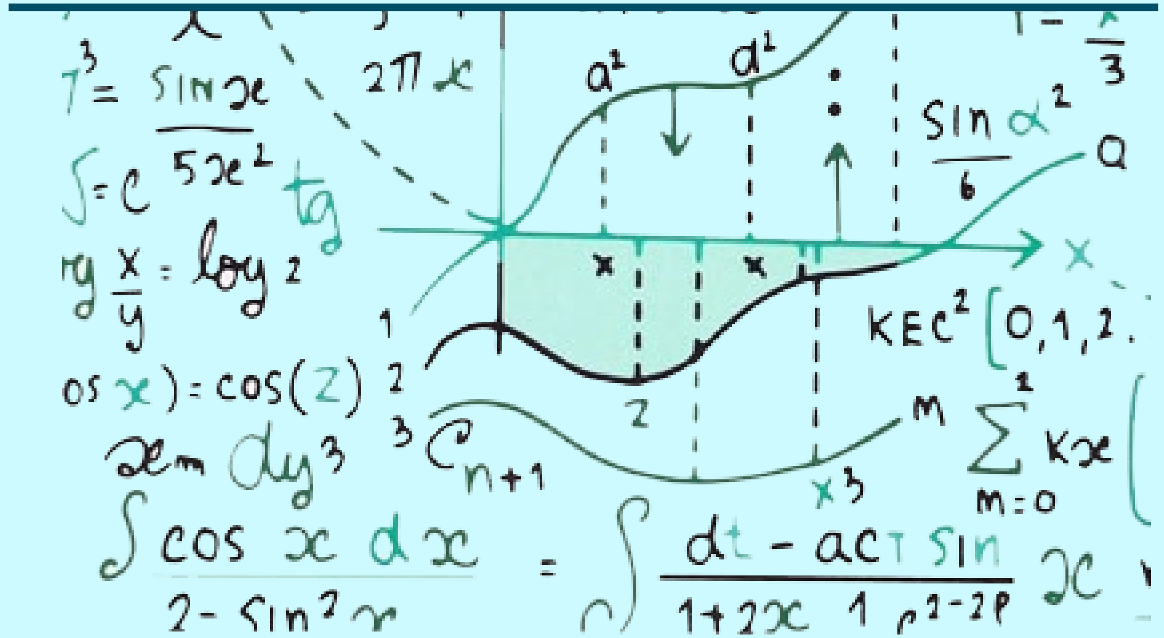
ISBN 978-9943-13-900-0

EKONOMETRIKA

X.Q.QARSHIBOYEV
Sh.A.DJALILOV
B.I.ASHUROV

X.Q.QARSHIBOYEV
Sh.A.DJALILOV, B.I.ASHUROV

EKONOMETRIKA



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

X.Q.QARSHIBOYEV, Sh.A.DJALILOV, B.I.ASHUROV

EKONOMETRIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent
«IQTISOD-MOLIYA»
2020

UO‘K: 519.862

KBK: 60.6ya73

Taqrizchilar:

A.M.Xalxo‘jayev – SamDU, “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrasi mudiri, f-m.f.d., professor;

I.Shukurov – SamISI, “Xizmatlar ko‘rsatish servis va uni tashkil etish” kafedrasi mudiri, t.f.n, dotsent.

Ekonometrika: *O‘quv qo‘llanma* / X.Q.Qarshiboyev, Sh.A.Djalilov, B.I.Ashurov; – T.: “Iqtisod-Moliya”, 2020. – 488 b.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada oliy algebra elementlari, tekislik va fazodagi analitik geometriyaning asosiy masalalari, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisobi, differensial tenglamalar nazariyasining elementlari, qatorlar nazariyasining elementlari, ekonometrikada ehtimollar nazariyasi va matematik statitstikaning asosiy tushunchalari, tasodifiy miqdorlar, statistika haqida tushunchalar, korrelyatsiya va regressiya haqida tushunchalar, ko‘p omilli ekonometrik tahlil, vaqtli qatorlar, amaliy ekonometrik modellar va iqtisodiy ko‘rsatkichlarni bashoratlashda ekonometrik modellaridan foydalanishlar keltirilgan.

O‘quv qo‘llanmada oldin fanning nazariy qismlari qisqacha ayrim boblarda esa kengroq berilgan bo‘lib, qulay usullarni qo‘llab misol va masalalar yechilgan. Misol va masalalar yechilgandan so‘ng, tahlil qilingan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma xizmatlar sohasi ta’lim yo‘nalishlarida ta’lim olayotgan bakalavriat talabalari va professor-o‘qituvchilar hamda magistrantlar ham mustaqil ishlarida foydalanishlari mumkin.

UO‘K: 519.862

KBK: 60.6ya73

ISBN 978-9943-13-900-0

KIRISH

Hozirgi kunda hududlar iqtisodiyotini modernizatsiya va diversifikatsiya qilish masshtablarni kengaytirish hisobiga hududlarning ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish darajasidagi farqini kamaytirish, yangi sanoat ishlab chiqarish va servis markazlarini tashkil etish hisobiga shahar tipidagi kichik shaharlar va shaharchalarni aktiv rivojlantirish, yirik xo‘jalik birlashmalarning mablag‘larini, banklarning kreditlarini va xususiy xorijiy investitsiyalarni jalb qilish, o‘zgarib turuvchi raqobat muhiti va bozor sharoitlarini ilg‘ab olish, ularning mohiyati hamda qonuniyatlarini chuqur tahlil qilishda ekonometrik usullar va modellardan foydalanish yordamida makroiqtisodiy indikatorlarni bashoratlash, ko‘p variantli yechimlardan muqobil yechimni tanlash, tavakkalchilik va noaniqlik sharoitida optimal iqtisodiy qarorlar qabul qilish, keyinchalik, bu qarorlar bajarilishini monitoring qilish masalalarining nazariy va amaliy tomonlarini o‘rganishda “Ekonometrika” fani muhim ahamiyat kasb etadi.

Bundan tashqari “Ekonometrika” fani xizmat ko‘rsatish soha (aholi va turistlarning ovqatlanishini tashkil etish servisi, xizmatlar sohasi (restoran ishi) va boshqa sohalar) lari bo‘yicha bir nechta o‘zaro bog‘liqlik bo‘lgan va iqtisodiy tadbiq etiladigan bo‘limlarda masalalarning yechimini topishda rol o‘ynaydi.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada oliy algebra elementlari, tekislik va fazodagi analitik geometriyaning asosiy masalalari, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisobi, differensial tenglamalar nazariyasining elementlari, qatorlar nazariyasining elementlari, ekonometrikada ehtimollar nazariyasi va matematik statitstikaning asosiy tushunchalari, tasodifiy miqdorlar, statistika haqida tushunchalar, korrelyatsiya va regressiya haqida tushunchalar, ko‘p omilli ekonometrik tahlil, vaqtli qatorlar, amaliy ekonometrik modellar va iqtisodiy ko‘rsatkichlarni bashoratlashda ekonometrik modellardan foydalanishlar keltirilgan.

O‘quv qo‘llanma 15 bobdan va har bir bobda mavzular bo‘yicha tayanch iboralar, nazorat savollari va mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berilgan.

O‘quv qo‘llanma xizmatlar sohasi ta’lim yo‘nalishlari bo‘yicha bilim oladigan talabalar uchun ham mustaqil ta’lim olishlariga imkon beradi.

I-BOB. CHIZIQLI ALGEBRA

1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar

Matritsaviy algebra-matritsa ta’rifi va unga asoslangan matematikaning bo‘limi bo‘lib, iqtisodchilar uchun juda muhim ahamiyatga ega. Bunga shunday izoh berish mumkinki, aksariyat iqtisodiy ob’ektlar va jarayonlarning matematik modellari juda sodda, muhimi kompakt matritsa ko‘rinishida yoziladi.

1-ta’rif. m ta satrli va n ta ustunli to‘g‘ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$\underset{mxn}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ *o‘lchamli matritsa* deyiladi. Matritsalar lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi, masalan, $A, B, C, \ldots$ kabi. A matritsani qisqacha $A = (a_{ij});\ i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar $(\ )$ qavsdan tashqari quyidagi belgilar bilan ham belgilanadi: $\|\ \|, [\ ]$.

Matritsa yordamida ba’zi iqtisodiy bog‘lanishlarni yozish qulay. Masalan, alohida iqtisodiy tarmoqlarga xom ashyolarni taqsimlash jadvali:

Resurslar	Iqtisod tarmoqlari	
	sanoat	qishloq xo‘jaligi
Elektroenergiya	5,3	4,1
Mehnat resurslari	2,8	2,1
Suv resurslari	4,8	5,1

tarmoqlar bo‘yicha resurslarni taqsimlash matritsa ko‘rinishda ixcham yozilishi mumkin:

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}5{,}3 & 4{,}1\\ 2{,}8 & 2{,}1\\ 4{,}8 & 5{,}1\end{pmatrix}.$$

Bu yozuvda, matritsaning $a_{11}=5{,}3$ element sanoatning elektroenergiya ist’emolini, $a_{22}=2{,}1$-esa qishloq xo‘jaligini ist’emol mehnat resurslarini ko‘rsatadi.

Matritsalarda satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lsa, bunday matritsalar *kvadrat matritsa* deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matritsauchun uning elementlaridan tuzilgan determinantni hisoblash mumkin, bu determinantga A matritsaning *determinanti* deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. $\det A=0$ bo‘lsa, A matritsaga *maxsus matritsa*, $\det A\neq 0$ bo‘lsa, *maxsusmas matritsa* deyiladi. Kvadrat matritsaning $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonali *bosh diagonal*, $a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonali *yordamchi diagonal* deyiladi. Bosh diagonaldagi elementlar 0 dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matritsa *diagonal matritsa* deyiladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

matritsa uchinchi tartibli diagonal matritsadir.

Agar $n-$chi tartibli diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari 1 ga teng bo‘lsa, u holda bunday matritsaga $n-$chi tartibli *birlik matritsa* deyiladi va u E harfi orqali belgilanadi.

Masalan, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ - uchinchi tartibli *birlik matritsa*.

Faqat bitta satrdan iborat $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$ matritsaga satr matritsa deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matritsaga ustun matritsa deb ataladi.

No‘l yoki ixtiyoriy o‘lchovli matritsa deyiladi, agarda uning barcha elementlari 0 ga teng bo‘lsa:

$$\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A matritsaga quyidagi matritsani mos qo‘yish mumkin:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning har bir satri A matritsaning unga mos ustunidan iborat. A^T matritsani A matritsaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ matritsalarning mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo‘lsa, bunday matritsalar teng deyiladi.

Matritsalar ustida amallar. *A matritsaning λ songa ko‘paytirish deb,* shunday $B = \lambda A$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, barcha $i = 1,2,..,m;\ j = 1,2,...,n$ lar uchun topiladi.

Masalan, agar $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, u holda $5A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 \\ 20 & -15 & 5 \\ 10 & 40 & 30 \end{pmatrix}$.

Xususiy holda, *A matritsaning 0 soniga ko‘paytmasi* nol matritsa **0** hosil bo‘ladi, y’ni $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

Bir xil $m \times n$ o‘lchamli ikkita $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ *matritsalarning yig‘indisi* deb, shunday $C = A + B$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $i = 1,2,...,m;$ $j = 1,2,...,n$ lar uchun aniqlanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \; C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ikkita bir xil o‘lchamli matritsalarning ayirmasi quyidagi amal orqali oshiriladi: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

$A = (a_{ij})$ *matritsani* $B = (b_{ij})$ *matritsaga ko‘paytirsh* mumkinki, qachonki birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng bo‘lsa. U holda $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ matritsalar ko‘paytmasi shunday $\underset{m\times n}{C}$ matritsaga uning c_{ij} elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j-ustunining mos elementlariga ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya’ni:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}, \; i = 1,2,...,m; \; j = 1,2,...,n.$$

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. $A \cdot B$ ko‘paytma matritsani toping.

Yechish. Ko‘paytma matritsaning o‘lchamini topamiz $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{C}$. Birinchi matritsaning ustunlar soni, ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matritsalarni ko‘paytirish mumkin:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz.

Matritsalar ustida quyidagi amallar o‘rinli:

1). $A+B=B+A$

2). $(A+B)+C=A+(B+C)$

3). $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

4). $A(B+C)=AB+AC$

5). $(A+B)C=AC+BC.$

6). $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B).$

7). $A(BC)=(AB)C.$

Butun musbat darajali A^m $(m>1)$ *kvadrat matritsa deb*, A matritsani o‘zini-o‘ziga m marta ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan matritsaga aytiladi, y’ni

$$A^m \equiv \underbrace{A\cdot A\cdot ....\cdot A}_{m\ марта}.$$

Ta’rifga ko‘ra, $A^0=E,\ A^1=A.$ Osonlik bilan ko‘rsatish mumkinki, $A^m\cdot A^k=A^{m+k},\ (A^m)=A^{mk}.$

2-misol. A^2 ni toping, bunda $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$

Yechish. $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}.$

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o‘lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig‘indisi, matritsani songa ko‘paytirish, matritsalar ko‘paytmasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o‘lchovi nima va u qanday yoziladi?
3. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsaning determinanti nima?
5. Maxsus va maxsusmas Matritsalar qanday Matritsalar?
6. Diagonal matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Transponirlangan matritsa deb nimaga aytiladi?
9. Qanday matritsalar teng bo‘ladi?

10. Matritsalar yig‘indisi nima?

11. Matritsani songa ko‘paytirish qanday bo‘ladi?

12. Qanday Matritsalarni ko‘paytirish mumkin?

13. Matritsalar qanday ko‘paytiriladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. AB va BA matritsalarning ko‘paytmasini toping

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $D=(AB)^T-C^2$ matritsani toping

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalarni ko‘paytiring.

4. Matritsalarni yig‘indisini toping

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. ABC matritsalarni ko‘paytmasini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2-§. Determinantlar va ularning xossalari

Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bo‘lsa, (1) tenglamalar sistemasi yagona

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2)$$

yechimga ega bo‘ladi. (2) formuladagi sur’at va mahrajdagi ifodalar 2- tartibli determinant (aniqlovchi)lar deyiladi. 2-tartibli determinantni

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. Shunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{13}a_{12} \\ a_{33}a_{32} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ifodaga *3- tartibli determinant deyiladi* va

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

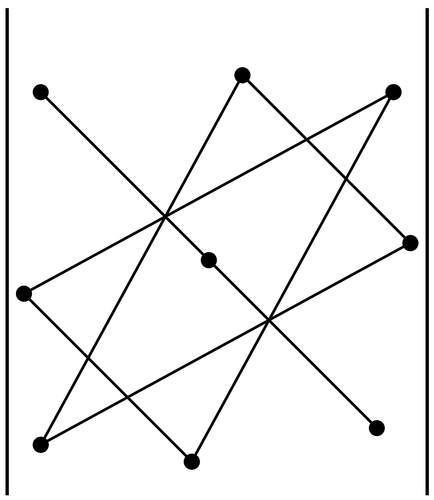
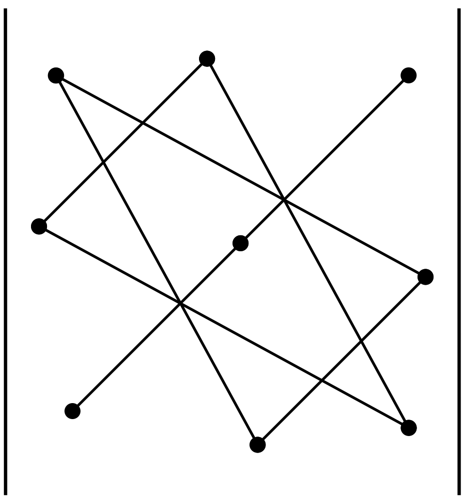
bilan belgilanadi.

a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar *bosh diagonalni,* a_{13}, a_{22}, a_{31} *yordamchi diagonalni* ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni kattaliklari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (5)$$

bo‘ladi. (5) formulani esda saqlash *uchun uchburchak qoidasidan* foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema hosil bo‘ladi :

	
+	–

(+) ishora bilan, (-) ishora bilan olinadi.

Minor va algebraik to‘ldiruvchilar.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$ determinantda i - satrni va j - ustunni o‘chirishdan 2- tartibli determinant hosil bo‘ladi, bunga a_{ij} elementga mos *minor* deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. Masalan,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$$

va boshqalar.

$\underline{a_{ij}}$ *elementning algebraik to‘ldiruvchisi* deb unga mos minorning musbat yoki manfiy ishora bilan olingan kattaligiga aytiladi,bunda $i + j$ juft bo‘lsa, musbat ishora bilan, $i + j$ toq bo‘lsa manfiy ishora olinadi. a_{ij} elementning algebraik to‘ldiruvchisini A_{ij} bilan belgilanadi. Demak,

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi va boshqalar.

Determinantlarning xossalari:

1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirilsa uning qiymati o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 40 - 0 - 0 + 5 = 51$

bo‘lib, bu determinantda barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 40 - 0 - 0 + 5 = 51$$

bo‘ladi.

2. Ikkita satr (ustun)ni o‘zaro almashtirilsa determinant qiymatining ishorasi teskarisiga o‘zgaradi;

Masalan, $$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 120 - 2 + 0 - 0 - 10 - 8 = 100$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 8 + 0 + 2 - 120 - 0 = -100$$

bo‘lib, bu 2-xossaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

3. Ikkita satri yoki ustuni bir xil bo‘lgan determinantning qiymati no‘lga teng.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 56 + 0 - 0 - 0 + 56 = 0$$

bo‘ladi, bu esa 3-xossaning to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

4. Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarishga mumkin.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustunning (satrining) bir xil songa ko‘paytirilgan mos elementlarini qo‘shishdan determinantning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3 –tartibli determinantni *diagonallar usuli* deb ataluvchi ushbu usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}\ .$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\left|\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{matrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

bo‘ladi.

n**-** ***tartibli determinantlar haqida.*** Ko‘pgina masalalarni yechishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to‘ldiruvchilaridir. Ma’lumki, algebraik to‘ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n-1)$ bo‘ladi. Determinantlarning hamma xossalari n-tartibli determinant uchun ham o‘rinlidir.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elemenlari bo‘yicha yoysak ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning ham kattaligi yuqoridagiga o‘xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning kattaligini hisoblash kerak bo‘lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o‘z navbatida 5-tartibli determinanatlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

Determinantlarning yuqorida ko‘rsatilgan xossalari hamma tartibli determinantlar uchun ham to‘g‘ri. Endi yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga misol qaraymiz. Ushbu determinantning kattaligini hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni 1-satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\left[3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] + 3\cdot\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2(-9+4+16) + 3(2+6-16) = 22-24 = -2.$$

Determinantlarni hisoblashda uning biror satri yoki ustunlarida no‘llar ko‘proq bo‘lsa, o‘sha satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblash ancha qulaylik keltiradi, masalan, yuqoridagi misolda 1-satr elementlari bo‘yicha yoyganimiz uchun, ya’ni unda 2 ta no‘l element bo‘lgani uchun 2 ta 3- tartibli determinantlarni hisoblab chiqishga hojat qolmadi. Bunday satr yoki ustunlar bo‘lmasa determinantlarning 8-xossasidan foydalanib, uni bunday satrga yoki ustunga ega bo‘ladigan qilib o‘zgartirish mumkin, misol uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblaylik. Buning uchun 1-ustun elementlarini oldin 2 ga keyin mos ravishda 5 ga, -4 ga ko‘paytirib, 2,3 va 4- ustunlarning mos elementlariga qo‘shamiz, bu holda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

bo‘lib, keyingi 3-tartibli determinantni 2-satr elementlari bo‘yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7\cdot(-33+21) = 7\cdot(-12) = -84$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi determinantlar birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};\qquad 2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix};\qquad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Quyidagi determinantlar nollar eng ko‘p bo‘lgan satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

$$\mathbf{1)}\ \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix};\qquad \mathbf{2)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}\qquad \mathbf{3)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Quyidagi determinantlar hisoblansin:

$$\mathbf{1)}\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix};\quad \mathbf{2)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix};\quad \mathbf{3)}\ \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{4)}\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix};\quad \mathbf{5)}\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix};\quad \mathbf{6)}\ \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Ushbu determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang:

$$\mathbf{1)}\ \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{;}$$

$$\mathbf{3)}\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{;} \qquad \mathbf{4)}\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{.}$$

determinantlarning kattaligini hisoblang.

5. Ushbu

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantlarni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang.

Takrorlash uchun savollar

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog‘liq?
2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?
4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat.
5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?
6. $5,6,\ldots,n$-tartibli determinantlar qanday belgilanadi va hisoblanadi?

Tayanch ibora va tushunchalar

Algebra, algoritm, 2,3 va n-tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to‘ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo‘yicha yoyish.

1.3-§. Teskari matritsa

Matritsaning rangi va uni hisoblash. A $m\times n$ o‘lchovli matritsada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k,m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo‘lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo‘lgan k-tartibli determinantga *A matritsaning k-tartibli minori deyiladi*.

Ta’rif. A matritsaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga *A matritsaning rangi* deyiladi. A matritsaning rangi *rangA* yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matritsarangini bevosita hisoblashda ko‘p sondagi determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matritsarangini hisoblash qulayroq. Matritsada: 1)faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o‘chirishdan; 2) ikkita satr (ustun)ning o‘rinlarini almashtirishdan; 3) biror satr (ustun)ning elementlarini biror $\lambda\neq 0$ songa ko‘paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo‘shish; 4) matritsani transponirlashdan, uning rangi o‘zgarmaydi. Bu amallarga odatda *elementar almashtirishlar* deyiladi.

1-misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

matritsaning rangini hisoblang.

Yechish. A matritsaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini (–2) ga ko‘paytirib, uchinchi satr elementlariga qo‘shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

bo‘lib, uchinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilib, berilgan matritsaning rangi 2 ga teng.

Teskari matritsava uni topish. A kvadrat matritsauchun $AB = BA = E$ birlik matritsabo‘lsa, B kvadrat matritsa A matritsaga *teskari matritsa* deyiladi. Odatda, A matritsaga teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema. A kvadrat matritsateskari matritsaga ega bo‘lishi uchun A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo‘lishi zarur va yetarlidir. A kvadrat matritsauchun $\det A \neq 0$ bo‘lsa , unga teskari bo‘lgan yagona matritsa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ - - - - & - - - - - \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to‘ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matritsani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Oldin A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matritsa mavjud, chunki $\Delta=-4\neq 0$ ya'ni, berilgan matritsa maxsusmas matritsadir. A^{-1} ni topish uchun A matritsa hamma elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Teskari matritsani tuzamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

formulaga asosan

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & 9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglikning bajarilishini tekshirish mumkin.

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o‘lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig‘indisi, matritsani songa ko‘paytirish, matritsalar ko‘paytmasi, matritsaning κ-tartibli minori, matritsaning rangi, elementar almashtirishlar, teskari matritsa.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsani songa ko‘paytirish qanday bo‘ladi?
3. Matritsaning rangi nima?
4. Elementar almashtirishlar deb qanday amallarga aytiladi?
5. Teskari matritsa qanday topiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu matritsaga teskari matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix};$$

2. Ushbu matritsaga teskari matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. λ ning qanday qiymatida A matritsaga teskari matritsa mavjud

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsa rangini toping:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$. 2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.4-§. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi barcha noma'lumlarning darajasi birga teng bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

ko'rinishdagi sistema n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Bu sistemaning har bir tenglamasidagi $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlar o'rniga mos ravishda $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sonlarni qo'yilganda (1) dagi barcha tenglamalar ayniyatga aylansa, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sonlar (1) sistemaning yechimi deyiladi. (1) sistemaning yechimi asosan quyidagi determinantga bog'liqdir

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) determinant (1) tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan, u (1) sistemaning determinanti deyiladi.

Agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga bo‘ladi va bu yechim

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; ....; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

formulalar yordamida topiladi.

Bu yerda Δ_1 determinant Δ determinantdan birinchi ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtrishdan hosil bo‘ladi, Δ_2 determinant Δ determinantdan ikkinchi ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtrishdan hosil bo‘ladi, $\Delta_3,...,\Delta_n$ lar ham shunga o‘xshash hosil qilinadi.

n ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning bunday usuli Kramer qoidasi deyiladi.

Ikki va uch noma’lumli shiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko‘paytiramiz va hosil bo‘lgan tenglamalarni qo‘shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (3)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2-tenglamani a_{11} ga hadma-had ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni qo‘shib ushbuni hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \qquad (4)$$

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

bo‘lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(3) va (4) tengliklarni

$$\Delta x=\Delta_1, \qquad \Delta y=\Delta_2$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo‘lsa,

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo‘ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

Endi uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu sistema noma’lumlari koeffisiyentlaridan tuzilgan determinantni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

bunga (5) *sistemaning determinanti* yoki aniqlovchisi deyiladi. Yordamchi deteminantlarni tuzamiz

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_1a_{13} \\ a_{21}b_2a_{23} \\ a_{31}b_3a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}b_1 \\ a_{21}a_{22}b_2 \\ a_{31}a_{32}b_3 \end{vmatrix}$$

Berilgan sistema x_1, x_2, x_3 yechimga ega bo‘lsa, bu yechimni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo‘lamiz

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (7)$$

Quyidagi hollar bo‘lishi mumkin

1. $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, bu holda (7) formulalardan (5) sistema bitta yechimga ega ekani kelib chiqadi.

2. $\Delta = 0$ va $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (5) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

3. $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$.

Bu holda (5) sistema yo cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi, yoki umuman yechimga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2, \\ 3x - y + 2z = -3, \\ x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistemaning asosiy determinanti va yordamchi determinantlarini tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 39, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -39$$

Demak, $\Delta \neq 0$ bo‘lgani uchun sistema yagona yechimga ega. Bu yechim

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{39} = 0, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-39}{39} = -1.$$

2-misol. Berilgan

$$\begin{cases} x - 5y + 2z = 1, \\ 3x - 15y + 6z = -3, \\ 9x - 45y + 18z = -3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Bevosita hisoblash orqali $\Delta = \Delta_y = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_z \neq 0$ ekaniga ishonch hosil qilish oson. Bundan ko‘rinadiki sistema yechimga ega emas.

Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish. Endi matrisalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga o‘tamiz.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

n noma’lumli, n ta tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ --- & ------ \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi (8) sistemani matrisalarni ko‘paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX = B \qquad (9)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo‘lsa, teskari matrisa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo‘ladi. Shunday qilib, noma’lum X matrisa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo‘ladi, ya’ni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (8) tenglamalar sistemasini yechishning *matrisaviy yozuvini* bildiradi.

1-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1,. \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \qquad (9^*)$$

ko‘rinishda yozamiz. A ga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bo‘lgani uchun (9*) tenglikning chap tomondan A^{-1} ga ko‘paytiramiz, u holda $A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo‘lib, ya’ni

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 49 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi

$$x_1 = -21, x_2 = 49, x_3 = 2.$$

Tayanch iboralar

Chiziqli tenglamalar sistemasi(ChTS),tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo‘lmagan sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo‘lmagan sistema.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo‘ladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u qanday topiladi?
4. Kramer formulalari nimadan iborat?
5. Tenglamalar sistemasining matrisali yozuvi qanday bo‘ladi?
6. Tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida qanday yechiladi?
7. Teskari matrisa qanday topiladi?
8. Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 5 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yeching.

2.Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1+7x_2+13=0 \\ 5x_1-19x_2-14=0 \end{array}\right\}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

3. Ushbu

$$1)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=9, \\ x_1+2x_2-2x_3=14, \\ 3x_1+4x_2+x_3=16 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x+y-z=5, \\ x-2y+3z=-5, \\ 7x+y-z-10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Kramer formulalari yordamida yeching.

4. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$1)\ \begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=8, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=9, \\ x_1-2x_2-x_3=6 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3, \\ 5x_1+12x_2-2x_3=-1, \\ 4x_1+9x_2-2x_3=2 \end{cases}$$

1.5-§. Umumiy ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasi

Bizga n noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarga ega bo‘lsa, sistema birgalikda deyiladi.

(1) sistemaning birgalikda bo‘lish-bo‘lmasligi shartini aniqlaymiz. Agar birgalikda bo‘lgan sistema bitta yechimga ega bo‘lsa, u aniq sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, aniqmas sistema deb ataladi. (1) sistema koeffitsiyentlaridan ushbu A matritsani

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Berilgan sistema noma’lumlari koeffisiyentlaridan A matrisani hamda bu matrisaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni birlashtirib, ikkinchi V matrisani tuzamiz, ya’ni bular ushbu ko‘rinishshda bo‘ladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ----- & ---- \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ ----- & ----- & --- \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A matrisaga (1) sistemaning matrisasi, B matrisaga sistemaning kengaytirilgan matrisasi deyiladi. Quyidagi teorema o‘rinli.

1- teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo‘lishi uchun sistema matrisasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matrisasining rangiga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo‘lsin. $k_1, k_2, \ldots, k_s$ uning yechimlaridan biri bo‘lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma’lumlar o‘rniga qo‘yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matrisaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffisiyetlar bilan ko‘paytmasidan olingan yig‘indisi ekanligini ko‘rsatadi. B matrisaning har qanday boshqa ustuni A matrisaga ham kiradi va shuning uchun u matrisaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matrisaning har qanday ustuni B matrisani ham ustuni bo‘ladi, ya’ni bu matrisaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matrisalarning ustunlari sistemasi o‘zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matrisalarning rangi bir xil bo‘ladi, ya’ni $r(A)=r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A va B matrisalar bir xil rangga ega bo‘lsin. Bundan A matrisa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matrisada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo‘lib qolishligi kelib chiqadi. Shunda qilib A matrisa ustunlari sistemasi orqali B matrisaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar majmui mavjud bo‘ladiki, A matrisaning bu sonlar bilan ko‘paytirishdan olingan ustunlari yig‘indisi ozod hadlardan iborat ustunga teng, ya’ni $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar (1) sistemaning yechimi bo‘ladi, shunday qilib, A va B matrisalar ranglarining bir xilda bo‘lishidan (1) sistemaning birgalikda bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema to‘liq isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasi yechim mavjud ekanligini tasdiqlaydi, lekin bu sistemaning barcha yechimlarini amalda topish uchun usulni bermaydi. Endi, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

A matrisaning rangi B matrisaning rangiga teng bo‘lib, $r(A) = r(B) = k$ bo‘lsin. Bunda k son A matrisaning chiziqli erkli satrlarining maksimal soniga teng bo‘lib, k noma’lumlar soniga teng bo‘lsa, u holda sistema tenglamalari soni noma’lumlari soniga teng va uning determinanti noldan farqli bo‘ladi, bunday sistemaning yechimi yagona bo‘lib uni Kramer qoidasi bo‘yicha topish mumkin bo‘ladi.

Endi matrisalarning rangi k noma’lumlar sonidan kichik, ya’ni $k < n$ bo‘lsin. Bu holda k- tartibli minor noldan farqli bo‘ladi. Sistema tenglamalarining har qaysisida $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ noma’lumli hadlarini tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz va bu noma’lumlar uchun biror $c_{k+1},\ c_{k+2}, \ldots, c_n$ qiymatlari majmuini tanlab olib k noma’lumli k ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Hosil bo‘lgan sistemaga Kramer qoidasini qo‘llash mumkin va yagona $c_1,\ c_2, \ldots, c_k$ yechim majmui mavjud bo‘ladi. Sistema tenglamalarining o‘ng tomoniga o‘tkazilgan noma’lumlarni ***ozod*** **noma’lumlar** deb ataymiz. Chap tomondagi nomalumlar **bosh(bazis) o‘zgaruvchilar,** Ozod noma’lumlar uchun $c_{k+1},\ c_{k+2}, \ldots, c_n$ sonlarni ixtiyoriy tanlab olishiiz mumkin bo‘lganligi uchun hosil bo‘lgan sistemaning cheksiz ko‘p turlicha yechimlari shu yo‘l bilan hosil qilinadi. Shunday qilib, bu holda cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lamiz.

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ noma’lumlarning $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ ozod noma’lumlar qatnashgan yechimiga ***umumiy yechim*** deb ataladi, chunki boshqa cheksiz ko‘p yechimlar $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ ozod noma’lumlarga ixtiyoriy qiymatlar majmuini berish bilan olinadi.

Tenglamalar sistemasini yechishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan matrisa tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

bo‘lib,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘ladi. Kengaytirilgan matrisa

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A)=2,\ r(B)=3$ bo‘lib, $r(A)\neq r(B)$ bo‘ladi, demak isbotlangan teoremaga asosan sistema birgalikda emas.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan tuzilgan matrisa

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

bo‘lib, $r(A)=2$, chunki $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, lekin 3-tartibli minori yo‘q. Kengaytirilgan matrisaning rangi ham 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = -144+40-14+112-24+30=0.$$

Birinchi ikkita tenglamaning chap qismlari chiziqli erkli, bu ikkita tenglamalar sistemasini yechib, noma’lumlar uchun ushbu qiymatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Bu yechim 3-tenglamani ham qanoatlantiradi.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema matrisasining rangi $r(A)=2$, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lganligini, ya’ni kengaytirilgan matrisaning barcha 3-tartibli minorlari 0 ga teng bo‘lganligi uchun, uning ham rangi $r(B) = 2$. Shunday qilib, sistema birgalikda va $r(A) = r(B) = k = 2 < 4$ noma’lumlar sonidan kichik, bu holda birinchi va uchinchi tenglamalar sistemasini olaylik, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 - 8x_3 - x_4 \end{cases}$$

bo‘lib, tenglamalar sistemasini x_1, x_2 asosiy noma’lumlarga nisbatan yechsak:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ 1 - 8x_3 - x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2}{7} - 4x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 5 & 1 - 8x_3 - x_4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}x_3 - 2x_4$$

bo‘ladi. Ozod noma’lumlarni $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$ deb

$$x_1 = \frac{2}{7} - 4C_1 + \frac{4}{7}C_2,$$

$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}C_1 + 2C_2$$

umumiy yechimni olamiz. C_1 va C_2 larga xar xil qiymatlar berib, masalan, $C_1 = 2,\ C_2 = 3$ bo‘lganda $x_1 = -6,\ x_2 = \frac{22}{7},\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,$ ya’ni $\left(-6, \frac{22}{7}, 2, 3\right)$ yechimni, $C_1 = 0, C_2 = -3$ bo‘lganda $x_1 = -\frac{10}{7},\ x_2 = -\frac{38}{7},\ x_3 = 0,\ x_4 = -3,$ ya’ni $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{38}{7}, 0, -3\right)$ va hokazo cheksiz ko‘p yechimlarni olish mumkin.

2.Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. (1) tenglamalar sistemasida ozod hadlar 0 lardan iborat bo‘lsa, bunday sistemaga ***bir jinsli sistema*** deyiladi, yani

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}\right\}$$

bo‘lib, birjinsli sistema doimo birgalikda.

Bir jinsli sistema 0 dan farqli yechimga egaligini aniqlash muhimdir.

2-teorema. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun sistema matrisasining rangi noma’lumlar sonidan kichik bo‘lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. Bir jinsli sistemada noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo‘lsa, sistema 0 dan farqli yechimlarga ham ega bo‘lishi mumkin.

2-natija. n noma’lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimlarga ega bo‘lishi uchun sistemaning determinanti 0 ga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasini va uning kengaytirilgan matrisasini tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\quad \text{va}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{pmatrix}$$

B matrisada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&-2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B matrisa rangini aniqlash bilan A matrisaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug‘iladi. Shunday qilib, B matrisaning rangi 2 ga teng, A matrisaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo‘ladi. Ma’lum bo‘ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinasiyasidan iborat. Shuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

to‘rt noma’lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Ikkita noma’lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma’lumki, x_1, x_2 noma’lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffisiyentlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, ya’ni

$$\begin{cases}x_2+x_3=1-x_1-x_4,\\x_2+2x_3=-x_1-x_4\end{cases}$$

x_2, x_3 larni ***bosh (bazis) o‘zgaruvchilar,*** x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o‘zgaruvchilar bo‘ladi. Bu sistemani yechib $x_3=-1,\ x_2=2-x_1-x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o‘zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Masalan, $x_1=0,\ x_4=1$ bo‘lganda $x_1=0,\ x_2=1$, $x_3=-1,\ x_4=1$ yechim hosil bo‘ladi va hokazo. Tekshirib ko‘rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo‘shib, to‘rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo‘lgan matrisaning ranggi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday kilib, A matrisaning rangi 3 ga teng, noma’lumlar soni to‘rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma’lumlar koeffisiyentidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo‘lgani uchun x_4 ni o‘ng tomonga o‘tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4,\ x_2 = \frac{43}{21}x_4,\ x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo‘yib yechimning to‘g‘riligiga ishonish mumkin**.**

4***. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.*** Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko‘p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma’lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko‘rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo‘lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo‘lamiz va uni $-a_{21}$, $-a_{31}$ ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \quad \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \quad \alpha_{23}x_1 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{11}, \quad \alpha_{23} = a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{21}}$ va h.k.

1. $a_{11}=0$ bo‘lib, boshqa tenglamalarda nomalumlar oldidagi koeffisiyentlari orasida no‘ldan farqlilari bo‘lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o‘rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo‘ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 - noma’lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 - ***noma’lumni yo‘qotamiz***. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o‘z o‘rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, ya’ni ikkinchi tenglamada x_2 noma’lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo‘qotamiz. Shunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1+\alpha'_{12}x_2+\alpha'_{13}x_3=\beta'_1, \\ \qquad \alpha'_{22}x_2+\alpha'_{23}x_3=\beta'_2, \\ \qquad\qquad \alpha'_{33}x_3=\beta_3 \end{cases} \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi. Endi hamma noma’lumlarni so‘nggi tenglamadan boshlab ***teskari qadam*** bilan topish qoldi.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+x_2+4x_3=9, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ (4-4)x_1+(1-8)x_2+(4-12)x_3=9-4\cdot 6, \\ (3-3)x_1+(5-6)x_2+(2-9)x_3=10-3\cdot 6 \end{cases}$$

ya’ni

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 7x_2-8x_3=-15 \\ -x_2-7x_3=-8 \end{array}\right\}$$

bo‘ladi.

Shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o‘z o‘rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo‘lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \dfrac{8}{7}x_3 = \dfrac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko‘paytirib uchinchi tenglamaga qo‘shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \dfrac{8}{7}x_3 = \dfrac{15}{7}, \\ \dfrac{41}{7}x_3 = \dfrac{41}{7}. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo‘ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1,$ $x_2 = 1$ bo‘ladi. $x_2 = 1,$ $x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak x_1=1 bo‘ladi. Shunday qilib, $x_1 = 1,$ $x_2 = 1,$ $x_3 = 1$.

Gauss usulining xususiyati shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

1) sistema birgalikda va aniq bo‘lsa, u holda usul yagona yechimga olib keladi;

2) sistema ***birgalikda va aniqmas bo‘lsa,*** bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo‘ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma’lumlar sonidan bitta kam bo‘lib qoladi;

3) sistema ***birgalikda bo‘lmasa,*** u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo‘qotilayotgan) noma’lum bilan birgalikda qolgan barcha noma’lumlar ham yo‘qotiladi, o‘ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Sistema matrisasi, kengaytirilgan matrisa, Kroneker-Kapelli teoremasi, bir jinsli sistema, bosh (bazis) o‘zgaruvchilar, noma’lumlarni yo‘qotish, teskari qadam, Gauss usulining xususiyati, sistema birgalikda va aniqmas, sistema birgalikda emas, Gauss usulining Jordan modifikasiyasi usuli.

Takrorlash uchun savollar

1. Kroneker-Kapelli teoremasining sharti nimadan iborat?

2. Qanday matrisaga kengaytirilgan matrisa deyiladi?

3. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?

4. Bir jinsli sistema qanday holda birgalikda?

5. Bir jinsli sistema no‘ldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

6. Bosh (bazis) o‘zgaruvchilar nima?

9. Gauss usulining mohiyati nima?

10. Noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning 1-qadami nimadan iborat?

11. Ikkinchi qadam qanday?

12. Teskari qadam nima?

13. Sistema birgalikda va aniq degani nima?

14.Sistema birgalikda va aniqmas deganda nima tushuniladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases} \quad ; \quad 2)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining birgalikdaligini tekshiring va ularning yechimini toping.

2.Quyidagi tenglamalar sistemasini tekshring:

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

3. Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini tekshring:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} ;\qquad 2)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

4-7. Quyidagi tenglamalar sistemasini tekshring:

4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \qquad 5.\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$6.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases} \qquad 7.\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6. \end{cases}$$

1.6-§. Kompleks sonlar

1.Kompleks sonning ta’rifi

1-ta’rif. To‘plamdagi tartibga solingan bir juft (a, b) songa kompleks son deyiladi, agar ular ustida to‘rt amalni bajarish mumkin bo‘lsa va natija ham kompleks son bo‘lsa.

2-ta’rif. $z = a + bi$ kompleks songa algebraik forma deyiladi, bu yerda a va b lar haqiqiy son bo‘lib, i - mavhum son:

$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$ ga teng.

bu yerda a ga $(a = Rez)$ z kompleks sonining haqiqiy qismi, b ga esa $(b = Imz)$ mavhum qismi deyiladi. Agar $a = Rez = 0$ bo‘lsa, z ga toza mavhum son deyiladi, agar $b = Imz = 0$ haqiqiy son deyiladi.

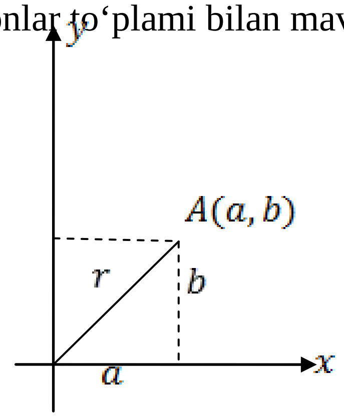
3-ta’rif. $z = a + bi$ va $\bar{z} = a - bi$ sonlarga o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar deyiladi.

4-ta’rif. Ikkita kompleks son $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ teng deyiladi, agarda $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$ bo‘lsa.

5-ta’rif. Kompleks son nolga teng deyiladi, agar haqiqiy va mavhum qismlari nolga teng bo‘lsa, ya’ni $Rez = Imz = 0$.

2. Kompleks sonning geometrik talqini.

Kompleks sonlar to‘plami kengaytirilgan to‘plam deyiladi, chunki bu to‘plam haqiqiy sonlar to‘plami bilan mavhum sonlar to‘plamlari yig‘indisidan iborat.



$OY - o$’qiga mavhum o‘q,

$OX -$o‘qiga esa haqiqiy o‘q deyiladi.

Demak, kompleks sonlarni trigonometrik formada ham berish mumkin.

3. Kompleks sonlarni trigonometrik forma ko‘rinishida berish.

Kompleks sonlarning geometrik talqinidan ko‘rinadiki $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ u vaqtda kompleks sonni quyidagicha yozish mumkin.

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bu formaga trigonometrik forma deyiladi.

Trigonometrik formadagi r ga kompleks sonning moduli deyiladi, φ burchakga esa kompleks sonning og‘ish burchagi deyiladi:

$r = |z|,\quad \varphi = Argz$

Geometrik ifodasidan ko‘rinib turibdiki

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = Argz = arctg\frac{b}{a};$$

Bu yerdan ko‘rinib turibdiki qo‘shma kompleks sonlarda

$$|z| = |\bar{z}|; \quad Argz = -Arg\bar{z}$$

4. Kompleks sonlar ustida amallar

Kompleks sonlar ustidagi amallar, ko‘p hadlar ustidagi amallardan kelib chiqadi.

1)Kompleks sonlarni qo‘shish

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$
$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

2)Kompleks sonlarni ayirish

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)$$
$$= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

3)Kompleks sonlarni ko‘paytirish

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$$
$$= a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2b_1b_2$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1b_2)$$

4)Kompleks sonlarni bo‘lish

$$z = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Yuqoridagilarni hisobga olib bu amallarni trigonometrik formalar orqali ham yozish mumkin.

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$

$z = z_1 z = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

Qo‘shma kompleks sonlar bo‘lganda

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

5) Darajaga ko‘tarish

Kompleks sonlarni ko‘paytirishdan foydalanib quyidagini topamiz.

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Umumiy holda quyidagini yozish mumkin

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

bu yerda n butun musbat son.

Bu formula Muavr formulasi deyiladi.

Muavr formulasi trigonometrik funksialarni topishda qo‘llaniladi.

Misol. $\sin 2\varphi$ va $\cos 2\varphi$ larni formulalarini toping.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sonni ko‘rib chiqaylik.

U vaqtda bir tomondan

$z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$

Muavr fopmulasiga asosan: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Bularni ikkalasini tenglashtirib olsak quyidagi hosil bo‘ladi.

$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi$

Ikkita kompleks sonni teng bo‘lishi uchun haqiqiy qismi haqiqiy qismiga, mavhum qismi mavhum qismiga teng bo‘lish shartidan foydalansak, ikkilangan burchak trigonometrik funksialarini yozish mumkin.

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

6) Kompleks sondan ildiz chiqarish

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Darajaga ko‘tarib quyidagini topamiz

$$\rho^n(cosn\varphi + i\sin n\varphi) = r(cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bu yerda $\rho = \sqrt[n]{r},\ n\varphi = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Shunday qilib, kompleks sondan n $-$chi darajali ildiz chiqarganda n ta har xil qiymatlarga ega bo‘ladi.

5. Kompleks sonlarni ko‘rsatkichli forma ko‘rinishida berilishi

Bizga berilgan bo‘lsin quyidagi ko‘rsatkichli funksiya

$$\mu = e^z;\ \ z = x + iy.$$

Bu funksiyani quyidagi funksiya ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\mu = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny)$$

bu tenglamaga Eyler tenglamasi deyiladi. Bu tenglamani keltirib kengaytirib chiqaramiz

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

$(e^z)^m = e^{mz}$, bu yerda m butun son. Agar Eyler tenglamasida darajasining ko‘rsatkichi haqiqiy mavhum son bo‘lsa $(x = 0)$, u vaqtda quyidagi hosil bo‘ladi

$$e^{-iy} = cosy + isiny.$$

U vaqtda qo‘shma-kompleks son uchun quyidagi hosil bo‘ladi

$$e^{-iy} = cosy - isiny$$

Yuqorida ikkita tenglamadan quyidagi hosil bo‘ladi

$$cosy = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right);\ \ siny = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right)$$

Bu formulalardan trigonometrik funksiya darajalarini karrali burchaklar orqali aniqlanadi.
Agar kompleks sonni trigonometrik forma ko‘rinishida yozsak

$z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ va Eyler formulasidan $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$

$z = re^{i\varphi}$ bo‘ladi.

6. Ko‘p hadlarni ko‘paytiruvchilarga ajratish

1-ta’rif. Quyidagi funksiyaga

$f(x) = A_0 + A_1\, x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$ $\qquad x -$ ga nisbatan butun ratsional funksiya deyiladi.

Bezu teoremasi. $f(x)$ ko‘phadni $x - a$ ayirmaga bo‘lganda qoldiq $f(a)$ ga teng.

Isbot. Ko‘p hadni $x - a$ ga bo‘lganda qoldiq $f_1(x)$ ni darajasi $f(x)$ dan bittaga kam bo‘ladi, qoldiq esa o‘zgarmas son R ga teng bo‘ladi.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

$x \to a$ intilganda limitga o‘tsak

$$f(a) = R$$

Teorema isbot bo‘ldi.

Eslatma. Agar a son ko‘p hadni ildizi bo‘lsa, u vaqtda $f(x)$ ko‘p had $x - a$ ga qoldiqsiz bo‘linadi.

2-ta’rif. Agar tenglama $F(x) = 0$ bo‘lsa, bu yerda $F(x)$ $\quad n -$ chi darajali ko‘p had, u vaqtda bu tenglamaga algebraik tenglama deyiladi.

Teorema. (Algebraning asosiy teoremasi)

Har qanday butun ratsional $f(x)$ bitta haqiqiy va bitta kompleks ildizga ega bo‘ladi.

Teorema. Har qanday n darajali ko‘p had $(x - a)$ ko‘rinishdagi chiziqli ko‘paytmalarga va x^n koeffisiyentli ko‘paytmasi ko‘rinishiga teng.

Teorema. Ikkita ko‘p had aynan teng deyiladi, agarda birinchi ko‘phadni koeffisiyentlari mos ravishda ikkiinchi ko‘phadni koeffisiyentlariga teng bo‘lsa.

Agar ko‘p hadni ildizlari ichida karrali ildizlari uchrasa, u vaqtda ko‘paytmalarning joylashishi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$f(x) = A_0(x-a)^{k_1}(x-a)^{k_2}\dots.(x-a)^{k_n},$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$$

bu yerda k_i - tegishli ildizning karrali soni.

Demak, bu yerdan kelib chiqadiki har qanday ko‘phad n-ta haqiqiy va kompleks ildizlarga ega. Bu hususuyat algebraik differensial tenglamalarni o‘rganishda katta ahamiyatga ega.

Misol. Ikkita kompleks son berilgan

$$z_1 = 1 - \frac{7}{2}i; \quad z_2 = -7 - 2i$$

a) Quyidagi ifodani $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ algebraik forma qiymatini toping.

b) z^{20} ni $z = 2 - 2\sqrt{3i}$ son uchun trigonometrik formasini va $u^3 + z = 0$ tenglamani ildizini toping

Yechish. Bu yerda quyidagi almashtirish kiritib soddalashtiramiz.

$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}.$

Endi ikkita kompleks sonni bo‘lish amalini

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i$$

Berilgan ifodani qiymatini topdik:

$$16(-i)^4 = 16i^4 = 16;$$

v) $z = 2 - 2\sqrt{3i}$ quyidagi ko‘rinishda yozamiz

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, bu yerda

$r = |z| = \sqrt{4+12}$=4; $\varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg(-\sqrt{3}) = -60^0$

U vaqtda $z = 4(cos60^0 - isin60^0)$

Endi z^{20} - ni topish uchun Muavr formulasidan foydalanamiz

$$z^{20} = 4^{20}(cos1200^0 - isin1200^0) =$$
$$= 4^{20}\left(\cos(3 \cdot 2\pi + 120^0) - isin(3 \cdot 2\pi + 120^0)\right) =$$
$$= 4^{20}(\cos 120^0 - \mathrm{isin}120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Agar $u^3 + z = 0$ bo‘lsa, $u = \sqrt[3]{z}$.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + \mathrm{isin}\frac{\varphi+2k\pi}{3}) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0+2\mathrm{k}\pi}{3} + \mathrm{isin}\frac{-60^0+2\mathrm{k}\pi}{3}\right);$$

$k \in Z$.

7. Algebraik formada berilgan kompleks sonlar ustida amallar

Ta’rif. Agar kompleks son $z = a + ib$ ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, bunday ko‘rinishga algebraik forma deyiladi.

Agar kompleks sonlar $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u vaqtda bu algebraik formalar ustida arifmetik amallar quyidagicha bajariladi.

Qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallari ko‘p hadlar ustidagi amallar kabi bajariladi. Bo‘lish amali quyidagicha bajariladi.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2};$$

Bu yerda $z_2 \neq 0$;

Darajaga ko‘tarish

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots \cdot z}_{n}$$

Quyidagilarni osonlik bilan ko‘rsatish mumkin

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m}$$

$$(z^n)^m = z^{nm}$$

$$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$$

Misollar.

1) Kompleks sonlar yig‘indisini toping:

$$z_1 = 2 - i \text{ va } z_2 = -4 + 3i$$

2) $z_1 + z_2 = (2 - i) + (-4 + 3i) = -2 - 2i$

3) $z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(-4 + 3i) = -8 - 6i + 4i - 3i^2 = -8 - 2i + 3 = -5 - 2i$

4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(2-i)}{(-4+3i)} = \frac{(3-i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} = \frac{-12-9i+4i+3i^2}{16+9} = \frac{-12-5i-3}{25} = \frac{-15-3i}{25} = -\frac{3}{5} - \frac{3}{25}i$$

5)Tenglamani yeching:

$$3x - (1 - i)(x - yi) = 2 + 3i;\ x \text{ va } y \in R$$

$$3x - \big((x - y) + (-x - y)i\big) = 2 + 3i.$$

$$(2x - y) + (x + y)i = 2 + 3i$$

Kompleks sonlarni tenglik xossalaridan foydalansak

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Bu yerdan $x = -1;\ \ y = 4$ bo‘ladi.

5) Quyidagilarni hisoblang: $i^2, i^4, i^5, i^5, i^6; i^1, i^{-2}$.

$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ = -1

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$t^4 = i^3 \cdot= -i \cdot i = -i^2 = -1$$

$$i^5 = t^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$$

7) z^{-1} sonni $z = 3 - i$ songa teskari sonni hisoblang.

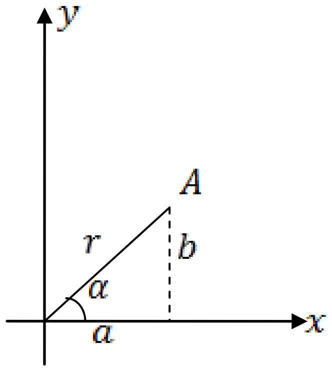
$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{3-i}=\frac{(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i}{3^2+1}=\frac{3+i}{9+1}=\frac{3+i}{10}$$
$$=0{,}3+0{,}1i$$

8. Trigonometrik formada berilgan kompleks son.

Agar dekart koordinatalar sistemasidagi berilgan tekislikning har bir (x,y) nuqtaga tekislikning (a,b) nuqtasi $z=a+bi$ kompleks son mos kelsa, bunday tekislikka kompleks tekislik deyiladi. Shu bilan absissa o‘qiga haqiqiy o‘q deyiladi, ordinata o‘qiga esa mavhum o‘q deyiladi.

Shu bilan $z=a+bi$ tekislikda $A(a,b)$ nuqta yoki $\overline{OA}$ vektor ko‘rinishida bo‘ladi.

2-chizma



Shunday qilib $\overline{OA}$ vektorning tarkibida A (kompleks son) $\overline{OA}$ vektor uzunligi ko‘rinishida berish mumkin. $|\overline{OA}|=r$ kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ son ko‘rinishida beriladi. Bu yerda r - ga radius vektor deyiladi, burchak φ - ga esa kompleks sonning argumenti deyiladi.

$$\varphi=argz.\quad |z|\geq 0 \text{ va } |z|=0=z=0$$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ radius vektor uzunligi

2-chizmadan ko‘rinadiki $z=a+bi$ bo‘lsa, $\varphi=argz,$ u vaqtda

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $tg\varphi = \frac{b}{a}$

Agar $z \in R$ $z \geq 0$ bo‘lsa, u vaqtda $argz = 0 + 2k\pi,$

Agar $z \in R$ $z < 0$ bo‘lsa, u vaqtda $argz \leq \pi + 2k\pi$

Agar $z = 0$ bo‘lsa, $argz$ mavjud emas

Eng muhimi shundaki $argz$ qiymati quyidagicha $0 \leq argz \leq 2\pi$ yoki $-\pi \leq argz \leq \pi$

Misollar.

1. Kompleks sonning modulini toping.

Yeching:

1) $z_1 = 4 - 3i$ va $z_2 = -2 - 2i$
2) $r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$
3) $r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$

2. Quyidagi berilganlarga asoslanib kompleks tekislikda aniqlanish sohasini toping.

$1)|z| \leq 5,\ \ 2)|z| \leq 6,\ \ 3)|z - (2 + i)| \leq 3,\ \ 4)6 \leq |z - i| \leq 7$

Yechish: 1) $|z| \leq 5 \leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 5 \leftrightarrow a^2 + b^2 = 5^2$

radiusi 5 ga teng markazi koordinata boshida bo‘lgan aylana.

2)Aylana; markazi koordinata boshida $0(0;0)$ va radiusi 6 ga teng.

3) Radiusi 3 ga va markazi $z_0 = 2 + i$

4)Markazi $z_0 = 1$ nuqtada bo‘lgan aylanasi esa chegarasi 6 va 7 halqa

Sonning argumenti va modulini toping:

5) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $a = 1$; $b = \sqrt{3}$ $r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}=2$

$$\left\{\begin{matrix} cos\varphi_1 = \frac{a}{r} \to cos\varphi_1 = \frac{1}{2} \\ sin\varphi_1 = \frac{b}{r} \to sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \to \varphi_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,, k \in Z$$

2) $z_1 - 2 - 2i$, $a = -2$; $b = -2$, $r_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\left\{\begin{matrix} cos\varphi_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\varphi_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \to \varphi_1 = \frac{5\pi}{4} = 2k\pi, k \in Z.$$

Eslatma. Bosh argumentni topganda kompleks tekislikdan foydalaning.

Quyidagi formulalardan $a = rcos\varphi,\ b = rsin\varphi$ foydalanib algebraik formadan trigonometrik formaga o‘tish mumkin (Muavr formulasi).

$z = a + bi = r(cos\varphi + isin\varphi)$.

Trigonometrik formada kompleks sonlar bir- biriga teng bo‘ladi faqat shu vaqtdaki ularning modullari teng bo‘lib argumentlari esa bir-biridan 2π karrali bo‘lib bir-biridan butun songa farq qilsa.

4) Quyidagi sonlarni trigonometrik formada yozing:

1) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;   2) $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$; 3) $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$; $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ r = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ =1

$$\left.\begin{cases} cos\varphi = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \\ sin\varphi_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\right\} \rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

(Bu yerda burchak manfiy bo‘lmagan eng kichik qiymatni olamiz)

Shunday qilib $z_1 = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$

2) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \ r_2 = 1,\ \ \varphi_2 = \frac{2\pi}{3};\ \ z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}.$

3) $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ r_3 = 1,\ \ \varphi_2 = \frac{4\pi}{3},\ \ z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}.$

4) $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ r_4 = 1,\ \ \varphi_4 = \frac{5\pi}{3},\ \ z_4 = cos5\pi + isin\frac{5\pi}{3}$

9. Trigonometrik formada berilgan kompleks sonlar ustida amallar

1. Ko‘paytirish amali. Trigonometrik formada berilgan kompleks sonlarni ko‘paytirish uchun, ularni modulini ko‘paytirib argumentlari qo‘shiladi.

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

Bu formula har qanday chekli ko‘paytmalar uchun ham to‘g‘ridir.

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots . z_n = \\ = r_1 : r_2 \ldots . r_n\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) \\ + isin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n)\big)$$

Agar $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ bo‘lsa, u holda

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

Demak, $z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi).$

Bu formula Muavr formulasi deyiladi. Demak, darajaga ko‘tarish uchun uni modulini darajaga ko‘tarib argumentini darajaga ko‘tarib, keyin ikkalasini bir-biriga ko‘paytirib olish kerak.

Misol. Ko‘paytirish amalini bajaring:

1) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}); \quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3});$

$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 6(\cos\frac{7\pi}{12} + +i\sin\frac{7\pi}{12})$$

2) Hisoblang: $(1 + i)^{30}$

$$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$(1 + i)^{30} = (\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right))^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30} \cdot$$

3) $$\left(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}\right) = 2^{15}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

2. Bo‘lish amali.

Agar $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + sin\varphi_1),$ va $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$ bo‘lsa, u vaqtda

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Demak, ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlar modullarining nisbati modullar nisbati va argumentlar ayirmasiga teng.

Misol.

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

berilganda ularni nisbatini toping:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

3. Kompleks sonlardan ildiz chiqarish.

Istalgan z kompleks sondan n ta ildiz chiqarilgan deyiladi.

Agarda $\sqrt[n]{z} = u,$ yoki $u^n = z$ bo‘lsa.

Kompleks sonlar sohasida quyidagi teorema katta ahamiyatga ega.

Teorema. Har qanday $z \geq 0$ chiqarilgan n chi darajali ildiz $(n \geq 2)$, hamma vaqt n ta har xil qiymatga ega bo‘ladi.

Faraz qilaylik $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ $n -$ chi darajali ildiz bo‘lsin.

$$u = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$$

Ildizning ta’rifiga asosan

$u^n = z,$ bu yerdan

$$\rho^n(cosn\varphi + isinn\varphi) = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

Kompleks sonlarning tenglik qoidasidan foydalanib quyidagini yozamiz

$$\begin{cases} \rho = r \\ n\varphi = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in Z \end{cases}$$

bu yerdan $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \to \rho \geq 0 \to \rho = \sqrt[n]{2}$

Shunday qilib u kompleks sonni moduli haqiqiy musbat sondan arifmetik ildiz, argumentini esa quyidagi formulalar yordamida topamiz

$$0 \leq \frac{\varphi + 2k\pi}{2}, \qquad k = \overline{0, n-1}$$

Muavrning umumiy formulasi esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = \overline{0, n-1}$$

Misol. Hisoblang;

$$u = \sqrt[n]{\sqrt{3} - 1}$$

Bu yerda $z = \sqrt{3}$-1 trigonometrik formada bo‘lgani uchun

$\sqrt{3}$-1=2$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Shuning uchun Muavrning umumiy formulasidan foydalansak

$$u_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6}\right)\right)$$

bu yerda $k = 0,1,2,3,4,5$.

Shunday qilib:

$$u_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{36} + i\sin\frac{\pi}{36}\right);$$

$$u_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{\frac{\pi}{36} + \pi}{36}$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 2}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 2}{6}\right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right);$$

$$u_3 = \sqrt[6]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 3}{6} + isin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 3}{6} \right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(cos\,\frac{35\pi}{36} + isin\,\frac{35\pi}{36} \right);$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 4}{6} + isin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 4}{6} \right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(cos\,\frac{47\pi}{36} + isin\,\frac{47\pi}{36} \right);$$

$$u_5 = \sqrt[6]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 5}{6} + isin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 5}{6} \right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(cos\,\frac{59\pi}{36} + isin\,\frac{59\pi}{36} \right);$$

$$u_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{cos\,\frac{\pi}{2} + isin\,\frac{\pi}{2} =}$$

$$= \sqrt[3]{1}\left(cos\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) =$$

$$= cos\,\frac{\pi + 4k\pi}{6} + isin\frac{\pi + 4k\pi}{6}, \qquad k = 0,1,2,..$$

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + isin\,\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$$

$$u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + isin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6} = -i$$

Kompleks tekislikda kompleks sonni ildizini geometrik quyidagicha talqin qilish mumkin. Kompleks tekislikda muntazam n burchakli ko‘pburchakning uchlarini koordinatalaridir. Bu ko‘p burchak radiusi $\sqrt[n]{r}$ ga teng bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan (radiusi $R = \sqrt[n]{2}$ teng) bo‘lib markazi koordinata boshidadir.

Misollar. Quyidagilarni hisoblang.

1) $\sqrt[4]{1}$ 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[3]{1}$

Yechish: $u_k = \sqrt[4]{1}=1(cos0 + isin0)=$

$\sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\pi k}{4} + isin\frac{0+2\pi k}{4}\right),\ \ k \in (0,1,2,3)$

$u_0 = cos0 + isin0 = i$

2) $u_1 = cos\frac{\pi}{2} + isin\pi = -1$

$u_2 = cos\pi + isin\pi = -1$

3) $u_k = \sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1(cos0 + isin0)}=cos\frac{2\pi k}{3} + isin\frac{2\pi k}{3};\ \ k = 0,1,2,$

$$u_0 = cos\frac{2\pi \cdot 0}{3} + isin\frac{2\pi \cdot 0}{3} = 1$$

$$u_1 = cos\frac{2\pi \cdot 1}{3} + isin\frac{2\pi \cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$u_2 = cos\frac{2\pi\cdot 2}{3} + isin\frac{\pi\cdot 2}{3} = \frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

4) $u_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}} == \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + isin\frac{\pi+4k\pi}{6},\ \ k = 0,1,2,..$

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$$

$$u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + isin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6} = -i$$

10. Ko‘rsatkichli formadagi kompleks sonlar. Eyler formulasi.

Kompleks sonlar algebraik, trigonometrik formadan tashqari ko‘rsatkichli forma ko‘rinishida berilishi mumkin. Faraz qilaylikki

$$z(\varphi) = cos\varphi + isin\varphi$$

kompleks son haqiqiy o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsin.

Quyidagi kompleks songa

$$z(\varphi) = cos\varphi + isin\varphi$$

mos ravishda ko‘rsatkichli kompleks ifodani tuzib olamiz.

$$u(\varphi) = e^{i\varphi}$$

(Differensial amallari bilan ko‘rsatish mumkin).

$$z(\varphi) = e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

Bu formulaga Eyler formulasi deyiladi .

Demak, Eyler formulasi ko‘rsatkichli kompleks $e^{i\varphi}$ funksiyalaridir, bu yerda, φ-istalgan haqiqiy son.

Faraz qilaylikki, $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ kompleks son berilgan bo‘lsin. Yuqoridagilarga asosan quyidagilarni yozish mumkin.

$$z = re^{i\varphi}$$

Kompleks sonning bunday berilishiga kompleks sonning ko‘rsatkichli formasi deyiladi.

Ko‘rsatkichli formada berilgan kompleks sonlar ustida quyidagi amallar: Ko‘paytirish, bo‘lish, kompleks sonlarni darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish oson bajariladi.

Bu amallarni bajarish uchun quyidagi formulalardan foydalanamiz.

Faraz qilaylik $z_1 = r_1 \; e^{i\varphi}, \quad z_2 = r_2 \; e^{i\varphi_2},$ u vaqtda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)i};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}$$

$$z_n^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

Misollar.

1. Kompleks sonning ko‘rsatkichli formasini toping:

a) $z_1 = 1 + i, \quad b) z_2 = -\sqrt{3} - 1$

Yechish.

a) $r = |z_1| = \sqrt{2}$,

$\varphi = argz_1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \; e^{i\pi}$

b) $r = |z_2| = z \quad \varphi = argz_2 = \dfrac{7\pi}{6}, \quad z_2 = -\sqrt{3} - 1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. Kompleks sonni algebraik formasini toping:

a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, b) $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$, v) $z_3 = e^{-3+4i}$

Yechish.

a) $z_1 = 2^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 + \sqrt{3}\, i$

b) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{6}i} = 3(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2};$$

v) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3} \cdot e^{4i} = e^{-3}(cos4 + isin4) =$

$= 0{,}05 \cdot (-0{,}65 - 0{,}76i) = -0{,}03 - 0{,}038i$

3. $z_1 \cdot z_2$ va $\frac{z_1}{z}$ larni toping, natijasini esa trigonometrik formada yozing.

a) $z_1 = 3\, e^{\frac{2i}{3}}$, b) $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$, $z_3 = e^{3-5i}, z_4 = e^{-4+3i}$

Yechish. a) $z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 1\left(cos\frac{5}{6} + isin\frac{5}{6}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{6}} = \frac{1}{2}\left(cos\frac{1}{2} + isin\frac{1}{2}\right)$$

b) $z_1 \cdot z_2 = e^{3-5i}e^{-4+3i} = e^{-1-2i}\left(\cos(-2) + isin\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-8i} = e^7(cos8 - isin8)$$

4. Quyidagilarni hisoblang: a) z^4, b) $\sqrt[5]{z}$, bu yerda

$z = 2e^{-3i}$

Yechish:

$z^4 = \left(2e^{-3i}\right)^4 = 16e^{-12i} = 16(cos12 - isin12) =$
$16(0{,}8438 + 0{,}5366i)$;

a) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{\frac{-3+2k\pi i}{5}} = u_k = 0,1,2,3,4$

$$u_0 = \sqrt[5]{2}\, e^{-\frac{3i}{5}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{3}{5} - isin\frac{3}{5}\right) \approx (0{,}95 - 0{,}65i)$$

$$u_1 = \sqrt[5]{2}\, e^{\frac{-3i+2\pi}{5}} = 0{,}91 + 0{,}70i;$$

$$u_2 = \sqrt[5]{2}\, e^{\frac{-3i+4\pi}{5}} \approx -0{,}39 + 1{,}08i;$$

$$u_3 = \sqrt[5]{2}\, e^{\frac{-3i+6\pi}{5}} \approx -1{,}15 - 0{,}03i;$$

$$u_4 = \sqrt[5]{2}\, e^{\frac{-3i+5\pi}{5}} \approx -0{,}33 - 1{,}10i$$

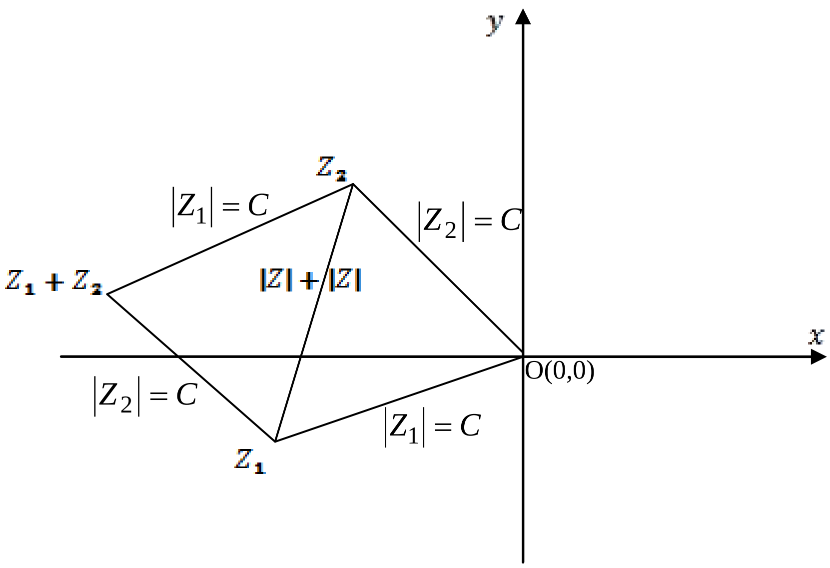
Kompleks sonlar nazaryasi ayrim geometrik masalalarni tekshirishda, yechishda qo‘llanilishi mumkin yoki bo‘lmasa teskari ayrim hususiyatga ega bo‘lgan masalalarni kompleks sonlarga tegishli bo‘lgan ayniyatlarni isbotlashda qo‘llaniladi.

Misollar: Faraz qilaylik $|z_1| = |z_2| = c$. Isbot qilish kerakki

$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$, $|z| = z_1 = z \cdot \bar{z}$ bo‘lgani uchun

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_2) = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\overline{z_1}) + z_1\bar{z} - z_1\overline{z_2} + z_2 \cdot \bar{z}_1 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4c^2$$

Buning geometrik talqini shuki rombning hamma dioganallari kvadratlarining yig‘indisi uning hamma tomonlarining kvadratlar yig‘indisiga teng.



Chizma

Haqiqatdan ham kompleks songa mos bo‘lgan O, z_1, z_2 va $z_1 + z_2$ rombning uchlaridir, qaysikim $|z_1|$ va $|z_2|$ uning yon tomonlarini uzunligidir, $|z_1 + z_2|$ va $|z_1 - z_2|$ esa uning diaganallari uzunligidir.

1. Faraz qilaylik z_1, z_2, z_3, z_4 har xil kompleks son bo‘lsin va

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Isbot qilish kerakki

$$|z_1 - z_2||z_1 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_4)|$$

chunki $\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ son haqiqiy bo‘lib, musbat son bo‘lganini isbot qilish mumkin. Shu bilan

$$|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = |-z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 + z_1 z_2 + z_4 z_3| = |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| = |z_1 - z_3||z_2 - z_4|$$

Bu quyidagi teorema isbot bo‘ldi.

Teorema. Aylanaga ichki chizma to‘rtburchakni dioganallarini uzunligini ko‘paytmasini juft qarama-qarshi tomonlarini ko‘paytmasini yig‘indisiga teng.

Bu tenglamaga Ptolomey teoremasi deyiladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Kompleks son, mavhum son, qo‘shma kompleks son, kompleks sonlarning geometrik talqini, kompleks sonlarni trigonometrik forma ko‘rinishi, kompleks sonlarni ko‘rsatkichli forma ko‘rinishi, ko‘phadlarni ko‘paytiruvchilarga ajratish, Eyler formulasi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1.Hisoblang.

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$; 2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2 - i) \cdot (1 - i)$; 4) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;

5) $(2 - i)^2$; 6) $(1 + 2i)^3$;

2. Tenglamani yechimini toping.

1) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$;

2) $2x+(1+i)(x+y)=7+i$;

3) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$.

3. Hisoblang.

1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;

4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$;

7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; 9) $\frac{2+3i}{i}$;

4. z^{-i} toping agarda

1) $z=7-12i$; 2) $z=3+4i$; 3) $z=-3+7i$; 4) $z=i$;

5) Hisoblang.

1) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3(1-i)^7$; 2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Quyidagilarni isbotlang.

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1 z_2}$; $\overline{-z_1}=-\overline{z_1}$.

7. Quyidagilarni isbotlang.

$z=a+bi$, $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$.

8. Kompleks soniga mos bo‘lgan nuqtalarni yasang.

-1; $\sqrt{2}$; $-3i$; $2-3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6+2i$; $2+2i$; $-2+2i$; $-2-2i$.

9. Quyidagi kompleks sonlarni yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatlarini toping. Bajarilgan amallarni esa geometrik tasvirini chizing.

1) $z_1=-2+i$, $z_2=3-i$; 2) $z_1=-3$, $z_2=4i$.

10. Quyidagi kompleks sonlar to‘plamini geometric tasvirini chizing.

1) $x=2$; 2) $1\le x\le 3$; 3) $\mathrm{Rez}=\mathrm{Imz}$; 4) $\mathrm{Imz}=2\mathrm{Rez}$.

11. Quyidagi kompleks sonlarni kompleks tekislikda yasang, moduli va argumentini toping.

1) $= 1 + i$; 2)$z = \sqrt{3} - i$; 3)$z = \sqrt{2i}$; 4)$z = 2$; 5) $z = -i$

12. Quyidagi nuqtalar to‘plamini tekislikda chizib ko‘rsating.

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \le 5$; 3)$1 \le |z| \le 2$; 4) $\arg z = 0$.

5) $\frac{\pi}{6} \le argz \le \frac{\pi}{4}$; 6) $|z - 1| = \frac{1}{3}$; 7) $|z - 3 + 2i| \le 2$

13. Kompleks sonlarni trigonometrik formaga keltiring.

1) $1, -1, \ i, -i$; 2) $z = 3 - 3i$; 3) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$

14. Nuqtalar berilgan.

$z_1 = cos\frac{\pi}{8} + isin\frac{\pi}{8}$, $z_2 = cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}$, $z_3 = cos\frac{\pi}{24} + isin\frac{\pi}{24}$.

Hisoblang: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\frac{z_1}{z_2 - z_3}$; 3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2}$

15. Hisoblang. $|z|$ $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

16. Hisoblang. $\frac{cos\varphi + isin\varphi}{cos\varphi - isin\varphi}$.

17. Ildizni hisoblang va kompleks tekislikda izohlang.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

18. Radikalda ildizni birinchi darajali ko‘rinishda izohlang. 2, 3, 4, 6, 8.

19. Kompleks sonlarni ko‘rsatkichli formaga keltiring.

1) $-1 - i$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

20. Quyidagi sonlarni trigonametrik va algebraik formasini toping:

1) $z = 2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z = 3e^{\pi i}$; 4) $z = e^{i}$

21. Toping $z_1 z_2$ va $\frac{z_1}{z_2}$ natijani algebraik formada yozing.

1) $z_1 = 1{,}5e^{0{,}7i}$; $z_2 = 0{,}7e^{1{,}7i}$

2) $z_1 = e^{-0{,}7+3i}$; $z_2 = e^{1{,}5+2i}$.

22. Hisoblang va natijani algebraik formada yozing, keyin kompleks tekislikda izohlang.

1. $x^2 + x + 1 = 0.$
2. $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0.$
3. $x^2 + 3x + 4 = 0.$
4. $x^3 - 27 = 0.$
5. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0.$
6. $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0.$
7. $x^3 - 6x + 9 = 0.$
8. $x^3 + 6x + 2 = 0.$
9. $x^3 + 24x - 56 = 0.$
10. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$
11. $x^3 + 9x - 26 = 0.$
12. $x^3 - 4x + 2 = 0.$
13. $x^3 + 18x + 15 = 0.$
14. $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0.$
15. $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0.$

II-BOB. ANALITIK GEOMETRIYA

2.1-§. Tekislikda to‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari

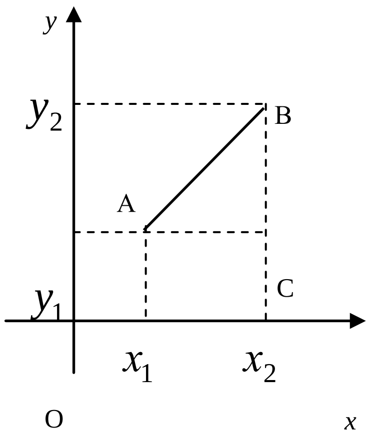
1. Koordinatlar usuli va sodda masalalar. Ma’lumki, o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan gorizontal va vertikal sonlar o‘qi Dekart to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema orqali tekislikdagi nuqta bilan bir juft haqiqiy son o‘rtasida bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. Tekislikda nuqta $A(x, y)$ bilan belgilanadi. x, y sonlarga uning ***koordinatlari*** deyiladi. ,,Nuqta berilgan” degan ibora uning koordinatlarining berilganligini, ,,Nuqtani toping” degan ibora esa, shu koordinatlarni topishni tushuniladi. Koordinatlar sistemasi orqali o‘rnatilgan bunday moslikka **koordinatlar usuli** deyiladi.

Bu usulni geometriyaning **sodda *masalalarini yechishga*** qo‘llaymiz:

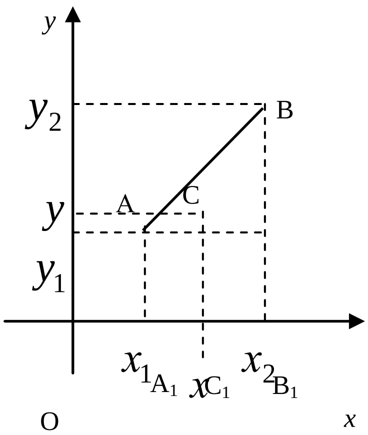
1) tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. Ma’lumki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$(1-chizma). ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, bo‘lib,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

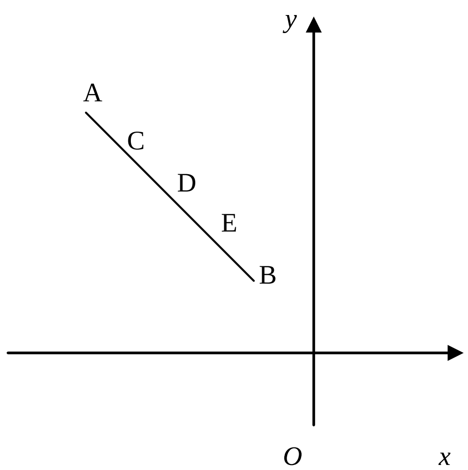
bo‘ladi. (1) formulaga tekislikda **berilgan ikkita nuqta orasidagi masofani topish** formulasi deyiladi .



1.1-chizma



1.2-chizma



1.3-chizma

2) AB kesma berilgan bo‘lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo‘lsin. AB kesmani $AC : BC = \lambda$ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. O‘rta maktab geometriyasidan ma’lumki (2-chizma),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

yoki

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

bo‘lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

bo‘lganligi uchun,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \; x - x_1 = \lambda\,(x_2 - x); \; x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

bo‘ladi. Xuddi shunday, ushbu tenglikka ega bo‘lish mumkun:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Demak, C nuqtaning koordinatlari uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

formulani hosil qildik. (2) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqta koordinatlarini topish formulasi deyiladi. Xususiy holda $C(x;\, y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo‘lsa, u holda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1 \text{ bo‘lib,} \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

kesmani teng ikkiga bo‘lish formulasi kelib chiqadi.

1-m***isol***. $M(5;\,3)$ va $N(2;\,-1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Shartga ko‘ra: $x_1=5,\ y_1=3,\ x_2=2,\ y_2=-1$. Bularni (1) formulaga qo‘ysak:

$$MN=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

bo‘ladi.

2**-misol.** Tekislikda $A(5;3)$, $B(2;1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $\frac{AC}{CB}=\lambda=0{,}2$ nisbatda bo‘luvchi $C(x;\,y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra $x_1=5,\ x_2=2,\ y_1=3,\ y_2=1,\ \lambda=0{,}2$.

(2) formulaga asosan:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{5+0{,}2\cdot 2}{1+0{,}2}=\frac{5+0{,}4}{1{,}2}=\frac{5{,}4}{1{,}2}=\frac{54}{12}=\frac{9}{2}=4{,}5;$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{3+0{,}2\cdot 1}{1+0{,}2}=\frac{3+0{,}2}{1{,}2}=\frac{3{,}2}{1{,}2}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}.$$

Shunday qilib, $C\left(4{,}5;\frac{8}{3}\right)$ bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Geometriya rivojlanish tarixi, analitik geometriya, koordinatlar usuli va sodda(asosiy) masalalar, nuqta koordinatlari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish, uchburchak yuzini topish. Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffisiyent, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning o‘qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning normali, to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Geometriya qachon paydo bo‘lgan va qanday tarixga ega?
2. Geometrik bilimlarning kelib chiqishi nima bilan bog‘liq?

3. Geometriya tabiatshunoslikning boshqa bo‘limlari bilan qanday bog‘langan?

4. Geometriyaning rivojida katta hissa qo‘shgan Markaziy Osiyolik olimlardan kimlarni bilasiz?

5. Koordinatlar usuli nima?

6. Analitik geometriya nimani o‘rganadi?

7. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

8. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish qanday bajariladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1.Koordinatlar boshidan $A(-3;\ 4)$ nuqtagacha bo‘lgan masofani toping.

2.Uchlari $A(4;\ 3)$, $B(0;\ 0)$ va $C\ (10,\ -5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.

3.OY o‘qida $A\ (4;\ 5)$ va $B\ (3;\ 2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C\,(x;\ \ y)$ nuqtani toping.

4.OX o‘qida $A(0;\ 5)$ va $B\ (-3;\ -2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda bo‘lgan nuqtani toping.

5. $A(5.-4)$ nuqta va AB kesmaning o‘rtasi $C\ (0;\ -3)$ berilgan. Kesmaning ikkinchi $B(x, y)$ uchini toping.

6.Uchlari $A\ (3;\ 4)$, $B(7;\ 7)$, $C\ (4;\ 3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning teng yonli ekanligini ko‘rsating.

7.$A\ (2;\ 8)$ va $B\ (6;\ -4)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesma C, D, E nuqtalar bilan 4 ta teng bo‘laklarga bo‘lingan.$C,\ D,\ ва\ \ E$ nuqtalarni toping.

8.AB kesma $C\,(-1;\ -2)$ va $D\ (2;\ 0)$ nuqtalar orqali teng uch bo‘laklarga bo‘lingan. A va B nuqtalarni toping.

2.2-§. Tekislikda to‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari

1. Chiziq va uning tenglamasi haqida. Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, **chiziq tenglamasi** tushunchasidir. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida L chiziq berilgan bo‘lsin(4-chizma).

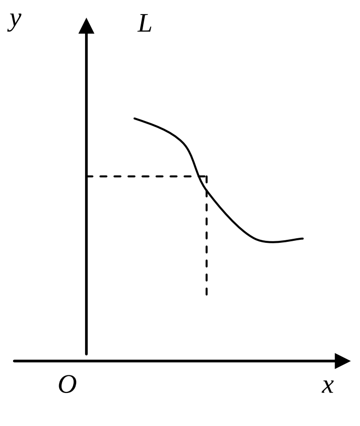
Ta’rif. L chiziqda yotuvchi istalgan $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

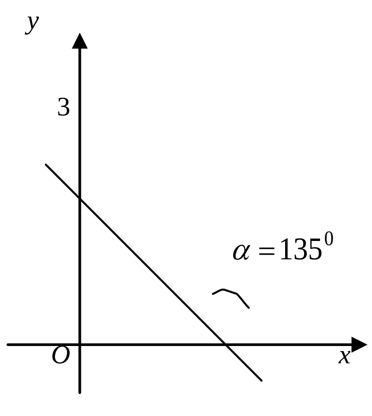
tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatlari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to‘plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari orasidagi munosabatni(bog‘lanishni) tenglama ko‘rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatlari uni qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

2. *To‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari.* *To‘g‘ri chiziq* tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to‘g‘ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o‘rganamiz.

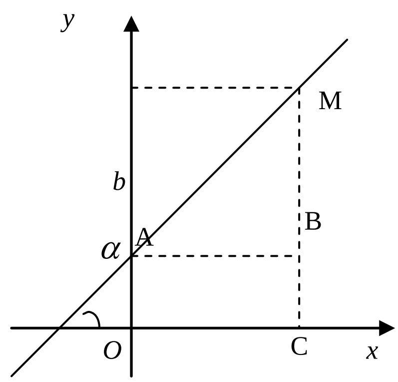
*To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi***.** To‘g‘ri chiziqning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to‘g‘ri chiziqning ordinatlar o‘qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi. Masalan, $b = 2$, $\alpha = 135^0$ bo‘lsa, uning holati aniq bo‘ladi (5-chizma).



2.1-chizma



2.2-chizma



2.3-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to‘g‘ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (6-chizma). AMB to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = tg\alpha \text{, bundan } BM = ABtg\alpha$$

6–chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo‘lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo‘ladi. $tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffisiyenti** deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffisiyentli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tib, tenglamasi $y = kx$ bo‘ladi. $k = 1$ bo‘lsa, $y = x$ bo‘lib, bu birinchi koordinat- lar burchagining bissektrisasi bo‘ladi.

1-misol. OX o‘qi bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi va OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o‘qiga parallel chiziq o‘tkazamiz, hamda shu to‘g‘ri chiziq bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi .

Endi shu to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo‘lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi bo‘ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.

$$y = kx + b \qquad (3)$$

to‘g‘ri chiziq A nuqtadan o‘tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni $y_1 = kx_1 + b$ bo‘ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4)$$

hosil bo‘ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o‘tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo‘lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo‘ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo‘yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **berilgan ikki $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so‘m xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so‘m bo‘lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to‘g‘ri chiziq) bo‘lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo‘yicha $A(100,\ 300)$ va $B = (500,\ 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100}\text{, yoki } \ y = 2{,}5x + 50$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tenglamadan $x = 400$ uchun, $y = 1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so‘m xarajat qilinadi.

3) To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. Ikki noma’lumli

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By = -Ax - C$, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ bo‘lib, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y = kx + b$ tenglama hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $Ax + By + C = 0$ tenglama ham to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6)$$

tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari: 1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ bo‘lsa, $Ax + By = 0$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, bo‘lsa, $y = -\frac{C}{B}$ bo‘lib, OY o‘qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenlamasi bo‘ladi;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ bo‘lsa, $x = -\frac{C}{A}$ bo‘lib, OX o‘qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , OY o‘qiga paralllel to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

4) $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$ bo‘lsa, $y = 0$ bo‘lib, OX o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

5) $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$ bo‘lsa, $x = 0$ bo‘lib, OY o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

6) $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ bo‘lsa, $C = 0$ bo‘lib, o‘zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo‘lishi mumkin emas.

3-misol. $x - 2y + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y = x + 6$, $y = 1/2 \cdot x + 3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab, $k = 1/2$, $b = 3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffisiyentli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

4) To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To‘g‘ri chiziq koordinat o‘qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o‘tsin (2.4-chizma). To‘g‘ri chiziq $A(a;\,0)$ va $B(0;\,b)$ nuqtalardan o‘tadi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}\,,\qquad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}\,,\qquad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

yoki
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (7)$$

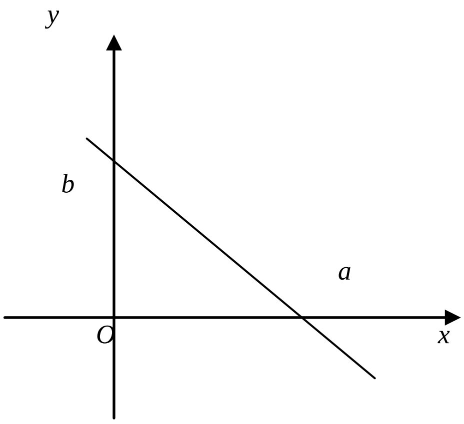
tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

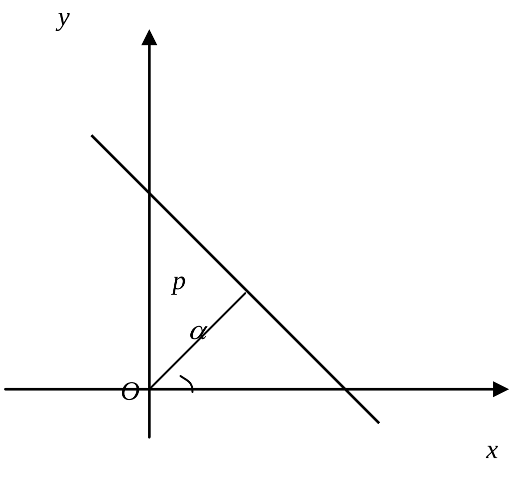
Yechish. $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x+5y=15,\quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \textit{yoki} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo‘ladi. Endi koordinat o‘qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz.



