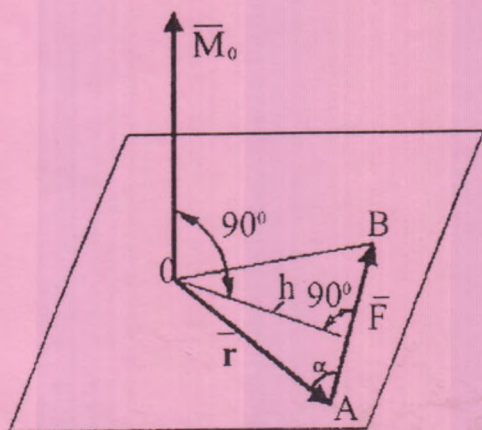


М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА



М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ

МЕХАНИКА

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ
ВАЗИРЛИГИ ТОМОНИДАН ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИНИНГ БАРЧА
ЙЎНАЛИШДАГИ БАКАЛАВРЛАР УЧУН ЎҚУВ ҚўЛЛАНМА
СИФАТИДА ТАВСИЯ ЭТГАН

Тошкент,
“Истиқдол” - 2004

53
M-88

Ушбу қўлланма Бухоро озиқ-овқат ва енгил саноат технологияси институтининг услубий кенгашида (8-сонли баёни, 27.03.2003 йил) ва Олий таълим вазирлигининг (43-сонли баёни, 26.03.2004 йил) Қарори асосида нашрга тавсия этилган. Қўлланма Олий ўқув юр்தларининг профессионал таълим йўналишида ўқиётган бакалаврларга мўлжалланган.

Тақризчилар:

Тошкент Давлат Техника Университети,
«Назарий механика ва машина деталлари»,
кафедраси мудир, техника фанлари доктори,
профессор Ш. А. Шообидов,
Бухоро Давлат Университети техника
фанлари доктори, профессор З. Жумаев.

Масъул муҳаррир: доц. З. Х. Ғайбуллаев.

Саҳифаловчи:

Б. Ахмедов

Ўқув қўлланма статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси баён этилган.

Китобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунилари билан бирга муҳандислик фаолиятида учрайдиган бошқа масалалар ҳам ёритилган.

Ўқув қўлланма олий ўқув юр்தлари барча йўналишидаги бакалаврлар учун мўлжалланган. Шунингдек бу қўлланмадан касб-хунар коллежларининг талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

В учебном пособии «Теоретической механики» изложены основные разделы статики, кинематики и динамики точки и системы.

В книге наряду с изложением основных понятий и законов теоретической механики найдены свои отражения некоторые инженерные вопросы встречающиеся в практике.

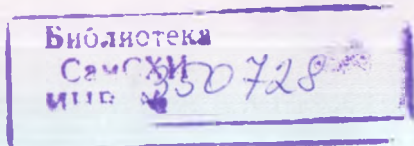
Учебная пособия предназначена для студентов высших учебных заведений в при подготовке бакалавриатов. Пособий могут пользоваться и студенты профессиональных коллежей.

In educational the manual of "Theoretical mechanics" the basic static, kinematics and dynamics of a point and system are stated.

In the book alongside with a statement of the basic concepts and laws of theoretical mechanics some engineering questions meeting in practice have found their reflections.

Educational manual is intended for students of high educational institutions in by preparation of bachelor degrees. Students of professional colleges can use manual.

© "Истиқлол" нашриёти, 2004 й.



К И Р И Ш

Хар бир фан асосларини чуқур ўрганиш келажак тараққиётини илмий кўз билан кўра билиш ўқувчиларга ўргатиш жамиятининг тез сураатлар билан ривожланишига йўл очади. Академик М. Т. Уразбоев «Олим келажакни ўз руҳий дунёсининг энг баланд чўккисидан туриб кўра олиши ва атрофдагиларнинг шубҳаланмасдан етаклаши билан бошқалардан фарқ қилиши керак»-деган эди. Бу эса келажакда ижодкорш ахсларни қўлайтиради, технологияга айланиб, меҳнатни унумдор бўлишига имконият яратади. Меҳнат самарадорлиги, маҳсулот сифати ва халқнинг фаровонлиги фан ривожидан боғлиқдир. Ҳозирги замон фан ва техникасининг тараққиёти умумтехника фанларининг асосларидан бири бўлган назарий механикани пухта ўрганишни талаб қилади. Назарий механика техника олий ўқув юртларида ўтилади ган умумий фанлардан биридир. Назарий механика фанининг қонуниари материаллар қаршилиги, қурилиш механикаси, машина ва механизмлар назарияси, гидравлика, аэродинамика каби фанлар учун хилма-хил мураккаб техника масалаларини назарий база сифатида қўлланилади. Назарий механика фани бўлажак мутахассисларга машиналарни лойиҳалаш ва автоматлаштириш ўрганади ган муҳандислик фани сифатида ҳам зарур бўлган билимни беради. Фан-техника тараққиёти билан бирга назарий механика бўлажак мутахассисларда техникада қўлланилади ган жараёнлар моделини яшаш ва илмий хулосалар яратиш қobiliятини ривожлантиради. Техниканинг кейинги тараққиётлари асосида назарий механика фанини пухта ўрганган талабалар ЭҲМ ни тадбиқ этган ҳолда, мураккаб масалаларни ҳам еча олиши мумкин. Назарий механика фани моддий жишмларнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсири ва ҳаракатнинг умумий қонуниари ҳақидаги фандир. Табиий фанлар матери я ҳаракатини ва уларнинг хусусиятларини ўрганадилар. Табиий фанлардан бири бўлган назарий механика фани матери я ҳаракатларидан энг оддий сиҳи собланган механик ҳаракатни ўрганади. Шубилан билганга назарий механика жишмларнинг мувозанатини ҳамм ўрганади, зероки жишм мувозанати механик ҳаракатнинг хусусий ҳолидир.

Жисмларнинг вақт ўтиши билан фазода бири-бирига нисбатан силжишига механик ҳаракат деб аталади. Жисмларнинг бошқа бири жисмга нисбатан тинчлик ҳолати га мувозанат ҳолати дейилади. Механик ҳолатларни қандай нуктаи назардан қаралишига қараб, назарий механика уч қисмга бўлинади:

1. Статика 2. Кинематика 3. Динамика

Статика жисмларнинг мувозанати, уларга қўйилган кучларни қўшиш, айланириш ва таъсири жиҳатидан тенг бўлган эквивалент кучлар системаси билан алмаштириш масалаларини ўрганади.

Кинематикада жисмларнинг ҳаракатини геометрик нуктаи назардан ўрганади. Кинематикада жисмларга таъсир этувчи куч ва юkning массаси ҳисобга олимайди.

Динамика жисмлар ҳаракати ва шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучлар билан қандай ўрганилади.

Муаллифлар, Уқув қўлланма қўлёзмасини синчиқлаб ўқиб чиқиб, берган фойдали маслаҳатлари учун Тошкент Давлат Техника Университети катта ўқитувчиси Х. Ҳабибуллаевага миннатдорчилик билдирадилар.

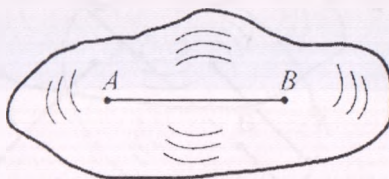
БИРИНЧИ БЎЛИМ

1-§. СТАТИКА. СТАТИКАНИНГ АСОСИИ ТУШУНЧАЛАРИ

Статиканинг асосии тушунчалари қушнатиладиган бўлади.

1. Абсолют қаттиқ жисм. 2. Куч.

Жисмнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа ҳар қандай кучлар таъсир қилганда ҳам ҳар доим ўзгармасдан қолса, бундай жисмларга абсолют қаттиқ жисмлар дейилади. Демак, статикада жисмларда бўладиган кичик деформация ҳисобга олинмайди (1-расм).



1-расм.

$$AB=l=const$$

Механикада жисмга таъсир этиб, унинг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатини ўзгартирувчи сабабга куч деб аталади.

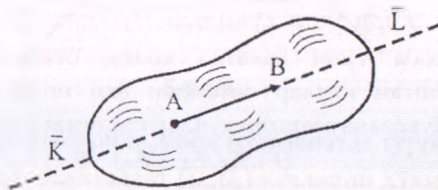
Кучнинг жисмга таъсири уч фактор билан тавсифланади:

1. Кучнинг миқдори; 2. Кучнинг йўналиши; 3. Куч қўйилган нуқта.

Куч - вектор катталиқ. Куч чизмада стрелкали тўғри чизиқ кесмаси шаклида тасвирланади.

Жисмнинг бевосита куч таъсир этилган нуқтаси куч қўйилган нуқта дейилади. Тинч ҳолатда турган жисмга таъсир этилган куч йўналиши кучнинг йўналиши дейилади. Кучнинг миқдорини ўлчаш учун уни куч бирлиги деб қабул қилинган катталиқ билан солиштирилади. Халқаро СИ системасида Ньютон (1н) қабул қилинганига қўра, кучни катта латин ҳарфлари билан белгилаб, ҳарф устида стрелка, яъни вектор қўйилади: $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$, $\vec{N}$, $\vec{S}$ ва бошқалар.

Жисмнинг бирор А нуқтасига $\vec{F}$ кучи қўйилган бўлсин (2-расм).



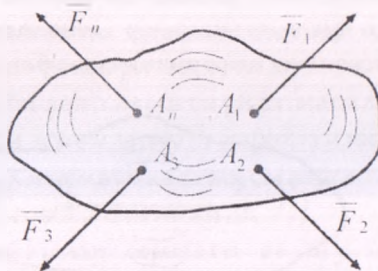
2-расм.

Бунда: AB кесманинг узунлиги куч миқдорини ифодалайди.
Стрелка $\vec{F}$ - куч йуналишини кўрсатади. A нукта куч қўйилган нукта.

Куч йўналган тўғри чизиққа кучнинг таъсир чизиги дейилади.

KL тўғри чизиқ $\vec{F}$ кучининг таъсир чизиги бўлади.

1. Агар жисмга бир нечта кучлар қўйилган бўлса бундай кучларга кучлар системаси дейилади.



3-расм.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ - жисмга кучлар системаси қўйилган. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ кучлар қўйилган нукталар.

2. Икки куч системаси жисмга бир хил таъсир кўрсатса, улар эквивалент кучлар системаси дейилади.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасининг жисмга кўрсатадиган таъсирини $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$ кучлар системаси кўрсатса, бундай икки куч системаси ўзаро эквивалент бўлади. Уларнинг эквивалентлиги қуйидагича ёзилади.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$$

3. Агар бирор кучлар системасининг жисмга кўрсатадиган таъсирини битта куч кўрсата олса, бундай кучга кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси дейилади. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини R билан белгиласак, у ҳолда:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \sim R$$

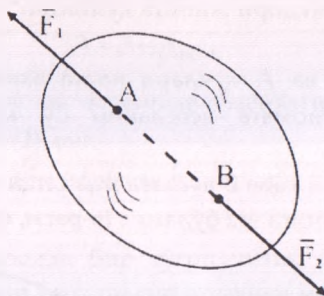
4. Тинч турган жисм унга қўйилган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси таъсирида ҳам тинч ҳолатда қолса, бундай кучлар системаси мувозанатланган кучлар системаси ёки нолга эквивалент система дейилади. Мувозанатланган кучлар системаси нолга эквивалентдир.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

2-§. СТАТИКАНИНГ АКСИОМАЛАРИ

Назарий механика фанининг статика қисми қундалиқ ҳаётда тасдиқланган қўнидаги аксиомаларга асосланади:

1-аксиома: Жисмга таъсир этаётган иккита куч миқдор жиҳатидан тенг ва бир қўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлса, жисм мувозанатда бўлади (4-рasm).

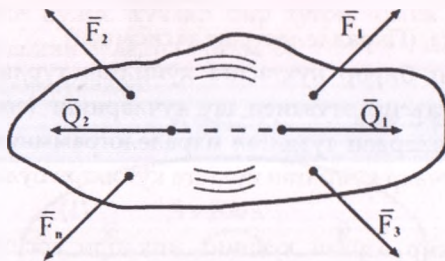


4-рasm.

Бунда $F_1 = F_2$, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$, кучларга ўзаро мувозанатлашган кучлар системаси ёки нолга эквивалент кучлар системаси дейилади.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$$

2-аксиома: Жисмга таъсир этаётган кучлар системасига ўзаро мувозанатлашувчи кучлар қўшилса ёки олинса кучлар системасининг жисмга қўрсададиган таъсири ўзгармайди (5-рasm).



5-рasm.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида жисм мувозанатда турган бўлсин.

Шу жисмга нолга эквивалент $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ кучларни қўямиз $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \sim 0$, бу ҳолатда билан жисмнинг мувозанати ўзгармайди.

Бу аксиомалардан қуйидаги натижа келиб чиқади:

ҳар қандай кучни таъсир чизиги бўйлаб бир нуқтадан иккинчи нуқтага йўналишини ўзгартирмай кўчириш мумкин. Бу билан кучнинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди.

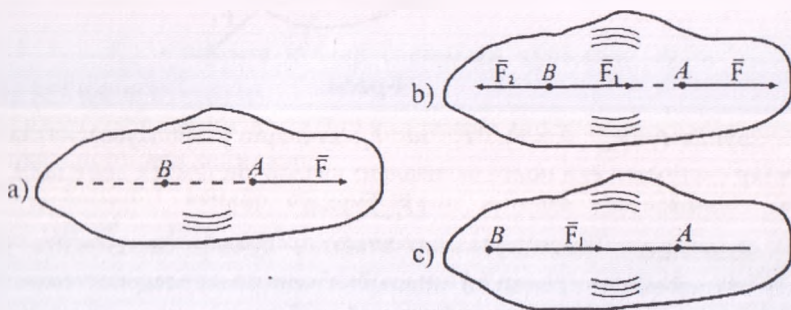
Исбот: Жисмининг A нуқтасига $\vec{F}$ кучи қўйилган бўлсин (6-расм, а). Бу кучни таъсир чизиги устидаги B нуқтага кўчириш лозим бўлсин.

Бунинг учун B нуқтага ўзаро мувозанатланган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни қўямиз, уларнинг миқдори жисмга қўйилган $\vec{F}$ кучнинг миқдорига тенг бўлиши шарт.

$$F_1 = F_2 = F$$

6-расмдаги $\vec{F}$ ва $\vec{F}_2$ кучлари полга эквивалент $(\vec{F}, \vec{F}_2) \sim 0$ бўлгани учун иккинчи аксиомага асосланиб бу кучларни жисмдан олиб ташлаймиз.

(6-расм, б) Натижада B нуқтага қўйилган берилган кучга геометрик тенг бўлган $\vec{F}_1 = \vec{F}$ кучига эга бўламиз (6-расм, с).



6-расм.

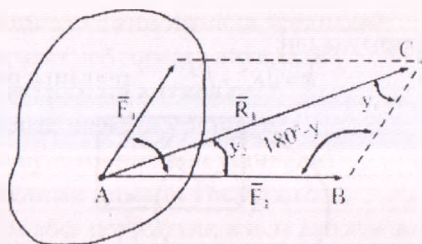
3-аксиома. (Параллелограм аксиомаси)

Жисмининг бирор нуқтасига қўйилган турли йўналишдаги икки кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, кучлардан тузилган паралелограмнинг диагонали бўйлаб йўналади ва кучлар қўйилган нуқтага қўйилган бўлади (7-расм).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1)$$

Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори косинуслар теоремасидан фойдаланиб топилади.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \varphi} \quad (2)$$



7-расм.

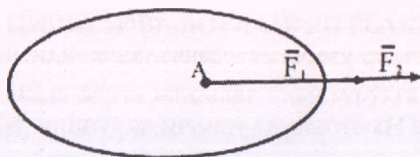
бунда φ берилган F_1 ва F_2 кучлар орасидаги бурчак.

1) Агар $\varphi=0$ бўлса (2) дан:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2 \quad (3)$$

$$R = F_1 + F_2$$

(3) - формула асосида бир тўғри чизик бўйлаб бир томонга йўналган иккита кучнинг тенг таъсир этувчиси миқдори аниқланади (7-расм, а).

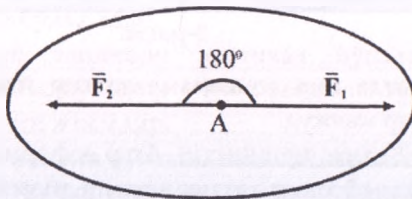


7-расм а.

2) Агар $\varphi=180^\circ$ бўлса, кучлар бир тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлади (7-расм, б).

У ҳолда (2) – формуладан:

$$R = F_1 - F_2 \quad \text{келиб чиқади.}$$

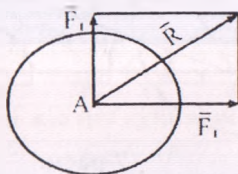


7-расм б.

3) Агар $\varphi=90^\circ$ бўлса, кучлар ўзаро перпендикуляр йўналган бўлади (7-расм, с).

У ҳолда (2) – формуладан:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad \text{тенглиги олинади.}$$



7-расм с.

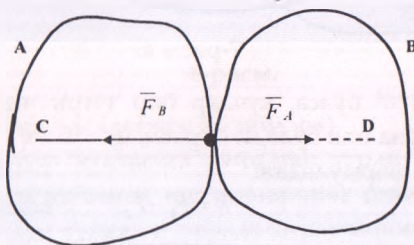
4-аксиома. Таъсир миқдори жиҳатидан ўзига тенг ва бир тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган ҳар қандай куч акс таъсирни вужудга келтиради.

А ва В жисмлар берилган бўлсин (8-расм). Агар А жисм В жисмга $\vec{F}_A$ куч билан таъсир қилса, худди шу вақтнинг ўзида В жисм А жисмга $\vec{F}_B$ куч билан таъсир қилади. $\vec{F}_A$ ва $\vec{F}_B$ кучлар миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

$\vec{F}_A$ ва $\vec{F}_B$ кучлар ўзаро мувозанатлашмайди, чунки улар бир жисмга қўйилмаган.

Бу аксиома Ньютоннинг учинчи қонунини ифодалайди.



8-расм.

Демак табиатда бир томонлама таъсир йўқ бўлиб ҳар қандай таъсирга акс таъсир мавжуд.

5-аксиома. (Котиш принципи). Агар деформацияланадиган жисм мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ жисмга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.

Масалан, эгилувчан сим мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ стерженга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Назарий механика фани нимани ўрганади?
2. Механик ҳаракат деб нимага айтилади?
3. Мувозанат деб нимага айтилади?
4. Статика бўлими нимани ўрганади?
5. Кинематика бўлими нимани ўрганади?
6. Динамика бўлими нимани ўрганади?
7. Қандай жисм абсолют қаттиқ жисм деб аталади?
8. Куч деб нимага айтилади ва куч қандай омиллар билан тавсифланади?
9. Кучлар системаси деб нимага айтилади?
10. Тенг таъсир этувчи куч деб қандай кучга айтилади?
11. Мувозанатловчи куч нима ва унинг тенг таъсир этувчи кучдан қандай фарқи бор?
12. Статиканинг аксиомаларини таърифланг?
13. Бир нуқтага қўйилган иккита кучни тенг таъсир этувчиси қандай аниқланади?

3-§. БОҒЛАНИШЛАР ВА БОҒЛАНИШ РЕАКЦИЯЛАРИ

Назарий механикада барча жисмлар икки гуруҳга ажралади.

1. Эркин жисмлар 2. Эркисиз жисмлар

Агар жисм фазода исталган томонга қараб ҳаракатлана олса, бундай жисмга эркин жисм деб аталади.

Масалан. Ҳавода учаётган самолёт, шар.

Агар жисмнинг бирор томонга қараб бўладиган ҳаракати чекланган бўлса, бундай жисмга эркинмас ёки боғланишдаги жисм дейилади. Жисмнинг ҳаракатини чекловчи тўсиққа боғланиш дейилади.

Масалан. Рельсда турган вагон, стол устидаги юк, ипга осилган юк ва шу кабилар мисол бўла олади.

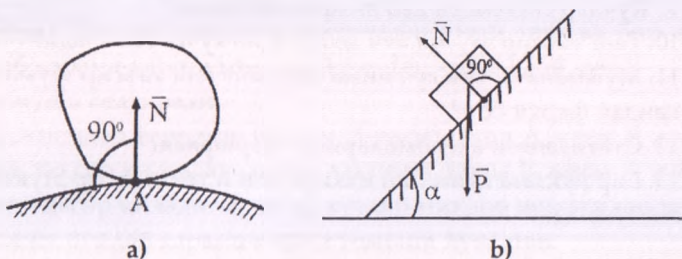
Рельсда турган вагоннинг вертикал йўналишдаги ҳаракати чекланган. Бунда рельслар вагон учун боғланиш вазифасини ўтайди, вагон эса боғланишдаги жисмдир.

Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини белгилловчи кучга боғланиш реакция кучи ёки реакция кучи дейилади. Боғланиш жисмни қайси томонга кўчишга йўл қўймаса, реакция кучи шу томонга қарама-қарши йўналади. Статикада масала ечишда боғланиш реакциясининг йўналишини тўғри топиш катта аҳамиятга эга. Шу сабабли

боғланишларнинг асосий турларида реакция кучлари қандай йўналганлигини кўриб чиқамиз.

1. Силлиқ қўзғалмас текислик. Ишқаланишнинг эътиборга олинмайдиган даражада силлиқ бўлган сирт одатда силлиқ сирт деб ҳисобланади. Жисм силлиқ қўзғалмас текислик устида мувозанатда гурса, ёки шу текисликка нисбатан ҳаракатланса, силлиқ қўзғалмас текислик жисмининг текисликка перпендикуляр бўлган йўналишида ҳаракат қилишига тўсқинлик кўрсатади.

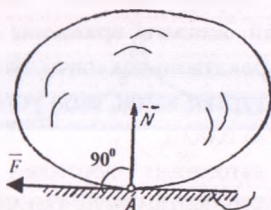
Силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи $\vec{N}$ текисликка перпендикуляр бўлиб, жисм қайси томонга ҳаракат қила олмаса, шунга тескари йўналган бўлади (9-расм а, б).



9-расм.

Бунда $\vec{N}$ - силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи ёки нормал реакция кучи деб аталади, $\vec{P}$ – жисм оғирлиги.

Агар сирт силлиқ бўлмаса, А нуқтада нормал реакция кучидан ташқари уринма реакция кучи $\vec{F}$ ҳам бўлади (10-расм). Бу $\vec{F}$ кучга ишқаланиш кучи деб аталади.

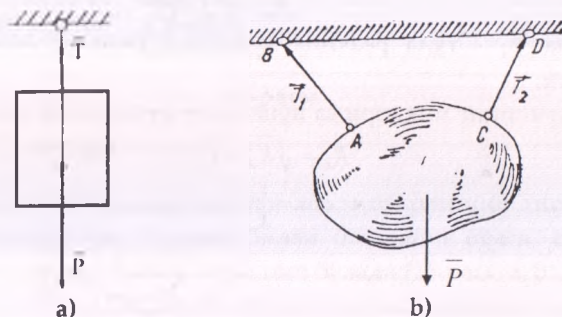


10-расм.

Бунда $\vec{N}$ - нормал реакция кучи, $\vec{F}$ - ишқаланиш кучи.

2. Эгилувчан ёки эластик жисмлар. Жисмлар чўзилмайдиган ип, арқон, трос, занжир, қайишлар воситасида осилган бўлса, уларда ҳосил

буладиган реакция кучлари мос равишда эгилувчан жисмлар бўйлаб йўналиш бўлади (11-расм а,б). Эгилувчан жисмларда ҳосил буладиган реакция кучлари $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ билан белгиланади ва таранглик кучи деб аталади.



11-расм.

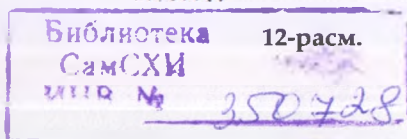
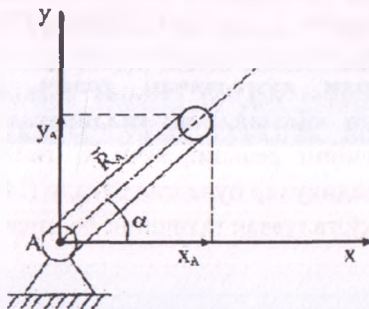
Бунда $\vec{P}$ ишга осилган юкниги оғирлиги.

Реакция кучининг миқдор ва йўналиши жисмга таъсир қилувчи кучга боғлиқ бўлади.

3. Шарнирли қўзғалмас таянч. Бу таянч жисмнинг илгарилама ҳаракат қилишига тўсқинлик қилади, жисм шарнир атрофида айланади.

Иккита жисмнинг ўзаро бирлашган жойига шарнир дейилади. Шарнир атрофида жисмларнинг бири иккинчисига нисбатан эркин айланади. Болт – шарнирли қўзғалмас таянчга мисол бўла олади.

Шарнирли қўзғалмас таянчнинг белгиси (12-расмда) кўрсатилган.



Шарнирли қўзғалмас таянчдаги реакция кучининг миқдори ва йўналиши номатлум бўлган масалани ечилишда, шарнирли қўзғалмас таянчнинг реакция кучини координата ўқлари бўйлаб йўналган иккита ташкил этувчиларга ажратиш керак (12-расм).

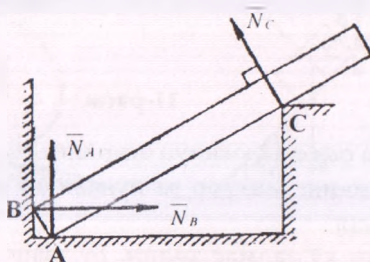
$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$$

Бунда R_A - тула реакция кучи, X_A, Y_A лар, R_A кучининг ташкил этувчилари.

R_A кучининг миқдори ва йўналиши қуйидагига тенг.

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_A}{X_A} \quad (6)$$

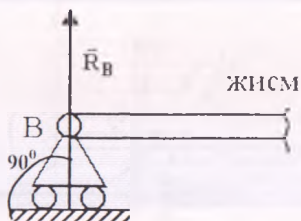


13-расм.

Балка А нуктада силлиқ полга, В нуктада вертикал деворга ва С нуктада икки ёқли бурчак қиррасига таянади деб фараз қилсак (13 – расм). Пол ва вертикал деворнинг $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ реакция кучлари, А ва В нукталарда мос равишда пол ва деворга ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади. Икки ёқли бурчақдан ташкил топган қирранинг реакция кучи $\vec{N}_C$ эса С нуктада балкага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

4. Шарнирли қўзғалувчан таянч. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг пастига юмалайдиган гилдираклар қўйилади. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг реакция кучи $\vec{R}_B$ гилдирак ҳаракат қилаётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади (14-расм).

Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг белгиси;

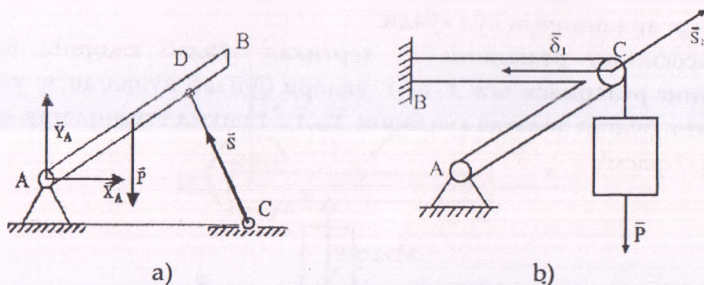


14-расм.

Бунда $\vec{R}_B$ - реакция кучи.

5. Мувозанати текширилаётган жисм оғирлигини ҳисобга олмаса ҳам бўладиган қаттиқ стержен билан боғланган бўлса, стерженнинг реакция кучи стержен бўйлаб йўналган бўлади (15-расм а, б).

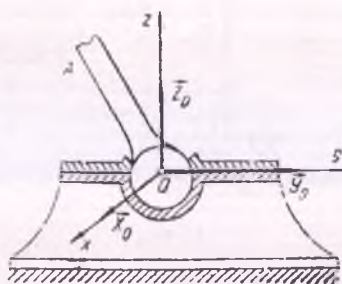
Бунда $\vec{s}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ - CD, BC ва AC стерженларнинг реакция кучлари.



15-расм.

6. Жисм сферик шарнир воситаси ёрдамида боғланган бўлса (16-расм), бу шарнир ўз маркази 0 дан ўтадиган ҳар қандай ўқ атрофида жисмни айланишига тўсқинлик қилмайди. Сферик шарнирнинг реакция кучи 0 нуқтасидан ўтади, лекин қайси томонга йўналганлиги номаълум бўлган, масалани ечишда бундай реакция кучини танлаб олинган координата ўқлари бўйлаб йўналган ташкил этувчиларга ажратиш керак.

350728

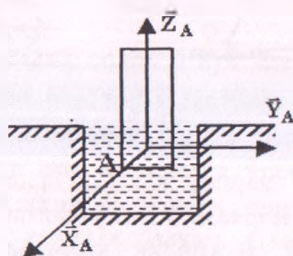


16-расм.

Бунда $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ реакция кучлари.

7. Ўқлар қўзғалмас таянчга маҳкамланган. Асос устунларни мустаҳкамлаш учун хизмат қилади ва жисмнинг фақат устун ўқи атрофида айланишига йўл қўяди.

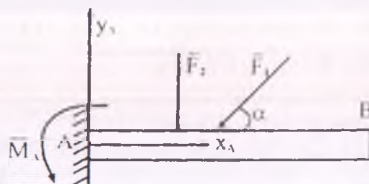
Асосининг реакцияси $\bar{Z}_A$ вертикал бўйлаб юқорига йўналган, деворнинг реакцияси эса $\bar{X}$ ва $\bar{Y}$ ўқлари бўйлаб йўналган ва устуннинг ўқига тик бўлган ҳолатда кучларни $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ ташкил этувчиларга ажратиш керак (17-расм).



17-расм.

Бунда $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ - реакция кучлари.

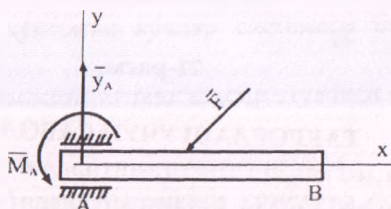
8. Бир учи деворга қисиб маҳкамланган балка. Агар (18-расм) АВ балканинг А учи деворга қисиб маҳкамланган бўлса, А нуқтадаги боғланиш реакциясининг иккита тузувчисидан ташқари, балканинг А нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи реакция моменти M_A ҳам мавжуд бўлади.



18-расм.

Бунда Y_A, Y_A' реакция кучлари, M_A реактив моменти.

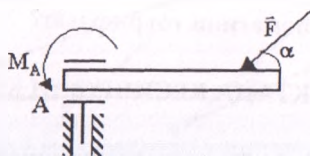
9. Бир учи горизонтал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб маҳкамланган балка. 19-расмда кўрсатилган АВ балканини А учи горизонтал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб маҳкамланган бўлса, бундай боғланиш реакцияси силжиш текислигига перпендикуляр бўлган $\bar{Y}_A$ реакция кучидан ҳамда балканинг А нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи реакция моменти M_A дан иборат бўлади.



19-расм.

Y_A - реакция кучи, M_A - реакция моменти

10. Бир учи горизонтал ҳам вертикал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб маҳкамланган балка. 20-расмда кўрсатилган АВ балканинг А учи ҳам горизонтал, ҳам вертикал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб маҳкамланган. Бу ҳолда А нуқтада фақат балканинг А нуқта атрофида айланишига қаршилик қилувчи M_A реакция моменти мавжуд бўлади.

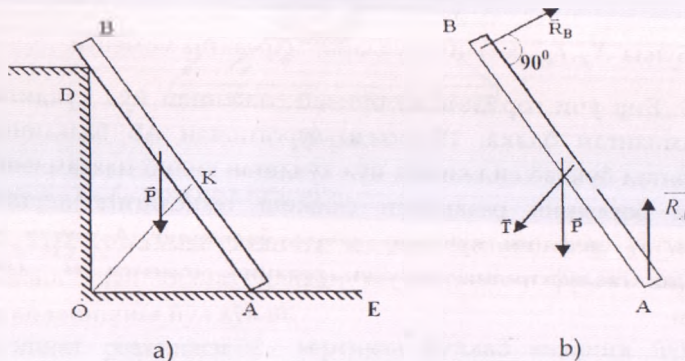


20-расм.

6-аксиома. Боғланишда бўлган жисмни эркин жисм деб қараш учун боғланишни реакция кучи билан алмаштириш керак.

Бу аксиома ёрдамида боғланишдаги жисмларнинг мувозанатини текширилади.

Мисол: АВ балка учун Р оғирлик (21-расм, а) ОЕ силлиқ текислик, D таянч ва ОК трос орасидаги боғланиш хизмат қилади. 21-расм, б даги балка эркин бўлади.



21-расм.

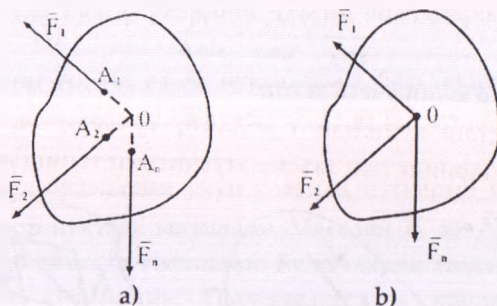
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Эркин жисм деб қандай жисмга айтилади?
2. Эрксиз жисм деб қандай жисмга айтилади?
3. Реакция кучи нима?
4. Боғланишларнинг асосий турларини айтинг?
5. Силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи қандай йўналган?
6. Эгилувчан ёки эластик жисмларнинг реакция кучи қандай йўналган?
7. Шарнирли қўзғалмас таянчнинг реакция кучи қандай йўналган?
8. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг реакция кучи қандай йўналган?
9. Стерженли боғланиш ва сферик шарнирнинг реакция кучи қандай йўналган?
10. Боғланиш аксиомасини таърифланг?

4-§. БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучларга бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси дейилади.

Масалан, жисмининг $A_1, A_2, \dots, A_n$ нукталарига таъсир чизиқлари 0 нуктада кесишадиган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлари таъсир этса, бу кучлар бир нуктада кесишувчи кучлар системасини ташкил қилади. (22-расм, а ва б).



22-расм.

Берилган кучларни уларнинг таъсир чизиқлари бўйлаб қўчириш мумкин бўлганлиги учун, бир нуктада кесишувчи кучлар системасини доим бир нуктага қўйилган кучлар системаси билан алмаштириш мумкин (22-расм, б).

Бу кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси қуйидаги икки усул билан аниқланади.

1. Геометрик усул

2. Аналитик усул

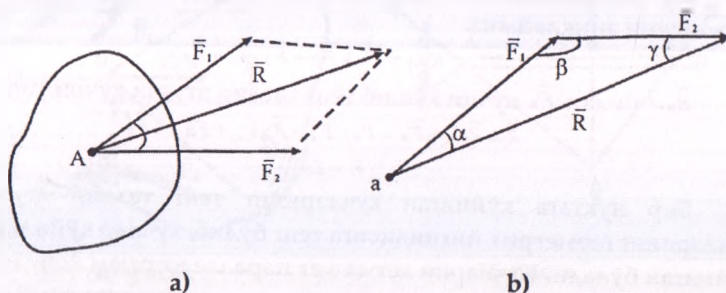
Бир нуктада кесишувчи кучларни геометрик усулда қўшиш иккига бўлинади.

Параллелограмм усули ва кучлар купбурчаги қуриш усули.

а) Параллелограмм усули

Параллелограмм аксиомасига асосан.

$\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ га тенг бўлиб модули эса косинуслар теоремасига асосан $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}$ га тенг бўлади, бунда α - $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар орасидаги бурчак (23-расм).



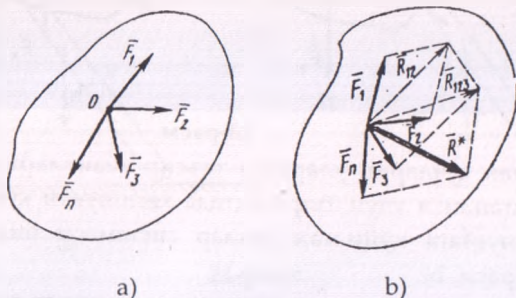
23-расм.

Тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ кучининг $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар билан таъкил қилган α ва γ бурчаклари синуслар теоремасига кўра 23-расм, б дан аниқланади.

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \quad (7)$$

б) Кучлар кўпбурчаги усули.

Бир нуктага қўйилган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлари берилган бўлсин (24-расм) Шу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш лозим бўлсин.



24-расм.

Тенг таъсир этувчи кучни топиш учун параллелограмм аксиомасига асосан $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни қўшиб, уларни тенг таъсир этувчи $\vec{R}_1$ кучи билан алмаштирамиз.

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Бу усулга асосан $\vec{R}_1$ куч билан $\vec{F}_3$ кучни қўшиб $\vec{R}_2$ кучни ҳосил қиламиз.

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

ва ҳоказо.

Шу усул билан n-1 гача бўлган кучларни қўшиб, тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

$$\vec{R}_{n-1} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1}$$

$\vec{R}_{n-1}$ билан $\vec{F}_n$ кучни қўшиб тенг таъсир этувчи кучни топамиз.

$$\vec{R} = \vec{R}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n$$

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F} \quad (8)$$

Бир нуктага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, кучлар қўйилган нуктага қўйилган бўлади. Кучларни кетма-кет параллелограмм қондаси асосида қўшиш, берилган кучлардан куч кўпбурчагини қуришга олиб келади.

5-§. УЧ КУЧ МУВОЗНАТИГА ОИД ТЕОРЕМА

Теорема: Бир текисликда жойлашган ва узаро параллел бўлмаган учта куч мувозанатда бўлса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.

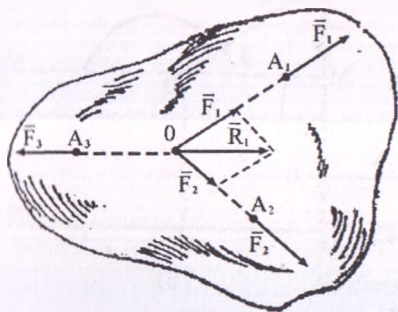
Исбот. Жисмининг A_1 , A_2 ва A_3 нуқталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган мувозанатлашувчи F_1, F_2 ва F_3 кучлари қўйилган бўлсин (25-рasm).

Кучлар параллел бўлмагани учун улардан ихтиёрий икkitасининг таъсир чизиги бирор нуқтада кесишади. Масалан $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларнинг таъсир чизиқлари O нуқтада кесишади. Бу кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб O нуқтага кўчираемиз. Параллелограмм қoидасига асосан $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ кучларни қўшамиз.

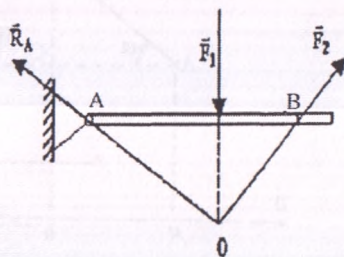
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$\vec{R}$ кучининг таъсир чизиги $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларининг таъсир чизиқлари кесилган нуқтадан ўтади. Шундай қилиб жисмга $\vec{R}$ ва $\vec{F}_3$ кучлари таъсир қилади. Иккита куч қўйилган жисм мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг миқдорлари тенг бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак. Демак, $\vec{F}_3$ кучнинг таъсир чизиги O нуқтадан ўтади ёки учта кучнинг таъсир чизиги бир нуқтада кесишади. Бу теорема ёрдамида реакция кучининг йўналиши аниқланади.

Масалан. АВ стержен $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ кучлар ва $\vec{R}_1$ реакция кучи таъсирида мувозанатда бўлса, $\vec{R}_1$ кучининг таъсир чизиги $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар таъсир чизиги кесишган нуқтадан ўтади (26-рasm).



25-рasm.



26-рasm.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай кучлар системасига кесишувчи кучлар системаси дейилади?
2. Бир нуқтада кесишувчи иккита кучнинг тенг таъсир этувчисининг модули қандай аниқланади?
3. Кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисининг йўналиши қандай аниқланади?
4. Тенг таъсир этувчи куч деб нимага айтилади?
5. Мувозанатловчи куч деб нимага айтилади?
6. Параллелограмм усулини тушунтиринг?
7. Куч қўлбурчаги қондаси нимадан иборат?
8. Куч қўлбурчаги усулини тушунтиринг?
9. Уч куч теоремасини айтинг?
10. Бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг геометрик кўринишда мувозанат шарти қандай таърифланади?

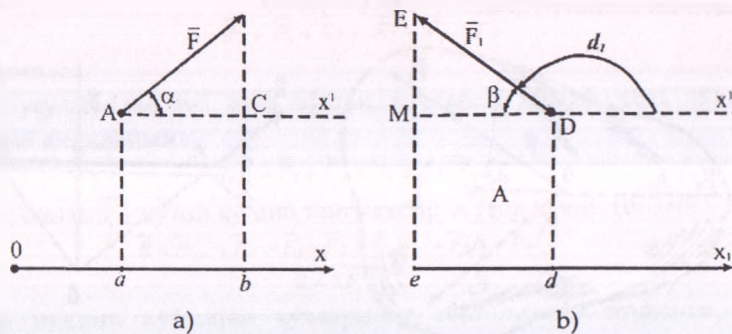
6-§. КУЧНИНГ ЎҚДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Статика масалаларини аналитик йўл билан ечиш усулига ўтамыз. Бу усул кучнинг ўқдаги проекцияси тушунчасига асосланган.

$\vec{F}$ кучи ва Ox ўқи берилган бўлсин (27-расм, а ва б).

Кучни шу ўқдаги проекциясини топамиз. Бунинг учун шу куч чизигининг икки учидан Ox ўқиға перпендикулярлар туширамыз.

Бунда ab , ed - $\vec{F}$ ва $\vec{F}_1$ кучнинг проекцияларидир.



27-расм.

Кучни ўқдаги проекциясини F_x ёки x билан белгилаймиз.

$ab=x$, $cd = x_1$ ва x_1 ларни тоғини учун A ва D нукталардан Ox ўқига параллел қилиб x' ўқига шунга ўтказамиз, у ҳолда $\triangle ABC$ ва $\triangle DEM$ түргі бурчакли учбурчаклар ҳосил бўлади.

