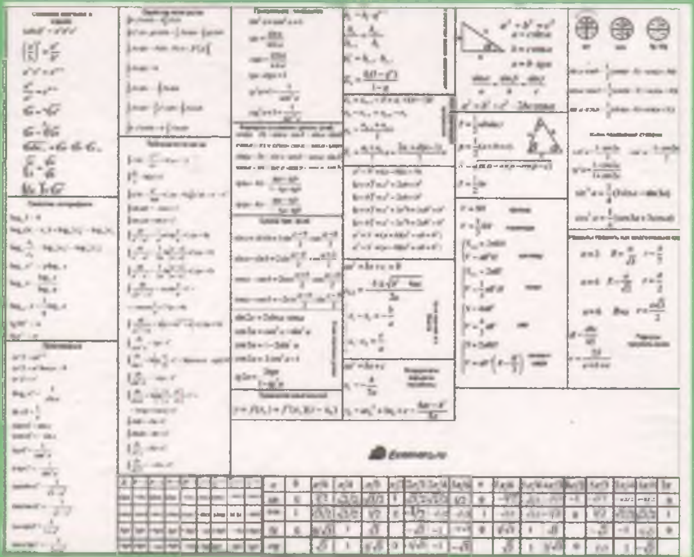
IQTISODIY MATEMATIKA



TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

IQTISODIY MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy v o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT – 2018

UO‘K: 330.4(075.8)
KBK 65.050ya7
I-98

I-98 Iqtisodiy matematika. –T.: «Fan va texnologiya», 2018, 352 bet.

ISBN 978–9943–11–855–3

O‘quv qo‘llanma matematikaning iqtisodni chuqurroq o‘rganishda zarur bo‘ladigan: dinamik, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish, korrelatsion va dispersion tahlil, o‘yinlar nazariyasi kabi bo‘limlarni qamrab olgan.

Qo‘llanma “Iqtisodiyot” ta’lim sohasidagi barcha yo‘nalishlarga mo‘ljallangan bo‘lib, davlat ta’lim standartlari asosida yozilgan.

***

В учебном пособии содержится, разделы математики, так называемые динамические, линейные и нелинейные программирование; корреляционные и дисперционые анализы; теории игр, которые будет необходимо в изучение экономики.

Пособие предназначено бакалаврам всех направлений области образования «Экономика» и написано в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

***

In the textbook is kept the sections mathematicians of the dynamic, linear and nonlinear programming; analysis of variance and correlation; the game theory, which will be necessary in study of the economy.

The textbook is intended for bachelors of all areas of the field of education “Economics” and written in accordance with the requirements of the state educational standard.

UO‘K: 330.4(075.8)
KBK 65.050ya7

Mualliflar:
A.R.Xashimov, N.K.Ochilova, M.I.Axmedov, A.I.Sotvoldiyev

Taqrizchilar: **O.K.Abdullayev** – O‘zMU, “Differensial tenglamalar va matematik fizika” kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n;
A.A.Adizov – Toshkent moliya instituti, “Oliy va amaliy matematika” kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.

ISBN 978–9943–11–855–3

KIRISH

Hozirgi zamon jamiyati ishlab chiqarish unumdorligini oshirishga talabning ortishi, xo‘jalik va korxonalarni boshqarishni rejalashtirishga bo‘lgan talabning yuqoriligi bilan xarakterlanadi. Bunday sharoitda jamiyat iqtisodiy hayotini ilmiy boshqarishgina ishlab chiqarishdagi yuqori sur’atni saqlab qoladi. Buning uchun iqtisodiy fanlarni, matematika va matematikaning zamonaviy yutuqlarini keng qo‘llagan holda o‘rganish kerak bo‘ladi. Buni amalga oshirish uchun esa matematik programmalashtirish, o‘yinlar nazariyasi, korrelatsion va regression tahlil kabi bo‘limlarning rivojlantirish zaruriyatini tug‘dirib ekstremal masalalarning optimal yechimini qurishni talab qiladi.

Ekstremal masalalarni yechish uch bosqichdan iborat:

1) iqtisodiy-matematik modelni qurish;
2) modelning optimal yechimini topish;
3) modelning amaliy ahamiyatini aniqlash.

Bu masalalar bilan A.N.Tolstoy, B.Egervari, L.V.Kantorovich, M.K.Gavurin, R.Bellman kabi matematiklar shug‘ullanishgan bo‘lib, ularning ishlaridan hozirgi zamon iqtisodiyotida keng qo‘llanilmoqda. Shu sababli, yetuk iqtisodchilarni tayyorlashda matematik usullardan foydalanishni o‘qitish bo‘lajak iqtisodchilarni o‘z faoliyatida uchraydigan iqtisodiy masalalarni hal qilishda to‘g‘ri va asosli qarorlar qabul qilishlarida muhim ahamiyatga egadir.

Amaliy va nazariy iqtisodiyot masalalari turli-tuman bo‘lib, bunda statisik ma’lumotlarni tahlil qilish usullari, iqtisodiy jarayonning rivojlanish holatini baholash va prognoz qilish masalalari dolzarb hisoblanadi.

Iqtisodiy jarayonlarning noaniqlik va tavakkalchilik bilan bog‘liqligi hamda stoxastik xarakterdaligi bu jarayonlarni tadqiq etishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullarini qo‘llashni taqozo etadi. Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish bilan birga bu jarayonlarning yechimini optimallashtirish ham muhimdir. Bu esa o‘z navbatida matematik programmalashtirish usullarini qo‘llashni talab etadi. Yuqoridagi talablarga javob berish uchun bo‘lajak iqtisodchilarga o‘zida oliy matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika hamda matematik programmalashtirish kabi predmetlarni mujassamlashtirgan iqtisodiy matematika kursini o‘qitish zarurligi kelib chiqadi.

«Iqtisodiy matematika» fanini o‘qitishdan maqsad talabalarning nazariy va amaliy iqtisodiy masalalarni hal qilishda ishlatiladigan matematik apparatning asoslari bilan tanishtirish, mantiqiy fikr yuritish qobiliyatini oshirish, ilmiy adabiyotlarni mustaqil o‘rganishga odatlantirish, amaliy iqtisodiy masalalarni matematik usullar bilan yechish va tahlil qilish hamda iqtisodiy jarayonlarning matematik modelini tuzib, ularni matematik usullar yordamida optimal yechimini topishda ko‘nikmalar hosil qilishdan iborat. «Iqtisodiy matematika» fanining vazifasi statistik ma’lumotlarni tahlil qilishni, iqtisodiy ko‘rsatkichlar orasidagi bog‘lanishlarni aniqlash va baholashni, iqtisodiy jarayonlarni prognozlashni hamda matematik modellashtirish usullarini qo‘llab, ilmiy asoslangan iqtisodiy qarorlar qabul qilishni biladigan, xo‘jaliklar faoliyatini boshqaruvida va boshqa iqtisodiy muammolarni hal qilishda matematik usullarini qo‘llab optimal yechimlar qabul qilishga qodir bo‘lgan mutaxassislarni tayyorlashdan iborat.

Bizning qo‘llanmamizda o‘rganiladigan ba’zi masalalarning tarixi bilan tanishib chiqamiz. Transport masalasi 1941-yilda Xichkok tomonidan, simpleks usuli 1949-yilda Dansig tomonidan, chiziqsiz masalalar uchun optimallik sharti 1951-yilda Kun va Takker tomonidan e’lon qilingan.

I BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1.1. Elementar hodisalar fazosi. Ehtimollikning ta'riflari

Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimollar nazariyasi fanining paydo bo'lishiga qimor o'yinlarining matematik modellarini va nazariyasini yaratish yo'lidagi izlanishlar turtki bo'ldi. Bu fanning dastlabki tushunchalari shakllangan davr XVI-XVII asrlar bo'lib, Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma kabi olimlarning nomlari bilan bog'liqdir.

Ehtimollar nazariyasining keyingi rivojlanish davri Yakob Bernulli (1654-1705) nomi bilan bog'liq. U isbotlagan va keyinchalik "Katta sonlar qonuni" nomini olgan teorema oldingi to'plangan faktlarning birinchi nazariy asoslanishi edi. Ehtimollar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bog'liq.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasining rivojlanishiga V.Ya.Bunyakovskiy, P.L.Chebishev, A.A.Markov, A.M.Lyapunov kabi rus olimlari o'z ilmiy izlanishlari bilan katta hissa qo'shdilar. Fanning mustaqil fan bo'lib uyg'unlashishida va keyingi rivojida S.N.Bernshteyn, V.I.Romanovskiy, A.N.Kolmogorov, A.Ya.Xinchin, B.V.Gnedenko, N.V.Smirnov va boshqalarning xizmatlari katta bo'ldi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining O'zbekistonda o'z o'rnini topishida va rivojlanishida V.I.Romanovskiy, S.X.Sirojiddinov va T.A.Sarimsoqov kabi olimlarning hissalari behisobdir. Hozirgi kunda ularning shogirdlari tomonidan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha ham nazariy, ham amaliy tadqiqotlar davom ettirilmoqda.

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari – tajriba, hodisa, elementar hodisa, ehtimollik, nisbiy chastota kabi tushunchalar bo'lib, ularni bayon qilishga o'tamiz.

Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmui S ning bajarilishini ta'minlashdan iboratdir.

Tajribaning har qanday natijasi hodisadir. Kuzatilayotgan hodisalarni 3 turga ajratish mumkin: muqarrar, mumkin bo‘lmagan va tasodifiy.

Ma’lum S shartlar majmui asosida, albatta, ro‘y beradigan hodisaga ***muqarrar*** hodisa deb ataladi va Ω bilan belgilanadi. Masalan, “-10° temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv muz holatda bo‘ladi” hodisasi muqarrar hodisadir.

S shartlar majmuida hech qachon ro‘y bermaydigan hodisa ***mumkin bo‘lmagan*** hodisa deb ataladi va $\varnothing$ belgi bilan belgilanadi. Masalan, “-10° temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv suyuq holatda bo‘ladi” hodisasi mumkin bo‘lmagan hodisadir.

Ma’lum bir S shartlar asosida ro‘y beradigan yoki ro‘y bermaydigan hodisa ***tasodifiy*** hodisa deb ataladi va lotin alfavitining katta $A,B,C,...$ harflari bilan belgilanadi. Masalan, “10° temperaturada yomg‘ir yog‘adi” hodisasi tasodifiy hodisadir.

1-misol. Tajriba o‘yin kubigi (shashqoltosh) bir marta tashlash bo‘lsin. Bu holda: Ω={tushgan ochko 6 dan katta emas} – muqarrar hodisa; $\varnothing$={tushgan ochko 9 ga teng} – mumkin bo‘lmagan hodisa; A = {tushgan ochko juft son} – tasodifiy hodisadir.

Ehtimollikni talqin etish uchun quyida beriladigan oddiy misollardan boshlaymiz. Bu misollar yordamida ehtimollik tushunchasi mohiyatini ochib beruvchi uning muhim ta’riflarini keltirib o‘tamiz.

Faraz qilaylik, tanga bir marta tashlandi va “raqam” tomoni bilan tushdi. Bunday natija ***kuzatish*** deyiladi hamda kuzatishni amalga oshirish jarayoni esa ***tajriba*** deb ataladi. Probirka, mikroskop va boshqa laboratoriya jihozlarini esga soluvchi fizika fanlaridan farqli ravishda biz ifodalagan tajriba mohiyati ancha chuqurroq ma’no kasb etadi. Statistik tajribalarga internet foydalanuvchilarning qaysi Web brauzerni ma’qul ko‘rishlarini va siyosiy saylovlarda saylovchilarning fikrlarini qayd etib borish, ifloslangan daryodagi kislorod eritmasi miqdorini aniqlash, test topshiruvchining bezovtalanishini kuzatish, qaydnomalardagi yo‘l qo‘yilgan xatoliklar miqdorini hisoblash hamda hasharotlarga qarshi yangi vositalar yordamida yo‘q qilingan hasharotlar ulushi kabilar kiradi. Statistik tajribaning xususiyati shundan iboratki, natijasi noma’lum bo‘lgan kuzatishni amalga oshirishdir.

Tajriba kuzatishni amalga oshirish jarayoni hisoblanib, yagona natijaga olib keladi.

Shashqoltoshni tashlashdan va uning ochko tomoni bilan tushishidan iborat soddaroq tajribani ko'rib chiqamiz. Tajribaning oltita natijasi quyidagicha bo'ladi:

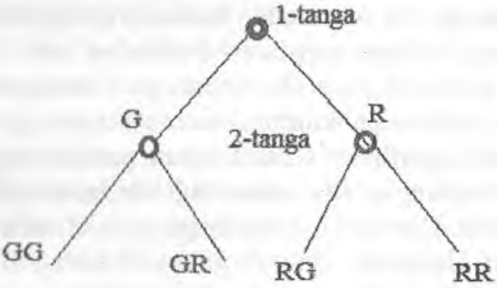
1. "Bir" ochko tushishi. 2. "Ikki" ochko tushishi.
3. "Uch" ochko tushishi. 4. "To'rt" ochko tushishi.
5. "Besh" ochko tushishi. 6. "Olti" ochko tushishi.

Shuni yodda tutish lozimki, agar tajriba bir marta o'tkazilayotgan bo'lsa, yuqoridagi oltita natijadan faqat bittasi ro'y berishi mumkin hamda natijani aniq oldindan bilish mumkin emas.

Demak, tajribada tasodifiy hodisaning ro'y berishini oldindan aytib bo'lmaydi. Tajribaning har qanday natijasi ***elementar*** hodisa deb ataladi va ω bilan belgilanadi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha hodisalar to'plami ***elementar hodisalar fazosi*** deb ataladi va Ω bilan belgilanadi.

2-misol. Ikkita tanga tashlandi va ularning tushgan tomonlari aniqlandi. Tajribaning barcha elementar hodisalarini ko'rib chiqing.

Yechish: Hatto ahamiyatsizdek ko'ringan tajribaning ham elementar hodisalar to'plamini tuzayotganda e'tiborliroq bo'lishimiz kerak. Bir qarashda uchta natijadan bittasini kutishimiz mumkin: tanganing ikkita "raqam"; ikkita "gerb"; yoki bitta "raqam" va bitta "gerb" tomonlari bilan tushishini. Tanganing bitta "raqam" va bitta "gerb" tomoni bilan tushishi yana ikkita natijaga: birinchi tanganing "raqam", ikkinchi tanganing "gerb" va birinchi tanganing "gerb", ikkinchi tanganing "raqam" tomonlari bilan tushishiga



Diagrammaning yuqori qismi tangani birinchi tashlashda ikkita natija (“raqam” yoki “gerb”) ga bo‘linadi. Ikkinchi tangani tashlashda ham sinov natijalari ikki qismga ajraladi. Shunday qilib, tangalar tashlangandan so‘ng to‘rtta elementar hodisa ro‘y beradi.

1. Tanganing *RR* tomoni bilan tushishi.
2. Tanganing *RG* tomoni bilan tushishi.
3. Tanganing *GR* tomoni bilan tushishi.
4. Tanganing *GG* tomoni bilan tushishi.

Bu yerda, *R* birinchi tangani tashlashda “raqam” tomoni bilan tushishi, *G* esa ikkinchi tangani tashlashda “gerb” tomoni bilan tushishidir.

3-misol. Agar tanga uch marta tashlansa, u holda

$$\omega_1 = (ggg), \omega_2 = (ggr), \omega_3 = (grr), \omega_4 = (rrr)$$

$$\omega_5 = (rrg), \omega_6 = (rgg), \omega_7 = (rgr), \omega_8 = (grg)$$

Elementar hodisalar fazosi sakkizta elementdan iborat.

4-misol. Tajriba shashqoltoshni ikki marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Bu holda $\omega_{ij} = (ij)$ bo‘lib, i birinchi va j ikkinchi tashlashda tushgan ochkoni bildiradi: $\Omega = \{\omega_{ij}\}, i, j = \overline{1,6}$. Elementar hodisalar soni: $n = 36$.

5-misol. Tajriba nuqtani $[a,b]$ kesmaga tashlashdan iborat bo‘lsin. Bunda $\Omega = [a,b]$. Kesmadagi barcha nuqtalardan iborat bo‘lib elementar hodisalar soni cheksizdir.

Shunday qilib, ehtimollar nazariyasi fanining predmeti: ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalar ro‘y berishining ehtimollik qonuniyatlarini o‘rganishdir.

Yuqorida aytilganidek, tajribaning natijasi hodisadir. Masalan, mergan nishonga o‘q uzmoqda, bunda o‘qning uzilishi – tajriba bo‘lsa, o‘qning nishonga tegishi esa hodisa bo‘ladi.

Ertaga Toshkent shahrida nechta yo‘l transport hodisasi ro‘y beradi? Tez yordam punktlariga nechta bemor qo‘ng‘iroq qiladi? Murakkab texnik qurilmani sozlash uchun qancha vaqt talab qilinadi? Bu kabi savollarning bir xil o‘xshashligi bor, bu savollarga aniq javob berib bo‘lmaydi. Chunki bu voqealarga ta’sir etuvchi faktorlar to‘liq aniqlanmagan. Haqiqatan ham, birgina yo‘l transport hodisasini ro‘y berishi bir nechta faktorlarga bog‘liq: ob-havo, yo‘lning holati, yo‘lning yoritilganlik darajasi, haydovchi va piyodalarning psixologik holatlari, avtomobillarning yo‘ldagi joylashuvi va hokazo. Barcha shu kabi holatlarda bizni qiziqtirgan hodisalar tasodifiydir.

Biz yuqorida hodisalarni uch turga bo‘lgan edik. O‘z navbatida tasodifiy hodisalarni ham bir necha turlarga ajratiladi.

Bitta tajribada biror tayin hodisaning ro‘y berishi tajribaning qolgan hodisalarining ro‘y berishini yo‘qqa chiqarsa, bunday hodisalarga birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb aytiladi.

6-misol. Tanga tashlanadi. “Gerb” tomon tushishi “raqam” tomon tushishini yo‘qqa chiqaradi va aksincha. “Gerb” tushishi va “raqam” tushishi hodisalari birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

7-misol. O‘yin kubigi tashlanadi. Bunda $\Omega=\{\omega_i\},\left(i=\overline{1,6}\right)$ to‘plamda 6 ta elementar hodisa bo‘lib, ular birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

2-5-misollardagi elementar hodisalar ham birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro‘y berishi muqarrar hodisa bo‘lsa, u holda bu hodisaga yagona mumkin bo‘lgan hodisalar deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan hech qaysi birining ro‘y berish imkoniyati boshqalariga nisbatan kattaroq deyishga asos bo‘lmasa, ular teng imkoniyatli hodisalar deyiladi. Yuqoridagi 6-misolda “gerb” tushishi va “raqam” tushishi hodisalari teng imkoniyatli hodisalardir. Bu tasdiq 2-7-misollardagi har bir elementar hodisa uchun ham o‘rinli.

Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning bir nechta ta’rifi mavjud.

Umumiy qilib aytganda, ehtimol – tasodifiy hodisaning ro‘y berish imkoniyatini miqdoriy jihatdan xarakterlovchi sondir. Quyida ehtimolning klassik ta’rifini keltiramiz.

Dastlab quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz. Qutida 10 ta: 4 ta qizil, 4 ta ko‘k, 2 ta oq shar bo‘lsin. Qutidan tasodifiy tarzda shar olinganda uning rangli bo‘lish imkoniyati oq bo‘lishiga qaraganda ko‘proqligi aniq. Bu imkoniyatni son bilan ifodalaymiz va uni hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb ataymiz. Shunday qilib, hodisaning ro‘y berish imkoniyatini xarakterlovchi son hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb ataladi. Bu misolda qutidan tasodifiy ravishda shar olinganda uning rangli bo‘lish ehtimolini topamiz. Olingan sharning rangli (hozir ham, keyinchalik ham rangli shar deb oq shardan boshqa rangdagi sharlarni tushunamiz) bo‘lishini A hodisa sifatida qaraymiz. Tajribaning har bir natijasini ω_i elementar hodisa deb qaraymiz. Bizning misolda 10 ta elementar hodisa mavjud: ω_1,ω_2 – oq shar olindi; $\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$ – qizil shar olindi; $\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}$ – ko‘k shar olindi. Ko‘rinib turibdiki, ω_i hodisalar teng imkoniyatlidir. Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro‘y berishiga olib keladigan elementar hodisalarni bu hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar deb ataymiz. Bizning misolimizda A hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar 8 ta:

$$\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}.$$

Shunday qilib, A hodisaga qulaylik tug‘diruvchi hodisalardan qaysi biri bo‘lishidan qat’i nazar bittasi ro‘y bersa A hodisa ro‘y beradi: bizning misolimizda agar $\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}$ hodisalardan hech bo‘lmaganda biri ro‘y bersa, A hodisa ro‘y beradi.

Ehtimolning klassik ta’rifi. A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb, hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar sonining, teng imkoniyatli yagona mumkin bo‘lgan elementar hodisalarning umumiy soniga nisbatiga aytiladi va

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda, $m - A$ hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar soni; n – elementar hodisalarning umumiy soni.

Ehtimolning klassik ta’rifidan bevosita uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1. Muqarrar hodisaning ro‘y berish ehtimoli birga teng. Haqiqatan ham, bu holda $m=n$ demak, $.P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$

2. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ro‘y berish ehtimoli nolga teng. Bu holda $m=0$ va $P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$

3. Tasodifiy hodisaning ro‘y berish ehtimoli nol va bir orasida yotuvchi sondir, ya’ni $0\leq P(A)\leq 1$. Haqiqatan ham, bu holda $0<m<n$.

Shuning uchun $0<\frac{m}{n}<1$ demak, $0<P(A)<1$. Bundan tashqari $m=0 \Rightarrow P(A)=0$, $m=n \Rightarrow P(A)=1$ bo'lgani uchun istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$0 \le P(A) \le 1 \tag{1.2}$$

Elementar hodisalarning ro'y berish ehtimollari ularning hodisadagi ulushlari hisoblansada, elementar hodisalar to'plamidan iborat hodisaning ehtimolini aniqlashda muhim o'rin egallaydi.

8-misol. Tajriba shashqoltosh tashlashdan iborat bo'lsin. Agar shashqoltoshni tashlaganimizda juft ochko tushsa, 1 p.b. yutiladi, aks holda esa 1 p.b. yo'qotiladi. A=(1 p.b yutib olish) – hodisasining ehtimolini toping (p.b.-pul birligi).

Yechish: Eslatib o'tamiz, ushbu tajribaning elementar hodisalar fazosiga oltita elementar hodisa kiradi: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n=6$. Shashqoltosh simmetrik bo'lgani uchun elementar hodisalar fazosiga kiruvchi elementar hodisalarni har birining ro'y berish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng. Tajriba natijasida juft ochko tushishi "ikki" ochko, "to'rt" ochko, "olti" ochkolarning tushishidan iborat elementar hodisalaridan birining ro'y berishini bildiradi. Bu elementar hodisalar to'plami hodisa deb ataladi. Uni A orqali belgilaymiz va $m=3$. U holda

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanib amaliy va nazariy masalalar yechishda kombinatsiyalar sonini aniqlash muhim ahamiyatga ega bo'lganligi sababli kombinatorikaning ba'zi bir formulalari ustida to'xtab o'tamiz.

Berilgan n ta turli elementning k ta elementlaridan tuzilgan yoki tartibi bilan, yoki elementi bilan farq qiladigan kombinatsiyalarga ***o'rinlashtirish*** deyiladi va mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) \tag{1.3}$$

formula bilan topiladi.

Agar o'rinlashtirishda $k=n$ bo'lsa, o'rinlashtirishlar soni ***o'rin almashtirishlar*** (faqat tartibi bilan farq qiladigan kombinatsiyalar) soniga teng bo'ladi va bu son

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 \qquad (1.4)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar o‘rinlashtirishda kombinatsiyalar hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan farq qilsa, ularni n ta elementni k tadan ***guruhlash*** deyiladi va ularning soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1.5)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $0! = 1$ deb qabul qilingan.

Eslatma. Agar 2-ta’rifda keltirilgan n ta elementni k tadan o‘rinlashtirishda tanlashlar qaytariladigan bo‘lsa, ya’ni n ta turli elementdan bittalab olingan element fiksirlangandan so‘ng yana o‘rniga qaytarib qo‘yilib bu jarayon takrorlansa, tanlab olishlar soni

$$N = n^k$$

formula bilan aniqlanadi.

9-misol. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan foydalanib, har bir raqam bir marta qatnashadigan nechta to‘rt xonali son tuzish mumkin.

Yechish: Barcha tuzilishi mumkin bo‘lgan sonlar $P_4 = 24$ ga teng.

10-misol. 25 ta xodimdan boshliq va uning o‘rinbosarini necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish: Misolning shartiga binoan mumkin bo‘lgan barcha saylashlar soni (1.3) formulaga ko‘ra topiladi. $A_{25}^{2} = 25\cdot 24 = 600$.

11-misol. 25 ta talabadan 3 kishilik delegatsiyani necha xil usulda tuzish mumkin?

Yechish: Misolning mazmuniga ko‘ra, bu holda (1.5) formulani qo‘llaymiz.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300.$$

Ehtimolning statistik ta’rifi. Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta’rifi cheklangan bo‘lib, bu ta’rifni har qanday turdagi masalalarga qo‘llab bo‘lmaydi. Jumladan, elementar hodisalar soni cheksiz yoki elementar hodisalar teng imkoniyatli bo‘lmagan tajribalarda ehtimolni hisoblash uchun klassik ta’rifdan foydalanish mumkin emas, elementar hodisalarning teng imkoniyatliligini asoslash esa amaliyotda anchagina qiyin masaladir. Odatda, teng imkoniyatli hodisalar ro'y beradigan tajribalarda simmetriya saqlangan deb faraz qilinadi. Masalan, o'yin kubigining shakli muntazam ko'pyoq bo'lib, u bir jinsli materialdan tayyorlangan deb hisoblanadi, tangada ham shu holatni kuzatish mumkin. Ammo amaliyotda simmetriyaga asoslangan holatlar kamdan-kam uchraydi.

Shu sababli, ehtimollarni hisoblashda ehtimolning klassik ta'rifi bilan bir qatorda boshqa ta'riflardan ham foydalaniladi, jumladan, statistik ta'rifdan. Ehtimolning statistik ta'rifini keltirishdan oldin nisbiy chastota tushunchasini kiritamiz, chunki bu tushuncha statistik ta'rifda muhim ahamiyatga egadir.

Nisbiy chastota ham ehtimol kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Ta'rif. Kuzatilayotgan A hodisa yuz bergan tajribalar sonining jami soniga nisbati A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi va

$$W(A)=\frac{k}{n}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda k – A hodisa yuz bergan tajribalar soni, n – jami tajribalar soni.

Hodisa ehtimoli va nisbiy chastotasi ta'riflarini taqqoslab quyidagi xulosani chiqarish mumkin: ehtimol tajribagacha, nisbiy chastota esa tajribadan so'ng hisoblangan qiymatdir.

12-misol. Noyabr oyining 6, 7, 11, 12, 17, 21, 24-kunlarida yomg'ir yoqqan bo'lsa, noyabr oyi uchun yomg'ir yog'ish nisbiy chastotasi: $W(A)=\frac{7}{30}$.

Bir xil sharoitda o'tkazilgan ko'p sondagi tajribalar seriyasi shuni ko'rsatadiki, nisbiy chastota turg'unlik xossasiga egadir. Bu xossaning ma'nosi quyidagicha: turli tajribalarda (bir xil sharoitda va bitta hodisa ustida) topilgan nisbiy chastota qiymatlarining bir-biridan farqi kam (tajriba soni qancha katta bo'lsa, farq shuncha kam) bo'ladi va bu nisbiy chastotalar biror son atrofida tebranadi. Mana shu son hodisaning ro'y berish ehtimoli bo'ladi. Shunday qilib, nisbiy chastotani ehtimolning taqribiy qiymati sifatida qabul qilish mumkin.

13-misol. Bizning eramizdan 2000 yillar oldin Xitoyda o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati deyarli 0,5 ga tengligi hisoblangan.

14-misol. Fransuz olimi Laplas London, Peterburg va Fransiyada to‘plangan statistik ma’lumotlarga asoslanib, o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati taxminan $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko‘rsatgan. Bu son ko‘p yillar mobaynida o‘zgarmay qolishini tasdiqlagan.

15-misol. Byuffon (XVIII asr) tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta “gerb” tomon tushib nisbiy chastota 0,5069 ga, Pirson (XIX asr) tangani 24000 marta tashlaganda 12012 martasida “gerb” tomoni tushgan va nisbiy chastota 0,5005 ga teng bo‘lgan.

Ehtimolni statistik aniqlashda hodisa ehtimoli sifatida shu hodisa nisbiy chastotasi yoki unga yaqinroq sonni olinadi.

Umuman, agar tajribalar soni yetarlicha ko‘p bo‘lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi – $W(A)$ biror o‘zgarmas $p\in[0;1]$ son atrofida turg‘un ravishda tebransa, shu p sonni A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning statistik ehtimoli deyiladi.

Klassik ta’rif uchun keltirilgan xossalar statistik ehtimol uchun ham saqlanib qolishini osongina tekshirib ko‘rish mumkin.

Geometrik ehtimollik. Yuqorida aytilganidek, tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni cheksiz bo‘lsa, bu holda ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanish mumkin emas. Masalan, l kesma L kesmaning bir qismi bo‘lsin. L kesmaga tasodifiy tarzda nuqta qo‘yilsin. Bunda qo‘yilgan nuqta L kesmaning ixtiyoriy nuqtasida bo‘lishi mumkin, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli uning uzunligiga proporsional bo‘ladi va l ning L kesmada qanday holatda joylashganligiga bog‘liq bo‘lmaydi deb faraz qilinsa, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimolini ehtimolning klassik ta’rifi bilan aniqlash mumkin emas, bunday holatlardagi ehtimolning klassik ta’rifi kamchiliklarini yo‘qotish uchun geometrik ehtimollik tushunchasi kiritiladi.

Yuqoridagi misolda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$$P=\frac{l(uzunligi)}{L(uzunligi)}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

16-misol. Tasodifiy tarzda tashlangan nuqta muntazam ABC uchburchakning A uchidan chiqqan mediananing ixtiyoriy nuqtasiga tushadi. Bu nuqtaning AO (O – ABC uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) kesmaga tushish ehtimoli topilsin.

Yechish: Ma'lumki, uchburchak medianalari kesishish nuqtasida uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda 2:1 nisbatda bo'linadi. Shu sababli, $AO=\frac{2}{3}m_A$ ($m_A - A$ uchdan chiqqan mediana uzunligi). U holda $p=\frac{2}{3}$.

Biror tekislikda yassi G soha berilgan bo'lib, bu soha yassi g sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimolini topish talab etilsin. Bu yerda Ω elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat. Shuning uchun, bu holda ham klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli uning yuziga proporsional bo'lib, g soha G sohaning qayerida joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P=\frac{g(yuzi)}{G(yuzi)}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bunday usuldagi ehtimollikga ***geometrik ehtimollik*** deyiladi.

17-misol. Radiusi R bo'lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) kvadrat ichiga;

b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimollarini toping.

Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo'lib, uning doiraning qayerida joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Yechish:

$$a)\ P=\frac{kvadratning-yuzi}{doiraning-yuzi}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}.$$

$$b)\ P = \frac{uchburchak - yuzi}{doira - yuzi} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Yuqoridagi keltirilgan hollar geometrik ehtimollar uchun xususiy hollar edi. Agar sohaning o‘lchovini *mes* deb belgilasak, u holda nuqtaning G sohaning qismi bo‘lgan g sohaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

formula bilan hisoblanadi.

Tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni bilish shu hodisalar rivojining qanday kechishini avvaldan ko‘ra bilishga imkon beradi.

Ehtimollar nazariyasi fanining usullari hozirgi davrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan iqtisodiyot sohasida ham keng va samarali qo‘llanilmoqda. Tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lgan masalalar iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda, bu jarayonlarning kechishini bashorat qilishda hamda ma’qul iqtisodiy yechimlar qabul qilishda qo‘llaniladi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullari makro - va mikro-iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko‘rsatish jarayonini tahlil qilishda va boshqa ko‘plab sohalarda o‘z tatbiqlarini topmoqda.

1.2. Ehmollarni qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari

Hodisalar ustida amallar. Hodisa ko‘p hollarda ikki yoki undan ortiq hodisalar to‘plami sifatida ham qaraladi. Bunday hodisalar murakkab hodisalar deb atalib, biz bu mavzuda ularni ta’riflashga o‘tamiz.

Ikkita A va B hodisalarning ***yig‘indisi*** (birlashmasi) deb, A yoki B hodisaning, yoki ikkala hodisaning ham ro‘y berishidan iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi va $A \cup B$ ko‘rinishda belgilanadi.

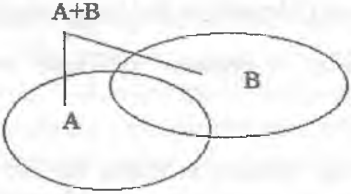
Shunday qilib, $A \cup B$ hodisa A yoki B, yoki ikkala hodisaning ro‘y berishini ifodalaydigan barcha elementar hodisalardan iboratdir.

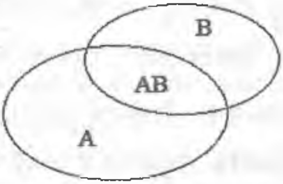
A va B hodisalarning ***ko'paytmasi*** (kesishmasi) deb, bu hodisalarning bir paytda ro'y berishidan iborat hodisaga aytiladi va $A\cap B$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, $A\cap B$ hodisa A va B hodisalarning bir paytda ro'y berishini ifodalaydigan barcha elementar hodisalardan iborat.

Biz bundan keyingi belgilaslarimizda $A\cup B$ o'rniga $A+B$ belgini, $A\cap B$ o'rniga esa AB belgini ishlatamiz.

Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi Venn diagrammasi orqali quyidagicha tasvirlanadi





Yuqorida keltirilgan $A\cup B$, $A\cap B$ murakkab hodisalarni ko'p hollarda A va B hodisalar ustida bajarilgan amallar deb ham qaraladi. Bu amallar yordamida biz hodisalarni klassifikatsiyalashimiz mumkin:

a) Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisa ro'y berishini yo'qqa chiqarsa va shu bilan birgalikda B hodisaning ro'y berishi A hodisa ro'y berishini yo'qqa chiqarsa, u holda bu hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi. Aks holda esa bu hodisalar *birgalikda* deyiladi;

b) Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisa ro'y berishiga bog'liq bo'lmasa va shu bilan birgalikda B hodisaning ro'y berishi A hodisa ro'y berishiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu hodisalar *erkli hodisalar* deyiladi. Aks holda esa bu hodisalar *erksiz* deyiladi.

Ko'p hollarda $A+B$ hodisani A va B hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining ro'y berishi, AB hodisani esa A va B hodisalarning bir paytda ro'y berishi deb ham qaraladi.

Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish qoidalari. Biz murakkab hodisalarning ro'y berish ehtimolliklarini hisoblash qoidalari bilan tanishib chiqamiz.

1-qoida. Agar A, B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $A+B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

$P(A+B)$ ehtimollk A, B hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli deb ham ataladi.

1-misol. Qutida 6 ta qizil, 8 ta ko'k va 6 ta oq shar bor. Qutidan tasodifiy ravishda olingan sharning rangli bo'lish ehtimoli topilsin. (Oq shar rangsiz shar deb qaraladi).

Yechish: A hodisa-qutidan olingan sharning qizil bo'lishi; B hodisa – qutidan olingan sharning ko'k bo'lishi bo'lsin, u holda: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{5}$. A va B hodisalar birgalikda bo'lmaganligi sababli $P(A+B)$ ehtimolni topish uchun 1-qoidani qo'llash mumkin: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$.

2-qoida. Agar A, B erkli (bog'liqmas) hodisalar bo'lsa, u holda $AB-$ hodisaning ro'y berish ehtimoli A va B hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng: $P(AB)=P(A)P(B)$.

2-misol. I mergan otgan o'qning nishonga tegish ehtimoli $P(A)=0{,}8$, II mergan uchun bu ehtimollik $P(B)=0{,}7$ bo'lsin. Agar ayiq o'lishi uchun unga ikkita o'qning tegishi shart bo'lsa, u holda ikkala mergan o'q uzgandan so'ng, ayiqning o'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Bu yerda A va B hodisalar o'zaro erkli hodisalar ekanligi hamda masalaning yechimi AB hodisaning ro'y berish ehtimolini topishdan iborat ekanligi masala shartidan ko'rinib turibdi. Shu sababli masala yechimini topishda 2-qoidadan foydalanamiz. U holda $P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$.

3-qoida. Agar A, B hodisalar birgalikda bo'lsa, u holda $A+B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

3-misol. I mergan otgan o'qning nishonga tegish ehtimoli $P(A)=0{,}8$, II mergan uchun bu ehtimollik $P(B)=0{,}7$ bo'lsin. Agar quyon o'lishi uchun unga bitta o'qning tegishi yetarli bo'lsa, u holda ikkala mergan o'q uzgandan so'ng, quyonning o'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Bu yerda A va B hodisalar o'zaro erkli, ammo birgalikda hodisalar ekanligi hamda masalaning yechimi AB hodisaning ro'y berish ehtimolini topishdan iborat ekanligi masala shartidan ko'rinib turibdi. Shu sababli, masala yechimini topishda 3-qoidadan foydalanamiz. U holda

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94 .$$

Shartli ehtimollik. Tasodifiy hodisa tushunchasi ma'lum bir S shartlar asosida ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan hodisa deb aniqlagan edi. Agar hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblashda faqat S shartlarning bajarilishi hisobga olinib, boshqa qo'shimcha shartlar talab qilinmasa, u holda bu ehtimol ***shartsiz ehtimol*** deb ataladi; agar hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblashda S shartlardan bo'shqa qo'shimcha shartlar talab qilinsa, u holda bu ehtimol ***shartli ehtimol*** deb ataladi. Agar A va B hodisalar erksiz hodisalar bo'lsa, u holda bu hodisalarning bir paytda ro'y berish ehtimolini hisoblash uchun shartli ehtimollik tushunchasini kiritishi kerak bo'ladi. Chunki, bu hodisalar bir-biriga bog'liq bo'lib, birinchi hodisa ikkinchi hodisa ro'y berish sharti bilan amalga oshadi yoki aksincha. Faraz qilamiz, A hodisa B hodisa bilan birgalikda va undan so'ng ro'y bersin. U holda A hodisaning ro'y berish ehtimoli $P_B(A)$ ko'rinishda yozilib, u B shart asosida A hodisaning ro'y berish ehtimoli deb o'qiladi va $P_B(A)$ esa ***shartli ehtimollik*** deb ataladi.

4-misol. Qutida 4 ta oq, 3 ta qora shar bor. Qutidan qaytarib solinmaslik sharti bilan ikkita shar olindi. Agar birinchi olingan shar (A–hodisa) qora bo'lsa, u holda ikkinchi olingan sharning (B–hodisa) oq bo'lish ehtimolini toping: $P_A(B) = ?$

Yechish: Birinchi tajribadan so'ng qutida 6 ta shar (4 ta oq va 2 ta qora) qoladi. Shu sababli $P_A(B) = \frac{2}{3}$.

4-qoida. Agar A, B erksiz (bog'liq) hodisalar bo'lsa, u holda AB - hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) .$$

Yuqoridagi qoidalarni ikkitadan ko'p chekli sondagi hodisalar uchun ham umumlashtirish mumkin. Buning uchun quyidagi tushunchalarni kiritib olamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to'plamini qaraymiz.

1-ta'rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikda bo'lmasa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar deb ataladi.

2-ta'rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro erkli bo'lsa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan erkli deyiladi.

3-ta'rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar juft-jufti bilan erkli hamda har bir hodisa va boshqa hodisalarning mumkin bo'lgan ko'paytmalari erkli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda erkli hodisalar deyiladi.

1-natija. Juft-jufti birgalikda bo'lmagan chekli sondagi $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

2-natija. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ birgalikda erkli hodisalar bo'lsa, u holda $A_1 A_2 ... A_n$ ko'paytmaning ro'y berish ehtimoli mos hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$$

3-natija. Umumiy holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n).$$

Shartli ehtimol tushunchasidan foydalanib, erkli hodisalarni boshqacha ta'riflash ham mumkin.

4-ta'rif. Agar A va B hodisalar uchun $P_A(B) = P(B)$, $P_B(A) = P(A)$ bo'lsa, u holda A va B erkli hodisalar deyiladi.

5-ta'rif. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

Qarama-qarshi A va $\overline{A}$ hodisalar uchun

$$A+\overline{A}=\Omega, \quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$$

munosabatli o'rinli ekanligidan,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

tenglik kelib chiqishini tushunish qiyin emas. Odatda, qarama-qarshi hodisalardan birining ehtimoli p bilan belgilansa, ikkinchisining ehtimoli q bilan belgilanadi. Shunday qilib, $p+q=1$.

5-misol. A hodisa kubik bir marta tashlanganda "6" ochko tushishini bildirsin. U holda $\overline{A}$ hodisa "6" ochko tushmasligini, ya'ni qolgan 1,2,3,4,5 ochkolardan birortasining tushishini bildiradi.

3-qoida $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalar uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi (***Bul formulasi***)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n)$$

Eslatma. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda bog'liqmas bo'lsa, u holda ularga qarama-qarshi bo'lgan $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ hodisalar ham birgalikda bog'liqmas bo'ladi.

6-misol. I va II to'plardan o'q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda $p_1=0{,}8$ va $p_2=0{,}9$. Bir yo'la otishda to'plardan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechish: A hodisa – I to'pdan otilgan o'qning nishonga tegishi; B hodisa – II to'pdan otilgan o'qning nishonga tegishi bo'lsin. To'plardan otilgan o'qlarning nishonga tegishi bir-biriga bog'liqmas. Shuning uchun A va B hodisalar erkli hodisalardir. Demak, 3-qoidani qo'llash mumkin:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72,$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}9-0{,}72=0{,}98.$$

Birgalikda erkli bo'lgan $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $q_i = P(\overline{A_i}),\ i = \overline{1,n}$.

Hodisalar to‘la guruhi

6-ta’rif. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – hodisalar to‘plamidan hech bo‘lmaganda bittasi ro‘y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmasa, u holda bu hodisalar to‘plami to‘la guruh tashkil etadi deyiladi.

Ta’rifga binoan, agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar to‘la guruh tashkil etsa, u holda

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega, \quad A_i A_j = \varnothing, \quad (i \neq j)$$

munosabatlar o‘rinlidir.

7-misol. Ikkita talaba biror sport normativini topshirmoqda. Bu sinovda: A_1 – faqat bitta talabaning normativni topshirishi; A_2 – ikkala talabaning ham normativni topshirishi; A_3 – talabalarning ikkalasi ham normativni topshira olmasligi bo‘lsa, bu hodisalar to‘plami to‘la guruh tashkil etadi.

To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – hodisalar uchun xos bo‘lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – hodisalar ehtimollarining yig‘indisi birga teng: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Isbot: Ta’rifga asosan to‘la guruh tashkil etuvchi hodisalardan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berishi muqarrardir: muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo‘lgani uchun

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

Ta’rifga asosan to‘la guruhda istalgan ikkita hodisa birgalikda emas, shuning uchun qo‘shish qoidasiga ko‘ra:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Hodisalar to‘la guruhi tushunchasi yordamida qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha ta’riflash ham mumkin.

7-ta’rif. Agar ikkita hodisa to‘la guruh tashkil etsa, u holda bu hodisalar qarama-qarshi hodisalar deb ataladi.

Yuqoridagi teoremaga asosan, qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki, ba'zan A hodisaning ehtimolini topishda avval $\overline{A}$ hodisaning ehtimolini hisoblash, keyin esa izlanayotgan ehtimolni quyidagi formula orqali topish qulay bo'ladi:

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

8-misol. Qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi standart. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 standart detal bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish: A–olingan detallar ichida kamida bittasi standart va $\overline{A}$ – olingan detallar orasida bitta ham standart detal yo'q hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5}, \qquad P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_8^5}{C_{20}^5}.$$

Endi qo'shish va ko'paytirish teoremalarining natijalari sifatida to'la ehtimollik va Bayes formulalarini keltiramiz.

To'la ehtimollik va Bayes formulalari. A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan bittasining amalga oshish shartida ro'y berishi mumkin bo'lsin. $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan har birining ro'y berish ehtimollari va $P_{B_i}(A),(i=\overline{1,n})$ – shartli ehtimolliklar ma'lum bo'lsin. U holda, A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagi to'la ehtimol formulasi bo'yicha topiladi:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Isbot: Shartga asosan, A hodisa ro'y berishi uchun birgalikda bo'lmagan $AB_1,...,AB_n$ hodisalardan bittasining ro'y berishi zarur va yetarli, ya'ni

$$A=AB_1+AB_2+...+AB_n.$$

Shartga asosan $\{AB_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ hodisalar to'plami birgalikda bo'lmaganligi va $P(B_i A)=P(B_i)P_{B_i}(A)$ $(i=\overline{1,n})$ bo'lgani uchun

$$P(A)=P(AB_1+AB_2+...+AB_n)=P(AB_1)+P(AB_2)+...+P(AB_n)=$$
$$=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

To'la ehtimol formulasi shartlarida A hodisaning ro'y berishida $B_1, B_2, ..., B_n$ – hodisalardan qaysi birining amalga oshishi oldindan ma'lum bo'lmaganligi sabali $B_1, B_2, ..., B_n$ – hodisalar ***gipotezalar*** deb ataladi.

Faraz qilamiz, tajriba o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa ro'y bergan bo'lsin. $B_1, B_2, ..., B_n$ gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgarganligini (A hodisa ro'y berganligi sababli) aniqlash masalasini qaraymiz. Boshqacha aytganda

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2), ..., P_A(B_n)$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko'rsatilgan ehtimollardan birini masalan, $P_A(B_1)$ ni topamiz. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra:

$$P(A \cap B_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Bundan esa,

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Bu munosabatdagi $P(A)$ ehtimolni uning to'la ehtimol formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}$$

Qolgan gipotezalarning shartli ehtimollari ham shunga o'xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy B_k gipoteza uchun

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}, \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

formulalar o'rinli.

Bu formulalar ***Bayes formulalari*** deb ataladi (Tom Bayes (1702-1761)-ingliz matematigi). Bayes formulalari tajriba natijasida A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng B_k gipotezalarning ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

To'la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo'llanishiga doir quyidagi misolni qaraymiz.

9-misol. Talabalarning saralash sport musobaqasida qatnashishi uchun kursning I guruhidan 4 ta, II guruhidan 6 ta, III guruhidan 5 ta talaba ajratilgan. I, II va III guruh talabalarining institut terma komandasiga kirish ehtimollari mos ravishda 0,9; 0,7; va 0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga tushish ehtimolini;

b) tavakkaliga tanlangan talaba terma komandaga kirgan bo'lsa, uning I, II, III guruhdan bo'lish ehtimollarini.

Yechish: Tanlangan talabaning terma komandaga kirishi A hodisa bo'lsin. U holda talaba tanlash hodisasini quyidagi elementar hodisalarga ajratish mumkin:

B_1 – tanlangan talabaning I guruhdan bo'lishi;

B_2 – tanlangan talabaning II guruhdan bo'lishi;

B_3 – tanlangan talabaning III guruhdan bo'lishi.

Masala shartiga ko'ra B_1, B_2, B_3 – hodisalar to'la guruh tashkil etadi, chunki talaba tanlashda boshqa elementar hodisa bo'lishi mumkin emas hamda ular birgalikda bo'lmaydi. U holda:

$$P(B_1)=\frac{4}{15};\quad P(B_2)=\frac{6}{15};\quad P(B_3)=\frac{5}{15};$$

$$P_{B_1}(A)=0,9;\quad P_{B_2}(A)=0,7;\quad P_{B_3}(A)=0,8.$$

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga kirish ehtimolini to'la ehtimollik formulasiga asosan topamiz:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=$$

$$=\frac{4}{15}\cdot 0,9+\frac{6}{15}\cdot 0,7+\frac{5}{15}\cdot 0,8=\frac{59}{75}.$$

b) Bayes formulasiga asosan:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}\cdot 0,9}{\frac{59}{75}}=\frac{18}{59};$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{15}\cdot 0,7}{\frac{59}{75}}=\frac{21}{59};$$

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{15}\cdot 0,9}{\frac{59}{75}}=\frac{20}{59}.$$

Misoldan ko'rinib turibdiki, gipotezalarning ro'y berish ehtimollari A hodisa ro'y bergandan so'ng o'zgaradi.

1.3. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi

Ma'lumki, hodisani kuzatish uchun o'tkaziladigan tajribalar bir necha marta takrorlanishi mumkin. U holda bu tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi undan oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lishi yoki bog'liq bo'lmasligi mumkin. Masalan, qutida n ta qora, m ta oq shar bor. Tajriba qutidan bitta shar olinishi, A hodisa esa olingan sharning oq chiqishi bo'lsin. Buni ikki usulda amalga oshirish mumkin:

a) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinadi;

b) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmaydi.

Har birini alohida ko'rib chiqamiz:

a) Agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinsa, har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli: $P(A)=\frac{m}{n+m}$

b) Agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmasa, har bir tajribada $P(A)$ ehtimolning qiymatini hisoblash uchun oldingi tajriba natijasini e'tiborga olishga majburmiz. Haqiqatan ham, birinchi tajribada $P(A)=\frac{m}{n+m}$ bo'ladi, ikkinchi tajribada $P(A)=\frac{m-1}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi A hodisa bo'lsa) yoki $P(A)=\frac{m}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi $\overline{A}$ hodisa bo'lsa) va hokazo, ya'ni ikkinchi tajribadan boshlab har bir tajribaning natijasi oldingi tajribalar natijasiga bog'liq.

Bu misolning a) holatdagi tajribalar ketma-ketligini erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataymiz.

1-ta'rif. Agar o'tkazilayotgan tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi (ikkinchi tajribadan boshlab) oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu tajribalar ketma-ketligi erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataladi.

Biz quyida bir nechta alohida sodda hodisalardan iborat bo‘lgan murakkab hodisa tushunchasidan foydalanamiz.

Erkli sinovlar ketma-ketligining har bir tajribasida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli yo har xil, yoki bir xil bo‘lishi mumkin. Biz soddalik uchun bu ketma-ketlikining har bir tajribasida A hodisa bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisa ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lsin va har bir sinashda A hodisaning ehtimoli bir xil, chunonchi p ga teng deb hisoblaymiz, u holda ro‘y bermaslik ehtimoli $q=1-p$. Masalan, o‘yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o‘tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi oldingi tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog‘liqmasligi ravshan, binobarin biz A hodisa sifatida 3 ochkoning chiqishini qarasak, bu yerda erkli sinovlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz va $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$.

n ta sinashda A hodisaning k marta ro‘y berish, yoki $n-k$ marta ro‘y bermasligidan iborat $P_n(k)$ – ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun ketma-ket o‘tkazilgan n ta tajribani bitta murakkab tajriba deb qarasak, bu tajribaning natijasi $A_1,A_2,...A_n$ ko‘rinishda bo‘lib, uning har bir A_i $(i=\overline{1,n})$ hadi yoki A, yoki $\overline{A}$ bilan ifodalanadi. Bunday hodisalar soni 2^n ta bo‘ladi. Haqiqatan ham, $A_1,A_2,...A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_1,A_2,...A_n$ hodisaning $A_i=A$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta;

2) $A_1,A_2,...A_n$ hodisaning $\overline{A},A,...A$ ko‘rinishdagi kombinatsiyalari soni n ta; k) $A_1,A_2,...A_n$ hodisaning $\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{AA...A}}_{n-k}$ ko‘rinishdagi kombinatsiyalari soni C_n^k ta; n) $A_1,A_2,...A_n$ hodisaning $A_i=\overline{A}$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta.

Shunday qilib, $C_n^0,C_n^1,...,C_n^n$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, u holda gruppalash xossasiga asosan, $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$.

Agar n ta tajribada A hodisaning rosa $k$marta ro‘y berishini B hodisa deb qarasak,

$$B=(\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k})\cup(\underbrace{AA...A}_{k-1}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}A)\cup...\cup\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}\underbrace{AA...A}_{k} \qquad (1.6)$$

bo‘lib, u C_n^k ta haddan iborat bo‘ladi. Tajribalar ketma-ketligi erkli bo‘lganligi sababli ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra (1.6) ifodadagi har bir hadning ehtimolligi $p^k q^{n-k}$ bilan aniqlanadi, u holda (1.6) yig‘indidagi har bir had birgalikda emasligini e’tiborga olsak:

$$P(B)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1.7)$$

Boshlang‘ich belgilashlarga qaytib,

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1.8)$$

Bernulli (binomial) formulasi (sxemasi) ni hosil qilamiz. binomial formula deb atalishiga sabab u

$$(p+q)^n=C_n^n p^n q^0+C_n^{n-1}p^{n-1}q+...+C_n^k p^k q^{n-k}+...+C_n^0 p^0 q^n$$

Nyuton binomining umumiy hadini ifodalaydi.

1-misol. Har bir detalning standart bo‘lish ehtimoli $P=0,8$ bo‘lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan 2 tasining standart bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: Bu yerda $n=5, m=2, p=0,8$ va $q=0,2$. Bernulli formulasiga asosan.

$$P_5(2)=C_5^2\cdot 0,8^2\cdot 0,2^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0,00512=0,0512\,.$$

2-misol. Tanga 10 marta tashlandi. “Gerb”ning 3 marta tushish ehtimoli qanchaga teng?

Yechish: Bu hodisaning har bir tajribadagi ro‘y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Bundan, $P_{10}(3)=C_{10}^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{28}$.

A hodisaning o‘tkazilayotgan n ta erkli sinovda kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_1 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+...+P_n(k_2) \qquad (1.9)$$

formula bilan hisoblanadi.

2-ta’rif. Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro‘y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimollari ichida eng kattasi bo‘lsa, ya’ni

$$P_n(k_0)=\max_{0\le k\le n}\{P_n(k)\} \qquad (1.10)$$

bo‘lsa, u holda k_0 soni *eng ehtimolli son* deb ataladi.

Eng ehtimolli son quyidagi qo‘sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \qquad (1.11)$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan, balki sinovlar soni n ni va har bir sinovda A hodisaning ro‘y berish ehtimolini bilish kifoya ekan. Haqiqatan ham, eng ehtimolli sonning ta’rifidan

$$P_n(k_0) \geq P_n(k_0 - 1), \qquad P_n(k_0) \geq P_n(k_0 + 1).$$

Bu tengsizliklarga mos ravishda $P_n(k_0)$, $P_n(k_0 - 1)$, $P_n(k_0 + 1)$ larning qiymatlarini qo‘yib quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} \cdot q^{n-k_0} \geq \frac{n! p^{k_0-1} q^{n-k_0+1}}{(k_0-1)!(n-k_0+1)},$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} \cdot q^{n-k_0} \geq \frac{n! p^{k_0-1} q^{n-k_0+1}}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}$$

Bu tengsizliklarni k_0 ga nisbatan yechamiz va quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$k_0 \leq np + p; \, k_0 \geq np - q$$

Oxirgi ikki tengsizlikni birlashtirib, eng ehtimolli sonni aniqlovchi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$np - p \leq k_0 \leq np + p$$

Bu tengsizlikni aniqlovchi intervalning uzunligini

$$np + p - (np - q) = p + q = 1$$

va hodisa n ta sinov natijasida butun son marta ro‘y berishini hisobga olsak, eng ehtimolli son k_0 quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar $np - q$ son kasr bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo‘ladi;

b) agar $np - q$ butun son bo‘lsa, u holda k_0 va $k_0 + 1$ eng ehtimolli sonlar mavjud bo‘ladi;

c) agar np butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0 = np$ bo‘ladi.

3-misol. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish: Berilgan masalaning shartlariga asosan, $n = 6$, $q = p = \frac{1}{2}$. U holda, "gerb" tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni quyidagicha topamiz: $k_0 = np = 3$.

Demak, eng ehtimolli son 3 ekan.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlash jarayonida biz np sonning Bernulli sxemasida maxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo‘ldik. Bu shundan iborat bo‘ldiki, np songa eng yaqin bo‘lgan ikkita butun sonlardan biri (ba’zan ikkalasi, ba’zan o‘zi) eng ehtimolli son bo‘ldi.

1-eslatma. np son yuqoridagiga nisbatan ham muhimroq bo‘lgan talqinga ega. Chunonchi, np ni ma’lum ma’noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning o‘rtacha soni deb qarash mumkin.

4-misol. Ma’lum korxonada yaroqsizlikka yo‘l qo‘yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotlarning o‘rtacha soni nimaga teng?

Yechish: Izlanayotgan son $np = 100 \cdot 0,05 = 5$ ga teng bo‘ladi.

2-eslatma. Binomial formulasini keltirib chiqarishda erkli sinovlar ketma-ketligining har bir sinashida A hodisaning ehtimoli bir xil, p ga teng deb hisoblangan edi. Endi esa bu ehtimollarni turlicha bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $p(A_i) = p_i$, $p(\overline{A}) = q_i$, u holda (1.8) formula quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$p_n(k) = p_1 p_2 \cdots p_k q_{k+1} \cdots q_n + p_1 q_2 p_3 \cdots p_{k+1} q_{k+2} \cdots q_n + q_1 q_2 \cdots q_{n-k} p_{n-k+1} \cdots p_n \quad (1.12)$$

(1.12) formulaning o‘ng tomonini hosil qilish uchun

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z) \quad (1.13)$$

ko‘paytmani qarab z^k ning koeffitsiyentlarini olish kifoya, bu yerda z ixtiyoriy parametr bo‘lib, $\varphi(z)$ funksiya $p_n(k)$ ehtimollarni hosil qiluvchi funksiya deb ataladi.

3-eslatma. Binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasi bo‘lgan polinomial sxemani ko‘rib chiqamiz. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa $\overline{A}$ va A qaralgan bo‘lsa, polinomial sxemada har bir tajribada to‘la gruppa hosil qiluvchi k ta hodisa qaraladi.

Tajriba shundan iborat bo‘ladiki, n ta erkli sinov o‘tkaziladi va ularning har birida to‘la gruppa hosil qiladigan k ta $A_1, A_2, ..., A_k$ hodisaning faqat bittasi ro‘y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma’lum:

$$p_1 = p(A_1),\ p_2 = p(A_2), ..., p(A_k).$$

n tajribada A_1 hodisa m_1 marta, A_2 hodisa m_2 marta,…,A_k hodisa m_k marta (bu yerda $m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k = n$) ro‘y berish ehtimoli

$$p_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k} \qquad (1.14)$$

Xususiy holda, $k = 2$ bo‘lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

Agar n ning katta qiymatlarida $p_n(k)$ ehtimollarni hisoblashda Bernulli formulasidan foydalansak juda katta sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishimizga to‘g‘ri keladi. Masalan, biror korxonada yaroqsiz mahsulot chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lsin. Tayyor mahsulotdan 500 tasi tekshirilsin. Tekshirilgan mahsulotlar orasida 25 tasining yaroqsiz bo‘lish ehtimoli topilsin. Bu holda har bir mahsulotning tekshirilishini bitta tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (tekshirilgan bitta mahsulotning yaroqsiz deb topilishi) ro‘y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lgan 500 ta erkli tajriba o‘tkazilyapti deb hisoblashimiz mumkin, u holda Bernulli formulasiga asosan:

$$p_{500}(25) = C_{500}^{25}(0,25)^{25} \cdot (0,75)^{475},$$

bu yerda

$$C_{500}^{25} = \frac{476 \cdot 477 \cdot ... \cdot 499 \cdot 500}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 25}.$$

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, n ning katta qiymatlarida $p_n(k)$ ehtimollarni hisoblashni osonlashtirish uchun boshqa asimptotik formulalardan foydalanish zaruriyati tug‘iladi. Bu formulalar ehtimollar nazariyasida limit teoremalari deb ataluvchu teoremalarda keltiriladi. 1-va 2- teoremalar p ning qiymati 0 va 1 ga yaqin bo‘lmagan hollarda keltiriladi ($np \geq 10$).

1-teorema (Muavr-Laplasning lokal teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli $p_n(k)$ uchun, k ning $\frac{|k-np|}{\sqrt{npq}}<C, (C=const)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$p_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) \qquad (1.15)$$

tenglik bajariladi, bu yerda $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bu teoremani Muavr 1730-yilda $p=\frac{1}{2}$ uchun, so'ngra Laplas 1783-yilda $p\in(0;1)$ uchun isbotlagan. Biz esa bu teorema xulosasini isbotsiz qabul qilamiz.

Maxsus jadvallarda $\varphi(x)$ funksiyaning faqat x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlari keltirilgan. Chunki, $\varphi(x)$ funksiya juft, ya'ni $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng:

$$p_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x). \qquad (1.16)$$

n ning katta qiymatlarida (1.16) ning aniqligi oshib boradi.

5-misol. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajribada A hodisa 80 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish: $n=400, k=80, p=0,2, q=0,8$.

$$p_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot0,2\cdot0,8}}\frac{1}{8}\varphi(x), \qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot0,2}{8}=0.$$

jadvaldan $\varphi(0)=0,3989$.

U holda: $p_{400}(80)\approx\frac{0,3989}{8}\approx0,04986$.

6-misol. Merganning o'qni nishonga tekkizish ehtimoli: $p=0,75$. Mergan otgan 10 ta o'qdan 8 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: $n=10, k=8, p=0,75, q=0,25$

(1.16) formulasidan foydalansak:

$$p_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \varphi(x) \approx 0,7301 \cdot \varphi(x),$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,36$$

jadvaldan: $\varphi(0,36) = 0,3789$. U holda: $p_{10}(8) = 0,7301 \cdot 0,3739 \approx 0,273$.

Endi bu masalani Bernulli formulasidan foydalanib yechimini topamiz va boshqa natijaga: $p_{10}(8) = 0,282$ ga kelamiz. Javoblar orasidagi katta farqni n ning qiymati kichikligi bilan tushuntiriladi.

Ma'lumki, har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o'zgarmas bo‘lsa, u holda n (kichik n larda) ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli Bernulli formulasiga asosan

$$p_n(k_1, k_2) = p_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

n ning katta qiymatlarda esa $p_n(k_1, k_2)$ ehtimolni hisoblash uchun quyidagi teoremadan foydalanamiz.