2.4- chizma.



2.5- chizma.

5) To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. To‘g‘ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (8)$$

bo‘ladi. (8) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma’lumki, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

normallovchi ko‘paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamaga ko‘paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglama hosil bo‘ladi. Normallovchi ko‘paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p = 3$ va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra normal OX o‘qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo‘zg‘aluvchi tomoni normal to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Shu to‘g‘ri chiziqda $p = 3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi . Endi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko‘ra normalning uzunligi va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma’lumki, to‘g‘ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p = 3$, $\alpha = 30^0$ bo‘lganligi uchun

$$x\cos 30^0 + y\sin 30^0 - 3 = 0 \qquad \text{ёки} \qquad \sqrt{3}/2 \cdot x + 1/2 \cdot y - 3 = 0$$

Natijada $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ tenglama hosil bo‘ladi.

6-misol.. $4x - 3y - 5 = 0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko‘paytuvchini topamiz: $M = \dfrac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{1}{5}$ bo‘ladi.

Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko‘paytirib, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$(\frac{4}{5})^2+(-\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1, \qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1) \text{ edi.}$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffisiyent, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning o‘qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning normali, to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
3. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyenti deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
5. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday?
6. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
7. To‘g‘ri chiziqning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?
8. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi qanday?
9. Normalning uzunligi nima?
10. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?
11. To‘g‘ri chiziqning tenglamasi normal ko‘rinishdaligini qanday tekshiriladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. OY o‘qidan $b=4$ kesama ajratib OX o‘qi bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

2. OY o‘qidan $b=-2$ kesma ajratib OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

3. Koordinatlar boshidan o‘tib, OX o‘qi bilan: 1). 45^0, 2). 120^0, 3). 60^0, 4). 90^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

4. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ to‘g‘ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

5. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

6. $A\,(2;\,3)$ nuqtadan o‘tib, OX o‘qi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

7. 1) $2x-3y-6=0$; 2) $3x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo‘yicha tenglamasiga keltiring.

8. $Ax+5y-40=0$ to‘g‘ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o‘qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

9. Uchlari $A(3;\ 4)$, $B(6;\ 2)$ va $C(-1;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

10. To‘g‘ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o‘qi bilan $\alpha=45^0$ burchak hosil qilsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

11. $x-y+3=0$ to‘g‘ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o‘qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

12. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0$, 2) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}-7=0$

3) $\frac{3}{5}x+\frac{3}{4}y-2=0$, 4) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0$

to‘g‘ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko‘rinishda?

13. Ushbu 1) $5x+12y-26=0$, 2) $3x-4y+10=0$,

3) $y=3x+5$, 4) $2x+2y+7=0$

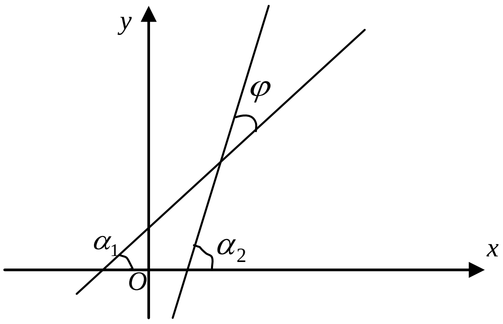
to‘g‘ri chiziq tenglamalarini normal ko‘rinishga keltiring.

2.3-§. To‘g‘ri chiziqlarga doir asosiy masalalar

1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y = k_1 x + b_1,$$
$$y = k_2 x + b_2$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bunda $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\alpha_2$ bu to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



1-chizma.

Ya’ni ,$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$(1-chizma) . Ma’lumki,

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish for- mulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1, y = 2x + 5$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bo‘lib, } \varphi = arctg\, {}^1\!/_7 \approx arctg 0.14 \approx 8^0,\ \varphi \approx 8^0$$

bo‘ladi.

2. To‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari To‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^0 \text{ bo‘lib, } tg 90^0 = \infty \quad \text{yoki} \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 . k_2 = 0$$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo‘ladi, bunga ikki to‘g‘ri chiziqning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\varphi = 0$ bo‘lib, $tg0^0 = 0$, ¸yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0,\ k_2 - k_1 = 0\ ,\ k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

3. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishuvi. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Ikkinchi tenglamani (-1) ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni hadma-had qo‘shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$ ni birinchi tenglamaga qo‘ysak, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ yoki $y = 1$ bo‘ladi. Shunday qilib, bu to‘g‘ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

4. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa. $M(x_0; y_0)$ nuqta va $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \qquad (2)$$

formula yordamida topiladi. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy

$$Ax + By + C = 0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3;\ \sqrt{5})$ nuqtadan $2x+\sqrt{5}y-2=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d=\left|\frac{2\cdot 3+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-2}{\pm\sqrt{2^2+\sqrt{5^2}}}\right| = \left|\frac{6+5-2}{3}\right| = \frac{9}{3}, \qquad d=3$$

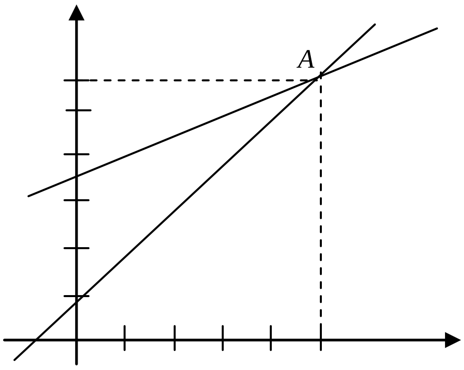
bo‘ladi.

4-misol. Ikki xil transport vositasida yuk tashish xarajatlari funksiyasi

$$y=100+50x \quad \text{va} \quad y=200+30x$$

bilan ifodalansin. Bunda, y transport xarajati, x har yuz kilometrga yuk tashish masofasi. Qanday masofadan boshlab 2-xil transport vositasi bilan yuk tashish tejamliroq bo‘ladi.

Yechish. Masala shartida berilgan $y=100+50x$ va $y=200+30x$ to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz: tengliklarning chap tomonlari teng bo‘lganligi uchun $100+50x=200+30x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x=5$, $y=350$ bo‘ladi. Demak, to‘g‘ri chiziqlar $A(5,350)$ nuqtada kesishadi. Endi to‘g‘ri chiziqlarni yasaymiz: (2-chizma).



3.2- chizma

10-chizmadan ko‘rinadiki, yuk tashish masofasi 500 km dan ortiq bo‘lganda 2-xil transport vositasi bilan yuk tashilsa, xarajat kamroq bo‘ladi.

5. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish

$$5x-2y+10=0 \quad \textbf{va} \quad 5x-2y+36=0$$

parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to‘g‘ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz: birinchi to‘g‘ri chiziqda $x=4$ desak, $y=15$ bo‘lib, $A(4,15)$ 1-to‘g‘ri chiziqdagi nuqta bo‘ladi. $A(4,15)$ nuqtadan ikkinchi $5x-2y+36=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d=\left|\frac{5\cdot 4-2\cdot 15+36}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}\right|=\frac{26}{\sqrt{29}} \quad , \quad d==\frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak, to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarligi va parallelligi, ikkita to‘g‘ri chiziqlarning kesishuvi, berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa, ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
3. Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti qanday bo‘ladi?
4. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday formuladan foydalanib topiladi?
6. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish qanday bajariladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y=1/2\cdot x+4$ to‘g‘ri chiziq berilgan. Uning koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

2. Boshlang‘ich ordinatasi $b=-3$ bo‘lgan va $y=2x+3$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.

3. $y=\sqrt{3}\,x-2$ va $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Ularning abssissa o‘qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.

4. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

5. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

6. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$, 4) $30x + 6y + 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.

7. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:

1) $\begin{matrix} y = 2/3 \cdot x - 7 \\ y = 5x + 9 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} 2x - 4y + 9 = 0 \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} y = 3/7 \cdot x - 2 \\ 7x + 3y + 5 = 0 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} x/4 - y/5 = 1 \\ x/2 + y/18 = 1 \end{matrix}$

8. Tomonlari $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarda yotgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.

9. $A(4;\ 5)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglama-sini yozing va ulardan $2x - 3y + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va parallel bo‘lganlarini ajrating.

10. Uchburchak tomonlari

$$7x - 6y + 9 = 0;\ 5x + 2y - 25 = 0;\ 3x + 10y + 29 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini va balandliklarining tenglamalarini toping.

11. Uchlari $P(-4;\ 0)$, $Q(0;\ 4)$ va $R(2;\ 2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak medianalarining tenglamalarini toping.

12. To‘g‘ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o‘qi bilan $\alpha = 45^0$ burchak hosil qilsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

13. $x - y + 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o‘qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

14. Uchlari $P(0;\ 5)$, $Q(-3;\ 1)$ va $R(-1;\ -2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning R nuqtasidan o‘tkazilgan balandligining uzunligini toping.

15. $5x-12y-26=0$, $5x-12y-65=0$ parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

16. Trapesiya asoslarining tenglamalari $3x-4y-15=0$, $3x-4y-35=0$ berilgan. Trapesiyaning balandligini toping.

17. Uchlari $A(-2;\ 0)$, $B\ (2;\ 4)$ va $C\,(4;\ 0)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining, AE medianasining, AD balandligining tenglamalarini hamda AE medarining uzunligini toping.

2.4-§. Ikkinchi tartibli chiziqlar

1. Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamasi.

Ma’lumki, tekislikda to‘g‘ri chiziq x va y o‘zgaruvchi kordinatlarga nisbatan birinchi darajali edi. Endi tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o‘rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlar x va y o‘zgaruvchi koordinatlarga nisbatan ikkinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi

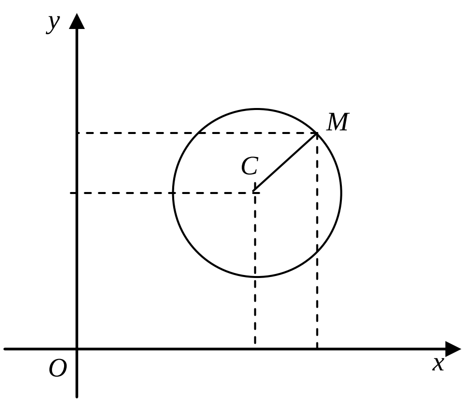
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) tenglamaga **ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi** deyiladi. Quyida muayyan hollarda, ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik ifodalarini topib, ularning xususiyatlarini o‘rganamiz.

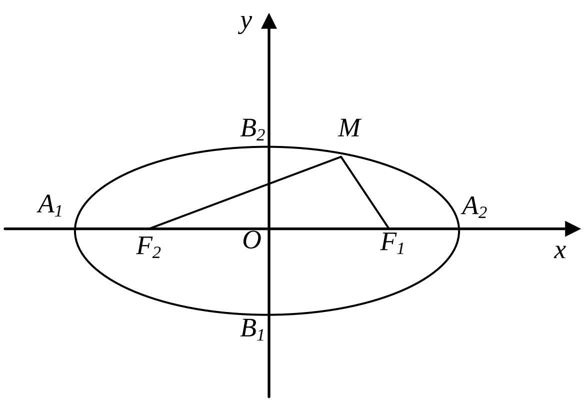
2. Aylana va uning tenglamasi.

Ta’rif. Tekislikda biror $C\,(a,\,b)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rniga aylana deyiladi.

$M\,(x,\ y)$ aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (1-chizma). Aylana ta’rifiga ko‘ra CM masofa o‘zgarmas, bu masofani R bilan belgilaylik.



4.1-chizma



4.2-chizma

ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan,

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \qquad \text{ёки} \qquad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikning ikkala tarafini kvadratga ko‘tarib,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaga markazi $C(a, b)$ nuqtada, radiusi R ga teng **aylananing kanonik(qonuniy) tenglamasi** deb ataladi. (2) dan

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \text{yoki}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

bo‘ladi. Bu tenglama (1) tenglamaning $A = C$, $B = 0$ bo‘lgan xususiy holidir. Demak, aylana ikkinchi tartibli chiziqdir.

1-misol. Ikkinchi tartibli chiziq $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Uning aylana ekanligini ko‘rsating hamda markazini va radiusini toping.

Yechish. x va y li hadlar bo‘yicha to‘la kvadratlar ajratamiz:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0,$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0 \text{ yoki } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

bo‘ladi. Bu aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3;\ -2)$, nuqtada, radiusi $R = 6$ bo‘ladi.

3. Ellips hamda uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga ***ellips deyiladi.*** Berilgan nuqtalar F_1 va F_2 bo‘lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O‘zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilab, koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o‘qi fokuslardan o‘tsin va koordinatlar boshi F_1F_2 masofaning o‘rtasida bo‘lsin (2-chizma). $M(x, y)$ ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra

$$F_1M + F_2M = 2a \qquad (3)$$

bo‘ladi. Ma’lumki, $F_1(+c;\ 0)$ va $F_2(-c;\ \ 0)$ bo‘lib, ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan irrasionallikni yo‘qotib,

$$x^2(a^2-c)^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

ko‘rinishga keltiramiz. $a^2-c^2=b^2$ bilan belgilaymiz (chunki, $a>c$). Bu holda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. (4) tenglamaga ***ellipsning kanonik*** tenglamasi deyiladi.

Koordinatlar boshi, ellipsning **simmetriya markazi**, koordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qlari** bo‘ladi.

$A_1(-a,\ 0),\quad A_2(a,\ 0),\quad B_1(0,\ -b),\quad B_2\ (0,\ +b)$

nuqtalar ellipsning uchlari, $a=OA_2$ *ва* $b=OB_2$ masofalar mos ravishda **ellipsning katta va kichik yarim o‘qlari** deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o‘qiga, simmetriya markaziga ega bo‘lgan yopiq egri chiziqdir.

$\varepsilon=c/a<1$ kattalik ***ellipsning ekssentrisiteti*** deyiladi. Aylanani ellipsning $a=b,\ \varepsilon=0$ bo‘lgan xususiy holi deb qarash mumkin.

$M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofaga ellipsning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, $r_1=a+\varepsilon x,\qquad r_2=a-\varepsilon x$ bo‘ladi.

2-misol. $16x^2+25y^2=400$ ellipsning yarim o‘qlarini, fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 400 ga bo‘lib,

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2=25,\ b^2=16$ bo‘lib, yarim o‘qlari mos ravishda $a=5,\ \ b=4$ bo‘ladi. Ma’lumki, $b^2=a^2-c^2$, bo‘lib,

$c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ bo‘ladi. Demak, fokuslari $F_1(3,0)$ va $F_2(-3,0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisiteti esa, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

4. Giperbola va uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita (fokus) nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasi o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga ***giperbola*** deyiladi(ko‘rsatilgan ayirma absolyut qiymati bo‘yicha olinib, u fokuslar orasidagi masofadan kichik va 0 dan farqli).

O‘zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ va koordinat o‘qlarini ellipsdagidek olib, $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash kiritib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) tenglamaga ***giperbolaning kanonik*** tenglamasi deyiladi. Giperbolaning fokuslari $F_1(+c;\ 0)$ va $F_2(-c;\ 0)$ bo‘ladi (3-chizma). Koordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qlari** va koordinatlar boshi $0(0;\ 0)$ **simmetriya markazi**dir. Giperbola kordinat o‘qlarini $A_1(-a;\ 0)$ *ва* $A_2(a;\ 0)$ nuqtalarda kesib o‘tib, bu nuqtalarga **haqiqiy uchlari** va $a = 0A_2$ masofa **haqiqiy yarim o‘qi** deyiladi. $B_1(0,\ -b)$, *ва* $B_2(0,\ b)$ nuqtalar giperbolaning **mavhum uchlari**, $b = 0B_2$ $-$ **mavhum yarim o‘qi** deyiladi.

Giperbola ikkita asimptotalarga ega bo‘lib, uning tenglamalari

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (6)$$

bo‘ladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ kattalikka ***giperbolaning ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Giperbola o‘qlari $a = b$ bo‘lsa, unga **teng tomonli giperbola** deyiladi va uning tenglamasi

$$x^2 - y^2 = a^2$$

bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

giperbolalarga ***o‘zaro qo‘shma giperbolalar*** deb ataladi.

3-misol. $9x^2 - 16y^2 = 144$ giperbolaning yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini hamda aksimptotalarining tenglamalarini toping.

Yechish. Berilgan tenlamani 144 ga bo‘lib tenglamani kanonik

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

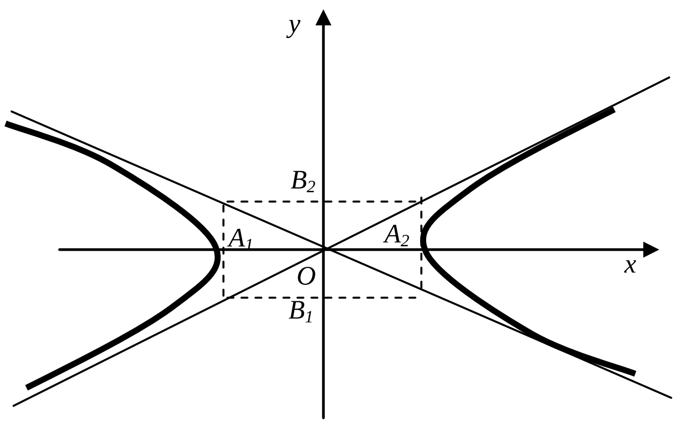
ko‘rinishga keltiramiz. Bundan $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ bo‘lib, haqiqiy yarim o‘q $a = 4$, mavhum yarim o‘q $b = 3$ bo‘ladi. $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 16 + 9$, $c = \pm 5$ bo‘lib, fokuslari $F_1(+5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisitet $\varepsilon = c/a = 5/4$.

a va b larning qiymatini (6) asimptota tenglamasiga qo‘yib,

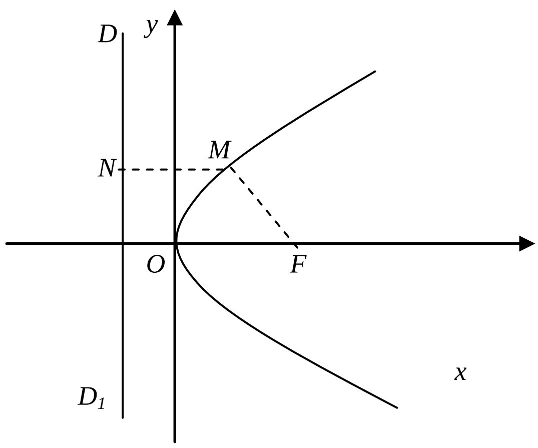
$$y = \pm\frac{3}{4}x$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu asimptotalar tenglamasidir.

$M(x, y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofaga giperbolaning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, nuqta o‘ng shoxlarida bo‘lganda $r_1 = \varepsilon x - a$, $r_2 = \varepsilon x + a$ nuqta chap shoxlarida bo‘lganda $r_1 = -\varepsilon x + a$, $r_2 = -\varepsilon x - a$ bo‘ladi.



4.3-chizma



4.4-chizma

5. Parabola va uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan nuqta(fokus)gacha va berilgan to‘g‘ri chiziq (direktrisa)gacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga **parabola** deyiladi.

Koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o‘qi F (fokus)dan o‘tib, DD_1 direktrisaga perpendikulyar, OY o‘qi esa fokus va direktrisaning o‘rtasidan o‘tsin(4-chizma). $M(x,\ y)$ parabolaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. F nuqtadan DD_1 to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani p $(p>0)$ bilan belgilaymiz. Bunda $F(p/2,\quad 0)$ bo‘lib, direktrisaning tenglamasi

$$x=-\frac{p}{2}$$

bo‘ladi.

Ta’rifga asosan, $MN=MF.$ $N(-\frac{p}{2},\ y).$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$x+p/2=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}\,.$$

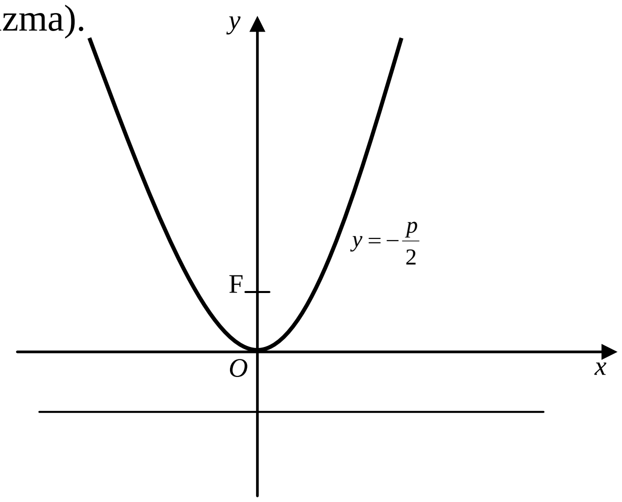
Bu tenglamadan irrasionallikni yo‘qotib,

$$y^2=2px \qquad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu absissalar o‘qiga simmetrik ***parabolaning kanonik*** tenglamasi bo‘ladi. Ordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qi** bo‘lsa, parabola tenglamasi

$$x^2=2py(p>0)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $y=-p/2$ direktrisa tenglamasi, $F=(0;\ \ p/2)$ nuqta fokus bo‘ladi (5-chizma).



4.5-chizma

$M\,(x,\ \ y)$ nuqtadan $F\,(p/2;\ \ 0)$ fokusgacha masofaga fokal radius deyiladi va $r = x + p/2$. $M\,(x,\ \ y)$ nuqtadan $F\,(0,\ \ p/2)$ fokusgacha masofa $r = y + p/2$ bo‘ladi.

4-misol.. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M\,(3;\ \ 6)$ nuqtadan fokusgacha bo‘lgan masofani aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12,$ bundan $p = 6,\quad p/2 = 3.$ Shunday qilib, fokus $F\,(3;\ \ 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M\,(3;\ \ 6)$ nuqta uchun $x = 3,$ bo‘lib, fakol radius $r = 3 + 3 = 6,\quad r = 6$ bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziq, aylana, ellips, giperbola, parabola, ellips va giperbola yarim o‘qlari, asimptota, qo‘shma giperbola, kanonik tenglama, simmetriya markazi, simmetriya o‘qi, ekssentrisitet, fokus, direktrisa, parabola fokusi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chiziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb nimalarga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo‘ladi?
3. Ellips va giperbolalarning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
4. Ekssentrisitet aylana uchun nimaga teng?
5. Ellips, gipebala va parabolalarning fokal radiuslari nima?
6. Ellips va giperbolalarning simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari bormi?
7. Ellips va giperbolalarning yarim o‘qlari nimalardan iborat?

Mustaqil yechish uchun misollar

1.. $N\ (7;\ -2)$ nuqtadan o‘tib, markazi $C\ (3;\ -5)$ nuqtada bo‘lgan aylana tenglamasini yozing.

2. $M\ (4;\ 2)$ va $N\ (12;\ 8)$ nuqtalar berilgan. Diametri MN kesmadan iborat bo‘lgan aylana tenglamasini yozing.

3. Ushbu 1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$;

2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y - 29/3 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 7x = 0$;

4) $5x^2 + 5y^2 + 9y = 0$

aylanalarning markazlarini va radiuslarini toping.

4. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$, va $x^2 + y^2 + 8x + 12y - 14 = 0$ aylanalar markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

5. Fokuslari orasidagi masofa 24, katta o‘qi 26 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing va uni yasang.

6. Quyidagilar berilganda ellipsning kanonik tenglamasini toping:

1) katta yarim o‘q 10, ekssentrisitet $0{,}8$;

2) kichik yarim o‘q 12, ekssentrisitet $5/13$;

3) ekssentrisitet $0{,}6$, fokuslar orasidagi masofa 6.

7. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$, 2) $9x^2 + 12y^2 = 36$ ellipslar uchun o‘qlarining uzunliklarini, fokuslarini va ekssentrisitetlarini toping va yasang.

8.Koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan ellips $M\ (2;\ \sqrt{3})$ va $N\ (0;\ 2)$ nuqtalardan o‘tadi. Ellips tenglamasini yozing. M nuqtadan fokuslargacha masofalarni toping.

9. Ellipsning ekssentrisiteti ε berilgan. Ellips yarim o‘qlarining b/a nisbatini toping.

10. Quyidagilar berilganda giperbolaning kanonik tenglamacini yozing:

1) fokuslari orasidagi masofa 10, ekssentrisitet $5/3$;

2) haqiqiy yarim o‘q $\sqrt{20}$ va giperbola $N\ (-10;\ \ 4)$ nuqtadan o‘tadi;

3) fokuslar orasidagi masofa 10, uchlari orasidagi masofa 4.

11. 1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9x^2 - 12y^2 = 144$ giperbolalar uchun o‘qlarning uzunliklarini, fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

12. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ giperbolada abssissasi 3 ga teng nuqta olingan. Bu nuqtaning fokal radiuslarini toping.

13. $x^2/25 + y^2/9 = 1$ ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini yozing va uni yasang.

14. Giperbola biror uchidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalar 9 va 1 bo‘lsa, uning tenglamasini yozing.

15. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolani va uning asimptotalarini yasang. Fokuslarini, ekssentrisitetini va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

16. Koordinatlar boshidan va $N(-3;\ 6)$ nuqtadan o‘tib, OX o‘qiga simmetrik bo‘lgan parabola tenglamasini yozing va uni yasang.

17. Koordinatlar boshidan va $N(6;\ 3)$ nuqtadan o‘tib, OY o‘qiga simmetrik bo‘lgan parabola tenglamasini yozing va uni yasang.

18. 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -6x$; 3) $x^2 = -4y$; 4) $x^2 = 4y$ parabolalar uchun fokuslarini va direktrisalarining tenglamalarini toping.

19. $y^2 = 16x$ parabolada fokal radiusi 5 ga teng bo‘lgan nuqtani toping.

20. OY o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan parabola, $x + y = 0$ to‘g‘ri chiziq va $x^2 + y^2 + 4y = 0$ aylana kesishgan nuqtalardan o‘tadi. Parabola tenglamasini yozing. Aylanani, to‘g‘ri chiziqni va parabolani yasang.

2.5-§. Fazoda tekislik tenglamalari

1. Fazoda Dekart koordinatlar sistemasi va asosiy masalalar. Tekislikdagi Dekart koordinatlariga o‘xshash fazodagi koordinatlar ham aniqlanadi, o‘zaro perpendikulyar OX, OY, OZ son o‘qlari, umumiy 0 nuqtadan o‘tsin. Fazoda A ***nuqtaga uchta haqiqiy son*** (x, y, z) va aksincha uchta haqiqiy songa bitta nuqta mos keladi. Bu moslik ham bir qiymatlidir. Bu sonlarga nuqtaning fazodagi koordinatlari deyiladi. x absissasi, y ordinatasi, z ***aplikatasi*** deb ataladi. Koordinat o‘qlaridan o‘tuvchi tekisliklarga ***koordinat tekisliklari*** deyiladi va ular fazoni 8 ta bo‘laklarga - **oktantlarga** ajratadi. $A\ (x,\ y,\ z)$ nuqtaning koordinatlari, OA radius vektorning ham koordinatlari bo‘ladi.

Fazodagi analitik geometriyada ham quyidagi sodda masalalar qaraladi:

1) fazodagi berilgan $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formula bilan aniqlanadi;

2) AB kesmani $\lambda = AC : CB$ nisbatda bo‘luvchi $C\ (x,\ y,\ z)$ nuqtaning koordinatlari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

formulalar yordamida topiladi.

2. Fazoda sirt va uning tenglamasi. Ma’lumki, tekislikda

$$F\ (x,\ y) = 0$$

tenglama biror chiziqni ifodalaydi.

$$F\ (x,\ y,\ z) = 0 \qquad (1)$$

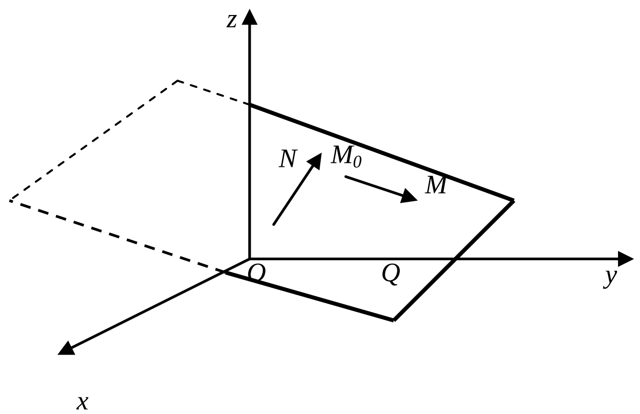
tenglama $OXYZ$, R^3 fazoda koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami, biror ***sirtni aniqlaydi.*** Bu tenglamaga ***sirt tenglamasi*** deyiladi. (1) tenglama darajasiga ***sirtning tartibi*** deb ataladi. Masalan, OYZ koordinat tekisligida yotgan istalgan $A(x,\ y,\ z)$ nuqtaning abssissasi $x = 0$ bo‘ladi va aksincha $A\ (0,\ y,\ z)$

nuqta OYZ koordinat tekisligida yotadi. Demak, OYZ koordinat tekisligining tenglamasi $x = 0$ bo‘lib, u birinchi tartibli bo‘ladi. Xuddi, yuqoridagidek $y = 0$, $z = 0$ mos ravishda OXZ va OXY koordinat tekisliklari tenglamalarini ifodalaydi.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

tenglama markazi $C\,(a, b, c)$ nuqtada radiusi R bo‘lgan sferik sirt tenglamasi, ikkinchi tartiblidir.

3. Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasi. $OXYZ$ to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqta va $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan o‘tuvchi, $\vec{N}$ vektorga perpendikulyar Q tekislikning fazodagi vaziyati aniq bo‘ladi. Uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Q tekislikda ixtiyoriy $M\,(x,\ y,\ z)$ nuqta olamiz(1-chizma).



1.1-chizma.

$\overrightarrow{M_0M}$ va $\vec{N}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lganda va faqat shundagina M nuqta Q tekislikda yotadi. Ma’lumki $\overrightarrow{M_0M}$ vektorning koordinatlari $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ bo‘ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (2)$$

bo‘ladi. Bu Q ***tekislik tenglamasi*** bo‘ladi.

Ta’rif. Q tekislikka perpendikulyar $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektorga bu tekislikning ***normal*** vektori deyiladi.

1-misol. $M_0\ (4,\ -3,\ 5)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. (2) formulaga asosan,

$2(x-4)+(-3)\ (y+3)+4(z-5)=0$, $2x-8-3y-9+4z-20=0$

yoki

$$2x-3y+4z-37=0$$

bo‘lib, bu izlanayotgan tekislik tenglamasidir.

4. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.

(2) tenglamadan

$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$ yoki $-Ax_0 - B\mathbf{y}_0 - Cz_0 = D$

bilan belgilashdan keyin

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) tenglamaga fazoda tekislikning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz:

1) $D=0$ bo‘lsa, $Ax+By+Cz=0$ bo‘lib, tekislik koordinatlar boshidan o‘tadi;

2) $C=0$ bo‘lsa, $Ax+By+D=0$ bo‘lib, tekislik OZ o‘qiga parallel; xuddi shunday $Ax+Cz+D=0$, $By+Cz+D=0$ tekisliklar mos ravishda OY va OX o‘qlariga paralleldir;

3) 2-holda $D=0$ bo‘lsa, tekislik tenglamalari $Ax+By=0$, $Ax+Cz=0$, $By+Cz=0$ bo‘lib, ular mos ravishda OZ, OY, OX koordinat o‘qlaridan o‘tadi;

4) $B=C=0$, bo‘lsa, $Ax+D=0$ tekislik YOZ koordinat tekisligiga parallel, xuddi shunday $By+D=0$, $Cz+D=0$ tekisliklar mos ravishda XOZ, XOY koordinat tekisliklariga parallel bo‘ladi;

5) $B = C = D = 0$ bo‘lsa, $Ax = 0$ bo‘lib, YOZ koordinat tekisligi bilan ustma-ust tushadi, ya’ni $x = 0$, YOZ koordinat tekisligining tenglamasi bo‘ladi. Xuddi shunday $y = 0$ va $z = 0$, mos ravishda XOZ va XOY koordinat tekisliklarining tenglamasini ifodalaydi .

5. Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. (3) tenglamada A, B, C, D koeffisiyentlar hammasi 0 dan farqli bo‘lsa, tekislik koordinat o‘qlaridan OL, ON va OP kesmalar ajratadi(2-chizma). (3) tenglamani quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$Ax + By + Cz = -D, \qquad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Oxirgi tenglamada

$$-D/A = a, \quad -D/B = b, \quad -D/C = c$$

belgilash kiritsak,

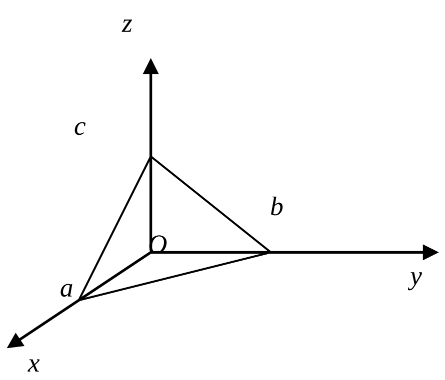
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamaga fazoda ***tekislikning kesmalarga nisbatan*** tenglamasi deyiladi.

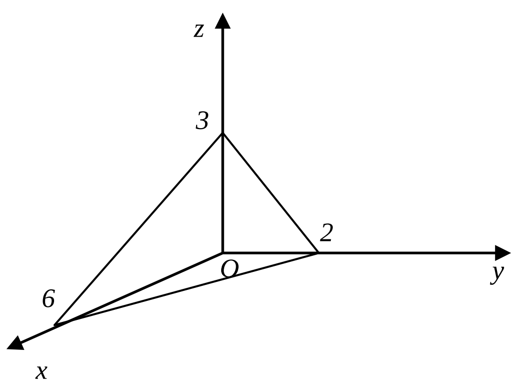
2-misol. Tekislikning $x + 3y + 2z - 6 = 0$ umumiy tenglamasi berilgan, bu tekislikni yasang.

Yechish. Tenglamani tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasiga keltiramiz:

$$x + 3y + 2z = 6, \qquad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$



1.2-chizma



1.3-chizma

Oxirgi tenglamadan ma’lumki, tekislik koordinat o‘qlaridan mos ravishda 6, 2, 3 kesmalar ajratadi. Bu kesmalarning oxiridan tekislikni o‘tkazamiz (3-chizma).

6. Berilgan uchta $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ **va** $C\,(x_3;\, y_3;\, z_3)$ **nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasi**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘lib, uchta vektorning komplanarligidan kelib chiqadi. $M\,(x,\, y,\, z)$ tekislikdagi ixtiyoriy nuqta. $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ vektorlar komplanardir.

7. Ikki tekislik orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklar orasidagi burchak, ularning normal $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlari orasidagi burchakka teng bo‘lib,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}} \qquad (5)$$

formula o‘rinli bo‘ladi. (5) ga ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar kollinear bo‘lsa,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo‘lib***, bu ikki tekislikning parallellik sharti deyiladi.***.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar perpendikulyar bo‘lsa,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

bo‘lib, *bu* ***ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti*** bo‘ladi. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofa,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{6}$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $x+2y-3z+4=0$ va $2x+3y+z+8=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $n_1\ (1,\ 2,\ -3)$ va $n_2\ (2,\ 3,\ 1)$ mos ravishda berilgan tekisliklarning normal vektorlari bo‘lganligi uchun (5) formulaga asosan,

$$\cos\varphi\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+(-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\ \cdot\ \sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{5}{14}, \qquad \varphi\approx 69^0 05^1$$

bo‘ladi.

4-misol. $2x-y-2z+4=0$ va $2x-y-2z-8=0$ tekisliklarning parallelligini ko‘rsating va ular orasidagi masofani toping.

Yechish. Berilgan tekisliklarning normal vektorlari $n_1\ (2,\ -1,\ -2)$ va $n_2\ (2,\ -1,\ -2)$ parallellik shartini qanoatlantiradi, demak berilgan tekisliklar ham paralleldir. Endi birinchi tekislikda biror nuqtani aniqlab undan ikkinchi tekislikkacha bo‘lgan masofani topamiz. $x=z=0$ bo‘lsa, birinchi tekislik tenglamasidan $y=4$ bo‘lib, $M_0\ (0;\ 4;\ 0)$ nuqta birinchi tekislikdagi nuqta bo‘ladi. (6) formulaga asosan,

$$d=\frac{|2\cdot 0-1\cdot 4-2\cdot 0-8|}{\pm\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4.$$

Demak, parallel tekisliklar orasidagi masofa $d=4$ bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Fazoda nuqtaning o‘rni, aplikata, oktantlar, koordinat tekisliklari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish, sirt va uning tenglamasi, sirtning tartibi, sferik sirt, fazoda tekislik, normal vektor, tekislikning umumiy tenglamasi, tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi, berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik, ikki tekislik orasidagi burchak, nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa, ikki tekislikning parallelligi va perpendikulyarligi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. R^3 fazoda nuqtaning o‘rni qanday aniqlanadi?

2. Qanday moslikka bir qiymatli moslik deyiladi?

3. R^3 fazodagi koordinatlar qanday aniqlanadi?

4. Koordinat tekisliklari nima?

5. Koordinat tekisliklari R^3 fazoni nechta bo‘lakka ajratadi?

6. R^3 fazoda ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

7. R^3 fazoda sirt va uning tenglamasi qanday aniqlanadi?

8. Sirtning tartibi deb nimaga aytiladi?

9. Sferik sirt nechanchi tartibli?

10. Berilgan nuqtadan o‘tib va berilgan vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi qanday bo‘ladi?

11. Qanday vektorga tekislikning normal vektori deyiladi?

12. Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari qanday bo‘ladi?

13. Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi qanday yoziladi?

14. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi determinant orqali qanday bo‘ladi?

15. Ikkita tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?

16. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa nima va u qanday topiladi?

17. Ikki tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari nima?

Mustaqil bajarish uchun topshiriљlar

1. $A(2,5,0)$ va $B(5,\ 1,\ 12)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

2. Uchlari $A(5,\ 2,\ 6)$, $B(6,\ 4,\ 4)$, $C(4,\ 3,\ 2)$ va $D(3,\ 1,\ 4)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning kvadrat ekanligini ko‘rsating.

3. $A(3,\ 7,\ 4)$ va $B(8,\ 2,\ 3)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $\lambda = 2:3$ nisbatda bo‘luvchi $C(x,\ y,\ z)$ nuqtani toping.

4. AB kesmaning boshlang‘ich nuqtasi $A(-1,\ 2,\ 4)$ va uni $\lambda = 1:2$ nisbatda bo‘luvchi $C\ (2,\ 0,\ 2)$ nuqta berilgan. $B\ (x,\ y,\ z)$ nuqtani toping.

5. Uchlari $A(5,\ 3,\ -10)$, $B(0,\ 1,\ 4)$ va $C(-1,\ 3,\ 2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning AE medianasining uzunligini toping.

6. $A(3,\ 6,\ -5)$ va $B(1,\ -1,\ 2)$ nuqtalarga parallel qo‘nalgan F_1 va F_2 kuchlar qo‘yilgan. Ularning teng ta’sir etuvchisi F qo‘yilgan $N(x,\ y,\ z)$ nuqtani toping. $|F_1| = 5H$ va $|F_2| = 2H$. Ko‘rsatma: Fizikadan ma’lumki parallel kuchlarni qo‘shganda AN va NB yelkalar unga qo‘yilgan kuchlarga teskari proporsianaldir, ya’ni $AN : NB = |F_2| : |F_1| = 2:5 = \lambda$ bo‘ladi.

7. $M_1\ (4,\ 2,\ -6)$ va $M_2\ (2,\ -2,\ 4)$ nuqtalarga P_1 va P_2 parallel kuchlar qo‘yilgan. $|P_1| = 2$, $|P_2| = 6$ bo‘lsa teng ta’sir etuvchi P kuchning qo‘yilgan nuqtasini toping.

8. $M(2;\ -3;\ 2)$ nuqtadan o‘tib, $N(5,\ 4,\ 3)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

9. $M_0(2;\ 5;\ 4)$ nuqtadan o‘tib, ordinat o‘qidan $b = -6$, aplikata o‘qidan $c = 3$ kesma ajratib o‘tgan tekislik tenglamasini yozing.

10. OX o‘qiga parallel va $P(4;\ 0;\ -2)$, $Q(5,\ 1,\ 7)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

11.Quyidagi tekisliklarni yasang:

1) $2x - 3y + z - 6 = 0$; 2) $x + 2y - 4 = 0$; 3) $y - 3 = 0$;

4) $2x + 3y = 0$; 5) $x - 2y - z = 0$; 6) $3z - 7 = 0$.

12. YOZ koordinat tekisligiga parallel va $M\ (2;\ -5;\ 4)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

13. $A(3,\ 5,\ 6)$ va $B(5,\ -7,\ 4)$ nuqtalar berilgan. A nuqtadan o‘tib, $\overrightarrow{AB}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

14. OY o‘qiga parallel va $M_1\ (3,\ 2,\ 1)$, $M_2\ (4,\ -3,\ 5)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

15. $M\ (2,\ -6,\ 5)$nuqtadan o‘tib, abcsissalar o‘qidan $a = 4$, ordinata-lar o‘qidan $b = 3$ kesmalar ajratib o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

16. OY o‘qidan va $M\ (2,\ 4,\ 1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglama-sini yozing.

17. OZ o‘qdan va $M(2,3,4)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglama-sini yozing.

18. $M_1\ (1,\ 3,\ -2)$, $M_2\ (4,\ -5,\ 6)$va $M_3\ (-3,\ 1,\ 2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

19. 1) $2x - 3y + 4z - 24 = 0$; 2) $4x + y - 6z - 2 = 0$ tekisliklarning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalarining kattaliklarini toping.

20. $2x - y - 2z + 3 = 0$ va $x + y - 5 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

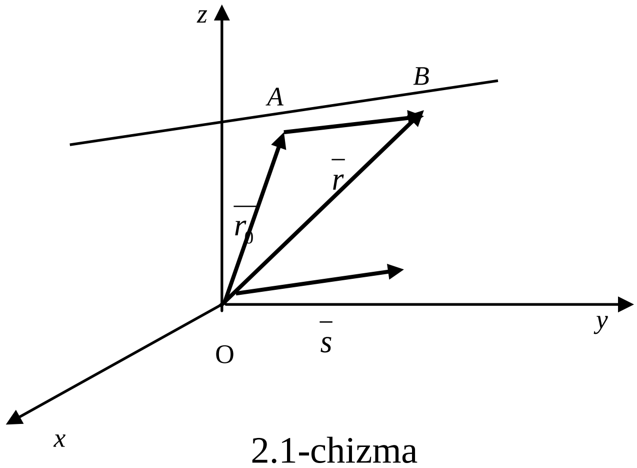
21. $M_0\ (2,\ 4,\ -3)$ nuqtadan o‘tib, $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini yozing.

22. $M\ (1,\ -4,\ -5)$nuqtadan $6x - 3y - 6z + 7 = 0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

23. $2x - 11y + 10z - 15 = 0$ va $2x - 11y + 10z + 45 = 0$tekisliklar orasidagi masofani toping.

2.6-§. Fazoda to‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari

1.Fazoda berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan yo‘naltiruvchi vektorga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq vektorli tenglamasi. Fazoda to‘g‘ri chiziqning holati u o‘tadigan biror $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ nuqta va to‘g‘ri chiziq parallel bo‘lgan $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ **yo‘naltiruvchi vektor**ning berilishi bilan to‘la aniqlanadi. Uning tenglamasini yozish uchun unda ixtiyoriy $B(x,\ y,\ z)$ nuqta olamiz (1-chizma).



2.1-chizma

Ma’lumki, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ bo‘lib, $\vec{AB}$ vektor $\vec{s}$ vektorga kollinear, ya’ni $\vec{AB} = t\,\vec{s}$, $t-$ skalyar parametr. $\vec{OA} = \vec{r}_0$, $\vec{OB} = \vec{r}$ desak,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s} \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) tenglikka **f*azoda to‘g‘ri chiziqning vektorli tenglamasi*** deyiladi.

2. Fazoda to‘g‘ri chiziq(FTCh)ning parametrik va kanonik tenglamalari.

$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$, $\vec{s} = m\,\vec{i} + n\,\vec{j} + p\,\vec{k}$ bo‘lganligi uchun (1) tenglamadan vektorlarning tengligiga asosan,

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn, \\ z = z_1 + tp \end{cases} \qquad (2)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bunga ***to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi*** deyiladi, bunda $t-$ parametr.

(2)tenglamadan t parametrni yo‘qotsak,ya’ni

$$x - x_1 = tm, \quad \frac{x - x_1}{m} = t, \quad \frac{y - y_1}{n} = t, \quad \frac{z - z_1}{p} = t \quad \text{bo‘lib}$$

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (3)$$

tenglama kelib chiqadi. (3) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

1-misol. $M_0\ (2; -3; 5)$ nuqtadan o‘tib koordinat o‘qlari bilan $\alpha = \pi/4,\ \ \beta = \pi/3,\ \ \gamma = \pi/3$ burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

Yechish.To‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida

$$s = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k$$ vektorni

olamiz.

(3) tenglamaga asosan,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z-5}{1/2}$$

to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Oxirgi tengliklarning har birini t bilan belgilab,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = t \qquad \frac{y+3}{1/2} = t \qquad \frac{z-5}{1/2} = t$$ yoki

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} t + 2; \quad y = \frac{1}{2} t - 3; \qquad z = \frac{1}{2} t + 5$$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz.

3. Fazoda umumiy va proyeksiyalarga nisbatan hamda berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalari. Fazoda to‘g‘ri chiziqni **ikki tekislikning kesimi**dan iborat deb ham qarash mumkin. Shuning uchun to‘g‘ri chiziqni analitik holda quyidagi sistema

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

orqali ham ifodalash mumkin. (4) tenglamada A_1, B_1, C_1 koeffisiyentlar mos ravishda A_2, B_2, C_2 koeffisiyentlarga proporsional bo‘lmasa u to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Bunga to‘g‘ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

(4) sistemadan birinchi y noma’lumni, keyin x noma’lumni yo‘qotsak,

$$\begin{cases} x = x_1 + mz, \\ y = y_1 + nz \end{cases} \tag{5}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bundagi birinchi tenglama OY o‘qqa parallel bo‘lgan tekislik, ikkinchisi OX o‘qqa parallel bo‘lgan tekislik bo‘lib, berilgan to‘g‘ri chiziqni XOZ va YOZ koordinat tekisliklariga proyeksiyalaydi. (5) sistemaga to‘g‘ri chiziqning ***proyeksiyalarga*** nisbatan tenglamasi deyiladi.

$M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ **berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq** tenglamasi tekislikda berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidagidek ushbu ko‘rinishda

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x+y-5z+3=0, \\ 3x+2y-4z+2=0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalarga nisbatan va kanonik tenglamalarini yozing.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasidan oldin y ni yo‘qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (-2) ko‘paytirib tenglamalarni hadma-had qo‘shib $-x+0+6z-4=0$, yoki $x=6z-4$ tenglamani hosil qilamiz. Endi x noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun birinchi tenglamani (3)ga ikkinchi tenglamani (-2) ga ko‘paytirib hadma - had qo‘shib $-y-7z+5=0$ yoki $y=-7z+5$ tenglamani keltirib chiqaramiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} x=6z-4, \\ y=-7z+5 \end{cases}$$

sistema to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalarga nisbatan tenglamasi bo‘ladi.

Oxirgi tenglamalar sistemasini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$\begin{matrix} x+4=6z \\ y-5=-7z \end{matrix} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+4}{6}=z\ , \qquad \frac{y-5}{-7}=z\,.$$

Demak, $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-5}{-7} = \dfrac{z-0}{1}$.

Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

3-misol. Uchburchakning uchlari $A\,(3,\ -2,\ 1)$, $B\,(6,\ 5,\ -7)$ va $C\ (5,\ -4,\ \ 3)$ berilgan. BD medianing kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. D nuqta AC tomonni teng ikkiga bo‘ladi. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish formulasiga asosan:

$$x_D = \frac{3+5}{2} = 4, \qquad y_D \frac{-2-4}{2} = -3, \qquad z_D = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Demak, $D(4,\ -3,\ 2)$ bo‘ladi. Mediana B va D nuqtalardan o‘tadi. (2.6) formulaga asosan:

$$\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-5}{-3-5} = \frac{z+7}{2+7} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-6}{-2} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z+7}{9}.$$

Bu BD medianing kanonik tenglamasidir.

4. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Fazoda ikkita to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Bu **to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak**, ularning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng bo‘lib,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_1^2 + p_1^2}} \tag{7}$$

formula yordamida topiladi.

Berilgan to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{8}$$

bo‘lib, bu fazoda **ikki to‘g‘ri chiziqning *parallellik* sharti** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, yo‘naltiruvchi vektorlar ham perpendikulyar bo‘lib,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \tag{9}$$

bo‘ladi, bu **ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik sharti**dir.

1-misol. $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-2}{1}$ *ва* $\dfrac{x-8}{7}=\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z-4}{-1}$

to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Oldin to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlarini topamiz:

$\vec{s}_1=7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$, $\quad\vec{s}_2=7\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$.

To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak ularning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng. (7) formulaga asosan:

$$\cos\varphi=\frac{7\cdot7+5\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{\sqrt{7^2+5^2+1^2}\ \cdot\ \sqrt{7^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{28}{15\sqrt{22}}\approx 0.3127,$$

$\cos\alpha\approx0.3127.$

Jadvaldan $\varphi\approx71^0 48^1$ ekanligini topamiz.

2-misol. M_0 $(2,\,-1,\,3)$ nuqtadan o‘tib,

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{4}$$

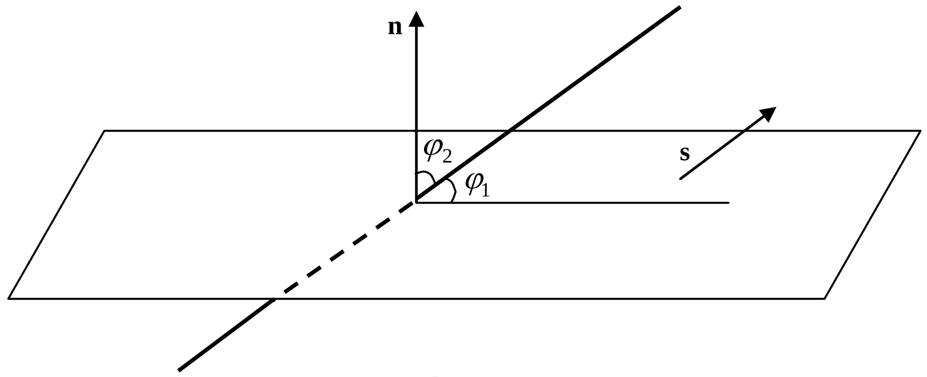
to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq yo‘naltiruvchi vektori uchun berilgan to‘g‘ri chiziq yo‘naltiruvchi vektorini olish mumkin, chunki ular shartga ko‘ra parallel, ya’ni $\vec{s}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ yo‘naltiruvchi vektor bo‘ladi. Berilgan nuqtadan o‘tib, $\vec{s}$ yunaltiruvchi vektorga ega bo‘lgan, izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi (3) ga asosan,

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$$

bo‘ladi.

5.Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak **de**b, to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi proyeksiyasi bilan to‘g‘ri chiziq orasidagi qo‘shni burchaklardan biri olindi (2-chizma).



2.2-chizma.

To‘g‘ri chiziq $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasi bilan tekislik $Az + By + Cz + D = 0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. φ_1 burchakni topish uchun to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi φ_2 burchakni hisoblaymiz:

$$\cos\varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}}.$$

φ_1 burchak φ_2 burchakni $\pi/2$ gacha to‘ldiradi. Demak,

$$\cos\varphi_2 = \cos(\pi/2 - \varphi_1) = \sin\varphi_1$$

Shunday qilib,

$$\sin\varphi_1 = \frac{Am + Bn + Cp}{\left|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right| \cdot \left|\sqrt{m^2 + p^2 + n^2}\right|} \qquad (10)$$

bo‘ladi. (10) fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa $\vec{s}(m,n,p)$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorlar perpendikulyar bo‘lib,

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (11)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. (11) tenglikka **to‘g‘ri chiziq va tekislikning *parallellik sharti*** deyiladi. To‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, $\vec{s}(m,n,p)$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorlar parallel bo‘ladi va

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (12)$$

munosabat kelib chiqadi. (12) tenglik **to‘g‘ri chiziq va tekislikning** ***perpendikulyarlik*** **sharti** bo‘ladi.

(11) shart bajarilmasa to‘g‘ri chiziq va tekislik kesishadi. Kesishish nuqtasini topish uchun, ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

uch noma’lumli tenglamalar sistemasini yechish kerak bo‘ladi.

6-misol. $A(5,\ 1,\ -4)$ va $B(6,\ 1,\ -3)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bilan $2x-2y+z-3=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. AB nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\vec{s}=\vec{AB}(1{,}0{,}1)$ ni olamiz. Tekislikning normal vektori $\vec{n}(2,-2,1)$ bo‘lganligi uchun (10) formulaga asosan:

$$\sin\varphi=\frac{2\cdot1+0\cdot(-2)+1\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2}\ \cdot\ \sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi=\sqrt{2/2}\ , \qquad \varphi=45^0.$$

7 –misol. $$\begin{cases} 2x+3y+3z-7=0, \\ x+2y+2z-4=0 \end{cases}$$

to‘g‘ri chiziqni yasang.

Yechish. Ma’lumki to‘g‘ri chiziqni yasash uchun u o‘tadigan ikkita nuqtani aniqlash yetarli. Buning uchun to‘g‘ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Bu nuqtalarga **to‘g‘ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning XOY tekislikdagi **izini** topish uchun berilgan sistemada $z=0$ deb olamiz, ya’ni

$$\begin{cases} 2x+3y-7, \\ x+2y-4=0. \end{cases}$$

Bu sistemani x, y noma’lumlarga nisbatan yechsak, $x=2$, $y=1$ bo‘ladi. Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqning XOY koordinata tekisligidagi izi M_1 (2, 1, 0) nuqta bo‘ladi.

Endi to‘g‘ri chiziqning XOZ tekislikdagi izini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamalar sistemasida $y=0$ deb, hosil bo‘lgan sistemani yechib, $x=2$, $z=1$ topamiz. Demak, to‘g‘ri chiziqning XOZ tekislikdagi izi M_2 (2, 0, 1) bo‘ladi. Topilgan M_1 va M_2 nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yo‘naltiruvchi vektor, vektorli, parametrik, kanonik, umumiy, proyeksiyalarga nisbatan tenglamalar, ikki tekislikning kesimi, fazoda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak hamda ularning parallelligi va perpendikulyarligi, fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak hamda ularning parallelligi,perpendikulyarligi, fazoda to‘g‘ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. R^3 fazoda to‘g‘ri chiziq qanday aniqlanadi?

2. To‘g‘ri chiziqning vektorli, parametrik va kanonik tenglamalari qanday yoziladi?

3. To‘g‘ri chiziqning umumiy va proyeksiyalarga nisbatan tenglamalari nimalardan iborat?

4. R^3 fazoda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?

5. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti qanday?

6. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?

7. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb qaysi burchak olinadi?

8. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik sharti nimadan iborat?

9. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti qanday?

10. . To‘g‘ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari nimadan iborat va qanday topiladi?

11. To‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori nima?

Mustaqil ish uchun toshiriqlar

1. $M_0(2,\ 5,\ -4)$ nuqtadan o‘tib $\vec{s}(3,6,7)$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

2. $M(1,\ -3,\ -5)$ nuqtadan o‘tib, koordinat o‘qlari bilan $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/3$ burchaklar tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

3. $M_1(3,\ -2,\ 5)$ va $M_2(6,\ 1,\ 7)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq kanonik va parametrik tenglamalarini yozing.

4. 1) $\begin{cases} 5x + y - 3z - 3 = 0, \\ 4x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalarga nisbatan va kanonik tenglamalarini yozing.

5. Uchlari $A(1,\ 4,\ 2)$, $B(3,\ 5,\ 4)$ va $C(-1,\ 1,\ 2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak AD medianasining kanonik tenglamasini yozing.

6. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2 = 0, \\ 3x - 5y - 4z - 2 = 0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini yozing.

7. $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka koordinatlar boshidan o‘tkazilgan perpendikulyarning kanonik tenglamasini yozing.

8. 1) $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$ va $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{-4}$;

2) $\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5 = 0, \\ x - 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ va $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{4}$

to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

9. $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ va $\begin{cases} -3y + z - 5 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlarning parallelligini ko‘rsating.

10. 1) $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-6}{-1}$ va $\begin{cases} x+2y-3z-1=0, \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x+4y-z-1=0, \\ 2x+3y+z+2=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+3t, \\ z=5+t \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro perpendikulyarligini ko‘rsating.

11. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-6}{1}$ to‘g‘ri chiziq va $4x+2y+2z+5=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

12. $A(3,\ 6,\ 2)$ va $B(4,\ 5,\ -2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq va $2x+y-2z-5=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

13. $M_0\ (-2,\ 3,\ 4)$ nuqtadan o‘tib, $3x-2y+5z-6=0$ tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

14. $\begin{cases} 2x-3y+4z-2=0, \\ x+2y-5z-3=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq va $2x-7y+12z-15=0$ tekislikning parallelligini ko‘rsating.

III- BOB. Matematik analizga kirish

3.1-§. To‘plamlar nazariyasi

1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar. ***To‘plam*** *tushunchasi matematikaning boshlang‘ich va muhim tushunchalardan bir*idir. Masalan: Natural sonlar to‘plami, auditoriyadagi talabalar to‘plami, bibleotekadagi kitoblar to‘plami, bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami biror xildagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar to‘plami va boshqalar.

To‘plamni tashkil etgan narsalar to‘plamning elementlari deyiladi. Matematikada to‘plamlar bosh harflar bilan, masalan: $A, B, X, Y, ...$ uning elementlari esa kichik harflar, masalan: $a,\ b,\ x,\ y,.....$ bilan belgilanadi.

To‘plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, unga ***chekli to‘plam*** deb ataladi. Masalan, bibleotekadagi kitoblar soni yoki guruhdagi talabalar soni chekli bo‘ladi. Cheksiz elementlardan tashkil topgan to‘plam ***cheksiz to‘plam*** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to‘plami, bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami va boshqalar.

x element X to‘plamga tegishli bo‘lsa, $x \in X$ deb belgilanadi, aks holda $x \notin X$ yoziladi. $\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo‘lgan $x \in X$ lar to‘plamini bildiradi. Bo‘sh to‘plamni

$\varnothing = \{x \in \varnothing / x \neq x\}$ deb yozish mumkin.

1-misol. Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan to‘plamlar elementlarini aniqlang.

1) $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$; 2) $B = \{x \in N \mid x \leq 0\}$; 3) $C = \{x \in Z \ |x| \leq 2\}$

Yechish. 1) To‘plam 5 dan kichik va teng bo‘lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya’ni $A = \{1,2,3,4,5\}$.

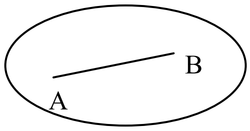
2) manfiy natural son yo‘q shuning uchun $B = \varnothing$;

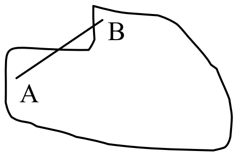
3) bu holda $|x| \leq 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2;\ 2]$ kesmada bo‘ladi. Shunday qilib, $C = \{-2; -1;\ 0; 1;\ 2\}$.

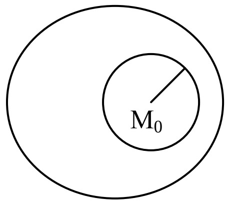
Qavariq to‘plam. 1-ta’rif. Istalgan ikki nuqta shu to‘plamga tegishli bo‘lganda, bu nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi ham shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, bunday to‘plamga ***qavariq to‘plam*** deyiladi(1,2-chizma).

Nuqtaning atrofi. 2-ta’rif. r biror musbat son bo‘lsin. $M_0 \in R^n$ fazoning nuqtasi uchun $p(M,\ M_0) < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $M \in R^n$ nuqtalar to‘plamiga M_0 ***nuqtaning*** r***-atrofi*** deyiladi va $S_r(M_0)$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$S_r(M_0) = \{M \in R^n \mid \rho(M,\ M_0) < r\}.\ \text{(3-chizma)}$$







1.1-chizma 1.2-chizma 1.3-chizma

Masalan, $M_1(2;\ 3;\ -1;\ 3) \in S_2(M_0), M_0(1;\ 2;\ -1;\ 2)$ nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli, chunki

$$\rho(M_1, M_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

bo‘lib, $\sqrt{3} < 2$ bo‘ladi. $M_2(3;\ 3;\ -1;\ 3)$ nuqta $S_2(M_0)$ atrofga tegishli emas, chunki $\rho(M_2,\ M_0) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6} > 2$ bo‘ladi.

R^1(sonlar o‘qi) fazoda $M_0(a)$ nuqtaning r atrofi $(a-r,\ a+r)$ intervaldan iborat.

R^2(tekislik) fazoda $M_0(a,b)$ nuqtaning r atrofi, radiusi r, markazi $M_0(a,b)$ nuqtada bo‘lgan doiraning ichki nuqtalaridan iborat bo‘ladi. R^3 fazoda esa, $M_0(a,b,c)$ nuqtaning r atrofi, radiusi, r, markazi. $M_0(a,b,c)$ nuqtada bo‘lgan sharning ichki qismidan iborat bo‘ladi.

To‘plamning chegaralanganligi. 3-ta’rif. R^n fazoning V to‘plamning istalgan $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in V$ nuqtasi uchun shunday $A > 0$ son mavjud bo‘lib,

$$|x_1| \le A, \quad |x_2| \le A, ..., |x_n| \le A$$

munosabatlar bajarilsa, V to‘plamga ***chegaralangan to‘plam*** deyiladi. Masalan, n o‘lchovli fazoda istalgan nuqtaning r atrofi chegaralangan to‘plamdir.

To‘plamning ichki va chegaraviy nuqtalari. 4-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta V to‘plamga o‘zining biror r atrofi bilan kirsa, unga V ***to‘plamning ichki nuqtasi*** deyiladi .

5-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta o‘zining har bir atrofida V to‘plamga tegishli bo‘lgan hamda tegishli bo‘lmagan nuqtalar bilan kirsa, M_0 nuqtaga V to‘plamning ***chegaraviy nuqtasi*** deyiladi .

To‘plamning quyuqlanish nuqtasi. 6-ta’rif. M_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi V to‘plamning M_0 nuqtadan farqli cheksiz ko‘p nuqtalari (M_0 nuqtadan farqli)ni o‘z ichiga olsa, M_0 nuqta V to‘plamning ***quyuqlanish nuqtasi*** deyiladi. Quyuqlanish nuqtasi to‘plamning o‘ziga qarashli bo‘lishi ham, qarashli bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $V = [a, b]$ yoki $V = (a, b]$ bo‘lsa, ikkala holda ham a nuqta V uchun quyuqlanish nuqtasi bo‘ladi, lekin birinchi holda bu nuqta V to‘plamda yotadi, ikkinchi holda esa u V to‘plamda yotmaydi.

Yopiq va ochiq to‘plamlar. 7-ta’rif. V to‘plam o‘zining hamma quyuqlanish nuqtalarini o‘zida saqlasa, unga ***yopiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, $[a, b]$ *кесма* R^1 sonlar њљida, $\{M(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ R^2 doira tekislikda yopiq to‘plamlardir.

8-ta’rif. V to‘plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo‘lsa, bunday to‘plamga ***ochiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, (a, b) R^1da, $\{M(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ R^2da ochiq to‘plamlardir. R^n fazoda istalgan nuqtaning r atrofi ochiq to‘plamdir.

R^n fazoda chegaralangan yopiq to‘plamga ***kompakt*** deb ataladi.

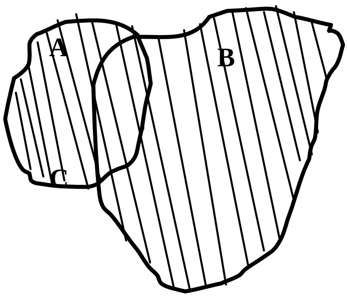
2. To‘plamlar ustida amallar. B to‘plamning har bir elementi A to‘plamning ham elementi bo‘lsa, B to‘plamga A to‘plamning ***qism to‘plami*** deyiladi va $B \subset A$ yoki $A \supset B$ bilan belgilanadi. $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi va $A = B$ bilan belgilanadi.

1) A va B ***to‘plamlarning birlashmasi*** **(yig‘indisi)** deb uchinchi bir C to‘plamga aytiladiki, bu to‘plamning istalgan elementi A yoki B to‘plamga,yoki ikkalasiga ham tegishli bo‘ladi va $A \cup B$ bilan belgilanadi, ya’ni

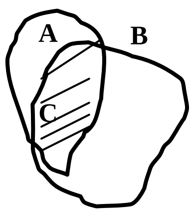
$C = A \cup B = \{x| \;\; x \in A \quad \text{ёки} \quad x \in B\}$ (1.4 -chizma).

2) A va B ***to‘plamlarning kesishmasi*** **(ko‘paytmasi)** deb, uchunchi bir C to‘plamga aytiladiki, uning har bir elementi A to‘plamga ham, B to‘plamga ham tegishli bo‘ladi va $A \cap B$ bilan belgilanadi, ya’ni $C = A \cap B = \{x| \;\; x \in A \quad \text{ва} \quad x \in B\}$ (5 -chizma).

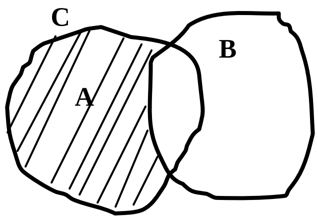
3) A to‘plamdan B to‘plamning **farqi (ayirmasi)** deb shunday uchinchi bir C to‘plamga aytiladiki, uning har bir elementi A ga tegishli bo‘lsa, B ga tegishli bo‘lmaydi, va uni $A / B = \{x| \quad x \in A \quad \text{ва} \quad x \notin B\}$ (6-chizma).



4-chizma



5-chizma



1.6-chizma

2-misol. $A = \{1, \; 2\}$ to‘plamning hamma qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgan B to‘plamni tuzing.

Yechish. Qism to‘plam ta’rifiga asosan,

$\varnothing \in A, \quad \{1\} \in A, \quad \{2\} \in A, \quad \{1, \; 2\} \in A$, Demak, $B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

3-misol. $A=(4,\ 8)$ va $B=(1,\ 4]$ bo‘lsa, ularning birlashmasini va kesishmasini toping.

Yechish. Birlashmaning ta’rifidan $A\cup B=(1,8)$ bњlib kesishmaning ta’rifidan $A\cap B=\varnothing$ bњladi.

4-misol. $A=(-3,\ 7]$ va $B[5,\ 6]$ bo‘lsa, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

Yechish. Ta’rifga asosan $A\cup B=(-3,\ 7],$ $A\cap B=[5,6]$ bњladi.

5- m i s o l. Ushbu

$A=\{1,2,3,4,5,6\},\quad B=\{2,4,6,8\},\ C=\{1,3\}$

to‘plamlarni qaraylik. Bu to‘plamlar uchun

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\},$$

$$A\cap B=\{2,4,6\},$$

$$A\backslash B=\{1,3,5\},$$

$$B\setminus A=\{8\},$$

$$A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\},$$

$$A\cap C=\{1,3\},$$

$$B\cap C=\varnothing,$$

$$B\times C=\{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,3)(8,1),(8,3)\}.$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ta’riflardan

$$E\cup E=E,\ \ E\cap E=E,\ \ E\setminus E=\varnothing,$$

shuningdek $E\subset F$ bo‘lganda

$$E\cup F=F,\ \ E\cap F=E$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Barcha 1, 2, 3, …., n, … - natural sonlardan iborat to‘plam natural sonlar to‘plami deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,...,\ n,...\}.$$

Barcha …, -2, -1, 0, 1, 2, … - butun sonlardan iborat to‘plam ***butun sonlar to‘plami*** deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z = \{\ldots, -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ 2, \ldots\}$$

Ravshanki,

$$N \subset Z$$

bo‘ladi.

3. To‘plamning quvvati. 1). Tartiblangan to‘plamlar haqida

Agar biror E to‘plamning elementlari uchun quyidagi tasdiqlar:

1) $n = m,\ \ n > m,\ \ n < m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli;

2) $n < m,\ m < p$ tengsizliklardan $n < p$ tengsizlik

o‘rinli bo‘lsa, E to‘plam tartiblangan to‘plam deyiladi.

Tartiblangan to‘plamlarga dastlabki misol, $N = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \ldots\}$ natural sonlar to‘plami bo‘ladi. Bundan tashqari butun, rasional, haqiqiy sonlar to‘plamlari ham tartiblangan to‘plamlarga misol bo‘laoladi.

2). To‘plamlarning ekvivalentligi

Ixtiyoriy ikkita E va F to‘plamlar berilgan holda, tabiiyki, ularning qaysi birining elementi «ko‘p» degan savol tug‘iladi. Natijada to‘plamlarni solishtirish (elementlar soni jihatidan solishtirish) masalasi yuzaga keladi. Odatda bu masala ikki usul bilan hal qilinadi:

1) to‘plamlarning elementlarini bevosita sanash bilan ularning elementlari soni solishtiriladi ;

2) biror qoidaga ko‘ra bir to‘plamning elementlariga ikkinchi to‘plamning elementlarini mos qo‘yish yo‘li bilan ularning elementlari solishtiriladi.

Masalan, $E = \{1,\ 2,\ 3\},\ F = \{1,\ 4,\ 9,\ 16\}$ to‘plamlarning elementlari sonini solishtirib, F to‘plamning elementlari soni E to‘plamning elementlari sonidan ko‘p ekanligini aniqlaymiz. Yoki, E to‘plamning har bir elementiga F to‘plamning bitta elementini

$$1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9$$

tarzda mos qo‘yib, F to‘plamda E to‘plam elementiga mos qo‘yilmay qolgan element borligini (u 16) hisobga olib, yana F ning elementlari soni E ning elementlari sonidan ko‘p degan xulosaga kelamiz. Agar to‘plamlar cheksiz bo‘lsa, ravshanki, ularni 1- usul bilan solishtirib bo‘lmaydi. Bunday vaziyatda faqat 2 - usul bilangina ish ko‘riladi. Masalan, $N=\{1,\ 2,\dots,\ \ n,\dots\}$ natural sonlar to‘plamining har bir n elementiga $(n=1,\ 2,\dots)$ juft sonlar to‘plami $N_1=\{2,\ \ 4,\dots,\ \ 2n,\dots\}$ ning $2n$ elementini $(n=1,\ \ 2,\dots)$ mos qo‘yish bilan $(n\to 2n)$ solishtirib, ularning elementlari soni «teng» degan xulosaga kelamiz.

1 – t a ‘ r i f. Agar E to‘plamning har bir a elementiga F to‘plamning bitta b elementi mos qo‘yilgan bo‘lib, bunda F to‘plamning har bir elementi uchun E to‘plamda unga mos keladigan bittagina element bor bo‘lsa, u holda E va F to‘plamlar elementlari orasida **o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan** deyiladi.

2 – t a ‘ r i f. Agar E va F to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ular bir-biriga **ekvivalent to‘plamlar** deb ataladi va

$$E\sim F$$

kabi belgilanadi.

6-misol. 1. Ushbu

$$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\qquad F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\right\}$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Uni quyidagicha

$$1\leftrightarrow 1,\qquad 2\leftrightarrow\frac{1}{2},\ \ 3\leftrightarrow\frac{1}{3},\ \ \ 4\leftrightarrow\frac{1}{4},\ \ \ 5\leftrightarrow\frac{1}{5},$$

o‘rnatish mumkin. Demak, $E\sim F$.

7-misol. Ushbu

$$E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\qquad F=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘lmaydi. Chunki bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lmaydi.

8-misol. Ushbu

$$E=N=\{1,\ 2,\ 3,\dots..,\ n\dots.\},\qquad F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots..\ \frac{1}{n}\dots.\right\},$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik har bir n ga $(n \in N)\frac{1}{n}$ ni $(\frac{1}{n} \in F)$ mos qo‘yish bilan o‘rnatiladi. Demak, $E \sim F$.

9-misol. Ushbu

$E = N = \{1,2,3,....n,,,,\}, \quad N_1 = \{2,4,6,....,2n,.....\}$

to‘plamlar o‘zaro ekvivalent bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatili moslikni quyidagicha o‘rnatish mumkin: har bir natural n $(n \in N)$ songa $2n$ son $(2n \in N_1)$ mos qo‘yiladi $n \leftrightarrow 2n$). Demak, $E = N \sim N_1$.

Ravshanki, $N_1 \subset N$. Bu esa to‘plamning qismi o‘ziga ekvivalent bo‘lishi mumkin ekanligini ko‘rsatadi. Bunday ḱolat faqat cheksiz to‘plamlargina xosdir.

Yuqorida keltirilgan ta’rif va misollardan ikki chekli to‘plamning o‘zaro ekvivalent bo‘lishi uchun ularning elementlari soni bir-biriga teng bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini ko‘ramiz.

Ekvivalentlik munosabati quyidagi xossalariga ega:

1) $E \sim E$ (refleksivlik xossasi) ;

2) $E \sim F$ bo‘lsa, $F \sim E$ bo‘ladi(simmetrik xossasi) ;

3) $E \sim F$, $F \sim G$ bo‘ladi (tranzitivlik xossasi).

To‘plamlarning ekvivalentlik tushunchasi to‘plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi.

Masalan,

$$N_1 = \{2,4,6,....,2n,...\},$$
$$N_2 = \{1,3,5,...2n-1,...\},$$
$$N_3 = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$$

to‘plamlar sanoqli to‘plamlardir, chunki

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_3 \sim N \; (\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1,2,3,....).$$

3). To‘plamning quvvati. To‘plamning quvvati, to‘plam “elementlarining soni” tushunchasining ixtiyoriy (chekli va cheksiz) to‘plamlar uchun umumlashtirilganidir. To‘plamning quvvati berilgan to‘plamga ekvivalent bo‘lgan barcha to‘plamlarga, ya’ni elementlari berilgan to‘plamning elementlari bilan o‘zaro bir qiymatli moslikda bo‘la oladigan barcha to‘plamlarga umumiy bo‘lgan narsa sifatida aniqlanadi.

To‘plam quvvati tushunchasini matematikaga to‘plamlar nazariyasining asoschisi nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) kiritgan (1879 yilda). Kantor cheksiz to‘plamlar uchun ***har xil quvvatlar*** mavjudligini isbotlagan.

3-ta’rif. Natural sonlar qatoriga ekvivalent bo‘lgan to‘plam, ya’ni hamma elementlarini natural sonlar bilan raqamlab (belgilab) chiqish mumkin bo‘lgan to‘plamga ***sanoqli to‘plam*** deyiladi. Masalan,

$$N_1 = \{2,4,6,....,2n,...\},$$
$$N_2 = \{1,3,5,...2n-1,...\},$$
$$N_3 = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$$

to‘plamlar sanoqli to‘plamlardir, chunki

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_3 \sim N \quad (\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1,2,3,....).$$

Sanoqli to‘plamning quvvati cheksiz to‘plamlar quvvati orasida eng kichigi bo‘lib hisoblanadi.

Sanoqli bo‘lmagan to‘plam sanoqsiz to‘plam deb ataladi.

$0 \le x \le 1$ kesmadagi sonlarning L to‘plamining quvvati nomi ***kontinuum*** deyiladi. L ni natural sonlar to‘plamiga o‘zaro bir qiymatli akslantirish mumkin emas. **“Kontinuum matematikasi”** termini uzluksizlik tushunchasi bilan bog‘liq bo‘lgan nazariyalarda qo‘llanilib, u diskret matematikaga qarama-qarshi qo‘yiladi. Kontinuum quvvat sanoqli to‘plam quvvatidan katta. Bir necha o‘n yil muqaddam sanoqli to‘plam quvvatidan katta va kontinuum quvvatdan kichik bo‘lgan to‘plam mavjudmi? degan muammo qo‘yilgan.

Matematik belgilar haqida . Matematikada tez-tez uchraydigan so‘z va so‘z birikmalari o‘rniga maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan eng muhimlarini keltiramiz:

1) «Agar …. bo‘lsa, u holda ….. bo‘ladi» iborasi «$\Rightarrow$» belgisi orqali yoziladi;

2) ikki iboraning ekvivalentligi ushbu «$\Leftrightarrow$» belgisi orqali yoziladi;

3) «Har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so‘zlari o‘rniga «$\forall$» umumiylik belgisi ishlabitadi;

4) «Mavjudki», «topiladiki» so‘zlari o‘rniga «$\exists$» mavjudlik belgisi ishlatiladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

To‘plam, chekli va cheksiz to‘plamlar, qavariq to‘plam, nuqtaning atrofi, chegaralangan to‘plam, to‘plamning ichki nuqtasi, chegaraviy nuqta, quyuqlanish nuqtasi, yopiq va ochiq to‘plamlar, to‘plamlarning birlashmasi, to‘plamlar kesishmasi,to‘plamlarning farqi, to‘plamlarning ekvivalentligi, kompakt, to‘plamning quvvati.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chekli va cheksiz to‘plamlar qanday to‘plamlar?
2. Qavariq to‘plam qanday to‘plam?
3. Nuqtaning atrofi deb nimaga aytiladi?
4. To‘plamning ichki nuqtasi nima?
5. To‘plamning chegaraviy nuqtasi qanday bo‘ladi?
6. Ochiq to‘plam deb nimaga aytiladi?
7. Yopiq to‘plam deb qanday to‘plamga aytiladi?
8. Ochiq va yopiq to‘plamlar qanday xossalarga ega?
9. Qanday to‘plamga chegaralangan deyiladi?
10. To‘plamning quyuqlanish nuqtasi deb nimaga aytiladi?
11. Qism to‘plam deb qanday to‘plamga aytiladi?
12. Qanday to‘plamlar teng deyiladi?
13. Birlashma (yig‘indi) to‘plam qanday to‘plam?
14. To‘plamlarning kesishmasi nima va u qanday belgilanadi?

15. To‘plamlarning farqi (ayirmasi) nima?

16. O‘zaro bir qiymatli moslik nima?

17. To‘plamlarning ekvivalentligi qanday bo‘ladi?

18. To‘plamning quvvati nima?

19. Sanoqli to‘plam deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. N natural sonlar to‘plami va Z butun sonlar to‘plami birlashmasini toping.

2. G rasional sonlar to‘plami, R haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa, $G \cap R$ ni toping.

3. Rasional va irrasional sonlar to‘plami birlashmasini toping.

4. A to‘g‘ri to‘rtburchaklar to‘plami, B romblar to‘plami bo‘lsa, $A \cap B$ ni toping.

5. A juft sonlar to‘plami Z butun sonlar to‘plami bo‘lsa, ularning kesishmasini toping.

6. A juft sonlar to‘plami B toq sonlar to‘plami bo‘lsa, A va B larning kesishmasini toping.

7. $\{0;\ 1,2\}$ bo‘lsa hamma qism to‘plamlar to‘plamini toping.

8. A juft sonlar to‘plami, B toq sonlar to‘plami, C tub sonlar to‘plami bo‘lsa, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$ toping.

9. $\{1,2,4,6,9\}$, $B = \{3,4,5,8,10\}$ bo‘lsa $A \setminus B$ va $B \setminus A$ larni toping.

10. toping. G rasional sonlar to‘plami, R haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa $G \setminus R$ ni toping.

3.2-§. Sonli ketma-ketliklar

1. Sonli ketma-ketlik ta’rifi va umumiy tushunchalar

1-ta’rif. Natural sonlar qatoridagi

1,2,3, …, n, ...

har bir n songa haqiqiy x_n son mos qo‘yilgan bo‘lsa,

$$x_{1,} x_2 , \ldots , x_n , \ldots \qquad (1)$$

(1) haqiqiy sonlar to‘plamiga sonli ketma-ketlik yoki qisqacha ketma-ketlik deyiladi.

$x_{1,} x_2 , \ldots , x_n , \ldots$ sonlarga sonli ketma-ketlikning hadlari deyilib, x_n ga ketma – ketlikning umumiy hadi yoki n – hadi deb ataladi, (1) sonli ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ simvol bilan belgilanadi. Masalan, 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots.$$

bo‘ladi;

2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ sonlar ketma-ketligi $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots.$

bo‘ladi.

Sonli ketma-ketlikning umumiy hadini olish usuli ko‘rsatilgan bo‘lsa, u berilgan deyiladi. Misol uchun, 1) $x_n = 2 + (-1)^n$ bo‘lsa, u 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ... ;

3) $\frac{2}{3}$ kasrni o‘nli kasrga aylantirganda verguldan keyin bitta, ikkita, uchta va hokazo raqamlarni olib,

$$x_1 = 0,6,\ x_2 = 0,66,\quad x_3 = 0,666, \ldots$$

sonlar ketma-ketligini olish mumkin;

4) $a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d, \ldots,\ a_1 + (n-1)d,\ \ldots$

arifmetik progressiya ham sonli ketma-ketlikdir, bunda a_1 birinchi had, d arifmetik progressiya ayirmasi;

5) $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \ldots, b_1 q^{n-1}, \ldots$

sonlar ketma-ketligi ham ketma-ketlikka misol bo‘ladi, bu birinchi hadi b_1 maxraji q bo‘lgan geometrik progressiyadir.

Sonli ketma-ketlikning ta’rifidan ma’lumki, u cheksiz sondagi elementlarga ega bo‘lib, ular hyech bo‘lmaganda o‘zlarining tartib raqami bilan farq qiladi.

Sonlar ketma-ketligining geometrik tasviri sonlar o‘qidagi nuqtalar bilan ifodalanadi.

Sonli ketma-ketliklar ustida ushbu arifmetik amallarini bajarish mumkin: 1) $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini songa ko‘paytirish,

$$m x_1,\ m x_2,\ m x_3, ..., m x_n, ...$$

ko‘rinishda bo‘ladi;

2) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining yig‘indisi

$$x_1 + y_1,\ \ x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...;$$

ko‘rinishda aniqlanadi;

3) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketiligini ayirmasi

$$x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, ..., x_n - y_n, ...$$

ko‘rinishda bo‘ladi;

4) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi ko‘paytmasi

$$x_1 \cdot y_1,\ \ x_2 \cdot y_2, ..., x_n \cdot y_n, ...;$$

kabi aniqlanadi;

5) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining nisbati, maxraj 0 dan farqli bo‘lganda,

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...$$

ko‘rinishda bo‘ladi hamda mos ravishda $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ simvollar bilan belgilanadi.

2. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar. 1-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma – ketligi uchun shunday M (m son) son mavjud bo‘lib, ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $x_n \le M$ ($x_n \ge m$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

2-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi quyidan va yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, ya’ni shunday m va M sonlar mavjud bo‘lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $m \le x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

3-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi uchun shunday A musbat son mavjud bo‘lib, x_n element mavjud bo‘lib, $|x_n| > A$ (ya’ni $x_n > A$ yoki $x_n < -A$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan deyiladi.

Yuqoridagi ta’riflardan kelib chiqadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning hamma elementlari $(-\infty,\ M]$ oraliqqa tegishli, $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo‘lsa, uning hamma elementlari $[m,\ +\infty)$ oraliqqa tegishli, yuqoridan va quyidan chegaralangan bo‘lsa, $[m,\ M]$ oraliqqa tegishli bo‘ladi.

Misollar:

1) 1, 2, 3, ..., n, ... sonlar ketma-ketligi quyidan chegaralangan, lekin yuqoridan chegaralangan;

2) -1, -2, -3, ..., -n, ... sonlar ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan;

3) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan, chunki uning hamma elementlari uchun $0 \le x_n \le 1$ tengsizlik bajariladi, bunda $m = 0$ $M = 1$ bo‘ladi;

4) -1, 2, -3, 4, -5, ..., $-(-1)^n n, ...$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan, chunki qanday A son olmaylikki, bu ketma-ketlik ichida $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi elementlari mavjud bo‘ladi.

3.Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari

1-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi istalgan A son uchun, shunday N raqam mavjud bo‘lib, hamma $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

$\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘ladi.

2-ta’rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N raqam mavjud bo‘lib,

$n > N$ lar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Misollar:

1) natural sonlar ketma-ketligi $\{n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikdir;

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz kichikdir, haqiqatan ham, istalgan $\varepsilon > 0$ son olsak, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo‘lib, N uchun $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ butun qismi) olib, hamma $n > N$ lar uchun $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. 2-ta’rifga asosan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasida ushbu bog‘liqlik bor.

1-teorema. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik va uning hamma elementlari 0 dan farqli bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik va aksincha $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $\alpha_n \neq 0$ bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olib, $A = \frac{1}{\varepsilon}$ deylik. 1-ta’rifdan shu A son uchun shunday N raqam mavjudki, $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ bo‘ladi. Bundan hamma $n > N$ uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi. (Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilishni o‘quvchiga havola etamiz).

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

2-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig‘indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. Bu cheksiz kichik ketmk-ketliklar uchun, istalgan ε son uchun N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$lar uchun, $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik, N_2 raqam topiladiki, $n > N_2$ Lar uchun $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ desak, $n > N$ lar uchun birdaniga $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. Shunday qilib,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bњladi.

Bu $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi.

Natija. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichiklarning algebraik yig‘indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

3-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ lar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini isbotlash talab etiladi. $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik bo‘lganligi uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun $|\alpha_n| < \varepsilon$, $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lganligi uchun $\varepsilon = 1$ uchun shunday N_2 topiladiki $n > N_2$ lar uchun $|\beta_n| < 1$, bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ deb olsak, $n > N$ lar uchun ikkala tengsizlik ham bajarilib,

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \le |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

bo‘ladi. Bu $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi.

Natija. Istalgan sondagi cheksiz kichiklarning ko‘paytmasi yana cheksiz kichik bo‘ladi.

Eslatma. Ikkita cheksiz kichiklarning nisbati cheksiz kichik bo‘lmasligi mumkin, masalan, $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n}$ cheksiz kichiklarning nisbati hamma elementlari 1 lardan iborat chegaralanlan ketma-ketlikdir. $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n^2}$ cheksiz kichik ketma-ketliklarning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}=\{n\}$ bo‘lib, cheksiz katta ketma-ketlik hosil bo‘ladi.

$\alpha_n=\frac{1}{n^2}$, $\beta_n=\frac{1}{n}$ bo‘lsa, ularning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik bo‘ladi.

4-teorema. Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. (Bu teoremaning isbotini o‘quvchiga havola qilamiz).

4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari

1-ta’rif. Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun unga bog‘liq bo‘lgan N son topilsaki, barcha $n>N$ lar uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n\to\infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \textit{ёки} \quad n\to\infty \ \textit{да} \ x_n\to a$$

simvollar bilan belgilanadi. Chekli limitga ega sonli sonli ketma-ketlikka, yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Limitning ta’rifiga misol qaraymiz.

Limitning ta’rifidan foydalanib,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Istalgan $\varepsilon>0$ son olamiz.

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$$

bo‘lganligi uchun, $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n larning qiymatini topish, $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ tengsizlik bilan bog‘liq va $1<\varepsilon(n+1)$ *ёки* $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ bo‘ladi. Shuning uchun N sifatida $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ sonning butun qismini olish mumkin, ya’ni $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$bЊladi. Bu holda $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlik hamma $n>N$ lar uchun bajariladi. Masalan, $\varepsilon=0{,}1$ bo‘lsin, bu holda

$$N=\left[\frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right]=\left[\frac{0{,}9}{0{,}1}\right]=9. \quad n=10>N=9$$

bo‘lsin. Bunda

$$x_{10}=\frac{10}{10+1}=\frac{10}{11}$$

bo‘lib,

$$|x_{10}-1|=\left|\frac{10}{11}-1\right|=\frac{1}{11}<\varepsilon=0{,}1.$$

Shunday qilib n=10 dan boshlab, hamma n lar uchun $|x_{10}-1|<0{,}1$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Boshqa bir necha $\varepsilon>0$ lar olib, qaysi raqamlardan boshlab, tengsizlikning bajarilishini ko‘rsatishni o‘quvchiga havola etamiz.