Бу учбурчаклардан фойдаланамиз. Кучнинг йўналиши бир хил бўлган иккига параллел ўқдаги проекциялар узаро тенг.

$$X=AC=ab, X_1=-DM=-dc$$

$$\frac{AC}{F} = \cos \alpha \quad \text{бундан} \quad AC = F \cos \alpha$$

$$\frac{DM}{F_1} = \cos \beta \quad DM = F_1 \cos \beta = F_1 \cos(180^\circ - \alpha_1) = -F \cos \alpha_1$$

$$F_x = X = F \cos \alpha \quad F_{x_1} = X_1 = F_1 \cos \alpha_1 \quad (9)$$

(9) - формула билан кучнинг ўқдаги проекцияси аниқланади..

Кучнинг бирор ўқдаги проекцияси куч миқдори билан кучнинг шу ўқ мусбат йўналиши орасида ташкил қилган бурчакли косинусининг қунайтмасига тенг.

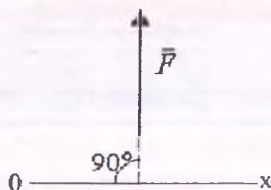
Проекциянинг ишораси кучнинг йўналишига қараб олинади.

Масалан 27-расм, а да проекция мусбат, 27-расм, б да эса манфийдир.

Демак куч ўқнинг мусбат томонига қараб йўналса кучни проекцияси мусбат, акс ҳолда манфий.

Кучнинг таъсир чизиғи билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак ўткир бўлса кучнинг проекцияси мусбат, агар бу бурчак ўтмас бўлса манфий ишорада олинади.

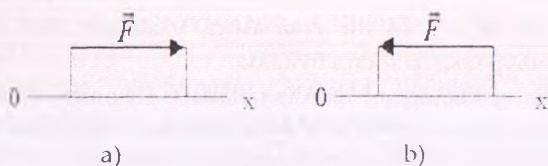
1. Агар куч бирор ўқга перпендикуляр бўлса, $\alpha=90^\circ$ кучнинг шу ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади (28-расм).



28-расм.

$$F_x = F \cos 90^\circ = 0, F_{x_1} = 0$$

2. Агар куч ўққа параллел йўналган бўлса, $\alpha=0$, $\alpha=180^\circ$ ёки ўқни устида жойлашган бўлса, кучни ўқдаги проекцияси куч миқдorigа тенг бўлади (29 – расм, а ва б).



29 – расм.

$$F_x = F \cos 0^\circ = F \cdot 1 = F$$

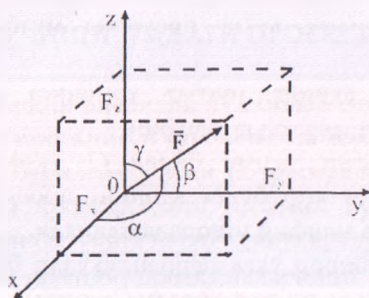
$$F_x = F$$

$$F = F_1 \cos 180^\circ = -F_1$$

$$F_x = -F_1$$

Кучининг модули гуъри бурчакли параллелипеднинг диагоналина (30-расм), бу параллелипеднинг қирралари эса кучининг координата ўқларидаги проекцияларига тенг бўлади.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (10)$$



30-расм.

F кучининг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида аниқланади.

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}; \quad (11)$$

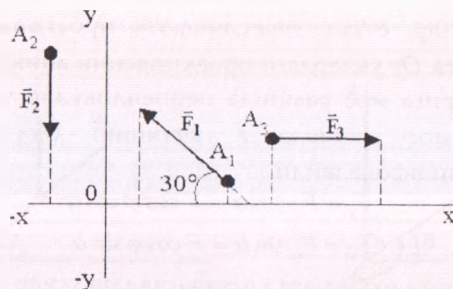
Бунда α, β, γ - F кучи билан x, y, z ўқлари орасидаги бурчак.

МАСАЛА № 4.

Берилган:

$$F_1 = 6 \text{ Н}, \quad F_2 = 8 \text{ Н}, \quad F_3 = 10 \text{ Н}$$

Бу кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари топилин. (31-расм).



31-расм.

Ечиш. 1) F_1 - кучининг проекциялари. $X_1 = -F_1 \cos 30^\circ = -6 \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \text{ Н}$

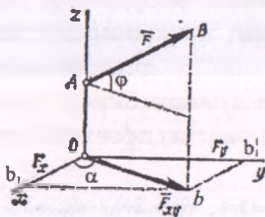
$$Y_1 = F_1 \sin 30^\circ = 6 \frac{1}{2} = 3 \text{ Н}$$

2) F_2 кучининг проекциялари; $X_2 = 0$ $Y_2 = -F_2 = -8 \text{ Н}$

3) F_3 кучининг проекциялари; $X_3 = F_3 = 10 \text{ Н}$ $Y_3 = 0$.

7-§. КУЧНИНГ ТЕКИСЛИКДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

$Oxyz$ координаталар системасида A нуқтага қўйилган $\vec{F}$ кучи берилган бўлсин (31-расм, а).



31-расм, а.

$\vec{F}$ кучини Oxy текислиқдаги проекциясини аниқлаймиз. Бунинг учун A ва B нуқталардан Oxy текислиқга перпендикуляр AO ва Bb чизиқлар ўтказамиз. У ҳолда $\vec{F}_{xy} = \vec{Ob}$ вектори ҳосил бўлади. $\vec{F}_{xy} = \vec{Ob}$ $\vec{F}$ кучининг Oxy текислиқдаги проекциясини ифодалайди.

$\vec{F}$ куч текислиқдаги проекциясининг миқдори қуйидагига тенг.

$$F_{xy} = F \cos \varphi$$

Бунда φ $\vec{F}$ кучи билан унинг проекцияси орасидаги бурчак. Фазода жойлашган кучни x, y ўқлардаги проекциясини аниқлаш учун аввал

кучини шу ўқлар ётган тексликдаги проекцияси топилади. F_{Ox} векторининг Ox ва Oy ўқлардаги проекциясини аниқлаш учун b нуқтадан Ox ва Oy ўқларига мос равишда перпендикуляр чизиқлар ўтказамиз. Ox ва Oy мос равишда F кучининг Ox ва Oy ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = F \cos \varphi \cos \alpha \\ F_y &= F \sin \alpha = F \cos \varphi \sin \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

Бу усул кучини икки марта проекциялаш усули дейилади.

8-§. БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАРНИНГ ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИСИНИ АНАЛИТИК УСУЛДА АНИҚЛАШ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ кучлар берилган бўлсин (32-расм, а).

Берилган кучларнинг тенг таъсир этувчисини миқдор ва йўналишини аниқлаш лозим.

Тенг таъсир этувчи куч берилган кучларнинг геометрик йигиндисига тенг.

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \quad \text{ёки} \\ \vec{R} &= \Sigma \vec{F} \end{aligned} \quad (15)$$

(15) – вектор тенгликни координата ўқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

Тенг таъсир этувчи кучнинг бирор ўқдаги проекциясини ташкил этувчи кучларнинг шу ўқдаги проекцияларининг йигиндисига тенг бўлади.

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z \quad (16)$$

Бунда R_x, R_y, R_z – $\vec{R}$ кучининг координата ўқларидаги проекцияси. (16) ёрдамида тенг таъсир этувчи кучнинг координата ўқлардаги проекцияси топилади.

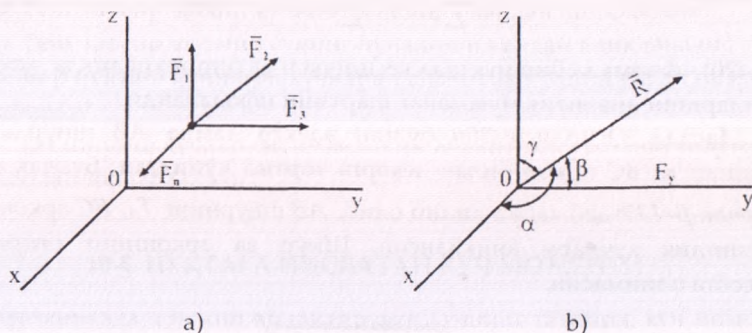
Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2} \quad (17)$$

Йўналиши эса қуйидагича аниқланади.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}; \quad (18)$$

Бунда α, β, γ лар $\vec{R}$ билан x, y, z уқлари орасидаги бурчаклар (32-расм, б).



32-расм.

9-§. БИР НУҚТАГА ҚЎЙИЛГАН КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТИ

1. Бир нуқтага қўйилган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун уларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{R}=0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Бунда кучлардан тузилган куч қўлбурчаги ёпиқ бўлиши керак. $\vec{R}=0, \sum \vec{F}=0$ тенгламалар кесишувчи кучлар системаси мувозанатини зарурий ва етарли шартининг вектор ифодасидир.

Демак кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатда бўлиши учун шу кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли шартдир.

2. Тенг таъсир этувчи куч нолга тенг бўлиши учун (17) - формуладаги қавслар ичидаги ифодаларнинг ҳар бири нолга тенг бўлиши шарт.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0 \\ \sum Y &= 0; & Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0 \\ \sum Z &= 0; & Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(19) -формула фазодаги таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучларнинг аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади.

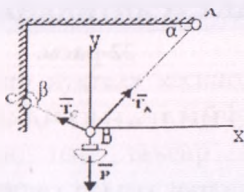
Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучлар мувозанатда бўлиши учун кучларнинг x, y, z ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир. Агар кучлар

системаси бир текисликда жойланган бўлса, (19)-формула қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0 \quad (20)$$

(20) - формула бир нуқтада кесинувчи ва бир текисликда жойланган кучларнинг аналитик мувозанат шартини ифодалайди.

Масала. Оғирлиги 20н бўлган электр лампа АВ шнурда шипга осилган ва ВС арқон билан деворга тортиб қўйилган. Бурчак $\alpha=60^\circ$ ва бурчак $\beta=135^\circ$ деб қабул қилиб олиб, АВ шнурнинг T_A , ВС арқоннинг T_C таранглик кучлари аниқлансин. Шнур ва арқоннинг оғирликлари ҳисобга олинмасин.



33-расм.

Ечиш: В нуқтанинг мувозанатини текшираимиз. Унга таъсир этувчи ва реакция кучларининг йуналишини чизмада кўрсатамиз.

Координата ўқларини чизмада йуналтираимиз. Бир нуқтада кесинувчи кучларнинг мувозанат тенгламасини тузаимиз.

$$\sum X = 0 \quad T_A \cos 60^\circ - T_C \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \quad T_A \sin 60^\circ + T_C \sin 45^\circ - P = 0 \quad (2)$$

Тенгламаларни ечиб номаълум реакция кучларини топамиз.

$$T_C = \frac{T_A \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{T_A \cdot 0,5}{0,7} = \frac{T_A \cdot 5}{7}$$

$$T_A \cdot 0,86 + \frac{T_A \cdot 5}{7} \cdot 0,7 - 20 = 0; \quad T_A \cdot 0,02 + T_A \cdot 3,5 - 140 = 0$$

$$T_A \cdot 9,52 - 140 = 0; \quad T_A = \frac{140}{9,52} = 14,6 \text{ н};$$

$$T_C = \frac{T_A \cdot 5}{7} = \frac{14,6 \cdot 5}{7} = \frac{73}{7} = 10,4 \text{ н.ж}$$

$$T_A = 14,6 \text{ н} \quad T_C = 10,4 \text{ н}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кучни ўқдаги проекцияси қандай аниқланади?

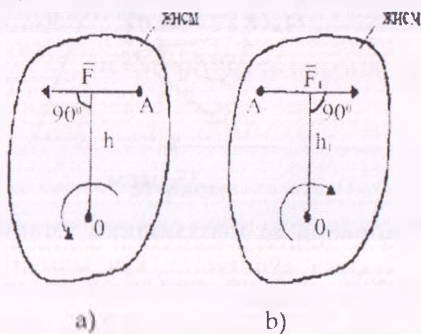
2. Куч модули проекцияларга асосан қандай аниқланади?
3. Кучнинг нуналлини проекциялари ёрдамида қандай аниқланади?
4. Теги таъсир этувчи кучнинг миқдори қандай аниқланади?
5. Теги таъсир этувчи кучнинг нуналлини қандай аниқланади?
6. Бир нуктага қўйилган кучларнинг аналитик қўйиш усули нимадан иборат?
7. Кесилувчи кучлар системасининг аналитик мувозанат шартин қандай ифодаланади?

10-§. НУҚТАГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ

Механикада жисмни айлантирувчи кучнинг таъсири, куч моменти деб аталадиган катталиқ билан ўлчанади.

Жисмнинг бирор нукта ёки ўқ атрафидаги айланма ҳаракати куч моментида боғлиқ бўлади.

0 нукта атрафида эркин айлана оладиган қаттиқ жисм берилган бўлсин (34-рasm а ва b).



34-рasm.

Жисмни A нуктага қўйилган $\vec{F}$ кучи айлантиради.

Жисмни 0 нукта атрафида тез ёки секин айланиши қўйидагилардан боғлиқ бўлади.

1. Кучнинг модули ёки қийматидан
2. Кучнинг елкасига

Бирор нуктага нисбатан кучдан момент олинса бу нуктага момент маркази дейилади. 0 нукта момент маркази. Момент марказидан кучнинг таъсир чизигига туширилган перпендикулярга кучнинг елкаси дейилади. – h ва h_1 – $\vec{F}$ кучнинг елкаси, $\vec{F}$ кучнинг 0 нуктага нисбатан

моменти қуйидаги кўринишда белгиланади. M_0 ёки $m_0(F)$ куч моментини H, M, KHM билан улчанади.

$$m_0(F) = \pm Fh \quad (21)$$

(21) - формула ёрдамида кучнинг нуқтага нисбатан моментини топилади.

Нуқтага нисбатан куч моментини қуйидагича таърифланади:

куч миқдори билан шу куч елкасининг кўпайтмасига билан олинган нуқтага нисбатан кучнинг моментини дейилади.

Куч моментини мусбат ва манфий ишора билан тавсифланади.

Агар куч моментини маркази атрофида жисмни соат стрелкаси айланишига қарама-қарши томонга айлантирса куч моментини мусбат, аксинча манфий бўлади (34-расм, а ва б).

Нуқтага нисбатан куч моментини қуйидаги хоссаларга эга.

1. Агар кучнинг таъсир чизиги бирор нуқтадан ўтган бўлса, кучнинг шу нуқтага нисбатан моментини нолга тенг бўлади. Чунки бу ҳолда кучнинг елкаси $h=0$ га тенг (35-расм).

$$m_B(F) = F \cdot h = F \cdot 0 = 0.$$

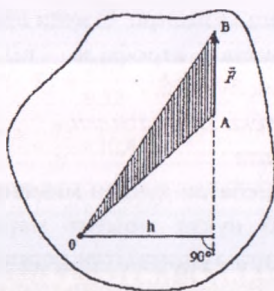
Бу ҳолда куч жисмни айлантирмайди.



35-расм.

2. Кучнинг миқдори ва йўналишини ўзгартирмай таъсир чизиги бўйлаб истаган нуқтага қучирилса, куч моментини ўзгармайди (чунки унинг елкаси ўзгармай қолади).

3. Кучнинг нуқтага нисбатан моментини куч билан шу нуқтадан ташкил бўлган учбурчак юзасининг иккиланганига тенг.



36-расм.

$\vec{F}$ кучининг икки учини момент маркази O билан туташтирамиз (36-рasm). AOB учбурчаги ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг юзаси ΔAOB юзаси $= 1/2 F \cdot h$

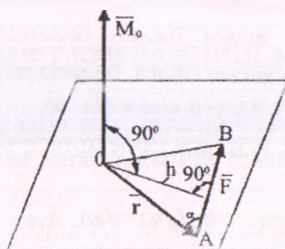
$$2\Delta AOB \text{ юзи} = F \cdot h = m_0(\vec{F})$$

$$m_0(\vec{F}) = 2\Delta AOB \text{ юзи} \quad (22)$$

11-§. КУЧНИНГ НУҚТАГА НИСБАТАН МОМЕНТИ ВЕКТОРИ

$\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан моментини момент марказига қўйилган $\vec{M}_O$ вектор бўлиб, бу марказ ва кучнинг таъсир чизиғи орқали ўтган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади.

$\vec{F}$ кучининг O нуқтага нисбатан момент векторини аниқлаймиз (37-рasm).



37-рasm.

Бунда $m_0(F)$ - O нуқтага нисбатан олинган $\vec{F}$ куч моментининг вектори. $\vec{OA} = \vec{r}$ - A нуқтанинг радиус вектори. Момент вектори куч қўйилган нуқтанинг радиус вектори билан кучнинг вектор қўпайтмасига тенг.

$$\vec{M}_O = [\vec{r} \cdot \vec{F}] \quad (23)$$

Момент вектори $\vec{M}_O$ OAB учбурчак текислигига перпендикуляр бўлиб, $\vec{M}_O$ нинг учидан қараганда куч жисмини соат стрелкаси айланишига тесқари йўналишда айлантиришига иштилади. Момент векторининг абсолют қиймати куч моментига тенг.

$$|\vec{M}_O| = m_0(\vec{F}) \quad (24)$$

(24) - формулани исботлаш учун (23) дан абсолют қиймат оламиз.

$$|\vec{M}_O| = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h = m_0(\vec{F})$$

Бунда:

$$h = r \sin \alpha; \quad |\vec{M}_0| = m_0(\vec{F}).$$

12-§. ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИНИНГ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА (ВАРИНЬОН ТЕОРЕМАСИ)

Теорема. Бир текисликда жойлашган кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор нуқтага нисбатан олинган моменти ташкил этувчи кучларнинг шу нуқтага нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг.

Исбот. Жисмнинг A нуқтасига $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлари қўйилган бўлсин. Ихтиёрий O нуқта оламиз ва O ни A билан туташтирамиз. O марказдан OA кесмага тик қилиб OX ўқини ўтказамиз (37-расм).

Энди $m_0(\vec{F}_1), m_0(\vec{F}_2), \dots, m_0(\vec{F}_n)$, моментларнинг ифодасини аниқлаймиз. (22)-формулага асосан $m_0(\vec{F}_1) = 2\Delta OAB_1$ юзи.

OB_1 учбурчакнинг юзи асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг. Бунда асос OA кесма бўлса, баландлиги ob_1 бўлади.

$$2\Delta OAB_1 \text{ юзи} = OA \cdot ob_1$$

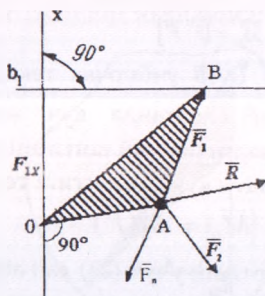
ob_1 кесма $\vec{F}$ кучининг OX ўқидаги проекциясини билдиради $ob_1 = F_{1X}$. Шунинг учун

$$m_0(\vec{F}_1) = OA \cdot F_{1X} \quad (25)$$

Қолган кучларнинг моменти ҳам худди шундай ҳисобланади.

$\vec{F}$ куч OA чизикдан пастга бориб етганда ҳам (25) формула тўғри бўлаверади, бунда кучнинг проекцияси манфий бўлганлиги учун моментнинг ишораси ҳам манфий бўлади.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{R}$ билан белгиланади.



38-расм.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad (26)$$

Тенг таъсир этувчининг бирор ўқдаги (x ўқдаги) проекцияси қўшилувчи кучларнинг уша ўқдаги проекцияларининг йинтиқисига тенг, яъни:

$$R_x = \sum F_x \quad (27)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини OA га кўпайтирсак.

$$OA \cdot R_x = \sum (F_x \cdot OA) \quad (28)$$

(25) - формулага асосан

$$OA \cdot R_x = \sum m_a(\vec{R}) \quad (29)$$

$$\sum (OA \cdot F_x) = \sum m_a(\vec{F})$$

(29) ни (28) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$m_a(\vec{R}) = \sum m_a(\vec{F}) \quad (30)$$

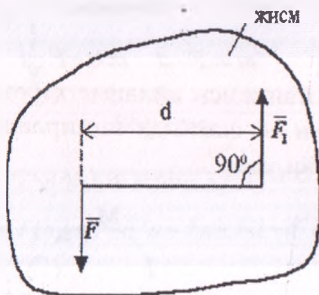
(30) -формула Вариньон теоремасининг математик ифодасидир.

13-§. ЖУФТ КУЧ ВА УНИНГ МОМЕНТИ

Таъриф. Миқдорлари тенг, таъсир чизиқлари бир тўғри чизиқда ётмайдиган, параллел ва қарама-қарши томонга йўналган иккита кучга жуфт куч дейилади.

$$F = F_1; \quad \vec{F} = -\vec{F}_1; \quad \vec{F} \parallel \vec{F}_1;$$

Жуфт куч ($\vec{F}, \vec{F}_1$) кўринишда белгиланади (39-расм).



39-расм.

$\vec{F}$ ва $\vec{F}_1$ кучларга жуфт кучни ташкил этувчи кучлар дейилади.

Жуфт кучни ташкил этувчи кучлар орасидаги энг қисқа d масофага жуфт кучнинг елкаси дейилади. Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси нолга баробар бўлади.

$$R = F - F_1 = 0, \quad R = 0$$

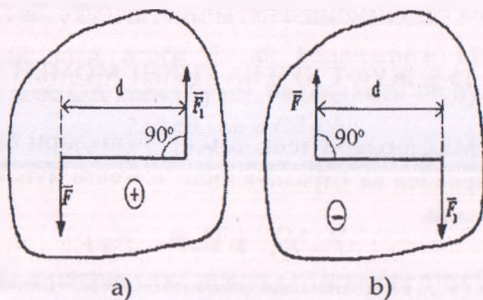
Жуфт кучни битта куч билан алмаштириш мумкин эмас. Жуфт кучни жисмга курсатадиган таъсири жуфт куч моменти билан тавсифланади. Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг бири билан жуфт куч елкасининг купайтмасига жуфт кучнинг моменти дейилади.

Жуфт кучнинг моменти m , ёки M билан белгиланади.

$$m = \pm F \cdot d = \pm F_1 d \quad (31)$$

(31)-формула билан жуфт кучнинг моменти аниқланади. Жуфт кучнинг моменти мусбат ёки манфий бўлади.

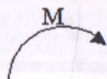
Жуфт жисмини соат стрелкаси айланишига тескари томонга айлантирса унинг моменти мусбат, соат стрелкаси айланиши бўйича айлантирса манфий ишора билан олинади (40-расм а,б).



40-расм.

$$m = F \cdot d \quad m = -F \cdot d$$

Жуфт куч қўйилган жисм айланма ҳаракатда бўлади. Ҳар қандай жуфт кучни стрелкали ёй шаклида тасвирлаш мумкин. Стрелка ёнига жуфт куч моменти қўйилади.

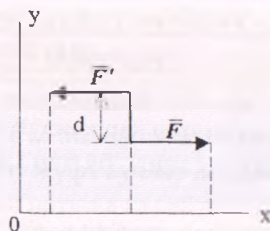


Жуфт куч жойлашган текисликка жуфт кучнинг таъсир текислиги дейилади.

Теорема 1. Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг ҳар қандай ўқдаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг.

Исбот: Жуфт куч берилган бўлсин (41-расм). Шу жуфт кучни x ўқига проекциялаймиз.

$$\Sigma X = 0, \quad F - F^1 = 0 \text{ чунки } F = F^1$$



41-расм.

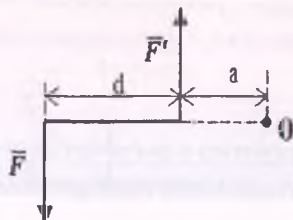
Теорема 2. Жуфт кучни моменти уни ташкил этувчи кучлардан ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

$$m = m_0(\bar{F}) + m_0(\bar{F}')$$

Исбот. Моменти $m = F \cdot d$ га тенг бўлган $(\bar{F}, \bar{F}')$ жуфт куч берилган бўлсин (42-расм). Жуфт кучни ташкил этувчи кучлардан O нуқтага нисбатан момент оламиз.

$$m_0(\bar{F}) = F(a + d)$$

$$m_0(\bar{F}') = -F'a$$



42-расм.

Бу тенгликларнинг иккала қисмини қўшамиз.

$$\begin{aligned} m_0(\bar{F}) + m_0(\bar{F}') &= F(a + d) - F'a = Fa + Fd - F'a = Fd = m \\ m_{0, \dots} &= m_0(\bar{F}) + m_0(\bar{F}') \end{aligned} \quad (32)$$

Теорема исботланди.

Бу теоремалар шуни кўрсатадики, жуфт куч проекциялар тенгламаси $\sum X = 0$ $\sum Y = 0$ га иштирок қилмайди. Жуфт кучни бирор нуқтага нисбатан олинган моментлар тенгламасига ($\sum m_0 = 0$) қўшиш керак.

14-§. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ ЭКВИВАЛЕНТЛИГИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

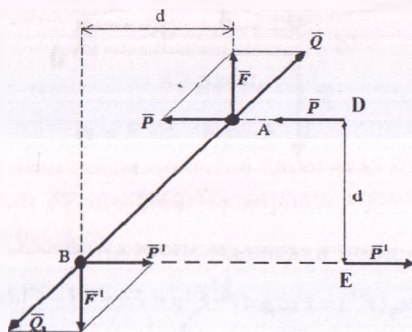
Теорема. Жисмга қўйилган ҳар қандай жуфт кучининг momenti шу жуфт кучнинг momentига тенг бўлган бошқа жуфт куч билан алмаштириш мумкин.

Исбот. Жисмга momentни $m = Fd$ (F, F^1) бўлган жуфт кучи таъсир қилаётган бўлсин (43-расм).

Ихтиёрий D ва E нуқталардан иккита параллел тўғри чизик ўтказамиз. Бу параллел тўғри чизик F ва F^1 кучларининг таъсир чизиги билан A ва B нуқталарда кесилишади. AD ва BE тўғри чизиклар бўйлаб йўналган ташкил этувчиларини P ва Q билан белгилаймиз. F кучини AB ва BE тўғри чизик бўйлаб йўналган ташкил этувчисини Q ва P билан белгилаймиз. Демак

$$\overline{P} = -\overline{P}^1, \quad \overline{Q} = -\overline{Q}^1$$

$\overline{Q}$ ва $\overline{Q}^1$ кучлари ўзаро мувозанатлашувчи, бўлгани учун жисмдан олиб ташлаймиз. Натижада $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт кучини $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучи билан алмаштирдик. $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучнинг елкаси d_1 га тенг. $\overline{P}$ ва $\overline{P}^1$ кучларни таъсир чизиклари бўйлаб D ва E нуқталарга келтираимиз.



43-расм.

$(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт кучи билан $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучининг momentлари тенг эканлигини исботлаймиз.

$(\overline{F})$ кучи $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси Вариньон теоремасига асосан:

$$m_B(\bar{F}) = m_B(\bar{P}) + m_B(\bar{Q})$$

$$m_B(\bar{F}) = F \cdot d, \quad m_B(\bar{P}) = Pd$$

$$m_B(\bar{Q}) = 0$$

Шундай қилиб $Fd = Pd$ теорема исботланди.

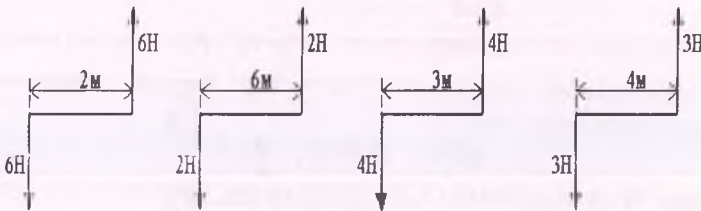
Демак моментлари тенг ва айланиш йўналишлари бир хил бўлган иккита жуфт кучга эквивалент жуфт кучлар дейилади.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1. Жуфт кучни ўзининг таъсир текислигида ҳар қандай вазиятга қўчириш мумкин, бунда жуфт кучни жисмга таъсири ўзгармайди.

2. Жуфт кучнинг моментини ўзгартирмай уни ташкил этувчи кучларнинг катталигини ва елкасини исталганча ўзгартириш мумкин бу билан жуфт кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

Масалан, momenti $m=12$ кнм жуфт куч берилган бўлсин.



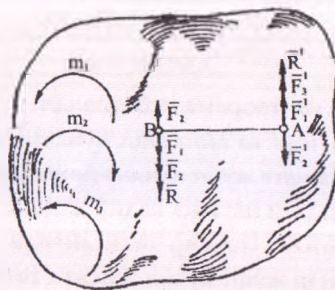
44-расм.

15-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ЖУФТ КУЧЛАРНИ ҚЎШИШ. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТЛИК ШАРТИ

Теорема. Бир текисликда жойлашган бир нечта жуфт кучларни қўшиб, моментини шу жуфт кучлар моментларининг йиғиндисига тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин.

Исбот. Бир текисликда жойлашган моментлари m_1, m_2, m_3 бўлган жуфт кучлар берилган бўлсин (44-расм). Шу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш керак. Берилган жуфт кучларни умумий d елкага эга бўлган эквивалент $(\bar{F}, \bar{F}')$, $(\bar{F}, \bar{F}')$ ва $(\bar{F}, \bar{F}')$ жуфт кучлар билан алмаштирамиз. Эквивалент жуфт кучларнинг таърифига асосан қуйидаги формулани ёзамиз.

$$m_1 = F_1 d, \quad m_2 = -F_2 d, \quad m_3 = F_3 d, \quad (34)$$



45-расм.

А ва В нуқталарга қўйилган кучларни қўшиб тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

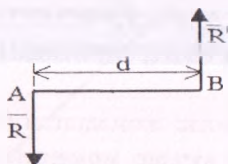
$$R = F_1 - F_2 + F_3$$

$$R' = F_1' - F_2' + F_3' = F_1 - F_2 + F_3$$

Бу кучларнинг модуллари тенг бир бирига қарама-қарши йўналган ва ўзаро параллел.

$$R = R', \quad \bar{R} = -\bar{R}', \quad \bar{R} \parallel \bar{R}'$$

Демак, бу кучлар битта $(\bar{R}, \bar{R}')$ жуфт кучни ташкил этади. Бу жуфт кучга тенг таъсир этувчи жуфт куч дейилади. Демак берилган учта жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи янги жуфт кучга келтирдик (46-расм).



46-расм.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг momenti қуйидаги формула билан топилади:

$$M = Rd = (F_1 - F_2 + F_3)d = F_1d + (-F_2d) + F_3d = m_1 + m_2 + m_3 \quad (35)$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

Бир текисликда жойлашган, моментлари $m_1, m_2, \dots, m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучлар берилган бўлса, бу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш мумкин.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг momenti юқоридаги теоремага асосан

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad \text{га тенг бўлади} \quad (36)$$

$$M = \sum m$$

Бир текисликда жойлашган жуфт кучлар мувозанатда бўлиши учун улар моментларининг йиғиндиси 0 га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$$

$$\sum m = 0 \quad (37)$$

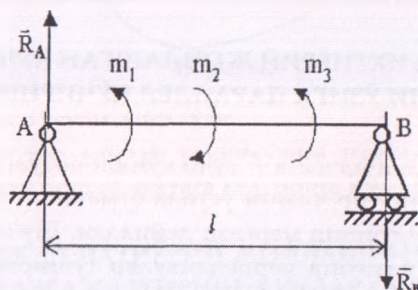
Бу тенглик бир текисликда жойлашган жуфт кучларнинг мувозанат шартини ифодалайди.

Мисол. Балка моментлари

$$m_1 = 6 \text{ кНм}, \quad m_2 = 8 \text{ кНм}, \quad m_3 = 12 \text{ кНм}$$

бўлган жуфт кучлар таъсирида мувозанатда турган бўлсин (47-расм).

Балканинг узунлиги $l=5 \text{ м}$, таянч реакциялари аниқлансин.



47-расм.

Ечиш. Маълумки жуфт кучни бошқа бир жуфт куч билан мувозанатлаш мумкин, шунинг учун балканинг A ва B таянчдаги $\bar{R}_A$ ва $\bar{R}_B$ реакция кучлари жуфт кучни ташкил қилиш керак. Яъни бу кучларни миқдорлари тенг қарама-қарши томонга йўналган ва параллел бўлиши зарур.

$$R_A = R_B \quad \bar{R}_A = -\bar{R}_B, \bar{R}_A \parallel \bar{R}_B$$

Бу жуфт кучнинг momenti:

$$m_4 = -R_A \cdot l \quad \text{бўлади.}$$

Демак, балка моментлари m_1, m_2, m_3 ва m_4 ва жуфт кучлари таъсирида мувозанатда туради. (37) - тенгликка асосан:

$$m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = 0; \quad 6 - 8 + 12 - 5R_A = 0; \quad R_A = 2 \text{ кН}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

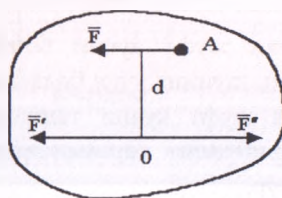
1. Нуктага нисбатан куч моменти деб нимага айтилади?
2. Момент ишораси қандай танланади?
3. Куч елкаси нима?
4. Қандай ҳолатда нуктага нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади?
5. Кучларни таъсир чизиғлари бўйича кўчирилса, берилган нуктага нисбатан куч моменти ўзгарадими?
6. Жуфт куч нима? Нима учун жуфт куч тенг таъсир этувчи кучга эга эмас?
7. Вариньон теоремасини таърифланг?
8. Эркин жисм жуфт куч таъсирида қандай ҳаракат қилади?
9. Жуфт кучни моменти деб нимага айтилади?
10. Қандай шарт бажарилганда иккита жуфт куч эквивалент бўлади?
11. Жуфт кучларни қўшиш гўгрисидан теоремани таърифланг.
12. Жуфт кучлар системасининг мувозанат шартини таърифланг.

ТЕКИСЛИҚДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ.

16-§. КУЧНИ ЎЗИГА ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШГА ОИД ЛЕММА

Жисмнинг A нуктасига $\vec{F}$ кучи қўйилган бўлсин (48-расм).

Шу кучни таъсир чизиғи устида ётмаган O нуктага келтириш керак. O нуктага келтириш маркази дейилади. Шу келтириш марказидан кучнинг таъсир чизиғига перпендикуляр туширамиз ва $\vec{F}$ кучининг O нуктага нисбатан моментини оламиз.



48-расм.

$$m_o(\vec{F}) = Fd \quad (38)$$

Бунда d - $\vec{F}$ кучининг O марказга нисбатан елкаси.

Келтириш марказига ўзаро мувозанатлашувчи $\vec{F}'$ ва $\vec{F}''$ кучларини қўямиз. Бу кучлар берилган $\vec{F}$ кучига тенг ва параллел бўлиши керак $F' = F'' = F$. Кучни келтириш натижасида берилган кучга геометрик тенг ва параллел бўлган $\vec{F} = \vec{F}'$ кучига ҳамда $(\vec{F}, \vec{F}'')$ жуфт кучига эга буламиз

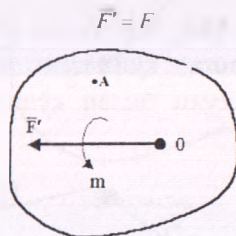
(F, F') жуфт кучига қўшилган жуфт куч деб аталади бу жуфт кучининг моменти.

$$m = Fd = F'd \quad (39)$$

Қўшилган жуфт кучининг моменти берилган кучининг келтириш марказига нисбатан олинган моментига тенг.

$$m = m_1(F) \quad (40)$$

Лемма. Ҳар қандай куч таъсир чизиғи н устида егмаган бошқа нуқтага ўзига геометрик тенг ва параллел бўлган куч ҳамда битта жуфт куч билан келади (49-расм).



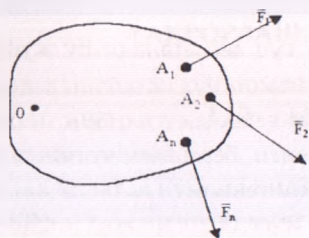
49-расм.

Бу усулга Пуансо усули дейилади.

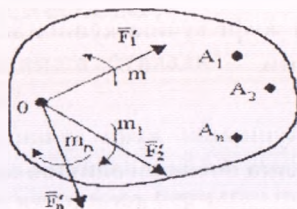
Бу усул билан ҳар қандай кучни ўзига параллел қилиб таъсир чизиғи устида ётмаган бошқа нуқтага келтириш мумкин.

17-§. ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАРНИ БЕРИЛГАН МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Бир текисликда ихтиёрий жойлашган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар системаси берилган бўлсин. Кучлар мос равишда жисмнинг $A_1, A_2, \dots, A_n$ нуқталарига қўйилган (50-расм). Шу кучларни текисликдаги O нуқтага келтириш керак. Кучларни берилган марказга келтириш натижасида бир нуқтага қўйилган берилган кучларга тенг ва параллел бўлган n та $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ кучларга ва моментлари $m_1, m_2, \dots, m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучга эга бўламиз (51-расм).



50-расм.

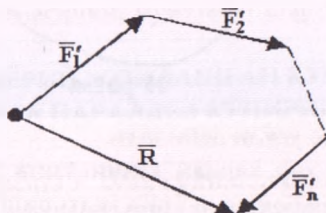


51-расм.

Бу жуфт кучларнинг momenti Пуансо усулига асосан

$$m_1 = m_0(\bar{F}_1), \quad m_2 = m_0(\bar{F}_2), \quad \dots, \quad m_n = m_0(\bar{F}_n), \quad \text{бўлади.}$$

Келтириш марказига қўйилган $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ кучларини куч қўшбурчагини қўшиб усули билан қўшиб, тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз (52-расм).



52-расм.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \dots + \bar{F}_n' = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum \bar{F} \\ \bar{R} &= \sum \bar{F} \end{aligned} \quad (41)$$

Бунда $\bar{R}$ бош вектор. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

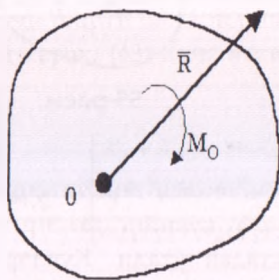
Текисликдаги жуфт кучларни қўшиб ҳақидаги теоремага асосланиб, моментлари $m_1, m_2, \dots, m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучларни қўшиб битта жуфт кучга келтирамиз. Бу жуфт кучнинг моментини M_0 билан белгилаймиз.

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1 + m_2 + \dots + m_n = m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n) = \sum m_0(\bar{F}) \\ M_0 &= \sum m_0(\bar{F}) \end{aligned} \quad (42)$$

Бунда M_0 берилган кучларнинг бош momenti. Кучлар системасининг бош momenti берилган кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

- Шундай қилиб статиканинг қуйидаги асосий теоремаси исбот қилинди.

Теорема. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучларни келтириш марказига қўйилган кучларни бош вектор $\vec{R}$ га тенг бўлган битта кучга ва моментни бош momenti M_0 га тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин (53-рasm).



53-рasm.

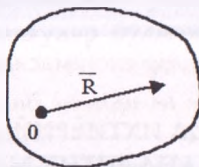
Бош вектор келтириш марказига боғлиқ эмас, бош момент эса келтириш марказига боғлиқ бўлади, келтириш маркази ўзгарса бош momenti ўзгаради, чунки кучларни шу марказга нисбатан елкаси ўзгаради.

Бош векторнинг модули ва йўналишини бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчисининг модулини аниқлайдиган (40) - ва (41) - формулалар билан топилади. Бош моментнинг миқдори (42) - формула билан аниқланади.

Қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз

1. $\vec{R} \neq 0 \quad M_0 = 0$.

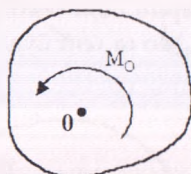
Бу ҳолда кучлар системаси келтириш марказига қўйилган битта тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ кучига келтирилади (54-рasm).



54-рasm.

2. Агар $\vec{R} = 0 \quad M_0 \neq 0$.

Бу ҳолда кучлар системаси моменти бош моментга тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади (55-расм).

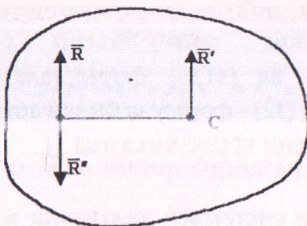


55-расм.

$$3. R \neq 0 \quad M_O \neq 0$$

Бу ҳолда кучлар системаси тенг таъсир этувчи кучга келтирилади, лекин тенг таъсир этувчи кучнинг таъсир чизиғи $OC = M_O/R$ шартидан аниқланадиган C нуқтадан ўтади. Кучлар системасининг O марказга келтириш натижасида $\bar{R}$ ҳамда M_O ни аниқладик (56-расм).

$\bar{R}' = \bar{R}'' = \bar{R}$ шартини қаноатлантирувчи $(\bar{R}', \bar{R}'')$ жуфтini ҳосил қилайлик, бу жуфт $m_O(\bar{R}', \bar{R}'') = M_O$ бўлсин. $(\bar{R}, \bar{R}'')$ $\rightarrow 0$ бўлганлиги учун иккинчи аксиомадан фойдаланиб, уни ташлаб юборамиз натижада қиймати бош векторга тенг, йўналиши унга параллел бўлган C нуқта орқали ўтувчи тенг таъсир этувчи кучга эга бўламиз.



56-расм.

$$4. R=0 \quad M_O=0$$

Бу ҳолда берилган кучлар системаси мувозанатда бўлади.

18-§. ТЕКИСЛИҚДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ АНАЛИТИК МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Текислиқда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун уларнинг бош вектори билан бош моменти бир вақтда нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

$$R = 0, \quad M_0 = 0 \quad (43)$$

(43)-тенглик кучлар системасининг геометрик шаклдаги мувозанатлик шартини ифодалайди.

Аналитик кўринишдаги мувозанат шартини ёзамиз.