2-teorema (Muavr- Laplasning integral teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ o‘zgarmas bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $p_n(k_1, k_2)$ uchun $n \to \infty$ da

$$p_n(k_1, k_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (1.17)$$

munosabat k_1 va k_2 $(-\infty \le x' \le x'' \le \infty)$ ga nisbatan tekis bajariladi, bu yerda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \; \Phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Laplas funksiyasi deb ataluvchi $\Phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ integralning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan. Jadvalda integralning $0 \le x \le 5$ kesmaga mos bo‘lgan qiymatlari berilgan, chunki $x > 5$ lar uchun $\Phi(x) = 0,5$ deb olish tavsiya etiladi. $\Phi(x)$ funksiya toq, ya’ni

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$ bo‘lgani uchun jadvalda $x < 0$ chunki funksiya qiymatlari berilmagan.

7-misol. Detalni texnik nazorat bo‘limi (TNB) tekshirmagan bo‘lish ehtimoli $p = 0,2$. Tasodifan olingan 400 ta detaldan kamida 70 ta ko‘pi bilan 100 ta detalni TNB tekshirmagan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: $p = 0,2,\ q = 0,8,\ n = 400,\ k_1 = 70,\ k_2 = 100,$ u holda

$$x' = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25,\ x'' = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,75.$$

(1.16) formulaga asosan, $p_{400}(70,100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25)$. Jadvaldan $\Phi(2,5) = 0,4938;\ \Phi(1,25) = 0,3944$. U holda

$$p_{400}(70,100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Faraz qilaylik, A hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas p ga $(0 < p < 1)$ teng bo‘lgan n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lsin. $\frac{k}{n}$ nisbiy chastotaning o‘zgarmas p ehtimoldan chetlanishini absolyut qiymati bo‘yicha oldindan berilgan $\varepsilon > 0$ sondan katta bo‘lmaslik, ya’ni $\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon$ tengsizlik bajarilishining ro‘y berish ehtimoli: $p\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$ ni baholaymiz. Yuqoridagi tengsizlikni unga teng kuchli bo‘lgan $-\varepsilon \le \frac{k - np}{n} \le \varepsilon$ tengsizlik bilan almashtiramiz. Uni $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ko‘paytuvchiga ko‘paytirsak: $-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$. Agar $x' = -\sqrt{\frac{n}{pq}},\ x'' = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, belgilashlarni kiritib, Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalansak:

$$p\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$$

Endi boshlang'ich tengsizlikka qaytamiz:

$$p(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) \qquad (1.18)$$

Xulosa qilib aytganda,

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon$$

tengsizlik bajarilishining ro'y berish ehtimoli taqriban Laplas funksiyasining $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ nuqtadagi ikkilangan qiymatiga teng ekan.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi p ehtimol $p = \frac{1}{2}$ ning atrofida bo'lganda $p_n(k)$ ni hisoblash uchun yaxshi natija beradi, lekin p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilsa, bu formula ma'lum bir xatoliklarga olib keladi. Shuning uchun p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilganda $p_n(k)$ ni hisoblash uchun boshqa asimptotik formula topish zarurati tug'iladi.

Biz p ning nolga yaqin qiymatlarini ko'rish bilan chegaralanamiz $(np < 10)$, chunki p birga yaqin qiymatlarni qabul qilsa p ni q bilan almashtirish mumkin, ya'ni p ning o'rniga q ni ishlatish mumkin, chunki $p \to 1 \Rightarrow q \to 0$.

$p_n(k)$ ehtimolning $p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $(1-p=q)$ ifodasini formal ravishda ikkita n,q o'zgaruvchilarning funksiyasi deb qarash mumkin. Faraz qilamiz, k fiksirlangan, n va p esa o'zgaradi, ya'ni n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intiladiki, natijada $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo'lib qolaveradi: $\lambda = np = const$.

Bernulli formulasiga asosan,

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bu yerda $np=\lambda \Rightarrow p=\frac{\lambda}{n}$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$p_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

n juda katta sonligini e'tiborga olib $p_n(k)$ o'rniga $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(k)$ ni topamiz. Shu sababli, $p_n(k)$ ehtimolning taqribiy qiymati topiladi, chunki n juda katta son bo'lgani bilan chekli, bizda esa $n\to\infty$. Shuni ta'kidlash kerakki, $n\to\infty \Rightarrow p\to 0$, chunki $np=const$.

Shunday qilib,

$$p_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Bundan esa quyidagi teoremaning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

3-teorema (Puassonning limit teoremasi). Agar n ta erkli sinovlar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro'y berishida, k fiksirlangan, n va p esa o'zgaruvchan bo'lib, n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intilsaki, $\lambda=np$ miqdor chegaralangan bo'lib qolaversa: $\lambda=np=const$, ya'ni turli sondagi tajribalar ketma-ketligida ($n$turlicha bo'lganda ham) ham A hodisa ro'y berishining o'rtacha soni np o'zgarmay qolaversa, $p_n(k)$ ehtimollik uchun

$$p_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (1.19)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

8-misol. Qo'shma korxona iste'molchiga 5000 sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo'lsa, yo'lda ikki yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechish: Shikastlangan mahsulotlar sonini k desak, izlanayotgan ehtimol $p_{5000}(k\geq 2)$ bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$p_{5000}(k\geq 2)=p_{5000}(2)+p_{5000}(3)+...+p_{5000}(5000)1-[p_{5000}(0)+p_{5000}(1)].$$

Bizning holda sinashlar soni katta va hodisa ro‘y berish ehtimoli 0 ga yaqin bo‘lganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz. $\lambda=np=5000\cdot 0.001=5$ ekanligini e’tiborga olsak:

$$p_{5000}(0)=\frac{5^0\cdot e^{-5}}{0!}=e^{-5};\ p_{5000}(1)=\frac{5^1\cdot e^{-5}}{1!}5e^{-5}.$$

U holda: $p_{5000}(m\geq 2)=1-e^{-5}-5e^{-5}=1-6e^{-5}\approx 0,9596$.

1.4. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan biz oldindan tanishmiz. Masalan, tajriba o‘yin soqqasi tashlanishidan iborat bo‘lsin. Bunda, $\Omega=\{\omega_i\}$ $(i=\overline{1,6})$ to‘plamda 6 ta elementar hodisa bo‘ladi. Ochkolar soni tasodifiy miqdor bo‘lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlari esa uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bo‘ladi.

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo‘lgan, oldindan noma’lum va tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar odatda lotin alfavitining bosh harflari $X, Y, Z,...$bilan, ularning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari esa mos ravishda alfavitning kichik harflari x,y,z bilan belgilanadi. Masalan, X–tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari quyidagicha yoziladi: $X: x_1, x_2,..., x_n,...$

Tasodifiy miqdorlar ikki turga ajratib o‘rganiladi:

a) diskret tasodifiy miqdorlar; b) uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Bu ikki tushuncha haqida ma’lumot berishdan oldin to‘plam va uning elementlari haqida ba’zi bir ma’lumotlarni berib o‘tamiz.

2-ta'rif. Agar to'plam elementlarining sonini biror bir son bilan ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam chekli to'plam deb ataladi.

3-ta'rif. Agar to'plam elementlarining soni cheksiz bo'lib uning elementlarini natural sonlar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli akslantirish mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam sanoqli to'plam deb ataladi.

4-ta'rif. Agar to'plam elementlarining sonini cheksiz bo'lib uning elementlari va $[0;1]$ kesmadagi haqiqiy sonlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda bu to'plam ***kontinium quvvatli to'plam*** deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari ayrim va ajralgan bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlarining soni chekli yoki sanoqli bo'ladi.

1-misol. X tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: $x_1 = 0, x_2 = 1, ..., x_{101} = 100$.

Diskret tasodifiy miqdorni tavsiflash uchun, eng avvalo, uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdorning faqat mumkin bo'lgan qiymatlarini bilish uning xususiyatlarini ta'riflashga yetarli emas, chunki tasodifiy miqdor o'zining har bir qiymatini har xil ehtimollik bilan qabul qilishi mumkin. Shu sababli, diskret tasodifiy miqdorni to'liq aniqlash uchun $x_1, x_2, ...$ qiymatlardan tashqari $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ...$ hodisalarning ehtimollarini ham, ya'ni $p_1 = p(X = x_1), p_2 = p(X = x_2), ...$ larni ham ko'rsatish lozim.

Disket tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni tasodifiy miqdorning ***taqsimot qonuni*** deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha bo'lishi mumkin.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval bo'lib, bunda barcha mumkin bo'lgan qiymatlar va ularga mos ehtimolliklar ko'rsatilgan bo'ladi:

$$X: x_1\ x_2\ \dots x_n\ \dots$$
$$p: p_1\ p_2\ \dots p_n\ \dots$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar odatda ortib borish yoki kamayib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X = x_i\}$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikdamasligi va $\{X = \{x_i\}\}$ hodisalar to‘plami to‘la gruppa tashkil etganligi sababli

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \sum_i p_i = 1$$

tenglik har doim o‘rinli bo‘ladi. Ba’zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda-taqsimot ko‘pburchagi yordamida ham beriladi.

Taqsimot ko‘pburchagini hosil qilish uchun, abssissalar o‘qida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari, ordinatalar o‘qida esa ularga mos ehtimollar qo‘yiladi, keyin esa $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$ nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi. Taqsimot qonuni formula (analitik) usulida ham beriladi.

2-misol. Tanga 5 marta tashlandi. “Gerb” tomonning tushish soni X tasodifiy miqdor bo‘lsin. X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo‘ladi. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi.

Masalan, $p(X = 3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$ va hokazo. U holda

$$\begin{array}{llllll} X: 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p: \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{array}$$

ko‘rinishdagi jadvalni hosil qilamiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarning berilish usullarini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo‘llab bo‘lmaydi. Chunki uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar ro‘yxatini tuzish mumkin emas. Shu sababli, uzluksiz tasodifiy miqdorlarni ta’riflash uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

5-ta'rif. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, uning x (x-ixtiyoriy haqiqiy son) dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimolini aniqlovchi

$$F(x)=p(X<x) \tag{1.20}$$

funksiyaga aytiladi.

Ba'zan $F(x)$ – funksiyani ***integral taqsimot funksiyasi*** deb ham ataladi.

Endi taqsimot funksiyasidan foydalanib uzluksiz va diskret tasodifiy miqdorlarning qat'iy ta'rifini beramiz.

6-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)$ – taqsimot funksiyasi uzluksiz bo'lsa, bu tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning $F(x)$ – taqsimot funksiyasi chekli yoki sanoqli sondagi I tur uzulishlarga ega bo'ldi.

Tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Taqsimot funksiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Isbot: Bu xossaning isboti taqsimot funksiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan, ya'ni $F(x)=p(X<x)$ ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$.

Isbot: Faraz qilamiz $x_1<x_2$ bo'lsin, u holda $(X<x_2)$ oraliqni quyidagicha yozib olish mumkin $(X<x_2)=(X<x_1)+(x_1\le X<x_2)$. $(X<x_1), (x_1\le X<x_2)$ tasodifiy hodisalar birgalikda emasligidan quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$p(X<x_2)=p(X<x_1)+p(x_1\le X<x_2).$$

Endi taqsimot funksiyaning ta'rifidan foydalansak

$$F(x_2)-F(x_1)=p(x_1\le X<x_2) \tag{1.21}$$

tenglikni hosil qilamiz. Ehtimolning nomanfiyligidan kerakli natijani olamiz .

2-xossadan quyidagi natijalarni keltirib chiqarish mumkin.

1-natija. X tasodifiy miqdorning $[a;b)$ intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi.

$$p(a \le X < b) = F(b) - F(a) \tag{1.22}$$

Buning isboti (1.2) formulada $x_1 = a, x_2 = b$ almashtirishdan kelib chiqadi.

2-natija. X uzluksiz tasodifiy miqdorning belgilangan bitta aniq qiymatni qabul qilishi ehtimoli nolga teng, ya'ni $p(X = x_0) = 0$.

Buning isboti (1.22) formulada $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$ almashtirish so'ngra $\Delta x \to 0$ limitni hisoblashdan kelib chiqadi. Shu sababli, uzluksiz tasodifiy miqdorning bitta qiymatni qabul qilish ehtimolini hisoblashning ahamiyati yo'q va shunga ko'ra quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$p(a \le X \le b) = p(a < X \le b) = p(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to a-0} F(x) = 0, \ \lim_{x \to b-0} F(x) = 1 \tag{1.23}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

3-natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \tag{1.24}$$

3-misol. X tasodifiy miqdor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & -1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan bo'lsin. Sinash natijasida X tasodifiy miqdor $(0;2)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: $p(0 \le X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

4-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi

$$\begin{array}{llll} X: & 1 & 4 & 8 \\ p: & 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{array}$$

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: $F(x) = \begin{cases} 0, \; agar \;\; x \le 1, \\ 0,3, \; agar \; 1 < x \le 4, \\ 0,4, \; agar \;\; 4 < x \le 8, \\ 1, \; agar \;\; x > 8. \end{cases}$

Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiyalari yordamida aniqlagan edik. Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi differensiallanuvchi bo'lsa, u holda tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi tushunchasini kiritishimiz kerak bo'ladi.

7-ta'rif. Tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi deb, taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$F'(x) = f(x) \qquad (1.25)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega bo'lib, bu funksiya yordamida uzluksiz tasodifiy miqdorlarning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Bu yerda ularning ba'zilarini keltirib o'tamiz.

1-teorema. X uzluksiz tasodifiy miqorning $(a;b)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilishi ehtimoli zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integral bilan aniqlanadi:

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1.26)$$

Isbot: Ma'lumki, 1-natijaga asosan

$$p(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Agar bu yerda Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifi (1.25) ifodadan foydalansak, quyidagini hosil qilamiz

$$p(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bundan tashqari, X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasini ma'lum bo'lsa, uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini topish uchun quyidagi aniqmas integraldan foydalaniladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (1.27)$$

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $f(x)$ – funksiya nomanfiy funksiyadir, ya'ni $f(x) \geq 0$.

Isbot: Bu xossa $f(x)$ differensial funksiya kamaymaydigan $F(x)$ taqsimot funksiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor sonlar o'qida aniqlangan bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad (1.28)$$

Isbot: Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1.$$

1-eslatama. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ oraliqdan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \qquad (1.29)$$

ko'rinishini oladi.

Bu formula geometrik nuqtayi nazardan Ox o‘q, $f(x)$ funksiya, $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

2-eslatama. Zichlik funksiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mavjud.

5-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \cos x, & agar \quad a<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechish: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$ formuladan foydalanamiz. Agar $x\le 0$ bo‘lsa, $F(x)=0$. Demak, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$. Agar $0<x\le\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}\cos t dt=\sin x$. Agar $x>\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}\cos t dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt=1$. Demak, izlanayotgan taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \sin x, & agar \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

6-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega:

$$f(x)=\begin{cases}0, \; agar \;\; x\leq 0,\\ \frac{2}{3}\sin x, \; agar \;\; 0<x\leq\frac{\pi}{3},\\ 0, \; agar \;\; x>\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: $p(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$ formuladan foydalanamiz. U holda $p\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{9}$.

1.5. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Ma'lumki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni X miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Ammo ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, uni aniqlash katta qiyinchiliklar tug'diradi va biz kam ma'lumot bilan chegaralanishimizga to'g'ri keladi. Ba'zida esa tasodifiy miqdorni xarakterlovchi sonlarni qo'llash foydalidir. Bu sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir.

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristikalaridan biri matematik kutilma deb ataladi. Juda ko'p masalalarning yechimini matematik kutilmani bilish orqali hal etish mumkin. Masalan, viloyatlarni taqqoslovchi ko'rsatkichlardan biri ularda yetishtirilgan hosilning o'rtachasi, ya'ni matematik kutilmasidir.

1-ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga uning matematik kutilmasi deb aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$\begin{array}{l} X: x_1 \ \ x_2 \ldots x_n \\ p: p_1 \ \ p_2 \ \cdots \ p_n \end{array}$$

berilgan bo‘lsin. U holda uning $M(X)$ – matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1.30)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni cheskiz bo‘lib, u

$$\begin{array}{l} X: x_1 \ \ x_2 \ldots x_n \ldots \\ p: p_1 \ \ p_2 \ \cdots \ p_n \cdots \end{array}$$

taqsimotga ega bo‘lsa, u holda uning matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (1.31)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Taqsimot qonuni

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p: & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish: (1.31) formuladan foydalanamiz:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

2-misol. Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish: Puasson qonuni quyidagi jadval bilan aniqlanadi:

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ p: & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2!} & \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} & \ldots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{array}$$

u holda

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr $\lambda \cdot X$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bildirar ekan.

3-misol. Agar A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p bo‘lsa, bitta tajribada A hodisa ro‘y berish sonlarining matematik kutilmasini toping.

Yechish: Bitta tajribada A hodisaning ro‘y berishi sonlarini X tasodifiy miqdor desak, u faqat ikkita qiymat qabul qilishi mumkin: $x_1=1$ (A hodisa ro‘y berdi), bunda $p(X=x_1)=p; x_2=0$ (A hodisa ro‘y bermadi), bunda $p(X=x_2)=q$. U holda: $M(X)=p$.

X tasodifiy miqdor ustida n marta sinov o‘tkazilib, uning natijalari quyidagicha bo‘lsin:

$$\begin{matrix} X: & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n: & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{matrix}.$$

Yuqoridagi satr X miqdorning kuzatilgan qiymatlarini, pastki satr esa bu qiymatlarning chastotalarini bildiradi, ya’ni x_i $(i=\overline{1,k})$ qiymatni X miqdor n_i marta qabul qilgan.

$\overline{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o‘rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\overline{X}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\dots+x_kn_k}{n},$$

yoki

$$\overline{X}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\dots+x_k\frac{n_k}{n}=x_1W_1+x_2W_2+\dots+x_kW_k.$$

Bu yerda $W_1,W_2,\dots,W_k$ – mos ravishda $x_1,x_2,\dots,x_k$ qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\overline{X}=M(X)$, ya’ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o‘rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilmasi o‘zgarmasning o‘ziga teng:

$$M(C)=C.$$

Isbot. C o‘zgarmas miqdorni yagona C qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun, $M(C)=C\cdot 1=C$.

1-eslatma. X diskret tasodifiy miqdorning o'zgarmas C kattalikka ko'paytmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$X: x_1, x_2, ..., x_n \Rightarrow CX: Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi ostidan chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X).$$

Isbot: X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$\begin{array}{l} X: x_1 \ \ x_2 \ ... \ x_n \\ p: p_1 \ \ p_2 \ ... \ p_n \end{array}$$

ko'rinishda bo'lsin. U holda 1-eslatmaga asosan,

$$\begin{array}{l} X: Cx_1 \ \ Cx_2 \ ... \ Cx_n \\ p: \ \ p_1 \ \ \ p_2 \ \ ... \ \ p_n \end{array}$$

Bundan CX tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + ... + Cx_np_n = CM(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$$

4-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarning ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1X_2...X_n) = M(X_1)M(X_2)...M(X_n).$$

3-xossadan va 3-misoldan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1-teorema. n ta bog'liqmas tajribalarda A hodisa ro'y berishining matematik kutilmasi: $M(X) = np$.

Matematik kutilmalarining tengligi tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari bir xil deb xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Masalan,

$$\begin{array}{llll} X: -0{,}5 \ \ 0 \ \ 0{,}5 & \qquad & Y: -50 \ \ 0 \ \ 50 \\ p: \ \ 0{,}3 \ \ 0{,}4 \ \ 0{,}3 & \qquad & p: \ \ 0{,}3 \ \ 0{,}4 \ \ 0{,}3 \end{array}$$

tasodifiy miqdorlarda $M(X) = M(Y)$, ammo ularning mumkin bo'lgan qiymatlari turlichadir. Shu sababli tasodifiy miqdorning tarqoqligini aniqlovchi ikkinchi sonli xarakteristika – dispersiya tushunchasini kiritamiz.

Dispersiya tushunchasini kiritishdan oldin tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi tushunchasini kiritib olamiz.

2-ta'rif. Tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi farqni uning chetlanishi deb ataymiz va $X-M(X)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tasodifiy miqdor chetlanishining muhim xossasini ko'rsatuvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilmasi nolga teng:

$$M(X-M(X))=0.$$

Amaliyotda tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtachasi atrofidagi joylashish tarqoqligini baholash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, merganlik darajasini baholashda. Shu sababli, dispersiya tushunchasi kiritiladi, chunki tasodifiy miqdor chetlanishi qiymatlar tarqoqligini baholay olmasligi 2-teoremadan ko'rinib turibdi.

3-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $D(x)$ – dispersiyasi deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X)=M(X-M(X))^2 \tag{1.32}$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko'rinishni oladi:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i \tag{1.33}$$

4-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$ – o'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{1.34}$$

Dispersiyaning o‘lchamligi tasodifiy miqdor o‘lchamining kvadratiga tengdir. O‘rtacha kvadratik chetlanishniki esa tasodifiy miqdor o‘lchami bilan bir xil bo‘ladi.

Agar X biror bir qimmatbaho qog‘ozning daromadliligi bo‘lsa, $M(X)$ uning o‘rtacha daromadliligini, $D(X)$ esa riskini ifodalaydi.

4-misol. Agar A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga teng bo‘lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro‘y berish sonining matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish: Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

$$X:0 \quad 1$$

$$p:q \quad p$$

U holda,

$$M(X)=0\cdot q+1\cdot p=p,$$

$$D(X)=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=qp^2+pq^2=pq(p+q)=pq$$

$$\sigma(X)=\sqrt{pq}$$

Dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish tavsiya etiladi:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C)=0\,.$$

Isbot: C o‘zgarmas miqdorni C qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$M(C)=C \text{ va } D(C)=(C-C)^2\cdot 1=0\,.$$

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchi dispersiya belgisidan kvadrati bilan chiqariladi:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)$$

Natija. Bog‘liqmas ikkita tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)$$

Ushbu natija ikkitadan ortiq tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli ekanligini isbotlash qiyin emas.

5-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadrat chetlanishini hisoblang.

$$X: -2 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$p: \ 0{,}4 \ \ 0{,}2 \ \ 0{,}1 \ \ 0{,}3$$

Yechish:

$$M(X) = -2\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}3 = 1{,}5,$$

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = (-2-1{,}5)^2\cdot 0{,}4 + (1-1{,}5)^2\cdot 0{,}2 +$$

$$+(3-1{,}5)^2\cdot 0{,}1 + (6-1{,}5)^2\cdot 0{,}3 = 11{,}25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}36$$

Biz dispersiyani ta'rif bo'yicha hisobladik. Endi $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ formula bo'yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlab X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

$$X^2: \ 4 \quad 1 \quad 9 \quad 36$$

$$p: 0{,}4 \ \ 0{,}2 \ \ 0{,}1 \ \ 0{,}3$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 13{,}5 - 2{,}25 = 11{,}25.$$

Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ham matematik kutilma va dispersiya tushunchalari katta ahamiyatga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun bu tushunchalar quyidagicha kiritiladi.

5-ta'rif. Mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) intervalga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \tag{1.35}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar Ox o'qqa tegishli bo'lsa, u holda matematik kutilma formulasi (1.35) quyidagi ko'rinishni oladi

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{1.36}$$

Bu holatda bu xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$$

integralning qiymati mavjud deb faraz qilinadi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_a^b (x - M(x))^2 f(x)dx \qquad (1.37)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari Ox o'qqa tegishli bo'lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx \qquad (1.38)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun (1.37) va (1.38) formuladan foydalanish noqulay hisoblanadi, shu sababli dispersiyani hisoblash uchun (1.37) formulaning qulay ko'rinishini keltirib chiqaramiz.

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx - 2\int_a^b xM(X)f(x)dx +$$

$$+\int_a^b M^2(X)f(x)dx = M(X^2) - 2M(X)\int_a^b xf(x)dx + M^2(X)\int_a^b f(x)dx =$$

$$= M(X^2) - M^2(X)$$

formulaga ham bu ko'rinishdagi formulani keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, ko'p hollarda dispersiyani hisoblash uchun

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \qquad (1.39)$$

formuladan foydalaniladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun ham diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalarining xossalari o'rinli bo'ladi.

6-misol. Ushbu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ x, & agar \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & agar \quad x > 1 \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish: Ma'lumki

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<0,\\ 1, & agar \quad 0\leq x<1,\\ 0, & agar \quad x\geq 1\end{cases}$$

(1.35) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

(1.39) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Endi tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanish darajasini aniqlashga yordam beruvchi ba'zi bir tushunchalarni kiritamiz.

6-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelatsiya momenti (yoki kovariatsiyasi) deb, quyidagi songa aytiladi:

$$K_{xy}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))].$$

X va Y tasodifiy miqdorlar diskret bo'lsa, u holda bu formula quyidagi ko'rinishini oladi:

$$K_{xy}=\sum_{i,j}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij},$$

bunda $p_{ij}=P(X=x_i;Y=y_j)$.

Korrelatsiya momenti ifodasini matematik kutilma xossalari asosida quyidagicha almashtirilish mumkin:

$$M[(X-M(X))(Y-M(Y))]=M[XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y)]=$$
$$=M(XY)-M(X)M(Y)-M(Y)M(X)+M(X)M(Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$$

3-teorema. Agar ikkita tasodifiy miqdor o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda ularning korrelatsiya momenti nolga teng bo'ladi.

7-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelatsiya koeffitsiyenti deb,

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattalikka aytiladi.

Korrelatsiya momenti uchun quyidagi

$$|K_{xy}| \leq \sqrt{D_x D_y}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin, chunki $|r_{xy}| \leq 1$.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda ularning korrelatsiya koeffitsiyenti nolga tengligini ko'rsatish qiyin emas.

Quyidagi teorema tasodifiy miqdorlar orasida bog'lanishni tavsiflashda korrelatsiya koeffitsiyentining ahamiyatini yana ham batafsil oydinlashtirib beradi.

4-teorema. Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli funksiyasi, ya'ni $Y = aX + b$ bo'lsin, u holda agar $a > 0$ bo'lsa, $r_{xy} = 1$, agar $a < 0$ bo'lsa, $r_{xy} = -1$ bo'ladi.

Isbot:

$$K_{xy} = M\left[(X - M(X))(Y - M(Y))\right] = M\left[(X - M(X))(aX + b - M(Y))\right] =$$

$$M\left[(X - M(X))(aX + b - aM(X) - b)\right] = aM\left[(X - M(X))\right]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2 \sigma_x^2, \ \sigma_y = |a| \sigma_x,$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

1.6. Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari. Katta sonlar qonuni. Markaziy limit teoremasi

Tasodifiy miqdorlarning amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari bilan tanishib chiqamiz.

1. Diskret tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlari.

a) Binomial taqsimot qonuni. A hodisa ustida n ta erkli tajriba o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil o'zgarmas

p ehtimollik bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{lllllll} X: 0 & 1 & 2 & \ldots. & n-1 & n \\ p: p_n(0) & p_n(1) & p_n(2) & \ldots. & p_n(n-1) & p_n(n) \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lib, bunda $p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $(k=0,1,2,...,n)$.

Bu jadvaldagi $p_n(k)\,(k=\overline{0,n})$ ehtimollik binomial formuladan foydalanib hisoblanganligi sababli yuqoridagi jadval bilan xarakterlanadigan taqsimot qonuni binomial taqsimot qonuni deb ataladi. Bu yerda shuni ta’kidlash kerakki $\sigma^2(X)=npq$, $M(X)=np$.

1-misol. Do‘konga kirgan har bir xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lsa, do‘kondagi 4 ta xaridorning xarid qilganlarni X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0,1,2,3,4. $p_n(k)$ ehtimollarni Bernulli formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$p_4(0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256},\quad p_4(1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256},$$

$$p_4(2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256},\quad p_4(3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{12}{256},$$

$$p_4(4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}.$$

Olingan ma’lumotlarni jadvalga joylashtirib

$$\begin{array}{llllll} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p: & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \end{array}$$

taqsimot qonunini hosil qilamiz.

b) Puasson taqsimot qonuni. n ta erkli tajriba o‘tkazilyotgan bo‘lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{lllll} X: 0 & 1 & 2 \ldots & k \ldots \\ p: p_0 & p_1 & p_3 \cdots & p_k \cdots \end{array}$$

ko'rinishda bo'lib, X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,...)$ qiymatlarining ehtimollari

$$p_n(k)=p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ (k=0,1,2,...,),\lambda=np=const$$

formula bilan hisoblansa, X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan deyiladi. Bu yerda $M(X)=\lambda,\ \sigma^2(X)=\lambda q$.

1-eslatma. Puasson taqsimot qonunida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$.

2-misol. Qo'shma korxona iste'molchiga 3000 ta sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo'lsa, yo'lda shikastlangan mahsulotlar sonini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: Shartga asosan, $\lambda=3, X:0,1,2,...,3000$. U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini:

$$\begin{array}{lccc} X:\ 0 & 1 & ... & 3000 \\ p: p_{3000}(0) & p_{3000}(1) & ... & p_{3000}(3000) \end{array}$$

d) Geometrik taqsimot qonuni. Erkli tajribalar o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. A hodisa yuz berishi bilan tajriba to'xtatiladi. X tasodifiy miqdor A hodisaning birinchi ro'y berishigacha bo'lgan tajribalar soni bo'lsin. Agar $(k-1)$-tajribagacha A hodisa ro'y bermasdan k-tajribada ro'y bersa, bu murakkab hodisaning ehtimoli

$$p(X=k)=q^{k-1}p \qquad (1.40)$$

formula bilan aniqlanadi. (1.40) formulada $k=1,2,...$ deb qarab

$$\begin{array}{l} X:\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ ...\ \ k\ ... \\ p:\ p\ \ \ pq\ \ \ q^2p ...\ q^{k-1}p... \end{array}$$

jadvalni hosil qilamiz. Bu taqsimot qonuni geometrik taqsimot qonuni deb ataladi.

2-eslatma. Geometrik taqsimot qonunida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$.

3-misol. X kubikni tashlashda birinchi marta “6” ochko tushguncha o‘tkaziladigan tajribalar soni bo‘lsin. Ravshanki, bu holda X diskret tasodifiy miqdor bo‘lib, $p=\frac{1}{6}$ parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo‘ysinadi. Ya’ni

$$\begin{array}{llllll} X: & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p: & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} & \dots & \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} & \dots \end{array}$$

e) Gipergeometrik taqsimot qonuni. Ma’lumki, N ta detalning ichida M ta standart detal bo‘lganda tasodifiy ravishda olingan n ta detalning orasida k ta standart detal bo‘lishining ehtimoli $p_n(k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ formula yordamida topiladi.

Bu yerda $M(X)=\frac{Mn}{N}$, $\sigma^2(X)=\frac{n(N-n)M(N-M)}{N^2(N-1)}$

4-misol. Qutida 7 ta shar bo‘lib, ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 3 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdorning qabul qilidigan qiymatlari: 0, 1, 2, 3. Bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini hisoblaymiz:

$$p_3(0)=\frac{C_3^0\cdot C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35},\qquad p_3(1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$

$$p_3(2)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35},\qquad p_3(3)=\frac{C_3^3\cdot C_4^0}{C_7^2}=\frac{1}{35}.$$

U holda quyidagi taqsimot qonuni hosil bo‘ladi:

$$\begin{array}{lllll} X: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p: & \frac{4}{35} & \frac{18}{35} & \frac{12}{35} & \frac{1}{35} \end{array}$$

2. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlari. Endi uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun amalda ko‘p uchraydigan ba’zi taqsimot va zichlik funksiyalarni hamda bu funksiyalarning xossalarini ko‘rib chiqamiz.

a) Tekis taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & agar \quad a\le x<b,\\ 0, & agar \quad x\ge b\end{cases} \tag{1.41}$$

ko'rinishda bo'lsa, bu tasodifiy miqdor $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimot qonuniga bo'ysinadi deyiladi.

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanib, bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz:

1) Agar $x<a$ bo'lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$.

2) Agar $a\le x<b$ bo'lsa, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dt+\int\limits_{a}^{x}\frac{dt}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}$.

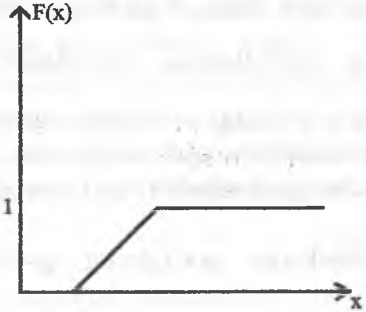
3) Agar $x\ge b$ bo'lsa, u holda

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int\limits_{a}^{b} f(t)dt+\int\limits_{b}^{x} f(t)dt=0+\frac{b-a}{b-a}+0=1.$$

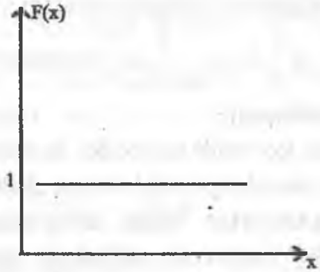
Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar \quad a\le x<b,\\ 1, & agar \quad x\ge b\end{cases} \tag{1.42}$$

Odatda, (1.41) zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdorni $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun $M(X)=\frac{a+b}{2}$, dispersiyasi uchun esa $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ tenglik o'rinli bo'ladi. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasining grafigi sxematik holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



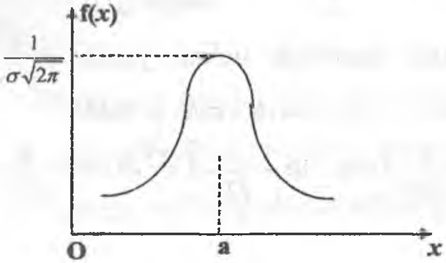
$[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasining grafigi sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



b) Normal taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.43)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bu tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi va u $N(a,\sigma)$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu zichlik funksiya grafigining sxematik chizmasi quyidagi ko‘rinishga ega:



Bu egri chiziq normal egri chiziq (Gauss egri chizig‘i) deb aytiladi. Diffrensial hisoblash metodlaridan foydalanib $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}$ funksiyani tekshirsak u quyidagi xossalarga ega bo‘ladi.

1. Funksiya butun sonlar o‘qida aniqlangan.

2. x ning barcha qiymatlarida funksiya grafigi Ox o‘qidan yuqorida yotadi.

3. Ox o‘q funksiya grafigining gorizontal asimptotasi hisoblanadi.

4. $x=a$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi va $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ qiymatni qabul qiladi.

5. $x=a$ chiziqqa nisbatan funksiya grafigi simmetrik joylashgan.

6. $\left(a-\sigma,\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}\right)$ va $\left(a+\sigma,\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}\right)$ nuqtalar funksiya grafigining burilish nuqtalari hisoblanadi.

(1.43) formuladan ko‘rinib turibdiki, normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ikki: a va σ (σ-sigma) parametrlar bilan aniqlanadi. Demak, normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlash uchun shu ikkita parametrning qiymatlarini bilish kifoya ekan. Bu parametrlarning ehtimoliy ma’nosi quyidagichadir: a parametr normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga, σ uning o‘rtacha kvadratik chetlanishiga teng.

Darhaqiqat, (1.43) formula bilan aniqlanuvchi tasodifiy miqdorning aniqlanish sohasi $(-\infty;\infty)$ bo‘lganligi sababli

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}dx$$

Bu integralni hisoblash uchun yangi $z=\frac{x-a}{\sigma}$ o‘zgaruvchi kiritamiz. Bundan $x=\sigma z+a\Rightarrow dx=\sigma dz$, u holda

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=a$$

Shunday qilib, $M(X)=a$, ya'ni normal taqsimotning matematik kutilmasi a parametrga teng. Xuddi shunga o'xshash, $D(X)=\sigma^2$ ekanligini ko'rsatish mumkin (Buni mustaqil bajarib ko'ring).

3-eslatma. Umumiy normal taqsimot qonuni deb, a va σ parametrlarning qiymatlari ixtiyoriy bo'lgan normal taqsimot qonuniga aytiladi.

Standart normal taqsimot qonuni deb, $a=0$ va $\sigma=1$ parametrli normal taqsimot qonuniga aytiladi. Har qanday umumiy normal taqsimot qonunini standart taqsimot qonuniga keltirish mumkin. Masalan, X tasodifiy miqdor a va σ parametrli normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $z=\frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bilan uni standart taqsimot qonuniga bo'ysundirish mumkin bo'ladi, chunki $M(Z)=0, \sigma(Z)=1$. Standart taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{1.44}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu funksiyaning qiymatlar jadvali ehtimollar nazariyasiga oid ko'plab adabiyotlarda keltirilgan.

4-eslatma. Umumiy normal taqsimot funksiyasi deb,

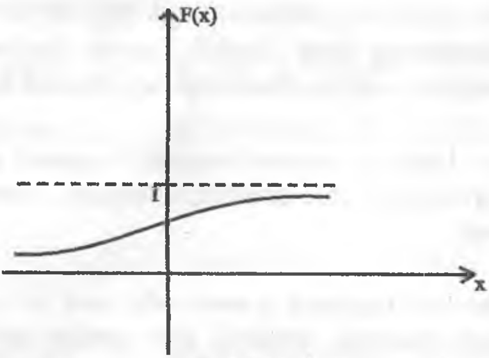
$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2a^2}}dy \tag{1.45}$$

funksiyaga, normalangan taqsimot funksiyasi deb esa,

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}dy \tag{1.46}$$

funksiyaga aytiladi.

$F(x)$ va $F_0(x)$ funksiyalar orasida quyidagi munosabat mavjud $F(x)=F_0\left(\frac{(x-a)}{\sigma}\right)$. $F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan bo'lib, uning grafigi quyidagicha shaklga ega:



$F_0(x)$ funksiya va $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ Laplas funksiyasi orasida quyidagicha munosabat (mustaqil keltirib chiqariladi) mavjud

$$F_0(x)=0,5+\Phi(x).$$

d) Ko‘rsatkichli taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0\end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bu tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi (bu yerda $\lambda>0$ o‘zgarmas musbat son).

Ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysunuvchi tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0+\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}.$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0.\end{cases}$$

Ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishlari (mustaqil hisoblanadi) mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

3. Katta sonlar qonuni. Ma’lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlarning qaysi birini qabul qilishini oldindan aytib bo‘lmaydi, chunki bu juda ko‘p tasodifiy faktorlarga bog'liq, bu faktorlarning esa hammasini hisobga olib bo'lmaydi. Ammo bir tomondan shuni ham ta'kidlash kerakki, keng qamrovli shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigi deyarli tasodifiylik xarakterini yo'qotadi.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi "Katta sonlar qonuni" deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiy, Bernulli teoremasi esa sodda holi hisoblanadi.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

1-ta'rif. Agar $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1), M(X_2), ..., M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $n \to \infty$ da

$$p\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1 \qquad (1.47)$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$p(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ yoki } p(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1.48)$$

Amaliyotda Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo'lib, u ba'zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

1-teorema (Chebishev teoremasi). Agar $X_1, X_2, ..., X_n$ birgalikda erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya'ni $D(X_i)\leq C$, $i=1,2,...$) bo'lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo'lganda ham

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1 \quad (1.49)$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi quyidagicha da'vo qiladi: agar dispersiyalari tekis chegaralangan ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining ularning matematik kutilmalari arifmetik o'rtacha qiymatidan chetlanishining absolyut qiymati istalgan musbat kichik sondan ham kichik bo'lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Isbot: Chebishev tengsizligini

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo'llaymiz:

$$p\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} \quad (1.50)$$

Matematik kutilma va dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i),$$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\leq\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Bu ifodalarni (1.50) tengsizlikka qo'yib:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}{n^2\varepsilon^2}\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

hamda ixtiyoriy hodisaning ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olib,

$$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}\leq p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\leq 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu munosabatdan $n\to\infty$ da teorema tasdig'i kelib chiqadi:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\leq 1.$$

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari har xil deb faraz qilgan edik. Amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko‘pincha bir xil $a=M(X_i)$ matematik kutilmaga va $D(X_i)=\sigma^2$ dispersiyaga ega bo‘ladi. U holda:

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=\frac{1}{n}na=a.$$

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Agar $X_1,X_2,...,X_n$ tasodifiy miqdorlar birgalikda erkli bo‘lib, bir xil a matematik kutilmaga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (1.51)$$

Faraz qilamiz, n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga teng bo‘lsin. U holda hodisa ro‘y berishining nisbiy chastotasi qanday bo‘lishini oldindan ko‘ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakob Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

3-teorema (Bernulli teoremasi). Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas va sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lsa, u holda hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati ixtiyoriy kichik musbat sondan ham kichik bo‘lish ehtimoli birga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty}p\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (1.52)$$

Isbot: A hodisa ro‘y berishlarining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mu_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Bunda X_i – A hodisaning i-sinashdagi ro'y berishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor. $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya'ni

$$X_1: \begin{matrix} 0 & 1 \\ q & p \end{matrix} \qquad X_2: \begin{matrix} 0 & 1 \\ q & p \end{matrix} \qquad X_n: \begin{matrix} 0 & 1 \\ q & p \end{matrix}$$
$$p: \qquad\qquad p: \qquad\qquad p:$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = p, \quad D(X_i) = pq \leq \frac{1}{4}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. U holda

$$M(\mu_n) = M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n) = np$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ ekanligini hisobga olsak:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi.

Bernulli teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik xossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

5-eslatma. Bernulli teoremasidan $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = p$ xulosani chiqarish mumkin emas.

Teorema yetarlicha ko'p sondagi tajribalarda nisbiy chastota har bir tarjribada hodisa ro'y berishining o'zgarmas ehtimoliga faqat ehtimol bo'yicha yaqinlashishi haqidadir. $\frac{k}{n}$ ning p ga ehtimol bo'yicha yaqinlashishi analizdagi oddiy yaqinlashishdan farq qiladi. Bu farqni to'g'ri tushunish uchun ehtimol bo'yicha yaqinlashish ta'rifini beramiz.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $|x_n - x_0| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilish ehtimolligi $n \to \infty$ da birga intilsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ketma-ketlik x_0 ga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati quyidagicha: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o‘z matematik kutilmalaridan katta farq qiladigan qiymatlarni qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o‘zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo‘lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o‘rtacha qiymatlarining tarqoqligi kam bo‘ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlaridan qaysi birini qabul qilishini aniq ayta olmasak ham ularning arifmetik o‘rtachasi qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko‘ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko‘ra, yetarlicha ko‘p sondagi erkli (dispersiyasi tekis chegaralangan) tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymatlari tasodifiylik xarakterini yo‘qotadi. Bu esa quyidagicha izohlanadi: har bir miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin, ammo arifmetik o‘rtachada ular o‘zaro yo‘qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda, biror fizik kattalikni o‘lchash bir necha marta amalga oshiriladi va ularning arifmetik o‘rtacha qiymati izlanayotgan o‘lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to‘g‘ri deb hisoblash mumkin? – degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o‘lchash natijalarini $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qarab, bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo‘llamoqchi bo‘lsak, quyidagilar bajarilishi kerak: birgalikda erkli; bir xil matematik kutilmaga ega; dispersiyalari tekis chegaralangan. Agar har bir o‘lchashning natijasi qolganlariga bog‘liq bo‘lmasa, birinchi shart bajariladi.

Agar o‘lchashlar sistematik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari bir xil bo‘lib, u haqiqiy o‘lchamga teng bo‘ladi. Agar o‘lchash asbobi aniqlikni ta’minlay olsa, uchinichi talab ham bajariladi. Bunda ayrim o‘lchashlarning natijalari har xil bo‘lsada, ularning tarqoqligi chegaralangan bo‘ladi.

Agar yuqorida ko‘rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo‘lsa, u holda o‘lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo‘llashga haqlimiz. Bunda yetarlicha ko‘p sonda o‘lchashlar o‘tkazilsa, u holda ularning arifmetik o‘rtacha qiymati o‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi. Statistikada qo‘llanadigan tanlanma usul Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo‘lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan obyektlar to‘plami to‘g‘risida mulohaza qilinadi.

1-misol. $X_1, X_2, ..., X_n$ erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

$$\begin{array}{lcc} X_n: & -a & a \\ p: & \dfrac{n+1}{2n+1} & \dfrac{n}{2n+1} \end{array}$$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o‘rinlimi?

Yechish: Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M(X_n) = -a\frac{n+1}{2n+1} + a\frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1}, \quad D(X) < a^2.$$

Demak, dispersiyalari a^2 bilan tekis chegaralangan va bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o‘rinli.

2-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

$$\begin{array}{llll} X: & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ p: & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{array}$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $p(|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4})$ ehtimolni baholang.

Yechish:

$$M(X) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}44,$$

$$D(X) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0364$$

Demak, $p\left(|X - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}\right) \geq 1 - \dfrac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909.$

4. Markaziy limit teoremasi. Ma'lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar amaliyotda keng tarqalgan. Buni nima bilan asoslash mumkin. Bunga rus matematigi A.M.Lyapunovning quyidagi teoremasi javob beradi.

4-teorema (Markaziy limit teoremasi). Agar X tasodifiy miqdor juda ko'p sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlarning yig'indisidan iborat bo'lib, har bir hadning yig'indiga ta'siri e'tiborga olinmaydigan darajada juda kam bo'lsa, u holda X ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo'ladi.

Masalan, tajriba qandaydir fizik kattalikni o'lchashdan iborat bo'lsin. Har qanday o'lchash bu kattalikning taxminiy qiymatini beradi, o'lchash natijasiga ta'sir etuvchi tasodifiy faktorlar esa juda ko'p. Har bir faktor o'lchash natijasiga e'tiborga olinmaydigan darajada bo'lsa ham ta'sir ko'rsatadi va xatolikni hosil qiladi. Ammo, bu faktorlarning soni juda ko'p bo'lganligi sababli xatoliklarning umumiy yig'indisi sezilarli darajada xatolikni hosil qiladi. Bu xatoliklar yig'indisini juda katta sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisi deb qarab, bu yig'indining taqsimoti normal taqsimotga yaqin ekanligi haqida xulosa qilishimiz mumkin.

Faraz qilamiz, $X_1, X_2, ..., X_n$ o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, ularning matematik kutilmalari $M(X_k) = a_k$ va dispersiyalari $D(X_k) = b_k^2$ chekli bo'lsin.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \; B_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Normalangan yig'indining taqsimot funksiyasini quyidagicha belgilaymiz

$$F_n(x) = p\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right)$$

Agar normalangan yig'indining taqsimot funksiyasi x ning har qanday qiymatida va $n \to \infty$ da normal taqsimotga intilsa, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} p\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (1.53)$$

bo'lsa, $X_1, X_2, ..., X_n ...$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teoremasini qo'llash mumkin.

Nazorat savollari

1. Hodisalarning turlarini ayting va ularga doir misollar keltiring.

2. Elementar hodisa va elementar hodisalar fazosi ta'rifini bering.

3. Ehtimolning klassik ta'rifini keltiring.

4. Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi nimadan iborat?

5. Statistik ehtimollikni tushuntiring. Uning ehtimolning klassik ta'rifidan farqi nimada?

6. Geometrik ehtimollik nima?

7. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi amallarini ta'riflang.

8. Ehtimollarni qo'shish qoidalarini ayting.

9. Erkli hodisalar ta'rifini bering.

10. Ehtimollarni ko'paytirish qoidalarini keltiring.

11. Shartli ehtimol ta'rifini keltiring.

12. Hodisalar to'la guruhiga ta'rif bering va misollar keltiring.

13. To'la ehtimol formulasida qanday shartlar talab qilinadi?

14. Bayes formulasi va to'la ehtimol formulalari orasidagi umumiylikni ayting.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

2. 100 ta lotoreya biletlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

3. Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan:

a) 4 tasi bir xilda;

b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

4. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining

tayyorlagan detallarining sifatsiz bo‘lish ehtimolliklari mos ravishda 0,05; 0.04 va 0,02 ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

5. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o‘ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish.

6. Telefon stansiyasi 2000 ta abonentga xizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soatni ichida qo‘ng‘iroq qilishi ehtimolligi 0,003 bo‘lsa, bir soatning ichida 5 ta abonent qo‘ngiroq qilishi ehtimolligini toping.

7. Sex ishlab chiqargan mahsulotining o‘rtacha 96% i sifatli. Bazada mahsulotni qabul qilib oluvchi sexning 200 ta mahsulotini tavakkaliga tekshiradi. Agar tekshirilgan mahsulotlardan sifatsizlari soni 10 tadan ko‘p bo‘lsa, butun mahsulotlar partiyasi sifatsiz deb, sexga qaytariladi. Mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolligini toping.

8. Detalning nostandart bo‘lishi ehtimolligi 0,6 ga teng. $n=1200$ ta detal ichida nostandart detallar bo‘lishi nisbiy chastotasining $p=0,6$ ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon=0,05$ dan katta bo‘lmasligi ehtimolligini toping.

9. Musobaqaning 10 ta ishtirokchisiga 3 ta yutuqni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.

10. Ma’lum uchta kitob yonma-yon turadigan qilib, 7 ta kitobni tokchaga necha xil usul bilan taxlash mumkin.

11. Birinchi talabada 7 xil, ikkinchisida 16 xildagi kitoblar bor bo‘lsa, kitobga kitobni necha xil usul bilan almashtirishlari mumkin. 2 ta kitobga 2 ta kitobnichi?

12. 3,3,5,5,8 raqamlaridan nechta besh xonali son hosil qilish mumkin.

13. 9 qavatli bino liftiga 4 kishi kirdi. Ularning har biri bir-biriga bog‘liqsiz ravishda ixtiyoriy qavatda chiqishlari mumkin. Ular:

a) turli qavatlarda; b) bitta qavatda;
c) 5-qavatda chiqishlari ehtimolliklarini toping.

14. Imtihon biletlariga kiruvchi 60 savoldan talaba 50 tasini biladi. Tavakkaliga tanlangan 3 ta savoldan:

a) hammasini; b) ikkitasini bilishi ehtimolligini toping.

15. Idishda 5 ta ko‘k, 4 ta qizil va 3 ta yashil shar bor. Tavakkaliga olingan 3 ta sharning:

a) bir xil rangda; b) har xil rangda;

c) 2 tasi ko‘k va 1 tasi yashil rangda bo‘lishi ehtimolligini hisoblang.

16. [0,5] kesmadan tavakkaliga bitta nuqta tanlanadi. Shu nuqtadan kesmaning o‘ng oxirigacha bo‘lgan masofa 1,6 birlikdan oshmasligi ehtimolligini toping.

17. Idishda 4 ta oq, 3 ta ko‘k va 2 ta qora shar bor. Tavakkaliga, ketma-ket, bittadan 3 ta shar olindi. Birinchi shar oq, ikkinchisi ko‘k va uchinchisi qora rangda bo‘lishi ehtimolligini toping.

18. Talaba imtihon 40 ta biletlarining faqat 30 tasiga javob bera oladi. Talabaga imtihonga birinchi bo‘lib kirishi foydalimi yoki ikkinchi?

19. Zavod ishlab chiqargan mahsulotning 90% i sifat talablariga javob beradi. Tekshiruvchi mahsulotni 0,96 ehtimollik bilan sifatli, 0,06 ehtimollik bilan sifatsiz deb topadi. Tavakkaliga olingan mahsulotning sifatli deb topilishi ehtimolligini toping.

20. Oilada 3 ta farzand bor. Agar o‘g‘il bola tug‘ilishi ehtimolligi 0,51, qiz bola tug‘lishi ehtimolligi 0,49 ga teng bo‘lsa,

a) bolalarning hammasi o‘g‘illar,

b) 1 tasi o‘g‘il va 2 tasi qiz bo‘lishi ehtimolliklarini hisoblang.

21. Shoshqol tosh 10 marta tashlanganda:

a) 6 raqami bir marta tushishi ehtimolligini;

b) 6 raqami kamida bir marta tushish ehtimolligini;

c) 6 raqami tushishi soni ehtimolligi maksimal qiymatga erishadigan miqdorni toping.

22. “Ehtimollar nazariyasi” fanidan ma’ruza darsida 84 ta talaba ishtirok etmoqda. Shu talabalarning ikkitasini tug‘ilgan kuni shu kuni bo‘lishi ehtimolligini toping.

23. *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,6 ga teng. 100 ta bog‘liqsiz tajribada *A* hodisaning 70 marta ro‘y berishi ehtimolligini toping.

24. Shunday *m* sonini topingki, 0,95 ehtimollik bilan 800 ta yangi tug‘ilgan chaqaloqlardan kamida *m* tasi qizlar deb aytish mumkin bo‘lsin. Qiz bola tug‘ilishi ehtimolligini 0,485 deb hisoblang.

25. Detalning nostandart bo'lishi ehtimolligi 0,1 ga teng. Tavakkaliga olingan 400 ta detal ichida nostandart detallar bo'lishi nisbiy chastotasining p=0,1 ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon = 0,03$ dan katta bo'lmasligi ehtimolligini toping.

26. X va Y bog'liqsiz diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M(X)=0$, $M(Y)=-3$, $D(X)=2$, $D(Y)=9$ bo'lsa, $Z=5X-3Y+2$ tasodifiy miqdorlar uchun $M(Z)$ va $D(Z)$ ni hisoblang.

Tayanch so'z va iboralar

Tasodifiy hodisa, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, birgalikda bo'lmagan hodisalar, teng imkoniyatli hodisalar, ehtimolning klassik ta'rifi, kombinatorika elementlari, nisbiy chastota, nisbiy chastotaning turg'unligi, statistik ehtimollik, geometrik ehtimollik, erkli sinovlar ketma-ketligi, binomial formula, eng ehtimolli son, polinomial sxema, lokal teorema, integral teorema, hodisalar oqimi, puasson oqimi, oqimning intensivligi, nisbiy chastotaning ehtimoldan chetlanishi, birgalikda bo'lgan hodisalar, erkli hodisalar, bog'liq hodisalar,qarama-qarshi hodisalar, shartli ehtimollik, kamida bitta hodisaning ro'y berishi ehtimoli, hodisalar to'la guruhi, to'la ehtimollik formulasi, Bayes formulasi, tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdor, taqsimot qonuni, taqsimot ko'pburchagi, taqsimot funksiyasi, taqsimot qonuni, zichlik funksiyasi, matematik kutilma, chetlanish, o'rtacha kvadratik chetlanish, dispersiya, korrelatsiya koeffitsiyenti, taqsimot funksiya, taqsimotning zichlik funksiyasi, Binomial taqsimot qonuni, geometrik taqsimot qonuni, Puasson taqsimot qonuni, gipergeometik taqsimot qonuni, tekis taqsimot qonuni, normal taqsimot qonuni, ko'rsatkichli taqsimot qonuni, katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, markaziy limit teoremasi, tasodifiy miqdor, arifmetik o'rtacha, tekis chegaralangan dispersiya.

II BOB. MATEMATIK STATISTIKA

2.1. Statistik baholar va ularga qo‘yilgan talablar

Matematik statistikaning birinchi vazifasi – statistik ma'lumotlarni to‘plash va (agar ma’lumotlar juda ko‘p bo‘lsa) gruppalash usullarini ko‘rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi – statistik ma’lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq holda ishlab chiqish.

Matematik statistika yuqoridagi vazifalarni bajarish mobaynida shug‘ullanadigan ba’zi masalalarni keltirib o‘tamiz:

1) tasodifiy hodisa ro‘y berishi ehtimolining noma’lum qiymatini baholash;

2) noma’lum taqsimot funksiyani baholash;

3) ko‘rinishi ma’lum bo‘lgan taqsimot funksiyasining noma’lum parametrlarini baholash;

4) tasodifiy miqdorning bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarga bog‘liqligini va bog‘liqlik darajasini aniqlash;

5) statistik gipotezalarni tekshirish.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar chiqarish maqsadida statistik ma’lumotlarni to‘plash va ularni tahlil qilish metodlarini yaratishdan iboratdir.

Bir jinsli obyektlar to‘plamini bu obyektlarni xarakterlovchi biror bir sifat yoki son belgisiga nisbatan o‘rganish talab qilinsin. Masalan, agar obyekt biror xil detallar partiyasi bo‘lsa, u holda detalning sifat belgisi bo‘lib, uning standartligi, son belgisi bo‘lib esa detalning o‘lchami xizmat qilishi mumkin.

Ba’zan tekshirish yalpi o‘tkaziladi, ya’ni to‘plamdagi obyektlarning har birini o‘rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amaliyotda nisbatan kam qo‘llaniladi. Masalan, to‘plam juda ko‘p obyektlarni o‘z ichiga olgan bo‘lsa, u holda yalpi tekshirish o‘tkazish maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda to‘plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o‘rganiladi.

Tanlanma to‘plam (bundan keyin tanlanma) deb, umumiy to‘plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan obyektlar to‘plamiga aytiladi.

Bosh to‘plam deb tanlanma ajratiladigan obyektlar to‘plamiga aytiladi.

To‘plam (bosh to‘plam yoki tanlanma) hajmi deb, bu to‘plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 500 ta detalni undan tanlab olingan 50 ta detal orqali tekshiriladigan bo‘lsa, u holda bosh to‘plam hajmi $N=500$, tanlanma hajmi esa $n=50$.

Bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘yicha bosh to‘plam haqida xulosa qilishga asoslangan usulga, tanlanma usul deb ataladi.

Tanlanmani ajratib olish ikki xil yo‘l bilan amalga oshirilishi mumkin: obyekt ajratib olinib, uning ustida kuzatish o‘tkazilgandan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin.

Odatda, qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydalaniladi.

Tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha bosh to‘plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida yetarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning obyektlari bosh to‘plamni to‘g‘ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta’riflanadi: tanlanma reprezentativ (vakolatli) bo‘lishi kerak. Odatda, tanlanmaning reprezentativligini ta’minlash uchun bosh to‘plam har bir elementining tanlanmaga tushish ehtimoli teng deb olinadi.

Amaliyotda tanlanma ajratib olishda turli usullardan foydalaniladi. Bu usullarni 2 tipga ajratish mumkin:

1. Bosh to‘plamni qism to‘plamlarga ajratmasdan tanlanma olish, bunda oddiy tasodifiy:

a) qaytarilmaydigan;

b) qaytariladigan usullardan foydalaniladi.

2. Bosh to‘plamni qism to‘plamlarga ajratib so‘ngra tanlanma olish, bunda bosh to‘plam:

a) tipik; b) mexanik;

d) seriyalab qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra tanlanma ajratib olinadi.

Agar bosh to‘plamdan obyektlar bittadan tasodifiy ravishda olinib tanlanma olinsa, bunga oddiy tasodifiy tanlash deyiladi.

Tipik tanlashda bosh to‘plamni uning “tipik” xususiyatlarini e’tiborga olgan holda qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra bu qism to‘plamlardan tanlanmalar ajratib olinadi.

Mexanik tanlash bosh to‘plamni mexanik ravishda tanlanma hajmiga mos bir nechta qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra bu qism to‘plamlarning har biridan bittadan obyekt olinib, tanlanma hosil qilinadi.

Seriyalab tanlanma ajratishda tekshriladigan tanlanma elementlari bosh to‘plamdan donalab emas, balki seriyalab olinadi.

Odatda, tanlanma ajratib olishda yuqoridagi usullardan aralash foydalaniladi, ya’ni ko‘rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi. Masalan, bosh to‘plamni ba’zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

Bosh to‘plamdan hajmli tanlanma olingan bo‘lsin. Bunda tanlanmaning x_i qiymati n_i marta kuzatilgan va $\sum_i n_i = n$ bo‘lsin. Kuzatilgan $.x_i.$ qiymatlarning ortib yoki kamayib borish n tartibida yozilgan ketma-ketligi *variatsion qator*, ketma-ketlikning hadlari esa *variantalar* deyiladi. Kuzatishlar soni n_i – *chastotalar*, ularning x_i – tanlanma hajmiga nisbati esa $W_i = \frac{n_i}{n}$ *nisbiy chastotalar* deyiladi.

Tanlanmaning *statistik taqsimoti* deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan tuzilgan quyidagi jadvalga aytiladi:

$$\begin{array}{l} x_i: \; x_1 \;\; x_2 \; \ldots \; x_k \; \ldots \\ n_i: \; n_1 \;\; n_2 \; \ldots \; n_k \; \ldots \\ x_i: \; x_1 \;\; x_2 \; \ldots \; x_k \; \ldots \\ W_i: \; W_1 \;\; W_2 \; \ldots \; W_k \; \ldots \end{array} \qquad (2.1)$$

Shunday qilib, taqsimot ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslikni bildiradi.

1-misol. Hajmi 40 ga teng bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti quyidagicha:

$$\begin{array}{cccc} x_i: & 2 & 6 & 12 \\ n_i: & 6 & 20 & 14 \end{array}$$

berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo‘lamiz va natijada:

$$W_1=\frac{6}{40}=0{,}15;\ W_2=\frac{20}{40}=0{,}5;\ W_3=\frac{14}{40}=0{,}35.$$

U holda, nisbiy chastotalar taqsimoti:

$$\begin{array}{cccc} x_i: & 2 & 6 & 12 \\ W_i: & 0{,}15 & 0{,}5 & 0{,}35 \end{array}$$

Faraz qilamiz, $X-$ belgining chastotalar statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: $n_x - X$ belgining $x-$ variantasidan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar soni; $n-$ umumiy kuzatishlar soni. U holda $\frac{n_x}{n} - X<x$ hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi. Agar x o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota ham o‘zgaradi. Demak, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

1-ta’rif. Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymat uchun $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n^*(x)=\frac{n_x}{n}$ funksiyaga aytiladi.

2-misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti:

$$\begin{array}{cccc} x_i: & 2 & 6 & 10 \\ n_i: & 12 & 18 & 30 \end{array}$$

bo‘yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

Yechish: Tanlanma hajmini topamiz: $n=60$. U holda

$$F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & agar\ \ x<2, \\ 0{,}2, & agar\ \ 2\le x<6 \\ 0{,}5 & agar\ \ 6\le x<10 \\ 1 & agar\ \ x\ge 10 \end{cases}$$

Bosh to‘plamning $F(x)-$taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik taqsimot funksiya $X<x$ hodisaning

nisbiy chastotasini, nazariy taqsimot funksiya esa $X < x$ hodisaning ro'y berish ehtimolini aniqlaydi. $F_n^*(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiyaning barcha xossalari o'rinli, ya'ni:

1) $F_n^*(x) \in [0;1]$;

2) $F_n^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1 – eng kichik varianta bo'lsa, u holda $X < x_1$ qiymatlar uchun $F_n^*(x) = 0$; agar x_k – eng katta varianta bo'lsa, u holda $X \geq x_k$ qiymatlar uchun $F_n^*(x) = 1$.

Shunday qilib, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to'plam nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Haqiqatan ham, Bernulli teoremasiga asosan, $\lim_{m\to\infty} P\left(\left|F(x) - F_n^*(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$. Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to'plam nazariy taqsimot (integral) funksiyasining taxminiy ko'rinishi sifatida foydalanish mumkin.

Ko'rgazmalilik uchun statistik taqsimotning turli grafiklari chiziladi, masalan, poligon va gistogramma.

Chastotalar poligonini yasash uchun Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari (x_i, n_i) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun esa Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari (x_i, W_i) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak bo'ladi. Chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini diskret tasodifiy miqdorlarning grafik usulda berilishi deb ham tushunish mumkin.