Eslatma 1. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi biror a limitga ega bo‘lsa, uni $\alpha_n=x_n-a$ cheksiz kichik miqdor ko‘rinishida ifodalash mumkin, chunki $\varepsilon>0$ son uchun shunday N topiladiki, $n>N$ lar uchun

$$|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun a limitga ega bo‘lgan $\{x_n\}$sonlar ketma-ketligini

$$x_n-a=\alpha_n$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda α_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

2-ta’rif. $\varepsilon>0$ biror musbat son bo‘lsin. $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik hamma n lar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi a nuqtaning ε atrofida deyiladi.

2-eslatma. Ma’lumki $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizligi

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \text{ yoki } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

tengsizlik bilan teng kuchli bo‘lib, x_n element a nuqtaning ε atrofida bo‘ladi. Shuning uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ham ta’riflash mumkin:-

a nuqtaning ε atrofi uchun shunday N raqamni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, hamma $n > N$ lardan boshlab, hamma x_n elementlar a nuqtaning ε atrofida bo‘lsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

3-eslatma. Ma’lumki cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega emas yoki uni cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

bilan belgilanadi. Ketma-ketlikning limitini cheksiz limitdan farq qilishi uchun chekli limit ham deb yuritiladi.

Eslatma. Tushunarliki, har bir cheksiz kichik ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a = 0$ ga teng.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega

1.Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

Eslatma. Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lmasligi mumkin. Masalan,

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

ketma-ketlik, chegaralangan, lekin limitga ega emas.

3. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning algebraik yig‘indisi ham yaqinlashuvchi bo‘lib, $a \pm b$ limitga ega bo‘ladi.

4. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi ham yaqinlashuvchi bo‘lib, limiti $a \cdot b$ ga teng bo‘ladi.

5. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning nisbati ham maxrajning limiti noldan farqli bo‘lganda, yaqinlashuvchi bo‘lib, uning limiti $\frac{a}{b}$ ga teng bo‘ladi.

Bu xossalarni, ketma-ketlikning limiti va cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalaridan foydalanib isbotlash mumkin. Masalan, 4-xossani isbotlaylik. Ketma-ketliklar yaqilashuvchi bo‘lganligi uchun

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

ko‘rinishda ifodalanadi, bunda α_n, β_n lar cheksiz kichik ketma-ketliklar. Bu holda

$$x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

bo‘ladi. $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ ifoda cheksiz kichik ketma-ketlikning xossalariga asosan cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Demak $x_n y_n - ab$ ham cheksiz kichikdir, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = 0 \quad \text{ёки} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$$

bo‘ladi.

1-misol. Ushbu limitni hisoblang.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5}$$

Yechish. $n \to \infty$ surat ham maxraj ham cheksiz katta bo‘lib, nisbatning limiti haqidagi xossani qullash mumkin emas, chunki bu xossada surat va maxrajning limiti mavjud bo‘lishi kerak edi. Shuning uchun, bu ketma-ketliklarni n^2 ga bo‘lib, shaklini o‘zgartiramiz hamda limitlarning xossalarini qo‘llab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4 - \frac{5}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}.$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Sonli ketma-ketlik, umumiy had, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, quyidan chegaralangan, cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar, ketma-ketlikning limiti, yaqinlashuvchi ketma – ketlik, nuqtaning atrofi, cheksiz limit, chekli limit.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
3. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
4. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
5. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo‘ladimi?
6. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?
7. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo‘ladi?
8. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
9. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
10. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
11. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
12. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
13. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
14. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
16. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta’riflanadi?
17. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?
18. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog‘lanish bor?
19. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?
20. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?
21. Qanday sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi deyiladi?
22. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni yig‘indi ko‘rinishda qanday ifodalash mumkin?
23. Nuqtaning atrofi nima?
24. Cheksiz katta sonlar ketma-ketlikning limiti nimaga teng?
25. Chekli limit deganda nima tushuniladi?
26. Cheksiz kichik sonlar ketma-ketligining limiti nimaga teng?
27. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qanday xossalarga ega?
28. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari qanday isbotlanadi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$x_n=\frac{1}{3n},\ x_n=\frac{n}{5n-1},\quad x_n=\frac{1}{4n-1},\ x_n=3n$$

sonli ketma-ketliklarning n=1,2,3,4,5, bo‘lgandagi qiymatlarini yozing?

2. $x_n=\dfrac{n}{n+2}$ sonli ketma-ketlikning chegaralanganligini ko‘rsating.

3. $x_n=\dfrac{3}{n},\ x_n=\dfrac{3(-1)^n}{2n},\ x_n=3+(-1)^n$ sonlar ketma-ketligining geometrik tasvirini n=1,2,3,4,5,6 bo‘lganda ko‘rsating.

4. Bir necha arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy (n-hadi)ni yozing va n=1,2,3,4,5,6 bo‘lgandagi qiymatlarini yozing.

5. Ushbu

$$x_n=3n,\quad x_n=-5n+1,\quad x_n=\frac{1}{y_n+1},\quad x_n=(-1)^n 3n$$

sonlar ketma-ketliklari chegaralanganmi va qanday?

6. Bir necha cheksiz katta va cheksiz kichik sonlar ketma-ketliklarini yozing.

7. Ushbu tengliklar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$$

ning to‘g‘riligini sonli ketma-ketlikning limiti, ta’rifidan foydalanib, isbotlang va har biri uchun $\varepsilon>0$ ni aniqlab qanday raqamdan boshlab tengsizlikning bajarilishini ko‘rsating?

8. Ushbu sonlar ketma-ketliklarining limitlarga ega ekanligi yoki ega emasligi va u nimaga tengligini ko‘rsating?

$$1)\ x_n=\frac{n}{3n+1},\ 2)\ x_n=\frac{5n-1}{2n},\ 3)\ x_n=\frac{(-1)^n n}{4n+1},4)\ x_n=\frac{3n+1}{n^2},$$

$$5)\ x_n=\frac{n}{4n-3},6)\ x_n=\frac{(-1)^n n}{3n-1},7)\ x_n=\frac{3n^2}{n+1},\ 8)\ x_n=\frac{2n+5}{n^3}.$$

3.3-§. Funksiya haqida asosiy tushunchalar

1. O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar. Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sondan iborat bo‘ladi. Bu holda nisbat o‘zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o‘zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Hamma o‘zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o‘rganib bo‘lmaydi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni qaraymiz.

2. Funksiya tushunchasi. ***Funksiya tushunchasi*** matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko‘p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo‘lgan to‘plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $x \in X$ to‘plamda, $y \in Y$ to‘plamda o‘zgarsin.

Ta’rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo‘yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo‘yilsa, X to‘plamda ***funksiya berilgan*** **(aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to‘plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi,** Y to‘plamga o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to‘plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga **erkli o‘zgaruvchi** yoki **argument,** y ga esa **erksiz o‘zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) f $X=(-\infty,\ +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y=x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty,\ +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x\in[0,\ +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y=\sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0,\ +\infty)$bo‘ladi.

1-misol. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping. Yechish. Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3\geq 0,$$
$$4-x>0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\geq 3$, $x<4$bњlib, ya’ni $3\leq x<4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,\ 4)$ bo‘ladi.

3. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta’rifida keltirilgan x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo‘yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo‘lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya ***analitik*, *jadval* va *grafik* hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaing ***analitik usul*** bilan berilishida, x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) њzgaruvchilar orasidagi bog‘lanish **jadval** ko‘rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1, P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo‘lishini topganda qo‘yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	$\cdots$	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	$\cdots$	t_n

Bundan ko‘rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog‘lanish bo‘lib, P argument, t funksiya bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishiga ***jadval usulda*** berilgan deyiladi. Bunday usul ko‘proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning ***grafik usulida*** berilishida, x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to‘plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekis-likda l chiziq berilgan bo‘lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o‘tadi. A nuqtadan OY o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo‘ladi. Ma’lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **grafik usulda berilgan** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo‘lgan hollarda va funksiyaning sifat o‘zgarishi grafik usulda yaxshi ko‘rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) *algoritmik yoki kompyuter usuli.* Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo‘ladi. Bunday programma EHMga qo‘yilgan bo‘lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

4. Funksiyaning ayrim hollari

1. Oshkor va oshkormas funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko‘rinishda, ya’ni y ga nisbatan yechilgan bo‘lsa, unga ***oshkor funksiya*** deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni y ga nisbatan yechilmagan bo‘lsa, ***oshkormas funksiya*** ko‘rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5,\quad y = \sin x,\quad y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko‘rinishda; $2x - 3y + 6 = 0,\qquad x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko‘rinishda berilgan. Shuni ta’kidlaymizki hamma $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning ќаљіљіy son qiymatini mos qo‘yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo‘lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo‘lib. y x ning murakkab funksiyasi bo‘ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1),\quad y = 3^{x+5},\quad y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo‘laoladi.

3. ***Teskari funksiya.*** $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. y funksiyaning qiymatlar to‘plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, berilgan funksiyaga ***teskari*** $x = d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo‘ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo‘lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ bo‘ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi. O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

5. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1. 1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad yo\kappa i \quad x \to a \quad da \quad f(x) \to A \text{ bo‘ladi.} \qquad (1)$$

Funksiya limitining ta’rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo‘lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo‘ladi.

2-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo‘lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o‘zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \qquad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta’rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo‘lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***chap yoki o‘ng limit*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \to a-0} f(x), \quad \lim_{x \to a+0} f(x) \qquad (3)$$

bilan begilanadi.

3-ta’rif. Limiti $A = 0$ bo‘lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta’rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo‘lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (4)$$

simvollar bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o‘zgarmas miqdorning limiti o‘ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) ***yig'indining limiti.*** Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \to a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar *ko'paytmasining limiti* funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (6)$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right] = c\lim_{x\to a} f_1(x) \qquad (7)$$

3) Ikkita funksiya *nisbatining limiti,* maxrajning limiti nьldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$

bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} \qquad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad e = 2{,}71828... \qquad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va** ***ikkinchi*** **ajoyib** limitlar deyiladi.

6. Aniqmasliklar va ularni ochish

1.Aniqmasliklar. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \to a$ da **(0/0) ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$

nisbatga $x \to a$ da (∞/∞) ***ko‘rinishidagi aniqmaslik*** *deyiladi*. Xuddi shunga o‘xshash $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)-\varphi(x)\right],\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] \quad \textit{ва} \quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o‘zaro teng bo‘lsa, ularning $x\to a$ dagi limiti ham teng bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x)=\dfrac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

natijaga ega bњlamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x}=\frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta’rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x)=(5x+6)/6x$ o‘zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o‘zgarmas miqdor orasidagi farq $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{5x+6-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}$$

$1/x$ o‘zgaruvchi miqdor $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x \to \infty} (5x+6)/6x = 5/6..$$

2-misol.

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2 - 5x + 4)$larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x \to 3$ bo‘lganligi uchun $x - 3 = \alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x = 3 + \alpha$ ni $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ ayirmaga qo‘yib,

$$2(3+\alpha)^2 - 5(3+\alpha) + 4 - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 =$$
$$= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$$

natijaga ega bњlamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun $2\alpha^2 + 7\alpha$ ham cheksiz kichik bo‘ladi.

Shunday qilib, $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$ isbot bo‘ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2 - 5x + 4$funksiya qiymatlari jadvali bilan ko‘rsataylik. Ma’lumki $x \to 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya’ni $x - 3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2 - 5x + 4 - 7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to‘g‘ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x < 3$ bo‘lib, $x \to 3$ holni qaradik. $x > 3$ bo‘lib, $x \to 3$ holni o‘quvchiga mustaqil ko‘rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim_{x \to 2} (4x^2 - 6x + 3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig‘indining limiti, (3.5) formula, o‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (73.) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim_{x\to 2}\lim 3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$
$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bњladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o‘rniga uning limitik qiymatini qo‘yishga olib keldi.

4-misol.

$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (3.8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo‘llasak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$$
$$=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-4\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)+7}{2\left(\lim\limits_{x\to 1}\right)^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2$$

bo‘ladi.

Rasional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x\to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo‘ladi. Masalan,

$$\lim_{t\to 1}\left[\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right]=\lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8}=\lg 10+3=1+3=4.$$

5-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko‘rinish-dagi aniqmaslik hosil bo‘ladi.

Surat va maxrajni $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ formula yordamida chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2+ba+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3$$

bњladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo‘lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya’ni x^2 ga bo‘lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)} = \frac{6+0+0}{3+0+0} = 2$$

bo‘ladi. Bunda $5/x,\ 4/x^2\ \ 7/x,\ 2/x^2$ lar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo‘ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irrasional ifoda mavjud, uni suratga o‘tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1}+2$ ga ko‘paytiramiz.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2}-2^2} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} =$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot 4=24.$$

8-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ bo‘lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} =-\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2} =-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ bo‘ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x \to \infty$ da limitga o‘tsak, 1^{∞} ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x = \alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x = 3/\alpha$ hamda $x \to \infty$ da $\alpha \to 0$ bo‘ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^{x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{3} = e^{3}$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^{x} = e^{3}$.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^{2}-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x \to 1$da $1/(x-1) \to \infty$ va $2/(x^{2}-1) \to \infty$ bo‘lib, $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Oydinki,

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^{2}-1}=\frac{x+1-2}{x^{2}-1}=\frac{x-1}{x^{2}-1}.$$

Oxirgi ifoda $x \to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^{2}-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{2}+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \to +\infty$ da $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^{2}+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^{2}+3x}-x)(\sqrt{x^{2}+3x}+x)}{\sqrt{x^{2}+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^{2}+3x})^{2}-x^{2}}{\sqrt{x^{2}+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^{2}+3x-x^{2}}{\sqrt{x^{2}+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^{2}+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x \to \infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

bunda $x\to+\infty$ da $3/x\to 0$ bo‘ladi.

Tayanch iboralar va tushunchalar

O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiya tushunchasi, funksiya aniqlanish sohasi, qiymatlar to‘plami, analitik usul, grafik usul, jadval usul, oshkor va oshkormas funksiyalar, funksiyaning algoritmik berilishi, murakkab funksiya, teskari funksiya, funksiya limiti va uning xossalari, ketma-ketlik, cheksiz katta miqdor, chap va o‘ng limitlar, cheksiz kichik funksiya, ko‘paytmaning va bo‘linmaning limiti, birinchi ajoyib limit, aniqmasliklarni ochish,

Mustahkamlash uchun savollar

1.. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog‘lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to‘plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?
7. Funksiya qanday o‘zgaruvchi?
8. Argument qanday o‘zgaruvchi?
9. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
10. Oshkor va oshkormas funksiyalar qanday?
11.Funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deb nimaga aytiladi?
12. Teskari funksiya qanday funksiya?
13. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?
14. Chap va o‘ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
15. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
16. Ikki funksiya algebraik yig‘indisining limiti nimaga teng?
17. Chekli sondagi funksiyalar ko‘paytmasining limiti nimaga teng?
18. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
19. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?
20. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
21. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
22. Aniqmasliklarni ochish nimadan iborat?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan:1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(2a)$ larni hisoblang.

2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to‘plamini toping:

1) $f(x)=\ln(x+3)$; 2) $f(x)=\sqrt{5-2x}$; 3) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x)=(a+x)/(a-x)$;

3) $f(x)=\lg(5x-x^2-6)$; 4) $f(x)=2^{\arccos(1-x)}$.

4. Hajmi $v=1$ birlikka teng bo‘lgan silindr asosining radiusi r va balandligi h orasidagi funksional bog‘lanishni toping.

5. 1) $f(u)=1-u,\ u=x^2$; 2) $f(u)=1/(1-u),\ \ u(x)=x-1/x$;

3) $f(u)=u^2,\ \ u(x)=4x$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$; 2) $f(x)=2x+3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 3) $f(x)=(x-1)^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1,\ x\in(-\infty,0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

1) $y=\dfrac{1}{x}$; 2) $y=-\dfrac{3}{x}$; 3) $y=2-\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\dfrac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x}=\dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to-1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to2}(3x^2)-4x+6=10$

ekanligini funksiya limiti ta’rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar kiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

9. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalaridan foydalanib hisoblang:.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

10. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

11. Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

12. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin 1/x$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n)^n$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-5/n)^n$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/3n)^n$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n/(n+1)]^n$.

13. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

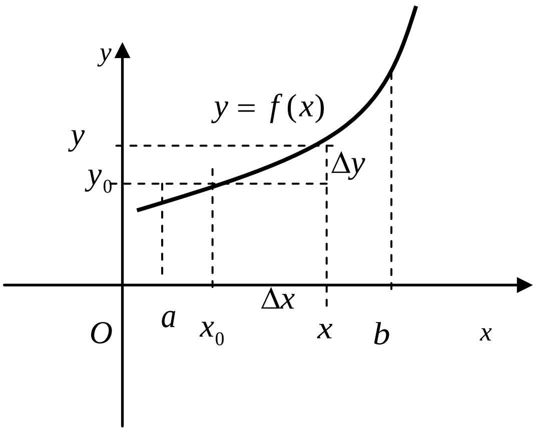
3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

3.4-§. Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi

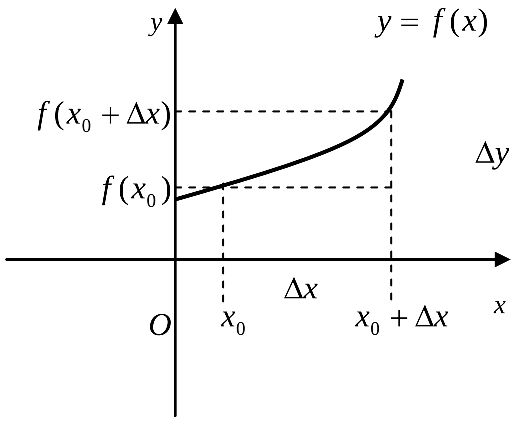
1. Funksiya orttirmasi. *Uzluksizlik* matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Matematika uzluksiz funksiya tushunchasiga birinchi navbatda turli harakat qonunlarini o‘rganish natijasida keldi. Fazo va vaqt uzluksiz, masalan: harakatdagi nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li s ning t vaqtga bog‘lanishini ifodalovchi $s=f(t)$ qonun uzluksiz funksiyaga misol bo‘ladi. Qattiq jismlar, suyuqlik va gazlardagi holatlar hamda jarayonlar uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi. Bunday uzluksiz jarayonlar iqtisodiyot modellarida ham mavjud. Bunday jarayonlar mexanika fizika va bir qancha maxsus fanlarda muayyan holda o‘rganiladi.

Matematikada uzluksiz jarayonni umumiy holda o‘rganamiz.

Funksiya orttirmasi. $y=f(x)$ funksiya biror $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo‘lsin. x argumentning keyingi qiymati bo‘lsa, $x-x_0=\Delta x$ ga ***argument orttirmasi*** deyiladi (1-chizma).



4.1-chizma



4.2-chizma

$f(x)-f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ yoki $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

1-chizmadan ko‘rinadiki $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$ bo‘ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada argument $\Delta x = 0,5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yechish. $f(x_0) = 2^3 = 8$ funksiyaning boshlang‘ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0,5) = (2 + 0,5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0,5)^3 - 2^3 =$$
$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 2 \cdot 0,5^2 + 0,5^3 - 8 = 7,625$$

bњladi.

Shunday qilib, $\Delta y = 7,625$.

2. **Funksiya uzluksizligi ta’riflari.** 1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz deyiladi*** (2-chizma). Bu ta’rifga qo‘yidagi ta’rif ham teng kuchlidir.

2-ta’rif. x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari quyidagi ***shartlarni*** o‘z ichiga oladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlari

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

mavjud;

3) x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

4) chap va o‘ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, $y = x^3$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada va uning istalgan atrofida aniqlangan. Uzluksizlikni 1-ta’rifga asosan tekshiramiz. Buning uchun $x_0 = 2$ nuqtadagi funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 =$$
$$2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3\cdot 2\cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

argument orttirmasi $\Delta x \to 0$ ga intilganda limitga o‘tamiz.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(12\cdot \Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12\cdot 0 + 6\cdot 0^2 + 0^3 = 0 .$$

Shunday qilib, $\Delta x \to 0$ da $x_0 = 2$ nuqtada $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, bu esa 1-ta’rifga asosan funksiya uzluksiz ekanligini bildiradi. Bu misolda x_0 nuqta o‘rniga ixtiyoriy nuqtani olish mumkin(masalan, $x_0 = 3$ uchun uzluksizlikni tekshiring).

Funksiya oraliqning hamma nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u shu **oraliqda** uzluksiz deyiladi.

2-misolda $y = x^3$ funksiya $(-\infty, \ +\infty)$ oraliqning hamma nuqtalarida uzluksizligi ravshan. Demak, $y = x^3$ funksiya $(-\infty, \ +\infty)$ oraliqda uzluksiz funksiyadir.

Elementar funksiyalarning hammasi o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x)\cdot \varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ $(\varphi(x_0) \neq 0$ bo‘lganda) lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo‘ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o‘z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo‘lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo‘lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u ham uzluksizdir.

3. Funksiyaning uzilish va uning turlari

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o‘zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi.**

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo‘lsa, chap va o‘ng limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o‘zaro teng bo‘lmasa, x_0 nuqta ***1-tur uzilish*** *nuqtasi* deyiladi.

Xususan, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ bo‘lsa x_0 ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo‘lmagan uzilish nuqtalariga ***2-tur uzilish nuqtalari*** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo‘lmaydi.

1-misol. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta’rifidan $x - 2 < 0$ yoki $x < 2$ va $x - 2 > 0$ yoki $x > 2$ bњlganda mos ravishda

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1.$

Shunday qilib, $x_0 = 2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo‘qotib) bo‘lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

2-misol. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0 = 0$ nuqtada aniqlanmagan, lekin $x \neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0 = 0$ nuqta ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi bo‘ladi.

3-misol. $f(x) = 6/(x-3)^2$ funksiyaning $x = 3$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko‘rsating:

Yechish. Berilgan funksiya $x = 3$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. $x < 3$ bo‘lganda $f(x) > 0$ va $x > 3$ bo‘lganda ham $f(x) > 0$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = +\infty \qquad \text{va} \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty.$$

Bu 2-tur uzilishdir .

4. Iqtisodiyotda qo‘llaniladiga ayrim asosiy funksiyalar

1. **Chiziqli funksiya.** Ma’lumki, $y = ax + b$ (1)

formula bilan aniqlangan funksiyaga chiziqli funksiya deyiladi. Bu burchak koeffisiyenti $k = a$, boshlang‘ich ordinatasi b bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidir.

1-misol. Biror korxonada ishlab chiqarilayotgan bir xil mahsulot xarajatini ikki guruh:

1) mahsulot hajmiga, proporsional o‘zgaruvchi xarajat, masalan, materiallar sarfi;

2) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas xarajatlar, masalan, ma’muriyat binosi ijarasiga, uni isitishga ketadigan va boshqa xarajatlar deb qarash mumkin.

O‘zgarmas xarajatlarni b bilan, o‘zgaruvchi xarajatlarni, mahsulotning hir bir birligi uchun a bilan belgilasak, biror davrda x birlik hajmdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan umumiy xarajat

$$y = b + ax$$

bo‘lib, bu chiziљli funksiyadir.

2-misol. Mahsulotning umumiy bahosi uning soniga proporsional bo‘lsin. a bitta mahsulot narxi bo‘lsa, x birlik mahsulotning umumiy bahosi

$$y = ax$$

chiziqli funksiya bilan ifodalanadi, ma’lumki bu koordinatlar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasidir.

Chiziqli funksiya va uning grafigi, iqtisodiy miqdorlar orasida proporsionallik mavjud bo‘lgan bog‘lanishlarda ishlatiladi.

2. Darajali funksiya. Bunday funksiya

$$y = x^{\alpha} \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda α 0 dan farqli ixtiyoriy haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi α ko‘rsatgichga bog‘liq. α natural son bo‘lsa, hamma haqiqiy sonlar uchun aniqlangan, α butun manfiy son bo‘lsa,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

bo‘lib, $x \neq 0$ bo‘lgan hamma x lar uchun aniqlangan (bunda n natural son). $\alpha = 1/n$ ko‘rinishdagi son bo‘lsa,

$$y = f(x) = x^{\alpha} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

bo‘lib, n toq son bo‘lsa, $(-\infty,\ +\infty)$ intervalda, n juft son bo‘lsa, $[0,\infty)$ intervalda aniqlangan.

Umuman olganda darajali funksiya o‘zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

3-misol. Italyan iqtisodchisi Pareto jamiyatda foydani taqsimlashning quyidagi qoidasini taklif etdi: y bilan x dan kichik bo‘lmagan foydaga ega bo‘lgan shaxslar sonini belgilasak,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

bыladi, bunda a va m o‘zgarmaslar.

Pareto qonuni katta foydaga ega bo‘lganda, taqsimotni yetarli darajada aniqlik bilan ifodalaydi, past darajadagi foydaga ega bo‘lganda aniq emas.

Biror jamiyatda foydani taqsimlash

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

formula bilan aniqlansin:

1) 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘lgan shaxslar soni;

2) 100 nafar eng boy shaxslar orasida, eng kam foydani toping.

Yechish. 1) masala sharti bo‘yicha, $x = 100000$, uni taqsimot formulasiga qo‘ysak:

$$\lg y = \lg \frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1{,}5 \lg 100000 = \lg 2 \cdot 10^9 - 1.5 \lg 10^5 =$$
$$= 9 + 0{,}301 - 1{,}5 \cdot 5 = 9{,}301 - 7{,}5 = 1{,}801,$$
$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni logarifmlasak:ya’ni $\lg y = 1.801$ bo‘ladi. Logarifmlar jadvalidan $y = 63{,}2$ ni topamiz. Shunday qilib, Pareto taqsimoti bo‘yicha 63 kishi 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘ladi;

2) masala sharti bo‘yicha $y = 100,$ taqsimot formulasidan

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $x = 73700$ ekanligini aniqlash mumkin (uni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, 100 nafar eng boy kishilar ichida eng kichik foyda 73700 ni tashkil etadi.

Funksiyalarning iqtisodda qo‘llanilishiga misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Bu mavzu bo‘yicha talabalarning shug‘ullanishini taklif etamiz.

Tayanch ibora va tushunchalar

Argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, funksiya uzluksizligi, funksiyaning uzilishi, oraliqda uzluksiz, ikkita uzluksiz funksiya yig‘indisi , ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi, kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari, funksiyaning uzilishi, 1-tur uzilish, 2-tur uzilish, bartaraf etiladigan(yo‘qotiladigan) uzilish, elementar funksiyalarning uzuksizligi va uzilishi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday jarayon uzluksiz bo‘ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?
4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?
5. Ikkita uzluksiz funksiya yig‘indisi, ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
6. Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?
7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = x^2$ funksiyaning uzluksizligini, $x_0 = 3$, $x = 5$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ funksiyalar uzluksizligini $x_0 = 2$; $x_1 = -3$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

3. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning x ning hamma qiymatlari uchun uzluksiz ekanligini ko‘rsating.

4. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x) = \dfrac{8}{x+4}$; 2) $f(x = \dfrac{x}{x-4}$.

5. Ushbu funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x-3}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x-5}$.

IV-BOB. Differensial hisob

4.1-§. Funksiya hosilasi. Hosila hisoblash qoidalari

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

*Oniy tezlik haqidagi masala***.** Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo‘ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma’lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o‘zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o‘tilgan yo‘lning shu yo‘lni o‘tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o‘zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko‘pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og‘ir moddiy nuqtaning bo‘shliqda og‘irlik kuchi ta’sirida erkin tushushi masalasini qaraylik. Fizikadan ma’lumki, bo‘shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2}t^2 \qquad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o‘tgan yo‘l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9{,}81 м/сек^2$. Bu harakat notekis bo‘lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo‘lsin. OA yo‘lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya’ni t, Δt orttirma qabul qiladi. $t+\Delta t$ momentda nuqta B holatda bo‘ladi. AB, vaqt Δt orttirma olgandagi yo‘l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t+\Delta t$ qo‘yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

yoki $\Delta S = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$.

Oxirgi tenglikni Δt ga bo‘lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \qquad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma’lumki, $\Delta S/\Delta t$ nisbat t va Δt ga bog‘liq. Masalan: $\Delta t = 0{,}1$ sek, $t = 1$ sek bo‘lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2\cdot 1 + 0{,}1) = 1{,}05g$$ bo‘lib, $t = 3$ sek bo‘lganda

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2\cdot 3 + 0{,}1) = 3{,}05g$$ bo‘ladi.

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo‘ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi ***oniy tezlik*** haqida gapirish kerak bo‘ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma’lumki, t o‘zgarmas bo‘lganda, $\Delta S/\Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o‘rtacha tezlik bo‘lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma’lumki, (2) da Δt qancha kichik bo‘lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o‘rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya’ni

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo‘yidagi ko‘rinishdagi limitni hisoblash kerak bo‘ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (3)$$

(3) ko‘rinishdagi limitni hisoblashga ko‘p sondagi amaliy masalalarni yechishda to‘g‘ri keladi.

Umuman, o‘zgaruvchi miqdor o‘zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko‘rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo‘ladi.

2. Funksiya hosilasining ta’rifi.

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo‘lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi <u>hosilasi</u> deyiladi. Bu limit

$$y',\ f'(x_0),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bu limit mavjud bo'lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni ***differensiallash*** **deb** ataladi.

Biz o'rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflan-masin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo'lsa, demak Q τ ning funksiyasi bo'ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o'tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o'tayotgan elektr miqdori bo'lsa, Q hosila tok kuchining o'zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o'zgaruvchi temperaturasini tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

Misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta'rifiga asosan toping.

Yechish. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan, toping.

Yechish. argument x, Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2;$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)};$$

$$\Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x. \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = 1.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,\quad y' = (\sin x)' = \cos x$

bo'ladi.

Umuman, x va y o'zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma'nolaridan voz kechsak, y dan x bo'yicha olingan hosila, y ning x ga bog'liq bo'lib o'zgarishining tezligini ifodalaydi.

3. Hosilaning geometrik ma'nosi. Hosila muhim geometrik ma'noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ ***nuqtada o'tkazilgan urinmaning*** OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan ***o'tkazilgan urinma tenglamasi***

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo'ladi, bunda $y_0 = f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ da o'tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ (f'(x_0) \neq 0)$$

bo'ladi.

3-misol. $y = \dfrac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa abssissasi $x_0 = 2$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish. $y_0 = \dfrac{20}{3},\quad y'(2) = 2^2 = 4,\quad y - \dfrac{20}{3} = 4(x - 2)$

yoki $3y-20=12(x-2)$, $12x-3y-4=0$, bu $M_0(2,20/3)$ nuqtadan o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffisiyenti

$$-\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{4}, \qquad \text{demak,} \quad y-\frac{20}{3}=-\frac{1}{4}(x-2)$$

yoki

$$12y-80=-3(x-2),\ 3x+12y-86=0$$

bo‘lib, bu M_0 nuqtadan o‘tkazilgan normalning tenglamasi bo‘ladi.

4. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, ya’ni $y=f[\varphi(x)]$ **murakkab funksiya** bo‘lsa, $y=f(u)$ funksiyaning x o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilasi

$$y'=f'(u)\cdot u'$$

bo‘ladi.

Agar $y=f(x)$ va $x=\varphi(y)$ lar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lsa,

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo‘ladi.

2). **Differensiallash qoidalarini eslatib o‘tamiz:**

x erkli o‘zgaruvchi, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsin.

1., $C'=0$ C – o‘zgarmas miqdor.

2. $x'=1$.

3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

4. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$.

5. $(cu)'=c\cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$.

3). **Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali** quyidagicha bo‘ladi:

1) $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$ $n\in R,$ $u>0$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot 1na \cdot u'$; 3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot 1na} \cdot u'$; 5) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(tg\ u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; 9) $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 11) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12) $(arctg\ u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 13) $(arcctg\ u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

14) $(u^v)' = vu^{м-1} \cdot u' + u^v \cdot 1nu \cdot v'$.

5. Yuqori tartibli hosilalar. $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya'ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi:

$$y'',\ \ f''(x),\ \ d^2y/dx^2.$$

$y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y/dx^n$. Ta'rifga ko'ra $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$.

1-misol. $y = (2x^2 - 7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left[(2x^2-7)^3\right]' = 3(2x^2-7)^2(2x^2-7)' = 3(2x^2-7)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2-7)^2;$$

$$y'' = (y')' = \left[12x(2x^2-7)^2\right]' = 12\{x'(2x^2-7)^2 + x\left[(2x^2-7)^2\right]' =$$
$$= 12\left[(2x^2-7)^2 + 2x(2x^2-7)\cdot 4x\right] = 12(2x^2-7)(2x^2-7+8x^2) =$$
$$= 12(2x^2-7)(10x^2-7).$$

Demak, $y'' = 12(2x^2-7)(10x^2-7)$.

2-misol. $y = x^n$ funksiyaning n $-$tartibli hosilasini toping.

Yechish. $y' = nx^{n-1}$, $y^{n} = n(n-1)x^{x-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$, ... , $y^{(n-1)} =$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ [n-(n-2)]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ 2x$

$y^{(n)} = n(n-1(n-2)(n-3)\ ...\ 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

$(n!)$ 1 dan n gacha bo‘lgan sonlar ko‘paytmasining qisqa yozilishi).

6.Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari 1). x o‘zgaruvchining y funksiyasi ***oshkormas ko‘rinishda*** $F(x,\ y) = 0$ berilgan bo‘lsa, y' hosilani topish uchun $F(x,\ y) = 0$ tenglikni x bo‘yicha differensiallab, so‘ngra hosil bo‘lgan tenglamadan y' ni topamiz. Ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar ham shu kabi topiladi.

misol. $x^2 + y^2 = 100$ oshkormas ko‘rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani toping.

Yechish. $2x + 2y\cdot y' = 0;$ $2yy' = -2x,$ $y' = -x/y;$ keyingi ifodadan yana hosila olib,

$$(y')' = -\frac{x'y - x(y)'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} \qquad .$$

Endi , $y' = -\dfrac{x}{y}$ ni xisobga olsak,

$$y'' = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

yoki

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3};\ y'' = -\frac{100}{y^3}$$

bo‘ladi, chunki, $x^2 + y^2 = 100$ edi.

2). Funksional bog‘lanish parametrik

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, $dy/\ dx,\ d^2y/\ dx^2$ hosilalar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (1)$$

formula bilan topiladi.

Misol. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$

parametrik ko‘rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,\ \frac{dy}{dt}=a\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t$$

(1) formulaga asosan,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-a\sin t\cdot(-a\sin t)-(-a\cos t)\cdot a\cos t}{(-a\sin t)^3}=\frac{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t}=$$

$$=-\frac{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a^3\sin^3 t}=-\frac{1}{a\sin^3 t}\ .$$

Demak, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Oniy tezlik, hosila, egri chiziqqa urinma, yuqori tartibli hosila, differensiallash, murakkab funksiya, oshkormas va parametrik funksiyalar hosilalari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Jarayonning kechishi tezligi nima?
2. Oniy tezlik nima bilan xarakterlanadi?
3. Funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
4. Hosilaning geometrik ma’nosi nima?
5. Ikkinchi tartibli hosila nima?
6. Differensiallash qoidalari va formulalarini yoddan bilasizmi?
7. Qanday hosilaga n-tartibli hosila deyiladi?

8. Oshkormas va parametrik kЊrinishda berilgan funksiyalar hosilalari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

$$1)\ y = x\ln x;\quad 2)\ y = \frac{1+\ln x}{x};\quad 3)\ y = \lg(5x).$$

$$4)\ y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2};\quad 5)\ y = \frac{\ln x}{x^2};\quad 6)\ y = \ln(x^2 + 2x).$$

$$7)\ y = \ln(1+\cos x);\quad 8)\ y = \ln\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x.$$

$$9)\ y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1});\quad 10)\ y = \ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2};\quad 11)\ y = \lg(5x+3).$$

$$12)\ y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2});\quad 13)\ y = \ln\frac{x^2}{\sqrt{1-ax}};\quad 14)\ y = \ln(tgx).$$

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

$$1)\ y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x;\quad 2)\ y = \arcsin\sqrt{1-4x}.$$

$$3) y = x - arctgx;\quad 4)\ y = \arcsin\frac{x}{a}.$$

$$5)\ y = arctg\frac{x}{a};\quad 6)\ y = \arccos(1-2x).$$

$$7)\ y = x\sqrt{1-x^2} + \arccos x;\quad 8)\ y = \arcsin(e^{3x}).$$

$$9)\ y = xarctgx + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};\quad 10)\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$11)\ y = \arcsin\sqrt{x};\quad 12)\ y = arctg\sqrt{6x-1}.$$

$$13).\ y = x\arccos(1-x^2);\quad 14)\ y = arctgx - \frac{1}{x}.$$

$$15)\ y = \arccos\sqrt{1-3x} + \sqrt{2x-4x^2};$$

3. 1) $y = \sin^2 x$;   2) $y = tgx$;   3) $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyalarning 2- tartibli hosilalari topilsin.

4. 1) $y = \cos^2 x$;   2) $y = \dfrac{1}{x^2}$;   3) $y = x\sin x$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

5. 1) $y = x\ln x$;   2) $y = te^{-t}$;   3) $y = arctg\dfrac{x}{a}$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

6. 1) $y = \ln x$;   2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$;   3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

7. 1) $y = x^n$;   2) $y = \sin x$;   3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

4.2-§. Funksiyaning differensiali va uning taqribiy hisoblashdagi tatbiqi

1. Funksiyaning differensiali. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni hosilaga ega bo'lsa, ya'ni

$$\ell im_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \alpha \to 0$$

bo'lib, bunda α cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\,\Delta x \tag{1}$$

bo'ladi. (1) formulaga **funksiya orttirmasi uchun formula** deyiladi.

1-ta'rif. Funksiya orttirmasining $y'\Delta x$ bosh qismiga ***funksiya differensiali*** deyiladi va dy bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan,

$$dy = y'\Delta x \tag{2}$$

(2) formulada $y = x$ bo'lsa, $dx = x'\Delta x$ yoki $dx = \Delta x$ bo'lib, funksiya differensiali

$$dy = y'dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Elementar funksiyalarning differensiali jadvalini keltiramiz.

1. $d(x^n) = nx^{n-1}dx \quad (x > 0)$;

2. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \quad (a > 0, a \neq 1)$;

3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\; dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$;

4. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$;

5. $d(\sin x) = \cos x dx$;

6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;

7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$;

9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

11. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$;

12. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

2. Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.

(1) formuladan $\Delta y \approx dy$ **taqribiy tenglik kelib chiqadi**, ya’ni Δx yetarlicha kichik bo‘lganda, funksiya orttirmasi uning differensialiga taqriban teng deyish mumkin. Bunda $\Delta y \approx dy$ bo‘lib, ya’ni $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ yoki

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{3}$$

(3) formuladan ***funksiya qiymatini taqribiy hisoblashlarda*** foydalaniladi.

2-ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensiali*** deb funksiya differensialidan olingan differensialga aytiladi va

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx^2$$

bilan belgilanadi.

Xuddi shunday, $d^3y = y'''dx^3$, ... , $d^ny = y^{(n)}dx^n$ differensiallar ham aniqlanadi.

1-misol. $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. Oldin birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Shunday qilib,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \text{va} \quad d^2y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx^2$$

bo‘ladi.

2-misol. $f(x) = 3x^2 - 7$ funksiyaning, argument 2 dan 2,001 gacha o‘zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

Yechish. (3) formuladan foydalanamiz. $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.001$.

$f'(x) = 6x$, $f'(x_0) = 6 \cdot 2 = 12$, $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\ \Delta x = 12 \cdot 0.001 =$
$= 0.012$.

Funksiya orttirmasi o‘rniga uning differensialini olib qancha xatoga yo‘l qo‘yilganini baholaymiz: buning uchun haqiqiy orttirmani topamiz,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 7 - (3x_0^2 - 7) =$$
$$= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 7 - 3x_0^2 + 7 =$$
$$= 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 6 \cdot 2 \cdot 0.001 + 3 \cdot 0.000001 = 0.012003.$$

Demak, absalyut xato

$$|\Delta y - dy| = |0.012003 - 0.012| = 0.000003.$$

Nisbiy xato

$$\frac{|\Delta y - dy|}{dy} = \frac{0.000003}{0.012} = 0.00025 \quad \text{yoki} \quad 0{,}025\%.$$

Taqribiy hisoblash xatosi ancha kichik, bu esa yuqoridagi taqribiy tenglikdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Funksiya differensiali, ikkinchi tartibli differensial, differensial yordamida taqribiy hisoblash, cheksiz kichik funksiya, funksiya orttirmasi uchun formula.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya orttirmasi va differensiali o‘rtasida qanday bog‘liqlik bor?
3. Differensialdan fodalanib taqribiy hisoblash mumkinmi?
4. Ikkinchi tartibli differensial nima?
5. Hisoblash xatosi nima?

Differensial hisobning asosiy teoremalari

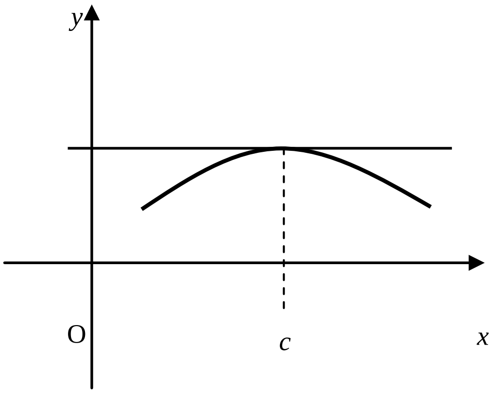
Biror funksiyaning hosilasini bilish funksional bog‘lanish haqida xulosa chiqarishga imkoniyat yaratadi. Hosila tushunchasining har xil tatbiqlari, xususan iqtisodga qo‘llanilishida sodda lekin muhim bo‘lgan teoremalar va formulalar yotadi. Bu teoremalardan ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1. Ferma teoremasi. (1602-1665y. - atoqli fransuz matematigi). $f(x)$ funksiya birorta X oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo‘lib, hamda bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo‘lsa,

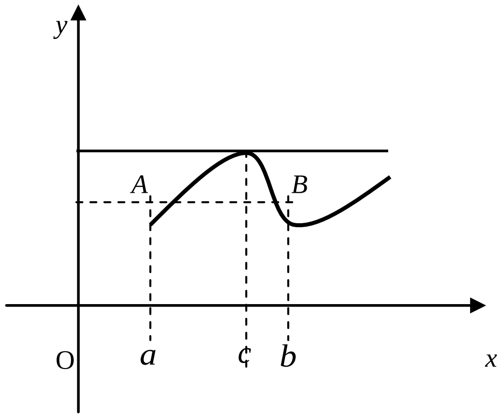
$$f'(c) = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma’noga ega. Teorema shartlari bajarilganda X oraliqda shunday c nuqta mavjud bo‘ladiki, bu nuqtadan funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma OX o‘qiga parallel bo‘ladi(1-chizma).



1-chizma



2-chizma

2. ***Roll teoremasi***. (Mishel Roll (1652-1719) fransuz matematigi). 1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a,b) oraliqda $f'(x)$ chekli hosila mavjud; 3) oraliqning chetki nuqtalarida funksiya teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, a va b orasida shunday c nuqta topiladiki,

$$\hat{f}'(c) = 0$$

tenglik bajariladi $(a < c < b)$.

Geometrik nuqtasi nazardan Roll teoremasi quyidagini bildiradi: $y = f(x)$ funksiyaning chetki ordinatalari teng bo‘lsa, egri chiziqda shunday nuqta topiladiki, undan egri chiziqqa o‘tkazilgan o‘rinma, OX o‘qiga parallel bo‘ladi (2-chizma).

3. Lagranj teoremasi. (1736-1813y. mashhur fransuz matematigi va mexanigi). 1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a,b) ochiq oraliqda chekli $f(x)$ hosila mavjud bo‘lsa, a va b orasida kamida bitta $c\,(a < c < b)$ nuqta topiladiki

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Lagranj teoremasini geometrik tomondan quyidagicha ifodalash mumkin (3-chizma): teorema shartlarida

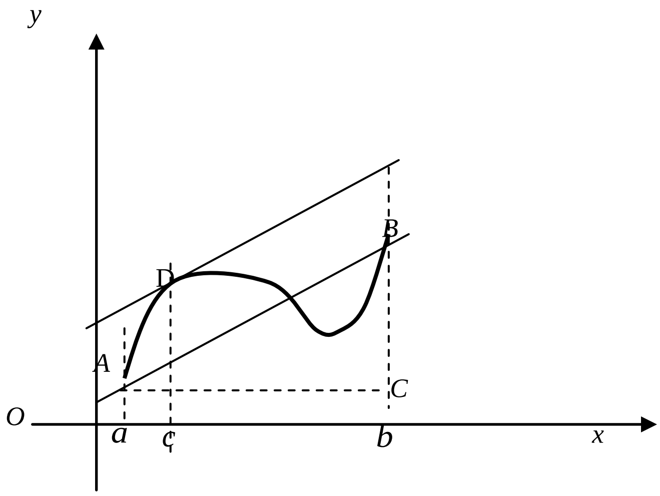
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CB}{AC}$$

nisbat AB kesuvchining burchak koeffisiyenti ekanini, $f'(c)$ esa $y=f(x)$ egri chiziqqa $x=c$ abssissali nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyenti ekanini payqaymiz.

Shunday qilib, Lagranj teoremasining tasdig‘i AB yoyda hyech bo‘lmaganda bitta shunday D nuqta topiladiki, bu nuqtadan o‘tkazilgan urinma, AB kesuvchiga parallel bo‘ladi.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad \text{yoki} \qquad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

formulaga Lagranj formulasi yoki chekli orttirmalar formulasi deyiladi.



3-chizma

4. *Teylor teoremasi* ((1685-1731y., ingliz matematigi). $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror oraliqda $(n+1)$ tartibgacha barcha hosillarga ega bo‘lsa,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

formula o‘rinli bo‘ladi, bunda $\theta,\ 0<\theta<1$ bo‘lgan son. Bu formulaga qoldiq hadi, Langranj formasida

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}x-a)^{n+1}$$

bo‘lgan, ***Teylor formulasi*** deyiladi. Teylor formulasida $a=0$ bo‘lsa,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

formula hosil bo‘ladi. Bunga ***Makloren formulasi*** deyiladi.

Teylor va Makloren formulalari funksiyalrni x ning darajalari bo‘yicha yoyishda va taqribiy hisoblashlarda katta ahamiyatga ega.

1-***misol.*** Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$funksiya $(-1;1)$ intervalning ichki $x=0$ nuqtasida o‘zining eng kichik qiymatiga erishsa ham, bu funksiya uchun Ferma teoremasining xulosasi o‘rinli emas. Shuni ko‘rsating.

Yechish. Berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi. Biroq funksiya shu $x=0$ nuqtada chekli hosilaga ega emas. Bu ushbu

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

nisbatning $\Delta x\to 0$ da chekli limitga ega emasligidan kelib chikadi.

Demak, Ferma teoremasining sharti bajarilmaydi. Binobarin, teoremaning xulosasi o‘rinli emas.

2- ***misol.*** Ushbu $f(x)=x^2+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ravshanki, berilgan funksiya [-1; 2] segmentda uzluksiz va $(-1;2)$ intervalda $f'(x)=2x$ xosilaga ega.

Demak, $f(x)=x^3+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday *s* nuqta (-1 < *c* < 2) topiladiki,

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-(-1)}=f'(c)=2c$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdan $c=\frac{1}{2}$ ekanini topamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ferma teoremasining shartlari nimalardan iborat?
2. Ferma teoremasi tasdiђi љanday bo‘ladi?
3. Roll teoremasining nechta sharti bor va ularni sanang?
4. Roll teoremasi shartlarida, uning tasdiђi nimadan iborat?
5. Geometrik tomondan Roll teoremasining tasdiђi nimani ifodalaydi?
6. Ferma teoremasi geometrik nuљtai nazardan nimani anglatadi?
7. Lagranj teoremasi shartlarini sanab kњring, ular nimalardan iborat?
9. Lagranj teoremasining tasdiђi nima?
11. Lagranj teoremasi tasdiђi geometrik tomondan nimani bildiradi?
12. Lagranj yoki chekli orttirmalar formulasini yozing?
13. Chekli orttirmalar deyilishini tushinasizmi?
14. Teylor formulasi nimadan iborat?
15. Makloren formulasi qanday olinadi?

Tayanch ibora va tushunchalar

Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Chekli orttirmalar formulasi, Teylor va Makloren formulalari, qoldiq had formulasi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1-8 misollarda funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y=x^n$; 2) $y=x^3-3x^2+3x.$

2. 1) $y=\sqrt{1+x^2}$; 2) $s=\frac{gt^2}{2}.$

3. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \dfrac{1}{t^2}$.

4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1-\cos u)$.

5. 1) $d\left(\dfrac{a}{x} + arctg\dfrac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln\alpha)$;

6. 1) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; 2) $r = \sin(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.

7. 1) $y = \ln\cos x$; 2) $z = arctg\sqrt{4u-1}$; 2) $s = e^{-2t}$.

8. 1) $d(\sqrt{x}+1)$; 2) $d(tg\alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

9. Ushbu $f(x) = \sin x$ funksiya uchun [0; 2π] segmentda Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

10.Ushbu $f(x) = e^x$, $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ funksiyalar [0; 2π] segmentda Koshi teoremasining shartlarini kanoatlantiradimi?

11.Ushbu $f(x) = x(x^2-1)$ funksiya uchun [0; 2π] va [0, 1] segmentlarda Roll teoremasining shartlarini tekshiring.

12. $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар} \quad x \neq 0 \quad \text{булса} \\ 0, & \text{агар} \quad x = 0 \quad \text{булса} \end{cases}$ funksiya uchun [-1; 1] oralikda Lagranj teoremasi o‘rinlimi?

13. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ funksiya ildizlari orasida uning xosilasining xam ildizi bor ekani tekshirilsin.

14.Roll teoremasini $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga [-1; 1] segmentda tatbiq qilish mumkinmi?

15. $y = x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o‘tkazilgan urinma $A(-1;1)$ va $B(3;9)$ nuktalarni birlashtiruvchi vatarga parallel bo‘ladi?

16. $[a, b]$ segmentda $f(x) = x^2$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va s topilsin. Grafik usul bilan tushuntirlsin.

17.[1; 4] segmentda $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin.

18. $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshining $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ formula yozilsin hamda *s* topilsin.

19. $f(x)=x^3$ funksiya uchun Lagranjning $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ formulasi yozilsin va *s* topilsin.

Differensial hisobning tatbiqlari

1. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish

Ma’lumki, tabiat va iqtisodning ko‘p qonunlari funksiya yordamida modellashtiriladi. Bunday funksiyalrni bilish ularning qaysi oraliqda o‘suvchi yoki kamayuvchi hamda ular qanday nuqtalarda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishishini aniqlash imkonini yaratadi. Bunga o‘xshash tekshirishlar *funksiya dinamikasini* anglashga olib keladi.

1). Funksiyaning monotonligi mezonlari (kriteriyasi).

1-ta’rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun, $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi deyiladi.

2-ta’rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalarsi uchun $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda kamayuvchi deyiladi.

Oraliqda o‘suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya’ni $f'(x)>0,$ bo‘lsa, funksiya shu oraliqda *o‘suvchi* bo‘ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya'ni $f'(x) < 0,$ bo‘lsa, funksiya shu oraliqda *kamayuvchi* bo‘ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2),\ x^2 - x - 2 = 0,$$

bundan $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ kritik nuqtalar bo‘lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty; -1), (-1; 2), (2; +\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty; -1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x = -2$ bo‘lsa, $f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ bњladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko‘ring). Demak, $(-\infty; -1)$ oraliqda funksiya o‘suvchi (o‘suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1;2)$ oraliqning $x = 0$ nuqtasida $f'(0) = -2 < 0,$ bњlib, bu oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x) < 0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1;2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo‘ladi.

$(2; +\infty)$ oraliqning $x = 3$ nuљtasi uchun, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0,$ bњlib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2; +\infty)$ oraliqda o‘suvchi.

2). Funksiyaning ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi no‘lga teng yoki uzilishga ega bo‘ladigan nuqtalari *kritik* nuqtalar deyiladi.

1-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *maksimumga* ega deyiladi.

2-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *minimumga* ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga *ekstremum* nuqtalari deyiladi.

Ekstremumga ega bo‘lshishinig zaruriy sharti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, $y' = f'(x_0)$ no‘lga teng yoki u mavjud bo‘lmaydi.

Eslatma. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo‘lavermaydi.

Ekstremumning yetarli shartlari. *Birinchi qoida***.** x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, x_0 nuљta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va:

1) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini musbatdan manfiyga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya *maksimumga;*

2) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya *minimumga* ega bo‘ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi hosila no‘lga teng, ikkinchi hosila no‘ldan farqli bo‘lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va :

1) $f''(x_0) < 0$ bo‘lsa, *maksimum* nuqtasi;

2) $f''(x_0) > 0$ bo‘lsa, *minimum* nuqtasi bo‘ladi.

Shunday qilib, monotonlik oraliqlarini, funksiya ekstremumini topish uchun, oldin funksiyaning aniqlanish sohasini kritik nuqtalar yordamida monotonlik oraliqlariga bo‘lish va ularda hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin monotonlik va ekstremumning yetarlilik shartlaridan foydalanib, o‘sish va kamayish oraliqlarini, maksimum va minimum nuqtalarini aniqlaymiz.

2-misol. $f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, bunda $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$;

bo‘lib, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ bo‘ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o‘tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3),$ $x < -2$ bo‘lsa, $x+2<0,$ $x-3<0$ bњlib, $(x+2)(x-3)>0,$ bњladi, ya’ni ishora musbat $(+)$. $x > -2$ bo‘lsa, $x+2>0;$ $x-3<0,$ $(x+2)(x-3)<0,$ ya’ni ishora manfiy(-). Demak, $x_1 = -2$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1 = -2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10 .$$

Endi -2< x <3 bo‘lsa, $(x+2)>0;$ $(x-3)<0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)<0,$ hosilaning ishorasi manfiy $(-),$ $x>3$ bo‘lsa, $(x+2)>0;$ $(x-3)>0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)>0,$ musbat (+) bo‘ladi. Demak, $x_2 = 3$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

3-misol. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11 .$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$
$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \qquad x^2 - 5x + 6 = 0, \ x - 1 = 0$$

bundan, $x = 1$ va

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \ x_2 = 2, \ x_3 = 3$$

bыladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ bo‘ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 2 > 0,$$
$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 < 0,$$
$$f''(3) = 3 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 11 = 2 > 0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo‘lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ nuqtalarda minimum, $x_2 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo‘ladi. $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$.

3). Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari. $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo‘ladi.

4-misol. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad 4x^3 - 4x = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0,$$

bundan , $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ kritik nuqtalar bo‘ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13,$$
$$f(-1) = 4;\ f(0) = 5;\ f(1) = 4 \ \ \textit{ва} \ \ f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 5 =$$
$$= 81 - 18 + 5 = 68.$$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{экич} = 4$, $y_{экат} = 68$ bo‘ladi.

Shuni eslatamizki, funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topish katta amaliy ahamiyatga ega.

5-misol. Perimetri $2p(p>0)$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak topilsin.

Yechish: Bunday to‘g‘ri to‘rtburchakning asosi x bo‘lsin. Bu holda to‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi $p-x$ ga, yuzi esa,

$$S=S(x)=x(p-x),\ (0<x<p)$$

bo‘ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$S'(x)=p-2x,\ p-2x=0,\quad x=\frac{p}{2}$$

kritik nuqta bo‘ladi. $S''(x)=-2;\quad S''(p/2)=-2<0.$

Demak, $S(x)$ funksiya, $x=\dfrac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.

$$S_{\max}=\frac{p}{2}(p-\frac{p}{2})=\frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak tomoni $\dfrac{p}{2}$ bo‘lgan kvadratdan iborat ekan.

*4). Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish***.** Funksiya grafigining asimptotalari.

1-ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda *qavariq* deyiladi.

2-ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda *botiq* deyiladi.

3-ta’rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta *egilish* nuqtasi deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo‘lishining yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

$f''(x) = 0$ va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarga <u>2-tur kritik</u> nuqtalar deyiladi.

Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 abssissali nuqta <u>egilish</u> nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo'lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi.

5). Funksiya grafigining asimptotalari. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa no'lga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining *asimptotasi* deyiladi.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $x = a$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad va \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

yoki

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad ва \quad b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

limitlar mavjud bo‘lsa, $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi. $k = 0$ bo‘lsa, $y = b$ gorizantal asimptota bo‘ladi.

6-misol. Gauss egri chizig‘i deb ataluvchi $y = e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}, \; y'' = -2\left[x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x\right] = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0, \; e^{-x^2} \neq 0, \; 4x^2 - 2 = 0, \; x^2 = \frac{1}{2}; \; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo‘lib, sonlar o‘qini

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \; ва \; (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda $y'' > 0$ bo‘lib, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y'' < 0$ bo‘ladi.

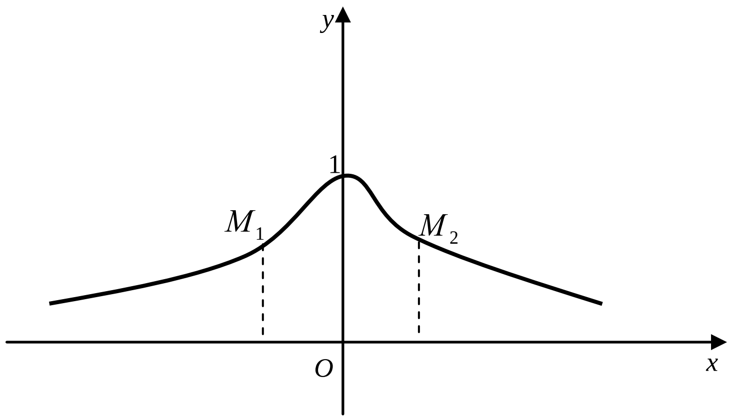
Demak,

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ва $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq,

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo‘lib, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o‘tishda $f''(x)$ o‘z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o‘tishda manfiydan musbatga o‘zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo‘ladi:

$$f_{эгл} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \; M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}). \; f_{эгл}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}).$$

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz.



1-chizma

6). Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o‘zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;

8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;

9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

10) imkoniyati bo‘lsa funksiya grafigining koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

7-misol. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no‘lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1=-2, x_2=2$ nuqtalarda no‘lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,-2)$, $(-2;+2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o‘zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\ \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$

;

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

bo‘lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T)=f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x=\pm2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x)=0,\ x=0,\ x=\pm2\sqrt{3}..$$

Bundan ~~ta~~shqari $f'(x)$, $x=\pm2$ nuqtala~~rda~~ mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$

bo‘ladi;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$

oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *ва* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya’ni funksiya bu oraliqlarda o‘suvchi; $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x)<0$, ya’ni kamayuvchi $x_1=-2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5=2\sqrt{3}$

nuqtada minimumga ega bo‘ladi. $x=0$ kritik nuqtadan o‘tishda $f'(x)$ ishorasi o‘zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo‘q.

$$\max f(x) = f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3};\ \min f(x) = f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3};$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2 - x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-24x)(x^2-4) - 4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1=-2;\quad x_2=0;\quad x_3=2$$

bo‘ladi ;

8) $(-\infty,-2), (-2,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo‘lsin.

$$f''(-3) = \frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]} = \frac{-24\cdot 21}{5^3} = -\frac{504}{125} < 0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\quad f''(1)<0,\quad f''(3)>0$ bo‘lib, $(-\infty,-2)$ *ва* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *ва* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo‘ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o‘zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo‘ladi $f(0)_{эгл}=0$;

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4} = \pm\infty \quad ва \quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4} = \pm\infty .$$

Demak, $x=-2$, $x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo‘ladi.

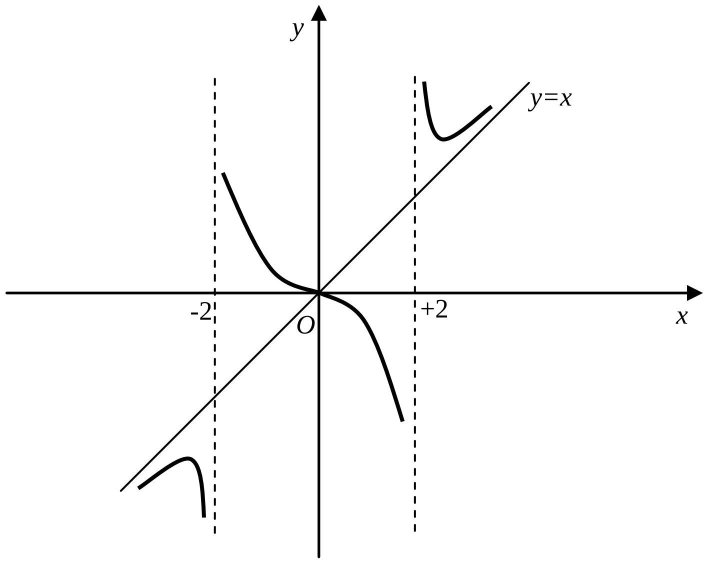
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og‘ma asimptota bo‘ladi;

10) $x=0$ bo‘lganda $y=0$ bo‘lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o‘tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (2-chizma)



2-chizma

2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda berilgan bo‘lsin.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

bo‘lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

bo‘lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

Berilgan funksiyalar hosilalarga ega bo‘lsa, ulardan foydalanib, aniqmaslikni ochish mumkin.

Lopital qoidasi

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo‘lib,

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $x \to \infty$ da ham Lopital qoidasi o‘rinli.

$(0 \cdot \infty)$ yoki $(\infty - \infty)$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu limit $x \to 0$ da $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, Lopital qoidasini qo‘llab,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x}$$

natijaga ega bo‘lamiz. Oxirgi limit $x \to 0$ da yana $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik , demak, Lopital qoidasini yana qo‘llash mumkin:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{0 - \sin x}{1} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Shunday qilib, ketma-ket Lopital qoidasini qo‘llash bilan berilgan limitning 0 ga tengligini ko‘rsatdik.

3. Differensial hisobning iqtisodda qo‘llanilishi haqida.

1. *Hosilaning iqtisodiy ma’nosi haqida.* Hosilaning iqtisodiy ma’nosini quyidagi misolda qaraymiz. Biror xil mahsulot ishlab chiqarilganda ishlabchiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog‘liq. Mahsulot miqdorini x bilan, *ishlab chiqarish xarajatlarini* y bilan belgilasak

$$y = f(x)$$

funksional bog‘lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga ko‘paytirilsa $x+\Delta x$ mahsulotga mos keluvchi xarajat

$$f(x+\Delta x)$$

bo‘ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, *mahsulot ishlab chiqarish xarajatining orttirmasi*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

mos keladi.

1-ta’rif. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarish xarajatining o‘rtacha orttirmasi deyiladi.

2-ta’rif.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

ga *ishlab chiqarish limitik xarajati* deb ataladi.

Yuqoridagiga o‘xshash $\varphi(x)$ bilan x mahsulotni sotishdan olingan jami savdo pul mablag‘i bo‘lsa, quyidagi limit

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

ga *savdo limitik pul mablag‘i* deyiladi.

1-misol. Mahsulot ishlab chiqarish xarajati va mahsulot hajmi x orasida

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

bog‘lanish bo‘lsin. Ishlab chiqarish hajmi, 5 birlik va 10 birlik bo‘lganda limitik xarajatni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan, $x=5,\ x=10.$Funksional bog‘lanish hosilasi

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

bo‘lib,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

bo‘ladi.

Bularning iqtisodiy ma’nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 5 birlik bo‘lganda, mahsulot ishlab chiqarish xarajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o‘tishda 97,5 ni tashkil etadi; ishlab chiqarish hajmi 10 birlik bo‘lganda, esa u 90 ni tashkil etadi.

2. Ayrim iqtisodiy tushunchalarning ta’riflari . 1-ta’rif. Tovar va xizmatlarning ma’lum turiga, iste’molchining ma’lum vaqtda, narxlarning mavjud darajasida, sotib olishga qodir bo‘lgan ehtiyoji <u>talab</u> deyiladi.

Talab miqdorining o‘zgarishiga bir qancha omillar ta’sir qiladi. Ularning ichida eng ko‘p ta’sir qiladigan omil <u>narx</u> omilidir.

2-misol. Biror mahsulotga talab va mahsulot narxi orasida bog‘lanish

$$p = 20 - 3x$$

formula bilan ifodalansin, bunda x mahsulotga talab, p mahsulotning narxi.

Mahsulotni sotishdan olingan savdo puli

$$U = xp \quad ёки \quad U = x(20 - 3x) = 20x - 3x^2$$

bo‘ladi. Bundan hosila

$$U' = 20 - 6x$$

bo‘ladi. $x = 2$ bo‘lsa, $U'(2) = 8$. Buning ma’nosi, talab 2 dan 3 birlikka ortsa, savdo puli 8 birlikka oshishini bildiradi.

3. Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi). Hosila yordamida erkli o‘zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o‘zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko‘p iqtisodiy masalalarni hal etishda *nisbiy orttirma***,** ya’ni argumentning o‘sish foiziga mos, funksiyaning o‘sish foizini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

1-ta’rif. $$\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$$

nisbatlarga, mos ravishda, argument va *funksiya nisbiy orttirmalari* deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

ni qaraymiz. Bu nisbatni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} \qquad (1)$$

$y=f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

kelib chiqadi.

2-ta’rif. (2) munosabatga $y=f(x)$ *funksiyaning* x *ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi*, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta’rifga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

bo‘ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o‘sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y=3x-6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish Egiluvchanlik ta’rifiga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3x-6}\cdot 3=\frac{3x}{3x-6}=\frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x=10$ bo‘lsa, funksiya egiluvchanligi

$$\frac{10}{10-2}=\frac{5}{4}$$

bo‘ladi, ya’ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}\%$ ga oshadi.

4-misol. $y=1+6x^2-4x^3$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Ta’rifga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{1+6x^2-4x^3}(12x-12x^2)=\frac{12x^2-12x^3}{1+6x^2-4x^3}$$

Masalan, $x=1$ bo‘lganda, $\frac{(12-12)}{7}=0.$ Bu argument 1% ga ya’ni 1 dan 1,01 ga oshganda, funksiya qiymati taqriban o‘zgarmaydi.

Endi funksiya egiluvchanligini hisoblashda qo‘llaniladigan ayrim qoidalarni eslatamiz.

1-teorema. Ikkita funksiya ko‘patmasining egiluvchanligi shu funksiyalar egiluvchanliklari yig‘indisiga teng.

Isbot. Ikkita funksiya ko‘paytmasining hosilasi formulasiga asosan.

$$E_x(u\cdot v)=\frac{x}{uv}(u\cdot v)'=\frac{x}{uv}(u'v+uv')=$$

$$=\frac{x}{u}u'+\frac{x}{v}v'=E_x(u)+E_x(v),\ \textit{яъни}\ \ E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v). \qquad (3)$$

Bu teoremaning isbotidir.

5-misol. $y=x^2\cdot e^{2x}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u=x^2,\ v=e^{2x}$ ni olish mumkin. Demak, (3) formulaga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{x^2}(x^2)'+\frac{x}{e^{2x}}(e^{2x})'=2+2x,\ E_x=(y)=2(1+x)$$

bo‘ladi.

2-teorema. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi bo‘linuvchi va bo‘luvchi egiluvchanliklarining ayirmasiga teng, ya’ni

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v) \qquad (4)$$

bo‘ladi (bu tasdiqning isbotini o‘quvchiga havola etamiz).

6-misol. $y=\frac{x^3+5}{e^{3x}}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u=x^3+5,\quad v=e^{3x}$ ekanligini hisobga olib (4) formulaga asosan:

$$E_x(y)=E_x(x^3+5)-E_x(e^{3x})=\frac{x}{x^3+5}\cdot 3x^2-\frac{x}{e^{3x}}\cdot 3e^{3x}=\frac{3x^3}{x^3+5}-3x,\ \textit{yani}$$

$$E_x(y)=\frac{3x^3}{x^3+5}-3x$$

bo‘ladi.

*4. Talab va taklif egiluvchanligi***.** Aniq bir mahsulotga talab va uning narxi orasidagi funksional bog‘liqlikni (boshqa tovar narxi, inste’molchining daromadi va ehtiyoji o‘zgarmas bo‘lgan shartlarda) talabga mos narxni aniqlash mumkin. Lekin ko‘p iqtisodiy tekshirishlarda talabning miqdori emas, mahsulot narxining o‘zgarishi bilan unga talabning qanday o‘zgarishi muhimdir. Boshqacha aytganda, talabning narxga nisbatan egiluvchanligini hisoblash katta ahamiyatga ega.

Talab y, narx x ning funksiyasi bo‘lsin, ya’ni

$$y=f(x).$$

Δx narx orttirmasi, Δy unga mos talab orttirmasi bo‘lsa, narxning nisbiy o‘zgarishi $\Delta x/x,$ talabning nisbiy o‘zgarishi $\Delta y/y$ bo‘lib,

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}$$

nisbat narx 1% oshganda unga mos talabni nisbiy o‘zgarishi, ya’ni *talabning narxga nisbatan egiluvchanligi* qo‘yidagi limitga teng:

$$E_x(y)=E_T=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad (5)$$

Demak, $E_T=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}.$

Shunday qilib, *talabning narxga nisbatan egiluvchanligi*, narx 1% ga oshganda, biror tovarga bo‘lgan talabning qanday o‘zgarishini taqriban ifodalaydi.

Ma’lumki, talab funksiyasi narxga nisbatan kamayuvchi funksiyadir, ya’ni $\dfrac{dy}{dx}<0$ bo‘ladi. Shuning uchun amalda manfiy sonlarni ishlatmaslik uchun

$$E_T=-\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (6)$$

qilib olinadi.

$E_T > 1$ bo‘lsa, narxning 1%ga o‘sishi, talabning taxminan 1% dan ko‘p pasayishini ifodalaydi va talab egiluvchan deyiladi.

$E_T = 1$ bo‘lsa, narxning 1% ga o‘sishi, talabning taxminan 1% ga pasayishini bildirib, talab neytral deyiladi.

$0 < E_T < 1$ bo‘lsa, narxning 1% ortishi unga mos talabning 1% dan kam bo‘lishini ifodalab, talab egiluvchan emas deyiladi.

7-misol. Talab funksiyasi $y = 10 - x$ bo‘lsa uning egiluvchanligini toping.

Yechish. (6) formulaga asosan:

$$E_T = -\frac{x}{y}y' = -\frac{x}{10-x}(-1) = \frac{x}{10-x} \quad x = 2 \ bo'lsa, \quad E_T = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

bo‘ladi. Buning ma’nosi narx 2 bo‘lganda uni 1% orttirish, talabning $\left(\frac{1}{4}\right)$% ga kamayishini ko‘rsatadi.

Talabning daromad (kirim, unum, tushum)ga nisbatan elastikligini qaraymiz. x iste’molchining daromadi bo‘lsin. Talab funksiyasi y desak,

$$y = f(x)$$

bog‘lanish kelib chiqadi. Bunda *daromadga nisbatan egiluvchanlik*

$$E_d(y) = \frac{x}{y}y'$$

bo‘ladi.

8-misol. Tadbirkor biror mahsulotga talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi 0,2 ekanligini bilgan holda, uning narxini 10% oshirmoqchi bo‘lsa uning oladigan daromadini hisoblang?

Yechish. Talabning egiluvchanligi 0,2 bo‘lganligi uchun unga talab 2% ga kamayadi. Natijada tadbirkorning daromadi 8% tashkil etadi.

Taklif deganda biror mahsulotning vaqt birligida sotishga chiqarilgan hajmini tushuniladi. Ma’lumki, biror mahsulotning taklifi biror davrda, narxning o‘suvchi funksiyasidir. Taklif funksiyasining ham egiluvchanligini talab egiluvchanligiga o‘xshash topish mumkin.

$$y = f(x)$$

taklif funksiyasi bo‘lsin bunda x narx, y taklif funksiyasi, demak

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'$$

bo‘ladi. ***Taklif funksiyasining egiluvchanligi*** *narx 1% ga oshganda* taklif funksiyasining foizlarda o‘sishini taxminan ifodalaydi.

5. *To‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanligi***.** Korxona biror mahsulotdan x birlik miqdorda ishlab chiqarsa va $k(x)$ to‘la xarajat funksiyasi aniqlangan bo‘lsa, to‘la xarajat egiluvchanligi

$$E_x(K) = E_k = \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dx} : \frac{K}{x}, \qquad (7)$$

bo‘ladi, demak, *to‘la xarajat egiluvchanligi limitik xarajatning* o‘rtacha xarajatga nisbatini ifodalaydi..

O‘rtacha xarajat $\Pi = \dfrac{K}{x}$ bъlsa, uning egiluvchanligi,

$$E_x(\Pi) = \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{x}{K/x} \cdot \frac{x(dK/dx) - K}{x^2} = \frac{x^2}{K} \cdot \frac{xdK/dx - K}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} - 1 = E_x(K) - 1, \qquad (8)$$

bъladi, demak, o‘rtacha xarajat egiluvchanligi to‘la xarajat egiluvchanligidan 1 ga kam ekan.

$E_T = 1$ bo‘lsa, o‘rtacha xarajat egiluvchanligi 0 ga teng, ya’ni $E_x(\Pi) = 0$ bo‘lib, o‘rtacha xarajat o‘zgarmasligini bildiradi. Bundan

$$x\frac{dk}{dx} - K = 0 \quad yoki \quad \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \ . \qquad (9)$$

Shunday qilib, *to‘la xarajat egiluvchanligi* 1 ga teng bo‘lsa, to‘la limitik xarajat o‘rtacha xarajatga teng bo‘ladi.

Tayanch iboralar va tushunchalar

Funksiya dinamikasi, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik qismlari, egilish nuqtasi, funksiyani tekshirish, asiptota, Lopital qoidasi, ishlab chiqarish xarajatlari, mahsulot ishlab chiqarish orttirmasi, ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi, ishlab chiqarish xarajati o‘rtacha orttirmasi, ishlab chiqarish limitik xarajati, savdo limitik pul mablag‘i, funksiya egiluvchanligi, argument va funksiyaning nisbiy orttirmalari, nisbiy hosila, nisbiy egiluvchanlik, ikkita funksiya ko‘paytmasi va nisbati egiluvchanliklari, talabning narxga nisbtan egiluvchanligi, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi, taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi, to‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanliklari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning monotonligi nima?
2. Funksiyaning ekstremumi nima?
3. Funksiya ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?
4. Hosila yordamida ekstremumni tekshirishning ikkinchi qoidasi qanday?
5. Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik qismlari va uning egilish nuqtasi hosila yordamida qanday aniqlanadi?
6. Funksiya grafigining asimptotalari qanday topiladi?
7. Funksiyani umumiy tekshirish nimalardan iborat?
8. Aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi nimadan iborat?
9. Funksiya hosilasini bilgan holda funksional bog‘lanish haqida nima deyish mumkin?
10. Ishlab chiqarish xarajatlari, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog‘liqmi?
11. Ishlab chiqarish xarajatlari o‘rtacha orttirmasi deb nimaga aytiladi?
12. Ishlab chiqarishning limitik xarajati qanday aniqlanadi?
13. Jami savdoning pul mablag‘i nima?
14. Savdoning limitik pul mablag‘i qanday aniqlanadi?
15. Biror mahsulotga talab va uning narxi orasida bog‘lanish bormi?
16. Nisbiy orttirma nima?
17. Funksiyaning egiluvchanligi qanday aniqlanadi?

18. Funksiya egiluvchanligi $E_x(y)$ nimaga teng?

19. Argument x ga nisbatan funksiya y ning egiluvchanligi foizlarda nimani ifodalaydi?

20. Ikkita funksiya ko‘paytmasining egiluvchanligi nimaga teng?

21. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi qanday aniqlanadi?

22. Talabning narxga nisbtan egiluvchanligi nimani ifodalaydi.

23. Talabning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday topiladi?

24. Talab egiluvchan degani nima?

25. Talab neytral degani nimani ifodalaydi?

26. Talab egiluvchan emas deb nimaga aytiladi?

27. Talab daromadga bog‘liqmi?

28. Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi qanday hisoblanadi?

29. Taklif nima?

30. Taklif va narx orasida bog‘lanish bormi?

31. Taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday aniqlanadi.

32. Taklif funksiyasining egiluvchanligi nimani ifodalaydi?

33. To‘la xarajatlarning mahsulot hajmiga nisbatan egiluvchanligi $E_x(K)$ qanday aniqlanadi?

34. O‘rtacha xarajt egiluvchanligi $E_x(\Pi)$ qanday aniqlanadi?

35. To‘la xarajat egiluvchanligining 1 ga teng bo‘lishi nimani ifodalaydi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning o‘sishi va kamayishi oraliqlari tekshirilsin.

1) $y = x^2$;

2) $y = x^3$;

3) $y = \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \ln x$;

5) $y = tg\, x$;

6) $y = e^x$;

7) $y = 4x - x^2$;

8) $y = 4x + x^3$

2. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1) $y=x^2+4x+5$;

2) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$;

3) $y=\frac{x^4}{4}-x^3$;

4) $y=\sqrt[3]{x^2}-1$;

5) $y=1+2x^2-\frac{x^4}{4}$;

6) $y=4x-\frac{x^3}{3}$;

7) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$;

8) $y=\frac{1}{1+x^2}$

9) $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$;

10) $y=x^2(1-x)$;

11) $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2}$;

12) $y=4x-tg\,x$ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ oralikda

13) $y=xe^{-\frac{x}{2}}$;

14) $y=x\ln x$.

3. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va jadvallari tuzilsin.

1. $y=4x-x^2$;

2. $y=x^2+2x+3$;

3. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$;

4. $y=\frac{x^2}{x-2}$

5. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$;

6. $y=x^3+6x^2+9x$;

7. $y=x^3+\frac{x^4}{4}$;

8. $y=x-2\ln x$;

9. $y=\sin 2x-x$, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ oralikda.

10) $y=4x-x^3$

4. Quyidagi funksiyalarning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping:

1) $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>1$, $x>0$;

2) $f(x)=e^x$;

3) $f(x)=\ln x$;

4) $f(x)=x^5-10x^2+3x$;

5) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$;

6) $y=x^5+5x-6$;

7) $y=(x-4)^5+4x+4$;

8) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

9) $y=2+\frac{12}{x^2-4}$.

5. Quyidagi funksiyalar grafiklarining egilish nuqtalarini toping:

1) $y=x^5+5x-6$;

2) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $y=xe^{1-x}$;

4) $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$;

5) $y=\cos x$;

6) $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$.

6. Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping.

1) $y=\frac{x^2+1}{x}$;

2) $y=\frac{x^2}{x-2}$;

3) $y=x-\ln x$;

4) $y=\frac{e^x}{x}$;

5) $y=\frac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$.

7. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) $y = 3x - x^3$;

2) $y = -x^3 + 4x - 3$;

3) $y = -4x + x^3$;

4) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$;

5) $y = x(x-1)^3$.

8. Quyidagi limitlar Lopital qoidasiga asosan topilsin.

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$	10.	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$
2.	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^n - a^n}$	11.	$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$	12.	$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}$
4.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$	13.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
5.	$\lim\limits_{x\to \pi}(\pi - x)tg\,\frac{x}{2}$	14.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin 2x}$	15.	$\lim\limits_{x\to 0} tg\,x \cdot \ln x$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot ctg\,x - 1}{x^2}$	16.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x - \sin x}{x - \sin x}$	17.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$	18.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

9. To‘la xarajatlar chizig‘i tenglamasi $K = 6\lg(1+3x)$ bo‘lsa, limitik xarajat chizig‘i tenglamasini yozing?

10. $E_x(f(x))$ $f(x)$ funksiyaning egiluvchanligi bo‘lsa, $xf(x)$ funksiya egiluvchanligi $E_x(f(x))+1$ bo‘lishini isbotlang.

11. $y = x^3 - 1$ funksiya egiluvchanligini hisoblang. $x = 1$ *ва* $x = 5$ bo‘lganda egiluvchanligi ko‘rsatkichini toping.

12. $y = e^{6x}$ funksiya egiluvchanligini toping?

$x = 1,\ x = 0,\ x = 2$ bo‘lganda egiluvchanlik ko‘rsatkichini toping?

4.3 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar.

Tabiat va jamiyatda juda ko‘p masalalar borki o‘zgaruvchi miqdorlar bog‘lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari x *ва* y dan iborat bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o‘zgarishi bilan o‘zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o‘lchovining o‘zgarishi bilan o‘zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga o‘g‘it berishga, sug‘orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko‘p faktorlarga; sigirdan sog‘ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday yem-xashak bilan boqilishiga va hakozolarga bog‘liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog‘lanishlarni tekishirish uchun ***ko‘p o‘zgaruvchili (argumentli) funksiyalar*** tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish apparati amallarini o‘rganamiz.

1-ta’rif. R^2 fazoda biror D to‘plamning bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan x *ва* y o‘zgaruvchilari har bir (x, y) haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko‘ra E to‘plamdagi bitta z haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda ***ikki*** x *ва* y ***o‘zgaruvchilarning funksiyasi*** z ***aniqlangan*** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ (funksiya bilan o‘zgaruvchilar mos ravishda x, t *ёки* x_1, x_2 lar bilan belgilangan bo‘lsa $U = f(x,t)$ *ёки* $y = f(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda x, y o‘zgaruvchilarga yerkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, z ga yerksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to‘plamga *funksiyaning aniqlanish* sohasi, E to‘plamga o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o‘rniga $y = f(M)$ ham deb yozish mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya berilish usullari ham, bir o‘zgaruvchili funksiyaga o‘xshash har xil bo‘lishi mumkin. Ko‘proq funksiyaning ***analitik usulda*** berilishini qaraymiz. Masalan. 1) $y = x_1^2 + x_2^2$ bu funksiya analitik usulda bo‘lib, OX_1X_2 tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O‘zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo‘ladi. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiya aniqlangan bo‘lishi uchun $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ *ёки* $x^2 + y^2 \leq 4$ bo‘lishi kerak, bunday nuqtalar to‘plami markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo‘lgan doiradan iborat. Qiymatlar to‘plami $[0,2]$ bo‘ladi. 3) $u = {}^{1}\!\Big/\sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ funksiya $x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya’ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo‘lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to‘plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z = f(x, y)$ bo‘lgan sirtni ifodalaydi. Masalan: 1) $z = 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x + 3y - z - 12 = 0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo‘lib, $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta’rif . D to‘plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror qoida bo‘yicha E to‘plamdagi bitta y haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda uch (x_1, x_2, x_3) o‘zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 yerkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o‘zgaruvchining funksiyasi $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona $P(x, y, z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o‘zgaruvchining fuksiyasini $P(x, y, z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida ham qarash mumkin. Shunday qilib, $u = f(x, y, z)$ o‘rniga, $u = f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to‘plami yoki butun fazo bo‘lishi mumkin. Masalan: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To‘rt o‘zgaruvchili va umuman n o‘zgaruvchili funksiyaga ham yuqoridagidek ta’rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *ёки* $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
Simvollar bilan belgilanadi.

To‘rt va undan ortiq o‘zgaruvchiga bog‘liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko‘rgazmali namoyish yetish mumkin yemas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo‘lmasa y yo‘q deyish mumkin yemas. Masalan, to‘rtinchi o‘zgaruvchi fazodagi nuqtaning temperaturasi, beshinchisi zichlik va h.k. lar bo‘lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom yettirib, n o‘zgaruvchining funksiyasini biror n o‘lchovli fazo $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida qarash mumkin.

2. ***Ikki va ko‘p argumentli funksiya limiti***. $y = f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o‘z ichiga olgan oraliq bo‘lar edi. Ikki argumentli $z = f(x, y)$ funksiya qaralganda ***nuqtaning*** δ ***atrofi*** deyilganda markazi $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning δ atrofi ham shunga o‘xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada radiusi δ bo‘lgan sharning ichki nuqtalari bo‘ladi.

n o‘lchovli $(n > 3)$ fazoda $P_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtaning δ atrofi shunga o‘xshash aniqlanadi.

2-ta’rif. Ikki o‘zgaruvchili $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsa, (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar uchun

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon \quad ёки \quad \left| f(P) - A < \varepsilon \right|$$

tengsizlik bajarilsa, A ***o‘zgarmas son*** $z = f(x, y)$ ***funksiyaning*** $P \to P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad ёки \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x, y)$ funksiyaning limiti bo‘lsa, $\left| f(x, y) - A \right|$ ayirma $x \to x_0$, $y \to y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Uch va undan ortiq o‘zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo‘lsa, bunday funksiyaga cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o‘zgaruvchining funksiyasi uchun ham o‘rinli ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

3. ***Ikki va ko‘p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.*** 1-ta’rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \quad ёки \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

bo‘lsa, ya’ni funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lsa, ***funksiya*** $P_0(x_0, y_0)$ ***nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

Bu ta’rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$z = f(x, y) = f(P)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to‘liq orttirmasi

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \ ,$$

$z = f(x, y) = f(P)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to‘liq orttirmasi bo‘lsin.

3-ta’rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentlarning Δx *ва* Δy cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

bo‘lsa, ***funksiya R₀ (x₀,y₀) nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

4-ta’rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar **uzilish nuqtalari** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

5**-ta’rif.** $z = f(x, y)$ funksiyada x o‘zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y o‘zgaruvchini o‘zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning x ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \, .$$

Xuddi shunday, y o‘zgaruvchiga Δy orttirma berib x o‘zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

6-ta'rif. x *ва* y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx *ва* Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ **to'liq orttirma** oladi.

7-ta'rif. 1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning x ***o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi*** deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

2) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki, bir argumentli funksiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y\ ,$$

yendi x ni o'zgarmas deb $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-misol. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$u'_x = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x = \frac{x'_x(x^2+y^2+z^2) - x(x^2+y^2+z^2)'_x}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

To'la differensial. Ma'lumki, x *ва* y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx *ва* Δy orttirmalar olsa, $z = f(x,y)$ funksiya $\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning Δx *ва* Δy larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funksiyaning ***to'la differensiali*** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x,y)$ funksiyaning to'la differensiali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{1}$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y.$ To'la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya'ni $\Delta z \approx dz$ yoki $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz$, bundan

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \tag{2}$$

bo'ladi.

Uch argumentli $u = F(x,y,z)$ funksiyaning to'la differensiali

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \tag{3}$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{\left(x^2+y^2\right)'_x}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad z'_y = \frac{\left(x^2+y^2\right)'_y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

(1) formulaga asosan, $dz = \dfrac{2x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$ bo'ladi.

2-misol. $u = x^2yz^2$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2yz^2\right)'_x = yz^2(x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2yz^2\right)'_y = x^2z^2(y)'_y = x^2z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2yz^2\right)'_z = yx^2(z^2)'_z = 2x^2yz.$$

(3) formulaga asosan, $du = 2xyz^2dx + x^2z^2dy + 2x^2yzdz$ bo‘ladi.

3-misol. O‘lchovlari $a = 8м,\quad b = 6м,\quad c = 3м$ bo‘lgan parallelepipedning uzunligi va yeni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko‘paytirilsa, balandligi yesa, 15 sm kamaysa, uning hajmi qanday o‘zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $v = xyz;\quad x, y, z$ uning o‘lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

bo‘lib, shartga ko‘ra

$$x = 8,\quad y = 6,\quad z = 3,\quad dx = 0.1,\quad dy = 0.05,\quad dz = -0.15$$

bo‘lganligi uchun

$$\Delta V \approx dV = 6\cdot 3\cdot 0.1 + 8\cdot 3\cdot 0.05 + 8\cdot 6(-0.15) = -4{,}2$$

bњladi. Shunday qilib, hajm taxminan $4.2м^3$ ga kamayadi.