Ботт векторнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \quad (44)$$

(43)-тенгликнинг биринчи шарт бажарилган учун яъни $R=0$ бўлиши учун, $\sum X=0$ $\sum Y=0$ бўлиши керак. (43)-нинг иккинчисига (42)ни қўямиз.

$$\left. \begin{array}{l} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum m_0(\bar{F}) = 0 \end{array} \right\} \quad (45) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0 \\ m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n) = 0 \end{array} \right. \quad (45')$$

(45)-формула текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг биринчи асосий турдаги аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади: Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг x, y ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси ва ихтиёрий O нуқтага нисбатан моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Кучлар системасининг иккинчи ва учинчи турдаги аналитик мувозанатлик шартлари мавжуд. Иккинчи турдаги мувозанатлик шарт

$$\sum m_A(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}) = 0 \quad \sum X = 0 \quad \text{билан ифодаланади} \quad (46)$$

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун ихтиёрий A ва B нуқталарга нисбатан моментларнинг йиғиндиси ва OX ўқига нисбатан проекцияларнинг йиғиндиси нольга тенг бўлиши зарур ва етарли шартдир.

Бу ҳолда A ва B нуқталарни туташтирувчи AB тўғри чизиқ кесмасини x ўқига перпендикуляр бўлмайдиган қилиб танлаб олиш керак. Акс ҳолда тузилган учта тенгламалардан биттаси қолган иккитасининг натижаси бўлиб қолади ва иккита тенглама билан учта номаълумни аниқлаб бўлмайди.

Учинчи турдаги мувозанатлик шарт.

$$\sum m_A(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_C(\bar{F}) = 0 \quad \text{билан ифодаланади} \quad (47).$$

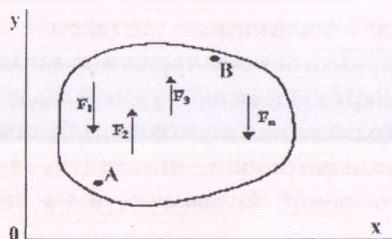
Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг бир тўғри чизиқ устида ётмаган учта A, B ва C

нүкталарга нисбатан моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Бу ҳолда момент марказлари A , B ва C нүкталарни бир тўғри чизик устида ётмайдиган, яъни учбурчак ҳосил қиладиган, қилиб танлаб олин керак. Акс ҳолда юқоридаги эслатмага келамиз.

19-§. ТЕКИСЛИҚДАГИ ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ кучлари берилган бўлсин (57-расм). Кучларга параллел қилиб u ўқини йўналтирамиз. Параллел кучларга текисликда ихтиёрий йўналган кучларнинг биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини тадбиқ қиламиз.



57-расм.

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ \sum m_0(\vec{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}) &= 0 \\ \sum m_B(\vec{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

бунда A ва B нүкталардан утган тўғри чизик u ўқига параллел бўлмаслиги керак. (48) - ва (49) - формулалар бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлган кучларнинг мос равишда биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини ифодалайдилар.

Биринчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойлашган ва бир бирига параллел кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг кучларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва текисликдаги ихтиёрий

O нуктага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

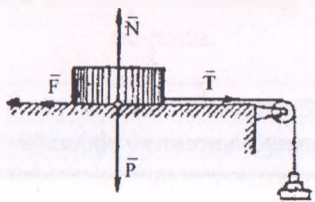
Иккинчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойланган параллел кучлар мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ихтиёрий A ва B нукталарга нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

20-§. СИРПАНИШДАГИ ИШҚАЛАНИШ

Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниши натижасида ҳосил бўладиган ишқаланишга сирпанишдаги ишқаланиш дейилади.

Оғирлиги P га тенг жисм горизонтал столга қўйилган бўлсин (58-расм). Жисмни блок оркали утказилган илга боғлаймиз. Ишнинг иккинчи учига палла осиб қуямиз. Жисм оғирлик кучи P ва столнинг нормал реакция кучи N таъсирида мувозанатда бўлади. Бу кучлар вертикал кучлардан иборат бўлгани учун улар жисмни ҳаракатга келтирмайди. Жисмни ҳаракатга келтириш учун паллага тош қўйиш керак. Лекин жисм паллага маълум миқдорда тош қўймагунча ҳаракатланмайди. Чунки стол юзаси ва жисмнинг столга тегиб турган юзаси силлиқ бўлмагани учун ишнинг тортилиш кучи T га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган F ишқаланиш кучи ҳосил бўлади. F кучга сирпанишдаги ишқаланиш кучи дейилади. T кучнинг қиймати (яъни паллага қўйиладиган тош) орта бориб, маълум миқдорга етканда жисм силжиш олдида туради, бу ҳолда ишқаланиш кучи $F=F_{max}$ энг катта (максимал) қийматга эга бўлади.



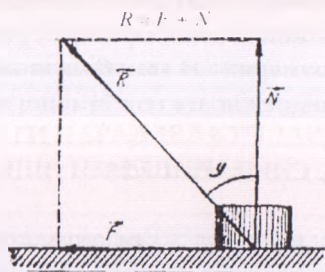
58-расм.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучи F нолдан энг катта ишқаланиш кучигача ўзгаради.

$$0 \leq F \leq F_{max}$$

Шундай қилиб, дағал текисликнинг тулиқ реакция кучи миқдор ва йўналиш жиҳатдан нормал реакция кучи ва ишқаланиш кучларига

қурилган түртү түртбурчакнинг диагонали билан ифодаланади (59-рasm):



59-рasm.

Француз олими Ш. Г. Кулон (1736-1806) ўтказган тажрибаларига асосланиб, сирпанишдаги ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифлаган.

1) Тинч ҳолатдаги максимал ишқаланиш куч нормал реакция кучига пропорционалдир.

$$F_{\max} = f N \quad (50)$$

Бунда: $F_{\max}$ - сирпанишдаги энг катта ишқаланиш кучи; f - сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти; N - нормал реакция кучи.

2) Ишқаланиш кучи жисмларнинг ишқаланувчи сиртлари ўлчамларига боғлиқ бўлмайди.

3) Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмлар материалига ва ишқаланувчи юзаларнинг ишқаланиш даражасига боғлиқ бўлади. Юзалар силлиқ бўлса ишқаланиш кучи кам бўлади.

(50) дан

$$f = \frac{F_{\max}}{N} \quad \text{келиб чиқади} \quad (51)$$

Яъни сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти ўлчовсиз катталиқдир. Турли материаллар учун ишқаланиш коэффициентининг қийматлари маълумотномаларда келтирилган.

Бир жисм иккинчиси устида ҳаракатланганда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи ҳам нормал реакция кучига пропорционал бўлади: $F = f' N$. Бунда f' - жисм ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффициенти бўлиб, у жисмнинг ҳолатидаги ишқаланиш коэффициенти f дан кичик бўлади; $f' < f$.

Демак, жисм ҳаракатда бўлганда ишқаланиш кучи тинч тургандагига нисбатан камроқ бўлар экан.

2-§. ИШҚАЛАНИШ БУРЧАГИ. ИШҚАЛАНИШ КОНУСИ

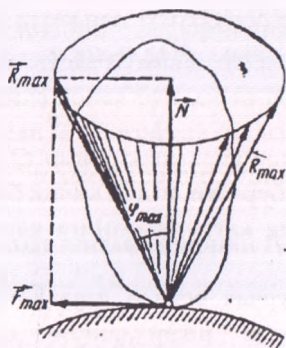
Агар бирор горизонтал текисликка таяниб турган жисм сирпаниш олдид (мувозанат чегарасида) бўлса, ишқаланиш кучи энг катта қийматга эга бўлади (60-расм) ҳамда:

$$\vec{R}_{\max} = \vec{N} + \vec{F}_{\max} \quad \text{бўлади} \quad (52).$$

Максимал тулиқ реакция кучининг нормал реакция кучи билан ташкил қилган бурчаги ишқаланиш бурчаги дейилади. 72 - расмдан кўриниб турибдики,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f \quad \operatorname{tg} \varphi = f \quad (53)$$

Шундай қилиб, ишқаланиш бурчагининг тангенс ишқаланиш коэффициентига тенг бўлар экан. Сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти f канча кичик бўлса, ишқаланиш бурчаги шунча кичик бўлади.



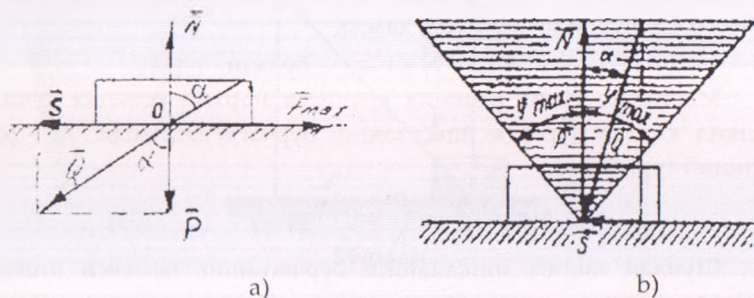
60-расм.

Агар $f=0$ бўлса, $\varphi=0$ га тенг бўлади. Бу ҳолда сирпанувчи жисмларнинг юзалари абсолют силлиқ бўлади. Абсолют силлиқ текисликнинг реакция кучи текисликка перпендикуляр йуналади.

Горизонтал дағал текисликда тинч ҳолда ётувчи жисмга текисликка ўтказилган нормал билан α бурчак ташкил этувчига Q куч таъсир этсин (61-расм). Q кучни нормал реакция кучи билан мувозанатлашувчи P ва жисмни силжитишга интилувчи S иккита ташкил этувчига ажратамиз. Уларнинг модули:

$$P=Q \cos \alpha, \quad S=Q \sin \alpha$$

S танқил ётувчи жисмни ҳаракатга келтиришга интилади, P танқил ётувчи эса жисмни текисликка босади. Бунинг натижасида S га қарши пуналан ишқаланиш кучи пайдо бўлади.



61-расм.

Жисмни жойидан силжитиш учун S кучининг модули, максимал ишқаланиш кучи $F_{\max} = fN = fQ \cos \alpha$ дан катга бўлиши керак:

$$Q \sin \alpha \geq fQ \cos \alpha \quad \text{ёки} \quad f = \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \alpha$$

Бундан

$$\alpha \geq \varphi \quad (54)$$

(54) - тенгсизликдан кўрамински, агар Q куч текисликка ўтказилган нормалга ишқаланиш бурчаги φ дан кичик бурчак остида таъсир этса, у ҳолда бу куч ҳар қанча катга бўлишига қарамай, жисм тинч ҳолатда қолади.

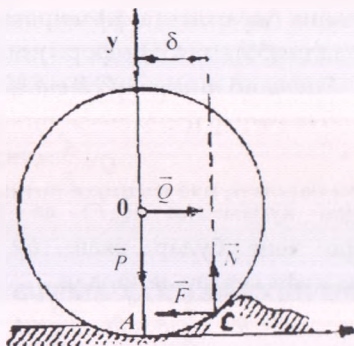
Вертикалга φ бурчак остида ўтказилган тўғри чизиқлар билан чегараланган (61-расмда штрихланган) соҳага мувозанат соҳаси дейилади. Мувозанат соҳаси ичида ётувчи Q куч қанча катга бўлса ҳам текисликка таяниб турган жисмни ҳаракатга келтира олмайди.

Агар жисмни силжитувчи куч турли йўналишларда таъсир этса, мувозанат соҳаси учигаги бурчаги 2φ га тенг ишқаланиш конуси билан чегараланади. Бу ҳолда ишқаланиш конуси ичида ётувчи ҳар қандай куч жисмни ҳаракатга келтира олмайди. Чунки бу ҳолда жисмни силжитувчи куч, максимал ишқаланиш кучидан кичик бўлади.

22-§. ДУМАЛАШДАГИ ИШҚАЛАНИШ

Бир жисм иккинчи бир жисм устида сирпанмай, думалаб бораётганда думалашдаги ишқаланиш ҳосил бўлади.

Оғирлиги P ва радиуси R га тенг гилдирак горизонтал текисликда ётан бўлсин (62-расм). Гилдиракка унинг O марказидан утувчи горизонтал куч қўйилган.



62-расм.

Гилдирак ва текисликнинг деформацияланиши натижасида ишқаланиш битта нуқтада ҳосил бўлмай, икки жисмнинг бир-бирига тегиб турган эзилган юзасида ҳосил бўлади ва нормал реакция кучи O нуқтадан утувчи вертикалдан δ масофада етувчи C нуқтага қўйилади. F ишқаланиш кучи эса тезликларнинг оний марказига қўйилган бўлади.

Гилдирак учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\Sigma X = 0, \quad Q - F = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad N - P = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0, \quad QR - N\delta = 0 \quad (3)$$

(1) - ва (2) – тенгламалардан

$$Q = F; \quad P = N$$

Демак, $\vec{Q}, \vec{F}, \vec{P}$ ва $\vec{N}$ кучлари $(\vec{Q}, \vec{F})$ ва $(\vec{P}, \vec{N})$ жуфт кучларни ташкил этади. $(\vec{Q}, \vec{F})$ жуфт куч гилдиракни ҳаракатга келтиради. Унинг моменти

$$M = QR \text{ га тенг} \quad (55)$$

$(\vec{P}, \vec{N})$ жуфт кучи гилдиракнинг думалашига қаршилиқ кўрсатади, яъни уни мувозанатда сақлаб туради. Бу жуфт кучнинг моментига думалашга қаршилиқ кўрсатувчи момент дейилади. Унинг миқдори нормал $\vec{N}$ реакция кучи билан думалашдаги δ ишқаланиш коэффициентининг кўпайтмасига тенг.

$$M_{\text{тал}} = \delta N \quad (56)$$

Бунда δ - думаланидаги ишқаланиш коэффициенти бўлиб, узунлик бирлиги билан ўлчанади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, думаланидаги ишқаланиш коэффициенти жисмларнинг материалига, ишқаланувчи сиртларнинг ишқаланиш даражасига, гилдиракнинг радиусига ва нормал босимга боғлиқ бўлади. (55) - ва (56) – формулалардан:

$$Q R = \delta N, \quad (57)$$

бундан

$$Q = \frac{\delta}{R} N \quad \text{келиб чиқади} \quad (58)$$

(58)-тенгликдан кўрамизки $(\vec{Q}, \vec{F})$ ва $(\vec{P}, \vec{N})$ жуфт кучларнинг моментлари ўзаро тенг булар экан. Бу жуфт кучларга ўзаро мувозанатлашувчи жуфт кучлар дейилади.

$$F < N, \quad \frac{\delta}{R} N < N, \quad \frac{\delta}{R} < 1 \quad (59)$$

(59)-формуладан кўрамизки гилдирак сирпанмасдан думаланиш учун думаланидаги ишқаланиш кучи сирпанишдаги максимал ишқаланиш кучидан кичик бўлиши зарур; бунда f сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти. (59) - тенгсизлик бажарилганда гилдирак сирпанмасдан думалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қўшилган жуфт куч деб нимага айтилади ва унинг momenti нимага тенг?
2. Кучлар системасининг бош вектори деб нимага айтилади ҳамда уни қандай аниқлаш мумкин?
3. Бош момент деб нимага айтилади ва у қандай аниқланади?
4. Бош вектор тенг таъсир этувчи кучдан нима билан фарқ қилади?
5. Келтириш маркази ўзгартирилганда, берилган кучлар системасининг бош вектори ва бош momenti ўзгарадими?
6. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасини қандай ҳолларда битта кучга еки битта жуфт кучга келтириш мумкин?
7. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
8. Мувозанат тенгламаларини уч турини ёзинг?
9. Текисликдаги параллел кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг?
10. Ишқаланиш бурчаги деб нимага айтилади?
11. Ишқаланиш конуси деб нимага айтилади?

12. Ишқаланиш бурчаги билан ишқаланиш коэффициентни орасида қандай боғланиш мавжуд?
13. Ишқаланиш кучи деб нимага айтилади?
14. Думалаб ишқаланиш коэффициентни деб нимага айтилади?
15. Думалаб ишқаланиш моменти нимага тенг?
16. Ишқаланишнинг қандай турларини биласиз?
17. Сирпаниб ишқаланиш кучи қайси формула билан аниқланади?
18. Мувозанат соҳаси нима?
19. Сирпаниб ишқаланиш яхшиими ёки думалаб ишқаланиш яхшиими ва нима учун?

23-§. ФЕРМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Тутри чизиқли стерженлардан ташкил топган геометрик ўзгармас конструкцияга ферма дейилади. Стерженларнинг учларининг бирлаштирувчи нукта тугун дейилади. Стерженлари бир текисликда ётувчи ферма текис ферма дейилади. Фермага таъсир қилувчи кучлар унинг тугунларига қўйилган бўлади. Тугунларга қўйилган кучлардан ферманинг стерженлари фақат чўзилиши ёки сиқилиши мумкин.

Фермалардаги стерженларнинг сони билан тугунлар сони орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$m=2n-3$$

Бунда m – фермадаги стерженларнинг сони

n – тугунлар сони

Агар $m < 2n-3$ бўлса, у ҳолда ферма геометрик ўзгарувчан бўлади ва $m > 2n-3$ бўлганда геометрик ўзгармас бўлиб, у ортиқча стерженларга эга бўлади. Геометрик ўзгармас ва статик аниқ фермани тузиш учун $m = 2n-3$ шарти бажарилиши зарур.

Ферма таъянчларининг реакцияларини ва фермага қўйилган кучлар таъсиридан унинг стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш мумкин. Бу зўриқишларни билиш фермани лойиҳалаш вақтида керакли мустаҳкамликдаги стерженларни танлаб олиш учун зарурдир. Бу масалани ечишда:

- ферма стерженларининг оғирлиги эътиборга олинмайди;
- тугунлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмайди.

Фермага таъсир этувчи кучлар фақат унинг тугунларига қўйилади деб фараз қилинади.

У ҳолда ферманинг ҳар бир стерженига, унинг учларига қўйилган ва стержен бўйлаб пўналган икки куч таъсир қилади. Демак, ферманинг стерженлари бу кучлар таъсирида фақат чўзилишни ёки сиқилишни мумкин.

Ферма стерженларидаги зўриқишлар асосан қуйидаги усуллар билан аниқланади: 1. Тугунлари ёки стерженларни кесини усули; 2. Риттер усули; 3. Максвелл - Кремон диаграммасини қўриши усули.

24-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИ ТУГУНЛАРНИ КЕСИШ УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Ферманинг ҳамма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш учун тугунни кесини усулидан фойдаланилади. Бу усул билан ферманинг стерженларидаги зўриқишларни график ва аналитик усул билан аниқлаш мумкин. Ферманинг тугун кесини усули билан аналитик ҳисоблаш тартиби қуйидагичадир.

Берилган ферманинг тугунларини харфлар билан, стерженларини эса рақамлар билан белгилаб чиқилади.

Таянчлар олиб ташланади ва уларнинг фермага берадиган таъсирини ҳозирча бизга номаълум бўлган таянч реакциялари билан алмаштирилади. Таянч реакция кучлари аниқланади.

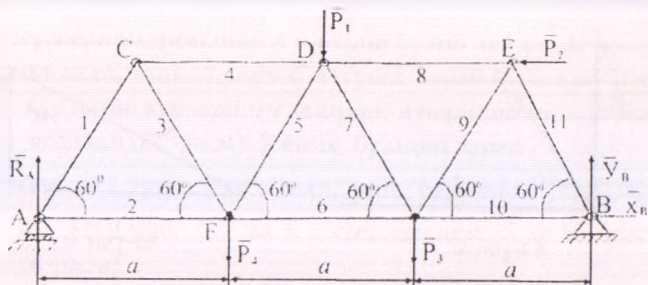
Ферманинг тугунларини кесиб олинади (кесилган тугунлар схемаси чизилади):

Ферманинг ҳамма стерженлари чўзилган (зўриқишлар тугунлардан стерженлар томонига йўналган) деб фараз қилиб, ферманинг ҳар бир тугуни учун мувозанат тенгламалари ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$) тузилади. Тугундан тугунга ўтиш тартиби текшираётган тугундаги номаълум кучлар сони иккигадан кўп бўлмаслиги керак, деган талабни қондириши лозим.

Бу мувозанат тенгламалари ечилади ва стерженлардаги иزلанаётган зўриқишларнинг катталиги ҳамда ишораси аниқланади.

Мисол. Ферманинг таянч реакциялари ва стерженларида пайдо бўладиган зўриқиш кучлар аниқлансин (63-расм). Қуйидагилар берилган:

$$a=5\text{м}; P_1=10\text{кН}, P_2=20\text{кН}, P_3=30\text{кН}, P_4=40\text{кН}.$$



63-расм.

Ечиш. 1) Таянч реакцияларни аниқлаш.

Фермага берилган кучлар, P_1, P_2, P_3, P_4 В қўзғалмас таянч $\bar{X}_B$ ва $\bar{Y}_B$ реакциялари, А қўзғалувчан таянчнинг $\bar{R}_A$ реакцияси қўйилган. Бу кучлар текисликда ихтиёрый равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат шарти қуйидаги қўринишда ёзилади:

$$\sum X = 0; \bar{X}_B - P_2 = 0 \quad \bar{X}_B = P_2 = 20 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0; \bar{R}_A - P_1 - P_2 - P_3 + Y_B = 0.$$

$$\sum M_A = 0; -P_1 \cdot a - P_2 \cdot \frac{3}{2}a - P_3 \cdot 2a + P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a + Y_B \cdot 3a = 0$$

Тузилган тенгламаларни ечиб реакция кучларини аниқланади:

$$Y_B = \frac{P_1 + P_2 \cdot \frac{3}{2} + P_3 \cdot 2 - P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{40 + 10 \cdot \frac{3}{2} + 30 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = 3256 \text{ кН}$$

$$R_A = P_1 + P_2 + P_3 - Y_B = 10 + 30 + 40 - 3256 = 4744 \text{ кН}$$

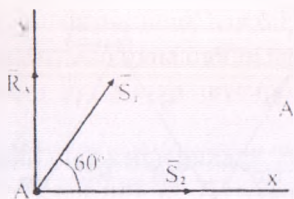
2) Стерженларда ҳосил бўладиган зўриқиш кучларини аниқлаш. Ферманинг тугунларини А, В, С, Д, Е ва F ҳарфлар билан белгиланади. Энг олдин А ёки В тугунларини кесиш мумкин. Чунки бу тугунларда реакциялари аниқланмаган икки стержен (1,2 ёки 10 ва II стерженлар) бор. А тугуни кесилади. А тугунга А шарнирнинг $\bar{R}_A$ реакцияси ва кесилган I ва II - стерженнинг $\bar{S}_1$ ва $\bar{S}_2$ реакциялари қўйилган (64- расм). А тугунга қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0; S_2 + S_1 \cos 60^\circ = 0$$

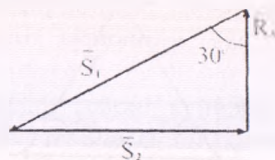
$$\sum Y = 0; R_A + S_1 \sin 60^\circ = 0$$

$$S_1 = -\frac{R_A}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot \frac{47,44}{\sqrt{3}} = -54,78 \text{ кН}$$

$$S_2 = -S_1 \cos 60^\circ = -(-54,78) \cdot 0,5 = 27,39 \text{ кН}$$



64-расм.



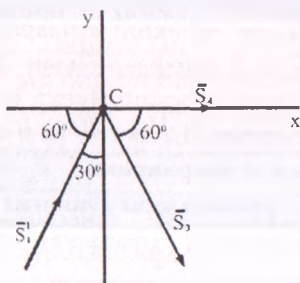
65-расм.

S кучиданги (-) иншора, S реакция кучи расмда кўрсатилган нуналинига тескари қараб нуналланилини кўрсатади, яъни 1 - стержен сиклади. Энди реакция кучларининг нуналинларини тўғри топилиганини куч учбурчатиини ясаб текшириб қўйилади, бу учбурчак ёниқ бўлиши керак (65-расм).

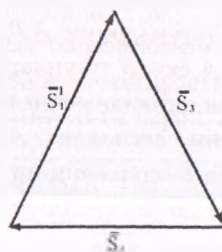
3) Энди қайси туғунга ўтаииз деган савол туғилади. Кесиладиган туғунлар реакцияси аниқланмаган икки стержен бўлиши керак, бу C туғундир. C туғун кесилади, унга 1 - стерженнинг ҳозиргина аниқланган $S_1^I = -S_1$ реакцияси, кесилган 3 - ва 4 - стерженларнинг S_3 ва S_4 реакциялари қўйилган (66- расм).

C туғунга қўйилган кесилувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\begin{cases} \sum X = 0; S_4 + S_3 \cos 60^\circ + S_1^I \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = 0; S_3 \cos 30^\circ + S_1^I \cos 30^\circ = 0 \end{cases}$$



66-расм.



67-расм.

Бу тенгламаларни ечиб, 3 - ва 4 -стерженлардаги реакция кучларни аниқлаймииз.

$$\begin{cases} S_3 = S_1^I = 54,78 \text{ кН}; S_4 = -S_3 \cos 60^\circ - S_1^I \cos 60^\circ = -(S_3 + S_1^I) \cdot \cos 60^\circ \\ S_4 = -(54,78 + 54,78) \cdot 0,5 = -54,78 \text{ кН}; S_4 = -54,78 \text{ кН} \end{cases}$$

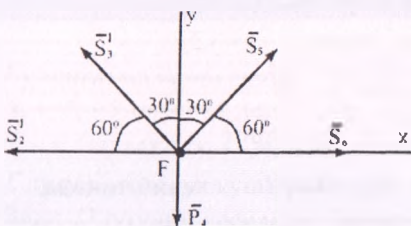
4 – стерженнинг реакцияси манфий бўлиб чиқди. Демак бу стержен сиқилади, яъни S_4 куч C тугунга қараб йўналган бўлади. Энди C тугунга қўйилган кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб, куч учбурчаги ясалади (67 -расм). У ёниқ бўлиши керак.

4) Энди F тугун кесилади, унга берилган P_4, S_2^I, S_3^I реакция кучлари ва кесилган 5 - ва 6 - стерженнинг S_5 ва S_6 реакциялари қўйилган (68-расм).

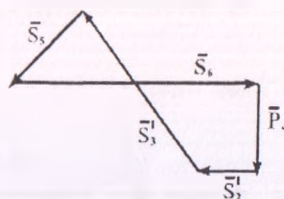
Бу кучлар учун мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0: S_6 - S_2^I + S_3 \cos 60^\circ - S_3^I \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0: S_3^I \cos 30^\circ + S_5 \cos 30^\circ - P_4 = 0;$$



68-расм.



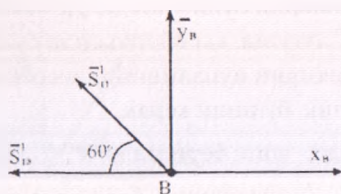
69-расм.

Бу тенгламаларни ечиб, 5- ва 6-стерженлардаги реакция кучлари топилади.

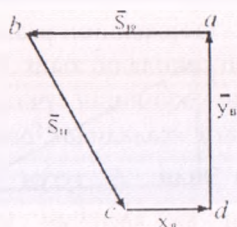
$$\begin{cases} S_5 \cos 30^\circ = P_4 - S_3^I \cos 30^\circ; S_5 = \frac{P_4}{\cos 30^\circ} - S_3^I = \frac{2 \cdot 40}{\sqrt{3}} - 54,78 \text{ kH} \\ S_5 = \frac{80}{1,73} - 54,78 = 46,24 - 54,78 = -8,57 \text{ kH}; S_5 = -8,54 \text{ kH} \\ S_6 = S_2^I - S_3 \cos 60^\circ + S_3^I \cos 60^\circ = S_2^I + (S_3^I - S_3) \cdot \cos 60^\circ; \\ S_6 = 27,39 + (54,78 + 8,54) \cdot 0,5 = 27,39 + 63,32 \cdot 0,5; \\ S_6 = 31,66 + 27,39 = 59,05 \text{ kH}; S_6 = 59,05 \text{ kH} \end{cases}$$

F тугунга қўйилган кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб, куч куп бурчаги ясалади (70-расм).

5) Энди B тугунни кесилади. Унга берилган $\overline{X_B}$ ва $\overline{Y_B}$ реакция кучлари ва кесилган 10 - ва 11 - стерженларнинг $\overline{S_{10}}$ ва $\overline{S_{11}}$ реакция кучлари таъсир қилади (71-расм). B тугун учун иккита мувозанат тенгламаси тузилади:



71-расм.



72-расм.

$$\sum X = 0; X_B - S_{10} - S_{11} \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0; Y_B + S_{11} \cos 30^\circ = 0;$$

Бу тенгламалардан:

$$S_{11} = -\frac{Y_B}{\cos 30^\circ} = -\frac{2 \cdot Y_B}{\sqrt{3}}$$

$$S_{11} = -\frac{2 \cdot 32,56}{1,73} = -37,64 \text{ кН}$$

$$S_{11} = -37,64 \text{ кН} \quad \text{келиб чиқади.}$$

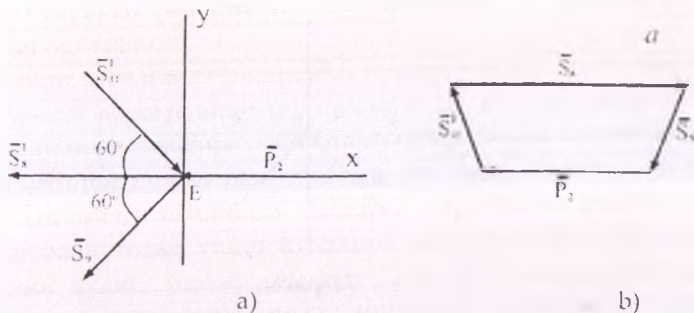
Демак, 11 - стержен сиқилади.

$$S_{10} = X_B - S_{11} \cos 60^\circ = 20 + 37,64 \cdot 0,5$$

$$S_{10} = 20 + 18,82 = 38,82 \text{ кН} \quad S_{10} = 38,82 \text{ кН}$$

$\overline{S_{10}}$ ва $\overline{S_{11}}$ реакция кучларини график усулда аниқланади. Бунинг учун B тугунга қўйилган кучлардан куч кўпбурчаки қурилади (72-расм). Бу кўпбурчак ёпиқ бўлиши керак, чунки B тугунга кучлар системаси мувозанатда турибди. Ихтиёрий нуқта олиб, бу нуқтага ўзига параллел қилиб $M=10 \text{ кН/м}$ масштабда $\overline{X_B}$ куч келтириб қўйилади. Унинг учига ўзига параллел қилиб худди шу масштабда $\overline{Y_B}$ кучи келтирилади. Бу куч учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{10}}$ кучни, унинг учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{11}}$ куч келтирилади. Натижада куч кўпбурчаги ҳосил бўлади (72-расм).

6) Энди E тугуни кесилади. Бу тугунга берилган $\overline{P}$, куч ҳамда 8-, 9- ва 11-стерженларнинг реакция кучлари қўйилган (73-расм, а). Бунда E тугунга қўйилган 11-стерженнинг реакция кучи $\overline{S_{11}}$ миқдор жиҳатдан $\overline{S_{2,1}}$ га тенг ва унга қарама-қарши йўналганлигини эътиборга олиш лозим. E тугун учун иккита мувозанат тенгламалари тузилади:



73-рasm.

$$\begin{cases} \sum X = 0: -P_2 - S_8 - S_9 \cos 60^\circ + S_{11} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = 0: -S_{11} \cos 30^\circ - S_9 \cos 30^\circ = 0; \end{cases}$$

Бу тенгламаларни ечиб:

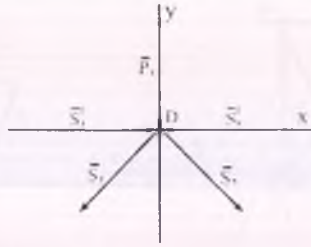
$$S_8 = -P_2 - S_9 \cos 60^\circ + S_{11} \cos 60^\circ = -20 - 37.6 \cdot 0.5 + 37.6 \cdot 0.5 = 38.8 + 18.8 = -20 \text{ KН}$$

$$S_9 = S_{11} = 37.64 \text{ KН} \quad S_8 = -20 \text{ KН} \text{ олинади.}$$

E тугун учун куч кўпбурчаги (73- рasm, б).

Энди D тугунни кесилади. Бу тугун берилган P_1 куч ҳамда 4-, 5-, 6-, 7-, ва 8-стерженларнинг реакция кучлари қўйилган (74-рasm). Мувозанат тенгламаларини тузишда 4-, 5-, ва 8 - стерженларнинг реакция кучлари S_4, S_5 ва S_8 $C.F$ ва E тугунларга қўйилган S_4, S_5 ва S_8 реакцияси кучларга миқдор жihatдан тенг, йуналиши қарама-қарши эканлигини эътиборга олиш лозим. D тугун учун бутта мувозанат тенгламасини тузиш кифоя, бигта номаълум стерженнинг зўриқишини аниқлаш қолди холос. 7-стержендаги реакция кучи аниқланади:

$$\begin{cases} \sum Y = 0: -P_1 + S_5 \cos 30^\circ - S_7 \cos 30^\circ = 0 \\ S_7 \cos 30^\circ = -P_1 + S_5 \cos 30^\circ \\ S_7 = -\frac{P_1}{\cos 30^\circ} + S_5 = -\frac{2 \cdot P_1}{\sqrt{3}} + S_5 \\ S_7 = -\frac{2 \cdot 10}{1.73} + 8.54 = -11.56 + 8.54 = -3.02 \\ S_7 = -3.02 \text{ KН.} \end{cases}$$



74-расм.

Демак, 7- стержен сиқилади.

Стержендаги зуриқиш миқдор жиҳатдан унга реакция кучига тенг бўлади. Сиқиладиган стержендаги зуриқиш кучи шартли равишда манфийй ишора билан белгиланади. Олинган натижалар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Стержень рақами	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Зуриқиш, кН хисобида	-54,78	-27,39	54,78	-54,78	-8,54	59,05	-3,02	-20	-37,84	38,82	-37,64

25-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗУРИҚИШЛАРНИ РИТТЕР УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Агар текис ферманинг барча стержинларидаги зуриқишларни аниқлаш зарур бўлса тугунни кесиш усулидан фойдаланиш энг қулай ҳисобланади. Лекин ферманинг айрим стержинларидаги зуриқишларни аниқлаш лозим бўлса, у ҳолда Риттер 1826-1906 томонидан кашф қилинган ва унинг номи билан аталадиган усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулда ҳам дастлаб ферманинг таянч реакциялари аниқланади.

Риттер усулининг моҳияти шундан иборатки, ферма бирор I-I кесим билан қирқиб икки қисмга ажратилади ва ажратилган қисмнинг мувозанати текширилади. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари ёрдамида учта номаълум катталиқни аниқлаш мумкин. Шу сабабли фермани шундай кесим

билан кесилиш керакки, реакция кучлари номалълум бўлган стерженлар учун унгадан ошмасин.

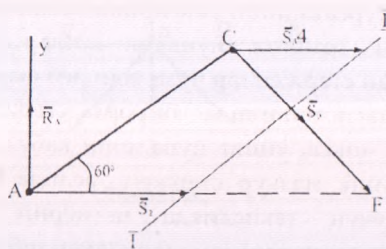
Ферманинг кесилган бир қисмини тушириб қўйиб, унинг ферманинг иккинчи қисмига курсатадиган таъсирини кесилган стерженлар бўйлаб тушириб қўйилган томонга йўналган кучлар билан алмаштирамиз, яъни барча кесилган стерженлар чўзилади деб фараз қиламиз. Тузилган мувозанат тенгламаси ечилганда биророрта стерженнинг реакция кучи манфий ишорали чикса, унинг йўналишини қабул қилинган йўналишга қарама-қарши бўлиб, мазкур стержен аслида сикилади. Ферманинг қолган қисми учун текисликда иккинчиринг жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари тузилиб ва бу тенгламаларни ечиб, стерженларнинг номалълум реакция кучлари аниқланади. Тенгламалар тузишда имкони борича ҳар бир тенгламада номалълумлар учун биттадан ошмаслигига ҳаракат қилиш керак. Тенгламаларни тузишда момент маркази учун учта номалълум реакция кучидан кетма – кет иккитасининг таъсир чизиги кесилишган нуқтани олиш тавсия этилади. Бундай нуқталар момент ёки Риттер нуқталари деб аталади. Агар реакция кучи аниқланадиган учта стержендан иккитаси параллел бўлса, демак уларнинг кесилишган нуқтаси чексизликда ётади, моментлар тенгламасидан бирининг урнига кучларнинг параллел стерженларга перпендикуляр ўқга проекцияси тенгламасини тузиш мумкин, яъни $\sum Y = 0$ ёки $\sum X = 0$.

Риттер усулининг афзаллиги шундаки, у ферманинг исталган стерженидаги зўриқишни бошқи стерженлардаги зўриқишларни ҳисобламай туриб аниқлашга имкон беради. Унинг соддалиги шундаки, баён қилинган усулда тузилган ҳар бир тенгламага фақат битта номалълум киради.

Риттер усули билан 1 – масалада берилган ферманинг 2-, 3-, 4-, 6-, 7- ва 8-стерженларидаги зўриқишларни аниқлаймиз. Юқорида қурганимиздек, фермага $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = 20 \text{ кН}$, $P_3 = 30 \text{ кН}$, $P_4 = 40 \text{ кН}$ кучлар таъсир этади ва унинг таянч реакциялари $R_A = 47,44 \text{ кН}$, $X_B = 20 \text{ кН}$, $Y_B = 32,56 \text{ кН}$ га тенг.

2-, 3- ва 4 - стерженлардаги зўриқишни топиш учун ферманинг 2-, 3- ва 4-стерженларини I-I кесим билан кесилади. Ферманинг унг томони тушириб қўйилади, қолдирилган қисмнинг чап қисмига берадиган таъсирни мос стерженлар бўйлаб йўналган $\bar{S}_2, \bar{S}_3$ ва $\bar{S}_4$ зўриқиш

кучлари билан алмаштирамиз (75-расм). Ферманин чан қисми $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4$ ва R_1 кучлар таъсир остида мувозанатда турибди.



75-расм.

$\vec{S}_2$ зўриқиш кучини аниқлаш учун иккита номаълум $\vec{S}_1$ ва $\vec{S}_2$ кучлари кесилган C нуқтага нисбатан моментлар тенглмаси тузилади.

$$\begin{cases} \sum m_C = 0; -R_1 \cdot \frac{a}{2} + S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = 0; & h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{2} \sqrt{3} \\ S_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}} = \frac{47,44}{1,73} = 27,4 \text{ KN} \end{cases}$$

$\vec{S}_1$ ва $\vec{S}_4$ кучлари кесилган F нуқтага нисбатан моментлар тенглмасини тузиб $\vec{S}_4$ кучини аниқланади:

$$\begin{cases} \sum m_F = 0; -R_1 \cdot a - S_4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = 0; \\ S_4 = \frac{2R_1}{\sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot 47,44}{1,73} = -54,8 \text{ KN}, & S_1 = -54,8 \text{ KN} \end{cases}$$

2- ва 4-стерженлар ўзаро параллел. Бу ҳолда момент нуқтаси чексизликда бўлади. Шунинг учун қия стержендаги, яъни 3-стержендаги зўриқишни топиш учун моментлар тенглмаси эмас, кучларнинг проекциялари тенглмаси тузилади. Кучларни шундай ўққа проекциялаш керакки, бунда ҳам тенгламада фақат битта номаълум катнашадиган бўлсин. Бунда ўқ сифатида вертикал ўқ олинади, 75-расмдаги кучлар вертикал A_y ўқга проекцияланади:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; R_1 - S_3 \cos 30^\circ &= 0 \\ S_3 = \frac{R_1}{\cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot R_1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 47,44}{1,73} &= 54,8 \text{ KN} \end{aligned}$$

Олинган натижани туғунни кесиш усули билан аниқланган натижа (1-жадвал) билан солиштирсак, Риттер усулида ҳисобланган ферма стерженлардаги зўриқишлар қиймати тенг бўлишини кураимиз.

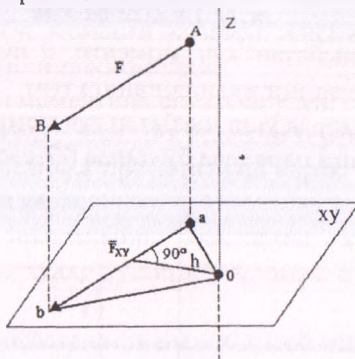
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай иншоотга ферма дейилади?
2. Тугунларни кесини усулининг моҳияти нимадан иборат?
3. Ригтер усулининг моҳияти нимадан иборат?
4. Қандай фермалар ортикча стерженин фермалар дейилади?
5. Ортикча стерженларга эга бўлмаган фермалар стерженлар сонин билан тугунлар сонин орасида қандай боғланиш мавжуд?

26-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ. ЎҚҚА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ

Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасига оид статика масалаларини ечишда кучнинг ўққа нисбатан моменти тушунчасидан фойдаланилади.

Жисмнинг A нуқтасига қўйилган F кучи ва Z ўқи берилган бўлсин (75-расм). Кучнинг шу ўққа нисбатан моментини аниқлаймиз. Бунинг учун Z ўқига перпендикуляр қилиб (xy) текислигини ўтказамиз ва $\vec{F}$ кучини шу текисликка проекциялаймиз.



76-расм.

Бунинг учун кучни икки учидан текисликка перпендикуляр туширамыз (76-расм).

$\vec{ab} = \vec{F}_{xy} - \vec{F}$ кучининг xy текисликдаги проекцияси вектор катталиқ, чунки у қийматга ва йўналишига эга. Кучнинг проекциясидан куч билан xy ўқи кесинган O нуқтасига нисбатан момент олинади. $\vec{F}$ кучининг Z ўқига нисбатан моменти $m_z(\vec{F})$ билан белгиланади. Кучнинг Z ўқига нисбатан моменти қуйидаги формула билан топилади.

$$m_z(\bar{F}) = m_{Oz}(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \quad (60)$$

Бунда $h = F_{xy}$ кучининг O нуқтага нисбатан елкаси. (60) - формула қуйидагича таърифланади.

Кучнинг ўққа нисбатан momenti кучининг шу ўққа перпендикуляр текисликдаги проекциясидан ўқ билан текислиكنинг кесишган нуқтасига нисбатан олинган моментига тенг бўлади.

Кучнинг ўққа нисбатан momenti сколяр миқдор бўлиб, ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда кучнинг ўққа перпендикуляр текисликдаги проекцияси жисмин соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишида айлангиришга интилса, куч momenti мусбат, акс ҳолда манфий шпора билан олинади.

O нуқта билан a, b нуқталарни тутангирилади (76-расм), натижада oav учбурчаги ҳосил бўлади.

