58	3173332.62	34.91
49	0.005552	90420	502	90168.53	3082675.03	34.09

50	0.005883	89918	529	89652.98	2992506.50	33.28
51	0.006242	89389	558	89109.42	2902853.52	32.47
52	0.006631	88831	589	88535.85	2813744.10	31.68
53	0.007037	88242	621	87930.77	2725208.25	30.88
54	0.007475	87621	655	87292.68	2637277.49	30.10
55	0.007934	86966	690	86620.08	2549984.80	29.32
56	0.008438	86276	728	85910.97	2463364.72	28.55
57	0.008966	85548	767	85163.35	2377453.75	27.79
58	0.009530	84781	808	84375.71	2292290.40	27.04
59	0.010134	83973	851	83546.06	2207914.69	26.29
60	0.010767	83122	895	82672.89	2124368.63	25.56
61	0.011456	82227	942	81754.19	2041695.75	24.83
62	0.012192	81285	991	80787.47	1959941.56	24.11
63	0.012965	80294	1041	79771.24	1879154.08	23.40
64	0.013791	79253	1093	78703.97	1799382.85	22.70
65	0.014688	78160	1148	77583.17	1720678.88	22.01
66	0.015634	77012	1204	76406.84	1643095.71	21.34
67	0.016634	75808	1261	75173.97	1566688.87	20.67
68	0.017707	74547	1320	73883.07	1491514.90	20.01
69	0.018859	73227	1381	72532.12	1417631.83	19.36
70	0.020085	71846	1443	71119.62	1345099.71	18.72
71	0.021391	70403	1506	69644.57	1273980.09	18.10
72	0.022773	68897	1569	68106.48	1204335.52	17.48
73	0.024269	67328	1634	66504.31	1136229.04	16.88
74	0.025847	65694	1698	64837.59	1069724.73	16.28
75	0.027533	63996	1762	63106.80	1004887.14	15.70
76	0.029341	62234	1826	61311.94	941780.34	15.13
77	0.031254	60408	1888	59454.01	880468.40	14.58
78	0.033305	58520	1949	57534.50	821014.39	14.03
79	0.035495	56571	2008	55554.91	763479.90	13.50

80	0.037828	54563	2064	53517.74	707924.99	12.97
81	0.040306	52499	2116	51426.49	654407.26	12.47
82	0.042971	50383	2165	49284.65	602980.76	11.97
83	0.045792	48218	2208	47096.75	553696.11	11.48
84	0.048815	46010	2246	44868.27	506599.36	11.01
85	0.052029	43764	2277	42605.22	461731.09	10.55
86	0.055463	41487	2301	40314.62	419125.87	10.10
87	0.059128	39186	2317	38003.97	378811.25	9.67
88	0.063034	36869	2324	35681.78	340807.28	9.24
89	0.067188	34545	2321	33357.60	305125.50	8.83
90	0.071624	32224	2308	31041.42	271767.90	8.43
91	0.076381	29916	2285	28743.25	240726.48	8.05
92	0.081430	27631	2250	26474.16	211983.23	7.67
93	0.086797	25381	2203	24246.17	185509.08	7.31
94	0.092545	23178	2145	22070.79	161262.90	6.96
95	0.098702	21033	2076	19959.06	139192.11	6.62
96	0.105238	18957	1995	17922.54	119233.05	6.29
97	0.112192	16962	1903	15972.78	101310.51	5.97
98	0.119663	15059	1802	14119.74	85337.74	5.67
99	0.127555	13257	1691	12373.07	71217.99	5.37
100	0.136089	11566	1574	10740.65	58844.93	5.09
101	0.145116	9992	1450	9229.14	48104.27	4.81
102	0.154765	8542	1322	7843.99	38875.13	4.55
103	0.164958	7220	1191	6588.75	31031.15	4.30
104	0.175983	6029	1061	5464.31	24442.39	4.05
105	0.187601	4968	932	4469.77	18978.08	3.82
106	0.200198	4036	808	3601.97	14508.30	3.59
107	0.213445	3228	689	2855.98	10906.34	3.38
108	0.227649	2539	578	2225.17	8050.36	3.17
109	0.242733	1961	476	1701.00	5825.18	2.97

110	0.259259	1485	385	1273.30	4124.19	2.78
111	0.276364	1100	304	931.67	2850.88	2.59
112	0.295226	796	235	664.85	1919.22	2.41
113	0.315508	561	177	461.37	1254.36	2.24
114	0.335938	384	129	310.75	792.99	2.07
115	0.360784	255	92	202.18	482.25	1.89
116	0.386503	163	63	126.41	280.06	1.72
117	0.420000	100	42	75.22	153.65	1.54
118	0.448276	58	26	42.45	78.43	1.35
119	0.500000	32	16	22.18	35.98	1.12

Bu jadval qat'iy ravishda illyustrativ xarakterga ega ekanligini alohida qayd qilib o'tamiz. Gipotetik gruppa odamlari uchun tuzilgan bu jadval ko'p umr ko'ruvchilar hissasi katta ekanligi bilan ajralib turadi.

Keltirilgan umr davomiyligi jadvaliga asoslanib, quyidagi qiziq faktni ta'kidlab o'tamiz:
O'rtacha umr davomiyligi berilgan jadvaldan 78 yosh ekanligi kelib chiqadi. Aslida esa bu xarakteristika erkaklar uchun 1961-yilda Angliyada 68 yosh, 1979-yilda Amerika Qo'shma Shtatlarida 74 yoshni tashkil etgan 100000 odamlar gruppasidan 105 yoshgacha umr ko'rganlari 4968 kishi bo'lishi haqidagi xulosaga kelish mumkin.

MUNDARIJA

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА III. МОДЕЛИ СТРАХОВОЙ ВЫПЛАТЫ И ПРЕМИЙ

ГЛАВА IV. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ СУММ

ГЛАВА V. МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

ГЛАВА VI. ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ

ГЛАВА VII. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И ЗАДАЧИ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

ГЛАВА VIII. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

SH.Q.FORMANOV

AKTUAR MATEMATIKA

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2019

Muharrir:	M.Hayitova
Tex. muharrir:	A.Moydinov
Musavvir:	A.Shushunov
Musahhih:	Sh.Mirqosimova
Kompyuterda sahifalovchi:	N.Rahmatullayeva

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 71-245-57-63, 71-245-61-61.
Nashr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi 10.12.2019.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 26,25. Nashriyot bosma tabog‘i 26,5.
Tiraji 300. Buyurtma № 250.

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko‘chasi, 171-uy.