4-misol. To‘la differensial formulasidan foydalanib:

1) $arcctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$, 2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To‘la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang‘ich nuqtani shunday tanlash kerakki, funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo‘lsin. Shundan keyin, (2) formuladan foydalanish mumkin bo‘ladi.

1) $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right)$ ifoda $f(x, y) = arcctg(\frac{x}{y} - 1)$ funksiyaning

$P_1(1.97;1.02)$ nuktadagi kiymati deyish mumkin. Boshlang‘ich nuqta uchun $P_0=(2;1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97-2=-0.03$, $\Delta y = 1.02-1=0.02$ bo‘ladi. Yendi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{(x-y)^2}{y^2}}=-\frac{y}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f'_y(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\left(y^2+(x-y)^2\right)}{y^2}}=\frac{x}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f'_x(2;1)=-\frac{1}{1+(2-1)^2}=-0.5; \qquad f'_y(2;1)=\frac{2}{1+(2-1)^2}=1.$$

(2) formuladan foydalansak,

$$arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)\approx arcctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+(-0.5)(-0.03)+1\cdot 0.02=\frac{\pi}{4}+0.015+0.02=0.82$$

bo‘ladi.

2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$ ni $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04;\,1.99;\,1.02)$ nuktadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang‘ich nuqta uchun $P_0(1;\,2;\,1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$\Delta x = 1.04-1=0.04$, $\Delta y = 1.99-2=-0.01$, $\Delta z = 1.02-1=0{,}02$

bњladi. Xususiy hosilalarni topib, ularning $P_0(1;\,2;\,1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f_x{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_x{}'(1;2;1)=\frac{2\cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=1;$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_y'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{x^y.\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\; f_y'(1;2;1)=\frac{1^2\cdot 0}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=0;$$

$$f_z'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_z'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\quad \boldsymbol{f_z'(1;2;1)=\frac{1}{2}}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx\sqrt{1^2+\ln 1}+1\cdot 0{,}04+0\cdot(-0{,}01)+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}05$$

natijani olamiz.

Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

1) $z=f(x,y)$ **funksiyaning *ikkinchi tartibli xususiy hosilalari*** deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo‘yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}''=f_{xx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}''=f_{xy}''(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}''=f_{yx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}''=f_{yy}''(x,y).$$

$f_{xy}''(x,y)$ va $f_{yx}''(x,y)$ xususiy hosilalar **aralash xususiy xosilalar** deyiladi. Aralash xususiy hosilalar funktsiy uzluksiz bo‘lgan nuqtalarda ular o‘zaro teng bo‘ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o‘zgaruvchi bo‘yicha va $(n-m)$ marta y o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallashni bildiradi.

1-misol. $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_x'=4x^3+8xy^3+7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_y'=4x^2.3y^2+7x=12x^2y^2+7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx^2}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_x'=12x^2+8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx\partial y}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_y'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy\partial x}=\left(12x^2y^2+7x\right)_x'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy^2}=\left(12x^2y^2+7x\right)_y'=24x^2y.$$

2). ***Ikkinchi tartibli to‘la differensial*** $d(dz)=d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagi formula bo‘yicha topiladi.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (1)$$

2-misol. $z=x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$z_x'=\left(x^2y^3\right)_x'=2xy^3$; $z_y'=3x^2y^2$; $z_{xx}''=2y^3$, $z_{xy}''=6xy^2$, $z_{yx}''=6xy^2$,

$z_{yy}''=6xy^2$,

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to‘la differensial

$$d^2z=2y^3dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya, ikki o‘zgaruvchili funksiya, ikki o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish va o‘zgarish sohalari, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi. Xususiy orttirma, xususiy hosila, to‘la differensial, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to‘la differensial, taqribiy hisoblash.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy xosilasi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo‘ladi?
4. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning to‘la differensiali deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning to‘liq orttirmasi va to‘la differensiali orasida bog‘lanish bormi?
6. To‘la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?
7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?
8. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensiali nimaga teng?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

1) $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$; 2) $z = \dfrac{xy}{x-y}$; 3) $u = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

2. Quyidagi funksiyalarning to‘la differensiallarini toping:

1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 2) $u = x^{y^2 z}$;3) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$;

4) $s = x \ln t$.

3. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = -0{,}2$ bo‘lganda dz *ва* Δz larni hisoblang.

4. 1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sin 32^0 \cdot \cos 59^0$ larni taqribiy hisoblang.

5. $z = x^3 y + y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$ funksiya uchun, $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ yekanligini tekshiring.

7. $u=arctg(2x-t)$ bo‘lsa, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}=0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z=(x^2+y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ funksiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

10. $u=x^4y^2$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

11. $z=\sin x\cos y$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

12 1) $u=\frac{y^2}{x^2}$; 2) $u=x\ln\frac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to‘la differensiallarini toping.

4.4-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining tatbiqlari

1. *Ikki argumentli funksiya yekstremumi*.

1-ta’rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya’ni

$$f(x_0;y_0)>f(x,y)$$

bo‘lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada *maksimumga* yega deyiladi.

2-ta’rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_1(x_1;y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo‘lsa, ya’ni

$$f(x_1;y_1)<f(x,y)$$

bo‘lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $P_1(x_1;y_1)$ nuqtada *minimumga* yega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi yoki minimumi uning yekstremumi deyiladi. Funksiya yekstremumga yega bo‘lgan nuqta uning yekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya yekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Yekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0; y_0)$ nuqta, uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiyaning yekstremum nuqtasi bo‘lsa,

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right\}$$

bo‘ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hyech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmaydi.

Bunday nuqtalarga yekstremum uchun *kritik (stasionar)* nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki, hamma kritik nuqtalar ham yekstremum nuqtalar bo‘lavermaydi. Kritik nuqtada yekstremum bo‘lmasligi ham mumkin.

Yekstremumning yetarli shartlari

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0); \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0); \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

bilan belgilaymiz va

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo‘lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada yekstremumga yega bo‘lib: 1) A<0 bo‘lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga; 2) A>0 bo‘lganda minimumga yega bo‘ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo‘lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada yekstremum yo‘q.

3. $\Delta = AC - B^2 = 0$ bo‘lsa, yekstremum bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya yekstre- mumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

yekstremumga yega bo‘lishning zaruriy shartidan:

$$\left.\begin{array}{l}4x^3-4x+4y=0\\4y^3+4x-4y=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x^3-x+y=0\\y^3+x-y=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}y=x-x^3=x\left(1-x^2\right)\\y^3+x-y=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[x\left(1-x^2\right)\right]^3+x-x^{+x^3}=0,\\ \left(1-x^2\right)^3=-1, 1-x^2=-1, x^2=2\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x_1=0; x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{2}\\ y_1=0; y_2=\sqrt{2}, y_3=-\sqrt{2}\end{array}\right\}.$$

Demak, uchta O(0,0), $P_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ va $P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ kritik nuqtalarga yega bo‘lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo‘q, chunki $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-4;\ f''_{xy}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=12y^2-4.$$

O(0,0) nuqtada yekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A=-4,\quad B=4,\quad C=-4;\quad \Delta=AC-B^2=$-4·(-4)-4²=0 bo‘lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo‘lishini ko‘ramiz, masalan OX o‘qi bo‘yicha ($y=0$)

$$f(x,y)_{y=0}=f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.$$

$y=x$, bissektrisa bo‘yicha,

$$f(x,y)\big|_{y=x}=f(x,x)=2x^4>0$$

bo‘ladi. Shunday qilib, O(0,0) biror atrofida $\Delta f(x,y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak yekstremum yo‘q.

$P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC-B^2=$400-16>0 va A=20>0 demak $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga yega. $f_{\min}$=-8;

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ nuktada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun A=20, B=4, C=20 bo‘lib, $\Delta=AC-B^2=$400-16>0 va A=20>0 bo‘lganligi uchun $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga yega bo‘ladi, $f_{\min}$=-8

2-misol. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ funksiyaning yekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

P_0(1;1) nuqtada xususiy hosilalar mavjud yemas. Demak, P_0 (1;1) nuqta kritik nuqta bo‘ladi. Bu nuqtada yekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nukta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z=\sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuktaning istalgan atrofida saqlanadi, ya’ni $P_0(1;1)$ nuktada funksiya minimumga yega $z_{\min}=f$ (1;1)=0.

*2.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini topish***.**

Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o‘zining *yeng katta va yeng kichik qiymatiga* yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida yerishadi.

1-misol. $z=x^2+y^2-xy+x+y$ funksiyaning $x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$ sohadagi yeng katta va yeng kichik kiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y+1, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1=0 \end{cases}$$

bundan $x=-1,\ y=-1$ bo‘lib, P_0(-1,-1) kritik nuqtaga yega bo‘lamiz. Funksiyani soha chegarasida tekshiramiz: A0 chegarada $y=0$ bo‘lib, $z=x^2+x$ funksiya xosil bo‘ladi. Bu funksiyaning yekstremumi: $z'_x=2x+1=0$,

$x=-\frac{1}{2}=-0{,}5$ nuљtada bo‘ladi.

Demak, P_1(-0,5, 0) AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x=0$, BO chegarada $z=y^2+y$ funksiya hosil bo‘lib, $z'_y=2y+1=0$ y=-1/2. Demak, $P_2\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo‘ladi. Tenglamasi $y=-3-x$ bo‘lgan AB chegarada $z=3x^2+9x+6$ funksiya hosil bo‘lib, $z'_x=6x+9=0$ $x=-\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y=-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$, demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ bo‘ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1,-1) = -1 ;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2},-0\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} ;$$

$$z_4 = f(0) = f(0,0) = 0 ;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3,0) = 6 ;$$

$$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6 .$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab,

$$z_{eng\,kat.} = f(A) = f(B) = 6 \quad va \quad z_{eng\,kich.} = f(P_0) = -1$$

degan xulosaga kelamiz.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yekstremumga yega bo‘lishning zaruriy va yetarli shartlari, yeng kichik va yeng katta qiymatlar, xarajat funksiyasi, foyda funksiyasi, tovarning limitik bahosi, limitik xarajat, foyda funksiyasi maksimumi. Integral yig‘indi, ikki karrali integral, ichki integral, tashqi integral, silindrik jismning hajmi, statik momentlar, og‘irlik markazi, inersiya momentlari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funksiyaning yekstremumga yega bo‘lishining zaruriy sharti nima?

2. Ikki argumentli funksiyaning yekstremumga yega bo‘lishining yetarli sharti nima?

3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?

4. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning yekstremumini tekshiring.

1. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

2. $z = xy(12 - x - y)$.

3. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.

4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.

5. $z = x^2 + 3(y + 2)^2$.

6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20$.

7. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.

8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10$.

9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

Berilgan $z = f(x, y)$ funksiyaning berilgan chiziqlar bilan chegaralangan D yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini toping.

1. $z = x^2 - y^2 - x + y;\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1.$

2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;\ x = 0,\ y = 0,\ 5x - 3y + 45 = 0.$

3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5;\ x + y = 5,\ x = -1,\ y = -1.$

4. $z = 3y - 2x - xy;\ x = 0,\ y = 0,\ 3x - 4y = 12.$

5. $z = x^2 - 2xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2.$

6. $z = x^2 + 6xy - x + 3y;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 3.$

V-BOB. Integral hisob

5.1-§. Aniqmas integral va uning xossalari

1. Boshlang‘ich funksiya. Ma’lumki matematikada amallar juft-juft bo‘lib uchrab keladi. Jumladan, qo‘shish va ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish, darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensialash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug‘iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo‘lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to‘g‘ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lsin. Ma’lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning ***boshlang‘ich* (dastlabki) *funksiyasi*** deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlanђich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bњladi, chunki $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ bњladi.

2. Aniqmas *integral va uning xossalari.* Ta’rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, $F(x)+C$ (bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ ***funksiyaning aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o‘zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang‘ich funksiyalari to‘plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas *integralning xossalari*:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad ва \qquad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad ва \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta’rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bњladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o‘quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o‘zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) њzgarmas ko‘paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya’ni $K = const \neq 0$ bo‘lsa,

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)\,dx.$$

3. Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiyaga asosan uning boshlang‘ichini topish, berilgan funksiyani differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig‘indining, ko‘paytmaning, bo‘linmaning hamda murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o‘rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo‘q. masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang‘ichlarining ma’lum bo‘lishiga qaramasdan, ular ko‘paytmasining, bo‘linmasining boshlang‘ichini topishda aniq bir qoida yo‘q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo‘ladi. Funksiyani integrallash ya’ni boshlang‘ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko‘rsatadiki, ular yordamida ko‘p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1;\quad 2)\ \int dx = x + C;\quad 3)\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4)\ \int \sin x dx = -\cos x + C;\quad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C;\quad 6)\ \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1);\quad 8)\ \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;\quad 10)\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

$$11)\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;\quad 12)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C,\ \ a \neq 0;$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - k}) + C.$$

Bu formulalarning to‘g‘riligini, tekshirish tengliklarning o‘ng tomonidagi ifodalar differensiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko‘rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \int x^3\ dx + 5\int \sin x\, dx - 9\int dx$$

bo‘ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \ \ 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3)\,.$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o‘zining ixtiyoriy o‘zgarmasini qo‘shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o‘zgarmasni qo‘shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lsa, $C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C\,.$$

Integralning to‘g‘ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o‘ng tomonini differensiallash bilan ko‘rsatish mumkin(buni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int x^{\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C$$

bњladi.

3-misol. $\int \frac{3\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = 3\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = 3\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + 3\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = 3(tgx - ctgx) + C.$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Boshlang‘ich funksiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang‘ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog‘lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to‘g‘ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int \frac{5x^8+6}{x^4}dx$; 2. $\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)dx$; 3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$

4. $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+3dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 5. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$; 6. $\int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$; 7. $\int \frac{5+3tg^2x}{\sin^2 x}dx$;

8. $\int \left(\frac{4}{9+x^2} - \frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$ 9. $\int \frac{dx}{x^2-49}$; 10. $\int \frac{dx}{x^2+16}$;

11. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$; 12. $\int \left(\frac{7}{x^2+7} - \frac{6}{x^2-3}\right)dx$.

5.2-§. Aniqmas integralda integrallash usullari

1. O‘zgaruvchini almashtirish. Ko‘p hollarda yangi o‘zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x)=t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o‘zgaruvchi bo‘lib, o‘zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int(3x+1)^7\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\dfrac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int(3x+1)^7dx=\int t^7\,\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{t^8}{24}+C=\frac{(3x+1)^8}{24}+C$$

bњladi.

2-misol. $\int\sqrt[3]{1+x^2}\;x\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1+x^2=t$ o‘zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\dfrac{dt}{2}$ bo‘lib,

$$\int\sqrt[3]{1+x^2}\cdot xdx=\int\sqrt[3]{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}t\sqrt[3]{t}+C=\frac{3}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2}+C$$

bњladi.

3-misol. $\int\cos mxdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx=\dfrac{1}{m}d(mx)$ o‘zgartirish olib,

$$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\int\cos mxd(mx)=\frac{1}{m}\sin mx+C$$

natijaga ega bo‘lamiz. Bunday integrallashga ***bevosita integrallash*** deb ataladi. Chunki $mx=t$ bilan o‘zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o‘zgaruvchini almashtirib o‘tirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int (\ln x)^3 \dfrac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x = t$ bilan yangi o‘zgaruvchini almashtirib, $\dfrac{dx}{x} = dt$

ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

bњladi.

5-misol. $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x = t^2$ bilan yangi o‘zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topib, $dx = 2tdt$ bo‘lganligi uchun,

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

bњladi.

6-misol. $\int e^{\sin x} \cdot \cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos xdx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos xdx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$xdx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos xdx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax+b), \ ....$$

tengliklardan foydalanib, o‘zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

2. Bo‘laklab integrallash. Bo‘laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko‘paytmasi differensiali formulasiga asoslangan.

Ma’lumki, $d(uv) = udv + vdu,$ bundan $udv = d(uv) - vdu.$ Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

natijaga ega bњlamiz. Shunday qilib,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga ***bo‘laklab integrallash*** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int udv$ integraldan ikkinchi $\int vdu$ integralga o‘tiladi. Demak, bo‘laklab integrallashni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo‘lgandagina bu usulni qo‘llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko‘paytuvchilarga qulay bo‘laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo‘ladi. du ni topish uchun u ning differensiali topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o‘zgarmas C ga bog‘liq bo‘lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo‘lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo‘lishi kerak.

Bo‘laklab integrallash formulasi ko‘proq:

1) $\int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mxdx,\ \int p(x)\cos axdx \quad va$

2) $\int p(x)\ln xdx, \int p(x)\arcsin xdx, \int p(x)\arccos xdx, \int p(x) arctgxdx, \int p(x) arcctgxdx$

(bularda $p(x)$ biror darajali ko‘phad) ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko‘phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda

$$\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\quad arctgx,\quad arcctgx \text{ lar,}$$

qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo‘laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x,\ dv = \cos xdx$ deb

bo‘laklasak, $du = dx,\quad v = \int \cos xdx = \sin x$ bo‘lib, (1) formulaga asosan,

$$\int \underset{u}{x}\,\underset{dv}{\cos x dx} = \underset{u}{x}\,\underset{v}{\sin x} - \int \underset{v}{\sin x}\,\underset{du}{dx} = x\sin x + \cos x + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x\, dx$ hosil bo‘ldi, bu jadval integrali bo‘lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2 e^{3x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$ ko‘rinishda bo‘laklab olsak,

$$du = 2xdx, \quad v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

hosil bo‘ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x}\, 2xdx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

bo‘ladi. Oxirgi hosil bo‘lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo‘laymiz.

$$\int xe^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2 e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1\right] =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$$

hosil bo‘ladi.

3-misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo‘laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x, \ du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \ v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

hosil bo‘ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o‘xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo‘laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo‘llash bilan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo‘lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \qquad \text{ёки} \qquad J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Tayanch ibora va tushunchalar

O‘zgaruvchini almashtirish, bevosita integrallash, bo‘laklab integrallash, bo‘laklab integrallashning maqsadga muvofiqligi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali nimaga teng?
2. O‘zgaruvchini almashtirib integrallashning mohiyati nima?
3. Bevosita integrallash nima?
4. Bo‘laklab integrallash usuli nimaga asoslanadi?
5. Bo‘laklab integrallash formulasini yozing?
6. Bo‘laklab integrallash qanday holda maqsadga muvofiq bo‘ladi?
7. Qanday hollarda bo‘laklab integrallashdan foydalaniladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x dx$. 2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5}dx$.

3. $\int e^{-x^3}x^2dx$. 4. $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$. 5. $\int (e^x+e^{-\frac{x}{2}})dx$. 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

7. $\int (5-2x)^9dx$. 8. $\int \sqrt[3]{7-3x}dx$. 9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}}dx$. 10. $\int \cos(1-3x)dx$.

11. $\int \sin(5x+7)dx$. 12. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. 13. $\int 3^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x}dx$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$. 17. $\int x^2\sin x dx$. 18. $\int x\ln x dx$. 19. $\int arctgx dx$.

20. $\int \arcsin x dx$. 21. $\int x^2e^{2x}dx$. 22. $\int e^x\sin x dx$. 23. $\int (x+3)\sin x dx$.

24. $\int x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$. 25. $\int xarctgx dx$. 26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$. 27. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx$.

5.3-§. Rasional va irrasional funksiyalarni integrallash

*1. Rasional kasr funksiyalarni integrallash. 1). To‘g‘ri va noto‘g‘ri kasr rasional funksiyalar haqida***.** Yuqorida ko‘rsatilgan integrallash usullari yordamida hamma integrallarni hisoblash mumkin deb bo‘lmaydi.

Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma’lumki, har qanday rasional funksiyani ushbu ko‘rinishida ifodalash mumkin, ya’ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n}.$$

Curatdagi ko‘phadning darajasi maxrajdagi ko‘phad darajasidan kichik, ya’ni $m<n$ bo‘lsa, berilgan kasrga ***to‘g‘ri kasr rasional*** funksiya deyiladi. Suratdagi ko‘phadning darajasi $m\geq n$ bo‘lsa, ***noto‘g‘ri kasr rasional funksiya*** deyiladi. Kasr noto‘g‘ri kasr rasional funksiya bo‘lsa, suratni maxrajga, ko‘phadni ko‘phadga

bo‘lish qoidasiga asosan bo‘lib, uning butun qismini ajratib, uni butun va to‘g‘ri kasr rasional funksiyaga keltirish mumkin. Masalan, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}$ noto‘g‘ri kasr

rasional funksiyani, x^3+3x^2+3x+1 књр ќadni x^2-x књр ќadga bo‘lib,

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}=x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto‘g‘ri kasr rasional funksiya bo‘lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun rasional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g‘ri rasional kasr funksiyadan iborat. $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto‘g‘ri kasr rasional funksiyani integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g‘ri kasr rasional funksiyani integrallashga keltiriladi.

2). To‘g‘ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash va ularni integrallash

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k>1$ *бутун сон*); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $(\frac{p^2}{4}-q<0$ ya’ni, kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $(n>1$ butun son, $\frac{p^2}{4}-q<0)$ rasional to‘g‘ri kasrlarga ***sodda kasr rasional funksiyalar*** deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin, ya’ni,

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

bњladi. Endi ushbu

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

integralni ќisoblaymiz.

Oldin xususiy hol $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to‘la kvadrat ajratib, $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx = \left| \begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)},$$

bu yerda $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda 8) jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \qquad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax+B = (2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

shakl o‘zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

Oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right| + C_1$$

bo‘lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2 .$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int \frac{x^4}{x^2+9}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto‘g‘ri kasr rasional funksiyadan iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4 & x^2+9 \\ \cline{3-3}
 & x^4+9x^2 & x^2-9 \\ \cline{1-2}
- & -9x^2 & \\
 & -9x^2-81 & \\ \cline{1-2}
 & 81 &
\end{array}$$

Demak, $$\frac{x^4}{x^2+9} = x^2-9+\frac{81}{x^2+9}$$

bњladi.

Shunday qilib,

$$\int \frac{x^4}{x^2+9}dx =$$

$$= \int\left(x^2-9+\frac{81}{x^2+9}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81\frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 arctg \frac{x}{3} + C.$$

2-misol. $\int \frac{x+3}{x^2-8x+25}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratamiz: $x^2-8x+25=x^2-8x+16-16+25=(x-4)^2+9,$ hamda $x-4=t,\ dx=dt$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\frac{x+3}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{t+4+3}{t^2+9}dt=\int\frac{tdt}{t^2+9}+7\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+9}+7\int\frac{dt}{t^2+3^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right|+\frac{7}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-8x+25)+\frac{7}{3}arctg\frac{x-4}{3}+C.$$

3. To‘g‘ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash.

$\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g‘ri kasr rasional funksiyaning maxrajini

$$P(x)=(x-a)^r\cdot(x-b)^s.....(x^2+2px+q)^t\cdot(x^2+2kx+\ell)^m.....,$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, bu funksiyani yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_r}{(x-a)^r}+\frac{B_1}{(x-b)}+...+\frac{B_s}{(x-b)^s}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+...+$$

$$+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\frac{F_1x+E_1}{\left(x^2+2kx+\ell\right)}+...+\frac{F_mx+E_m}{\left(x^2+2kx+\ell\right)^m}+... \qquad (1)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $r,s,....t,m,$ musbat butun sonlar, $a,\ b,\ p,\ q,\ k,\ \ell$, haqiqiy sonlar.

$A_1,\ A_2,....\ A_r,\ B_1,...,B_s,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to‘g‘ri rasional funksiyaning ***sodda kasrlar orqali yoyilmasi*** deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$

koeffisiyentlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko‘paytiramiz. $R(x)$ ko‘phad bilan (1) yoyilmaning o‘ng tomonida hosil bo‘lgan ko‘phad o‘zaro teng bo‘lishi uchun bir xil darajali x lar koeffisiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ .....,\ M_1,\ N_1,....,$ noma’lum koeffisentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffisiyentlarni topamiz.

Rasional funkiya yoyilmasidagi noma’lum koeffisiyentlarni bunday usul bilan topishga ***noma’lum koeffisiyentlar usuli*** deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ rasional funksiyani sodda kasrlar yoyilmasi ko‘rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo‘yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni x^2-5x+6 ga ko‘paytirib $2x-1=A_1(x-2)+A_2(x-3)$ *ёки* $2x-1=(A_1+A_2)x-2A_1-3A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A_1+A_2=2, \\ -2A_1-3A_2=-1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma’lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan $A_1=5,\ A_2=-3$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

hosil bo‘ldi.

2-misol. $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ rasional kasrni, sodda kasrlar yig‘indisi ko‘rinishida yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko‘paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-1=A_1(x^2+)^2+(M_1x+N_1)x(x^2+1)+(M_2x+N_2)x \quad \text{ёки}$$

$$x^2-1=(A_1+M_1)x^4+N_1x^3+(2A_1+M_1+M_2)x^2+(N_1+N_2)x+A_1$$

$x^0, x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ larning koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$
\begin{aligned}
&x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,\\
&x^3 \div N_1 = 0,\\
&x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,\\
&x^1 \div N_1 + N_2 = 0,\\
&x^0 \div A_1 = -1
\end{aligned}
$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $N_1 = 0,\ N_2 = 0,\ A_1 = -1,\ M_1 = 1,\ M_2 = 2$ bo‘ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$
\frac{x^2 - 1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}
$$

bo‘ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning ayirmasi ko‘rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$
\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C =
$$

$$
= \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C
$$

bo‘ladi.

4-misol. $\int \frac{x-2}{x^3 + 2x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to‘g‘ri rasional funksiyani sodda kasrlar yig‘indisi shaklida yozamiz:

$$
\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}
$$

oxirgi tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko‘paytirib,

$$x-2 = Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2 \quad yoki \quad x-2=(A+C)x^2+(2A+B)x+2B$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Endi x ning bir xil darajalilari koeffisiyentlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0 \\ x^1 & 2A+B=1 \\ x^0 & 2B=-2 \end{array} \quad \text{bundan} \quad \begin{array}{c} A+C=0 \\ 2A+B=1 \\ B=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} A=1 \\ C=-1 \end{array}$$

bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$$

Natijada

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

bo‘ladi.

2. Ayrim irrasional funksiyalarni integrallash. ***Irrasional funksiyalarni integrallash*** ko‘p hollarda o‘zgaruvchini almashtirish bilan rasional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irrasional funksiyalarning ayrimlarini љaraymiz.

1. $\int x^m (a+bx^n)^p$ ko‘rinishdagi integralni hisoblash talab etilsin,

bunda m, n, p rasional sonlar, a va b lar no‘ldan farqli o‘zgarmaslar.

1) p butun son bo‘lsa, Nyuton binomi bo‘yicha yoyish bilan integrallanadi;

2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo‘lsa, $a+bx^n = t^s$ almashtirish orqali

rasionallashtiriladi, bunda s p kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ butun bo‘lsa, $ax^{-n}+b=t^s$ almashtirish olinib,

rasional funksiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})dx$ ko‘rinishida yozib,

$$m=-\frac{2}{3}\,,\; n=\frac{1}{3}\,,\;\; p=\frac{1}{2}\,,\;\; \frac{m+1}{n}=\frac{-2/3+1}{1/3}=\frac{1/3}{1/3}=1$$

bo‘lganligi uchun $(1+x^{1/3})=t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3}=t^2-1\,,\;\; \frac{1}{3}x^{-2/3}\,dx=2tdt\,, \qquad x^{-2/3}dx=6tdt$$

bo‘ladi. Bularni berilgan integralga qo‘ysak,

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx=\int t\cdot 6tdt=6\int t^2dt=6\cdot\frac{t^3}{3}+C=2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2}+C$$

bo‘ladi.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz.

Bunday ko‘rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratish bilan $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ yoki $\int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$ to‘la kvadrat ajratib, $x+1=u$ desak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right|+C=\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

bo‘ladi.

3) $\int\frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integral, $\frac{1}{x+\alpha}=t$ almashtirish orqali **2.** ko‘rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x+1}=t$ bilan almashtirsak,

$$t(x+1)=1,\ tx+t=1,\ tx=1,\ x=\frac{1-t}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+2\frac{1-t}{t}+2}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}+2}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o‘quvchiga havola qilamiz).

Tayanch ibora va tushunchalar

Kasr rasional funksiyalar, to‘g‘ri va noto‘g‘ri kasr rasional funksiyalar, ko‘p hadni ko‘p hadga bo‘lish, sodda kasrlar, rasional funksiya yoyilmasi, noma’lum koeffisiyentlar usuli, irrasional funksiyalar.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Butun rasional funksiya nimadan iborat?
2. Kasr rasional funksiyalar qanday?
3. To‘g‘ri va noto‘g‘ri kasr rasional funksiyalr deb nimaga aytiladi?
4. Noto‘g‘ri kasr rasional funksiyani integrallash, to‘g‘ri rasional funksiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?
5. Sodda kasr rasional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
6. Sodda kasr rasional funksiyalar qanday integrallanadi?
7. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nima?
8. Qanday funksiyalar sinfiga irrasional funksiyalar deyiladi?
9. Irrasional funksiyalar qanday integrallanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu rasional funksiyalarni integrallang.

$$1)\int\frac{x^3}{x-3}dx;\quad 2)\int\frac{x^4}{x^2+25}dx;\quad 3)\int\frac{x-5}{(x-2)(x+4)}dx;\quad 4)\int\frac{2x+9}{x^2+x+2}dx;$$

$$5)\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx;\quad 6)\int\frac{5x-1}{2x^2+x-3}dx;\quad 7)\int\frac{2x+5}{(x-4)(x+5)}dx;\quad 8)\int\frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x}dx.$$

2. Ushbu irrasional funksiyalarni integrallang.

$$1)\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx;\quad 2)\int\frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx;\quad 3)\int\frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}}dx;$$

$$4)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}};\quad 5)\int\frac{\sqrt{x}+3}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx.$$

5.4-§.Trigonometrik funksiyalarni integrallash

1. Har xil argumentli sinus va kosinuslar ko‘paytmalari shaklidagi funksiyalarni integrallash.

$$\int\sin mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\sin nxdx,\quad \int\cos mx\cos nxdx \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi integrallarni ḱisoblaymiz. Maktab kursidan ma’lum bo‘lgan trigonometrik funksiyalar ko‘paytmasini, yig‘indiga keltirish

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

formulalardan foydalanib, (1) ko‘rinishdagi integrallarni

$$\int\sin axdx,\quad \int\cos bxdx$$

integrallardan biriga keltirib itegrallanadi.

1-misol. $\int\sin 2x\cos 7xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalarning birinchisidan

$$\sin 2x\cos 7x = \frac{1}{2}\left[\sin(2x+7x)+\sin(2x-7x)\right] = \frac{1}{2}(\sin 9x \sin 5x),$$

$$\int \sin 2x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 9x - \sin 5x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 9x dx - \frac{1}{2}\int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}(-\cos 9x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(-\cos 5x) + C = \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{18}\cos 9x + C.$$

natijaga ega bo‘lamiz.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash***.** Bunda m, n lar butun sonlar. Xususiy hollarda m yoki n sonlardan birontasi 0 ga teng bo‘lishi ham mumkin.

1) m yoki n sonlardan bittasi toq bo‘lsin. Bu holda integral rasional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash mohiyati quyidagi misollardan tushunarli bo‘ladi.

3-misol. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d(\cos x)$ va $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ekanligini hamda $\cos x = z$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x(-d\cos x) =$$

$$= -\int (1-z^2)z^4 dz = -\int (z^4 - z^6)dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

4-misol. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d\cos x$ bo‘lgani uchun, $t = \cos x$ almashtirish olsak,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2}dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

bњladi.

Bu usuldan m va n sonlardan bittasi toq va musbat boshqasi ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lganda ham foydalanish mumkin.

2). Endi m va n sonlar ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo‘lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

formulalardan foydalanib, darajalarni pasaytirib, integrallanadi.

6-misol. $\int \sin^2 x\, dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralni izohlarsiz hisoblaymiz:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

7-misol. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Trigonometrik funksiyalarning darajalarini pasaytirish formulalaridan foydalanib, љuyidagi natijaga kelamiz:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int (\sin^2 2x \cos 2x dx) =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3. *Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar*. Biz yuqorida elementar funksiyalarni o‘z ichiga olgan muhim integrallash usullarini ko‘rdik. Lekin praktikada faqat shu usullardan aynan foydalanamiz degan fikr bo‘lmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, integral ostidagi funksiyaning berilishiga qarab unga mos mulohazalardan foydalanish kerak. Masalan,

$$\int \frac{3x^2+6x-4}{x^3+3x^2-4x+5}dx = \int \frac{d(x^3+3x^2-4x+5)}{x^3+3x^2-4x+5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$
$$= \ln\left|x^3+3x^2-4x+5\right| + C$$

yoki

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+3)}{x^3+3} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + C$$

integrallashni bajarish mumkin.

Juda ko‘p integrallarni hisoblashda ayrim xususiy usullardan foydalanib oldingi hisoblangan integrallarga keltiriladi. Shuning uchun praktikada integrallashda tayyor qo‘llanmalardan foydalanish ham mumkin. Integrallashning bayon etilishidan ma’lumki integrallash texnikasi differensiallashdan murakkabroqdir. Shuning uchun ham integrallashda shunday ko‘nikmalar kerakki, bunga ko‘p sondagi misollarni yechish natijasida erishish mumkin.

Ma’lumki differensial hisobda istalgan elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin edi va u yana elementar funksiyalar bilan ifodalanar edi. Integral hisobda esa masala boshqacharoq bo‘lib, ko‘plab misollar keltirish mumkinki, integral $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right)$ostidagi funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari mavjud bo‘lishiga qaramasdan, ular elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Bunday integrallar yaxshi o‘rganilgan va ulardan amaliyotda foydalanish uchun tayyor jadvallar, grafiklar tuzilgan.

Tayanch ibora va tushunchalar

Trigonometrik funksiyalarni integrallash, trigonometrik funksiyalar ko‘paytmasini yig‘indiga keltirish formulalari, sinus va kosinus funksiyalar ko‘paytmasi darajalaridan birortasi toq, ikkalasi ham juft yoki toq, aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Trigonometrik funksiyalarning ko‘paytmasini yig‘indiga keltiriladigan formulalarni yozing?

2. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalar rasionallashadi?

3. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalarning tartibini pasaytirish bilan integrallanadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x \sin 7x dx$. 2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$. 3. $\int \sin x \sin 3x dx$.

4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$. 5. $\int \cos 4x \cos 2x dx$. 6. $\int \sin 3x \cos x dx.$.

7. $\int \sin x \cos^4 x dx$. 8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$. 9. $\int \sin^2 5x dx$.

10. $\int \cos 7x \cos 3x dx$. 11. $\int \sin 4x \sin 2x dx$.

12. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 13. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$. 14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.

16. $\int \sin^4 x dx$. 17. $\int \cos^4 x dx$. 18. $\int \sin^5 x dx$.

VI-BOB. Aniq integral

6.1-§. Aniq integral va uning asosiy xossalari

1. Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida.

Aniq integral matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi. Material nuqta F o‘zgaruvchan kuch ta’sirida OX o‘qi bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsin. F kuch ta’sirida material nuqta *a* nuqtadan *v* nuqtaga o‘tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch x ning funksiyasi bo‘ladi. $F(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

Yechish: $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nuqtalar orqali $\lfloor x_{i-1,} x_i \rfloor$ šismiy kesmalarga ajratamiz.

$\bar{F} \rightarrow$

0 $a = x_0,\ \ x_1, ...,\ \ x_n = b$ X

1-chizma.

Mexanikadan ma’lumki kuch o‘zgarmas bo‘lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot 1$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qismiy kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$ larni hisoblaymiz $(i = 1, n)$. Bunda har bir qismiy kesmada bajarilgan ish

$$A_i = F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi. $[a,b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi.

$\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, F *o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash* uchun (1) ko'rinishdagi cheksiz ko'p sondagi cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko'p sondagi geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

*2. Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi***.** Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. $[a,b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,\ n$ qismiy kesmalarga ajratamiz, har bir qismiy kesmada bittadan $c_1,\ c_2,\ ....\ ,c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n$ yig'indini tuzamiz? bu yig'indiga $y = f(x)$ fugksiya uchun $[a,b]$ kesmadagi integral yig'indi deyiladi. $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

Ta'rif. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ integral yig'indining $[a,b]$ kesmaning $[x_{i-1},\ x_i](i = 1,2,3,...,n)$ qismiy kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $c_1,\ c_2,\ ....\ ,c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \to 0$ dagi chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***aniq integrali*** deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

bo'lib, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u *integrallanuvchi* ya'ni bunday funksiyaning *aniq integrali* mavjuddir.

3. Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_3(x)dx;$$

2) o‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya’ni

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx;$$

3) $[a,b]$ kesmada $f(x)\ge 0$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

bo‘ladi;

4) $[a,b]$ kesmada $f(x)\le g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi;

5) c $[a,b]$ kesmadagi biror nuqta bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi;

6) m va M sonlar $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo‘lsa,

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi;

7) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;$

8) $\int_a^a f(x)dx=0;$

9) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(n)dn$

bo‘ladi;

10) $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bunga o‘rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

4. Aniq integralni hisoblash. N’yuton-Leybnis formulasi.

Aniq integralning ta’rifiga asosan, ya’ni cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig‘indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog‘lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x), [a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

formula o‘rinli bo‘lib, bunga *N’yuton-Leybnis formulasi* deyiladi. Bundan foydalanib *aniq integralning kattaligi* hisoblanadi.

Shunday qo‘yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang‘ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to‘laroq shug‘ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o‘z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int\limits_1^4 x^2dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int\limits_1^4 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang‘ich funksiyasini oldik, buning o‘rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3}+C$ boshlang‘ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo‘ladi. Haqiqatan, ham

$$\left.\left(\frac{x^3}{3}+C\right)\right|_1^4 = \frac{4^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{64}{3}+C-\frac{1}{3}-C = \frac{63}{3} = 21$$

bo‘ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo‘lgan boshlang‘ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4,\ dx = 2tdt$ bo‘lib,

$x = 0$ bo‘lganda, $\sqrt{0+4} = t,\ \ t = 2,\ \sqrt{5+4} = t,\ \ t = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int_2^3 (t2-4)t2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 8\int_2^3 t^2dt = 2\left.\frac{t^5}{5}\right|_2^3 - 8\left.\frac{t^3}{3}\right|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}(3^5 - 2^5) - \frac{8}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{2}{5}\cdot 211 - \frac{8}{3}\cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Demak, *aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirilganda* o‘zgaruvchilar bo‘yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o‘zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x\sin xdx$ integralni hisoblang.

Yechish: *Bo‘laklab integrallash*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos\pi + \sin x\pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

Tayanch ibora va tushunchalar.

Yuzalarni hisoblash, egri chiziqli trapesiya, egri chiziq yoyining aylanma jism hajmi, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday masalalar aniq intgralga keltiriladi?
2. Integral yig‘indi qanday tuziladi?
3. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integral qanday belgilanadi?
5. Funksiya integrallanuvchi bo‘lishi uchun qanday xossaga ega bo‘lishi kerak?
6. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Nyuton-Leybnis formulasini yozing?
8. Aniq integralni bo‘laklab integrallash nimadan iborat?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_2^4 (x^3 + x)\, dx$. 2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$. 4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

5. $\int_{-5}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$. 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$. 7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$. 8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$.

9. $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\, dx$. 10. $\int_{\pi}^{0} x\cos x\, dx$.

6.2-§. Aniq integralni taqribiy hisoblash

Hisoblash amaliyotida ko‘pincha boshlang‘ich funksiyalari elementar bo‘lmagan, ya’ni chekli ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan funksiyalardan olingan integrallar bilan, shuningdek, jadval yoki grafik usulda berilgan funksiyalardan olingan integrallar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday hollarda Nyuton - Leybnis formulasini qo‘llab bo‘lmaydi va integral taqribiy usullar yordamida hisoblanadi.

Hisoblash mashinalarining jadal taraqqiy etib borishi natijasida aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari keng tatbiq qilinmoqda.

Integral ostidagi funksiya elementar boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lsada, biroq, uni Nyuton - Leybnis formulasi bo‘yicha hisoblash murakkab va katta hajmdagi hisoblash ishlarini talab etadigan hollarda ham taqribiy hisoblash usullari afzal bo‘ladi.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo‘lib ulardan ko‘proq ishlatiladiganlari trapesiyalar va Simpson usullaridir.

1. Trapesiyalar formulasi

Trapesiyalar formulasi

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni hisoblash talab etilsin $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ nuqtalar orqali n ta teng qismiy kesmalarga ajratamiz. Funksiyaning x_i nuqtalaridagi $y_i = f(x_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz $(i = 1, n)$. $[x_{i-1}, x_i]$ qismiy kesmalarning uzunligi $\frac{(b-a)}{n}$ kattalik integrallash qadami deyiladi. Bo‘linish nuqtalaridan $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ ordinatlarni o‘tkazamiz. Ordinatlar oxirlarini to‘g‘ri chiziqlar bilan tutashtirib trapesiyalar hosil qilamiz.

Aniq integralning taqribiy qiymati uchun, hosil bo‘lgan trapesiyalar yuzlarining yig‘indisini olamiz. Bu holda

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+$$
$$+\frac{y_2+y_3}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+.....+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

Shunday qilib, natijada

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+.....y_{n-1}\right] \qquad (1)$$

formulani olamiz. (1) formulaga ***trapesiyalar formulasi*** deb ataladi. Bu formulada egri chiziqli trapesiyalarning yuzlarini to‘g‘ri chiziqli trapesiyalar yuzlari bilan taqriban almashtirdik. n o‘sib borishi bilan to‘g‘ri chiziqli trapesiyalarning yuzi egri chiziqli trapesiyalar yuzlariga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu taqribiy hisoblashda yo‘l qo‘yilgan ***absolyut xato*** .

$$M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ifodadan katta emasligini ko‘rsatish mumkin, bunda M_2, $|f''(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

2. Simpson formulasi. $[a,b]$ kesmani $n=2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo‘lamiz. Uchta $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ nuqtalar olib ulardan parabola o‘tkazamiz. Bu parabola bilan $y=f(x)$ funksiyaning $[x_0,x_2]$ kesmadagi grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o‘xshash $y=f(x)$ funksiyaning grafigini $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$ va boshqa kesmalarda ham almashtiramiz.

Shunday qilib, bu usulda berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan trapesiyaning yuzini $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$,..... kesmalarda parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yig‘indisi bilan almashtiriladi. Bunday egri chiziqli trapesiya ***parabolik trapesiya*** deyiladi.

Parabolik trapesiyalar yuzlarini qo‘shib,

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx$$
$$\approx\frac{b-a}{6m}\left[y_0+y_{2m}+4(y_1+y_3+....+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2m-2})\right] \qquad (2)$$

Bu formula ***Simpson (parabolalar) formulasi*** deyiladi. Simpson formulasining ***absolyut xatosi*** $M_4 \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}$ dan katta bo‘lmaydi, bunda M_4, $\left| f^5(x) \right|$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati. Xatolarni baholash ifodalaridan ma’lumki n^4 kattalik n^2 kattalikka nisbatan tezroq o‘sgani uchun Simpson formulasining xatoligi trapesiyalar formulasi xatosiga nisbatan ancha tez kamayadi.

1-misol. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ aniq integral trapesiyalar va Simpson formulalaridan foydalanib taqribiy hisoblansin.

Yechish. $[0,1]$ kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$ nuqtalar yordamida 5 ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Keyin $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1, \qquad f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$$

$$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214, \qquad f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$$

$$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729, \qquad f(x_5) = f(2) \approx 0.36788.$$

Trapesiyalar formulasi bo‘yicha

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5}\left[\frac{1+0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729\right] = 0.74805.$$

Simpson formulasi bo‘yicha, hisoblash uchun $[0,1]$ kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo‘laklarga ajratamiz va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394, \quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$$

$$y_3 = (0.75) \approx 0.5698, \quad y_4 = (1) \approx 0.3679$$

bo‘ladi.

Simpson formulasiga asosan:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\ dx \approx \frac{1}{12}\left[1+0.3679+4(0.9394+0.5698)+2\cdot 0.7788\right]\approx 0.7469$$

bo‘ladi.

6.3-§.Xosmas integrallar

Aniq integralning ta’rifida integrallash chegaralari chekli va integral ostidagi funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan deb olingan edi. Bu shartlardan hyech bo‘lmaganda birortasi bajarilmasa, integralning yuqoridagi ta’rifi ma’nosini yo‘qotadi.

Biroq nazariy va amaliy mulohazalarga muvofiq aniq integralning ta’rifi bu cheklanishlar bajarilmaydigan hollar uchun ham umumlashtirilishi mumkin.

Bunday integrallar bizga tanish bo‘lgan aniq integrallarga xos bo‘lmagan qisqacha ***xosmas integrallar*** deb aytiladi.

Xosmas integrallarning ikki asosiy turini qaraymiz:

1. Uzluksiz funksiyalarning cheksiz oraliq bo‘yicha integrallari. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan va uning istalgan qismi $[a,+A]$ da integrallanuvchi, ya’ni istalgan $A > a$ da aniq integral mavjud bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx = J$$

limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,\infty)$ oraliqdagi *xosmas integrali* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$J = \int_a^\infty f(x)dx. \qquad (1\ )$$

J limit chekli bo‘lsa, xosmas integral *yaqinlashuvchi* deyiladi. Limit mavjud bo‘lmasa, xosmas integral *uzoqlashuvchi* deyiladi.

$f(x)$ funksiyadan $(-\infty,a]$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integral ham xuddi yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx. \qquad (2)$$

$f(x)$ funksiyadan $(-\infty,+\infty)$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integral qo‘yidagicha aniqlanadi.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \qquad (3)$$

bu yerda a istalgan son. (3) integrallarda o‘ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashsa chap tomondagi integral ham yaqinlashuvchi deyiladi. O‘ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashsa, chap tomondagi integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Xosmas itegrallarni hisoblash uchun Nyuton-Leybnis formulasidan foydalaniladi. $F(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa,

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_{a}^{A} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\left[F(A)-F(a)\right] = F(+\infty)-F(a) = F(x)$$

bo‘lib, bu yerda: $F(+\infty) = \lim\limits_{A\to\infty} F(A)$ integralning yaqinlashishini yoki uzoqlashishini aniqlaydi.

1-misol. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = arctgx \,\Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} arctgx - arctg1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

2-misol. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\int_{1}^{A}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \ln x\,\Big|_1^A = \lim\limits_{A\to\infty}(\ln A - \ln 1) = \lim\limits_{A\to\infty}\ln A = \infty$ bo‘lib, bu integral uzoqlashuvchi.

2. Chegaralanmagan funksiyalarning chekli oraliq bo‘yicha xosmas integrallari. $(a,b]$ intervalda uzluksiz va $x=a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo‘lgan

$f(x)$ funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanib aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (4)$$

Oxiri limit mavjud bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi aks holda uzoqlashuvchi deyiladi. Bunday integrallarga 2-tur xosmas integral deyiladi.

Integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang‘ich funksiya ma’lum bo‘lsa, Nyuton - Leybnis formulasini qo‘llash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[F(b) - F(a+\varepsilon)\right] = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, $x \to a$ da $F(x)$ boshlang‘ich funksiyaning limiti mavjud bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, mavjud bo‘lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$[a,b)$ intervalda $x = b$ nuqtada uzilishga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya xosmas integrali ham shunga o‘xshash bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[F(b-\varepsilon) - F(a)\right] = F(b) - F(a).$$

bunda $F(b)$, $F(x)$ boshlang‘ich funksiyaning $x \to b$ dagi limiti.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning biror $x = c$ nuqtasida uzilishga ega bo‘lsa xosmas integral quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (5)$$

O‘ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashuvchi bo‘lsa, xosmas integral uzoqlashuvchidir. O‘ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi bo‘lsa, chap tomondagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

3-misol. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \to 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ demak,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{4}-2\sqrt{\varepsilon}\right]=2\cdot 2=4.$$

Demak, $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral yaqinlashuvchi.

4-misol. $\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x\to 0 \quad da \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\to+\infty, \quad x=0$ nuqta $[-1, 8]$

kesmaning ichki nuqtasi. (5) formuladan foydalansak,

$$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int_{-1}^{8}x^{-\frac{2}{3}}3dx=3\sqrt[3]{x}\,\Big|_{-1}^{0}+3\sqrt[3]{x}\,\Big|_{0}^{8}=0+3+6=9$$

bo‘ladi.Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_{0}^{1}x^2dx$ integralni $n=5$ bo‘lakka bo‘lib, trapesiyalar

formulasi bilan hisoblang. Uning aniq qiymati va taqribiy qiymati farqini baholang.

2. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{1+x}$ integralni $n=10$ teng bo‘laklarga bo‘lib, trapesiyalar va

Simpson formulalari yordamida hisoblang ikkala holda ham xatolarni baholang.

3. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x}$; 3) $\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx$; 4) $\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2}$;

5) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$; 6) $\int_{0}^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$.

4. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$1)\ \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}};\qquad 2)\ \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2};\qquad 3)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};$$

$$4)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};\qquad 5)\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx;\qquad 6)\ \int_1^e \frac{dx}{x\ln x}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday hollarda taqribiy hisoblash usullaridan foydalanish mumkin?
2. Trapesiyalar formulasi qanday yoziladi ?
3. Simpson fomulasini yozing.
4. Chegaralari cheksiz bo‘lgan integral qanday aniqlanadi ?
5. Xosmas integrallarning yaqinlashuvligi va uzoqlashuvchiligi nimalardan iborat ?
6. Kesmada uzulishga ega bo‘lgan funksiyaning integrali qanday aniqlanadi?

6.4-§.Aniq integralning tatbiqlari

1.Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash $y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a$, $x = b$ ikkita to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapesiya*** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi (1-chizma)

Umumiy hol, ya’ni $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)] dx \qquad (2)$$

aniq integralga teng bo‘ladi .

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x\, dy = \int_c^d \varphi(y) dy \qquad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yuza

$$S = \int_{t_2}^{t_2} y(t)x(t)dt \qquad (4)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

4-misol. $xy = 8$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Yechish. $y = 8/x$ bo‘lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int ydx = \int \frac{8}{x}dx = 8\ln x| = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-misol. $y = x^2, y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish: $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0$, $x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining abssissalari bo‘lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

bo‘ladi.

6-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Yechish. Ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3\cos t$ tenglamada $x = o, x = 3$ bo‘lganda $t_1 = \pi/2$ $, t_2 = 0$ bo‘lganligini hisobgaolib,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ydx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-3\sin t)dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} 12\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 6(\sin\pi - \sin 0) = 6\pi.$$

2. **Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.** To‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada silliq (ya’ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo‘lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

7-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}}y'=0$ bundan, $y'=-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi formulasiga asosan,

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}dx=$$

$$=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\int_0^a\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=4\sqrt[3]{a}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=6a.$$

3. Aylanma jism hajmini hisoblash

$y=f(x),\ x=a,\ x=b,\ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx \tag{7}$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x=\varphi(y),\ y=c,\ y=d,\ x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\varphi^2(y)dy \tag{8}$$

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2=2x$ parabola, $x=3$ to‘g‘ri chiziq va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra x o dan 3 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$V_x=\pi\int_0^3 y^2dx=\pi\int_0^3 2xdx=\pi x^2\Big|_0^3=\pi(3^2-0^2)=9\pi\,.$$

9-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ bo‘lib, integralning chegaralari $c=-b,\ d=b$ bo‘ladi. (8) formulaga asosan,

$$V_y = \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2\int_{-b}^{b} dy - \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2 dy = \pi a^2\, y\Big|_{-b}^{b} - \pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi a^2\left[b-(-b)\right] - \pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3-(-b)^3\right] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Demak, $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

$a = b = R$ bo‘lsa, shar hosil bo‘lib $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo‘ladi.

4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz.

1). Ma’lumki, ***mehnat unumdorligi*** ish kuni mobaynida o‘zgaruvchi miqdordir. Mehnat unumdorligi $y = f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig‘i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) ***mehnat unumdorligini*** bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Vaqtning (3,4) oralig‘ini eng kattasining uzunligi Δx bo‘lgan oraliqlarga bo‘lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o‘zgarmas desak ishlab chiqarish mehnt unumdorligini $f(x)\,\Delta x$ ko‘paytmaga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{3}^{4} f(x)\,\Delta x = \int_{3}^{4} f(x)dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan ***mahsulot miqdorini*** $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo‘lsa, x dan $x+\Delta x$

vaqt oralig‘idagi omborga $f(x)\,\Delta x$ birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi ***tovarning zahirasi***

$$\int_0^x f(x)dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o‘zgarmas a ga teng bo‘lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo‘lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t adx = [ax]_0^t = at$$

bo‘ladi. Agar ***mahsulot ishlab chiqarish hajmi*** arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi ya’ni

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo‘lsa, stanoklar soni

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x)dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2}\right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

tashkil etadi.

4). Yillik *daromad t vaqtning funksiyasi* $D = f(x)$ *bo‘lsin*. Prosent (foiz) me’yori ulushi i bo‘lib, foizlar ustiga qo‘shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag‘ bilan boshlang‘ich mablag‘ orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig‘i $\boldsymbol{t}$ ni n ta teng bo‘laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig‘ida daromadni o‘zgarmas deb $f(t)$ Δt ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo‘shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta t e^{-it}.$$

$(0,t)$ vaqt oralig‘idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t f(t)e^{-it}\Delta t = \int_0^t f(t)e^{-it}dt$$

bo‘ladi.

Xususiy holda, yillik daromad o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni $f(x) = a$ bo‘lsa, diskontli daromad

$$d = \int_0^t ae^{-it}dt = a\int_0^t fe^{-it}dt = a\left[-\frac{1}{i}e^{-it}\right]_0^t = \frac{a}{i}\left(1 - e^{-it}\right)$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8,\ \ y = 0;$ 2) $x = 4 - y^2,\ \ x = 0;$ 3) $y = \ln x,\ \ x = e,\ \ y = 0;$

4) $y = \dfrac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1,\ x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2,\ \ x = 0;$ 6) $y = 2 - x^2,\ \ y = x^2;$

7) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4;$ 8) $x = 3t^2,\ \ y =^3 t - t^3.$

2. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x+4)^3$ va $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Aniq integral yordamida qanday yuzalarni hisoblash mumkin?
2. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday formula yordamida hisoblanadi?
3. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasi nimadan iborat?

4. O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

5. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?

6. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?

7. Omborga keltirilgan mahsulotlar miqdorini aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

8. Mahsulot ishlab chiqarish arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi bo‘lsa, uning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

9. Yillik daromad funksiyasi nima?

10. Diskontli daromad nima va u aniq integral yordamida qanday hisoblanadi.

VII-BOB. Differensial tenglamalar nazariyasi

7.1-§. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

1. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.

1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga *differensial tenglama* deyiladi.

Noma’lum funksiya faqat bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga *oddiy differensial tenglama deyiladi*.

Noma’lum funksiya ikki yoki undan ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamalarga, *xususiy hosilali differensial tenglamalar* deyiladi.

2-ta’rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga *differensial tenglamaning tartibi* deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo‘ladi.

Umumiy holda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

kыrinishda belgilanadi.

3-ta’rif. *Differensial tenglamaning yechimi* yoki *integrali* deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga *integral chiziq* deyiladi. Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo‘lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo‘ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalarini o‘rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo‘ladigan umumiy usullar yo‘q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

2. Birinchi tartibli tenglamalar. Birinchi tartibli tenglama umumiy holda

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoziladi. (1) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

bo‘ladi. (2) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo‘lsa, tenglama

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

ko‘rinishida bo‘lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko‘rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni $y = F(x) + C,\quad [F(x)]' = f(x)$. Shunday qilib, (3) ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

4-ta’rif. $y = \varphi(x, C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning ***umumiy yechimi*** deyiladi.

5-ta’rif. C ixtiyoriy o‘zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga ***xususiy yechim*** deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko‘pincha qo‘shimcha

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0, y_0 lar berilgan sonlar bo‘lib, bu shartga boshlang‘ich shart deb ataladi.

6-ta’rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deyiladi.

1-misol. $y' = \dfrac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Endi boshlang‘ich shartdan foydalanib, $5tg0 + C = 3,$ bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5tgx + 3$ bo‘ladi.

3. *O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar*

7-ta’rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglamaga *o‘zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya’ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo‘ladi.

2-misol. $xdx + ydy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad yoki \quad x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo‘ladi .

8-ta’rif. $y' = f_1(x) f_2(y)$ *yoki* $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ ko‘rinishdagi tenglamaga *o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi.

Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo‘lib, dx ga ko‘paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O‘zgrauvchilarini ajratib $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

4. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. $f(x,y)$ funksiya uchun $f(kx,ky) = k^{\alpha} f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiyaga α tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda α biror son. Masalan, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya uchun $f(kx,ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$ bo‘lib, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya $\alpha = 2$ tartibli bir jinsli funksiya bo‘ladi. $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \alpha = 0$ tartibli bir jinsli funksiyadir(buni tekshirib ko‘ring).

9-ta’rif. $y' = f(x,y)$ differesial tenglamada $f(x,y)$ funksiya no‘linchi tartibli bir jinsli funksiya bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y = xv(x)$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$xv' = f(1,v) - v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot v$ almashtirish olib, $y' = x'v + xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

bњlib, $v + xv' = v + v^2$ yoki $xv' = v^2$, $\frac{xdv}{dx} = v^2$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamada o‘zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

bo‘lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo‘lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

5. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko‘rinishda bo‘lib, $p(x)$ *va* $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0$$

bo‘lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo‘lib, bu holda (1)

tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bevosita integrallasak

$$z=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

hosil bo‘ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[C+\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y'+xy=x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib $p(x)=x,\quad g(x)=x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$y=e^{-\int xdx}\left[C+\int x\cdot e^{\int xdx}dx\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C+\int x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C+\int \cdot e^{\frac{x^2}{2}}d(\frac{x^2}{2})\right]=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}+C). \quad y=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}+C).$$

umumiy yechim bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $(1+y)dy-(1-x)dx=0;$ 2) $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)dy;$

3) $x^2dy+(y-1)dx=0;$ 4) $2(xy+y)dx=xdy.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

1) $x^2dx + ydy = 0,\;\; x = 0\;\; da\;\; y = 1;$

2) $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0,\;\; x = 0\;\; bo'\lg anda\;\; y = -1;$

3) $(1+x)ydx = (y-1)xdy,\;\; x = 1\;\; da\;\; y = 1.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-y)y}{x^2}$; 2) $x^2y' = y^2 - xy + x^2$;

3) $(x^2 - 2xy)dy = (xy - y^2)dx.$

4. Boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

1) $xy^2 - y' = x^3 + y^3,\;\; x = 1\;\; bo'\lg anda\;\; y = 3;$

2) $(x-y)dx + xdy = 0,\;\; x = 1\;\; bo'\lg anda\;\; y = 0;$

3) $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0,\;\; x = 1\;\; da\;\; y = 1.$

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = -1;$ 2) $y' + y = e^{-x};$ 3) $x^2y' - 2xy = 3;$ 4) $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$;

5) $\left(a^2 + x^2\right)y' + xy = 1$; 6) $(2x+1)y' + y = x$; 7) $y' - ytgx = ctgx$;

8) $y' + y\cos x = \sin 2x.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

1) $xy' + y = 3,\;\; x = 1\;\; da\;\; y = 1;$ 2) $(1+x^2)y' - xy = 2x,\;\; x = 0\;\; bo'\lg anda\;\; y = 0;$

3) $xy' + y = x + 1,\;\; x = 2\;\; bo'\lg anda\;\; y = 3.$

3. 1) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = -1$ bo‘lganda $y = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2) $y' + \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun $x = 1$ bo‘lganda $y = -1$ boshlang‘ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

Tayanch iboralar

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang‘ich shartlar, o‘zgaruvchilari ajralgan, o‘zgaruvchilari ajraladigan, birinchi tartibli bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to‘la differensialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?
6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?
7. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi nimadan iborat?
8. Boshlan□ich shart deb nimaga aytiladi?
9. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?
10. Qanday tenglamaga o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi?
11. Birinchi tartibli bir jinsli tenglama deb nimaga aytiladi?6.

7.2-§. O‘zgarmas koeffisentli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

1. **Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.** Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko‘p masalalarini yechish ***ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga*** keltiriladi.

Differensial tenglamada noma’lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (1)$$

bu yerda y noma'lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x) = 0$ bo'lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x) \neq 0$ **bo'lsa bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Shunday α_1, α_2 o'zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hyech bo'lmaganda bittasi no'ldan farqli bo'lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog'langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog'langan bo'lsa, ular proporsianal bo'ladi, ya'ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo'lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \ \ yoki \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

bo'ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ *va* $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog'langan, chunki $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{4x^2}{x^2} = 4.$

2-ta'rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog'lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog'langan bo'lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'lga teng bo'ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli bo'lsa ular chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

2. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko'p masalalari (1) tenglamada $p(x)$ *va* $g(x)$ funksiyalar o'zgarmas sonlar bo'lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o'zgarmas koeffisiyentlar bo'lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

ko'rinishda bo'lib $p,\ g$ lar o'zgarmas koeffisiyentlar. Bunday ko'rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli, o'zgarmas koeffisiyentli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (3) ko'rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog'lanmagan yechimlari bo'lsa,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi, bu yerda c_1 *va* c_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo'yib ko'rsatish mumkin (buni bajarib ko'ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo'yish bilan tekshirib ko'rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ *va* $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan yechimlar bo'ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $r -$ noma’lum son. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, bo‘lib,(3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \ \ yoki \quad r^2 + pr + g = 0, \ (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

bњladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo‘lib, bunda quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) $r_1 \ \ va \ \ r_2$ lar haqiqiy va har xil, ya’ni $r_1 \neq r_2$;

2) $r_1 \ \ va \ \ r_2$ haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;

3) $r_1 \ \ va \ \ r_2$ kompleks sonlar, ya’ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \ \ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \qquad r_2 = 3$$

bo‘lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo‘ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng $r_1 = r_2$ *va* $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ ko‘rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^2 + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo‘yib

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no‘lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog‘lanmagan (tekshirib ko‘ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \qquad (7)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo‘ladi (tenglamani yechib ko‘rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo‘shma:

$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$ bo‘lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$$

ko‘rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinasiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad va \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli (tekshirib ko‘ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \tag{8}$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1=-3+2i,\quad r_2=-3-2i$ bo‘ladi. Bu ildizlar kompleks qo‘shma bo‘lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha=-3,\ \beta=2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

bo‘ladi.

Endi ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya’ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y''-y'-2y=0$ differensial tenglamaning $x=0$ bo‘lganda $y=8,\quad y'=7$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2-r-2=0$$

bo‘lib, $r_1=-1,\quad r_2=2$ uning ildizlari bo‘ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y'=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}$$

bo‘lib , $x=0$ bo‘lganda $y=8,\quad y'=7$ boshlang‘ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1+C_2=8 \\ -C_1+2C_2=7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1=3,\quad C_2=5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x)=3e^{-x}+5e^{2x}$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar, chiziqli bog‘langan va chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar, Vronskiy determinanti, ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar, xarakteristik tenglama, Eyler formulasi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda $y = 2,\ y' = 1,\ y'' = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1;$ 2) $yy'' + y'^2 = 0;$ 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0;$ 4) $y''y^3 = 1;$

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3;$ 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x;$ 7) $y'' + 2y'^2 = 0;$

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2;$ 9) $2yy'' = (y^1)^2;$ 10) $t\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} + t = 0.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0;$ 2) $y'' - 2y' - 5y = 0;$ 3) $y'' - y = 0;$

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0;$ 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0;$ 6) $y'' - 2y' + 50y = 0;$

7) $y'' - 4y' + 7y = 0;$ 8) $y'' + 6y' = 0.$

4. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda, $y = e^{-5},\ y' = 3e^{-5}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?

2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?

3. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?

4. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

5. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?

6. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?

7. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo‘shma bo‘lganda yechim qanday yoziladi?

8. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo‘lganda umumiy yechim qanday yoziladi?

9. Eyler formulasi qanday bo‘ladi?

7.3-§. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p, g o‘zgarmas koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli **bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi,** bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\overline{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_1(x) \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2)echimni (1) tenglamaga qo‘yib ko‘rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

2.Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topish usullari.

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y(x)}$ ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$funksiya:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x),$ bu yerda $P_n(x)$ $n-$ darajali ko‘p had;

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$

ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k harakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x)$, $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y'' + 2y' - 3y = 0$ bo‘lib, uning harakteristik tenglamasi $r^2 + 2r - 3 = 0$ bo‘ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \qquad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

bo‘lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ bo‘ladi.

Endi berilgan birjinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko‘phad darajasi bilan bir xil ko‘phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Endi ***aniqmas*** A, B *va* C ***koeffitsiyentlarni*** topish lozim. Shartga ko‘ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$$
$$y''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x}\cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$e^{2x}\left[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)\right] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo‘lsak,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

bo‘ladi.

$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases} 5A=25, \\ 12A+5B=0, \\ 2A+6B+5C=47. \end{cases}$$

Uchta noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan, uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak, $A=5,\ B=-12,\ C=3$ bo‘ladi (buni bajarib ko‘ring). Demak, $y_1(x)=e^{2x}(5x^2-12x+3)$ funksiya berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan,

$$y=\overline{y}+y_1=C_1e^{-3x}+C_2e^x+e^{2x}(5x^2-12x+3)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga ***aniqmas koeffitsiyentlar usuli*** deyiladi.

2-misol. $y''-4y'=3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

$r^2-4r=0$ bo‘lib, $r_1=0;\ r_2=4$ uning ildizlari bo‘ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{y}(x)=C_1e^{0x}+C^2e^{4x}=C_1+C_2e^{4x}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning o‘ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo‘lib, $\alpha=0$ va no‘l harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x)=e^{0x}x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$$y_1'(x)=3Ax^2+2Bx+C,\quad y''_1=6Ax+2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$-12Ax^2+(6A-8B)x+2B-4C=3x^2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ bo‘lganda xususiy yechim

$y_1(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k$ ko‘rinishda bo‘lib, k harakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

3-misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Harakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari $r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ bo‘ladi. $\beta = 1$; $i\beta = i$ bo‘lganligi uchun $k = 1$, ya’ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A\cos x + B\sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topsak,

$$y_1'(x) = (A\cos x + B\sin x)x + A\cos x + B\sin x = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$

$$y_1''(x) = B\cos x - A\sin x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x = (2B - Ax)\cos x +$$
$$+ (-2A - Bx)\sin x$$

bo‘ladi, bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak

$(2B - Ax)\cos x + (2A - Bx)\sin + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x$ *yoki*

$2B\cos x + (-2A)\sin x = \sin x$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0, \quad A = -\dfrac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$ differensial tenglamaning $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y'' + 4y' + 5y = 0$ tenglamaning harakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo‘lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i; \quad r_2 = -2 + i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz. $y'(x), \quad y''(x)$ hosilalarni topib, berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2, \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A = \frac{3}{8},\ B = \frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya’ni boshlang‘ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechimini topamiz: umumiy yechimdan hosila

$$y'(x) = -2e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x) - \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos x$$

bo‘ladi, boshlang‘ich shartlardan foydalanib,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 *va* C_2 noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1 = \frac{5}{8},\quad C_2 = \frac{25}{8}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{5}{8}\cos x + \frac{25}{8}\sin x\right) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, birorta xususiy yechim, birorta xususiy yechimni tenglamaning o‘ng tomoni ko‘phad bo‘lganda topish, sinus va kosinus funksiyalar yig‘indisi bo‘lganda topish, aniqmas koeffitsiyentlar usuli.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y''+6y'+5y=e^{2x}$; 2) $y''+y'+7y=8\sin 2x$;

3) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$;

4) $y''-5y'+6y=3e^{2x}$; 5) $y''+9y=(43+10x-26x^2)e^{2x}$;

6) $y''+6y'+10y=9\cos x+27\sin x$; 7) $y''-6y'+9y=2\sin 2x$

2. $y''+16y=\sin 4x$ tenglamaning $x=0$ bo‘lganda, $y=1,\ y'=\frac{7}{8}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?

2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?

3. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nimadan iborat?

7.4-§. Differensial tenglamalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotdagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1. ***Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli.*** Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflanadi, ya’ni

$$J(t)=mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investitsiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0<m<1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q'(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q'(t) = emPQ \quad yoki \quad Q'(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln C \quad yoki \quad Q = Ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = Ce^{kt_0} \quad yoki \quad C = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun, Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

2. ***Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli.*** Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya bo‘ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya’ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko‘paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo‘lib,

$$\frac{dP}{dQ} < 0$$

bo‘ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek,

$$Q' = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o‘ng tomonidagi ko‘paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo‘ladi, ya’ni $Q(t)$ o‘suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog‘lanish chiziqli, ya’ni

$$P(Q) = a - bQ, \quad a >, \; b > 0$$

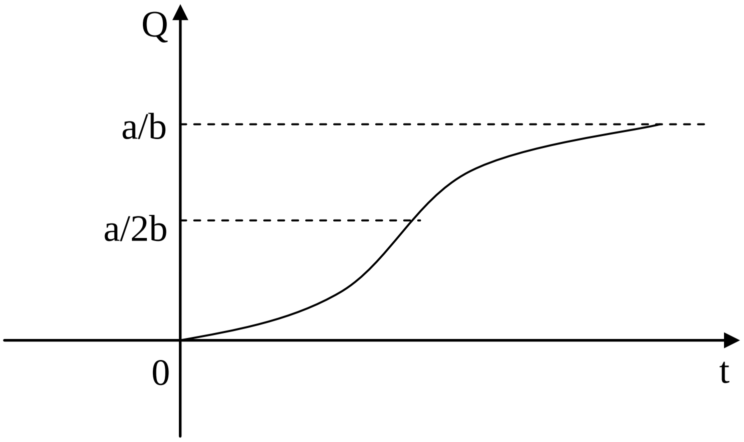
bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6) tenglikni differensiallasak,

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \quad yoki \quad Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0 \; va \; Q = \dfrac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0, \quad Q < \dfrac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \dfrac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\dfrac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



. 1-chizma.

3. *Talab va taklifni tahlil qilish.* Ma’lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o‘zgarish sur’ati bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sur’at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan harakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo‘lib, ushbu tengliklar bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 . \qquad (1)$$

Bunday bog‘liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur’ati oshsa, bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya’ni $p'' > 0$ bo‘ladi. Narxning tez o‘sishi haridorni cho‘chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur’atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsiyenti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o‘sishi tezligi taklifning ham o‘sishiga olib keladi, ya’ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo‘ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o‘zgarishi orasidagi bog‘lanishni tahlil qilaylik. Ma’lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki, bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo‘ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Bir jinsli bo‘lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o‘zgarmas, hamda buni (3) tenglamaga qo‘yib, $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = \overline{p(t)} + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo‘ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ da $p(t) \to 3$ bo‘ladi, ya’ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo‘lganda, narx $p(0) = 4$ va o‘sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo‘lsin. $t = 0$ bo‘lganda $p(0) = 4$ bo‘lganligi uchun, (3) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo‘lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak, C_2=4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$$

bo‘ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?
2. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?
3. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?
4. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

VIII-BOB. Qatorlar nazariyasi

8.1-§. Sonli qatorlar va ularning ayrim yaqinlashish alomatlari

1-ta'rif. $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sonlar ketma-ketligidan tuzilgan

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

cheksiz yig'indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa, n- ***hadi*** yoki ***umumiy hadi*** deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

qatorga ***garmonik qator*** deyiladi;

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

qator birinchi hadi $a_1 = \frac{1}{2}$, maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

2. Qator yig'indisi va uning yaqinlashuvi. Sonli qator ta'rifidan ma'lumki, uning hadlari cheksiz ko'p bo'lib, qator yig'indisini oddiy yo'l bilan qo'shib, topib bo'lmaydi. Shuning uchun qatorning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. (1) qator hadlaridan

$$u_1 = S_1, \;\; u_1 + u_2 = S_2, \;\; u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \dots,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = S_n$$

qismiy yig'indilarni tuzamiz.

2-ta’rif.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

chekli limit mavjud bo‘lsa, S ga ***qator yig‘indisi*** deyiladi va ***qator yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo‘lmasa, qatorning yig‘indsi bo‘lmaydi va u ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

1-misol. $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorning n qismiy yig‘indisi

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+....+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S=1$ bo‘ladi.

Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

$a)$ $\quad a_1+a_2+...+a_n+...$

qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsa, istalgan $c\neq 0$ son uchun,

$$ca_1+ca_2+...+ca_n+...$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi cS bo‘ladi;

$в)$ $\quad a_1+a_2+...+a_n+...$ *ва* $b_1+b_2+...+b_n+...$

qatorlar yaqinlashuvchi va mos ravishda S', S'' yig‘indalarga ega bo‘lsa,

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+...+(a_n\pm b_n)+...$$

qator ham yaqinlashuvchi va yig‘indisi $(S' \pm S'')$ dan iborat bo‘ladi;

s) $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + u_{k+1} + ... + u_n + ...$ (2)

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa,

$$u_k + u_{k+1} + ... + u_n + ... \qquad (3)$$

qator ham yaqinlashuvchi va aksincha (3) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (2) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

3. *Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti)*

Teorema. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ (4)

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

shart bajariladi.

Isbot. (4) qator yaqinlashuvchi bo‘lganligi uchun

$$u_n = S_n - S_{n-1}; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Shunday qilib, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n \to \infty$ dagi limiti 0 ga teng bo‘lmasa, u uzoqlashuvchi bo‘ladi. Lekin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ shartdan qatorning yaљinlashuvchiligi kelib chiqmaydi. Bu shart faqat **zaruriy shart bo‘lib, yetarli** emas.

4. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining *yetarli belgilari*

1) Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \quad , \qquad (5)$$

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... \qquad (6)$$

qatorlar uchun

$$u_1 \le v_1,\; u_2 \le v_2, ..., u_n \le v_n, ...$$

tengsizliklar hamma n lar uchun bajarilib: (6) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (5) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi (6) qator yig‘indisidan katta bo‘lmaydi; (5) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (6) qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2-misol. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+...+\frac{1}{n\cdot 2^n}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma’lumki, keyingi qator maxraji $q=\frac{1}{2}$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib, yaqinlashuvchidir. Hamma n lar uchun,

$$\frac{1}{n\cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n}$$

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash belgisiga asosan, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2). *Dalamber belgisi.* Musbat hadli

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ...$$

qator berilgan bo‘lsin.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

limit mavjud bo‘lib:

$d<1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi;

$d>1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi;

$d=1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo‘ladi.

3-misol. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1.$

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

4-misol. $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + ... + \dfrac{n}{2n-1} + ...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish.

$$d = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1} / \frac{n}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) ***Koshi belgisi***

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud va

$k < 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi;

$k > 1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi;

$k = 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

5-misol. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n = \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}\right)^3 + ... + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n + ...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi belgisiga asosan,

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) Qator *yaqinlashishining integral belgisi*

$$a_1+a_2+...+a_n+...$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lsin.

$f(n)=a_n$ natural argumentli funksiya tuzamiz. $f(n)$ uzluksiz, musbat va kamayuvchi funksiya bo‘lsin.

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(n)dn$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, berilgan qator ham yaqinlashuvchi, xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

6-misol. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n)=\frac{1}{n^2}$ *ёки* $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiyani tuzib, ushbu xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

7-misol. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+...$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n)=\frac{1}{n}$ *ёки* $f(x)=\frac{1}{x}$ bo‘lganligi uchun

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty .$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan, garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5. Ishoralari almashinuvchi qatorlar(Leybnis qatori). Ishoralari har xil bo‘lgan qatorlarga ***o‘zgaruvchan ishorali*** qatorlar deyiladi.

O‘zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi, ***ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir*.**

Masalan, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$

qator birinchi hadi musbat bo‘lgan, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini **Leybnis belgisi** bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1}a_n + ... \qquad (7)$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu yerda $a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...$ musbat sonlar.

***Leybnis belgisi*.** Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati bo‘yicha kamayuvchi, ya’ni

1) $a_1 > a_2 > a_3 > ...$

va

2) umumiy hadining $n \to \infty$ dagi limiti no‘lga teng, ya’ni $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ bo‘lsa, ishoralari navbat bilan almashinuvchi (7) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi birinchi haddan katta bo‘lmaydi. Bu shartlardan birortasi bajarilmasa, qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

8 –misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Leybnis belgisi shartlarini tekshiramiz:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demak, Leybnis belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnis belgisiga asosan, yaqinlashuvchi.

9-misol. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \dots$

birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1 + 0{,}1^n$ bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1 \neq 0,$$

Leybnis belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Qatorlar nazariyasidan taqribiy hisoblashlarda keng qo‘llaniladi. Taqribiy hisoblashlarda yo‘l qo‘yilgan xatolikni baholash katta amaliy ahamiyatga ega. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlarda xatolik, hisobga olinmayotgan birinchi had absolyut qiymatidan katta bo‘lmaydi, ya’ni

$$|r_n| < a_{n+1}$$

bњladi.

10-misol. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$

ni 0,1 aniqlikda taљribiy hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0{,}1$ bo‘lishi kerak.

$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9.$ *Демак,*

$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$

Bunda $S \approx 0{,}74$; $0{,}1$ gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o‘zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

6. Absolyut va shartli yaqinlashish

1-ta’rif. O‘zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, o‘zgaruvchan ishorali qator ***absolyut yaqinlashuvchi*** deyiladi.

2-ta’rif. O‘zgaruvchan ishorali qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, o‘zgaruvchan ishorali qator ***shartli yaqinlashuvchi*** deyiladi.

11-misol. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$$

bu qator maxraji $q=\frac{1}{3}$ bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib, yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

12-misol. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\dots$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi edi.

Tayanch iboralar

Cheksiz yig‘indi, sonli qator, umumiy had, garmonik qator, qator yig‘indisi, qismiy yig‘indi, yaqinlashuvchi qator, uzoqlashuvchi qator, zaruriy belgi, yetarli belgi, taqqoslash belgisi, Dalamber belgisi, Koshi belgisi, integral belgi, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar, o‘zgaruvchan ishorali qatorlar, Leybnis belgisi, absolyut va shartli yaqinlashish.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi?

2. Qatorning umumiy hadi nima?

3. Garmonik qator deb qanday qatorga aytiladi?

4. Qatorning qismiy yig‘indisi nima?

5. Qatorning yig‘indisi qanday aniqlanadi?

6. Qanday qatorga yaqinlashuvchi deyiladi?

7. Qanday qator uzoqlashuvchi bo‘ladi?

8. Yaqinlashuvchi qatorlar qanday xossalarga ega?

9. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi nima?

10. Qator yaqinlashishining yetarli va zaruriy belgilarining farqi nimadan iborat?

11. Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi nima?

12. Qator yaqinlashishining Dalamber belgisi qanday?

13. Qator yaqinlashishining Koshi belgisi qanday yoziladi?

14. Qator yaqinlashishining integral belgisi nimadan iborat?

15. O‘zgaruvchan ishorali qator deb nimaga aytiladi?

16. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar qanday belgi bilan tekshiriladi?

17. Leybnis belgisi nimadan iborat?

18. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yordamida, taqribiy hisoblashda, hisoblash xatosi qanday baholanadi?

19. Absolyut yaqinlashuvchi qator deb nimaga aytiladi?

20. Shartli yaqinlashuvchi qator deb qanday qatorga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}+...$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

2. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+...$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

5. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

6. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

qator yaqinlashishini Dalamber belgisidan foydalanib tekshiring.

7. $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

8. $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

9. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

qator yaqinlashishini integral belgi bilan tekshiring.

10. $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

11. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

12. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

13. Quyidagi qatorlarning yaqinlashishini Koshi belgisidan foydalanib tekshiring:

1) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}$; 2) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}$.

14-22. Quyidagi qatorlar yaqinlashishini tekshiring hamda yaqinlashuvchi bo‘lsa, absolyutmi yoki shartli ekanligini aniqlang.

14. $\frac{1}{10}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{40}+...$

15. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^{2}+1}$.

16. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{3n+5}$.

17. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^{n}}$.

18. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$.

19. $\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+...+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+...$.

20. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+....$

21. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+....$

22. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-....$

$$23.\ 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...$$

qator yaqinlashishini tekshiring va uning yig‘indisini 0,01 aniqlikkacha hisoblang.

$$24.\quad e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}+...\qquad (n=0,1,2,....)$$

bo‘lsa, e^{-1} *ни* 0.001 aniqlikkacha taqriban hisoblang.

8.2-§. Funksional qatorlar

1. Funksional qatorlar haqida tushunchalar

$$u_1(x),u_2(x),u_3(x),...,u_n(x),...$$

funksiyalar ketma-ketligi bo‘lsin.

1-ta’rif.

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+... \qquad (1)$$

ifodaga ***funksional qator*** deyiladi.

(1) da $x=x_0$ biror son bo‘lsa, qo‘yidagi sonli qatorni hosil qilamiz

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+...+u_n(x_0)+... \qquad (2)$$

(2) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (1) funksional qator $x=x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi va $x=x_0$ nuqtaga **yaqinlashish nuqtasi** deb ataladi.

1-misol. $1+x+x^2+...+x^n+...$ (3)

funksional qator $x=\frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchidir, chunki

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Berilgan (3) funksional qator $x=2$ nuqtada uzoqlashuvchi, chunki

$$1+2+2^2+2^3+...+2^n+... .$$

sonli qator uzoqlashuvchi.

Funksional qator yaqinlashuvchi bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga, uning *yaqinlashish sohasi* deyiladi.

2. Darajali qatorlar va ularning xossalari

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a\ )^n + ... \qquad (4)$$

funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ o‘zgarmas sonlar, darajali qatorning koeffisiyentlari deb ataladi.

Darajali qator shunday xossaga egaki, u $x = b_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lsa, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ tengsizlikni qonoatlantiruvchi hamma x lar uchun ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Darajali qator uchun shunday R son mavjudki, $|x - x_0| < R$ uchun, qator absolyut yaqinlashuvchi $|x - x_0| > R$ uchun qator uzoqlashuvchi, ya’ni $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ oraliqda darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, $x = -x_0 \pm R$ nuqtalarda hosil bo‘lgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin. Har ikki nuqtada qator yaqinlashishini alohida tekshirish kerak bo‘ladi. $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ intervalga ***yaqinlashish intervali,*** R ga darajali qatorning ***yaqinlashish radiusi*** deyiladi. Yaqinlashish radiusi $R = 0$ *ёки* $R = \infty$ bo‘lishi mumkin $R = 0$ bo‘lsa, darajali qator faqat $x = x_0$ nuqtada, $R = +\infty$ bo‘lsa, butun sonlar o‘qida yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Yaqinlashish intervalini, berilgan qatorning absolyut qiymatidan tuzilgan qator uchun Dalamber va Koshi belgilaridan foydalanib topish mumkin. Darajali qatorning hamma koeffisiyentlari 0 dan farqli bo‘lsa, yaqinlashish radiusini topishda

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

formuladan foydalaniladi. Boshqa hollarda bevosita Dalamber belgisidan foydalanib yaqinlashish intervalini topish mumkin.

2-misol. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $a_n = \frac{1}{n},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Demak, $-1 < x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun qator yaqinlashuvchi.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz: $x = 1$ bo‘lsin. Bu holda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

garmonik qator hosil bo‘lib, u uzoqlashuvchidir. $x = -1$ bo‘lsin, bu holda

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

sonli qator hosil bo‘lib, u Leybnis belgisi shartlarini qanoatlantiradi, ya’ni yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $-1 \le x < 1$ dan iboratdir.

3-misol. $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + ... + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + ...$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ bo‘lganligi uchun,

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2 = 1.$$

Demak, $-1 < x-2 < 1$ *yoki* $1 < x < 3$ intervalda qator yaqinlashuvchi. Intervalning chetki nuqtalarida qator yaqinlashishini tekshiramiz. $x=3$ bo‘lsin, bu ќolda

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, integral belgidan foydalansak, uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi(bajarib ko‘ring). $x=1$ bo‘lsa,

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, u absolyut yaqinlashuvchidir(tekshirib ko‘ring).

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $1 \le x \le 3$ bo‘ladi.

3. Teylor va Makloren qatorlari

$y = f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada $(n+1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda qo‘yidagi Teylor formulasi o‘rinlidir:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + R_n(x),$$

bu yerda, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left[a+Q(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0 < Q < 1)$ bo‘lib, Lagranj shaklidagi qoldiq had deyiladi.

$a=0$ da Teylor formulasining xususiy holi, Makloren formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad \textit{bu erda}$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}\left[Qx\right]}{(n+1)!}x^{n+1}, \ \ (0 < Q < 1).$$

$y = f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo‘lsa va bu nuqtaning biror atrofida

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

bo‘lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \; va$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

qatorlar hosil bo‘ladi. Bularning birinchisi ***Teylor qatori,*** ikkinchisiga ***Makloren qatori*** deyiladi.

Bu qatorlar x ning $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ bo‘ladigan qiymatlarida $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi.

A nuqtani o‘z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $\left| f^{(n)}(x) \right| < M$, ($M$ biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim_{n\to\infty} R(x) = 0$ bo‘ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

4. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish.

Ayrim funksiyalarni darajali qatorga yoyyamiz.

1) $f(x) = e^x$, istalgan x uchun

$$f'(x) = e^x,\; f''(x) = e^x, ..., f^{(n)}(x) = e^x, ... \quad x = 0 \quad \text{deesak},$$

$$f(0) = 1,\;\; f'(0) = 1,\;\; f''(0) = 1, \; ..., \; f^{(n)}(0) = 1, ...$$

bo‘ladi. Bularni Makloren qatoriga qo‘yib,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad (-\infty < x < +\infty)$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x = 1$ desak,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

bo‘lib, e soni qator yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.

2) $f(x)=\sin x$. Istalgan x uchun,

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f''''(x)=\sin x$,... .

bo‘ladi. Bundan

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f''''(0)=0,\ ...$$

bo‘lib,bularni Makloren qatoriga qo‘ysak,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

hosil bo‘ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty<x<+\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

qator hosil bo‘ladi, bu $f(x)=\cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo‘ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x)=(1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+....+...$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga ***binomial qator*** deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+....\quad (-1<x\le 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

5-misol. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ funksiyani x ning darajalari bo‘yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-....+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+...$$

bo‘ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos\sqrt{x}$ funksiya $x<0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos\sqrt{x}$ funksiyaga $0\le x<+\infty$ da yaqinlashadi.

5. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari.

Bir necha misollar qaraymiz.

6-misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^0$ ni $0{,}001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funksiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^0=\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4-...$$

qatorni hosil qilamiz.

$$\frac{\pi}{10}=0{,}31416;\quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2=0{,}09870;\quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4=0{,}00974.$$

va $\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^6<0{,}0001$ bo‘lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^0\approx 1-\frac{0{,}09870}{2}+\frac{0{,}00974}{24};\quad \textit{ёки}\quad \cos 18^0\approx 0{,}9511.$$

7-misol. $\sqrt[5]{1{,}1}$ *ни* $0{,}0001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1{,}1}=(1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\sqrt[5]{1{,}1}=(1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)}{2!}0{,}01+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)\cdot(\frac{1}{5}-2)}{3!}0{,}001+$$

$$+\ldots=1+0{,}02-0{,}0008+0{,}000048-\ldots.$$

bo‘ladi. To‘rtinchi had $0.000048<0.0001$ bo‘lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1{,}1}\approx 1+0{,}02-0{,}0008=1{,}0192.$$

8-misol. $\sqrt[3]{130}$ *ни* $0{,}001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. 5^3 130 ga eng yaqin butun sonning kubi bo‘lganligi uchun $130=5^3+5$ ko‘rinishda ifodalab, binomial qatordan foydalansak,

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3+5}=\sqrt[3]{5^3(1+\frac{1}{25})}=5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}}=5(1+\frac{1}{3}0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)}{2!}0{,}0016+$$

$$+\frac{(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdot(\frac{1}{3}-2))}{3!}0{,}000064+\ldots)=5+0{,}0667-0{,}00018+0{,}000064-\ldots$$

Bo‘ladi. Oxirgi qatorda 3-had $0{,}001$ dan kichik bo‘lganligi uchun, taqribiy hisoblashda birinchi ikkita had bilan chegaralanamiz:

$\sqrt[3]{130}\approx 5+0{,}0667\approx 5{,}0667.$

9-misol. $\ln 1{,}04$ *ни* $0{,}0001$ gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1+0{,}04)=0{,}04-\frac{0{,}04^2}{2}+\frac{0{,}04^3}{3}-\frac{0{,}04^4}{4}+\ldots,$$

yoki

$$\ln 1{,}04=0{,}04-0{,}0008+0{,}000021-0{,}00000064+\ldots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had $0{,}0001$ dan kichik bo‘lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$$\ln 1{,}04\approx 0{,}0392.$$

Tayanch ibora

Funksional qator, yaqinlashish intervali, yaqinlashish radiusi, darajali qator yig‘indisi, darajali qatorni hadlab integrallash va differensiallash, Teylor qatori, Makloren qatori, binomial qator, taqribiy hisoblash, yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari, funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksional qator deb nimaga aytiladi?

2. Funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi nima?

3. Funksional qatorning yaqinlashish sohasi deb qanday to‘plamga aytiladi?

4. Darajali qator deb nimaga aytiladi?

5. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi nima?

6. Qanday intervalga yaqinlashish intervali deyiladi?

7. Yaqinlashish radiusi qanday topiladi?

8. Yaqinlashish intervalining chetki nuqtalarida, darajali qator yaqinlashishi qanday bo‘ladi?

9. Darajali qator qanday xossalarga ega?

10. Makloren va Teylor formulalari qanday bo‘ladi?

11. Teylor qatori deb qanday qatorga aytiladi?

12. Makloren qatori Teylor qatoridan kelib chiqadimi?

13. Qanday funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish mumkin?

14. $f(x)=e^x$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasi qanday bo‘ladi?

15. $f(x)=\sin x$ funksiya Makloren qatoriga qanday yoyiladi?

16. $f(x)=\cos x$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasini yozing?

17. Binomial qator qanday bo‘ladi?

18. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyani Makloren qatoriga yoying?

19. $\cos 18^0$ ni taqribiy hisoblang? (18^0 radian o‘lchovda $0,314$).

20. Qatorlardan foydalanib $\sqrt[5]{1,1}$ ni taqribiy hisoblang?

21. $\sqrt[3]{130}$ ni taqribiy hisoblang?

22. $\ln(1,04)$ ni taqribiy hisoblang?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots$$

funksional qatorning $x=0$ *ва* $x=1$ nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

2. $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

3. $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4-8 misollarda qatorlarning yaqinlashish intervalini aniqlang.

4. $(x-4)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3+\ldots$

5. $x+(2x)^2+(3x)^3+(4x)^4+\ldots$

6. $5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\frac{5^4x^4}{4!}+\ldots$

7. $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+\ldots$

8. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\ldots$

9. Ushbu funksiyalarni x ning darajalari bo‘yicha qatorga yoying.

1) $f(x)=3^x$; 2) $f(x)=e^{-2x}$; 3) $f(x)=\cos^2 x.$

10. Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib quyidagilarni:

1) e sonini $0{,}00001$ gacha aniqlikda;

2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ni $0{,}00001$ gacha aniqlikda;

3) $\sin 9^0$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

4) $\sqrt[3]{1{,}06}$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

5) $\ln 0{,}98$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

6) $\ln 1{,}1$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

IX-BOB. Ekonometrikada ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalari

9.1-§. Ekonometrik modellashtirish asoslari

Ekonometrik bilimlar iqtisodiy nazariya, iqtisodiy matematika, iqtisodiy statistika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kabi fanlarning o‘zaro bog‘liqligi va rivojlanishining natijasi sifatida ajralib chiqkan va shakllangan.

Ekonometrika o‘zining predmeti, maqsadi va tadqiqot masalalarini shakllantiradi. Shu bilan birga ekonometrikaning mazmuni, uning tarkibi va qo‘llanilish sohasi yuqorida keltirilgan fanlar bilan doimo aloqada bo‘ladi.[1]

Ekonometrikaning boshqa fanlar bilan o‘zaro aloqasi quyidagilarda namoyon bo‘ladi.

Ekonometrika	**Boshqa fanlar**
Iqtisodiy hodisalar miqdoriy harakteristikalar nuqtai nazaridan o‘rganiladi. Iqtisodiy qonunlarning amaldagi jarayonlarga mos kelishi tekshiriladi.	*Iqtisodiy nazariya.*Iqtisodiy hodisalarning sifat jihatlari o‘rganiladi. *Matematikiqtisodiyot.*Iqtisodiy qonunlarning ifodasi matematik modellar shaklida olinadi.
Iqtisodiy statistikaning instrumentariylari iqtisodiy o‘zaro aloqalarni tahlil qilish va bashorat qilish uchun qo‘llaniladi. Iqtisodiy ko‘rsatkichlarning katta qismi tasodifiy harakterga ega bo‘lganligi uchun matematik statistikaning apparatidan foydalaniladi.	*Iqtisodiy statistika.* Iqtisodiy ma’lumotlar ko‘rgazmali shaklda namoyish etish uchun to‘planadi va qayta ishlanadi *Matematik statistika.* Tadqiqot maqsadidan kelib chiqib, ma’lumotlarni tahlil qilish usullari ishlab chiqiladi.

1.1.-rasm.Ekonometrikaning boshqa fanlar bilan o‘zaro aloqasi

[1]Gujarati D.N. Basic Econometrics. McGraw-Hill, 4th edition, 2003 (Gu),Inc.p. 7

EKONOMETRIKAning predmeti – *bu* iqtisodiy jarayonlar va hodisalarning o‘zaro bog‘liqligini miqdoriy ifodalanishni o‘rganish hisoblanadi.

Iqtisodchilar “EKONOMETRIKA” terminidan P. S’empa (1910), Y.Shumpeter (1923), R.Frish (1930) larning tadqiqotlari natijasida qo‘llay boshladilar.

Ushbu termin ikkita so‘z “EKONOMIKA” va “METRIKA” larning birlashishidan hosil bo‘lgan. Grek tilidan tarjima qilganda OIKONOMOS (ekonomist) – bu uy boshqaruvchisi, METRIKA *(metrihe, metron)* – o‘lchov ma’nolarini bildiradi.

Ekonometrikani aniqlash bo‘yicha yondashuvlar tahlili hamda ekonometrika fanining holati ayrim masalalarni yechishga erishishda ushbu fanning maqsadini shakllantiradi.

Ekonometrikaning maqsadi- bu real iqtisodiy ob’ektlarni modellashtirish va miqdoriy tahlil qilishning usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Ekonometrikaning vazifalari:

1) Modelni spesifikatsiya qilish - empirik tahlil uchun ekonometrik modellarni tuzish.

2) Modelniparametrlashtirish - tuzilgan model parametrlarini baholash.

3) Modelni verifikatsiya qilish - model parametrlari sifatini va butun modelning o‘zini tekshirish.

4) Model asosida prognoz qilish - ekonometrik modellashtirish natijalari bo‘yicha aniq iqtisodiy hodisalar uchun prognozlar tuzish va takliflar ishlab chiqish.

Ekonometrik usullar oddiy an’anaviy usullarni inkor etmasdan, balki ularni yanada rivojlantirishga va ob’ektiv o‘zgaruvchan natija ko‘rsatkichlarini boshqa ko‘rsatkichlar orqali muayyan tahlil qilishga yordam beradi. Ekonometrik usullarning va kompyuterlarning milliy iqtisodiyotni boshqarishda afzalliklaridan biri shundaki, ular yordamida modellashtiruvchi ob’ektga omillarning ta’sirini, natija ko‘rsatkichiga resurslarning o‘zaro munosabatlarini ko‘rsatish mumkin. Bu esa o‘nlab tarmoqlar va minglab korxonalarda ishlab chiqarish natijalari va milliy iqtisodiyotni ilmiy asosda prognozlashtirish va boshqarishga imkon beradi.

Ekonometrik modellash iqtisodiy ko‘rsatkichlarni o‘zgarish qonuniyatlarini, tendensiyalarni aniqlash natijasida ekonometrik modellar yordamida iqtisodiy jarayonlarni rivojlanish va prognozlash yo‘llarini belgilaydi.

Iqtisodiy ma’lumotlar dinamik qator yoki dinamik ustun ko‘rinishida tuziladi, ya’ni ular vaqt bo‘yicha o‘zgaradilar. Kuzatuvlar soni omillar sonidan 4-5 marta ko‘proq bo‘lishi kerak.

Ekonometrik modellashtirish va modellarning ahamiyati quyidagilarda namoyon bo‘ladi:

1) Ekonometrik usullar yordamida moddiy, mehnat va pul resurslaridan oqilona foydalaniladi.

2) Ekonometrik usullar va modellar iqtisodiy va tabiiy fanlarni rivojlantirishda yetakchi vosita bo‘lib xizmat qiladi.

3) Ekonometrik usullar va modellar yordamida tuzilgan prognozlarni umumiy amalga oshirish vaqtida ayrim tuzatishlarni kiritish mumkin bo‘ladi.

4) Ekonometrik modellar yordamida iqtisodiy jarayonlar faqat chuqur tahlil qilibgina qolmasdan, balki ularning yangi o‘rganilmagan qonuniyatlarini ham ochishga imkoni yaratiladi. Shuningdek, ular yordamida iqtisodiyotning kelgusidagi rivojlanishini oldindan aytib berish mumkin.

5) Ekonometrik usullar va modellar hisoblash ishlarini avtomatlashtirish bilan birga, aqliy mehnatni yengillashtiradi, iqtisodiy soha xodimlarining mehnatini ilmiy asosda tashkil etadi va boshqaradi.

Asosiy ekonometrik usullar – bu matematik statistika usullari va ekonometrik usullar.

Matematik statistika usullari - dispersion tahlil, korrelyatsiya tahlili, regressiya tahlili, omilli tahlil, indekslar nazariyasi.

Ekonometrik usullar - iqtisodiy o‘sish nazariyasi, ishlab chiqarish funksiyasi nazariyasi, talab va taklif nazariyasi.

Ekonometrikani o‘rganish jarayoni – bu iqtisodiyot, iqtisodiy jarayonlarning ekonometrik modellarini tuzish jarayonidir.

Asosiy qo‘llanadigan usuli – korrelyatsion-regression tahlil usuli.

Ekonometrik modellashtirishquyidagi ilmiy yo‘nalishlar kompleksidir:

- iqtisodiy nazariya;
- ehtimollar nazariyasi;
- matematik statistika;
- kompyuter texnologiyalari.

Ekonometrik model tushunchasi, turlari va undagi o‘zgaruvchilar

Kuzatilayotgan ob’ektlarni chuqur va har tomonlama o‘rganish maqsadida tabiatda va jamiyatda ro‘y beradigan jarayonlarning modellari yaratiladi. Buning uchun ob’ektlar hamda ularni xossalari kuzatiladi va ular to‘g‘risida dastlabki tushunchalar hosil bo‘ladi. Bu tushunchalar oddiy so‘zlashuv tilida, turli rasmlar, sxemalar, belgilar, grafiklar orqali ifodalanishi mumkin. Ushbu tushunchalar **model** deb aytiladi.

Model so‘zi lotincha *modulus* so‘zidan olingan bo‘lib, o‘lchov, me’yor degan ma’noni anglatadi.

Keng ma’noda model biror ob’ektni yoki ob’ektlar sistemasini namunasidir. Model tushunchasi biologiya meditsia, fizika va boshqa fanlarda ham qo‘llaniladi.

Jamiyatdagi va iqtisodiyotdagi ob’ektlarni matematik modellar yordamida kuzatish mumkin. Bu tushuncha modellashtirish deyiladi.

Iqtisodiy model - iqtisodiy ob’ektlarning soddalashtirilgan nusxasidir. Bunda modelning hayotiyligi, uning modellashtiriladigan ob’ektga aynan mos kelishi muhim ahamiyatga egadir. Lekin yagona modelda o‘rganilayotgan ob’ektning hamma tomonini aks ettirish mumkin emas. Shunda jarayonning eng harakterli va eng muhim belgilari aks ettiriladi.

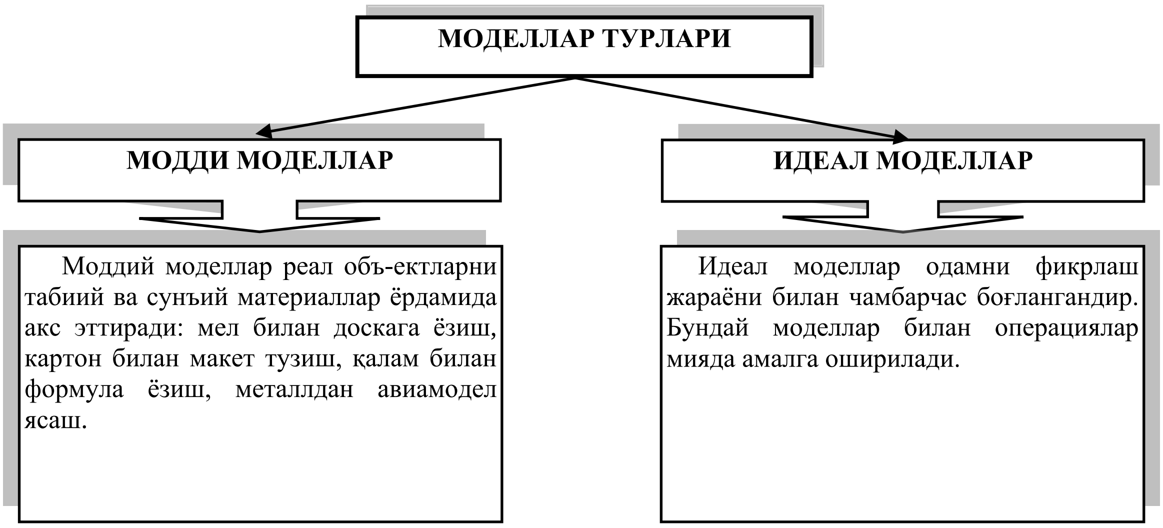
Modellashtirishning universal usul sifatida boshqa usullarga qaraganda afzalliklari mavjud. Ushbu afzalliklar esa quyidagilardan iborat:

I. Avvalo, modellashtirish katta va murakkab sistemani oddiy model yordamida ifodalashga imkoniyat beradi. Masalan, xalq xo‘jaligi bu o‘ta murakkab sistemadir. Uni oddiy qora yashik sxemasi orqali ifodalash mumkin.

II. Model tuzilishi bilan kuzatuvchiga eksperimentlar qilish uchun keng maydon tug‘iladi. Modelning parametrlarini bir necha marta o‘zgartirib, ob’ektni faoliyatini eng optimal holatini aniqlab, undan keyin hayotda qo‘llash mumkin. Real ob’ektlar ustida eksperiment qilish ko‘plab xatolarga va katta harajatlarga olib kelishi mumkin.

III. Model, noshakl sistemani, matematik formulalar yordamida shakllantirishga imkoniyat beradi va EHMlar yordamida sistemani boshqarishga yordam beradi.

IV. Modellashtirish o‘rganish va bilish jarayonini kengaytiradi. Model hosil qilish uchun ob’ekt har tomonlama o‘rganiladi, tahlil qilinadi. Model tuzilganidan so‘ng, uning yordamida ob’ekt to‘g‘risida yangi ma’lumotlar olish mumkin. Shunday qilib, ob’ekt to‘g‘risidagi bilish jarayoni to‘xtovsiz jarayonga aylanadi.



1.3.-rasm. Modellar turlari

Ekonometrik model – bu ehtimollik-stoxastik model. Bu model yordamida iqtisodiy ko‘rsatkichlarni o‘zgarish qonuniyatlarini matematik ko‘rinishida tenglamalar, tengsizliklar va tenglamalar tizimi ko‘rinishda ifodalash mumkin. Umumiy ko‘rinishida ekonometrik model quyidagicha yoziladi:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ekonometrik modelda Y – asosiy **endogen ko‘rsatkich**, modelda Y o‘zgarish qonuniyatlarini $(x_1, x_2, ..., x_n)$ yordamida o‘rganish mumkin.

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ – ta’sir etuvchi, **ekzogen ko‘rsatkichlar**.[2]

Ekonometrik modelda fiktiv ko‘rsatkichlar qatnashishi mumkin. Fiktiv ko‘rsatkichlar – bu sifatli ko‘rsatkichlar miqdoriy ko‘rsatkichlarga o‘tkazilgan ko‘rsatkichlar.

Ekonometrik model chiziqli va chiziqsiz ko‘rinishda tuzilishi mumkin.

Chiziqsiz modellar parabola, giperbola, darajali funksiya, ko‘rsatkichli funksiya, trigonometrik funksiya va boshqalar ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.

Tuzilgan ekonometrik modelning haqiqiyligi to‘plangan ma’lumotlar hajmiga; ma’lumotlarning aniqlik darajasiga; tadqiqotchining malakasiga; modellashtirish jarayoniga; yechiladigan masalaning harakteriga bog‘liq.

Ekonometrik modellashtirish bosqichlari

Ekonometrik modellarni tuzish bir qancha bosqichlardan tashkil topadi.

Birinchi bosqich – spesifikatsiyalash - iqtisodiy muammoni qo‘yilishi – asosiy omillar guruhi tanlanadi, iqtisodiy ma’lumot to‘planadi, asosiy omil va ta’sir etuvchi omillar guruhi belgilanadi; korrelyatsion tahlil usuli yordamida ekonometrik modelda qatnashadigan omillar aniqlanadi. Iqtisodiy jarayon har tomonlama nazariy, sifat jihatdan tahlil qilinadi va uning parametrlari, ichki va tashqi informatsion aloqalar, ishlab chiqarish resurslari, rejalashtirish davri kabi ko‘rsatkichlar aniqlanadi.

Ikkinchi bosqich – identifikatsiya qilish. Bu bosqichda izlanayotgan noma’lum o‘zgaruvchilar qaysi, qanday maqsadni ko‘zda tutadi, natija nimalarga olib keladi kabi savollar aniqlangan bo‘lishi kerak. «Eng kichik kvadratlar usuli» yordamida tuziladigan ekonometrik modelning parametrlari aniqlanadi.

Uchinchi bosqich –verifikatsiya qilish. Tuzilgan modelni ahamiyati to‘rtta yo‘nalish bo‘yicha tekshiriladi:

- modelning sifati ko‘plikdagi korrelyatsiya koeffitsiyenti va determinatsiya koeffitsiyenti yordamida baholanadi;

- modelning ahamiyati approksimatsiya xatoligi va Fisher mezoni yordamida baholanadi;

- modelning parametrlarini ishonchliligi Styudent mezoni bo‘yicha baholanadi;

- Darbin-Uotson mezoni yordamida «Eng kichik kvadratlar usulining» bajarilish shartlari tekshiriladi.

To‘rtinchi bosqich – tuzilgan va baholangan ekonometrik model yordamida asosiy iqtisodiy ko‘rsatkichlar prognoz davriga hisoblanadi.

Yuqorida sanab o‘tilgan bosqichlar bir-biri bilan chambarchas bog‘liq va biri ikkinchisini to‘ldirib, yagona maqsadni amalga oshirish uchun xizmat qiladi.

Shuni eslatib o‘tish kerakki, masalani kompyuterda yechish uchun standart dastur bo‘lishi kerak, agar unday dastur bo‘lmasa, uni ma’lum algoritmlar asosida tuzish zarur.

Tayanch iboralar: ekonometrik bilimlar, model, modellashtirish, iqtisodiy model, modellashtirishning zarurligi, modellashtirish bosqichlari

Nazorat uchun savollar

1. Ekonometrika fanining maqsadi nimalardan iborat?
2. Ekonometrik modellashtirishning zarurligi?
3. Ekonometrikaning qo‘llanish sohalarini tushuntirib bering?
4. Ekonometrik modellashtirish usullari tasnifi qanday?
5. Ekonometrik modellarni tuzish bosqichlarini aytib bering?
6. Iqtisodiy model so‘zini tushintirib bering?
7. Iqtisodiy-matematik modellarga ta’rif bering?
8. «Model» tushunchasiga ta’rif bering?

9.2-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari. Hodisalar va ularning turlari.

Ehtimollar nazariyasini rivojlanishi XVII asrdan boshlanib fransuz matematiklari Gyuygens (1629-1695), Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Yakob Bernulli (1654-1705) kabi olimlarning nomlari bilan bog‘liq.

Paskal va Fermalarning yozib qoldirishicha o‘sha davrning buyuk matematik olimlari qimor o‘yinlarini qonuniyatlarini matematik ifodalash maqsadida qilgan ishlari ehtimollar nazariyasini rivojlanishiga olib kelgan. Ular tasodifiy hodisalar yuzasidan tajribalarni ko‘paytirish natijasida ularning qonuniyatlari namoyon bo‘lishini va bu qonuniyatlar fundamental filosofik qonuniyat bo‘lib qolishini oldindan bilgan edilar.

Keyinchalik amaliy fanlar (kuzatishda qo‘yilgan hatolar nazariyasi, otishlar nazariyasi, statistika muammolari, ayniqsa, aholi statistikasi) ehtimollar nazariyasi oldiga katta vazifalar qo‘ydi va bu vazifalarni hal qilish jarayonida ehtimollar nazariyasi katta analitik apparatga ega bo‘ldi. Ana shu analitik metodlarni rivojlantirishda Muavr (1667-1754), Laplas (1749-1827), Gauss (1777-1855), Puasson (1781-1840) kabi olimlarning xizmatlari katta.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasini buyuk olimlar V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L.Chebishev (1821-1984), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918) rivojlantirish bilan birga statistika, sug‘urta ishlariga, demografiya va boshqa sohalarga keng qo‘lladilar.

Hozirgi zamonaviy ehtimollar nazariyasiga qiziqish ortishi bilan bu sohani rivojlantirishda S.N. Bernshteyn (1880-1968), A.N. Kolmogorov (1903-1987), A.Ya.Xinchin (1894-1959), V.I.Romanovskiylar katta hissa qo‘shganlar. O‘zbekistonda ehtimollar nazariyasi maktabini asoslagan va rivojlantirgan buyuk olimlar akademiklar T.A. Sarimsoqov va S.H. Sirojiddinovlardir. Keyingi paytlarda ularning shogirdlari akademiklar T.A. Azlarov, Sh. Farmonov va professorlar M.M. Mamatov, T.L. Malevich, M. Gafurovlar ehtimollar nazariyasini rivojlanishiga katta hissa qo‘shish bilan birga juda ko‘p mutaxassislar tayyorlashda hissa qo‘shganlar.

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri “tajriba” va tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan “hodisa” tushunchasidir. Tajriba hodisani ro‘yobga keltiruvchi shartlar majmui (shartlar kompleksi) S ning bajarilishini ta’minlashdan iboratdir. Tajribadan tajribaga o‘tganda ro‘y berayotgan hodisalar o‘zgarib turadigan hollar hayotda keng miqyosda uchrab turadi, bu yerda, albatta, tajribani vujudga keltiruvchi shartlar majmui (kompleksi) S o‘zgarmas hollar tushuniladi.

Tajriba o‘tkazda, ma’lum S kompleks shartlar o‘zgarmas bo‘lishi talab qilinadi. Tajribaning natijasiga hodisa deb qaraymiz.

Ishonchli (muqarrar) hodisa deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lgan hodisaga aytiladi.

1-misol. Normal atmosfera bosimida harorati 0^0 dan 100^0 gacha bo‘lgan suvni suyuq, 100^0 dan yuqori haroratda gaz holatida bo‘lishi va 0^0 dan past haroratda qattiq bo‘lishi ishonchli hodisalar.

2-misol. Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo‘lsin. Yashikdan tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo‘lishi ishonchsiz hodisa.

Ishonchsiz (mumkin bo‘lmagan) hodisa deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda, ro‘y bermasligi oldindan aniq bo‘lgan hodisaga aytiladi.

3-misol. Normal atmosfera bosimida 20^0 haroratda suvni qattiq bo‘lishi ishonchsiz hodisa.

4-misol. Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo‘lsin. Yashikdan tasodifiy olingan mahsulotning yaroqsiz bo‘lishi ishonchsiz hodisa.

Tasodifiy hodisa deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi oldindan aniq bo‘lmagan hodisaga aytiladi.

Tasodifiy hodisalar, odatda, lotin alfavitining bosh harflari $A, B, C, \ldots$ lar bilan belgilanadi.

5-misol. Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganimizda gerb tomoni yoki raqam tomoni tushishi tasodifiy hodisa.

6-misol. Tomonlari birdan oltigacha nomerlangan o‘yin kubini tashlaganimizda juft raqam yoki toq raqam yozilgan tomoni tushishi tasodifiy hodisa.

7-misol. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatli yoki sifatsiz bo‘lishi tasodifiy hodisa.

1-ta’rif. Har bir sinashda hodisani ro‘y berishi boshqalarining ro‘y berishini inkor etsa, bunday hodisalarga *birga ro‘y bermas* hodisalar deyiladi.

2-ta’rif. Ikkita A va B hodisalardan birining ro‘y berishi boshqasining ro‘y berishini inkor etmasa, bunday hodisalarga *birga ro‘y beruvchi* hodisalar deyiladi.

3-ta’rif. Sinashlarda qatnashayotgan hodisalar bir nechta bo‘lib, har bir sinashda ulardan faqat bittasi ro‘y bersa, bunday hodisalarga *birdan -bir imkoniyatli* hodisalar deyiladi.

4-ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalariga *to'la hodisalar gruppasi* deyiladi, agarda bulardan hyech bo'lmasa bittasining ro'y berishi ishonchli bo'lsa.

8-misol. Mergan nishonga qarata o'q uzdi. Quyidagi ikkita hodisadan biri albatta ro'y beradi: o'qning nishonga tegishi, o'qning nishonga tegmasligi.

5-ta'rif. Agar hodisalardan birining ro'y berish darajasi boshqasining ro'y berish darajasidan ortmasa, bunday hodisalarga *teng imkoniyatli* hodisalar deyiladi.

9-misol. Tangani tashlaganda "gerb" va "raqam" tomonlari tushishi teng imkoniyatli hodisalardir. O'yin kubini tashlaganda har bir tomonini tushishi teng imkoniyatli hodisalardir.

6-ta'rif. Birga ro'y bermas, teng imkoniyatli hamda to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisaga *elementar hodisa* deyiladi.

Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi. Elementar hodisalar fazosini Ω-orqali, har bir elementar hodisani ω belgilaymiz.

Agar tajriba natijasida $A, A \subseteq \Omega$ ga kirgan ω elementar hodisalardan birortasi ro'y bersa, A *hodisa ro'y berdi* deyiladi. Agar shu elementar hodisalardan birortasi ro'y bermasa, A hodisa ro'y bermaydi, unda A hodisaga *teskari hodisa* (uni $\overline{A}$ orqali belgilaymiz) *ro'y bergan* deymiz. A va $\overline{A}$ *o'zaro qarama-qarshi hodisalar* deyiladi.

Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan (ishonchsiz) hodisa* deyiladi $\varnothing$.

Endi tasodifiy hodisalar orasida ayrim munosabatlarni ko'rib chiqaylik.

1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, A *hodisa* B *hodisani ergashtiradi* deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

2. A va B hodisalar bir xil elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, A va B *hodisalar teng deyiladi* va $A = B$ kabi belgilanadi.

3. A va B *hodisalarlarning yig'indisi* deb, A yoki B ning, yoki ikkalasining ham ro'y berishidan iborat C hodisani aytamiz va $A \cup B$ (yoki $A + B$) kabi belgilaymiz.

4. A va B hodisalarning bir vaqtda ro'y berishini ta'minlovchi barcha $\omega, \omega \in \Omega$ lardan tashkil topgan C hodisa A va B *hodisalarning ko'paytmasi* deyiladi va $A \cap B$ (yoki AB) kabi belgilanadi.

5. A va B *hodisalarning ayirmasi* deb, A ro‘y berib, B ro‘y bermasligidan iborat C hodisaga aytiladi. A va B hodisalarning ayirmasi $A\setminus B$ kabi belgilanadi.
6. Agar $A\cap B=\varnothing$ bo‘lsa, A va B hodisalar *birga ro‘y bermas* deyiladi.

Ehtimollar nazariyasidagi terminalogiyalari va to‘plamlar nazariyasidagi terminalogiyalar orasida quyidagicha o‘xshashliklar bor.

Belgilashlar	**To‘plamlar nazariyasidagi terminalogiyalar**	**Yehtimollar nazariya-sidagi terminalogiyalar**
Ω	Fazo (asosiy to‘plam)	Yelementar hodisalar fazosi, ishonchli hodisa
$\omega,\ \omega\in\Omega$	ω fazoning yelementi	ω yelementar hodisa
$A,\ A\subseteq\Omega$	A to‘plam	A hodisa
$A\bigcup B$, $A+B$	A va B to‘plamlarning birlashmasi, yig‘indisi	A va B hodisalar yig‘indisi
$A\bigcap B,\ AB$	A va B to‘plamlarning kesishmasi	A va B hodisalarning ko‘paytmasi
$A\setminus B$	A va B to‘plamlarning ayirmasi	A va B hodisalarning ayirmasi
$\varnothing$	bo‘sh to‘plam	ishonchsiz hodisa
$\overline{A}$	A to‘olamning to‘ldiruvchisi	A hodisaga teskari hodisa
$AB=\varnothing$	A va B to‘plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birga ro‘y bermas
$A\subseteq B$	A to‘plam B ning qismi	A hodisa B hodisaga yergashadi
$A=B$	A va B to‘plamlar teng	A va B hodisalar teng kuchli

Umumiy holda, Ω fazo cheksiz bo‘lsa, biz Ω ning barcha qism to‘plamlarini qaramaymiz, balki faqatgina uning algebra va σ-algebra deb ataluvchi qism to‘plamlar sinfini qaraymiz.

7-ta’rif. Ω ning qism to‘plamlaridan tuzilgan $\Im$ to‘plamlar sistemasi algebra deyiladi, agar quyidagi munosabatlar bajarilsa:

(1) $\varnothing \in \Im, \ \Omega \in \Im$;

(2) $A \in \Im$ ekanligidan $\overline{A} \in \Im$ kelib chiqsa;

(3) $A, \ B \in \Im$ ekanligidan, $A \bigcup B \in \Im, \quad A \bigcap B \in \Im$ lar kelib chiqsa.

10-misol. 1) Osongina tekshirib ko‘rish mumukinki, $\Im = \{\varnothing, \ \Omega\}$ algebraning barcha shartlarini qanoatlantiradi va bu algebraga trivial algebra deyiladi.

2) $\Im = \left\{A, \ \overline{A}, \ \Omega, \ \varnothing\right\}$ - A hodisadan hosil bo‘lgan algebra.

8-ta’rif. Ω ning qism to‘plamlaridan tuzilgan $\Im$ sistema, σ-algebra deyiladi, agar quyidagi munosabatlar bajarilsa:

(1) $\Im$ algebra;

(2) $A_n \in \Im, \quad n = 1, 2, 3...$ ekanligidan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im, \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$ lar kelib chiqsa.

11-misol. Ω ning elementlari cheklita bo‘lmasa, u holda barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan $\Im = \left\{A : A \subseteq \Omega, \ \varnothing\right\}$ to‘plamlar sistemasi σ-algebra tashkil qiladi.

Eslatma. Har qanday σ-algebra, algebra bo‘ladi. Har qanday algebra σ-algebra bo‘lmasligi mumkin.

9-ta’rif. $\Im$ σ-algebrada aniqlangan, to‘plam funksiyasi P ehtimol deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: ixtiyoriy $A \in \Im$ uchun 1) $P(A) \geq 0$ bo‘lsa;

2) $P(\Omega) = 1$ bo‘lsa;

3) o‘zaro birga ro‘y bermas $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ hodisalar uchun $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ tenglik bajarilsa.

10-ta’rif. $(\Omega, \Im, P)$-uchlikga *ehtimolli fazo* deb ataymiz.

*13-misol***.** 1) Bir jinsli tanga ikki marta ketma-ket gerb tomoni tushgunga qadar tashlansa, unga mos ehtimolli fazoni tuzing.
2) Tashlashlar soni besh martadan oshmasa, ikki marta ketma-ket gerb tomoni hodisasi ehtimolini toping.

Yechish. 1) Yelementar hodisalar fazosi Ω sifatida, yelementlari, cheklita G-gerb va R-raqam simvollaridan tashkil topgan, uzunligi ikkita simvoldan kam bo‘lmagan va ohirlari GG, lardan iborat bo‘lgan zanjirlar to‘plami, hamda biror marta ham ketma-ket GG uchramaydigan cheksiz uzunlikdagi zanjirlar to‘plamini belgilaymiz. $\Im$ orqali Ω ning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan σ-algebrani belgilaymiz. P ehtimolni quyidagicha aniqlaymiz: har bir chekli n usun- likdagi elementar hodisaga $1/2^n$ ni mos qo‘yamiz, agar elementar hodisa cheksiz uzunlikda bo‘lsa u hodisaga 0 ni mos qo‘yamiz.
2) Yuqorida aniqlangan yehtimolga asosan tashlashlar soni besh martadan oshmasa, ikki marta ketma-ket gerb tomoni hodisasi yehtimolini $19/32$ ga teng bo‘ladi.

9.3-§. Ehtimolning klassik va statistik ta’riflari

1-ta’rif. *A hodisaning ehtimoli* deb, unga sharoit yaratuvchi hodisalar sonini hamma mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

bu yerda $k - A$ hodisaning ro‘y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni, $n -$ hamma mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni.

2-ta’rif. A hodisaning *nisbiy sanog‘i* deb, uning ro‘y berishlar sonini, hamma sinashlar soniga nisbatiga aytiladi

$$W(A) = \frac{\mu}{n}.$$

bu yerda μ- A hodisaning ro‘y berishlar soni, n- hamma sinashlar soni.

*1-misol***.** Yashikda 4 ta oq, 10 ta qora va 6 ta ko‘k shar bor. Yashikdan tasodifan bitta shar olinadi. Shu sharning oq rangda bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Bu yerda elementar hodisalar yashikdan ixtiyoriy shar olinishidan iborat. Barcha bunday natijalar soni yashikdagi sharlar soniga teng, ya’ni $n = 30$. Oq shar chiqishi hodisasini A bilan belgilasak, unga sharoit yaratuvchi hodisalar soni yashikdagi oq sharlar soniga tengligi ravshan, ya’ni $m = 4$. Demak, ta’rifga asosan

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

*2-misol***.** O‘yin kubi tashlanganda juft raqam yozilgan tomoni tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. O‘yin kubida 6 ta tomoni bo‘lib, har bir tomoniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan biri yozilgan. Demak, hamma ro‘y berishi mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni $n = 6$. Juft raqam yozilgan tomoni tushishiga sharoit yaratuvchi hodisalar esa 2, 4, 6 ya’ni ularning soni $k = 3$. Agar o‘yin kubi tashlanganda juft tomoni tushish hodisasini A bilan belgilasak, u holda uning ehtimoli ta’rifga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

*3-misol***.** Ikkita o‘yin kubi tashlangan. Kublarning tushgan tomonlaridagi ochkolar yig‘indisi juft son, shu bilan birga kublardan hyech bo‘lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechish. «Birinchi» o‘yin kubida tushgan tomonida bir ochko, ikki ochko,…, olti ochko tushishi mumkin. «Ikkinchi» kubni tashlaganda ham shunday oltita elementar hodisa bo‘lishi mumkin. «Birinchi» kubni tashlashdagi hodisalarning har biri «ikkinchi» kubni tashlash natijasidagi har bir hodisa bilan birga ro‘y berishi mumkin. Shunday qilib, hamma mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni $6\cdot 6=36$ ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (hyech bo‘lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqadi, tushgan ochkolar yig‘indisi juft son) sharoit yaratuvchi hodisalar quyidagicha beshta bo‘ladi:

$1)\ 6,\ 2;\ \ 6+2=8,$ $\qquad$ $4)\ 2,\ 6;\ 2+6=8,$

$2)\ 6,\ 4;\ \ 6+4=10,$ $\qquad$ $5)\ 4,\ 6;\ 4+6=10.$

$3)\ 6,\ 6;\ \ 6+6=12,$

Demak, $n=36,\ k=5$ bo‘lsa, izlanayotgan hodisaning ehtimmoli:

$$P=\frac{k}{n}=\frac{5}{36}.$$

3-ta’rif. Turli to‘plam elementlaridan tuzilgan kombinasiyalarga birlashmalar deyiladi.

Hodisaning ehtimolini hisoblash uchun zarur bo‘lgan birlashmalarni qaraymiz.

1. **O‘rin almashtirishlar**. n ta har xil elementlardan tuzilgan o‘rin almashtirishlar deb, bir-biridan faqat elementlarining o‘rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha aniqlanadi:

$$P_n=n! \qquad \text{bu yerda} \qquad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n.$$

5-misol. Uchta a, b, c elementlardan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta’rifga asosan a, b, c elementlardan faqat o‘rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya’ni

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab, \\ acb & bca & cba. \end{array}$$

Demak, uchta elementdan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni 6 ta ekan. Buni formula orqali hisoblasak ham bo‘ladi:

$$P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6.$$

2.**O‘rinlashtirishlar**. n ta har xil elementlardan k $(k \le n)$ tadan tuzilgan o‘rinlashtirishlar deb, bir-biridan elementlari bilan hamda elementlarining o‘rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

6-misol. Uchta a, b, c elementlardan ikkitadan tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta’rifga asosan bir-biridan elementlari hamda element-larining o‘rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya’ni

$$\begin{matrix} ab & ac & bc, \\ ba & ca & cb. \end{matrix}$$

Demak, ularning soni 6 ta ekan. Agar buni formulada hisoblasak:

$$A_3^2 = 3\cdot 2 = 6.$$

3. Gruppalashlar. n ta har xil elementlardan k tadan tuzilgan gruppalashlar deb, bir-biridan faqat elementlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha topiladi:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

7-misol. To‘rtta a, b, c, d elementlardan ikkitadan tuzilgan gruppalashlar soni topilsin.

Yechish. Ta’rifga asosan 4 ta elementdan 2 tadan bir-biridan hyech bo‘lmasa bitta elementi bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz:

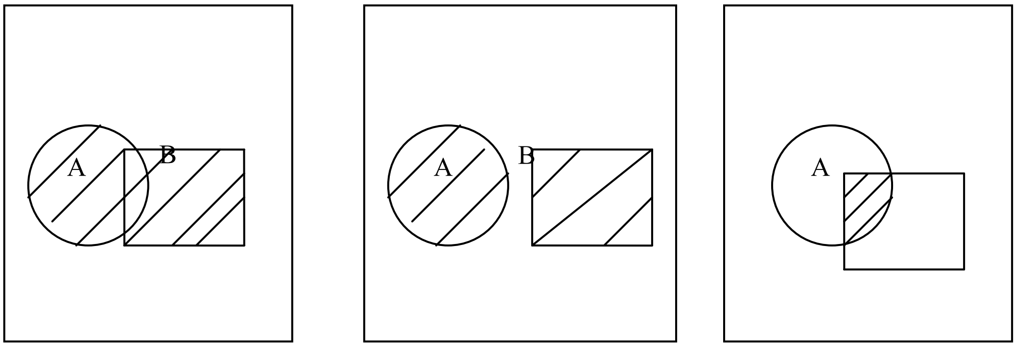
$$ab, ac, bc, bd, ad, cd.$$

Buni formula bilan hisoblasak:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6.$$

Birga ro‘y bermas hodisalarni ehtimollarini qo‘shish teoremasi

A va B hodisalarning yig‘indisi $A+B$ deb, A ning ro‘y berishi yoki B ning ro‘y berishi yoki ikkalasini ham birgalikda ro‘y berishiga aytiladi (1-shakl, a)). Agar A hodisaci 1-otilgan o‘qni nishonga tegishini, B - 2-otilgan o‘qni nishonga tegishini bildirsa, $A+B$ - hodisasi, 1-o‘qni yoki 2-o‘qni yoki ikkala o‘qning ham nishonga tegish hodisasini bildiradi.



a) b) v)

1-shakl

Xususiy holda agar hodisalar birga ro‘y bermas bo‘lsalar, u holda $A+B$ hodisasi A ning ro‘y berishi yoki B ning ro‘y berishini bildiradi (1-shakl b)). Agar tashlangan nuqta katta to‘rtburchakka tushishi aniq bo‘lsa, hamda A hodisa nuqtani A sohaga tushishini, B hodisa nuqtani B sohaga tushishini bildirsa, $A+B$ hodisasi nuqtani A sohaga yoki B sohaga tushishini bildiradi.

Faraz qilaylik, A va B hodisalari birga ro‘y bermas hodisalar bo‘lsin hamda ularning ro‘y berish ehtimollari ma’lum bo‘lsin.

Teorema. Ikkita birga ro‘y bermas hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig‘indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Isbot: Faraz qilaylik, n hamma mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni bo‘lsin. $k_1 - A$ hodisaning ro‘y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni, $k_2 \ - B$ hodisaning ro‘y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni bo‘lsin. U holda $A+B$

hodisaning ro'y berishiga $k_1 + k_2$ ta hodisa sharoit yaratadi. Demak, ehtimolni klassik ta'rifiga asosan $A + B$ ning ehtimoli

$$P(A+B) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n},$$

bu yerda $P(A) = k_1/n$, $P(B) = k_2/n$

Demak, $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Xulosa. $A_1, A_2, ..., A_n$ birga ro'y bermas hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Misol. Magazinda 10 ta korobkada ko'ylaklar bo'lib, shulardan 5 tasi ko'k, 3 tasi zangori va 2 tasi oq. Xaridor rangli ko'ylak talab qilayapti. Tasodifiy ravishda ochilgan korobkadan rangli ko'ylak chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ochilgan korobkada ko'k ko'ylak bo'lish hodisasini A, zangori ko'ylak bo'lish hodisasini B bilan belgilaymiz. U holda ta'rifga asosan:

$$P(A) = 5/10, \quad P(B) = 3/10$$

$A + B$- hodisasi ko'k yoki zangori ko'ylak chiqishini bildiradi va uning ehtimoli

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}.$$

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ birga ro'y bermas hodisalar to'la hodisalar gruppasidan iborat bo'lsa, ularning ehtimollari yig'indisi birga teng bo'ladi, ya'ni

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Haqiqatdan, to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisalardan birortasining ro'y berishi ishonchlidir. Ishonchli hodisaning ehtimoli esa birga teng:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1.$$

Bu hodisalar birga ro'y bermas bo'lganligi uchun:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Bu keyingi tengliklarni solishtirsak yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Agar to‘la hodisalar gruppasi 2 ta hodisadan iborat bo‘lsa, ulardan birini A, ikkinchisini $\overline{A}$ bilan belgilasak:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Ta’rif. Ikkita birdan bir imkoniyatli hodisalar to‘la hodisalar gruppasini tashkil etsa, bunday hodisalarga bir-biriga teskari hodisalar deyiladi. Demak, A hodisa $\overline{A}$ ga teskari hodisa. Agar $P(A)=p,\quad P(\overline{A})=q$ bilan belgilasak,

$$p+q=1,\quad \text{bundan}\quad p=1-q,\; q=1-p.$$

Bundan keyin har doim p - xodisaning ro‘y berishi, q - hodisaning ro‘y bermasligi ehtimolini bildiradi.

Masalan: Nishonga o‘q otilganda $P(A)=p-$o‘qning nishonga tegish ehtimoli, $P(\overline{A})=q-$ tegmaslik ehtimolini bildiradi.

Hodisalarni ko‘paytirish. Shartli ehtimol

A va B hodisalarning ko‘paytmasi $A\cdot B$ deb, shu hodisalarning ikkalasini ham birgalikda ro‘y berishiga aytiladi. Masalan, agar A hodisasi talabani darsga qatnashmaganini bildirsa, uni ikki baho olganini esa B hodisa bildirsa, u holda $A\cdot B$ - darsga qatnashmagan talabaning 2 baho olganini bildiradi. v) 1-shakldagi bo‘yalgan soha A va B hodisalarni ko‘paytmasini ifodalaydi.

Bir nechta $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ko‘paytmasi deb, shu hodisalarning hammasini birgalikda ro‘y berishiga aytiladi.

Tasodifiy hodisaga ta’rif berilganda ma’lum S kompleks shartlar bajarilishi talab etilgan edi. Agar ehtimolni hisoblashda tasodifiy hodisaga S kompleks shartlardan tashqari yana qo‘shimcha shartlar qo‘yilmasa, bunday ehtimol shartsiz ehtimol deyiladi. Agar qo‘shimcha shartlar ham qo‘yilsa, bunday ehtimol shartli deyiladi.

Ta’rif. B hodisaning shartli ehtimoli $P_A(B)$ - deb, A hodisa ro‘y bergandan keyin B hodisaning ro‘y berish ehtimoliga aytiladi va qo‘yidagicha aniqlanadi:

Misol. 28 ta domino toshidan ketma-ket ikkita tosh olinadi. 1- olingan tosh (5;5) bo‘lsa, 2-olingan tosh bilan o‘yinni davom ettirish ehtimoli topilsin.

Yechish. A hodisasi 1-olingan toshni (5;5) chiqishini, B hodisasi 1-olingan tosh (5;5) chiqqandan keyin 5 raqamli tosh chiqishini bildirsin. 28 ta toshdan (5;5) tosh olingandan keyin $(28-1)$ 27 ta tosh qoladi. $(0;5),(1;5),(2;5),(3;5),(4;5),(5;5),(5;6)$ toshlardan ham $(5;5)$ olindi va bularning soni 7 ta hodisadan bittaga kamaydi, ya’ni $7-1=6$ ta qoladi. Demak, 1-olingan tosh $(5;5)$ bo‘lsa, qolgan mumkin bo‘lgan hamma hodisalar soni 27 ta va B hodisasi ro‘y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni 6 ta. Shunday qilib
1-olingan tosh $(5;5)$ bo‘lsa, 2-olingan tosh bilan o‘yinni davom ettirish ehtimoli:

$$P_A(B)=6/27=2/9.$$

Erksiz va erkli hodisalarni ko‘paytirish teoremalari

Ta’rif. Agar A va B hodisalardan birining ro‘y berishi boshqasini ro‘y berish ehtimolini o‘zgartirsa, bunday hodisalarga erksiz (bir-biriga bog‘liq) hodisalar deyiladi.

Faraz: A va B erksiz hodisalar berilgan bo‘lsin.

Teorema. Ikkita A va B erksiz hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli shu hodisalardan birining ehtimoli bilan boshqasini oldingi hodisa ro‘y bergandan keyingi shartli ehtimoli ko‘paytmasiga teng:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Isbot. Shartli ehtimolning ta’rifiga asosan

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (P(A)>0)$$

bundan

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Xulosa. Bir nechta erksiz hodisalarning birga ro‘y berish ehtimoli, shu hodisalardan birinchisining ehtimoli bilan qolganlarini, o‘zidan avvalgilarining ro‘y berish sharti bilan ro‘y berish ehtimollari ko‘paytmalariga teng

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P_{A_1}\left(A_2\right) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \ldots A_{n-1}}\left(A_n\right)$$

Ta’rif. A va B hodisalardan birining ro‘y berishi boshqasining ro‘y berish ehtimoliga ta’sir etmasa, bunday hodisalarga erkli (o‘zaro bog‘liqsiz) hodisalar deyiladi, ya’ni B hodisaning A hodisa ro‘y bergandan keyingi ehtimoli B hodisaning ehtimoliga teng bo‘ladi

$$P_A(B) = P(B).$$

Teorema. Ikkita A va B erkli hodisalarni birgalikda ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko‘paytmasiga teng:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Isbot: Erksiz hodisalarining ko‘paytmasiga asosan

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

A va B hodisalari erkli bo‘lganligi uchun $P_A(B) = P(B)$ bo‘ladi, buni yuqoridagi tenglikka qo‘ysak

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

kelib chiqadi.

Misol. Nishonga otilgan 1-o‘qning tegish ehtimoli 0,7 ga, 2-o‘qning tegish ehtimoli 0,9 ga teng bo‘lsa, ikkala o‘qni ham nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi o‘qni nishonga tegish hodisasini A_1 bilan, ikkinchi o‘qni nishonga tegish hodisasini A_2 bilan belgilasak, shartga ko‘ra ularning ehtimollari qo‘yidagicha bo‘ladi:

$$P(A_1) = 0{,}7, \quad P(A_2) = 0{,}9.$$

Demak ikkala o‘qni xam nishonga tegish ehtimoli

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

Tasodifiy hodisalarni birgalikda ro‘y berish ehtimoli alohida olingan ehtimollarning ikkalasidan ham kichik bo‘ladi.

$$P(AB) < P(A), \quad P(AB) < P(B).$$

Xulosa. Bir nechta $A_1, A_2, \ldots, A_n$ erkli hodisalarni birga ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko‘paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Erkli hodisalarni ko‘paytirish va qo‘shish teoremalaridan foydalanib, quyidagi ehtimollarni aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, A_1, A_2, A_3 o‘zaro erkli hodisalar bo‘lib, ularning ro‘y berish hamda ro‘y bermaslik ehtimollari ma’lum bo‘lsin.

$$p_1 = P(A_1), \quad p_2 = P(A_2), \quad p_3 = P(A_3)$$
$$q_1 = P(\overline{A_1}), \quad q_2 = P(\overline{A_2}), \quad q_3 = P(\overline{A_3})$$

U holda A_1, A_2, A_3 hodisalardan faqat bittasining ro‘y berishini B_1, faqat ikkitasining ro‘y berishining B_2 va uchalasining birgalikda ro‘y berishini B_3 bilan belgilasak, B_1 ni ehtimoli

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

A_1, A_2, A_3 hodisalari erkli bo‘lgani uchun

$$P(B_1) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)$$

yuqoridagi belgilashlarga asosan

$$P(B_1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$$

Bu A_1, A_2, A_3 hodisalaridan faqat bittasining ro‘y berish ehtimoli.

Xuddi shunday A_1, A_2, A_3 erkli hodisalardan faqat ikkitasini ro‘y berish ehtimoli qo‘yidagicha bo‘ladi:

$$P(B_1) = p_1p_2q_3 + q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3$$

Uchchala hodisalarni birgalikda ro‘y berish ehtimoli esa

$$P(B_1) = p_1p_2p_3$$

B_1, B_2, B_3 hodisalar yig‘indisining ehtimoli

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

hyech bo‘lmasa bitta hodisaning ro‘y berish ehtimolini bildiradi.

Agar B_1, B_2, B_3 hodisalari hamda $B_0 - A_1A_2A_3$ hodisalardan birortasini ham ro‘y bermasligi birgalikda to‘la hodisalar gruppasini tashkil etadi. To‘la hodisalar gruppasi ehtimollarining yig‘indisi birga tengligi bizga ma’lum. Demak,

$$P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$$

yoki

$$P(B_0) + P(A) = 1$$

bundan

$$P(A) = 1 - P(B_0)$$

ya’ni birdan hodisalarning hammasini ro‘y bermaslik ehtimolini ayirsak, hyech bo‘lmasa bitta hodisaning ro‘y berish ehtimoli kelib chiqadi.

Misol. Axtarilayotgan tovarni 3 ta magazinda bo‘lish ehtimollari mos holda 0,9; 0,8 va 0,85 ga teng. $a)$ faqat bitta magazinda, $b)$ faqat ikkita magazinda, $d)$ hamma magazinda, $e)$ hyech bo‘lmasa bitta magazinda axtarilgan tovar bo‘lish ehtimollari topilsin.

Yechish. A_1 - tovar 1-magazinda, A_2 – 2-magazinda, A_3 – 3-magazinda bo‘lishini bildirsin. Shartga ko‘ra bu hodisalarning ro‘y berish ehtimollari mos holda

$$p_1 = 0{,}9, \quad p_2 = 0{,}8, \quad p_3 = 0{,}85$$

ro‘y bermaslik ehtimollari esa

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1, \qquad q_2 = 0{,}2, \qquad q_3 = 0{,}15$$

$a)$ axtarilayotgan tovarni faqat bitta magazinda bo‘lish hodisasini B_1 bilan belgilasak, B_1 ning ehtimolini yuqoridagi formulaga asosan hisoblaymiz:

$$P(B_1) = p_1q_1q_2 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 =$$
$$= 0{,}027 + 0{,}012 + 0{,}017 = 0{,}056$$

$b)$ Faqat ikkita magazinda bo‘lish hodisasini B_2 bilan belgilasak, u holda

$$P(B_2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 =$$
$$= 0{,}108 + 0{,}153 + 0{,}068 = 0{,}329$$

$d)$ Uchchala magazinda ham axtarilayotgan tovarni bo‘lish ehtimoli:

$$P(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}612$$

e) Hyech bo‘lmasa bitta magazinda axtarilayotgan tovarni bo‘lishi ehtimoli:

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0{,}056 + 0{,}329 + 0{,}612 = 0{,}997$$

yoki $$P(A) = 1 - P(B_0) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}997\,.$$

Demak, faqat bitta magazinda axtarilayotgan tovarni bo‘lishi kam imkoniyatli bo‘lsa ham, hyech bo‘lmasa bitta magazinda bo‘lishi katta imkoniyatga ega ekan.

Hech bo‘lmasa bitta hodisaning ro‘y berish ehtimoli

Biz yuqorida hyech bo‘lmasa bitta hodisaning ro‘y berish ehtimolini, xususiy holda aniqladik. Endi umumiy holda qaraymiz.

Faraz qilaylik $A_1, A_2, ..., A_n$ tasodifiy hodisalar erkli bo‘lib,
ularning ro‘y berish ehtimollari

$$P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$$ ma’lum bo‘lsin.

Teorema. $A_1, A_2, ..., A_n$ bir-biriga bog‘lik bo‘lmagan hodisalardan hyech bo‘lmasa bittasining ro‘y berish ehtimoli birdan shu hodisalarga teskari $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasini ayirmasiga teng.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n\,.$$

Misol. Ishchi 4 ta stanokni boshqarayapti. Bir soat davomida stanoklarning ishlamay qolishi ehtimollari mos holda 0,4; 0,5; 0,45; 0,6.
Shu vaqt davomida hyech bo‘lmasa bitta stanokni ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra bir soat davomida stanoklarning ishlamay qolish ehtimollari mos holda

$$p_1 = 0{,}4\,, \quad p_2 = 0{,}5\,, \quad p_3 = 0{,}45\,, \quad p_4 = 0{,}6\,.$$

Demak, stanoklarning bir soat davomida ishlab turish ehtimollari mos holda quyidagicha

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}6\,, \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}5\,, \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}55\,, \quad q_4 = 1 - p_4 = 0{,}4\,.$$

Endi teoremaga asosan hyech bo‘lmasa bitta stanokni ishdan chiqish ehtimolini topamiz.

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot q_4=1-0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}55\cdot 0{,}4=1-0{,}066=0{,}934\,.$$

Demak, alohida olingan stanoklarning ishdan chiqish ehtimoli katta bo‘lmasa ham, hyech bo‘lmasa bitta stanokni ishdan chiqishi katta ehtimolga ega bo‘lar ekan.

Xususiy holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ro‘y berish ehtimollari bir xil bo‘lsa, ya’ni $P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_n)=p$. U holda bu hodisalardan hyech bo‘lmasa bittasining ro‘y berish ehtimoli qo‘yidagicha bo‘ladi.

$$P(A)=1-q^n.$$

Birga ro‘y beruvchi hodisalar ehtimollarini qo‘shish teoremasi.

Ikkita A va B hodisalardan birining ro‘y berishi boshqasining ro‘y berishini inkor etmasa, bunday hodisalarga birga ro‘y beruvchi hodisalar deyiladi.

Faraz qilaylik A va B hodisalari birga ro‘y beruvchi hodisalar bo‘lib, ularning ro‘y berish ehtimollari ma’lum bo‘lsin.

Teorema. Ikkita A va B hodisalardan hyech bo‘lmasa bittasining ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig‘indisidan ularni birgalikda ro‘y berish ehtimolini ayirmasiga teng.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Misol: Ikkita mergan nishonga o‘q otayapti. Birinchi merganning nishonni urish ehtimoli $0{,}7$, ikkinchisiniki $0{,}6$ ga teng. Hyech bo‘lmasa bitta o‘qni nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Yechish: A hodisasi 1-o‘qni nishonga tegishini, B-hodisasi 2-o‘qni nishonga tegishini bildirsin. Masalaning shartiga ko‘ra, bu hodisalarning ehtimollari mos ravishda $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}6$ bo‘ladi.

Teoremaga asosan:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6=1{,}3-0{,}42=0{,}88.$$

9.4-§. To‘la ehtimol va Beyes formulasi

Faraz qilaylik $B_1, B_2, ..., B_n$ birga ro‘y bermas va to‘la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisalardan birining ro‘y berishi bilan A hodisasi ham ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalarning shartli ehtimollari $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$ ma’lum bo‘lsin.

Teorema. Birga ro‘y bermas va to‘la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalardan birining ro‘y berishi bilan A hodisasining ro‘y berish ehtimoli, shu hodisalar ehtimollari bilan A hodisasining shartli ehtimollarini mos holda ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Isbot: $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalar birga ro‘y bermas hamda to‘la hodisalar gruppasini tashkil etadi $(P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_n)=1)$. Demak, $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalardan birining ro‘y berishi bilan A hodisaning ro‘y berishi $B_1A, B_2A, ..., B_nA$ birga ro‘y bermas hodisalardan birining ro‘y berishi bilan ro‘y beradi. Shuning uchun

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+...+P(B_nA) \qquad (1)$$

A hodisasi $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalarni ro‘y berishiga bog‘lik bo‘lganligi uchun, erksiz hodisalarni ko‘paytirish teoremasiga asosan

$$P(B_1A)=P_{B_1}(A),\ P(B_2A)=P(B_2)P_{B_2}(A),\ ...,\ P(B_nA)=P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Bu tengliklarni (1) ga qo‘ysak

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Bu formula to‘la ehtimol formulasi deyiladi.

Misol. Ikkita ishchi bir xildagi mahsulotlar ishlab chiqarayapti. 60% (prosent) mahsulotni birinchi ishchi, 40% (prosent) mahsulotni ikkinchi ishchi ishlab chiqarayapti. 1-ishchi ishlab chiqargan mahsulotning oliy sifatli bo‘lish ehtimoli $0{,}7$ ga, 2-ishchi ishlab chiqargan mahsulotning oliy sifatli bo‘lish ehtimoli $0{,}8$ ga teng.

Ishlab chiqarilgan mahsulotlardan tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish: $A-$ishlab chiqarilgan mahsulotni oliy sifatli ekanini bildirsin. Mahsulotni birinchi ishchi ishlab chiqarganligi hodisasini B_1, ikkinchi ishchi ishlab chiqarganligi hodisasini B_2 bilan belgilaymiz. 60% mahsulotni birinchi ishchi, 40% mahsulotni ikkinchi ishchi ishlab chiqargan, shuning uchun

$$P(B_1)=\frac{60\%}{100\%}=0,6 \qquad P(B_2)=\frac{40\%}{100\%}=0,4\,.$$

Shartga ko‘ra, agar mahsulotni birinchi ishchi ishlab chiqargan bo‘lsa, uni oliy sifatli bo‘lish ehtimoli $P_{B_1}(A)=0,7$, ikkinchi ishchi ishlab chiqargan mahsulotni oliy sifatli bo‘lishi ehtimoli $P_{B_2}(A)=0,8$. Tasodifiy olingan mahsulotni oliy sifatli bo‘lishi ehtimoli to‘la ehtimol formulasiga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0,6\cdot 0,7+0,4\cdot 0,8=0,74\,.$$

Demak, tasodifiy olingan mahsulotni oliy sifatli ekanligi ehtimoli 0,74 ga teng ekan.

Gipotezalar ehtimoli. Beyes formulasi

Faraz qilaylik $B_1, B_2, ..., B_n$ to‘la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi va birga ro‘y bermas hodisalardan birortasining ro‘y berishi bilan A hodisasi ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. Biz to‘la ehtimol formulasi bilan $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalardan birining ro‘y berishi bilan A hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisobladik. Endi A hodisasi ro‘y bergandan keyin $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalarining ro‘y berish ehtimolini hisoblaymiz. $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalardan qaysi biri oldindan ro‘y berishi ma’lum bo‘lmagani uchun bularga gipotezalar deyiladi.

A hodisa ro‘y bergandan keyingi $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalarning ro‘y berish ehtimollari $P_A(B_1), P_A(B_2), ..., P_A(B_n)$ larni hisoblaymiz. Buning uchun erksiz hodisalarni ko‘paytirish teoremasidan foydalanamiz:

$$P(AB_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A)$$

bundan $P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A)$. Bu tenglikdan $P_A(B_1)$ ni topamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}, \qquad P(A)>0$$

$P_A(B_1)$ - A hodisa ro‘y bergandan keyin B_1 hodisaning ro‘y berish ehtimoli. Xuddi shunday $P_A(B_2)$ - A hodisa ro‘y bergandan keyin B_2 ni ro‘y berish ehtimoli.

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}, \qquad P(A)>0$$

va hokazo. Umumiy holda esa A hodisa ro‘y bergandan keyingi B_i hodisani ro‘y berish ehtimoli

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)},\ P(A)>0$$

Bunga Beyes formulasi deyiladi. Bu yerda $P(A)-$ to‘la ehtimol formulasi.

Misol: Zavodning ikkita sexi bir xil mahsulot ishlab chiqarayapti. Ishlab chiqarilgan mahsulotning $3/5$ qismini 1-sex, $2/5$ qismini 2-sex ishlab chiqaradi, 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotni yaroqsiz bo‘lish ehtimoli $0{,}1$ ga, 2-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz bo‘lish ehtimoli $0{,}05$ ga teng. Texnik kontrol bo‘limi tasodifiy olingan mahsulotni yaroqsiz deb topdi. Shu mahsulot 1-sexda ishlab chiqarilgan bo‘lish ehtimoli topilsin.

Echish: B_1-mahsulotni 1-sexda ishlab chiqarilganligini, B_2-mahsulotni 2-sexda ishlab chiqarilganligini bildirsin. U holda

$$P(B_1)=3/5=0{,}6, \quad P(B_2)=2/5=0{,}4$$

A-hodisasi ishlab chiqarilgan mahsulotlarni yaroqsiz ekanini bildirsa, shartga ko‘ra 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotni yaroqsiz bo‘lish ehtimolini $P_{B_{11}}(A)=0{,}1$, 2-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotni yaroqsiz bo‘lish ehtimoli $P_{B_2}(A)=0{,}05$. Beyes formulasiga asosan ishlab chiqarilgan yaroqsiz mahsulotni 1-sexga tegishli bo‘lish ehtimolini topamiz.

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}1}{0{,}6\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot 0{,}05}=\frac{0{,}06}{0{,}08}=\frac{3}{4}.$$

9.5-§. Takror erkli sinashlar.

Bernulli formulasi

Faraz qilaylik n marta sinashlar o‘tkazilgan bo‘lsin. Agar bir necha marta sinashlar o‘tkazilgan bo‘lib, har bir sanashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli boshqa sinashlar natijasiga bog‘liq bo‘lmasa bunday sinashlarga takror erkli sinashlar deyiladi. Har bir sinashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli bir xil (o‘yin kubini, tangani tashlaganda) yoki har xil (gugurtni tashlaganda) bo‘lishi mumkin.

Biz har bir sanashda hodisani ro‘y berish ehtimoli bir xil bo‘lib p ga teng bo‘lgan va ro‘y bermasligi $q=1-p$ ga teng bo‘lgan holni o‘rganamiz.

A_i - A hodisani i-sinashda ro‘y berishini $\overline{A_i}$ - A hodisani i- sinashda ro‘y bermasligini bildirsin, bu yerda $i=1,2,3,...,n$. Har bir sinashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas bo‘lganda $P_n(k)-n$ marta sinashda hodisani k marta ro‘y berib, $n-k$ marta ro‘y bermaslik ehtimolini topamiz.

Bir marta sinashda quyidagi ikkita hol bo‘ladi: A va $\overline{A}$. Bularning ehtimoli quyidagi jadvalda keltirilgan:

Hodisa	A	$\overline{A}$
Ehtimol	p	q

ma’lumki, $P_1(1)=p,\quad P_1(0)=q$. Bundan $P_1(1)+P_1(0)=(p+q)=1$.

Ikki marta sinashda mumkin bo‘lgan hodisalar $2^2=4$ ta bo‘ladi.

Hodisa	A_1A_2	$A_1\overline{A_2}$	$\overline{A_1}A_2$	$\overline{A_1}A_2$
Ehtimol	p^2	pq	pq	q^2

Demak, $$P_2(2)=p^2,\ P_2(1)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=2pq,\ \ P_2(0)=q^2.$$

Bundan:

$$P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1.$$

Bulardan mushohada qilib, $P_n(k)-$bu $p^k q^{n-k}$ ko‘paytmaga proporsional bo‘lib, ularning soni $C_n^k - n$ ta elementlardan k tadan tuzilgan gruppalashlar soniga teng ekaniga ishonamiz, demak

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Bunga Bernulli formulasi deyiladi.

Misol. Tangani 6 marta tashlaganda 4 marta gerb tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Sinashlar soni $n=6$ ta, hodisani ro‘y berish soni $k=4$ ta. Har bir sinashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli $p=1/2,\ q=1/2$ demak,

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{64} = \frac{15}{64}.$$

Quyidagilardan keyinchalik ko‘p foydalaniladi.

$P_n(k<k_1) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k_i - 1)$- bu n marta sinashda hodisani k_1 dan kam marta ro‘y berish ehtimoli.

$P_n(k>k_2) = P_n(k_2) + P_n(k_2+1) + \ldots + P_n(n)$ -bu n marta sinashda hodisani kamida k_2 marta ro‘y berish ehtimoli.

$P_n(k_1<k_0<k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \ldots + P_n(k_2)$ - bu n marta sinashda hodisani k_1 bilan k_2 oralig‘ida ro‘y berish ehtimoli.

Laplasning lokal teoremasi

Faraz qilaylik, n marta erkli sinashlar o‘tkazilgan bo‘lib, har bir sinashda hodisani ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas bo‘lsin. Biz $P_n(k)$ - n marta sinashda hodisani k marta ro‘y berish ehtimolini Bernulli formulasi bilan hisobladik. Agar n katta son bo‘lsa, masalan $n=50$, $k=80,\ p=1/2,\ q=1/2$, u holda

$$P_{150}(80) = C_{150}^{80}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{80}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{70}$$

Ehtimolni hisoblash juda katta hisoblashlarga olib keladi. Shuning uchun bunday hollarda Laplasni lokal teoremasidan foydalaniladi.

Teorema. Agar har bir sanashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas bo‘lib, nol va birdan $(0 < p < 1)$ farqli bo‘lsa, u holda $P_n(k)$ - ehtimol taxminan quyidagi funksiyaga teng bo‘ladi:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot f(x), \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Bu yerda $f(-x) = f(x)$ - juft funksiya bo‘lib, uning qiymatlarini kitobning oxiridagi 1-ilovadan topamiz.

Misol. Malakali ustaning a’lo sifatli mahsulot ishlab chiqarish ehtimoli $0{,}8$ ga teng bo‘lsa, 400 ta ishlab chiqarilgan mahsulotlardan 300 tasini a’lo sifatli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga asosan $n = 400,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2,\ k = 300$ bundan:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{300-320}{\sqrt{64}} = -2{,}5$$

1-ilovadan $f(x)$ ni topamiz:

$$f(-2{,}5) = f(2{,}5) = 0{,}0175.$$

Bulardan:

$$P_{400}(300) = \frac{1}{8} \cdot f(2{,}5) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}0022.$$

Laplasning integral teoremasi

Agar har bir sinashda hodisani ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas bo‘lsa $P_n(k_1, k_2)$ - n marta sinashda hodisani k_1 bilan k_2 oralig‘ida ro‘y berish ehtimolini hisoblash talab qilingan bo‘lsin. Bu ehtimolni qo‘yidagicha hisoblash mumkin:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2)$$

Demak bunda $k_2 - k_1 + 1$ ta ehtimolni yig‘indisi qatnashadi va bu esa juda ko‘p hisoblashga olib keladi. Shuning uchun bunday hollarda Laplasni integral teoremasidan foydalaniladi.

Teorema: Agar har bir sinashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas bo‘lib, nol va birdan farqli $(0 < p < 1)$ bo‘lsa, $P_n(k_1, k_2)$ - n marta sinashda hodisani k_1 bilan k_2 oralig‘ida ro‘y berish ehtimoli quyidagi aniq integralga teng bo‘ladi

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

bu yerda

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Bu integralga o‘zgartirish kiritamiz:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tag{*}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Quyidagi Laplas funksiyasini qaraymiz.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

bu funksiya $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ toq funksiya bo‘lib $x < 5$ bo‘lganda qiymatlari kitobni oxiridagi 2-ilovadan topiladi. $x > 5$ bo‘lganda esa $\Phi(x) = 0{,}5$ bo‘ladi. Endi bu funksiya bilan (*) tenglikdagi integralni solishtirib qo‘yidagi formulalarga ega bo‘lamiz:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \tag{**}$$

bu yerda

$$x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \quad x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$$

Bu formuladan misol ishlashda foydalaniladi.

Misol. Agar har bir ishlab chiqarilgan mahsulotni sifatli bo‘lish ehtimoli $0{,}8$ ga teng bo‘lsa, 100 ta ishlab chiqarilgan mahsulotdan sifatlilari soni 60 bilan 90 oralig‘ida bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga asosan $n=100,\ k_1=60,\ k_2=90,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2$.

$$x_1=(k_1-np)/\sqrt{npq}=(60-100\cdot 0{,}8)/\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}=-20/\sqrt{16}=-20/4=-5$$

$$x_2=(k_2-np)/\sqrt{npq}=(90-80)/4=10/4=2{,}5$$

$(**)$ formulaga asosan:

$$P_{100}(60;90)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-5)=\Phi(2{,}5)+\Phi(5)$$

$\Phi(x)$ ni qiymatini kitobni oxiridagi 2-ilovadan topamiz.

$$\Phi(2{,}5)=0{,}4938,\quad \Phi(5)=0{,}5.$$

$$P_{100}(60;90)=0{,}4938+0{,}5=0{,}9938.$$

Puasson formulasi

Faraz qilaylik, n marta erkli sinashlar o‘tkazilgan bo‘lib, har bir sinashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas bo‘lsin. Agar n kichik bo‘lsa $P_n(k)$ - ehtimolni Bernulli formulasi, agar n katta bo‘lsa, Laplasni lokal teoremasi bilan hisobladik.

Agar sinashlar soni katta bo‘lsa Bernulli formulasida $P_n(k)$-ni hisoblash qiyinchiliklarga olib keladi. Hodisani ehtimoli kichik bo‘lsa Laplasni lokal teoremasida hisoblash xatoga yo‘l qo‘yadi. Shuning uchun sinashlar soni katta bo‘lib, hodisani ro‘y berish ehtimoli kichik bo‘lganda $P_n(k)$-ni hisoblashda Puasson formulasidan foydalaniladi. Bu formulani Bernulli formulasidan keltirib chiqaramiz.

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$\lambda=np$ belgilash kiritamiz, bundan $p=\lambda/n$, buni yuqoridagi formulaga qo‘ysak

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}(\lambda/n)^k(1-\lambda/n)^{n-k}=$$
$$=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n}\cdot\frac{\lambda}{k!}\cdot(1-\lambda/n)^{n-k}$$

Endi $n\to\infty$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lambda / k! \lim_{n\to\infty}[(1-1/n)(1-2/n)\cdot\ldots\cdot(1-(k-1)/n)(1-\lambda/n)^{n-k}] =$$

$$= \lambda^k / k! \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n \cdot \lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1.$$

Demak, $P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$.

Misol. Zavod ishlab chiqargan mahsulotlardan 10000 tasini omborga yubordi. Har bir mahsulotni yo‘lda ishdan chiqish ehtimoli 0,0001 bo‘lsa, mahsulotlar omborga yetguncha 3 tasini ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish: Shartga ko‘ra $n = 10000,\ p = 0{,}0001,\ k = 3$, λ ni topamiz.

$\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0001 = 1.$ Puasson formulasiga asosan:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k! = P_{10000}(3) = \frac{1\cdot e^{-1}}{3!} = 1/6e \approx 0{,}06.$$

X-BOB. Tasodifiy miqdorlar. Statistika haqida tushunchalar

10.1-§. Tasodifiy miqdorlar. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Ishlab chiqarish jarayonida sifatli mahsulotlar soni eng asosiy faktor bo‘lib hisoblanadi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotni sifatli bo‘lishi esa juda ko‘p tasodifiy omillarga bog‘liq. Xom ashyoni sifatli bo‘lishi stanokni yaxshi ishlashiga, ishchini mahoratiga, kayfiyatiga, sharoitiga va hokazolarga bog‘liqki, bu faktorlarni hammasini hisobga olib bo‘lmaydi. Agar bu omillardan ijobiylari ko‘p bo‘lsa sifatli mahsulotlari soni ham ko‘p bo‘ladi.

Misol**.** O‘yin kubini tashlaganda $1,2,3,4,5,6$ ochkalardan bittasi tushadi, lekin ko‘p marta tashlaganimizda shu ochkalardan 6 ni necha marta tushishi aniq emas. Chunki bu ko‘p hisobga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq.

1-Ta’rif. Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida qabul qilinishi mumkin bo‘lgan qiymatlardan bitta va faqat bittasini qabul qiladigan va bu qiymatlarni qabul qilishi juda ko‘p hisobga olib bo‘lmaydigan darajadagi tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan miqdorlarga aytiladi.

1-misol. 100 ta ishlab chiqarilgan mahsulotlardan sifatlilari soni tasodifiy miqdor bo‘lib $0,1,2,...,100$ qiymatlardan faqat bittasini qabul qiladi.

2-misol. Miltiqlardan otilgan o‘qni borib tushish masofasi tasodifiy miqdor bo‘lib, (a,b) oraliqdagi qiymatlardan albatta bittasini qabul qiladi.

1-misolda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari diskret (natural sonlardan iborat).

2-misolda tasodifiy mikdor (a,b) oraliqdagi ixtiyoriy sonlarni qabul qilishi mumkin. Shunga ko‘ra tasodifiy miqdorlarni shartli ravishda diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarga ajratamiz.

2-Ta’rif. Ma’lum ehtimol bilan ayrim aniq qiymatlarni qabul qiluvchi miqdorlarga diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi. Masalan: tangani 1000 marta tashlanganda gerb tushishlar soni, o‘yin kubini 100 marta tashlaganda 5 ochko tushishlar soni, n marta erkli sinashda hodisaning ro‘y berish soni k diskret tasodifiy miqdorlardir. Diskret tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plami chekli yoki cheksiz (sanoqli).

3-Ta’rif. Chekli yoki cheksiz oraliqdagi qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarga uzluksiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Masalan: kesilgan materialni uzunligi, bo‘yini balandligi, enini uzunligi, ajratilgan mahsulotni og‘irligi, hajmi va hokazolar uzluksiz tasodifiy miqdorlardir. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari soni faqat cheksizdir. Tasodifiy miqdorlarni $X, Y, Z, ...$ katta harflar bilan va ularga mos qiymatlarni $x, y, z -$ kichik harflar bilan belgilaymiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

Faraz qilaylik, bizga X tasodifiy miqdor va uning qabul qilish mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1, x_2, ..., x_n$ lar berilgan bo‘lsin. Biz bu qiymatlarga mos ehtimollarni topamiz.

1-ta’rif. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning taqsimot qonuni deb, uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan ularga mos ehtimollar orasidagi moslikka aytiladi. Bu moslik quyidagi jadvalda ifodalanadi.

$$\begin{array}{cc} X & x_1 \;\; x_2 \ldots x_n \\ p & p_1 \;\; p_2 \;\ldots . p_n \end{array}$$

bu yerda

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Analitik ko‘rinishi esa

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad\qquad P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Binomial taqsimot. Faraz qilaylik n marta erkli sinashlar o‘tkazilgan bo‘lib, har bir sinashda hodisaning ro‘y berish ehtimoli p va ro‘y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$ bo‘lsin.

Bu yerda tasodifiy miqdor k ning qiymatlari $k: 0,1,2,3,4,5,...,n$ bo‘ladi. Uning taqsimoti $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ Bernulli formulasi bilan aniqlanib quyidagi jadval ko‘rinishda bo‘ladi:

$X = k$	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$	$n-1$	n
$P_n(k)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	$C_n^n p^n q^0$

Nyuton binomini qaraymiz.

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + ...+ C_n^k q^{n-k} p^k + ...+ C_n^n q^0 p^n = 1$$

Yuqoridagi taqsimotning mos ehtimollar binomini koeffisentlari bilan mos tushganligi uchun bu taqsimotga binominal taqsimot deyiladi. Yuqoridagi misoldagi taqsimot ham binomial taqsimotdir.

Puasson taqsimoti. Puasson taqsimotining analitik ko‘rinishi

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Buni jadval ko‘rinishi.

$X = k$	0	1	2	3	......
$P_n(k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} t^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} t^{-\lambda}$	.....

Bu Puasson taqsimoti deyiladi.

Geometrik taqsimot. Faraz qilaylik, erkli sinashlar o‘tkazilgan bo‘lib, har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimolini $p\ (0 < p < 1)$ va ro‘y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$ ga teng bo‘lsin. Tajribani A xodisa ro‘y bergancha davom ettiramiz.Agar A hodisa k - sinashda ro‘y bersa, demak oldingi $k-1$ ta sinashda ro‘y bermagan bo‘ladi.

Bu yerda tasodifiy miqdor X hodisani 1 marta ro‘y berishi uchun o‘tkazilgan sinashlar soni uning qabul kilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1, x_2, ...$

Demak, erkli hodisalarni ko‘paytirish teoremasiga asosan hodisani k - marta sinashda ro‘y berishi $P(X=k)=pq^{k-1}$ (*)

k-ning 1,2,3,...., qiymatlarini formulaga qo‘yib quyidagi qatorga ega bo‘lamiz:

$$p, pq, pq^2, ..., pq^{k-1}, ...$$

Bu qator geometrik progressiyani tashkil etadi. Shuning uchun
quyidagi taqsimot geometrik taqsimot deyiladi.

$X=k$	1	2	3	....	k	...
$P(X=k)$	p	pq	pq^2	.....	pq^{n-k}	....

Bu yerda $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutishi va uning xossalari

Tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni uni ko‘p tomonlama ifodalaydi, lekin tasodifiy miqdorlarni o‘rganishda bundan tashqari ba’zi asosiy tushunchalarni, ya’ni o‘rta qiymat, chetlanishi kabi tushunchalarni kiritishga to‘g‘ri keladi. Faraz qilaylik, diskret tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin.

$$\begin{array}{ll} X & x_1 \ \ x_2 \dots x_n \\ p & p_1 \ \ p_2 \ \dots p_n \end{array}$$

bu yerda $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Ta’rif. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutishi deb, uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan ularga mos ehtimollari ko‘paytmalarining yig‘indisiga aytiladi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

yoki

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \;.$$

Misol. O‘yin kubini 4 marta tashlaganda 6 ochko tushish soni tasodifiy miqdorni matematik kutishi topilsin.

Oldin taqsimotini topamiz.

X	0	1	2	3	
P	125/216	75/216	15/216	1/216	

Endi $M(X)$ ni hisoblaymiz.

$$M(X)=0\cdot 125/216+1\cdot 75/216+2\cdot 15/216+3\cdot 1/216=$$

$$=\frac{75+30+3}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$$

1- xossa. O‘zgarmas sonni matematik kutishi o‘ziga teng:

$$M(C)=C.$$

2-xossa. O‘zgarmas sonni matematik kutishi ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$M(CX)=CM(X).$$

3-xossa. Ikkita o‘zaro erkli tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining (yig‘indisining) matematik kutishi shu tasodifiy miqdorlar matematik kutishlari ko‘paytmasiga (yig‘indisiga) teng:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)\ \big(M(X+Y)=M(X)+M(Y)\big).$$

Umumiy holda

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$$

Matematik kutishning ehtimoli ma’nosi uning o‘rta qiymatga taxminan tengligi

$$M(X)\approx \tilde{x}\;.$$

Takror erkli sinashda hodisaning ro‘y berish soni matematik kutishi quyidagiga teng:

$$M(X)=np\;.$$

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdor, $M(X)$ uning matematik kutishi bo‘lsin.

1- ta'rif. X tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutishi orasidagi farqqa $X - M(X)$ chetlanish deyiladi.

Teorema. Chetlanishning matematik kutishi nolga teng.

Haqiqatdan,

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Misol. Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	2,5	3,2	5,0
p	0,4	0,5	0,1

Chetlanishini, matematik kutishni toping.

$M(X) = 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 3{,}2 \cdot 0{,}5 + 5{,}0 \cdot 0{,}1 = 3{,}1.$

$X - M(X)$	$-0{,}6$	0,1	1,9
p	0,4	0,5	0,1

$$M[X - M(X)] = -0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 1{,}9 \cdot 0{,}1 = -0{,}24 + 0{,}05 + 0{,}19 = 0.$$

O'rtacha chetlanish, ya'ni chetlanishning matematik kutishi har doim nolga teng bo'lganligi uchun chetlanishni kvadratga ko'tarib undan matematik kutish olamiz va chiqqan natijalardan kvadrat ildiz chiqarib o'rtacha chetlanishni o'rniga ishlatamiz.

2-ta'rif. Chetlanishning kvadratidan olingan matematik kutishga dispersiya deyiladi.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

3-ta'rif. Dispersiyadan olingan kvadratik ildizga o'rtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Ta'rifga ko'ra dispersiya quyidagicha hisoblanadi:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 +$$
$$+[x_2 - M(X)]^2 p_2 + ... + [x_n - M(X)]^2 p_n$$

Misol. Quyidagicha taqsimlangan diskret tasodifiy miqdorni dispersiyasi topilsin.

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Yechish. Matematik kutishni topamiz:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$$

Chetlanishlarini kvadratini topamiz:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69, \quad [x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09,$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Dispersiyani ta'rifiga ko'ra

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Teorema. Tasodifiy miqdor X ni dispersiyasi tasodifiy miqdorni kvadratini matematik kutishi bilan matematik kutish kvadrati ayirmasiga teng.

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$$

Isbot.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M[X^2] -$$
$$-2M(X)M(X) + M^2(X) = M[X^2] - 2M^2(X) + M^2(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$$

Bunga dispersiyani hisoblash formulasi deyiladi.

Misol. Quyidagi X tasodifiy miqdorlarni dispersiyasini toping.

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Yechish. Matematik kutishni topamiz:

$$M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}3 = 3{,}5$$

X^2 ni taqsimotini topamiz.

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

$$M(X^2) = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}6 + 25\cdot 0{,}3 = 13{,}3$$

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Bu oxirgi formulaga dispersiyani hisoblash formulasi deyiladi. Endi dispersiyani xossalarini ko‘ramiz.

1- xossa. O‘zgarmas sonni dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0.$$

Haqiqatdan,

$$D(C) = M[C - M(C)]^2 = M[C - C] = M(0) = 0.$$

2-xossa. O‘zgarmas sonni dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Haqiqatdan,

$$D(CX) = M[CX - M(CX)]^2 = M[C^2(X - M(X))^2] =$$
$$= C^2 M[(X - M(X)^2] = C^2 D(X).$$

3- xossa. Ikkita erkli tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalari yig‘indisiga teng:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Umumiy holda

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$$

Bundan tashqari

$$D(X+C)=D(X).$$

Xulosa. Bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi dispersiyalar yig‘indisiga teng:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Isbot. 3-xossaga ko‘ra

$$D(X-Y)=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2 D(Y)=D(X)+D(Y).$$

4-xossa. O‘zaro bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalari ko‘paytmasiga teng:

$$D(X\cdot Y)=D(X)\cdot D(Y).$$

Takror erkli sinashlarda xodisa ro‘y berish sonining dispersiyasi:

$$D(X)=npq.$$

Tayanch iboralar

Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, matematik kutish, chetlanish, dispersiya, o‘rtacha kvadratik chetlanish.

Takrorlash uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi.

2. Diskret tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi.

3. Diskret tasodifiy miqdor dispersiyasi ta’rifini bering.

4. O‘rtacha kvadratik chetlanish tushunchasini kiritilish sababi.

10.2-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Taqsimot funksiyasi va uning xossalari.

Agar tasodifiy miqdorni qiymatlari soni chekli bo‘lsa, ularni qiymatlari hamda mos ehtimollari aniqlanib taqsimot qonuni topilar edi.

Agar tasodifiy miqdorlar qiymatlari soni cheksiz bo‘lsa ularni ehtimollarning hisoblab bo‘lmaydi. Hatto qiymatlarini ham topishni iloji yo‘q. Bunday hollarda boshqacha yo‘l tutiladi, ya’ni taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

Faraz qilaylik, $X -$ tasodifiy miqdor, $x -$haqiqiy son bo‘lsin.

Ta’rif. X tasodifiy miqdorni $x -$haqiqiy sondan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga taqsimot funksiyasi deyiladi

$$F(x) = P(X < x)$$

1- xossa. Taqsimot funksiyasi qiymatlari $[0,1]$ segmentda yotadi:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Isboti ehtimolni xossasidan kelib chiqadi.

2- xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymovchi funksiya, ya’ni

$$F(x_1) \le F(x_2) \quad агар \quad x_1 < x_2 \text{ bo‘lsa.}$$

Isbot. Faraz qilaylik, $x_1 < x_2$ bo‘lsin. U holda $X < x_2$ hodisasi $X < x_1$ va $x_1 \le X \le x_2$ hodisalarni yig‘indisidan iborat bo‘ladi va bularning ehtimolini

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Bundan

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$$

yoki

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2). \qquad (*)$$

Ehtimol noldan katta bo‘lganligi uchun $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$, demak, $F(x_2) \ge F(x_1)$ shuni isbotlash kerak edi.

1-xulosa. Agar (*) tenglamada $a = x_1,\ b = x_2$ desak,

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

hosil bo‘ladi. Bu tasodifiy miqdor X ni berilgan oraliqqa tushish ehtimoli.

2-xulosa. Agar $(**)$ tenglikda $a = x_1,\ b = x_1 + \Delta x$ bo‘lsa,

$$P\,(x_1 \le X \le x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)\,.$$

$F(x)$ uzluksiz bo‘lsa Δx$\to$0 da limitga o‘tsak $P(X = x_1) = 0.$

Demak, uzluksiz tasodifiy miqdorni aniq bir qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng, shuning uchun

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a, < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

tengliklar o‘rinli.

3 -xossa. Agar tasodifiy miqdorni qiymatlari (a, b) oraliqda bo‘lsa,

1) $F(x) = 0$ agar $x \le a$ bo‘lsa; 2) $F(x) = 1$ agar $x \ge b$ bo‘lsa.

Natija. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari butun Ox o‘qda joylashgan bo‘lsa, u holda quyidagi limit munosabatlar o‘rinli:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, $F(x)$ taqsimot funksiyasi bo'lsin.

1- Ta'rif. X tasodifiy mikdor uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi uzluksiz bo'lsa.

$F(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin.

2-Ta'rif. Taqsimot funksiyasidan olingan 1-tartibli hosilaga taqsimot zichligi funksiyasi deyiladi:

$$f(x) = F'(x).$$

1 -xossa. Taqsimot zichligi funksiyasi manfiy emas:

$$f(x) \geq 0.$$

Haqiqatdan, taqsimot zichligi funksiyasi kamaymovchi funksiyaning hosilasi, shuning uchun uning qiymatlari manfiy bo'lmaydi.

2-xossa. Taqsimot zichligi funksiyasidan $-\infty$ dan ∞ gacha olingan xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Bu integral tasodifiy miqdorni son o'qiga tushish ehtimolini bildiradi. Bu hodisa ishonchli, shuning uchun uni ehtimoli 1 ga teng.

Teorema. Uzluksiz tasodifiy miqdorni berilgan (a,b) oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli zichlik funksiyadan shu oraliq bo'yicha olingan aniq integralga teng:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Isbot. Bizga ma'lumki:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Nyuton-Leybnis formulasini keltiramiz:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Shunday qilib, bu ikki tenglikdan

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

kelib chiqadi.

Misol. X tasodifiy miqdor taqsimot zichligi funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x \le 0\ bo'lsa \\ 2x, & agar\ 0 < x \le 1\ bo'lsa \\ 0, & agar\ x > 1\ bo'lsa \end{cases}$$

Tajriba natijasida tasodifiy miqdorni (0,5;1) intervaldagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli topilsin.