Бу учбурчакнинг юзаси

$$\Delta Oav \text{ юзи} = 1/2 F_{xy} h \quad (61)$$

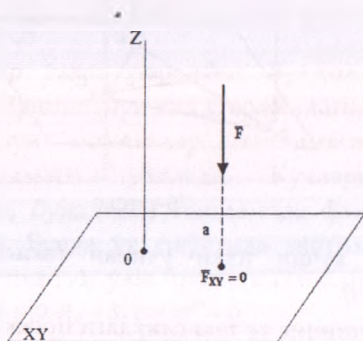
$$2 \cdot \Delta Oav \text{ юзи} = F_{xy} \cdot h = m_z(\bar{F})$$

$$m_z(\bar{F}) = 2 \cdot \Delta Oav \cdot \text{юзи} \quad (62)$$

Демак, ўққа нисбатан куч momenti O нуқтадан ва $\bar{F}_{xy}$ кучдан тuzилган учбурчак юзининг иккиланганига тенг.

Қуйидаги ҳолларда ўққа нисбатан куч momenti нолга тенг бўлади.

1) $\bar{F}$ кучи z ўқига параллел бўлганда (77-расм).

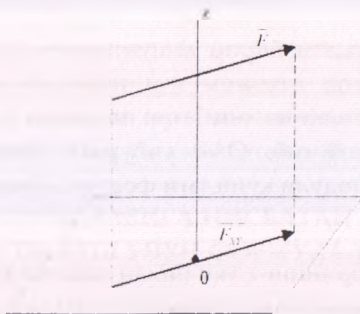


77-расм.

Бу ҳолда кучнинг z ўқига перпендикуляр бўлган текисликдаги проекцияси нолга тенг бўлади.

$$F_{xy}=0$$

2) $\bar{F}$ кучи z ўқи билан кесишган бўлса



78-расм.

Бу ҳолда кучнинг елкаси нолга тенг бўлади, $h=0$.

Бу икки ҳолни қуйидагича бирлаштириш мумкин.

Куч билан ўқ бир текисликда ётган бўлса кучнинг шу ўқга нисбатан моменти нолга тенг бўлади. Бу икки ҳолда ҳам куч жисмини z ўқи атрофида айлантира олмайди. Куч жисмини фақат ўқ бўйлаб силжитади. Ўққа нисбатан куч моментининг механик маъноси қуйидагича таърифланади.

Ўққа нисбатан куч моменти кучнинг жисмини шу ўқ атрофида айлантириш қобилиятини тавсифлайди.

Ўқга нисбатан куч моментини аниқлаш учун;

1. Ўқга перпендикуляр текислик ўтказиш керак.
2. Кучни шу текисликка проекциялаш керак, яъни проекциянинг $F_{\perp}$ модулини ҳисоблаш керак.

3. Ўқ билан текисликнинг кесишган нуқтасидан кучнинг проекциясига перпендикуляр тушириб, кучнинг елкаси аниқланади h топилади.

4. Кучнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш лозим.

5. Ўққа нисбатан куч моментининг ишорасини аниқлаш керак.

27-§. НУҚТАГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ БИЛАН ШУ НУҚТАДАН УТГАН ЎҚГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТ

Теорема: Кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти унинг шу ўқда олишган ихтиёрий нуқтага нисбатан момент векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

Исбот: Фаюдаги бирор A нуқтага кучи қўйилган бўлсин (79-расм).

Бу кучни O нуқтага нисбатан моменти шу нуқтага қўйилган вектор қатталиқ бўлиб, OAB учбурчак текислигига перпендикуляр йўналган, унинг модули қуйидаги формула билан топилади;

$$M = 2 \cdot S_{OAB} \cdot \cos \gamma \quad (63)$$

Момент векторининг z ўқи билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак момент векторининг z ўқидаги проекцияси қуйидагича ифодаланади.

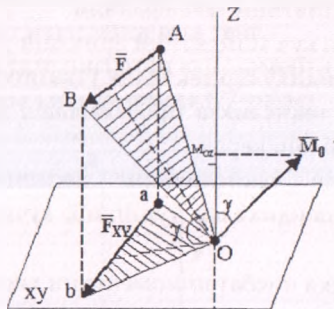
$$[M_0(\vec{F})]_z = [M_0(\vec{F})] \cos \gamma = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma \quad (64)$$

OAB ва оав учбурчакларнинг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга перпендикуляр йўналган вектор ва ўқ орасидаги γ бурчакка тенг. OAB учбурчакнинг xy текисликдаги проекцияси оав га тенг бўлганлиги учун

$$2S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma = 2S_{\Delta oab} \quad (65)$$

У ҳолда

$$[M_0(\vec{F})]_z = M_0 \cos \alpha \quad (66)$$



79-расм.

79-расмда $F_{xy} \cdot h = 2S_{\Delta oab}$ бўлганлиги учун (60) га асосан

$$M_z(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta oab} \quad (67)$$

(66) ва (67) ни солиштириб қуйидаги олинади.

$$M_z(\vec{F}) = [M_0(\vec{F})]_z \quad (67')$$

Худди шунингдек кучнинг қолган координата ўқларга нисбатан моментлари ҳисобланади. Натижада

$$M_x(\vec{F}) = [M_0(\vec{F})]_x, \quad M_y(\vec{F}) = [M_0(\vec{F})]_y, \quad M_z(\vec{F}) = [M_0(\vec{F})]_z,$$

формула келиб чиқади.

Демак (67') – формула нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтган ўқга нисбатан куч моменти орасидаги муносабатни ифодалайди: Нуқтага нисбатан куч моментининг шу нуқтадан ўтган ўқдан проекцияси кучнинг шу ўқга нисбатан олинган моментига тенг.

28-§. КООРДИНАТА ЎҚЛАРИГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ УЧУН ФОРМУЛАЛАР

$\vec{F}$ кучининг координата ўқларидаги проекциялари F_x , F_y , F_z ва шу куч қўйилган A нуқтанинг x, y, z координаталари берилган бўлсин (80-расм). Координата бошининг O нуқтада олиб x, y, z ўқларини ўтказамиз. Координата ўқларини бирлик векторини i, j, k билан белгिलाيمиз.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \text{ ни}$$

детерминанд шаклида ёзамиз.

$$M_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Детерминантнинг биринчи йўлини элементлари бўлча ёйиб чиқамиз.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (yZ - zY) \cdot i + (xZ - zX) \cdot j + (xY - yX) \cdot k \quad (68)$$

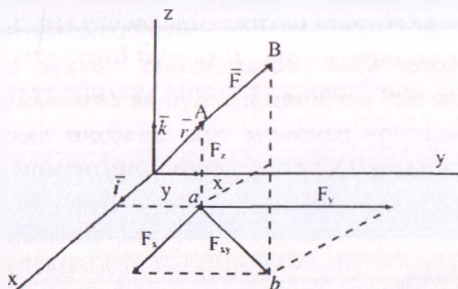
(68) - формулада бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар кучининг координата ўқларидаги моменти бўлади.

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

$$m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z \quad (68')$$

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

(68')-формулалар кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасидир.

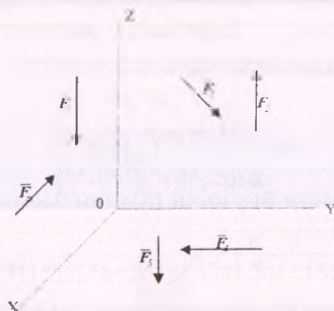


80-расм.

29-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИ БЕРИЛГАН МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Фазода ихтиёрый жойлашган $F, F_1, F_2, \dots, F_n$ кучлар системаси берилган бўлсин (81-расм). Шу кучларни 0 нуктага келтириш лозим бўлсин. Фазода ихтиёрый жойлашган кучларни текисликда ихтиёрый жойлашган кучларга ўхшаш бош вектор $\vec{R}$ га тенг бўлган битта кучга ва момент $\vec{M}_0$ га тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\begin{aligned} R &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_n = \sum F \\ \vec{R} &= \sum \vec{F} \end{aligned} \quad (69)$$

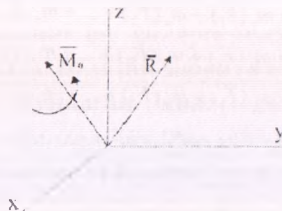


81-расм.

Бош момент эса келтирилиши керак бўлган кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \vec{m}_{01}(\vec{F}_1) + \vec{m}_{02}(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_{0n}(\vec{F}_n) = \sum \vec{m}_{0i}(\vec{F}_i) \\ \vec{M}_0 &= \sum \vec{m}_{0i}(\vec{F}_i) \end{aligned} \quad (70)$$

Шундай қилиб; фазода ихтиёрый жойлашган кучлар системасини бирор 0 марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор $\vec{R}$ га тенг битта куч билан, момент эса бош момент $\vec{M}_0$ га тенг битта жуфт кучга келтирилади (82-расм).



82-расм.

30-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Бош векторни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (69)-вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаймиз.

$$\begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y \\ R_z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum Z \end{aligned} \quad (71)$$

(71)-формула билан бош векторнинг координата ўқларидаги проекциялари топилади.

Бош векторнинг модули қуйидаги формулалар билан топилади.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{ёки} \\ R &= \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2} \end{aligned} \quad (72)$$

Бош векторнинг йўналиши эса қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R} \quad (73)$$

бунда, α, β, γ , - R - билан x, y, z ўқлари орасидаги бурчаклар.

2. Бош моментни ҳисоблаш.

Бунинг учун вектор тенгламанинг икки қисмини координата ўқларига проекциялаймиз ва нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтган ўққа нисбатан куч моменти орасидаги муносабатдан фойдаланиб бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.

$$\begin{aligned}
M_{0x} &= m_1(F_1) + m_1(F_2) + \dots + m_1(F_n) = \sum m_1(\vec{F}) \\
M_{0y} &= m_1(F_1) + m_1(F_2) + \dots + m_1(F_n) = \sum m_1(\vec{F}) \\
M_{0z} &= m_2(F_1) + m_2(F_2) + \dots + m_2(F_n) = \sum m_2(\vec{F}) \\
M_{0x} &= \sum m_x(\vec{F}) \\
M_{0y} &= \sum m_y(\vec{F}) \\
M_{0z} &= \sum m_z(\vec{F})
\end{aligned} \tag{74}$$

Бунда M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} - бош момент M_0 нинг x, y, z ўқларидаги проекцияси.

Бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияси ташкил этувчи кучларнинг ўша ўққа нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

Бош моментнинг катталиги қуйидаги формула билан топилади.

$$\begin{aligned}
M_0 &= \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}; \text{ ёки} \\
M_0 &= \sqrt{[\sum m_x(\vec{F})]^2 + [\sum m_y(\vec{F})]^2 + [\sum m_z(\vec{F})]^2} \tag{75}
\end{aligned}$$

Бош моментнинг йуналиши қуйидаги формула билан топилади.

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos \beta_1 = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_{0z}}{M_0} \tag{76}$$

Бунда $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - бош момент M_0 нинг мос равишда x, y, z ўқлари билан ташкил этган бурчаги.

31-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНING АНАЛИТИК МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бош вектор ва бош момент бир вақтда нолга тенг бўлиши зарур ва етарли;

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0 \tag{77}$$

(77)-тенглик кучларнинг геометрик кўринишдаги мувозанатлик шартини ифодалайди. (72)- ва (75)- формулалардан фойдаланиб кучларнинг аналитик мувозанат шarti қуйидаги кўринишда ёзилади.

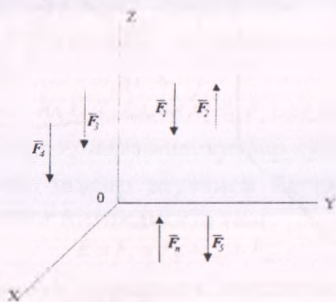
$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum Z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sum m_x(\vec{F}) &= 0 \\ \sum m_y(\vec{F}) &= 0 \\ \sum m_z(\vec{F}) &= 0 \end{aligned} \tag{78}$$

(78)-формула фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг аналитик мувозанатлик шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг x, y, z ўқларидаги проекциялари -

нинг йиғиндиси ва кучларнинг шу ўқларга нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Кучлар параллел йўналган ҳол. F_1, F_2, F_3 кучлар фазода жойлашган ва ўзаро параллел бўлсин (83-расм). Бу кучларнинг мувозанат шартини аниқлаймиз. Бунинг учун координата ўқларидан биринчи, масалан Z ўқини, кучларга параллел қилиб йўналтирилади. Параллел кучларга фазода ихтиёрий йўналган кучларнинг аналитик мувозанат шартини тадбиқ қилинади.

$$\left. \begin{aligned} \sum Z &= 0 \\ \sum m_i(F) &= 0 \\ \sum m_i(\bar{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$



83-расм.

(79)-формула фазода параллел йўналган кучлар системасининг аналитик мувозанат шартини ифодалайди.

Фазода параллел йўналган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг шу кучларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва қолган иккита ўқга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

32-§. ОҒИРЛИК МАРКАЗИ. ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРКАЗИ

Икки параллел кучларни қўшиш ҳақидаги қоидадан фойдаланиб бир қанча параллел кучлар қўшилади.

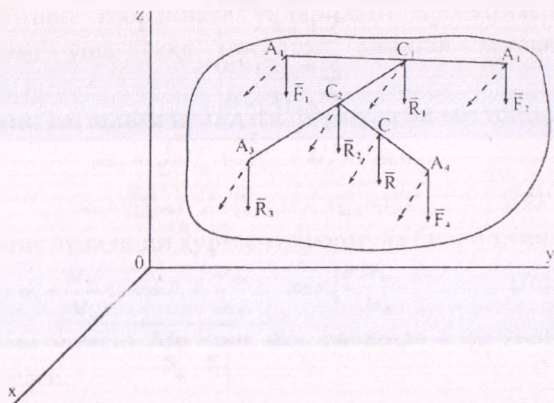
Бир томонга қараб йўналган ва бир-бирига параллел бўлган F_1, F_2, F_3, F_4 кучлар берилган бўлсин (84-расм). Бу кучлар A_1, A_2, A_3, A_4 нукталарга қўйилган.

F_1 ва F_2 кучларнинг тенг таъсир этувчиси R_1 , шу кучлар модулларининг йиғиндисига тенг $R_1 = F_1 + F_2$ бўлиб, F_1 ва F_2 кучлари

қўшилган ва A_1 ҳамда A_2 нуқталарни бирлаштирувчи түгри чизикдаги C_1 нуқтага қўйилган бўлади. R_1 кучи қолган кучларга параллел бўлиб, кучлар йуналган томонга қараб йуналандир. C_1 нуқтанинг ҳолати қуйидаги муносабатдан аниқланади.

$$A_1 C_1 = \frac{F_2}{R_1} \cdot A_1 A_2 \quad (80)$$

R_1 ва F_2 кучларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчиси R_2 ни аниқлаймиз.



84-расм.

R_2 модули R_1 ва F_2 кучларининг модуллариининг йиғиндисига тенг бўлади.

$$R_2 = R_1 + F_2 = F_1 + F_2 + F_3$$

R_2 кучи R_1 ва F_2 кучлари қўшилган C_1 ва A_2 нуқталардан ўтувчи түгри чизикдаги C_2 нуқтага қўйилган бўлиб, кучларга параллел равишда кучлар йуналган томонга қараб йуналади. C_2 нуқтанинг ҳолати қуйидаги муносабатдан аниқланади:

$$C_1 C_2 = \frac{F_3}{R_2} \cdot C_1 A_3$$

R_2 ва F_3 кучларини қўшиб, R тенг таъсир этувчисини аниқланади.

Унинг модули R_2 ва F_3 кучларининг модуллариининг йиғиндисига тенг

$$R = R_2 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (80)$$

$\bar{R}$ тенг таъсир этувчи $\bar{R}_2$ ва $\bar{F}_3$ кучларга параллел бўлиб, улар йуналган томонга қараб йуналган ва C_2 A_4 кесмадаги C нуқтага қўйилган бўлади. C нуқта қуйидаги муносабатдан аниқланади:

$$C_2 C = \frac{F_4}{R} \cdot C_2 A_4$$

Худди шунингдек, бу усул билан бир томонга қараб йўналган n та параллел $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучларни қўшилиб битта R тенг таъсир этувчи кучга келтириш мумкин. Бу кучнинг модули берилган кучлар модулларининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i \quad (81)$$

Параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган C нуқтага параллел кучларнинг маркази дейилади (84-расм).

33-§. ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРКАЗИНИНГ КООРДИНАТАЛАРИНИ ВА РАДИУС-ВЕКТОРИНИ АНИҚЛАШ

Параллел кучлар маркази тушунчаси механиканинг баъзи масалаларини ечишда, жумладан, жисмларнинг огирлик марказини аниқлашда қўлланилади.

Қаттиқ жисмнинг $A_1(X_1, Y_1, Z_1), A_2(X_2, Y_2, Z_2), \dots, A_n(X_n, Y_n, Z_n)$ нуқталарига бир томонга йўналган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ параллел кучлар қўйилган бўлсин.

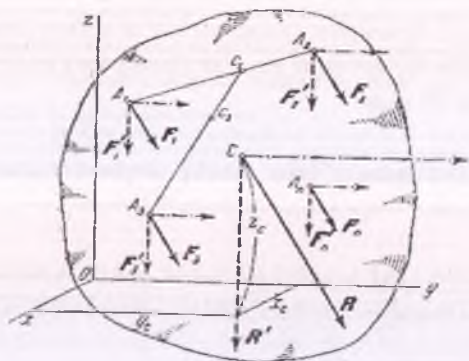
Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси барча кучларга параллел бўлиб, улар модулларининг йиғиндисига тенг:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

Тенг таъсир этувчи куч қўйилган C нуқтанинг координаталарини, яъни параллел кучлар марказининг координаталарини x_c, y_c, z_c билан белгиланади. C нуқтанинг ҳолати кучларнинг йўналишига боғлиқ эмас, шунинг учун кучларнинг ҳаммасини қўшилган нуқталар атрофида O_z ўқига параллел қилиб бурилади. Бурилган $\vec{F}_1^1, \vec{F}_2^1, \dots, \vec{F}_n^1$ кучларга Варингтон теоремасини тадбиқ этилади. Бурилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси R^1 бўлгани учун ундан Y ўқига нисбатан момент олиб,

$$m_y(R^1) = \sum m_y(\vec{F}_i^1); \quad (82)$$

тенглик ёзилади. Бу ҳолда кучларнинг елкаси, қўйилган нуқталарнинг абсциссасига тенг бўлади. Расмдан $m_y(R^1) = R^1 \cdot X_c = R \cdot X_c$, чунки $R^1 = R$, худди шунга ўхшаш ҳар бир кучнинг Y ўқига нисбатан моменти $m_y(\vec{F}_i^1) = F_i^1 \cdot X_i = F_i X_i$ бўлади, чунки $F_i^1 = F_i$ ва ҳоказо.



85-расм.

Бу микдорларнинг ҳаммаси (82) тенгликга қўйилса,

$R \cdot X_c = F_1 X_1 + F_2 X_2 + \dots + F_n X_n$ бўлади.

Бундан X_c яъни параллел кучлар марказининг абсциссаси аниқланади:

$$X_c = \frac{F_1 X_1 + F_2 X_2 + \dots + F_n X_n}{R} = \frac{\sum F_i X_i}{R}.$$

(83)

y_c координатани аниқлаш учун кучлардан x ўқига нисбатан моментлар олинади:

$$\begin{aligned} R \cdot Y_c &= F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + \dots + F_n Y_n \\ Y_c &= \frac{F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + \dots + F_n Y_n}{R} = \frac{\sum F_i Y_i}{R}; \end{aligned} \quad (84)$$

z_c координатани аниқлаш учун ҳамма кучларни қўйилган нуқталари атрофида y ўқига параллел бўлганча бурамиз ва бу кучларга (нуқта билан пунктир қилиб тасвирланган) Варингтон теоремасини тадбиқ этиб, улардан x ўқга нисбатан моментлар олинади:

$$-R \cdot Z_c = -F_1 Z_1 + (-F_2 Z_2) + \dots + (-F_n Z_n) \quad (85)$$

бундан Z_c аниқланади.

$$Z_c = \frac{F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + \dots + F_n Z_n}{R} = \frac{\sum F_i Z_i}{R} \quad (86)$$

(84) - (86) - формулалар билан параллел кучлар марказининг координаталари топилади, бунда R - (85) тенглик билан аниқланади.

(85) - (86) - формулаларнинг ҳар бирини мос равишда i, j, k , бирлик векторларига қўпайтириб ва қўшиб, параллел кучлар марказининг радиус - вектори аниқланади:

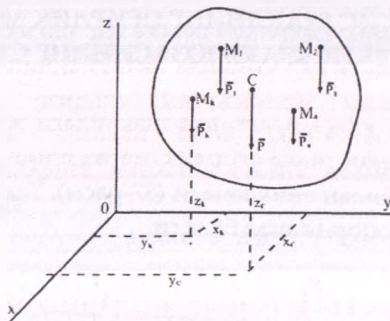
$$\vec{r}_i = X_i \cdot \vec{i} + y_i \cdot \vec{j} + Z_i \cdot \vec{k} \quad \vec{r}_i = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_n r_n}{R} = \frac{\sum_{k=1}^n F_k r_k}{R} \quad k=1, n \quad (87)$$

(84) - (87) - формулалардан кўринадикки, параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган C нуқтанинг ҳолати кучларнинг йўналишига боғлиқ бўлмай, уларнинг миқдори ва қўйилган нуқталарининг координаталарига боғлиқдир. Шунга асосан, агар кучлар қўйилган нуқталарни ўзгартирмай, барча кучлар бирор α бурчакка бурилса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳам шу бурчакка бурилиб қўйилган нуқтасининг ҳолати ўзгармайди.

34-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ КООРДИНАТАЛАРИНИНГ УМУМИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

Бирор қаттиқ жисмнинг ҳар бир бўлагига ернинг марказига қараб йўналган тортиш кучи (оғирлик кучи) таъсир этади. Бу кучларни $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ билан белгиланади. Ернинг радиусига нисбатан жисмнинг ўлчамлари жуда кичик бўлгани учун бу кучларни параллел кучлар деб қараш мумкин. Бу параллел кучларнинг маркази – C нуқта жисмнинг оғирлик маркази бўлади (86-расм).

Агар (86)-(87)- формулалардаги $\vec{F}_k$ кучларнинг ўрнига $\vec{P}_k$ кучларни олинса, жисмнинг оғирлик маркази координаталари топилади:



86-расм.

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k x_k \\ Y_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k y_k \\ Z_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k z_k \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Бу ерда - $P_k (k=1,2,\dots,n)$ – жисм заррачаларининг огирликлари, x_k, y_k, z_k – заррачалар огирликлари қўйилган нуқталарининг координаталари, $P = \sum P_k$ жисмнинг огирлиги.

(88)-формулалар билан ҳар қандай қаттиқ жисм огирлик марказининг координаталарини аниқлаш мумкин. Шунинг учун бу формулаларга огирлик марказларининг координаталари учун умумий формулалар дейилади.

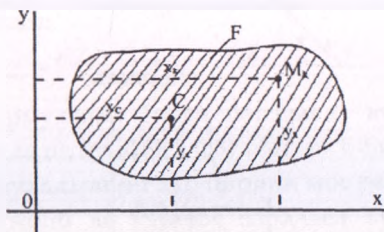
Бир жинсли жисмнинг огирлик марказини аниқлаймиз. Бир жинсли жисмнинг огирлиги қуйидаги формула билан аниқланади: $P = \gamma V$, бунда V - жисмнинг ҳажми, γ - бир бирлик ҳажмнинг огирлиги. Қаттиқ жисмнинг ҳар бир бўлагининг огирлиги шу бўлакнинг ҳажмига пропорционал бўлади: $P_k = \gamma \cdot v_k$, бунда v_k - жисмнинг M_k бўлагининг ҳажми. P ва P_k ларнинг бу қийматларини (88)-формулаларга қўйиб, суратдаги γ умумий кўпайтвучини кавсдан чиқариб, махраждаги γ билан қисқартирилса:

$$X_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k X_k, Y_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k Y_k, Z_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k Z_k \quad (89)$$

формулалар келиб чиқади. Бир жинсли жисмнинг огирлик маркази жисмнинг фақат геометрик шаклига боғлиқ бўлиб, γ нинг қийматига боғлиқ эмас. Координаталари (89) - формулалар билан аниқланадиган S нуқта ҳажмнинг огирлик маркази деб аталади.

35-§. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ОГИРЛИК МАРКАЗИ. ЎҚҚА НИСБАТАН ТЕКИС ШАКЛ ЮЗАСИНИНГ СТАТИК МОМЕНТИ

Бир жинсли юпқа пластинка шаклидаги жисмни текис шакл деб қараш мумкин. Текис шакл огирлик марказининг ҳолати икки X_c ва Y_c координаталари билан аниқланади (87-расм). Текис шаклнинг огирлиги унинг юзасига пропорционал бўлади.



87-расм.

$P = \gamma F$, бунда F – текис шаклнинг юзаси, γ – бир бирлик юзанинг оғирлиги. Текис шаклнинг юзасини элементар юзаларга ажратамиз. Ҳар бир M_k элементар юзанинг оғирлиги қуйидаги формула билан топилади: $P_k = \gamma \cdot F_k$, бунда F_k – унинг юзаси. M_k элементар юза оғирлик марказининг координаталари X_k, Y_k билан белгиланади. P ва P_k ларнинг қийматларини (88) формулаларга қўйилади:

$$X_c = \frac{\sum P_k X_k}{\gamma \cdot F} = \frac{\gamma \cdot \sum F_k X_k}{\gamma \cdot F} = \frac{\sum F_k X_k}{F}$$

Демак текис шакл оғирлик марказининг координаталари:

$$X_c = \frac{\sum F_k X_k}{F}, Y_c = \frac{\sum F_k Y_k}{F}.$$

(90)

формулалар билан топилади. Координаталари (90)-формулалар билан аниқланадиган C нуқта юзанинг оғирлик маркази деб аталади. (90) формулалардаги $S_x = \sum F_k X_k, S_y = \sum F_k Y_k$ катталиклар текис шакл юзасининг X ва Y ўқларига нисбатан статик моменти дейилади. Статик моментнинг улчов бирлиги M^3 .

Демак (90) - формулаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$X_c = \frac{S_y}{F}; Y_c = \frac{S_x}{F} \quad (91)$$

Бунда $S_x = F \cdot Y_c, S_y = F \cdot X_c$ (91) келиб чиқади. Текис шакл юзасининг бирор ўқга нисбатан статик моменти шаклнинг юзаси билан унинг оғирлик марказидан шу ўқгача бўлган масофанинг қўпайтмасига тенг. Агар текис шаклнинг статик моменти ва юзаси маълум бўлса, у ҳолда текис шакл оғирлик марказининг координаталари (91)-формулалар ёрдамида топилади. Текис шакл юзалари шакл оғирлик марказидан ўтган ўқларига нисбатан статик моментлари нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда:

$$x_c = 0, y_c = 0.$$

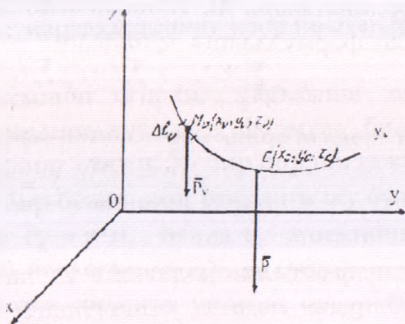
36-§. ЧИЗИҚНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ

Узунлиги L га тенг бўлган бир жинсли AB чизиқ берилган бўлсин (88-расм). Чизиқнинг кундаланг кесимнинг юзаси ўзгармасдир. Чизиқнинг оғирлиги қуйидаги формула билан топилади: $P = \rho \cdot L$. Бунда ρ – бир бирлик узунликнинг оғирлиги, AB чизиқнинг узунликлари l_k тенг бўлган M_k элементлар бўлакчаларга бўламиз. Ҳар бир бўлакчанинг оғирлиги қуйидаги формула билан топилади: $P_k = \rho l_k$. Бўлакчалар

огирлик марказининг координаталари x_c, y_c, z_c билан белгиланади. I' ва I'' нинг қийматлари (88)-формулаларга қўйилади:

$$x_c = \frac{\sum p l_k x_k}{p l} = \frac{p' \sum l_k x_k}{p l}$$

(92)



88-расм.

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k x_k, \\ y_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k y_k, \\ z_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k z_k \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Бу ерда L - бутун чизикнинг узунлиги, Координаталари (93)-формулар билан аниқланадиган C нуқтага чизикнинг огирлик маркази дейилади.

37-§. ЖИСМЛАРНИНГ ОГИРЛИК МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ

1) Симметрия усули. 1-теорема: Агар жисм симметрия ўқида эга бўлса, жисмнинг огирлик маркази шу симметрия ўқида ётади. Симметрия ўқида эга бўлган жисм берилган бўлсин (88-расм). Координата ўқларининг бирини мисол учун z ўқини симметрия ўқи бўйича йўналтирилади. Жисм огирлик марказининг икки координатаси (94)-формулар билан аниқланади;

$$x_c = \frac{\sum v_k x_k}{V}; y_c = \frac{\sum v_k y_k}{V} \quad (94)$$

Бу жисмдан z ўқида нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_k' нуқталар олинади. Уларнинг атрофидан бир - бирига тенг бўлган V_k

элементар ҳажм ажратиб олинади. M_k ва M_k^1 нуқталар ўқига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизикда етибди ва бу нуқталардан ўқигача бўлган масофалар тенг;

$$M_k N_k = N_k M_k^1.$$

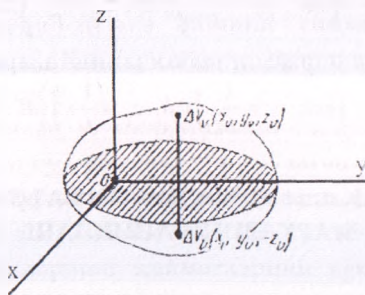
Демак, бу нуқталарнинг x_k ва y_k координаталари ўзаро тенг, ишоралари эса тескари бўлади. У ҳолда ҳар бир x_k , y_k , z_k координаталар билан аниқланадиган V_k ҳажмли бўлакчага мос келади. Шу сабабли $\sum V_k x_k = 0$ ва $\sum V_k y_k = 0$ тенг бўлади. $\sum V_k x_k = V_1 X_1 + V_2 X_2 + \dots + V_N X_N = 0$ шунинг учун $x_k = 0$ ва $y_k = 0$ жисмнинг оғирлик маркази z ўқига ётади ва унинг бу ўқдаги ҳолати битта координата билан аниқланади:

$$z_c = \frac{1}{V} \sum V_k z_k \quad (94')$$

2-теорема: Агар жисм симметрия текислигига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази шу симметрия текислигида ётади (89-расм). Бунини исбот қилиш учун симметрия текислиги орқали Ox текисдик ўтказилади. Бу текисликка перпендикуляр қилиб z ўқини қўлади. Жисмдан Ox текислигига нисбатан симметрик жонланган икки M_k ва M_{k1} нуқталар олинади. Бу нуқталарнинг атрофидан v_k элементар ҳажмларни ажратиб оламиз. M_k ва M_{k1} нуқталар Ox текислигига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизикда ётибди. Бу нуқталардан симметрия текислигигача бўлган масофалар ўзаро тенг, яъни $M_k N_k = M_{k1}^1 N_{k1}$ (89-расм). Демак, бу нуқталарнинг z_k координаталари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескаридир.

$$\sum v_k z_k = v_1 z_1 + v_2 z_2 + \dots + v_n z_n - v_1 z_1 - v_2 z_2 - \dots - v_n z_n = 0$$

$$z_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k z_k = 0. \quad x_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k y_k \quad (95)$$



89-расм.

Олинган бу натижа шуни кўрсатадики, жисмнинг оғирлик маркази симметрия текислигида ётади. Худди шунингдек, жисм симметрик марказига эга бўлса, унинг оғирлик маркази шу симметрия марказида ётиши исботланади.

1) Бўлакларга бўлиш усули. Агар жисмни оғирлик марказларини олдиндан маълум бўлган бир неча бўлакларга бўлиш мумкин бўлса, жисм оғирлик марказининг координаталари (95)-формулалар ёрдамида аниқланади.

2) Манфий юза усули. Бу усул бўлакларга бўлиш усулининг хусусий ҳоли. Бу усул тешиги бор жисмларга қўлланилади. Усулнинг моҳияти шундан иборатки, жисмга тешиксиз бутун жисм ва тешиги бор деб қаралади; тешик юзаси шартли равишда манфий ишора билан олинади. Бу усулни тадбиқ этиш учун бутун жисмнинг ва тешик қисмининг оғирлик марказлари маълум бўлиши керак.

3) Интеграллаш усули. Агар жисмни бир нечта оғирлик марказлари маълум бўлган бўлақчаларга ажратиш мумкин бўлмаса, олдин у ихтиёрий кичик Δv_k ҳажмларга бўлинади ва жисм учун (95)-формула қуйидаги кўринишни олади.

$$X_c = \frac{1}{V} \cdot \sum v_k Z_k \quad \text{ва ҳоказо,} \quad (96)$$

Бунда x_k, y_k, z_k - Δv_k ҳажм ичида ётган бирор нуқтанинг координаталари. (96)-формулаларга Δv_k нолга интилириб лимитга ўтсак, қуйидагиларни оламиз:

а) Ҳажм оғирлик марказининг координаталари учун:

$$x_c = \frac{1}{V} \cdot \int_V x dV, y_c = \frac{1}{V} \cdot \int_V y dV, z_c = \frac{1}{V} \cdot \int_V z dV, \quad (97)$$

б) Юза оғирлик марказининг координаталари учун:

$$x_c = \frac{1}{F} \cdot \int_F x dF, y_c = \frac{1}{F} \cdot \int_F y dF, z_c = \frac{1}{F} \cdot \int_F z dF \quad (98)$$

в) Чизик оғирлик марказининг координаталари учун:

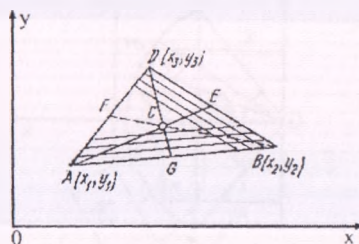
$$x_c = \frac{1}{L} \cdot \int_L x dl, y_c = \frac{1}{L} \cdot \int_L y dl, z_c = \frac{1}{L} \cdot \int_L z dl \quad (99)$$

38-§. ОДДИЙ ШАКЛЛИ БИР ЖИНСЛИ БАЪЗИ ЖИСМЛАРНИНГ МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ

1. Учбурчак юзасининг оғирлик маркази. Ихтиёрий ABD учбурчак юзасининг оғирлик марказини аниқлаш учун учбурчак

яъини AB томонига параллел бўлган тўғри чизик кесмаси билан бўламиз (90-рasm). Бундай кесманинг огирлик маркази унинг ўртасида, яъин DE медианада ётади. Демак, учбурчак юзасининг огирлик маркази медианага ётади. Худди шунингдек, учбурчак юзасини AD томонига параллел бўлган тўғри чизик кесмаси билан ажратсак, бу тўғри чизик кесмаларининг огирлик маркази BK медианада ётади.

Демак, учбурчак юзасининг огирлик маркази унинг уч медианаларининг кесинган нуқтасида ётади. Геометриядан маълумки, медианаларнинг кесинган нуқтаси асосдан медиананинг $\frac{1}{3}$ қисмида ётади, яъни $CE = \frac{1}{3} DE$.



90-рasm.

Агар учбурчак учларининг $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$ координаталари берилган бўлса, унинг огирлик марказининг $C(x_c, y_c)$ координаталари қуйидаги формулалардан топилади:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (100)$$

(100)-формулалар аналитик геометрияда келтириб чиқарилган.

2. Айлана ёйининг огирлик маркази. Радиуси R га, бурчаги 2α га тенг бўлган айлана ёйи AB шинг огирлик марказини аниқлаймиз. Бунинг учун Ox ўқини айлана ёйининг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирилади (91-рasm). У ҳолда айлана ёйининг огирлик маркази шу Ox ўқда ётади. ($yc=0$).

(101)-формула билан x_c координатани топиамиз. Бунинг учун 101-сипдаги $dl = R dy$ га тенг бўлган элементар бўлакча ажратиб олинади.

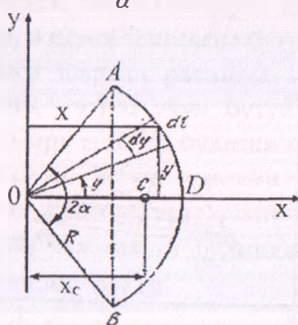
Унинг ҳолати γ бурчаги билан аниқланади. Элементар бурчакга огирлик марказининг координатаси $x = R \cos \gamma$ га тенг (99)-формуланинг биринчисида x ва de ларнинг қийматларини қўйиб, бутун ёйининг узунлиги бўйича интегралланади:

$$X_c = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{1}{L} \cdot \frac{\alpha}{-\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \gamma \cdot R d\gamma = \frac{R^2}{L} \cdot \frac{\alpha}{-\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \gamma d\gamma = \frac{R^2}{L} \cdot \sin \gamma \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R^2}{L} \cdot [\sin \alpha - \sin(-\alpha)]$$

$$X_c = \frac{R^2}{L} \cdot [\sin \alpha + \sin \alpha] = \frac{R^2}{L} \cdot 2 \sin \alpha = \frac{2R^2}{L} \cdot \sin \alpha$$

Бунда L — AB ёйининг узунлиги $L = R 2\alpha$ га тенг. Демак, айлана ёйининг огирлик маркази симметрия ўқида, ётади ва айлана марказидан масофада бўлади. Бунда α бурчаги радианда ўлчанади.

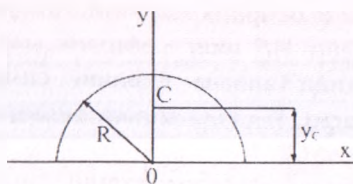
$$X_c = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (101)$$



91-расм.

Агар $2\alpha = \pi$ га тенг бўлса, ярим Айлана ҳосил бўлади (92-расм).
Буни (99)-формулага қўйсак,

$$y_c = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot R = \frac{2}{3.14} R = 0.64 R \quad y_c = 0.64 R$$



92-расм.

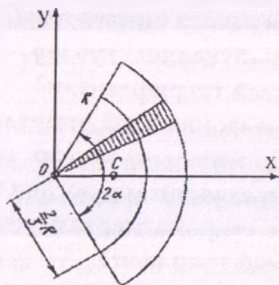
(101)-формула билан ярим айлана ёйининг огирлик марказининг координатаси топилади.

3. Доира сектори юзасининг огирлик маркази. Радиуси R , марказий бурчаги 2α га тенг доира сектори юзаси огирлик марказини

аниқлаш учун x ўқни сектор юзасининг симметрия ўқи бўйлаб юнатилади (93-рasm).

Сектор юзасининг бир қанча элементар секторлардан ташкил топган деб қаралади. Ҳар бир элементар секторнинг баландлиги R га тенг учбурчак деб қаралса, унинг огирлик маркази O нуқтадан $\frac{2}{3}R$ масофада ётади. OAB Доира секторининг огирлик маркази радиуси $\frac{2}{3}R$ га тенг AE айлана ёйининг огирлик маркази билан устма-уст тушади. (101) га асосан

$$x_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (101)$$



93-рasm.

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса ярим доира ҳосил бўлади. (101)- формуладан ярим доира огирлик марказининг координатаси аниқланади.

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot R = \frac{4}{3\pi} \cdot R = \frac{4}{3 \cdot 3.14} R = 0.42R \quad (102)$$

$$x_c = 0.64R \quad (y_c = 0).$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Ўқга нисбатан куч моменти деб нимага айтілади? Бу моментнинг шпораси қандай танланади?
2. Қандай ҳолларда ўқга нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади?
3. Нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан утган ўқга нисбатан куч моменти орасида қандай боғланиш бор?

4. Берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор-моменти xOy координата текислигида ётса шу кучларнинг Oz ўққа нисбатан моменти нимага тенг бўлади?
5. Агар кучнинг моменти икки координата уқларига нисбатан нолга тенг бўлса, берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор моменти нимага тенг бўлади?
6. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси берилган марказга қандай келтирилади?
7. Кучлар системаси бош векторининг ҳар қайси координата ўқига проекцияси нимага тенг?
8. Кучлар системаси бош моментининг ҳар қайси координата ўқига нисбатан проекцияси нимага тенг?
9. Фазода ихтиёрий йўналган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
10. Мувозанат тенгламаларини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг?
11. Фазода параллел йўналган кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг ва унинг маъносини тушунтиринг?
12. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази деб нимага айтилади? Уни координаталари қандай топилади?
13. Текис шакл юзасининг статик моменти деб нимага айтилади?
14. Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш усулларини айтинг ва ҳар бир усулнинг маъносини тушунтиринг?
15. Учбурчак юзаси, айлана ёки сектор юзасининг оғирлик маркази қандай аниқланади?

КИНЕМАТИКА БЎЛИМИ

39-§. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Назарий механиканинг кинематика бўлимида қаттиқ жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтаи назардан текширилади, яъни кинематикада жисмларнинг массаси ва уларга таъсир қилувчи кучлар ҳисобга олинмайди. Кинематиканинг теорема ва формулалари техникада турли машина ва механизмлар қисмларининг ҳаракатини урганишда назарий база сифатида қўлланилади.

Кинематикада жисмнинг ҳаракати бопқа жисм билан боғланган саноқ системасига нисбатан текширилади. Айнан бир вақтда жисм турли саноқ системасига нисбатан турлича ҳаракатда бўлиши мумкин. Масалан, кема полубасидаги жисм кема билан боғланган саноқ

системасига нисбатан ҳаракатсиз бўлса, қирғоқ билан боғланган санок системасига нисбатан кема билан биргаликда ҳаракатланади. Табиатда абсолют ҳаракатсиз жисм бўлмагани туфайли, абсолют қўзғалмас санок системаси ҳам мавжуд бўлмайди.