Agar kuzatilayotgan X – belgi uzluksiz bo'lsa, u holda uni grafik usulda tasvirlash uchun gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o'z ichiga olgan intervalni uzunligi o'zgarmas h bo'lgan bir nechta qismiy intervallarga bo'linadi va har bir i–qismiy interval uchun n_i – chastota, ya'ni i–intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi topiladi. So'ngra, Dekart koordinatalar sistemasida chastotalar gistogrammasi, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figura yoki nisbiy chastotalar gistogrammasi yasaladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun esa asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastotalar zichligi) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura yasaladi.

Matematik statistika masalaridan biri tanlanma asosida bosh to‘plam taqsimot funksiyasining noma’lum parametrlar uchun statistik baholar o‘rnatish. Bu masala qanday hal qilinishini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilamiz, bosh to‘plamning son belgisini o‘rganish talab qilinayotgan va belgining taqsimot funksiyasi nazariy mulohazalar asosida aniqlangan bo'lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan noma’lum parametrlarni baholash masalasini ko‘rib chiqaylik. Masalan, bosh belgi, to‘g‘rirog‘i o‘rganilayotgan belgi bosh to‘plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma’lum bo‘lsa, u holda matematik kutilmani va o‘rtacha kvadratik chetlanishni baholash, ya’ni taqribiy hisoblash zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to‘liq aniqlaydi, agar belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo‘lsa, u holda bu taqsimotni aniqlaydigan $\lambda>0$ parametrni baholash, ya’ni taqribiy hisoblash zarur.

Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanma asosida olingan ma’lumotlar, masalan, tanlanma son belgisini n marta kuzatish natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar bo‘ladi. Demak, baholanayotgan belgining bahosi xuddi shu ma’lumotlar orqali ifodalanishi kerak.

Tanlanmadagi $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni erkli $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosini topish uchun kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiya topish kerakki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\overline{X}=\frac{X_1, X_2, ..., X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosi deb, kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.

Faraz qilaylik, bosh to‘plam X belgisining taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo‘lib, θ noma'lum parametr bo‘lsin. Bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning kuzatilgan qiymatlari $x_1, x_2, ..., x_n$ bo‘lsin.

2-ta'rif. Tanlanmadan tuzilgan ixtiyoriy $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga statistika deyiladi.

Statistikadan noma'lum parametrlar uchun statistik baholar o‘rnatihsda foydalaniladi.

3-ta'rif. Agar noma'lum parametr bitta $\tilde{\theta}$ son bilan baholansa, u holda bu baho nuqtaviy baho deyiladi.

Nuqtaviy baholashda taqsimot funksiyaning noma'lum θ parametri uchun shunday $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika qidiriladiki, bunda $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistikani θ parametr uchun taqribiy qiymat deb olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

Biz birinchi navbatda tanlanma o‘rtachasi, tanlanma “tuzatilgan” dispersiyasi, moda, mediana, variatsiya qulochi va boshqa nuqtaviy baholar bilan tanishib chiqamizi. Bunda o‘rnatilgan statistik baho baholanayotgan parametrning yaxshi bahosi bo‘lishi uchun u ma'lum bir talablarni qanoatlantirishi lozim. Quyida biz bu talablarni ko‘rib chiqamiz.

Bosh to‘plam $F(x)$ – nazariy taqsimot funksiyasining θ parametri noma'lum bo‘lib, uning statistik bahosi θ^* bo‘lsin. Bosh to‘plamdan olingan n hajmli 1-tanlanma bo‘yicha θ_1^* baho topamiz. Tajribani takrorlaymiz, ya'ni bosh to‘plamdan yana n hajmli 2-tanlanma olib θ_2^* bahoni topamiz. Tajribani ko‘p marta takrorlab, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz, umuman olganda, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sonlar har xil bo‘ladi. U holda θ^* bahoni tasodifiy miqdor, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sonlarni esa uning mumkin bo‘lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin.

θ^* tasodifiy miqdorning $M(\theta^*)$–matematik kutilmasini hisoblaymiz. $M(\theta^*)$ va θ noma'lum parametr qiymatlarini taqqoslasak ular orasida:

1) $M(\theta^*)<0$; 2) $M(\theta^*)=0$; 3) $M(\theta^*)>0$.

munosabatlardan biri albatta o'rinli bo'ladi. Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistik bahoni ishlatish sistematik xatolarga olib keladi. Shu sababli, θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lishini talab qilish tabiiy holdir.

Demak, $M(\theta^*)=0$ talabga rioya qilish sistematik xatolardan saqlaydi.

4-ta'rif. Agar bosh to'plamdan ixtiyoriy hajmli tanlanma olinganda ham θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan θ^* parametrga teng, ya'ni $M(\theta^*)=0$ bo'lsa, u holda θ^* baho siljimagan baho deb ataladi, aks holda θ^* siljigan baho deyiladi.

5-ta'rif. Agar θ^* baho va θ noma'lum parametrlar uchun $\lim_{n\to\infty} M(\theta^*)=\theta$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho asimptotik siljimagan baho deb ataladi.

Ammo shuni ham ta'kidlash kerakki, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashadi deb hisoblash xato bo'ladi. Darhaqiqat, θ^* ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq joylashgan, ya'ni $D(\theta^*)$–dispersiyasi anchagina katta bo'lishi mumkin. U holda l–tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_l^*–baho $\overline{\theta^*}$ o'rtacha qiymatdan va demak, baholanayotgan θ parametrdan ancha uzoqlashgan bo'lishi mumkin.

Bu holda θ_l^* ni θ ning tarqibiy qiymati sifatida qabul qilib, katta xatoga yo'l qo'ygan bo'lar edik. Shu sababli, statistik baholarga effektivlik talabi qo'yiladi.

6-ta'rif. Agar θ_n baho uchun har qanday $\varepsilon > 0$ da $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta_n - \theta| > \varepsilon) = 0$ shart bajarilsa, ya'ni θ_n baho θ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashsa, u holda θ_n asosli baho deyiladi.

Agar θ parametrning θ_{n_1} va θ_{n_2} siljimagan baholari uchun biror n hajmli tanlanmada $D(\theta_{n_1}) < D(\theta_{n_2})$ o'rinli bo'lsa, u holda θ_{n_1} baho θ_{n_2} bahoga nisbatan n hajmli tanlanma uchun samaraliroq (optimalroq) baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan baho, bu hajmda eng samarali baho deyiladi.

$\bar{x}_n$ – tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan, asosli va effektiv baho bo'ladi.

Juda katta hajmli (n yetarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

Agar bahoning dispersiyasi $n \to \infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho asosli bo'ladi.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_N$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, $\bar{x}_B$ – bosh to'plam o'rtachasi

$$\overline{x_B} = \frac{x_1, x_2, ..., x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{2.2}$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ – qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo'lsa, u holda

$$\overline{x_B} = \frac{x_1N_1 + x_2N_2 + ... + x_kN_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_iN_i \tag{2.3}$$

Bosh to'plamning kuzatilayotgan X belgisini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, uning matematik kutilmasi uchun $M(X) = \overline{x_B}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, $\bar{x}_T$ – tanlanma o'rtachasi

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.4}$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ –qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_T = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad (2.5)$$

$M(X)$– bosh to'plam o'rtachasining statistik bahosi sifatida tanlanma o'rtacha qabul qilinadi. $\bar{x}_T$ siljimagan baho ekanligiga, ya'ni $M(\bar{x}_T) = M(X)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\bar{x}_T$ ni $\bar{X}_T$ tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, ..., x_n$ –variantalarni erkli, bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar bir xil taqsimlanganligi uchun ular bir xil sonli xarakteristikalarga, jumladan bir xil matematik kutilmaga ega: $a = M(X_i)$. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining matematik kutilmasi ulardan bittasining matematik kutilmasiga teng, ya'ni

$$M(\overline{X_T}) = M\left(\frac{X_1, X_2, ..., X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + M(X_n)}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ miqdorlarning har biri va bosh to'plamning X belgisi (uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, bu miqdorlarning va bosh to'plamning sonli xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\overline{X_T}) = a = M(X)$. U holda $\bar{x}_T$ bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan baho ekan.

Ma'lumki, katta sonlar qonuniga (Chebishev teoremasi) asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_T} - M(\overline{x_T})| < \varepsilon) = 1$$

ya'ni n ortishi bilan $\bar{x}_T$ –tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasiga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\bar{x}_T$ baho a uchun asosli baho bo'lishi kelib chiqadi.

Agar bosh to'plamdan katta hajmli bir nechta tanlanmalar olinib har birining tanlanma o'rtachalari topiladigan bo'lsa, ular o'zaro taqriban teng bo'ladi. Bu tanlanma o'rtachaning turg'unlik xossasi deyiladi.

3-misol. Quyidagi tanlanmaning

$$x_i: \quad 4 \quad 8 \quad 11$$
$$n_i: \quad 5 \quad 10 \quad 5$$

statistik taqsimoti bo'yicha bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

Yechish: (2.5) formuladan foydalanamiz. U holda $\overline{x_T} = 7,75$.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_N$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, bosh to'plam dispersiyasi

$$D(X) = D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_B})^2 \qquad (2.6)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ –qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo'lsa,u holda

$$D(X) = D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i(x_i - \overline{x_B})^2 \qquad (2.7)$$

formula bilan aniqlanadi.

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi esa

$$\sigma(X) = \sigma_B = \sqrt{D_B} \qquad (2.8)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, tanlanma dispersiya

$$D(X) = D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 \qquad (2.9)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ –qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo'lsa, u holda

$$D(X) = D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i - \overline{x_T})^2 \qquad (2.10)$$

4-misol. Tanlanmaning $D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i,$

$$x_i: \quad 4 \quad 8 \quad 11$$
$$n_i: \quad 5 \quad 10 \quad 5$$

statistik taqsimoti bo'yicha uning dispersiyasini toping.

Yechish: (2.5) formuladan foydalansak: $\overline{x_T} = 7,75$. Dispersiyani hisoblash uchun (2.10) formuladan foydalanamiz. U holda

$$D_T=\frac{5(4-7,75)^2+10(8-7,75)+5(11-7,75)}{20}=7,0625.$$

Dispersiyani hisoblashda (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) formulalar noqulay, shu sababli, dispersiya va matematik kutilmalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo‘lgan quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$D=\overline{x^2}-(\bar{x})^2,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i,\quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^2 \tag{2.11}$$

Bosh to‘plam dispersiyasi uchun statistik baho sifatida $D_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x_T})^2$ tanlanma dispersiyasini olish mumkin emas. Chumki bu baho siljigan baho bo‘ladi. Ya’ni $M(D_T)\neq D_B$. Bu holda biz

$$M(D_T)=\frac{n-1}{n}D_B$$

tenglikni bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida olamiz va uni

$$s^2=\frac{n}{n-1}D_T \tag{2.12}$$

ko‘rinishda belgilab “tuzatilgan” dispersiya deb ataymiz.

Haqiqatan ham “tuzatilgan” dispersiya bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan baho bo‘ladi. Chunki

$$M(s^2)=M\left(\frac{n}{n-1}D_T\right)=\frac{n}{n-1}M(D_T)=D_B.$$

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishining bahosi sifatida $s=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_T}$ “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlanish olinadi.

1-eslatma. n ning katta qiymatlarida tanlanma dispersiyasi va “tuzatilgan” dispersiyalarning farqi juda kam bo‘ladi. Shu sababli, “tuzatilgan” dispersiyadan $n<30$ hajmli tanlanmalarda foydalanish tavsiya etiladi.

2-eslatma. Agar tanlanmaning variatsion qatorida x_i – variantalarning qiymatlari katta sonlardan iborat bo‘lsa, u holda x_i

variantadan $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$ – shartli variantaga o‘tish orqali u_i – variantalari kichik sonlardan iborat yangi variatsion qator hosil qilinadi, so‘ngra yangi tanlanma uchun $\overline{u_T}$ va $D(u_T)$ xarakteristikalar topiladi. Oldingi tanlanmaning $\overline{x_T}$, $D(x_T)$ xarakteristikalarini topish uchun $\overline{x_T} = c_2\overline{u_T} + c_1$, $D(x_T) = c_2^2 D(u_T)$ formulalardan foydalaniladi.

Matematik statistika va uning tatbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o‘rtachasi va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshqa xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardan ba’zilarini keltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta *moda* deb ataladi va M_0 kabi belgilanadi.

Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidan teng ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga qarab, mediana quyidagicha aniqlanadi:

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k+1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb, eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo‘lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida o‘rtacha absolyut chetlanish θ ham ishlatiladi:

$$\theta = \frac{\sum_i n_i \left| x_i - \overline{x_T} \right|}{n}.$$

Variatsiya koeffitsiyenti V deb tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishining tanlanma o‘rtachasiga nisbatini foizlardagi ifodasiga aytiladi: $V = \frac{\sigma_T}{\overline{x_T}} 100\%$.

Variatsiya koeffitsiyenti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffitsiyenti katta bo‘lgani ko‘proq tarqoqlikka ega bo‘ladi.

5-misol. Quyida berilgan

$$x_i: 1 \quad 3 \quad 6 \quad 16$$

$$n_i: 4 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

tanlanma uchun M_0, M_e, R, V, θ xarakteristikalarni hisoblang.

Yechish: Yuqoridagi formulalardan fodalanamiz:

$$M_0 = 3, \ M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = 3, \ R = 15, \ \overline{x_T} = 4 \Rightarrow \theta = 2,2, \ \sigma_T = 3,24 \Rightarrow V = 80,1\%$$

Tajribalar soni juda katta bo‘lsa, nuqtaviy bahoning qiymati odatda noma'lum parametrga yaqin bo‘ladi. Ammo kuzatishlar soni kam bo‘lsa, $\tilde{\theta}$ nuqtaviy baho va θ parametr orasidagi farq sezilarli darajada bo'lishi mumkin. Bunday hollarda parametrni baholash uchun intervalli baholardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

7-ta’rif. Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli baho deb ataladi.

Intervalli bahoda bahoning aniqliligi va ishonchliligi tushunchalarini kiritishimiz kerak bo‘ladi. Buni quyida ko‘rib chiqamiz.

Tanlanma ma’lumotlari asosida topilgan $\tilde{\theta}$ – statistik xarakteristika θ parametrning bahosi bo‘lsin. θ ni o‘zgarmas son deb faraz qilamiz. Ma’lumki, $\tilde{\theta}$ ning aniqligi yuqori bo‘lganda $|\theta - \tilde{\theta}|$ farqning qiymati kamayib boradi, ya’ni $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$, $\delta > 0$ tengsizlikda δ qancha kichik bo‘lsa, baho shuncha aniq bo‘ladi. Shu sababli, δ bahoning aniqligi deb ataladi.

Statistik usullar $\tilde{\theta}$ baho $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantirishini qat’iy tasdiqlay olmaydi, balki bu tengsizlik bajarilishining qandaydir γ ehtimolligi haqida xulosa chiqara oladi.

$|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ θ parametrning $\tilde{\theta}$ baho bo‘yicha ishonchliligi (ishonchlilik ehtimoli) deyiladi. Bu yerda, $y = P(|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$. Ko‘p hollarda, ishonchlilik ehtimoli oldindan beriladi. Masalan, 0,95; 0,99; 0,999 va hokazo.

$y = P(|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$ ehtimollikni quyidagicha yozib olamiz:

$$P(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \delta + \tilde{\theta}) = \gamma \qquad (2.13)$$

Bu munosabatni quyidagicha tushunish kerak: $(\tilde{\theta} - \delta, \delta + \tilde{\theta})$ interval θ noma'lum parametrni o'z ichiga olish (qoplash) ehtimoli γ ga teng.

$(\tilde{\theta} - \delta, \delta + \tilde{\theta})$ interval noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervali deb ataladi.

3-eslatma. $(\tilde{\theta} - \delta, \delta + \tilde{\theta})$ interval tasodifiy chetki nuqtalarga ega, chunki turli tanlanmalar uchun $\tilde{\theta}$ ning qiymatlari turlicha bo'ladi. Shu sababli, tanlanma o'zgarsa $(\tilde{\theta} - \delta, \delta + \tilde{\theta})$ intervalning chetki nuqtalari ham o'zgaradi.

Ishonchlilik intervallarini topish qanday amalga oshirilishi bilan normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar misolida tanishib chiqamiz.

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Ma'lumki, bu taqsimotni ikkita parametr: a va σ aniqlaydi. Faraz qilamiz, ulardan biri, σ–o'rtacha kvadratik chetlanish ma'lum, ikkinchisi a–matematik kutilma esa noma'lum bo'lsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi a uchun ishonchlilik intervalini γ ishonch bilan δ aniqlikda topish masalasini qaraymiz.

$\overline{x_T}$ – tanlanma o'rtachasini $\overline{X_T}$ tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz. X belgi normal taqsimlanganligi sababli tanlanma o'rtacha ham normal taqsimlangan bo'ladi. Bu yerda $M(\overline{X_T}) = a,\ D(\overline{X_T}) = \frac{\sigma^2}{n},\ P(|\overline{X_T} - a| < \delta) = \gamma$ munosabat o'rinli bo'lsin. U holda

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanib, X ni $\overline{X_T}$ bilan σ ni esa $\sigma(\overline{X_T}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bilan almashtirsak quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P\left(|\overline{X_T} - a| < \delta\right) = 2\Phi(t) \qquad (2.14)$$

bu yerda $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bundan $\delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ bo‘ladi. U holda (2.14) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P(|\overline{X_T}-a)|<\delta)=2\Phi(t)\Rightarrow P\left(\overline{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\overline{X}_T\right)=2\Phi(t) \qquad (2.15)$$

Shunday qilib, ishonchlilik intervali $\left(\overline{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\overline{X}_T\right)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bundan $\left(\overline{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\overline{X}_T\right)$ interval a parametrni $\gamma=2\Phi(t)$ ehtimol bilan $\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.

(2.15) dan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: tanlanma hajmining ortishi baholash aniqligi oshishiga olib keladi; agar γ ishonchlilik orttirilsa, t parametr ortadi va bu esa baholash aniqligi kamayishiga olib keladi.

6-misol. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, uning o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=3$. Tanlanma hajmi $n=3$ va bahoning ishonchliligi $\gamma=0{,}95$ bo‘lsin. Noma’lum parametr $a-$ matematik kutilmaning $\overline{x_T}$ –tanlanma o‘rtachasi bo‘yicha ishonchlilik intervallarini toping.

Yechish: Jadvaldan foydalanib t ni topamiz, ya’ni $2\Phi(t)=0{,}95\Rightarrow$ $\Phi(t)=0{,}475\Rightarrow t=1{,}96$. Bahoning aniqligi $\delta=\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0{,}98$.

U holda ishonchlilik intervali: $(\overline{x_T}-0{,}98,\overline{x_T}+0{,}98)$.

Berilgan $\gamma=0{,}95$ ishonchlilikni quyidagicha tushunish kerak: agar yetarlicha ko‘p sondagi tanlanmalar olingan bo‘lsa, u holda ularning 95% i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallar parametrni haqiqatan ham o‘z ichiga oladi; 5% hollardagina parametr interval chegarasidan tashqarida yotishi mumkin.

4-eslatma. Agar matematik kutilmani oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni beradigan tanlanmaning minimal hajmi

$$n=\frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2} \qquad (2.16)$$

formuladan topiladi.

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan va uning $a-$ matematik kutilmasini $\overline{x_T}$ –tanlanma o‘rtachasi orqali baholashda $\sigma-$ o‘rtacha kvadratik chetlanish noma’lum bo‘lsin. U holda

$$\overline{X}_T - t(\lambda,n)\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X}_T + t(\lambda,n)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (2.17)$$

interval a uchun ishonch intervali bo‘lib xizmat qiladi. Bu yerda $s-$ tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish; $t(\gamma,n)$ esa berilgan n va γ bo‘yicha maxsus jadvaldan topiladi. Bunday jadvallar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda beriladi.

7-misol. Bosh to‘plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan va u quyidagi statistik taqsimotga ega bo‘lsin:

$x_i : -212345$

$n_i : 212221$

$$\overline{X}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i, s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{X}_T)^2}$$

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan bo‘lsa, uning $a-$ matematik kutilmasi uchun $\overline{x_T}$ bo‘yicha $\gamma=0{,}95$ ishonchlilik bilan ishonchli intervalni toping.

Yechish: Tanlanma o‘rtachani va “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda quyidagi formulalardan topamiz:

$$\overline{X}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i, s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{X}_T)^2}.$$

U holda: $\overline{x_T}=2$, $s=2{,}4$ jadvaldan $\gamma=0{,}95$ va $n=10$ larga mos $t(0{,}95;10)=2{,}26$ ni topamiz. Topilganlarni (2.17) ifodaga qo‘yib: $(0{,}3;3{,}7)$ ishonchlilik intervalini hosil qilamiz. Bu interval noma’lum $a-$ matematik kutilmani $\gamma=0{,}95$ ishonch bilan qoplaydi.

Bosh to‘plamning o‘rganiladigan X son belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Uning $\sigma-$o‘rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha γ ehtimol bilan ishonchlilik intervalini topish talab qilinsin.

Ma’lumki, tanlanmaning s^2- “tuzatilgan” dispersiyasi σ^2- bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan bahodir. Shu sababli, $\sigma-$ noma’lum paremetrni s orqali baholaymiz. Buning uchun

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz. Tayyor jadvaldan foydalanish uchun $s-\delta<\sigma<s+\delta$ tengsizlikni

$$s(1-\frac{\delta}{s})<\sigma\ <s(1+\frac{\delta}{s})$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. $q=\frac{\delta}{s}$ belgilashdan so‘ng

$$s(1-q)<\sigma\ <s(1+q), q<1\ 0<\sigma\ <s(1+q), q>1 \qquad (2.18)$$

ishonch intervalini hosil qilamiz. Bu yerda $q(\gamma,n)$ maxsus jadvaldan topiladi.

8-misol. Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan va $n=50$ hajmli tanlanmaning “tuzatilgan” dispersiyasi: $s^2=2{,}25$ bo‘l-sin. σ noma’lum parametrni $\gamma=0{,}95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

Yechish: Jadvaldan $n=50$ va $\gamma=0{,}95$ qiymatlarga mos $q=0{,}21$ ni topamiz. Bu yerda $q<1$ bo‘lgani uchun (2.18) tengsizlikning birinchisidan foydalanib, $1{,}185<\sigma<1{,}815$ ishonchlilik intervalini topamiz.

2.2. Statistik va korrelatsion bog‘lanishlar. Regressiya tenglamasi

Kundalik faoliyatimizdagi ko‘pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o‘rganilayotgan Y belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog‘liqligini aniqlash va baholash talab qilinadi. Dastlab Y belgining bitta X tasodifiy miqdorga bog‘liqligini o‘rganamiz.

Ikki belgi funksional bog‘lanish bilan, yoki statistik bog‘lanish bilan bog‘langan, yoki umuman erkli bo‘lishi mumkin.

1-ta’rif. Agar X belgining har bir mumkin bo‘lgan qiymatiga Y belgining bitta mumkin bo‘lgan qiymati mos kelsa, u holda Y,X belgining funksiyasi deyiladi.

1-misol. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti:

$$X:\ 2\quad 3$$

$$p: 0{,}6\quad 0{,}4$$

berilgan. $Y = X^2$ funksiyaning taqsimoti topilsin.

Yechish: Y ning mumkin bo‘lgan qiymatlarini topamiz: $y_1 = 4, y_2 = 3$. U holda Y ning taqsimoti:

$$Y: \ 4 \quad 9$$

$$p: \ 0{,}6 \quad 0{,}4$$

2-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, $M(X) = a = 2$, $\sigma(X) = 0{,}5$ bo‘lsa, $Y = 3X + 1$ chiziqli funksiyaning zichlik funksiyasini toping.

Yechish: Y ning sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$M(Y) = 3 \cdot 2 + 1 = 7, \qquad \sigma(Y) = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5.$$

U holda Y ning zichlik funksiyasi: $g(y) = \frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-7)^2}{2 \cdot (1{,}5)^2}\right)$.

Funksional bog‘lanishlar aniq va tabiiy fanlar: matematika, fizika, kimyo kabi fanlarda ayniqsa yaqqol kuzatiladi.

Masalan, termometrdagi simob ustunining balandligi X havo harorati Y haqida aniq va bir qiymatli ma’lumot beradi; aylana radiusi R va uning uzunligi C orasida $C = 2\pi R$ geometriyadan ma’lum bo‘lgan formula bilan aniqlangan funksional bog‘lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda, umuman jamiyatning boshqa sohalarida tasodifiy belgilar orasida qat’iy funksional bog‘lanish kamdan-kam uchraydi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta’sir etuvchi faktorlarning xilma-xilligi va tasodifiyligidir. Bu holatda belgilar orasidagi moslik statistik bog‘lanish bo‘lishi mumkin.

2-ta’rif. Agar belgilardan birining o‘zgarishi ikkinchi belgi taqsimotining o‘zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki belgi orasidagi bog‘lanish statistik bog‘lanish deyiladi.

Masalan, agar $Y(Z_1;Z_2,V_1,V_2)$ va $X(Z_1,Z_2,U_1,U_2)$ (Z_i,V_i,U_i –tasodifiy faktorlar) belgilar berilgan bo‘lsin. Bu holda Y va X lar orasidagi bog‘lanish statistik bog‘lanish deyiladi, chunki ularning har biri bog‘liq bo‘lgan tasodifiy faktorlar ichida umumiylari mavjud.

Statistik bog‘lanishni matematik ifodalash murakkab, shu sababli uning xususiy hollaridan biri hisoblangan korrelatsion bog‘lanish bilan tanishib chiqamiz.

3-ta'rif. Agar bir-biriga statistik bog'lanishda bo'lgan ikki belgidan birining o'zgarishi ikkinchi belgi o'rtacha qiymatining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bunday statistik bog'lanish korrelatsion bog'lanish deb ataladi.

Bir-biri bilan korrelatsion bog'lanishda bo'lgan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1. Mehnat unumdorligi X va jami ishlab chiqarilgan mahsulot Y;
2. Yig'ib olingan hosil miqdori Y va ishlatilgan o'g'itlar miqdori X;
3. Jami mahsulot miqdori X va korxonaning ish haqi fondi Y;
4. Sarflangan kapital mablag'lar X va shu mablag'lardan olingan sof foyda Y;
5. Korxonaning texnika bilan qurollanganlik darajasi X va mehnat unumdorligi ko'rsatkichi Y.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinib turibdiki, korrelatsion bog'lanishni matematik ifodalash, ya'ni $y=f(x)$ ko'rinishda yozish uchun shartli o'rtacha tushunchasini kiritishimiz kerak.

4-ta'rif. $X=x$ qiymatga mos keluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o'rtachasini shartli o'rtacha deb ataymiz va $\overline{y_x}$ ko'rinishda belgilaymiz.

Xuddi shunday usulda $\overline{x_y}$ – shartli o'rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.

5-ta'rif. $Y=y$ qiymatga mos keluvchi X ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o'rtachasini $\overline{x_y}$ – shartli o'rtacha deb ataymiz.

3-misol. X miqdorning $x_1=5$ qiymatiga Y miqdorning $y_1=6$, $y_2=7$, $y_3=8$ qiymatlari mos keladi. $\overline{y_x}=?$

Yechish: $\overline{y_x}=\dfrac{6+7+8}{3}=7$.

X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o‘tkazilgan bo‘lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$ bo‘lsin. U holda X va Y orasidagi bog‘lanishni (munosabatni) ushbu jadval ko‘rinishida ifodalash mumkin.

X	x_1	x_2	....	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

Agar yuqoridagi jadvalda x_i va y_i lar turli qiymatlarini qabul qilsa, u holda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanmaymiz.

Agar kuzatishlar soni ko‘p, ya’ni x_i qiymat m_{x_i} marta, y_j qiymat m_{y_j} marta, (x_i,y_j) juftliklar $m_{x_iy_j}$ marta takrorlanishi mumkin bo‘lsa, u holda yuqoridagi jadval o‘rniga korrelatsion jadval yoki korrelatsion panjara deb ataluvchi jadval ishlatiladi. $m_{x_i},m_{y_j}, m_{x_iy_j}$ lar mos ravishda $x_i,y_j,(x_i,y_j)$ larning chastotalari deyiladi. $m_{x_iy_j}=m_{ij}$ belgilash kiritib quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu yerda

$$\sum_i m_{ij} = m_{y_j}, \sum_j m_{ij} = m_{x_i}, \sum_i m_{x_i} = \sum_j m_{y_j} = n.$$

Y X	y_1	y_2	...	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2l}	m_{x_2}
...	...	...	...	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	...	m_{y_l}	n

Bu holatda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanishimiz zarur.

Korrelatsion panjarada shartli o‘rtacha topilishiga doir misol ko‘rib chiqamiz.

4-misol. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtachani toping.

X Y	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=40$

Yechish: Hisoblashlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

X Y	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=40$
$\overline{y}_x$	9,5	11,7	13,125	13,8	13,5	

Belgilar orasidagi korrelatsion munosabatlar (bog'lanishlar) to'g'ri, teskari, to'g'ri chiziqli va egri chiziqli bo'lishi mumkin. Masalan, to'g'ri korrelatsion bog'lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining o'rtachasi ortishiga (kamayishiga) olib keladi, teskari bog'lanishda esa aksincha va hokazo.

Masalan, daraxtning yoshi X ortib borishi bilan daraxtdagi halqalar soni Y ortib boradi, havoning harorati X pasayishi bilan nafas olish tezligi Y kamayadi va h.k.

Y ning X ga korrelatsion bog'liqligi deb, $\overline{y}_x$ shartli o'rtachaning x ga funksional bog'lanishiga aytiladi: $\overline{y}_x = f(x)$. Bu tenglama Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasi (ba'zida Y ning X ga regressiya tenglamasi), $f(x)$ funksiya esa Y ning X ga tanlanma regressiyasi (ba'zida regressiya funksiyasi) deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga regressiya tanlanma chizig'i (ba'zida Y ning X ga regressiya chizig'i) deyiladi.

X belgining Y belgiga regressiya tanlama tenglamasi va regressiya tanlama chizig'i ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi: $\overline{x}_y = \varphi(y)$.

Korrelatsiya nazariyasi belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish jarayonida asosan quyidagi ikki masalani hal qiladi.

5-misol. Belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanish formasini aniqlash, ya’ni regressiya funksiyasining ko‘rinishini (chiziqli, chiziqsiz va h.k.) topish.

Agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanish chiziqli, aks holda esa chiziqsiz deyiladi.

6-misol. Korrelatsion bog‘lanish zichligini (kuchini) aniqlash.

Y belgining X belgiga korrelatsion bog‘lanishining zichligi $X = x$ qiymatga mos Y ning mumkin bo‘lgan qiymatlari $\overline{y_x}$ –shartli o‘rtacha atrofida tarqoqligi darajasini baholaydi.

Regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = f(x)$$

ko‘rinishda yozilib, agar $f(x)$ regressiya chiziqli bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanish chiziqli deb atalar edi. Biz mana shu chiziqli korrelatsion bog‘lanishni atroflicha o‘rganib chiqamiz.

Buning uchun (X,Y) juftlikning sonli belgilari tizimini o‘rganamiz. Bunda ikki:

1) ma’lumotlar gruppalanmagan;

2) ma’lumotlar gruppalangan hollarni alohida-alohida qarashimiz kerak bo‘ladi.

1. Tanlanma ustida o‘tkazilgan n ta erkli tajriba natijasida olingan ma’lumotlardan (x_i, y_j) $i = 1,2,3,...n$ sonlar juftligi ketma-ketligi hosil qilingan bo‘lib, bu ma’lumotlarni gruppalash shart bo‘lmasin, ya’ni X belgining turli x qiymatlari va ularga mos Y belgining y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo‘lsin. Bunday holatda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanish shart emas. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y_x} = kx + b \tag{2.19}$$

tanlanma regressiya to‘g‘ri chizig‘i tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = kx + b \tag{2.20}$$

Bu tenglamadagi burchak koeffitsiyentni ρ_{yx} bilan belgilab, uni Y ning X ga regressiya tanlanma koeffitsiyenti deb ataymiz. Shunday qilib, Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$Y = \rho_{yx}x + b \qquad (2.21)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Bu tenglamadagi noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentlarni shunday tanlashimiz kerakki, natijada kuzatish ma'lumotlari bo‘yicha topilgan (x_i, y_i) nuqtalarni XOY tekislikka joylashtirganimizda bu nuqtalar mumkin qadar (2.21) to‘g‘ri chiziqning yaqin atrofida yotsin. Bunday talabni bajarishdan oldin $Y_i - y_i$ ifoda bilan aniqlanadigan chetlanish tushunchasini kiritib olamiz, bu yerda Y_i – (2.21) tenglamadan x_i qiymatga mos keluvchi ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilgan ordinata. Noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentlarni shunday tanlaymizki, chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik, ya'ni $\min\limits_{i}\sum\limits_{i}(Y_i - y_i)^2$ bo‘lsin (noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentlarni topishning bu usuli eng kichik kvadratlar usuli deb ataladi).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial p} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(px_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(px_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Har bir chetlanish noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentlarga bog‘liq bo‘lgani uchun chetlanishlar kvadratlari yig‘indisining funksiyasi F ham bu koeffitsiyentlarga bog‘liq bo‘ladi: $F(\rho_{yx}, b) = \sum\limits_{i}(Y_i - y_i)^2$. Bu funksiyaning minimumini topish uchun noma'lum parametrlar bo‘yicha xususiy hosilalarni hisoblab nolga tenglashtiramiz (hozircha ρ_{yx} o‘rniga ρ yozib turamiz):

Bu sistemada elementar almashtirishlar bajarib, ρ, b larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} px^2{}_i + \sum\limits_{i=1}^{n} bx_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} px_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (2.22)$$

Bu sistemadan izlanayotgan parametrlarni topamiz (yozivda ixchamlik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$p_{yx}=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-(\sum x)^2},$$
$$b=\frac{n\sum x^2\sum y-\sum x\sum xy}{n\sum x^2-(\sum x)^2} \qquad (2.23)$$

7-misol. Hajmi $n=5$ bo‘lgan tanlanmalarning quyidagicha

$X:$ 1 1,5 3 4,5 5

$Y:$ 1,25 1,4 1,5 1,75 2,25

taqsimoti bo‘yicha Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Yechish: Ma’lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum_i=15$	$\sum_i=8,15$	$\sum_i=57,5$	$\sum_i=26,975$

Jadvaldagi hisoblangan qiymatlarni (2.23) formulaga qo‘ysak:

$$p_{yx}=\frac{n\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}=\frac{5\cdot 26,975-15\cdot 8,15}{5\cdot 57,5-15^2}=0,202$$

$$b=\frac{n\sum x_i^2\sum y_i-\sum x_i\sum x_iy_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}=\frac{5\cdot 57,5\cdot 8,15-15\cdot 269,75}{5\cdot 57,5-15^2}=1,024$$

U holda regressiya tanlanma tenglamasi: $\overline{y}_x=0,202x+1,024.$

2. Faraz qilamiz, kuzatish natijasida olingan ma’lumotlar ko‘p sonli (kamida 50 ta kuzatish o‘tkazilishi kerak) bo‘lib, gruppalanadigan bo‘lsin. U holda ma’lumotlar korrelatsion jadval ko‘rinishida beriladi:

Y X	y_1	y_2	...	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2l}	m_{x_2}

...	...	...	...	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	...	m_{y_l}	n

Quyidagi ayniyatlardan:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x \Rightarrow \sum x = n\bar{x}, \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y \Rightarrow \sum y = n\bar{y}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2 \Rightarrow \sum x^2 = n\overline{x^2}$$

$\sum xy = n_{xy}xy$ ((x,y) juftlik n_{xy} marta kuzatilishi hisobga olingan) foydalanib,(2.22) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} \rho n\overline{x^2} + bn\bar{x} = \sum n_{xy}xv, \\ \rho\bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Bu yerda (x,y) juftlik n_{xy} marta takrorlangani uchun $\sum xy$ ifoda $\sum n_{xy}xy$ ko'rinishda yoziladi.Bu sistemadan

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{n(\overline{x^2} - (\bar{x})^2)} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\sigma_X^2} \tag{2.25}$$

ifodani topamiz. Izlanayotgan:

$$\overline{y}_x = \rho_{yx} + b \tag{2.26}$$

regressiya tanlanma tenglamasini $\bar{y}$ uchun quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\overline{y}_x = \rho_{yx}\bar{x} + b \tag{2.27}$$

chunki $(\bar{x},\bar{y})$ nuqta ham (2.26) tenglamaning yechimi bo'ladi. (2.26) va (2.27) tenglamalardan

$$(\overline{y}_x - \bar{y}) = \rho_{yx}\left(x - \bar{x}\right) \tag{2.28}$$

regressiya tanlama tenglamasini hosil qilamiz. Bundan so'ng regressiya tanlanma tenglamasini (2.28) ko'rinishda izlaymiz.

1-eslatma. Agar ma'lumotlarda katta sonlar qatnashsa hisoblashlarni yengillashtirish uchun x_i, y_i variantalardan mos ravishda $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$, $v_i = \frac{y_i - c_3}{c_4}$ shartli variantalarga o'tib olish mumkin.

Ma'lumki, korrelatsiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlashdir.

Y belgining X belgiga korrelatsion bog'lanish zichligi Y ning $X = x$ ga mos qiymatlarining $\overline{y}_x$–shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo'yicha baholanadi. Agar tarqoqlik katta bo'lsa, u holda Y belgi X belgiga kuchsiz bog'langanligini yoki umuman bog'lanmaganligini bildiradi. Tarqoqlikning katta bo'lmasligi ular orasida ancha kuchli bog'lanish borligini ko'rsatadi.

Y va X belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog'lanish zichligini xarakterlovchi kattalik korrelatsiya tanlanma koeffitsiyenti bilan tanishib chiqamiz. Ma'lumki

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2} \tag{2.29}$$

Bu tenglikning ikkala tomonini ham $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ nisbatga ko'paytiramiz. U holda:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomonini r_T bilan belgilaymiz va uni tanlanma *korrelatsiya koeffitsiyenti* deb ataymiz:

$$r_T = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \text{ (ma'lumotlar gruppalanmasa),} \tag{2.30}$$

yoki

$$r_T = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \text{(ma'lumotlar gruppalansa)} \tag{2.31}$$

r_T –tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bosh to'plam korrelatsiya koeffitsiyentining bahosi hisoblanadi, shuning uchun Y va X kattaliklarning son belgilari orasidagi chiziqli bog'liqligining o'lchovi hisoblanadi.

Agar tanlanma yetarlicha katta hajmga ega va reprezentativ bo'lsa, u holda belgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma'lumotlari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham tarqatilishi mumkin. Masalan, normal taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan bosh to'plam korrelatsiya koeffitsiyentini baholash uchun $(n \geq 50)$

$$r_T - 3\frac{1-r_T^2}{\sqrt{n}} \le r_B \le r_T + 3\frac{1-r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1-xossa. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya’ni $|r_T| \le 1$.

2-xossa. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymati ortsa, belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog‘lanish zichligi ortadi.

3-xossa. Agar $|r_T| = 1$ bo‘lsa, u holda kuzatilayotgan belgilarning chiziqli funksional bog‘langan bo‘ladi.

4-xossa. Agar $r_T = 0$ bo‘lib, regressiya tanlanma chiziqlari to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi bog‘lanish chiziqli korrelatsion bog‘lanish bo‘lmaydi.

2-eslatma. Agar $r_T = 0$ bo‘lsa, u holda o‘rganilayotgan belgilar chiziqsiz korrelatsion bog‘lanishda (masalan, parabolik, ko‘rsatkichli va h.k.) bo‘lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining ma’nosi kelib chiqadi: tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog‘lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo‘lsa, chiziqli korrelatsion bog‘lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo‘lsa, chiziqli korrelatsion bog‘lanish shuncha kuchsiz.

3-eslatma. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining ishorasi regressiya koeffitsiyentlarining ishoralari bilan bir xil bo‘ladi, bu quyidagi formulalardan kelib chiqadi:

$$\rho_{yx} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad \rho_{xy} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{2.32}$$

4-eslatma. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti tanlanma regressiya koeffitsiyentlarining geometrik o‘rtacha qiymatiga teng: $r_T = \pm\sqrt{\rho_{xy}\rho_{yx}}$.

Haqiqatan ham (2.32) dan

$$\rho_{yx}\rho_{xy} = r_T^2 \Rightarrow r_T = \pm\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}}$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffitsiyentlari ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

8-misol. Cho'chqa bolasining og'irligi Y (kg.) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog'lanish quyidagi jadval bilan berilgan.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Shu ma'lumotlar bo'yicha tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentini toping.

Yechish: $r_T = \dfrac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ formulada zarur hisoblashlarni bajarsak, $r_T = 0{,}98$ ekanligini topamiz. Bundan esa cho'chqa bolasining og'irligi va yoshi orasidagi bog'lanish kuchli degan xulosaga kelamiz.

5-eslatma. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblashni soddalashtirish uchun shartli variantaga o'tish mumkin (bunda r_T ning qiymati o'zgarmaydi).

Kuzatilayotgan (yoki biz o'rganmoqchi bo'lgan) X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog'lanish zichligini baholash uchun r_T – korrelatsiya tanlanma koeffitsiyenti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman ixtiyoriy ko'rinishdagi korrelatsion bog'lanishning zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo'lishi tabiiydir. Umumiy holda korrelatsion bog'lanishning zichligini aniqlash uchun tanlanma korrelatsion nisbat deb ataluvchi xarakteristika ishlatiladi. Bu xarakteristika bilan tanishib chiqishdan oldin tanlanma korrelatsion nisbatni kiritish bilan bog'liq bo'lgan ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz.

6-ta'rif. Bosh to'plamning biror bir gruppasiga tegishli belgilarning arifmetik o'rtachasi gruppa o'rtachasi deb ataladi.

Gruppa o‘rtachasini ba’zi hollarda shartli o‘rtacha deb ham yuritish mumkin. Yuqorida foydalanilgan shartli o‘rtacha tushunchasida bu holat yuz bergan.

Gruppa o‘rtachasi va gruppalar hajmi ma’lum bo‘lsa, umumiy to‘plam o‘rtachasini (bosh to‘plam o‘rtachasi) topish mumkin.

9-misol. Quyidagi jadval asosida ikki gruppadan tashkil topgan to‘plam o‘rtachasi topilsin:

Gruppa	Birinchi		Ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish: Gruppa o‘rtachalarini topamiz:

$$\overline{x_1}=\frac{10\cdot 1+15\cdot 6}{25}=4,\quad \overline{x_2}=\frac{20\cdot 1+30\cdot 5}{50}=3{,}4$$

Gruppa o‘rtachalari bo‘yicha umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{x}=\frac{25\cdot 4+50\cdot 3{,}4}{25+50}=3{,}6.$$

7-ta’rif. Gruppaga tegishli belgilarning gruppa o‘rtachasiga nisbatan dispersiyasi gruppa dispersiyasi deb ataladi:

$$D_p\left(X_j\right)=\frac{\sum n_i(x_i-x_j)}{N_j} \tag{2.33}$$

bu yerda, $n_i - x_i$ qiymatning chastotasi; j – gruppa nomeri; $\overline{x_j}$ – j gruppaning gruppa o‘rtachasi; $N_j=\sum\limits_i n_i$ – j gruppa hajmi.

10-misol. Ikki gruppadan tashkil topgan to‘plamning gruppa dispersiyasi topilsin:

Gruppa	Birinchi		Ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish: 7-misoldan ma’lumki, $\overline{x_1}=4$, $\overline{x_2}=3{,}4$. Endi gruppa dispersiyalarini topamiz:

$$D_p(X_1)=\frac{10\cdot(1-4)^2+15\cdot(6-4)^2}{25}=6$$

$$D_p(X_2)=\frac{20\cdot(1-3,4)^2+30\cdot(5-3,4)^2}{50}=\frac{115,2+76,8}{50}=3,84$$

8-ta'rif. Gruppa dispersiyalarining gruppalar hajmi bo'yicha olingan arifmetik o'rtachasi gruppalar ichki dispersiyasi deb ataladi:

$$\overline{D_{zp}}=\frac{\sum N_j D_{zp}(X_j)}{n},$$

bu yerda, $N_j - j$ gruppa hajmi; $n=\sum\limits_j N_j$ –umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 8-misolda gruppalar ichki dispersiyasini quyidagicha topamiz:

$$\overline{D_p}=\frac{25\cdot 6+50\cdot 3,84}{75}=4,56$$

9-ta'rif. Gruppa o'rtachalarining umumiy to'plam o'rtachasiga (bosh to'plam o'rtachasi) nisbatan dispersiyasi gruppalararo dispersiya deb ataladi:

$$D_p(\overline{x_j})=\frac{\sum N_j(\overline{x_j}-\overline{x})^2}{n},$$

bu yerda, $\overline{x_j} - j$ gruppaning gruppa o'rtachasi; $N_j - j$ gruppa hajmi; $\overline{x_T}$ umumiy o'rtacha; $n=\sum\limits_j N_j$ umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 7-misolda gruppalararo dispersiyani topsak:

$$D_p(\overline{x_j})=\frac{25\cdot(4-3,6)^2+50\cdot(3,4-3,6)^2}{75}=\frac{4+2}{75}=0,08$$

Endi bu tushunchalardan foydalanib, tanlanma korrelatsion nisbat tushunchasini aniqlaymiz.

10-ta'rif. Y ning X ga tanlanma korrelatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} \qquad (2.34)$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda, $\sigma_{\overline{y}_x}=\sqrt{\frac{\sum n_x(\overline{y}_x-\overline{y})^2}{n}}$ – shartli yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish; $\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y(y-\overline{y})^2}{n}}$ – o‘rtacha kvadratik chetlanish; n tanlanma hajmi; n_x – X belgining x qiymati chastotasi; n_y – Y belgining y qiymati chastotasi; $\overline{y}$ – Y belgining umumiy o‘rtachasi; $\overline{y}_x$ – Y belgining $X=x$ ga mos shartli o‘rtachasi (x gruppaning gruppa o‘rtachasi).

X ning Y ga tanlanma korrelatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x} \qquad (2.35)$$

11-misol. $n=50$ hajmli quyidagi korrelatsion jadval bo‘yicha Y belgining X belgiga korrelatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Yechish: $\overline{y}$-umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{y}=\frac{\sum n_i y_i}{n}=\frac{38\cdot 15+12\cdot 25}{50}=\frac{870}{50}=17,4$$

o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y(y-\overline{y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{38(15-17,4)^2+12(25-17,4)^2}{50}}=4,27.$$

$\sigma_{\overline{y}_x}$-shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishni (yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish) topamiz:

$$\sigma_{\overline{y}_x}=\sqrt{\frac{\sum n_x(\overline{y}_x-\overline{y})}{n}}=\sqrt{\frac{10(21-17,4)^2+28(15-17,4)^2+12(20-17,4)^2}{50}}=4,27.$$

Topilganlarni (2.35) formulaga qo‘yamiz: $\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y}=\frac{2,73}{4,27}=0,64$.

Tanlanma korrelatsion nisbat uchun quyidagi xossalar o‘rinli. η_{yx} va η_{xy} kattaliklar uchun aniqlangan xossalar bir xil bo‘lganligi sababli tanlanma korrelatsion nisbat xossalarini η kattalik uchun sanab o‘tamiz.

1-xossa. Tanlanma korrelyatsion nisbat quyidagi qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiradi: $0\leq\eta\leq1$.

2-xossa. Agar $\eta=1$ bo‘lsa, belgilar funksional bog‘lanishda, ya’ni $Y=f(X)$ bo‘ladi.

3-xossa. Tanlanma korrelatsion nisbat tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta\geq|r_T|$.

4-xossa. Agar $\eta=|r_T|$ bo‘lsa, belgilar orasida chiziqli bog‘lanish bo‘ladi.

5-xossa. Agar $\eta=0$ bo‘lsa, belgilar korrelatsion bog‘lanishda bo‘lmaydi.

Tanlanma korrelatsion nisbatning afzalligi uning istalgan korrelatsion bog‘lanish, shu jumladan, chiziqli bog‘lanish zichligining ham o‘lchovi bo‘lib xizmat qilishidadir. Shu bilan birga tanlanma korrelatsion nisbat kamchilikka ham ega: u bog‘lanish shakli haqida hech qanday ma’lumot bermaydi.

Agar X va Y belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lib, $\overline{y}_x=f(x)$ regressiya grafigi egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo‘lsa, u holda bu korrelatsiya egri chiziqli deyiladi.

Egri chiziqli korrelatsiyada ham chiziqli korrelatsiya kabi korrelatsion bog‘lanish shakli va uning zichligini aniqlash bilan shug‘ullaniladi. Egri chiziqli korrelatsiyada Y ning X ga regressiya funksiyalari quyidagi ko‘rinishda bo‘lishi mumkin:

$\overline{y}_x=ax^2+bx+c$ (ikkinchi tartibli parabolik korrelatsiya);

$\overline{y}_x=ax^3+bx^2+cx+d$ (uchinchi tartibli parabolik korrelatsiya);

$\overline{y}_x = \frac{a}{x}$ (giperbolik korrelatsiya).

Regressiya funksiyasining ko‘rinishini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasida (x, y) nuqtalarning o‘rni topiladi va ularning joylashishiga qarab regressiya funksiyasining taxminiy ko‘rinishi haqida gipoteza qilinadi; o‘rganilayotgan masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda oxirgi xulosa qabul qilinadi. Belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanishni ifodalovchi regressiya funksiyalarining noma’lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari ham muhim hisoblanadi. Regressiya funksiyasining noma’lum parametrlari ham eng kichik kvadratlar usuli yordamida topiladi. Egri chiziqli korrelatsiya zichligini baholashda tanlanma korrelatsion nisbatdan foydalanamiz.

Egri chiziqli korrelatsiyaning sodda hollaridan biri ikkinchi tartibli parabolik korrelatsiya ko‘rinishdagi korrelatsiyaning noma’lum parametrlarini tanlanma ma’lumotlari yordamida topamiz. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini qaraymiz. Bunda regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c \tag{2.36}$$

ko‘rinishda bo‘lib, a, b, c noma’lum parametrlarni tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha topish kerak bo‘ladi. Noma’lum koeffitsiyentlarni $v_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik bo‘ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funksiyani kiritamiz: $F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$. Bu funksiyani ekstremumga tekshirib va tegishli almashtirishlardan so‘ng quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 \overline{y_{x_i}} \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i \overline{y_{x_i}} \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} \overline{y_{x_i}} \end{cases} \tag{2.37}$$

Kuzatish natijalari (x_i, y_i) juftliklardan foydalanib (2.37), tenglamalar sistemasidan a, b, c noma’lum parametrlar topiladi.

12-misol. Korrelatsion jadval ma'lumotlari asosida $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi Y ning X ga regressiya tanlama tenglamasini toping.

$Y \backslash X$	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	$n = 50$

Yechish: Korrelatsion jadval ma'lumotlari asosida quyidagi jadvalni tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y}_x$
1	8	6	8	8	8	8	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50
Σ	50	-	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59

Bu jadvalning Σ qatoridagi sonlarni (2.37) ga qo'yib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 74{,}98a + 67{,}48b + 60{,}89c = 413{,}93 \\ 67{,}48a + 60{,}89b + 55{,}10c = 373{,}30 \\ 60{,}89a + 55{,}10b + 50c = 337{,}59 \end{cases}$$

Bu sistemadan $a = 1{,}94,\ b = 2{,}98,\ c = 1{,}10$ yechimlarni topamiz. U holda regressiya tenglamasi

$$\overline{y}_x = 1{,}94x^2 + 2{,}98x + 1{,}10$$

ko'rinishda bo'ladi. Tekshirish uchun tenglama bo'yicha hisoblangan $\overline{y}_x$ ning qiymatlari bilan jadval bo'yicha topilgan $\overline{y}_x$ ning qiymatlarini taqqoslash mumkin.

Yuqorida keltirilgan boshqa turdaga egri chiziqli regressiya tenglamalarining koeffitsiyentlarini topishda ham eng kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin, ammo ba'zi hollarda oldin ma'lum bir almashtirishlarni amalga oshirish zarur. Masalan, $y = ax^b\ (a > 0, b > 0)$ regressiya tenglamasidagi noma'lum a, b

koeffisiyentlarni topishda avvalam bor bu tenglamani $\ln y = \ln a + b \ln x$ ko'rinishda yozib olamiz, so'ngra $u = \ln x$, $z = \ln y$ belgilashlar yordamida $z = bu + \ln a$ chiziqli funksiyani hosil qilamiz.

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko'proq belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish zaruriyati tug'iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelatsion bog'lanish *to'plamiy* (*ko'plik*) *korrelatsiya* deb ataladi.

To'plamli korrelatsiyaning eng sodda holi bo'lgan uchta belgi orasidagi chiziqli korrelatsiyani qaraymiz. Bu holda X, Y va Z belgilar orasidagi korrelatsion munosabat

$$z = ax + by + c \tag{2.38}$$

tenglama ko'rinishida ifodalanadi. Bunda quyidagi:

1) kuzatish ma'lumotlari bo'yicha regressiyaning a,b,c noma'lum koeffitsiyentlarni topish, ya'ni $z = ax + by + c$ tanlanma tenglamani topish;

2) Z belgi bilan ikkala Y va Z belgilar orasidagi bog'lanish zichligini baholash;

3) Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y orasidagi bog'lanish zichligini topish masalalarini hal qilish zarur.

Birinchi masala eng kichik kvadratlar usuli bilan hal qilinadi. Analitik geometriyadan ma'lumki, (2.38) chiziqli bog'lanish tenglamasini:

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \tag{2.39}$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu ko'rinishda esa 1-masalani hal qilish osonroq.

Ba'zi elementar hisoblashlardan so'ng a va b koeffitsiyentlar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}, \qquad b = \frac{r_{yz} - r_{yx} r_{zx}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y} \tag{2.40}$$

Bunda r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} – mos ravishda X va Z, Y va Z, X va Y belgilar orasidagi korrelatsiya koeffitsiyentlari; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – o'rtacha kvadratik chetlanishlar.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog'liqlik zichligi quyidagi:

$$R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}+r_{yz}^2}{1-r_{xy}^2}},\quad 0\le R\le 1 \tag{2.41}$$

umumiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bilan baholanadi.

Shuningdek, Y fiksirlanganda (o‘zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va X bog‘lanish zichligi mos ravishda:

$$r_{xz(y)}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}} \tag{2.42}$$

$$r_{yz(x)}=\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}} \tag{2.43}$$

xususiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentlari bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o‘rganishda, tasodifiy jarayonlarning o‘zaro bog‘liqlik qonunlarini ochishda hamda umuman prognozlash masalalarida korrelatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko‘rsatkichlarning bir-biriga bog‘liqligini aniqlash va shu asosda muhim xulosalar chiqarishda korrelatsiya nazariyasi muvaffaqiyatli tatbiq etib kelinmoqda.

2.3. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko‘pincha tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik usul bilan tekshirish mumkin bo‘lgan gipotezalarga tayanib ish ko‘riladi.

Ma’lumki, har qanday ilmiy asoslangan farazni gipoteza deb aytishimiz mumkin, ammo har qanday gipotezani stastistik gipoteza deb ayta olmaymiz, chunki uning alohida ajralib turadigan xususiyatlari bor, bu xususiyatlarni alohida ta’kidlash uchun biz quyidagi ta’rifni keltiramiz.

1-ta’rif. Statistik gipoteza deb, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning (bosh to‘plamning) noma’lum taqsimot qonuni yoki ma’lum taqsimot qonunning noma’lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezalarga misol bo‘la oladi:

1) bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal taqsimot qonun bo‘yicha taqsimlangan;

2) parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o‘rtacha o‘lchamlari bir-biriga teng;

3) normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi ikki to‘plamning dispersiyalari o‘zaro teng.

1-gipotezada taqsimotning ko‘rinishi haqida, 2 va 3-gipotezalarda esa parametrlar haqida faraz qilingan.

“Ertaga yomg‘ir yog‘adi”, “Bu yil mo‘l hosil olamiz” kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo‘la olmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko‘rinishi haqida, na uning parametrlari haqida so‘z boradi.

Bosh to‘plam haqida oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshiriladi va natijada qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin. Bunda quyidagi tushuncha va belilashlardan foydalaniladi:

H_0 – *asosiy* (yoki nolinchi) gipoteza deb, ma’lum faktlarga yoki tadqiqot natijalariga asoslanib, ilgari surilgan statistik gipotezaga aytiladi;

H_1 – *konkurent* (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo‘lgan har qanday boshqa gipotezaga aytiladi.

Masalan, “X tasodifiy miqdor Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi” gipotezasi yuqoridagilarga asoslanib quyidagicha yoziladi:

$$H_0 : P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda>0, \ k=0,1,2,3,...;$$

$$H_1 : P(X=k)\neq\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Faqat bitta da’voni o‘z ichiga olgan gipoteza oddiy gipoteza; bittadan ortiq sondagi da’volarni o‘z ichiga olgan gipoteza esa murakkab gipoteza deyiladi.

Masalan, X tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & agar \quad x\geq 0. \end{cases}$$

qonuniga bo‘ysinib, uning λ parametri noma’lum bo‘lsin. U holda quyidagilar o‘rinli:

$H_0: \lambda = 2$ asosiy gipotezani oddiy gipoteza;

$H_1: \lambda \neq 2$ alternativ gipotezani esa murakkab gipoteza.

Ilgari surilgan gipoteza tekshirib ko‘riladi va so‘ngra xulosa chiqariladi. Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatolikka yo‘l qo‘yilishi mumkin.

Agar to‘g‘ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinsa, qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Bu xatoliklarni jadvalda quyidagicha tasvirlash mumkin.

H_0 – gipoteza	to‘g‘ri	noto‘g‘ri
Rad qilindi	I tur xatolik	To‘g‘ri qaror
Qabul qilindi	To‘g‘ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatoliklarning oqibatlari har xil bo‘lishi mumkin. Masalan, agar samolyotga “uchishga ruxsat berilsin” degan to‘g‘ri qaror rad etilgan bo‘lsa, u holda bu I tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik moddiy zararga olib kelishi mumkin; agar samolyotning nosozligiga qaramasdan “uchishga ruxsat berilsin” degan noto‘g‘ri qaror qabul qilinsa, u holda bu II tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik halokatga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xatolik II tur xatolikka qaraganda og‘irroq oqibatlarga olib keladigan misollarni ham keltirish mumkin.

To‘g‘ri qarorni ikki holda qabul qilish mumkin:

1) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham to‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinadi;

2) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham noto‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinmaydi.

I tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli α bilan belgilanadi va u muhimlilik darajasi deb ataladi. Ko‘p hollarda muhimlilik darajasi $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01,...$ sifatida qabul qilinadi.

Biz ma'lum taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi belgining noma'lum parametrlari haqida ilgari surilgan gipoteza statistik usulda qanday tekshirilishini ko'rib chiqamiz.

Asosiy gipoteza ilgari surilgandan so'ng, uning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, aniq yoki taxminiy taqsimoti ma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Bu tasodifiy miqdorni K bilan belgilaymiz.

2-ta'rif. Statistik kriteriy (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan tasodifiy miqdorga aytiladi.

Bu tasodifiy miqdor odatda K bilan belgilanadi va K *kriteriy* deb ataladi. Masalan, agar normal taqsimot qonuniga ega X, Y bosh to'plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan bo'lsa, u holda K kriteriy sifatida "tuzatilgan" tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F=\frac{s_x^2}{s_y^2} \quad (s_x^2>s_y^2) \tag{2.44}$$

Turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma'lum bo'lmagan qiymatlar qabul qilganligi uchun F tasodifiy miqdor bo'lib, u Fisher-Snedekor qonuni bo'yicha taqsimlangan.

Gipotezani tekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo'yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyning kuzatiladigan (xususiy) qiymati hosil qilinadi.

$K_{kuzat.}$ – kuzatiladigan qiymat deb, statistik kriteriyning tanlanmalar bo'yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, ikkita tanlanma asosida topilgan dispersiyalar: $s_x^2=20$, $s_y^2=15$ bo'lsa, u holda

$$K_{kuzat.}=F=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}.$$

Gipotezani tekshirish mobaynida K kriteriyning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami kesishmaydigan ikkita qism to'plamlarga ajratiladi: $K=K^-\cup K^+$. Bu yerda $K^-\cap K^+=\varnothing$.

Ulardan biri H_0 – asosiy gipoteza rad qilinadigan qiymatlarni, ikkinchisi esa asosiy gipoteza qabul qiladigan qiymatlarini o'z ichiga oladi.

3-ta'rif. Kriteriyning H_0 – asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to'plami kritik soha deb ataladi.

4-ta'rif. Kriteriyning H_0 – asosiy gipotezani qabul qiladigan qiymatlar to'plami gipotezani qabul qilish sohasi deb ataladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy prinsiplarini quyidagicha ta'riflash mumkin: agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyning kuzatilayotgan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza qabul qilinadi. Kriteriy bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lgani uchun uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami biror intervaldan iborat bo'ladi. Shu sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervaldan iborat bo'ladi, demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to'g'risida gapirish mumkin.

5-ta'rif. Kritik nuqtalar deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

Agar kritik soha $K > k_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni *o'ng tomonli kritik soha.*

Agar kritik soha $K < k_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni *chap tomonli kritik soha.*

Agar kritik soha $K > k'_{kr}$, $K < k'_{kr}$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uni *ikki tomonli kritik soha* deyiladi.

Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni aniqlash o'ng tomonli kritik sohani topishga o'xshash bo'lganligi sababli biz faqat o'ng tomonli kritik sohani aniqlash bilan tanishib chiqamiz.

Kritik sohani aniqlash uchun kritik nuqtani topish yetarli. Bu nuqtani aniqlash uchun esa α ning qiymati berilishi kerak. So'ngra, quyidagi talabga asoslanib, k_{kr} nuqta topiladi: H_0 – asosiy gipoteza o‘rinli bo‘ladigan K kriteriyning $k_{kr.}$ nuqtadan katta bo‘lishi ehtimoli α - muhimlilik darajasiga teng bo‘lsin:

$$P(K > k_{kr.}) = \alpha . \qquad (2.45)$$

Har bir kriteriy uchun (2.45) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topish jadvallari mavjud.

Kritik nuqta topilgandan so‘ng, $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha kriteriyning kuzatilgan qiymati topiladi. Bunda agar $K > k_{kr.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipoteza rad qilinadi; aks holda asosiy gipotezani rad qilishga asos yo‘q deyiladi.