Yechish.

$$P(0,5 < x < 1) = 2\int_{0,5}^{1} xdx = x^2 \Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Agar taqsimot zichligi funksiyasi aniq bo‘lsa, taqsimot funksiyasi quyidagi formula bilan topiladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorning son xarakteristikalari

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdor bo‘lib, $f(x)$ uning taqsimot zichligi funksiyasi bo‘lsin. X tasodifiy miqdorning qiymatlari $[a,b]$ segmentda bo‘lsin.

1 –Ta’rif. Qiymatlari (a,b) oraliqda bo‘lgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutishi deb, quyidagi aniq integralga aytiladi:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \qquad (1)$$

2-Ta’rif. Qiymatlari (a,b) oraliqda bo‘lgan X tasodifiy miqdorni dispersiyasi deb, chetlanishni kvadratidan olingan matematik kutishga aytiladi.

$$D(X) = \int_a^b [X - M(X)]^2 f(x)dx$$

yoki

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 .$$

O‘rtacha kvadratik chetlanish

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor X taqsimot funksiyasi bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ \ x \le 0 \ \ bo'lsa \\ \dfrac{x^2}{9}, \ agar \ \ 0 < x \le 3 \ bo'lsa \\ 1, \ agar \ \ \ x > 3 \ \ bo'lsa \end{cases}$$

X ni matematik kutishi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Oldin zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ \ x \le 0 \ bo'lsa \\ \dfrac{2x}{9}, \ agar \ \ 0 < x < 3 \ bo'lsa \\ 0, \ agar \ \ x > 3 \ bo'lsa \end{cases}$$

endi $M(X)$ ni topamiz:

$$M(X) = \int_0^3 x\frac{2x}{9}dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3} - \frac{2}{9}\cdot\frac{0^3}{3} = 2 .$$

Demak, $x = 2$ chiziq yuzani teng ikkiga bo‘ladi.

Endi dispersiyani hisoblaymiz:

$$D(X)=\int_0^3 x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^3 x^2\cdot\frac{2x}{9}dx-2^2=\frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx-4=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{x^4}{4}\Big|_0^3-4=\frac{3^4}{9\cdot 2}-\frac{0^4}{9\cdot 4}-4=\frac{9}{2}-4=4{,}5-4=0{,}5$$

O‘rta kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}7\,.$$

10.3-§. Normal taqsimot qonuni. Ko‘rsatkichli taqsimot.

Ta’rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsa, bunday taqsimotga normal taqsimot deyiladi.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

bu yerda a va σ lar normal taqsimotni parametrlari, a - matematik kutishi, σ - o‘rtacha kvadratik chetlanishi.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni matematik kutishini topamiz.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (1)$$

buni integrallash uchun o‘zgaruvchilarni almashtiramiz.

$$z=\frac{x-a}{\sigma} \qquad \text{bundan} \qquad x=\sigma z+a$$

$$dx=\sigma dz,\; x=-\infty,\; z=+\infty,\; x=+\infty, z=+\infty$$

integralni chegaralari o‘zgarmaydi. Topilganlarni (1) qo‘ysak,

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Birinchi integral nolga teng, ikkinchi integral Puasson integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\,,$$

shuning uchun $M(X) = a$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$, agar normal taqsimotda $a = 0$, $\sigma = 1$ bo‘lsa,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ga normallashtirilgan normal taqsimot deyiladi. Normal taqsimotni taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$

bo‘lgani uchun normallashtirilgan normal taqsimotni taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

bo‘ladi.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - Laplas funksiyasi ekanini eslab, X tasodifiy miqdorni berilgan oraliqqa tushish ehtimolidan

$$P(0 < X < x) = \int_{0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).$$

Normal taqsimotda a - o‘rta qiymatni ko‘rsatadi. σ esa o‘rtacha kvadratik chetlanishini, σ ning o‘sishi bilan normal taqsimot grafigining cho‘qqisi pasayib boradi, ya’ni tarqoqlik ko‘payadi.

a) Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni berilgan oraliqqa tushish ehtimoli.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa hamda $f(x)$ uni taqsimot zichligi funksiyasi bo‘lsa, X ni (α, β) oraliqqa tushish ehtimoli

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Agar X normal taqsimlangan bo‘lsa,

$$P(\alpha \le X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

integralga ega bo‘lamiz. Buni integrallash uchun o‘zgaruvchini almashtiramiz.

$$z=\frac{x-a}{\sigma},\ x=\sigma z+a,\ dx=\sigma dz$$

$x=\alpha$ bo‘lsa, $z=\frac{\alpha-a}{\sigma}$, $x=\beta$ bo‘lsa, $z=\frac{\beta-a}{\sigma}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-z^2/2}(\sigma dz)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0}e^{-z^2/2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-z^2/2}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-z^2/2}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma}e^{-z^2/2}dz.$$

Shunday qilib, Laplas funksiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dx$$

ekanini e’tiborga olsak,

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

kelib chiqadi.

Misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ni matematik kutishi 30 ga, o‘rtacha kvadratik chetlanishi 10 ga teng. Tajriba natijasida shu tasodifiy miqdorlarni $(10;40)$ oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga ko‘ra $a=30,\ \sigma=10,\ \alpha=10,\ \beta=40$

$$P(10\le X\le 40)=\Phi\left(\frac{40-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=\Phi(1)-\Phi(-2)=$$

$$=\Phi(1)+\Phi(2)=0{,}3413+0{,}4772=0{,}8185.$$

b) Chetlanishni ehtimoli.

Ko‘p hollarda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni chetlanishini $X-a$ ni absolyut qiymati bo‘yicha biror $\delta>0$ sondan kichik qiymat qabul qilishini baholashga to‘g‘ri keladi, ya’ni

$$|x-a|<\delta$$

tengsizlikning ro‘y berish ehtimolini topish talab qilinadi. Bu tengsizlikni quyidagi ikkilangan tengsizlik bilan almashtiramiz:

$$-\delta<x-a<\delta$$

bu tengsizlikning hamma tomoniga a ni qo‘shsak,

$$a-\delta<x<\delta+a$$

qo‘sh tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak,

$$P(|X-a<\delta|)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right]=$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

(Bu yerda $\Phi(x)$ funksiyani juftligi hisobga olindi).

Shunday qilib,

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Agar $a=0$ bo‘lsa,

$$P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Bu ehtimol a ga bog‘liq bo‘lmasdan oraliqni uzunligiga, to‘g‘ri proporsional va o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ga teskari proporsionaldir.

Misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ni matematik kutishi 5 ga o‘rtacha kvadratik chetlanishi 2 ga teng. Chetlanishni absolyut qiymati bo‘yicha 4 dan kichik bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. $P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

formuladan foydalanamiz. Shartga ko‘ra $a=5,\ \delta=4,\ \sigma=2$ bo‘lgani uchun

$$P(|x-5|<4)=2\Phi\left(\frac{4}{2}\right)=2\Phi(2).$$

$\Phi(2)$ ni kitobni oxiridagi 2-ilovadan topamiz. $\Phi(2)=0{,}4772$.

$$P(|x-5|<4) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544\,.$$

v) Uch sigma qoidasi.

Chetlanishni ehtimoli berilgan bo‘lsin.

$$P(|x-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

bu yerda $\frac{\delta}{\sigma} = t$ almashtirish olamiz:

$$\delta = \sigma t, \qquad P(|x-a| \le \sigma t) = 2\Phi\,(t)\,.$$

Agar $t = 0$ bo‘lsa,

$$P(|x-a|<0) = 2\Phi(0) = 0\,.$$

bo‘ladi. Bu esa normal taqsimotda chetlanishni bo‘lmasligi ishonchsiz hodisa ekanini bildiradi.

Agar $t = 1$ bo‘lsa,

$$P(|x-a|<\sigma) = 2\Phi(1) = 2\cdot 0{,}3416 = 0{,}6826\,.$$

Agar $t = 2$ bo‘lsa,

$$P(|x-a| \le 2\sigma) = 2\Phi(2) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544\,.$$

Agar $t = 3$ bo‘lsa,

$$P(|x-a|<3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973\,.$$

Bu degani chetlanishni absolyut qiymati bo‘yicha uchlangan o‘rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo‘lishi ishonchli hodisaga yaqin.

Ko‘rsatkichli taqsimot

Ta’rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsa, bunday taqsimotga ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimot deyiladi.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \quad x<0 \ \ bo'lsa, \\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, \ agar \quad x\ge 0 \ \ bo'lsa, \end{cases}$$

bu yerda λ - musbat o‘zgarmas son. Taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}=-e^{-\lambda x}+e^{0}=1-e^{-\lambda x}.$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ agar \quad x<0 \ \ bo'lsa, \\ 1-e^{-\lambda x}, \ agar \ \ x\geq 0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

Bularni grafiklari mos holda pastdagi shakllarda ko‘rsatiladi:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$$

Ko‘rsatkichli taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorni berilgan (a,b) oraliqqa tushishi ehtimoli:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

$F(a)=1-e^{-\lambda a}$, $F(b)=1-e^{-\lambda b}$ bularni e’tiborga olsak, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Ko‘rsatkichli taqsimotni matematik kutishi

$$M(X)=\int\limits_{0}^{\infty} xf(x)dx=\lambda\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

Bu integralni bo‘laklab integrallash usuli bo‘yicha integrallaymiz:

$$u=x, \quad e^{-\lambda x}dx=dv,$$

$$dx=du, \ v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$

$$M(X)=\int\limits_{0}^{\infty} xf(x)dx=\lambda\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\infty}+\frac{1}{\lambda}e^{\lambda\cdot 0}=\frac{1}{\lambda}. \qquad (*)$$

Ko‘rsatkichli taqsimotni dispersiyasini topamiz:

$$D(x)=\int\limits_{0}^{\infty} x^{2}f(x)dx-[M(X)]^{2}=\lambda\int\limits_{0}^{\infty} x^{2}e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^{2}}.$$

Bu integralni ham bo‘laklab integrallash usuli bo‘yicha integrallaymiz:

$$\lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Buni yuqoridagi formulaga qo‘ysak,

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad\qquad (**).$$

$(*)$ va $(**)$ni taqqoslab, quyidagi xulosaga kelamiz:

$$M(X)=\sigma(X)=1/\lambda,$$

ya’ni ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutishi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi o‘zaro teng.

Takrorlash uchun savollar

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.
3. Normal taqsimot qonuni.
4. Ko‘rsatkichni taqsimot qonuni.

Tayanch iboralar

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiyasi, sonli xarakteristikalari, eksponensial va normal taqsimot. Uch sigma qoidasi.

10.4-§. Matematik statistikaning vazifalari

Matematik statistikaning asosiy vazifasi ehtimollar nazariyasi metodlari asosida tabiat va jamiyatdagi ommaviy hodisalarni umumiy qonuniyatlarini o‘rganib xulosalar chiqarishdan iborat. Uni qo‘llanilishi sohalari juda ko‘p: medisina,biologiya, qishloq xo‘jaligi, fizika, iktisod, texnika, ishlab chiqarish, sifatni tekshirish nazariyasi va hokazolar.

Tajribaga asoslangan hamma fanlarda statistika metodlari qo‘llaniladi. Qo‘llanish tartibiga qarab statistikani vazifalarini ikkiga bo‘lamiz.

Matematik statistikaning 1-vazifasi statistik ma’lumotlarni yig‘ib, ularni guruhlarga ajratish, 2-vazifasi izlanishni maqsadiga qarab ma’lumotlarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqish. Bularga: noma’lum ehtimollarni baholash, noma’lum taqsimot funksiyalarini baholash, taqsimot parametrlarini baholash, tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘lanishlarni yo‘nalishini hamda kuchini aniqlash, statistik gipotezalarni tekshirish va hokazolar.

Hozirgi zamon matematik statistikasi zarur bo‘lgan tajribalar sonini aniqlash metodlarini ko‘rsatib beradi, ya’ni tajribani rejalashtirish usullariga ega.

Xullas, matematik statistikaning vazifasi statistik ma’lumotlarni yig‘ish va ularni tahlil qilish usullarini o‘rganib, ulardan ilmiy va amaliy xulosalar chiqarish yo‘llarini o‘rgatadi. Matematik statistikaning rivojlanishi Amerika va Angliya olimlari K. Pirson, R.A. Fisher, Dj. Neymon, Rossiya olimlari A.N. Kolmogorov, N.V. Smirnov va O‘zbekiston olimlari V.I. Romanovskiy va S.H. Sirojiddinovlar nomlari bilan bog‘liq.

Tanlab kuzatish metodi

Faraz qilaylik, biror bir jinsli to‘plamni son yoki sifat jihatdan o‘rganish talab qilingan bo‘lsin. Agar to‘plamni har bir elementini alohida o‘rganilsa, bunday o‘rganishga, to‘plamni yalpi kuzatish deyiladi. Yalpi kuzatish samolyotsozlik, mashinasozlik, kemasozlik, parashyutsozlik va hokazolarda qo‘llaniladi. Ko‘p hollarda to‘plamni elementlari juda ko‘p bo‘lsa uni yalpi kuzatish imkoniyati bo‘lmaydi.

Agar ishlab chiqarilgan mahsulotlarni yalpi kuzatish natijasida sifati buzilsa yoki kuzatish katta xarajatlar, ko‘p vaqt, ishchi kuchi talab qilsa, bunday vaqtlarda ham yalpi kuzatish o‘tkazib bo‘lmaydi. Masalan: Zavod bir kunda 10000 dona lampochka ishlab chiqarsa, lampochkalarni hammasini tekshirish natijasida ularni sifati buziladi, juda ko‘p elektroenergiya sarf bo‘ladi, bundan tashqari ishchi kuchi, vaqt sarflanadi. Ana shunday hollarda tekshirilishi lozim bo‘lgan asosiy to‘plamning bir qismi olib tekshiriladi va natija asosiy to‘plamga yoyiladi. Tekshirishni bunday usuliga tanlab kuzatish metodi deyiladi.

1-Ta'rif. Asosiy to'plamdan tekshirish uchun olingan qism to'plamga tanlanma to'plam deyiladi. Tanlanma tuplamdagi elementlar soniga tanlanmaning hajmi deyiladi yoki kuvvati deyiladi.

2-Ta'rif. Tanlanma olingan asosiy to'plamga bosh to'plam deyiladi. Bosh to'plamdagi elementlar soniga uning quvvati deyiladi yoki xajmi deyiladi.

Masalan: 10000 ta ishlab chikarilgan mahsulotdan 1000 tasi olib tekshirilgan bo'lsa, $N = 10000$ bosh to'plamni quvvati, $n = 1000$ tanlanma to'plamni quvvatini bildiradi. Tanlab kuzatish paytida bosh to'plamdan tekshirish uchun olingan element tekshirilgandan keyin bosh to'plamga qaytariladi yoki qaytarilmasligi ham mumkin.

Shularga qarab tanlanma takror va takrorsiz tanlanmalarga bo'linadi.

3-Ta'rif. Bosh to'plamdan olingan har bir element tekshirilgandan keyin yana bosh to'plamga qaytarilsa, bunday tanlanmaga takror tanlanma deyiladi.

4-Ta'rif. Bosh to'plamdan olingan har bir element kuzatilgandan keyin bosh to'plamga qaytarilmasa, bunday tanlanmaga takrorsiz tanlanma deyiladi.

Agar tekshirish natijasida mahsulotni sifati buzilmasa takror tanlanma, agar buzilsa takrorsiz tanlanma o'tkazilgani ma'qul. Kuzatish natijasida mahsulotni sifati buzilsa, takror tanlanmada qancha ko'p kuzatish o'tkazilsa bosh to'plamda sifatsiz mahsulotlar shuncha ko'paya boradi va ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sifatlilik darajasiga beriladigan bahoni chetlanishi kattalasha boradi. Shuning uchun amaliyotda ko'proq takrorsiz tanlanma ishlatiladi.

Bosh to'plamdan tanlanma to'plam ajratilganda, tanlanma to'plam kerakli sifat bo'yicha bosh to'plamga ekvivalent bo'lishi kerak, ya'ni bosh to'plamni to'g'ri akslantirishi kerak, boshqacha aytganda tanlanma to'plam reprezentativ bo'lishi kerak.

Katta sonlar qonuniga asosan tanlanma to'plam reprenzentativ bo'ladi, agarda uni bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olinsa. Agar bosh to'plamni quvvati kattalashib borsa, tanlanma to'plamni quvvatini ham mos holda ko'paytirib byuorish maqsadga muvofiq.

Tanlanmani statistik taqsimoti

Faraz qilaylik, bosh to‘plamdan hajmi $n$ga teng tanlanma to‘plam ajratilgan bo‘lib, bunda x_1 belgi n_1 marta, x_2 – n_2 marta va hokazo x_k - n_k marta takrorlangan bo‘lsin. Bu yerda $\sum n_i = n -$ tanlanmani hajmi, x_i – variantalar, n_i- chastotalar, $\frac{n_i}{n} = W_i$ - nisbiy chastotalar.

1-Ta’rif. Variantalarni o‘sib borish tartibida joylashishishga variasion qator deyiladi.

2-Ta’rif. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar orasidagi moslikka aytiladi. Bu moslik quyidagi jadvallar beriladi:

x_i	x_1	$x_2 \ldots x_k$
n_i	n_1	$n_2 \ldots n_k$

bu yerda $\sum n_i = n$,

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

bu yerda $\sum W_i = 1$.

Amalda tajriba o‘tkazilib tanlanmani chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti topiladi, keyin nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti topiladi.

Misol. 10 marta tajriba o‘tkazish natijasida tanlanmaning statistik taqsimoti ma’lum

x_i	5	8	10
n_i	3	5	2

Tanlanmani nisbiy chastotalarga nisbatan taqsimoti topilsin.

Yechish. Tanlanmaning hajmini topamiz:

$$n = 3 + 5 + 2 = 10\,.$$

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \quad , \quad W_2 = \frac{5}{10} = 0{,}5 \quad , \quad W_1 = \frac{2}{10} = 0{,}2\,.$$

Nisbiy sanoqqa nisbatan statistik taqsimot:

x_i	5	8	10
W_i	0,3	0,5	0,2

Tekshirish: 0,3+0,5+0,2=1.

Empirik taqsimot funksiyasi

Faraz qilaylik, n marta tajriba o‘tkazish natijasida X ni belgilari bo‘yicha statistik taqsimot tuzilgan bo‘lsin hamda x – haqiqiy son bo‘lsin.

X ni x xaqiqiy sondan kichik qiymatlari sonini n_x bilan belgilaymiz.

Ta’rif. X belgini x haqiqiy sondan kichik $(X < x)$ qiymatlar qabul qilish nisbiy sanog‘iga empirik taqsimot funksiya deyiladi.Uni taqsimot funksiyasidan farq qilishi uchun $F^*(x)$ bilan belgilaymiz, ta’rifga ko‘ra

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bu yerda n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanmaning hajmi.

Empirik taqsimot funksiya $F^*(x)$- X tasodifiy mikdorning tajriba natijasida olingan ma’lumotlarni ($X < x$ larni) nisbiy sanog‘idan iborat, $F(x)$ taqsimot funksiya esa $X < x$ hodisasini ro‘y berish ehtimoli, ya’ni nazariy taqsimot.

Bernulli teoremasiga asosan

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F_n^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Demak, $F^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasi sinashlar soni ortishi bilan nazariy taqsimot *F(x)* ga yaqinlashadi. Shuning uchun *F(x)* ni xossalari $F^*(x)$ uchun ham o‘rinli bo‘ladi. $F^*(x)$ – funksiyaning xossalari:

1. Empirik taqsimot funksiyaning qiymatlari $[0, 1]$ segmentda yotadi:

$$0 \le F^*(x) \le 1.$$

2. Empirik taqsimot funksiya kamaymovchi:

$$F^*(x_1) \le F^*(x_2), \quad агар \quad x_1 < x_2$$

3. x_1 – eng kichik varianta bo‘lsa, u holda

$$F^*(x_1) = 0, \quad агар \quad x_1 \le x_2$$

x_k- eng katta varianta bo‘lsa, u holda

$$F^*(x) = 1, \quad агар \quad x > x_k\,.$$

Shunday qilib, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasi bosh to‘plam taqsimotining nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Misol. Quyidagi tanlanmaning statistik taqsimoti asosida empirik taqsimot funksiyasi tuzilsin.

x_i	3	8	10
n_i	4	10	6

Yechish: Tanlanma hajmini topamiz: $n = 4 + 10 + 6 = 20$. Eng kichik varianta 5 ga teng, 5 dan kichik x_i yo‘q, shuning uchun

$$F^*(x) = 0, \quad агар \quad x \le 5 \;\; bo'lsa$$

$X < 8$ qiymat, $x_1 = 3$ qiymat 4 marta kuzatilgan, demak,

$$F^*(x) = \frac{4}{20} = 0{,}5, \quad агар \;\; 5 < x \le 8$$

10 dan kichik variantalar soni 3 va 8. Ularning chastotalari 4+10=14 shuning uchun

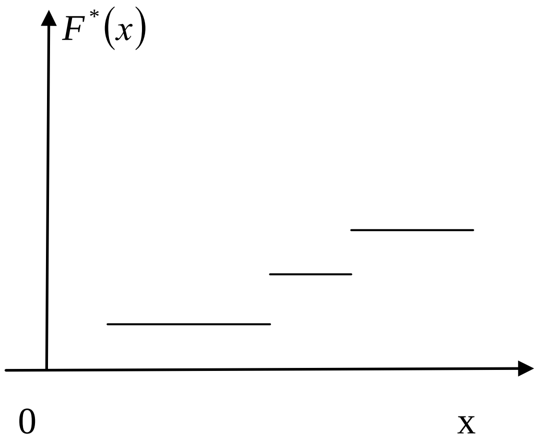
$$F^*(x) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7 \quad агар \quad 8 < x < 10$$

va nihoyat x > 10 bo‘lganda hamma variantalar x dan kichik bo‘ladi. 4+10+6=20

$$F^*(x) = \frac{20}{20} = 1, \quad агар \quad x > 10\,.$$

Topilganlarni umumlashtirsak,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & агар \quad x \le 5, \\ 0{,}2, & агар \quad 3 < x \le 8, \\ 0{,}7\,, & агар \quad 8 < x \le 10, \\ 1\,, & агар \quad x > 10. \end{cases}$$



3-shakl

Poligon va gistogramma

Tanlanmaning statistik taqsimotini grafik usulda ham berish mumkin. Shu maqsadda poligon va gistogrammalar o‘rganiladi.

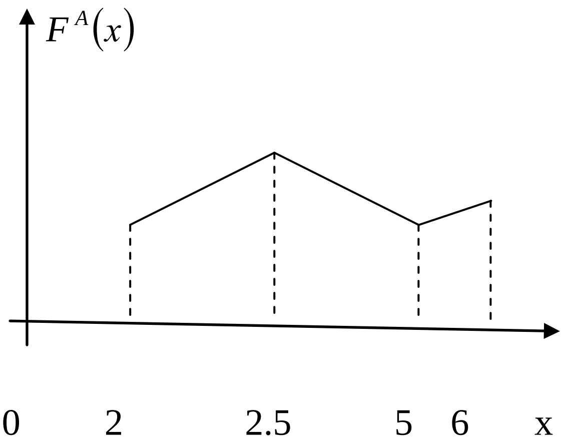
1-Ta’rif. $(x_1, n_1),(x_2, n_2),...,(x_k, n_k)$ nuqtalarni birlashtiruvchi siniq chiziqqa chastotalar poligoni deyiladi.

Uni grafigini chizish uchun x_i larni koordinatalar sistemasida Ox o‘qqa, n_i- larni Oy o‘qqa joylashtirib, (x_i, n_i) nuqtalar kesmalar bilan birlashtiriladi.

2-Ta’rif. (x_i, W_i), $(i=\overline{1,k})$ nuqtalarni birlashtiruvchi siniq chiziqlarga nisbiy chastotalar poligoni deyiladi.

Misol.

x_i	2	2,5	5	6
W_i	0,1	0,4	0,2	0,3

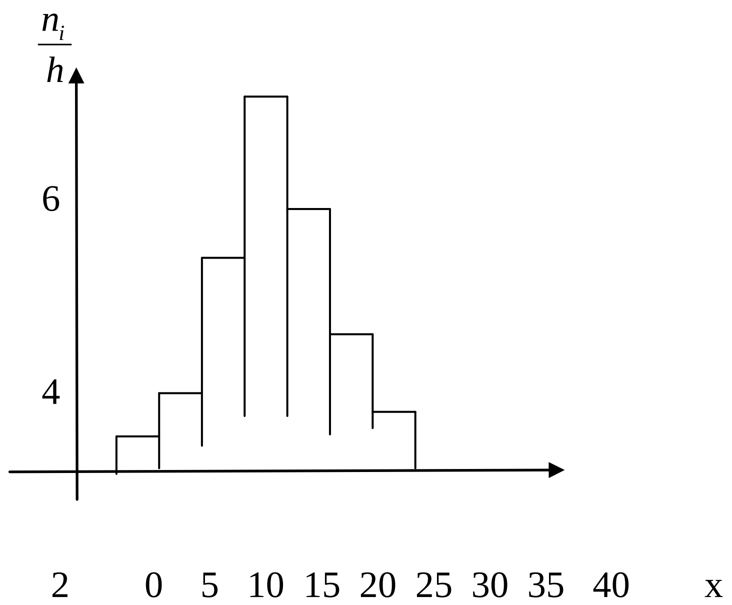


4-shakl

3- Ta’rif. Asoslari h bo‘lib balandligi $\frac{n_1}{h}$ - chastotalar zichligidan iborat bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat figura gistogramma deyiladi. Tekislikda gistogramma abssissa o‘qi h uzunlikdagi intervallar, ordinata o‘qiga $\frac{n_i}{h}$ qo‘yiladi.

Quyida berilgan jadval asosida gistogramma tuzilsin.

$h=5$	n_i	n_i / h
5-10	5	1,0
10-15	7	1,4
15-20	15	3,0
20-25	35	7,0
25-30	20	4,0
30-35	12	2,1
35-40	6	1,2



5-shakl

Tayanch iboralar

Tanlab kuzatish, takror, takrorsiz tanlanmalar, empirik taqsimot, poligon, gistogramma.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik statistikaning asosiy vazifasi.
2. Tanlab kuzatish metodi nima?
3. Takror va takrorsiz tanlanmalarni ishlatilish obyektlari.

10.5-§. Taqsimot parametrlarini statistik baholash

Faraz qilaylik, bosh to‘plamning biror belgisi bo‘yicha o‘rganish talab qilingan bo‘lsin. Nazariy mushohadalar bilan bosh to‘plamni belgisi biror taqsimotga bo‘ysinishi aniqlangan bo‘lsin. U holda taqsimot parametrlarini baholash masalasi qo‘yiladi. Agar bosh to‘plam Puasson taqsimotiga bo‘ysinsa, u holda λ parametrni baholashga, normal taqsimotga bo‘ysinsa, a va σ parametrlarni baholashga to‘g‘ri keladi.

Ko‘pincha kuzatuvchini ixtiyorida kuzatish natijasida olingan ma’lumotlar bo‘ladi, xolos. Masalan: n marta tajriba natijasida $x_1, x_2, .., x_n$.

$x_1, x_2, .., x_n$ ni erkli $X_1, X_2, .., X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosini topish, bu demak, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiyani topishdirki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini beradi. Masalan, normal taqsimotining matematik kutishini baholash uchun ushbu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Ta’rif. Nazariy taqsimotni noaniq parametrini baholash uchun tajriba natijasida olingan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga statistik baho deyiladi.

Qo‘zg‘almagan, effektiv va asosli baholar

Faraz qilaylik, θ bosh to‘plamni nazariy taqsimotini biror parametri bo‘lsin, ya’ni baholanayotgan parametr. Bu parametrni baholash uchun bosh to‘plamda hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma olamiz va undan θ_1^* baho tuzamiz, yana ikkinchi marta bosh to‘plamdan hajmi n ga teng tanlanma olib, undan θ_2^* baho tuzamiz va hokazo k

- baho θ_k^* bo‘lsin. Shunday qilib $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ - bular har xil bo‘lib, biror θ^* tasodifiy miqdorni qiymatlari sifatida qaraymiz.

Shunday qilib, θ baholanayotgan parametr va θ^* - statistik baho.

1-Ta’rif. Statistik baho θ^* qo‘zg‘almagan deyiladi, agar uni matematik kutishi baholanayotgan parametrga teng bo‘lsa:

$$M[\theta^*] = \theta .$$

2-Ta’rif. Statistik baho θ^* qo‘zg‘algan deyiladi, agar uni matematik kutishi baholanayotgan parametrga teng bo‘lmasa:

$$M[\theta^*] \neq \theta .$$

3-Ta’rif. Statistik baho θ^* effektiv deyiladi, (tanlanmaning hajmi n berilganda) agar uni dispersiyasi minimal bo‘lsa:

$$\min\{D(\theta^*) = M[\theta^* - M(\theta^*)]^2\} .$$

4-Ta’rif. Statistik baho θ^* asosli deyiladi agarda sinashlar soni ortishi bilan kichik musbat $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi munosabat bajarilsa:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Bosh va tanlanma o‘rtalar

Faraz qilaylik, hajmi N ga teng bo‘lgan bosh to‘plamni o‘rganish talab qilingan bo‘lsin.

1-Ta’rif. Bosh to‘plam belgisining o‘rta arifmetik qiymatiga bosh o‘rta deyiladi.

Agar bosh to‘plam elementlari belgisi $x_1, x_2, .., x_N$ – har xil bo‘lsa,

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Agar belgining $x_1, x_2, .., x_k$ qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, .., N_k$ chastotalarga ega, shu bilan birga $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo‘lsa, u holda

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i x_i}{N}.$$

Faraz qilaylik, bosh to‘plamni o‘rganish uchun hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma to‘plam ajratilgan bo‘lsin.

2-Ta’rif. Tanlanma to‘plam belgisining o‘rta arifmetik qiymatiga tanlanma o‘rta deyiladi.

$$\overline{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

agar tanlanmani belgisining elementlari har xil bo‘lsa, u holda

$$\overline{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Tanlanma o‘rta $\overline{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ bosh to‘plamni o‘rta qiymati matematik kutishni qo‘zg‘almagan bahosi bo‘ladi, ya’ni

$$M(\overline{x}_T) = M\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) = \frac{M(x_1) + M(x_2) + ... + M(x_n)}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a.$$

Bosh va tanlanma dispersiyalar

Faraz qilaylik, biror to‘plam va uning statistik taqsimoti berilgan bo‘lsin:

$$\begin{array}{lllll} x_i & x_1 & x_2 & .... & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & ... & n_k \end{array}$$

bunda $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$

Bundan so‘ng yozishni qulaylashtirish maqsadida yig‘indi belgisi $\sum_{i=1}^{k}$ ni $\sum$ belgi bilan almashtiramiz.

O‘rta qiymatni topamiz:

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}.$$

Bundan

$$\overline{x} \cdot n = \sum n_i x_i . \qquad (1)$$

$\overline{x}$ o‘zgarmas kattalik bo‘lgani uchun

$$\sum n_i \overline{x} = \overline{x} \cdot \sum n_i = n\overline{x} . \qquad (2)$$

1-Ta’rif. x_i variantalar va ularning o‘rta qiymati o‘rtasidagi ayirmaga chetlanish deyiladi

$$x_i - \overline{x}$$

Teorema. Chetlanishni o‘rta qiymati nolga teng:

$$\frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})}{n} = 0$$

Xaqiqatdan ham, (1) va (2) ni hisobga olsak,

$$\frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})}{n} = \frac{\sum n_i x_i - \overline{x}\sum n_i}{n} = \frac{0}{n} = 0 .$$

Misol. Tasodifiy miqdor X taqsimoti bilan berilgan:

x_i	4	5	12
n_i	5	4	1

Chetlanishning o‘rta qiymatini toping.

Yechish. O‘rtacha qiymatni topamiz:

$$\overline{x}=\frac{4\cdot5+5\cdot4+12\cdot1}{10}=\frac{20+20+12}{10}=\frac{52}{10}=5{,}2\,.$$

$$\sum n_i(x_i-\overline{x})=5\cdot(4-5{,}2)+4\cdot(5-5{,}2)+1\cdot(12-5{,}2)=-6-0{,}8+6{,}8=-6{,}8+6{,}8=0$$

Demak, $\dfrac{\sum n_i(x_i-\overline{x})}{n}=0\,.$

Bizni qiziqtirayotgan narsa o‘rtacha chetlanishdan iborat, lekin o‘rtacha chetlanish nolga teng chiqayapti, aslida unday emas. Shuni tushunish uchun dispersiya tushunchasini kiritamiz.

2-Ta’rif. Bosh to‘plam elementlari belgisining chetlanishlari kvadratidan olingan o‘rta arifmetik qiymatga bosh dispersiya deyiladi va quyidagi formula bilan ifodalaniladi:

$$\overline{D}_Б=\frac{\sum_{i=1}^{k}N_i(x_i-\overline{x}_Б)^2}{N}$$

bu yerda $\sum_{i=1}^{k}N_i=N\,.$

Agar $x_1,x_2,..,x_N$ variantalar har xil bo‘lsa, u holda

$$\overline{D}_Б=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x}_Б)^2}{N}\,.$$

3-Ta’rif. Tanlanma to‘plam elementlari belgisining chetlanishlari kvadratidan olingan o‘rta arifmetik qiymatga tanlanma dispersiya deyiladi.

$$\overline{D}_T=\frac{\sum_{i=1}^{k}N_i(x_i-\overline{x}_T)^2}{n}\tag{3}$$

Agar $x_1,x_2,..,x_k$ lar har xil bo‘lsa, u holda

$$\overline{D}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_T)^2}{n}.$$

(3)formulani ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i \left[x_i^2 - 2x_i \cdot \overline{x} + (\overline{x})^2\right]}{n} =$$
$$= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\sum n_i x_i}{n} \cdot \overline{x} + [\overline{x}]^2 \frac{\sum n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + (\overline{x})^2 = \overline{x}^2 - [\overline{x}]^2.$$

Demak,

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2 \quad , \qquad (4)$$

bu yerda $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}$.

(4) formulaga dispersiyani hisoblash formulasi deyiladi.

Misol. Quyidagi taqsimotga ega bo‘lgan miqdorni dispersiyasi topilsin:

x_i	5	8	10	15
n_i	4	5	7	4

Yechish.O‘rtacha qiymatni topamiz:

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 4 + 8\cdot 5 + 10\cdot 7 + 15\cdot 4}{20} = \frac{190}{20} = 9{,}5.$$

Belgining qiymatlari kvadratlarining o‘rtacha qiymatini topamiz:

$\overline{x}^2$	25	64	100	225
n_i	4	5	7	4

$$\overline{x^2} = \frac{100+320+700+900}{20} = \frac{2020}{20} = 101.$$

Izlanayotgan dispersiya:

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2 = 101 - (9{,}5)^2 = 101 - 90{,}25 = 10{,}75.$$

Bosh dispersiyani baholashda tuzatilgan tanlanma dispersiya

Faraz qilaylik, bosh to‘plamni o‘rganish uchun qaytarilgan usul bilan hajmi n bo‘lgan tanlanma to‘plam ajratilgan bo‘lsin:

$$\begin{array}{lllll} x_i & x_1 & x_2 & \ldots. & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \ldots & n_k \end{array}$$

shu bilan birga $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$

Shu ma’lumotlar asosida bosh to‘plamni noma’lum dispersiyasi $D_Б$ ni baholash talab qilinadi. Agar baho sifatida tanlanma dispersiyani olsak sistematik xato yuzaga keladi

$$M[D_T] = \frac{n-1}{n} D_Б.$$

Bunday hollarda tuzatilgan dispersiyalardan foydalaniladi. Buning uchun $D_Б$ ni $\frac{n}{n-1}$ ga ko‘paytirib yangi dispersiya tuziladi:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_T})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_T)^2}{n-1}.$$

Shunday qilib, tuzatilgan S^2 dispersiya qo‘zg‘almagan baho bo‘ladi:

$$M[S^2] = M[\frac{n}{n-1} D_Б] = \frac{n}{n-1} M[D_Б] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_Б = D_Б.$$

Shunday qilib, tuzatilgan dispersiya

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_T})^2}{n-1}.$$

Tuzatilgan kvadratik chetlanish

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_T)^2}{n-1}}$$

Tuzatilgan dispersiya tanlanmani hajmi kichik bo‘lgan hollarda ishlatiladi. Agar tanlanmani hajmi katta bo‘lsa, dispersiya bilan tuzatilgan dispersiya orasidagi farq kamayadi.

Tayanch iboralar

Bosh o‘rta, tanlanma o‘rta, bosh dispersiya, tanlanma dispersiya, tuzatilgan tanlanma dispersiya.

Takrorlash uchun savollar

1. Statistik baho nima?
2. Tanlanma o‘rta nimani bahosi?
3. Dispersiyani hisoblash formulasi.

10.6-§. Intervalli baholar.

Bahoning aniqligi. Ishonchli intervallar.

1-Ta'rif. Bitta son bilan aniqlangan bahoga nuqtaviy baho deyiladi.

Biz yuqorida ko'rgan baholar nuqtaviy baholar. Nuqtaviy baho tanlanma to'plamni hajmi kichik bo'lganda xatolarga olib keladi. Shuning uchun bunday hollarda intervalli baholar ishlatiladi.

2-Ta'rif. Ikkita nuqta ya'ni intervalni uchlari bilan aniqlangan baholarga intervalli baholar deyiladi.

Intervalli baholar baholarni aniqligini va ishonchligini ta'minlaydi.

Faraz qilaylik, θ^* statistik baho bosh to'plamni noma'lum parametri θ ni baholash uchun xizmat qilsin. $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$ tengsizlikni qaraymiz, δ qancha kichik bo'lsa θ^* statistik baho, θ parametr uchun shuncha aniq baho bo'ladi. Quyidagi tengsizlikni baholaymiz:

$$\left|\theta-\theta^*\right|<\delta .$$

Umuman olganda tengsizlikni aniq bajarilishini aytish qiyin. Lekin uni bajarilish ehtimoli mavjud. Shu ehtimolni γ bilan belgilaymiz.

3-Ta'rif. θ parametrni baholash uchun θ^* bahoni ishonchliligi deb, $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$ tengsizlikni bajarilish ehtimoli γ ga aytiladi. Odatda bahoni ishonchliligi katta ehtimol bilan kutiladi va quyidagi qiymatlarni qabul qiladi: 0, 95; 0,99 va 0,999.

$\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$ tengsizlikni bajarilish ehtimoli, γ ga teng bo'lsin, ya'ni

$$P[|\theta-\theta^*|<\delta]=\gamma .$$

$\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$ tengsizlikni unga teng kuchli

$$-\delta<\theta-\theta^*<\delta \quad \text{yoki} \quad \theta^*-\delta<\theta<\delta+\theta^*$$

qo'sh tengsizlik bilan almashtirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P[\theta^* - \delta < \theta < \delta + \theta^*] = \gamma .$$

Demak, $(\theta^* - \delta; \delta + \theta^*)$ oraliq θ noma’lum parametrni o‘z ichiga oladi.

4-Ta’rif. Noma’lum parametr θ ni, γ ishonchlilik bilan qoplaydigan (θ^*- δ; θ^*+ δ) oraliqqa ishonchli interval deyiladi.

Normal taqsimotda σ aniq bo‘lganda matematik kutishni baholashda ishonchli intervallar

Faraz qilaylik, bosh to‘plamni belgisi X normal taqsimotga ega bo‘lsin hamda o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ ma’lum bo‘lsin.

Maqsadimiz σ aniq bo‘lganda bosh to‘plamni matematik kutishini baholash. Buning uchun bosh to‘plamdan hajmi n ga teng tanlanma to‘plam ajratilgan bo‘lib, $x_1, x_2, .., x_n$ tanlanma qiymatlarini bir xil taqsimlangan erkli $X_1, X_2, .., X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qaraymiz va o‘rta qiymatini topamiz:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n},$$

$\overline{X}$ ni matematik kutishi $M(\overline{X}) = a$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Endi $P(|\overline{X} - a| < \delta) = \gamma$ munosabatni bajarilishini tekshiramiz.

Chetlanishni ehtimolini keltiramiz:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

va buni $\overline{X}$ tasodifiy miqdorga qo‘llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) \qquad (1)$$

bu yerda $t = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sigma}$, bu tenglikdan δ ni topib, $\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ buni (1) qo‘ysak:

$$P(\left|\overline{X}-a\right|<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}})=2\Phi(t). \qquad (2)$$

(2) tenglikda qavs ichidagi tengsizlikni qo‘sh tengsizlik bilan almashtirsak:

$$P\left(\overline{x}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma .$$

Bu yerda $\Phi(t)$ - Laplas funksiyasi uning qiymatlari ilovadan topiladi.

Agar

t= 1 bo‘lsa, $\gamma=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826$

t= 2 bo‘lsa, $\gamma=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544$

t= 3 bo‘lsa, $\gamma=2\Phi(3)=0{,}9973$

(2) tenglikni ma’nosi γ ishonchlilik bilan $(\overline{x}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}};\overline{x}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}})$ interval noma’lum a parametrni qoplaydi. Bu yerda $\delta=t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bahoning aniqligi, $n=\frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2}$ esa oldindan aniqlanishi mumkin bo‘lgan tajribalar soni.

Misol. X tasodifiy miqdor o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=4$ ma’lum bo‘lgan norial taqsimotga ega. Tanlanma hajmi $n=36$ va bahoning ishonchliligi $\gamma=0{,}9$ berilgan. Noma’lum a matematik kutishini $\overline{x}=4{,}35$ tanlanma o‘rtacha qiymatlar bo‘yicha baholash uchun ishonchli intervallarni toping.

Yechish. $\gamma=2\Phi(t)=0{,}9$ munosabatdan t ni topib, $\Phi(t)=0{,}45$ ni hosil qilamiz. Jadvaldan (2- ilova) $t=1{,}64$ ni topamiz. Bahoning aniqligini topamiz:

$$\text{b=}\delta=\frac{\sigma\cdot t}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}64\cdot 4}{\sqrt{36}}=\frac{1{,}64\cdot 4}{6}=\frac{3{,}28}{3}\approx 1{,}09.$$

Ushbu

$$x-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<x+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo‘ysak:

$$43{,}5-1{,}09<a<43{,}5+1{,}09$$

$$42{,}41<a<44{,}99.$$

Tayanch iboralar

Nuqtaviy baho, intervalli baho, ishonchli interval.

Takrorlash uchun savollar

1. Ishonchlilik funksiyasi.
2. Ishonchli ehtimol.

XI-BOB. Korrelyasiya va regressiya haqida tushunchalar

11.1-§. Funksional, statistik va korrelyasion bog‘lanishlar

Juda ko‘p hollarda X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘lanishlarni o‘rganishga tug‘ri keladi. Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘lanish funksional yoki statistik bo‘lishi yoki umuman bog‘lanish bo‘lmasligi mumkin.

1-Ta’rif. Agar tasodifiy miqdorlardan birining har bir qiymatiga ma’lum qoida asosida ikkinchisining biror qiymati mos kelsa, bunday bog‘lanishga funksional bog‘lanish deyiladi va

$$Y = \varphi(x)$$

ko‘rinishda yoziladi.

2-Ta’rif. Agar tasodifiy miqdorlardan birining o‘zgarishi bilan ikkinchisining taqsimoti o‘zgarsa, bunday bog‘lanishga statistik bog‘lanish deyiladi.

3-Ta’rif. Agar statistik bog‘lanishda tasodifiy miqdorlardan birining o‘zgarishi bilan ikkinchisining o‘rta qiymati o‘zgarsa, bunday bog‘lanishga korrelyasion bog‘lanish deyiladi.

Korrelyasion bog‘lanishlar to‘liq bo‘lmagan bog‘lanishlardir.

Masalan: bir xil yuzaga ega bo‘lgan bir nechta maydonga don ekinlari eksak, har xil hosil olamiz. Agarda solinadigan o‘g‘itni miqdorini orttirib borsak, hosildorlik ortadi, ba’zi birlarida hosil kamayishi ham mumkin, lekin o‘rtacha hosildorlik ortadi. Solingan o‘g‘it bilan hosildorlik orasidagi bog‘lanish korrelyasion bog‘lanish bo‘ladi. Chunki hosildorlikka o‘g‘itdan tashqari yana ko‘p omillar ta’sir etadi.

Korrelyasion bog‘lanishlar to‘g‘ri chiziqli, egri chiziqli hamda bir faktorli, ko‘p faktorli bo‘ladi.

Tanlanmaning regressiya tenglamasi

Bizga ma’lumki, shartli matematik kutishni baholash uchun shartli o‘rta qiymat baho vazifasini o‘taydi.

1-Ta’rif. Tashkil etuvchi X biror x soni qabul qilganda $(X = x)$, Y ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining o‘rta arifmetik qiymatiga shartli o‘rta deyiladi.

Misol. $X=x_1=3$ bo‘lganda Y quyidagi qiymatlarni qabul qilsin: $y_1=5,\ y_2=7,\ y_3=12$, u holda

$$\overline{y}_{x_1}=\frac{5+7+12}{3}=8.$$

Xuddi shunday, X ning Y=y ga mos qiymatlarining o‘rta arifmetik qiymatiga X ni shartli o‘rta qiymati deyiladi va $\overline{x}_y$ kabi belgilanadi. Ehtimollar nazariyasidan bizga ma’lumki,

$$M(Y\mid x)=f(x),$$

Y ni X ga regressiya tenglamasi

$$M(X\mid y)=\varphi(y),$$

X ni Y ga regressiya tenglamasi.

Shunday qilib, $M(Y\mid x)$ matematik kutish x ni funksiyasi. Xuddi shunday $\overline{y}_x$ ham x ni funksiyasi va buni $f^*(x)$ bilan belgilasak

$$\overline{y}_x=f^*(x)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu Y ni X ga tanlanma regressiya tenglamasi deyiladi. $f^*(x)$ – Y ni X ga tanlanma regressiya deyiladi.

Xudi shunday

$$\overline{x}_y=\varphi^*(y)$$

X ni Y ga tanlanma regressiya tenglamasi deyiladi. $\varphi^*(y)$ – X ni Y ga tanlanma regressiyasi deyiladi.

$f^*(x)$ va $\varphi^*(y)$ funksiyalari parametrlarini topish bilan shug‘ullanamiz.

Gruppalanmagan ma’lumotlar asosida tanlanmani to‘g‘ri chiziqli regressiya tenglamasini o‘rtacha kvadratik baholash

Faraz qilaylik, (X,Y) tasodifiy miqdorlar sistemasi tajriba natijasida $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$ qiymatlarni qabul qilsin.

Tajribadan olingan ma’lumotlar asosida to‘g‘ri chiziqli regressiya tenglamasini parametrlarini aniqlaymiz, aniqrog‘i,

$$Y = \rho_{yx} x + b \tag{1}$$

Y ning X ga regressiya tenglamasini izlaymiz.

Bu yerda $\rho_{xy} -$ Y ni X ga tanlanma to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyenti Y bosh to‘plamni korrelyasiya koeffisiyenti uchun baho bo‘ladi.

$y = kx + b$ Tajribadan olingan ma’lumotlar asosida tuzilgan funksiya bo‘lsin. Tajribalarni shunday o‘tkazamizki bu $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ nuqtalar (1) to‘g‘ri chiziqqa yaqin bo‘lsin. Demak,

$$Y_i - y_i \quad (i = 1,2,..,n)$$

chetlanishni baholaymiz.

Chetlanishlar kvadratining minimumi o‘rtacha kvadratik baho bo‘ladi. Shuning uchun quyidagi funksiyani tuzamiz:

$$F(\rho; b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 .$$

$$Y_i = \rho x + b$$

ekanligini hisobga olsak,

$$F(\rho; b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2 ..$$

Minimum qiymatni topish uchun xususiy hosilalarni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Bundan elementar almashtirishlar bajarib, ρ va b ga nisbatan ikkita chiziqli tenglama hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right) b = \sum xy, \\ \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, izlanayotgan parametrlarni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma x \\ \Sigma x & n \end{vmatrix} = n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2, \qquad \Delta_\rho = \begin{vmatrix} \Sigma xy & \Sigma x \\ \Sigma y & n \end{vmatrix} = n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma x & \Sigma y \end{vmatrix} = \Sigma x^2\,\Sigma y - \Sigma x\,\Sigma xy,$$

$$\rho = \frac{\Delta_\rho}{\Delta} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\Sigma x^2\Sigma y - \Sigma x\Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

Xuddi shunday

$$\overline{x}_y = \rho_{xy} y + C$$

(bu yerda ρ_{xy} – X ni Y ga tanlanma regressiya koeffisiyenti) X ni Y ga regressiya tenglamasini topish mumkin.

Misol. 5 yil kuzatish natijasida olingan ma’lumotlar asosida Y ni X ga regressiya tenglamasi topilsin.

x_i	1	2	3	4	5
Y_i	2,5	3,5	4	5	6,5

Yechish. Jadval tuzamiz.

x_i	Y$_i$	x_i^2	$x_i y_i$	Y_i	$Y_i - y_i$
1	2,5	1	2,5	2,42	-0,08
2	3,5	4	7,0	3,39	-0,11
3	4	9	12,0	4,36	+0,36
4	5	16	20,0	5,33	+0,33
5	6,5	25	32,5	6,30	-0,20
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 21{,}5$	$\sum x_i^2 = 55$	$\sum x_i y_i = 74$		

$$\rho_{yx} = \frac{5\cdot 74 - 15\cdot 21{,}5}{5\cdot 55 - (15)^2} = \frac{370 - 321{,}5}{275 - 225} = \frac{48{,}5}{50} = 0{,}97;$$

$$b = \frac{55\cdot 21{,}5 - 15\cdot 74}{50} = \frac{1182{,}5 - 1110}{50} = \frac{72{,}5}{50} = 1{,}45.$$

$$Y_1 = 0{,}97 \cdot 1 + 1{,}45 = 2{,}42, \quad Y_2 = 0{,}97 \cdot 2 + 1{,}45 = 3{,}39,$$
$$Y_3 = 0{,}97 \cdot 3 + 1{,}45 = 4{,}36, \quad Y_4 = 0{,}97 \cdot 4 + 1{,}45 = 5{,}33,$$
$$Y_5 = 0{,}97 \cdot 5 + 1{,}45 = 6{,}30.$$

Gruppalangan ma’lumotlar asosida tanlanmaning to‘g‘ri chiziqli regressiya tenglamasini baholash

Faraz qilaylik, tajribalar soni katta bo‘lsin. Bunday holda X ning bir xil qiymatlari n_x marta, Y niki n_y marta va (x, y) ning juft qiymatlari n_{xy} marta takrorlanadi. Shu ma’lumotlarni jadvalga qo‘yib,
korrelyasion jadval tuziladi.

y \ x	10	15	20	25	n_y
2	3	2	-	-	5
4	1	8	6	-	15
6	-	7	23	5	35
8	-	-	8	7	15
n_x	4	17	37	12	70

Ana shunday tuzilgan jadvalga korrelyasion jadval deyiladi.

Bu yerda

$$\sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy} = n, \qquad \sum n_x = 4 + 17 + 37 + 12 = 70,$$

$$\sum n_y = 5 + 15 + 35 + 15 = 70.$$

Shunday jadval asosida regressiya tenglamasi tuziladi.

Oldingi paragrafda gruppalanmagan ma’lumotlar uchun

$$\begin{cases}\left(\sum x^2\right)\rho_{yx} + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho_{yx} + nb = \sum y\end{cases} \qquad (1)$$

ni keltirib chiqargan edik. Endi shu sistemani gruppalangan ma'lumotlar sistemalari uchun yozamiz. Ushbu ayniyatlardan foydalanamiz:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}, \quad \text{bundan} \quad \sum x = n\bar{x};$$

$$\bar{x} = \frac{\sum y}{n}, \quad \text{bundan} \quad \sum x = n\bar{y};$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}, \quad \text{bundan} \quad \sum x^2 = n\bar{x}^2,$$

hamda $\sum xy = \sum n_{xy} x \cdot y$ larni hisobga olsak

$$\begin{cases}\left(n\overline{x^2}\right)\rho_{yx} + \left(n\bar{x}\right)b = \sum n_{xy} xy, \\ \left(\bar{x}\right)\rho_{yx} + b = y.\end{cases} \qquad (2)$$

bu sistemani yechib, izlanayotgan

$$\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$$

tenglamani parametrlarini baholaymiz.

(2) dan b ni topib,

$$b = \bar{y} - \rho_x \cdot \bar{x},$$

yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx} x + \bar{y} - \rho_{yx} \cdot \bar{x},$$

bundan

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}) \qquad (3)$$

ega bo'lamiz.

$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \tilde{\sigma}_x{}^2$ ekanini hisobga olib (2) sistemadan ρ_{yx} ni topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\left[\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right]} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\tilde{\sigma}^2{}_x}.$$

Tenglikni ikki tomonini $\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}$ ga ko‘paytirsak:

$$\rho_{yx} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\tilde{\sigma}_x\,\tilde{\sigma}_y}$$

kelib chiqadi.

$$\rho_{yx} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \tau_T$$

belgilash kiritamiz.

Bundan

$$\rho_{yx} = \tau_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x},$$

buni (3) ga qo‘ysak:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \tau_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}(x - \overline{x})$$

Y ni X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tenglamasi. Bu yerda tanlanmaning korrelyasiya koeffisenti

$$\tau_T = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\tilde{\sigma}_x\,\tilde{\sigma}_y}$$

yoki

$$\tau_T = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\tilde{\sigma}_x\,\tilde{\sigma}_y}$$

bu yerda

$$\overline{xy} = \frac{\sum n_{xy} xy}{n}$$

x, y – variantalar, n_{xy} – (x, y) juft qiymatlar variantalari, $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$ – tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishlar, $\overline{x}$, $\overline{y}$ -tanlanma o‘rtalar.

Agar $\tau_T = 0$ bo‘lsa, X va Y lar orasida bog‘lanish bo‘lmaydi, $\tau = \pm 1$ bo‘lsa, bog‘lanish funksional, $-1 < \tau_T < 1$ bo‘lsa, bog‘lanish korrelyasion bo‘ladi.

Misol. Quyidagi korrelyasion jadval asosida Y ni X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

$$\overline{Y}_x - \overline{Y} = \tau_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}(x - \overline{x})$$

x \ u	5	10	16	20	25	30	
15	1	4					5
25		7	3				10
35			2	50	2		54
45			1	10	6		17
55				4	7	3	14
-	1	11	6	64	15	3	100

Shu jadval asosida qo‘yidagi jadvallarni tuzamiz.

X	X^2	n_x	$n_x x$	$n_x x^2$
9	25	1	5	25
10	100	11	110	1100
15	225	6	90	1350
20	400	64	1280	25600
25	625	15	375	9375
30	900	3	90	2700
		100	1950	40150

Y	Y^2	n_u	$n_u u$	$n_u u^2$
15	225	5	75	1125
25	625	10	250	6250
35	1225	54	1890	66150

45	2025	17	765	34425
55	3025	14	770	42350
		100	3750	150300

Quyidagilarni xisoblaymiz:

$$\overline{x} = \frac{\sum n_x x}{n} = \frac{1950}{100} = 19,5; \qquad \overline{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{3750}{100} = 37,5;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum n_x x^2}{n} = \frac{40150}{100} = 401,5; \quad \overline{y^2} = \frac{\sum n_y y^2}{n} = \frac{150300}{100} = 1503;$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{401,5 - (19,5)^2} = \sqrt{21,25} = 4,61$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{1503 - (37,5)^2} = \sqrt{96,75} = 9,84$$

Bular asosida quyidagi yig‘indini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \sum n_{xy} x \cdot y &= 15(5 \cdot 1 + 10 \cdot 4) + 25(10 \cdot 7 + 15 \cdot 9) + \\ &+ 35(15 \bullet 2 + 20 \bullet 50 + 25 \bullet 2) + 45(15 \bullet 1 + 20 \bullet 10 + 25 \bullet 6) + \\ &+ 55(20 \bullet 4 + 25 \bullet 7 + 30 \bullet 3) = \\ &= 675 + 2875 + 37800 + 15425 + 18975 = 76750 \end{aligned}$$

$\overline{xy}$ ni hisoblaymiz.

$$\overline{xy} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy}{n} = \frac{76750}{100} = 767,5$$

$$\tau = \frac{\overline{xy} - \overline{x}}{\tilde{\sigma}_x \, \tilde{\sigma}_y} = \frac{767,5 - 19,5 \cdot 37,5}{4,61 \cdot 9,84} = \frac{36,25}{45,3624} = 0,799$$

Shunday qilib, Y ni X ga regressiya tenglamasi

$$\overline{y}_x - 37,5 = 0,799 \cdot \frac{9,84}{4,61}(x - 19,5)$$

$$\overline{y}_x - 37{,}5 = 1{,}705 \cdot (x - 19{,}5)$$

$$\overline{y}_x = 1{,}705x - 33{,}256 + 37{,}5$$

$$\overline{y}_x = 1{,}705x - 4{,}244 .$$

Tayanch iboralar

Korrelyasiya, regressiya, korrelyasiya momenti, korrelyasiya koeffisiyenti.

Takrorlash uchun savollar

1. Korrelyasion bog‘lanishni ma’nosi.
2. Tanlamaning regressiya tenglamasi.
3. Shatrli o‘rta bilan shartli matematik kutish orasidagi bog‘lanish.

Misol:

1. Y ni X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tenglamasi 5 marta kuzatish natijasida olingan quyidagi ma’lumotlar asosida tuzilsin.

x	1,0	1,5	2	2,5	3
y	1,2	2,0	3	4	5

11.2-§. Juft korrelyatsion-regression tahlil

Tayanch iboralar: bog‘lanish, korrelyatsion bog‘lanish, chiziqli, chiziqsiz bog‘lanish, regressiya, eng kichik kvadratlar usuli.

Iqtisodiy-ijtimoiy jarayonlarda bog‘likliklar turlarini o‘rganish

Ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishlarni o‘rganish ekonometrika fanining muhim vazifalaridan biridir.

Bu jarayonda ikki xil belgilar yoki ko‘rsatkichlar ishtirok etadi, biri bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilar, ikkinchisi bog‘liq o‘zgaruvchilar hisoblanadi.

Birinchi turdagi belgilar boshqalariga ta’sir etadi, ularning o‘zgarishiga sababchi bo‘ladi. shuning uchun ular omil belgilar deb yuritiladi, ikkinchi toifadagilar esa natijaviy belgilar deyiladi.

Masalan, iste’molchining daromadi ortib borishi natijasida uning tovar va xizmatlarga bo‘lgan talabi oshadi. Bu bog‘lanishda talabning ortishi natijaviy belgi, unga ta’sir etuvchi omil, ya’ni daromad esa omil belgidir.

Omillarning har bir qiymatiga turli sharoitlarida natijaviy belgining har xil qiymatlari mos keladigan bog‘lanish korrelyatsion bog‘lanish yoki munosabat deyiladi.

Korrelyatsion bog‘lanishning harakterli xususiyati shundan iboratki, bunda omillarning to‘liq soni noma’lumdir. Shuning uchun bunday bog‘lanishlar to‘liqsiz hisoblanadi va ularni formulalar orqali taqriban ifodalash mumkin, xolos.

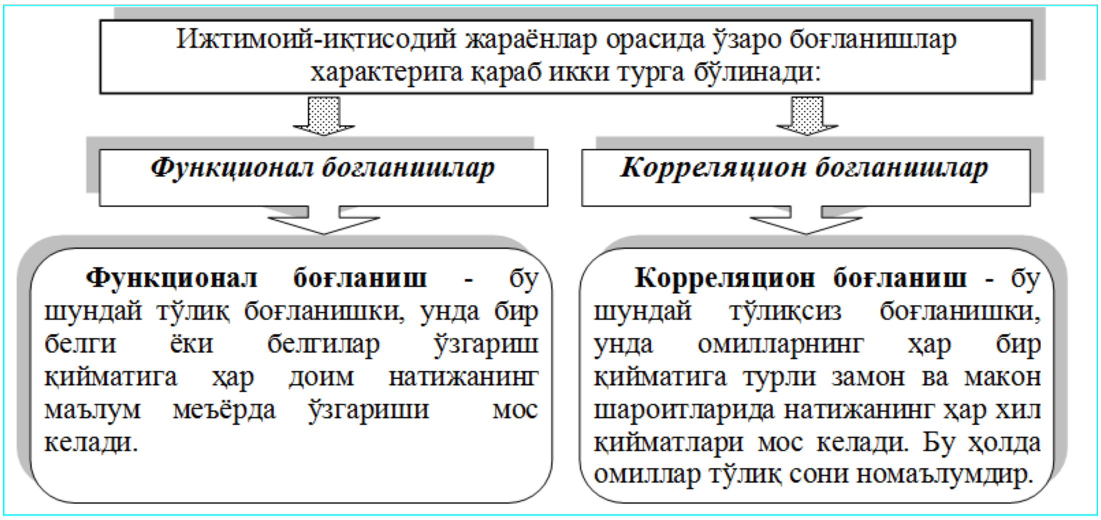
Korrelyatsiya so‘zi lotincha ***correlation*** so‘zidan olingan bo‘lib, o‘zaro munosabat, muvofiqlik, bog‘liqlik degan ma’noga ega.

Ikki hodisa yoki omil va natijaviy belgilar orasidagi bog‘lanish **juft korrelyatsiya** deb ataladi.

Korrelyatsion bog‘lanishlarni o‘rganishda ikki toifadagi masalalar ko‘ndalang bo‘ladi. Ulardan biri o‘rganilayotgan hodisalar (belgilar) orasida qanchalik zich (ya’ni kuchli yoki kuchsiz) bog‘lanish mavjudligini baholashdan iborat. Bu korrelyatsion tahlil deb ataluvchi usulning vazifasi hisoblanadi.

Korrrelyatsion tahlil deb hodisalar orasidagi bog‘lanish zichlik darajasini baholashga aytiladi.

Omillarning o‘zaro bog‘lanishi 2 turga bo‘linadi: funksional bog‘lanish va korrelyatsion bog‘lanish.

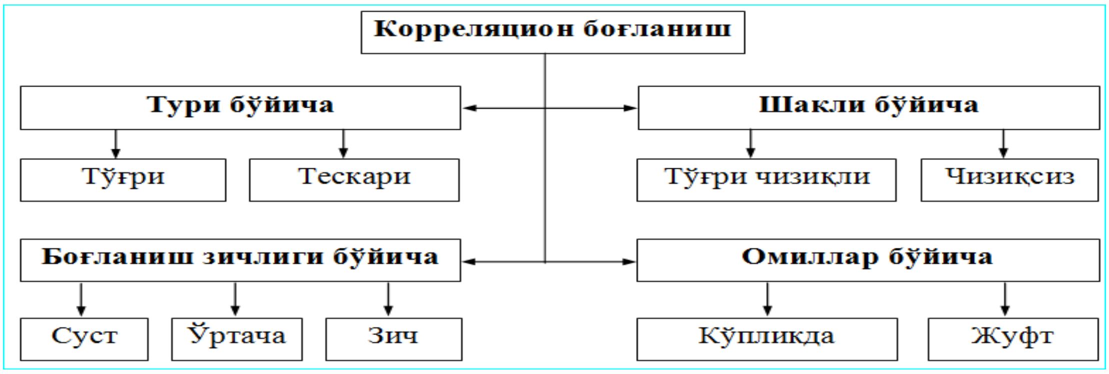


4.1.-rasm. Bog‘lanish turlari

Yunalishlarning o‘zgarishiga karab, bog‘lanishlar ikki turga bo‘linadi: to‘gri bog‘lanish va teskari bog‘lanishlar.

Analitik ifodalarning ko‘rinishlariga qarab ham bog‘lanishlar ikki turga bo‘linadi: to‘g‘ri chiziqli va chiziksiz bog‘lanishlar.

Fuksional bog‘lanishlarda bir o‘zgaruvchi belgining har qaysi qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi belgining anik bitta qiymati mos keladi.



4.2.-rasm. Korrelyatsion bog‘lanish turlari

Korrelyatsiya koeffitsiyentining turlari va hisoblash usullari

Korrelyatsion tahlil korrelyatsiya koeffitsiyentlarini aniqlash va ularning muhimligini, ishonchliligini baholashga asoslanadi.[3]

Chiziqli korrelyatsiya koeffitsiyentining hisoblash formulasi:

[3]Gujarati D.N. Basic Econometrics. McGraw-Hill, 4th edition, 2003 (Gu),Inc.p. 90

$$r_{Y/X} = \frac{\overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad (1)$$

bu yerda,

σ_x- X belgining kvadratik farqining o‘rtachasi;

σ_y- U belgining kvadratik farqining o‘rtachasi.

$$\sigma_X = \sqrt{\overline{X}^2 - (\overline{X})^2}\,; \qquad (2)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\overline{Y}^2 - (\overline{Y})^2}\,. \qquad (3)$$

Determinatsiya koeffitsiyenti korrelyatsiya koeffitsiyentining kvadratiga teng.

Korrelyatsiya koeffitsiyenti (r) –1 dan +1 oralig‘ida bo‘ladi.Agar $r = 0$ bo‘lsaomillar o‘rtasida bog‘lanish mavjud emas, $0 < r < 1$ bo‘lsa, to‘g‘ri bog‘lanish mavjud $-1 < r < 0$ - teskari bog‘lanish mavjud $r = 1$ funksional bog‘lanish mavjud.

Bog‘lanish zichlik darajasi odatda quyidagicha talqin etiladi. Agar $0{,}2$ gacha – kuchsiz bog‘lanish;

$0{,}2 \div 0{,}4$ – o‘rtacha zichlikdan kuchsizroq bog‘lanish;

$0{,}4 \div 0{,}6$ – o‘rtacha bog‘lanish;

$0{,}6 \div 0{,}8$ – o‘rtachadan zichroq bog‘lanish;

$0{,}8 \div 0{,}99$ – zich bog‘lanish.

Korrelyatsion taxlil o‘tkazilganda quyidagi korrelyatsiya koeffitsiyentlari hisoblanadi:

1. Xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlari. Xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti asosiy va unga ta’sir etuvchi omillar o‘rtasidagi bog‘lanish zichligini bildiradi.

2. Juft korrelyatsiya koeffitsiyentlari asosiy omil inobatga olinmagan nuqtada hisoblanadi. Agar juft korrelyatsiya koeffitsiyenti 0,6 dan katta bo‘lsa, unda omillararo bog‘lanish kuchli deb hisoblanadi va erkin omillar ma’lum darajada bir birini takrorlaydi. Agar modelda o‘zaro bog‘langan omillar qatnashsa, model yordamida qilingan hisoblar noto‘g‘ri chiqishi mumkin va omillar ta’siri ikki barovar

hisoblanishi mumkin. O‘zaro bog‘langan ta’sir etuvchi omillardan bittasi modeldan chiqarib tashlanadi. Albatta modelda kuchliroq va mustahkamroq omil qoladi.

3. Ko‘p omilli modellarda agar natijaviy omilga bir necha omillar ta’sir ko‘rsatsa, unda omillar orasida ko‘plikdagi korrelyatsiya koeffitsiyentihisoblanadi.

Ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar o‘rtasida bog‘lanishlarni o‘rganishda quyidagi funksiyalardan foydalaniladi

Chiziqli va chiziqsiz regression bog‘lanishlar

Ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar o‘rtasida bog‘lanishlarni o‘rganishda quyidagi funksiyalar bilan foydalaniladi:

Chiziqli – $y = a_0 + a_1 x$

Ikkinchi darajali parabola – $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Uchinchi darajali parabola – $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

***n*-darajali parabola –** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

Giperbola – $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$

***b*- darajali giperbola –** $y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$

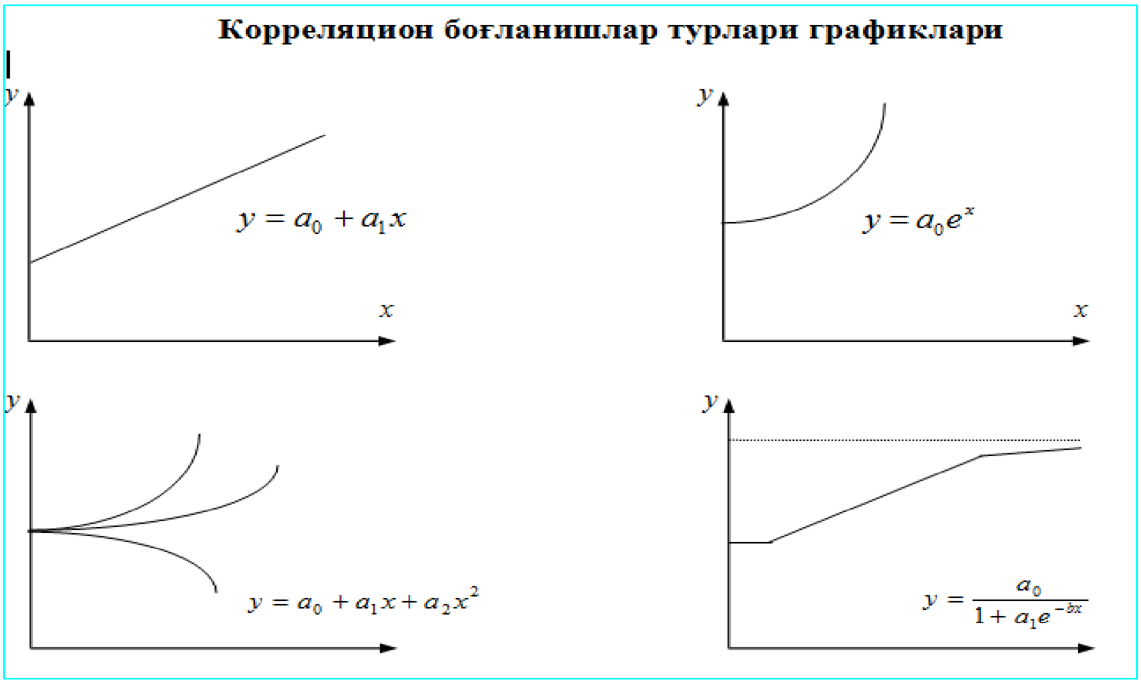
Logarifmik – $\log y = a_0 + a_1 x$

Yarim logarifmik – $y = a_0 + a_1 \ln x$

Ko‘rsatkichli funksiya – $y = a_0 a_1^x$

Darajali funksiya – $y = a_0 x^{a_1}$

Logistik funksiya – $y = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-bx}}$



4.3.-rasm.Chiziqli va chiziqsiz regression bog‘lanishlar

Bog‘lanishlar chiziqli bo‘lsa, u holda bog‘lanish zichligi baholashda korrelyatsiya koeffitsiyentidan foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (4)$$

bu yerda, σ_x va σ_y mos ravishda x va y o‘zgaruvchilarning o‘rtacha kvadratik chetlanishidir va ular quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}} \qquad (5)$$

Shuningdek, korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblashning quyidagi modifikatsiyalangan formulalaridan ham foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ yoki } r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} xy - \sum_{i=1}^{n} x \sum_{i=1}^{n} y}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y\right)^2\right]}} \qquad (6)$$

Regression tahlil natijaviy belgiga ta’sir etuvchi omillarning samaradorligini aniqlab beradi.

Regressiya so‘zi lotincha ***regressio*** so‘zidan olingan bo‘lib, orqaga harakatlanish degan ma’noga ega. Bu atama korrelyatsion tahlil asoschilari *F.Galton* va *K.Pirson* nomlari bilan bog‘liqdir.

Regression tahlil natijaviy belgiga ta’sir etuvchi belgilarning samaradorligini amaliy jihatdan yetarli darajada aniqlik bilan baholash imkonini beradi. Regression tahlil yordamida ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarning kelgusi davrlar uchun bashorat qiymatlarini baholash va ularning ehtimol chegaralarini aniqlash mumkin.

Regression va korrelyatsion tahlilda bog‘lanishning regressiya tenglamasi aniqlanadi va u ma’lum ehtimol (ishonchlilik darajasi) bilan baholanadi, so‘ngra iqtisodiy-statistik tahlil qilinadi.

Korrelyatsion-regression tahlilda eng kichik kvadratlar usulining qo‘llanilishi.

Funksiyalar parametrlari odatda **“eng kichik kvadratlar”** usuli bilan aniklanadi. Eng kichik kvadratlar usulini mazmuni quyidagicha: xaqiqiy miqdorlarning tekislangan miqdorlardan farqining kvadratlari yigindisi eng kam bo‘lishi zarur:

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 \to \min \qquad (4.7)$$

Bir omilli chiziqli bog‘lanishni olaylik:

$$Y_t = a_0 + a_1 t \qquad (8)$$

Qiymat $\sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2$ eng kam bo‘lishi uchun birinchi darajali hosilalar nolga teng bo‘lishi kerak:

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 = \sum \left(Y - a_0 - a_1 t\right)^2 \to \min \qquad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \qquad \to \begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y \cdot t \end{cases} \qquad (10)$$

Bu normal tenglamalar tizimi.

Regression modelning parametrlarini baholash bog‘liq o‘zgaruvchi Y ning taqsimlanish ehtimolini topishdir. Modelda Y_i normal taqsimlangan va variatsiyasi:

$var\ (Y) = \sigma^2$ ga teng

Eng kichik kvadratlar usulida hisoblash tamoyili Y_i larning xaqiqiy qiymatlarining o‘rtacha qiymatidan farqining kvadrati summasini topishdan iborat. Demak:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - E(Y_i) \right]^2$$

Yoki (11)

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i \right]^2$$

bu yerda, S - farqlar kvadratlari summasi.

α va β , qiymatlarini topish uchun S ning α va β bo‘yicha birinchi hosilasini topamiz:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial \left(Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i \right)^2}{\partial \alpha} = -\sum_i 2\left(Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i \right) = -2\sum_i Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i,$$

(4.12)

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_i \frac{\partial \left(Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i \right)^2}{\partial \beta} = -\sum_i 2\left(Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i \right) \cdot (-X_i) = -2\sum_i X_i (Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i)$$

Har bir hosilani nolga tenglashtirib hisoblab topilgan $\hat{\alpha}$ ва $\hat{\beta}$ larning qiymatini hisoblaymiz.

$$-2\sum_i \left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_i \right) = 0$$

$$-2\sum_i X_i \left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_i \right) = 0 \qquad (13)$$

yoki bunga ekvivalent ravishda

$$\sum Y_i = \hat{\alpha} \cdot n + \hat{\beta} \left(\sum_i X_i \right),$$

$$\sum X_i \cdot Y_i = \hat{\alpha} \left(\sum X_i \right) + \hat{\beta} \left(\sum_i X_i^2 \right) \qquad (14)$$

Bu tenglamalar eng kichik kvadratlar usulida normal tenglamalar deb ataladi. Bunda *ye* eng kichik kvadratlar qoldig‘i:

$$\begin{cases} \sum e_i = 0 \\ \sum X_i \cdot e_i = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

tenglama $\hat{\alpha}$ ва $\hat{\beta}$ larga nisbatan yechiladi.

$$\hat{\beta} = \frac{n\left(\sum X_i \cdot Y_i\right) - \left(\sum X_i\right) \cdot \left(\sum Y_i\right)}{n\left(\sum X_i^2\right) - \left(\sum X_i\right)^2} \qquad (16)$$

Bu tenglikni boshqacha ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$n \cdot \sum\left(X_i - \overline{X}\right) \cdot \left(Y_i - \overline{Y}\right) = n \cdot \sum\left(X_i \cdot Y_i\right) - n \cdot \overline{X} \cdot \left(\sum Y_i\right) - n \cdot \overline{Y} \cdot \left(\sum X_i\right) + n^2 \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} =$$
$$= n \cdot \left(\sum X_i \cdot Y_i\right) - \left(\sum X_i\right) \cdot \left(\sum Y_i\right) - \left(\sum X_i\right) \cdot \left(\sum Y_i\right) + \left(\sum X_i\right) \cdot \left(\sum Y_i\right) =$$
$$= n \cdot \left(\sum X_i \cdot Y_i\right) - \left(\sum X_i\right) \cdot \left(\sum Y_i\right)$$

Demak

$$\hat{\beta} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right) \cdot \left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

larning qiymati topilgandan so‘ng α' larni birinchi tenglamadan topamiz. Demak,

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum Y_i\right) - \beta \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sum X_i\right) = \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot \overline{X}$$

Nazorat uchun savollar

1. Korrelyatsion-regressiontahlilning maqsadlari nimalardan iborat?
2. Juft, xususiy va ko‘plikdagi korrelyatsiya koyeffitsiyentlarining farqi nimadan iborat?
3. Qaysi hollarda korrelyatsiya indeksi qo‘llaniladi?
4. Regressiya koyeffitsiyentlarining iqtisodiy mohiyati nimadan iborat?
5. “Eng kichik kvadratlar usuli” ning mohiyatini tushuntirib bering.
6. Normal tenglamasini yechish usullarini tushuntirib bering.
7. Real iqtisodiy jarayonlar bo‘yicha turli xildagi bog‘lanishlarga 10 ta misol tuzing.

XII-BOB. Ko‘p omilli ekonometrik tahlil

12.1-§. Ko‘p omilli ekonometrik modellarni tuzish uslubiyoti

Ko‘plik korrelyatsiyasi tasodifiy ko‘rsatkichlar guruhi o‘rtasidagi bog‘lanishlarni o‘rganadi. Iqtisodiy tahlilda ko‘plik korrelyatsiya usulini qo‘llanilishi hisoblash texnikasi yaratilganidan so‘ng kengaydi va qisqa muddatda katta yutuqlarga erishildi, ham iqtisodiy, ham matematika fanlarini rivojlanishiga o‘z ulushini qo‘shdi.

Ko‘plik (ko‘p omilli) korrelyatsiya usuli murakkab jarayonlarni tahlil qilishning asosiy usullaridan biri hisoblanadi. Bu usul murakkab jarayonlarda ro‘y berayotgan alohida hodisalarni modellashtirish va bashorat qilish imkonini beradi. Ko‘p omilli korrelyatsiya usulidan foydalanish quyidagi tartibda amalga oshiriladi.

1. Kuzatishlar asosida to‘plangan katta mikdordagi dastlabki ma’lumotlarni qayta ishlash asosida bir argumentning o‘zgarishida funksiya qiymatini o‘zgarishini qolgan argumentlar qiymati belgilangan sharoitda aniqlanadi.

2. Qiziqtirayotgan bog‘lanishga boshqa omillarni ta’sirini (o‘zgartirish) darajasi aniqlanadi.

Korrelyatsiya tahlili usullarini qo‘llayotgan izlanuvchilar oldida turadigan asosiy muammolar bo‘lib quyidagilar hisoblanadi:

- funksiyako‘rinishini (turini) aniqlash;
- omillar-argumentlarniajratish;
- jarayonlarni to‘g‘ri baholash uchun zarur bo‘lgan kuzatishlar sonini aniqlash.

Funksiyaning ko‘rinishini tanlashning qandaydir aniq ishlab chiqilgan uslubiy ko‘rsatmalari bo‘lamasa ham, har bir izlanuvchi bu muammoni turlicha hal qiladi.

Matematika fani berilgan qiymatning har qanday sohasi uchun cheklanmagan miqdorda funksiyalarni keltirishi mumkinligini hisobga olib, ko‘p izlanuvchilar funksiya ko‘rinishini tanlash inson imkoniyatlari chegarasidan tashqarida deb hisoblashadi. Shuning uchun funksiya ko‘rinishini sof empirik asosda tanlash zarur va keyinchalik uni o‘rganilayotgan jarayonga to‘g‘ri kelishi (adekvatligi) tekshiriladi va qabul qilish yoki qilmaslik haqida qaror qabul qilinadi.

Omillar o‘rtasida bog‘lanish shaklini tanlashning uchta usuli mavjud:

– empirik usul;

– oldingi tadqiqotlar tajribasi usuli;

– mantiqiy tahlil usuli.

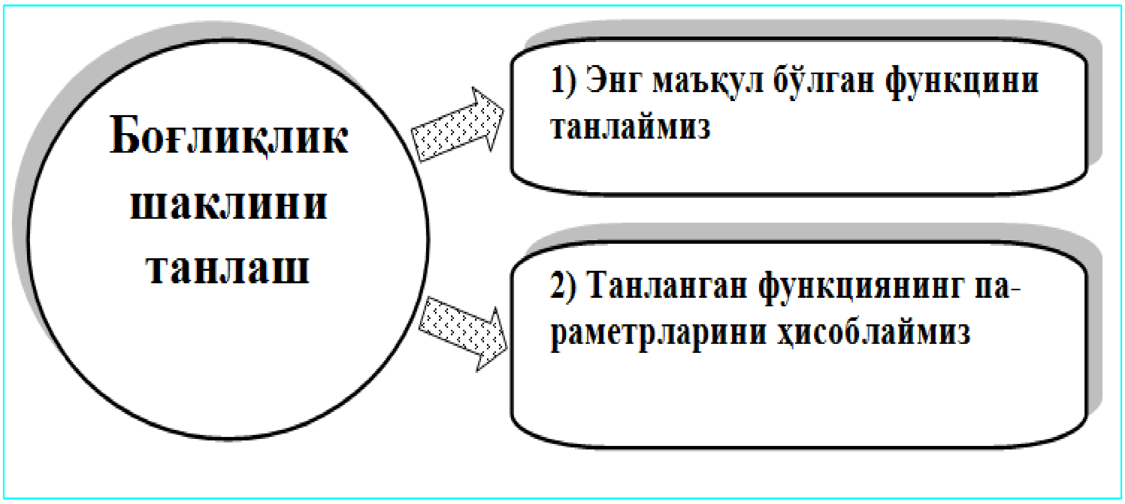
Analitik funksiya turini regressiyaning empirik grafigi bo‘yicha aniqlash mumkin. Lekin mazkur grafik usulni faqat juft bog‘lanish hollarida hamda kuzatishlar soni nisbatan ko‘p bo‘lganda muvaffaqiyatli qo‘llash mumkin.

Chiziqli va chiziqsiz ko‘p omilli regression bog‘lanishlar.

Bog‘liqlik shaklini tanlash usuli ikki bosqichda bajariladi.

1) Eng ma’qul bo‘lgan funksiyani tanlaymiz.

2) Tanlangan funksiyaning parametrlarini hisoblaymiz.



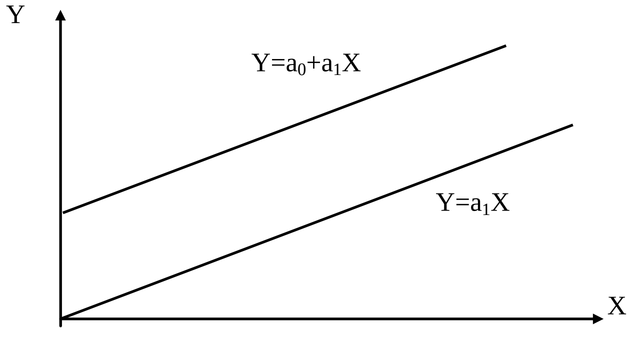
5.1.-rasm. Bog‘liqlik shaklini tanlash sxemasi

Funksiya turi:

1) Chiziqli

$Y = a_1 X$

$Y = a_0 + a_1 X$

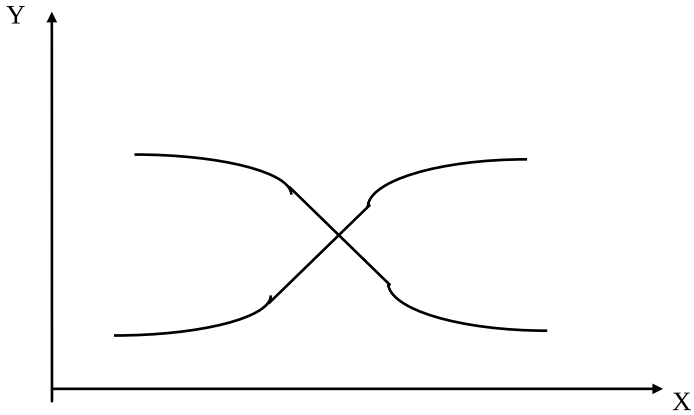


2) Ikkinchi darajali parabola:

$Y = a_2 X^2$

$Y = a_2 \sqrt{X}$,

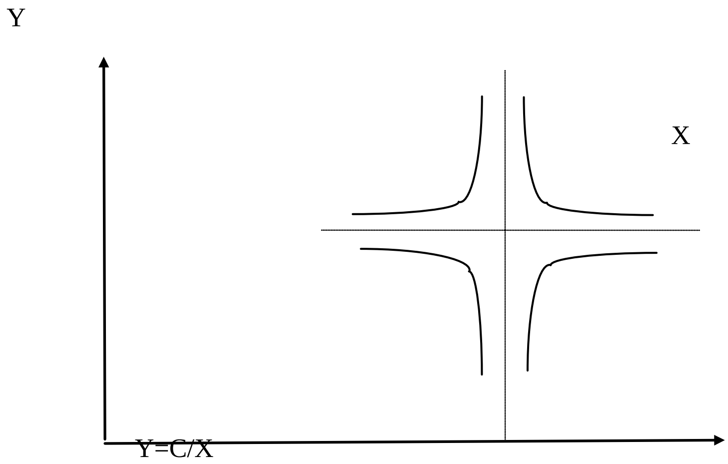
$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$



3) Giperbola

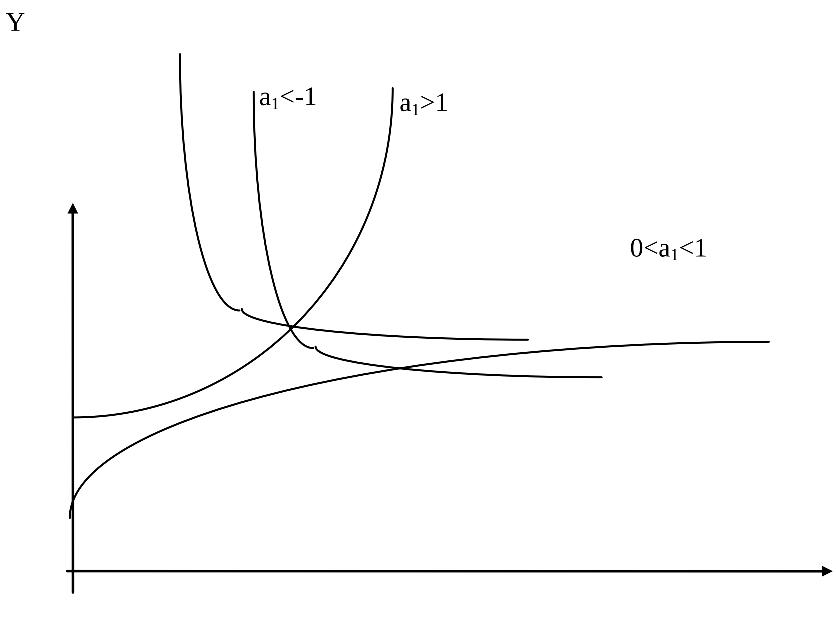
$$Y = \frac{C}{X}$$

$$Y - b = \frac{C}{X - a}$$



4) Darajali funksiya

$$Y = a_0 X^{a_1}$$



Regression taxlil asosida tanlangan omillar asosida bog‘lanish turi aniqlanadi. Natijaviy ko‘rsatkich *Y* va unga ta’sir etuvchi omillar guruxi *X1, X2, ..., Xn* bog‘lanish turini umumiy ko‘rinishini quyidagi funksiya yordamida ifodalash mumkin:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Analitik ifodalarining ko‘rinishiga qarab bog‘lanishlar to‘g‘ri chiziqli (yoki umuman chiziqli) va egri chiziqli (yoki chiziqsiz) bo‘ladi. Agar bog‘lanishning tenglamasida omil belgilar (X_1, X_2, ..., X_K) faqat birinchi daraja bilan ishtirok etib, ularning yuqori darajalari va aralash ko‘paytmalari qatnashmasa, ya’ni $y_x = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i X_i$ ko‘rinishda bo‘lsa, chiziqli bog‘lanish yoki to‘g‘ri chiziqli bog‘lanish deyiladi.

Ifodasi to‘g‘ri chiziqli (yoki chiziqli) tenglama bo‘lmagan bog‘lanish egri chiziqli (yoki chiziqsiz) bog‘lanish deb ataladi. Xususan,

$$y_x = a_0 + \sum_{i=1}^{K} a_i x_i + \sum_{i=1}^{K} b_i x_i^n \quad n = \overline{1...s}$$

giperbola $y = a_0 + \sum_{i=1}^{K} \frac{a_i}{x_i}$ (1)

darajali $y_x = a \prod_{i=1}^{K} x_i^{a_i}$ va boshqa ko‘rinishlarda ifodalanadigan bog‘lanishlar egri chiziqli (yoki chiziqsiz) bog‘lanishga misol bo‘la oladi.