Техника масалаларини ечишда, одатда ер билан қўзғалмас боғланган санок системаси олинади. Ерга нисбатан қўзғалмас бўлган санок системаси "қўзғалмас санок" системаси дейилади. Қўзғалмас санок системасига нисбатан жисм вазияти ўзгариши ва вақт ўтиши билан ўзгармаса, жисм олинган системага нисбатан тинч ҳолатда дейилади. Агар мазкур санок системасига нисбатан вақт ўтиши билан жисмнинг вазияти ўзгарса, жисм шу системага нисбатан ҳаракатда бўлади. Танланган санок системасига нисбатан ҳар онда жисмнинг вазиятини аниқлаш мумкин бўлса, унинг ҳаракати кинематик берилган деб ҳисобланади.

Кинематикада учрайдиган барча чизиқли ўлчовларни (ҳаракатдаги нуқтанинг координаталари, ўтган йўлининг узунлиги ва ҳоказолар) техник ва халқаро СИ бирликлар системасида метрда олинади. Механикада вақт абсолют деб ҳисобланади, яъни уни барча санок системалари учун бир хилда ўгади деб қаралади. Вақт одатда t билан белгиланади ва u ҳаракатнинг аргументи ҳисобланади. Вақт ўлчови учун МКГСС системасида соат ёки минут, СИ системасида секунд (с) қабул қилинган.

Кўчиш ва ҳаракат тушунчалари механиканинг асосий тушунчаларидир. Бирор санок системасига нисбатдан нуқтанинг маълум вақт t ичида фазода бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ихтиёрий равишда ўтиши кўчиш дейилади.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатдан охириги ҳолатга вақтга боғлиқ ҳолда аниқ бир усулда ўтиши ҳаракат деб айталади.

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг бирор санок системасига нисбатан ҳолати билан вақт орасидаги боғланишни ифодаловчи тенглама нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлайди.

Кинематиканинг асосий масаласи нуқтанинг (ёки жисмнинг) ҳаракат қонуналарини ўрганишдан иборат. Ихтиёрий вақт ичида фазода нуқтанинг ҳолатини бирор санок системасига нисбатан аниқлаш мумкин бўлса, u ҳолда нуқтанинг ҳаракат қонуни маълум бўлади. Агар нуқтанинг бирор санок системасига нисбатан ҳаракат қонуни берилган бўлса, нуқта ҳаракатнинг кинематик ҳарактеристикалари: проектория, тезлик ва тезланишларини аниқлаш мумкин бўлади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини қузатар эканмиз, қўпинча унинг нуқталари турлича ҳаракат қилишини кураимиз. Шунинг учун жисм ҳаракатини ўрганишда унинг нуқталари ҳаракатини ўрганишга тўғри келади. Дастлаб нуқта кинематикасини ўрганиб, ундан қаттиқ жисм кинематикасини ўрганишга ўтилади. Демак, кинематика икки қисмга бўлинади.

1. Нуқта кинематикаси.
2. Абсолют қаттиқ жисм кинематикаси.

40-§. НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Нуқтанинг фазода қолдирган изига ёки чизган чизиғига нуқтанинг траекторияси дейилади.

Оний вақтда нуқтанинг фазодаги ҳолатини бирор координаталар системасига нисбатан аниқлаш мумкин бўлса, нуқта ҳаракати берилган дейилади. Демак, нуқтага ҳаракат бериш унинг оний вақтдаги ҳолатини аниқлашдан иборат.

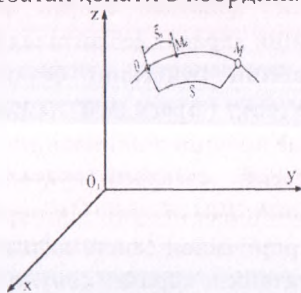
Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги уч усул билан берилган бўлади: табиий, координаталар ва вектор.

1. Нуқтага табиий усулда ҳаракат бериш.

Нуқта ҳаракатини бу усулда бериш учун унинг траекторияси олдиндан аниқланган бўлиши керак.

Нуқтанинг траекторияси берилган бўлсин (94-расм).

М нуқтанинг бирор вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун траектория устида қўзғалмас 0 нуқтани ҳисоблаш боши деб оламиз. М нуқтанинг 0 нуқтага нисбатан ҳолати S координатаси билан аниқланади.



94-расм.

$$S = OM$$

M нукта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан S ён координата ўзгаради.

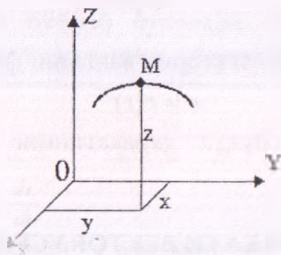
$$S=f(t) \quad (103)$$

(103)-тенглама M нуктанинг траектория бўйлаб ҳаракатлашнинг қонуний ёки ҳаракат тенгламаси дейилади. Агар S ён билан t вақт орасидаги муносабат берилган бўлса, нуктанинг исгалган вақтдаги ҳаракатининг фазода аниқлаш мумкин. Нуктанинг ҳаракатининг табиий усулда бериши учун унинг траекторияси, координаталар боши O нукта ва (103)-тенглама мавжуд бўлиши керак.

2. Нукта ҳаракатининг координаталар усулида берилиши

M нуктанинг $Oxyz$ системага нисбатан ҳолати унинг учта x, y, z декарт координаталари билан аниқланади (94-расм).

M нукта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан унинг координаталари ўзгаради. Демак, ҳаракат қилаётган нукта координаталари вақтнинг функцияси.



94-расм.

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t); \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

(104)-формула нукта ҳаракатининг декарт координаталаридаги тенгламаси ёки нукта траекториясининг параметрик тенгламалари дейилади.

Нуктанинг ҳаракат тенгламасидан t вақтнинг олиб ташласак нуктанинг траектория тенгламаси ҳосил бўлади.

Агар нукта бир текисликда, мисол учун Oxy текислигида, ҳаракатланса (104)-тенгламалар қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

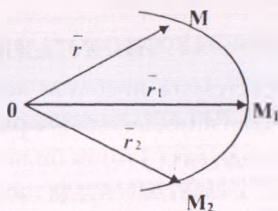
Агар нуқта тўғри чизиqli ҳаракатда бўлса, масалан фақат Ox ўқи бўйлаб, (104)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$x=f(t) \quad (106)$$

(106)-формулага тўғри чизиqli ҳаракатининг тенгламаси дейилади.

3. Нуқта ҳаракатини вектор усулида берилиши

Нуқтанинг фазодаги ҳолатини $\vec{r}$ радиус-вектори билан аниқлаш мумкин (96-расм). Нуқта фазода ҳаракатланганда вақтнинг ўтиши билан унинг радиус - векторнинг модули ва йўналиши ўзгаради:



96-расм.

Нуқтанинг $\vec{r}$ радиус - вектори t вақтнинг функциядир:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (107)$$

(107) - тенгламага нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади.

41-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

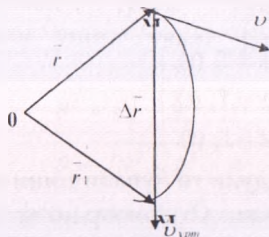
Нуқта ҳаракати вектор кўринишдаги тенгламаси берилган бўлсин:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (108)$$

Нуқтанинг тезлигини топиш керак. Нуқтанинг бирор t пайтдаги троекторияда эгаллаган ҳолатини M , радиус векторини $\vec{r}$, $t_1 + \Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 радиус векторини $\vec{r}_1$ билан белгилаймиз. (97-расм). Нуқтанинг M ва M_1 ҳолатларини туташтирувчи $\overline{MM_1} = \Delta \vec{r}$ вектор нуқтанинг $\Delta t = t_1 - t$ вақт ораллидаги кўчиш вектори дейилади. Расмдан кўришиб турибдики $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$. Бундан нуқтанинг Δt вақт ичидаги кўчиш (радиус вектор ортирмаси)ни топиш мумкин.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

Кучиш вектори Δr нинг шу кучиш содир бўладиган Δt вақтта ҳисобланиш нуктанинг мазкур оралигдаги ўртача тезлик вектори дейилади ва $\bar{v}_{\text{орт}}$ билан белгиланади.



97-расм.

$$\bar{v}_{\text{орт}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$\bar{v}_{\text{орт}}$ нуктанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги бўлади.

Ўртача тезлик Δr бўйлаб йўналади. Ўртача тезликнинг $\Delta t \rightarrow 0$ интилгандаги лимитига нуктанинг берилган t вақтдаги тезлиги дейилади.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{орт}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (109)$$

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}$$

Бунда $\bar{v}$ - M нуктанинг t вақтдаги тезлиги. Нуктанинг тезлиги вектор катталикдир. Тезлик бирликлари:

$$\frac{\text{см}}{\text{сек}}, \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \frac{\text{км}}{\text{соат}}$$

Демак, нукта ҳаракати тенгламаси вектор усулида берилган бўлса, унинг тезлигини топиш учун радиус-вектордан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила олиш лозим.

Тезликнинг йўналишини аниқлаймиз. $\Delta t \rightarrow 0$ га интилганда M_1 нукта M га интилади. Натижада MM_1 кесувчи M нуктадан траекторияга ўтказилган уришмага айланади. Нуктанинг тезлиги шу нуктадан траекторияга ўтказилган уришма бўйича нукта ҳаракат қилаётган томонга қараб йўналади.

42-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги тенгламалари берилган бўлсин:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

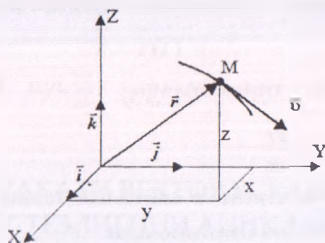
Нуқта тезлигининг модули ва йўналишини аниқлаймиз.

M нуқта туғри бурчакли $Oxyz$ координата системасига нисбатан ҳаракат қилсин (98-рasm).

M нуқтанинг r радиус-вектори координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (111)$$

Бунда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар.



98-рasm.

(111)-формулаи (109)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (112)$$

(112)-формуладаги бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар нуқта тезлигининг мос равишда x, y, z ўқларидаги проекцияси бўлади:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (113)$$

Бунда v_x, v_y, v_z лар $\vec{v}$ нинг x, y, z ўқларидаги проекциялари. Нуқта тезлигининг қўзғалмас декарт координата ўқларидаги проекциялари ўзининг тенгшили координаталаридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Нуқта тезлигининг декарт координата

ўқлардаги проекцияларидан тўғри бурчакли параллелопипед қўрамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқлардаги проекцияси, диагонали эса нуқта тезлиги бўлади. Геометриядан маълумки тўғри бурчакли параллелопипед диагонаlining квадрати унинг учала ўлчовлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

$$g^2 = g_x^2 + g_y^2 + g_z^2$$

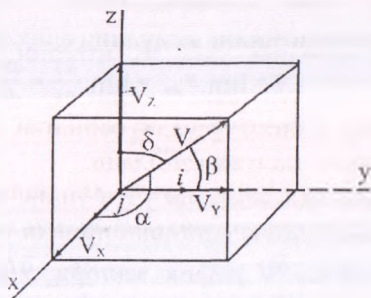
$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

(113)-формуладан фойдаланиб, нуқта тезлигининг модули ва нуналишини аниқлаймиз.

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (114)$$

$$\cos \alpha = \frac{g_x}{g}; \quad \cos \beta = \frac{g_y}{g}; \quad \cos \gamma = \frac{g_z}{g}; \quad (115)$$

Бунда α, β, γ лар $-g$ вектори билан x, y, z ўқлари орасидаги бурчакни ифодалайди (99-расм). Нуқта тезлигининг декарт координата ўқларидаги проекцияларидан тўғри бурчакли параллелопипед қўрамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияси, диагонали эса нуқта тезлиги бўлади.



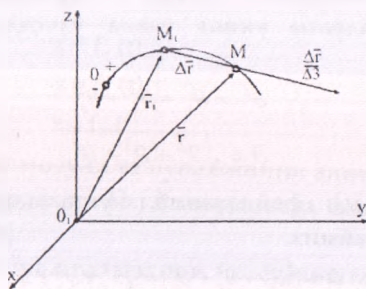
99-расм.

43-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта траекторияси шу траектория бўйлаб ҳаракат қонунини асосида берилган бўлсин.

$$S=f(t) \quad (116)$$

Нукта тезлигини аниқлаймиз. Нукта t вақтда M га келиб унинг ҳолати S ёйи билан t_1 вақтда эса M_1 га келиб унинг ҳолати S_1 ёйи кўринишида бўлсин (100-расм).



100-расм.

$$S = OM$$

$$S_1 = OM_1$$

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta S = S_1 - S$$

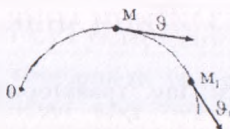
$$\vartheta_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Бунда $\vartheta_{\text{ср}}$ - Δt вақт ичидаги ўртача тезликнинг модули. M нуктанинг t вақтдаги тезлигининг модулини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vartheta_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}, \quad \vartheta = \frac{dS}{dt} \quad (117)$$

Нукта ҳаракати табиий усулда берилган бўлса, (117)-формула билан нукта тезлигининг модули топилади.

Нуктанинг тезлигини аниқлаш учун унинг ҳолатини аниқловчи S ёй координатадан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила олинган керак. Агар $\frac{dS}{dt} > 0$ бўлса V тезлик вектори S ёй координата ортдиб бораётган томонга йўналган бўлади. Агар $\frac{dS}{dt} < 0$ бўлса S ёй камаядиган томонга йўналади (101-расм).



101-расм.

44-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

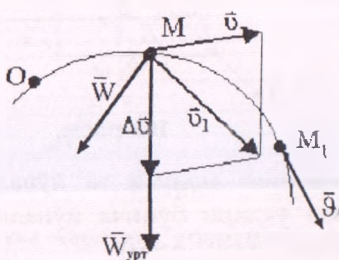
Нуқта тезлигининг модули ва йўналиши жиҳатидан ўзгаришини тасвирлаш учун тезланиш деган тушунча киритилади. Нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланиб, t вақтда M нуқтада, t_1 вақтда M_1 нуқтада бўлсин (102-расм).

Бунда $\vec{v}$ ва $\vec{v}_1$, M ва M_1 нуқталарнинг тезликлари. Δt вақт ичида нуқта тезлиги $\Delta \vec{v}$ орттирма олади.

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v}$$



102-расм.

$\Delta \vec{v}$ нинг Δt га нисбати Δt вақт ичидаги нуқтанинг ўртача тезланиши дейилади.

$$\vec{W}_{\text{урт}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ўртача тезланишнинг $\Delta t \rightarrow 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги ёки ҳақиқий тезланиши дейилади.

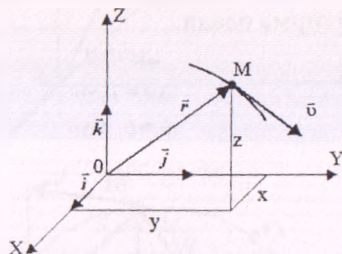
$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{W}_{\text{урт}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{W} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (118)$$

Демак, нуқтанинг тезланиши нуқта тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиллага еки радиус - векторидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиллага тенг. Ўртача тезланиш траекториясининг ботик томонига қараб йўналганлиги учун нуқта тезланиши $\vec{W}$ ҳам траекториянинг ботик томонига қараб йўналган бўлади. Нуқта тезланишининг бирлиги м/сек² билан ўлчанади.

45-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта координаталари вақтнинг функцияси шаклида берилган бўлсин (103-рasm).

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad z=f_3(t)$$



103-рasm.

Нуқта тезланишининг модули ва йўналиши топилсин. Нуқта тезлигини координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қўйидагича ёзилади (102-рasm).

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (119)$$

Бунда v_x, v_y, v_z лар $\vec{v}$ тезликнинг проекциялари. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ қўзғалмас координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар. (119)-формула, (118)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосилла оламиз.

$$\vec{w} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \quad (120)$$

(120)-формуладаги бирлик векторлари олдидаги коэффициентлар нуқта тезланишининг проекциясини ифодалайди.

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}; w_y = \frac{dv_y}{dt}; w_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (121)$$

ёки

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \\ w_y &= \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y} \quad w_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \quad (122)$$

Бунда w_x, w_y, w_z лар $\vec{w}$ тезланишининг проекцияси. (121)- ёки (122)-формулар билан нуқта тезланишининг қўзғалмас x, y, z ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

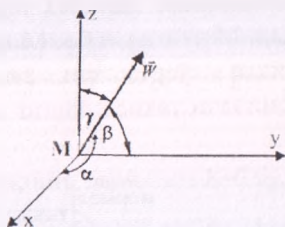
Нуқта тезланишининг бирор қўзғалмас декарт координаталар ўқидати проекцияси нуқтанинг тегишли координаталаридан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиллага тенг бўлади.

Нуқта тезланишининг модули ва йўналишини қуйидаги формула билан топилади.

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad (123)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{W_x}{W}; \cos \beta_1 = \frac{W_y}{W}; \cos \gamma_1 = \frac{W_z}{W}; \quad (124)$$

Бунда α, β, γ лар $-W$ билан x, y, z ўқлари орасидаги бурчаклар (104-расм).



104-расм.

Н а т и ж а: Нуқта ҳаракати координаталар усулида берилган бўлса (123)-формула билан нуқта тезланишини модули ҳамда (124)-формула билан тезланишининг йўналиши топилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

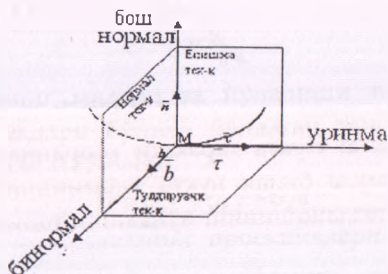
1. Кинематика нимани ўрганади?
2. Кинематикани асосий масалаларини айтинг?
3. Нуқта траекторияси деб нимага айтилади?
4. Нуқта ҳаракати табиий усулда қандай берилади?
5. Нуқта ҳаракати координаталар усулида қандай берилади?
6. Нуқтани траектория тенгламаси қандай топилади?
7. Нуқта ҳаракати вектор усулида қандай берилади?
8. Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қандай аниқланади? Нуқтанинг тезлиги қандай йўналган бўлади?
9. Нуқтанинг тезланиши вектор усулида қандай аниқланади? Нуқтанинг тезланиши қандай йўналган?
10. Нуқта тезлигининг декарт координаталар ўқларидаги проекциялари нимага тенг?
11. Нуқта тезлигининг миқдори ва йўналиши проекциялар бўйича қандай аниқланади?

12. Нуқта тезланишининг декарт координалари ўқларидаги проекцияси нимага тенг?
13. Нуқта тезланишининг миқдор ва йўналиши проекциялари бўйича қандай аниқланади?

46-§. ТАБИЙЙ КООРДИНАТЛАР СИСТЕМАСИ

Нуқта траекторияси берилган бўлсин. Шундан бигта нуқта олиб унга уринма ўтказамиз. М нуқтадан уринмага перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликка нормал текислик деб айтилади.

Нормал текислик билан ёпишма текислиkning кесилишган чизиги бош нормал дейилади. М нуқтадан бош нормалга перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликка тўғриловчи текислик дейилади. Нормал текислик билан тўғриловчи текислиkning кесилишган чизигига бинормал дейилади (105-рasm).

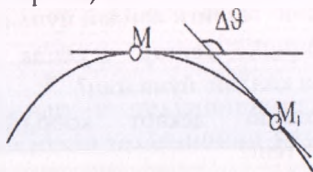


105-рasm.

Уринма, бош нормал ва бинормалдан ташкил топган ўқларга табиий ўқлар дейилади. Бу ўқлар Mmb табиий координаталар системасини ташкил этади. Табиий ўқларнинг бирлик векторларини мос равишда $\vec{r}, \vec{n}, \vec{b}$ билан белгиланади (105-рasm).

Эгри чизиқнинг эгрилиги.

Нуқта троекториясидаги М ва M_1 нуқталардан троекторияга уринма ўтказилади (105¹-рasm).



105¹-рasm.

Бу уринмалар орасидаги бурчак $\Delta\varphi$ билан белгилаймиз. $\Delta\varphi$ бурчакка қўшни бурчак дейилади. Бу бурчакнинг ΔS ёйига нисбати эгри чизикнинг ўртача эгрилиги дейилади ва $K_{\text{урт}}$ билан белгиланади.

$$K_{\text{урт}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \text{ бунда } \Delta S = MM_1$$

Ўртача эгриликнинг $\Delta S \rightarrow 0$ лимитига эгри чизикнинг берилган нуқтадаги эгрилиги дейилади.

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} K_{\text{урт}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

$$K = \frac{d\varphi}{dS}$$

Бунда K эгри чизикнинг M нуқтадаги эгрилиги.

Эгриликнинг тескари қийматига эгрилик радиуси дейилади.

$$\rho = \frac{1}{K}$$

Мисол учун тўғри чизикнинг эгрилиги $K=0$ бўлса, $\rho = \frac{1}{K} = \infty$ бўлади.

Радиуси айбанининг эгрилик радиуси унинг радиусига тенг.

47-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИЙ ҲАДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ ТОПИШИ

Нуқтанинг троекторияси ва унинг троектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни берилган бўлсин. Нуқтанинг тезланишини аниқлаймиз. Маълумки нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қуйидаги формула билан топилади.

$$\vec{g} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Бу формуланинг ўнг томонини қуйидагича ёзамиз.

$$\vec{g} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}$ ва $\vartheta = \frac{dS}{dt}$ алгебраик тезлик эканини ҳисобга олсак, у ҳолда:

$$\vec{U} = U\vec{\tau} \quad (125)$$

бўлади.

Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезланиши қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{v}}{dt} \quad (125.1)$$

Бунда

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{d\overline{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \quad (126)$$

$$\frac{dS}{dt} = g$$

$$\overline{W} = \frac{d\overline{v}}{dt} \quad \text{га асосан}$$

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} k = \frac{1}{\rho} \cdot \overline{n}$$

(126)-ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{g}{\rho} \cdot \overline{n} \quad (127)$$

Бунда ρ троекторияни эгрилик радиуси, $\overline{n}$ бош нормалнинг бирлик вектори. (127)- ни (126)- га қўямиз.

$$\overline{W} = \frac{d\overline{v}}{dt} \overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \overline{n} \quad (128)$$

(128)- ифодада нуқта тезланиши табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали берилган.

Тезланишнинг уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси:

$$\overline{W}_\tau = \frac{d\overline{v}}{dt} \overline{\tau} \quad (129)$$

Нуқтанинг уринма тезланиши, бош нормал бўйича йўналган бўлиб, ташкил этувчиси эса нуқтанинг нормал тезланишидир.

$$\overline{W}_n = \frac{v^2}{\rho} \overline{n} \quad (130)$$

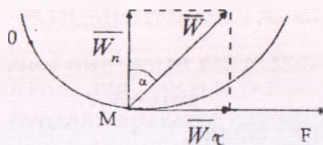
М нуқтанинг тезланиши шу нуқта троекториясига ўтказилган ёпишма текислигида ётади. Бу текисликка эса бинормал перпендикуляр. Шунинг учун нуқта тезланишнинг бинормалдаги проекцияси нолга тенг.

$$\overline{W}_s = 0.$$

(129)- ва (130)- га қўра (128)- ифода қуйидаги қўринишга эга бўлади:

$$\overline{W} = \overline{W}_\tau + \overline{W}_n \quad (131)$$

Яъни, эгри чиизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бу икки тезланиш ўзаро перпендикуляр йўналган. Шу сабабли $\overline{n}$ тезланиш вектори $\overline{W}_\tau$ ва $\overline{W}_n$ ларга қўрилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали бўйича йўналган бўлади (106-расм).



106-расм.

Нуқта тўла тезланишининг модули ва йўналиши қуйидаги формулалар билан топилади:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|W_n|}{W_\tau} \quad (132)$$

Нуқта тезланишининг табиий координата ўқларидаги проекциялари

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}, \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad W_n = 0 \quad (133)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Демак, нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилганда (129)-(133) формулалар билан нуқта тезланиши аниқланади.

Агар нуқтанинг ҳаракати тўғри чизикли бўлса траекториянинг кривизна радиуси ∞ га тенг бўлади.

$$W_n = \frac{v^2}{\infty} = 0, \quad W_n = 0$$

Нуқтанинг нормал тезланиши эгри чизикли ҳаракатда мавжуд бўлиб, нуқта тезлигининг йўналиши жиҳатдан ўзгаришини

тасвирлайди. Агар $\vartheta = \text{const}$ бўлса, $w_r = \frac{dv}{dt} = 0, \dots, w_r = 0$.

Уринма тезланиш нуқта тезлигининг модул жиҳатидан ўзгаришини тасвирлайди. Демак уринма тезланиш нотекис ҳаракатда мавжуд бўлади.

48-§. НУҚТАНИНГ ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН ҲАРАКАТИ

Агар уринма тезланиш ўзгармас бўлса, бундай ҳаракатга текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади. Текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини аниқлаймиз.

Нуқтанинг уринма тезланиши:

$$W_r = \text{Const},$$

$$W_t = \frac{dv}{dt}$$

$dS = W_t dt$ интеграллаб нукта тезлигини топилади.

$$v = v_0 + W_t t \quad (134)$$

Бунда v_0 - бошланғич тезлик.

v - охириги тезлик.

(134) ни интеграллаб ҳаракат қонунини топамиз.

$$S = v_0 t + \frac{W_t t^2}{2} \quad (135)$$

Бунда S - ёй координатаси.

Демак, (134)- ва (135)- формулалар билан текис ўзгарувчан ҳаракатдаги нукта тезлиги ва траектория бўйлаб ҳаракат тенгламаси топилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай ўқлар табиий ўқлар деб аталади?
2. Нукта тезланишини табиий ўқларга проекциялари нимага тенг?
3. Қандай ҳаракатда нуктанинг урнима тезланиши 0 га тенг бўлади?
4. Қандай ҳаракатда нуктанинг нормал тезланиши нолга тенг бўлади?
5. Нукта ҳаракати табиий усулда берилганда унинг тезлиги қандай топилади?
6. Нуктанинг қандай ҳаракатига текис ҳаракат дейилади?
7. Нуктани тезлиги қандай топилади?
8. Қандай ҳаракатга текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади?
9. Тезлик формуласини ёзинг?

ҚАТТИҚ ЖИСМ КИНЕМАТИКАСИ

Кинематиканинг бу қисмида қаттиқ жисмларнинг қўйидаги ҳаракатлари ўрганилади:

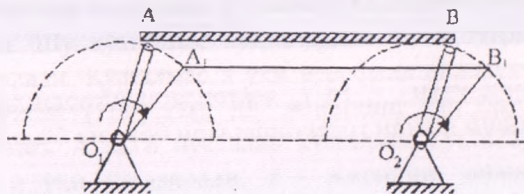
1. Илгариланма ҳаракати.
2. Қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати.
3. Текис параллел ҳаракати.
4. Қўзғалмас нукта атрофида айланма ҳаракати.
5. Нуктанинг мураккаб ҳаракати.

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ва айланма ҳаракатлари энг оддий ҳаракат бўлиб ҳисобланади.

49-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИЛГАРИЛАНМА ХАРАКАТИ

Жисм ҳаракатланганда шу жисмда олинган кесма ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолади бундай ҳаракатга қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати дейилади.

Паравоз спарнигининг ҳаракати илгариланма ҳаракатга мисол бўлади. Илгариланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг траекториялари түгри чизиқли ва эгри чизиқли бўлиши мумкин. AB спарник ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолади, яъни илгариланма ҳаракат қилади (107-расм) $O_1A=O_2B$, $AB\parallel A_1B_1$.



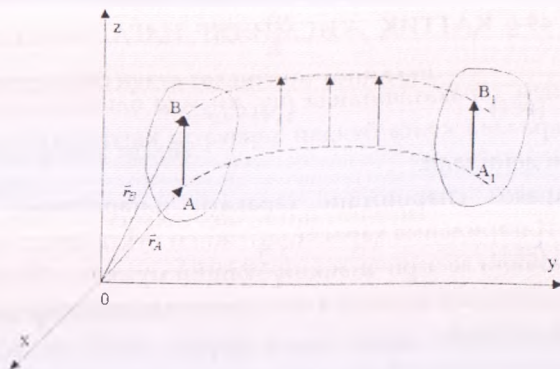
107-расм.

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатига оид қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема: Илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил траектория чизади ва ҳар онда миқдор ва йўналишлари жиҳатдан бир хил тезликка ва тезланишга эга бўлади.

Исбот: $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм берилган бўлсин (108-расм). Бу жисмда ихтиёрий иккита A ва B нуқталар олинади. t вақтда бу нуқталарнинг ҳолати $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ радиус векторлари билан аниқланади.

Қаттиқ жисмдаги AB ва A_1B_1 кесмалар ўзаро параллел. Жисм абсолют қаттиқ бўлганлиги учун AB кесманинг узунлиги ўзгармайди, $AB=const$. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганлиги учун AB векторнинг йўналиши ҳам ўзгармайди. Агар A нуқтанинг траекторияси AA_1 , ёйни AB масофага силжитсак, бу траектория B нуқтанинг траекторияси билан яъни BB_1 ёй билан устма-уст тушади.



108-расм.

Шунинг учун r_A ва r_B векторлари ўзгарганда, уларнинг A ва B нукталарининг чизган траекториялари бир хил бўлади. Яъни $AA_1=BB_1$ ва $AA_1 \parallel BB_1$.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} \quad (136)$$

бунда t вақт бўйича ҳосил оламиз:

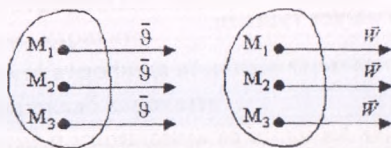
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt} \\ \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \vec{v}_B, \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A, \quad \frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0 \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A \end{aligned} \quad (137)$$

A ва B нукталар ихтиёрий нукталар бўлганилиги учун илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг қолган ҳамма нукталар тезликлари бир хил бўлади.

(137)- дан t вақт бўйича ҳосил оламиз.

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad \text{ёки} \quad \vec{w}_B = \vec{w}_A \quad (138)$$

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм бирор нуктасининг тезлигини ва тезланишини аниқлаш (кифоя). Жисм бошқа нукталарининг тезлиги ва тезланиши теоремага асосан шу нуктанинг тезлиги ва тезланишига тенг бўлади (109-расм).



109-расм.

Жисмнинг илгарилама ҳаракати унинг ихтиёрий нуқтаси ҳаракати билан аниқланади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳар бидани тезлиги ҳам, тезланиши ҳам бир хил бўлаганидан уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши деб аташ мумкин.

50-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗГАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ. БУРЧАК ТЕЗЛИГИ ВА БУРЧАК ТЕЗЛАНИШИ

Жисм ҳаракати давомида унинг икки нуқтаси қўзғалмасдан қолса бундай ҳаракатга қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати дейилади. Шу қўзғалмас нуқталардан ўтган тўғри чизикка айланиш ўқи дейилади. Қўзғалмас z ўқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган бўлсин (110-расм). Шу жисмнинг ҳар бир вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. A ва B нуқталар қўзғалмас нуқталардир. Шу нуқталар орқали z ўқи ўтказилади. z - жисмнинг айланиш ўқи. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун айланиш ўқидан Q ва P текисликлари олинади. Бунда Q қўзғалмас текислик, P қўзғалувчи текислик. P - текислиги жисмга қаттиқ бириктирилган ва жисм билан бирга айланади. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун P текислигининг Q га нисбатан ҳолатини аниқлаш kifоя. P - текислигининг ҳолати φ бурчаги билан аниқланади. φ -га айланиш бурчаги дейилади. Жисм ўқ атрофида айланишда φ бурчаги вақт ўтиши билан ўзгаради.

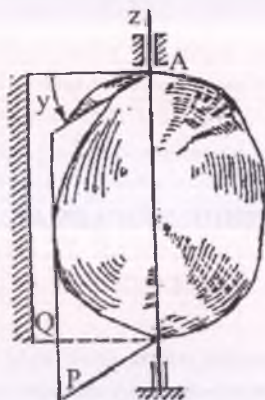
$$\varphi = f(t) \quad (139)$$

Бу тенглама жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси дейилади. Айланиш бурчаги радиан билан ўлчанади.

Айланма ҳаракат қонуни, бурчак тезлиги билан бурчак тезланишга айланма ҳаракатнинг кинематик тавсифи дейилади. Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила жисмнинг бурчак тезлиги дейилади ва ω билан белгиланади:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \omega = \varphi' = f'(t) \quad (140)$$

Бунда ҳосиланишнинг инпораси жисмнинг айланиш йўналишининг шифодалайди. Агар $\omega = \varphi' = f'(t) > 0$ бўлган онда $f(t)$ функция усувчан бўлади, яъни ўқнинг мусбат йўналишинидан қараганда жисм соат стрелкаси айланишга тескари айланади: $\varphi = f'(t) < 0$ бўлган онда $f(t)$ функция камаювчан бўлади, яъни жисм соат стрелкаси айланиш буйича айланади.



110-рasm.

Демак, жисмнинг бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

Бурчак тезлигининг бирлиги

$$\omega = \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = \frac{1}{\text{сек}} = \text{сек}^{-1} \quad (141)$$

Бурчак тезланишининг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (142)$$

Бурчак тезланишининг бирлиги $\dot{\epsilon} = \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2} = \frac{1}{\text{сек}^2} = \text{сек}^{-2}$.

Бурчак тезланиши айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

51-§. ЖИСМНИНГ ТЕКИС ВА ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

1. Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида бир хил вақт ораллигида бир хил бурчакка бурилса жисм текис айланма ҳаракатда дейилади. Текис айланма ҳаракат бурчак тезлиги $\omega = \text{const}$ бўлади.

$$\varphi = \omega t \quad (143)$$

Текис айланма ҳаракат тенгламаси (143)- билан ифодаланади. Текис айланишдаги жисмнинг бурчак тезлигини бир минутдаги айланишлар сони билан ифодаланади. Жисм бир марта тўла айланганда $\varphi = 2\pi$ радиан бурчакка бурилади.

Жисм n марта айланса, $\varphi = 2\pi n$ бурчакка бурилади. Текис айланма ҳаркатиинг бурчак тезлиги куйидагига тенг булади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi \text{ рад}}{30 \text{ сек}} \quad (144)$$

Бунда n - жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони. Агар жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони берилган булса, (144)-формула билан унинг бурчак тезлиги топилади.

2. Агар айланма ҳаракат давомида бурчак тезланиши $\varepsilon = \text{const}$ булса, жисм текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда булади.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (145)$$

(145)-формула билан текис ўзгарувчан айланма ҳаракатиинг бурчак тезлиги топилади.

Бунда ω_0 - бошлангич бурчак тезлиги

ω - ихтиёрий вақтдаги бурчак тезлиги.

Агар $\omega_0 = 0$ булса, (145) формула билан текис ўзгарувчан айланма ҳаракатиинг бурчак тезлиги топилади. Ҳосил қиламиз.

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (146)$$

(146)-тенглама билан текис ўзгарувчан айланишда бурилиш бурчаги, ёки текис ўзгарувчан айланма ҳаракат қонуни аниқланади.

Кўзгалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлик вектори мазкур ўқ бўйлаб йуналган ва унинг мусбат йўналишидан қараганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда кўринадиган, айланиш ўқининг ихтиёрий нуқтасига қўйилган вектор билан ифодаланади (110.1-рasm). Бурчак тезлик векторининг модули

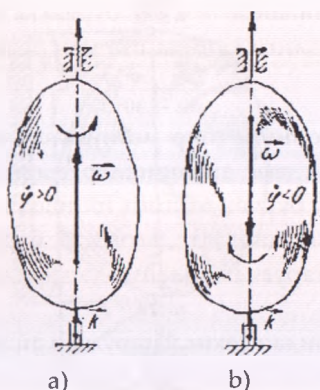
$$|\vec{\omega}| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = |\omega_z|$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар айланиш ўқи бирлик векторини $\vec{k}$ билан белгиласак, бурчак тезлик векторини

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k} = \omega_z \cdot \vec{k} \quad (146.1)$$

кўринишида ёзиш мумкин. (146') дан кўрамински, $\dot{\varphi} > 0$ булса, $\vec{\omega}$ вектори $\vec{k}$ йўналиши бўйича, $\dot{\varphi} < 0$ да $\vec{k}$ қарама-қарши йўналишда бўлади (110.1 -рasm a,b).



110.1-расм.

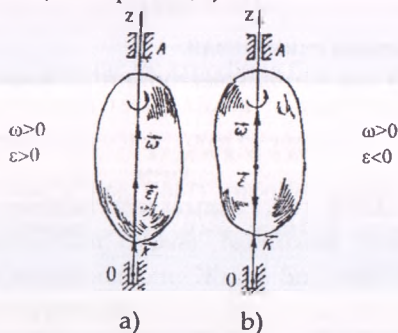
Жисмнинг бурчак тезланишини айланиш ўқи бўйлаб йуналган $\vec{\varepsilon}$ вектори тарзида ифодалаш мумкин. Бунда жисмнинг бурчак тезланиш вектори шу жисм бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосиллага тенг бўлади (110.2-расм).

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \cdot \vec{k} = \varepsilon_z \cdot \vec{k}$$

ёки

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k} \quad (146.2)$$

Агар жисмнинг бурчак тезлиги модуль жиҳатидан орта борса, бундай ҳаракат тезланувчан айланма ҳаракат, камая борса, секинланувчан айланма ҳаракат дейилади. Текис айланма ҳаракатда $\omega = \text{const}$ бўлгани учун $\varepsilon = 0$ бўлади. Демак, ω_z ва ε_z лар бир хил ишорали бўлса, ҳаракат тезланувчан турли ишорага эга бўлса, ҳаракат секинланувчан бўлади (110.2-расм а,б).



110.2-расм.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги ва бұшчак тезланиши айланиш ўқи бўйлаб йўналган вектор бағталиқдир.

52-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛИГИ ВА ТЕЗЛАНИШИ

Қўзғалмас z ўқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган бўлсин.

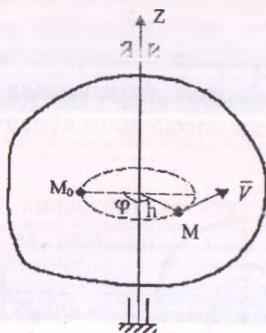
Шу жисмнинг ихтиёрий M нуқтаси тезлиги ва тезланишини аниқлаймиз.

Бунда h – M нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофа (111-расм). z жисмнинг қўзғалмас айланиш ўқи. Жисм абсолют қаттиқ бўлганлиги учун $h = \text{const}$ бўлади. Жисм ўқи атрофида айланганда M нуқта айланиш ўқиға перпендикуляр текисликда радиуси h га тенг бўлган айлана чизади.

Жисм ўқ атрофида $d\varphi$ бурчакка бурилганда M нуқта dS йўлни босиб ўтади.

$$dS = \overset{\curvearrowright}{M_0 M}$$

$$dS = h d\varphi$$



111-расм.

M нуқтаниннг тезлиги:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\varphi h)}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$$

ёки

$$v = \omega h \quad (147)$$

ω - жисмининг бурчак тезлиги. (147)-формула билан қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм нуқтасининг чизикли тезлиги топилади. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтаси чизикли тезлигининг миқдори жисм бурчак тезлиги билан қўзғалмас ўқдан нуқтагача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг. Чизикли тезлик вектори $\vec{v}$ M нуқтада h га перпендикуляр бўлиб, жисм айланаётган томонга қараб йўналган бўлади. Қаттиқ жисм нуқталарининг тезликлари шу нуқталардан айланиш ўқиғача бўлган масофага пропорционалдир.

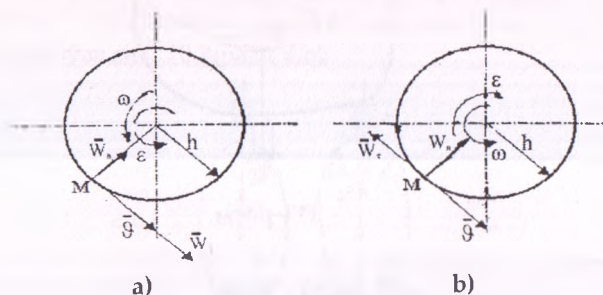
M нуқтанинг уринма тезланишини топамиз. Уринма тезланиши:

$$W_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega h)}{dt} = h \cdot \dot{\omega}, \quad W_r = \varepsilon \cdot h \quad (148)$$

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг уринма тезланиши жисмининг бурчак тезланиши билан шу нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг. W_r уринма тезланиш шу нуқтадан h га перпендикуляр бўлиб, тезланувчан айланма ҳаракатда $\vec{v}$ тезлик йўналиши бўйича (112-расм, а), секинланувчан айланма ҳаракатда эса унга тескари йўналади (112-расм, б). M нуқтанинг нормал тезланишини топамиз.

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega h)^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h \quad (149)$$

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг нормал тезланиши бурчак тезлигининг квадрати билан нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг.



112-расм.

Нормал тезланиши айланиш радиуси h бўйлаб айланиш ўқи томон йўналган бўлади.

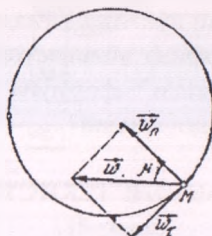
Теланишини модули куйидагича аниқланади.

(150)

Тезланишининг йўналиши эса қуйидаги формуладан топилади.

$$tg\mu = \frac{\xi}{\omega^2} \quad (151)$$

Бунда μ - гула тезланиш билан нормал тезланиш орасидаги бурчак.



113-рasm.

Жисм қўзғалмас ўқ атрофида текис айланса, $W=const$ ва унинг бурчак тезланиши нолга тенг бўлади $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$. У ҳолда жисм нуқтасининг уринма тезланиши нолга тенг бўлиб, $W' = \varepsilon \cdot h = 0$, жисм нуқталари нормал тезланишга эга бўлади $W' = W_* = W^2 \cdot h$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

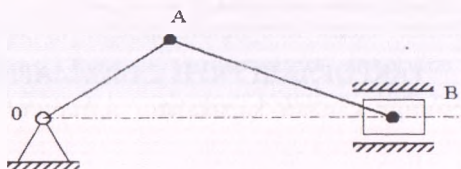
1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгарилама ҳаракат деб аталади?
2. Илгарилама ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нукталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгарилама ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифиини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлик орасида қандай боғланиш мавжуд?