1-eslatma. H_0 gipoteza qabul qilingan bo‘lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo‘ladi. Aslida “kuzatilgan natijalar H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos yo‘q” deyish to‘g‘riroq bo‘ladi.

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi. Gipotezani qabul qilishdan ko‘ra ko‘proq uni rad qilishga harakat qilinadi. Haqiqatan, ma’lumki biror umumiy da’voni rad qilish, bu da’voga zid bo‘lgan bitta misolni keltirish kifoya. Shu sababli kriteriy quvvati tushunchasi kritiladi.

6-ta’rif. Konkurent gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli β bo‘lsa, u holda kriteriy quvvati $1-\beta$ ga teng bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, kriteriy quvvati qancha katta bo‘lsa II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli shuncha kam bo‘ladi. Yuqoridagi ta’riflardan ko‘rinib turibdiki, α ning kamayishi β ning o‘sishiga olib keladi, va aksincha. Masalan, $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda barcha gipotezalar qabul qilinadi, jumladan noto‘g‘rilari ham. Shu sababli, ikkala parametrni bir paytda kamaytirib bo‘lmaydi. I tur va II tur xatoliklarga yo‘l qo‘yishning oldini olishning yagona yo‘li tanlanma hajmini oshirishdir.

Statistik gepotezani tekshirish qanday amalga oshirilishini quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

Normal taqsimlangan ikki bosh to'plamning dispersiyalarini taqqoslash masalasi. Dispersiyalar haqidagi gipotezalar, ayniqsa texnikada muhim ahamiyatga ega, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo'lgan dispersiya mashina va uskunalarning, o'lchov asboblarining, texnologik protsesslarning aniqligini baholashda juda muhim ko'rsatkich hisoblanadi.

Normal taqsimlangan bosh to'plam dispersiyalarining tengligi haqida gipoteza ilgari surilsa, kriteriy sifatida $F=\frac{s_x^2}{s_y^2}$ kattalik olinishini aytib o'tgan edik. Bunda F tasodifiy miqdor bo'ysunadigan Fisher-Snedekor taqsimotining erkinlik darajalari quyidagicha aniqlanadi: $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$, bu yerda n_1 –hisoblanganda qiymati katta bo'lgan "tuzatilgan" dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi, n_2 – hisoblanganda qiymati kichik bo'lgan "tuzatilgan" dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi. Kritik nuqta $k_{kr}=F(\alpha;k_1,k_2)$ tenglik bilan jadvaldan aniqlanadi.

1-misol. Normal taqsimlangan X,Y bosh to'plamlardan mos ravishda $n_1=11$, $n_2=14$ hajmli erkli tanlanmalar olinib, ularning "tuzatilgan" dispersiyalari: $s_x^2=0,76$, $s_y^2=0,38$ topilgan. $\alpha=0,05$ muhimlilik darajasida quyidagi gipotezani tekshiring:

$$\begin{cases} H_0: D(X)=D(Y) \\ H_1: D(X)\neq D(Y) \end{cases}$$

Yechish: Gipotezani tekshirish uchun $F=\frac{s_x^2}{s_y^2}$ kriteriyni tanlaymiz. U holda

$$K_{kuzat.}=F=\frac{s_x^2}{s_y^2}=\frac{0,76}{0,38}=2.$$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan

$$\alpha=0,05,\ k_1=11-1=10,\ k_2=14-1=13\Rightarrow k_{kr.}=F(0,05;10,13)=2,67$$

kritik nuqtani topamiz. Bu yerda $K<k_{kr.}$ bo'lgani uchun gipotezani rad qilishga asos yo'q.

Ma'lumki, s^2 –tuzatilgan tanlanma dispersiya bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan baho bo'ladi. Biz bu tuzatilgan tanlanma dispersiyasi bilan $\sigma_B^2(X)$ –bosh to'plam dispersiyasi opasidagi farq e'tiborga olinishi kerakmi yoki yo'qmi degan savolga javob beramiz. Amaliyotda $\sigma_B^2(X)$ tajriba natijasida yoki nazariy jihatdan aniqlanadi.

Buning uchun bosh to‘plamdan n hajmli tanlanma ajratib olamiz. Bu tanlanmadan $k=n-1$ erkinlik darajasida s^2 – tuzatilgan dispersiyani topamiz. U holda asosiy gipoteza $H_0:\sigma_B^2=M(s^2)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu kabi gipotezalar priborlar, instrumentlar, stanoklarning aniqligini tekshirishda, texnologik jarayonlarni o‘rganishda tekshiriladi. Asosiy gipotezani tekshirishda $(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ tasodifiy miqdordan foydalanamiz. $(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ kattalik haqiqatan ham tasodifiy miqdor, chunki s^2 kattalik turli tajribalarda har xil qiymatlarni qabul qiladi. Bu tasodifiy miqdor $k=n-1$ erkinlik darajasida χ^2 (xi kvadrat) taqsimotga ega bo‘lganligi uchun asosiy gipotezani tekshirish kriteriysini $\chi^2=(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ bilan belgilaymiz. Kritik soha alternativ gipotezaga bog‘liq holda quriladi:

I. $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2$; $H_1:\sigma_B^2<\sigma^2$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda $P(\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}(\alpha;k))=\alpha$ ehtimollikdan foidalanib o‘ng tomonli kritik soha quriladi. $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ – kritik nuqta esa χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan foydalanib topiladi. U holda kritik soha $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ tengsizlikdan, asosiy gipotezani qabul qilish qiymatlari esa $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ tensizlikdan topiladi. Demak,

Agar $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

2-misol. Normal taqsimlangan bosh to‘plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib, $s^2=14{,}6$ “tuzatilgan” dispersiya topilgan. $\alpha=0{,}01$ muhumlilik darajasida $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2=12$; $H_1:12<\sigma^2$ gipotezani tekshiring.

Yechish: Kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$\chi^2=(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}=14{,}6.$$

Jadvaldan $\chi^2_{kr.}(0{,}01;13-1=12)=26{,}2$ qiymatni topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q.

II. $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2$; $H_1:\sigma_B^2\neq\sigma^2$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda $P(\chi^2>\chi^2_{kr.}(\alpha;k))=\alpha$ ehtimollikdan foydalanib ikki tomonli kritik soha quriladi. $P\left(\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=\frac{\alpha}{2}$ tengsizlikdan foydalanib chap kritik soha, $P\left(\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=\frac{\alpha}{2}$ tengsizdan foydalanib o‘ng kritik soha quriladi. χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalida faqat o‘ng kritik nuqtalar berilgan. Chap kritik nuqtalarni topishda yuzaga keladigan qiyinchlikdan $\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ va $\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ hodisalarning qarama-qarashiligidan, ya’ni

$$P\left(\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)+P\left(\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=1-P\left(\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=1-\frac{\alpha}{2}$$

tengliklardan foydalanib qutilamiz.

Bundan ko‘rinib turibdiki, chap kritik nuqtani o‘ng kritik nuqta kabi izlanadi. Shunday qilib, $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2$; $H_1:\sigma_B^2\neq\sigma^2$ gipotezani tekshirish uchun $\chi^2_{kuzat}=(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ kuzatilgan qiymati topiladi. So‘ngra $\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$–o‘ng kritik nuqta va $\chi^2_{kr.}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right)$–chap kritik nuqta topiladi. Bunda:

Agar $\chi^2_{chap\ kr.}<\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{o'ng\ kr.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{o'ng\ kr.}$ yoki $\chi^2_{chap\ kr.}>\chi^2_{kuzat.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

3-misol. Normal taqsimlangan bosh to‘plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2=10{,}3$ “tuzatilgan” dispersiya topilgan. $\alpha=0{,}02$ muhumlilik darajasida $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2=12$; $H_1:12\neq\sigma^2$ gipotezani tekshiring.

Yechish: Kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$\chi^2=(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}=10,3.$$

So'ngra jadvaldan $\chi^2_{chap\ kr.}=3,57$, $\chi^2_{o`ng\ kr.}=26,2$ qiymatlarni jadvaldan topamiz. Bu yerda $\chi^2_{chap\ kr.}<\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{o`ng\ kr.}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

III. $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2$; $H_1:\sigma_B^2>\sigma^2$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda kritik nuqta $\chi^2_{kr.}(1-\alpha;k)$ topiladi. So'ngra:

Agar $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor;

Agar $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

4-misol. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib, $s^2=14,6$ "tuzatilgan" dispersiya topilgan. $\alpha=0,01$ muhimlilik darajasida $H_0:\sigma_B^2=\sigma^2=12$; $H_1:12>\sigma^2$ gipotezani tekshiring.

Yechish: Kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$\chi^2=(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}=14,6.$$

Jadvaldan $\chi^2(0,99;12)=3,57$ qiymatni topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

Agar D_T -tanlanma dispersiyasi topilgan bo'lsa, u holda tasodifiy miqdor sifatida $\chi^2=n\frac{D_T}{\sigma_B}$ kattalik olinadi.

Agar erkinlik darajasi $k>30$ bo'lsa, u holda kritik nuqta sifatida $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)=k\left[1-\frac{2}{9k}+z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3$, $\left(\Phi(z_\alpha)=\frac{1-2\alpha}{2}\right)$ kattalikning taxminiy qiymati olinadi.

2.4. Muvofiqlik kriteriysi

Ma'lumki, statistik gipotezada kuzatilayotgan belgining taqsimot qonuni haqidagi faraz ham ilgari surilar edi. Biz ko'pgina amaliy masalalar o'rganilayotganda uchraydigan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, bu taqsimot to'g'risidagi gipotezani statistik usulda tekshirishni ko'rib chiqamiz.

X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot qonuniga egaligi haqida da'vo qiluvchi $H_0 : P(X < x) = F(x)$ gipotezani tekshirish talab etilsin. Buning uchun X tasodifiy miqdor ustida n marta erkli kuzatish o'tkazib $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma olamiz. Bu tanlanma bo'yicha $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasini qurish mumkin. Empirik taqsimot funksiyasi va nazariy (gipotetik) taqsimot funksiyasini taqqoslash maxsus tanlangan tasodifiy miqdor-muvofiqlik (moslik) kriteriysi yordamida bajariladi.

1-ta'rif. Muvofiqlik kriteriysi deb, bosh to'plam noma'lum taqsimotining taxmin qilinayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvchi kriteriyga aytiladi.

Bir qancha muvofiqlik kriteriylari mavjud: χ^2 ("xi"-kvadrat") K.Pirson, Kolmogorov, Smirnov va boshqalar.

Normal taqsimot haqidagi gipotezani tekshirishda qo'llaniladigan Pirson kriteriysiga batafsil to'xtalamiz. Shu maqsadda empirik va nazariy chastotalarni taqqoslaymiz.

Odatda, empirik va nazariy chastotalarning farqi bo'ladi. Masalan:

empir.chast	6	13	38	74	106	85	30	10	4
nazar.chast	13	14	42	82	99	76	37	11	2

Bunda quyidagi savollar tug'iladi: Chastotalarning bunday farqlanishi tasodifiymi? Farqlanish sabablari nima? Bu kabi savollarga Pirson kriteriysi javob beradi. Bu kriteriy ham boshqa kriteriylar kabi gipoteza to'g'riligini tasdiqlamasdan, balki qabul qilingan $\alpha-$muhimlilik darajasida kuzatilgan ma'lumotlari bilan uning mos yoki mosmasligini o'rnatadi.

n hajmli tanlanma asosida: $\begin{matrix} x_i: & x_1 & x_2 & ... & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & ... & n_k \end{matrix}$ empirik taqsimot olingan bo'lsin.

Bosh to'plam normal taqsimlangan farazi asosida n_i^* nazariy chastotalar hisoblangan bo'lsin. $\alpha-$muhimlilik darajasida.

H_0: bosh to'plam normal taqsimlangan gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*} \qquad (2.46)$$

tasodifiy miqdorni olamiz.

Bosh to‘plam qaysi taqsimot qonuniga bo‘ysunishidan qat’i nazar (2.46) tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da k erkinlik darajali χ^2 taqsimot qonuniga intilishi isbotlangan. Bu yerda $k = s - 1 - r$. $s -$ tanlanma gruppalari (xususiy intervallar) soni, $r -$faraz qilinayotgan, ya’ni tanlanma ma’lumotlari asosida baholanayotgan, taqsimot parametrlari soni. Masalan, normal taqsimotda $r = 2$ va hokazo.

O‘ng tamonli kritik sohani quramiz. Asosiy gipotezani to‘g‘ri deb faraz qilganimizda kriteriyning kritik sohaga tushish ehtimoli:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)\right) = \alpha \qquad (2.47)$$

Shunday qilib, $\chi^2 > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ tengsizlik kritik sohani, $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ tengsizlik esa asosiy gipotezani qabul qilish sohasini aniqlaydi.

$$\chi^2_{kuzat.} = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*} \qquad (2.48)$$

formula yordamida kriteriyning kuzatilgan qiymatini, jadvaldan $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ - kritik nuqtani topamiz va quyidagi xulosalarni chiqaramiz.

Agar $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad etishga asos bor.

1-misol. $\alpha = 0{,}05$ bo‘lsa bosh to‘plam normal taqsimlangan gipotezasini quyidagi jadval asosida tekshiring:

empir.chast	6	13	38	74	106	85	30	14
nazar.chast	3	14	42	82	99	76	37	13

Yechish: χ^2_{kuzat} qiymatni hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	-1	1	0,07
3	38	42	-4	16	0,38
4	74	82	-8	64	0,78

5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	-7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{kuzat.}=7,9$

Erkinlik darajalari soni: $k=s-r-1=8-2-1=5$. Jadvaldan: $\chi^2_{kr.}=11,1$.

$\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q. Demak, kuzatilgan ma’lumotlar gipoteza bilan mos.

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, Pirson muvofiqlik kriteriysining asosini empirik va nazariy chastotalarni taqqoslash tashkil etadi. Empirik chastota tajribadan topiladi.

Bosh to‘plam normal taqsimlanganda nazariy chastota topish usullaridan birini quyida keltiramiz:

1. X tanlanmaning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlar sohasi k ta bir xil uzunlikdagi (x_i,x_{i+1}) xususiy intervallarga bo‘linadi va har bir xususiy interval x_i^* o‘rtasi topiladi va i intervalga tushgan variantalar soni x_i^* variantaning chastotasi deb hisoblanadi. Natijada

$$\begin{array}{lllll} x_i^*: & x_1^* & x_2^* & \dots & x_k^* \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$$

taqsimot hosil qilinadi. Bu yerda $\sum_i n_i=n$.

2. Tanlanma $\overline{x^*}$ o‘rtachasi va σ^* o‘rtacha kvadratik chetlanishi hisoblanadi.

3. $Z=\dfrac{\left(X-\overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$ miqdor bilan X tasodifiy miqdor normalanadi va (z_i,z_{i+1}) intervalning chetki nuqtalari: $z_i=\dfrac{\left(x_i-\overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$, $z_{i+1}=\dfrac{\left(x_{i+1}-\overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$ topiladi. Bunda Z ning eng kichik qiymati $z_1\to-\infty$, eng katta qiymati $z_k\to\infty$ deb olinadi.

4. $p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$ formula bilan X ning (x_i,x_{i+1}) oraliqqa tushish ehtimoli hisoblanadi. Bu yerda $\Phi(z)$ – Laplas funksiyasi. U holda nazariy chastota: $n_i^*=n_ip_i$. Shuni ta’kidlash kerakki, har bir oraliq kamida 5-10 ta variantani o‘z ichiga olishi lozim. Tanlanma

hajmi ham yetarlicha katta, 50 dan kam bo'lmasligi lozim. Variantalari soni kam oraliqlarni birlashtirish kerak.

2-misol. Bosh to'plam normal taqsimlangan deb, jadval asosida nazariy chastotalarni toping. Tanlanma hajmi $n=200$.

i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				

Yechish: 1. Xususiy intervallar o'rtasini topamiz va quyidagi taqsimotni hosil qilamiz:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Tanlanma o'rtachasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini topamiz: $\overline{x^*}=12{,}63$, $\sigma^*=4{,}695$.

3. (z_i, z_{i+1}) intervallarni topamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

i	x_i	x_{i+1}	$x_i-\overline{x^*}$	$x_{i+1}-\overline{x^*}$	$z_i=\dfrac{x_i-\overline{x^*}}{\sigma^*}$	$z_{i+1}=\dfrac{x_{i+1}-\overline{x^*}}{\sigma^*}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,56	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

4. p_i ehtimollikni va n_ip_i nazariy chastotani topib quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i p_i$
1	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64

Nazorat savollari

1. Statistik gipotezani ta'riflang.
2. I tur va II tur xatoliklarni misollar yordamida tushunturung.
3. Kritik sohani qurishning qanday usullarini bilasiz?
4. Statistik kriteriyni ta'riflang.
5. Kriteriy quvvatini qanday oshirish mumkin?
6. Pirson kriteriysini ta'riflang.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyida berilgan tanlanma uchun variatsion qator hamda chastotali taqsimot tuzing: $\{5,3,7,10,5,5,2,10,7,2,7,7,4,2,4\}$.

2. Tavakkaliga tanlangan 30 ta talabalarning bo'y uzunliklaridan iborat quyidagi tanlanma berilgan. Bu tanlanma uchun interval statistik taqsimot tuzing.

178	160	154	183	155	153	167	186	155	163
157	175	170	166	159	173	182	167	169	171
179	165	156	179	158	171	175	173	172	164

3. Chastotali taqsimoti berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini toping:

a)

X_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

b)

X_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

4. Quyidagi tanlanma uchun nisbiy chastotali gistogramma yasang.

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	8	14	20	25	30	24	16	12	7	4

5. Quyidagi tanlanma uchun poligon yasang.

X_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	4	5	6	5	2	1

6. Quyidagi tanlanmaning o‘rta qiymati va dispersiyasini hisoblang.

Interval chegarasi	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46
n_i	2	3	30	40	20	5

7. Talabalardan 24 savoldan iborat test sinovi o‘tkazildi. Ushbu test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagicha taqsimlanishdi. Tanlanma sonli xarakteristikalarini hisoblang.

To‘g‘ri javoblar soni	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Talabalar soni	2	4	8	12	16	10	3

8. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning empirik funksiyasini toping.

X	1	4	6
n	10	15	25

9. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

X	2	4	5	7	10
W	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

10.Quyidagi ma’lumotlar asosida empirik taqsimot funksiyasini toping va grafigini yasang.

X	4	7	8
n	5	2	3

11.Chastotalar poligonini yasang.

X	15	20	25	30	10
n	10	15	30	20	25

12. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

X	20	40	65	80
W	0.1	0.2	0.3	0.4

13. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

№	$x_i - x_{i+1}$	n_i	$\frac{n_i}{h}$
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

14. Bosh to‘plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi topilgan. Agar $n=10$ va $s=5,1$ bo‘lsa, $\gamma=0,99$, ishonchlilik ehtimoli bilan:

a) dispersiyani qoplaydigan;

b) o‘rtacha kvadratik chetlanishni qoplaydigan ishonchlilik oralig‘ini toping.

15. Biror fizik kattalikni bog‘liq bo‘lmagan bir xil aniqlikdagi 9 ta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha, o‘lchashlarning o‘rta arifmetik qiymati $\overline{x_n}=30,1$ va o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=6$ topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida $\gamma=0,95$, ishonchlilik bilan baholang.

16. Bosh to‘plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan va bosh to‘plam normal taqsimlangan bo‘lsa, a matematik kutilmasini tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,95 ishonchlilik bilan o‘z ichiga olishi mumkin bo‘lgan oraliqni toping.

X_T	-2	1	2	3	4	5
n	2	1	2	2	2	1

17. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{x_y}, \sigma_x$ ni toping.

X Y	4	5	6	7	n_y
10	2	11	3	2	18
20	1	13	2	10	26
30	3	6	27	6	42
40	2	9	3	-	14
n_x	8	39	35	18	$n=100$

18. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{y_x}, \sigma_x$ ni toping.

X Y	4	5	6	7	n_y
1	2	11	3	2	18
2	1	19	2	4	26a
3	3	9	27	3	42
4	2	-	3	9	14
n_x	8	39	35	18	$n=100$

19. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{y_x}, \sigma_y$ ni toping.

X Y	4	5	6	7	n_y
10	2	11	3	2	18
20	1	19	2	4	26
30	3	6	27	6	42
40	2	3	3	6	14
n_x	8	39	35	18	$n=100$

20. Jadvaldagi ma'lumotlar asosida $\overline{y_x}=ax^2+bx+c$ regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X Y	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n=100$

21. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida $\overline{x_y}=ay^2+by+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni aniqlang.

X Y	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
2	1	14	-	15
3	-	2	18	20
4	16	16	18	50
n_x	32	32	36	$n=100$

22. Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan hajmlari mos ravishda n_1 va n_2 bo'lgan ikkita erkli tanlanma ajratib olingan va ularning "tuzatilgan" dispersiyalari: s_x^2, s_y^2 lar topilgan. α muhimlilik darajasida $H_0: D(X)=D(Y)$, $H: D(x) \neq D(Y)$ gipotezani tekshiring.

a) $n_1=10, n_2=15, s_x^2=2,4, s_y^2=2,4, \alpha=0,05;$

b) $n_1=13, n_2=17, s_x^2=3,6, s_y^2=4,8, \alpha=0,05;$

d) $n_1=9, n_2=12, s_x^2=3,6, s_y^2=7,2, \alpha=0,01;$

e) $n_1=13, n_2=15, s_x^2=36, s_y^2=27, \alpha=0,05.$

23. Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan quyidagi erkli tanlanmalar ajratib olingan. $\alpha=0,01$ muhimlilik darajasida $H_0: D(X)=D(Y)$, $H_1: D(X)>D(Y)$ gipotezani tekshiring.

X_T	3	4	5	6	7
n	4	2	3	3	1
Y_T	3	6	9	12	15
n	4	4	3	3	4

Tayanch so'z va iboralar

Bosh to'plam, tanlanma, statistik taqsimot, empirik taqsi
funksiyasi, poligon, gistogramma, reprezentativ tanlanma, variat
qator, variant, siljimagan baho, effektiv baho, asosli baho, tanla
o'rtachasi, bosh to'plam o'rtachasi, tanlanma dispersiyasi, "tu
gan" dispersiya, bosh to'plam dispersiyasi, nuqtaviy baho, inte
baho, bahoning ishonchliligi, bahoning aniqligi, ishon
intervali, funksional bog'lanish, statistik bog'lanish, korrel

bog'lanish, korrelatsion panjara, shartli o'rtacha, tanlanma regressiyasi, tanlanma regressiya tenglamasi, egri chiziqli korrelatsiya, to'plamli korrelatsiya, xususiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti, umumiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti, tanlanma korrelatsion nisbat, shartli varianta, statistik gipoteza, oddiy gipoteza, murakkab gipoteza, statistik kriteriy, kuzatiladigan qiymat, kritik nuqtalar, muhimlilik darajasi, kriteriy quvvati, muvofiqlik kriteriysi, χ^2 – kriteriy, empirik chastota, nazariy chastota, normal taqsimot, erkinlik darajasi, Laplas funksiyasi, kritik soha.

III BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

3.1. Iqtisodiy masalalarning chiziqli modellarini tuzish

Chiziqli programmalashtirish matematik programmalashtirishning bir bo'limi bo'lib, u chegaralangan resurslar (xomashyo, texnika vositalari, kapital qo'yilmalar, yer, suv, mineral o'g'itlar va boshqalar)ni ratsional taqsimlab eng ko'p foyda olish yoki eng kam xarajat qilish yo'llarini o'rgatadi.

Chiziqli programmalashtirishning shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta'sir ko'rsatdi. 1975-yilda chiziqli programmalashtirish nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot bo'yicha mutaxassis, "Chiziqli programmalashtirish" terminining birinchi muallifi, amerika olimi T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli programmalashtirishning iqtisodiy nazariyaga qo'shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma'lumlarga chegaralovchi shartlar qo'yilganda, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o'rgatuvchi bo'limdir.

Noma'lumlarga chiziqli chegaralashlar qo'yilgan chiziqli funksiyaning ekstremumini topish chiziqli programmalashtirishning predmetini tashkil qiladi. Shunday qilib, chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Iqtisodiy jarayonlarning o'ziga xos qonuniyatlarini o'rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarini tuzish kerak. O'rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning (masalalarning) matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:

1) masalaning iqtisodiy ma'nosi bilan tanishib, undagi asosiy shartlar va maqsadni aniqlash;

2) masaladagi ma'lum parametrlarni belgilash;

3) masaladagi noma'lumlarni (boshqaruvchi o'zgaruvchilarni) belgilash;

4) masaladagi cheklamalarni, ya'ni boshqaruvchi o'zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo'lgan chegaraviy shartlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;

5) masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash.

Boshqaruvchi o'zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat bersin. Bundan ko'rinadiki, maqsad funksiya boshqaruvchi noma'lumlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyani foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko'p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o'rganamiz.

Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini i bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo'lsin. Har bir xomashyoning umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi haqidagi ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan bo'lsin.

Xomashyolar **Mahsulot turlari**	1	2	3	...	n	**Daromad**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	c_m
Xom ashyolar zaxirasi	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Jadvaldagi har bir: $b_j - j$ xomashyoning umumiy miqdori (zaxirasi); $a_{ij} - i$ mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan j xomashyo miqdori; c_j –korxonaning j mahsulotning bir birligini sotishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki:

a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir xomashyoning miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin;

b) mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo'lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan i mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \le b_2, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni: $x_i \ge 0, (i = \overline{1,m})$.

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak, masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat bo'lib, uni $y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m$ funksiya orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \le b_2, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \ i = \overline{1,m},$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \max$$

Iste'mol savati masalasi. Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil $A_1, A_2, ..., A_n$ oziqa moddalari kerak bo'lsin, jumladan bir sutkada A_1 oziqa moddasidan kamida b_1 miqdorda, A_2 oziqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 oziqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n ozuqadan b_n miqdorda zarur bo'lsin va ularni m ta

$B_1, B_2, ..., B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo‘lsin. Har bir B_i mahsulot tarkibidagi A_j oziqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Ozuqa moddalari **Mahsulot turlari**	A_1	A_2	A_3	...	A_n	**Mahsulot bahosi**
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	c_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...	...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	c_m
Ozuqa moddasining minimal normasi	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: iste’mol savatiga qanday mahsulotlardan qancha miqdorda kiritish kerakki, natijada:

a) odam organizmi qabul qiladigan turli oziqa moddasining miqdori belgilangan minimal miqdordan kam bo‘lmasin;

b) iste’mol savatining umumiy bahosi minimal bo‘lsin.

Iste’mol savatiga kiritiladigan i-mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, undagi noma’lumlar manfiy bo‘la olmaydi, ya’ni: $x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masalaning b) sharti uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste’mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo‘lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \min .$$

Shunday qilib, iste’mol savati masalasining matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \dotfill \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1,m}),$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \min$$

Optimal bichish masalasi. Optimal bichish masalasining eng sodda usuli bilan tanishamiz. Faraz qilamiz, uzunligi L bo'lgan xomaki materiallardan uzunliklari Δ_i $(i=\overline{1,m})$ bo'lgan m xil detallarning har biridan c_i miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. Bundan tashqari, xomaki materiallarni n usul bilan kesish mumkin hamda har bir j usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i detal tayyorlash va b_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo'lsin. Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo'ladi.

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	**Kesish usullari**				**Detallar ishlab chiqarish rejasi**
	1	2	...	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	c_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{1n}	c_2
...	...	...	...	...	...
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	c_m
Chiqindilar	b_1	b_2	...	b_n	

j usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq c_n \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1,m}),$$

$$Y = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \rightarrow \min$$

1-misol. Uzunligi 110 sm bo‘lgan po‘lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo‘lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo‘lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po‘lat xipchinlarni kesish yo‘llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar uzunligi	**Kesish usullari**						**Xomaki mahsulotlar i/ch. rejasi**
	1	2	3	4	5	6	
45 sm	2	1	1	-	-	-	40
35 sm	-	1	-	3	1	-	30
50 sm	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo‘yicha qancha po‘lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo‘ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo‘ladi?

Yechish: j-usul bilan kesiladigan po‘lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45 sm bo‘lgan xomaki mahsulotlardan ja’mi $2x_1 + x_2 + x_3$ miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko‘ra, bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 40.$$

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35 sm va 50 sm bo‘lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to‘la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda $x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$ va $x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$ tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra belgilangan noma’lumlar manfiy bo‘la olmaydi, demak,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_6 \geq 0.$$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funksiya ko'rinishida ifodalaymiz:

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6.$$

Masalaning shartiga ko'ra, bu funksiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya'ni

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min.$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1,6})$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min.$$

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, B, C karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xomashyolar miqdori (me'yori), xomashyolarning zaxirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomashyo turlari	**1 tonna mahsulotga xomashyo sarfi (tonna hisobida)**			**Xomashyo zaxirasi (tonna)**
	A	*B*	*C*	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Qiyom	0,4	0,4	0,3	600
quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad (shartli birlik)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun $0,8x_1+0,5x_2+0,6x_3$ miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zaxirasidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak, $0,8x_1+0,5x_2+0,6x_3 \le 800$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin: $0,4x_1+0,4x_2+0,3x_3 \le 600,\ 0,1x_2+0,1x_3 \le 120$ Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, B karameldan $102x_2$, C karameldan $126x_3$ birlik va jami $108x_1+112x_2+126x_3$ birlik daromad oladi. Bu yig'indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funksiyaga ega bo'lamiz: $Y=108x_1+112x_2+126x_3 \to \max$. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0,8x_1+0,5x_2+0,6x_3 \le 800, \\ 0,4x_1+0,4x_2+0,3x_3 \le 600, \\ 0,1x_2+0,1x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Y=108x_1+112x_2+126x_3 \to \max$$

3.2. Chiziqli programmalashtirish masalasining yechimi

Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

$$x_i \ge 0,\ (i=\overline{1,n}), \qquad (3.2)$$

$$Y=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m \to (\max)\min \qquad (3.3)$$

Demak, (3.1) va (3.2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3.3) chiziqli funksiyaga minimum (maksimum) qiymat bersin.

Masalaning (3.1) va (3.2) shartlari uning chegaraviy shartlari, (3.3) chiziqli funksiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funksiyasi deb ataladi.

Muayyan masalalarda (3.1) shart tenglamalar sistemasidan, "≥" yoki "≤" ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin.

Ko'p hollarda ChPMsida qatnashyotgan tengsizliklarning ishoralarini bir xil ko'rinishga keltirib olinadi. Shu sababli ChPMsining quyidagi shaklini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{1n}x_m \leq b_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \tag{3.1a}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \tag{3.2a}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \max \tag{3.3a}$$

uning standart shakli deb qabul qilingan.

ChPMsi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{1n}x_m = b_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.4}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \tag{3.5}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \max \tag{3.6}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda (3.4)-(3.6) masala kanonik ko'rinishdagi ***chiziqli programmalashtirish masalasi*** deb ataladi.

ChPMsini (3.4)-(3.6) shaklini turli ko'rinishlarda yozish mumkin. Bu ko'rinishlarni keltirib o'tamiz.

1. ChPMning vektor ko'rinishi. (3.4)-(3.6) masalani vektor ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = p_0,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (3.7)$$
$$Y = CX \to \min$$

bu yerda

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$
$$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$$

2. ChPMning matrisa ko'rinishi. (3.4)-(3.6) masalaning matrisa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n, \qquad (3.8)$$
$$Y = CX \to \min.$$

bu yerda $A = (a_{ij})$.

Ba'zi hollarda (3.4)-(3.6) masala quyidagacha ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \qquad (3.9)$$
$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min.$$

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasini (3.4)-(3.6) ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun quyidagilarni amalga oshirish zarur: ChPMda qatnashayotgan tengsizliklarni tenglamaga keltirish kerak. Bu quyidagicha amalga oshiriladi.

Masalan, $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$ ko'rinishdagi tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning chap tomoniga qandaydir nomanfiy x_{n+1} o'zgaruvchini shunday qiymat bilan qo'shamizki, natijada tengsizlik tenglikka aylansin:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

bu yerda

$$x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - ... - a_nx_n \geq 0$$

o'zgaruvchi qo'shimcha o'zgaruvchi deb ataladi.

1-teorema. Berilgan $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$ tengsizlikning har bir $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ yechimiga $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$, tenglamaning bitta va faqat bitta yagona $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot: Faraz qilaylik, X_0 tengsizlikning yechimi bo‘lsin. U holda

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \le b,$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Tengsizlikning chap tomonini o‘ng tomonga o‘tkazib, hosil bo‘lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz: $0 \le b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}$.

Endi $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektor tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatamiz:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} =$$
$$= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + (b - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - ... - a_n\alpha_n) = b$$

Endi agar Y_0 tenglamani qanoatlantirsa, u holda u tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko‘rsatamiz.

Shartga ko‘ra: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b,\ \alpha_{n+1} \ge 0.$ Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \ge 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \le b$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo‘l bilan chiziqli programmalashtirish masalasining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e’tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o‘zgaruvchilarni qo‘shish kerak.

Masalan, agar chiziqli programmalashtirish masalasi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (3.10)$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

shaklda bo‘lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar qo‘shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o‘zgaruvchilar Y funksiyaga 0 koeffitsiyent bilan kiritiladi. Natijada (3.10) masala quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1, n+m}, \tag{3.11}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \rightarrow \min$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1, n}, \tag{3.12}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \min$$

shaklda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini kanonik shaklga keltirish mumkin. Buning uchun qo‘shimcha $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0$ o‘zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1, n+m}, \tag{3.13}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \rightarrow \min$$

Agar ChPMda maqsad funksiyasi

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \min$$

ko‘rinishda bo‘lsa, uni kanonik shaklda yozish uchun $c_i \ (i = \overline{1, n})$ qarama-qarshi ishora bilan yozib olinib

$$\tilde{Y} = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n \rightarrow \min$$

ifodani hosil qilamiz.

1-misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini kanonik ko‘rinishga keltiring va uni turli ko‘rinishlarda ifodalang:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 \le -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max.$$

Yechish: Masalaning cheklamalaridagi birinchi va uchinchi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritib, ularni tenglamalarga aylantiramiz hamda birinchi tenglamaning ikki tomonini -1 ga ko‘paytirib, undagi ozod hadni musbat songa aylantiramiz va (I) masalaga teng kuchli bo‘lgan quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max.$$

Ushbu masalada $Y \to \max$ ifodani qarama-qarshi ishora bilan olib, uni $Y \to \min$ bilan almashtiramiz. Natijada berilgan masalaning kanonik shakliga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 0(x_4 + x_5) \to \min.$$

(III) masalaning matrisa ko‘rinishini yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U holda (III) masalaning matrisa shakli quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$AX = B,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}, \qquad \text{(IV)}$$
$$Y = C^T X \to \min$$

(III) masalani vektor ko'rinishlarda yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ p_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \qquad C = (-3, 2, -1, 0, 0).$$

U holda (III) masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 = p_0,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}, \qquad \text{(V)}$$
$$Y = CX \to \min.$$

Endi chiziqli programmalashtirish masalasi yechimlari va ularning xossalari bilan tanishamiz.

1-ta'rif. (3.4)-(3.6) masalaning joiz yechimi (joiz rejasi) deb, (3.4), (3.5) shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorga aytiladi.

(3.4)-(3.6) masalaning joiz yechimlar to'plami uning mumkin bo'lgan (joiz) yechimlar to'plamini tashkil etadi:

$K_m = \{X(x_1, ..., x_n): AX^T = p_0,\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}\}$. Bu yerda $r(A) = m < n$.

2-ta'rif. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in K_m$ joiz rejaning $n-m$ ta koordinatasi $(m < n)$ nolga teng bo'lib, qolgan $x_1, x_2, ..., x_m$ koordinatalariga mos $p_1, p_2, ..., p_m$ vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda $X^0 \in K_m$ joiz reja bazis reja deyiladi.

3-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda esa bu reja aynigan bazis reja deyiladi.

4-ta'rif. (3.4)-(3.6) masalaning (3.6) chiziqli funksiyasiga eng kichik qiymat beruvchi $X^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ bazis reja masalaning optimal rejasi (optimal yechimi) deyiladi.

(3.4)-(3.6) masalaning joiz yechimlari to'plami xossalarini o'rganish uchun ba'zi tushunchalarni kiritamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Ma'lumki, R^n fazoda har bir $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ vektorga koordinatalari $(a_1,a_2,...,a_n)$ bo'lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ vektorni R^n fazo nuqtasi deb qaraymiz.

5-ta'rif. $A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+...+\alpha_n A_n$ –nuqtalar to'plami $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi deb ataladi. Bu yerda $\alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$

$C \in R^n$ to'plam berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir qatorda bu nuqtalarning $A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2$ $(0 \le \alpha_1 \le 1,\quad 0 \le \alpha_2 \le 1,\quad \alpha_1+\alpha_2=1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni $A_1 \in C,\ A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, u holda C to'plam qavariq to'plam deb ataladi.

Qavariq to'plamning geometrik ma'nosini tushuntirish uchun A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma tushunchasini kiritamiz.

Ma'lumki, A_1 va A_2 nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$A(\alpha)=A_2+(A_1-A_2)\alpha$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda A_1-A_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori.

Agar $\alpha=0$ bo'lsa, u holda $A(0)=A_2$;

Agar $\alpha=1$ bo‘lsa, u holda $A(1)=A_1$.

Agar $0\leq\alpha\leq1$ bo‘lsa, u holda $A(\alpha)$ A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi nuqtalarni aks ettiradi.

2-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining joiz yechimlaridan tashkil topgan to‘plam qavariq to‘plam bo‘ladi.

Isbot: Chiziqli programmalashtirish masalasining ixtiyoriy ikkita yechimining qavariq kombinatsiyasi ham yechim ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 chiziqli programmalashtirish masalasining yechimlari bo‘lsin. U holda

$$AX_1^T=P_0,\ x_{1j}\geq0,\ j=\overline{1,n}, \tag{3.14}$$

$$AX_2^T=P_0,\ x_{2j}\geq0,\ j=\overline{1,n}, \tag{3.15}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. X_1 va X_2 yechimlarning qavariq kombinatsiyasini tuzamiz.

$$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2,\ \ 0\leq\alpha\leq1,$$

hamda uni yechim ekanligini ko‘rsatamiz:

$$AX^T=A\left[\alpha X_1^T+(1-\alpha)X_2^T\right]\alpha AX_1^T+(1-\alpha)AX_2^T,$$

(3.14) va (3.15) tenglamalarni inobatga olsak:

$$AX^T=\alpha P_0+(1-\alpha)P_0=P_0.$$

Bu munosabat X vektor ham yechim ekanligini ko‘rsatadi. Demak, chiziqli programmalashtirish masalasining yechimlaridan tashkil topgan to‘plam qavariq to‘plam bo‘ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

3-teorema. Agar k ta o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $P_1,P_2,...,P_k$ vektorlar berilgan bo‘lib, ular uchun

$$P_1x_1+P_2x_2+...+P_kx_k=P_0$$

tenglik barcha $x_j>0$ lar uchun o‘rinli bo‘lsa, u holda $X=(x_1,x_2,...,x_k,0,0,...,0)$ nuqta K qavariq to‘plamning burchak nuqtasi bo‘ladi.

4-teorema. Qavariq to‘plamning ixtiyoriy nuqtasini uning burchak nuqtalarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

5-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasi o‘zining optimal qiymatiga shu masalaning joiz yechimlaridan tashkil topgan qavariq to‘plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar masala birdan ortiq burchak nuqtada optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan ixtiyoriy nuqtada ham o‘zining optimal qiymatiga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ K to‘plamning burchak nuqtasi bo‘lishi uchun musbat x_i komponentalar $P_1x_1+P_2x_2+...+P_nx_n=P_0$ yoyilmada o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan P_i vektorlarning koeffitsiyentlaridan iborat bo‘lishi zarur va yetarli.

2-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasining bazis yechimiga K_m qavariq to‘plamning burchak nuqtasi mos keladi va aksincha.

3-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini K_m to‘plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

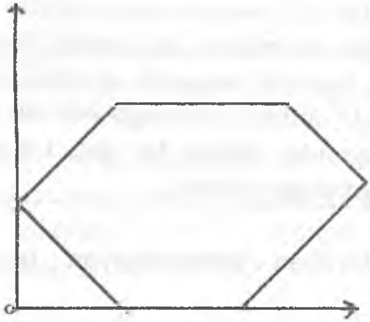
3.3. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini

Chiziqli programmalashtirish masalasini geometrik nuqtayi nazardan tahlil qilish uchun quyidagi standart masalani ko‘ramiz:

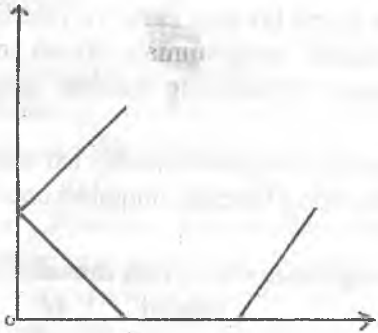
$$\begin{gathered} Ax\leq B \\ x_j\geq 0 \quad j=\overline{1,n} \\ Y=CX\rightarrow \max \end{gathered} \tag{3.15}$$

Ma’lumki, (3.15) masalaning har qanday rejasini n-o‘lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga yana shu ham ma’lumki, chiziqli tengsizliklar bilan aniqlangan bunday nuqtalar to‘plami qavariq to‘plamdan iborat bo‘ladi. Bu holda qavariq to‘plam (qavariq ko‘pburchak yoki ko‘pyoq) chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Masalan,

a) quyidagi rasmda keltirilgan qavariq to'plam chegaralangan:



b) quidagi rasmda keltirilgan qavariq to'plam chegaralanmagan:



(3.15) masalani geometrik nuqtayi nazardan tahlil qilamiz. Buning uchun quyidagi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b, \tag{3.16}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bilan tanishib chiqamiz.

Ma'lumki, koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{3.17}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, ... x_n$ nuqtalar to'plami ***gipertekislik*** deb ataladi. Demak, (3.15) masalada (3.17) kabi tengliklar qatnashsa ular gipertekisliklarni ifodalaydi. Har qanday gipertekislik fazoni ikki yarim fazoga ajratadi. Bu yarim fazolardan faqat bittasigina (3.16) tengsizlikni qanoatlantiradi. (3.16) tengsizlikni qanoatlantiradigan yarim fazoni aniqlash uchun $O(0,0,...,0)$ koordinata boshidan foydalanamiz, ya'ni:

- agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (3.16) tengsizlikni to'g'ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuqtani o'z ichiga oluvchi yarim fazo (3.16) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bo'ladi;
- agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (3.16) tengsizlikni noto'g'ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuiqtani o'z ichiga olmaydigan yarim fazo (3.16) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki, (3.15) masalada nechta tensizlik qatnashsa, ular shuncha yarim fazoni ifodalaydi. Bu yarim fazolarning kesishmasi esa (3.15) masalaning barcha joiz yechimlarini o'z ichiga oluvchi qavariq to'plamni tasvirlaydi. Bu qavariq to'plam masalaning joiz yechimlar sohasi deb ataladi.

(3.15) masalaning optimal yechimini topish uchun $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ maqsad funksiyasidan foydalanamiz. Buning uchun

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = const \qquad (3.18)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi gipertekisliklar oilasini qaraymiz.

Ma'lumki, bu yerda $const$ ning har bir qiymatiga bitta gipertekislik mos keladi. ChPM ning qavariq to'plami bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'lgan gipertekisliklar "***sath gipertekisliklar***" deyiladi. ChPM ning qavariq to'plami bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan gipertekislik, ya'ni urinma gipertekislik ***tayanch gipertekislik*** deyiladi. Tayanch gipertekislikni hosil qilish uchun (3.18) tenglikdagi $const$ ga turli qiymatlar berib uni gipertekislikning normal vektori bo'ylab parallel ko'chiramiz va urinma gipertekislikni hosil qilamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, Y funksiyaning maksimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalishi bo'ylab, Y funksiyaning minimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalishiga qarama-qarshi harakatlanish kerak.

$n=2$ o‘lchovli fazoda, ya’ni tekislikda ChPM ni geometrik nuqtayi nazardan ko‘rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \qquad (3.19)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (3.20)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \qquad (3.21)$$

Faraz qilaylik, (3.19) sistema (3.20) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega va ulardan tashkil topgan to‘plam chegaralangan bo‘lsin. Ma’lumki, (3.19) va (3.20) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ (i=\overline{1,m}),$$

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0$$

to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Bu tekisliklarni ko‘rib chiqamiz

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \ (i=\overline{1,m}) \qquad (3.22)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamini aniqlash uchun $O(0,0)$ nuqtadan foydalanamiz. Agar $O(0,0)$ nuqta (3.22) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o‘z ichiga oladi, aks holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o‘z ichiga olmaydi. Yuqoridagi mulohazalar asosida (3.19) sistemaning yechimlaridan iborat qavariq ko‘pburchakni topib olganimizdan so‘ng (3.20) tengsizliklarni e’tiborga olamiz. (3.20) tengsizliklar (3.19) yordamida topilgan qavariq ko‘pburchakning I chorakdagi qismini ajratib olishga yordam beradi. (3.19) va (3.20) cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko‘pburchakni ***reja ko‘pburchagi*** deb ataymiz.

(3.19)-(3.21) masalaning optimal yechimini topish uchun (3.21) ifodada qatnashayotgan chiziqli funksiyadan hosil qilinadigan

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const \qquad (3.23)$$

to‘g‘ri chiziqlar oilasidan foydalanamiz. Ma’lumki, (3.23) ifodadagi har bir ma’lum o‘zgarmas $C_0 = const$ qiymatida bitta

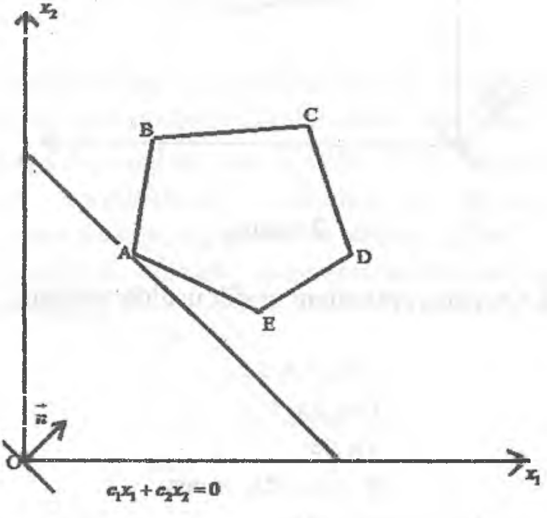
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

sath to‘g‘ri chizig‘i to‘g‘ri keladi.

So‘ngra, bu sath to‘g‘ri chiziqlardan birini, masalan, $c_1x_1+c_2x_2=C_0$ to‘g‘ri chiziqni chizib olamiz. $c_1x_1+c_2x_2=C_0$ chiziqni $n(c_1,c_2)$ normal vektor bo‘ylab parallel ko‘chirib, reja ko‘pburchagiga $c_1x_1+c_2x_2=C^0$ tayanch (urinma) to‘g‘ri chiziqni topib olamiz. Bu yerda C^0 (3.19)-(3.21) masalaning optimal yechimi yoki qiymati; $X^0(x_1^0,x_2^0)$ urinish nuqtasi esa (3.19)-(3.21) masalaning optimal rejasi deb ataladi.

Ba’zi xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, reja ko‘pburchagi $ABCDE$ beshburchakdan iborat bo‘lsin (1-rasm).



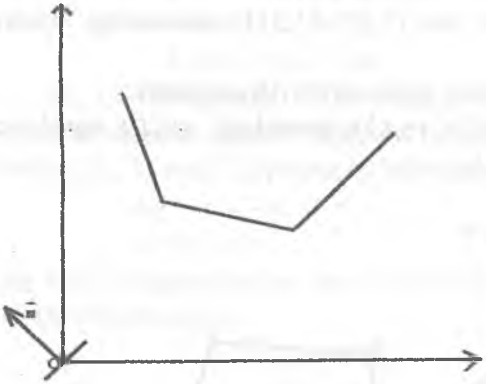
1-rasm.

1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, chiziqli funksiya o‘zining minimal qiymatiga $ABCDE$ qavariq ko‘pburchakning A nuqtasida erishadi. C nuqtada esa, u o‘zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi.

Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko‘pburchak chegaralanmagan bo‘lsin. Bunday ko‘pburchaklardan ba’zilarini ko‘rib chiqamiz.

1-hol. 1-rasmdagi holatda $c_1x_1+c_2x_2=C_0$ to‘g‘ri chiziq $\vec{n}$ vektor bo‘ylab siljib borib, har vaqt qavariq ko‘pburchakni kesib o‘tadi.

Bu holda $c_1x_1+c_2x_2=C_0$ funksiya minimal qiymatga ham, maksimal qiymatga ham erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya (3.20) va (3.21) cheklamalar bilan aniqlangan sohada quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan bo‘ladi.



2-rasm.

1-misol. Quyidagi masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 2 \\ -x_1+x_2\le 3 \\ x_1\le 3 \end{cases}$$

$$Z=-x_1-2x_2\rightarrow \min$$

$$x_1,x_2\ge 0.$$

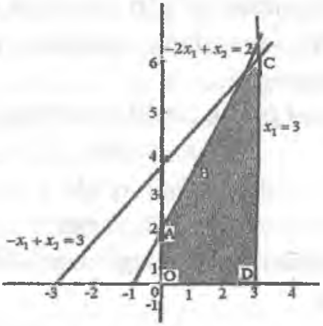
Yechish: Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko‘pburchak yasash uchun koordinatlar sistemasida

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=2 \\ -x_1+x_2=3 \\ x_1=3 \end{cases}$$

chiziqlar bilan chegaralangan

$$-2x_1+x_2 \le 2, -x_1+x_2 \le 3, x_1 \le 3$$

yarim tekisliklarni koordinatalar sistemasining I choragida yasaymiz, chunki $x_1, x_2 \ge 0$.



Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechimlar to‘plami bo‘yalgan *OABCD* beshburchakni tashkil qiladi. Natijada $Z=-x_1-2x_2$ chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $C(3;6)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari masalaning optimal rejasi, $Z(C)=-15 \to \min$ esa masalaning optimal yechimi bo‘ladi.

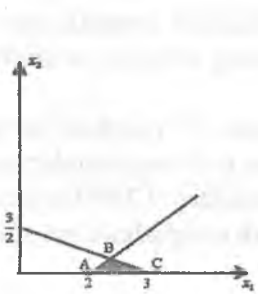
2-misol. Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 3 \\ x_1-x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$Y=2x_1+2x_2 \to \max$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Yechish: Bu yerda ham yuqoridagidek yechimlar ko‘pburchagini hosil qilamiz.



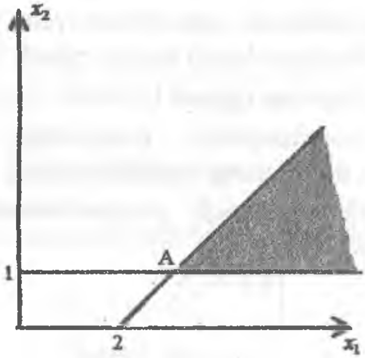
Rasmdan ko‘rinadiki, yechimlar ko‘pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\bar{n}(2;2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikular bo‘lgan $2x_1+2x_2=0$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq $2x_1+2x_2=const$ to‘g‘ri chiziqlar oilasidan biri bo‘ladi. Shakldan ko‘rinadiki, masalada maqsad funksiyaning qiymati yuqoridan chegaralanmagan.

3-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 4, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 1, \end{cases}$$

$$Y=x_1-2x_2\to\max$$

Yechish: Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo‘lamiz.



Rasmdan ko‘rinadiki, yechimlar to‘plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u $X^0(2{,}5;1)$ nuqta koordinatalaridan iborat.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, agar ChPMda noma’lumlar soni $n=2$ bo‘lganda uning optimal yechimini grafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Agar ChPM kanonik ko‘rinishda berilgan bo‘lib, tenglamalar sistemasida noma’lumlar soni tenglamalar sonidan 2 taga ko‘p bo‘lsa, ya’ni $n-m=2$ bo‘lsa, bunday ChPMlarining optimal yechimlarini ham gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarining tahlili. Endi ChPMsining optimal yechimini geometrik nuqtayi nazardan tahlil qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi iqtisodiy masalaning optimal yechimini quramiz va tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, korxonada ikki xil bo'yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo'yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xomashyodan foydalanilsin. Xomashyolarning zaxirasi 6 va 8 birlikni tashkil qilsin. Ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talab 2 birlikdan oshmasin va u birinchi bo'yoqqa bo'lgan talabdan 1 birlikka katta bo'lsin.

Har bir bo'yoqning bir birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo'lgan xomashyolar miqdori hamda korxonaning har bir birlik bo'yoqni sotishdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomashyolar **Bo'yoqlar**	1	2	**Foyda**
I	1	2	3
II	2	1	2
Zaxira	6	8	

Har bir bo'yoqdan qanchadan ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xomashyolar miqdori ularning zaxiralaridan oshmaydi, daromad eng yuqori bo'ladi hamda talab bo'yicha shartlar bajariladi? Masalaning optimal rejasini toping.

Masaladagi noma'lumlarni belgilaymiz:

x_1 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan I mahsulotning miqdori;

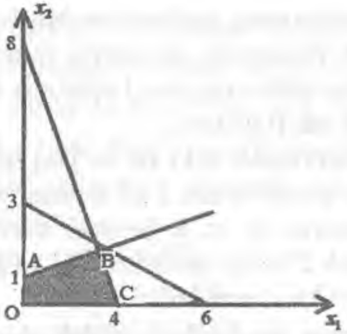
x_2 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan II mahsulot miqdori.

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 - x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Masalani grafik usulda yechib, $D\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



Optimal yechim quyidagicha bo‘ladi: $x_1=3\frac{1}{3};\, x_2=1\frac{1}{3};\, Y_{max}=12\frac{2}{3}$

Demak, korxona birinchi bo‘yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladigan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo‘ladi: $X^0(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3}),\ Y=12\frac{2}{3}$.

Endi masalaning optimal yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun $D-$optimal nuqtani qaraymiz. Bu nuqta $2x_1+x_2=8$ va $x_1+2x_2=6$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi. Bu esa, bo‘yoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xomashyoning ham kamyob ekanligini ko‘rsatadi. Optimal nuqta bilan bog‘liq bo‘lgan bu shartlar aktiv shartlar, optimal nuqtaga bog‘liq bo‘lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko‘rayotgan masalada mahsulotlarga bo‘lgan talabga qo‘yilgan $-x_1+x_2\le 1$ va $x_2\le 2$ shartlar optimal nuqtaga bog‘liq emas va shu sababli, bu shartlar passiv shartlar.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo‘lmaydi va ularning ma’lum darajada o‘zgarishi optimal yechimga ta’sir qilmaydi.

Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o‘zgarishiga olib keladi.

Masalan, birinchi xomashyo zaxirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta’sir ko‘rsatishini ko‘rish uchun uning zaxirasini 7 ga teng deb olamiz. U holda *CD* to‘g‘ri chiziq o‘ziga parallel ravishda yuqoriga ko‘tariladi va *DCK* uchburchak reja ko'pburchagiga qo'shiladi. Natijada K nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_1=2; x_1+2x_2=7; 2x_1+x_2=8$ to'g'ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning $0\le x_2\le 2; x_1+2x_2\le 7; 2x_1+x_2\le 8$ shartlar aktiv shartlarga aylanadi. Demak, yangi optimal yechim: $X^0(2,3), Y_{\max}=13$.

Xuddi shunday yo'l bilan ikkinchi xomashyoni bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o'zgartirishini ko'rsatish mumkin.

Bundan tashqari, kamyob bo'lmagan xomashyolar miqdorini, optimal yechimga ta'sir qilmagan holda, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi 8-shaklda BC kesma $x_1=2$ chiziqni, ya'ni masalaning 4-shartini ifodalaydi. Ma'lumki, bu – passiv shart. Maqsad funksiya qiymatini o'zgartirmagan holda passiv shartni qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun BC kesmani o'ziga parallel ravishda pastga, D nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2=\frac{4}{3}$ bo'ladi.

Demak, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talabni optimal yechimga ta'sir qilmasdan $\frac{4}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo'l bilan masalaning optimal yechimiga ta'sir etmasdan, uning boshqa passiv shartning o'ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko'rsatish mumkin.

3.4. Chiziqli programmalash masalasini yechishning simpleks usuli

Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940-yilda ishlab chiqilgan bo'lib, chiziqli dasturlash modeli sifatida iqtisodiy, ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.

Simpleks usuli faqat chiziqli dasturlash muammolarini yechishga qaratilgan bo'lsada, uning yechish texnikalari umumiy qiziqishga sazovordir. Bu texnika chiziqsiz optimallashtirish muammolarini chiziqli cheklovlardan foydalanish va chiziqsiz cheklovlarni umumiylashtirishi mumkin.

Dansig yaratgan simpleks usul bilan chiziqli programmalash masalasi (ChPM)ning optimal yechimini topish uchun ChPM kanonik shaklda va cheklamalar sistemasi keltirilgan tenglamalar sistemasi shaklida bo'lishi kerak. Simpleks usuli ChPMning optimal yechimini chekli qadamdan so'ng topishga yordam beradi.

Bizga quyidagi ChPM berilgan bo'lsin.

$$Z = C^T x \to \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Bu yerda x quyidagicha ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Bu bazis o'zgaruvchilarning vektori esa nolga teng bo'lgan bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning vektori. Maqsad funksiya quyidagicha yoziladi:

$$Z = C_B^T x_B + C_N^T x_N,$$

bu yerda bazis o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari va bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari orqali bu tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Qaytadan yozilganda quyidagicha bo'ladi:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarni qiymati o'zgartirish orqali $Ax = b$ tenglikka barcha mumkin bo'lishi bo'lgan barcha yechimlarni qo'lga kiritamiz.

Bu formulani Z formulaga almashtirsak, quyidagi formula kelib chiqadi

$$Z = C_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T B^{-1} N)x_N.$$

Agar biz $y = (C_B^T B^{-1})^T = B^{-T} C_B$, ni aniqlasak, Z ni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$Z = y^T b + (C_N^T - y^T N)x_N.$$

Bu formula samaraliroq. y vektor simpleks vektorning ko'paytiruvchilaridir. Maqsad funksiya va bazis o'zgaruvchilarning qiymati $x_N = 0$ qiymatga qo'yish orqali topiladi.

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}b \text{ va } \hat{Z} = C_B^T B^{-1} b.$$

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	C_B^T	C_N^T	0
x_B	B	N	b

va bazis asosda jadval quyidagicha bo‘ladi.

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	0	$C_N^T - C_B^T B^{-1} N$	0
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Bu simpleks jadvalining rasmiy formulalari hisoblanadi. Bizga quyidagi ChPM berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \quad x_2 \qquad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad x_m + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.25}$$

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min \tag{3.26}$$

Ko‘rinib turibdiki, bu masalada cheklamalar keltirilgan tenglamalar sistemasi ko‘rinishidadir. Sistemani vektor shaklida yozib olamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0,$$

bu yerda, $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar sistemasi m-o‘lchovli fazoda chiziqli erkli birlik vektorlar sistemasidan iborat bo‘lib, bazis vektorlar sistemasini tashkil etadi. Ular m-o‘lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1, x_2, ..., x_m$ o‘zgaruvchilar “bazis (erksiz) o‘zgaruvchilar” deb ataladi. $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar bazis bo‘lmagan (erkli) o‘zgaruvchilar. Agar erkli o‘zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o‘zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo‘ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bazis yechim hosil bo‘ladi. Bu yechimni boshlang‘ich bazis yechim deb ataymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: P_b–bazis vektorlar sistemasi; C_b–maqsad funksiyasida bazis o‘zgaruvchlar oldidagi c_i koeffitsiyentlar.

Yuqoridagilardan foydalanib, quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}		a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}		a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}		a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}		a_{mk}	…	a_{mn}

Bu jadval ***simpleks jadvali*** deb ataladi. $X_0=(b_1,b_2,...,b_m,0,...,0)$ boshlang‘ich bazis rejani optimallikka tekshirish uchun bu jadvalga qo‘shimcha $\Delta=\{\Delta_0,\Delta_j\}$, $j=\overline{1,n}$ satr kiritamiz.

Jadvalning P_0 ustiniga mos Δ_0 ni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_0 \equiv Y_0=\sum_{i=1}^{m} b_i c_i . \tag{3.27}$$

Jadvalning P_j ustinlariga mos Δ_j larni esa quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i - c_j . \tag{3.28}$$

U holda yuqoridagi jadval quyidagi ko‘rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

(3.28) formuladan ko‘rinib turibdiki, simpleks jadvaldagi bazis vektorlarga mos Δ_j lar har doim 0 ga teng.

Agar c_j ustunlarga mos barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ shart bajarilsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechim optimal yechim bo'ladi. Y chiziqli funksiyaning minimal qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $\Delta_j \leq 0$ shart (3.24)-(3.26) ChPM uchun optimallik sharti deyiladi.

Agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo'lsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ masalaning optimal yechimi bo'la olmaydi.

Bunday holatda topilgan $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bazis rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa bazis rejaga almashtirish kerak.

Yangi bazisga kiritiladigan vektorni

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j \tag{3.29}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$ bo'lsin. Demak, yangi bazislar sistemasida P_k vektor bazis vektor sifatida qatnashishi kerak. Agar P_k vektor bazis vektorlar sistemasiga kiritilsa, u holda eski P_i–bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak, chunki (3.24) sistemaning asosiy matritsasi A matrisaning rangi: $rang(A) = m$. Bazisdan chiqariladigan P_i, $i = \overline{1, m}$ vektorni aniqlash uchun $\frac{b_i}{a_{ik}}$ nisbat orqali aniqlovchi koeffitsiyent tushunchasini kiritamiz. Bazisdan chiqariladigan P_i, $i = \overline{1, m}$ vektorni

$$\min_{a_{ik} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}} \tag{3.30}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{ik} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_l}{a_{lk}}$ bo'lsin. Demak, P_l vektor bazisdan chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan l satrdagi P_l vektor o'rniga u joylashgan k ustundagi P_k vektor bazis vektor sifatida kiritiladi.

Buning uchun simpleks jadvalida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi.