Tayanch iboralar: ko‘p omilli korrelyatsiya, ko‘p omilli regression bog‘lanishlar, korrelyatsiya koeffitsiyenti, bevosita eng kichik kvadratlar usuli, elastiklik koeffitsiyentlar

12.2-§. Umumlashtirilgan va bavosita “eng kichik kvadratlar usuli”

Regressiya tenglamasining koeffitsiyentlarini eng kichik kvadratlar usuli asosida hisoblash mumkun. Mezon: haqiqiy miqdorlarning tekislangan miqdorlardan farqining kvadratlari yig‘indisi eng kam bo‘lishi zarur:

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 \to \min \qquad (2)$$

Misol: $Y_t = a_0 + a_1 t$

Qiymat $\sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2$ yeng kam bo‘lishi uchun birinchi darajali hosilalar nolga teng bo‘lishi kerak.

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 = \sum \left(Y - a_0 - a_1 t\right)^2 \to \min \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0\,;$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0\,;$$

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y \cdot t \end{cases} \qquad (4)$$

Normal tenglamalar tizimi.

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 \to \min \qquad (5)$$

Demak,

$$\overline{Y} = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum \left[2\left(Y - a_0 - a_1 X - a_2 X^2 - \ldots - a_n X^n\right)\right] \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum \left[2\left(Y - a_0 - a_1 X - a_2 X^2 - \ldots - a_n X^n\right)\right] \cdot (-X) = 0 \qquad (7)$$

....

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = \sum \left[2\left(Y - a_0 - a_1 X - a_2 X^2 - \ldots - a_n X^n\right)\right] \cdot \left(-X^n\right) = 0$$

Chiziqli funksiya bo‘yicha tekislanganda

$$\begin{aligned} &\overline{Y} = a_0 + a_1 X \\ &S = \sum \left(Y - a_0 - a_1 X\right)^2 \to \min \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = \sum 2\left(Y - a_0 - a_1 X\right) \cdot (-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = \sum 2\left(Y - a_0 - a_1 X\right) \cdot (-X) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Bundan,

$$\begin{cases} \sum y - n\cdot a_0 - a_1 \cdot \sum X = 0 \\ \sum y\cdot X - a_0 \cdot \sum X - a_1 \cdot \sum X^2 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} n\cdot a_0 + a_1 \cdot \sum X = \sum y \\ a_0 \cdot \sum X + - a_1 \cdot \sum X^2 = \sum y\cdot X \end{cases} \qquad (11)$$

Iqtisodiy qatorlar dinamikasi tendensiyasini aniqlash vaqtida ko‘pchilik hollarda turli darajadagi polinomlar:[4]

$$\hat{y}(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i \right]^u \quad \begin{matrix} (i = -1, 0, 1, ..., k) \\ (u = -1,\ 1) \end{matrix} \qquad (12)$$

va eksponensional funksiyalar qo‘llaniladi:

$$\hat{y}(t) = \left[e^{a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i} \right]^u \quad \begin{matrix} (i = -1, 0, 1, ..., k) \\ (u = -1,\ 1) \end{matrix}. \qquad (13)$$

Shuni qayd etib o‘tish lozimki, funksiya shakli tenglashtirilayotgan qatorlar dinamikasi xarakteriga muvofiq, shuningdek, mantiqiy asoslangan bo‘lishi lozim.

Polinomning eng yuqori darajalaridan foydalanish ko‘pchilik hollarda o‘rtacha kvadrat xatolarining kamayishiga olib keladi. Lekin bunday vaqtlarda tenglashtirish bajarilmay qoladi.

Tenglashtirish parametrlari **bevosita eng kichik kvadratlar usuli** yordamida baholanadi. Eksponensional funksiya parametrlarini baholash uchun esa boshlang‘ich qatorlar qiymatini logarifmlamoq lozim.

Normal tenglamalar tizimi quyidagicha bo‘ladi:

a) k tartibli polinom uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + ... + a_k \sum t^k = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + ... + a_k \sum t^{k+1} = \sum yt \\ .... \\ a_0 \sum t^k + a_1 \sum t^{k+1} + a_2 \sum t^{k+2} + ... + a_k \sum t^{2k} = \sum yt^k \end{cases} \qquad (14)$$

b)eksponensional funksiya uchun:

---

[4]Gujarati D.N. Basic Econometrics. McGraw-Hill, 4th edition, 2003 (Gu),Inc.p. 233

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + ... + a_k\sum t^k = \sum \ln y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + ... + a_k\sum t^{k+1} = \sum t \ln y \\ .... \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + ... + a_k\sum t^{2k} = \sum t^k \ln y \end{cases} \quad (15)$$

Agar tendensiya ko‘rsatkichli funksiyaga ega bo‘lsa, ya’ni

$$y_t = a_0 a_1^t \quad (16)$$

bo‘lsa, ushbu funksiyani logarifmlab, parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlash mumkin. Ushbu funksiya uchun normal tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} n \ln a_0 + \ln a_1 \sum t = \sum \ln y \\ \ln a_0 \sum t + \ln a_1 \sum t^2 = \sum t \ln y \end{cases} \quad (17)$$

Ekonometrik model parametrlarining iqtisodiy tahlili va elastiklik koeffitsiyentlarini hisoblash.

Regressiya tenglamasini koffitsentlarini mohiyatlik darajasini tekshirish uchun, Styudent mezoni yordamida kuyidagi formula orkali hisoblanadi:

$$t_{хак} = \frac{a_i}{S_{ai}} \quad \text{bu yerda}$$

$$S_{ai} = \sqrt{\frac{\sum(y_{хис} - y_{хак})^2}{(n-2) * \sum(x - \bar{x})^2}} \quad (18)$$

Har bir parametrga mos kelgan $t_{хак}$ qiymatlari hisoblanadi va kabul ko‘riladi. Mezonning nazorat qiymati $(t_{жад})$ Styudent taqsimotining jadvalidan aniqlanadi.

Agar biror parametr uchun $t_{хак} \geq t_{жад}$ bo‘lsa, u holda bu parametr qabul qilingan daraja bilan mohiyatli hisoblanadi. Ijtimoiy-iktisodiy tekshirishlarda mohiyatlilik darajasi uchun 0,05 olinadiya’ni $\alpha = 0{,}05$ ko‘rsatkichlarning mohiyatli bo‘lish ehtimoli;

$P = 1 - \alpha$ ga teng.

Styudent taqsimotining jadvaliga ko‘ra ozod ko‘rsatkichning soni $(n-2)$ ga teng.

Regressiya tenglamasini tahlil qilishda elastik koeffitsiyentlaridan foydalaniladi. Bu koeffitsiyent $(Э)$ omil belgining o‘rtacha necha foiz o‘zgarishini ifodalaydi:

$$Э = a_1 * \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \quad \text{bu yerda} \qquad (19)$$

$$a_1 = Э * \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \qquad (20)$$

Agar natijaviy va omil belgilarining ko‘shimcha o‘sish sur’atlari bir xilda bo‘lsa, u holda elastik koeffitsiyenti birga teng bo‘ladi $(Э = 1)$.

Agar omil belgining ko‘shimcha o‘sish sur’ati natijaviy belgining ko‘shimcha o‘sish sur’atidan yukori bo‘lsa, u holda bu koeffitsiyent birdan kichik buladi $(Э \prec 1)$ va aksincha $(Э \succ 1)$.

Faqat bog‘lanishning ko‘rsatkichli $y = a_0 x^{a1}$ ifodasi uchun elastiklik koeffitsiyenti o‘zgarmas mikdor bo‘ladi, ya’ni $Э = a_1$.

Nazorat uchun savollar

1. Iqtisodiy jarayonlarning ko‘p omilli xususiyatlari va o‘zgarish qonuniyatlari nimalarda namoyon bo‘ladi?

2. Ekonometrik model tuzish uchun omillarni tanlash uslubiyoti nimalardan iborat?

3. Ko‘p omillik korrelyatsiya qachon qo‘llaniladi?

4. Ko‘p omilli determinatsiya koeffitsiyenti nimani ifodalaydi?

5. Ko‘p omilli ekonometrik (regression) modelni xususiyatlari nimalardan iborat?

6. “Eng kichik kvadratlar” usuli yordamida ko‘p omilli ekonometrik modelning koeffitsiyentlarini qanday hisoblanadi?

7. Ekonometrik model parametrlarini iqtisodiy tahlilini tushuntirib bering.

8. Elastiklik koeffitsiyentlarining iqtisodiy mohiyati nimalardan iborat va ular qanday hisoblanadi?

12.3-§. Ekonometrik modellarning iqtisodiy tahlilida verifikatsiya bosqichining ahamiyati.

Ekonometrik modellashning uchinchi bosqichi –verifikatsiya qilish.Tuzilgan modelni ahamiyati to‘rtta yo‘nalish bo‘yicha tekshiriladi:

- modelning sifati ko‘plikdagi korrelyatsiya koeffitsiyenti va determinatsiya koeffitsiyenti yordamida baholanadi;
- modelning ahamiyati approksimatsiya xatoligi va Fisher mezoni yordamida baholanadi;
- modelning parametrlarini ishonchliligi Styudent mezoni bo‘yicha baholanadi;
- Darbin-Uotson mezoni yordamida «Engkichik kvadratlar usulining» bajarilish shartlaritekshiriladi.

Tahlil qilinayotgan qatorlar dinamikasi har doim anchagina uzunroq qatorlarning tanlamasi hisoblanadi. Shuning uchun korrelyatsion-regerssion tahlil asosida olingan ekonometrik modellarning ishonchliligini har tomonlama tekshirish va baholash lozim.

Tuzilgan ekonometrik ahamiyatliligi, ishonchliligi va keyinchalik bashoratlashda qo‘llash mumkinligi quyidagi mezonlar asosida baholanadi:

1. Ekonometrik modellarni ahamiyatini Fisher mezoni va approksimatsiya xatoligi yordamida baholash.
2. Ekonometrik modellar sifatini ko‘p omilli korrelyatsiya koeffitsiyenti va determinatsiya koeffitsiyenti yordamida baholash.
3. Ekonometrik model parametrlarini Styudent mezoni yordamida baholash
4. Qatorlarda qoldiq avtokorrelyatsiyani Darbin-Uotson mezoni bo‘yicha baholash

Tahlil qilinayotgan qatorlar dinamikasi har doim anchagina uzunroq qatorlarning tanlamasi hisoblanadi. Shuning uchun korrelyatsion-regerssion tahlil asosida olingan ekonometrik modellarning ishonchliligini har tomonlama tekshirish va baholash lozim.

Ekonometrik modellar sifati va ahamiyatini mezonlar bo‘yicha baholash

Approksimatsiya xatoligi

$$\varepsilon = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - \hat{y}}{y_i}\right| * 100\% \qquad (1)$$

n - kuzatuvlar soni

y - asosiy omilni haqiqiy qiymatlari

ŷ - asosiy omilni tekislangan qiymatlari

Approksimatsiya xatoligi 10% gacha qabul qilinadi.

Fisherning z **mezoni**. Ingliz statistigi Fisher korrelyatsion va regression tahlillarning ishonchliligini tekshirish uchun logarifmik funksiyadan foydalanish usulini ishlab chiqdi:

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right). \qquad (2)$$

z taqsimot kichik tanlamada normal taqsimotga yaqin bo‘ladi. F.Mills $n=12$ va $\rho = 0{,}8$ da (ρ-bosh to‘plamda korrelyatsiya koeffitsiyenti) r va z taqsimot grafigini o‘tkazadi. z ning o‘rtacha kvadratik xatosi quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \qquad (3)$$

Ushbu formulada σ_z o‘rtacha kvadratik xato faqat taqsimot hajmiga, ya’ni z taqsimoti bog‘lanish zichligiga bog‘liq bo‘lmaydi. r dan z ga o‘tish tegishli jadvallar bo‘yicha amalga oshiriladi hamda korrelyatsion va regression tahlil natijalari ishonchliligini tekshirish uncha qiyin bo‘lmaydi.

Fisher mezoni yordamida to‘liq modelni adekvatligini, ya’ni real iqtisodiy jarayonga mosligini tekshirish mumkin:

$$F_{хис} = \frac{R^2(n-m-1)}{(1-R^2)m} \qquad (4)$$

n- kuzatuvlar soni

m - modeldagi ta'sir etuvchi omillar soni

R- ko'p omilli korrelyatsiya koeffitsiyenti.

Hisoblangan Fisher mezoni jadvaldagi qiymati bilan solishtiriladi.[5] Jadvaldagi Fisher koeffitsiyentini topish uchun ***k1***kator va ***k2*** ustunni aniqlash zarur ***k1=n-m-1*** va ***k2=m***. Agar :

$F_{хис} > F_{жадв}$ model ahamiyatli, ya'ni regressiya tenglamasi turi to'g'ri aniqlangan deb hisoblanadi.

Styudentning t mezoni. Mazkur mezon Styudent taxallusli ingliz matematigi Uilyam Gosset tomonidan ishlab chiqilgan.

Styudentning t taqsimoti kichik tanlamalar uchun maxsus belgilangan. t taqsimot taqsimlagichli suratga ega bo'lgan qiymat munosabatlarida, keyinchalik arifmetik o'rtacha qiymat taqsimlashda uchraydi

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\bar{x}}}\sqrt{v+1}, \qquad (5)$$

bu yerda, m - bosh o'rtacha;

v - erkinlik darajasi soni $(n-1)$;

$\bar{x}$, $\sigma_{\bar{x}}$ - tegishli tanlama to'plam arifmetik o'rtacha qiymati va o'rtacha kvadratik chetlanishi.

Juft korrelyatsiya koeffitsiyentini tekshirish uchun $n-2$ erkinlik darajasini t taqsimotga ega bo'lgan formula orqali qiymati aniqlanadi.

Agar $t_r > t$ bo'lsa, nolinchi gipotezani qo'llab bo'lmaydi va binobarin bosh to'plamda chiziqli korrelyatsiya mavjud. Uning ishonchli ta'rifi sifatida korrelyatsiyaning chiziqli koeffitsiyenti namoyon bo'ladi.

Juft korrelyatsiya koeffitsiyentini tekshirish uchun $n-2$ erkinlik darajasini t taqsimotga ega bo‘lgan formula orqali qiymati aniqlanadi.

Chiziqsiz bog‘lanishda R to‘plam korrelyatsiyasining indeksi ishonchliligi ham xuddi shu usulda tekshiriladi. Bunday holda (6.4) formuladagi korrelyatsiya koeffitsiyenti korrelyatsiya indeksi R bilan almashtiriladi. To‘plam korrelyatsiya koeffitsiyenti R kvadratik xatoga ega

$$\sigma_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-k-1}}, \qquad (6)$$

bu yerda, k-regressiya koeffitsiyentlari soni.

Shunday qilib, t mezonning empirik qiymati quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$t_R = \frac{R\sqrt{n-k-1}}{1-R^2}, \qquad (7)$$

bu yerda, $n-k-1$ - erkinlik darajalari soni;

t_R - jadvaldagi qiymati bilan solishtiriladi;

$n-2$ - erkin darajalari bilan t taqsimotga ega bo‘lgan

$$t_{a_j} = \frac{a_j}{\sigma_{a_j}}, \qquad (8)$$

qiymati asosida regressiya koeffitsiyentlarining ishonchligi tekshiriladi.

Ekonometrik modellarni tahlil qilayotganda darajalar tebranuvchanligi ikki jihatdan qaralishi mumkin. Birinchidan, ular o‘rganilayotgan jarayon yoki hodisalarning rivojlanish qonuniyatlari namoyon bo‘lishi uchun halaqit qiladigan «tasodifiy to‘siqlar» yoki «axborot shovqinlari» sifatida talqin etiladi. Shu sababli darajalarni ulardan «tozalash», ya’ni tasodifiy to‘siqlarni dinamikaning juz’iy tomonlari sifatida bartaraf qilish yoki juda bo‘lmaganda ta’sir kuchini zaiflashtirish yo‘llarini topish va ilmiy asoslash zaruriyati tug‘iladi.

Darbin – Uotson mezoni

Avtokorrelyatsiya- bu keyingi darajalar bilan oldingilari o‘rtasidagi yoki haqiqiy darajalari bilan tegishli tekislangan qiymatlari o‘rtasidagi farqlar orasidagi korrelyatsiyadir.

Hozirgi vaqtda avtokorrelyatsiya mavjudligini tekshirishda Darbin – Uotson mezoni qo‘llanadi:

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(Y_i - Y_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2} \quad (9)$$

DW mezonning mumkin bo‘lgan qiymatlari 0–4 oraliqda yotadi. Agar qatorda avtokorrelyatsiya bo‘lmasa, uning qiymatlari 2 atrofida tebranadi. Hisoblab topilgan haqiqiy qiymatlari jadvaldagi kritik qiymat bilan taqqoslanadi. Agarda $DW_{\text{haq}} < DW_{\text{past}}$ bo‘lsa, qator avtokorrelyatsiyaga ega; Dhaq>DW_{yuqori} bo‘lsa u avtokorrelyatsiyaga ega emas; $DW_{\text{past}} < DW_{\text{haq}} < DW_{\text{yuqori}}$ bo‘lsa, tekshirishni davom ettirish lozim. Bu yerda DW_{past} va DW_{yuqori}– mezonning quyi va yuqori chegaralari.[6] Salbiy avtokorrelyatsiya mavjud (minus ishoraga ega) bo‘lsa, u holda mezon qiymatlari 2–4 orasida yotadi, demak, tekshirish uchun DW'=4- *DW* qiymatlarini aniqlash kerak

Vaqtli qatorlarning keyingi va oldingi hadlari o‘rtasidagi korrelyatsion bog‘lanish hisoblanadi. Avtokorrelyatsiyaning mavjuligi qatorlar dinamikasi darajalarining o‘zaro boliqligidan, keyingi hadlarning oldingi hadlarga kuchli darajada boliqligidan dalolat beradi. Chunki korrelyatsion tahlil usulini o‘zaro bog‘langan har bir qator darajasi statistik mustaqillikka ega bo‘lgan, o‘rganilayotgan qatorlar dinamikasida avtokorrelyatsiya mavjudligini aniqlash lozim bo‘lgan hollardagina tadbiq yetish mumkin. Avtokorrelyatsiya mavjudligini tekshirish jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi. r_a (hisob) qiymati hisoblanadi:

$$r_a(\text{хисоб}) = \frac{\sum z_t z_{t+1}}{\sum z_t^2} \quad (6.10)$$

Bunda: z_t - qoldiq miqdor.

Agar hisoblab topilgan r_a *(*hisob) miqdor berilgan bir protsentli xatolar ehtimolligi va erkinlik daraja sonlari *N - n- 1* bo‘lganda tegishli r_a (jad) (r_a (jad)<r_a(hisob)) qiymatidan katta bo‘lsa, avtokorrelyatsiya bo‘lmaydi. So‘ngra ishonchlilik intervallari aniqlanadi. U koeffitsiyentlar variatsiyasi yordamida quyidagi formula asosida aniqlanadi

$$V = \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{y - \hat{\bar{y}}}{\bar{y}} \bullet 100 \right)^2}{n}} \qquad (11)$$

Gomoskedatlik va geteroskedatlikni aniqlash uchun testlar.

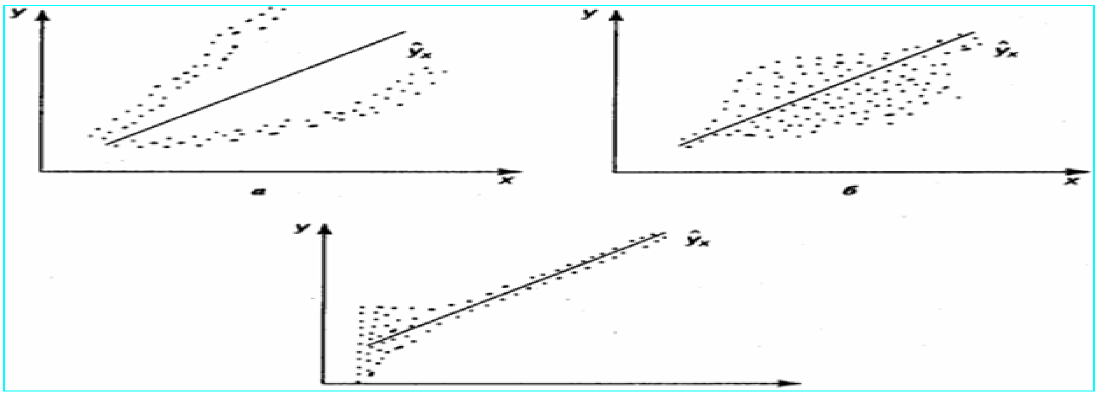
“Eng kichik kvadratlar” usulining ekonometrik modellardagi parametrlarni baholashda qoldiqlar kvadratlari yig‘indisining minimumga intilishiga asoslanadi. Shuning uchun regressiyaning qoldiq qiymatlarini ko‘rib chiqish muhim ahmiyat kasb etadi.

“Eng kichik kvadratlarining” uchinchi taxmini **gomoskedatlikka** tegishli bo‘lib, u har bir X uchun qoldiqning dispersiyasi bir xil bo‘lishi ekanligini anglatadi. Bu taxmin, masalan X ning katta qiymatlari uchun qoldiq dispersiyasini imkoni, huddi kichik qiymatlardagi kabi degan tasdiq bilan kelishiladi.

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

Gomoskedatlik sharti:

Agar yuqoridagi “Eng kichik kvadratlar” usulining qo‘llanish sharti bajarilmasa, bunda geteroskedatlik holati hosil bo‘ladi. Geteroskedatlik regressiya tenglamasining parametrlari samaradorligini pasayishiga ta’sir qilmoqda.



6.1.-rasm.Geteroskedatlik holatlari[7]

Ekonometrik modellardagi parametrlarni iqtisodiy jihatdan baholash mezonlari

Chiziqli bir omilli model qurishda uning ayrim kamchiliklariga e’tiborni qaratmoq lozim. Modelni jarayonning bitta omil yordamida, u hatto hal qiluvchi omil bo‘lgan taqdirda ham haqqoniy yoritib berish mumkin yemas. Masalan, paxta xom ashyosini yalpi yig‘ib olishni o‘rganishda asosiy omil sifatida hosildorlikni olish mumkin, lekin sinchiklab o‘rganish natijasida yer miqdori va sifati, o‘g‘itlar (ularni miqdori, sifati, quritish muddati), sug‘orish harakat tartibi va boshqa omillarni ham e’tiborga olish zarur.

Shunday qilib, «asosiy» omillar miqdori cheksiz o‘zgarishi mumkin. Bunday masalarni hal etish bir omilli modeldan ko‘p omilligacha o‘tishni taqozo etadi. Ammo bu ham funksiyaga asosiy omillardan tashqari yana ko‘p sonli ikkinchi darajali omillar ta’sir qilishi hisobiga hisoblashda hatolik bo‘lishini rad etmaydi. Ko‘pincha ularning ta’siri sezilarsiz va qarama-qarshi harakterga ega. Ushbu omillarning barcha samarasi, ham musbat ham manfiy qiymatlarni qabul qiluvchi «U» tasodifiy o‘zgaruvchi bilan baholanadi. Chiziqli bog‘liqlik:

$Y = f(X_1, U)$ yoki $Y = f(X_{1,} X_2, \ldots X_n, U)$, ko‘rinishda bo‘ladi.

«U» o‘zgaruvchi quyidagi stoxastik xususiyatlarga ega bo‘lgan hato sifatida namoyon bo‘ladi:

-ehtimoliy me’yoriy taqsimotga ega bo‘ladi;

-nolli o‘rtachaga ega;

-chekli dispersiyaga ega;

-o‘lchash hatosi hisoblanadi.

Statistik ma’lumot yig‘ishda ko‘p hollarda parametrning haqiqiy qiymatlari o‘rniga yashirin hatoga ega o‘lchamlar kiritiladi (ular ob’ktiv, sub’ektiv harakterga ega bo‘lishlari, o‘lcham hisoblarining noaniqligi, noaniq hujjat aylanishi, alohida o‘lchamlarini sub’ektiv baxosi va boshqalar). Barcha yuqorida sanab o‘tilgan kamchiliklar o‘lchash hatolarini tenglama hatolariga o‘tishiga olib keladi, ya’ni:

$$\begin{aligned} Y &= a_0 + a_1 X + W \\ W &= U + V \end{aligned} \qquad (12)$$

bunda *W*-jami hato; *U*-stoxastik e’tiroz bildirish; *V*-o‘lchash hatosi.

Nisbatan oddiy bog‘liqlik deb chiziqli bir omilli bog‘liqlik yoki chiziqli ko‘p omilli model, u tasodifiy hatoga nisbatan bir necha taxminlarni qabul qilganda hisoblanadi: o‘rtacha nolga teng; disperciya cust va asosiy omillarga bog‘liq emas va tasodiy hato bir-biriga bog‘liq emas.

Ko‘p omilli holatda: $Y = a_{0i} + a_{1i} X_i + U_i$, a_0 va a_1 koeffitsiyentlarni quyidagi shartlardan kelib chiqqan holda aniqlash mumkin:

$$E(U) = 0, i \in N$$

$$E(U_i U_j) = \begin{cases} 0 & \text{агар } i \neq j, \quad i,j \in N \\ \sigma_u^2 & \text{агар } i = j, \quad i,j \in N \end{cases} \qquad (13)$$

Sodda iqtisodiy modellarni ko‘rib chiqishda bu masalani standart usuli yordamida yechish mumkin. Eng kichik kvadrat usuli klassik hisoblanadi. Lekin nisbatan murakkabroq vaziyatlarda murakkab ekonometrik modelni ko‘rib chiqishda murakkab texnika yo‘llardan foydalangan xolda yangi usullarni ishlab chiqish zarur.

Oddiy chiziqli regression modelning to‘liq spetsifikatsiyasi regression tenglamadan va 5 ta birlamchi yo‘l qo‘yishlardan tashkil topgan.

Shu yo‘l qo‘yishlarni ko‘rib chiqamiz. Birinchi ikki taxmin shundan iboratki, X ning har bir qiymati uchun ε hato nol qiymat atrofida me’yoriy taqsimlangan. Taxmin qilinadiki, ε_i uzluksiz kattalik hisoblanib, o‘rtacha atrofida simmetrik taqsimlangan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o‘zgaradi va uning taqsimlanishi 2 o‘lcham o‘rtacha va variatsiya yordamida aniqlanadi.

Demak:

Birinchi taxmin: ε_i - me’yoriy taqsimlangan.

Ikkinchi taxmin: $E(\varepsilon_i) = 0$ - o‘rtacha hato nolga teng.

Haqiqatda biz stoxastik hatoni har bir qiymatini, ko‘pgina sabablar natijasi sifatida ko‘rishimiz mumkinki, bunda har bir sabab bog‘liq o‘zgaruvchini, u deterministik hisoblanishi mumkin bo‘lgan qiymatdan sezilarsiz tarzda og‘diradi.

Bunday ko‘zdan kechirishda o‘lchash hatosi o‘xshashi bilan taqsimot hatosi to‘g‘ri va shuning uchun o‘rtacha hatoni me’yoriyligini va nolga tengligi haqida taxminlar o‘xshash.

Uchinchi taxmin gomoskediklikka tegishli bo‘lib, u har bir hato σ^2 ning qiymati noma’lum bo‘lgan bir xil variatsiyaga ekanligini anglatadi. Bu taxmin, masalan X ning katta qiymatlari uchun hato dispersiyasini imkoni, huddi kichik qiymatlardagi kabi degan tasdiq bilan kelishiladi. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan ishlab chiqarish funksiyasida, bu taxminga asosan ishlab chiqarishdagi variatsiya ham, ish kuchi qiymatiga bog‘liq emas.

Uchinchi taxmin: Gomoskediklik

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \qquad (14)$$

To‘rtinchi taxmin: qoldiqdagi avtokorrelyatsiya bilan bog‘liq. Taxmin qilinadiki, hatolar orasida avtokorrelyatsiya yo‘q, ya’ni avtokorrelyatsiya mavjud emas

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \; i \neq j \qquad (15)$$

Bu taxmin shuni anglatadiki, agar bugun natijadagi ishlab chiqarish kutilgandan ko‘p bo‘lsa, bundan ertaga ishlab chiqarish ko‘p (yoki kam) bo‘ladi degan xulosaga kelish kerak emas.

Birinchi va to‘rtinchi taxmin birgalikda ehtimollik nuqtai-nazaridan, taqsimot hatolari bog‘liq emas deyish imkonini beradi. Shuning uchun ε_1, ε_2,...ε_n o‘zgaruvchini o‘xshash va erkin taqsimlanishi sifatida qaralishi mumkin. Ye(ε_i)=0 bo‘lgani uchun

$$Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon)^2 \qquad (16)$$

Bundan

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \qquad (17)$$

Beshinchi tahmin: X erkin o‘zgaruvchi stoxastik emasligini tasdiqlaydi. Boshqacha qilib aytganda, X ning qiymatlari nazorat qilinadi yoki butunlay bashorat qilinadi.Bu taxminni muhim qo‘llanilishi shundan iboratki, *i* va *j* ning barcha qiymatlari uchun

$$E(\varepsilon_i, X_j) = X_j E(\varepsilon_i) = 0 \qquad (18)$$

Beshinchi taxmin: X qiymatlari stoxastik emas, ular tanlashda tanlov miqyosidan qat’iy nazar o‘xshash

$$(\frac{1}{n})\sum_{n=1}(X_i - X)^2, \qquad (19)$$

noldan farq qiladi va uning $n\to\infty$ limiti chekli son.

To‘g‘ri, amaliyotda ko‘rsatilgan tahminlarni mutloq mavjudligiga aniq erishish qiyin, lekin biz agar bu tahminlarga tahminan amal qilinsa qoniqish hosil qilamiz. Yuqorida keltirib o‘tilgan tahminlar klassik chiziqli regression model tuzish, regresiya parametlarini hisoblash uchun zarur.

Regression tenglama va besh taxmin bilan keltirilgan regression modelning to‘liq spetsifikatsiyasidan so‘ng, endi uni ayrim o‘ziga hos tomonlarini ko‘rib chiqamiz. Avvalombor, Y bog‘liq o‘zgaruvchining taqsimot ehtimoliga qaytamiz.

Y_i funksiyaning birinchi o‘rtachasi, tenglamaning ikki qismini matematik kutilishi sifatida olinishi mumkin:

$$E(Y_i) = E(\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i) = \alpha + \beta X_i \quad (20)$$

Bu, α va β parametrlar spetsifikatsiyasidan, X_i ning stoxastik emasligidan (bu berilgan son) va $\varepsilon_i = 0$ o‘rtachadan (ikkinchi taxmin) kelib chiqadi.

Keyin Y_i variatsiya bo‘lmish

$$Var(Y_i) = E[Y_i - E(Y_i)]^2 = E[(\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i) - (\alpha + \beta X_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 \qquad (21)$$

Har bir X bog‘liq o‘zgaruvchiga Y o‘zgaruvchini o‘rtacha qiymatini beruvchi tenglama regressiyaning yempirik chizig‘i deyiladi.

Bu chiziqni ordinata bilan kesishishi, X ning nolga teng qiymatida Y bahosini o‘lchaydigan α kattalikka mos keladi. β ning og‘ishi, Y qiymatni X qiymatning har bir qo‘shimcha birligiga og‘ishdagi o‘zgarishini o‘lchaydi. Masalan, agar Y yalpi iste’mol, X yalpi daromad ko‘rinishida bo‘lsa, u holda β nolga teng daromadda iste’mol darajasining chegaraviy og‘ishini namoyon qiladi. Bu o‘lchamlar qiymatlari noma’lum bo‘lgani uchun regressiyaning yempirik chizig‘i ma’lum yemas. α va β ning o‘lchamlari qiymatlarini hisoblab, regressiyaning nazariy chizig‘ini olamiz. α va β ning qiymatlari $\hat{\alpha}$ *ва* $\hat{\beta}$ hisoblangandek mos hisoblangan bo‘lsa, mos xolda, bunda regressiyaning nazariy chizig‘i quyidagi tenglama orqali berilgan :

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \qquad (22)$$

bunda $\hat{Y}_i$ - Y ning tekislangan qiymati.

Barchasi bo‘lmasa ham, ko‘pchiligi Y yempirik qiymatlar nazariy chiziqda yotmaydi, shuning uchun *Yi* va $\hat{Y}_i$ qiymatlar mos kelmaydi. Bu farq qoldiq deb ataladi va ε_i bilan belgilanadi. Shuning uchun quyidagi tenglamalar farqlanadi:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \qquad \text{(empirik)}$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \varepsilon_i \quad \text{(nazariy).}$$

Nazorat uchun savollar

1. Avtokorrelyatsiya qachon vujudga keladi?
2. Avtokorrelyatsiyani necha xil usul yordamida bartaraf etish mumkin?
3. Ekonometrik modelni real o‘rganilayotgan jarayonga mos kelishini qaysi mezon yordamida aniqlash mumkin?
4. Ekonometrik modeldagi parametrlardan birortasi ishonchsiz bo‘lsa, uni nima qiilish mumkin?
5. Darbin-Uotson mezoni qiymati qaysi oraliqda o‘zgaradi?
6. Bashorat modelini adekvatligini baholovchi mezonlari.
7. Omillarni tanlash va bosqichini asosiy shartlarini aytib bering.
8. Korrelyatsiya koeffitsiyentini mustahkamlashni aniqlashda Styudent mezonini qo‘llanilishi.
9. Bashorat modelini tanlashda kanday mezonlar qo‘llanadi?
10. Eng kichik kvadratlar usulini asosiyg‘oyasi.

XIII-BOB. Vaqtli qatorlar

13.1-§.Vaqtli qatorlar to‘g‘risida umumiy tushunchalar

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri – o‘rganilayotgan hodisalarning makonda o‘zgarish va rivojlanish jarayonini tadqiq qilishda vaqtli qatorlarni tuzish va tahlil qilish yo‘li bilan hal etiladi.

Iqtisodiy hodisalarning makonda o‘zgarishini ifodalayotgan sonlar ketma-ketligini kuzatish vaqtli qator deb ataladi.

Vaqtli qatorlar ko‘rsatkichning barqaror o‘zgarishlariga va xususiy tasodiflar o‘zgarishiga ega bo‘ladi. Vaqtli qatorlardagi xususiy tasodiflarni bartaraf etish va barqaror o‘zgarishlarni aniqlash uchun ular u yoki bu usullar bilan taqqoslanadi. Taqqoslangan qatorlarni haqiqiy qatorlar bilan taqqoslash, ayrim korxonalarni, tarmoq va milliy iqtisodiyotni rivojlantirishning ba’zi muhim xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Taqqoslangan va haqiqiy qiymat ko‘rsatkichlarining farqi, taqqoslangan qatorlar joylashgan va kelajak rivojlanish ko‘rsatkichlari qatorlari joylashishi mumkin bo‘lgan chegaralarni aniqlash imkonini beradi.

Ko‘pgina iqtisodiy tadqiqotlarda, ayniqsa vaqtli qatorlarni tahlil qilish jarayonida nihoyatda chegaralanib tanlash bo‘yicha aniqliklarni qayta ishlashga to‘g‘ri keladi. Shunday sharoitda tajribalar guruhini ta’riflash uchun qilingan har qanday urinish, mutloq rasmiy va sub’ektiv bo‘ladi. Shuning uchun ko‘pchilik hollarda hodisaning qandaydir bir tomonini ehtimol ta’riflash imkoniyatini aniqlash qiyin. Iqtisodiy vaqtli qator farq qiluvchi xususiyatlarini quyidagicha ko‘rsatish mumkin:

a) berilgan sharoitda kuzatilayotgan jarayonni qayta kuzatish mumkin emas;

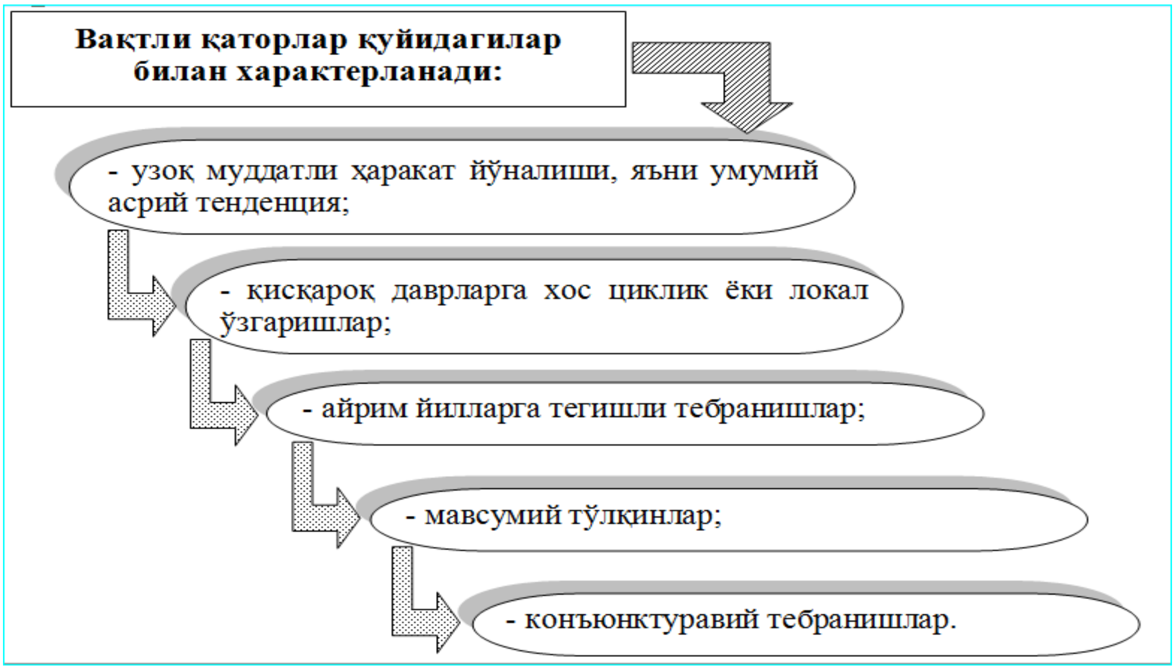
b) odatda kuzatilayotgan qatorlar, kuzatilayotgan tanlama hajmiga ko‘ra juda chegaralangan bo‘ladi.

Shuning natijasi o‘laroq o‘rganilayotgan hodisalarga ehtimollar nazariyasi bilan yondashishda hodisalar modelini statistik eksperimentlarda xayolan tasavvur etish, shuningdek, ba’zi bir ehtimollikni cheklab qo‘yish lozim. Xaqiqatdan ham statistik xulosalar baholashni tanlashga yoki ko‘rib chiqilayotgan umumiy model doirasida oldindan o‘rganilgan nazariy mezon xususiyatiga asoslangan bo‘ladi.

Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko‘ra hisobli (yaqin 20-30 yil uchun ishonchli), umumiy tasavvurlarga ko‘ra taxminiy (100 yilgacha) va xayoliyga (100 yildan ko‘p) bo‘linadi.

Ijtimoiy-iqtisodiy hodisalarning vaqt davomida o‘zgarishi dinamika deb, shu jarayonni ta’riflovchi ko‘rsatkichlar qatori esa ***vaqtli qatorlari*** deb yuritiladi.

Hodisalarning vaqt davomida o‘zgarishini ta’riflovchi statistik ko‘rsatkichlar qatori ***vaqtli qator*** deb yuritiladi.



1.-rasm. Vaqtli qatorlarni harakteristikalari

Vaqtli qatorlar tahlilida hisoblanadigan ko‘rsatkichlar:

1. Mutlaq qo‘shimcha o‘sish yoki kamayish- har qaysi keyingi davr darajasidan boshlang‘ich yoki o‘zidan oldingi davr darajasini ayirish yo‘li bilan aniqlanadi.

$$\Delta_{i/i-1} = Y_i - Y_{i-1}, \ldots, \ \Delta_{i/i_0} = Y_i - Y_0$$

2.O‘sish yoki kamayish koeffitsiyenti yoki sur’ati ($Ko‘_{.k.}$) - har qaysi keyingi davr darajasi boshlang‘ich yoki o‘zidan oldingi davr darajasiga nisbatan qancha martaba katta yoki kichik ekanligini yoki qancha foiz tashkil etishini ko‘rsatadi.

$$K_{i/i-1} = Y_i / Y_{i-1}; \quad T_{i/i-1} = Y_i \cdot 100 / Y_{i-1}; \; K_{i/i_0} = Y_i / Y_0; \; T_{i/i_0} = Y_i \cdot 100 / Y_0$$

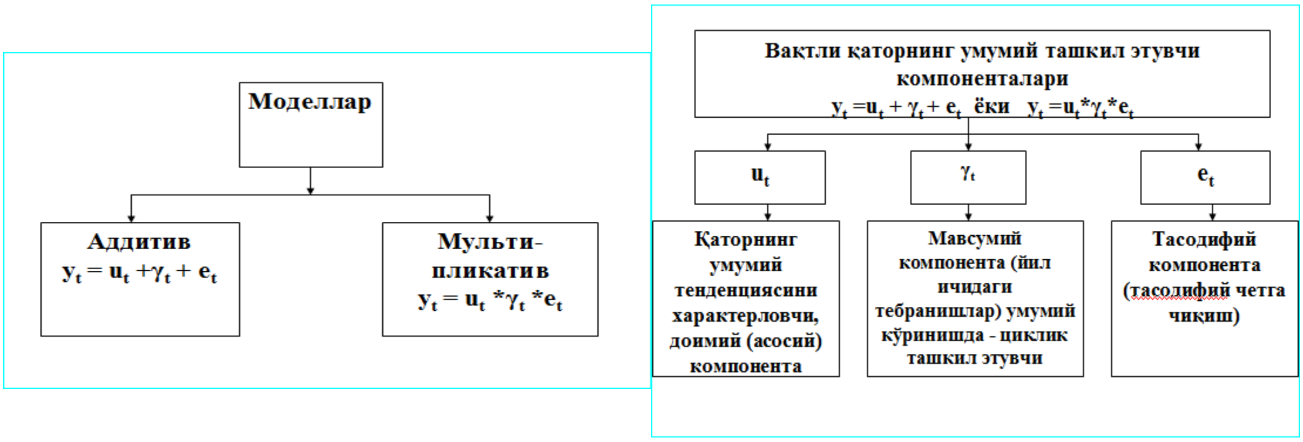
3.Qo‘shimcha o‘sish (kamayish) sur’ati(Δ) ham ikki usulda aniqlanishi mumkin. Birinchi usulda har bir keyingi davr darajasidan boshlang‘ich davr darajasi ayirilib, 100 ga ko‘paytiriladi va boshlang‘ich davr darajasiga bo‘linadi.

$$\Delta_{i/i_0} = \frac{\sum (Y_i - Y_0) \cdot 100}{Y_0}$$

4. 1% qo‘shimcha o‘sish (kamayish)ning mutlaq qiymati – mutlaq qo‘shimcha o‘sish qiymati zanjirsimon qo‘shimcha o‘sish sur’atiga bo‘linadi.

$$\Delta_{i/i-1} : \Delta_{T_{i/i-1}}$$

2. Multiplikativ va additiv modellarning tarkibiy tuzilishi.



2.-rasm. Vaqtli qatorlarning tarkibiy tuzilishi

Vaqtli qatorlar ikki elementdan tarkib topadi: biri vaqt momentlari yoki davrlar, ikkinchisi - ularga tegishli ko‘rsatkichlar.

Vaqtli qatorlar uzoq muddatli tendensiya, ayrim davrlarga xos siklik yoki lokal o‘zgarishlar, kundalik tebranishlar va mavsumiy o‘zgarishlarni o‘zida mujassamlashtirishi mumkin. Vaqtli qatorlar quyidagilar bilan harakterlanadi:

1. uzoq muddatli harakat yo‘nalishi, ya’ni umumiy asriy tendensiya;
2. qisqaroq davrlarga xos siklik yoki lokal o‘zgarishlar;
3. ayrim yillarga tegishli tebranishlar;
4. mavsumiy to‘lqinlar;
5. kon’yunkturaviy tebranishlar

Vaqt ko‘rsatkichidan bog‘langan holda vaqtli qatorlar momentli (ma’lum bir sanaga) va intervalliga (ma’lum bir davr ichida) tasniflanadi (klassifikatsiyalanadi).

Shuningdek, vaqtli qatorlar sanalar o‘rtasidagi oraliq va ko‘rsatkichlarni mazmuni bo‘yicha farqlanadi. Mazmuni bo‘yicha vaqtli qatorlar ko‘rsatkichlari xususiy va agregatsiyalangan ko‘rsatkichlaridan tashkil topadi. Xususiy ko‘rsatkichlar hodisa va jarayonlarni ajratib, bir tomonlama harakterlaydi (masalan, sutkada o‘rtacha suv iste’mol qilish hajmi ko‘rsatkichining dinamikasini): agregatsiyalangan ko‘rsatkichlar hususiy ko‘rsatkichlardan hosila hisoblanadi va o‘rganilayotgan xodisa va jarayonni kompleks harakterlaydi (masalan, iqtisodiy kon’yunkturaning ko‘rsatkichlarini dinamikasi)

Vaqtli qatorlarni tuzishda ma’lum qoidalarga rioya qilish kerak(talablarga), ular ma’lum bir shartlarni bajarmaslik oqibatida yuzaga kelishi mumkin, bu esa qatorni solishtirib bo‘lmaydigan holga olib kelishi mumkin.

Ko‘rinib turibdiki, vaqtli qatorning darajasini shakllantiruvchi barcha komponentlar uchta gruppaga bo‘linadi, Asosiy tashkil etuvchi bo‘lib trend hisoblanadi. Undan trendni tashkil etuvchini ajratib olinganidan keyin mavsumiy va tasodifiy komponentalar qiymati qoladi.

Agarda qatorning tashkil etuvchilarining barchasi aniq topilgan bo‘lsa, unda tasodifiy komponentaning matematik kutilishi nolga teng bo‘ladi va uning o‘rtacha qiymat atrofida tebranishi doimiydir.

Vaqtli qatorning asosiy komponentasi bo‘lib **trend** hisoblanadi. Trend –bu vaqt bo‘yicha qatorni barqaror tendensiyasi bo‘lib, ozmi-ko‘pmi tasodifiy tebranishlardan ta’siridan ozoddir.

Murakkab ijtimoiy hodisa va jarayonlarning o‘zgarish tendensiyalari ko‘rsatkichlarini faqat u yoki bu tenglamalar, trend chiziqlari bilan taxminiy ifodalash mumkin.

Vaqtli qatorlarda odatda uch ko‘rinishdagi tendensiya ajratiladi. O‘rta daraja tendensiyasi odatda matematik tenglama yordamida ifodalangan to‘g‘ri chiziqning atrofida izlanayotgan hodisaning o‘zgarayotgan xaqiqiy darajasini ifodalaydi:

$$Y(t) = f(t) + \varepsilon(t)$$

Bu funksiyaning mazmuni shundaki, trendning qiymatlari vaqtning ayrim momentlarida dinamik qatorning matematik kutilishi bo‘ladi.

Dispersiya tendensiyasi qatorning empirik darajalari va determinallangan komponentasi o‘rtasidagi farqni o‘zgarish tendensiyasini harakterlaydi

Avtokorrelyatsiya tendensiyasi dinamik qatorning alohida darajalari o‘rtasidagi aloqalarni harakterlaydi

Izlanayotgan trend tenglamasini tanlashda **soddalik prinsipiga** amal qilish kerak, va u bir nechta hildagi chiziqlardan empirik ma’lumotlarga eng yaqinini (bir muncha soddasini) tanlashdan iborat bo‘ladi. Buni shu bilan yana asoslashadiki, chiziqli trendning tenglamasi qancha murakkab bo‘lsa va u qancha ko‘p parametrlarni o‘z ichiga olsa. ularning yaqinlash darajasi teng bo‘lganida ham bu parametrlarni ishonchli baholash shuncha qiyinlashib boradi.

Amaliyotda ko‘pincha quyidagi asosiy ko‘rinishdagi vaqtli qatorlar trendlaridan foydalaniladi.

Xuddi shuningdek tendensiyalar tiplari va trend tenglamalari ham bo‘linadi.

Ekonometrik izlanishlarda tanlangan model bo‘yicha yuqorida sanab o‘tilgan har bir komponentani **miqdoriy tahlili** o‘tkaziladi.

Trendni ajratib olishdan avval, uning mavjudligi to‘g‘risidagi **gipotezani** tekshirish zarur. Amalda trendning mavjudligini tekshirish uchun bir nechta mezonlar mavjud, ammo asosiy bo‘lib sxemada keltirilgan ikkita mezon hisoblanadi.

Trendning mavjudligini tekshirish uchun mezonlar:

1) Bir qatorning ikki qismini o‘rtachalarini ayirmasi usuli. O‘rtachalarni ayirmasini mavjudligi haqidagi gipoteza tekshiriladi: Buning uchun vaqtli qator ikki teng yoki deyarli teng qismlarga bo‘linadi. Gipotezaning tekshirish mezoni sifatida Styudent mezoni qabul qilinadi. Agarda t ≥ tα, bo‘lsa, bunda t- Styudent mezonining hisoblangan qiymati; tα- mohiyatlilik darajasi α- da jadvaldagi qiymat, unda trendning mavjud emasligi haqidagi gipoteza inkor etiladi; agarda t < tα bo‘lsau holda (N0) gipoteza qabul qilinadi

2) Foster – Styuart usuli. Hodisaning tendensiyasi va vaqtli qator darajalarining dispersiyasini trendini mavjudligi aniqlanadi. Ko‘pincha bu usul vaqtli qatorni chuqur (detal nom) tahlil qilishda va uni bo‘yicha prognozlarni tuzishda qo‘llaniladi.

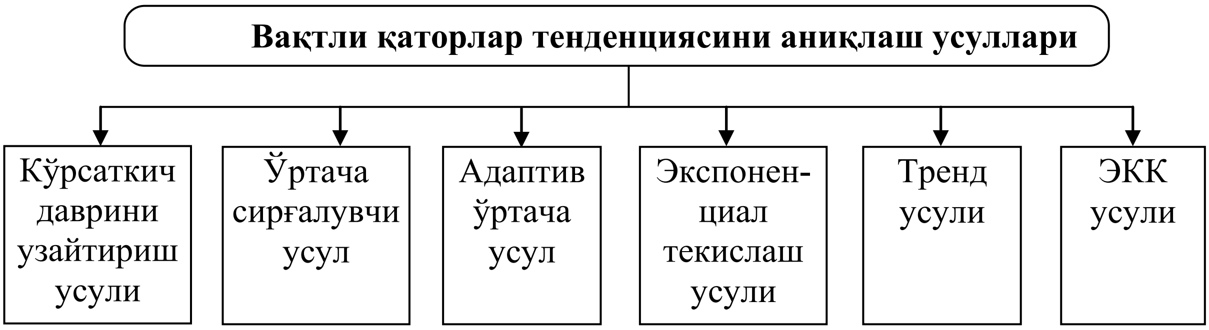
Chiziqli trendning eng soddasi bo‘lib to‘g‘ri chiziq hisoblanadi, va u chiziqli tenglama trendi bilan ifodalanadi $\hat{y}_i = a_0 + a_1 \cdot t_i$,

bunda *ŷi* – i-nomerli yil uchun trendning tekislangan (nazariy) darajalari

ti –vaqtli qatorning darajalari tegishli bo‘lgan momentlar yoki vaqt davrlari nomerlari;

ai,- trend parametrlari.

13.2-§. Vaqtli qatorlarni tekislash usullari.



3.-rasm. Vaqtli qatorlarni tekislash usullari

Iqtisodiy qatorlar dinamikasi tendensiyasini aniqlash vaqtida ko‘pchilik hollarda turli darajadagi polinomlar:

$$\hat{y}(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i \right]^u \quad \begin{matrix} (i = -1, 0, 1, ..., k) \\ (u = -1,\ 1) \end{matrix}$$

va eksponensional funksiyalar qo‘llaniladi:

$$\hat{y}(t) = \left[e^{a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i} \right]^u \quad \begin{matrix} (i = -1, 0, 1, ..., k) \\ (u = -1,\ 1) \end{matrix} \qquad (1)$$

Shuni qayd etib o‘tish lozimki, funksiya shakli tenglashtirilayotgan qatorlar dinamikasi harakteriga muvofiq, shuningdek, mantiqiy asoslangan bo‘lishi lozim.

Polinomning eng yuqori darajalaridan foydalanish ko‘pchilik hollarda o‘rtacha kvadrat xatolarining kamayishiga olib keladi. Lekin bunday vaqtlarda tenglashtirish bajarilmay qoladi.

Tenglashtirish parametrlari bevosita eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanadi. Eksponensional funksiya parametrlarini baholash uchun esa boshlang‘ich qatorlar qiymatini logarifmlash lozim.

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

a) k tartibli polinom uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + ... + a_k \sum t^k = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + ... + a_k \sum t^{k+1} = \sum yt \\ .... \\ a_0 \sum t^k + a_1 \sum t^{k+1} + a_2 \sum t^{k+2} + ... + a_k \sum t^{2k} = \sum yt^k \end{cases} \qquad (2)$$

b)eksponensional funksiya uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + ... + a_k \sum t^k = \sum \ln y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + ... + a_k \sum t^{k+1} = \sum t \ln y \\ .... \\ a_0 \sum t^k + a_1 \sum t^{k+1} + a_2 \sum t^{k+2} + ... + a_k \sum t^{2k} = \sum t^k \ln y \end{cases} \qquad (3)$$

Agar tendensiya ko‘rsatkichli funksiyaga ega bo‘lsa, ya’ni

$$y_t = a_0 a_1^t$$

bo‘lsa, ushbu funksiyani logarifmlab, parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlash mumkin. Ushbu funksiya uchun normal tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} n \ln a_0 + \ln a_1 \sum t = \sum \ln y \\ \ln a_0 \sum t + \ln a_1 \sum t^2 = \sum t \ln y \end{cases} \qquad (4)$$

Ko‘pincha boshlang‘ich ma’lumotlar asosida qatorlar dinamikasining rivojlantirish tendensiyasini tavsiya etish uchun eng qulay funksiya qaysi biri ekanligini hal qilish masalasi murakkab bo‘ladi. Bunday hollarda funksiya shakllarini aniqlashning quyidagi ikki xil usulidan foydalanish mumkin: o‘rta kvadratik xatolar minimumi usuli bilan funksiya tanlash; dispersion tahlil usulini qo‘llash orqali funksiya tanlash.

Mantiqiy tahlil hamda tadqiqot tufayli qo‘lga kiritilgan shaxsiy tajriba asosida qator turli xil funksiyalar tanlab olinadi va ularning parametrlari baholanadi. Shundan so‘ng har bir funksiya uchun quyidagi formula asosida o‘rta kvadratik xatolar aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n-k-1}}, \qquad (5)$$

bu yerda: y_t – qatorlar dinamikasining qiymati;

$\hat{y}_t$ – qatorlar dinamikasi qiymatlarini tenglashtirish;

k – funksiya parametrlari soni.

Mazkur usul faqat tenglama parametrlarining teng sonida natijalar beradi.

Ikkinchi usul dispersiyalarni taqqoslashdan iborat. O‘rganilayotgan qatorlar dinamikasi umumiy variatsiyasini ikki qismga, ya’ni tendensiyalar tufayli sodir bo‘ladigan variatsiyalar va tasodifiy variatsiyalar yoki $V = V_1 + V_2$ bo‘lishi mumkin.

Umumiy variatsiya quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$V = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \bar{y}\right)^2, \qquad (6)$$

bu yerda, $\bar{y}$ - qatorlar dinamikasining o‘rtacha darajasi.

Tasodifiy variatsiyalar quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$V_2 = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2. \qquad (7)$$

Umumiy va tasodifiy variatsiyalarning farqi tendensiyalar variatsiyasi hisoblanadi:

$$V_1 = V - V_2. \qquad (8)$$

Tegishli dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi quyidagicha bo‘ladi:

1. Tendensiyalar tufayli dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni tekislash tenglamasi parametrlari sonidan bitta kam bo‘ladi.

2. Katorlar dinamikasi darajasi soni bilan tekislash tenglamasi parametrlari soni o‘rtasidagi farq tasodifiy tendensiyalar uchun daraja erkinligi soniga teng bo‘ladi.

3. Umumiy dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni qatorlar dinamikasi darajasi sonidan bitta kam bo‘ladi. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar quyidagicha hisoblanadi:

$$S^2 = \frac{V}{n-1}, \qquad (9)$$

$$S_1^2 = V_1, \qquad (10)$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2}. \qquad (11)$$

Dispersiyalar aniqlangandan so‘ng F - mezonning empirik qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \qquad (12)$$

Olingan qiymatni erkinlik va ehtimollik darajasiga muvofiq aniqlangan jadval qiymati bilan taqqoslanadi.

Agar $F > F_\alpha$ ko‘rinishidagi tengsizlik bajarilsa, u holda tahlil qilinayotgan tenglama ifodalanayotgan tendensiya uchun to‘g‘ri keladi. Bunday hollarda tahlil qilishni mantiqiy tushunchalarga mos keladigan oddiy tenglamalardan boshlab, asta-sekin kerakli daraja aniqlanguncha qadar murakkabroq darajalarga o‘tib borish lozim.

Trend aniqlangandan keyin boshlang‘ich qatorlar dinamikasiga tegishli darajada trendning qiymati olinadi. Tahlil bundan keyin trenddan chetga chiqishi mumkin.

$$z(t) = y(t) - \hat{y}(t) \qquad (13)$$

$z(t)$ chetga chiqishi σ^2 arifmetik dispersiyali o‘rtacha nolga teng bo‘ladi.

Tenglama parametrlarini aniqlash zarur:

$$\hat{y}(t) = a_0 + a_1 t, \qquad (14)$$

$$\hat{y}(t) = a_0' + a_1' t. \qquad (15)$$

Normal tenglamalar sistemasi to‘g‘ri chiziqli tenglamalar uchun quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{cases} \qquad (16)$$

Dinamika tendensiyasini aniqlashning eng sodda usuli **qator darajalari davrini uzaytirishusulidir**. Bu usulda ketma-ket joylashgan qator darajalari teng sonda olib qo‘shiladi, natijada uzunroq davrlarga tegishli darajalardan tuzilgan yangi ixchamlashgan qator hosil bo‘ladi.

O‘rtacha sirg‘aluvchi usul - bu qator darajalarini birin-ketin ma’lum tartibda surish yo‘li bilan hisoblangan o‘rtacha darajadir. O‘rtacha sirg‘aluvchi usulda qator ko‘rsatkichlaridan doimo teng sonda olib, ulardan oddiy arifmetik o‘rtacha hisoblash yo‘li bilan aniqlanadi. Ularni toq yoki juft sonda olinadigan qator ko‘rsatkichlari asosida hisobalash mumkin.

O‘rtacha sirg‘aluvchi usul o‘rtacha qiymatni aniqlash vaqtida tasodifiy chetlanishlarning o‘sish holatiga asoslanadi. O‘rtacha faktik qiymatlar qatorlari dinamikasi tekislanayotgan vaqtda sirg‘anishning o‘rtacha nuqta davrini ko‘rsatadigan o‘rtacha qiymatlar bilan almashinadi. Odatda o‘rtacha sirg‘anuvchi usulning ikki modifikatsiyasidan, ya’ni oddiy va vaznli tekislashdan foydalaniladi.

Oddiy tenglashtirish o‘rtalikdagi p uzunlikdagi vaqt uchun oddiy o‘rta arifmetik hisoblashdan tuzilgan yangi qator tuzishga asoslanadi:

$$y_k = \frac{\sum_{t=k}^{p+k} y_t}{p} \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ N - p + 1), \qquad (17)$$

bu yerda, p– tenglashtirish davri uzunligi vaqtli qatorlar harakteriga bog‘liq bo‘ladi; k – o‘rtacha qiymatning tartib nomeri.

Vaznli tenglashtirish turli nuqtadagi qatorlar dinamikasi uchun vaznli o‘rtacha qiymatlarni o‘rtachalashtirishdan iborat.

Birinchi $2p+1$ qatorlar dinamikasini olib ko‘raylik (p odatda 1 yoki 2 ga teng). Tendensiyalar funksiyasi sifatida qandaydir:

$$y_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \qquad (18)$$

(18) to‘la darajasini olaylik.

Uning parametrlari

$$a_0 \sum_{-p+1}^{p+1} t^i + a_1 \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+1} + ... + a_k \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+k} = \sum_{-p+1}^{p+1} y_i t^i \qquad (19)$$

tenglamasi yordamida eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi.

Ko‘phad (polinom) o‘rtacha darajasi $p+1$ nuqtasiga joylashgan. a_0 ga nisbatan tenglamani yechsak:

$$a_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_{2p+1} y_{2p+1} \qquad (20)$$

hosil qilamiz. Bu yerdagi b_1 qiymati p va k mohiyatiga bog‘liq bo‘ladi. Hosil bo‘lgan tenglama (4) birinchilardan $2p+1$ qatorlar dinamikasi qiymatining vaznli o‘rtacha qiymat arifmetikasi hisoblanadi.

Eksponensial usuli hozirgi paytda, dinamik qatorlarga asoslangan usullardan eng muhim usul deb hisoblanadi. Dinamik qatorlarni bashoratlashda ma’lumotlarni yildan yilga o‘zgartirishini e’tiborga olish zarur. Ohirgi yillardagi o‘zgarish tendensiyasini ahamiyatini oshirib, dinamik qatorni birinchi yillardagi o‘zgarish tendensiyasini ahamiyatini kamaytirish zarur.

Bashoratlashtirishning oddiy modellaridan biri bo‘lgan vaqtli funksiyasini ko‘rib o‘tamiz. Umumiy holda vaqt bo‘yicha olingan funksiyasini

$$u_t = f(t) \qquad (21)$$

$$y_t = a_0 + a_1 t \qquad (22)$$

ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Ayrim hollarda vaqtli qator parametrlari ma’lum bir oraliqda o‘zgarishi mumkin.

Bu muammoni yechish uchun Braun tomonidan yaratilgan eksponensial usulidan foydalanamiz. Bu usulni mohiyati shundan iboratki, vaqt bo‘yicha olingan qator eksponensial qonuniyatiga bo‘ysunib bashorat qilinadi.

Faraz qilaylik:

$$y = a_0 + a_1 t \qquad (23)$$

ko‘rinishidagi chiziqli funksiya berilgan bo‘lsin. Bu yerdagi a_0 va a_1 parametrlarni topish uchun o‘rtacha eksponensial $S_{t1}(y)$ va $S_{t2}(y)$ miqdorlarni topamiz.

$$S_{t1}(y) = a_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha \times a_1} \qquad (24)$$

$$S_{t2}(y) = a_0 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha \times a_1} \qquad (25)$$

Agar bu sistemani a_0 va a_1 ga nisbatan yechsak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_0 = 2S_{t1}(y) - S_{t2}(y) \qquad (26)$$

$$a_1 = \frac{1}{1-\alpha}\left[S_{t1}(y) - S_{t2}(y)\right] \qquad (27)$$

k darajadagi eksponenta rekurent formulasi orqali topiladi.

$$S_{tk}(y) = \alpha S_{tk-1}(y) + (1-\alpha)S_{t-1k}(y) \quad (7.28)$$

Bu yerda $\alpha = 2 / m + 1$

m -kuzatuvlar soni.

Umuman olganda $0 < \alpha < 1$ bo‘ladi.

Agar α parametr 1 ga yaqin bo‘lsa, bashoratlashtirish uchun keyingi holatlar hisobga olinadi. Agar a $\to 0$ bo‘lsa bashoratda ilgari holat nazarda tutiladi.

Nazorat uchun savollar

1. Vaqtli qator deb nimaga aytiladi?
2. Vaqtli qatorlar variatsion qatorlardan qanday xususiyatlari va alomatlari bilan farq qiladilar?

3. Vaqtli qatorlarni qanday usullar bilan tekislash mumkin?

4. O‘rtacha sirg‘aluvchan usul nima va qachon qo‘llanadi?

5. Vaqtli qatorlarda korrelyatsion-regression tahlil usullarini qo‘llash shart-sharoitlarini tushuntirib bering?

6. Taklif va boshqa bozor iqtisodiyot qonunlari namoyon bo‘lishini o‘rganishda regression tahlil usullaridan foydalanish tartibini misollarda tushuntirib bering.

7. Bozor narxiga nisbatan taklif elastikligini aniqlash maqsadida regression tahlil usulidan foydalanish tartibini aniq bir misolda tushuntirib bering.

8. Additiv va multiplikativ modellarning formulasiga izoh bering.

XIV-BOB. TENGLAMALAR TIZIMI KO‘RINISHIDAGI EKONOMETRIK MODEL

14.1-§. Bir-biriga bog‘liq tenglamalar tizimini tushunchalari va turlari

Tayanch iboralar: endogen o‘zgaruvchi, ekzogen o‘zgaruvchi, bog‘liq bo‘lmagan tenglamalar, rekursiv tenglamalar tizimi, o‘zaro bog‘liq tenglamalar tizimi,idensifikatsiyalash muammolari.

Odatda iqtisodiy ko‘rsatkichlar o‘zaro bog‘langan bo‘lishadi. Bunday ko‘rsatkichlar (o‘zgaruvchilar) o‘rtasidagi munosabatlar tarkibi bir vaqtli tenglamalar tizimi yordamida ko‘rsatilishi mumkin. Mazkur tenglamalarda quyidagi turdagi o‘zgaruvchilar mavjud bo‘ladi:

- **endogen**, tizim ichida aniqlanuvchi, bog‘liqli ***u*** o‘zgaruvchilar;

- **ekzogen**, qiymati tashqaridan beriladigan, boshqariladigan, bashoratlanuvchi, ta’sir etuvchi ***x*** o‘zgaruvchilar;

- **oldindan belgilangan** o‘zgaruvchilar, ham joriy vaqtdagi ekzogen o‘zgaruvchilarni, ham lag o‘zgaruvchilar (o‘tgan davrlar uchun ekzogen va endogen o‘zgaruvchilar)ni o‘z ichiga oladigan.

Ekonometrik tizimlarning quyidagi turlari ajratiladi.

Bog‘liq bo‘lmagan tenglamalar tizimi, bunda har bir bog‘liq o‘zgaruvchi $y_i (i=1,\ldots,n)$, bog‘liq bo‘lmagan bir xil to‘plam o‘zgaruvchilar x_j $(j=1,\ldots,m)$larning funksiyasi sifatida beriladi:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1m} x_m + \varepsilon_1 \\
y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2m} x_m + \varepsilon_2 \qquad (1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nm} x_m + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

Mazkur tizimining har bir tenglamasini regressiya tenglamasi sifatida mustaqil qaralishi mumkin. Unga ozod hadlar kiritilishi mumkin va regressiya koeffitsentlari eng kichik kvadratlar (EKK) usuli yordamida topilishi mumkin.

Rekursiv tenglamalar tizimi, bunda bog‘liq o‘zgaruvchilar $y_i(i=1,\dots,n)$, bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilar x_j $(j=1,\dots,m)$larning va oldin aniqlangan bog‘liq o‘zgaruvchilar y_1, y_2 ,…, y_{i-1}larning funksiyasi sifatida ko‘rsatiladi:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\
y_2 &= b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + ,\dots, + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Tizimning har bir tenglamasi parametrlari, eng kichik kvadratlar usuli yordamida, birinchi tenglamadan boshlab, ketma ket aniqlanadi.

O‘zaro bog‘liq tenglamalar tizimi, bunda har bir bog‘liq o‘zgaruvchi y_i $(i=2,\dots,n)$ boshqa bog‘liq o‘zgaruvchilar y_k ($k \neq i$) va bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilar x_j $(j=1,\dots,m)$ning funksiyasi sifatida keltirilgan:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \dots + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\
y_2 &= b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Bu tizim eng ko‘p tarqalgan bo‘lib, birlashgan, bir vaqtli tenglamalar tizimi nomi bilan ataladi. Uni *tarkibiy model shakli* (TMSH) deb ham atashadi.

TMSH o‘zgaruvchilarning ba’zi koeffitsentlari nolga teng bo‘lishi mumkin, bu holat mazkur o‘zgaruvchilarning tenglamada mavjud bo‘lmasligini bildiradi. Masalan, narx va ish haqi dinamikasi modeli TMSH ko‘rinishida yoritilishi mumkin:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

bunda y_1–ish haqi o‘zgarishi tempi;

y_2 – narxlar o‘zgarishi tempi;

x_1 – ishsizlar foizi;

x_2– doimiy kapital o‘zgarishi tempi;

x_3 – xom ashyo importi narhlarining o‘zgarish tempi.

Ikkita tenglamadan tashkil topgan mazkur tizim ikkita bog‘liq, endogen (y_1, y_2) va uchta bog‘liq bo‘lmagan, ekzogen (x_1,x_2,x_3) o‘zgaruvchilardan iborat. Birinchi tenglamada x_2 va x_3 o‘zgaruvchilari mavjud emas. Bu koeffitsentlar $a_{12}= 0$va $a_{13}= 0$ ekanligini bildiradi.

Ekonometrik tenglamlar tizimi parametrlarini hisoblash uslubiyoti

Ekonometrik tenglamlar tizimi parametrlarini yukorida keltirilgan “Eng kichik kvadratlar” usuli yordamida hisoblash mumkin.

Ekonometrik tizimlar bo‘yicha prognozlash uchun ketma-ket bir nechta bosqichlardan o‘tish lozim:

1. Berilgan ma’lumotlar asosida korrelyatsion tahlil o‘tkaziladi:

a) xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlar matritsasi hisoblanadi;

b) juft korrelyatsiya koeffitsiyentlari matritsasi hisoblanadi.

2. Korrelyatsion tahlil natijasida tanlangan omillar asosida regressiya tenglamasi tuziladi;

3. Tuzilgan tenglamalar tizimi quyidagi mezonlar bo‘yicha baholanadi:

a) Fisher mezoni;

b) Styudent mezoni;

v) Darbin-Uotson mezoni;

g) Ko‘plik korrelyatsiya koeffitsiyenti;

d) Determinatsiya koeffitsiyenti;

e) Approksimatsiya xatoligi.

4. Tuzilgan tenglamalar tizimi mezonlar bo‘yicha mos kelsa, keyin asosiy ko‘rsatkich tenglama asosida prognoz davri hisoblanadi.

5. Ishlab chiqarish funksiyasini asosiy xususiyatlarini quyidagilar hisoblaydi:

a) o‘rtacha unumdorlik omillari;

b) chegaraviy unumdorlik omillari;

v) resurslar bo‘yicha elastiklik koeffitsiyentlari;

g) resurslarga talab;

d) resurslarni almashtirish chegaralari.

Tarkibiy modelni koeffitsiyentlarini baholashda bir qator usullar qo‘llaniladi.

Aniq identifikatsiyalanadigantarkibiy modelda qo‘llanadigan **bilvosita eng kichik kvadratlar usulini (BEKK)** ko‘rib chiqamiz. Mazkur usulini ikkita endogen va ikkita ekzogen ko‘rsatkichlardan iborat bo‘lgan quyidagi identifikatsiyalanadigan model misolida ko‘rib chiqamiz:

$y_1 = b_{12}\, y_2 + a_{11}\, x_1 + \varepsilon_1$ (5)

$y_2 = b_{21}\, y_1 + a_{22}\, x_2 + \varepsilon_2$

Modelni tuzish uchun 1-jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bilan foydalanamiz.

1 -jadval

Haqiqiy ma’lumotlar

N	U_1	u_2	x_1	x_2
1	33,0	37,1	3	11
2	45,9	49,3	7	16
3	42,2	41,6	7	9
4	51,4	45,9	10	9
5	49,0	37,4	10	1
6	49,3	52,3	8	16
Summa	270,8	263,6	45	62
O‘rtacha qiymat	45,133	43,930	7,500	10,333

Tarkibiy modelni keltirilgan shakliga tubdan o‘zgartiramiz:

$y_1 = d_{11}\, x_1 + d_{12}\, x_2 + u_1$

$y_2 = d_{21}\, x_1 + d_{22}\, x_2 + u_2$

$u_1$va u_1 – tasodifiy hatolar.

Har bir keltirilgan shakldagi tenglamasi uchun *d*koeffitsiyentlarini hisoblashda EKK usuli qo‘llanilishi mumkin.

Hisoblashni osonlashtirish uchun o‘rtacha darajadan $\boldsymbol{y}=y-y_{cp}$va$\boldsymbol{x}=x-x_{cp}$ (y_{cp}*va* x_{cp} –o‘rtachalar) chetlanishlar bilan foydalansa bo‘ladi. Tubdan o‘zgartirilgan 1-

jadvaldagi ma’lumotlar 2-jadvalga tortilgan. Bu yerda d_{ik} koeffitsiyentlarni aniqlash uchun kerakli oraliq hisobotlar keltirilgan. Birinchi keltirilgan tenglamaning d_{ik} koeffitsiyentlarini aniqlash uchun quyidagi normal tenglamalar tizimi bilan foydalanish mumkin:

$\Sigma\, \boldsymbol{y_1 x_1} = d_{11}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_1^2} + d_{12}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_1 x_2}$

$\Sigma\, \boldsymbol{y_1 x_2} = d_{11}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_1 x_2} + d_{12}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_2^2}$

2–jadvalda hisoblangan qiymatlarni yuqoridagi tenglamaga summani o‘rniga qo‘yib chiqib, quyidagini olamiz:

$83{,}102 = 33{,}5d_{11} - 29{,}001d_{12}$

$-20{,}667 = -29{,}001d_{11} + 155{,}334d_{12}$

Yuqoridagi tenglamalarning yechilishi natijasida **d_{11} = 2,822 i d_{12} = 0,394** teng.

2 -jadval

Keltirilgan model shaklini tuzish uchun o‘zgartirilgan ma’lumotlar

n	u_1	u_2	x_1	x_2	$u_1 * x_1$	x_1^2	$x_1 * x_2$	$y_1 * x_2$	$u_2 * x_1$	$u_2 * x_2$	x_2^2
1	-12,133	-6,784	-4,500	0,667	54,599	20,250	-3,002	-8,093	30,528	-4,525	0,445
2	0,767	5,329	-0,500	5,667	-0,383	0,250	-2,834	4,347	-2,664	30,198	32,115
3	-2,933	-2,308	-0,500	-1,333	1,467	0,250	0,667	3,910	1,154	3,077	1,777
4	6,267	1,969	2,500	-1,333	15,668	6,250	-3,333	-8,354	4,922	-2,625	1,777
5	3,867	-6,541	2,500	-9,333	9,667	6,250	-23,333	-36,091	-16,353	61,048	87,105
6	4,167	8,337	0,500	5,667	2,084	0,250	2,834	23,614	4,168	47,244	32,115
Summa	0,002	0,001	0,000	0,002	83,102	33,500	-	-	21,755	134,41	155,33

							29,001	20,667		7	4

Keltirilgan shaklning birinchi tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{2{,}822}\ \boldsymbol{x_1} + \mathbf{0{,}394}\boldsymbol{x_2} + u_1$

Ikkinchi keltirilgan tenglamaning d_{2k}koeffitsiyentlarini aniqlash uchun quyidagi normal tenglamalar tizimi bilan foydalanishimiz mumkin:

$\Sigma\, y_2x_1 = d_{21}\, \Sigma\, x_1^2 + d_{22}\, \Sigma\, x_1x_2$

$\Sigma\, y_2x_2 = d_{21}\, \Sigma\, x_1x_2 + d_{22}\, \Sigma\, x_2^2$

2–jadvalda hisoblangan qiymatlarni yuqoridagi tenglamaga summani o‘rniga qo‘yib chiqib, quyidagini olamiz:

$21{,}755 = 33{,}5d_{21} - 29{,}001d_{22}$

$134{,}417 = -29{,}001d_{21} + 155{,}334d_{22}$

Yuqoridagi tenglamalarning yechilishi quyidagi qiymatlarni beradi $\mathbf{d_{21} = 1{,}668}$ **i** $\mathbf{d_{22} = 1{,}177}$.

Keltirilgan shaklning ikkinchi tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$\boldsymbol{y_2} = \mathbf{1{,}668}\ \boldsymbol{x_1} + \mathbf{1{,}177}\boldsymbol{x_2} + u_2$

Keltirilgan shakldan tarkibli shaklga o‘tish uchun keltirilgan model shaklning ikkinchi tenglamasidan x_2 ni topamiz:

$x_2 = (y_2 - 1{,}668\ x_1) / 1{,}177$

Bu ifodani keltirilgan modelning birinchi tenglamasiga qo‘yib chiqib, tarkibli tenglamani topamiz:

$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{2{,}822}\ \boldsymbol{x_1} + \mathbf{0{,}394}\ (\boldsymbol{y_2} - \mathbf{1{,}668}\boldsymbol{x_1}) / 1{,}177 =$

$= \mathbf{2{,}822}\ \boldsymbol{x_1} + \mathbf{0{,}335}\ \boldsymbol{y_2} - \mathbf{0{,}558}\ \boldsymbol{x_1} = \mathbf{0{,}335}\ \boldsymbol{y_2} + \mathbf{2{,}264}\boldsymbol{x_1}$

Shunday qilib $\mathbf{b_{12} = 0{,}335;\ a_{11} = 2{,}264.}$

Keltirilgan model shaklning birinchi tenglamasidan $x_1$ni topamiz:

$\boldsymbol{x_1} = (\boldsymbol{y_1} - \mathbf{0{,}394}\boldsymbol{x_2}) / \mathbf{2{,}822}$

Bu ifodani keltirilgan modelning ikkinchi tenglamasiga qo‘yib chiqib, tarkibli tenglamani topamiz:

$\boldsymbol{y_2} = \mathbf{1{,}177}\ \boldsymbol{x_2} + \mathbf{1{,}668}\ (\boldsymbol{y_1} - \mathbf{0{,}394}\boldsymbol{x_2}) / \mathbf{2{,}822} =$

$= \mathbf{1{,}177}\ \boldsymbol{x_2} + \mathbf{0{,}591}\boldsymbol{y_1} - \mathbf{0{,}233}\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0{,}591}\ \boldsymbol{y_1} + \mathbf{0{,}944}\boldsymbol{x_2}$

Shunday qilib **b_{21} = 0,591; a_{22} = 0,944.**

Tarkibli shaklning ozod hadlarini quyidagi tenglamalardan topamiz:

$A_{01} = y_{1,cp} - b_{12}\ y_{2,cp} - a_{11}\ x_{1,cp} = 45{,}133 – 0{,}335 * 43{,}93 – 2{,}264 * 7{,}5 = \mathbf{13{,}436}$

$A_{02} = y_{2,cp} - b_{21}\ y_{1,cp} - a_{22}\ x_{2,cp} = 43{,}93 – 0{,}591 * 45{,}133 - 0{,}944 * 10{,}333 = \mathbf{7{,}502}$

So‘nggi tarkibli modelning ko‘rinishi olamiz:

$y_1 = a_{01} + b_{12}\ y_2 + a_{11}\ x_1 + \varepsilon_1 = \mathbf{13{,}436 + 0{,}335}\ y_2 + \mathbf{2{,}264}\ x_1 + \varepsilon_1$

$y_2 = a_{02} + b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2 = \mathbf{7{,}502 + 0{,}591}\ y_1 + \mathbf{0{,}944} x_2 + \varepsilon_2$

8.3.Ekonometrik tenglamalar tizimini indentifikatsiyalash muammolari

TMSH (**tarkibiy model shakli)** da **modelning tarkibiy koeffitsentlari** deb ataluvchi, b_{ij} va a_{ij} modelning parametrlarini aniqlashda eng kichik kvadratlar usuli qo‘llana olinmaydi.

Odatda modelning tarkibiy koeffitsentlarini aniqlash uchun TMSH keltirilgan **model shakliga** (KMSH) tubdan o‘zgartiriladi.

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \ldots + \delta_{1m} x_m \\ y_2 &= \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \ldots + \delta_{2m} x_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \delta_{n1} x_1 + \delta_{n2} x_2 + \ldots + \delta_{nm} x_m \end{aligned} \qquad (6)$$

KMShning δij parametrlari eng kichik kvadratlar usulida baholanishi mumkin. Bu parametrlar orqali *bij* va *aij* modelning tarkibiy koeffitsentlarini hisoblab chiqish mumkin. Tarkibiy va keltirilgan shakllarning parametrlarini o‘zaro mosligini ta’minlash uchun **identifikatsiya sharti** bajarilishi kerak.

Modelning tarkibli shakli quyidagicha bo‘lishi mumkin:

identifikatsiyalanadigan;

identifikatsiyalanmaydigan;

o‘taidentifikatsiyalanadigan.

TMSH identifikatsiyalanadigan bo‘lishi uchun, tizimning har bir tenglamasi identifikatsiyalanadigan bo‘lishi kerak. Bu holatda TMSH parametrlari soni keltirilgan formaning parametrlariga teng bo‘ladi.

Agar TMShning birorta tenglamasi identifikatsiyalanmaydigan bo‘lsa, bunda butun model identifikatsiyalanmaydigan bo‘lib hisoblanadi.Bunday holatda keltirilgan shaklning koeffitsentlari soni TMSH koeffitsentlari soniga nisbatan kam.

Agar keltirilgan koeffitsentlar soni tarkibli koeffitsentlariga nisbatan ko‘p bo‘lsa, model o‘taidentifikatsiyalanadigan deb hisoblanadi. Bunda keltirilgan model shaklining koeffitsentlari asosida biror tarkibiy koeffitsiyentining ikki va undan ko‘p qiymatini topish mumkin. O‘taidentifikatsiyalanadigan modelda bitta bo‘lsa ham tenglama o‘taidentifikatsiyalanadigan, boshqalari esa identifikatsiyalanadigandir.

Agar, TMShning *i*-tenglamasida endogen o‘zgaruvchilar sonini *N* orqali va tizimda mavjud bo‘lgan, lekin ushbu tenglamaga kirmaydigan oldindan belgilangan o‘zgaruvchilarni *D* orqali belgilasak, modelning identifikatsiya sharti quyidagi hisob qoidasi ko‘rinishida yozilishi mumkin:

agar**D+1 <Htenglama identifikatsiyalanmaydi;**

agar**D+1 = Htenglama identifikatsiyalanadi;**

agar**D+1 >Htenglama o‘taidentifikatsiyalanadi.**

Identifikatsiya uchun mazkur qoida kerakli, ammo yetarli shart emas. Keltirlgan qoidadan tashqari, tenglama identifikatsiyasini aniqlash uchun ko‘shimcha shartlar bajarilishi lozim.

Ko‘rib chiqilayotgan tenglamada mavjud bo‘lmagan, lekin tizimga kirgan endogen va ekzogen o‘zgaruvchilarni tizimda ta’kidlab chiqamiz. Boshqa tenglamalarda o‘zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan matritsasini tuzamiz. Agar o‘zgaruvchi tenglamaning chap tomonida joylashgan bo‘lsa, bunda koeffitsiyentni teskari belgi bilan olish kerak. Agar olingan matritsasini determinanti nolga teng bo‘lmasa va darajasi bir kam tizimda endogen o‘zgaruvchilar sonidan kam bo‘lmasa, bunda mazkur tenglama uchun identifikatsiyaning yetarli sharti bajarilgan.

Buni quyidagi tarkibli model misolida tushuntirib beramiz:

$y_1= b_{12}\, y_2 + b_{13}\, y_3 + a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2$

$y_2= b_{21}\, y_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4$(8.7)

$y_3 = b_{31} y_1 + b_{32} y_2 + a_{31} x_1 + a_{32} x_2$

Har bir tizimning tenglamasini kerakli va yetarli identifikatsiya sharti bajarilishiga tekshirib chiqamiz. **Birinchi tenglamada** uchta endogen o‘zgaruvchilar:y_1 ,$y_2$vay_3 (**H=3**) mavjud. Unda ekzogen o‘zgaruvchilar $x_3$vax_4(**D=2**) qatnashmayapti. Kerakli identifikatsiya sharti bajarilgan **D+1=H**.

Kerakli shartga tekshirish uchun $x_3 va x_4$o‘zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan iborat bo‘lgan matritsasini tuzamiz (3-jadval). Jadvalning birinchi ustunida ekzogen o‘zgaruvchilar $x_3$vax_4 koeffitsiyentlari tizimining 2 va 3 tenglamaliridan olingan deb ko‘rsatilgan. Ikkinchi tenglamada mazkur o‘zgaruvchilar mavjud bo‘lib, ularning koeffitsiyentlari a_{23} va a_{24} larga mos ravishda teng. Uchinchi tenglamada yuqoridagi o‘zgaruvchilar qatnashmaydi, ya’ni ularning koeffitsiyentlari nolga teng. Matritsasining ikkinchi satri noldan iborat bo‘lgani uchun, matritsaning determinanti ham nolga teng. Demak, yetarli sharti bajarilmagan va birinchi tenglamani identifikatsiyalanadigan deb hisoblasa bo‘lmaydi.

3-jadval

$x_3$vax_4o‘zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa.

Tenglamalardan olingan o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlari	O‘zgaruvchilar	
	x_3	x_4
2	a_{23}	a_{24}
3	0	0

Ikkinchi tenglamada ikkita endogen o‘zgaruvchilar:y_1 i y_2 (**H=2**) mavjud. Bunda ekzogen o‘zgaruvchi x_1(**D=1**) qatnashmayapti. Kerakli identifikatsiya sharti bajarilgan **D+1=H**.

Kerakli shartga tekshirish uchun ikkinchi tenglamada mavjud bo‘lmagan $y_3 va$ x_1o‘zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan iborat bo‘lgan matritsasini tuzamiz (4 -jadval).

4 -jadval

y_3 *va* x_1 o‘zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa.

Tenglamalardan olingan o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlari	O‘zgaruvchilar	
	y_3	x_1
1	b_{13}	a_{11}
3	-1	a_{31}

Tenglamaning chap tomonida joylashgan uchun uchinchi tenglamada y_3 o‘zgaruvchining koeffitsiyenti -1 teng.Haqiqatda, uchinchi tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin $0= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 -1\, y_3 +a_{31}x_1 + a_{32}x_2$, bunda $b_{33} = -1$ tenglama aniq shakllanmoqda.

Umumiy holda TMSH o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlar matritsasi ko‘rinishida ifodalanishi mumkin. Bu holatda ikkinchi tenglama quyidagi vektor bilan belgilanishi mumkin $(b_{31}\ ,\ b_{32}\ ,-1,\ a_{31}\ ,\ a_{32},\ 0\ ,\ 0)$, hamda butun bir vaqtli tenglamalar tizimi quyidagi matritsa bilan ifodalanadi:

$$\begin{pmatrix} -1 & b_{12} & b_{13} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 1 & -1 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

2-jadvalda keltirilgan matritsaning determinanti nolga teng emas va darajasi 2ga teng. Demak, yetarli sharti bajarilgan va ikkinchi tenglama identifikatsiyalanadigan.

Uchinchi tenglamada uchta endogen o‘zgaruvchilar: y_1 ,y_2 i y_3 (**H=3**) mavjud. Bunda ekzogen o‘zgaruvchilar x_3*va*x_4 (**D=2**) qatnashmaydi. Kerakli identifikatsiya sharti bajarilgan **D+1=H**.

Kerakli shartga tekshirish uchun uchinchi tenglamada mavjud bo‘lmagan x_3 *va*x_4 o‘zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan iborat bo‘lgan matritsasini tuzamiz (5-jadval). Jadvalga binoan matritsaning determinanti nolga teng (birinchi satri noldan iborat). Demak, yetarli sharti bajarilmagan va uchinchi tenglamani identifikatsiyalanadigan deb hisoblasa boʻlmaydi.

5-jadval

$x_3$vax_4oʻzgaruvchilar koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa.

Tenglamalardan olingan oʻzgaruvchilarning koeffitsiyentlari	Oʻzgaruvchilar	
	x_3	x_4
1	0	0
2	a_{23}	a_{24}

Ekonometrik modellarda ayrim hollarda (masalan,$y_3=y_1+y_2+x_1$ koʻrinishida) oʻzgaruvchilarning koeffitsiyentlarini baholashni talab qilinmaydi va tenglamani identifikatsiyalashga tekshirish kerak emas, lekin butun tizimni identifikatsiyaga tekshirishda mazkur tenglamalar qatnashadi. Ayrim holatlarda modelda qatnashadigan ozod va qoldiq hadlar (a_{01}, a_{02}, a_{03} ,…ε_1, ε_2, ε_3,…) identifikatsiyalash muammosiga ta’sir etmaydi.