8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлиги модули қандай топилади ва у қандай йўналган?
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?
12. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тўла тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишнинг йўналиши қандай?

53-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

Қаттиқ жисмда олинган ҳамма нуқталар жисм ҳаракатида бирор қўзғалмас текисликка параллел текисликда ҳаракатланса, унинг бундай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади.

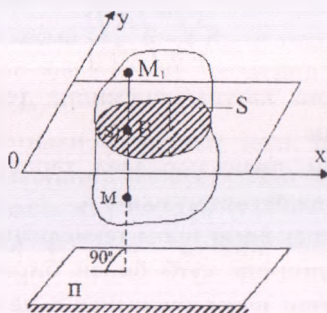
Масалан: Тўғри чизиқли йўлдаги машина гидрагининг ҳаракати ёки кривошип шатунли механизмдаги шатуннинг ҳаракати (114-расм).



114-расм.

Текис параллел ҳаракат қилаётган жисм берилган бўлсин. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш учун жисмда қўзғалмас текисликка перпендикуляр бўлган MM_1 ихтиёрий кесма олинади. Текис параллел ҳаракат таърифига кура MM_1 кесманинг нуқталаридан 11 текисликгача бўлган масофалар ўзгармасдан қолади, шу сабабли MM_1 кесма ҳар доим ўзига параллел равишда ҳаракатланади. Бинобарин MM_1 кесма шарилама ҳаракатда бўлади. Илгарилар ҳаракат таърифига кура жисмнинг барча нуқталари бир хил траектория чизади, тезлик ва тезланишлари тенг бўлади. Шу сабабли илгариларма ҳаракатдаги жисм билга нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш kifоя.

Жисмни қўзғалмас Π текисликка параллел бўлган Π_1 текислик билан кесиб, кесимда ҳосил бўлган кесимани (S) билан белгилаймиз (115-расм). MM_1 кесма (S) кесимдаги нуқтаси B билан белгиланади. У ҳолда MM_1 кесмани ҳаракатини ўрганиш ўрнига B нуқтасининг ҳаракати ўрганилади.

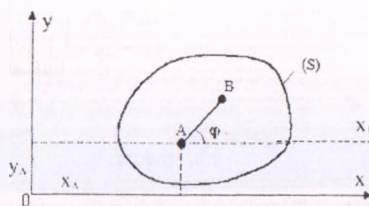


115-расм.

Худди шунингдек MM_1 кесмага параллел $M_1M_1^1$ кесмани олсак $M_1M_1^1$ кесма ҳам илгариланма ҳаракатда бўлгани учун унинг (S) кесимдаги O_1 нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш қифоя. Жисмни MM_1 , $M_1M_1^1$, $M_2M_2^1$ кесмалар тўпламидан иборат деб қараш мумкин ва бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унинг (S) кесимининг ҳаракатини ўрганиш қифоя. (S) кесимга текис шакл дейилади. Текис шакл ҳаракатланадиган Π текисликка текис шаклнинг ҳаракат текислиги дейилади.

Оу координаталар системасига нисбатан ҳаракат қилаётган (S) текис шакл берилган бўлсин. Бу текис шаклдаги AB кесманинг вазияти A нуқтанинг x_A, y_A координаталари ва A нуқта атрофида φ айланиш бурчаги билан аниқланади.

φ - AB кесманинг Ox ўқи билан ташкил қилган бурчаги (116-расм).



116-расм.

А нүктани қутб деб қабул қиламиз. Жисм ҳаракатланганда x_A, y_A координатаси ва φ бурчаги вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради. Шунинг учун x_A, y_A, φ қуйидагича ёзилади.

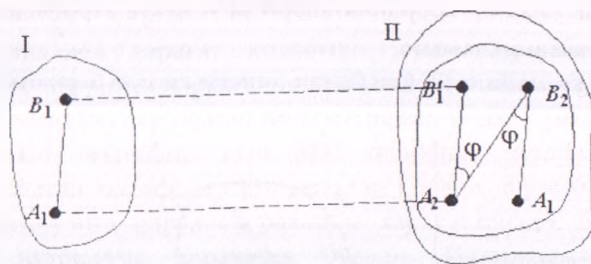
$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

(152)-формулаларга қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат тенгламалари дейилади.

Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ажратиш мумкин.

Теорема: Текис шаклнинг шакл текислигида бир ҳолдан иккинчи ҳолга ҳар қандай кўчишини қутб билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва қутбдан ўтган шакл текислигига перпендикуляр бўлган ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин.

Исбот: Текис шакл текисликда I ҳолатдан II ҳолатга кучган бўлсин (117-расм). I ҳолатда текис шаклда ихтиёрий A_1B_1 кесма олинади. II ҳолатда A_1B_1 кесма A_2B_2 ҳолатини эгалласин. Текис шаклга шундай илгариланма кўчиш берилади, A_1 нукта A_2 нукта билан устма-уст тушсин. B_1 нукта эса B_1' ҳолатини эгалласин. Агар текис шаклни A_2 нуктадан шакл текислигига тик равишда ўтувчи ўқ атрофида $B_1', A_2, B_2 = \varphi$ бурчакка айлантирилса, у ҳолда $A_2B_1' \equiv A_2B_2$ бўлгани учун A_2B_1' ва A_2B_2 кесмалар устма-уст тушади. Жисм эса II ҳолатни эгаллайди. Худди шу йўл билан жисмни II ҳолатдан III ҳолатга ва ҳоказо келтириш мумкин. Демак, қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат.



117-расм.

(152)-формуладаги биринчи иккита тенглама илгариланма ҳаракатини, учинчи тенглама эса айланма ҳаракатини ифодалайди.

Теоремани бошқача усулда қўйиладиганини исботлаймиз (117-расм). Жисмга шундай илгариланма кўчини берамизки, натижада B_1 нукта B_2 билан ўстма-ўст тушиши A_1 нукта эса A_2 ҳолатини эгалласин $A_1B_1 \parallel A_1B_2$ бўлади.

Агар текис шаклни B_2 нуктадан ўтувчи ўқ атрофида A_1^1 , $B_2A_2=\varphi$ бурчакка бўрсак A_1B_2 кесма A_1 , $B_2=A_2B_2$ бўлганлиги учун A_1B_2 билан ўстма-ўст тушади текис шакл эса II ҳолатини эгаллайди A_2 ёки B_2 нукталарга қўتب деб аталади.

Теореманинг исботидан кўрамизки, текис шаклнинг илгариланма кўчини қўтбни танлаб олишга боғлиқ бўлади. Ҳақиқатда A_1 нуктанинг ҳолати I ҳолда A_1A_2 II ҳолда $A_1A_2 \perp$ бўлади. $A_1A_2 \neq A_1A_2$

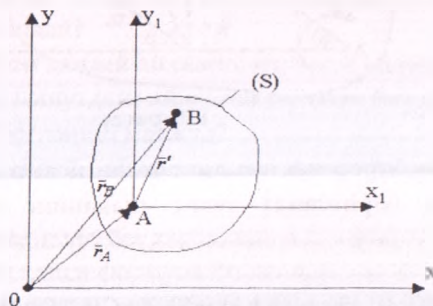
Айлананин бурчаги φ эса қўтбни танлаб олишга боғлиқ бўлмайди.

54-§. ҚАТТИҚ ЖИСМ ИСТАЛГАН НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛИГИНИ ҚУТБ УСУЛИДА АНИҚЛАШ

Теорема: Текис шакл ихтиёрий B нуктасининг тезлиги A қўтбнинг тезлиги билан B нуктанинг қўтб атрофида айланганда ҳосил қилган тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

Исбот. Текис параллел ҳаракат қиляётган текис шакл берилган бўлсин. Шу текис шаклдаги B нуктасининг тезлигини аниқлашимиз лозим бўлсин. B нуктанинг вазияти $\vec{r}_B$ вектор билан аниқланади (118-расм).



118-расм.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}' \quad (153)$$

$\vec{r}_A$ - A қўтбнинг радиус вектори.

r_B - В нуктасининг радиус вектори

r' - В нуктасининг Аху координаталарига нисбатан ҳолатининг аниқлайдиган радиус-вектор.

В нуктасининг тезлигининг аниқлаш учун (153) дан t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr'}{dt} \quad (154)$$

$$\frac{dr_B}{dt} = \bar{v}_B; \quad \frac{dr_A}{dt} = \bar{v}_A; \quad \frac{dr'}{dt} = \bar{v}_{BA}; \quad (155)$$

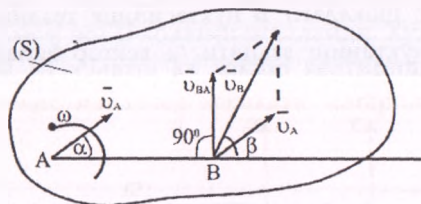
(155)- ни (154)- га қўямиз у ҳолда

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (156)$$

(156)- формула билан текис параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмининг ихтиёрий В нуктасининг тезлиги топилади. Бунда тезлик $\bar{v}_B$ В нуктасининг А қутб атрофида айланганда ҳосил қилган тезлиги. Бу тезликнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$v_{AB} = \omega AB \quad (157)$$

Бунда ω - бурчак тезлик. $\bar{v}_{BA}$ тезлик вектори айланиш радиуси АВ га перпендикуляр равишда текис шаклнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади яъни $\bar{v}_{BA} \perp AB$. В нуктасининг тезлиги $\bar{v}_A$ ва $\bar{v}_{BA}$ векторлардан тузилган параллелограмнинг диагонали бўйлаб йўналган бўлади (119-расм.)



119-расм.

Текис шакл бирор нуктасининг тезлиги ва айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги берилганда текис шаклнинг бошқа нуктасининг тезлигини (156) формуладан аниқлаш қутб усулида аниқлаш дейилади.

55-§. ТЕКИС ШАКЛ ИККИ НУҚТАСИ ТЕЗЛИКЛАРИНИНГ ПРОЕКЦИЯСИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Текис шакл икки нуктаси тезликларининг шу нукталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг.

Исбот. Текис шаклда A ва B нуқталарни оламиз. A нуқтани қутб деб қабул қиламиз. Маълумки, B нуқтанинг тезлигини (156)-формула билан ёзини мумкин. A ва B нуқталар орқали x ўқи ўтказилади (118-расм). (156) ни ўқга проекциялаймиз.

$$(\vec{v}_B)_x = (\vec{v}_A)_x + (\vec{v}_{BA})_x$$

$\vec{v}_B \perp x$ бўлганлиги учун $(\vec{v}_{BA})_x = 0$ бўлади. Шундай қилиб

$$(\vec{v}_B)_x = (\vec{v}_A)_x$$

118-расмга асосан

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha \quad (158)$$

Бу теорема ердамида A нуқта тезлигининг катталиги ва йўналиши B нуқта тезлигининг йўналиши берилганда B нуқта тезлигининг модулини топиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

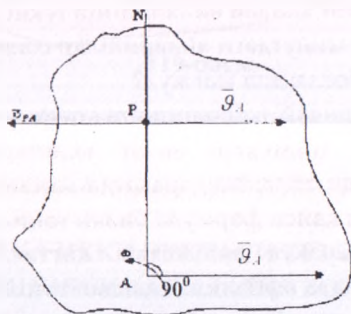
1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгариланма ҳаракат деб аталади?
2. Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгариланма ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлиги орасида қандай боғланиш мавжуд?
8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлигининг модул ва йўналиши қандай топилади?
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?

12. Қўзғалмас ўқ агрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлисини қандай аниқланади? Бу тезлисининг йўналиши қандай?
13. Қаттиқ жисмининг қандай ҳаракатида текис параллел ҳаракат дейилади?
14. Текис параллел ҳаракат неча тенглама билан аниқланади?
15. Жисмининг текис параллел ҳаракатини қандай икки ҳаракатга ажратиш мумкин?
16. Жисмининг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши қутбга боғлиқми?
17. Текис шакл нуқтасининг тезлиги қандай аниқланади?
18. $V_c = v_c + v_{ac}$ тенгликдан v_{ac} тезлиқнинг модули қандай топилади? γ қандай йўналган?
19. Текис шакл икки нуқтаси тезлиқининг проекцияси ҳақидаги теоремани таърифланг?

56-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ

Агар (S) текис шакл илгариланма ҳаракатда бўлса, бу шаклда ҳар онда тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқта мавжуд бўлади. Тезлиги нолга тенг бўлган бундан нуқтага тезликлар оний маркази дейилади. Текис шаклнинг тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқтанинг мавжудлигини исботлаймиз. Текис шакл бирор A нуқтасининг тезлиги $\vec{v}_A$ ва шу A нуқта агрофидаги айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги ω берилган бўлсин (120-рasm). A нуқтани қутб деб қабул қиламиз.

Қутбдан айланма ҳаракат йўналишида $\vec{v}_A$ га перпендикуляр AN тўғри чизиғи утказилади. A нуқтадан бошлаб AN тўғри чизиққа AP кесма қўйилади.



120-рasm.

$$PA = \frac{v_A}{\omega}$$

P нуктанинг тезлиги қуйидагича ёзилади.

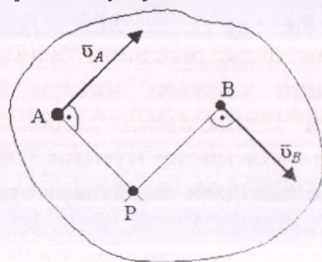
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} \quad (159)$$

P нуктанинг A қутб атрофида айланишдаги тезлигининг модули топилади.

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \frac{v_A}{\omega} = v_A \quad v_{PA} = v_A$$

P нуктада $\vec{v}_{PA}$ вектори $\vec{v}_A$ га бир тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши юнalgан бўлади.

У ҳолда (159)-тенгликдан $v_P = 0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, P нукта тезликлар оний маркази бўлади. Тезликларнинг оний марказини топиш учун текис шаклда ётган икки ихтиёрий A ва B нукталар тезликларининг йўналиши берилган бўлиши керак. Шу нукталардан A ва B нукталарнинг тезликларига тушурилган перпендикулярнинг кесилган нуктаси тезликларнинг оний маркази бўлади (121-расм). P нукта тезликларнинг оний маркази, бу нуктанинг тезлиги нолга тенг. $v_P = 0$



121-расм.

57-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ ЕРДАМИДА ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАЛАРИНИНГ ТЕЗЛИГИНИ ТОПИШ

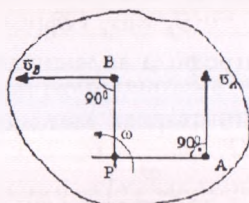
Шаклда кўрсатилган ҳолатда S текис шаклда ётган P нукта тезликларининг оний маркази бўлсин. Шаклдаги ихтиёрий A ва B нукталарининг тезликларини топиш керак (122-расм). Бунинг учун P нуктани қутб деб қабул қиламиз. A ва B нукталарининг тезликлари учун қуйидаги формулаларни ёзамиз.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{PB}$$

Бу ерда $\bar{v}_p = 0$ бўлганлиги учун қуйидагича ёзамиз.

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{AP} \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{BP}$$



122-рasm.

Бунда $\bar{v}_{PA}, \bar{v}_{BP}$ лар - A ва B нуқталар тезликлар оний маркази атрофида айлаганда ҳосил қилган тезлиги. Уларнинг модули:

$$\begin{aligned} v_{AP} &= \omega \cdot PA & v_A &= \omega \cdot PA \\ v_{BP} &= \omega \cdot BP & \text{ёки} & v_B &= \omega \cdot BP \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &\perp PA & \bar{v}_B &\perp BP \\ \omega &= \frac{v_A}{PA} & \omega &= \frac{v_B}{BP} \end{aligned} \quad (161)$$

(161)-формула билан текис шаклнинг бурчак тезлиги топилади. Демак, бирор онда оний маркази маълум бўлган текис шакл нуқталарнинг шу ондаги тезликларини айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарнинг тезликлари каби топиш мумкин. (160)-формуладан текис шакл нуқталарининг айна пайтдаги тезликлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

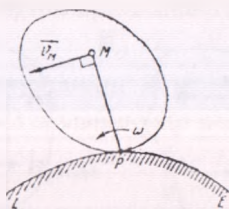
$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} \quad (162)$$

Яъни ҳар ондаги текис шакл нуқталари тезликларнинг модули оний марказдан то шу нуқталаргача бўлган масофага пропорционал бўлади. Демак, тезликлар оний маркази билан текис шакл ҳар қандай нуқтасининг тезлигини топиш учун шу шаклда етган ихтиёрий A нуқтаси тезлигининг модули ва йўналиши ҳамда бошқа B нуқта тезлигининг айналиши берилган бўлиши керак.

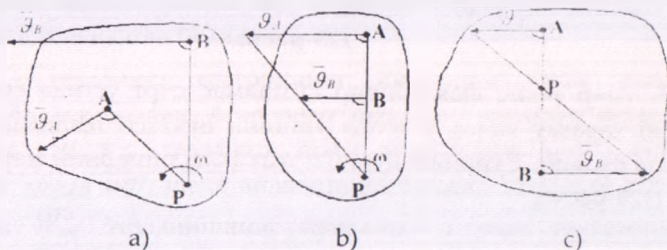
58-§. БАЎЗИ ҲОЛЛАРДА ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ

1. Агар текис шакл бирор A нуқтасининг тезлиги $\bar{v}_A$ ва B нуқта тезлигининг йўналиши маълум бўлса, тезликлар оний маркази A ва B

нуқталардан тезликларга ўтказилган перпендикуляр дўртинчи кесинилган нуқтасида бўлади (124-расм. а).



123 – расм.



124-расм.

2. Агар текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари параллел ва AB кесмага перпендикуляр йўналган бўлса, у ҳолда тезликлар оний марказини аниқлаш (124-расм b,c) да кўрсатилган. Бу ҳолда тезликлар оний маркази AB кесма билан тезликларнинг учлари орқали ўтган тўғри чизиқнинг кесинилган нуқтаси бўлади.

3. Текис шакл A ва B нуқталарнинг тезликлари бир бири билан параллел бўлиб, AB кесма v_1 тезликка перпендикуляр бўлмаса бу ҳолда A ва B нуқталардан уларни тезликларига қўйрилган перпендикулярлар ўзаро параллел бўлиб кесинмайди. Демак, тезликлар оний маркази чексизликда бўлади (125-расм. а). A ва B нуқталарининг тезликларининг AB тўғри чизиққа проекцияланганда:

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$$

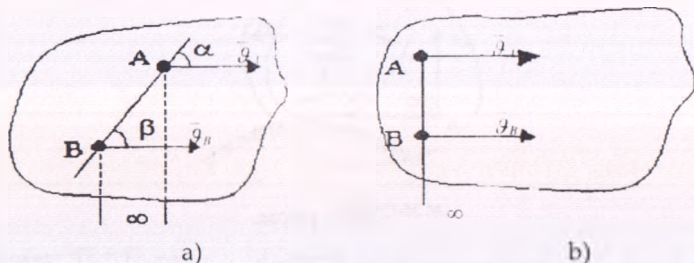
$$v_A = v_B$$

Текис шаклнинг бурчак тезлиги $\omega = \frac{v_1}{PA} = \frac{v_2}{PB} = 0$. Яъни текис шакл

беришган онда илгариланма ҳаракат қилади.

4. Текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари тенг ва параллел йўналган бўлса, тезликлар оний маркази чексизликда бўлади $\angle A'P' = \infty$ ва текис шаклнинг бурчак тезлиги нолга тенг бўлади (124-расм. b). Бу ҳолда

текис шакл барча нуқталарининг тезликлари ўзаро тенг ва параллел бўлади, яъни текис шакл оний параллелма ҳаракатда бўлади.



125-расм.

5. Агар текис шакл бирор қўзғалмас сирт устида сирпанмасдан юмалаб ҳаракат қилса, у ҳолда уриниш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади. P уриниш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади $v_P = 0$ (123-расм).

59-§. ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Теорема: Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезланиши қутб тезланиши билан мазкур нуқтанинг қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот: Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезлигини аниқлайдиган формула берилган бўлсин.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (163)$$

В нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (163)-формуладан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} \quad (164)$$

$$\text{бунда} \quad \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{w}_B, \quad \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{w}_A, \quad \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \vec{w}_{BA} \quad (165)$$

(165) ни (164) га қўямиз, у ҳолда

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA} \quad (166)$$

(166)-формула билан текис шакл исталган B нуқтасининг тезланиши топилади.

Бунда $\vec{W}_A$ - A қутбining тезланиши. $\vec{W}_B$ - B нүктанинг A қутб атрофида айланиганда ҳосил бўлган тезланиши. $\vec{W}_{BA}$ тезланишининг уринма ва нормал тезланишларга ажратамиз.

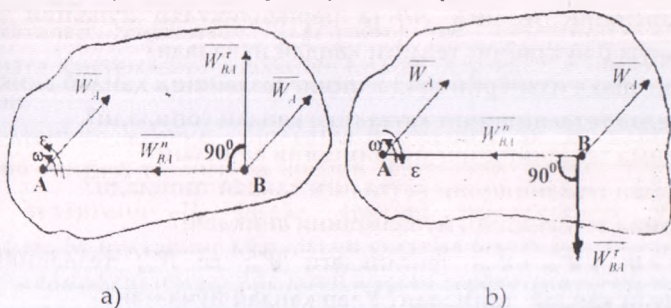
$$\vec{W}_{BA} = \vec{W}_B^n + \vec{W}_B^r \quad (166')$$

Бунда $\vec{W}_B^n$ ва $\vec{W}_B^r$ - B нүктанинг A қутб атрофида айланишида ҳосил бўлган уринма ва нормал тезланишлар модули қуйдагига тенг:

$$\begin{aligned} \vec{W}_B^n &= \xi \cdot AB & \text{бунда} & \quad \vec{W}_B^r = \vec{W}_A \\ \vec{W}_B^n &= \omega^2 \cdot AB & \vec{W}_B^r &= AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{aligned} \quad (167)$$

$\vec{W}_B^n$ - тезланиш вектори ҳар доим AB масофа бўйича B нүктадан A қутбга қараб йўналган бўлади. $\vec{W}_B^r$ тезланиш вектори B нүктадан AB га перпендикуляр йўналган бўлади.

$\vec{W}_{BA}^r$ - тезланиш векторининг йўналиши текис шаклнинг ҳаракатига боғлиқ бўлади. Агар текис шаклнинг ҳаракати тезланувчан бўлса, яъни $\varepsilon > 0$, $\vec{W}_{BA}^r$ тезланиш шакл айланишига қараб йўналган бўлади. Акс ҳолда $\varepsilon < 0$ шакл айланишига тесқари йўналади (126-расм а, б). Демак $\vec{W}_{BA}^r$ тезланишнинг йўналиши бурчак тезланишининг йўналишига боғлиқ. Бурчак тезланиши ε қайси томонга қараб йўналса, $\vec{W}_{BA}^r$ тезланиш шу томонга қараб йўналган бўлади.



126-расм.

(166') ни (166) га қўйиб B нүктанинг тезланиши топилади.

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^r + \vec{W}_{BA}^n \quad (168)$$

Текис шакл ҳар қандай B нүктасининг тезланиши қутбнинг тезланиши билан B нүктанинг текис шакл билан бирга шу қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Текис шакл ихтиёрий нүктаси тезланишининг катта ва йўналишининг (168)-дан фойдаланиб аниқлаш мураккаб бўлиши мумкин.

Бундай ҳолда $\vec{W}_H$ тезланишининг бир бирита перпендикуляр йўналган ўқлардаги проекциялари топилади. Бунинг учун ўқлардан бирини, масалан X ўқини, айланиш радиуси (AB) бўйлаб, иккинчисини эса унга перпендикуляр равишда ўтказиб, (168) ни шу ўқларга проекциялаймиз:

Тезланиш $\vec{W}_H$ нинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, унинг модули ва йўналишини қуйидаги формулалардан топилади.

$$W_H = \sqrt{W_{Hx}^2 + W_{Hy}^2} \quad (169)$$

$$\cos(\vec{W}_H, x) = \frac{W_{Hx}}{W_H}; \quad \cos(\vec{W}_H, y) = \frac{W_{Hy}}{W_H} \quad (170)$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

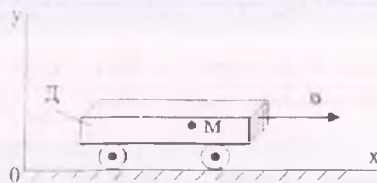
1. Тезликлар оний маркази деб нимага айтилади?
2. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг йўналишини маълум бўлса, тезликлар оний марказини қандай аниқлаш мумкин?
3. Тезликлар оний маркази чексизликда бўлган пайтда текис шакл нуқталарининг тезлигини аниқланг?
4. Бурчак тезлиги қандай аниқланади?
5. Текис шаклнинг A ва B икки нуқтаси берилган. Бунда A нуқтасининг тезлиги AB га перпендикуляр йўналган эканлиги маълум B нуқтанинг тезлиги қандай йўналади?
6. Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади?
7. Уринма тезланишнинг катталиги қандай топилади?
8. Уринма тезланишнинг йўналишини аниқланг?
9. Нормал тезланишнинг катталиги қандай топилади?
10. Нормал тезланишни йўналишини аниқланг?
11. $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{B,1} + \vec{W}_{B,2}$ тенгликдаги W_{BA}^r ва W_{BA}^n тезланишларнинг модули қандай топилади? Улар қандай йўналган?

60-§. НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ.

НУҚТАНИНГ НИСБИЙ, КЎЧИРМА ВА АБСОЛЮТ ҲАРАКАТИ

Агар нуқта ёки қаттиқ жисм бир вақтда икки ёки ундан кўн ҳаракатда иштирок қилса, нуқтанинг ёки қаттиқ жисмнинг бундай ҳаракатига мураккаб ёки абсолют ҳаракат дейилади. Масалаларни ечишда нуқта еки жисмнинг ҳаракатини икки ва ундан орттиқ координата системаларида нисбатан текширишга тўғри келади. Бундай ҳолда координата системаларидан бири қўзғалмас деб олинтиб,

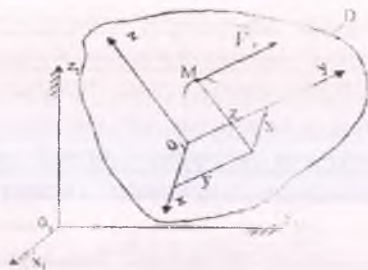
иккинчиси эса ушга нисбатан маълум қонунга мувофиқ ҳаракат қилади деб қаралади. Бу ҳолда нуқта қўзғалмас координаталар системасига нисбатан мураккаб ҳаракатда бўлади. Масалан: Автобус еки поезд ичидagi пассажирнинг ҳаракати. Бу мисолда ер билан боғланган координаталар системаси қўзғалмас бўлиб, поезд, автобус билан боғланган координаталар системаси қўзғалувчи координаталар системасидан иборат бўлади. M нуқтанинг вагонга нисбатан қилган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади. Унинг вагон билан бирга ерга нисбатан қилган ҳаракатига қўчирма ҳаракат дейилади. M нуқтанинг бевосита ерга нисбатан қилган ҳаракати мураккаб ҳаракат бўлади (127-расм).



127-расм.

Маълум бир ҳаракат қилувчи D жисм берилган бўлсин. $Oxyz$ - D жисмга маҳкам ўрнатилган қўзғалувчи система. $O_0x_0y_0z_0$ - қўзғалмас координаталар системаси (127-расм.) M нуқтанинг қўзғалувчи координата системасига нисбатан қилган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади.

Нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши дейилади. Нуқтанинг нисбий тезлигини $\vec{U}_r$ билан, нисбий тезланишини $\vec{W}_r$ билан белгилайди. M нуқтанинг қўзғалувчи система билан ёки D жисм билан бирга қўзғалмас системага нисбатан қилган ҳаракатига қўчирма ҳаракат дейилади. M нуқтанинг қўчирма ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг қўчирма тезлиги ва қўчирма тезланиши дейилади. Нуқтанинг қўчирма тезлиги $\vec{U}_c$ билан қўчирма тезланиши $\vec{W}_c$ билан белгиланади. M нуқтанинг бевосита қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракат ёки абсолют ҳаракат дейилади. Нуқтанинг абсолют ёки мураккаб ҳаракатдаги тезлигига абсолют тезлик, тезланишига абсолют тезланиш дейилади. Абсолют тезликни $\vec{U}_a$ билан, абсолют тезланишни $\vec{W}_a$ билан белгиланади.



128-расм.

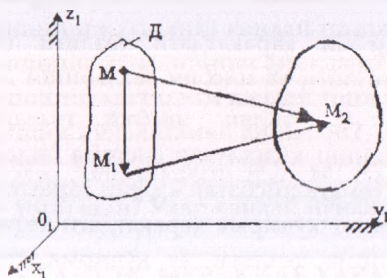
61-§. ТЕЗЛИКЛАРНИ ҚЎШИШ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Нуктанинг абсолют тезлиги унинг нисбий ва кўчирма тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (171)$$

Исбот: Қўзғалмас тўғри бурчакли O_1, x_1, y_1, z_1 координата системасига нисбатан ҳаракат қилаётган D жисм берилган бўлсин. Шу жисмга нисбатан M нукта ҳаракат қилади. D жисмнинг t ва t_1 вақтлардаги ҳолатлари берилган бўлсин (129-расм.)

Δt вақт ичида M нукта D жисмга нисбатан $\overline{MM_1}$ масофага, жисм билан бирга эса $\overline{MM_2}$ масофага силжийди.



129 – расм.

Бунда $\overline{MM_1}$ ва $\overline{MM_2}$ мос равишда M нуктанинг нисбий ва кўчирма силжиш векторлари, $\overline{MM_2}$ нуктанинг абсолют силжиш вектори. Расмдан:

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} \quad (171)$$

(171) - формуланинг иккала қисмини Δt га бўламиз:

$$\frac{MM_2}{\Delta t} = \frac{MM_1}{\Delta t} + \frac{M_1M_2}{\Delta t} \quad (172)$$

(172)-формуладаги

$$\frac{MM_2}{\Delta t}, \quad \frac{MM_1}{\Delta t} \quad \text{ва} \quad \frac{M_1M_2}{\Delta t}$$

Мос равишда M нуқтанинг M вақт нқтидаги ўртача абсолют шисбий кўчирма тезлиги бўлади.

Нуқтанинг бирор ихтиериин t вақтдаги тезлигини топиш учун (172) ни $\Delta t \rightarrow 0$ шилириб, лимит оламиз:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_1M_2}{\Delta t} \quad (172')$$

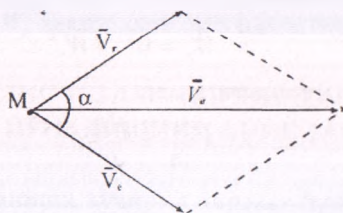
бунда $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_2}{\Delta t} = \bar{v}_a$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = \bar{v}_r$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_1M_2}{\Delta t} = \bar{v}_e$.

Демак (172') формулани қуйидагича ёзамиз.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e \quad (173)$$

Теорема исбот қилинди. (173)-формула нуқтанинг кўчирма ҳаракати илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат бўлган ҳолларда ҳам ўринлидир.

Абсолют тезликнинг модулини ва йўналишини аниқлаш учун шисбий ва кўчирма тезликлардан параллелаграм ясаи керак (130-расм).



130-расм.

Абсолют тезликнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \alpha} \quad (173)$$

Бунда α , v_r ва v_e тезликлар орасидаги бурчак.

1) Агар $\alpha=0$ бўлса, $\bar{v}_r$ билан v_e тезликлар бир тўғри шисбий бўлиб бир томонга йўналган бўлса, абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e} = v_r + v_e$$

2) Агар $\alpha=180^\circ$ бўлса, унинг v_r билан v_e бир түгри чизиқ бўйлаб қарама қарши йўналган бўлиб абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} - 2v_r v_e = v_r - v_e$$

3) Агар $\alpha=90^\circ$ бўлса, абсолют тезлик модули қуйидагича тенг бўлади.

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}$$

Агар нисбий, кўчирма ва абсолют тезликларидан иккёрини маълум бўлса, ушунини нолмаълум тезликни тезликларни қўшини ҳақиқати теоремадан фойдаланиб аниқлаш мумкин.

62-§. НУҚТАНИНГ КЎЧИРМА ҲАРАКАТИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТДАН ИБОРАТ БЎЛГАН ҲОЛДА ТЕЗЛАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ ТЕОРЕМАСИ

Теорема: Нуқтанинг кўчирма ҳаракати айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларининг геометрик йигиндисига тенг бўлади.

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c \quad (176)$$

Бунда $\vec{W}_r, \vec{W}_e, \vec{W}_c$ лар мос равишда нуқтанинг кўчирма нисбий ва кориолис тезланишлари.

$\vec{W}_r$ ва $\vec{W}_e$ тезланишларни уринма ва нормал тезланишларга ажратиш мумкин.

$$\vec{W}_r = \vec{W}_r^r + \vec{W}_r^n \quad (177)$$

$\vec{W}_r^r$ нинг модули қуйидагича тенг

$$W_r^r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2 S_r}{dt^2}$$

$\vec{W}_r^n$ нинг модули:

$$W_r^n = \frac{v_r^2}{\rho}$$

Агар нуқтанинг нисбий ҳаракати түгри чизиқли ҳаракатдан иборат бўлса, троекториянинг эрилик радиуси $\rho=\infty$ га тенг бўлади. Бу ҳолда $W_r^n=0$ бўлади.

$$\vec{W}_e = \vec{W}_e^r + \vec{W}_e^n \quad (178)$$

$\vec{W}_e^r$ нинг модули қуйидагича тенг

$$W_e^r = \xi_e \cdot h$$

W_r^{abs} нинг модули

$$W_r^{abs} = \omega_c^2 \cdot h$$

(177) ва (178) ларни (176) га қўямиз, у ҳолда

$$W_a = \bar{W}_r^{abs} + W_r^{rel} + W_c^{rel} + W_c^{abs} + W_k \quad (179)$$

Кучирма ҳаракат айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуктанинг абсолют тезланиши (179)-формуладан топилган.

W_a абсолют тезланишнинг модулини ва йўналишини аниқлаш учун (179) ни x, y, z , координата ўқларига проекциялаб, ушунг нуқталардаги W_{ax}, W_{ay}, W_{az} проекцияларини топиш керак. Абсолют тезланишнинг модулини қуйидаги формула билан аниқлаймиз:

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} \quad (180)$$

Кучирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда нуктанинг абсолют тезланиши шу нуктанинг нисбий ва кучирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Шундай қилиб, кучирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда, нуктанинг абсолют тезланиши нисбий тезланиш $\bar{W}_r$ ва кучирма тезланиш $\bar{W}_c$ лардан қурилган параллелограмнинг диагонали билан ифодаланади. Бу ҳолда абсолют тезланишнинг модули қуйидагича топилади.

$$W_a = \sqrt{W_r^2 + W_c^2 + 2W_r W_c \cos \alpha} \quad (180')$$

Бунда α $\bar{W}_r$ ва $\bar{W}_c$ векторлари орасидаги бурчак.

63-§. КОРИОЛИС ТЕЗЛАНИШИНИНГ МОДУЛИНИ ВА ЙЎНАЛИШИНИ АНИҚЛАШ

Кориолис тезланиши кучирма ҳаракат бурчак тезлиги ва нисбий ҳаракат тезликлари векторли купайтмасининг икқиланганига тенг.

$$\bar{W}_k = 2(\omega_c \times v_r) \quad (181)$$

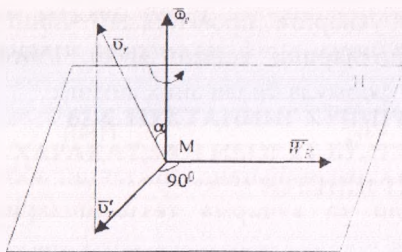
Агар ω билан $\bar{v}_r$ орасидаги бурчак катталигини α билан белгиласак, Кориолис тезланишнинг модули қуйидагича тенг бўлади.

$$W_k = 2\omega_c v_r \sin \alpha \quad (182)$$

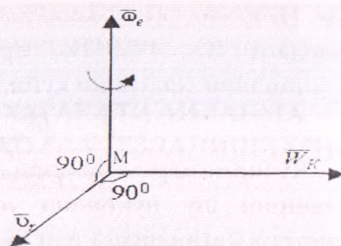
Кориолис тезланишнинг йўналишини аниқлаймиз. M нуктанинг нисбий тезлиги $\bar{v}$ берилган бўлсин. Кориолис тезланишнинг йўналишини аниқлаш учун M нуқтадан ω_c бурчак тезлик векторига

перпендикуляр қилиб, II текислиги ўтказилади. Нисбий тезлик, v_r шу текисликка проекциялаймиз. v_r' проекцияни M нукта атрофида айланиш йуналишига қараб, 90° бурчакка бурсак Кориолис тезланишининг йуналиши келиб чиқади (131-расм). Агар $\omega \perp v_r$ бўлса (132-расм), $\sin\alpha=1$ бўлади. У ҳолда Кориолис тезланиши қийиндаги бўлади.

$$W_c = 2\omega_r v_r \quad (183)$$



131-расм.



132-расм.

Нуқтанинг Кориолис тезланиши қуйидаги ҳолларда нолга тенг бўлади.

1. Кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлса, бу ҳолда $\omega=0$ нутқини учун $W_K=0$ бўлади.

Кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

$$W_a = W_r + W_c \quad (184)$$

2. Нуқтанинг нисбий тезлиги $v_r=0$ га тенг бўлса, $v_r=0$ $W_c=0$.

3. ω_r ва v_r векторлар ўзаро паралел бўлса, бу ҳолда $\alpha=0^\circ$, $\alpha=180^\circ$ $W_K=0$ бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг нисбий ҳаракатини айтгин?
2. Нуқтанинг кўчирма ҳаракатини айтгин?
3. Нуқтанинг абсолют ҳаракатини айтгин?
4. Тезликларни қўшин ҳақидаги теоремани таърифланг?
5. Абсолют тезлиkning миқдори қандай аникланади?
6. Абсолют тезлиkning йуналиши қандай аникланади?
7. Тезланишларни қўшин ҳақидаги теоремани таърифланг?

8. Күчирма ҳаракат инерцияланма бўлганда нуктанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?
9. Күчирма ҳаракат айланма бўлганда нуктанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?
10. Кориолис тезланишининг катталиги қандай аниқланади?
11. Кориолис тезланишининг йуналишини аниқланг?
12. Қандай ҳолларда нуктанинг Кориолис тезланиши нолга тенг бўлади.

ДИНАМИКА.

64-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Назарий механиканинг динамика бўлимида жисмларнинг ҳаракати уларнинг массасига ва ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларга боғлиқ равишда текширилади.

Жисм ҳаракатланганда унга ўзгармас кучлардан ташқари миқдор ва йуналиш жиҳатидан ўзгарадиган кучлар ҳам таъсир этади. Жисмга таъсир қилувчи кучлар вақтга, жисм ҳолатига ва унинг тезлигига маълум муносабатда боғлиқ бўлади.

Масалан, электровоз реостатини кетма-кет улашда ёки узишда ҳосил бўладиган тортиш кучи вақтга боғлиқ, суюқлик ёки ҳавонинг қаршилик кучи эса жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлади. Демак, умумий ҳолда жисмга таъсир этувчи кучлар вақтга, жисмнинг ҳолатига ва тезлигига боғлиқ бўлади.

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

бунда t -вақт, $\vec{r}$ -нуктанинг ҳолатини аниқловчи радиус-вектор, $\vec{v}$ -жисм тезлиги.

Жисмнинг қўйилган кучлар таъсирида ўз тезлигини тез ёки секин ўзгартириш хусусияти жисмнинг инертлиги дейилади. Жисмнинг инертлигини миқдор жиҳатидан ифодаловчи физик катталик жисмнинг массаси дейилади. Механикада жисмнинг массаси ўзгармас, сколяр ва мусбат катталик деб қаралади. Динамикада дастлаб жисмларнинг ўлчамлари ва массаларининг тақсимланишини эътиборга олмаган ҳолда уларнинг ҳаракатини ўрганиш учун моддий нукта тушунчаси киритилади. Ҳаракатини ўрганишда ўлчамлари аҳамиятга эга бўлмаган, лекин массага эга бўлган жисм моддий нукта дейилади.

Динамикада жисмнинг ҳаракатини ўрганишини, одатда, унинг нуктасининг ҳаракатини ўрганишдан бошланади.

Динамика икки қисмга бўлинади:

1. Моддий нукта динамикаси
2. Механик система ва каттик жисм динамикаси.

Динамикада қуйидаги иккита масала етилади:

1. Нукта ёки системанинн ҳаракати берилган, шу нукта ёки системага таъсир қилувчи кучни топиш керак.
2. Нукта ёки системага таъсир қилувчи кучлар берилан, нукта ёки системанинн ҳаракатини аниқлаш керак.

65-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

Механика қонунлари жисмларнинг тезликлари ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган ҳолда ўринли бўлади. Динамика қуйидаги 4 та қонунига асосланган:

1-қонуни (инерция қонуни)

Агар нуктага куч таъсир этмаса нукта ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизикли текис ҳаракат ҳолатини сақлайди.

Инерция қонунига қўра $F=0$ бўлса, $\vec{w}=0$ бўлади, $\vec{v} = \text{const}$ бўлади. Бу ерда $\vec{v}$ – моддий нуктанинн тезлик вектори, $\vec{w}$ – тезланиш вектори, F – куч вектори.

2-қонуни (динамиканинг асосий қонуни).

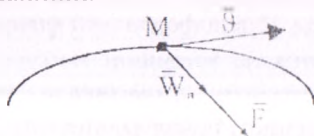
Нуктанинн куч таъсирида олган тезланиш билан массанинн қўпайтмаси миқдор жиҳатидан шу кучга тенг бўлиб куч билан бир хил нуналнида бўлади.

$$F = mw \quad (186)$$

Бунда: F – куч миқдори;

m – нуктанинн массаси;

w – нуктанинн тезланиши.



133-расм.