1. l satrdagi barcha: b_l, a_{lj} elementlarni a_{lk} hal qiluvchi elementga bo‘lib, bu satrda $\frac{b_l}{a_{lk}}, \frac{a_{l1}}{a_{lk}}, ..., \frac{a_{lk-1}}{a_{lk}}$, 1, $\frac{a_{lk+1}}{a_{lk}}, ..., \frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ elementlarni hosil qilamiz. U holda jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	a.k
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n	
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1k}}$
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	$\frac{b_2}{a_{2k}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	0	…	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	…	1	…	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$	$\boxed{\frac{b_l}{a_{lk}}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{nm}	$\frac{b_m}{a_{mk}}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	$\boxed{\Delta_k}$	…	Δ_n	

2. P_k vektorni bazis vektorga aylantirish uchun, ya’ni jadvalni quyidagi

P_b	C_b	P_0	c_1	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	…	P_l	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	…	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	…	0	$\tilde{a}_{1m+1}$	…	0	…	$\tilde{a}_{1n}$
P_2	c_2	b_2	0	…	$-\frac{a_{2k}}{a_{lk}}$	…	0	$\tilde{a}_{2m+1}$	…	0	…	$\tilde{a}_{2n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	…	$\frac{1}{a_{lk}}$	…	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	…	1	…	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	…	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	…	1	$\tilde{a}_{mm+1}$	…	0	…	$\tilde{a}_{mn}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	…	$\bar{\Delta}_l$	…	Δ_m	$\tilde{\Delta}_{m+1}$	…	$\tilde{\Delta}_k$	…	$\tilde{\Delta}_n$

ko'rinishga keltirish uchun jadvalda quyidagi elementar almashtirishlarni bajaramiz:

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}; \ \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}; \ i \neq l. \qquad (3.31)$$

Bu jarayonni barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Har bir qadamda $\Delta_j \leq 0$ optimallik shartini tekshirib boramiz.

Shunday qilib quyidagi teoremalar o'rinli.

1-teorema. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j \leq 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2-teorema. Agar X^0 bazis rejada biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ shart o'rinli bo'lib qolsa, X^0 optimal reja bo'lmaydi va u holda shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1) < Y(X^0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar uchun $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Shuning uchun quyidagi shartlarga:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

(3.24)-(3.26) masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti deyiladi.

Agar ChPMda maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda masalaning optimallik sharti sifatida: $\Delta_j \geq 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlikni; masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti sifatida esa:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

tengsizliklarni qabul qilamiz.

1-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2; \\ -x_1 + 2x_2 \le 7; \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,...,5)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

P_b	C_b		-1	-2	0	0	0	a.k.
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	$\boxed{2}$
P_4	0	7	-1	2	0	1	0	$\frac{7}{2}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	-
Δ_j		0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	
P_2	-2	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	3	0	-2	1	0	$\boxed{1}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	3
Δ_j		-4	$\boxed{5}$	0	-2	0	0	
P_2	-2	4	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-
P_1	-1	1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-
P_5	0	2	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	3
Δ_j		-9	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	
P_2	-2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Simpleks usulning I bosqichida bazis vektorlar sistemasiga P_3 vektor kiritilib P_2 vektor bazisdan chiqarildi, II bosqichida P_4 bazisga kiritildi va P_1 bazisdan chiqarildi. Simpleks jadval (3.31) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi: $X_0=(3, 5, 3, 0, 0,)$, $Y_{\min}=-13$.

2-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 2; \\ -x_1+x_2\le 3; \\ x_1\le 3; \end{cases}$$

$$x_j\ge 0 \ (j=1,2)$$

$$Z=-x_1\to \min.$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2; \\ -x_1+x_2+x_4=3; \\ x_1+x_5=3; \end{cases}$$

$$x_j\ge 0 \ (j=1,2,...,5)$$

$$Z=-x_1\to \min.$$

P_b	C_b		-1	0	0	0	0	a.k.
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	-1	1	0	1	0	-
P_5	0	3	1	0	0	0	1	$\boxed{3}$
Δ_j		0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	
P_2	0	8	0	1	1	0	1	-
P_4	0	6	0	1	0	1	1	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
Δ_j		-3	0	0	0	0	-1	

$$X_0=(3,0,8,6,0,),\qquad Y_{\min}=-3.$$

3.5. Sun'iy bazis usuli

ChPM masalasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0, \tag{3.32}$$
$$Y=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow \min.$$

Bu masalada tenglamalar sistemasi keltirilmagan. Shu sababli undagi tenglamalarga $x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+m}$ –sun'iy o'zgaruvchilar kiritib, uni kengaytirilgan sistemaga aylantiramiz. U holda quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m, \end{cases}$$
$$x_1\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ x_{n+1}\geq 0,\ldots,x_{n+m}\geq 0, \tag{3.33}$$
$$Y=c_1x_1+c_2x_2+\ \ldots+c_nx_n+M(x_{n+1}+\ldots+x_{n+m})\rightarrow \min.$$

Bu yerda, M –yetarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos $P_{n+1},\ P_{n+2},\ \ldots,\ P_{n+m}$ vektorlar "sun'iy bazis vektorlar" deb ataladi. Berilgan (3.32) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

1-teorema. Agar kengaytirilgan (3.32) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni: $x_{n+i}=0\ \ (i=\overline{1,m})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan (3.33) masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda boshlang'ich masala yechimga ega bo'lmaydi.

Sun'iy bazis usuli maqsad funksiyaga jarima(penalty) termini kiritiladi qaysiki bazisga sun'iy o'zgaruvchilar kiritishga mo'ljallangan. Biz yana shartni minimallashtirish namunasidan metodni oydinlashtirish uchun foydalanamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

Oldingidek, standart shaklga keltiramiz va sun'iy o'zgaruvchlar kiritiladi. Lekin bu holatda qo'shimcha 1 muammo bosqich tashkil qilish o'rniga, maqsad funksiya qo'yilgan shartni minimumga aylantiriladi.

$$Z' = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min$$

Bu yerda M eng katta musbat sonni ifodalaydi. Umuman, har bir sun'iy o'zgaruvchini ifodalovchi bitta penalty termin bor. Kompyuter hisoblari uchun M programma chizig'ining yechimlari orasida vujudaga kelishi mumkin bo'lgan boshqa hamma sonlar uchun dominat yetarli katta son.

Agar M katta bo'lsa, musbat sun'iy o'zgaruvchini o'z ichiga olgan qandaydir bazis maqsad funksiya Z' qiymatini ham katta musbat songa olib boradi. Agar qandaydir bazis dastlabki chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan javobi bo'lsa, u holda o'rganilayotgan bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchilarni olmaydi va uning maqsad qiymati kichikroq bo'ladi. Chunki sun'iy o'zgaruvchilar ular bilan katta qiymatli bog'liqlikka ega, simpleks usul, agar bu mavjud bo'lsa, ularni bazisdan oxirida olib tashlaydi. Qandaydir ba'zis jarima muammosi bo'lgan yechim bo'ladi qaysiki bazis emas hamma sun'iy o'zgaruvchilar (va bundan buyog'iga nol) ham orginal muammoga mumkin bo'lgan yechim bo'ladi.

Sun'iy bazis usulida maqsad funksiya 1 muammo bosqichida maqsad funsiyaning chegarasi sifatida olinishi mumkin. Sun'iy bazis usulining maqsad funksiyasi mavjud:

$$Z' = c^T x + M\sum_i a_i$$

Bu maqsaddan foydalanishga teng:

$$\hat{Z} = M^{-1}c^T x + \sum_i a_i$$

Chegaralarni $M \to \infty$ sifatida olish 1 maqsad bosqichini beradi. Natijada 1 muammo bosqichi ko‘rinishi Sun’iy bazis usuli ko‘rinishidan faqat tepa qatordan farq qiladi. Shu sababli, biz simpleks usulini misollarda tezroq ko‘rib chiqamiz, ikki bosqich usulini tekshirishni amalga oshirishga nisbatan.

Bizning misolda, jarima (penalized) muommo uchun dastlabki bazis bilan sun’iy o‘zgaruvchilar quyidagini beradi.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	2	3	0	0	M	M	0
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	2	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Oldingidek, sun’iy o‘zgaruvchilar uchun qisqartirilgan qiymatlar nol bo‘lmaydi va muammo doimiy bazis terminida yozilishi mumkin.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	$-5M+2$	$2M+3$	M	0	0	0	$-16M$
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	$\boxed{2}$	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Birinchi takrorlashda, x_1 kirayotgan o‘zgaruvchi va a_2 chiqayotgan o‘zgaruvchi. Ikki bosqich usulidagidek, sun’iy o‘zgaruvchi bazisni tark etsa, u ahamiyatsizga aylanadi va muammodan olib tashlanadi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (va a_2 olib tashlangandan), biz quyidagicha bazis yechim olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	-8M+7	$-\frac{3}{2}M+1$	0	0	-11M-2
a_1	0	8	$\frac{3}{2}$	0	1	11
x_1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
x_4	0	$\boxed{11}$	2	1	0	15

Ikkinchi takrorlashda, x_2 kiritilayotgan o‘zgaruvchi va x_4 chiqib ketayotgan o‘zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (va a_1 ustun olib tashlangandan keyin u ahamiyatsiz), biz quyidagi yangi bazis javobni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	0	$-\frac{M+6}{22}$	$\frac{8M-7}{11}$	0	$-\frac{M+127}{11}$
a_1	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{8}{11}$	1	$\frac{1}{11}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{22}$	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{41}{11}$
x_2	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{15}{11}$

Uchinchi takrorlashda, x_3 kiritilayotgan o‘zgaruvchi va a_1 chiqib ketayotgan o‘zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (va a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki u ahamiyatsiz), biz yangi bazis yechimni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	0	0	-5	-11
x_3	0	0	1	-16	2
x_1	1	0	0	-2	4
x_2	0	1	0	3	1

Joriy bazis o‘z ichiga hech qanday sun’iy o‘zgaruvchini olmaydi, shuning uchun bu haqiqiy muammo uchun mumkin bo‘lgan maqsad. To'rtinchi takrorlashda, x_4 uchun qisqartirilgan qiymat bo'lishsiz shuning uchun u optimal bazis emas. Muvozanatlashish quyidagini beradi:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{28}{3}$
x_3	0	$\frac{16}{3}$	1	0	$\frac{22}{3}$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{14}{3}$
x_4	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$

Bu bazis optimal. Kutilgandek, bu ikki – bosqich usuldan olingan optimal bazis bilan bir xil.

Programmalarda bajarishda penalty uchun mos qiymatni tanlsh qiyin bo'lishi mumkin.

M muammoda boshqa qiymatlar uchun dominant bo'lishi uchun yetarlicha katta bo'lishi zarur, lekin u juda katta bo'lsa, uni aylana bo'ylab hisoblashda jiddiy muammolar kelib chiqadi.

1-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalada maqsad funksiyasiga qo'yilgan shartni minimumga aylantirib, sun'iy $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,$$

$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \to \min.$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvaliga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

			-5	-3	-4	1	M	M	a.k.
P_b	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	$\boxed{1}$
P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	$\frac{3}{2}$
Δ_j		$6M$	$3M$	$\boxed{5M}$	$3M$	$3M$	0	0	
P_2	-3	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
P_6	M	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$
Δ_j		M	$\boxed{\frac{4}{3}M}$	0	$-\frac{1}{3}M$	$-\frac{1}{3}M$	$-\frac{5}{3}M$	0	
P_2	-3	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{1}$
P_1	-5	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-
Δ_j		-6	0	0	$\boxed{3}$	-2	$-M$	$-M$	
P_3	-4	1	0	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
P_1	-5	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
Δ_j		-9	0	-4	0	-5	$-M$	$-M$	

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng. Shuning uchun (1-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi:

$$X_0(1,0,1,0), \qquad Z_{\min}=-9, \ Z_{\max}=9.$$

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi. Sikllanish va undan qutilish usuli (ε-usul). Agar ChPM da P_i bazis vektorlarga mos qoluvchi birorta $x_i^0=0$ bo'lsa, ya'ni

$$P_0=P_1x_1+P_2x_2+...+P_mx_m \qquad (3.34)$$

yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi *aynigan chiziqli programmalashtirish* *masalasi* deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja esa aynigan reja bo'ladi.

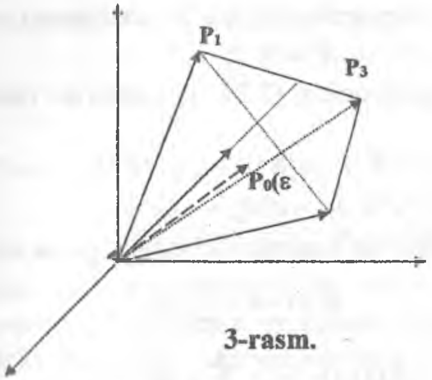
Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli programmalashtirish masalalarini aynimagan deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funksiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

Agar masalaning bazis rejasi aynigan reja bo'lsa,

$$\theta = \frac{b_k}{a_{lk}} = 0 \tag{3.35}$$

bo'lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o'tganda, chiziqli funksiyaning qiymati o'zgarmaydi. Ba'zan bunday masalalarni yechish jarayonida sikllanish holati, ya'ni ma'lum sondagi iteratsiyadan so'ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro'y berishi mumkin. Sikllanish holati ro'y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Sikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i = 0$ bo'lgan holatlarda ro'y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta = 0$ bo'lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to'g'ri aniqlash sikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko'rinadiki, aynigan masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo'lini ko'rsatishi kerak.

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik tasvirini 3-rasmdan ko'rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo'lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffitsiyenti $x_3 = 0$ bo'lishi kerak.



3-rasm.

Agar P_3 vektorni $\varepsilon>0$ ga siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1+\varepsilon^2P_2+\varepsilon^3P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3=P_0$$

cheklamalarining o'ng tomoniga qo'shib yozamiz:

$$P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2P_2+\varepsilon^3P_3=P_0(\varepsilon). \qquad (3.36)$$

Hosil bo'lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil togan qavariq konusning ichida yotadi (3-rasm). Demak, P₀ ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$P_1x_1+P_2x_2+...+x_mP_m+...+P_nx_n=P_0 \qquad (3.37)$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}&P_1x_1+P_2x_2+...+x_mP_m+...+P_nx_n=\\&=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2P_2+...+\varepsilon^mP_m+...+\varepsilon^nP_n=P_0(\varepsilon)\end{aligned} \qquad (3.38)$$

Faraz qilaylik, $P_1, P_2,..., P_m$ bazis vektorlar bo'lib, ular B matrisani tashkil qilsin. U holda

$$\overline{X}=B^{-1}P_0\geq 0 \qquad (3.39)$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\overline{X}(\varepsilon)=B^{-1}P_0(\varepsilon)\geq 0 \qquad (3.40)$$

o'zgartirilgan (3.6) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo'ladi.

$$\overline{X}_j=B^{-1}P_j \qquad (3.41)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun (3.39) ni ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$\overline{X}(\varepsilon)=B^{-1}P_0+\varepsilon B^{-1}P_1+\varepsilon^2B^{-1}P_2+...+\varepsilon^m B^{-1}P_m+...+\varepsilon^n B^{-1}P_n=$$
$$=\overline{X}+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+...+\varepsilon^m X_m+...+\varepsilon^n X_n. \qquad (3.42)$$

Demak, sistemaning o'ng tomoni $\overline{b_i}(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{b_i}(\varepsilon)=\overline{b_i}+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^j a_{ij} \qquad (3.43)$$

$$\overline{b_i}(\varepsilon)=\overline{b_i}+\varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon^j a_{ij} \qquad (3.44)$$

ε kichik son bolgani uchun $\overline{b_i}(\varepsilon)>0$.

Simpleks usulini qo'llash jarayonida bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0=\frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}}=\min_i\frac{\overline{b_i}(\varepsilon)}{a_{ik}}=\frac{b_i+\varepsilon^l+\sum\limits_{j=m+1}^{n}\varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}}>0 \qquad (3.45)$$

formuladan foydalanamiz. Farazga asosan $\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$ nisbat $i=l$ da minimumga erishadi.

Agar

$$\theta_0=\min_i\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik}>0)$$

qiymat, $i=l$ indeks uchun o'rinli bo'lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so'ng, simpleks jadval ma'lum yo'l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja yetarli darajada kichik ε uchun aynimagan reja bo'ladi.

Amalda aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala amerikalik matematik Bil tomonidan tuzilgan.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7},$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min.$$

Bu masala aynigan masala bo‘lib, uni yuqorida keltirilgan “to‘g‘rilash” usulini qo‘llamasak yechganda sikllanish holati ro‘y beradi. Simpleks usulning 7-iteratsiyasidan so‘ng 2-iteratsiyaga qaytish holati ro‘y beradi. Agar yuqorida ko‘rilgan “to‘g‘rilash” usulini qo‘llamasak, bu sikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak, masalaning optimal yechimini topish imkoniyati bo‘lmaydi. Endi masalani “to‘g‘rilash” usulini qo‘llab yechamiz. Eng avval berilgan masaladagi sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

Bu yerda ε kichik musbat son bo‘lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o‘ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo‘shish yetarli bo‘lsin. Masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I

P_b	C_b	P_0	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$\frac{\varepsilon}{4} - 60\varepsilon^2$	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0

P_6	0	$\frac{\varepsilon}{2}-90\varepsilon^2$	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1

II.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+160\varepsilon^2$	0	30	$\frac{7}{50}$	-33	-3	0	0

III.

P_1	$-\frac{3}{4}$	ε	1	40	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+150\varepsilon^2$	0	0	$\frac{2}{25}$	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\varepsilon-160\varepsilon^2$	1	-160	0	-4	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	0
P_3	$-\frac{1}{50}$	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	$-\frac{100}{3}$	$\frac{50}{3}$	0
P_7	0	$1-500\varepsilon^2$	0	-500	0	250	$\frac{100}{3}$	$-\frac{50}{3}$	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+110\varepsilon^2$	0	-40	0	2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0

V.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{2}{125}+\varepsilon-168\varepsilon^2$	1	-168	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{125}$
P_3	$-\frac{1}{50}$	1	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	$\frac{1}{250}-2\varepsilon^2$	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{250}$
		$-\frac{1}{125}-\frac{3\varepsilon}{4}-$ $-114\varepsilon^2$	0	-36	0	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{3}{125}$

VI.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{125}+\varepsilon-180\varepsilon^2$	1	-180	0	6	0	2	$\frac{1}{25}$
P_3	$-\frac{1}{50}$	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	$\frac{3}{100}-15\varepsilon^2$	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$
		$135\varepsilon^2-\frac{1}{20}-\frac{3\varepsilon}{4}$	0	-15	0	$-\frac{21}{5}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{100}$

Shunday qilib, yuqoridagi “to‘g‘irlash” usulini qo‘llab masalani yechganda 6-bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon)=\left(180\varepsilon^2+\varepsilon+\frac{1}{25};\ 0;\ 500\varepsilon^2+1;\ 0;\ \frac{3}{100}-15\varepsilon^2\right),$$

$$Y_{\min}(\varepsilon)=-135\varepsilon^2-\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{1}{20}.$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon=0$ deb qabul qilamiz. Javob:

$$X_0=\left(\frac{1}{25};\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{3}{100}\right),\qquad Y_{\min}=-\frac{1}{20}.$$

3.6. Ikkilanish nazariyasi

Quyidagi ChPMni qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.46}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{3.47}$$

Bu masala matrisa shaklida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{3.48}$$

1-ta'rif.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m = c_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = c_n, \end{cases} \tag{3.49}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \tag{3.50}$$

$$\bar{F} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{3.51}$$

masala (3.46), (3.47) masalaga ikkilangan masala deyiladi.

U holda (3.48) masalaga ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &A^TY = C^T, \\ &y_i \ge 0, \ i = \overline{1,n}, \\ &\bar{F} = B^TY \to \min. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Bu yerda $Y^T = (y_1 \ y_2 \ldots y_m)$, $C = (c_1 \ c_2 \ldots c_n)$.

Yuqoridagidan foydalanib ikkilangan masalani qurish qoidasini keltiramiz:

1. Berilgan masala koeffitsiyentlaridan tashkil topgan asosiy matrisa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda ikkilangan masalaning asosiy matrisasi

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lib, A matrisaga transponirlangan bo‘ladi.

2. Ikkilangan masaladagi noma’lumlar soni berilgan masaladagi cheklamalar soniga teng. Ikkilangan masaladagi cheklamalar soni esa berilgan masaladagi noma’lumlar soniga teng bo‘ladi.

3. Ikkilangan masalaning maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari berilgan masalaning ozod hadlardan iborat bo‘ladi. Ikkilangan masalaning ozod hadlari esa berilgan masalaning maqsad funksiyasi koeffitsiyentlaridan iborat bo‘ladi.

4. Agar berilgan masalada $x_j \geq 0$ bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi unga mos j–cheklamaga $\geq$ ko‘rinishdagi tengsizlik qo‘yiladi. Agarda x_j noma’lumning ishorasi noaniq bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi j–cheklamaga tenglik qo‘yiladi.

5. Agar berilgan masaladagi i–cheklama tengsizlikdan iborat bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos noma’lumning ishorasi $y_i \geq 0$ bo‘ladi. Agarda berilgah masaladagi i–cheklama tenglikdan iborat bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos y_i noma’lumning ishorasi noaniq bo‘ladi.

Har qanday chiziqli programmalash masalasi uchun ikkilangan masala mavjud va uni berilgan masaladagi maqsad funksiya va noma’lumlarga qo‘yilgan cheklamalar orqali to‘la aniqlash mumkin.

Biz quyida ChPMlarining ba’zilariga ikkilangan masalani qurish qoidasi bilan tanishib chiqamiz.

Standart ChPM berilgan bo‘lsin:

$$\begin{gathered} AX \leq B, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ F = CX \to \max. \end{gathered} \tag{3.53}$$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix}$; $\overline{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ belgilashlar kiritamiz, bu yerda $E - n \times n$ o‘lchovli birlik matrisa, $0 - n$ o‘lchovli nol matrisa. U holda (3.53) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{gathered}\bar{A}X \le \bar{B},\\ Y = CX \to \max.\end{gathered} \tag{3.54}$$

Bu masalaning ko‘rinishi (3.48) masala bilan mos tushadi. Demak, ikkilangan masalani yozishda ta’rifdan foydalanish mumkin. Shunday qilib, ta’rifga asosan (3.54) masala uchun ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{gathered}\bar{A}^T P = C^T,\\ p_i \ge 0,\ i = \overline{1,n+m},\\ \breve{F} = \bar{B}^T P \to \min.\end{gathered} \tag{3.55}$$

Bu yerda, $P^T = (p_1\ p_2\ \dots\ p_{n+m}) = (Y^T, Z^T) = (y_1\ y_2\ \dots\ y_m\ z_1\ z_2\ \dots\ z_n)$, $A^T = (A^T, -E)$ ekanligini hisobga olib, oldingi belgilashlarga qaytsak (3.55) quyidagicha yoziladi:

$$\begin{gathered}A^T Y - Z = C^T,\\ y_i \ge 0,\ z_j \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\\ \breve{F} = B^T Y \to \min.\end{gathered} \tag{3.56}$$

$z_j \ge 0$ bo‘lgani uchun $A^T Y - Z = C$ tenglik $A^T Y \ge C$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun (3.53) masalaga ikkilangan masala

$$\begin{gathered}A^T Y \ge C^T,\\ y_i \ge 0,\quad i = \overline{1,m},\\ \breve{F} = B^T Y \to \min\end{gathered} \tag{3.57}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

ChPM quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$\begin{gathered}AX = B,\\ x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n},\\ F = CX \to \max.\end{gathered} \tag{3.58}$$

Ma’lumki, $q = k \Leftrightarrow \begin{cases} q \le k, \\ q \ge k. \end{cases}$ U holda (3.58) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{gathered}AX \le B,\ -AX \le -B,\\ x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n},\\ F = CX \to \max.\end{gathered} \tag{3.59}$$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida (3.59) masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$\tilde{A}X \le \tilde{B},$$
$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.60}$$
$$F = CX \to \max.$$

(3.60) masalaga ikkilangan masalani, (3.57) ga asosan, yozamiz:

$$\tilde{A}^T S \ge C^T,$$
$$s_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m},$$
$$\tilde{F} = \tilde{B}^T S \to \min.$$

Bu yerda, $S^T=(s_1\ s_2\ \dots\ s_{2m})=\left(P^T, Q^T\right)=(p_1\ p_2\ \dots\ p_m\ q_1\ q_2\ \dots\ q_m)$.

Oldingi belgilashlarga qaytamiz, u holda

$$A^T P - A^T Q \ge C^T,$$
$$p_i \ge 0, q_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m},$$
$$\tilde{F} = B^T P - B^T Q \to \min.$$

$Y=P-Q$ belgilashdan so‘ng

$$A^T Y \ge C^T,$$
$$\tilde{F} = B^T Y \to \min \tag{3.61}$$

masalani hosil qilamiz. Bu yerda Y ikkita matrisaning ayirmasi bo‘lgani uchun uning ishorasi noaniq bo‘ladi.

Berilgan masala va unga ikkilangan masala birgalikda ***o‘zaro qo‘shma masalalar*** deb ataladi. Agar qo‘shma masalalardan birortasi yechimga ega bo‘lsa, ularning ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo‘ladi.

O‘zaro qo‘shma masalalarni ko‘z oldiga keltirish va ularni iqtisodiy ma’nolarini tahlil qilish uchun quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko‘ramiz.

$$AX \le B,$$
$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.62}$$
$$F = CX \to \max.$$

Yuqoridagilardan xulosa qilib, o‘zaro qo‘shma masalalarning matematik modellarini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

Simmetirik bo‘lmagan qo‘shma masalalar		
Berilgan masala		**Ikkilangan masala**
I	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \ge C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$

II	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^TY \le C^T,$ $\tilde{F} = B^TY \to \max.$

Berilgan masala		Ikkilangan masala
I	$AX \le B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^TY \ge C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^TY \to \min.$
II	$AX \ge B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^TY \le C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^TY \to \max.$

1-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masalani tuzing.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Yechish: Masalada barcha cheklamalar "$\le$" ko'rinishdagi tengsizliklardan iborat. Demak, berilgan masalaga simmetirik bo'lgan qo'shma masala 4-ko'rinishda tuziladi. Natijada quyidagi simmetirik qo'shma masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,$$

$$F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min.$$

2-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Z = 4x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Yechish: Berilgan masaladagi ikkinchi cheklama tenglamadan iborat, birinchi va uchinchi cheklamalar esa tengsizliklardan iborat. Shuning uchun qo'shma masalani tuzishda yuqoridagi 5-punktda keltirilgan qoidaga rioya qilamiz va quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0,$$

$$F = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to \min.$$

Ikkilangan masalalar yechimlari orasida mavjud bo'lgan bog'lanishni ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi va birinchi teoremasi orqali aniqlash mumkin.

Ikkilanish nazariyasida berilgan masalaning ixtiyoriy X joiz rejasi hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy Y joiz rejasi uchun

$$F(X) \leq \bar{F}(Y)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi deb ataladi.

Agar X^* va Y^* joiz rejalar uchun

$$F(X^*) = \bar{F}(Y^*)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu joiz rejalar mos ravishda berilgan va ikkilangan masalaning optimal rejasi bo'ladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy joiz ishlab chiqarish rejasi hamda xomashyolarning ixtiyoriy joiz baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi xomashyolar bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

Ikkilanish nazariyasining asosini ikki teorema tashkil etadi. Ulardan biri ***ikkilanish teoremasi***, ikkinchisi esa ***muvozanatlik teoremasi*** deb ataladi.

Muvozanatlik teoremasidan ikkilangan masalaning iqtisodiy tahlilidan foydalanamiz, shu sababli, biz bu teoremani keyinchalik keltiramiz.

Ikkilanish teoremasini keltirish uchun berilgan va ikkilangan masalalar orasidagi bazi bog'lanishlarni aniqlab olamiz.

2-ta'rif. $X = \{x | Ax \leq B\}$ to'plam (3.48) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami deyiladi.

3-ta'rif. Agar (3.48) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami $X=\{x|Ax\le B\}$ bo'sh bo'lmasa, u holda masala birgalikda deyiladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz:

1-teorema (ikkilanish teoremasi). Agar (3.48) va (3.52) o'zaro qo'shma masalalarning har biri birgalikda bo'lsa, u holda ularning ikkalasi ham yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi maqsad funksiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni $F_{\min}(X^*)=\tilde{F}_{\max}(Y^*)$.

Bu teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

2-teorema. Agar o'zaro ikkilangan masalalardan biri yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi.

3-teorema. Agar o'zaro ikkilangan masalalardan biri birgalikda bo'lib, ikkinchisi esa birgalikda bo'lmasa, u holda birinchi masala o'zining yechimlar to'plamida chegeralanmagan bo'ladi.

Bu teoremalar ikkilangan masalalarda quyidagi holatlar bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi:

1. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda (ikkalasi ham yechimga ega).

$\begin{cases}2x_1+x_2\le 4,\\ x_1+2x_2\le 4,\end{cases}$ $F=x_1+x_2\to\max.$ $X^*=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$	$\begin{cases}2y_1+y_2=1,\\ y_1+2y_2=1,\end{cases}$ $\tilde{F}=4y_1+4y_2\to\min.$ $Y^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

2. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda emas.

$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le -4, \end{cases}$ $F = x_1 + 3x_2 \to \max.$ $X = \varnothing$	$\begin{cases} y_1 - y_2 = 1, \\ -y_1 + y_2 = 3, \end{cases}$ $\bar{F} = 3y_1 - 4y_2 \to \min.$ $X = \varnothing$

3. Quyidagi masalalardan biri birgalikda, ikkinchisi birgalikda emas.

$\{x_1 - x_2 \le 1,$ $F = x_1 \to \max.$ Masala birgalikda	$\begin{cases} y_1 = 1, \\ -y_1 = 1, \end{cases}$ $\bar{F} = y_1 \to \min.$ $Y = \varnothing$

Agar berilgan masala yechimga ega bo'lsa, u holda ikkilangan masalaning yechimi

$$Y^0 = C^0 B^{-1}$$

formula orqali topiladi.

Xuddi shuningdek, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda berilgan masalaning optimal yechimi

$$X^0 = B^{-1} B^0$$

formula orqali topiladi.

Bu formulalarda:

C^0 –simpleks jadvalning oxirgi qadamidagi C_b vektor;

B^0 – ikkilangan masala simpleks jadvalining oxirgi qadamidagi B vektor;

B^{-1} – matrisani aniqlash uchun

$$AX \le B,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$
$$F = CX \to \max.$$

masala simpleks jadvalining oxirgi qadamini yozamiz:

P_b	C_b	(X^0)	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
		P_0	P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}

P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}

P_k vektorni $X^0=(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ $\left(P_0=(b_1, b_2, ..., b_m)\right)$ optimal yechim bazislari $P_1, P_2, ..., P_m$ bo'yicha yoyilmasini yozamiz

$$P_k = x_{1k}P_1 + x_{2k}P_2 + ... + x_{mk}P_m, \quad k=\overline{0,n}.$$

Bu yoyilmani quyidagicha yozish mumkin:

$$P_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ ... \\ x_{mk} \end{pmatrix} = DX_k.$$

D matrisaga teskari D^{-1} matrisani B^{-1} bilan belgilaymiz, ya'ni $D^{-1}=B^{-1}$. U holda $B^0=P_0$; $C^0=C_b$.

3-misol. Berilgan masala va unga ikkilangan masalaning yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_5=7, \\ -2x_2+4x_3+x_4=12, \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,6},$$

$$F=x_2-3x_3+x_5 \rightarrow \min.$$

Yechish: Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

P_b	C_b	P_0	0	1	-3	0	2	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0	
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0	
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1	$\boxed{10/3}$
Δj		0	0	-1	$\boxed{3}$	0	-2	0	

P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0	$\boxed{4}$
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0	
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1	
Δ_j		-9	0	$\boxed{1/2}$	0	-3/4	-2	0	
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0	
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0	
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1	
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-7/5	0	

III bosqichda optimal yechimga ega bo‘lamiz:

$$X^0=(0,4,5,0,0,11),\ F_{\min}=-11.$$

$$C^0=(1,-3,0),\qquad B^0=(4,5,11),\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix};$$

$$Y^0=C^0B^{-1}=(1\quad -3\quad 0)\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{5}\quad -\frac{4}{5}\quad 0\right).$$

Keltirilgan ikkilanish nazariyasining 1-teoremasi iqtisodiy nuqtayi nazardan shunday talqin qilinadi: agar tashqaridan belgilangan c_j bahoda sotilgan mahsulotning pul miqdori y_i ichki bahoda o‘lchangan xarajatlar (xomashyolar) miqdoriga teng bo‘lsa, u holda mahsulotning ishlab chiqarish rejasi hamda xomashyolarning baholari optimal bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, ikkilangan masaladagi noma’lumlar (ularni ikkilangan baholar deb ataymiz) sarf qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdorlarini o‘zaro teng bo‘lishini ta’minlovchi vosita bo‘lib xizmat qiladi.

3.7. Iqtisodiy masalalarning yechimlarini tahlil qilish

Ma'lumki, chiziqli programmalash usullari va, jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi.

Lekin biz uchun buning o'zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so'ng iqtisodiy obyektlar (zavod, fabrika, firma) boshqaruvchilari oldida quyidagiga o'xshagan masalalarni yechishga to'g'ri keladi:

1. xomashyolarning ba'zilarini oshirib, ba'zilarini qisqartirib sarf qilinsa, optimal yechim qanday o'zgaradi?
2. optimal yechimni o'zgartirmasdan xomashyolar sarfini qanday darajaga o'zgartirish (kamaytirish) mumkin?
3. mahsulotga bo'lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o'zgaradi?

Shunga o'xshash boshqa muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasi teoremalaridan foydalaniladi. Bunda ikkilanish nazariyasining quyidagi teoremalariga asoslaniladi. Quyidagi o'zaro qo'shma masalalarni qaraymiz:

Berilgan masala:

$$\begin{gathered} AX \le B, \\ F = CX \to \max. \end{gathered} \tag{3.63}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{gathered} A^T Y = C^T, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}, \\ \bar{F} = B^T Y \to \min. \end{gathered} \tag{3.64}$$

1-teorema (muvozanatlik teoremasi). $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^* > 0$ bo'lsa, u holda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i. \tag{3.65}$$

Ikkilanish va muvozanatlik teoremalaridan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

2-teorema. $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (3.63) berilgan masalaning, $Y^*=(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (3.64) ikkilangan masalaning joiz yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^*>0$ tengsizlik bajarilganda

$$a_{i1}x_1^*+a_{i2}x_2^*+...+a_{in}x_n^*=b_i \tag{3.66}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda X^*, Y^* mos ravishda (3.63) va (3.64) masalalarning optimal yechimlari bo'ladi.

Ikkilanish teoremalari ChPM ning standart, kanonik va boshqa turdagi masalalari uchun ham o'rinli. Masalan, muvozanatlik teoremasini standart ChPM:

Berilgan masala:

$$\begin{gathered} AX\le B, \\ x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \\ F=CX\to \max. \end{gathered} \tag{3.67}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{gathered} A^TY\ge C^T, \\ y_i\ge 0, \quad i=\overline{1,m}, \\ \bar{F}=B^TY\to \min \end{gathered} \tag{3.68}$$

uchun keltiramiz.

3-teorema. $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (3.67) berilgan masalaning, $Y^*=(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (3.68) ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin. U holda, agar $y_i^*>0$ bo'lsa,

$$a_{i1}x_1^*+a_{i2}x_2^*+...+a_{in}x_n^*=b_i. \tag{3.69}$$

Agar $x_j^*>0$ bo'lsa,

$$a_{1j}y_1^*+a_{2j}y_2^*+...+a_{mj}y_m^*=c_j. \tag{3.70}$$

Bu shartlarni quyidagicha talqin qilish mumkin: agar birinchi masala yechimidagi noma'lum musbat qiymatga ega bo'lsa, u holda ikkinchi masalada tegishli shartlar optimal rejada tenglikka aylanadi.

Bundan ko'rinadiki: optimal yechimning ikkilangan bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o'lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xomashyo "tanqis (defitsit) xomashyo" deyiladi. Bunday xomashyoni oshirib sarf qilish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xomashyo "notanqis (kamyob bo'lmagan) xomashyo" hisoblanadi. Bunday xomashyolarni ikkilangan bahosi nolga teng bo'ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshirishga ta'sir qilmaydi.

1-masala. Deylik, korxonada bir xil mahsulotni 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiyaga bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan xomashyolar miqdori, ularning zaxirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan. Har bir texnologiya bo'yicha korxonaning ishlash vaqtini shunday topish kerakki, natijada korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning miqdori maksimal bo'lsin.

Resurslar	**Texnologiyalar**			**Zaxira**
	T_1	T_2	T_3	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xomashyo (t)	2	3	2,5	150
Elektroenergiya (Kvt/ch)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni ishlatish rejalari	x_1	x_2	x_3	Z→max.

Masalaning matematik modeli:

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max .$$

Masalani simpleks usuli bilan yechamiz.

X_b	C_b	B	300	250	450	0	0	0	a.k.
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0	$\boxed{48}$
X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0	60
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1	50
Δ_j		0	-300	-250	$\boxed{-450}$	0	0	0	
X_3	450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0	80
X_5	0	30	0,5	1	0	-0,1	1	0	$\boxed{60}$
X_6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1	-
Δ_j		21600	$\boxed{-30}$	110	0	18	0	0	
X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0	
X_1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0	
X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1	
Δ_j		23400	0	170	0	12	60	0	

Jadvaldan ko‘rinadiki, $X^* = (60, 0, 12, 0, 0, 180)$, $Z(X^*) = 23400$.

Jumladan T_1 texnologiyani 60 soat, T_3 texnologiyani 12 soat qo‘llash kerak. T_2 texnologiyani esa umuman qo‘llamaslik kerak. Ikkilangan masalaning yechimi: $Y^* = (12, 60, 0)$, $\tilde{Z}(Y^*) = 23400$.

Masalaning yechimidan ko‘rinadiki, 1-va 2-resurslar (ish kuchi va birlamchi xomashyo) to‘la ishlatiladi. Demak, ular kamyob resurslardir. 3-resurs (elektroenergiya) kamyob emas.

Berilgan masala yechimini uning cheklamalariga qo‘yganda 1- va 2-shartlar tenglikka aylanadi.

3-shart qat’iy tengsizlikka aylanadi.

(3.67) va (3.68) masala misolida ikkilanish nazariyasining ba’zi tatbiqlarini ko‘rib chiqamiz. Buning uchun quyidagicha belgilash kiritamiz: $d = F_{\max} = \tilde{F}_{\min}$. Biz d ning qiymati B^T vektorga bog‘liqligini aniqlaymiz. Shu maqsadda $d = \tilde{F}(B^T)$ deb qaraymiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $\tilde{F}(B^T)$ – bir jinsli, ya’ni $\tilde{F}(\lambda B^T) = \lambda \tilde{F}(B^T)$, $\lambda \geq 0$;
2. $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning aniqlanish sohasida botiq.

Qavariq funksiyalar nazariyasidan ma'lumki botiq funksiya aniqlanish sohasining ichida uzluksiz. Demak, $\tilde{F}(B^T)$ funksiya ham aniqlanish sohasida uzluksiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensiallanuvchanligi ikkilangan masala yechimlarining strukturasiga bog'liq.

4-teorema. Agar ikkilangan masala yagona Y^* yechimga ega bo'lsa, u holda $\tilde{F}(B^T)$ funksiya B^T nuqtada differensialanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial \tilde{F}(B^T)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1, 2, ..., m$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agarda ikkilangan masala yechimi yagona bo'lmasa, u holda yuqoridagiga o'xshash tasdiqni keltirish qiyinroq. Ammo bu holda ham yechimlar to'plamining ko'pyog'ida chetki nuqtalar yagona $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensial xarakteristikalari bo'lib qoladi.

Quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi yechimini tahlil qilamiz.

2-masala. 3 ta *A*, *B*, *C*, mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xomashyolar (resurslar) ishlatilsin, I tur xomashyoning zaxirasi 180 kg, II tur xomashyoning zaxirasi 210 kg va III tur xomashyoning zaxirasi 244 kg bo'lsin. Har bir mahsulotning 1 birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xomashyoning miqdori (normasi) va mahsulot birligining bahosi (narxi) quyidagi jadvalga joylashtirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini toping.

Xomashyo **Mahsulot**	I	II	III	**Mahsulot birligi bahosi (p.b.)**
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
Xomashyo zaxirasi (kg)	180	210	244	

Bu masala bor resurslardan optimal foydalanish masalasi bo'lib, uning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz.

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad (i = \overline{1,3}),$$

$$F = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min.$$

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz va simpleks jadvalga joylashtirib uni simpleks usul bilan yechamiz.

X_b	C_b	10	14	12	0	0	0	X_0
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	4	2	1	1	0	0	$\boxed{180}$
X_5	0	3	1	3	0	1	0	210
X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
		-10	$\boxed{-14}$	-12	0	0	0	
X_2	14	2	1	1/2	1/2	0	0	90
X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	$\boxed{64}$
		18	0	$\boxed{-5}$	7	0	0	1260
X_2	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
X_5	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	16
		57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Optimal yechim berilgan masala uchun $X^* = (0,\ 82, 16)$, $Z(X^*) = 1340$; ikkilangan masala uchun $Y^* = \left(\frac{23}{4},\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$, $F(Y^*) = 1340$.

Endi berilgan masala yechimini tahlil qilamiz.

Ikkilangan masala yechimida $y_1^* = \frac{23}{4}$, $y_3^* = \frac{5}{4}$. Demak, 3-teoremaga asosan I va III tur xomashyolar to‘la ishlatilgan. Chunki, bu yerda

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 82 + 16 = 180, \quad 0 + 2 \cdot 82 + 5 \cdot 16 = 244.$$

Shu sababli, bu xomashyolar kamyob hisoblanadi. $y_2^* = 0$. Demak, II tur xomashyo to‘la ishlatilmagan. Shu sababli, bu xomashyo kamyob emas.

Ikkilangan masalaning yechimi “shartli optimal yechim” deyiladi. Ular yordamida xomashyolar 1 birlik ortiqcha sarf qilinganda maqsad funksiyasining qiymati, ya’ni daromad qanchaga o‘zgarishi ko‘rsatiladi.

Masalan, 1-tur resursni 1 kg ortiqcha sarf qilish natijasida maqsad funksiyaning qiymati 5,75 birlikka oshadi.

Agar 1-tur resursdan ishlab chiqarishda 1 kg ortiqcha sarf qilinsa, uning ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi. Bu yangi rejaga muvofiq ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdori 5,75 ko‘proq bo‘ladi. Jadvaldagi x_4 ustunga qarab quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada B mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{5}{8}$ birlikka oshadi va C mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{1}{4}$ birlikka kamayadi. Buning natijasida 2-tur xomashyoni sarf qilish $\frac{1}{8}$ birlikka kamayadi.

Xuddi shuningdek, x_6 ustunga qaraymiz. 3-tur xomashyo xarajatini 1 birlikka oshirib sarf qilish natijasida yangi reja topiladi va bu rejaga ko‘ra ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati 1,25 birlikka oshadi va daromad 1340+1,25=1341,25 birlikni tashkil qiladi. Bu natija B mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{8}$ birlikka kamaytirish, C mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{4}$ birlikka oshirish hisobiga bo‘ladi. Bu holda 2 tur resurs $\frac{5}{8}$ kg ko‘proq sarf qilinadi.

3.8. Ikkilangan simpleks usuli

Hozirgi paytgacha chiziqli programmalashtirish masalalarining optimal yechimini topish uchun foydalangan simpleks usulini biz boshlang‘ich simpleks usuli deb ataymiz. Ma’lumki boshlang‘ich simpleks usulida kanonik masala uchun optimallik sharti $\Delta_j \geq 0$ ko‘rinishda bo‘lib, undan ikkilangan masalaninng optimal yechimini aniqlashda ham foydalanish mumkin edi.

Biz chiziqli programmalashtirish masalalarining optimal yechimini aniqlashda yanada umumiy usul ikkilangan simpleks usuli bilan tanishib chiqamiz.

Ikkilangan simpleks usul oddiy simpleks usulga o‘xshash bo‘lsa ham, unga nisbatan ba’zi qulayliklarga ega. Masalan, ikkilangan simpleks usul bo‘yicha yechilayotgan masala shartlaridagi ozod hadlar musbat bo‘lmasligi ham mumkin.

Oddiy simpleks usul singari ikkilangan simpleks usulining har bir qadamida n-o‘lchovli X vektor boshqasiga almashib boradi va chekli qadamlardan so‘ng masalaning optimal yechimi topiladi yoki uning yechimi mavjud emasligi aniqlanadi.

Faqat shunga e’tibor berish kerakki, simpleks usuldan farqli ravishda, ikkilangan simpleks usul bilan har qadamda topilgan X reja joiz reja bo‘lmasligi ham mumkin. Chunki ikkilangan simpleks usul bilan topilgan bunday reja masalaning hamma shartlarini qanoatlantirgani bilan musbat bo‘lishlik shartini qanoatlantirmasligi mumkin. Bunday reja chala joiz reja deb ataladi.

Ikkilangan simpleks usul bo‘yicha chala joiz rejalarni almashtirish jarayoni joiz reja topilguncha takrorlanadi. Topilgan joiz reja esa optimal reja, ya’ni masalaning optimal yechimi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, kanonik formadagi chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{3.71}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Bu masaladagi b_i ozod hadlarning ba'zilari yoki hammasi manfiy ishorali bo'lsin.

Bunday masalalarni ikkilangan simpleks usul bilan yechish uchun eng avvalo masalaga qo'shma

$$\begin{aligned} &A^T Y \le C^T, \\ &F = B^T Y \to \max. \end{aligned} \tag{3.72}$$

masala tuziladi. So'ngra berilgan (3.71) masalani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \quad + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.73}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \tag{3.74}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min. \tag{3.75}$$

(3.73)-(3.75) masalaning koeffitsiyentlari va ozod hadlari simpleks jadvaliga joylashtiriladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\boxed{P_l}$	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	$\boxed{a_{lk}}$	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
	Δ_j	Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	Δ_{m+1}		$\boxed{\Delta_k}$		Δ_n

Agar b_i $(i = \overline{1,m})$ ozod hadlar uchun $b_i \ge 0$ shart bajarilsa, masalaning optimal yechimini topishda simpleks usulidan foydalanamiz.

Agar b_i $(i = \overline{1,m})$ ozod hadlarning ba'zilari yoki hammasi uchun $b_i < 0$ shart bajarilsa, masalaning optimal yechimini topishda ikkilangan simpleks usulidan foydalanamiz. Bunda quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. $\min\limits_{b_i<0}(b_i)$ shart asosida $\{P_1, P_2, ..., P_l, ..., P_m\}$ bazis vektorlar sistemasidan chiqarilishi kerak bo‘lgan bazis vektorni aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{b_i<0}\{b_i\} = b_l$ bo‘lsin. Demak, P_l bazis vektorni bazis vektorlar sistemasidan chiqarishimiz kerak.

2. P_l bazis vektor o‘rniga yangi bazis vektorlar sistemasiga kiritilishi kerak bo‘lgan vektorni $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$ shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right) = \frac{\Delta_k}{a_{lk}}$ bo‘lsin. Demak, P_k vektor yangi bazis vektorlar sistemasiga kiritilishi kerak. Ya’ni $\{P_1, P_2, ..., P_k, ..., P_m\}$ bazis vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

Bu holda a_{lk} element boshlovchi (hal qiluvchi) element bo‘lib, u joylashgan l qatordagi P_l vektor o‘rniga k ustundagi P_k vektor kiritiladi. Simpleks jadvalda ham almashtirish oddiy simpleks usuldagidek bajariladi. Bu jarayon masalaning optimal yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Ikkilangan simpleks usulda berilgan masalaning optimal yechimini mavjud emaslik va chala yechimning optimal yechim bo‘lishlik sharti quyidagi teoremalar orqali aniqlanadi.

1-teorema. Agar masalaning chala rejasidagi koordinatalaridan kamida bittasi, masalan, $b_k < 0$ bo‘lib a_{lj} koeffitsiyentlardan birortasi ham manfiy bo‘lmasa, u holda masala optimal yechimga ega bo‘lmaydi.

Shuday qilib, ikkilangan simpleks usulida masalaning optimal yechimga ega bo‘lmaslik sharti:

$$\begin{cases} b_k < 0, & k = \overline{1,m}, \\ a_{kj} \geq 0, & j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2-teorema. Agar masalaning chala rejasi uning joiz rejasidan iborat bo‘lsa, u holda bu reja optimal reja bo‘ladi.

1-misol. Quydagi berilgan masalani ikkilangan simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \qquad \text{(I)}$$
$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min.$$

Yechish: Berilgan masalaga x_5 va x_6 qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritamiz va ayrim teng kuchli almashtirishlarni bajarib, uni quyidagi kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_6 = -4, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0, \qquad \text{(II)}$$
$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{cases} -2y_1 - 3y_2 \leq 3, \\ -y_1 + 2y_2 \leq 4, \\ y_1 - y_2 \leq 5, \\ -5y_1 - 4y_2 \leq 6, \end{cases}$$
$$y_1 \leq 0,\ y_2 \leq 0, \qquad \text{(III)}$$
$$F = -5y_1 - 4y_2 \rightarrow \max.$$

(II) masalani ikkilangan simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	3	4	5	6	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	0	-5	-2	-1	1		1	0
P_6	0	-4	-3	2	-1	-4	0	1
		$Y_0=0$	$\Delta_1=-3$	$\Delta_2=-4$	$\Delta_3=-5$	$\Delta_4=-6$	$\Delta_5=0$	$\Delta_6=0$
P_4	6	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0

P_6	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	1
		$F_1=6$	$\Delta_1=-\frac{3}{5}$	$\Delta_2=-\frac{14}{5}$	$\Delta_3=-\frac{31}{5}$	$\Delta_4=0$	$\Delta_5=\frac{-6}{5}$	$\Delta_6=0$

Simpleks jadvaldan ko'rinadiki, I bosqichda har bir $j=\overline{1,6}$ uchun $\Delta_j \le 0$. Demak, $X^0=(0,0,0,0,-5,-4)$ vektor (II) masalaning chala rejasi bo'ladi.

(III) ikkilangan masalaning yechimi esa $Y^0=(0,0)$ bo'ladi. X^0 – chala rejaning eng kichik manfiy elementiga mos keluvchi P_5 vektorni bazisdan chiqarib $\theta=\min\limits_{a_{ij}<0}\frac{\Delta_4}{a_{14}}=1,2$ shart asosida P_4 vektorni bazisga kiritamiz.

Simpleks jadvalni almashtirishlar bajarib yangi simpleks jadvaliga o'tamiz. $X^1=(0;0;\ 0;1;0;8)$ vektor yangi chala joiz reja bo'ladi.

X^1 vektorning barcha koordinatalari nomanfiy bo'lgani uchun u berilgan masalaning joiz rejasi. Demak, (2-teoremaga asosan) u masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Yangi bazisdagi qo'shma masalaning yechimi

$$Y^1=\left(-\frac{6}{5};0\right)$$

vektordan iborat bo'ladi. O'zaro qo'shma masalalar uchun $F_{max}=Z_{min}=6$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Masaladagi ma'lumotlarning o'zgarishi chiziqli programmalashtirish masalasi yechimiga ta'siri bilan tanishib chiqamiz. Bu kabi tahlil masaladagi ko'rsatkichlarga ma'lum bir vaqtdan keyingi inflatsiyaning ta'sirini o'rganishda yoki ma'lumotlar 700000 ± 5000 kabi berilganda kerak bo'ladi.

Yuqoridagi tahlillar yordamida qyidagi savollarga javob berish mumkin.

1. Ma'lumotlarga optimallik shartiga ta'sir etuvchi o'zgartirish mumkinmi?

2. Optimallik sharti buzilgan bo‘lsa, uni qanday tiklash mumkin?

Quyidagi misolni ko‘ramiz.

2-misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini toping va tahlil qiling.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0,$$

$$F = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

Yechish: Bu masalani simpleks usulida yechamiz va oxirgi jadvalni keltiramiz:

P_b	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a.k.
			-1	-2	0	0	0	
P_2	-2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Demak, quyidagi $P_b = (P_2, P_1, P_3)^T$ bazis vektorlarga tayanib optimal yechim topiladi. Bu quyidagicha amalga oshirilgan.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$c_b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad c_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad y^T = c_b^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix},\quad \bar{c}_N^T=c_N^T-y^TN=(1\quad 2).$$

Bu yerda y ikkilangan masalaning optimal yechimi.

Biz endi boshlang‘ich ma’lumotlardagi o‘zgarishlarning yechimga ta’sirini o‘rganib chiqamiz.

Birinchi bo‘lib, ozod had $P^T=(b_1\quad b_2\quad b_3)^T$ o‘zgarishining ta’sirini va o‘zgarish oralig‘ini ko‘rib chiqamiz. $\tilde{b}_2=b_2+\delta$ bo‘lsin. U holda yangi masalaning o‘ng tomoni $P=P+\Delta P$. Bu yerda $\Delta P=(0\quad \delta\quad 0)^T$. Ma’lumki $B^{-1}\tilde{P}\ge 0$. U holda

$$B^{-1}\tilde{P}=B^{-1}(P+\Delta P)\ge 0\quad\Rightarrow\quad B^{-1}P\ge -B^{-1}\Delta P\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\delta\\0\\\frac{1}{2}\delta\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$-10\le\delta\le 6\quad\Rightarrow\quad\tilde{F}=F+\Delta F=F+y^T\delta=F+y_2\delta=-13-\delta.$$

Demak, masalaning ikkinchi shartidagi ozod had $-10\le\delta\le 6$ oraliqda o‘zgarsa bazis o‘zgarmaydi. Haqiqatan ham agar $\delta=-4$ bo‘lsa, u holda

$$\tilde{x}_b=x_b+B^{-1}\Delta P=\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}\ge 0,\quad\tilde{F}=-13+4=-9.$$

Bu yerda bazis o‘zgarmaydi, chunki $B^{-1}\tilde{P}\ge 0$ shart bajariladi; agar $\delta=8$ bo‘lsa, u holda

$$\tilde{x}_b=x_b+B^{-1}\Delta P=\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\-1\end{pmatrix},\quad\tilde{F}=-13-8=-21.$$

Bu yerda bazis o‘zgaradi chunki $B^{-1}\tilde{P}\ge 0$ shart bajarilmadi.

Endi $c=(c_1\quad c_2\quad c_3)$ vektorning o‘zgarishini qarab chiqamiz.

$\bar{c}=c+\Delta c=(c_1\quad c_2+\delta\quad c_3)^T$ bo‘lsin. U holda

$$c_N^T-(c_b+\Delta c_b)^TB^{-1}N\ge 0\Rightarrow\bar{c}_N^T=c_N^T-c_b^TB^{-1}N\ge(\Delta c_b)^TB^{-1}N$$

shartdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(1 \quad 2) \geq (\delta \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \quad 2) \geq \left(\frac{1}{2}\delta \quad \frac{1}{2}\delta\right) \Rightarrow \delta \leq 2.$$

Demak, $\delta \leq 2$ bo'lganda oldingi bazis optimal bazis bo'lib qoladi. Aks holda esa bazis o'zgaradi.

Masalan, $\delta = 1$ da boshlang'ich bazis optimal bazis bo'lib qoladi, $\delta = 4$ da esa boshlang'ich bazis optimal bazis bo'la olmaydi, shu sababli, masalaning optimal yechimini topish uchun yangi bazisga o'tishimiz kerak.

Nazorat savollari

1. Ikkilangan masalani ta'riflang.
2. Qanday masalani standart masala deb ataymiz?
3. Qanday holatlarda ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lmaydi?
4. Qanday holatlarda ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'ladi?
5. Ikkilanish teoremasini keltiring.
6. Qanday masala kanonik masala deb ataladi?
7. Muvozanat teoremasini misollar yordamida tushuntiring.
8. Ikkilangan masalaning optimal yechimini aniqlashga yordam beradi.
9. Ortiqcha xomashyolar qanday aniqlanadi.
10. Kamyob xomashyoni aniqlash yo'lini tushuntiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Fermada qo'ng'ir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi oziqa ishlatiladi. Qo'ng'ir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur bo'lgan har bir turdagi ozuqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi ozuqaning umumiy miqdori va 1 ta qo'ng'ir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	Kunlik zarur bo‘lgan ozuqa birligi miqdori		Ozuqaning umumiy miqdori
	qo‘ng‘ir quyon	sariq quyon	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge 2 \end{cases}$

$Z = -x_1 - x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$

$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 30 \\ -2x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$

$Z = -5x_1 - 7x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 13x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 6x_1 - x_2 \ge 12 \end{cases}$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Quyidagi misollarni simpleks usulda yeching

$Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30 \end{cases}$

$x_j \ge 0. \ (j = 1,2,3,4)$

$Z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min$

8. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 30 \end{cases}$

$x_j \ge 0. \ (j = 1,2,3)$

9. $$Z = 7x_1 + 8x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1 \le 40 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0. \ (j = 1,2)$$

10. $$Z = 3x_1 + 9x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ -3x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0. \ (j = 1,2)$$

11. $$Z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0. \ (j = 1,2,3)$$

12. Jadvalda berilgan ma'lumotlarga asoslanib, mebel ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, bunda mehnat zaxiralaridan to'liq foydalangan holda ishlab chiqarilgan jami mahsulotning pul qiymati maksimallashtirilsin. Simpleks usulda optimal yechim topilsin.

Ishlab chiqarish faktorlari	Faner, (m^3)	Taxta, (m^3)	Mehnat, (kishi/smena)	Narxi (ming so'm)
Sarflash normalari:				
1 ta servantga	0,2	0,1	2	150
1 ta shifonerga	0,1	0,2	1	120
Ishlab chiqarish faktorlari zaxirasi	60	40	500	

Quyidagi misollarni sun'iy bazis usuli bilan yeching

13. $$Z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 40 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

14. $$Z = -4x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

15. Tikuv fabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 artikuldagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini

tikish uchun sarflanadigan turli artikuldagi gazlamalar normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir artikuldagi gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

Gazlama artikuli	1 ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)				Gazlamalarning umumiy miqdori (m)
	I	II	III	IV	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Mahsulotlar bahosi (sh.p.b.)	9	6	4	7	

16. Mexanika zavodi 2 turdagi detalni ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va payvandlash jihozlarini ishlatadi. Shu borada har bir detalni 2 xil texnologik usul bilan ishlab chiqarish mumkin. Har bir jihozning samarali vaqt fondi berilgan. Har bir texnologik usul bilan turli moslamada detallar birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt normasi va detallarni sotishdan olinadigan foydalar quyidagi jadvalda keltirilgan. Korxonaga maksimal foydani ta'minlovchi jihozlar yuklanishining optimal rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Jihoz turi	Detallar				Samarali vaqt fondi (stanok-soat)
	1		2		
	Texnologik usullar				
	1	2	1	2	
Tokarlik	3	2	3	0	20
Frezerlik	2	2	1	2	37
Payvandlovchi	0	1	1	4	30
Foyda (sh.p.b.)	11	6	9	6	

Quyidagi masalalarda dastlab ChPMning biror tayanch rejasini toping va simpleks usulini qo‘llab optimal yechimni aniqlang.

17. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$
$F = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max.$

18. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$
$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \min.$

19. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16, \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$
$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min.$

20. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12, \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$
$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max.$

21. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$
$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \rightarrow \min.$

22. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50, \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$
$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \rightarrow \max.$

Tayanch so‘z va iboralar

Matematik model, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish, stoxastik programmalashtirish, dinamik programmalashtirish, chiziqli programmalashtirish, chegaralovchi shartlar (cheklamalar), maqsad funksiya, joiz reja (yechim), bazis yechim (reja), xos va xosmas bazis reja, optimal reja, qo‘shimcha o‘zgaruvchi, qavariq kombinatsiya, qavariq to‘plam, qavariq to‘plamning burchak nuqtasi, gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, yechimlar ko‘pburchagi, sath to‘g‘ri chizig‘i, aktiv va passiv shartlar, kamyob xomashyo, kamyob bo‘lmagan (ortiqcha) xomashyo, simpleks usul, optimallik bahosi, sun’iy o‘zgaruvchilar, sun’iy bazis; sun’iy bazis usuli; kengaytirilgan masala; aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi; aynigan reja (yechim); sikllanish, ε-usul, o‘zaro qo‘shma masalalar, simmetrik qo‘shma masalalar, simmetrik bo‘lmagan qo‘shma masalalar, ikkilamchi baholar, ikkilangan masala, shartli optimal baho, shartli optimal yechim, muvozanatlik teoremasi, ikkilangan simpleks usul, chala joiz yechum, optimallik mezoni.

IV BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHNING MAXSUS MASALALARI

4.1. Transport masalasi

Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.

Zaxirasida b_i birlik mahsuloti bo'lgan i-ta'minotchidan mavjud bo'lgan iste'molchilarga zaxirasidagi mahsulotni to'la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda, $x_{i,j}$ – i-ta'minotchidan j-iste'molchiga tashilgan mahsulot hajmi.

Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta'minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i ta'minotchidan har bir j iste'molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo'l xarajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l xarajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i ta'minotchidan j iste'molchiga yetkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxiralar miqdori**
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda xarajatlarning umumiy qiymati

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (4.1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \qquad (4.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (4.3)$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$ tengsizlikning bajarilishi ko'rinib turibdi.

Transport masalalari ikki turga ajratib o'rganiladi:

Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.4)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday masala ***yopiq modelli transport masalasi*** deyiladi.

Agar mahsulotga bo‘lgan talab taklifga teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.5}$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday masalalar ***ochiq modelli transport masalasi*** deyiladi.

(4.1)-(4.3) masala uchun quyidagi teorema o‘rinli.

1-teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo‘lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo‘ladi.

Transport masalasi matematik modeli tenglamalar sistemasidagi bazis vektorlar sistemasining o‘lchovini aniqlaymiz. Buning uchun sistema asosiy matrisasining rangini aniqlash kerak.

Agar x_{ij} o‘zgaruvchilarni

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}$$

ko‘rinishda joylashtirsak, u holda transport masalasining cheklamalar matrisasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$A=\left(\begin{array}{l} m\left\{\begin{array}{l} \overbrace{1\;1\ldots1}^{n}\ \overbrace{0\;0\ldots0}^{n}\ \ldots\overbrace{0\;0\ldots0}^{n} \\ 0\;0\ldots0\ 1\;1\ldots1\ \ldots0\;0\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots0\ 0\;0\ldots0\ \ldots1\;1\ldots1 \end{array}\right. \\ n\left\{\begin{array}{l} 1\;0\ldots0\ 1\;0\ldots0\ \ldots1\;0\ldots0 \\ 0\;1\ldots0\ 0\;1\ldots0\ \ldots0\;1\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots1\ 0\;0\ldots1\ \ldots0\;0\ldots1 \end{array}\right. \end{array}\right)$$

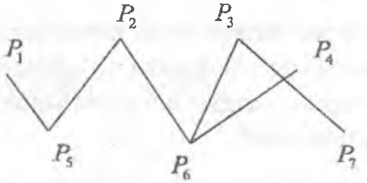
Bu matrisaning rangi: $rang(A)=m+n-1$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatan ham, matrisada $m+n$ ta satr bo‘lib ular chiziqli bog‘liq. Chunki birinchi m ta satrni qo‘shib undan oxirgi n ta satr yig‘indisini ayirsak nol vektorni hosil qilamiz. Bu matrisaning ixtiyoriy $m+n-1$ satrini olsak chiziqli erkli vektorlar sistemasi hosil bo‘ladi.