Nazorat uchun savollar

1. Qaysi hollarda bir vaqtli ekonometrik modellartuziladi va buning sababi nimada?
2. Bir vaqtli tenglamalar tizimini yechishda qanday usullardan foydalaniladi?
3. Nima uchun ekonometrik modellar tenglamalar tizimi koʻrinishida ifodalanadi?
4. Tenglamlar tizimini identifikatsiyalashda qanday muammolar mavjud?
5. Tenglamalar tizimida endogen oʻzgaruvchilar qanday tanlanadi?
6. Ekzogen oʻzgaruvchilar nima va ular ekonometrik modelda qanday ahamiyatga ega?
7. Tenglamalar tizimida lagli oʻzgaruvchilar qanday hisobga olinadi?
8. Bir vaqtli tenglamalar tizimining iqtisodiy ahamiyati nimadan iborat?

XV-BOB. AMALIY EKONOMETRIK MODELLAR

Tayanch iboralar: iqtisodiy o‘sish, ishlab chiqarish funksiyalari, Kobba-Duglas funksiyasi, talab va taklifning modellari, Solou funksiyasi

15.1-§. Iqtisodiy o‘sish jarayonini ishlab chiqarish funksiyalari yordamida tadqiq etish

Ishlab chiqarish jarayoni kuzatilayotganda ko‘rish mumkinki mahsulot ishlab chiqarishda xom-ashyo, ish kuchi, texnika vositalari, elektr energiyasi, asosiy fondlar va boshqa resurslar bevosita qatnashadi va mahsulot hajmiga ta’sir etadi. Ishlab chiqarilgan mahsulot bilan unga sarflangan resurslar orasidagi bog‘lanishni ishlab chiqarish funksiyasi orqali ko‘rsatish mumkin. Umumiy holda ishlab chiqarish funksiyasi quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi.

$y = f\,(x_1, x_2,..., x_m)$,

bu yerda y - ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori; x_i – resurslar sarfi.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda asosiy bosqich – bu funksiya va omillar o‘rtasidagi aloqa shakllarini tanlashdir. Bunga yoki tekshirmay mantiqiy fikrlarga asoslanib yoki amaliy tajriba, eksperimentlar asosida erishiladi.

Bog‘liqliklar to‘plamidan iqtisodiy jarayoni harakteriga muvofiqroq keladigan ishlab chiqarish funksiyasini tanlashga modellashtirilayotgan ob’ektning texnologik, fizik-biologik va agrotexnik harakteristikalarini o‘rganish asosida erishiladi.

Funksiya va dalillar o‘rtasidagi bog‘liqlarni topish avval mazkur iqtisodiy jarayonga muvofiq keladigan empirik formulani topishdan iborat bo‘ladi. Empirik formula aloqa harakterining yaqinlashtirilgan ma’nosini (qimmatini) anglatadi, demak, tanlab olingan ishlab chiqarish funksiyasi dalillar bilan o‘rganilayotgan aloqa qonunini nisbatangina ifodalaydi, bu esa nazariy ishlab chiqarish funksiyasiga o‘tish lozimligini ko‘rsatadi.

Empirik bog‘liqlikdan nazariy funksiyaga o‘tish eng kichik kvadratlar usuli yordamida amalga oshiriladi. Uning mohiyati shunday parametrlarni topishdan iboratdirki, unda funksiyaning hisoblangan qiymatlari bilan uning haqiqiy qiymatlari o‘rtasidagi farq kvadratlari yig‘indisi eng minimal bo‘lib, quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = \sum (y_{TM} - f(x))^2 \to \min$$

Regressiya tenglamasi to‘g‘ri tanlangan bo‘lsa, bog‘liqlikning nazariy formasi o‘rganilayotgan aloqa qonuniyatlarini juda aniq aks ettiradi.

Ishlab chiqarish funksiyalari matematik tasvirlash tipiga ko‘ra chiziqli, darajali, parabolik, ko‘rsatkichli va hokazo bo‘lishi mumkin. Bu funksiyalarning ba’zilarini ko‘rib chiqamiz.

1. Chiziqli funksiya:

$$y = k_0 + k_1 x_1$$

Bu funksiya bir jinsli bo‘lib, omil-dalillarning doimiy limitli samaraliligi bilan harakterlidir. Umuman iqtisodiyot uchun chiziqsiz aloqa ham harakterli bo‘lib, ma’lum doiralardagina chiziqli ko‘rinishga keltiriladi.

2. Darajali funksiya:

$$y = ax^b,$$

bu yerda *u* - ishlab chiqarilgan mahsulot;

x - ishlab chiqarish resurslari sarfi;

b - ishlab chiqarish samaradorligining o‘zgarish ko‘rsatkichi;

a - erkin parametr.

Mazkur funksiya qo‘shimcha mahsulotning qo‘shimcha harajat birligiga nisbatan doim o‘sib yoki kamayib borishini nazarda tutadi, biroq u qo‘shimcha mahsulotning ayni bir vaqtda kamayishi va o‘sib borishiga yo‘l qo‘ymaydi. Buni funksiyaning birinchi tartibli hosilasida ko‘rish mumkin:

$$y' = bax^{b-1}.$$

3) Kobba-Duglas tipdagi darajali funksiya eng ko‘p tarqalgan va universal funksiya hisoblanadi. U quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi;

$$y = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

bu yerda *u* - natijaviy ko‘rsatkich;

x_i- erkin o‘zgaruvchi miqdor;

α, a_i - o‘zgarmas miqdorlar;

$\prod$ - ko‘paytirish operatori.

Bu funksiya parametrlari bir vaqtni ichida elastiklik koeffitsiyentlariga teng. Elastiklik koeffitsiyentlarining iqtisodiy mazmuni shundan iboratki, ular mustaqil o‘zgaruvchilar (x) bir foizga o‘zgarganda samarali (natijali) ko‘rsatkich (u) qanday o‘zgarishini ko‘rsatadi. Darajali funksiyani harajatlar o‘rtacha bo‘lganda resurslarning unumdorligi tadqiqotchini qiziqtirgan vaqtda qo‘llanish nazarda tutiladi. Uning formasi mahsulot chiqarishda ma’lum resurslar - mehnat, ishlab chiqarish fondi va tabiiy resurslarning ishtirokini shart qilib qo‘yuvchi xususiyatlarni aks ettiradi. Bu mazkur funksiyaning xilma-xil iqtisodiy jarayonlarni bayon qilishda universal qo‘llanilishini belgilaydi.

15.2-§. Ishlab chiqarish funksiyalarining harakteristikalari

Ishlab chiqarish funksiyasini o‘rganishda ayrim ishlab chiqarish omillarining samaradorligini baholash, bir xil omillarning boshqa omillar o‘rnini bosishi, texnika taraqqiyoti kabi muammolar paydo bo‘ladi (bunda ko‘p hollarda Kobba-Duglasa tipdagi ikki omilli modeldan foydalanish mumkin).

$$y = \gamma K^{\alpha} L^{\beta},$$

bu yerda K - ishlab chiqarish fondlarining hajmi;

L - mehnat sarflari;

γ, α, β - hisoblanadigan parametrlar.

Ishlab chiqarish funkiyasidagi omillarning samaradorligi funksiyaning har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha birinchi tartibli hosilasi funksiyasi bilan aniqlanadi. Xususiy hosila boshqa omilning miqdori o‘zgarmas bo‘lsa, omil uchun qo‘shimcha mahsulotni ifodalaydi. Binobarin, eng so‘nggi samaradorlik ishlab chiqarish fondlari uchun

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \gamma \alpha L^{\beta} K^{\alpha - 1},$$

mehnat uchun esa quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \beta\gamma L^{\beta-1} K^{\alpha} .$$

Eyler teoremasidan foydalangan holda yalpi mahsulotni omillar «ulushiga» ajratish mumkin;

$$y = \frac{\partial y}{\partial K} K + \frac{\partial y}{\partial L} L .$$

α va β parametrlari asosiy ishlab chiqarish fondlari va mehnatga nisbatan ishlab chiqarish hajmining elastiklik koeffitsiyenti hisoblanadi:

$$\alpha = \frac{\partial y}{y} : \frac{\partial K}{K} ;$$

$$\beta = \frac{\partial y}{y} : \frac{dL}{L} .$$

Ishlab chiqarish funksiyasini ko‘rib chiqishda paydo bo‘ladigan navbatdagi muhim muammo ishlab chiqarish omillari samaradorligining ishlab chiqarish ko‘lami va uning konsentratsiyasiga bog‘liq holda o‘zgarishidir. Real voqelikda bunday holat quyidagicha bo‘lishi mumkin:ishlab chiqarish ko‘lamining kengayishi bilan samaradorlik o‘sishi, o‘zgarishsiz qolishi, pasayishi kuzatiladi.

Kobba-Duglas ishlab chiqarish funksiyasida ishlab chiqarish konsentratsiyasining ta’siri parametrlar jamida aks etadi.

1) $\alpha + \beta = 1 -$ пarametrlar jami birga teng bo‘lsa, bu holda ishlab chiqarish konsentratsiyasi ishlab chiqarish omillarining samaradorligiga ta’sir etmaydi.

2) $\alpha + \beta > 1 -$ пarametrlar jami birdan katta bo‘lsa, bu ishlab chiqarish hajmi bir omilning uning miqdoriga nisbatan yaratilgan eng so‘nggi samaradorlikdan ortiq bo‘lishini anglatadi.

3) $\alpha + \beta < 1 -$ пarametrlar jami birdan kam bo‘lsa, resurslar oshishi bilan ishlab chiqarish pasayib boruvchi tezlikda o‘sib boradi.

Bir-birini o‘rnini bosuvchi resursli ishlab chiqarish funksiyalari.

$y=f(x)$ishlab chiqarish funksiyasida resurslar bir-birining o‘rnini bosishi haqidagi taxmin mahsulot chiqarishning ayni bir hajmini resurslarning turli kombinatsiyalarida ham olish mumkin degan ma’noni anglatadi.

Resurslardan foydalanish samaradorligi o‘rtacha hamda eng so‘nggi samaradorlikdan iborat ikki asosiy ko‘rsatkich bilan harakterlanadi.

Resursning o‘rtacha samaradorligi quyidagi funksiyadir:

$$\mu_i = \frac{f(x)}{x_i}.$$

Resursning eng so‘nggi samaradorligi ishlab chiqarish funksiyasining xususiy tarzida aniqlanadi:

$$v_i = \frac{df(x)}{dx_i},$$

$v_i(x)$ miqdor*i* birlik resurs sarfining cheksiz kichik orttirmasidagi miqdordir.

Biror ikki resurs *k* va *l*resurslarning eng so‘nggi samaradorligining nisbati tarzida aniqlanadi:

$$v_{ke} = \frac{dx_r}{dx_e} = -\frac{v_2(x^1)}{v_k(x^1)} \leq 0$$

Bir xil resurslarning ikkinchi resurslar o‘rnini ekvivalent ravishda bosishida izokvanta bo‘ylab grafik harakat muvofiq keladi. Ekvivalent almashinuvning eng so‘nggi normasi bir xil bo‘lgan resurslar kombinatsiyasi fazoda izoklinallar deb ataluvchi egri chiziqlarni hosil qiladi.

Har bir resursning ishlab chiqarish o‘sishiga ta’sirini ifodalash uchun harajatlardan, mahsulot chiqarishning elastiklik koeffitsiyentidan ham foydalaniladi. Elastiklik koeffitsiyenti (*E*) tegishli argument bir foizga o‘zgarganda, funksiya o‘zgarishi miqdorini ko‘rsatadi.

Iqtisodiy o‘sishning nisbiy tezligi ishlab chiqarishning omillar sarflari bo‘yicha elastikligi deyiladi va odatda E_i bilan belgilanadi. Demak har qanday iqtisodiy o‘sish omili (resurs turi) uchun ishlab chiqarishning omillar sarflari bo‘yicha elastikligi

$$E_i = \frac{\partial N}{\partial F_i} \cdot \frac{Fi}{N} = a_i$$

bo‘ladi.

Shunday qilib iqtisodiy o‘sish ko‘rsatkichi sifatida ishlab chiqarilgan mahsulot funksiyasidan foydalanilsa, sarflar bo‘yicha elastikli barcha o‘sish omillari uchun o‘zgarmas qiymatga ega bo‘lib tegishli regressiya koeffitsiyentlarga teng bo‘ladi. Boshqacha aytsak mahsulot hajmining qancha bo‘lishidan qat’iy nazar ***i*** – turidagi o‘sish omilining (ishlab chiqarish resursining) sarfini 1% ga ko‘paytirish ishlab chiqiladigan mahsulot hajmining a_i % ga ko‘paytiradi.

Iqtisodiy o‘sish tahlilida qo‘llaniladigan ishlab chiqarish funksiyalarining xususiyatlarini aniqlashda umumiy elastiklik A ning miqdori bilan belgilanuvchi regressiya koeffitsiyentlari yig‘indisi muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + an$$

Agar iqtisodiy o‘sishning barcha omillari *k* martga o‘zgarsa ishlab chiqiladigan mahsulotning miqdori quyidagicha bo‘ladi.

$$N' = a_0 (kF_1)^{a_1} \cdot (kF_2)^{a_2} \cdot (kF_3)^{a_3} \cdot ... (kF_n)^{a_n} =$$
$$= k^{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n} \cdot F_1^{a_1} \cdot F_2^{a_2} \cdot F_3^{a_3} ... \cdot F_n^{a_n} = k^A N$$

bunda A=1, A>1 va A<1 qiymatlarini qabul qilish mumkin.

Agar A=1 bo‘lsa, ishlab chiqarish sarfini *k* martaga ko‘paytirish, ishlab chiqilgan mahsulotlar miqdorlarining ham *k* marta ko‘payishiga sabab bo‘ladi, demak, iqtisodiy o‘sishning ham shuncha martaga o‘sishiga olib keladi.

Agar A>1 bo‘lsa, ishlab chiqarish sarfining *k* martaga ko‘payishi ishlab chiqilgan mahsulot miqdorining *k* martadan ko‘proq ko‘payishiga sabab bo‘ladi, iqtisodiy o‘sishning *k* martadan ortiqroq ko‘payishiga olib keladi.

Agar A<1bo‘lishi ishlab chiqarish sarfining *k* martaga ko‘paytirish ishlab chiqilgan mahsulotning *k* marta ko‘payishini ta’minlaydi, demak iqtisodiy o‘sishning *k* martadan kamroq miqdorga ko‘payishiga sabab bo‘ladi.

Iqtisodiy o‘sish tahlilida ishlab chiqarishning sarflari bo‘yicha elastikligidan tashqari biron–bir omilning sarfini birbirlikka ko‘paytirganimizda va boshqa omillar o‘zgarishsiz qolganda ishlab chiqilgan mahsulot miqdorining o‘zgarishini ko‘rsatuvchi differensiallashgan o‘sish ko‘rsatkichi ham mavjuddir.

Tahlilning ishlab chiqarish omillarining umumiy usuli, barcha omillarning bir vaqtda 1% o‘zgarishi mahsulot miqdorining qanchaga o‘zgarishini ko‘rsatuvchi usuldir.

O‘zaro almashuvning elastikliligi omillarning differensiallashgan o‘sishining 1%ga o‘zgarishi bilan belgilanadi.

Texnik vositalari va ma’nolari bilan bir-biridan farq qiladigan yuqoridagi ishlab chiqarish funksiyalaridan quyidagilarni ko‘rib chiqaylik.

1.Kobba-Duglas funksiyasi.

2.Errou, Cheneri, Minxas va Solou funksiyasi yoki boshqacha aytganda ishlab chiqarish omillarining o‘zgarmas elastikligi o‘zaro almashuvi funksiyasi.

Ishlab chiqarish funksiyalarini amalda birinchi marta AQSH yengil sanoatiga tegishli bo‘lgan statistik ma’lumotlar asosida Ch.Kobb va P.Duglas tadqiq qilishib quyidagi ishlab chiqarish funksiyasini taklif qiladilar.

$$N = a_0 L^{a_1} \cdot K^{a_2}$$

bunda N – ishlab chiqilgan mahsulot miqdori;

L – ishchi kuchi miqdori;

K – asosiykapital.

Tenglama parametrlari boshlanishida $a_1 + a_2 = 1$ deb qabul qilinadi. Bu shart bo‘yicha mahsulot ishlab chiqarishning ko‘payishi iqtisodiy o‘sish ish kuchining va kapitalning miqdoriy o‘sishi bilan amalga oshadi degan xulosaga olib keladi. Umuman bu qandaydir ma’noda iqtisodiy to‘g‘ri, agar ishlab chiqarish korxonalar soni ortsa albatta mahsulotlar miqdori ham ortadi.

Ammo chuqur tahlil ishlab chiqarish hajmiga nisbatan omillar sarfi neytral munosabatda bo‘lmasligini ta’kidladi. Ayrim tarmoqlarda (energetika, metallurgiya) korxonalar o‘lchamining kattalashuvi, mehnat va kapital sarfini ko‘payish yaxshi samara bersa, boshqa ko‘p ishlab chiqarish tarmoqlarida (qishloq xo‘jaligi, savdo, yengil sanoat) mehnat va kapital sarfining kengayishi ma’lum chegaralardan so‘ng samaradorlikning pasayib ketishiga sabab bo‘ladi. Agar ishlab chiqarish funksiyalari parametrlarini aniqlashda $a_1+a_2=1$ sharti qo‘yilsa natijasida tarmoq va tarmoqlar guruhlari ishla chiqarishlari kengayishining samaradorligini ko‘rsatuvchi elastiklik koyeffitsiyentiga ega bo‘linadi, agar $a_1+a_2>1$ bo‘lsa, samaradorlik bor, o‘suvchi, agar $a_1+a_2<1$ bo‘lsa, ishlab chiqarish korxonalari hajmining o‘sishi samaradorlikning pasayishiga sabab bo‘ladi.

Iqtisodiy o‘sishda ishlab chiqarish resurslari hajmini ko‘paytirish bilan bir qatorda texnika va texnologiyani takomillashtirish, ichshilar malakasini oshirish, ishlab chiqarishni to‘g‘ri tashkil qilish va boshqarish shu kabi omillarning ham ahamiyati katta bo‘ladi.

Texnik progresslar ishlab chiqarish funksiyalarida vaqt davomida ishlab chiqarishning o‘sishi tendensiyalari shakllarida beriladi. Shularni hisobga olgan Kobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$N = a_0 L^{a1} \cdot K^{a1} \cdot e^{\lambda t}$$

$e^{\lambda m}$ texnik progress bilan bog‘liq ishlab chiqarishning vaqt davomida o‘sish tendensiyasi.

Tahlilning yanada chuqurroq amalga oshirilishi texnik progressning moddiylashgan tarafini, mehnat va fondlari sifati yaxshilanganligi va ularning *L, Klarning* miqdorlariga ta’sirini aniqlashga imkon beradi. Ishlab chiqarishning vaqt davomida o‘sish tendensiyasi esa ishlab chiqarishni tashkil qilish va boshqarish samadorligi bilan belgilanadi.

Makrodarajadagi ishlab chiqarish funksiyalariga mehnat va kapital bilan bir qatorda tabiiy resurslardan foyddalanish ham kiradi.

Ishlab chiqarish omillarining o‘zgarmas elastikli o‘zaro almashinish funksiyasi

$$N = a_0 \left[\delta l^{-p} + (1-\delta) K^{-p}\right]^{-\frac{1}{p}}$$

bunda δ - ishlab chiqarish hajmini ko‘paytirishda mehnat va kapital omillarining qatnashish nisbatining parametri;

p- o‘rin almashish elastikligiga bog‘liq bo‘lgan o‘zaro almashuvning parametri;

a_0 – proporsionallik koeffitsiyenti.

Boshqa funksiyalarga qaraganda Errou, Cheneri, Minxas va Solou funksiyasida ilmiy-texnik taraqqiyotlari natijalari kengroq hisobga olinadi.

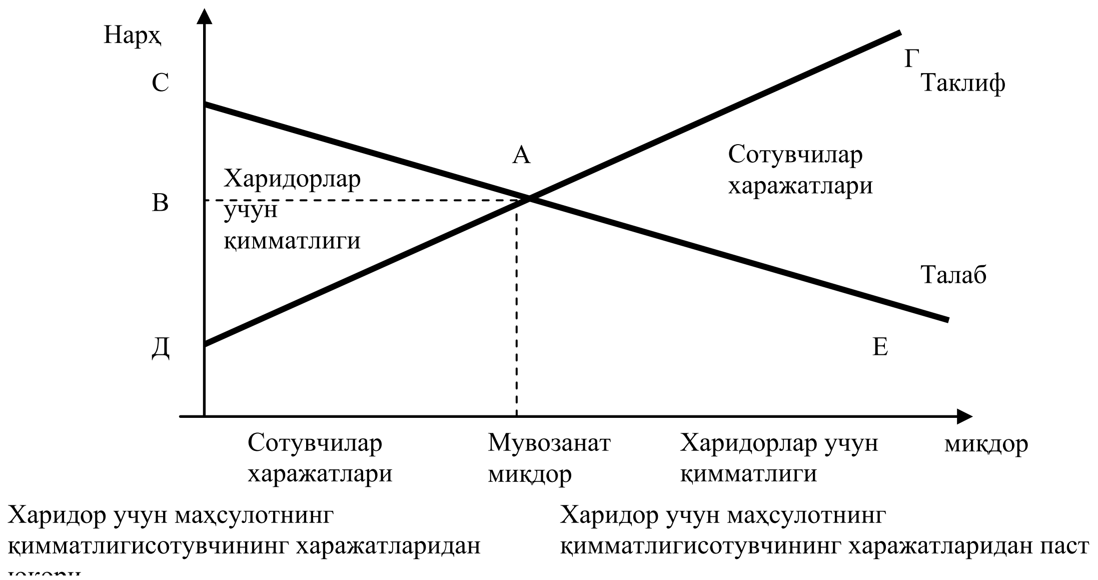
$$N = a_0 e^{\lambda t} \left[\delta h^{-p} + (1-\delta) K^{-p}\right]^{-\frac{h}{p}}$$

h-ishlab chiqarish omillaridan olinadigan umumiy foyda.

15.3-§. Talab va taklifning ekonometrik modellari

Bozor muvozanati xolatida resurslarning taqsimlanishi samaralimi yoki yo‘qmi, bunda umumiy yutuq maksimal qiymatga erishadimi degan savolga javob axtarish uchun uni tahlil qilamiz.

Bozor muvozanat xolatida bo‘lganida muvozanat narh bozorda ishtirok etishi mumkin bo‘lgan sotuvchi va haridorlarni aniqlab beradi. Bozorda mahsulotni shunday haridorlar harid qiladilar, agarda ular mahsulotni uning bozor narhidan yuqori baholaydilar (talab egri chizig‘ida SA kesma bilan ifodalangan bo‘lak); mahsulotni uning narhidan past baholagan individlar (AYE kesma bilan ifodalangan bo‘lak), uni harid qilishdan bosh tortadilar. Xuddi shuningdek, harajatlari mahsulot narhidan past bo‘lgan ishlab chiqaruvchilar (DA kesma bilan ifodalangan) mahsulotni ishlab chiqaradilar va sotadilar; harajatlari bozor narhidan yuqori bo‘lgan firmalar (AG kesma bilan ifodalangan), uni ishlab chiqarish bilan shug‘ullanishni to‘xtatadilar.



1.-rasm.Muvozanat miqdorning samaraligi

Sof raqobatga asoslangan bozorni kuzatishlarga asoslanib quyidagi xulosalarni qilish mumkin:

1. Erkin raqobat bozorlari taklif qilinayotgan mahsulotlarni ularni narhidan qimmatroq baholaydigan haridorlar o‘rtasida taqsimlaydi (ularni pulini to‘lashga tayyorliklari bilan aniqlanadi), qolgan potensial haridorlarga nisbatan.

2. Erkin bozorlar ishlab chiqarish harajatlari past bo‘lgan yetkazib beruvchilarning mahsulotlariga talabni shakillantiradi.

3. Erkin bozorlar shunday miqdorda mahsulot ishlab chiqaradiki, ular iste’molchilar va ishlab chiqaruvchilarning umumiy yutuqlarini maksimallaydi.

Ushbu xulosalarning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish uchun yuqoridagi grafikka yana bir nazar tashlaymiz.

Talab chizig‘i haridorlar uchun mahsulotning qimmatligini ifodalaydi, taklif chizig‘i esa – ishlab chiqaruvchilarning harajatlarini. Muvozanat darajasidan past bo‘lgan ishlab chiqarish xajmda haridor uchun mahsulotning qimmatligi ishlab chiqarish harajatlaridan ortiq bo‘ladi. Bu soxada ishlab chiqarishning o‘sishi umumiy yutuqni ortishiga olib keladi va bu ortish ishlab chiqarilayotgan mahsulotning miqdori muvozanat darajasiga erishmagunicha davom etadi. Ishlab chiqarishning muvozanatdan yuqori bo‘lgan xajmida mahsulotning qimmatligi haridor uchun ishlab chiqaruvchining harajatlaridan pastdir.

Shunday qilib, muvozanat xajmdan ortiq mahsulotni ishlab chiqarish umumiy yutuqni qisqarishiga olib keladi.

Erkin bozor faoliyati natijalari haqida yuqorida qilingan hulosalar shuni ko‘rsatadiki, talab va taklifning muvozanati iste’molchilar va ishlab chiqaruvchilarning yutuqlarini yig‘indisini maksimallaydi.

Boshqacha qilib aytganida, resurslarning samarali allokatsiyasi bozor muvozanatining natijasidir. Erkin bozor sharoitida shakillanadigan bozor narhining o‘zi haridor va sotuvchilarning harakatlarini iqtisodiy resurslarni shunday taqsimlanishiga yo‘naltiradiki, buning natijasida umumiy yutuq maksimallashadi.

Bozor talabi egri chizig‘i. Aloxida bir mahsulotga bo‘lgan bozor talabi, bu shu bozorda ishtirok etuvchi barcha haridorlarning individual talablarining yig‘indisidir.

Bozor talabining asosida individual talab yotadi, va uni shakillanishiga har bir aloxida iste’molchining talablari ta’sir o‘tkazadi. Bozorda talab xajmi faqat mahsulotning narhidan bog‘liq bo‘lmaydi, shu bilan haridorlarning daromadlaridan, ularning did va afzallik bildirishlari, kutishlari va boshqa o‘zoro bog‘liq mahsulotlar narhlari, hamda haridorlar sonidan ham bog‘liq bo‘ladi. Bozor talabi egri chizig‘ini hosil qilish uchun individual talablar egri chiziqlarini gorizontal qo‘shib chiqish kerak bo‘ladi.

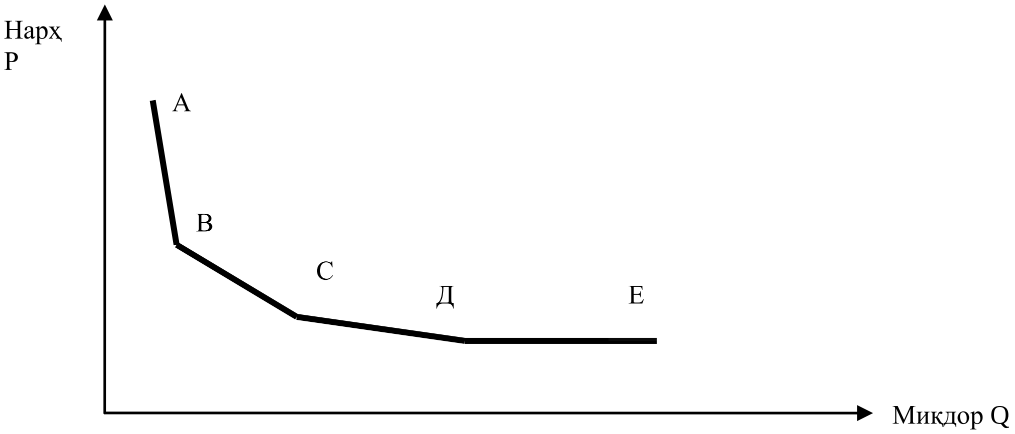
Ya’ni bozorda bo‘lishi mumkin bo‘lgan har bir narh bo‘yicha mahsulotning talab qilinayotgan umumiy miqdori aniqlanadi. Buning uchun gorizontal o‘qi bo‘yicha individual talab miqdorlarni qo‘shib chiqiladi.

Hosil bo‘lgan bozor talabi egri chizig‘ini bozor mexanizimini faoliyaini o‘rganishda, korxonalarni joylashtirish va rivojlantirishda foydalanish mumkin. Bozor talabi egri chizig‘ining ko‘rinishi quyida keltirilgan.

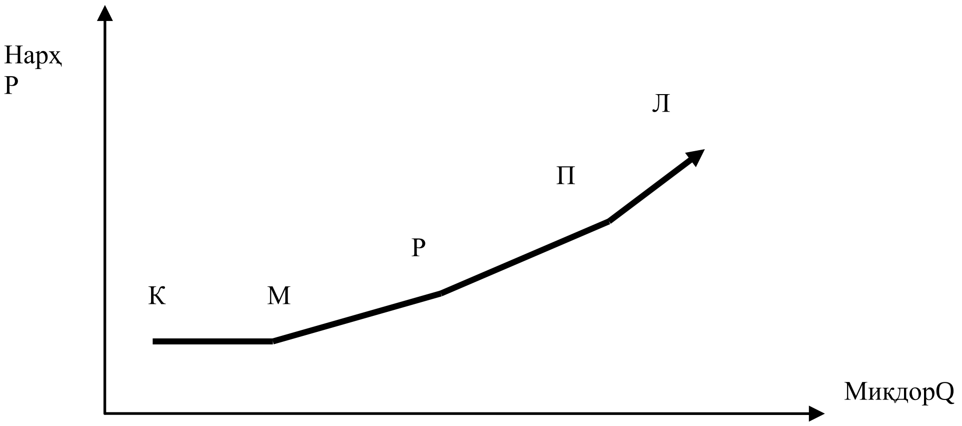
Bozor talabi egri chizig‘i siniq chiziqlardan tashkil topgan bo‘lib, bu siniq chiziqlar har bir individual haridorning talab chizig‘idan iboratdir. Bozorda haridorlar ko‘p bo‘lsa siniq chiziq tekis egri chiziq ko‘rinishiga keladi.

Bozor faoliyatining ikkinchi ishtirokchilari – ishlab chiqaruvchilarning individual takliflarining umumiy yig‘indisi **- bozor taklifi egri chizig‘ini** hosil qiladi. Bozor taklifi xajmi aloxida sotuvchilarning taklifini aniqlovchi omillardan bog‘liq bo‘ladi: mahsulot narhi, ishlab chiqarish resurslarining narhi, texnika darajasi va kutishlardan hamda yetkazib beruvchilarning sonidan. Bozor taklifi egri chizig‘i ham siniq chiziq ko‘rinishida bo‘lib quyida keltiriladi.

Bozor taklifi egri chizig‘i siniq chiziqlardan tashkil topgan bo‘lib har bir chiniq chiziq bir ishlab chiqaruvchining taklif egri chizig‘idir. Bozor taklifi egri chizig‘ini hosil qilish uchun individual taklif egri chiziqlari gorizontal bo‘yicha qo‘shiladi. Ya’ni, har bir narhda umumiy taklif xajmini aniqlash uchun individual taklifni gorizontal o‘qi bo‘yicha qo‘shiladi.



2.-rasm.Bozor talabi egri chizig‘i



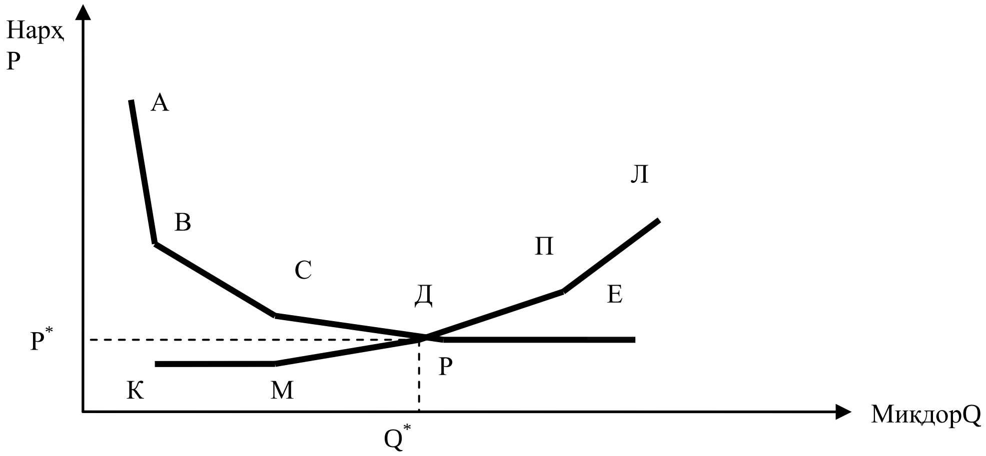
3.-rasm.Bozor taklifi egri chizig‘i

Bozorda umumiy talab va umumiy taklif birgalikda namoyon bo‘lgani uchun ularning grafiklarini bir koordinata o‘qida ifodalaymiz. Pastki rasmda bozor talabi va bozor taklifi bir nuqtada kesishadi.

Ushbu rasmdagi bozor talabi egri chizig‘idagi AV, VS, SD, DE kesmalarning har biri aloxida iste’molchining individual talab funksiyalaridir. Xuddi shuningdek, bozor taklifi egri chizig‘idagi KM, MR, RP va PL kesmalar aloxida ishlab chiqaruvchilarning individual taklif funksiyalaridir.

Shunday qilib aytish mumkinki, har bir iste’molchi va ishlab chiqaruvchi bozorga o‘zlarining barcha xususiyatlarini aks etdiruvchi talab va taklif funksiyalari bilan chiqadilar. Keltirilgan modelda bu xususiyatlar faqat mahsulot narhida o‘z aksini topgan.

Bozorda umumiy talab va umumiy taklif muvozanatga kelishgan nuqtada muvozanat narh - R^* va muvozanat ishlab chiqarish miqdori - Q^* aniqlanadi. Bozor ishtirokchilarining har biri o‘z talab va taklif funksiyasiga ega bo‘lganliklari uchun bu narhda kim qancha mahsulot ishlab chiqaradi va kim undan qancha miqdorda harid qilishi mumkinligini tezda aniqlab oladilar.

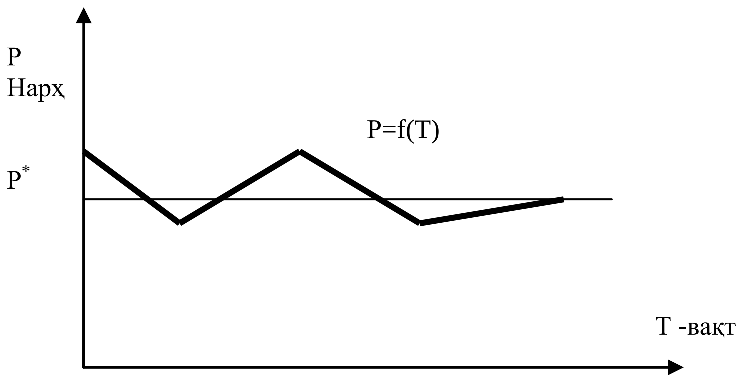


4.-rasm.Bozor talabi va bozor taklifi muvozanati

Yuqoridagi grafikda keltirilgan bozor talabi va bozor taklifi funksiyalari yordamida korxonani joylashtirish va rivojlantirish modelini tuzish uchun quyidagi shartlar berilgan deb faraz qilamiz: bozorda ishtirok etuvchi n –iste’molchining har birining talab funksiyasi $q^1_D(P)$, $q^2_D(P)$,.... $q^n_D(P)$, berilgan bo‘lsin. Xuddi shuningdek, bozorda ishtirok etuvchi m-ta ishlab chiqaruvchilarning ham taklif funksiyalari ma’lum bo‘lsin: $q^1_S(P)$, $q^2_S(P)$,…. $q^m_S(P)$. Ular yordamida bozor talabi va bozor taklifi funksiyalarini aniqlaymiz.

$$Q_D = q^1_D(P) + q^2_D(P) + ... + q^n_D(P)$$
$$Q_S = q^1_S(P) + q^2_S(P) + ... + q^m_S(P)$$

Bozor talabi va bozor taklifi funksiyalarining egri chiziqlari kesishgan nuqtada bozorni muvozanatga olib keluvchi talab va taklif miqdori aniqlanadi. Bozorda mahsulotning bozor narhi aniqlanganidan so‘ng uning har bir ishtirokchisi o‘zlarining iste’mol qilish va ishlab chiqarish imkoniyatlarini o‘zlarining talab va taklif funksiyalari yordamida aniqlaydilar. Natijada har bir ishlab chiqaruvchi mahsulot ishlab chiqarishni rejalashtirgan korxonasida qancha miqdorda mahsulot ishlab chiqarsa qanday miqdorda yutuq-foyda olishini aniqlaydi. Bu ma’lumotlar asosida u qilgan harajatlari va olinadigan natijalarni solishtirib bu soxada biznes bilan shug‘illanish mumkinmi, yoki bu soxani tark etish kerakligi xaqida muammoni hal qiladi. Bu model korxonalarni joriy davrda joylashtirish masalasini modellashtiradi. Agarda kelgusi davr uchun korxonalarni rivojlantirish masalasi ko‘tarilsa ushbu bozorda mahsulot narhini o‘zgarish dinamikasini kuzatish kerak bo‘ladi. Bunday masalani yechish uchun korxonani rivojlanishini bashorat qilinishda ko‘zda tutilayotgan davrlar uchun bozorda mahsulot narhining o‘zgarishini aniqlash kerak bo‘ladi.



5.-rasm.Bozordamahsulotnarhinivaqtbo‘yichao‘zgarishdinamikasi

Shunday qilib, iqtisodiy farovonlik instrumentlari – iste’molchilar va ishlab chiqaruvchilarning yutuqlari erkin bozorlarni samaradorligini baholash bilan birga korxonalarning joylashishi va rivojlanishini modellashtirishda maqsad mezoni ko‘rsatkichlari sifatida ham foydalanish mumkin. Bunda bozorning har bir ishtirokchisi faqat o‘zi manfatlarini, farovonligini ko‘zlab ish yuritsa ham, bozor narhi sharoitni muvozanat xolatiga olib kelishga harakat qilib, bozor ishtirokchilarining barchasini manfatlarini maksimallashtiradi.

Bozor samaradorligi muammosini hal qilishda va iste’molchilar va ishlab chiqaruvchilarning yutuqlari ko‘rsatkichlaridan korxonalarni joylashtirish va rivojlantirish modellarida maqsad mezoni sifatida foydalanishda bozorning faoliyati bilan bog‘liq bir nechta taxminlar qilingan edi. Agarda bu taxminlar o‘z kuchini yo‘qotsa, yuqorida qilingan xulosalar shubxa o‘yg‘otishi mumkin. Bularga quyidagilar kiradi:

1. Yuqoridagi xulosalar takomillashgan raqobat sharoitida faoliyat olib boruvchi bozorlarga ta’luqlidir. Xaqiqatda esa bozorlardagi raqobat sharoiti sof raqobatdan juda ham uzoqda. Ba’zi bir bozorlar bir yoki bir necha sotuvchilar yoki haridorlar iborat bo‘lib, ular bozor narhini nazorat, yoki bozor ustidan xukumronlik qilish imkoniyatiga ega bo‘ladilar. Bozor ustidan xukumronlik qilish imkoniyatlari samaradorlikni pasayishiga olib kelishi mumkin, negaki xukumronlik qilish yetkazib beruvchilarga mahsulot narhi va xajmini talab va taklif muvozanati xolatidan uzoqroqda bo‘lgan darajada ushlab turish imkonini beradi.

2. Bozor faoliyati natijalari faqat haridor va sotuvchilarning xatti-harakatlaridan bog‘liq deb taxmin qilingan edi. Ammo xaqiqatda ularning qarorlari faqat bu bozorga emas, shu bilan boshqa bozorga ta’luqli sub’ektlarga ta’sir qilishi ham mumkin. Haridor va sotuvchilar iste’mol qilish va ishlab chiqarish xaqida qaror qabul qilib, boshqa bozorlardagi xolatlarni hisobga olmaydilar. Shuning uchun ushbu bozordagi muvozanat holati boshqa bozorlardagi muvozanat xolatiga to‘g‘ri kelmasligi mumkin va shu bilan ularning qarorlari butun jamiyat uchun samarali bo‘lmasligi mumkin.

15.4. Makroiqtisodiy ekonometrik modellarning turlari va ularni iqtisodiy tahlilda qo‘llanilishi

Makroiqtisodiy jarayonlar butun milliy iqtisodiyotning barcha tarmoqlarini qamrab oladi. Makroiqtisodiy jarayonlar asosan uchta katta jarayonlarni o‘rganadi va tushuntirib beradi. Bular:

1. Ishsizlik.
2. Inflyatsiya.
3. Iqtisodiy o‘sish.

Ishchsizlik - bu mamlakat miqyosida faol, mehnatga yaroqli aholining ish bilan band bo‘lmasligi tushuniladi.

Inflyatsiya - mamlakat miqyosida umumiy baholarning o‘sishini ko‘rsatadi.

Iqtisodiy o‘sish - mamlakat aholisiga yalpi ichki mahsulotning yildan-yilga ko‘proq ishlab chiqarilishi tushuniladi.

Ushbu uchta ko‘rsatkich makroiqtisodiy muammolar hisoblanadi. Iqtisodiyotning beqaror rivojlanishi tufayli yuqoridagi muammolar vujudga keladi. Ushbu muammolarni hal qilishning bir necha usullari mavjud.

Ushbu muammolar turli xil sharoitlar, davlat olib borayotgan iqtisodiy siyosati, fiskal va monetar siyosat orqali vujudga kelishi mumkin.

Milliy iqtisod darajasida shakllantiriladigan kengaytirilgan takror ishlab chiqarish modeli o‘sish sur’ati va proporsiyalarni aniqlash uchun xizmat qiladi. Iqtisodiy o‘sishning bir sektorli va ikki sektorli modellarini ko‘rib chiqish mumkin. Bunday modellarni yaratish uchun quyidagi belgilar qabul qilinadi.

X (t) - bir yilda ishlab chiqarilgan milliy daromad;

Y (t) - noishlab chiqarish sohasidagi asosiy fondlarning o‘sishiga ketgan harajatlar hamda qo‘shiladigan milliy daromadning iste’mol qilinadigan qismi;

J (t) - asosiy ishlab chiqarish fondlarining o‘sishiga kapital qo‘yilmalar;

S (t) - sof ishlab chiqarishga kapital qo‘yilmalar me’yori (hissasi).

Bunday iqtisodiy mazmunga binoan quyidagi ifodani yozish mumkin:

$X(\mathrm{t})=Y(\mathrm{t})+J(\mathrm{t})$

Jamg‘arma me’yori esa

$$S(t)=\frac{J(t)}{X(t)}$$

formula bo‘yicha aniqlanadi.

Jamg‘arma me’yorini miqdori bilan iqtisodiy o‘sish sur’ati o‘rtasida uzviy aloqa mavjud. Bu bog‘liqlikni ifodalash uchun *V*(t) parametri belgilanadi. U milliy daromadning joriy o‘sishi bilan asosiy ishlab chiqarish fondlariga (ya’ni, sarflangan kapital samarasining darajasi) sof kaptal qo‘yilmalar yig‘indisi o‘rtasidagi nisbati harakterlaydi:

$$U(t)=\frac{X(t+1)-X(t)}{Y(t)}=\frac{\Delta X(t)}{Y(t)}$$

$$Y(t)=S(t)\cdot X(t)$$

bo‘lganligi uchun

$$U(t) = \frac{\Delta X(t)}{S(t) \cdot X(t)}; \qquad \frac{\Delta X(t)}{X(t)} = S(t) \cdot U(t)$$

ega bo‘lamiz.

Binobarin, milliy daromadning o‘sish sur’ati sarflangan kapital samarasining jamg‘arma iqtisodiy o‘sish shaklini ifodalaydi. Agar jamg‘arma me’yori va kapital qo‘yilma bilan ta’minlanganlik iqtisodiy o‘sish va oshish (kamayish) ning mustaqil parametrlari bo‘lsa, jamg‘arish me’yori boshqa teng sharoitlarda milliy daromad o‘sish sur’atlarining proporsional ortishi (kamayishi) bilan birga kechadi. Sarflangan kapital samaradorligini doimiylik darajasini qabul qilib, Harrod-Domarning iqtisodiy o‘sish modeliga ega bo‘lamiz.

$$X(t) = Y(t) + J(t)$$
$$\Delta K(t) = J(t)$$
$$J(t) = S \cdot X(t)$$
$$X(t) = q \cdot K(t)$$

Bunda K(t) iqtisodiyotdagi asosiy ishlab chiqarish fondlarining hajmini belgilaydi. q fondlarning samaradorlik koeffitsiyentidir $q=X/K$. Bu modelda «kechiqish» yo‘q bo‘lganda, iqtisodiy o‘sishning uzoq muddatli sur’ati tenglamasini chiqarish mumkin:

$$\lambda = \frac{\Delta X(t)}{X(t)} = q \cdot S$$

Iqtisodiy o‘sishning nazariy modelida yangi ishlab chiqarish quvvatlarini ko‘rish va o‘zlashtirish ma’lum vaqtni (lagni), ya’ni L va K o‘rtasidagi vaqt lagi mavjud) olishi fakti abstraklashtiradi.

Pirovard xilma-xil nisbatdan differensial tenglama orqali uzluksiz yozish shakliga o‘tamiz.

Bunda mehnat unumdorligining o‘sish sur’ati

$$q(t) = \frac{X(t)}{L(t)}$$

va uning fond bilan ta’minlanganligini

$$q(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

bog‘lovchi o‘zaro nisbatga asoslanamiz; bu yerda *L*(*t*) ijtimoiy ishlab chiqarishda band bo‘lgan ishchilar sonini ifodalaydi. Demak,

$$\frac{q(t)}{q(t)} = F\left(\frac{U(t)}{U(t)}\right).$$

Rejali iqtisodiyot sharoitida ish bilan band bo‘lganlar o‘sish sur’atining *L*/*L*=*n* *qandaydir* barqaror ekzogen shakllantiruvchi mavjud deb taxmin qilish mumkin.

Iqtisodiy o‘sishning bir sektorli makroiqtisodiy modeli («Solou modeli») quyidagicha yoziladi:

$$X(t) = Y(t) + U(t) \cdot K(t) = I(t)$$

$$\frac{q'(t)}{q(t)} = F\left(\frac{U'(t)}{U(t)}\right) \qquad \frac{L'(t)}{L(t)} = const = n\,.$$

Rasman yuqorida keltirilgan model iqtisodiy rivojlanishning statsionar trayektoriyasini beradi. Bunda daromadning o‘sishi jamg‘arish me’yoriga bog‘liq bo‘lmaydi. Jumladan, (*F* chiziqli funksiyasi uchun) biz quyidagini olamiz:

$$\frac{X}{Y} = n \cdot \frac{\nu}{1-\alpha}\,.$$

Shunga ko‘ra statsionar trayektoriyadagi o‘sish sur’ati jamg‘arish me’yorining darajasidan qat’iy nazar ish bilan bandlikni o‘sishi hamda α va ν parametrlari (texnik taraqqiyot sur’ati) bilan aniqlanadi.

Nazorat uchun savollar

1. Ishlab chiqarish funksiyasini boshqa modellardan farqi?
2. Ishlab chiqarish funksiyalarining turlari?
3. Ishlab chiqarish funksiyalarning parametrlarini xususiyatlari.
4. Ishlab chiqarish funksiyalarda ilmiy-texnik taraqqiyotning ahamiyati.
5. O‘sish turlari.
6. Chegaraviy ko‘rsatkichlarning xususiyatlari nimadan iborat?
7. Ekstensiv va intensiv o‘sishni ta’minlovchi omillar?
8. Kobba-Duglas funksiyasini asosiy xususiyatlari.
9. O‘rnini bosish elastikligi qanday tahlil qilinadi?
10. Iqtisodiy tahlil kursatkichlaridan amalda qanday foydalanish mumkin?

15.5-§. Iqtisodiy ko‘rsatkichlarni bashoratlashda ekonometrik modellardan foydalanish

Ijtimoiy-iqtisodiy bashoratlashning umumiy tushunchalari va ob’ektlari

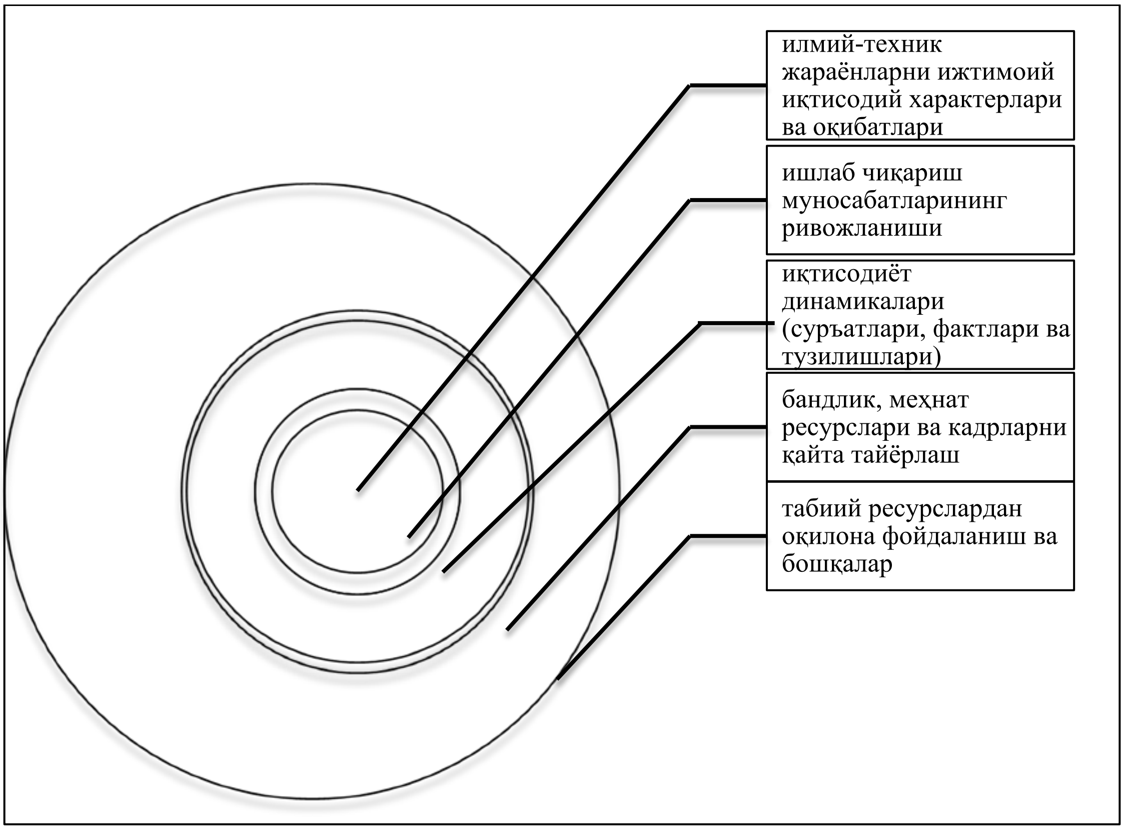
Bashorat - bu ehtimol yo‘nalishlar, ob’ektlar va hodisalarning rivojlanishi natijalari. Prognozlash - bu ob’ektni rivojlantirish istiqbolini belgilab beradigan maxsus ilmiy tadqiqotlardir.

Prognozlash nima bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatib beradi; rejalashtirish - bo‘lishi shart degan ma’noni bildiradi.

Bashoratlash sohalari juda keng: geografik, geologik, ekologik, iqtisodiy, sotsial, tashqi-siyosiy, yuridik va h.k.

Iqtisodiy bashoratlash - bu iqtisodiy qonunlarga ilmiy yondoshgan holda iqtisodiy tizimlarni prognozlarini tuzish jarayonidir.

Iqtisodiy prognozlash – bu, iqtisodiy jarayonlarni bilishning ilmiy usullari hamda prognozlashning barcha usul va yo‘llari yig‘indisini qo‘llash orqali iqtisodiy prognozlarni ishlab chiqishidir.



1.-rasm. Prognozlarning turlari[8]

[8]John E. Hanke, Arthur G. Reitsch, Dean W. Wechern. Business forecasting. Seventh edition. 2010 by Pearson Education, Inc.p. 45

Iqtisodiy prognozlashning nazariy muhim muammolaridan biri prognozlar turlarining tuzilishi hisoblanadi. Turlar - har xil mezonlar va belgilariga asoslanib qurilishi mumkin. Masalan, ob’ektlarga, prognozlash usullariga, yechiladigan masalalarga, vazifalarga va boshqalarga. Bulardan eng muhimlariga quyidagilar kiradi:

– prognozlash ko‘lami;
– prognozlash muddati;
– ob’ekt harakteri;
– prognoz funksiyalari (funksional belgi).

Tuzilish muddati bo‘yicha prognozlar operativ, qisqa muddatli, o‘rta muddatli, uzoq muddatli turlarga bo‘linadi.

Prognozlarning izlanilayotgan ob’ekt harakteriga ko‘ra bo‘linishlari har xil qayta ishlab chiqarish jarayonlari bilan bog‘liq. Shunga ko‘ra, prognozlash quyidagilarga ajratiladi.

Prognozlar funksional belgisiga qarab ikkiga - normativ va izlanuvchi prognozlarga bo‘linadi.

Izlanuvchi prognozlar: izlanayotgan ob’ektlarning kelajakdagi rivojlanish darajasiga asoslangan bo‘lib, bu darajalarni qo‘llash sharoitlaridan cheklashadi. Uning vazifasi o‘rganilayotgan ob’ekt bor tendensiyalar saqlangan holda qanday rivojlanishini o‘rganishdir.

Normativ prognozlar: izlanuvchi prognozlaridan farqli o‘laroq oldin qo‘yilgan maqsadlar bazasida ishlab chiqiladi. Uning vazifasi maqsad qilib olinayotgan ob’ektning kelajakdagi holatini prognozlash yo‘li va erishish vaqtini aniqlashdir.

Izlanuvchi prognozlar ob’ektning oldingiga nisbatan kelajakdagi holatini aniqlashdan qaytayotgan bir vaqtda, normativ prognoz teskari tartibda amalga oshiriladi, ya’ni kelajakdagi holatini qo‘yilgan maqsadining tendensiyalari va uni qo‘llash tartibida amalga oshiriladi.

1

- ***Эксперт усули.*** Бу усул бошланғич ахборотларни йиғиш (анкета, интервью) ва уларни таҳлил қилишга асосланади. Шу билан бирга прогноз мақсади экспертлар томонидан қилинган таҳлилга асосланади.

2

- ***Экстрополяция*** – бу, объектнинг бўлиши мумкин бўлган ривожланишини ўрганиш ва унинг келажакдаги ривожланиш қонунийлигидир.

3

- **Моделлаштириш –** бу, прогнозлаштирилаётган объект тузилишида кўтилаётган ўзгаришларнинг норматив моделлардаги изланишдир.

Prognozlar turlanishi prognozlash yoʻllari bilan uzviy bogʻliq. Bir - birini toʻldiruvchi uch xil prognozlash usullari mavjud.

Usul – bu, oʻrganish yoʻllari va usullarini tanlash hamda shu tarmoqdagi haqiqat koʻrinishlarini umumiylashtirishdir. Iqtisodiy prognozlashning usuli har bir tarmoqda boʻlganidek izlanayotgan ob’ektlarga qarashli, oʻrganilayotgan omil va koʻrinishlar asosiga kirish mumkin boʻlgan dialektik usuldir. U umumiy ilmiy usullar va izlanishiga yondashuv hamda iqtisodiy koʻrinishlarni ilmiy prognozlashga asoslangan oʻziga xos usullar asosida ishlatiladi.

Umumiy yondoshuvlardan quyidagilarni ajratish mumkin:

– tarixiy yondashuv;
– kompleks yondashuv;
– tizimli yondashuv;
– strukturaviy yondashuv;
– tizimli-tarkibiy yondashuv.

Hozirgi kunda kelajakni baholashni 2 turi hayotga tadbiq etilgan: ilmiy baholash va noilmiy koʻra bilish.Kelajakni ilmiy baholashning turlari:

Oldindan aytib berish - bu kelgusidagi muammoni hal qilishning mumkin boʻlgan yoki istalgan istiqbolda holatini bayon qilishdir. Boshqacha qilib aytganda, oldindan aytib berish - kelgusida bo‘ladigan ma’lum jarayonlarning holati haqidagi ishonchli fikrni bildiradi.

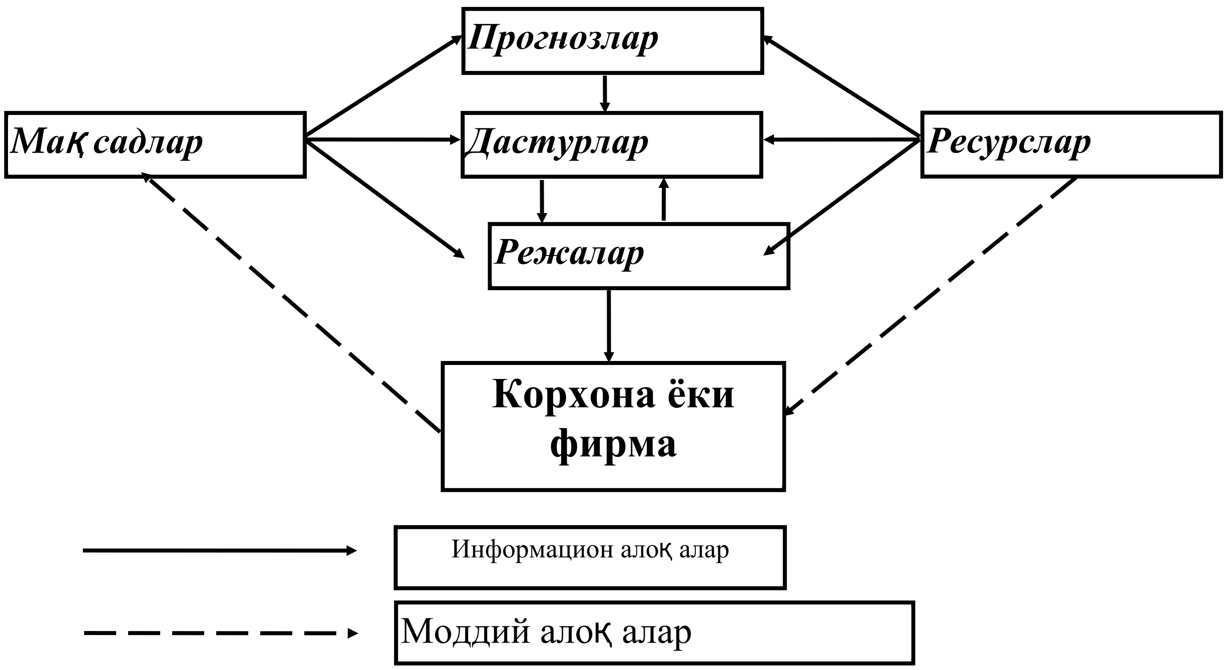
Oldindan ko‘ra bilish - tizimni rivojlantirishning qonuniyatlariga asosla

ngan, haqiqatni, oldindan aks ettirishdir. Bu narsa tizimning kelgusidagi holati haqida ma’lum xulosa chiqarish imkonini beradi.

Istiqbollash (bashorat) - bu ehtimol yo‘nalishlar, ob’ektlar va hodisalarning rivojlanishi natijalari. Prognozlash - bu ob’ektni rivojlantirish istiqbolini belgilab beradigan maxsus ilmiy tadqiqotlardir.

Rejalashtirish - bu aniq belgilangan maqsad, uni amalga oshirishning yo‘llari va tadbirlari, belgilangan xom ashyolar bilan ajralib turadi.

Reja - yakka yagona, ijrosi majbur bo‘lgan direktiv hujjatdir.Shunday qilib rejalashtirish, prognozlash, oldindan aytib berish, oldindan ko‘ra bilish - kelajakni baholashning ishonchlilik darajasiga qarab biri biridan farq qiladi.



2.-rasm. Ishlab chiqarish va boshqarish jarayonlarining chizmasi

Avvalo iqtisodiy tizimni rivojlanishini maqsadi aniqlanadi. Quyidagi maqsadga kelajakda bo‘lishi mumkin holatlari o‘rganilib prognoz qilinadi. Eng samarali tanlangan rivojlanish variantlari, kompleks dasturlarni tuzilishiga informatsion baza sifatida qo‘llanib, prognoz qilingan holatga tizim erishish uchun, qanday tadbirlar amalga oshirilishi kerakligini dastur ko‘rinishida to‘zib olinadi.

Istiqbollash jarayoni ob’ektni tahlilidan boshlanadi. Bu tahlil ob’ektni tanlash, prognozlash maqsadida, ob’ektga ta’sir etuvchi omillarni o‘rganish, uning tarkibi, boshqarish usullarni o‘rganishdan iborat. Iqtisodiy tizim juda katta va murakkab bo‘lgani uchun uni o‘rganishda tizimli tahlil usuli qo‘llanadi.

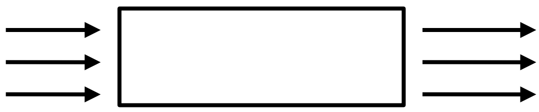
Bu usulni asosiy tamoyillari quyidagicha:

1. Murakkab tizim juda ko‘p elementlardan iborat. Bu elementlar bir-biri bilan bog‘langan bo‘lib, murakkab strukturani tashkil etadi.

2. Murakkab tizim yaxlitlik xususiyatiga ega. Bunday tizimlar har doim maqsadga intilgan bo‘ladi, samarali holatga erishishga harakat qiladi.

3. Tizim kirish va chiqish yo‘llari orqali tashqi muhit bilan bog‘langan.

X_t



Faraz qilaylik tizim holatini aniqlaydigan 3 vektor ma’lum bo‘lsin.

$$X_t = (X_1, X_2,...,X_m)_t \qquad S_t = (S_1, S_2,\dots, S_k)_t$$

$$Y_t = (Y_1, Y_2,...,Y_n)_t$$

Tizimnichiqishholatikirishparametrlarivatizimniichkiholatibilanquyidagichabog‘ langan:

$$Y_t = f\,(X_t, S_t)$$

Bu yondoshuv ekonometrik modellashtirishda qo‘llaniladi.

4. Har bir murakkab tizimni elementlarga bo‘lish mumkin. Masalan: iqtisodiyot elementlari bu tarmoqlar, korxonalar elementlari - bo‘limlar va h.k. Tizimni elementlari iyerarxiya tamoyillariga bo‘ysunadi.

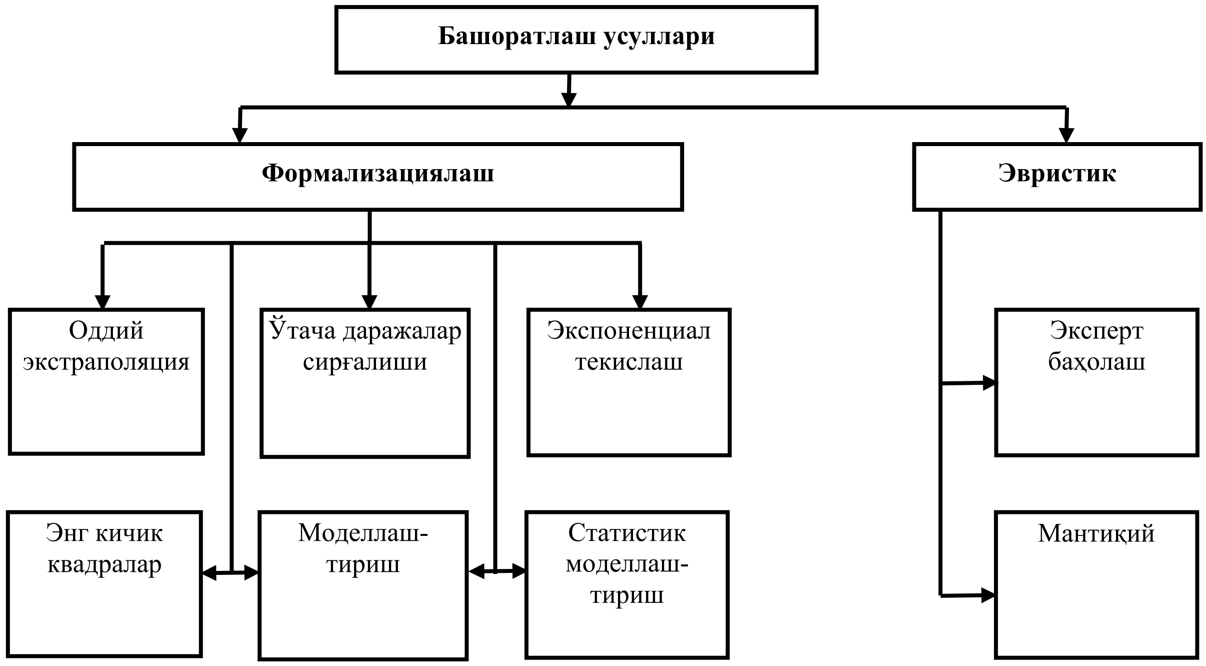
Bashoratlash usullari va ularning turlari

Bashoratlashtirish masshtabiga ko‘ra makroiqtisodiy va mikroiqtisodiy bashoratlarga ajratiladi.

Tuzilish intervali bo‘yicha operativ, qisqa muddatli va uzoq muddatli bo‘lishi mumkin. Qisqa muddatli bashoratda faqat miqdoriy o‘zgarishlar e’tiborga olinadi. Uzoq muddatli bashorat ham miqdoriy, ham sifat o‘zgarishlarga asoslangan bo‘lib, o‘z o‘rnida o‘rta muddatli va uzoq muddatli bo‘lishi mumkin.

Bashoratlash yo‘nalishlariga ko‘ra izlanishli va normativ bo‘lishi mumkin. Izlanishli bashorat – agar hozirgi tendensiyalar saqlanib qolsa iqtisodiy tizim qanday rivojlanadi?, degan savolga javob beradi. Boshqa so‘z bilan aytganda tizimga ta’sir etuvchi omillar o‘zgarmasa, u qanday holatga kelishi mumkin?

Normativ prognoz bo‘lajak maqsadlarga erishish uchun tizimni rivojlanish yo‘nalishlarini va muddatlarini aniqlaydi (belgilaydi). Maqsad qilingan holatga tizim erishish uchun, ta’sir etuvchi omillarga qanday o‘zgarishlar kiritish zarur? Boshqa so‘z bilan aytganda qanday qilib maqsadga erishish mumkin?



3-rasm. Bashoratlash usullari

Iqtisodiy jarayonlar yoki boshqa kuzatuvlar natijasida miqdoriy ma’lumotlarga ega bo‘lmagan hollarda, ya’ni hodisa yoki jarayon bo‘yicha miqdoriy ma’lumotlar bo‘lmasa u holda ekspertlardan foydalaniladi. Ekspertlar ma’lum bir soha bo‘yicha yetakchi mutaxassislar bo‘lib, ular o‘zlarining kompetensiyasi doirasida u yoki bu hodisa va jarayonlar bo‘yicha xulosalar ishlab chiqadilar.

Ekspert (lotincha «tajribali») amalga oshiradigan ekspertiza jarayoni uch bosqichdan iborat:

1) ekspertizaga tayyorlanish;

2) ekspertlar bilan so‘rov o‘tkazish;

3) so‘rov natijalarini qayta ishlash.

Ekspertlarning o‘zlari ikkinchi bosqichda qatnashadilar.

Tayyorgarlik ishi uch qismdan iborat:

1) savol shakli va mazmunini belgilash.

2) savollarni tuzish.

3) ekspertlarni shaxsan tanlash va jalb etish.

So‘rov shakllari: intervyu olish, muloqot, yig‘ilish, g‘oyalarni tanlash, o‘yinlar o‘tkazish, anketa tuzish va Delfi usuli.

So‘roqlar individual yoki guruhlarda, yuzma-yuz va sirtdan o‘tkazish mumkin.

Anketa va intervyularda savolni tanlash qiyin. Savollar ochiq yoki yopiq yoki bir necha shaklda bo‘lishi mumkin. Ochik javoblar sifatli yoki erkin holda sonli ifodalar bo‘ladi.

Yopiq savolga javoblar: «ha», «yo‘q», «bilmayman» singari bo‘ladi.

Ko‘p savollar bo‘lganda zarur javob chiziladi.

Ekspertlar guruhini tuzish. Avvalambor ekspertlarni tanlash, ularning malakalariga e’tibor berish va keyinchalik guruhlar tuzish zarur.

Kerakli belgilardan ekspertning ishchanligi, mahorati, o‘rganilayotgan sohaning mutaxassisi bo‘lishi zarur. Buning uchun ko‘p mutaxassislarga savol berilib, u yoki bu sohada kim ekspert ekanligini so‘rash mumkin. Keyinchalik eng ko‘p ovoz olgan ekspertni guruhga kiritish lozim:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Ishbilarmonlik bilan ishtirokchilarning boshqa sifatlari ilmiy yondashishi, fikrlash doirasi va saviyasi ham hisobga olinadi.

Guruhlardagi ekspertlar soni so‘rov usuliga bog‘liq. Yuzma-yuz uchrashuv uchun 10-15 kishi kifoya. Agar vaqt, mehnat va mablag‘ sarfi cheklanmagan bo‘lsa, sirtdan so‘roq o‘tkazganda ekspertlar soni cheklanmagan.

G‘oyalarni jamoa generatsiyalash usuli. Bu usul «g‘oyalar jangi» deb nom olgan. U yuzma-yuz so‘rov usuli bo‘lib, XX asrning 50-yillarida kashf etilgan. Dastlab 10-15 kishidan iborat guruh tuziladi. Tayyorgarlik jarayonida ekspertlarga eslatma tayyorlanadi va unda muammoli holatlar, markaziy masalalar, muhokama savollari va oldindan g‘oyalarni o‘ylab qo‘yish so‘raladi.

Yig‘ilishni o‘tkazish uchun rais saylanadi. U yig‘ilishni ochadi. Ekspertlarga nutq uchun 2-3 minut ajratiladi va u bir necha gal takrorlanadi. Bu usulda tanqidiy fikrlar ijobiy muhokama qilinadi.

Muhokama stenogramma qilinadi. Muhokamaga 20-45 minut ajratiladi.

Keyingi bosqichda seans natijalari boshqa mutaxassislar guruhi tomonidan qayta ishlanadi. Bu bosqichda jami g‘oyalar tanqid etiladi va g‘oyalar, takliflarning so‘nggi ro‘yxati tuziladi. Bu ro‘yxatga samarali va amaliy g‘oyalar kiritiladi.

Delfi usuli. Delfi usuli AQSH da XX asrning 60-yillarda yaratilgan. U sirtdan so‘rov o‘tkazishga asoslangan. Uning xususiyatlari: sirtqi, anonim, so‘rovlar bir necha bosqichlarda o‘tkaziladi hamda teskari aloqa mavjud, birinchi turdan tashqari har gal ekspertlar oldingi turdagi natijalar haqida ahborot olishadi.

Dastlab ekspertlarga anketalar tarqatiladi, unda muammo izohlanadi, savollar ro‘yxati va unga javob berish tavsifi keltiriladi.

Ekspert javoblarni imzo qo‘ymasdan pochta orqali jo‘natiladi. Tashkilotchilar ekspertlar javoblarini qayta ishlaydi, baho chiqaradi. Mazmun jihatdan o‘rtachalar, farqlar va dispersiya hisoblanadi. Bir oy o‘tgandan keyin ikkinchi tur o‘tkaziladi. Ekspertlarga birinchi tur natijalari bayon qilinib savollar beriladi. Birinchi tur javoblarini inobatga olib ekspertlardan savollarga javob berishi so‘raladi. Javoblar yana umumlashtirilib zarur bo‘lsa yana qo‘shimcha turlar o‘tkaziladi. Agar uchinchi turdan so‘ng javoblardagi farqlar katta bo‘lmasa so‘rov o‘tkazish tuxtatiladi. Oxirgi tur natijalari umumlashtiriladi va tugallangan hisoblanadi.

Ekspertlarning javoblarini qayta ishlash. Agar javob sonli miqdorlarda bo‘lsa, jami ekspertlar guruhining javobini baholash uchun arifmetik o‘rtacha, mediana va moda topiladi. Fikrlar farqi uchun variatsiya, kvadratik farq, dispersiya va kvartillar hisoblanadi.

Ekspert baholashning ayrim usullarida, jumladan Delfi usulida mediana, birinchi va uchinchi kvartillar hisoblanadi.

Arifmetik o‘rtachaga nisbatan mediana afzalligi:

- birinchidan, mediana ayrim ekspert fikriga to‘g‘ri kelishi;

- medianaga ayrim ekspertlarning javobi o‘rtachadan farq qilishi ta’sir qilmaydi.

Ikkkinchidan kvartil mediana bilan mos keladi. Shuning uchun har bir turda Delfi usuli uchun mediana, birinchi va uchunchi kvartil hisoblanadi.

Prognozlashda **ekstrapolyatsiya usuli** o‘rganiladigan ob’ektning rivojlanishiga taalluqli bo‘lgan omillarning doiraviylik, o‘zgarmaslik shartiga asoslangan bo‘lib, ob’ektning o‘tmishdagi va shuncha asoslanib kelajakdagi rivojlanish qonuniyatlarini o‘rganadi.

Dinamik qatorlarning o‘zgarish darajalariga qarab ekstrapolyatsiya oddiy va murakkab bo‘lishi mumkin. Prognozlashning oddiy ekstrapolyatsiya usuli tenglamalarining absolyut qiymatlari, qatorlarning o‘rta qiymatlari, o‘rtacha absolyut o‘sish va o‘sishning o‘rtacha tezligiga nisbatan o‘zgarmas qiymatlarga ega degan xulosaga asoslangan. Prognozning murakkab ekstrapolyatsiya usuli, trendni ifodolovchi statistik formulalarni qo‘llashga asoslangan bo‘lib ikki turga: takomillashgan va analitik turlarga bo‘linadi. Prognozning takomillashgan usulida vaqt bo‘yicha ketma-ket keladigan prognoz qiymatlarini avvaldan mavjud bo‘lgan ko‘rsatkichlar asosida hisoblab topiladi. Bunga o‘zgaruvchan va eksponensial o‘rta qiymat, garmonik vaznlar avtoregression o‘rta qiymat, garmonik vaznlar avtoregression o‘zgartirish usullari kiradi. Analitik usul eng kichik kvadrat usuli yordamida f_t - ning determinik tarkibini aniqlashdan iboratdir.

Bir o‘lchamli vaqtli qatorlarni modellash usullari.

Qisqa muddatga prognozlash keng qo‘llaniladigan prognozlash usuli ekstrapolyatsiya usulidir. Ekstropolyatsiya usuli prognozlashni odatda bir o‘lchamli vaqtli qatori asosida amalga oshiradi. Ma’lumki bir o‘lchamli vaqtli qatorlarni modellash usullari iqtisodiy ko‘rsatkichlarning dinamik qatorlarga asoslangan bo‘lib quyidagi to‘rt tarkibiy qismlardan tashkil topgandir: 1) tahlil qilinadigan jarayonning uzoq davrda rivojlanish qonuniyatlari yo‘nalishi tendensiyasi, 2) tahlil qilinadigan jarayonda ayrim hollarda uchraydigan mavsumiy tarkibiy qismlar; 3) davriy tarkibiy qismlar; 4) tasodifiy omillar sababi yuzaga keladigan tasodifiy tarkibiy qism.

Rivojlanish yo‘nalishi (tendensiyasi) rivojlanishining uzoq muddatli evolyutsiyani bildiradi. Dinamik qatorlarning rivojlanish yo‘nalishi silliq egri chiziq bo‘lib, trend deb ataluvchi vaqt funksiyasi bilan ifodalanadi. Trend – tasodifiy ta’sirlardan holi holda vaqt bo‘yicha harakat qonuniyatidir. Trend vaqt bo‘yicha regressiya bo‘lib, doimiy omillar ta’sirida yuzaga keladigan rivojlanishning determinik tarkibiy qismidir. Trendlardagi chetlanishlar tasodifiy omillar sababli yuzaga keladi. Yuqoridagilarga asoslanib vaqt qatori funksiyasini quyidagicha beramiz:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

f_t – jarayonlarning vaqt bo‘yicha yo‘nalishining doimiy tarkibiy qismi;

ε_t– tasodifiy tarkibiy qismi;

Vaqtli qatorlar rivojlanishida uchta yo‘nalish: o‘rta darajalar yo‘nalishi; dispersiya yo‘nalishi; avtokorrelyatsiya yo‘nalishi mavjuddir.

O‘rta daraja yo‘nalishi f_t ko‘rinishda funksiya bo‘ladi. Dispersiya yo‘nalishi - vaqtli qatorlarning empirik qiymatlarining trend tenglamalari yordamida aniqlangan qiymatlaridan chetlanish. Avtokorrelyatsiya yo‘nalishi - vaqtli qatorlarning darajalari o‘rtasidagi bog‘liqliklarning o‘zgarishi.

Iqtisodiy-ijtimoiy jarayonlarni modellashning keng tarqalgan usuli vaqtli qatorlarni tekislash usulidir. Tekislashgan har xil usullar mavjud bo‘lib, ularning eng asosiylari qatorlarning amaldagi qiymatlarini hisoblab topilganlari bilan almashtirishdir.

Chiziqli trendlar keng tarqalgan bo‘lib ularni umumiy holda quyidagicha yozamiz:

$$\bar{y}_t = \sum_{\tau=-q}^{s} a_\tau y_{t+\tau}$$

Bu yerda:

$\bar{y}_t$ - t davrda tenglama qiymatlarini tekislash;

a_τ - t davrdan masofada turgan qatorlar darajasining vazni;

s - t davrdan so‘ng darajalar soni;

q- t davrgacha bo‘lgan darajalar soni.

a_τ vazn qabul qiladigan qiymatlarga qarab yuqoridagi formula bo‘yicha tekislash o‘zgaruvchi o‘rta qiymat yoki eksponensal o‘rta qiymat yordamida amalga oshiriladi.

Tekislash jarayoni ikki bosqichda amalga oshiriladi: egri chiziq ko‘rinishi tanlash, uning parametrlarini baholash.

Egri chiziqning ko‘rinishini tanlashning har xil yo‘llari mavjud bo‘lib, uning grafigi bo‘yicha tenglamalari tanlab olinadi.

1) polinomlar: $\bar{y}_t = a_0 + a_1 t$ - birinchi darajali

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ - ikkinchi darajali

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ - uchinchi darajali

$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$ - k-chi darajali

2) har xil eksponentlar :

$\bar{y}_t = a_0 a_1^t$

$\bar{y}_t = a_0 a_1^{b_1 t + b_2 t^2}$

$\bar{y}_t = b + a_0 a_1^t$ modifitsilashgan eksponent.

3) mantiqiy egri chiziqlar:

$$\bar{y}_t = \frac{K}{1 + a_0 e^{-a_1 t}}$$

$$\bar{y}_t = \frac{K}{1 + 10^{a_0 + a_1 t}}$$

Bu yerda *ye*- natural logarifm asosi

4) Gompers egri chizigi:

$$\overline{y}_t = k a_0^{a_1^t}$$

Egri chiziqli aniqlashning boshqa yo‘li birinchi, ikkinchi va x.k. darajalar ayirmasini topishdan iboratdir ya’ni:

$$\Delta_{t^1} = y_t - y_{t-1}, \quad \Delta_{t^2} = \Delta_{t^1} - \Delta^1_{t-1}, \quad \Delta_{t^3} = \Delta_{t^2} - \Delta^2_{t-1}$$

Bu jarayon ayirmalar bir-biriga tenglashguncha davom etadi.

O‘rtacha absolyut o‘sish bo‘yicha ekstrapolyatsiya. Prognoz iqtisodiy rivojlanish variantlarini avvalgi rivojlanish omillari va yo‘nalishlari prognoz qilinish davrida ham saqlanib qoladi degan gipoteza kelib chiqib aniqlaydi. Bunday gipoteza qilishga iqtisodiy holat va jarayonlarning yetarlicha inertligi sabab bo‘ladi.

Dinamik qatorlarning ekstrapolyatsiyasi asosida prognoz qilish har qanday statistik prognozlashlar singari erishilishi lozim bo‘lgan aniq maqsadga yo‘naltirilgan yoki intervalli bo‘lishi mumkin.

Ekstrapolyatsiyani umumiy holda quyidagi funksiya qiymatini aniqlash deb qarash mumkin.

$$y_{t+l} = f(y_i, l, a_j)$$

bu yerda y_{t+l}- dinamik qatorning prognoz qilinadigan qiymati;

l - oldindan aytilishi lozim bo‘lgan davr;

y_i- ekstrapolyatsiyaga asos qilib olingan qatorlar darajasi;

a_j- trend tenglamalari parametrlari.

Bir o‘lchamli dinamik qatorlar ekstrapolyatsiyalashning eng oddiy usuli shu qatorlarning o‘rta harakteristikasini qo‘llash hisoblanadi:

- o‘rtacha darajalar, o‘rta absolyut o‘sish va o‘sishning o‘rtacha tezligi.

Qatorlarning o‘rta darajasi asosida ijtimoiy-iqtisodiy holatlarni ekstrapolyatsiyalashda prognoz qilinuvchi daraja qatorlar darajasining o‘rta qiymatiga teng bo‘ladi:

$$y'_{t+l} = \overline{y}$$

Bu holda ekstrapolyatsiya prognostik aniq bahoni beradi. Shunga qaramasdan berilgan baholarning amaldagi ma’lumotlar qiymatlari bilan aniq to‘g‘ri kelishi kamdan-kam hollarda bo‘ladi. Shuning uchun prognoz natijalari ma’lum intervalda berilishi kerak va bu interval

$$y_{t+1} \pm t_\alpha S_{\bar{y}}$$

bo‘yicha aniqlanadi.

Bunda t_α- Styudentning $t$mezoni qiymati

$S_{\bar{y}}$ - o‘rtacha kvadrat xatolik va u $S_{\bar{y}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ yordamida aniqlanadi.

O‘rtacha absolyut o‘sish bo‘yicha ekstrapolyatsiya. Agar rivojlanish yo‘nalishi chiziqli deb qabul qilinsa, ekstrapolyatsiya o‘rtacha absolyut o‘sish bo‘yicha amalga oshiriladi.

$$\sigma^2_{\text{кол}} \le \rho^2 \qquad \rho^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum \Delta_i}{n}$$

bu yerda $\sigma^2_{\text{кол}}$ - dispersiya qoldig‘i

$\sum \Delta_i$ - ning boshlang‘ich va oxirgi qiymatlari oralig‘idagi o‘sish miqdori

Bizni kiziqtirgan y'_{t+1} ning prognoz qiymatlarini topish uchun absolyut o‘sish $\overline{\Delta}$ ni aniqlash lozim. Keyin y_i ning ekstrapolyatsiyalashga asos qilib olingan dinamik qator darajalarini aniqlab olib ekstrapolyatsiya formulasini quyidagicha yozamiz.

$$y_{t+1} = y_i + \overline{\Delta t},$$

t- oldindan aniqlanish davri.

O‘rta o‘sish tezligi bo‘yicha ekstrapolyatsiya dinamik qatorlar ko‘rsatkichni egri chiziq yo‘nalishida bo‘ladi degan xulosaga asoslanadi. Bunda prognoz qilinadigan qator quyidagicha aniqlanadi:

$$y'_{t+1} = y_i \overline{T}_p^{\,t}$$

$\overline{T}_p$- o‘rta geometrik formula yordamida hisoblangan o‘sishning o‘rtacha tezligi.

Nazorat uchun savollar

1. Ekonometrik modellardan prognozlashda qanday foydalanish mumkin?
2. Bashoratlashning ekstrapolyatsiya usuliga ta’rif bering.

3. O‘rtacha absolyut o‘sish bo‘yicha ekstropolyatsiya nima?

4. Ishlab chiqarish funksiyalarini bashorat modellarida qo‘llash yo‘llari qanday?

5. Trend deganida nimani tushunasiz?

Asosiy adabiyotlar

1. K. Sydsaeter, P. Hammond, A. Strom. Essential mathematics for economic analysis (fourth edition). Harlow, England/Pearson Education Limited 2012.-766p.

2. Begmatov A.B. Oliy matematika. O‘quv qo‘llanma. Samarqand. SamISI. 2012. 272 b.

3. Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко . Эконометрика. Москва 2008г.327с.

4. Н.И.Шанченко “Лекции по Эконометрики” учебное пособие, Ульяновск 2008г. 140с.

5. Кремер Н.Ш. Эконометрика: Учебник. – М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2008. –562 с.

6. Juraev T.J., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika
asoslari. Darslik. T. O‘zbekiston, 1999, 290 bet.

7. Высшая математика для экономистов. Учебник. 2-е изд. / Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2003. – 471 стр.

8. Begmatov A.B., Qarshiboyev X. Q. Oliy matematika. Amaliy mashg‘ulotlar uchun uslubiy qo‘llanma. Samarqand. SamISI. 2007. 236 b.

9. В.Е. ГМУРМАН «Теория вероятностей и математическая статистика» Москва. 1977 г, 2006 г.

10. Кремер Н.Ш. и др. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрике. Учебное пособие. –М.: ИД, Юрайт, 2010. -646 стр.

11. Абдуллаев О.М., Ходиев Б.Ю., Ишназаров А.И. Эконометрика. Учебник. –Т.: Фан ва технология. 2007. – 612 с.

12. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник. – М. ЮНИТИ, 2007. – 345 с.

Qo‘shimcha adabiyotlar

1. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатьий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Макамасининг 2016 йил якунлари ва 2017

йил истиқболларига бағишланган мажлисидаги Ўзбекистон Республикаси Президентининг нутқи. // Халқ сўзи газетаси. 2017 йил 16 январь, №11

2. 2017-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналишлари бўйича ҲАРАКАТЛАР СТРАТЕГИЯСИ.

3. Бегматов А.Б., Қаршибоев Х. Қ. Олий математика. Амалий машғулотлар учун услубий қўлланма. Самарқанд. СамИСИ. 2007. 236 б.

4. Соатов Ё.У. Олий математика. 1,2 жилд. - Т: Ўқитувчи, 1992, 1994.

5. Абдалимов Б.А. Олий математика – Т: Ўқитувчи, 1994 й.

6. Азларов Т., Мансуров Қ. Математик анализ. 1,2-қисм. Т.: Ўқитувчи. 1992,1994.

7. Жураев Т.Ж. ва бош. Олий математика асослари. 1,2 жилд-Т: Ўзбекистон. 1999.

8. Соатов Ё.У. Олий математика. 3 жилд. - Т: Ўқитувчи, 1996.

9. Насритдинов Г., Эконометрика 1. Ўқув қўлланма. –Тошкент: Иқтисод-Молия, 2008. – 252 б.

10. П.Э.Данко, А.Г.Попов, Т.Й.Коживникова Олий математикадан мисол ва масалалар Тошкент 2007.

11. N.T.TOSHOV «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan ma’ruzalar matni». Samarqand, 2008 y.

12. Azlarov T., Abdushukurov A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma . -T.:TMU. 2009. -127bet.

M U N D A R I J A

X.Q.QARSHIBOYEV, Sh.A.DJALILOV,
B.I.ASHUROV

EKONOMETRIKA

O‘quv qo‘llanma

Muharrir Z.Bozorova
Badiiy muharrir K.Boyxo‘jayev
Kompyuterda sahifalovchi K.Boyxo‘jayev

Nashr. lits. AI № 305.
Bosishga ruxsat 20.09.2020-yilda berildi.
Bichimi 60x84 1/16. Ofset qog‘ozi №2.
“Times New Roman” garniturasi.
Shartli b.t. 28,1. Nashr hisob t. 29,2.
Adadi 50 dona. 10-buyurtma.

«IQTISOD-MOLIYA» nashriyoti
100000, Toshkent, Amir Temur, 60 «A».

«DAVR MATBUOT SAVDO» MChJ bosmaxonasida chop etildi.
100198, Toshkent, Qo‘yliq, 4-mavze, 46.