Эркин тушаётган жисмининг оғирлик кучи ўзининг массаси билан эркин тушини тезланишининг қўпайтмасига тенг.

$$P = mg$$

Жисмининг массаси қуйидагича аниқланади

$$m = \frac{P}{g} \quad (187)$$

Бунда $g=9,81 \text{ м/с}^2$ - эркин тушши тезлашиши.

(186)- нини вектор кўринишини қўпидагича ёзилади.

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad (188)$$

Кинематикадан маълумки нуктанинг тезлашиши қўпидагича тенг.

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{у ҳолда:}$$

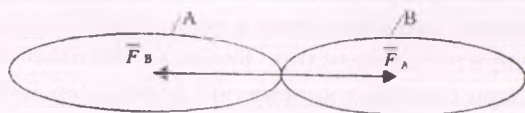
(188)- тенглама қўпидагича ёзилади

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (189)$$

(188)- ва (189)- тенгликка нукта динамикасишнинг асосий тенгламаси дегилади.

4-қонуни (таъсир ва акс таъсир қонуни)

Ҳар қандай таъсир миқдор жиҳатидан ўзига тенг булган ва бир юзги чизик бўйлаб тескари томонга йўналган акс таъсирни вужудга келтиради.



134-расм.

A жисм B жисмга $\vec{F}_1$ куч билан таъсир этса, B жисм ҳам A жисмга $\vec{F}_2$ куч билан таъсир қилади.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (190)$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

Бу ерда $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни ўзаро мувозанатлашмайди, чунки кучлар ҳар хил жисмга қўйилган.

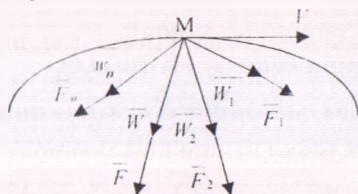
4-қонуни (кучлар таъсирининг эркинлик қонуни)

Бир нукта куч бирданга таъсир этганда нуктанинг олган тезлашиши шу кучларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида таъсир этганда олган тезлашиларишнинг геометрик янгииндисига тенг.

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 + \dots + \vec{w}_n \quad (191)$$

Бунда $\vec{w}$ - нуктанинг $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ кучларни бирданга таъсир этганда олган тезлашиши.

$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots, \vec{w}_n$ - шу кучларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида таъсир этганда содлан тезланиши (135-расм).



135-расм.

(191)-тенгламани иккала қисмини нуқтанинг массасига қўйиб пирамиз.

$$m\vec{w} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 + m\vec{w}_3 + \dots + m\vec{w}_n$$

$$m\vec{w} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

ёки

$$m\vec{w} = \sum \vec{F}_k \quad (192)$$

Классик механика қонунлари ўринли бўлган санок системаси инерциал система дейилади. Техника масалаларини ечилишда инерциал система сифатида Ер билан бевосита боғланган система олинади.

Механик ўлчов бирликлари системаси

Ҳамма механик катталикларни ўлчаш учун 3 та асосий ўлчов бирликларини киритиб етарлидир. Булардан икkitаси учун вақт ва узунлик бирликлари олингани кинематика бўлимидан маълум. 3-ўлчов бирлиги сифатида масса ёки кучнинг ўлчов бирликлари олинади.

Механикада бир-биридан фарқ қилувчи икки турдаги бирликлар системаси киритилади.

Биринчи тур бирликлар системаси.

Халқаро СИ бирликлар системасининг таркибий қисми бўлган МКС системаси кенг қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар олинади:

1. Узунлик бирлиги – 1 метр (м)
2. Масса бирлиги – 1 килограмм (кг)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Қолган барча механик катталикларининг биринчи асосий бирликлардан ҳосиланиш бирлик сифатида олинади.

Масалан, куч бирлиги учун 1 ньютон (Н) қабул қилинади. $1\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$, яъни 1кг массага $1\text{м} / \text{с}^2$ тезланиш берадиган куч бирлиги 1Н га тенг.

Иккинчи тур бирликлар системаси.

Техник бирликлар системаси деб аталувчи МКГСС системаси ҳам қўлланилади. Бу системада асосини учов бирликларни учун қўйиладиган бирликлар қабул қилинади.

1. Уzunлик бирлиги - 1 метр (м)
2. Куч бирлиги - 1 килограмм куч (кгк)
3. Вaкт бирлиги - 1 секунд (сек)

Хар қандай масалани ечинда фақат бунга бирликлар системасидан фойдаланиш лозим.

66-§. МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Массаси m га тенг бўлган M нукта F кучи таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётган бўлсин. F - нуктага қўйилган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси (136-расм).

Нукта динамикасининг асосий тенгламаси тонамиз:

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad (193)$$

бу тенгламани учун (193) формула қўйиладиганча ёзилади:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}; \quad (194)$$

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (195)$$

(194)- ёки (195)- тенгламалар эркин моддий нукта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси дейилади.

(191)- тенглама координата ўқларига проекциялаймиз:

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x; \quad m \frac{dV_y}{dt} = F_y; \quad m \frac{dV_z}{dt} = F_z; \quad (196)$$

бу ерда V_x, V_y, V_z - $\vec{v}$ тезлик векторининг x, y, z ўқларидаги проекцияси

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (197)$$

F_x, F_y, F_z - F кучларининг x, y, z ўқларидаги проекциялари

(196)- формулага нукта ҳаракатининг Декарт координаталардаги дифференциал тенгламалари дейилади.

(197)- ни (196)- га қўйсак қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \quad (198)$$

$$\ddot{m}x'' = F_x'; \quad m\ddot{x}'' = F_x'; \quad m\ddot{z}'' = F_z'; \quad (199)$$

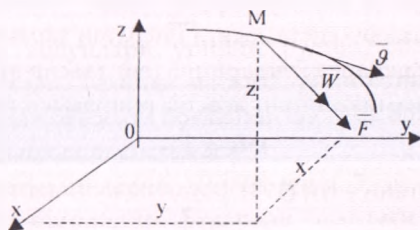
(198)- ва (199)- формулалар ҳам нуқта ҳаракатининг Декарт координаталаридаги дифференциал тенгламаларни ифода этади. Агар нуқта бир текисликда ($\lambda O\lambda$) ҳаракат қилса, (198)-тенглама куйидагича ёзилади:

$$m \frac{d\theta}{dt} = F; \quad m \frac{d\theta}{dt} = F; \quad (200)$$

Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилса, (196)-тенглама куйидагича ёзилади:

$$m \frac{d\theta}{dt} = F; \quad (201)$$

(201)-тенгламага тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.



136-расм.

Массаси m га тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекцияларини куйидагича аниқлаш мумкин:

$$mw_r = F_r; \quad mw_n = F_n; \quad mw_s = 0; \quad (201')$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_s; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

(201')-тенгламаларга моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари дейилади.

ТАРОВАШ УЧУН САВОЛАР.

1. Динамика бўлими нимани ўрганади?
2. Асосий тушунча ва таърифларни айтинг?
3. Масса деб нимага айтилади?
4. Моддий нуқта деб нимага айтилади?
5. Тезликка, вақтга ва масофага боғлиқ бўлган кучларга мисол келтиринг?

6. Механиканинг асосий қонуларини айтиш?
7. Инерционал санақ системаси деб нима аталлади?
8. Нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардан дифференциал тенгламаларини ёзиш?
9. Динамиканинг асосий тенгламасини ёзиш?
10. Нуқта учун динамиканинг икки асосий масаласини айтиш?

67-§. НУҚТА ДИНАМИКАСИНING БИРИНЧИ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ УСУЛИ

Нуқтанинг массаси ва ҳаракат тенгламалари берилган бўлсин.

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (202)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори ва йуналишини топиш лозим бўлсин. Ҳаракатни вужудга келтирувчи кучнинг проекциялари аниқланади. Буниш учун берилган тенгламалардан вақт бўйича икки мартаба ҳосила олинади.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t); \quad (203)$$

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардан дифференциал тенгламаларига қўйилади:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \quad (204)$$

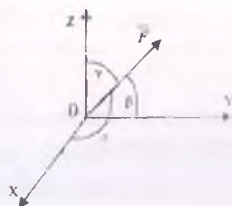
$$F_x = m f_1''(t); \quad F_y = m f_2''(t); \quad F_z = m f_3''(t); \quad (205)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (206)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг йуналишини йўналтирувчи косинуслар ёрдамида топилади.

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (207)$$



137-расм.

Бунда, α , β , γ - F куч вектори билан координата ўқлари орасидаги бурчаклар.

Нукта динамикасининг биринчи масаласига доир масалалар ечиш тартиби

Нукта динамикасининг биринчи асосий масаласи қутиндаги тартибда ечилади.

1) Нукта тезлашишининг координата ўқларидаги проекцияси топилади.

2) (204)-формула билан нуктага таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекцияси топилади.

3) (206)- ва (207)- формулалар билан нуктага таъсир этувчи кучнинг миқдори ва йўналишини топилади.

Мисол №1. Массаси $0,2 \text{ кг}$ бўлган моддий нуктанинг ҳаракати $x=3\cos 2\pi t$, $y=4\sin \pi t$ (см) тенгламалар билан ифодаланади, бу ерда t - секундлар ҳисобида. Нуктага таъсир қилувчи кучнинг проекцияларининг координаталари орқали ифодалансин.

Ечиш. Нукта тезлашишининг координата ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

$$W_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -12\pi^2 \cos 2\pi t$$

$$W_y = -4\pi^2 \sin \pi t$$

Нуктага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y;$$

$$\cos 2\pi = \frac{x}{3}$$

$$\sin \pi = \frac{y}{4}, \quad F_x = m(-12\pi^2 \cos 2\pi t) = -12\pi^2 m \frac{x}{3} = -4\pi^2 \cdot 0,2x = -0,8 \cdot 9,86x \cdot 10^{-2} = -0,0788x$$

$$F_y = m(-4\pi^2 \sin \pi t) = -4 \cdot 9,86 \cdot 0,2 \cdot \frac{y}{4} = -9,86 \cdot 0,2y \cdot 10^{-2} = -0,0197y$$

Мисол № 2. Массаси $2,04 \text{ кг}$ бўлган жисм горизонтал йўри чизик бўйлаб тебранма ҳаракат қилади. Жисмнинг тебранма ҳаракат тенгламаси қуйидагича аниқланади.

$$x = 10 \sin \frac{\pi}{2} t \quad (\text{М})$$

Жисмга таъсир қилувчи куч билан унинг ҳаракат тенгламаси орасидаги муносабат ва шу кучнинг энг катта қиймати топилин.

Үчинч: Нуқта тизлигининг координата уқларидати проекциясини топлаймиз.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5\pi \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$H_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{5\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\sin \frac{\pi}{2} t = \frac{x}{10}$$

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \left(-\frac{5\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} t \right) = \frac{m \cdot 5 \cdot 9,86}{2} \cdot \frac{x}{10} = \frac{2,04 \cdot 5 \cdot 9,86 \cdot x}{20} = -\frac{2,04 \cdot 9,86}{4} x = -5,03xH \quad F_x = -5,03xH$$

$$F_{\max} = m \cdot \frac{5\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} t = \frac{2,04 \cdot 5 \cdot 9,86}{2} = \frac{100,5}{2} = 50,3H$$

$$F_{\max} = 50,3H$$

68-§. НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ ИККИНЧИ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласида массаси ва нуқтага таъсир этувчи куч берилганда, нуқтанин ҳаракат қонуни аниқланади.

Бу масалани ечишда нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларининг (198)- ҳар бирини икки мартадан интеграллаймиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y &= f_2(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z &= f_3(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \end{aligned} \quad (208)$$

(208)- тенглама нуқта ҳаракатининг тенгламасини ифодалайди.

Бунда $c_1, c_2, \dots, c_6$ -ихтиёрый ўзгармас миқдорлар, бу ўзгармас миқдорларни таниш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз.

Нуқтанин бошланғич вақтидаги $t=0$ ҳолатини ва тегиини ифодаловчи шартлар – бошланғич шартлар дейилади.

Масалан; бошланғич шартлар қуйидагича ёзилган.

$$\begin{aligned} x &= x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \\ y &= y_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \\ z &= z_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0, \end{aligned} \quad (208')$$

(208) дан вақт бўйича ҳосил олсак 6 та интеграллан донимийларига боғлиқ қўйидаги учта функция ҳосил бўлади.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\end{aligned}\quad (209)$$

Бошланғич шартларини (208)- ва (209)- та қўйиб, 6 та интеграллан донимийлари қатнашадиган 6 та тенгламалар системасини оламиз. Бу тенгламалар системасини биргаликда олиб 6 та интеграллан донимийларини аниқлаймиз.

$$C_1 = C_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

Интеграллаш донимийлари топилган қийматларини (208)- та қўйиб, (209)- бошланғич шартларига мос бўлган нуқтанинг Декарт координаталардаги кинематик тенгламаларини оламиз.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини нуқтага таъсир этувчи куч бир вақтда нуқта координатасига, тезлигига ва вақтга боғлиқ бўлганда интеграллаш мураккаб. Дифференциал тенгламани фақат қуйидаги ҳолларнинг бирида интеграллаш мумкин.

- 1) Нуқтага таъсир этувчи куч ўзгармас бўлса, $\vec{F} = \text{const}$
- 2) Куч вақтнинг функцияси бўлса, $\vec{F} = \vec{F}(t)$
- 3) Куч масофанинг функцияси бўлса, $\vec{F} = \vec{F}(s)$
- 4) Куч нуқта тезлигининг функцияси бўлса, $\vec{F} = \vec{F}(\vartheta)$

Нуқта динамикасининг иккинчи масаласига доир масалалар ечин тартиби:

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади.

1. Инерциал санок системасини киригиб, координата ўқлари танилаб олинади.
2. Нуқтага таъсир этувчи ва боғланган реакция кучлари чизмада кўрсатилади.
3. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади.
4. Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартлари ёзилади.

$$x = x_0, \vartheta_x = \vartheta_{0x}$$

$$y = y_0, \vartheta_y = \vartheta_{0y}$$

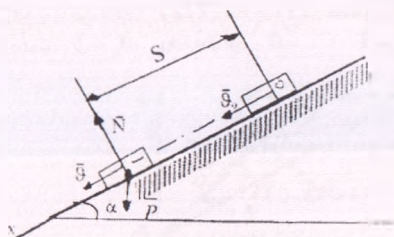
$$z = z_0, \vartheta_z = \vartheta_{0z}$$

5. Тузилган тенгламаларининг ҳар бири икки мартадан интегралланади.
6. Интегралланда ҳосил бўладиган ўзгармас миқдорлар бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади.
7. Тузилган дифференциал тенгламаларининг бошланғич шартларин қаноатлантирувчи ечимни аниқланади ва натижадан номуналар топилади.

Масала №3. Оғир жисм горизонтига 30° бурчак остида оғган силлик текислик бўлаб даста тушади. Агар жисмининг тезлиги бошланғич пайнда 2 м/с га тен бўлган бўлса, жисм $9,6\text{ М}$ йўлни қанча вақтда ўтганин топиш.

Ечиш.

Жисмга таъсир этувчи кучларнинг нуналишини чизмада кўрсатамиз.



138-расм.

Юқ ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунини учун тўғри чизикли ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2 g_x}{dt^2} = F_x;$$

чизмадан $F_N = P_N - N_N$, $N_N = 0$, $F_x = P \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g \sin \alpha \quad (210)$$

(210) ни интеграллаймиз

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d\vartheta_x}{dt} = g \sin \alpha$$

$$d\vartheta_x = g \sin \alpha \cdot dt \quad (211)$$

$$\vartheta_x = g \sin \alpha \cdot t + C_1$$

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = g \sin \alpha \cdot t + C_1$$

$$dx = g \sin \alpha \cdot t dt + C_1 dt \quad (212)$$

$$x = g \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

C_1 ва C_2 ўзгармас миқдорларни аниқлаймиз. Бунинг учун бошланғич шартларни ёзамиз.

$$t = 0 \quad x = x_0 = 0 \quad \vartheta_x = \vartheta_{0x} = 2 \text{ м/с}$$

Бошланғич шартларни (211)- ва (212)- тенгламаларга қўямиз:

$$C_1 = 2 \quad C_2 = 0 \quad \text{бу ҳолда} \quad \vartheta_x = g \sin \alpha \cdot t + 2$$

$$x = g \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + 2t \quad (213)$$

(213) дан t ни аниқлаймиз.

$$9.6 = 9.8 \cdot 0.5 \frac{t^2}{2} + 2t$$

$$19.2 = 4.9t^2 + 4t$$

$$4.9t^2 + 4t - 19.2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 19.2 \cdot 4.9}}{2 \cdot 4.9} = \frac{-4 \pm \sqrt{352}}{9.8}$$

$$t_1 = \frac{-4 + 19.6}{9.8} = \frac{15.6}{9.8} = 1.6 \text{ сек}$$

$$t = 1.6 \text{ сек}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

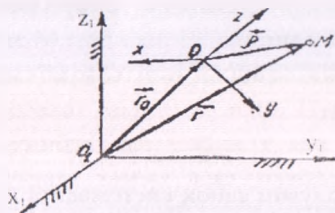
1. Нуқта динамикасининг дифференциал тенгламасини ёзинг?
2. Динамиканинг биринчи масаласи қандай ечилади?
3. Динамиканинг иккинчи масаласи қандай ечилади?
4. Бошланғич шартлар деб нимага айтилади?
5. Интеграллаш ўзгармаслари қандай аниқланади?
6. Дифференциал тенгламани қандай ҳолларнинг бирида интеграллаш мумкин?
7. Куч ўзгармас бўлган ҳолни айтинг?
8. Куч масофанинг функцияси бўлган ҳолни айтинг?

9. Куч вақтининг функцияси бўлган ҳолин аниқини?

10. Куч нукта тезлигининг функцияси бўлган ҳолин аниқини?

69-§. МОДДИЙ НУҚТА НИСБИЙ ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ. КУЧИРМА ВА КОРИОЛИС ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИ.

Моддий нуктанинг инерциал бўлмаган санок системасида нисбатан ҳаракатини текширалик. Фараз қилайлик, массаси m га тенг бўлган M нукта бирор $Oxyz$ санок системасига нисбатан ҳаракатлансин. Бу системасининг ўзи ҳам бошқа бир инерциал $O_1x_1y_1z_1$ санок системасига нисбатан маълум конун асосида ҳаракатланаётган бўлсин. M нуктага қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ бўлганин реакциясининг тенг таъсир этувчиси $\vec{N}$ га тенг.



139-расм.

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N} \quad (214)$$

бунда $\vec{w}$ нуктанинг абсолют тезлигини. Тезлашилларни қўйиш теоремасига кўра, нуктанинг абсолют тезлашини:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k \quad (215)$$

(214) ни (215) га қўйсак

$$m\vec{w}_r + m\vec{w}_e + m\vec{w}_k = \vec{F} + \vec{N} \quad \text{ёки} \quad (216)$$

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{N} + (-m\vec{w}_e) + (-m\vec{w}_k) \quad (217)$$

бу ерда $(-m\vec{w}_e)$ ва $(-m\vec{w}_k)$ векторлар мос равишда кучирма ва кориолис инерция кучлари ва уларни қўйидагича белгиланмиз.

$$\vec{F}_e'' = m\vec{w}_e, \quad \vec{F}_k'' = -m\vec{w}_k \quad (218)$$

(218) ни (217) га қўямиз

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e'' + \vec{F}_k'' \quad (219)$$

(219) тенглама моддий нукта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламасининг векторли кўринишини дейилади. (219) ни икки томонини *Oxyz* координата ўқларига проекциялаймиз.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + F_{cx} + F_{kx} \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_{cy} + F_{ky} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_{cz} + F_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

(220) нукта нисбий ҳаракати дифференциал тенгламасининг координата ўқларидан проекциясини ифодалайди. Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Кўзгалувчи санок системаси илгариланма ҳаракатда бўлсин. У ҳолда

$$W_c = 0, F_k = 0$$

Моддий нукта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^c \quad (221)$$

кўринишда ёзилади.

2. Кўзгалувчи санок система илгариланма ва тўғри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракатда бўлсин.

$\overline{W}_c = 0$, $\overline{W}_k = 0$, $\overline{F}_c = 0$, $\overline{F}_k = 0$ бўлиб дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади.

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} \quad (222)$$

3. Нукта кўзгалувчи санок системасига нисбатан тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатлансин ($g_r = const$). $v_r = 0$ бўлиб дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_c + \overline{F}_k = 0 \quad (223)$$

4. Нукта кўзгалувчи санок системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда $V_c = 0$, $W_r = 0$, $F_k = 0$ бўлади ва дифференциал тенглама кўринишда ёзилади.

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_c = 0 \quad (224)$$

Яъни берилган кучлар, реакция кучлари ва кучирма инерция кучлари ҳар онда ўзаро мувозанатланади.

(224) - тенглама моддий нукта нисбий мувозанат тенгламасининг векторли кўринишини ифодалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

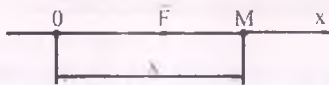
1. Нуктанинг нисбий ва абсолют дифференциал тенгламалари орасида қандай фарқ бор?
2. Кучирма инерция кучлари қайси формула билан топилади?

3. Корiolис инерция кучлари қайси формула билан топилди?
4. Классик механиканинг нисбийлик принципининг моҳияти нимадан иборат?
5. Қандай санок системасига инерциал санок системаси дейилди?
6. Қандай санок системасига инерциал бўлмаган санок системаси дейилди?
7. Қачан нуқта нисбий мувозанатда бўлади?
8. Нуқтани қандай ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилди?
9. Нуқтани қандай ҳаракатига қуширма ҳаракат дейилди?
10. Нуқтани қандай ҳаракатига абсолют ҳаракат дейилди?

70-§. НУҚТАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. ТЕБРАНИШ АМПЛИТУДАСИ, ФАЗАСИ, ЧАСТОТАСИ ВА ДАВРИ

Табиат ва техникада тебранма ҳаракатлар жуда кўп учрайди. Ҳар қандай иппот ёки машинанинг таркибига кирадиган барча қисмлар маълум даражада эластик бўлганидан тебраниш қобилиятига эгадир. M нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатини текширалиб. Фараз қилайлик O нуқта M нуқтанинг мувозанат ҳолати бўлсин. Нуқтани O нуқтадан x масофага олиб бориб қўйиб юборилганда, x яна мувозанат ҳолатига қайтишга интилади. Нуқтага ҳамма вақт мувозанат ҳолатига қараб йўналган F кучи таъсир қилади. Бундай кучни қайтарувчи куч дейилди.

M нуқта ҳаракатининг тендамасини аниқлаймиз. Бунинг учун O нуқтани координата боши қилиб x ўқини ўтказамиз (140-расм).



140-расм.

Қайтарувчи куч модулини топшиш формуласи

$$F = -cx$$

Бунда F - қайтарувчи куч,

c - пропорционаллик коэффициент, c нинг бирлиги кг/см, н/м,
 x - нуқтанинг мувозанат ҳолатидан четга чиқиб масофаси.

Қайтарувчи кучни x ўқидан проекцияси

$$F_x = -F \quad F_x = -cx$$

(-) ишора кайтарувчи қўйиш тезликка нисбатан тесқарий нуналишда эканлигини билдиради.

М нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad \text{билан белгилаймиз.}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad \text{ёки} \quad x + k^2 x = 0 \quad (225)$$

(225)- формула эркин тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси.

(225)-нинг умумий ечимини толамиз. Бунинг учун характеристик тенглама тузамиз:

$$r^2 + k^2 = 0 \quad (226)$$

(226) - тенглама (225)- ни тавсифий тенгламаси

$$r^2 = -k^2 \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{-k^2} = \pm ki$$

$$r_1 = ki \quad r_2 = -ki$$

Дифференциал тенгламаларнинг назариясига асосан (225) ни умумий ечими қуйидагича бўлади.

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (227)$$

Бу ерда C_1, C_2 ихтиёрый узғармас миқдорлар: C_1 ва C_2 ларни топшиш учун бошланғич шартлар берилиши керак.

$$t=0 \quad x=x_0 \quad v=v_0$$

(227)- дан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$V_x = x = C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (228)$$

(228)- билан эркин тебранма ҳаракат қилаётган нуктанинг тезлиги топилади.

$t=0$ ва $x=x_0$ ларни (227)га қўямиз, у ҳолда $C_1=x_0$

$t=0$ ва $v=v_0$ ларни (228) қўямиз.

$$v_0 = C_2 k, \quad C_2 = \frac{v_0}{k}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини 3 га қўямиз.

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt \quad (229)$$

(229) - тенглама ҳам М нуктанинг ҳаракат тенгламаси бўлади.

(227)- ни бошқача кўринишга келтирамиз.

C_1 ва C_2 ларни ўрнига янги a ва α кичик узлармас миқдорларни киритамиз. Булар орасида қуйидагига боғланиш бор,

$$\begin{aligned} C_1 &= a \sin \alpha \\ C_2 &= a \cos \alpha \end{aligned} \quad (230)$$

(230) ни (227) га қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\begin{aligned} x &= a \sin \alpha \cos kt + a \cos \alpha \sin kt \\ x &= a \sin(kt + \alpha) \end{aligned} \quad (231)$$

(231) ҳам (225) шунгечими бўлади.

Физикадан маълумки (231) – тенглама нуктанинг гармоник тебранма ҳаракатининг тенгласидир.

Демак, нуктанинг қайтарувчи куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Бунда, a - тебраниш амплитудаси.

Нуктани мувозанат ҳолатидан энг кагта масофага олишда нуктанинг амплитудаси дейилади. $kt + \alpha$ тебраниш фазаси.

Тебраниш фазаси нуктанинг t вақтидаги вазиятини ва қайси томонга қараб ҳаракат қилишини кўрсатади. k - циклик частота (доиравий такрорлик). k нуктанинг 2π секундда тула тебранишлар сонини кўрсатади.

Нуктани тула бир марта тебраниш учун кетган вақтга тебраниш даври дейилади.

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (232)$$

(232)-тебраниш даврини тоғини формуласи a билан (α) ни аниқлаймиз. Бунинг учун (230)- дан фойдаланамиз:

$$C_1^2 + C_2^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматини қўямиз.

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{g_0}{k}\right)^2} \quad (233)$$

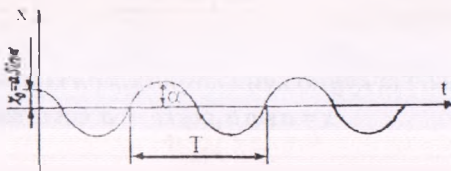
(233) - Эркин тебраниш амплитудасини тоғини формуласи.

(230)- ни бир бирига бўламиз.

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{kx_0}{g_0} \end{aligned} \quad (234)$$

Бунда α - бошланғич фаза (234) билан α ни аниқлаймиз

(231) нинг графигини чизамиз.

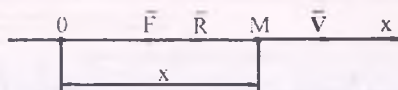


141-расм.

Қайтарувчи куч таъсирида нукта қилган тебранма ҳаракати эркин тебранма ҳаракат денилади.

71-§. НУҚТАНИНГ СЎНУВЧИ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. СЎНИШ ДЕКРЕМЕНТИ. АПЕРИОДИК ҲАРАКАТ

M нукта тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бу нуктага $\vec{F}$ қайтарувчи куч ва R қаршилик кучи таъсир қилади. M нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун M нукта мувозанат ҳолатини координата боғи деб оламиз (142-расм).



142-расм.

Қайтарувчи кучнинг модули $F = cx$

Бу ерда c - пропорционаллик коэффиенти

Қаршилик кучининг модули $R = \mu\vartheta$

Бу ерда μ - коэффиенти

ϑ - нукта тезлиги

Қаршилик кучининг йўналиши тезликка тескари бўлади.

$$R = -\mu\vartheta; \quad R = -\mu\dot{x}, \quad \vartheta = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

M нуктага таъсир этувчи кучларнинг проекцияларининг йиғиндиси

$$X = -F - R = -cx - \mu\vartheta$$

M нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз;

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu x$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx + \mu x = 0 \quad \text{мга бўламиз}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x + \frac{\mu}{m} x = 0 \quad \frac{c}{m} = \kappa^2 \quad \frac{\mu}{m} = 2b$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2bx + \kappa^2 x = 0 \quad \text{ёки} \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \kappa^2 x = 0 \quad (235)$$

(235) - формуласи сунувчи тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

(235) - нг умумий ечимини топамиз.

Бунинг учун характеристик тенглама тузамиз.

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \kappa^2 = 0 \quad (236)$$

(236) - формула (235) нг характеристик тенгламаси. (236) нг ечамиз.

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \kappa^2}$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - \kappa^2}$$

$$\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - \kappa^2}$$

λ_1, λ_2 (236) - тенгламани илдизлари бўлади.

Энди қуйидаги ҳолни кўриб чиқамиз.

1) $\kappa > b$ (қаршилик кучи кичик бўлган ҳол).

Бу ҳолда характеристик тенглама илдизлари қуйидагича бўлади.

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{-(\kappa^2 - b^2)} \quad \kappa^2 - b^2 = \kappa_1^2$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{-\kappa_1^2} = -b + \kappa_1 i \quad \lambda_2 = -b - \kappa_1 i$$

Характеристик тенгламани илдизларига қараб (235) нг умумий ечилиши ёзамиз.

$$x = e^{-bt} (C_1 \cos \kappa_1 t + C_2 \sin \kappa_1 t) \quad (237)$$

(237) - формуласи (235) нинг умумий ечими бўлади.

C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорлар.

Бу ўзгармас миқдорларни топиш учун бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Бошланғич моментдаги нуқта координатасига ва унинг бошланғич тезлигига бошланғич шартлар деиналади.

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0$$

(237) - тенгламадан вақт бўйича ҳосилла олиб нуқта тезлигини топамиз.

$$\dot{g} = \frac{dx}{dt} = -be^{-ht}(C_1 \cos \kappa_1 t + C_2 \sin \kappa_1 t) + e^{-ht}(-C_1 \kappa_1 \sin \kappa_1 t + C_2 \kappa_1 \cos \kappa_1 t) \quad (238)$$

(238) билан нукта тезлиги топилади.

$t=0$ $x=x_0$ ларни (237) га қўямиз, $C_1 = x_0$

$t=0$ $\dot{g}=\dot{g}_0$ ларни (238) га қўямиз, у ҳолда:

$$\dot{g}_0 = -bC_1 + C_2 \kappa_1 \quad \text{булдан:}$$

$$C_2 = \frac{\dot{g}_0 + bC_1}{\kappa_1} = \frac{\dot{g}_0 + bx_0}{\kappa_1}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматини (237) га қўямиз

$$x = e^{-ht} \left(x_0 \cos \kappa_1 t + \frac{\dot{g}_0 + bx_0}{\kappa_1} \sin \kappa_1 t \right) \quad (239)$$

(239)- формула М нукта ҳаракатнинг тенгламасини ифодалайди.

$$\dot{g}_0 = 0 \quad \text{булса,}$$

$$x = x_0 e^{-ht} \left(\cos \kappa_1 t + \frac{b}{\kappa_1} \sin \kappa_1 t \right) \quad \text{қўринишга келтиради.}$$

(237)- ни бошқача қўринишга келтираемиз.

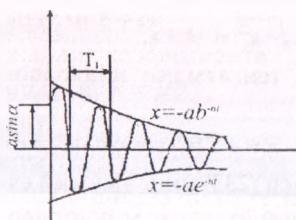
C_1 ва C_2 ларни ўрнига a ва α кичик ўзгармас миқдорларни киритаемиз.

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= a \sin \alpha \\ C_2 &= a \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

(240) ни (237) га қўямиз.

$$x = ae^{-ht} \sin(\kappa_1 t + \alpha) \quad (241)$$

$$t \rightarrow \infty \quad e^{-ht} \rightarrow 0$$



143-расм.

$t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$ яъни ҳаракат сўнади.

(241) тенглама сўнувчи тебранма ҳаракат тенгламаси.

Математикадан маълумки

$$|\sin(\kappa_1 t + \alpha)| \leq 1 \quad x = ae^{-ht}$$

$$|x| \leq |ae^{-ht}| \quad x = -ae^{-ht}$$

Сўнувчи тебранма ҳаракатининг даври қуйидагига тен:

$$T \approx \frac{2\pi}{\kappa_1}, \quad \kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - b^2}$$

А сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси

$$A = ae^{-bt}$$

t вақтдаги амплитуда A_1 га тен:

$$A_1 = ae^{-bt}$$

$t + T$ вақтдаги амплитуда

$$A_2 = ae^{-b(t+T)} = ae^{-bt} \cdot e^{-bT} = a_1 e^{-bT} \cdot A_1 = a_1 e^{-bT}$$

$t + 2T$ вақтдаги амплитуда

$$A_3 = A_2 e^{-bT}$$

Демак,

$$A_1 = ae^{-bt}$$

$$A_2 = a_1 e^{-bT}$$

$$A_3 = a_1 e^{-bT}$$

$$A_n = a_{n-1} e^{-bT}$$

Демак сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси каматиб борувчи геометрик прогрессияни ташкил қилади.

Бу прогрессия маҳражита сўнувчи декременти дейилади. Сўнувчи декрементининг миқдори қисмидан натурал логарифм оламиз.

$$\ln D = \ln e^{-bt} = -bt, \quad \ln e = -bT, \quad 1 = -bT, \quad \ln D = -bT, \quad D = e^{-bT}$$

2) $b > \kappa$ (қаршилик кучи катта бўлган ҳол)

Бу ҳолда тавсифий тенглама илдизлари ҳақиқий сон бўлади.

$$b^2 - \kappa^2 = r^2$$

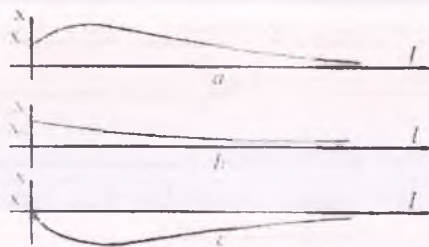
$$\lambda_1 = -b + r = -(b-r)$$

$$\lambda_2 = -b - r = -(b+r)$$

(235) - тенгламани учун умумий ечимни қуйидагича бўлади:

$$x = (c_1 e^{-(b-r)t} + c_2 e^{-(b+r)t}) \cdot t^{-bt} \quad (242)$$

$t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ га интилади. (242) - нинг графини қуйидагича бўлади.



144-расм.

Қаршилик кучи кагга булган ҳолда нуқта аperiодик ҳаракат қилади

$$3) \quad v=0 \text{ бўлса } \lambda_1 = \lambda_2 = -b$$

Тавсифий тенгламанинг илдизлари бир бирига тенг бўлади. Бу ҳолда ҳам нуқта аperiодик ҳаракат қилади.

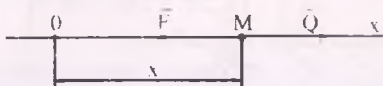
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Нуқта қандай куч таъсирида эркин тебранма ҳаракат қилади?
2. Нуқта эркин тебранма ҳаркатиинг дифференциал тенгламасини ёзинг?
3. Эркин тебранма ҳаракат тенгламасини ёзинг? Унинг графигини чизинг?
4. Эркин тебранма ҳаркатиинг даври кайси формула билан аниқланади?
5. Эркин тебранма ҳаракат амплитудаси кайси формула билан топилади?
6. Эркин тебранма ҳаркатиинг частотаси даври, амплитудаси ва бошлангич фазаси қандай факторларга боғлиқ?
7. Нуқтанинг қандай тебранма ҳаркатига сунувчи тебранма ҳаракат дейилади?
8. Сунувчи тебранма ҳаркатиинг дифференциал тенгламасини ёзинг?
9. Сунувчи тебранма ҳаркатиинг конуни қандай ёзилади? Унинг графигини чизинг?
10. Сунувчи тебранма ҳаркатиинг даври кайси формула билан аниқланади?
11. Аperiодик ҳаркат деб қандай ҳаракатга айтилади?

72-§. НУҚТАНИНГ МАЖБУРИЙ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. РЕЗОНАНС ҲОДИСАСИ

Массаси m га тен бўлган M нуқта тўғри чизикли ҳаракат қилсин. Бу нуқтага F қайтарувчи куч ва Q кучи таъсир қилади (145-расм). Q кучининг x ўқидаги проекцияси қуйидагига тенг:

$$Q_x = H \sin pt$$



145 – расм.

Q - уйғотувчи куч, бу куч даврий равишда миқдор ва йўналишининг ўзгартириб туради.

H - уйғотувчи куч амплитудаси

p - уйғотувчи куч частотаси

M нуқта ҳаракат тенгламасини топиш керак. Қайтарувчи кучнинг модули

$$F = cx$$

M нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг x ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси

$$x = Q_x - F_x = H \sin pt - cx \quad \text{бўлади.}$$

M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини аниқлаймиз.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H \sin pt - cx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = \frac{H}{m} \sin pt$$

$$\frac{c}{m} = \kappa^2; \quad \frac{H}{m} = h \quad \text{деб белгилаймиз.}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa^2 x = h \sin pt \quad (243)$$

(243)-формула мажбурий тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.

(243) ни умумий ечимининг қуйидаги куралинида ёзамиз.

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{бунда}$$

x_1 (243) - чап томонининг умумий ечими, яъни:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa^2 x = 0 \quad \text{тенгламанинг}$$

$$x_1 = C_1 \cos \kappa t + C_2 \sin \kappa t$$

x_2 (243) нинг хусусий ечими.

x_2 ни қуйидаги қуринишда оламиз

$$x_2 = B \sin pt \quad (244)$$

Коэффициент B ни тоғини учун (244)- дан вақт бўйича 2 марта ҳосила оламиз.

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= Bp \cos pt \\ \ddot{x}_2 &= -Bp^2 \sin pt \end{aligned} \quad (245)$$

(244)- ва (245)- ни (243)- га қуямиз;

$$Bp^2 \sin pt - \kappa^2 B \sin pt = h \sin pt$$

$\sin pt$ га қисқартирамиз

$$\begin{aligned} -Bp^2 + \kappa^2 B &= h \\ B(\kappa^2 - p^2) &= h \\ B &= \frac{h}{\kappa^2 - p^2} \end{aligned}$$

B нинг қийматини (244)- га қуямиз

$$x_2 = \frac{h}{\kappa^2 - p^2} \sin pt$$

$$x = C_1 \cos \kappa t + C_2 \sin \kappa t + \frac{h}{\kappa^2 - p^2} \sin pt \quad (246)$$

(246) - нуқта ҳаракат тенгламасидир.

(246) дан вақт бўйича бир марта ҳосила оламиз ва нуқтанин тезлигини топамиз.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -C_1 \kappa \sin \kappa t + C_2 \kappa \cos \kappa t + \frac{hp}{\kappa^2 - p^2} \cos pt \quad (247)$$

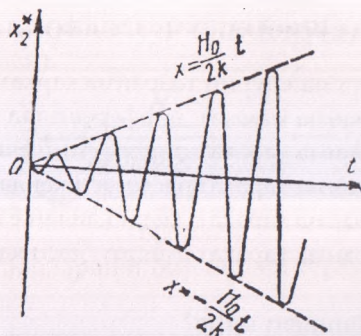
Нуқта уйғотувчи куч таъсирида мураккаб тебранма ҳаракат қилади. Бу ҳаракатнинг биринчи қисми эркин, иккинчи қисми эса мажбурий ҳаракатда бўлади.

$$x_2 = \frac{h}{\kappa^2 - p^2} \sin pt \quad (248)$$

$P = \kappa$ бўлса,

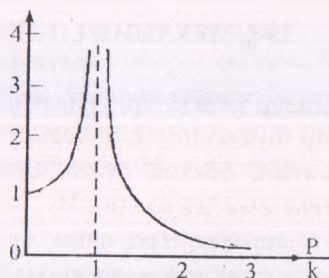
$$B = \frac{h}{0} = \infty \quad \text{бўлади.}$$

$B = \infty$ бўлса резонанс ходисаси рўй беради. Эркин тебранма ҳаракат частотаси мажбурий тебранма ҳаракат частотасига тенг бўлган ҳолга резонанс ходисаси дейилади. Унинг графиги қуйидагича бўлади.



145.1-рasm.

Мажбурий гебранма ҳаракат амплитудасининг графиги қуйидагича бўлади:



146-рasm.

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2}; \quad B = \frac{h}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}; \quad B_0 = \frac{h}{k^2}$$

$$B = \frac{B_0}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2}; \quad \frac{B}{B_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2}$$

$\frac{B}{B_0} = \eta$; η - динамик коэффициент.

$\frac{p}{k} = 0$ ёки $p = 0$ $\eta = 1$ га тенг бўлади.

$$\frac{p}{k} = 1; p = k \quad \eta = \infty$$

Уйғотувчи кучни такрорини $P=0$, $P=K$ гача ўзгарса, динамик коэффициент 1 дан ∞ гача ортади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай ҳаракатта мажбурий гебранма ҳаркат дейилади?
2. Мажбурий гебранма ҳаракат дифференциал тенламасини ёзини
3. Мажбурий гебранма ҳаракатининг умумини ечимини ёзини?
4. Мажбурий гебранма ҳаракат частотаси қандай ёзилади?
5. Мажбурий гебранма ҳаракат даври қандай ёзилади?
6. Мажбурий гебранма ҳаракат амплитудаси қандай факторларга боғлиқ?
7. Динамик коэффициент нима?
8. Динамик коэффициентини графини қандай бўлади?
9. Қачон резонанс ҳодисаси содир бўлади?
10. Мажбурий гебранма ҳаракатининг тенламаси ва графиги резонанс ҳодисаси вақтида қандай бўлади?

73-§. МЕХАНИК СИСТЕМА

Бир неча нуқталар (жисмлар) тўнлами берилган бўлсин. Агар бу тўнламдаги ҳар бир нуқтанинг (жисмининг) ҳаракати бошқаларининг ҳаракатига ва вазиятига боғлиқ бўлса, бундай нуқталар (жисмлар) тўнламига механик система дейилади.

Масалан: автомашини, кривошип шатун механизми, қуёш системаси ва абсолют қаттиқ жисмлар мисол бўлади.

Демак системани ташкил қилувчи жисмлар доимо бир-бирини таъсир қилиши шарт.

Системага таъсир қилувчи кучлар

Системадаги жисмлар фазода ихтиёрий тамонга қараб ҳаракат қила олса, бундай системага эркин система дейилади.