Demak, masalaning optimal yechimida musbat x_{ij} lar soni ko‘pi bilan $m+n-1$ ta bo‘ladi.

Transport masalasi rejalari ko‘p takrorlanish xususiyatiga ega.

1-ta’rif. P_i nuqtalarning (punktlarning) chekli $P=\{P_1, P_2, ..., P_l\}$ to‘plami va har bir elementi yoy deb ataluvchi tartiblanmagan (P_i, P_j) juftliklarning Ω to‘plami berilgan bo‘lsin. (P_i, P_j) yoy P_i va P_j nuqtalarni tutashtiradi, bu nuqtalar esa (P_i, P_j) yoyning oxiri deb ataladi. (P, Ω) juftlik esa transport tarmog‘i deb ataladi.

Masalan,



rasmda elementlari 7 ta nuqtadan iborat $P=\{P_1, P_2, ..., P_7\}$ to‘plam va oltita:

$$(P_1, P_5), (P_2, P_5), (P_2, P_6), (P_3, P_6), (P_3, P_7), (P_4, P_6)$$

yoylarni o‘z ichiga oluvchi Ω to‘plam tasvirlangan.

2-ta’rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ $(P_{i_l}\in P,\ l=0,1,...,k)$ ixtiyoriy chekli ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Agar har qanday $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r=0,1,...,k-1$, juftlik yoy bo‘lib ($(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})\in\Omega$), bu juftlik $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlikda ko‘pi bilan bir marta uchrasa, u holda $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlik marshrut (yo‘nalish) deb ataladi.

Yuqoridagi rasmda ikkita marshrut bor: $P_1P_5P_2P_6P_4$, $P_1P_5P_2P_6P_3P_7$.

3-ta’rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}P_{i_0}$ ko‘rinishdagi marshrut sikl deb ataladi.

Demak, marshrutda boshlang‘ich holatga qaytilsa, u ***sikl*** deb ataladi.

Rasmdagi marshrutda sikl yo'q, ammo unga (P_4, P_7) yoy qo'shilsa, u holda bu marshrutda $P_3P_7P_4P_6P_3$ ko'rinishdagi sikl hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi.

Yopiq transport masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bilan tanishib chiqamiz.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari. Masalaning aynimagan joiz rejasi $m+n-1$ ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, transport masalasining aynimagan joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, matrisaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi.

Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} lar joylashgan kataklar "***band kataklar***", qolganlari "***bo'sh kataklar***" deyiladi.

Yechim aynimagan bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, u yerda sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin.

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Ma'lumki, har bir bo'sh katakka x_{ij} noma'lumlardan biri to'g'ri keladi. Bu usulda bo'sh kataklrni x_{ij}^0 qiymatlar bilan to'ldiriladi deb faraz qilamiz.

Jadvalning shimoliy-g'arbiy burchagiga x_{11} o'zgaruvchi to'g'ri keladi. $x_{11}^0 = \min\{a_1, b_1\}$ bo'lsin. Agar $x_{11}^0 = a_1$ $(a_1 \le b_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchining barcha mahsuloti birinchi iste'molchiga jo'natilgan bo'ladi. Demak, $x_{1j}^0=0,\ j=\overline{1,n}$ bo'ladi.

II qadamda $x_{21}^0=\min\{b_1-a_1,a_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz. Bunda, agar $x_{21}^0=b_1-a_1$ $(b_1-a_1\le a_2)$ bo'lsa, u holda $x_{s1}^0=0,\ s=\overline{3,m}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib band kataklardagi x_{ij} larning qiymatlarini aniqlab olamiz.

Agar $x_{11}^0=b_1$ $(b_1\le a_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchida a_1-b_1 miqdorda mahsulot qoladi. Demak, $x_{i1}^0=0,\ i=\overline{2,m}$ bo'ladi. II qadamda $x_{12}^0=\min\{a_1-b_1,b_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz va hokazo.

2-misol. Shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib, transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal xarajatlar usuli. Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun x_{ij}^0 qiymat avvalam bor yo'l xarajati eng kichik bo'lgan katakka, ya'ni $\min\limits_{1\le i\le m,1\le j\le n}\{c_{ij}\}$ shart o'rinli bo'ladigan katakka yoziladi. Masalan, $\min\limits_{1\le i\le m,1\le j\le n}\{c_{ij}\}=c_{pq}$ bo'lsin. U holda $x_{pq}^0=\min\{a_p,b_q\}$ qiymat aniqlanadi. $x_{pq}^0=\min\{a_p,b_q\}$ $(a_p\le b_q)$ bo'lsin. Demak, $x_{pj}=a_p,\ j=1,2,...,q-1,q+1,...,n$ bo'ladi. Bundan keyingi qadamlarda ham $\min\limits_{1\le i\le m,1\le j\le n}\{c_{ij}\}=c_{pq},\ i\ne p,\ j\ne q$ shart asosida x_{ij}^0 qiymatlar aniqlanib boriladi. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

3-misol. Minimal xarajatlar usuli bilan boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

4.2. Transport masalasining optimal yechimini topish

Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949-yilda rus olimlari *L.V.Kantorovich* va *M.K.Gavurin* tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul amerikalik olim *Dansig* tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul *modifitsirlangan taqsimot usuli* deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal yechimini topishda foydalaniladigan potensiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin ***aynigan*** va ***aynimagan*** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} U_i a_i + \sum_{j=1}^{n} V_j b_j \to \max. \tag{4.10}$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan, agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda ***"ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari"*** deyiladi.

Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

2-teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \tag{4.11}$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij} \tag{4.12}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechim optimal yechim bo'ladi.

(4.11) va (4.12) shartlar transport masalasi uchun optimallik shartlari deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch yechimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (4.11) shart yordamida potensiallar sistemasi quriladi va so'ngra (4.12) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: S_i -ta'minotchilar joylashgan nuqta; Q_j – iste'molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$, $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$, (P, Ω) juftlik transport tarmog'i.

Potensiallar usulida optimal yechimni topish algoritmi:

$\{x_{ij}^0\}$ boshlang'ich tayanch yechim topiladi.

Masalan,

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} \ldots Q_{j_{k-1}} S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0} \tag{4.13}$$

marshrut topiladi;

(4.11) shart asosida U_i va V_j potensiallardan

$$V_{j_0} + U_{i_1} = c_{i_1 j_0},\ V_{j_1} + U_{i_1} = c_{i_1 j_1},\ \ldots,\ V_{j_k} + U_{i_k} = c_{i_k j_k},\ V_{j_k} + U_{i_0} = c_{i_0 j_k}, \tag{4.14}$$

tenglamalar sistemasi tuziladi. Bunda $n+m-1$ ta band katak uchun $n+m-1$ ta chziqli tenglama va $n+m$ ta noma'lum hosil bo'ladi. Noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo'lgani uchun bitta erkli noma'lumga ixtiyoriy qiymat, masalan nol, qiymat berilib qolganlari mos tenglamalardan topiladi;

Bo'sh kataklar uchun (4.12) shart tekshiriladi:

a) agar barcha bo'sh kataklar uchun (4.12) shart bajarilsa, u holda tayanch yechim optimal bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi;

b) agar ba'zi bo'sh kataklar uchun (4.12) shart bajarilmasa, u holda tayanch yechim optimal bo'lmaydi va tayanch yechimni almashtirish jarayoni amalga oshiriladi.

Tayanch yechimni almashtirish jarayonini amalga oshirish uchun $x_{ij}^0 = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}$ shart o'rinli bo'lmagan bo'sh kataklardan biri

$$\max_{\Delta_{ij}>0}(\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}) \tag{4.15}$$

shart asosida tanlanadi va u band katakka aylantiriladi. Masalan,

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij} = \Delta_{i_0 j_0}$$

bo'lsin. Demak, (4.13) marshurtga (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni qo'shish kerak. U holda (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni o'zida saqlovchi

$$S_{i_0} Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} \ldots Q_{j_{k-1}} S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0}$$

sikl hosil bo'ladi. Bu siklga

$$x_{i_0 j_0},\ x_{i_1 j_0},\ x_{i_1 j_1},\ \ldots,\ x_{i_k j_k},\ x_{i_0 j_k}.$$

ketma-ketlik mos keladi. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned}
&x_{i_0 j_0}^1 = x_{i_0 j_0}^0 + \theta = \theta,\\
&x_{i_1 j_0}^1 = x_{i_1 j_0}^0 - \theta,\\
&x_{i_1 j_1}^1 = x_{i_1 j_1}^0 + \theta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_{i_k j_k}^1 = x_{i_k j_k}^0 + \theta,\\
&x_{i_0 j_k}^1 = x_{i_0 j_k}^0 - \theta.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Boshqa barcha (i, j) juftliklar uchun $x_{ij}^1 = x_{ij}^0$. (4.16) formula yordamida topilgan $\{x_{ij}^1\}$ yechim tayanch yechim bo‘lishi uchun θ ni

$$\theta = \min_{0 \le r \le k} x_{i_{r+1} j_r}^0 \tag{4.17}$$

shart asosida tanlash yetarli.

Bu jarayonni tayanch yechim uchun (4.11), (4.12) optimallik sharti bajarilguncha davom ettiramiz.

Bu jarayon chekli son marta qaytarilgandan so‘ng optimal yechim hosil bo‘ladi. Chunki transport masalasi uchun quyidagi teoremalar o‘rinli.

3-teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasining optimal yechimi mavjud.

4-teorema. Agar barcha a_i, b_j sonlar butun bo‘lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch yechimi butun sonlardan iborat bo‘ladi.

1-misol. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini toping.

b_j / a_i	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2
300	11	8	12	16	73

Yechish: Boshlang‘ich tayanch yehimni minimal xarajatlar usuli bilan topamiz.

1-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1 100	4 0
250	2 200	7 50	10	6	11
200	8	5	3	2	2 200
300	11	8 150	12 100	16	73 50

Bu jadvalda band kataklar soni $n+m-2$ ta. Shuning uchun (a_1, b_5) katakka 0 yozib uni band katakka aylantiramiz. So‘ngra band kataklardan foydalanib $U_i+V_j=c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib, U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

2-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -16	7 -8	4 -1	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 1	6 θ 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 -2	2 -3	2 200	-2
300	11 -8	8 150+θ	12 100	16 -6	73 50-θ	9
V_j	-6	-1	3	1	4	$\theta=50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$ bo'lganligi sababli (a_2, b_4) katakka θ sonni kiritamiz va (4.16) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 2-jadvalni hosil qilamiz.

Endi $\theta = \min(100, 50, 50) = 50$ asosida yangi bazis rejaga o'tib, $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz. U holda quyidagi 3-jadval hosil bo'ladi.

3-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -5	4 2	1 50	4 50	0
250	2 200	7 0	10 1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -5	3 1	2 -3	2 200	-2
300	11 -14	8 200	12 100	16 -9	73 -3	6
V_j	-3	2	6	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2$. Shuning uchun (a_1, b_3) katakka θ parametrni kiritamiz va (4.16) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 4a-jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda

$$\theta = \min\{0, 50, 100\} = 0.$$

Bu asosda yangi bazis yechimni 4-jadvalga joylashtiramiz. 4-jadvalda keltirilgan bazis yechim optimal yechim bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalarda $\Delta_{ij} \leq 0$.

4-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250
100	10 -13	7 -7	4 θ	1 50-θ	4 50
250	2 200	7 0-θ -2	10 -1	6 50+θ	11 -2
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200
300	11 -6	8 200+θ	12 100-θ	16 -7	73 -1

4a-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -7	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200	-2
300	11 -6	8 200	12 100	16 -7	73 -1	8
V_j	-3	0	4	1	4	

Shunday qilib, uchinchi qadamda quyidagi optimal yechimga ega bo‘ldik:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{\min} = 4150 .$$

Ochiq modelli transport masalasi. Agar talab va takliflarning umumiy miqdorlari teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

shart bajarilsa, u holda bu masala “*ochiq modelli transport masalasi*” deyiladi. Ochiq modelli masalaning optimal yechimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potensiallar usuli qo‘llaniladi.

Ochiq modelli masalani yopiq modelliga keltirish uchun qo‘shimcha “soxta” ta’minotchi yoki “soxta” iste’molchi kiritiladi, ularning zaxirasi yoki talab hajmi

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \text{ yoki } b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo‘ladi. Soxta ta’minotchidan real iste’molchilarga yoki real ta’minotchilardan soxta iste’molchilarga amalda mahsulot tashilmagani uchun yo‘l xarajatlari nolga teng qilib olinadi. Natijada bu yerda yopiq modelli masala hosil bo‘ladi.

2-misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yeching.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**					**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	

Yechish: $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$ bo‘lgan hol uchun masalani yopiq modelli masalaga aylantiramiz: $B_6 = 100$. So‘ngra potensiallar usulini qo‘llaymiz.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**						**Zaxira**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	100	

Aynigan transport masalasi. ε-potensiallar usuli. Aynigan transprot masalasida tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni $k<m+n-1$ bo'ladi va bu tayanch reja aynigan reja bo'ladi. Bunday rejani aynimagan rejaga aylantirish uchun unga $m+n-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Ammo bu nol elementlarga mos x_{ij} noma'lumlar band kataklarga mos x_{ij} noma'lumlar o'zaro chiziqli bog'liq vektorlar esa chiziqli erkli bo'lishi kerak. Bu holatni nazorat qilish qiyin. Shu sababli aynigan transport masalasidagi siklni yo'qotib uni aynimagan transport masalasiga aylantirish kerak. Bunga erishish uchun quyidagi ε-potensiallar usulini qo'llash mumkin.

ε-potensiallar usuli. Ma'lumki, bir nechta a_i larning yig'indisi (hammasi emas) bir nechta $b_j$larning yig'indisiga teng bo'lsa transport masalasini aynigan transport masalasi deb ataymiz.

Masalada ayniganlikni yo'qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon>0$ sonni olib, a_i va b_j larni o'zgartiramiz, ya'ni ε masala tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{a_i}=a_i+\varepsilon, & (i=\overline{1,m}), \\ \overline{b_j}=b_j, & (j=\overline{1,n}), \\ \overline{b_n}=b_n+m\varepsilon, & \end{array}\right| \qquad (4.18)$$

ε yetarlicha kichik son bo'lganligi sababli hosil bo'lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon=0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

3-misol. Berilgan aynigan transport masalasining optimal yechimini toping.

b_j / a_i	3	4	5	3
4	4	5	6	3
3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Yechish: (4.18) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ε masalani hosil qilamiz:

b_j / a_i	3	4	5	$3+3\varepsilon$
$4+\varepsilon$	4	5	6	3
$3+\varepsilon$	3	2	7	6
$8+\varepsilon$	5	9	1	3

Ushbu masalani yechib, $X(\varepsilon)$ rejani topamiz. Bundan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} X(\varepsilon)=X^0$.

4.3. Butun sonli programmalashtirish

O‘zgaruvshilariga butun bo‘lishlik sharti qo‘yilgan chiziqli programmalashtirish masalalari katta amaliy ahamiyatga egadir. Butun sonli programmalashtirish masalalariga sayyoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish masalasi, optimal bo‘lish masalasi, transport vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash masalasi, bo‘linmaydigan mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalasi va boshqa masalalar misol bo‘la oladi. Bu masalalarning ayrimlari bilan tanishamiz.

Sayyoh haqida masala. A_0 shaharda yashovchi sayyoh n ta A_1, A_2, ..., A_n shaharlarning har birida faqat bir martadan bo‘lib, eng qisqa yo‘l bilan A_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo‘lsin.

Bu masalaning matematik modelini tuzish ushun A_i va A_j shaharlar orasidagi masofani c_{ij} bilan belgilaymiz. Bundan tashqari, quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ agar sayyoh } A_i \textit{ dan } A_j \textit{ ga borsa, } i\neq j,\\ 0, \textit{ agar sayyoh } A_i \textit{ dan } A_j \textit{ ga bormasa.}\end{cases}$$

Bu yerda $i,\ j=1,2,...,n.$

Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, \quad j=1,2,...,n, \tag{4.19}$$

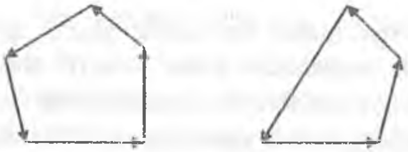
$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, \quad i=1,2,...,n, \tag{4.20}$$

$$u_i-u_j+nx_{ij}\leq n-1, \quad i,j=1,2,...,n, \tag{4.21}$$

$$x_{ij}=0 \ \textit{yoki} \ x_{ij}=1, \tag{4.22}$$

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min. \tag{4.23}$$

Bu yerda (4.21) shart sayyoh yo‘nalishining bog‘liqligini ta’minlaydi. Aniqroq aytilsa, bu shart A_0 dan o‘tmaydigan har qanday t sikllarni yo‘qqa chiqaradi. Masalan,



ko‘rinishdagi yo‘nalishlar bu masalada bo‘lishi mumkin emasligini (4.21) shart ta’minlaydi.

To‘rt rang masalasi. 1976-yilda ajoyib teorema isbotlangan: ko‘pi bilan to‘rtta turli rangdan foidalanib, ixtiyoriy geografik xaritani bo‘yash mumkin.

Bu masala quyidagicha qo‘yiladi: Har birning chegarasi yopiq uzluksiz egri chiziqdan iborat davlatlar tasvirlangan geografik xarita berilgan. Agar ikki davlatning umumiy chegarasi uzunligi musbat bo‘lgan egri chiziqdan iborat bo‘lsa, u holda bu davlatlar qo‘shni davlatlar deb ataladi. Bu geografik xaritani to'rt rangdan foydalanib shunday bo'yash kerakki qo'shni davlatlar turli xil rangda bo'lsin.

Bu masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x_i - x_j + 4u_{ij} \geq 1, \\ x_i - x_j - 4u_{ij} \geq -3, \end{cases}$$

$$x_j = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{4.24}$$

$$u_{ij} = 0, 1; \quad (i, j) \in \Gamma.$$

Bu yerda $\Gamma = \{(i, j) | \, i, j - \text{qo'shni davlatlar}; \; i, j = 1, 2, ..., n\}$.

Bo'linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi. Deylik, korxona n xil bo'linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarsin va buning ushun m xil resurslardan foydalansin. Korxonadagi resurslar zaxirasi chegaralangan va ular $b_1, b_2, ..., b_m$ birliklarni tashkil qilsin. Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan turli resurslar miqdori hamda har bir mahsulotdan korxonaning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

I/ch faktorlari **Mahsulot turlari**	**1**	**2**	**3**	...	n	**Daromad**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	c_m
I/ch faktorining zaxirasi	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Korxona daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlang.

Ushbu masalaning matematik modeliga noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini kiritish kerak:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \tag{4.25}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{4.26}$$

$$x_j \in Z, \tag{4.27}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \qquad (4.28)$$

Agar butun sonli programmalashtirish masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar *to'la butun sonli programmalashtirish masalalari* deb ataladi.

Noma'lumlarning ma'lum bir qismi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilgan masalalar *qisman butun sonli programmalashtirish masalalari* deb ataladi.

Agar butun sonli programmalashtirish masalasidagi noma'lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda bu masala *Bul programmalashtirish masalasi* deb ataladi.

Butun sonli programmalashtirish masalasining geometirik talqini bilan tanishamiz.

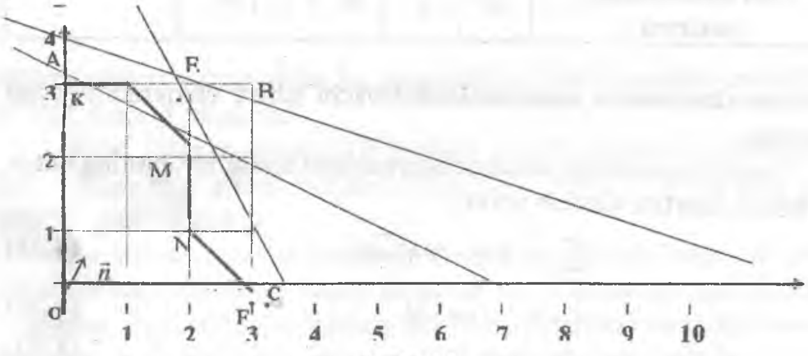
Buning uchun quyidagi ikki o'zgaruvchili butun sonli programmalashtirish masalasiga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ x_i \in Z,\ (i = 1,2)$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Ushbu masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan uni grafik usulda yeshamiz (1-shakl).



1-shakl.

Natijada *OABC* qavariq ko‘rburchakni, joiz rejalar to‘rlamini, hosil qilamiz. Bu ko‘pburchakka tegishli bo‘lgan nuqtalar ichida berilgan butun sonli programmalashtirish masalasining yechimi bo‘la oladigan nuqtani topish uchun bu ko‘pburchakni *OKEMNF* ko‘pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko‘pburchakning burshak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo‘ladi. Ana shu burchak nuqtalaridan birida maqsad funksiya maksimum qiymatga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun $2x_1+4x_2=0$ to‘g‘ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni normal vektor yo‘nalishida o‘z-o‘ziga parallel ko‘chirib, shu yo‘nalishdagi burchak nuqta $E(1,3)$ ni toramiz. Bu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan masalaning yechimi $x_1=1;\ x_2=3;\ Y_{\max}=14$ bo‘ladi.

R.Gomori usuli. Noma‘lumlarga butun bo‘lishlik sharti qo‘yilganligi sababli chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullarini butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun qo‘llab bo‘lmaydi.

Butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun ularning xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo‘lib, ular orasida amerikalik olim R.Gomori yaratgan usul optimal butun sonli yechimni beruvchi eng aniq usullardan biri hisoblanadi. Gomori usuli yordami bilan to‘la butun sonli hamda qisman butun sonli masalalarni yechish mumkin.

Quyida biz Gomori usuli bilan to‘la butun sonli programmalashtirish masalasini yechish jarayonda tanishamiz.

Bu usulning g‘oyasi quyidagidan iborat:

1. Berilgan (4.25)-(4.28) masalani noma’lumlarning butun bo‘lishlik shartiga, $x_j \in Z$, e’tibor bermasdan, simpleks usuldan foydalanib yechamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda (4.25)-(4.28) masala uchun optimallik sharti bajarilgan bo‘lsin. U holda masalaning optimal yechimi $X^0=(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0)$ bo‘ladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}

P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{nk}	…	a_{mn}
		Δ_0	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Agar topilgan $X^0=(b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$ yechimda $b_i \in Z$ bo'lsa, u holda bu yechim butun sonli programmalashtirish masalasining ham yechimi bo'ladi.

2. Agar $X^0=(b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$ yechimda b_i larning ba'zilari yoki hammasi kasr sonlardan iborat bo'lsa, u holda $x_j \in Z$ shartning bajarilishi uchun ***kesuvchi tenglama*** deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi.

Buning uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz:

Ixtiyoriy a ratsional sonni

$$a=[a]+\{a\} \tag{4.29}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $[a]$ – a sonning butun qismi; $\{a\}$ – a sonning kasr qismi ($0 \le \{a\} < 1$, a – butun bo'lsa, $\{a\}=0$).

Masalan, $\frac{30}{7}=4+\frac{2}{7}$, chunki $\left[\frac{30}{7}\right]=4$, $\left\{\frac{30}{7}\right\}=\frac{2}{7}$;

$$-\frac{30}{7}=-5+\frac{5}{7}, \text{ chunki } \left[-\frac{30}{7}\right]=-5, \ \left\{-\frac{30}{7}\right\}=\frac{5}{7}.$$

Jadvalning P_0 ustunidagi kasr sonlardan iborat bo'lgan b_i satrlardan $\max\limits_i\{b_i\}$ shart asosida kerakli satrni ajratib olamiz. Masalan, $\max\limits_i\{b_i\}=q_k$ bo'lsin.

Demak, k-satr ajratib olindi. Bu satr uchun $\{a_{kj}\}=q_{kj}$ belgilash kiritib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$q_{k1}x_1+q_{k2}x_2+...+q_{kn}x_n \ge q_k. \tag{4.30}$$

Bu tengsizlikdan

$$-q_{k1}x_1-q_{k2}x_2-...-q_{kn}x_n=-q_k \tag{4.31}$$

kesuvchi tenglamani hosil qilamiz va bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga kiritib yoziladi. So'ngra bazis yechim almashtiriladi. Bunda ikkilangan simpleks usulidan foydalaniladi. Bu jarayon masalaning yechimda faqat butun sonlar hosil bo‘lganicha yoki yechimning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Har bir bosqichda tuzilgan qo‘shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab, bu tenglama yordamida berilgan butun sonli programmalashtirish masalasi yechimlar to‘plamidagi kasr sonli yechimni o‘z ichiga oluvchi qismi kesib boriladi.

Agar kasr sonli x_i ga mos keluvchi qatorda barcha x_{ij} lar butun sonli bo‘lsa, u holda masala butun sonli yechimga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasining butun sonli yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ x_j \in Z, \ j = \overline{1,4},$$

$$Y = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2_4 \to \max.$$

Yechish: Masalani oddiy simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	1	–3	5	2
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	–3	37/3	1/3	1	0	–1/3
P_3	5	8/3	2/3	0	1	1/3
Δ_j		–71/3	4/3	0	0	2/3

Jadvaldan ko‘rinadiki, topilgan yechim butun sonli programmalashtirish masalasining yechimi bo‘lmaydi. Bu yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun kesuvchi tenglama tuzamiz.

$$\left\{\frac{37}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \ \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \ \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Demak, 2-satr tanlandi

$$\{1\} = 0, \ \{0\} = 0, \ \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \ \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

munosabatlardan foydalanib

$$\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4\geq\frac{2}{3}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikning ikki tomonini (–1) ga ko‘paytiramiz va qo‘shimcha noma’lumni kiritib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4+x_5=-\frac{2}{3}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvaliga joylashtiramiz.

P_b	C_b	P_0	1	–3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	–3	37/3	1/3	1	0	–1/3	0
P_3	5	8/3	2/3	0	1	1/3	0
P_5	0	–2/3	–2/3	0	0	–1/3*	1
Δ_j		–71/3	4/3	0	0	2/3	0

Bazisdan P_5 vektorni chiqarib, o‘rniga P_4 vektorni kiritamiz. Natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko‘rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	1	–3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	–3	13	1	1	0	0	–1
P_3	5	2	0	0	1	0	1
P_4	2	2	2	0	0	1	–3
Δ_j		–25	0	0	0	0	2

Demak, $X^0=(0,13,2,2,0)$, $Y_{\max}=-25$.

Nazorat savollari

1. Numa uchun transport masalasining optimal yechimini topishda simpleks usulidan foydalanilmaydi?
2. Transport masalasining matematik modelida bazis vektorlar sistemasining rangi qanday aniqlanadi?
3. Potensiallar usulini tushuntiring.
4. Transport masalasida sikl qachon paydo bo‘ladi va u qanday yo‘qotiladi?
5. Aynigan transport masalasini tushuntiring va uning optimal yechimini topishni izohlang.
6. Qanday masalalar butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi.
7. To‘rt rang masalasini tushuntiring.
8. Kesuvchi tenglama qanday hosil qilinadi?
9. Boshlang‘ich tayanch rejani izohlang.
10. Sayyoh masalasini tushunturing.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi masalalarning matematik modelini tuzing hamda “shimoliy-g‘arb burchak” usuli va “minimal xarajatlar” usulidan foydalanib, boshlang‘ich bazis yechimlarini toping.

1.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
Talab hajmi	70	40	70	45	

2.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150

A_3	8	10	20	1	50
Talab hajmi	75	80	60	85	

3.

Ta'minotchilardagi mahsulot zaxirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	120	160	120
90	9	8	10
85	11	12	8
75	7	10	13
150	12	7	10

4.

Ta'minotchilardagi mahsulot zaxirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	400	380	120
330	6	5	3
270	5	9	8
300	8	3	7

5.

Ta'minotchilardagi mahsulot zaxirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	300	300	220
270	5	3	2
290	1	6	7
260	3	1	3

Quyidagi transport masalalarining boshlang'ich bazis yechimlarini hamda optimal yechimi potensiallar usuli bilan topilsin.

6.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190

A_3	3	5	8	9	90
Talab hajmi	80	60	170	80	

7.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Talab hajmi	40	60	80	60	

8.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	230
A_3	3	8	1	2	160
Talab hajmi	130	220	90	70	

9.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Talab hajmi	80	100	80	100	

10.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	70
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	80
Talab hajmi	80	50	50	110	

To'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yeching.

11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36 \\ x_1 \le 13 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2 \end{cases}$

Tayanch so'z va iboralar

Yopiq modelli transport masalasi, band katakchalar, ochiq modelli transport masalasi, "shimoliy-g'arb burchak" usuli, "minimal xarajat" usuli, butun sonli programmalashtirish, to'la butun sonli programmalashtirish, qisman butun sonli programmalashtirish, Bul o'zgaruvchili programmalashtirish, kesuvchi tenglama.

V BOB. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

5.1. Chiziqsiz programmalash masalasi va uning geometrik talqini

Chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uning turlari. Quyidagi

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n) \le b_i, \qquad (i=\overline{1,m}) \tag{5.1}$$

$$Z = f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max \tag{5.2}$$

masala matematik programmalashtirish masalasini tashkil etadi.

Bu yerda, $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ berilgan funksiyalar; b_i, $(i=\overline{1,m})$ o‘zgarmas sonlardir. (5.1) shartlar masalaning chegaraviy shartlari, $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya esa “*maqsad funksiyasi*” deb ataladi.

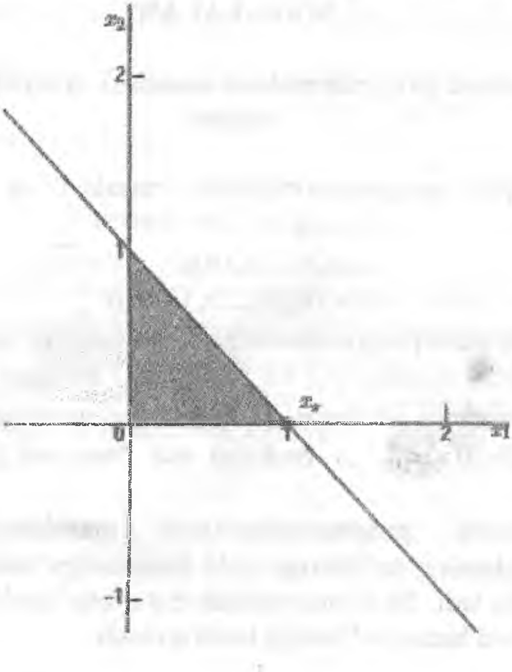
Matematik programmalashtirish masalalarida $x_1,x_2,...,x_n$ o‘zgaruvchilarning ba’zilariga yoki hammasiga nomanfiylik sharti qo‘yilgan bo‘ladi. Ba’zi masalalarda esa noma’lumlarning bir qismi yoki hammasi butun bo‘lishligi talab qilinadi.

1-ta’rif. Agar (5.1), (5.2) masaladagi barcha $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar chiziqli bo‘lsa, bu masala chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.

1-misol. Chekmalari

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min) \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani qaraymiz. Bu masaladagi chegaraviy shartlari chiziqli tengsizlikdan, maqsad funksiyasi chiziqli funksiyadan iborat va uning grafigi quyidagi 1-chizmada tasvirlangan



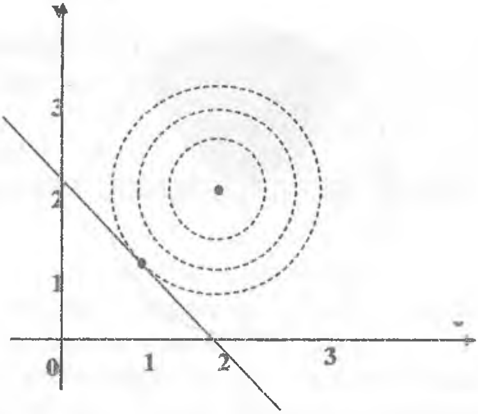
1-chizma.

Bu masalaning optimal yechimi $X=(1;0)^T$ dan iborat bo'ladi.

2-ta'rif. Agar (5.1), (5.2) masaladagi $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda bu masala "chiziqsiz programmalashtirish masalasi" deyiladi.

2-misol. $x_1+x_2=2$ chizig'idagi nuqtalardan $(2;2)^T$ markazga eng yaqin bo'lgan nuqtani topish masalasini ko'ramiz. Bu masalani yechish quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasiga keladi.

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 = 2.$$



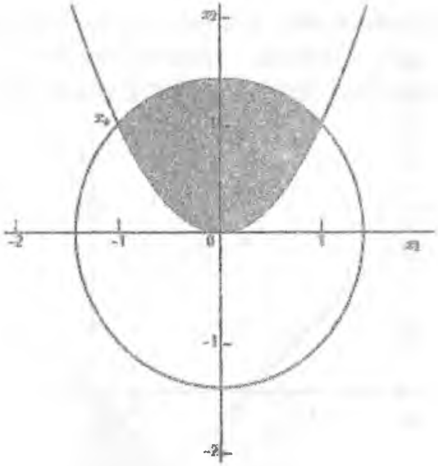
2-chizma.

Chizmadan ko'rinib turibdiki, bu masala $X = (1,1)^T$ nuqtada optimal yechmga ega. Bu masala chiziqsiz programmalashtirish masalasiga misol bo'la oladi. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi odatda S-joiz nuqtalar to'plamida f maqsad funksiyasini minimallashtiradi yoki maksimallashtiradi. Odatda, joiz nuqtalar to'plami o'zgaruvchilarga qo'yilgan shartlar asosida aniqlanadi. Ushbu masalada bizning maqsad funksiyamiz $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ – chiziqsiz funksiya va joiz nuqtalar to'plami S bitta $x_1 + x_2 = 2$ chiziqli shart orqali aniqlanadi.

Joiz nuqtalar to'plami bir qancha shartlar orqali ham aniqlanishi mumkin. Masalan:

$$f(x) = x_1 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 \le x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 2. \end{cases}$$

Bu masala uchun joiz nuqtalar to'plami S quyidagi 3-chizmada ko'rsatilgan.



3-chizma.

Bu masala $X=(-1,1)^T$ nuqtada optimal yechimga ega.

Bazida shartlar (cheklovlar) bo'lmagan paytda Shartsiz optimallashtirish masalasi ham uchrashi mumkin.

Masalan:

$$f(x)=(e^{x_1}-1)^2+(x_2-1)^2\to\min$$

Demak, S – joiz niqtalar to'plami bu yerda ikki o'lchamli fazodadir. Minimallashtiruvchi nuqta $X=(0,1)^T$ ga teng va funksiyaning qiymati bu nuqtada nolga teng va boshqa o'rinlarda musbat.

Biz ushbu misollardan shuni ko'rishimiz mumkinki, masalaning maqsad funksiyasi hamda shartlari chiziqli yoki chiziqsiz bo'lishi mumkin. Yuqoridagi misollar ba'zi shartlar chiziqsiz bo'lganligi sababli chiziqsiz optimallashtirish masalalari hisoblanadi.

3-ta'rif. Agar (5.1), (5.2) masalada $m=0$ bo'lsa, ya'ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u holda bu masala "shartsiz optimallashtirish masalasi" deyiladi.

Shartsiz optimallashtirish masalasi quyidagicha qo'iladi:

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\max(\min),\\&(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E\subset R^n.\end{aligned}\qquad(5.3)$$

Bu yerda $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ n-o'lchovli (vektor) nuqta, R^n n-o'lchovli fazo.

Faraz qilamiz, (5.1) sistema tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmasin hamda $m<n$ bo'lib, $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar uzluksiz va kamida ikkinchi tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. U holda programmalashtirish masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \tag{5.4}$$

$$Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min \tag{5.5}$$

Bunday masala "chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalasi" deyiladi.

Shartsiz optimallashtirish va chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalalarni differensial hisobga asoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo'lgani ushun ularni "*optimallashtirishning klassik masalalari*" deyiladi.

Quyidagi masalani ko'ramiz:

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \tag{5.6}$$

$$X(x_1,x_2,...,x_n)\in G\subset R^n, \tag{5.7}$$

$$Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min. \tag{5.8}$$

Bu yerda, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ – maqsad funksiyasi; $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ – chegaraviy funksiyalar (5.6) shartlarni qanoatlantiruvchi $X\in G$ nuqtalar esa, masalaning joiz rejalari deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirishda lokal va global optimal reja tushunchalari mavjud bo'lib, ular quyidagicha ta'riflanadi.

Faraz qilamiz, $Z=f(X)$, $X(x_1,x_2,...,x_n)\in G\subset R^n$ bo'lsin.

4-ta'rif. X^* nuqta (5.6)-(5.8) masalaning rejasi bo'lib, uning ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ atrofida nuqtalar to'plami $U_\varepsilon(X^*)\subset G$ mavjud bo'lsin. Agar ixtiyoriy $X\in U_\varepsilon(X^*)$ uchun

$$f(X)\le f(X^*) \quad \left(f(X)\ge f(X^*)\right) \tag{5.9}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, X^* reja $f(X)$ maqsad funksiyaga lokal minimum (maksimum) qiymat beruvchi lokal optimal reja deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $f(X) \leq f(X^*)$ $\left[f(X) \leq f(X^*)\right]$ tengsizlik ixtiyoriy $X \in G$ uchun o'rinli bo'lsa, u holda X^* reja maqsad funksiyaga global minimum (maksimum) qiymat beruvchi global optimal reja yoki global optimal yechim deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yechish uchun chiziqli programmalashdagi simpleks usuliga o'xshagan universal usul kashf qilinmagan. Bu masalalar $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiyalar bo'lgan hollarda juda kam o'rganilgan. Ko'proq o'rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalarining ba'zilari bilan tanishib chiqamiz.

Hozirgi davrgacha eng yaxshi o'rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalari $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar qavariq (botiq) bo'lgan holdir. Bunday masalalar "*qavariq programmalashtirish masalalari*" deb ataladi.

Qavariq programmalashtirish masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday lokal optimal yechimi global yechimdan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko'p masalalarda $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar chiziqli bo'lib, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ maqsad funksiyasi kvadratik formada, ya'ni

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \qquad (5.10)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday masalalar kvadratik programmalashtirish masalalari deb ataladi.

Chegaraviy shartlari yoki maqsad funksiyasi yoki ularning har ikkisi n ta bir o'zgaruvchili funksiyalarning yig'indisidan iborat bo'lgan, ya'ni

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n) = q_{i1}(x_1) + q_{i2}(x_2) + ... + q_{in}(x_n),$$
$$f(x_1,x_2,...,x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n),$$

ko'rinishda bo'lgan masalalar "*separabel programmalashtirish masalalari*" deb ataladi.

Kvadratik va separabel programmalashtirish masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslangan taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz programmalashtirishga doir bo'lgan ishlab chiqarishni rejalashtirish va resurslarni boshqarishda uchraydigan muhim masalalardan biri stoxastik programmalashtirish masalalaridir. Bu masalalarda ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo‘ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to‘liq ma’lumot bo‘lmagan optimallashtirish masalalari “*stoxastik masalalar*” deb ataladi.

Parametrlari o‘zgaruvchan miqdor bo‘lib, ular vaqtning funksiyasi deb qaralgan masalalar “*dinamik programmalashtirish masalasi*” deyiladi. O‘zgaruvchilar faqatgina butun qiymatlardan iborat bo‘lgan masalalar diskret programmalashtirish masalalari deb yuritiladi yoki ko‘p hollarda qo‘yilgan masalaning barcha funksiyalari chiziqli bo‘lsa, bunday masalalar *butun sonli programmalashtirish masalasi* deb yuritiladi. Bazan masalani yechish uchun muhim chegaralarini tashlab ketish va yechimga ega bo‘lgandan keyin, butun songa yaqin bo‘lgan o‘zgaruvchilarni tanlab olishning o‘zi kifoya. Lekin olingan so‘nggi yechimhar doim ham optimal yechim bo‘la olmaydi.

Chiziqli programmalashtirish masalalarining asosiy xusysiyatlarini takrorlab o‘tamiz:

Birinchidan, uning joiz rejalar to‘plami, ya’ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma’lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi.

Ikkinchidan, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ maqsad funksiyasi n-o‘lchovli fazoning gipertekisliklar oilasini tashkil etadi.

Uchinchidan, maqsad funksiyaning joiz rejalar to‘plamidagi har qanday minimumi (maksimumi) global minimumdan (maksimumdan) iborat bo‘ladi.

To‘rtinchidan, agar maqsad funksiya chekli qiymatga ega bo‘lsa, joiz rejalar to‘plamini ifodalovchi ko‘pburchakning kamida bitta uchi optimal yechimni beradi.

Rejalar ko‘pburchagining uchlari (burchak nuqtalari) *bazis yechim* deb ataladi. Bazis yechimdagi hamma noma’lumlar (bazis o‘zgaruvchilar) qat’iy musbat bo‘lgan holdagi yechim *aynimagan bazis yechim* va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo‘lsa, *aynigan bazis yechim* deyiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo‘lishi uchun maqsad funksiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimlardagi qiymatlaridan kam (ko‘p) bo‘lmasligi kerak.

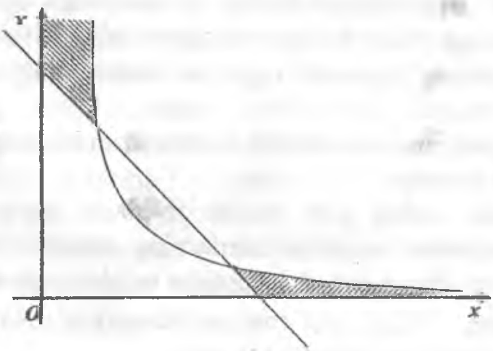
Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining geometrik talqini. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarida yuqoridagi chiziqli programmalashtirishga doir xususiyatlarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi:

1) chiziqsiz programmalashtirishda rejalar to‘plami qavariq bo‘lmasligi ham mumkin.

2-misol. Quyidagi cheklamalari

$$\begin{cases} (x_1-1)x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 3{,}5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani ko‘ramiz.



4-chizma.

Masalaning joiz rejalar to‘plami ikkita alohida qismlarga ajralgan bo‘lib, u qavariq emas.

Agar joiz rejalar to‘plami qavariq bo‘lmasa, maqsad funksiya chiziqli bo‘lgan holda ham masalaning global optimal yechimidan farq qiluvchi lokal yechimlari mavjud bo‘ladi.

Masalan, quyidagi masalani ko‘ramiz:

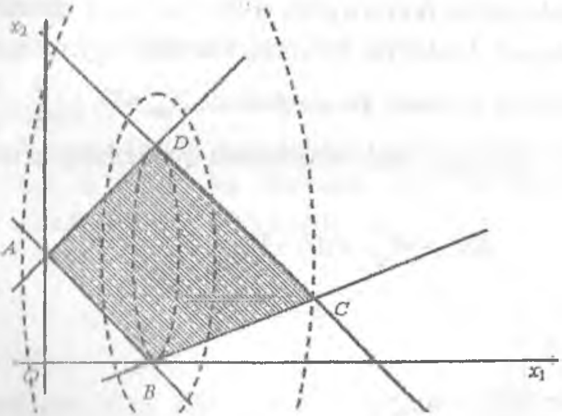
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$$

Bu masalaning cheklamalarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq $ABCD$ to‘rtburshakdan iborat bo‘ladi.

Masaladagi maqsad funksiya markazi (2;2) nuqtadan iborat bo‘lgan ellipslar oilasidan tashkil topgan.

Bu masalaning optimal yechimi joiz rejalar to‘plamining C uchidan iborat bo‘ladi. Umumiy holda, chiziqsiz programmalashtirish masalasining maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta (bazis yechim) mumkin bo‘lgan rejalar to‘plamining faqat burchak nuqtasida emas, balki ichki nuqtasida ham, chegaraviy nuqtasida ham bo‘lishi mumkin.



5-chizma.

Umumiy holda berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini ko‘ramiz va bu masalaning geometrik talqini bilan tanishamiz. Masaladagi shartlar Evklid fazosida joiz rejalar to‘plamini beradi. Bu to‘plamning nuqtalari orasidan maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani (optimal nuqtani) topish kerak. Buning uchun joiz rejalar to‘plamining $f(x_1, x_2, ..., x_n) = const$ gipersirtlar oilasi bilan kesishgan nuqtalari ichidan optimal nuqtani, $const$ ga eng kichik qiymat beruvchi nuqtani, topish kerak.

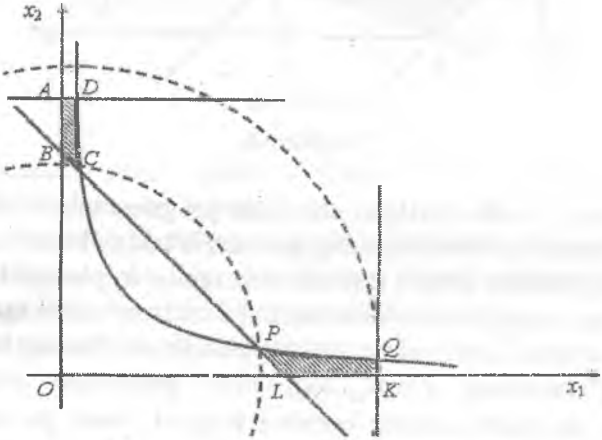
3-misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini grafik usulda toping.

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min).$$

Yechish: Bu masalaning joiz rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmaydi, aksincha, ikkita ayrim $ABCD$ va $PQKL$ qismlardan iborat bo'ladi. Maqsad funksiya o'zining minimal qiymatiga $D(1, 4)$ va $P(1, 4)$ nuqtalarda erishadi. Bu nuqtalarda $Z_{\min} = 17$. $C\left(\frac{2}{3}, 6\right)$ va $Q\left(7, \frac{4}{7}\right)$ nuqtalarda Z funksiya lokal maksimum qiymatlarga erishadi.

$$Z(C) = 36\frac{4}{9}, \quad Z(Q) = 49\frac{16}{49}, \quad Z_{\max} = 49\frac{16}{49}.$$



6-chizma.

5.2. Shartsiz minimum masalasi. Lagranj ko'paytuvchilar usuli

Shartsiz optimallashtirish masalasi ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti. Shartsiz minimum masalasida

$$f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$$

funksiyaning minimumini $X \in E \subset R^n$ nuqtalarda topish talab qilinadi. Ma'lumki, bu holda $f(X)$ funksiyadan birinchi tartibli barcha xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsin

$$f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\rightarrow\min \qquad (5.11)$$

masala o'rganiladi.

Agar X^0 nuqta (5.11) masalaning optimal rejasi (ekstremum nuqtasi) bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (5.12)$$

Demak, berilgan $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (5.13)$$

sistemaning yechimi bo'lishi zarur.

(5.13) sistemaning yechimlari statsionar nuqtalar deb ataladi. Berilgan $f(X)$ funksiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funksiya ekstremumga erishavermaydi. Demak, (5.13) shart funksiya ekstremumi bo'lishining zaruriy sharti, lekin u yetarli shart emas.

Quyidagi teorema statsionar nuqta birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari uzluksiz bo'lgan $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning ekstremal nuqtasi bo'lishi uchun yetarli shartni ko'rsatadi.

Gesse matrisasi va uning funksiya ekstremumini tekshirishdagi roli.

1-teorema. X^0 statsionar nuqta lokal ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matrisasi) ishorasi aniqlangan bo'lishi yetarli.

Agar $H[X^0]$ musbat bo'lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta;

Agar $H[X^0]$ manfiy bo'lsa, u holda X^0 nuqta maksimum bo'ladi.

Ishorasi aniqlangan matrisalar haqidagi ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz. $n \times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matrisa berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $A=(a_{ij})$ matrisaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi $1, 2, ..., n$ – tartibli minorlar, ya'ni

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar bu matrisaning bosh minorlari deyiladi.

2-teorema. $A=(a_{ij})$ matrisaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat'iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matrisa musbat bo'ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matrisaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo‘lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matrisa manfiy bo‘ladi.

1-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechish: Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3=0$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ nuqta bo‘ladi. Demak, $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ – statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matrisasini tuzamiz:

$$H[X^0]=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda –2, 4, –4. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti bir argumentli $f(x)$ funksiya uchun quyidagicha bo‘ladi.

Faraz qilaylik, x^0 statsionar nuqta bo‘lsin.

Agar $f''(x^0)<0$ bo‘lsa, u holda x^0 nuqta funksiyaning *maksimum nuqtasi*; agar $f''(x^0)>0$ bo‘lsa, uholda x^0 nuqta funksiyaning *minimum nuqtasi* deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya x^0 statsionar nuqtada $f''(x^0)=0$ bo‘lsa, u holda yuqori tartibli hosilalarning x^0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o‘rinlidir.

3-teorema. x^0 statsionar nuqtada $f'(x^0)=0$, $f''(x^0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(x^0)=0$ va $f^{(n)}(x^0)\neq 0$ bo‘lsa, u holda bu nuqta

a) n toq son bo‘lganda burulish nuqta;

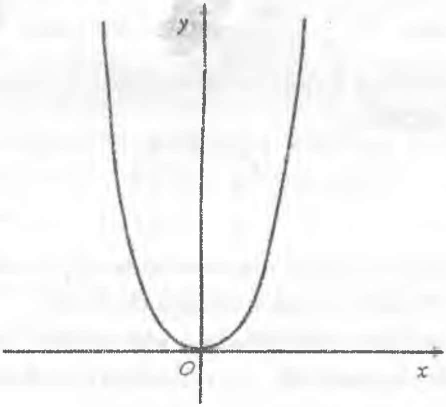
b) n juft son bo‘lganda ekstremal nuqta bo‘ladi.

2-misol. $f(x)=x^4$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish: $f'(x)=4x^3=0$. Demak, $x^0=0$ statsionar nuqta bo‘ladi.

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)=24\neq 0.$$

$n=4$ juft son. Demak, $x^0=0$ nuqta $f(x)=x^4$ funksiya uchun ekstremal nuqta bo‘ladi. $f^{(4)}(0)=24>0$ bo‘lgani uchun $x^0=0$ nuqtada berilgan funksiya minimumga erishadi.



$f(x)=x^4$

Lagranjning aniqmas ko‘paytuvchilar usuli. Faraz qilaylik,

$$\begin{aligned} &q_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \\ &Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\rightarrow \min \end{aligned} \qquad (5.14)$$

masalani yechish talab qilinsin.

(5.14) masalani yechishning eng sodda klassik usuli noma'lumlarni yo'qotish usulidir. Bunda

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, \quad (i=\overline{1,m})$$

tenglamalar sistemasidan m ta noma'lumlarni, masalan,

$$x_1 = h_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n),$$
$$x_2 = h_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n),$$
$$.......................................$$
$$x_m = h_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$$

noma'lumlar topilib $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min$ funksiyaga keltirib qo'yiladi va $n-m$ ta $x_{m+1},x_{m+2},...,x_n$ noma'lumlarga nisbatan shartsiz optimallashtirish masalasi

$$\begin{gathered}\varphi(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) = \\ = f\big(h_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), \ ..., \ h_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n\big) \to \min\end{gathered} \tag{5.15}$$

hosil qilinadi. Bu masala (4) masalaga ekvivalent:

1. Agar $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ (5.14) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $(x_{m+1}^0,x_{m+2}^0,...,x_n^0)$ (5.15) masalaning yechimi bo'ladi;

2. Agar $(x_{m+1}^0,x_{m+2}^0,...,x_n^0)$ (5.15) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ (5.14) masalaning yechimi bo'ladi.

(5.14) masalainig optimal yechimini topishning ikkinchi klassik usuli Lagranj ko'paytuvchilari usulidir.

$q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar va ularning $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlar bo'yicha xususiy hosilalari uzluksiz bo'lsin. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda (5.14) masalani Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan yechish mumkin.

(5.14) masalaning elementlaridan umumlashgan (kengaytirilgan) $(m+1)$ – Lagranj vektori $\vec{\lambda}=\{\lambda_0, \lambda\}$ (λ_0-skalyar, $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ – Lagranj vektori; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – Lagranj ko'paytuvchilari) yordamida

$$F=(X,\bar{\lambda})=\lambda_0 f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\big(b_i-g_i(X)\big) \tag{5.16}$$

umumlashgan Lagranj funksiyasini tuzamiz. Shunday qilib (5.14) masala $F=(X,\vec{\lambda})$ – Lagranj funksiyasining oddiy ekstremumini o'rganishga keltiriladi.

4-teorema (umumlashgan Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). (5.14) masalaning har bir X^0 lokal optimal rejasi uchun shunday $\lambda^0 \neq 0$ umumlashgan Lagranj vektori mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$\frac{\partial F(X^0, \overline{\lambda^0})}{\partial X} = 0 \qquad (5.17)$$

bo'ladi, ya'ni X^0 (5.16) umumlashgan Lagranj funksiyasining $\lambda = \lambda^0$ bo'lgandagi statsionar nuqtasi bo'ladi.

X^0 nuqtada (5.17) tenglik bajariladigan $\lambda^0 \neq 0$ vektor X^0 nuqtaga mos umumlashgan Lagranj vektori deb ataladi. X^0 nuqtaga bir nechta umumlashgan Lagranj vektorlari mos kelishi mumkin.

(5.17) tenglikni $-\lambda^0$ vektor ham qanoatlantiradi. Shu sababli $\lambda^0 \geq 0$ deb olinib, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga aniqlik kiritiladi.

Ko'p hollarda

$$F = (X, \bar{\lambda}) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)), \quad (\lambda_0 = 1) \qquad (5.18)$$

klassik Lagranj funksiyasidan foydalaniladi.

(5.18) Lagranj funksiyasi uchun, umuman olganda, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi o'rinli emas.

(5.14) masalani tekshirishda (5.18) Lagranj funksiyasidan qachon foydalanish mumkinligini aniqlaymiz.

2-ta'rif. Agar X^0 optimal rejaga mos umumlashgan $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ Lagranj vektorlari ichida $\lambda_0 = 0$ kabilar bo'lmasa, u holda (5.14) masala va uning X^0 optimal rejasi normal deb ataladi.

3-ta'rif. Agar X^0 rejada

$$\frac{\partial q_1(X^0)}{\partial X}, \ldots, \frac{\partial q_m(X^0)}{\partial X} \qquad (5.19)$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 oddiy reja deb ataladi.

4-teorema. Optimal reja X^0 normal bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar u oddiy joiz reja bo'lsa. Agar (5.14) masala normal bo'lsa, u holda $m \leq n$ bo'ladi.

Endi asosiy natijani keltiramiz. Bundan keyin (5.14) masalada soddalik uchun $b_i = 0$ deb qaraymiz.

5-teorema (Lagranj ko‘paytuvchilari qoidasi). Agar (5.14) masalaning X^0 optimal rejasida (5.19) vektorlar chiziqli erkli bo‘lsa, u holda shunday yagona λ^0 Lagranj vektori topiladiki, $\{X^0, \lambda^0\}$ juftlikda

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0$$

tengliklar bajariladi.

Masalan, (5.14) masalada $i = 1,\ j = 2,$ bo‘lsa, (5.18) funksiyaning (X^0, λ^0) statsionar nuqtasini topamiz. So‘ngra

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(X^0) & g_{x_2}(X^0) \\ g_{x_1}(X^0) & F_{x_1x_1}(X^0, \lambda^0) & F_{x_2x_1}(X^0, \lambda^0) \\ g_{x_2}(X^0) & F_{x_2x_1}(X^0, \lambda^0) & F_{x_2x_2}(X^0, \lambda^0) \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz. Agar $\Delta > 0 \Rightarrow X^0$ – $f(X)$ funksiyaning *shartli minimum nuqtasi*, agar $\Delta < 0 \Rightarrow X^0$ – $f(X)$ funksiyaning *shartli maksimum nuqtasi*.

3-misol. $z = xy$ funksiyaning $x + y = 6$ dagi ekstremumini toping.

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = xy + \lambda(6 - x - y).$$

Bu funksiyadan x, y va λ lar bo‘yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} Z_\lambda = 6 - x - y = 0 \\ Z_x = y - \lambda = 0 \\ Z_y = x - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ -\lambda + y = 0. \\ -\lambda + x = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^* = 3, \quad x^* = 3, \quad y^* = 3.$$

Demak, $X^* = (x^*, y^*) = (3;3)$ nuqta $z = xy$ funksiya uchun statsionar nuqta bo‘ladi. Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = 9$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko‘rishimiz kerak. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0, \qquad \Delta < 0, \qquad M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Demak, $x^* = (3;3)$ nuqtada z funksiya ekstremumga erishmaydi.

4-misol. $z = x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning $x_1 + 4x_2 = 2$ dagi ekstremumini toping

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2 - x_1 - 4x_2)$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi x_1, x_2 va λ lar bo‘yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz.

$$\begin{cases} Z_\lambda = 2 - x_1 - 4x_2 = 0 \\ Z_{x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \\ Z_{x_2} = 2x_2 - 4\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 2 \\ -\lambda + 2x_1 = 0 \\ -4\lambda + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda^* = \frac{4}{17}, \qquad x_1^* = \frac{2}{17}, \qquad x_2^* = \frac{8}{17}.$$

Demak, $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{2}{17}; \frac{8}{17}\right)$ nuqta $z = x_1^2 + x_2^2$ funksiya uchun statsionar nuqta bo‘ladi. Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = \frac{4}{17}$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko‘rishimiz kerak. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad \Delta > 0, \qquad M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

Demak, $x^* = \left(\frac{2}{17}; \frac{8}{17}\right)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi.

(4) masalada funksiyalar o‘zgaruvchili ikkitadan ko‘p bo‘lsa, u holda lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi.

$$\begin{cases} \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

Bu sistemadan (X^0, λ^0) statsionar nuqtani topamiz.

Masalaning shartli ekstremumining mavjudligi Lagranj funksiyasining d^2F – ikkinchi differensialini o‘rganish bilan bog‘liq: agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m)$ $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo‘lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) < 0$ bo‘lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi; agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo‘lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) > 0$ bo‘lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, (X^0, λ^0) nuqtada $d^2F(X^0, \lambda^0) = 0$ bo‘lsa, u holda (X^0, λ^0) nuqtani ekstremumga boshqa usul bilan qo‘shimcha tekshirish kerak bo‘ladi.

5-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasini yeching

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,$$
$$u = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min(\max)$$

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X, \lambda) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9)$$

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda[1 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2].$$

Bu funksiyadan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz

$$\begin{cases} F_{x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ F_{x_2} = -2 + 2\lambda x_2 = 0 \\ F_{x_3} = 2 + 2\lambda x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \end{cases}.$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \ x_{11} = -1, \ x_{21} = 2, \ x_{31} = -2,$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}, \ x_{12} = 1, \ x_{22} = 2, \ x_{32} = 2.$$

Bundan $d^2u\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right)=1>0$; $d^2u\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right)=-1<0$.

Demak, $\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right)$ – nuqta shartli minimum nuqta, $u_{\min}=-9$; $\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right)$ – shartli maksimum nuqta, $u_{\max}=9$.

5.3. Qavariq programmalashtirish masalalari

Qavariq programmalashtirish optimallashtirish masalasining bir bo‘limi bo‘lib, u qavariq funksiyani qavariq to‘plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o‘rgatadi. Qavariq programmalashtirish masalasi

$$\begin{gathered} g_i(X)=g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \\ x_j\ge 0, \quad (j=\overline{1,n}), \quad X\in G\subset R^n, \\ Z=f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to \min \end{gathered} \tag{5.21}$$

ko‘rinishda bo‘lib, bunda $g_i(X)$, $f(X)$ funksiyalar $G\subset R^n$ qavariq to‘plamda aniqlangan va qavariq funksiyalardir.

(5.21) masalaning yechish usullari bilan tanishishdan oldin qavariq funksiyalar haqidagi ayrim tushunchalar bilan tanishamiz.

1-ta’rif. Agar

$$G\subset R^n, \ X_1\in G, \ X_2\in G \ \Rightarrow \ X(\lambda)=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in G, \ \lambda\in[0, 1]$$

bo‘lsa, u holda G – qavariq to‘plam bo‘ladi.

2-ta’rif. Agar $f(X)$ funksiya $G\subset R^n$ qavariq to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy $X_1\in G$, $X_2\in G$ nuqtalar va $0\le\alpha\le 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2+(1-\alpha)X_1)\le\alpha f(X_2)+(1-\alpha)f(X_1) \tag{5.22}$$

$$f(\alpha X_2+(1-\alpha)X_1)\ge\alpha f(X_2)+(1-\alpha)f(X_1) \tag{5.23}$$

tengsizliklardan biri o‘rinli bo‘lsa, $f(X)$ funksiya qavariq funksiya deyiladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $X_1 \in G,\ X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \leq \alpha \leq 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) < \alpha f(X_2) + (1-\alpha)f(X_1) \qquad (5.24)$$

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) > \alpha f(X_2) + (1-\alpha)f(X_1) \qquad (5.25)$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, u holda $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya qat'iy qavariq funksiya deyiladi.

Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiya bo'lsa, ixtiyoriy chekli sondagi $X_1, X_2, \dots, X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi

$$\begin{cases} f\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j \geq 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{cases} \qquad (5.26)$$

$$\begin{cases} f\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \geq \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j \geq 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{cases} \qquad (5.27)$$

munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi.

Qavariq funksiya va to'plamlar quyidagi xossalarga ega:

G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X) = const$ funksiyalar qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan

$$g(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X), \ \ \lambda_i \geq 0, \ \ (i = \overline{1,m})$$

funksiya ham qavariq bo'ladi.

Ixtiyoriy chekli sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'ladi.

Qavariq $f(X)$, $X \in R^n$ funksiyaning sath to'plamlari $\{X : f(X) \leq c\}$ $(\{X : f(X) \geq c\})$ bo'sh yoki qavariq to'plam bo'ladi.

G qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarining tayin qiymatlarida qavariq bo'lishligi zarur va yetarlidir.

Agar $f_1(X), f_2(X),..., f_n(X)$ funksiyalar qavariq G to'plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo'lsa, $f(X) = \max\limits_{1\le i\le n} f_i(X)$ funksiya ham qavariq bo'ladi.

4-ta'rif. $f(X)$ qavariq funksiyaning $G \subset R^n$ to'plamdagi global maksimumi (minimumi) deb, har qanday $X \in G$ nuqtada

$$f(X^0) \ge f(X), \quad \left(f(X^0) \le f(X),\right) \tag{5.28}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^0 \in G$ nuqtaga aytiladi.

Agar (5.28) tengsizlik $X^0 \in U_\varepsilon(X^0)$ nuqta uchun o'rinli bo'lsa, X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaga lokal maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta bo'ladi. Bu yerda: $U_\varepsilon(X^0) = \left\{X : \left|X - X^0\right| < \varepsilon\right\}$.

Qavariq funksiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremalar o'rinlidir.

1-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy qavariq funksiya bo'lsa, u ozining ixtiyoriy global ekstremumiga faqat bitta nuqtada erishadi.

2-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita $X_1, X_2, ..., X_n \in G$ nuqtalarda ham global ekstremumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

3-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtada $\nabla f(X^0) = 0$ bo'lsa, u holda $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada global ekstremumga erishadi.

(5.21) masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\ \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)) \qquad (5.29)$$

Agar (X^0,λ^0) nuqta (5.21) masala uchun tuzilgan $F(X,\lambda)$ funksiyaning *egar nuqtasi* bo'lsa, u holda $X\in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda\in U_\delta(\lambda^0)$ $(\lambda\geq 0)$.

$(U_\delta(\lambda^0)=\{\lambda:|\lambda-\lambda^0|<\delta\}$ – λ^0 nuqtaning ixtiyoriy kichik $\delta>0$ atrofi) uchun

$$F(X^0,\lambda)\leq F(X^0,\lambda^0)\leq F(X,\lambda^0) \qquad (5.30)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

$$g_i(X)=g_i(x_1,x_2,...,x_n)\geq b_i,\quad (i=\overline{1,m})$$
$$x_j\geq 0,\quad (j=\overline{1,n}),\quad X\in G\subset R^n, \qquad (5.31)$$
$$Z=f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \max.$$

masala qaraymiz.

Agar (X^0,λ^0) nuqta (5.31) masala uchun tuzilgan $F(X,\lambda)$ *Lagranj funksiyasining egar nuqtasi* bo'lsa, u holda $X\in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda\in U_\delta(\lambda^0)$, $(\lambda\geq 0)$ uchun

$$F(X,\lambda^0)\leq F(X^0,\lambda^0)\leq F(X^0,\lambda) \qquad (5.32)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4-teorema. Agar (X^0,λ^0), $X\in G$, $\lambda^0\geq 0$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'lsa, u holda X^0 (5.21) masalaning optimal rejasi bo'ladi va $(b_i-g_i(X))\lambda_i^0=0$ shart bajariladi.

Bu teoremada G to'plam va $f(X)$, $g_i(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi shart emas.

(5.21) masalaga ham yuqoridagidek teorema isbotlash mumkin. Demak, (5.21) va (5.31) masalalarning optimal rejasini topish uchun Lagranj funksiyaning egar nuqtasini topish yetarli ekan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgan hol uchun Lagranj funksiyasining egar nuqtasi haqidagi mavjudlik teoremalariga ekvivalent teoremalar dastlab G.V.Kun va A.V.Takker tomonidan olingan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari (5.21) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}\geq 0, \tag{5.33}$$

$$x_j^0\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}=0, \quad x_j^0\geq 0, \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i}\leq 0, \tag{5.35}$$

$$\lambda_i^0\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i}=0, \quad \lambda_i^0\geq 0. \tag{5.36}$$

(5.31) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}\leq 0, \tag{5.37}$$

$$x_j^0\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}=0, \quad x_j^0\geq 0, \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i}\geq 0, \tag{5.39}$$

$$\lambda_i^0\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i}=0, \quad \lambda_i^0\geq 0. \tag{5.40}$$

(5.33)-(5.36) va (5.37)-(5.40) munosabatlar Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligi haqidagi ***Kun-Takker shartlari*** deb ataladi.

5-teorema. $F(X,\lambda)$ funksiya egar nuqtaga ega bo‘lishi uchun (5.21) masala uchun (5.33)-(5.36) shartlarning, (5.31) masala uchun (5.37)-(5.40) shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(5.31) masalani ko‘ramiz. Agar kamida bitta $X\in G$ nuqtada $g_i(X)<b_i$ tengsizlik (Sleyter sharti) bajarilsa, Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o‘rinlidir.

Kun-Takker teoremasi. X^0 nuqta (5.31) masalaning optimal yechimi bo‘lishi uchun bu nuqtada (5.37)-(5.40) munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(5.21) masala uchun ham bu kabi teorema o‘rinli bo‘ladi. Faqat bu yerda Sleyter sharti $g_i(X)<b_i$ ko‘rinishida bo‘ladi.

1-misol. Grafik usul bilan quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\geq 2 \\ 2x_1+x_2\leq 8 \\ x_1+x_2\leq 6 \\ x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$Z=f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2\to \max.$$

masalani yeching va Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiring.

Yechish: Masalani grafik usulda yechib, uning optimal yechimi $X^0(0,8;\,0,4)$ ekanligini ko‘rish mumkin. Bunda $f(X^0)=-0,8$.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(X,\lambda)=-x_1^2-x_2^2+\lambda_1(2x_1+x_2-2)+\lambda_2(8-2x_1-x_2)+\lambda_3(6-x_1-x_2).$$

X^0 nuqtada masalaning 2-3-chegaraviy shartlari qat’iy tengsizlikka aylanadi. Demak, masala uchun Sleyter sharti bajariladi. (5.33)-(5.36) shartlarni tekshiramiz.

Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz va Lagranj shartlarining bajarilishini tekshiramiz

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2x_1+2\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3,\qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}=-2x_2+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=2x_1+x_2-2,\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=8-2x_1-x_2,\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}=6-x_1-x_2,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1}=2\cdot 0,8+0,4-2=0,\qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2}=8-2\cdot 0,8-0,4=6>0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3}=6-0,8-0,4=4,8>0.$$

Demak, $\lambda_2=0,\quad \lambda_3=0,\quad \left(\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2}>0,\ \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3}>0\right).\quad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1}=0$

bo‘lganligi sababli $\lambda_1\neq 0$ bo‘lishi mumkin. $x_j^0\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}=0$ tenglikda

$x_j^0>0$.

Demak, $\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}=0$, $(j=1,2)$ bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{cases}-2\cdot 0{,}8+2\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=0\\ -2\cdot 0{,}4+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}$$

Bundan $\lambda_1=0{,}8$. Demak, $(X^0,\lambda^0)=(0{,}8;\,0{,}4;\,0{,}8;\,0;\,0)$ egar nuqta bo'ladi.

Endi Kun-Takker teoremasidan foydalanib qavariq programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi masalaga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 8\\ 2x_1-x_2\le 12\ ,\\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0\end{cases}$$

$$Z=f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2\to\max.$$

Bu masaladagi maqsad funksiya chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ va $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ kvadratik funksiyalarning yig'indisidan iborat. Bunda $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ funksiya manfiy aniqlangan kvadratik formadan iborat bo'lgani uchun botiq funksiya bo'ladi. Chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ funksiyani ham botiq funksiya deb qarash mumkin. Shunday qilib, berilgan masala chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa botiq funksiyadan iborat bo'lgan qavariq programmalashtirish masalasidan iborat. Ushbu masalaga Kun-Takker teoremasini qo'llash mumkin.

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+\lambda_1(8-x_1-2x_2)+\lambda_2(12-2x_1+x_2).$$

Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligini ifodalovchi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2\le 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=4-4x_2-2\lambda_1-\lambda_2\le 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=8-x_1-2x_2\ge 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2}=12-2x_1+x_2\ge 0\end{cases}\qquad\text{(I)}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1(2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2)=0 \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_2(4-4x_2-2\lambda_1-\lambda_2)=0 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8-x_1-2x_2)=0 \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12-2x_1+x_2)=0 \end{cases} \tag{II}$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad \lambda_1 \geq 0,\quad \lambda_2 \geq 0, \tag{III}$$

(I) sistemaga v_1, v_2, w_1, w_2 nomanfiy qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2-v_1=2 \\ 4x_2+2\lambda_1+\lambda_2-v_2=4 \\ x_1+2x_2+w_1=8 \\ 2x_1-x_2+w_2=12 \end{cases} \tag{IV}$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad \lambda_1 \geq 0,\quad \lambda_2 \geq 0,$$
$$v_1 \geq 0,\quad v_2 \geq 0,\quad w_1 \geq 0,\quad w_2 \geq 0.$$

Ushbu sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} v_1=(2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2) \\ v_2=(4-4x_2-2\lambda_1-\lambda_2) \\ w_1=(8-x_1-2x_2) \\ w_2=(12-2x_1+x_2) \end{cases} \tag{V}$$

Ushbu tengliklarni va (II) sistemani nazarga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$x_1v_1=0,\quad x_2v_2=0,\quad \lambda_1w_1=0,\quad \lambda_2w_2=0. \tag{VI}$$

Endi (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimini topamiz. Bu yechim ifodalovchi nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi va berilgan masalaning optimal yechimini beradi.

(IV) sistemani sun'iy bazis usulidan foydalanib yechamiz. U holda

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_2 = 2 \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0,$$

$$v_1 \geq 0, \quad v_2 \geq 0, \quad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0.$$

$$Z = Mz_1 + Mz_2 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	0	0	0	0	0	0	M	M	0	0
			P_1	P_2	Λ_1	Λ_2	V_1	V_2	Z_1	Z_2	W_1	W_2
Z_1	M	2	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
Z_2	M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	1	0	0
W_1	0	8	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
W_2	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
Δ_j		$6M$	$2M$	$4M^*$	$3M$	M	$-M$	$-M$	0	0	0	0
Z_1	M	$\boxed{2}$	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0
W_2	0	13	2	0	½	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1
Δ_j		$2M^*$	$2M$	0	M	$2M$	$-M$	0	0	$-M$	0	0
P_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	5	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0
W_2	0	11	0	0	-1/2	-9/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1
Δ_j		0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0	0

Bu jadvaldan otimal yechimni topamiz:

$$x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = 1, \quad \lambda_1^0 = 0, \quad \lambda_2^0 = 0,$$

$$v_1^0 = 0, \quad v_2^0 = 0, \quad w_1^0 = 5, \quad w_2^0 = 11.$$

Bu yechim (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimi bo'ladi. Demak, $(X^0, \Lambda^0) = (1; 1; 0; 0)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. $X^0 = (1; 1)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'lib, unda $f(X^0) = 3$ bo'ladi.

Kun-Takkerning yetarlilik teoremalari. Yuqorida biz Kun-Takker shartlari bilan tanishdik va tengsizliklar bilan berilgan masalalarni optimallashtirishda zaruruiy shartlarni ko‘rib o‘tdik. Ba’zi bir holatlarda Kun-Takker shartlari uchun yetarlilik shartlarini o‘zi ham yetarli hisoblanandi.

Klassik optimallashtirish masalalarida maksimum va minimum uchun yetarlilik sharti asosan ikkinchi tartibli hosilalar orqali aniqlanandi. Bu yerda esa, chiziqsiz programmalashtirishda, qavariq va botiq funksiyalar uchun yetarlilik shartlari ham to‘g‘ridan-to‘g‘ri olinishi mumkin. Masalani maksimallashtirish uchun, Kun va Takker quyidagicha yetarlilik teoremasini taklif qilishgan:

Teorema. Quyida berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz:

$$g^i(x)\le r_i, \quad (i=1,2,...,m)$$

$$x\ge 0$$

$$\pi=f(x)\to \min.$$

Yuqoridagi masala uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

a) $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va botiq bo‘lsa;

b) $g^i(x)$ funksiya differensiallanuvchi va qavariq bo‘lsa;

c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi; u holda x^* nuqtada $\pi=f(x)$ funksiya maksimum nuqtaga erishadi.

Demak, yuqoridagi teoremaning (a), (b), (c) shartlari bajarilsa x^* nuqta masalaning optimal yechimi hisoblanadi.

Boshqa tomondan qaraganda, (a) va (b) shartlar bilan va Kun-Takker shartlari masalani maksimallashtiradi. Agar nazarda tutilgan tengsizlik va (a), (b) shartlar hisobga olinsa, u holda Kun-Takker shartlari funksiyani maksimallashtirish uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi. Yuqorida ko‘rilgan teorema qavariq programmalshtirish deyiladi. Yetarlilik sharti faqat maksimallashtirish uchun kerak bo‘ladi.

Qisman botiq programmalashtirish masalasi uchun Arrow-Enthovenning yetarlilik nazariyasi:

Kun-Takkerning yetarlilik nazariyasiga yuzlanadigan bo‘lsak, ayrim qavariq-botiq holatlarga duch kelamiz. Bular esa bir qancha murakkab shartlarni keltirib chiqaradi. Arrow-Enthoven yetarlilik nazariyasi deb nomlangan boshqa nazariyada esa bu holatlar maqsad va chekli funksiyalarda qisman qavariqlik va qisman botiqlik shartlarining o‘zi qanoatlantiradi. Shartlar orqali ular osonlashtirilishi bilan bir qatorda, yetarlilik holatlarini o‘rganish imkoniyatlari kengayadi.

Arrow-Enthoven ishining asl kelib chiqishi $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalari maksimallashtirish masalasi va nomanfiy ($\geq$) shaklidagi cheklovlar bilan bir vaqtda qisman botiq bo‘lishi kerak. Bu esa qisman botiq programmalashtirish masalalarini keltirib chiqaradi. Bu muhokama jarayonida nomusbat ($\leq$) tengsizligidan maksimallashtirish masalasining cheklovlari va ($\geq$) tengsizligidan minimallashtirish masalasida foydalanamiz.

Berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz

$$g^i(x) \leq r_i, \quad (i=1,2,...,m);$$

$$x \geq 0;$$

$$x \geq 0; \qquad \pi = f'(x) \to \max.$$

Yuqoridagi masala quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $f(x)$ maqsad funksiyasi differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman botiq;

b) $g'(x)$ funksiya differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman qavariqdir;

d) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi;

e) Quyidagilarning ixtiyoriy bittasi qanoatlantiriladi:

(d₁) kamida bitta x_j o‘zgaruvchi uchun $f_j(x) < 0$ bo‘lsa;

(d₂) musbat qiymatga erishadigan x_j o‘zgaruvchi uchun $f_j\left(x^*\right)<0$;

(d₃) $f_j\left(x^*\right)$ ning barcha n-tartibli hosilalari noldan farqli va $f(x)$ funksiya x^* nuqtada ikki marta differensiallanuvchi [ya’ni $f(x)$ ning x^* da barcha ikkinchi tartibli hosilalari mavjud];

(d₄) $f(x)$ funksiya botiq.

Demak, x^* nuqta $\pi = f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo‘ladi.

Bu nazariyaning isboti juda uzun bo‘lganligi sababli, uni shu yerda to‘xtatamiz. Biroq shunga e’tibor qaratish kerakki, Arrow va Enthoven o‘zlarining qisman botiqlik qisman qavariqlik nazariyasida botiqlik qavariqlik holatlarini kamaytirishga erishgan vaqtda, ular yangi (d) shartni kiritishni muhim deb topishdi. Shunga qaramasdan, (d) shartda berilgan to‘rtta holatdan faqat bittasi to‘liq yetarlilik shartlarini shakllantirishi kerak. Shuning uchun natijada yuqoridagi nazariya maksimum uchun to‘rtta turli yetarlilik shartlari guruhidan tashkil topgan. Botiq $f'(x)$ funksiya bilan (d₄) shart bajarilganda, Arrow-Enthoven yetarlilik nazariyasi Kun-Takker yetarlilik nazariyasi bilan bir xil bo‘lib qoladi. Lekin bu to‘g‘ri emas. Shu bilan birgalikda, Arrow va Enthoven $g'(x)$ chekli funksiyani qisman qavariq bo‘lishini talab qiladi, uning yetarlilik shartlari shunda ham kamroq bo‘ladi. Demak, nazariya (a) dan (d) gacha bo‘lgan barcha yetarlilik shartlarini qamrab oladi. Lekin buni boshqacharoq tarzda izohlash ham mumkin, ya`ni (a), (b) va (d) shartlar bajarilsa, u holda Kun-Takker shartlari maksimum uchun yetarli shartlar bo‘ladi. Bundan tashqari, agar cheklanganlik xususiyati qanoatlantirilsa, unda Kun-Takker shartlari maksimum uchun zaruriy va yetarli bo‘ladi. Kun-Takker nazariyasiga o‘xshab, Arrow-Enthoven nazariyasi minimallashtirish shakliga osonlik bilan o‘tkazilishi mumkin. Optimallashtirish yo‘nalishini saqlab qolish uchun zarur bo‘ladigan aniq o‘zgarishlar bilan birgalikda, (a) va (b) holatlarida qisman botiq va qisman qavariq so‘zlarini almashtirishimiz kerak, Kun-Takker maksimum holatlarini minimum holatlariga almashtirish, (d_i) va (d_{ii}) dagi tengsizliklarni saqlab qolishimiz va (d₄) da botiq so‘zini qavariqqa o‘zgartirishimiz kerak bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining umumiy qo‘yilishi qanday?

2. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining qanday turlari mavjud?

3. Mahalliy va global optimal reja nima?

4. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi geometirik nuqtayi nazardan qanday talqin qilinadi?

5. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi grafik usulda qanday yechiladi?

6. “Shartsiz optimallashtirish masalasi” deganda qanday masalani tushunasiz?

7. Shartsiz optimallashtirish masalasining umumiy qo‘yilishi qanday?

8. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining geometrik talqinidan foydalanib, masalaning optimal yechimlari haqida nima deyish mumkin?

9. Chiziqsiz programmalashtirish masalasini grafik usulda optimal yechimini topish algoritmi qanday?

10. Statsionar nuqta nima?

11. Gesse matrisasi va uni ekstremal nuqtani aniqlashdagi roli qanday?

12. Gesse matrisasi bosh minorining aniqlangan qiymati orqali funksiya haqida qanday xulosa chiqarish mumkin?

13. Cheklamalari tenglama ko‘rinishda bo‘lgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini yechish uchun Lagranjning aniqmas ko‘paytuvchilar usuli qanday?

14. Lagranj funksiyasi qanday tuziladi?

15. $F(X,\Lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x))$ – Lagranj funksiyasidagi λ_i – Lagranj ko‘paytuvchisining iqtisodiy ma’nosi nimadan iborat?

16. $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya ekstremumini aniqlashning zaruriy sharti nimadan iborat?

17. Qavariq funksiyani (pastga va yuqoriga qavariq funksiyalarni) ta’riflang.

18. Qat’iy pastga (yuqoriga) qavariq funksiyani ta’riflang.

19. Qavariq funksiya qanday xossalarga ega?

20. "Qavariq funksiyaning mahalliy va global maksimumi (minimumi)" deganda nimani tushunasiz?

21. Qavariq funksiya qachon yagona global minimumga (maksimumga) erishadi?

22. Qavariq programmalashtirish masalasi uchun Lagranj funksiyasi qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi?

23. Lagranj funksiyasining egar nuqtasi nima va u qanday aniqlanadi?

24. Lagranj funksiyasi egar nuqtasining mavjud ekanligining zaruriy va yetarlik shartlari.

25. Kun-Takker teoremasini ta’riflang.

26. Sleyter sharti nimadan iborat?

Mustaqil yechish uchun misollar

Grafik usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching:

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 11 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$$

Quyidagi funksiyalarning qavariq yoki qavariq emasligini ko'rsating.

4. $f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-x_1x_2+5x_1-6x_2+8;$

5. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1+x_2;$

6. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-4x_1+5x_2.$

Quyidagi masalalarda Kun-Takker shartlaridan foydalanib, berilgan nuqta qavariq programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini aniqlang.

7. $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ 3x_1+x_2\le 15 \\ x_1+x_2\ge 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$Z=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2\to \max$$

8. $$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24 \\ x_1+2x_2\le 15 \\ 3x_1+2x_2\ge 24 \\ x_2\le 4 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$Z=x_2^2+6x_1^2-6x_1+6\to \max$$

9. $$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 0 \\ x_1-2x_2\le 0 \\ x_1+x_2\ge 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$Z=x_1^2+4x_2^2\to \min$$

Tayansh so'z va iboralar

Chiziqsiz programmalashtirish, mahalliy optimal reja, global optimal reja, qavariq programmalashtirish, kvadratik programmalashtirish, gipersirtlar oilasi, gipersirtlar sathi, statsionar nuqta, Gesse matrisasi, Lagranj funksiyasi, shartsiz optimallashtirish masalasi, egar nuqta, qavariq funksiya, qat'iy qavariq funksiya, qavariq funksiyaning mahalliy va global maksimumi, Lagranj funksiyasining egar nuqtasi, Kun-Takker shartlari, Kun-Takker teoremasi.

VI BOB. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

6.1. Dinamik programmalashtirish elementlari

Dinamik optimallashtirish masalasi. Shu paytgacha o‘rganilgan chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog‘liqmas deb qaraldi, shuning uchun masalaning optimal yechimi rejalashtirishning faqat bir bosqichi uchun topildi. Bunday masalalar *bir bosqichli masalalar* deb ataladi.

Dinamik programmalashtirish masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog‘liq deb qaraladi hamda butun jarayonning optimal rivojlanishini ta’minlovchi bir qator (ketma-ket, har bir davr uchun) optimal yechimlar topiladi. Dinamik programmalashtirish masalalari *ko‘p bosqichli* yoki *ko‘p qadamli masalalar* deb ataladi.

Dinamik programmalashtirish – vaqtga bog‘liq va ko‘p bosqichli boshqariluvchi iqtisodiy jarayonlarni optimal rejalashtirish usullarini o‘rganuvchi bo‘limidir.

Agar iqtisodiy jarayonning rivojlanishiga ta’sir ko‘rsatish mumkin bo‘lsa, bunday jarayon boshqariluvchi deb ataladi. Jarayonga ta’sir etish uchun qabul qilinuvchi qarorlar (yechimlar) to‘plamiga *boshqarish* deb ataladi. Iqtisodiy jarayonlarni boshqarish bir bosqichdagi vositalarni taqsimlash, mablag‘lar ajratish, direktiv hujjatlar qabul qilish kabilar bilan ifodalanishi mumkin.

Masalan, ixtiyoriy korxonada ishlab chiqarish – boshqariluvchi jarayondir, chunki u ishlab chiqarish vositalarining tarkibi, xomashyo ta’minoti, moliyaviy mablag‘lar miqdori va hokazo bilan aniqlanadi. Rejalashtirish davridagi har bir yil boshida xomashyo bilan ta’minlash, ishlab chiqarish jihozlarini almashtirish, qo‘shimcha mablag‘lar miqdori haqida qarorlar qabul qilinadi. Bu qarorlar to‘plami jarayonni boshqarishdir. Bir qarashda, eng ko‘p miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun korxonaga mumkin bo‘lgan vositalarning hammasini berish va ishlab chiqarish jihozlaridan (stanoklardan, texnikadan va hokazolardan) to‘la foydalanish zarurdek tuyuladi. Lekin, bu jihozlarni tezda eskirishiga (ishdan chiqishga) va kelgusida mahsulot ishlab chiqarish hajmining kamayishiga olib kelishi mumkin. Demak, korxonaning faoliyatida noma'qul oqibatlardan holi bo'lgan holda eskirgan jihozlarni almashtirish yoki o'rnini to'ldirish choralari belgilanishi lozim bo'ladi. Bu esa dastlabki bosqichda mahsulot ishlab chiqarish hajmi kamaysa ham, keyingi bosqichlarda korxonaning butun ishlab chiqarish faoliyatini kuchayishiga olib kelishi mumkin.

Shunday qilib, yuqoridagi iqtisodiy jarayon, har bir qadamda uning rivojlanishiga ta'sir etuvchi, bir qancha bosqichlardan iborat deb qaralishi mumkin. Ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirish uchun, har bir oraliq bosqichda alohida qaror qabul qilishda, butun jarayonning tub maqsadi ko'zlanadi. Butun jarayonning yechimi o'zaro bog'langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi. O'zaro bog'langan bunday yechimlar ketma-ketligi *strategiya* deb ataladi. Oldindan tanlangan mezonga ko'ra eng yaxshi natijani ta'minlovchi strategiya optimal strategiya deb ataladi. Boshqacha aytganda, optimal strategiya ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonning optimal rivojlanishini ta'minlovchi strategiyadir.

Dinamik programmalashtirish ko'p bosqichli tuzilishga ega bo'lgan yoki bunday tuzilishga keltiriladigan masalalarning optimal yechimini topish uchun ishlatiladigan matematik vositadir. Dinamik programmalashtirish masalasiga o'tishdan oldin bu masala bilan uzviy bog'liq bo'lgan dinamik optimallashtirish masalasi bilan tanishib chiqamiz:

Iqtisodiy jarayon $t_0 \le t \le t_1$ vaqt oralig'ida ro'y bersin. U holda bu jarayon harakatini ifodalovchi tizimni $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ ustun vektor yordamida yozib olamiz. Ma'lumki, bu vektorlar E^n fazo nuqtalaridir. U holda $x_i(t), i = \overline{1,n}$ funksiyalarni uzluksiz deb faraz qilib,

$$\vec{x}(t) = \left\{ \vec{x}(t) \in E^n \middle| t_0 \le t \le t_1 \right\}$$

vektorni hosil qilamiz va bu vektorlarning geometrik o'rni $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ nuqta va $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$ nuqta oralig'idagi niqtalar to'plami hosil qilgan trayektoriyadan iborat bo'ladi. U holda bu tizimni boshqarish vektori quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$u(t)=\left\{\vec{u}(t)\in E^r \,\middle|\, t_0\le t\le t_1\right\},\ \vec{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t))^T.$$

Bu vektorlarning geometrik o‘rnini boshqarish trayektoriyasi deb ataladi. Boshqarish vektori odatda qandaydir Ω – kompakt sohada aniqlangan bo‘ladi:

$$\vec{u}(t)\in\Omega\subset E^r.$$

U – barcha mumkin bo‘lgan boshqarish trayektoriyalar to‘plami bo‘lsin. U holda $\{\vec{u}(t)\}\in U\subset\Omega\subset E^r$. $\{\vec{x}(t)\}$ trayektoriya harakat tenglamasini ifodalaydi va boshqarish trayektoriyasi bilan quyidagicha bog‘langan bo‘ladi:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=f(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t),\ \frac{dx_i(t)}{dt}=f(x_1(t),...,x_n(t);u_1(t),...,u_r(t);t). \qquad (6.1)$$

Agar (6.1) differensial tenglamalar t vaqtga bog‘liq bo‘lmasa, u holda ular *avtonom tenglamalar* deb ataladi. Chiziqli avtonom tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=A\vec{x}+B\vec{u}. \qquad (6.2)$$

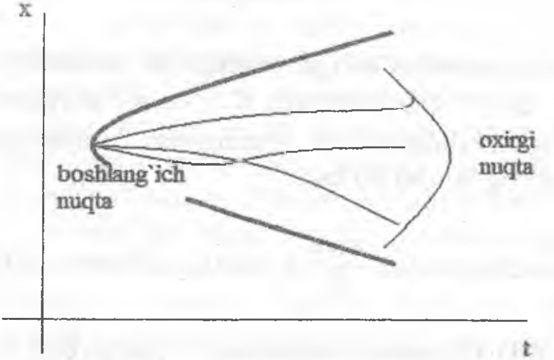
Bu yerda $A-n\times n$ o‘lchamli, $B-n\times r$ o‘lchamli matritsa. (6.2) tenglama $\vec{x}_0=\vec{x}(t_0)$ boshlang‘ich shart bilan yechiladi. $\vec{x}$ – harakat vektori, $\vec{u}$ – boshqarish vektori va t –vaqt orasidagi bog‘lanishni ko‘satuvchi funksionalni $I(\vec{x},\vec{u},t)$ bilan, $\vec{x}_1$ va t_1 orasidagi bog‘lanish ko‘rsatuvchi funksionalni $F(\vec{x}_1,t_1)$ bilan belgilaymiz. Bu yerda

$$I(\vec{x},\vec{u},t)=I(x_1(t),...,x_n(t);u_1(t),...,u_r(t);t),\quad F(\vec{x}_1,t_1)=F(x_1(t_1),...,x_n(t_1);t)\cdot$$

Dinamik optimallashtirish masalasi umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \max\limits_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} I(\vec{x},\vec{u},t)dt + F(\vec{x}_1,t_1) \right\}, \\ \dfrac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x},\bar{u},t),\ \bar{x}(t_0)=\bar{x}_0,\ \ t=t_1 \Rightarrow (\bar{x},t)\in T,\ \{\bar{u}(t)\}\in U \end{cases} \tag{6.3}$$

Bu masalani geometrik nuqtayi nazardan quyidagicha tasvirlash mumkin:



Bellman funksional tenglamalari. Dinamik optimallashtirishning tatbiqlaridan biri bo‘lgan dinamik programmalashtirish masalasi (6.3) bilan atroflicha tanishamiz:

Faraz qilamiz, $\bar{x}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ optimal trayektoriya bo‘lib, u ikki qismdan iborat bo‘lsin. U holda trayektoriyaning 1-qismi $t_0 \le t \le \tau$ oraliqda $\bar{x}(t_0)$ boshlang‘ich shart bilan, 2-qismi esa $\tau \le t \le t_1$ oraliqda $\bar{x}(\tau)$ boshlang‘ich shart bilan aniqlanadi.

Faraz qilamiz, $J^*(\bar{x},t)$ funksiya (6.3) masalaning yechimi bo‘lsin. U holda $J^*(\bar{x},t)$ ni $(\bar{x},t)$ nuqtadagi optimal qiymat deb qarash mumkin. Xuddi shunday $(\bar{x}+\Delta\bar{x},\ t+\Delta t)$ nuqtadagi optimal qiymat $J^*(\bar{x}+\Delta\bar{x},\ t+\Delta t)$ ifoda bilan aniqlanadi. U holda $[t, t+\Delta t]$ oraliqdagi qiymat quyidagi rekurent formula bilan aniqlanadi:

$$J^*(\bar{x},t) = \max_{\{\bar{u}(t)\}} \left\{ I(\bar{x},\bar{u},t)\Delta t + J^*(\bar{x}+\Delta\bar{x}, t+\Delta t) \right\}. \tag{6.4}$$

$J^*(\bar{x}+\Delta\bar{x},\ t+\Delta t)$ funksiyani $(\bar{x},t)$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$J^*(\bar{x}+\Delta\bar{x},\, t+\Delta t)=J^*(\bar{x},t)+\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}\Delta\bar{x}+\frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t+\ldots \qquad (6.5)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}=\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial J^*}{\partial x_n}\right)$$

(6.4) va (6.5) dan foydalansak

$$0=\max_{\{\bar{u}(t)\}}\left\{I(\bar{x},\bar{u},t)+\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t}+\frac{\partial J^*}{\partial t}+\ldots\right\}.$$

U holda $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t}=\frac{d\bar{x}}{dt}=f(\bar{x},\bar{u},t)$ tenglikni hisobga olib quyidagi Bellman tenglamasini hosil qilamiz:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t}=\max_{\{\bar{u}(t)\}}\left\{I(\bar{x},\bar{u},t)+\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}f(\bar{x},\bar{u},t)\right\}. \qquad (6.6)$$

Ko‘p bosqichli iqtisodiy masalalarni yechish uchun ularni yagona matematik modelini yoki bo‘lmasa, har bir bosqichga mos keluvchi statik modellar sistemasini tuzib, so‘ngra uni dinamik programmalashtirish usullari bilan yechish mumkin. Shu sababli, ko‘p bosqichli jarayon sifatida ifodalanuvchi matematik programmalashtirish masalalarini yechish ham dinamik programmalashtirish predmetini tashkil etadi.

Ko‘p bosqichli jarayon vaqtga bog‘liq ravishda rivojlanuvchi va o‘z taraqqiyotida bir necha bosqichlarga bo‘linuvchi jarayondir.

Dinamik programmalashtirish quyidagi xususiyatlarga ega:

1) dinamik programmalashtirish ko‘p bosqichli jarayonning birdan-bir yagona yechimini emas, balki har bir bosqichga mos keluvchi va tub manfaatni ko‘zlovchi yechimlar ketma-ketligini topishga yordam beradi;

2) dinamik programmalashtirish yordami bilan yechilayotgan ko‘p bosqichli masalaning ma’lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog‘liq bo‘lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi faktlar nazarga olinadi;

3) dinamik programmalashtirish yordami bilan ko‘p bosqichli masalani yechish jarayonining har bir bosqichida tub maqsadni ko‘zlovchi yechimni aniqlash kerak, ya’ni yechimlar orasida provard

maqsadga erishishga maksimal hissa qo'shuvchi yechimni topish kerak.

Demak, ma'lum bir bosqichda topilgan optimal reja faqat shu qadam nuqtayi nazaridan emas, balki butun jarayonning tub (provard) maqsadi nuqtayi nazaridan optimal reja bo'lishi kerak. Bunday prinsip "*dinamik programmalashtirishning optimallik prinsipi*" deb ataladi.

Optimallik prinsipiga amal qilish har qadamda qabul qilingan yechimni kelgusida qanday oqibatlarga olib kelishini nazarga olib borish demakdir. Bundan tashqari, optimallik prinsipini yana quyidagicha talqin qilish mumkin.

Har bir bosqichdan avval sistemaning holati qanday bo'lishidan qat'i nazar shu bosqichdagi optimal yutuq bilan undan keyingi bosqichlardagi optimal yutuqlarning yig'indisini maksimallashtiruvchi boshqarishni tanlash kerak.

Demak, boshqarishning optimal strategiyasini topish uchun eng avval n-qadamdagi optimal strategiyani topish kerak, keyin n va $(n-1)$-qadamlardagi optimal strategiyani va hokazo, barcha qadamlardagi optimal strategiyani topish kerak.

Bu prinsipga asosan dinamik programmalashtirish masalasini oxirgi n-qadamdagi optimal strategiyani topishdan boshlash kerak. Buning uchun undan oldingi qadamdagi yechim haqida ayrim taxminlar qilinadi va bu asosda W mezonni maksimallashtiruvchi U_n^0 boshqarish tanlanadi. Bunday boshqarish *shartli boshqarish* deb ataladi.

Demak, optimallik prinsipi har qadamda undan oldingi qadamning mumkin bo'lgan ixtiyoriy bir natijasi uchun shartli optimal boshqarishni topishni talab qiladi. Ko'p bosqichli masalada Bellman funksional tenglamasi bilan tanishamiz.

Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan va boshqarish mumkin bo'lgan sistemani ko'ramiz. Bu sistemani T ta bosqichlarga ajratish mumkin deb faraz qilamiz, ya'ni $t=1, 2, ..., T$. Har bir bosqichning boshidagi sistemaning holatini x_t bilan belgilaymiz. U holda

$$x_t=(x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{mt}).$$

Har bir jarayonida sistemaning holati o'zgaradi. Uning x_{t-1} holatdan x_t holatga o'tishiga u_t boshqarish ta'sir qiladi. Demak,

$$x_t = \varphi(x_{t-1}, u_t).$$

Bu yerda u_t mumkin bo'lgan G_t – boshqarishlar to'plamiga tegishli, ya'ni $u_t \in G_t$.

Bunday aniqlashlarda sistemaning butun $[0;T]$ davr ichidagi taraqqiyoti $x_0, x_1, x_2, ..., x_{T-1}, x_T$ vektorlar ketma-ketligi orqali aniqlanadi. $\widetilde{X}(t)$ sistemaning t bosqichda mumkin bo'lgan holatlar to'plami. Sistemani boshlang'ich x_0 holatdan x_T holatga o'tkazish uchun $u_0, u_1, u_2, ..., u_{T-1}, u_T$ boshqarishlar ketma-ketligi, ya'ni strategiyalar xizmat qiladi. Sistemaning eng yaxshi x_T holatga o'tishini ta'minlash uchun $f_T(x)$ maqsad funksiyani kiritamiz.

$$f_T(x) = \sum_{t=1}^{T} Z_t(x_{t-1}, x_t)$$

bu yerda, $Z_t = (x_{t-1}, x_t)$ sistemaning x_{t-1} holatdan x_t holatiga o'tishida hisoblanadigan va bu holatlarni solishtirib baholovchi funksiyadir.

Agar sistemaning t bosqichdagi holatlar to'plami $\widetilde{X}(t)$ mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami G_t va sistemani bir holatdan ikkinchi holatga o'tkazish qoidasi hamda bu holatlarni solishtiruvchi funksiya $Z_t = (x_{t-1}, x_t)$ berilgan bo'lsa, T bosqichda sistema to'la aniqlangan bo'ladi. Bunday sistemani ifodalovchi dinamik programmalashtirish masalasi quyidagicha bo'ladi.

Sistemani boshlang'ich holati x_0 ma'lum bo'lganda shunday

$$u_t = (u_1, u_2, ..., u_T)$$

strategiyani tanlash kerakki, u

$$x_t = \varphi(x_{t-1}, u_t), \quad x_t \in \widetilde{X}(t), \quad u_t \in G_t, \quad (t = \overline{1,T}) \tag{6.7}$$

shartlarni qanoatlantirib,

$$f_T(x) = \sum_{t=1}^{T} Z_t(x_{t-1}, x_t) \tag{6.8}$$

funksiyaga ekstremal qiymat bersin.

Bu munosabatlardan ko'rinadiki, dinamik programmalashtirish masalasi ko'p bosqichli tanlash masalasi bo'lib, uning u^* optimal yechimi bir nechta bosqichlarda topilgan, mumkin bo'lgan u_t boshqarishlar asosida tanlanadi.

Geometrik nuqtayi nazardan, dinamik programmalashtirish masalasini quyidagicha talqin qilish mumkin: Umumiy holda sistemaning boshlang'ich x_0 holati va oxirgi x_k holati aniq berilmaydi, balki boshlang'ich holatning X_0^* sohasi va oxirgi holatning X_k^* sohasi ko'rsatiladi.

Bu masala quyidagicha ta'riflanadi: biror boshqariluvchi X sistema boshlang'ich $x_0 \in X_0^*$ holatda bo'lsin. Vaqt o'tishi bilan sistemaning holati o'zgarib $x_k \in X_k^*$ oxirgi holatga o'tadi, deb hisoblaylik. Sistema holatlarining o'zgarishi W mezon (kriteriy) bilan bog'liq bo'lsin. Sistemaning o'zgarish jarayonini shunday tashkil etish kerakki, bunda W mezon o'zining optimal qiymatiga erishsin.

U mumkin bo'lgan boshqaruvlar to'plami bo'lsin, u holda masala X sistemani $x_0 \in X_0^*$ holatdan $x_k \in X_k^*$ holatga o'tkazishga imkon beruvchi shunday $u^* \in U$ boshqaruvni topishdan iboratki, bunda $W(u)$ mezon o'zining $W^* \in W(u^*)$ optimal qiymatiga erishsin.

Odatda sistemaning x_0 holatini sonli parametrlar bilan, masalan, ajratilgan fondlar miqdori, jalb qilingan investitsiyalar miqdori, sarflangan yoqilg'i miqdori va h.k. bilan ifodalash mumkin. Bu parametrlarni sistemaning koordinatalari deb ataymiz.

(6.7), (6.8) masalani yechishdan avval

$$G_T, G_{T-1,T}, \dots, G_{1,2,\dots,T} = G$$

belgilashlar kiritamiz. Bu yerda G_T – masalaning oxirgi T bosqichdagi aniqlanish sohasi, $G_{T-1,T}$ – T va $T-1$ bosqichlardagi aniqlanish sohasi, $G_{1,2,\dots,T-1,T} = G$ – berilgan masalaning aniqlanish sohasi.

Maqsad funksiyaning oxirgi bosqichdagi optimal qiymatini $f_1(x_{T-1})$ bilan belgilaymiz:

$$f_1(x_{T-1}) = \min_{u_T \in G_T} \{Z_T(x_{T-1}, X_T)\}. \qquad (6.9)$$

$T-1$ qadamdagi shartli optimal qiymatni $f_2(x_{T-2})$ bilan belgilaymiz:

$$f_2(x_{T-2}) = \min_{u_{T-1} \in G_{T-1,T}} \{Z_{T-1}(x_{T-2}, X_{T-1}) + f_1(x_{T-1})\}. \qquad (6.10)$$

Bu jarayonni davom ettiramiz

$$f_k(x_{T-k}) = \min_{u_{T-(k-1)} \in G_{T-(k-1),\dots,T}} \{Z_{T-k}(x_{T-k}, X_{T-(k-1)}) + f_{k-1}(x_{T-(k-1)})\}, \qquad (6.11)$$

$$f_T(x_0) = \min_{u_1 \in G} \{Z_1(x_0, x_1) + f_{T-1}(x_1)\}. \qquad (6.12)$$

Bu yerda (6.9)-(6.12) ifodalar optimallik prinsipining matematik formadagi yozilishidan iborat bo'lib, ular "*Bellmanning funksional* *tenglamalari*" yoki "*dinamik programmalashtirishning asosiy funksional tenglamalari*" deb ataladi.

Dinamik programmalashtirishning optimallik prinsipiga asosan har bir qadamda topilgan yechim faqat shu qadam nuqtayi nazaridan emas, balki so'nggi, tub maqsad nuqtayi nazaridan optimal bo'lishi kerak ekanligini ko'rgan edik. Dinamik programmalashtirish masalalarini yechish usullari uchun ana shu prinsip asos qilib olingan.

Dinamik programmalashtirishga keltiriladigan masalalar. Dinamik programmalashtirish usullari bilan yechiladigan ba'zi iqtisodiy masalalar bilan tanishib chiqamiz:

Sanoat birlashmasini optimal rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, n ta korxonani o'z ichiga oluvchi sanoat birlashmasining T yillik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinsin. Rejalashtirilayotgan T davrning boshida birlashma uchun K_0 miqdorda mablag' ajratilgan bo'lsin. Bu mablag' korxonalararo taqsimlanadi. Korxonalar ajratilgan mablag'ni to'la yoki qisman ishlatadi va ma'lum miqdorda daromad oladi. Keyingi bosqichlarda mablag'lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin. Shunday qilib, quyidagi masala hosil bo'ladi: korxonalararo kapital mablag'ni shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki, natijada birlashmaning T yil davomida olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

Har yilning boshida birlashmadagi har bir korxonaga ajratiladigan xomashyo, kapital mablag' va yangilanishi kerak bo'lgan uskunalarning soni haqida yechim qabul qilinadi.

Bu yechimlar to'plami boshqarish deb ataladi. Demak, $t-$ qadamdagi boshqarish

$$U^t = (U_1^t, U_2^t, ..., U_n^t)$$

vektor orqali ifodalanadi, bu yerda U_j^t – j korxona uchun t–qadamning boshida ajratilgan xomashyo, kapital mablag' va hokazolarning miqdorini ko'rsatuvchi vektor.

Butun birlashmaning T davr ichida boshqarishni

$$U = (U^1, U^2, ..., U^T)$$

vektor orqali ifodalash mumkin. Bundan tashqari, birlashmadagi har bir j korxonaning holatini ko'rsatuvchi X_j vektor kiritamiz.

$$X_j = (X_j^1, X_j^2, ..., X_j^T), \quad (j = \overline{1,n}).$$

Bu yerda X_j^T – t-qadamning boshidagi j korxonaning moddiy-ashyoviy va moliyaviy ahvol darajasini ko‘rsatuvchi vektor bo‘lib, uning komponentalari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar, moliyaviy ahvol darajasini ko‘rsatadi, ya’ni

$$X_j^t = (X_{j1}^t, X_{j2}^t, ..., X_{jl}^t),$$

Demak, yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori birlashmadagi korxonalar sistemasining t qadam boshidagi holatini ko‘rsatuvchi vektordir, ya’ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Sistemaning boshlang‘ich holati X_0 berilgan deb faraz qilamiz. Maqsad funksiya sifatida birlashmaning T davr ichida oladigan daromadlari yig‘indisini ifodalovchi

$$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max$$

funksiyani kiritamiz. Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga chegaralovchi shartlar qo‘yiladi. Bu shartlar birlashmasini G bilan belgilaymiz va uni mumkin bo‘lgan boshqarishlar to‘plami deb ataymiz.

Shunday qilib, quyidagi dinamik programmalashtirish masalasiga ega bo‘lamiz:

$$U^t \in G, \tag{6.13}$$

$$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max \tag{6.14}$$

Hosil bo‘lgan (6.13), (6.14) model ishlab chiqarishning *dinamik modeli* deb ataladi. Bu modelga asosan har bir t qadamdagi U^t boshqarishni shunday aniqlash kerakki, natijada sistemaning rejalashtirilayotgan davr ichida erishgan daromadlari yig‘indisi maksimal bo‘lsin.

Mahsulot ishlab chiqarish va uni saqlashni rejalashtirishning dinamik modeli. Vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchan talabni qondirishga qaratilgan ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko‘ramiz. Rejalashtirilayotgan davrning uzunligi T bo‘lsin. Bu davrning har bir t qadamida mahsulotga bo‘lgan talab $V(t)$ ma’lum deb faraz qilamiz. Xuddi shuningdek, t qadamdagi ishlab chiqarish rejasini $X(t)$ bilan belgilaymiz. T davr davomida korxonadagi mahsulotlar zaxirasi kamayib yoki ortib borishi mumkin.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t=0$ qadamda korxonadagi mahsulot zaxirasi $Z(0)$ bo'lsin. U holda $X(t)>V(t)$ bo'lganda t qadamdagi mahsulot zaxirasi quyidagicha aniqlanadi

$$Z(t)=X(t)-V(t)+Z(0).$$

Agar t qadamda ishlab chiqarilgan mahsulot talabdan kam: $X(t)<V(t)$ bo'lsa, u holda t qadamning boshida korxonada mavjud bo'lgan mahsulot zaxirasi $V(t)-X(t)$ ga kamayadi, ya'ni zaxira

$$Z(t)=Z(t-1)+X(t)-V(t)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Ixtiyoriy qadamdagi mahsulot zaxirasi noldan kichik emas deb faraz qilamiz hamda $t=0$ boshlang'ich qadam bilan t qadam orasidagi mahsulotga bo'lgan umumiy talabni $\overline{V}(t)$ bilan, umumiy ishlab chiqarish hajmini $\overline{X}(t)$ bilan belgilaymiz. U holda

$$\overline{V}(t)=\int_0^t V(s)ds, \qquad \overline{X}(t)=\int_0^t X(s)ds.$$

Faraz qilaylik, mahsulotni bir-birligini saqlash uchun sarf qilingan xarajat C birlik va ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi $K(t)$ bo'lsin. Ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi $K(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori $X(t)$ ga bog'liq bo'ladi, ya'ni $K(t)=f\left(X(t)\right)$. Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada mahsulot ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan xarajatlar minimal bo'lsin, ya'ni

$$Y=\int_0^T f(X(t))dt+C\int_0^T (X(t)-V(t)+Z(0))dt \to \min. \qquad (6.15)$$

Maqsad funksiya ikki qismdan iborat bo'lib, uning birinchi qismi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan xarajatlarni, ikkinchi qismi esa mahsulotlarni saqlash uchun sarf qilingan xarajatlarni ko'rsatadi.

Bundan tashqari, masaladagi noma'lumlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\begin{aligned} &Z(0)\geq 0; \\ &X(t)-V(t)+Z(0)\geq 0; \\ &X(T)-V(T)=Z(T). \end{aligned} \qquad (6.16)$$

Bunda birinchi shart rejalashtirilayotgan davrning boshidagi mahsulot zaxirasi manfiy emasligini ko'rsatadi. Ikkinchi shart ixtiyoriy t bosqichdagi mahsulot zaxirasining manfiy emasligini ko'rsatadi. Uchinchi shart rejalashtirilayotgan davrning oxirida korxonada ortib qolgan mahsulot miqdori $Z(T)$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

Hosil bo'lgan (6.15)-(6.16) model mahsulot ishlab chiqarish va saqlashni rejalashtirishning *dinamik modeli* deyiladi.

Bu modelga asosan har bir qadamdagi mahsulot ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada uni ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan xarajatlar yig'indisi minimal bo'lsin.

1-misol. Xaridorgir mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish uchun mahsulot ishlab chiqaruvchi n ta korxonalarga S ming so'm kapital mablag' ajratilgan. Agar i korxonaga x_i ming so'm kapital mablag' ajratilsa, u holda bu korxonadagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi $f_i(x_i)$ miqdorga oshadi. Barcha korxonalarda ishlab chiqariladigan mahsulot hajmini maksimal oshirish uchun kapital mablag'ni korxonalarga qanday taqsimlash kerak?

Yechish: Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \quad x_i \geq 0;$$
$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \min. \qquad (6.17)$$

Bu masalada $F(x)$ – maqsad funksiyasi va $g(x)$ – asosiy cheklashlar funksiyasi separabel funksiyadir.

Agar $f_i(x_i)$ qavariq funksiya bo'lsa, u holda masalani qavariq programmalashtirish masalalarining optimal yechimini topish usullaridan foydalanib yechish mumkin.

Agar $f_i(x_i)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda (6.16) masalani dinamik programmalashtirish usulini qo'llab yechish kerak bo'ladi. Buning uchun masalani ko'p bosqichli masala sifatida ifodalash kerak. Kapital mablag'ni n ta korxonaga taqsimlash variantlarini o'rganish va har bir variantga mos keluvchi samaradorlik darajasini aniqlash o'rniga S miqdordagi kapital mablag'ni, avval, bitta korxonaga, keyin ikkita, va hokazo, n ta korxonaga taqsimlash samaradorligini aniqlaymiz. Shunday yo‘l bilan masala ko‘p bosqichli dinamik programmalashtirish masalasiga aylanadi.

Masalan, (6.17) ixtiyoriy k, $0 \le k \le n$ va q, $0 \le q \le S$ uchun yozamiz:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} x_i = q, \quad x_i \ge 0; \\ &B_k(q) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \min. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Bu yerda $B_k(q)$ – Bellman funksiyasi deb ataladi.

Nazorat savollari

1. Optimal trayektoriyani tushuntiring.
2. Harakat trayektoriyasini ta’riflang.
3. Dinamik optimallashtirishni misollar yordamida tushuntiring.
4. Bellman tenglamasini keltirib chiqaring.
5. Qanday funksiya Bellman funksiyasi deb ataladi?
6. Bellman funksional tenglamalarini tushuntiring.
7. Funsional tenglamaning yechimi qanday topiladi.
8. Investitsiyani optimal taqsimlashni qanday tenglama yordamida amalga oshirish mumkin.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. 5000 shartli birlikdagi investitsiyani 3 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo‘lsin. Har bir korxonaning o‘ziga ajratilgan mablag‘ miqdoriga bog‘liq ravishda oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Korxonalarga ajratiladigan investitsiyalar miqdori	**Korxonalar daromadi**		
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$
1000	1500	2000	1700
2000	2000	2100	2400
3000	2500	2300	2700

4000	3000	3500	3200
5000	3600	4000	3500

2. S=100 ming sh.p.b.dagi investitsiyani 4 ta korxona orasida shunday taqsimlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo‘lsin. Har bir korxonaning ajratilgan mablag‘ miqdoriga bog‘liq ravishda oladigan daromadlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

Investitsiya hajmi (x_i) (sh.p.b.)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

3. Masalaning dastlabki shartlari quyidagi jadvalda keltirilgan. 100 mln.so‘m pulni 4 ta korxona orasida shunday taqsimlash kerakki, olingan umumiy daromad maksimal bo‘lsin.

Investitsiya hajmi (mln. so‘m)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

4. 120 mln. so‘m investitsiyani 4 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olingan umumiy daromad maksimal bo‘lsin. Investitsiya hajmiga bog‘liq ravishda korxonalarning oladigan daromadlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Investitsiya hajmi (mln. so‘m)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

5. 200 mln. so‘m kapital mablag‘ni 4 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olingan umumiy daromad maksimal bo‘lsin. Ajratilgan mablag‘ hajmiga bog‘liq ravishda korxonalarning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Kapital mablag‘ning hajmi (mln. so‘m)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
50	10	9	4	6
100	11	11	7	8
150	12	13	11	13
200	18	15	18	16

Tayanch so‘z va iboralar

Dinamik optimallashtirish, programmalashtirish, ko‘p bosqichli jarayon, boshqarish, boshqariluvchi jarayon, strategiya, optimal strategiya, optimallik prinsipi, shartli boshqarish, Bellman funksional tenglamalari.

VII BOB. O‘YINLAR NAZARIYASI

7.1. O‘yinlar nazariyasi elementlari. Matrisali o‘yin

O‘yinlar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar. Matematikaning konfliktli (mojaroli) holatlarini, ya’ni qatnashuvchilarning (o‘ynovchilarning) manfaatlari qarama-qarshi yoki bir-biriga mos kelmaydigan holatlarni o‘rganuvchi bo‘limi – “o‘yinlar nazariyasi” deb ataladi. O‘yinlar nazariyasi – konfliktli holatda qatnashayotgan har bir “o‘ynovchi”ga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga) erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlashga, yo‘llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko‘pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o‘yinlar nazariyasi nuqtayi nazaridan qarash mumkin. Masalan, o‘yin ishtirokchilari – bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta’minotchilar va iste’molchilar bo‘lib, o‘yining yutug‘i – ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag‘lari, mahsulotning bahosi yoki tannarxi bo‘lishi mumkin.

O‘yinlar nazariyasining yaratilishi XX asrning buyuk matematklaridan biri Jon von N’yuman bilan bog‘liq. Uning Morgenshtern bilan hamkorlikda 1944-yil nashr etgan “*Iqtisodiy jarayonlar va o‘yinlar nazariyasi*” monografiyasi o‘yinlar nazariyasining rivojlanishida fundamental asos bo‘ldi. Keyinchalik o‘yinlar nazariyasi amaliy tatbiqlarga ega bo‘lgan mustaqil yo‘nalish sifatida rivojlandi. Shuni ta’qidlash lozimki, o‘yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko‘p marta takrorlanadigan konfliktli holatlarga nisbatan ishlatiladi.

Amalda, konfliktli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhim bo‘lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi. Bunday model ***o‘yin*** deb ataladi. O‘yinda konfliktli holat ma’lum qoida asosida rivojlanadi. O‘yinning mohiyati shundaki, har bir ishtirokchi (o‘yinchi) o‘ziga eng yaxshi natijani beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi.

O‘yinda ikkita yoki undan ko‘p ishtirokchilarning manfaatlari to‘qnashishi mumkin. Shunga muofiq, u ikki o‘ynovchili va ko‘p o‘ynovchili bo‘lishi mumkin.

Yutuqlarning xarakteriga ko‘ra o‘yinlar nol summali va nol summali bo‘lmagan o‘yinlarga bo‘linadi. Nol summali o‘yinda o‘yinchilarning umumiy kapitali o‘zgarmaydi, faqat o‘yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig‘indisi nolga teng bo‘ladi, ya’ni $v_1+v_2+...+v_n=0$, bu yerda v_j j-o‘yinchining yutug‘i.

Nol summali bo‘lmagan o‘yinlarda o‘yinchilarning yutuqlari yig‘indisi noldan farqli. Masalan, lotoreya o‘yinida, o‘yinchilardan to‘plangan badalning bir qismi lotoreya tashkilotlariga beriladi. Shuning uchun $v_1+v_2+...+v_n<0$ bo‘ladi.

Biz bu yerda amaliy ahamiyati katta bo‘lgan o‘yinlar, ya’ni juft o‘yinlarni qarash bilan cheklanamiz. Eng sodda va keng tarqalgan o‘yinning ta’rifini beramiz.

1-ta’rif. Ikki ishtirokchidan iborat nol summali o‘yinning strategik formasi (X,Y,A) uchlik ko‘rinishida beriladi.

Bu yerda, X – I o‘yinchining, Y – II o‘yinchining strategiyalari, $A-X\times Y$ da aniqlangan funksiya bo‘lib, $A(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$ ko‘rinishda yoziladi.

Bunda I o‘yinchi $x\in X$ strategiyani, II o‘yinchi esa $y\in Y$ strategiyani bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda tanlaydi. Ular tanlagan strategiya ma’lum bo‘lganda esa o‘yin natijasiga ko‘ra I o‘yinchi II o‘yinchidan oladigan yutig‘i yoki II o‘yinchi beradigan to‘lovi $A(x,y)$ bilan aniqlanadi.

Masalan, ikki shaxmatchidan iborat o‘yinda I shaxmatchi birga barcha shaxmat programmalari uning strategiyasi hisoblanadi va hokazo.

Yana bir o‘yinni ko‘rib chiqamiz. U toq yoki juft deb ataladi. Bunda I va II o‘yinchilar bir paytning o‘zida {1}, {2} raqamlardan birini aytadi. I o‘yinchini toq deb nomlasak, u holda yuqorida I va II oyinchilar tomonidan aytilgan raqamlar yig‘indisi toq bo‘lgandagina shu yig‘indiga teng miqdorda pul birligi yutadi. Aks holda esa I o‘yinchi yutqazib II o‘yinchi yutadi. Chunki II o‘yinchining nomi juft.

Strategik formani aniqlaymiz: $X=\{1,2\}$; $Y\{1,2\}$; $A(x,y)$ – I o‘yinchi uchun yutuq II o‘yinchi uchun esa to‘lov bo‘lib, u quyidagi jadvalda ifodalangan.

$$\begin{array}{lll} \text{II (juft)}\,y & - & \begin{array}{cc} \;\;\;1 & \;\;2\end{array} \\ \text{I (toq)}\,x & - & \begin{array}{c}1\\2\end{array}\begin{pmatrix}-2 & +3\\ +3 & -4\end{pmatrix}\end{array}$$

Bu yerda ikki o‘yinchi ham teng imkoniyatli.

Bu o‘yinni I o‘yinchi nuqtayi nazaridan tahlil qilamiz. Faraz qilamiz, u ixtiyoriy ravishda {2} raqamni vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida {2} raqamni esa vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida tanlasin. U holda,

1. Agar II o‘yinchi $\{1\}$ ni tanlasa, u holda I o‘yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 2 birlikda pul yutqazadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 3 birlikda pul yutadi. U holda uning o‘rtacha yutug‘i quyidagicha aniqlanadi: $-2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{2}{5}=0$.

2. Agar II o‘yinchi {2} ni tanlasa, u holda I o‘yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 3 birlikda pul yutadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 4 birlikda pul yutqazadi. U holda uning o‘rtacha yutug‘i quyidagicha aniqlanadi: $3\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Shunday qilib, II o‘yinchi qanday strategiya tanlashidan qat’i nazar har bir o‘yinning oxirida I o‘yinchi $\frac{1}{5}$ birlikdagi pul yutiqqa ega bo‘ladi.

Endi yuqoridagi umumiy holatda ko‘rib chiqamiz. Vaqt taqsimoti proporsiyasini p bilan belgilaymiz va p ning qiymatini I o‘yinchining har qanday holatdagi yutig‘i bir xil bo‘lgan holda topamiz. Ma’lumki I o‘yinchining o‘rtacha yutug‘i quyidagicha aniqlanadi: 1. $-2p+3(1-p)$; 2. $3p-4(1-p)$. U holda I o‘yinchining yutig‘ini o‘zgarmaganligini e’tiborga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz: $-2p+3(1-p)=3p-4(1-p)\Rightarrow 12p=7\Rightarrow p=\frac{7}{12}$.

Demak, agar vaqt taqsimotini $p=\frac{7}{12}$, $q=\frac{5}{12}$ kabi olsak I o‘yinchining yutig‘i har doim bir xil, ya’ni o‘zgarmas bo‘lib, quyidagiga teng bo‘ladi:

$$-2\cdot\frac{7}{12}+3\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{12}.$$

Shunday qilib, I o‘yinchining har bir holatda o‘rtacha yutig‘i $\frac{1}{12}$ bo‘lishi uchun $\{1\}$ raqamni $\frac{7}{12}$ ehtimollik bilan, $\{2\}$ raqamni esa $\frac{5}{12}$ ehtimollik bilan tanlash kerak.

Sof va aralash strategiyalarni bir-birindan farqlash kerak bo‘ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan (X,Y,A) uchlikdagi X va Y strategiyalar alohida-alohida qaralganda sof strategiyalar hisoblanadi. Agarda sof strategiyalar qandaydir proporsiyada qo‘llanilsa, u holda biz aralash strategiyani hosil qilamiz. Shunday qilib, toq yoki juft o‘yindagi I o‘yinchining optimal strategiyasi aralash strategiyadir. Unda sof strategiyalar $\frac{7}{12}$ va $\frac{5}{12}$ nisbat bilan qo‘llanilmoqda. Har qanday $x\in X$ strategiyani ham 1 ehtimollik bilan qo‘llanilgan x sof strategiyaning aralash strategiyasi sifatida qarash mumkin.

O‘yinning quyi va yuqori bahosi, egar nuqtasi va optimal bahosi. O‘yinchining strategiyasi deb, o‘yinchi mumkin bo‘lgan har qanday holatda tanlaydigan rejasiga aytiladi.

Strategiyaning soniga qarab, o‘yinlar chekli yoki cheksiz o‘yinlarga bo‘linadi.

Optimal strategiya deb, berilgan o‘yinchiga, o‘yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo‘lgan o‘rtacha yutuqni ta’minlovchi strategiyaga aytiladi.

Faraz qilamiz, A o‘yinchi m ta $A_1,A_2,...,A_m$ strategiyalarga, B o‘yinchi esa n ta $B_1,B_2,...,B_n$ strategiyalarga ega bo‘lsin. Agar A o‘yinchi A_i strategiyani B o‘yinchi B_j strategiyani tanlasin. U holda A o‘yinchining (A_i,B_j) juftlikka mos keluvchi yutug‘ini a_{ij} bilani belgilaymiz.

Matrisa satrlarini A_i strategiyalarga, ustunlarini B_j strategiyalarga mos

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

keltirib A – o‘yin matrisasini hosil qilamiz. Bu matrisa *to‘lov matrisasi* yoki *yutuq matrisasi* deb ataladi.

O‘yin matrisasini qurishning mohiyatini tushunib olish uchun quyidagi misolni ko‘ramiz.

Ikki o‘yinchining har biri 1 yoki 2 sonlardan birini tanlaydi va shu bilan bir paytda raqib qaysi sonni tanlaganini topishga harakat qiladi. Agar o‘yinchilardan ikkalasi ham raqibining tanlagan sonini topsa yoki adashsa o‘yin durang bo‘ladi. Agar faqat bitta o‘yinchi raqib tanlagan sonni topsa ikkinchisi esa raqib o‘ylagan sonni topa olmasa, u holda birinchi o‘yinchining yutig‘i tanlangan ikki sonning yig‘indisidan iborat bo‘lib ikkinchi o‘yinchi esa shunchaga yutqazadi.

(s, t) sonlar juftligini o‘yinchining strategiyasi deb ataymiz. Bu yerda s – o‘yinchi tanlagan son; t – o‘yinchining nazarida raqib tanlagan son. Shuday qilib, har bir o‘yinchining 4 ta strategiyasi mavjud: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2). Bu o‘yin haqidagi barcha ma’lumotlarni quyidagi matrisaga joylashtirish mumkin:

	II				
I		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
	(1,1)	0	2	-3	0
	(1,2)	-2	0	0	3
	(2,1)	3	0	0	-4
	(2,2)	0	-3	4	0

Matrisa elementlari I o‘yinchining yutiqlarini bildiradi. Masalan, agar I o‘yinchi (2,2) strategiyani tanlaganda (I o‘yinchi 2 sonni o‘ylab II o‘yinchi ham 2 sonni o‘yladi deb faraz qilmoqda) II o‘yinchi (2,1) (II o‘yinchi 2 sonni o‘ylab I o‘yinchini 1 sonni o‘yladi deb faraz qilmoqda) strategiyani tanlasa, u holda I o‘yinchining yutig‘i 4 birlikka teng bo‘ladi, chunki I o‘yinchi II o‘yinchi o‘ylagan sonni, ya’ni 2 ni topgan II o‘yinchi esa I o‘yinchi o‘ylagan sonni, ya’ni 2 ni topa olmagan. Agar I (1,2) strategiyani tanlaganda II o‘yinchi (1,1) strategiyani tanlasa, u holda I o‘yinchining yutig‘i -2 birlikka teng bo‘ladi.

Bu misol uchun o‘yin matrisasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

O‘yin tugashining mohiyati quyidagicha: I o‘yinchi quyidagicha fikr yuritishi kerak: agar A_{i_1} strategiyani tanlasa, u holda II o‘yinchini B_j strategiyasini shinday tanlashi mumkinki, natijada $a_{i_1 j_1}=\max\limits_{1\le i\le 4}\min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$ munosabat bajarilishi kerak.

Optimal strategiyani bunday aniqlash *minimax* usuli deb ataladi. Bu usul bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o‘yin matrisasini qaraymiz. Bu matrisada quyidagicha tanlash ishlarini amalga oshiramiz:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} a_{31} & a_{52} & \cdots & a_{kn} \end{matrix}}^{\max\limits_{1\le j\le m} a_{ij}} \\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} a_{13} \\ a_{27} \\ \cdots \\ a_{ms} \end{matrix}\right\} \min\limits_{1\le i\le n} a_{ij}. \end{array}$$

Bu yerda har bir satr bo‘yicha eng kichik sonlar tanlab olinib $\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}=\{a_{13},a_{27},\dots,a_{ms}\}$ hosil qilingan; har bir ustun bo‘yicha eng katta sonlar tanlab olinib $\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{13},a_{27},\dots,a_{ms}\}$ hosil qilingan.

Bizning misolimizda bu tanlashlar $\min\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{-3,-2,-4,-3\}$, $\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{3,2,4,0\}$ ko'rinishda amalga oshirilgan.

Umuman olganda, B o'yinchi B_{j_1} strategiyani A o'yinchining strategiyasini bilmagan holda tanlaydi. Shu sababli, yuqoridagi tanlashlar bir-biriga bog'liq emas.

Endi 2-marta tanlashni quyidagicha amalga oshiramiz:

$$\max_{1\le j\le n}\left\{\min_{1\le i\le m} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},...,a_{kn}\}\right\}=\alpha,$$

$$\min_{1\le i\le m}\left\{\max_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{13},a_{27},...,a_{ms}\}\right\}=\beta.$$

Biz qarayotgan misolimizda bu quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\max_{1\le i\le 4}\left\{\min_{1\le j\le 4} a_{ij}=\{-3,-2,-4,-3\}\right\}=-2\Rightarrow\alpha=-2,$$

$$\min_{1\le i\le 4}\left\{\max_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{3,2,4,0\}\right\}=0\Rightarrow\beta=0.$$

Demak, yuqoridagi fikrlash bo'yicha I o'yinchi $a_{21}=(1;2)$ strategiyani tanlaydi va u $\alpha=-2$ birlikdan ko'p yutqazmaydi.

Agar xuddi shuday fikrlashni II o'yinchiga nisbatan yuritsak II o'yinchida $\beta=0$ bo'lib o'yin durang bo'ladi.

Ammo A o'yin matrisasi ikki o'yinchiga ham ma'lum bolib, I o'yinchi faqat o'zi uchun emas, balki II o'yinchi uchun ham o'ylashi mumkin va aksincha. Natijada strategiya tanlash cheksiz davom etishi mumkun.

Bu savolga javob berish uchun quyidagi o'yin matrisasini ko'ramiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0\\ 6 & 4 & 5 & 5\\ 7 & 2 & -3 & 6\\ -10 & -3 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Bu yerda

$$a_{i_1j_1}=\max_{1\le i\le 4}\min_{1\le j\le 4} a_{ij}=\max\{-3,4,-3,-10\}=4,$$

ya'ni $i_1=2,\ j_1=2;$

$$a_{i_2j_2}=\min_{1\le j\le 4}\max_{1\le i\le 4} a_{ij}=\max\{7,4,8,7\}=4,$$

ya'ni $i_2=2,\ j_2=2.$

Shunday qilib, $i=2,\ j=2$ juftlik ikki o'yinchi uchun ham optimal strategiya.

Birinchi misolda har bir o'yinchi kamida -2 birlikda yutiq mavjud, ammo ular ko'proq yutiq olishga umid qilishadi.

Ikkinchi misolda esa ikki o'yinchi ham qanoatlantiradigan eng optimal strategiya topilgan. Bu ikki holatni farqlash uchun quyidagi ba'zi bir tushunchalarni kiritamiz.

2-ta'rif. Matrisali o'yin uchun $\alpha=\max\limits_{1\le j\le n}\left\{\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},...,a_{kn}\}\right\}$ son o'yinning *quyi qiymati*, $\beta=\min\limits_{1\le j\le m}\left\{\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},...,a_{kn}\}\right\}$ son esa o'yinning *yuqori qiymati* deb ataladi.

1-teorema. Matrisali o'yinning quyi va yuqori qiymatlari uchun quyidagi munosabat o'rinli: $\alpha\le\beta$.

3-ta'rif. Agar matrisali o'yinda $\alpha=\beta$ bo'lsa, u holda o'yin egar nuqtaga ega deyiladi. Bu yerda $\alpha=\beta=V$ o'yinning bahosi deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $\alpha=\min\limits_{1\le j\le n} a_{i_0 j}=\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$ bo'lsa, u holda A o'yinchining i_0 strategiyasi maksimin deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $\beta=\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij_0}=\max\limits_{1\le j\le n}\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ bo'lsa, u holda B o'yinchining j_0 strategiyasi minimaks deb ataladi.

Bu ikki strategiya garantiyalovchi strategiyalar (yutuqni garantiyalovchi strategiyalar) deb ataladi.

2-teorema. Agar garantiyalovchi strategiyalarning ixtiyoriy (i_0,j_0) juftliklari uchun

$$a_{ij_0}\le a_{i_0j_0}\le a_{i_0j}$$

tengsizlik bajarilsagina matrisali o'yin egar nuqtaga ega bo'ladi.

Demak, agar to'lov matrisasi egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda o'yinning yechimi ma'lum va har bir o'yinchi o'zining optimal strategiyasini qo'llaydi.

Biz quyida minimax teoremasini keltirish uchun ba'zi tushunchalarni kiritib olamiz. Agar X va Y strategiyalar chekli bo'lsa, u holda nol summali (X,Y,A) o'yin chekli bo'ladi.

3-teorema. Har qanday nol summali chekli o'yin uchun quyidagilar o'rinli:

1. bunda o'yin qiymati deb ataluvchi chekli V son mavjud;
2. I o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda I ning o'rtacha yutug'i V ning qiymati II o'yinchining harakatiga bog'liq emas;
3. II o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda uning o'rtacha to'lovi V ning qiymati I o'yinchining harakatiga bog'liq emas.

Bu yerda, agar $V>0$ demak, o'yin foydali; agar $V<0$ demak, o'yin foydasiz; agar $V=0$ demak, o'yin durang deyiladi.

7.2. Matrisali o'yinni chiziqli programmalash masalasiga keltirish

2-tartibli matrisali o'yinning egar nuqtasini topish. (2×2) o'lchamli

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

o'yin matrisasini qaraymiz. Har bir o'yinchi uchun hech bo'lmaganda bitta optimal strategiya va V o'yin qiymatini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. Egar nuqtani topamiz.
2. Agar egar nuqta bo'lmasa, u holda optimal strategiyani topib, o'yinning yechimini aniqlaymiz.

Faraz qilamiz, o'yinning egar nuqtasi mavjud bo'lmasin. Agar $a\geq b$ bo'lsa, u holda $b<c$ bo'ladi. Aks holda b egar nuqta bo'lib qoladi. $b<c$ bo'lgani uchun $c>d$ aks holda c egar nuqta bo'lib qoladi.

Demak, $d<a$, $a>b$. Boshqa tomondan agar $a\geq b$ bo‘lsa, u holda $a>b<c>d<a$. Agar $a\leq b$ bo‘lsa, u holda $a<b>c<d<a$. Bu shuni ko‘rsatadiki:

Agar egar nuqta mavjud bo‘lmasa, u holda $a>b,\ b<c,\ c>d$ va $d<a$ yoki $a<b, b>c, c<d$ va $d>a$.

Agar I o‘yinchi $(p,1-p)$ aralash strategiyani tanlasin. U holda

$$ap+d(1-p)=bp+c(1-p)\Rightarrow p=\frac{c-d}{(a-b)+(c-d)},\ 0<p<1,.$$

Bundan foydalanib, I o‘yinchining o‘rtacha yutug‘ini topish mumkin:

$$V=ap+d(1-p)=\frac{ac-bd}{a-b+c-d}.$$

II o‘yinchining strategiyasi $q=\frac{c-b}{a-b+c-d}$, $0<q<1$.

1-misol. $A=\begin{pmatrix}0 & -10\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisa uchun optimal strategiyani toping.

Bu yerda

$$p=\frac{2-1}{0+10+2-1}=\frac{1}{11},\ q=\frac{2+10}{0+10+2-1}=\frac{12}{11}.$$

Ma'lumki, $0<q<1$ bo‘lishi kerak, ammo bu misolda yuqoridagi tengsizlik bajarilmayapdi. Chunki biz, bu yerda egar nuqtani tekshirmadik. Bu matrisaning egar nuqtasi mavjud bo‘lib, u $V=1$. Bu yerda $p=0,\ q=1$.

Ba'zi hollarda yuqori o‘lchamli martisani kichraytirib (2×2) o‘lchamga keltiriladi so‘ngra uning egar nuqtasi yoki optimal strategiyasi topiladi. Bu jarayon quyidagicha amalga oshiriladi:

Agar $A=(a_{ij})$ matrisada barcha j lar uchun $a_{ij}\geq a_{kj}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda k-satr i-satrga dominant deyiladi. Xuddi shuda usulda i-ustunga dominant k-ustunni ham aniqlash mumkin $(a_{ij}\leq a_{ik})$

Dominant ustun yoki dominant satrni matrisadan o‘chrish mumkin. Bu jarayonni takrorlab matrisani (2×2) o‘lchamli matrisaga keltirib olish mumkin. Masalan, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ o‘yin matrisasining optimal strategiyasini topamiz. Bu matrisada 3-ustun 2-ustunga dominant. U holda 3-ustunni o‘chirib matrisani quyidagicha yozib olishimiz mumkin: $A'=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Yangi hosil bo‘lgan matrisada esa 1-satr 3-satrga nisbatan dominant. U holda boshlang‘ich matrisa quyidagi ko‘rinishga keladi: $A''=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Bu matrisa egar nuqtaga ega bo‘lmaganligi sababli unga mos o‘yinning optimal strategiyasini va qiymatini aniqlaymiz: $p=\frac{3}{4}, q=\frac{1}{4}, \ V=\frac{7}{4}$. Shunday qilib, boshlang‘ich o‘yinda I o‘yinchining optimal strategiyasi teng bo‘ladi: $\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$; II o‘yinchi uchun esa $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$.

Matrisaning satriga (ustuni) boshqa satrlarning (ustunlar) ehtimollar orqali kombinatsiyasi dominant bo‘lsa ham bu satrni (ustun) o‘chirish mumkin.

Bunda satr uchun $pa_{i_1j}+(1-p)a_{i_2k}\geq a_{kj}, \quad 0<p<1$; ustun uchun $pa_{ij_1}+(1-p)a_{ij_2}\leq a_{ik}, \ 0<p<1$ tensizliklardan foydalaniladi.

2-misol. $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 4\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$ o‘yin matrisasini qaraymiz. $p=\frac{1}{2}$ ehtimollik orqali kombinatsiyasidan $\begin{pmatrix}0{,}5\cdot 0+0{,}5\cdot 6\\ 0{,}5\cdot 5+0{,}5\cdot 4\\ 0{,}5\cdot 9+0{,}5\cdot 3\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}4\\ 7\\ 6\end{pmatrix}$ tengsizlik hosil qilamiz va 2-ustunni tashlab yuboramiz. Yangi hosil bo‘lgan $A'=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 5 & 4\\ 9 & 3\end{pmatrix}$ matrisadan $p=\frac{1}{3}, \ 1-p=\frac{2}{3}$ ehtimollar yordamida 2- satrni tashlab yuboramiz va $A''=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 9 & 3\end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Uning qiymati $V=\frac{9}{2}$.

Matrisali o‘yinni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish. Egar nuqtaga ega bo‘lmagan matrisali o‘yinlarda $\alpha<\beta$ bo‘ladi. Minimaks strategiyalarni qo‘llash har bir o‘ynovchiga α dan oshmaydigan yutuqni va β dan kam bo'lmagan yutqazishni beradi. Bunday hollarda o'yinchilar bitta emas, balki bir nechta strategiyalarni qo'llaydilar. Strategiyani tanlash tasodifan amalga oshiriladi.

Tasodifiy tanlash yo'li bilan aniqlangan strategiyalar *aralash strategiya* deb ataladi.

$(m \times n)$ tartibli matrisali o'yinda, A o'yinchining strategiyasi $X(x_1,x_2,...,x_m)$ vektor orqali aniqlanadi. Bunda A o'yinchi o'zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimollik bilan qo'llaydi, deb hisoblanadi. $X(x_1,x_2,...,x_m)$ vektor komponentlari uchun

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

shart bajariladi.

Xuddi shuningdek, B o'yinchi uchun $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ vektor aniqlanadi:

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

x_i va y_j ehtimolliklari noldan farqli bo'lgan strategiyalar *aktiv strategiyalar* deb ataladi.

A o'yinchining aralash strategiyalarni qo'llagandagi yutug'i sifatida yutuqlarning matematik kutilishi olinadi, ya'ni

$$V = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j.$$

1-teorema. Aralash strategiyalarda har bir chekli matrisali o'yin egar nuqtaga ega.

A o'yinchi tomonidan $X(x_1,x_2,...,x_m)$ optimal strategiyaning qo'llanishi, unga B o'yinchining har qanday harakatida ham o'yinning bahosi V dan kam bo'lmagan yutuqni ta'minlash kerak. Shuning uchun quyidagi munosabat bajarilishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq V, \quad j = \overline{1,n} \tag{7.1}$$

Xuddi shunga o'xshash, B o'ynovchi uchun $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ optimal strategiyasi, A o'ynovchining har qanday strategiyasida V dan oshmaydigan yutqazishni ta'minlashi zarur, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le V, \quad i = \overline{1,m} \qquad (7.2)$$

munosabat bajarilishi kerak.

Eng sodda matrisali o‘yinda yutuqlar matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bo‘lib, matrisa egar nuqtaga ega bo‘lmasa, $X=(x_1, x_2)$ va $Y=(y_1, y_2)$ aralash strategiyalarni va V – o‘yinning bahosini topish uchun

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

$m \times n$ tartibli matrisa bilan berilgan quyidagi o‘yinni qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrisa egar nuqtaga ega emas, deb hisoblaylik va shuning uchun o‘yinning yechimini $X(x_1, x_2, ..., x_m)$, $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ – aralash strategiyalar shaklida izlaymiz. A – o‘yinchining optimal strategiyasida (7.1) munosabat va B –o‘yinchining optimal strategiyasida (7.2) munosabat bajariladi. Shuning uchun, quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (A – o‘ynovchining) optimal strategiyasini topish masalasini qo‘yish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge V \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge V \end{cases} \qquad (7.3)$$

O‘yinning bahosi bo‘lgan V kattalik noma’lum, lekin doim $V > 0$ deb hisoblash mumkin. Bunga, agar A matrisa elementlariga bir xil musbat son qo‘shish sharti bilan erishish mumkin. (7.3) sistemani hamma cheklamalarini V ga bo‘lib, quyidagi sistemani

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \qquad (7.4)$$

hosil qilamiz. Bunda $t_1 = x_1 / V,\ t_2 = x_2 / V, ..., t_m = x_m / V$.

$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$ shartdan

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = 1 / V \qquad (7.5)$$

tenglik kelib chiqadi.

O‘yining yechimi V ning qiymatini maksimallashtirish kerak. Demak, $Z = t_1 + t_2 + ... + t_m$ funksiya minimal qiymat olishi kerak. Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases}$$

$$t_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m} \qquad (7.6)$$

$$Z = t_1 + t_2 + ... + t_m \to \min$$

Bu masalani yechib, t_i qiymatlar va $1/V$ kattalik topiladi hamda undan foydalanib $x_i = Vt_i$ qiymatlar topiladi. B o‘ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \leq V \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq V \end{cases} \qquad (7.7)$$

yoki tengsizliklarni V ga bo‘lib,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \leq 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \leq 1 \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \leq 1 \end{cases} \qquad (7.8)$$

sistemani hosil qilamiz. $u_1, u_2, ..., u_n$ – noma’lumni shunday olish kerakki, bunda (7.8) shart bajarilib,

$$W = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 / V$$

funksiya maksimum qiymatga erishsin. Shunday qilib, matrisali o'yinning yechimini topish simmetrik bo'lgan ikkilangan ikkita chiziqli programmalashtirish masalasiga keltiriladi. Bu ikkilangan masalalardan birini yechib, ikkinchisining yechimini undan foydalanib hosil qilish mumkin.

3-misol. Quyidagi matrisa bilan berilgan o'yinning yechimini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish: O'yinning optimal strategiyasini topish uchun quyidagi ChPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 4t_1+3t_2+2t_3 \ge 1 \\ 3t_1+4t_2+5t_3 \ge 1 \\ 4t_1+6t_2+t_3 \ge 1 \\ 2t_1+5t_2+3t_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$t_1 \ge 0,\ \ t_2 \ge 0,\ t_3 \ge 0$$

$$Z=t_1+t_2+t_3 \to \min$$

B o'ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 4u_1+3u_2+4u_3+2u_4 \le 1 \\ 3u_1+4u_2+6u_3+5u_4 \le 1 \\ 2u_1+5u_2+u_3+3u_4 \le 1 \end{cases}$$

$$u_i \ge 0,\ \ (i=\overline{1,4})$$

$$W=u_1+u_2+u_3+u_4 \to \max$$

Bu ikkilangan masala yechimi $U=\left(\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14}\right)$, $W_{\max}=\frac{1}{V}=\frac{2}{7}$ bo'ladi. Demak, $V=\frac{7}{2}$, $Y=\left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$. Dastlabki masalaning yechimi $T=\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$ va $X=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ bo'ladi.

7.3. Noaniqlik va tavakkalchilik sharoitida qarorlar qabul qilish

Bu o'yinda tabiat va yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSh) qatnashadi. Tabiatda $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlar mavjud bo'lib, ularga qarshi

YQQShda m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ tadbirlar mavjud. Tabiatga qarshi o‘yinni quyidagi matrisa ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$A_i \backslash B_j$	T_1	T_2	...	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Bu yerda a_{ij} tabiatning T_j holatida YQQSh A_i tadbirni amalga oshirganda uning ko‘radigan foydasi yoki zararini ko‘rsatadi. Agar a_{ij} foyda (yutuq) bo‘lsa, bu matrisa “***yutuqlar matrisasi***” deyiladi. a_{ij} zarar bo‘lganda esa bu matrisa “***to‘lovlar matrisasi***” deyiladi.

Bu matrisa asosida YQQSh o‘zining foydasini (zararini) maksimallashtiruvchi (minimallashtiruvchi) yo‘lni (sof strategiyani) tanlaydi.

Bunday strategiyani tanlash uchun minimax, Vald, Laplas, Sevidj va Gurvis mezonlaridan foydalanish mumkin. Bu mezonlar bilan tanishamiz.

Laplas mezoni. Bu mezonda tabiatning barcha $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari teng ehtimollik bilan ro‘y beradi degan fikr asos qilib olingan. Shu sababli tabiatning $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ehtimollik bilan ro‘y beradi. U holda agar YQQSh A_1 yo‘lni tanlasa, uning yutug‘i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}a_{11} + \frac{1}{n}a_{12} + ... + \frac{1}{n}a_{1n}, \text{ yoki } Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar YQQSh A_2 yo‘lni tanlasa, uning yutug‘i,

$$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$$

va hokazo. Agar YQQSh A_m yo‘lni tanlasa, uning yutug‘i, $Q_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$.

YQQSh maximum yutuq beruvchi yo‘lni, ya’ni

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_j a_{1j}, \frac{1}{n}\sum_j a_{2j}, ..., \frac{1}{n}\sum_j a_{nj}\right] = \max_i \frac{1}{n}\sum_j a_{ij},$$

yo‘lni tanlaydi.

1-misol. Quyidagi tabiatga qarshi o‘yinning optimal yechimini toping.

A_i \ B_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n$
A_1	7	14	14	24	$\frac{1}{4}(7+14+14+24)=14{,}75$
A_2	20	16	14	22	$\frac{1}{4}(20+16+14+22)=18$
A_3	9	8	10	23	$\frac{1}{4}(9+8+10+23)=12{,}5$
A_4	18	26	18	14	$\frac{1}{4}(18+26+18+14)=19$
p_j	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\max_i \frac{1}{4}(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in})=19$

Yechish: Laplas mezoniga ko‘ra YQQSh A_4 strategiyani tanlasa, uning yutug‘i eng katta, ya’ni 19 ga teng bo‘ladi.

Bayes mezoni. Bu mezonda tabiatning har bir T_j holati ma’lum bir q_j ehtimollik bilan ro‘y berishi aniqlangan bo‘ladi. Bu holda YQQSh o‘z yutug‘ini maksimal qiluvchi yo‘lni, ya’ni $\max_i \sum_j a_{ij}q_i$ beruvchi yo‘lni tanlaydi.

2-misol. Quyidagi jadval ko‘rinishida berilgan o‘yinning yechimini Bayes mezoni yordamida toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n$
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8

A_3	5	8	7	3	6,2
q_j	0.1	0.2	0.5	0.2	$\max_i\left(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n\right) = 6,2$

Yechish: Bu misolda optimal strategiya A_3. Bu yo‘lni tanlaganda YQQSh 6,2 yutuqqa ega bo‘ladi.

Vald mezoni. Bu mezon o‘yinlar nazariyasidagi maximin-minimax usuliga o‘xshaydi. Agar a_{ij} yutuq bo‘lsa, u holda YQQSh $\max_i(\min_j a_{ij})$ shartni ta’minlovchi yo‘lni tanlaydi. a_{ij} zarar bo‘lsa, u $\min_i(\max_j a_{ij})$ shartni ta’minlovchi A_i yo‘lni tanlaydi.

3-misol. (a_{ij} zarar). Quyidagi jadvalda berilgan o‘yinni Vald mezoni bilan yeching.

Yechish:

$$\min_j(\max_i a_{ij}) = \min(24,\ 22,\ 23,\ 26\ ) = 22\,.$$

Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutug‘i 22 bo‘ladi.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max_j(a_{ij})$
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	26	18	14	26
					$\min_i\{\max_j(a_{ij})\} = 22$

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimax prinsipiga asoslangan. Faqat bunda (a_{ij}) – to‘lovlar yoki yutuqlar matrisasi o‘rniga tavakkalchilik matrisasi deb ataluvchi (r_{ij}) matrisa ishlatiladi. Bu matrisa elementlari quyidagicha topiladi:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij},\ agar\ \ a_{ij} -\ yutug'\ bo'lsa, \tag{7.9}$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij} = a_{ij} - \alpha_i,\ agar\ \ a_{ij} -\ yutqazuv\ bo'lsa. \tag{7.10}$$

Bu yerda $\beta_i - a_{ij}$ tabiatning T_j holatidagi YQQShning maksimal yutug‘i, (minimal yutqazuvi).

r_{ij} YQQSh "tabiat" ning T_j holatida to'la chora ko'rmagani oqibatida tavakkalchilikdan ko'rgan zarari yoki uning "afsuslanishi" sonini bildiradi.

4-misol. Quyidagi o'yinni Sevidj mezoni bilan yeching.

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_j(a_{ij})$
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$\min\limits_i\{\max\limits_j(a_{ij})\}=100000$

Bu o'yinda YQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu yerda tabiatning T_1 holati ham, T_2 holati ham bo'lishi mumkin. Tabiatning aniq holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matrisasini tuzamiz:

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_j\ (r_{ij})$
A_1	10000	0	10000
A_2	0	99100	99100
			$\min\limits_i\{\max\limits_j(r_{ij})\}=10000$

Demak, optimal strategiya A_1 ekan.

Gurvis mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan a_{ij} miqdor daromadni bildirganda optimal strategiya sifatida quyidagi shartni qanoatlantiruvchi strategiya tanlanadi:

$$\max_i\left[\alpha\max_j a_{ij}+(1-\alpha)\ \min_j a_{ij}\right]\qquad \alpha\in[0,1]$$

a_{ij}–yutqazuvni bildirganda esa,

$$\min_i\left[\alpha\min_j a_{ij}+(1-\alpha)\ \max_j a_{ij}\right]\qquad \alpha\in[0,1]$$

natijani ta’minlovchi A strategiyani tanlaydi. Bu yerda α–yechim qabul qilish jarayonini subyektiv baholovchi parametr. Agar $\alpha=1$ bo‘lsa, vaziyat og‘ir va uni to‘g‘rilash uchun choralar ko‘rish kerakligi talab qilinadi. $\alpha=0$ da vaziyat yaxshi (optimal) hech qanday chora ko‘rmasa ham bo‘ladi deb faraz qilinadi. α ni $[0;1]$ oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab belgilanadi.

5-misol. Tabiat bilan bo‘lgan o‘yin quyidagi to‘lovlar matrisasi bilan berilgan bo‘lsin. $\alpha=0,4$

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Bu o‘yinga Gurvis mezonini qo‘llab optimal strategiyani topamiz. Buning uchun quyidagi ko‘rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo‘yicha tekshiramiz:

$$\gamma=\min_i\left[\alpha\min_j a_{ij}+(1-\alpha)\max_j a_{ij}\right] \qquad \alpha\in[0,1].$$

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51,8
A_2	24	75	23	23	75	54,2
A_3	70	16	20	16	70	48,4
A_4	16	27	13	13	27	21,4
						$\min_i \gamma = 21,4$

Demak, a_{ij} – yutqazuv bo‘lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan. Agar a_{ij} – daromad bo‘lsa, u holda yechim quyidagi ko‘rinishda topiladi:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	$\min\limits_j(a_{ij})$	$\max\limits_j(a_{ii})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	42,2
A_2	24	75	23	23	75	43,2
A_3	70	16	20	16	70	37,6
A_4	16	27	13	13	27	18,6
	Optimal strategiya A_2					$\min\limits_i \gamma = 43{,}2$

6-misol. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo‘lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo‘lsin. Endi savdo korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda uning ko‘radigan zarari minimal bo‘ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo‘l), 30% (A_2 yo‘l), 40% (A_3 yo‘l), 50% (A_4 yo‘l) tushirishga mo‘ljallaydi. Bu yo‘llarni YQQSh ning strategiyalari deb qaraymiz. “Tabiat”ning ikkita yo‘li bor:

1) talabning kam egiluvchan bo‘lishligi (T_1 yo‘l).

2) talabning ko‘p egiluvchanligi (T_2 yo‘l).

Ana shularni nazarga olib quyidagi jadvallarni tuzamiz:

YQQSh strate-giya	**Narxning tushishi (%)**	**Eski bahosi**	**Yangi bahosi**	**Sotiladigan tovar miqdori**	**Ko‘riladigan zarar**
A_1	20	20	16	100	4400
A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360

A_4	50	20	10	230	3700
	4400=500·12-16·100, 3900=500·12-14·150 3360=500·12-12·220, 3700=500·12-10·230				

Bu yerda bir birlik mahsulotni savdo korxonasiga keltirish uchun sarf qilinadigan xarajat 12 birlik, deb qabul qilingan.

Xuddi shuningdek, jadval talab egiluvchanligi kuchli bo'lgan hol uchun tuziladi.

YQQSh strategiya	**Narxning tushishi (%)**	**Eski bahosi**	**Yangi bahosi**	**Sotiladigan tovar miqdori**	**Ko'riladigan zarar**
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I va II jadvaldan foydalanib, to'lovlar matrisasini tuzamiz va yuqoridagi usullarni qo'llab yechamiz:

T_j A_i	T_1	T_2	$\max_j (a_{ij})$
A_1	4400	3600	4400
A_2	3900	1100	3900
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
			$\min_i \max_j a_{ij} = 3360$

Demak, savdo korxonasi mahsulot narxini 40% ga tushirganda zarar minimal bo'ladi, ya'ni 3360 ga teng bo'ladi.

Masalani Laplas mezoniga asosan yechamiz:

T_j A_i	T_1	T_2	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n$
A_1	4400	3600	4000

A_2	3900	1100	2500
A_3	3360	1200	2280
A_4	3700	1500	2600
q	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\min_i \left(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n\right) = 2280$

Bu mezon bo‘yicha ham narx 40% tushirilsa zarar 2280 bo‘ladi.

Sevidj mezonini qo‘llash uchun (r_{ij}) matrisa tuzamiz va optimal strategiyani topamiz.

T_j A_i	T_1	T_2	$\max_j \ (a_{ij})$
A_1	1100	2500	2500
A_2	600	0	600
A_3	0	100	100
A_4	400	400	400
			$\min_i \max_j r_{ij} = 100$

Bu mezonga ko‘ra ham narx 40% ga tushirilishi ma’qul.

Nazorat savollari

1. O‘yinlar nazariyasining asoschisi kim?
2. O‘yinning ta’rifini bering.
3. O‘yin strategiyasini tushuntiring.
4. Sof strategiya deganda nimani tushunasiz?
5. Minimax usulini tushuntiring.
6. Tabiat bilan o‘yin deganda qanday o‘yinlarni tushunish mumkin?
7. Tabiat bilan o‘yin raqiblar orasidagi o‘yindan qanday farq qiladi?
8. Vald mezoni bo‘yicha optimal strategiya qanday topiladi?
9. Laplas mezonini ta’riflang.
10. Sevidj mezoni bo‘yicha optimal strategiya qanday topiladi?
11. Gurvis mezoni qanday mezon?

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi matrisali o'yinlarni min(max) va max(min) usullari bilan yeching.

1. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

6. Quyida berilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida yutug'larni maksimallashtiruvchi strategiyani toping.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
p	0,2	0,7	0,1

7. Quyidagi keltirilgan daromadlar matrisasidan foydalanib, YQQSh ning optimal strategiyasini Laplas mezoni asosida toping.

8.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	17	21	24	34
A_2	30	26	24	32
A_3	19	18	20	33
A_4	28	36	28	24

8. Tabiat bilan o'yin quyidagi to'lovlar matrisasi orqali berilgan.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	61	14	13
A_2	14	65	13
A_3	60	6	10
A_4	6	17	3

Vald, Sevidj va Gurvis mezonlari asosida optimal strategiyani toping.

9. Deylik, fermer xo‘jaligi paxta yetishtirishga ixtisoslashgan bo‘lsin. Paxta hosildorligiga “tabiat” ning 4 xil holati ta’sir ko‘rsatishi mumkin bo‘lsin. Tabiatning bu holatlariga qarshi fermer 3 xil chora-tadbirlarni ko‘rishi oqibatida turli miqdorda daromad olishi mumkin. Quyida daromadlar matrisasi keltirilgan.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	2	3	6
A_2	2	5	4	3
A_3	4	7	6	2
p	0,3	0,3	0,2	0,2

Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta’minlovchi optimal strategiyani toping.

Tayanch so‘z va iboralar

O‘yin, konflikt holat, nol summali o‘yin, matrisali o‘yin, strategiya, optimal strategiya, chekli va cheksiz o‘yin, to‘lovlar va yutuqlar matrisasi, o‘yinning quyi va yuqori bahosi, maximin va minimax strategiyalar, egar nuqta, o‘yinning yechimi, aralash va sof stategiyalar, matrisa, chiziqli programmalashtirish, strategiya, optimal strategiya, tabiat bilan o‘yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSh), yechim qabul qilish mezonlari, “tabiat”ga qarshi o‘yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSh), yechim qabul qilish mezonlari.

GLOSSARIY

1. Atamaning o‘zbekcha nomi	2. Atamaning inglizcha nomi	3. Atamaning ruscha nomi	4. Atamaning qisqacha ma’nosi
Hodisa	Event	Событие	Tajriba natijasi, eksperiment
Tasodifiy hodisa	Random event	Случайное событие	Tajriba natijasida ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lmagan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi.
Muqarrar hodisa	Certain event	Достоверное событие	Tajriba natijasida har gal ro‘y beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi.
Mumkin bo‘lmagan hodisa	Impossible event	Невозможное событие	Birorta ham elementar hodisani o‘z ichiga olmagan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi.
Birgalikda bo‘lmagan hodisalar	Incompatible events	Несовместные события	Bitta tajribada biror tayin hodisaning ro‘y berishi tajribaning qolgan hodisalarining ro‘y berishini yo‘qqa chiqarsa, bunday hodisalarga birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb aytiladi.
Teng imkoniyatli hodisalar	Equally likely events	Равновозможные события	Amalga oshishi bir xil imkoniyatli bo‘lgan hodisalar teng imkoniyatli hodisalar deyiladi.
Ehtimolning klassik ta’rifi	Classical definition of probability	Классическое определение вероятности	A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb, hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar sonining, teng imkoniyatli yagona mumkin bo‘lgan elementar hodisalarning

			umumiy soniga nisbatiga aytiladi.
Ehtimolning statistik ta’rifi	Statistical definition of probability	Статистическое определение вероятности	Agar tajribalar soni yetarlicha ko‘p bo‘lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi – $W(A)$ biror o‘zgarmas $p\in[0,1]$ son atrofida turg‘un ravishda tebransa, shu p sonni A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning statistik ehtimoli deyiladi.
Geometrik ehtimollik	Geometric probability	Геометрические вероятности	Tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli uning yuziga proporsional bo‘lib, g soha G sohaning qayerida joylashganligiga bog‘liq bo‘lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli $P=\frac{g(yuzi)}{G(yuzi)}$ formula yordamida aniqlanadi. Bunday usuldagi ehtimollikga geometrik ehtimollik deyiladi.
Tasodifiy miqdor	Random variable	Случайная величина	Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo‘lgan, oldindan noma’lum va tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdor	Diskret random variable	Дискретная случайная величина	Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarni chekli yoki sanoqli ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga diskret tasodifiy miqdor deyiladi.
Uzluksiz tasodifiy miqdor	Continuous random variable	Непрерывная случайная величина	Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.
Matematik kutilma	Mathematical expectation, mean	Математическое ожиданием дискретной случайной величины	Agar X biror bir qimmatbaho qog'ozning daromadliligi bo'lsa, matematik kutilma uning o'rtacha daromadliligini bildiradi.
Dispersiya	Variance	Дисперсия	Agar X biror bir qimmatbaho qog'ozning daromadliligi bo'lsa, dispersiya uning riskini bildiradi.
O'rtacha kvadratik chetlanish	Standard deviation	Средне квадратическое отклонение	O'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi.
Taqsimot qonun	Law of distribution	Закон распределения	Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.

Binomial taqsimot qonun	Binomial distribution	Биноминальное распределение	Agar X tasodifiy miqdor 0, 1, 2, …, n qiymatlarni $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0<p<1,\quad 0\le k\le n$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi.
Puasson taqsimot qonun	Poisson distribution	Пуассоновское распределение	Agar X tasodifiy miqdor 0, 1, 2, … qiymatlarni $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,\ k=0,1,2,...$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, uni Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.
Geometrik taqsimot qonun	Geometric distribution law	Геометрические закон распределения	Agar X tasodifiy miqdor 1, 2, … qiymatlarni $P(X=k)=(1-p)p^{k-1},\quad p\in(0,1),\ k=1,2$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, uni Geometrik qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.
Normal taqsimot qonun	Normal distribution	Нормальное распределение	Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ ko'rinishda bo'lsa, bu tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi deyiladi va u $N(a,\sigma)$ ko'rinishda belgilanadi.
Tekis taqsimot qonun	Uniform distribution	Равномерное распределение	Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

			$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x<a, \\ \frac{1}{b-a}, & agar \quad a\le x<b, \\ 0, & agar \quad x\ge b. \end{cases}$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.
Ko‘rsatkichli taqsimot qonun	Exponential distribution	Показательное распределение	Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0. \end{cases}$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi. (bu yerda $\lambda>0$ – o‘zgarmas musbat son)
Katta sonlar qonuni	Law of large numbers	Закон больших чисел	Amaliyot uchun juda ko‘p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta’siri tasodifga deyarli bog‘liq bo‘lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko‘ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi “Katta sonlar qonuni” deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi.
Chebishev tengsizligi	Chebyshev’s inequality	Неравенство Чебышева	Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $P(\|X-M(X)\|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ yoki $P(\|X-M(X)\|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

Laplasning lokal limit teoremasi	A local limit theorem of Laplace	Локальная предельная теорема Лапласа	Agar n ta bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida biror A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p (0 < p <1) bo‘lsa, u holda m ning ushbu $\frac{\|m-np\|}{\sqrt{npq}}<c$ (c– o‘zgarmas son) shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun tekis ravishda $P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}\left(1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ tenglik bajariladi.
Laplasning integral limit teoremasi	Integral Laplace limit theorem	Интегральная предельная теорема Лапласа	Agar A hodisaning n ta bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas va p (0<p<1) ga teng bo‘lsa, u holda yetarlicha katta n larda A hodisaning m_1 dan m_2 tagacha ro‘y berish ehtimolligi $P(m_1 \leq m \leq m_2)$ taqriban quyidagicha hisoblanadi: $P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$.
Puasson teoremasi	Poisson theorem	Теорема Пуассона	To‘g‘ri chiziqdagi har qanday B to‘plam uchun $\|P(S_n \in B)-\Pi_\lambda(B)\| \leq \frac{\lambda^2}{n},\ \lambda=np$
Markaziy limit teorema	Central limit theorem	Центральная предельная теорема	Agar *X* tasodifiy miqdor juda ko‘p sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlarning yig‘indisidan iborat bo‘lib, har bir hadning yig‘indiga ta’siri e’tiborga olinmaydigan dara-

			jada juda kam bo‘lsa, u holda X ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo‘ladi.
Bosh to‘plam	General population	Генеральная совокупность	Bosh to‘plam deb tanlanma ajratiladigan obyektlar to‘plamiga aytiladi.
Bosh to‘plam dispersiyasi	Population variance	Генеральная дисперсия	Agar N hajmli bosh to‘plamning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_N$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo‘lsa, bosh to‘plam dispersiyasi $D(X)=D_B=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x}_B)^2$ formula bilan topiladi.
Tanlanma	Sample	Выборка	Tanlanma to‘plam (bundan keyin tanlanma) deb umumiy to‘plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan obyektlar to‘plamiga aytiladi.
Tanlanma to‘plam	Sample set	Выборочная совокупность	
Variatsion qator	Variation series	Вариационный ряд	Kuzatilgan x_i qiymatlarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi variatsion qator deyiladi.
Varianta	Variation	Варианты	Kuzatilgan x_i qiymatlarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligining x_i – hadlari variantalar deyiladi.
Varianta nisbiy chastotasi	The relative frequency of variant	Относительные частоты вариант	Kuzatishlar soni n_i –chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati $W_i=\frac{n_i}{n}$ – nisbiy chastotalar deyiladi.

Empirik taqsimot funksiya	Empirical distribution function	Эмпирическая функция распределения	Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymat uchun $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n^*(x)=\frac{n_x}{n}$ funksiyaga aytiladi.
Statistika	Statistic	Статистика	Tanlanmadan tuzilgan ixtiyoriy $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga statistika deyiladi.
Statistik baho	Statistical estimate	Статистическая оценка	Nazariy taqsimot noma'lum parametrining statistik bahosi deb kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.
Siljimagan baho	Unbiased estimate	Несмещенная оценка	Agar θ^* baho va θ noma'lum parametrlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty} M(\theta^*)=\theta$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho asimptotik siljimagan baho deb ataladi.
Asosli baho	Consistent estimate	Состоятельная оценка	Agar θ_n baho uchun har qanday $\varepsilon>0$ da $\lim\limits_{n\to\infty} P(\|\theta_n-\theta\|>\varepsilon)=0$ shart bajarilsa, ya'ni θ_n baho θ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashsa, u holda θ_n asosli baho deyiladi.
Optimal baho	Optimal estimation	Оптимальная оценка	Agar θ parametrning θ_{n_1} va θ_{n_2} siljimagan baholari uchun biror n hajmli tanlanmada $D(\theta_{n_1})<D(\theta_{n_2})$ o'rinli bo'lsa, u holda θ_{n_1}

			baho θ_{n_2} bahoga nisbatan n hajmli tanlanma uchun samaraliroq (optimalroq) baho deyiladi.
Effektiv baho	Effective estimate	Эффективная оценка	Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgan baho, bu hajmda eng samarali baho deyiladi.
Nuqtaviy baho	Point estimate	Точечная оценка	Agar noma’lum parametr bitta $\tilde{\theta}$ son bilan baholansa, u holda bu baho nuqtaviy baho deyiladi.
Interval baho	Interval estimation	Интервальная оценка	Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli baho deb ataladi.
Ishonchlilik oralig‘i	Confidence intervals	Доверительная оценка	$(\tilde{\theta}-\delta,\delta+\tilde{\theta})$ interval noma’lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervali deb ataladi.
Tanlanma o‘rtacha	Sample mean	Выборочная средняя	Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo‘lsa, $\overline{x}_T$ – tanlanma o‘rtacha $\overline{x}_T=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ formula bilan topiladi.
Tanlanma dispersiya	Sample variance	Выборочная дисперсия	Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo‘lsa, tanlanma dispersiya

			$D(X)=D_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_T\right)^2$ formula bilan topiladi.
Tuzatilgan tanlanma dispersiya	Corrected sample variance	Исправленная выборочная дисперсия	Bosh to‘plam dispersiyasi uchun statistik baho sifatida $D_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_T\right)^2$ tanlanma dispersiyasini olish mumkin emas. Chunki bu baho siljigan baho bo‘ladi, ya’ni $M(D_T)\neq D_B$. Bu holda biz $M(D_T)=\frac{n-1}{n}D_B$ tenglikni bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida olamiz va uni $s^2=\frac{n}{n-1}D_T$ ko‘rinishda belgilab “tuzatilgan” dispersiya deb ataymiz.
Mediana	Median	Медиана	Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidan teng ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi.
Funksional bog‘lanish	Functional dependence	Функциональная зависимость	Agar X belgining har bir mumkin bo‘lgan qiymatiga Y belgining bitta mumkin bo‘lgan qiymati mos kelsa, u holda Y belgi X belgining funksiyasi deyiladi: $Y=f(X)$
Statistik bog‘lanish	Statistical Dependence	Статистическая зависимость	Agar belgilardan birining o‘zgarishi ikkinchi belgi taqsimotining o‘zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki

			belgi orasidagi bog‘lanish statistik bog‘lanish deyiladi.
Korrelatsion bog‘lanish	Correlation	Корреляционная зависимость	Agar bir-biriga statistik bog‘lanishda bo‘lgan ikki belgidan birining o‘zgarishi ikkinchi belgi o‘rtacha qiymatining o‘zgarishiga olib kelsa, u holda bunday statistik bog‘lanish korrelatsion bog‘lanish deb ataladi.
Shartli o‘rtacha	Conditional expectation	Условные средние	$X=x$ qiymatga mos keluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o‘rtachasini shartli o‘rtacha deb ataymiz va $\overline{y_x}$ ko‘rinishda belgilaymiz. Xuddi shunday usulda $\overline{x_y}$ – shartli o‘rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.
Regressiya tenglamasi	The regression equation	Уравнения регрессии	Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi $(\overline{y_x}-\overline{y})=\rho_{yx}(x-\overline{x})$
Tanlanma korrelatsiya koeffisiyenti	The sample correlation coefficient	Выборочный коэффициент корреляции	Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti deb, $r_T=\frac{\sum xy-n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}$ (ma’lumotlar gruppalanmasa), yoki $r_T=\frac{\sum n_{xy}xy-n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}$ (ma’lumotlar gruppalansa) ga aytiladi.
Tanlanma korrelatsion nisbat	Sample correlation ratio	Выборочное корреляционное	Y ning X ga tanlanma korrelatsion nisbati deb, $\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y}$ nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

		отно-шение	Bu yerda $\sigma_{\overline{y_x}}=\sqrt{\frac{\sum n_x\left(\overline{y_x}-\overline{y}\right)^2}{n}}$ – shartli yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish; $\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y(y-\overline{y})^2}{n}}$ – o‘rtacha kvadratik chetlanish; n – tanlanma hajmi; n_x – X belgining x qiymati chastotasi; n_y – Y belgining y qiymati chastotasi; $\overline{y}$ – Y belgining umumiy o‘rtachasi; $\overline{y_x}$ – Y belgining $X=x$ ga mos shartli o‘rtachasi (x gruppaning gruppa o‘rtachasi).
Egri chiziqli korrelatsiya	Nonlinear correlation	Криволинейные корреляции	Egri chiziqli korrelatsiyada Y ning X ga regressiya funksiyalari quyidagi ko‘rinishda bo‘lishi mumkin: $\overline{y_x}=ax^2+bx+c$ (ikkinchi tartibli parabolik korrelatsiya); $\overline{y_x}=ax^3+bx^2+cx+d$ (uchinchi tartibli parabolik korrelatsiya); $\overline{y_x}=\frac{a}{x}$ (giperbolik korrelatsiya).
To‘plamiy korrelatsiya	Multiple correlation	Множественная корреляция	Ba’zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko‘proq belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish zaruriyati tug‘iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanish to‘plamiy (ko‘plik) korrelatsiya deb ataladi.

To‘plamiy korrelatsiya koeffisiyenti	Total correlation coefficient	Совокупный коэффициент корреляции	z belgining x va y belgilar bilan bog‘liqlik zichligi quyidagi: $R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}+r_{yz}^2}{1-r_{xy}^2}}$, $0\leq R\leq 1$ umumiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bilan baholanadi.
Statistik gipoteza	Statistical hypothesis	Статистическая гипотеза	Kuzatilayotgan t.m. haqida aytilgan ixtiyoriy fikrga statistik gipoteza deyiladi.
Alternativ gipoteza	Alternative hypothesis	Конкурирующая или альтернативная гипотеза	Asosiy gipotezadan qarama-qarshi bo‘lgan ixtiyoriy gipotezaga raqobatlashuvchi yoki alternativ gipoteza deb ataladi.
Sodda gipoteza	Simple hypothesis	Простая гипотеза	Faqat bitta da’voni o‘z ichiga olgan gipoteza oddiy gipoteza deyiladi.
Murakkab gipoteza	Composite hypothesis	Сложная гипотеза	Bittadan ortiq sondagi da’volarni o‘z ichiga olgan gipoteza esa murakkab gipoteza deyiladi.
Birinchi tur xatolik	Error of the first kind, type 1 error	Ошибки первого рода	Statistik yechim asosida asosiy faraz u to‘g‘ri bo‘lgan holda ham rad etilishi mumkin. Bunday xatolik birinchi tur xatolik deyiladi.
Ikkinchi tur xatolik	Errors of the second kind, type 2 error	Ошибки второго рода	Statistik yechim asosida alternativ gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa ham rad etilishi mumkin. Bunday xatolik ikkinchi tur xatolik deyiladi.

Statistik kriteriya	Statistical tests	Статистическая критерия	Statistik kriteriy (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan tasodifiy miqdorga aytiladi va bu tasodifiy miqdor odatda K bilan belgilanadi va K kriteriy deb ataladi.
Kritik soha	Falls in the region	Критическая область	Kriteriyning H_0 – asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to‘plami kritik soha deb ataladi.
Gipotezani qabul qilinish sohasi	Region of acceptance	Область принятия гипотезы	Kriteriyning H_0 – asosiy gipotezani qabul qiladigan qiymatlar to‘plami gipotezani qabul qilish sohasi deb ataladi.
Bir tomonlama kritik soha	One-tailed tests-region of rejection	Одностороняя критическая область	Agar kritik soha $K > k_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni o‘ng tomonli kritik soha; Agar kritik soha $K < k_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlansa. u holda uni chap tomonli kritik soha;
Ikki tomonlama kritik soha	Two-tailed tests-region of rejection	Двусторонняя критическая область	Agar kritik soha $K > k'_{kr}$, $K < k'_{kr}$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uni ikki tomonli kritik soha deyiladi.
Kriteriyaning quvvati	Power criterion	Мощность критерия	Konkurent gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Muvofiqlik kriteriyasi	Goodness of fit	Критерий согласия	Muvofiqlik kriteriysi deb, bosh to‘plam noma’lum taqsimotining taxmin qilinayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvchi kriteriyga aytiladi.
“xi-kvadrat” muvofiqlik kriteriyasi	Chi-square goodness of fit test	Критерий согласия «хи-квадрат»	H_0: bosh to‘plam normal taqsimlangan gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida $\chi^2 = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*}$ tasodifiy miqdor qaraladi.
Matematik model	Mathematical model	Математическая модель	O‘rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.
Chiziqli programmalashtirish	Linear programming	Линейное программирование	Agar $q_i(x_1,x_2,...,x_n) \le b_i,\ (i=\overline{1,m})$, $Z = f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max$ masaladagi barcha $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo‘lsa, bu masala chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.
Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi	The overall objective of linear programming	Общей задачей линейного программироваиия	Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

			$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max (\min)$
Kanonik shaklda yozish	Canonical form	Каноническая форма записи	Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) kanonik ko'rinishi: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$
Tayanch reja	Reference plan	Опорный план	Kanonik ko'rinishda berilgan ChPMning joiz yechimi (joiz rejasi) deb, masalaning shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorga aytiladi.
Aynimagan tayanch reja	Non-degenerate reference plan	Невырожденны опорный план	Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja deyiladi.
Aynigan tayanch reja	Degenerate reference plan	Вырожденны опорный план	Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lmasa, u holda bu reja aynigan bazis reja deyiladi.
Qavariq to'plam	Convex set	Выпуклое множество	Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir

			qatorda bu nuqtalarning $A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2$ $(0\le\alpha_1\le 1, 0\le\alpha_2\le 1, \alpha_1+\alpha_2=1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to‘plamga tegishli bo‘lsa, ya’ni $A_1\in C,\ A_2\in C\Rightarrow A\in C$ bo‘lsa, u holda C to‘plam qavariq to‘plam deb ataladi.
Yechimlar ko‘pburchagi	Creating polygons	Многогранник решений	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m \end{cases}$ va $x_1, x_2\ge 0$ cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko‘pburchak reja ko‘pburchagi deb ataladi.
Simpleks usul	Simplex method	Симплексный метод	Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940-yilda ishlab chiqilgan bo‘lib chiziqli dasturlash model sifatida ham iqtisodiy ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.
Optimallik sharti	Optimality condition	Условие оптимальности	Agar biror bir $X^0=(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j\le 0$, $(j=\overline{1,n})$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu reja optimal reja bo‘ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari	Basic solution of the linear equation	Базисный решение системы линейных уравнение	Chiziqli tenglamalar sistemasida erkli o‘zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o‘zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo‘ladi. Natijada $X_0=(b_1,b_2,...,b_m,0,...,0)$ bazis yechim hosil bo‘ladi. Bu yechimni boshlang‘ich bazis yechim deb ataymiz.
Sun’iy bazis	Induced basis	Искусственный базис	Sun’iy bazis o‘zgaruvchilariga mos $P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{n+m}$ vektorlar “sun’iy bazis vektorlar” deb ataladi.
Berilgan masala	The original problem	Исходная или прямая задача	$AX=B,$ $x_j\geq 0,\quad j=\overline{1,n},$ yoki $F=CX\to \max.$ $AX=B,$ $x_j\geq 0,\quad j=\overline{1,n},$ masalaga $F=CX\to \min.$ berilgan masala deyiladi.
Ikkilangan masala	Dual problem	Двойственная задача	$A^TY\geq C^T,$ yoki $\bar{F}=B^TY\to \min.$ $A^TY\leq C^T,$ masalaga $\bar{F}=B^TY\to \max.$ ikkilangan masala deyiladi.
Nosimmetrik masala	Non-symmetric problem	Не симметрическая задача	$AX\leq B,$ $x_j\geq 0,\quad j=\overline{1,n},$ masalaga $F=CX\to \max.$ nosimmetrik qo‘shma masala $A^TY\geq C^T,$ $y_j\geq 0,\quad j=\overline{1,m},$ $\bar{F}=B^TY\to \min.$
Resurslar holati	Resource status	Статус ресурсов	Optimal yechimning ikkilangan bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o‘lchovidir.

Kamyob resurslar	Deficient resources	Дефицитные ресурсы	Mahsulot ishlab chiqarishda to‘la ishlatiladigan xom-ashyo “tanqis (defitsit) xomashyo” deyiladi.
Kamyob bo‘lmagan resurslar	Non-deficient resources	Недефицитные ресурсы	Mahsulot ishlab chiqarishda to‘la ishlatilmaydigan xom-ashyo “notanqis (kamyob bo‘lmagan) xomashyo” hisoblanadi.
Ikkilangan simpleks usuli	Dual simplex method	Двойственный симплексный метод	Bunday masalalarni ikkilangan simpleks usul bilan yechish uchun eng avvalo masalaga qo‘shma $A^TY \le C^T$, $F = B^TY \to \max$. masala tuziladi. So‘ngra oddiy simpleks usulida yechiladi.
Transport masalasi	The transportation problem	Транспортная задача	Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo‘lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo‘llanish sohasi juda kengdir.
Ochiq modelli transport masalasi	The balanced transportation problem	Транспортная задача с закрытой моделью	Agar mahsulotga bo‘lgan talab taklifga teng bo‘lmasa, ya’ni $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday masalalar ochiq modelli transport masalasi deyiladi.
Yopiq modelli	The unbalanced	Транспортная задача с	Agar mahsulotga bo‘lgan talab taklifga teng, ya’ni

transport masalasi	transportation problem	открытой моделью	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday masala yopiq modelli transport masalasi deyiladi.
Aynimagan transport masalasi	A non degenerate transportation problem	Не вырожденная транспортная задача	Agar talablarning yig‘ndisi takliflarning yig‘indisiga teng emas, ya’ni $\sum_{i\in G} a_i \neq \sum_{j\in H} b_j$, $G\subset M=\{1,2,...,m\}$, $H\subset N=\{1,2,...,n\}$ bo‘lsa, u holda bu transport masalasi aynimagan transport masalasi deyiladi.
Aynigan transport masalasi	A degenerate transportation problem	Вырожденная транспортная задача	Agar talablarning qismiy yig‘ndisi takliflarning qismiy yig‘indisiga teng, ya’ni $\sum_{i\in G} a_i = \sum_{j\in H} b_j$, $G\subset M=\{1,2,...,m\}$, $H\subset N=\{1,2,...,n\}$ bo‘lsa, u holda bu transport masalasi aynigan transport masalasi deyiladi.
Potensiallar usuli	Potential method	Метод потенциалов	Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo‘llangan birinchi aniq usul bo‘lib, u 1949-yilda rus olimlari L.V.Kantorovich va M.K.Gavurin tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g‘oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo‘lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog‘liq

			bo‘lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o‘xshash usul amerikalik olim Dansig tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g‘oyalariga asoslangan bo‘lib, Amerika adabiyotida bu usul modifitsirlangan taqsimot usuli deb yuritiladi.
ε- usul	Epsilon-constraint method	ε- метод	Aynigan transport masalasida ayniganlikni yo‘qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig‘indilarning o‘zaro teng bo‘lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o‘zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni o‘zgartiramiz, ya’ni ε masala tuzamiz: ε yetarlicha kichik son bo‘lganligi sababli hosil bo‘lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon = 0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo‘ladi.
To‘la butun sonli programmalashtirish	Fully integer linear problem programming	Полностью целочисленная задачи линейного программирования	Agar butun sonli programmalashtirish masalalaridagi noma’lumlarning hammasi uchun butun bo‘lishlilik sharti qo‘yilsa, bunday masalalar to‘la butun sonli

			programmalashtirish masalalari deb ataladi.
Gomori usuli	Gomory method	Метод Гомори	R.Gomori usuli. Noma'lumlarga butun bo'lishlilik sharti qo'yilganligi sababli ChPMlarini yechish usullarini BSPlarini yechish uchun qo'llab bo'lmaydi. BSPMlarini yechish uchun ularning xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ular orasida amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal butun sonli yechimni beruvchi eng aniq usullardan biri hisoblanadi. Gomori usuli yordami bilan to'la butun sonli hamda qisman butun sonli masalalarni yechish mumkin.
Statsionar nuqta	Stationary point	Стационарная точка	$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n}$ sistemaning yechimlari statsionar nuqtalar deb ataladi.
Logranj funksiyasi	Lagrangian function	Функция Лагранжа	$F(X,\bar{\lambda})=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(X)), \quad (\lambda_0=1)$ klassik Lagranj funksiyasi.
Nochiziqli programmalashtirish	Nonlinear programming	Нелинейное программирование	Agar $q_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i, (i=\overline{1,m}),$ $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \max$ masaladagi $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda bu masala "chiziqsiz programmalashtirish masalasi" deyiladi.

Dinamik programmalashtirish	Dynamic programming	Динамическое программирование	Parametrlari o‘zgaruvchan miqdor bo‘lib, ular vaqtning funksiyasi deb qaralgan masalalar “dinamik programmalashtirish masalasi” deyiladi.
Qavariq programmalashtirish masalasi	Convex programming	Выпуклое программирование	Hozirgi davrgacha eng yaxshi o‘rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalari $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar qavariq (botiq) bo‘lgan holdir. Bunday masalalar “qavariq programmalashtirish masalalari” deb ataladi.
Kvadratik programmalashtirish masalasi	Quadratic programming problem	Задачи квадратичное программирования	Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko‘p masalalarda $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo‘lib, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ maqsad funksiyasi kvadratik formada, ya’ni $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday masalalar kvadratik programmalashtirish masalalari deb ataladi.
Strategiya	Strategy	Стратегия	Butun jarayonning yechimi o‘zaro bog‘langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo‘ladi. O‘zaro bog‘langan bunday yechimlar ketma-ketligi strategiya deb ataladi.
Optimal strategiya	The optimal strategy	Оптимальная стратегия	Oldindan tanlangan mezonga ko‘ra eng yaxshi natijani ta’minlovchi strategiya optimal strategiya deb ataladi.

O‘yinda strategiya	The strategy in game theory	Стратегия в теории игр	O‘yinchining strategiyasi deb, o‘yinchi mumkin bo‘lgan har qanday holatda tanlaydigan rejasiga aytiladi.
O‘yinda optimal strategiya	The optimal strategy in game theory	Оптимальная стратегия в теории игр	Optimal strategiya deb, berilgan o‘yinchiga, o‘yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo‘lgan o‘rtacha yutuqni ta’minlovchi strategiyaga aytiladi.
To‘lov matrisasi	Pay off matrix	Платежная матрица	Matrisa satrlarini A_i strategiyalarga, ustunlarini B_j strategiyalarga mos $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ keltirib A – o‘yin matrisasini hosil qilamiz. Bu matrisa to‘lov matrisasi yoki yutuq matrisasi deb ataladi.
O‘yinning quyi bahosi	The lower price of the game	Нижняя цена игры	Matrisali o‘yinning quyi va yuqori qiymatlari uchun quyidagi munosabat o‘rinli: $\alpha \le \beta$.
O‘yinning yuqori bahosi	The top price of the game	Верхняя цена игры	
O‘yinning bahosi	Game price	Цена игры	$\alpha=\beta=V$ o‘yinning bahosi deb ataladi.
Matrisali o‘yinda egar nuqta	A saddle point in the matrix game	Седлова точка в матричной игре	Agar matrisali o‘yinda $\alpha=\beta$ bo‘lsa, u holda o‘yin egar nuqtaga ega deyiladi.
Aralash strategiya	Mixed strategy	Смешанная стратегия	Tasodifiy tanlash yo‘li bilan aniqlangan strategiyalar aralash strategiya deb ataladi.

1-ilova

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya qiymatlarining jadvali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,11804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0986	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804

1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ funksiya qiymatlarining jadvali

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370

0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625

0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499828
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

3-ilova

$t_\gamma = t(\gamma; n)$ ning qiymatlari jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,927	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291

4-ilova

$q_* = q(\gamma; n)$ ning qiymatlari jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,28
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185

5-ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

Erkinlik darajalari soni k	Muhimlilik darajasi α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01

19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,9	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

6-ilova

Styudent taqsimotining kritik nuqtalari

Erkinlik darajalari soni k	Muhimlilik darajasi α (ikki tomonli kiritik soha)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92

19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Muhimlilik darajasi α (bir tomonli kiritik soha)					

7-ilova

F Fisher-Snedekor taqsimotining krirtik nuqtalari

(k_1-dispersiysi katta tasodifiy miqdornnig erkinlik darajalari soni,
k_2 -dispersiyasi kichik tasodifiy miqdornnig erkinlik darajalari soni)

Muhimlilik darajasi $\alpha = 0,01$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67

16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Muhimlilik darajasi $\alpha = 0,05$

k_1 / k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	1937	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

MUNDARIJA

I. BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

II. BOB. MATEMATIK STATISTIKA

III. BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

IV. BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHNING MAXSUS MASALALARI

V. BOB. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

VI. BOB. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

VII. BOB. O‘YINLAR NAZARIYASI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

A.R.XASHIMOV, N.K.OCHILOVA, M.I.AXMEDOV,
A.I.SOTVOLDIYEV

IQTISODIY MATEMATIKA

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2018

Muharrir: M.Hayitova
Tex. muharrir: F.Tishabayev
Musavvir: A.Moydinov
Musahhih: Sh.Mirqosimova
Kompyuterda sahifalovchi: N.Rahmatullayeva

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 245-57-63, 245-61-61.
Nashr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi 05.10.2018.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 21,75. Nashriyot bosma tabog'i 22,0.
Tiraji 300. Buyurtma № 420.

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.

FAN VA TEXNOLOGIYALAR

ISBN 978-9943-11-855-3

9 789943 118553