Масалан: Қуёш системаси. Системадаги жисмлар ҳаракати чекланган бўлса бундай системага –эрксиз система дейилади.

Ҳар қандай машина ёки механизм боғланишдаги системага мисол бўла олади. Боғланишнинг системадаги жисмларга кўрсатадиган таъсирига – реакция кучи дейилади. Эркин ва эрксиз системага таъсир қилувчи кучларни икки гуруҳга ажратамиз :

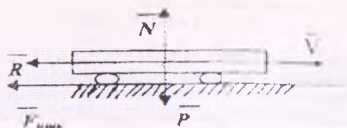
1. Ташқи кучлар

2. Ички кучлар

Система таркибига кирмаган жисмларнинг системага кўрсатадиган таъсирига ташқи кучлар дейилади.

Масалан: Автомобилни бирор система деб қарасак, автомобилга таъсир қилувчи куч – ернинг тортиш кучи P ҳавонинг қаршилиги R ,

инкаланиш кучи F ва ернинг нормал реакция кучи N танки кучларга мисол бўлади (147-расм).



147-расм.

Системадаги жисмларнинг бир-бирига қўсатилган таъсир ички кучлар ҳисобланади.

Газларнинг поршеньга, шатунининг валга таъсир ички кучларга мисол бўлади. Система таъсир қилувчи танки кучларини $\vec{F}$ билан, ички кучларини $\vec{F}^i$ билан белгилаймиз.

Системага таъсир қилувчи ички кучлар ички хоссага эга.

I - Хосса: Системага таъсир қилувчи барча ички кучларининг геометрик йиғиндисини ёки бош векторини нолга тенг.

Исбот: Бизга n та нуктадан иборат система берилган бўлсин. Шу системада ихтиёрий M_1 ва M_2 нукталарини оламиз. Ньютоннинг III-қонунига асосан бу нукталар бир-бирига модуллари жиҳатидан тенг бўлиши ва бир түрги чизик бўйлаб тескари томонга қўналган куч билан таъсир қилади. M_1 нукта M_2 нуктага $\vec{F}_1$ куч билан таъсир этса, M_2 нукта эса M_1 нуктага $\vec{F}_2$ куч билан таъсир қилади.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2; \vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \quad (249)$$

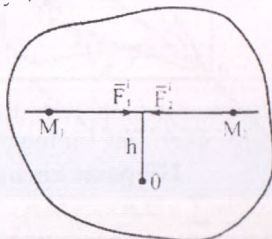
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0;$$

(249) ни системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб чиқсак қўшиладиган ҳосила бўлади:

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (250)$$

II -Хосса: Системадаги барча ички кучларининг ихтиёрий нуктага ёки уққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндисини нолга тенг.

Ички кучлардан 0 нуктага нисбатан момент олсак (148-расм).



148-расм.

$$\begin{aligned} m_0(\vec{F}_1') &= -\vec{F}_1' h \\ m_0(\vec{F}_2') &= -\vec{F}_2' h = \vec{F}_2' h \\ m_0(\vec{F}_1') + m_0(\vec{F}_2') &= 0 \end{aligned} \quad (251)$$

(251) ни ҳар бир нуқта учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшсак қуйидаги ҳосил бўлади.

$$\sum m_0(F_k') = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (252)$$

Бу хоссалардан ички қучлар ўзаро мувозанатланади деган хулосага келиш мумкин эмас, чунки ички қучлар системадаги ҳар бир жисмга қўйилган. Демак ички қучлар таъсирида системадаги жисмлар бир-бирига нисбатан ҳаракат қилади.

Системанинг массаси, массалар маркази ва унинг координаталари.

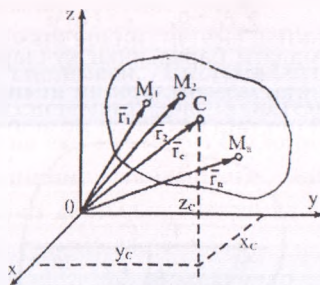
Системадаги нуқталарнинг ёки жисмларнинг массалар йиғиндисига системанинг массаси дейилади.

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_k \quad (253)$$

бунда M - системанинг массаси. $m_1, m_2, \dots, m_n$ - системадаги нуқталарнинг массаси.

Массалари $m_1, m_2, \dots, m_n$ га тенг бўлган n та $M_1, M_2, \dots, M_n$ нуқталардан тузилган система берилган. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ шу нуқталарнинг радиус-векторлари бўлсин (148-расм). Вазияти $\vec{r}_c$ радиус-вектори билан аниқланадиган геометрик C нуқта системанинг массалар маркази ёки инерция маркази дейилади.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (254)$$



149-расм.

(254) ни координата ўқларига проекциялаймиз;

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{\sum m_k X_k}{M} \\ Y_c &= \frac{\sum m_k Y_k}{M} \\ Z_c &= \frac{\sum m_k Z_k}{M} \end{aligned} \quad k=1, 2, \dots, n \quad (255)$$

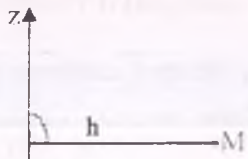
бунда x_c, y_c, z_c - лар массалар марказининг координаталари билан топилади. Массалар маркази системадаги массаларнинг жойлашнингини тавсифлайди. Агар система иккита нуктадан иборат бўлса, (255)-қўшиқларига тенг;

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ Y_c &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ Z_c &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (256)$$

74-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ЎҚГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ВА ИНЕРЦИЯ РАДИУСИ

Бизга z ўқи ва массаси m га тенг бўлган M нукта берилган бўлсин. h - M нуктадан z ўқгача бўлган масофа (150-рам).

Нуктанинг массаси билан шу нуктадан ўқгача бўлган масофа квадрати кўпайтмасига ўқга нисбатан нуктанинг инерция моменти дейилади. mh^2 - M нуктанинг z ўққа нисбатан инерция моменти дейилади.



150-расм.

Таъриф: Жисмининг бирор ўқга нисбатан инерция моменти жисмдаги барча нукталарининг шу ўқга нисбатан олинган инерция моментларининг йиғиндисига тенг;

$$I_z = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \dots + m_n h_n^2 = \sum m h^2 \quad (257)$$

Бунда I_z жисмнинг z ўқга нисбатан инерция моменти. Инерция моменти жисмдаги массаларининг жойлашшини тавсифлайди. Инерция моменти мусбат сколяр катталиқ. Инерция моментининг ўлчов бирлиги кгм^2 . Система - нукталарининг массаларининг ўқча (нукта ёки текисликча) бўлаган масофалар квадратини қўшадиганининг йиғиндисига тенг сколяр катталиқ мос равишда системанинг ўқча (нукта ёки текисликча) нисбатан инерция моменти дейилади. Нуктага нисбатан инерция моменти қўшнча қўбга нисбатан инерция моменти деб аталади. Агар z ўқча, O нуктага ва Π текисликча нисбатан системанинг инерция моментларининг I_z , I_O ва I_Π билан белгиласак,

$$I_z = \sum m_\mu h_\mu^2, \quad I_O = \sum M_k r_k^2, \quad I_\Pi = \sum m_n d_n^2 \quad (257')$$

формула ўринли бўлади. Бунда m_μ система M_k нуктасининг массасини, h_μ , r_k , d_n лар M_k нуктадан z ўқча, O нуктага ва Π текисликчага бўлган масофаларни ифодалайди.

Жисмнинг ўқга нисбатан инерция моментини қуйидаги формула билан ҳисоблаш мумкин.

$$J_z = m \cdot \rho_z^2 \quad (258)$$

Бунда m -масса.

ρ -жисмнинг инерция радиуси.

Жисмнинг массаси тўпланган нуктадан ўқчага бўлган масофага инерция радиуси дейилади.

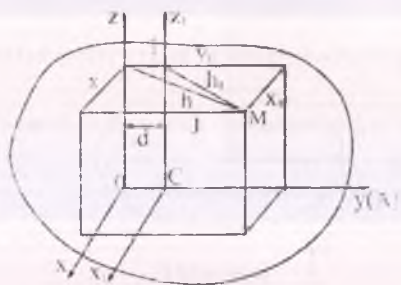
$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \quad (259)$$

75-§. ПАРАЛЕЛ ЎҚЛАРГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Жисмнинг ҳар хил ўқларга нисбатан инерция моменти ҳар хил бўлади.

z ва z_1 ўқларга нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг.

$$J_z = \sum m h^2 \quad J_{z_1} = \sum m h_1^2 \quad (260)$$



151-расм.

Жисм берилган бўлсин. Жисмда ихтиёрый M нуқтани оламиз (151-расм).

Жисмнинг массалар марказини координата боши қилиб оламиз. z_1/z ўқига x_1/x бўлсин. x, y, z M нуқтани $схуз$ системадаги координаталари. Бу координаталар орасидаги боғланишни қуйидагича ёзамиз.

$$x = x_1, \quad y = d + y_1 \quad \text{бундан} \quad y_1 = y - d$$

h ва h_1 лар M нуқтадан z ва z_1 ўқларигача бўлган масофалар.

Расмдан $h^2 = x^2 + y^2$, $h_1^2 = x^2 + y_1^2$ қийматларини қўйсак

$$h_1^2 = x^2 + (y - d)^2 = x^2 + y^2 - 2dy + d^2 = h^2 - 2dy + d^2 \quad (261)$$

$$I_{z_1} = \sum m h_1^2 \quad (262)$$

(261) ни (262) га қўямиз. У ҳолда

$$I_{z_1} = \sum m(h^2 - 2dy + d^2) = \sum m h^2 - 2d \sum m y + d^2 \sum m$$

$\sum m h^2 = I_z$ жисмнинг z ўқига нисбатан инерция моменти $\sum m = M$ жисмнинг массаси.

C нуқта координата боши бўлганилиги учун унинг координатаси нолга тенг бўлади.

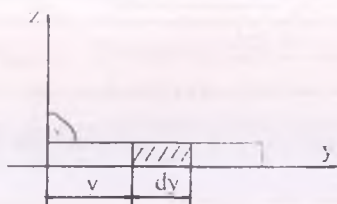
$$y_c = 0; \quad \sum_{M} m y_c = \sum m y_c = M y_c, \quad \sum m y = 0; \quad I_{z_1} = I + M d^2 \quad (263)$$

(263) формула параллел ўқларга нисбатан инерция моменти ҳақидаги тенгламани ифодалайди.

Теорема: Жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўқга параллел бўлган бирор ўқга нисбатан инерция моменти массалар марказидан ўтган ўқга нисбатан ҳисобланган инерция моменти билан жисм массасининг шу ўқлар орасидаги квадрати кўпайтмаси пинҳондисига тенг.

76-§. СТЕРЖЕННИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Массаси m га, узунлиги l га тен бўлган бир жишли шитчка стерженнинг бирор учидан ўтган стерженга перпендикуляр бўлган z ўқга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин.



152-расм.

Стержендан элементар булакча оламиз. Элементар булакча массаси $dm = \gamma dy$

γ – бир бирлик узунлик массаси ёки zichligi

$$I = \int_0^l h^3 dm = \int_0^l y^2 \gamma dy = \gamma \int_0^l y^2 dy = \gamma \frac{y^3}{3} \Big|_0^l = \gamma \frac{l^3}{3}$$

Стерженнинг массаси $m = \gamma l$

$$\gamma = \frac{m}{l}; I_z = \frac{ml^2}{3} \quad \text{ёки} \quad I_z = \frac{ml^2}{3} \quad (264)$$

Стерженнинг огирлик марказидан ўтган ўқга нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз. Бунинг учун параллел ўқларга нисбатан инерция моменти ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

$$I_z = I_{z_1} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2; \quad \frac{ml^2}{3} = I_{z_1} + \frac{ml^2}{4}$$

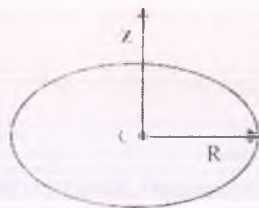
$$I_{z_1} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12} \quad \text{Демак,} \quad I_z = \frac{ml^2}{12} \quad (265)$$

77-§. ҲАЛҚАНИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Массаси M га радиуси R га тенг бўлган ҳалқанинг марказга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. Ҳалқанинг массалари $m_1, m_2, \dots, m_n$ га тенг бўлган бўлакчаларга бўламиз.

$$J_{C_z} = m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_3 R^2 + \dots + m_n R^2 = R^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

$$J_{C_z} = MR^2 \quad (266)$$

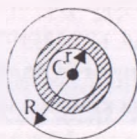


153-расм.

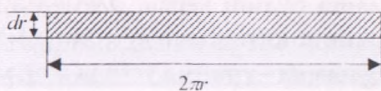
78-§. ДОИРАВИЙ ДИСКНИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Массаси M га радиуси R га тенг бўлган доиравий дискнинг марказга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин.

Дискдан радиуси r ва қалинлиги dr бўлган ҳалка оламиз.



А)



Б)

154-расм.

Ҳалкани массаси $dm = \gamma dF$, бунда γ — 1 кв бирлик юза массаси, dF — элементар юза.

Ҳалкани узиб чузсак, стерженга ўхшаб қолади.

$$dF = 2\pi r dr \quad dm = \gamma 2\pi r dr$$

$$J_{CZ} = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi \gamma r dr = 2\pi \gamma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \gamma \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi \gamma R^4}{2}$$

$$m = \gamma \pi R^2 \quad \gamma = \frac{m}{\pi R^2} \quad J_{CZ} = \frac{MR^2}{2}$$

ТАКРОРАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Механик система деб нимага айтилади?
2. Танқил куч нима?
3. Ички куч нима?
4. Ички кучлар қандай хоссатга эга?
5. Системанинг массаси нима?
6. Массалар марказининг координатаси қандай аниқланади?

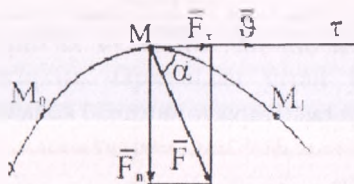
7. Қаттиқ жисмнинг ўқта нисбатан инерция моменти деб нимага аталади?
8. Инерция радиуси қандай топилади?
9. Параллел ўқларга нисбатан инерция моменти ҳақидаги теоремани таърифлаш?
10. Стержень, ҳалқа ва доғрашнинг дискиннинг инерция моменти қандай аниқланади?

79-§. КУЧНИНГ ЭЛЕМЕНТАР ВА ТУЛА ИШИ

Кучни бирор нўлда жисмга қўрсатадиган таъсирнинг таъсирлаш учун кучнинг иши деган тушунча киритилади. M нукта F кучи таъсирида эгри чизикли траектория бўйича ҳаракатланиб M_0 дан M_1 гача келсин. F куч узгарувчан F кучининг M_0M_1 нўлдаги (155-расм) ишини аниқлаш керак бўлсин. Бунинг учун M_0M_1 нўлнинг элементар бўлакларга бўлини керак. Элементар бўлакларда кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси кучнинг M_0M_1 нўлдаги иши бўлади.

Бунда ds – уринма устида жойлашган чексиз кичик элементар нўл.

Кучнинг чексиз кичик элементар нўлда бажарган ишига кучнинг элементар иши дейилади ва dA билан белгиланади.



155-расм.

$$dA = F_t \cdot ds \quad (267)$$

Бунда, F_t - $\vec{F}$ кучининг уринмадаги проекцияси.

dA -кучнинг элементар иши $\vec{F}$ кучининг элементар иши деб, шу куч билан у қўйилган нукта элементар кўчинининг сколяр қўнаймасига тенг. $dA = F dr$

$$F_t = F \cos \alpha \quad dA = F ds \cos \alpha$$

Кучнинг бажарган иши скаляр катталик. Кучнинг M_0 M_1 нўлдаги иши унинг элементар ишидан олинган интегралга тенг

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_{\tau} ds \quad (268)$$

А F_{τ} кучининг M_0 M_1 нуқдани оўралигида. Фараз қилайлик $F = const$ бўлса, (268)- дан:

$$A = F_{\tau} \int_{M_0}^{M_1} ds = F_{\tau} \cdot S = F \cos \alpha \cdot S$$

Бунда S нуқдани узунлиги $S = \int_{M_0}^{M_1} ds$, $F_{\tau} = F \cos \alpha$ (269)

(269) билан узгармас кучининг иши топилади. Бурчак α ўткир бўлса, $\alpha < 90^\circ$ кучининг иши мусбат бўлади.

$\alpha > 90^\circ$ ўтмас бўлса, кучининг иши манфий бўлади.

Агар $\alpha = 0^\circ$ бўлса, $A = FS$, $\alpha = 90^\circ$ бўлса, $A = 0$ бўлади. Иш бирликлари: Нм, Дж.

Қувват

Кучнинг вақт бирлигида бажарган ишига қувват дейилади.

Агар куч бир хил вақт оралигида бир хил иш бажарса, унинг қуввати қуйидагича топилади.

$$N = \frac{A}{t} \quad (270)$$

Агар иш ўзгарувчан бўлса қувват шу ишдан вақт бўйича олинган ҳосиллага тенг.

$$N = \frac{dA}{dt} \quad (271)$$

Элементар ишнинг қийматини қўйсак

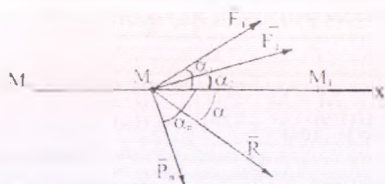
$$N = \frac{F ds \cos \alpha}{dt} = FV \cos \alpha \quad N = FV \cos \alpha \quad (272)$$

Бунда $V = \frac{ds}{dt}$ - тезлик.

80-§. ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИ КУЧНИНГ ИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Тенг таъсир этувчи кучининг бирор нуқта бажарган иши ташкил этувчи кучларнинг шу нуқта бажарган ишларининг йиғиндисига тенг.

Исбот: M нуқта F_1, F_2, F_3 кучлар таъсирида M_0 дан M_1 гача келсин (156-расм).



156-расм.

Тенг таъсир этувчи куч

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (273)$$

(273) ни иккала қисминини M_0M_1 нуқтадан ўтган тўғри чизиққа проекциялаймиз.

$$R \cos \alpha = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n \quad (274)$$

(274) ни иккала қисминини S йўлга қўпайтирамиз

$$R \cdot S \cos \alpha = F_1 S \cos \alpha_1 + F_2 S \cos \alpha_2 + \dots + F_n S \cos \alpha_n + S$$

$$R \cdot S \cos \alpha = A \quad F_1 S \cos \alpha_1 = A_1$$

$$F_2 S \cos \alpha_2 = A_2, \dots, F_n S \cos \alpha_n = A_n$$

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \quad (275)$$

81-§. КУЧ ЭЛЕМЕНТАР ИШИНИНГ АНАЛИТИК ИФОДАСИ

Куч элементар ишининг аналитик ифодасини аниқлаймиз.

Бунинг учун F кучини ташкил этувчиларга ажратамиз (157-расм).

F_x, F_y, F_z - F кучининг ташкил этувчилари.

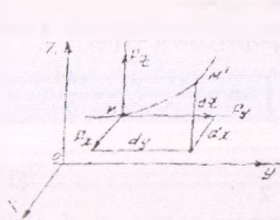
Элементар MM' силжиини $MM' = dS$ координата ўқлари бўйлаб йўналган M нуқта dx, dy, dz силжишларининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун F кучининг dS силжишдаги бажарган иши унинг ташкил этувчилари F_x, F_y, F_z ларининг dx, dy, dz силжишдаги бажарган ишларининг йиғиндисига тенг бўлади. dx силжиш фақат $F_x dx$ га тенг, dy, dz силжишдаги F_y, F_z кучларининг бажарган ишини қуйидагича ёзамиз. $F_y dy, F_z dz$

Кучни элементар иши қуйидаги формула билан топилади (157-расм).

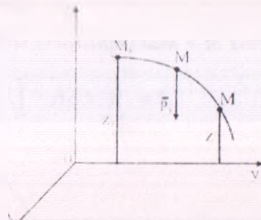
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (276)$$

Бу формула кучнинг элементар ишининг аналитик ифодасини беради. Кучнинг M_0M_1 йўлдаги бажарган иши унинг элементар ишидан олинган интегралга тенг.

$$I = \int l \, ds \quad A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (277)$$



157-рasm.



158-рasm.

Оғирлик кучининг бажарган иши.

Оғирлик P та тен бўлган M нуқта M_1 дан M_2 гача келсин. P оғирлик кучини M_1M_2 йўздани бажарган ишининг ҳисоблаймиз (158-рasm).

P кучининг координата ўқларидаги проекцияси $x=0$, $y=0$, $z=P$. P кучининг M_1M_2 йўздани иши. (277) формулага кўра.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P dz = P \int_{z_1}^{z_2} dz = PZ \Big|_{z_1}^{z_2} = PZ_2 - PZ_1 = P(Z_2 - Z_1) = \pm ph$$

$$A = P(z_2 - z_1) = \pm ph \quad A = \pm Ph$$

Бунда $z = z_2 - z_1 = h$

h - M нуқтанинг вертикал бўйича юрган йўли. Агар $z_2 > z_1$ бўлса M нуқта юқоридан пастга тушади, иш эса мусбат бўлади.

Агар $z_2 < z_1$ бўлса M нуқта юқорига кўтарилади, иш эса манфий бўлади.

$$A = \pm Ph \quad (278)$$

(278) билан оғирлик кучининг бажарган иши топилади. Оғирлик кучининг бажарган иши плюс ва минус ишораси билан олинган куч миқдорининг вертикал бўйича силжигна қулайтмасига тенг.

82-§. ЭЛАСТИКЛИК КУЧИНИНГ БАЖАРГАН ИШИ

Пружинадаги реакция кучининг ишининг ҳисоблаймиз. Бизга бир учун маҳкамланган пружина берилган. F - пружинани реакция кучи ёки эластиклик кучи. Пружина h масофага қўзилганда F кучини бажарган ишининг топиши керак. Бунинг учун M нуқтани координата боши O х ўқини йўналтираемиз (159-рasm).

$F = cx$: бунда c – пружинанинг бикрилиги, x – пружинани чўзилгани ёки сиқилиши, $\vec{F}$ – кўчининг координата ўқларидаги проекцияси.

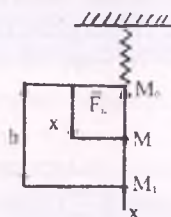
$$X = -F \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

F кўчининг h – масофадан иборат (277) формулага кўра.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{h} = \int_0^h -cx dx = -c \int_0^h x dx = -\frac{cx^2}{2} = -\frac{ch^2}{2}$$

$$A = -\frac{ch^2}{2} \quad (279)$$

Бу формула билан эластиклик кўчининг бажарган ишини топилади.



159-расм.

83-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНМА ҲАРАКАТ ҚИЛУВЧИ ЖИСМГА ҚЎЙИЛГАН КЎЧНИНГ ИШИ ВА ҚУВВАТИ

Агар жисм $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кўчлар системаси таъсирида қўзғалмас z ўқи атрофида айланма ҳаракатда бўлса, қўғонни айланиш ўқида оламиз; натижада $d\vec{r}_0 = 0$ ҳамда бурчак тезлиги йўналган OP ва z ўқлари устма-уст тушади (160-расм). Бинобарин, кўрилади ҳолда

$$d'A = M_z d\varphi \quad (280.1)$$

формула ўринли бўлади, яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кўчлар системасининг элементар иши мазкур ўқга нисбатан кўчлар бош моментининг жисм ўқ атрофида айланганда элементар кўчишдаги ишга тенг.

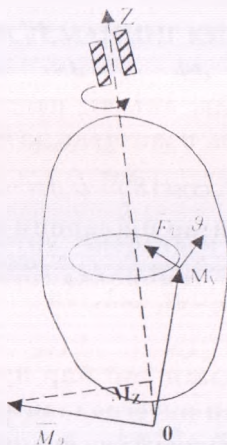
Бу ҳолда кўчлар системасининг қуввати

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega \quad (280.2)$$

чекли айланма кўчишдаги иши эса,

$$\int M \, d\omega \quad (280.3)$$

формулар ёрдамида аниқланади.



160-расм.

84-§. АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМДАГИ ИЧКИ КУЧЛАР ИШЛАР ЙИҒИНДИСИНИНГ НОЛГА ТЕНГЛИГИ

Абсолют қаттиқ жисмин ҳар қандай силжишда шў жисмдаги ички кучлар ишлари йиғиндиси нолга тенглигини исбот қилиш керак.

Бизга n та нуқтадан тўзилган абсолют қаттиқ жисм берилган бўлсин. Шу жисмда ихтиёрий M_1 ва M_2 нуқталарни оламиз (161-расм).

V_1 ва V_2 , M_1 ва M_2 нуқталарнинг тезлиги.

Тезлик модули.

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}; V_2 = \frac{dS_2}{dt} \quad (281)$$

V_1 ва V_2 тезликларни M_1 ва M_2 нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг бўлади.

$$V_1 \cos \alpha_1 = V_2 \cos \alpha_2 \quad \text{ёки}$$

$$\frac{dS_1}{dt} \cos \alpha_1 = \frac{dS_2}{dt} \cos \alpha_2$$

$$dS_1 \cos \alpha_1 = dS_2 \cos \alpha_2$$

$$dS_1 \cos \alpha_1 = dS_2 \cos \alpha_2 = 0$$

M_1 ва M_2 нукталарга бир-бирини модуллари жиқатидан тен бўлган ва бир тўғри чизик бўлиб тескари томонга нуқталган F_1 ва F_2 кучлар билан таъсир этади.

$$F_1 = F_2 \quad F_1^i = -F_2^i$$

F_1^i, F_2^i кучларни dS_1 ва dS_2 масофага сиқилгандаги бажарган ишнинг қосамиз.

$$dA = F^i dS \cos \alpha$$

$$dA_2 = F_2^i dS_2 \cos(180 - \alpha_1) = -F_2^i dS_2 \cos \alpha_1$$

Кучларнинг элементар ишларини қўшамиз.

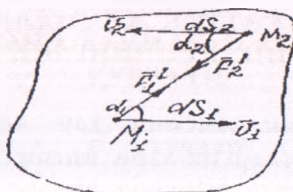
$$\begin{aligned} dA_1 + dA_2 &= F_1^i dS_1 \cos \alpha_1 - F_2^i dS_2 \cos \alpha_1 = \\ &= F_2^i (dS_1 \cos \alpha_1 - dS_2 \cos \alpha_2) = 0 \end{aligned} \quad (282)$$

$$dA_1 + dA_2 = 0$$

бу формулани системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшиб чиқамиз. (282) ни интеграллаймиз.

(282) ни интеграллаб, қуйидагини ёзамиз:

$$\sum dA_k = 0 \quad \sum A_k = 0 \quad k=1, 2, \dots, n \quad (283)$$



161-расм.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кучнинг элементар иши қайси формула билан қосилади?
2. Кучнинг элементар иши аналитик ифодасини ёзинг?
3. Кучнинг чекли бўлганда бажарган иши қандай ифодаланади?
4. Қувват нима?
5. Тенг таъсир этувчи кучнинг иши тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
6. Оғирлик кучини бажарган иши нимага тенг бўлади?
7. Эластиклик кучини бажарган иши нимага тенг бўлади?
8. Ишқаланиш кучини бажарган иши нимага тенг бўлади?

9. Қузмалмас уқ атрофида айланувчи жисмга қўйилган кучни
бажарган иш қандай топилади?
10. Қувват қандай топилади?

85-§. НУҚТА ВА СИСТЕМАНИНГ КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИ

Нукта массаси билан тезлик квадрати қунайтмасининг ярмига нуктанинг кинетик энергияси дегилади.

$$\frac{m\vartheta^2}{2}$$

Системанинг кинетик энергияси шу системадаги барча нукталар кинетик энергияларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади.

$$T = \frac{m_1 l_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n l_n^2}{2} = \sum \frac{m_k l_k^2}{2}$$

$$T = \sum \frac{m_k l_k^2}{2} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Бунда T системанинг кинетик энергияси.

Система бир нукта қаттиқ жисмдан иборат бўлса, системани кинетик энергияси шу қаттиқ жисмлар кинетик энергиялари йиғиндисига тенг бўлади.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n \quad (284)$$

Кинетик энергиянинг бирликлари кГм, тМ, нМ.

Система кинетик энергияси унинг илгарилла ва айланма ҳаракатларини тавсифлайди.

Кёнига теоремаси

Системанинг кинетик энергияси унинг массалар марказининг кинетик энергияси билан шу марказга нисбатан система бажарган ҳаракати кинетик энергиясининг йиғиндисига тенг.

$$T = \frac{mV^2}{2} + T_c \quad (285)$$

Бунда $\left(\frac{mV^2}{2}\right)$ - система массалар марказининг кинетик энергияси

V - массалар марказининг тезлиги

T_c - массалар марказига нисбатан система бажарган ҳаракатининг кинетик энергияси.

Бу теоремадан фойдаланиб, қаттиқ jismlар кинетик энергиясини аниқлаш мумкин.

1) Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ jisмнинг кинетик энергияси.

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ jisм берилан бўлсин (162-расм). Шу қаттиқ jisмни кинетик энергиясини ҳисоблаш лозим бўлсин. Бунинг учун jisмни $M_1, M_2, \dots, M_n$ нуқталардан иборат бўлган система деб қараймиз. Системани кинетик энергияси ҳақидаги таърифга асосан:

$$T = m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2} + \dots + m_n \frac{V_n^2}{2} = \frac{V_c^2}{2} (m_1 + m_2 + \dots + m_n);$$

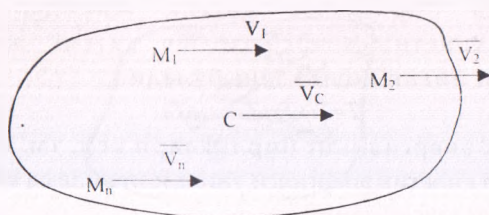
бунда $(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = M; V_1 = V_2 = \dots, V_n = V_c$

у ҳолда $T = \frac{MV_c^2}{2}$ (286)

бунда M -jisмни массаси;

V_c - массалар марказининг тезлиги;

(286)- билан илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ jisмни кинетик энергияси топилади.



162-расм.

2) Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ jisмнинг кинетик энергияси

Қўзғалмас z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланаётган қаттиқ jisм берилган. Шу jisмни кинетик энергиясини топиш керак. Jisмни n та нуқтадан иборат бўлган система деб қараймиз. Системадан ихтиёрий M_k нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг тезлиги:

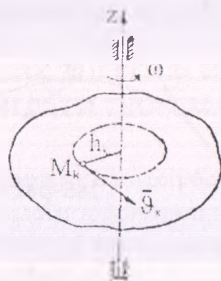
$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum \frac{\omega^2 h_k^2 m_k}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} I = \quad (287)$$

$$= I \cdot \frac{\omega^2}{2} \quad I = \frac{J}{2} +$$

Бунда:

$$J = \sum m_k h_k^2$$

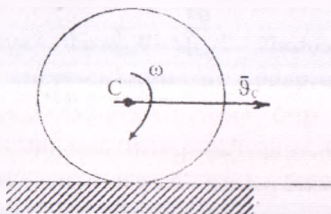
I_z жисмининг айланиш ўқида нисбатан инерция моменти.
(287)- формула билан қушалмас ўқ атрофида айланивчи қаттиқ жисмининг кинетик энергияси топилади.



163-расм.

3) Текис - параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмининг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмининг текис параллел ҳаракати қутб билан биргаликдаги илгариланма ва қутб атрофидаги айланма ҳаракатлардан иборат. Шунинг учун жисмининг кинетик энергияси шу икки ҳаракатдаги кинетик энергияларнинг ягиндисига тенг (164-расм).



164-расм.

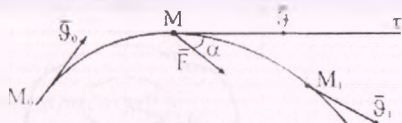
$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

Бунда m - жисмининг массаси; V_c - жисм оғирлик марказининг тезлиги; I_c - жисмининг оғирлик марказига нисбатан инерция моменти; α - жисмни бурчак тезлиги. (288) - формула билан текис параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмининг кинетик энергияси топилади.

86-§. НУҚТА КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нукта $\vec{F}$ кучи таъсирида ҳаракат қилиб M_0 нуктадан M_1 нуктага келсин (165-рasm).

$\vec{F}$ нуктани ҳаракатга келтирувчи куч



165-расм.

Нукта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\vec{F} = \vec{F} \quad (289)$$

Бу формуланинг иккала қисмини M нуктадан ўтган уришмага проекциялаймиз.

$$mW_t = F_t; \quad F_t = F \cos \alpha$$

$$mW_t = F \cos \alpha;$$

$$W_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dt} v; \quad W_t = F \frac{dS}{dt}$$

$$v = \frac{dS}{dt} \quad \text{- нуктанинг тезлиги}$$

$$mv \frac{dv}{dS} = F \cos \alpha$$

$$mv dv = F \cos \alpha dS; \quad dA = F \cos \alpha dS \quad \text{- кўчининг элементар иши.}$$

$$\frac{d(mv^2)}{2} = dA \quad (290)$$

(290)-формула дифференциал шаклдаги нукта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди. Нукта кинетик энергиясининг дифференциали нуктага таъсири этувчи кўчининг элементар ишига тенг.

(290) ни интеграллаймиз.

$$\int_{S_0}^{S_1} \frac{d(mv^2)}{2} = \int_{A_0}^{A_1} dA$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = \int_0^t M dt$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \quad (291)$$

(291)- интеграл шаклдаги нукта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Нукта кинетик энергиясининг бирор уқилган пуддаги ўзгариши нуктага таъсир этувчи кучнинг шу пудда бажарган ишига тенг.

Агар нуктага бир нечта кучлар қўйилган бўлса, (291)-формуладанги A нинг кучлар тенг таъсир этувчисининг иши бўлади.

87-§. СИСТЕМА КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системадаги ихтиёрий M нуктага интеграл шаклдаги нукта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани тадбиқ қиламиз.

$$\frac{m\dot{\theta}^2}{2} - \frac{m\theta^2}{2} = T + A' \quad (291.1)$$

Бунда A' ва A' M нуктага қўйилган ташқи ва ички кучларнинг бажарган иши.

(291.1)-формулани системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб қўшиб чиқамиз.

$$\sum \frac{m\dot{\theta}^2}{2} - \sum \frac{m\theta^2}{2} = \sum T + \sum A' \quad (291.2)$$

$$\sum \frac{m\dot{\theta}^2}{2} = T_0 + \sum \frac{m\theta^2}{2} = T$$

T_0 ва T системани бошланғич ва охириги ҳолатдаги кинетик энергияси.

$$T - T_0 = \sum A' + \sum A' \quad (291.3)$$

(291.3)- формула система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Система бир вазиятдан иккинчи вазиятга ўтганда, унинг кинетик энергиясининг ўзгариши системага қўйилган барча ташқи ва ички кучлар бажарган ишларининг йиғиндисига тенг.

Агар система абсолю. қаттиқ жисмдан тузилган бўлса, ички кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади $\sum A' = 0$: У ҳолда (291.3) формулани қуйидагича ёзиш мумкин.

$$T - T_0 = \sum A \quad (291.4)$$

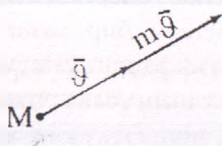
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуктанинг кинетик энергияси деб нимага айтилади?
2. Системанинг кинетик энергияси деб нимага айтилади?
3. Илгариларда ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қайси формула билан аниқланади?
4. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилганда қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қайси формула билан аниқланади?
5. Текис параллел ҳаракат қилганда қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қандай аниқланади?
6. Нукта кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
7. Дифференциал кўринишдаги нукта кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
8. Интеграл кўринишдаги нукта кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
9. Дифференциал шаклдаги система кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани айтинг.
10. Интеграл шаклдаги система кинетик энергияси тўғрисидаги теоремани айтинг?

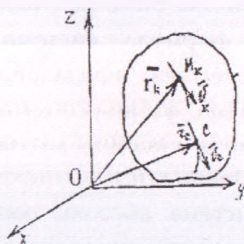
88-§. НУҚТА ВА СИСТЕМАНИНГ ҲАРАКАТ МИҚДОРИ

Нуктанинг ҳаракат миқдори деб, нукта массаси билан унинг тезлигининг кўпайтмасига айтилади. Нуктанинг ҳаракат миқдори вектор қатталиқ бўлиб, унинг тезлиги билан бир хил йўналган бўлади (166-расм)

$m \vec{v}$ - нуктанинг ҳаракат миқдори.



166-расм.



167-расм.

Системадаги барча нукталар ҳаракат миқдорларининг геометриялигида системанинг ҳаракат миқдори дефиницияланади.

$$Q = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_n V_n = \sum m_k V_k;$$

$$Q = \sum m_k V_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Бунда Q - системанинг ҳаракат миқдори

Системанинг ҳаракат миқдори унинг массаси билан массалар маркази тезлигининг кўнанишмасига тенг.

(254) — формуладан

$$V_c = \frac{\sum m_k r_k}{m_k} = \sum m_k V_k = V_c m_k \quad (292)$$

(292)-дан вақт бўйича ҳосил оламиз:

$$\sum m_k \frac{dr_k}{dt} = M \frac{dr_c}{dt}$$

$$\sum m_k V_k = M V_c, \quad \text{ёки } Q = M V_c \quad (293)$$

Системанинг ҳаракат миқдори унинг илгариланма ҳаракатини тавсифлайди.

89-§. КУЧ ИМПУЛЬСИ ВА УНИНГ КООРДИНАТА ҲАДАРИДАГИ ПРОЕКЦИЯЛАРИ

Кучни элементар вақтга кўпайтмаси кучи элементар импульси дейилади.

$$dS = \bar{F} dt \quad (294)$$

бунда dS - кучи элементар импульси; $\bar{F}$ - нуқтага таъсир этувчи куч; dt - элементар вақт.

Кучни бирор t_1 - вақтдаги импульсини аниқлаш учун унинг элементар импульсидан интеграл олиш керак.

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt \quad (295)$$

Бунда $\bar{S}$ ва $\bar{F}$ кучининг t вақт ичидаги тула импульси.

(295) -нинг иккала қисмини координата ҳадарига проекциялаймиз:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt; \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt; \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt; \quad (296)$$

(296) - билан куч импульсининг координата ҳадаридаги проекциялари аниқланади. Агар

$$F = \text{const} \quad \text{вакtda} \quad S = F \int_0^t dt = F \cdot t_1 \quad \text{бўлади.} \quad (297)$$

Бунда t - $\vec{F}$ кучининг жисмга таъсир этган вақти.
(297) ни координата уқларига проекциялаймиз:

$$\begin{aligned} S_x &= F_x \cdot t \\ S_y &= F_y \cdot t \\ S_z &= F_z \cdot t \end{aligned} \quad (298)$$

Бунда F_x, F_y, F_z - $\vec{F}$ кучининг x, y, z уқлардаги проекциялари.
Куч импульсининг миқдори қўлидаги формула билан топилади.

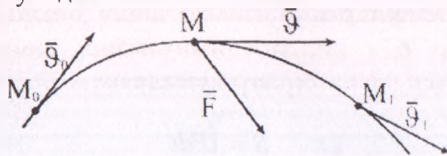
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (299)$$

90-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\vec{F}$ кучи таъсирида ҳаракатланиб, M_0 дан M_1 гача келсин (168-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} \\ m \frac{d\vec{V}}{dt} &= \vec{F}; \quad \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F} \end{aligned} \quad (300)$$

(300) - формула дифференциал кўринишдаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Нуқта ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила шу нуқтадаги таъсир этувчи кучга тенг бўлади.



168-расм.

(300)-формулани интеграллаймиз.

$$d(m\vec{V}) = \vec{F} dt;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} d(m\vec{V}) = \int \vec{F} dt;$$

$$m\vec{V} \Big|_{t_0}^{t_1} = S \quad \text{ёки} \quad m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = S \quad (301)$$

(301)-формула интеграл курилишидаги нукта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалади: Нукта ҳаракат миқдорининг бирор вақт ичидаги ўзгариши нуктага таъсир этувчи кучнинг шу вақтдаги тула импульсига тенг бўлади. (301) формулани координата уқларига проекциялаймиз:

$$\begin{aligned} m\vec{V}_{1x} - m\vec{V}_{0x} &= S_x; \\ m\vec{V}_{1y} - m\vec{V}_{0y} &= S_y; \\ m\vec{V}_{1z} - m\vec{V}_{0z} &= S_z; \end{aligned} \quad (302)$$

Демак, нукта ҳаракат миқдорининг координата уқи бўйича чекли вақт ичида ўзгариши шу вақт ичидаги нуктага таъсир этувчи куч импульсининг мазкур уқдаги проекциясига тенг.

91-§. СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системадаги ихтиерий M_k нукта учун дифференциал шаклдаги нукта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзамиз.

(300) – формуладан.

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \vec{F}_k^{\text{т}} + \vec{F}_k^{\text{и}} \quad (303)$$

Бунда $\vec{F}_k^{\text{т}}$ ва $\vec{F}_k^{\text{и}}$ - M_k нукта қўйилган ташқи ва ички кучлар. (303) – формулани системадаги ҳар бир нукталар учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшамиз; (169-расм).

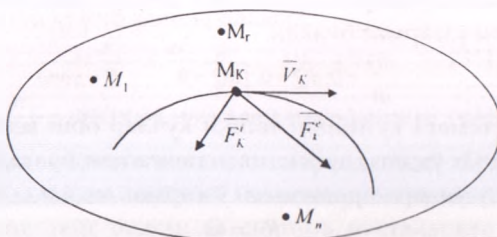
$$\frac{d}{dt}(\sum m_k \vec{V}_k) = \sum \vec{F}_k^{\text{т}} + \sum \vec{F}_k^{\text{и}} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (304)$$

Бунда $\sum m_k \vec{V}_k = \vec{Q}$ - системанинг ҳаракат миқдори.

$\sum \vec{F}_k^{\text{т}} = \vec{R}$ - ташқи кучлар бош вектори. Ички кучлар хоссасига кўра

$\sum \vec{F}_k^{\text{и}} = 0$ - натижада (304) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R} \quad (305)$$



169-расм.

(305) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани скаляр кўринишида ёзамиз:

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{dt} &= R_1, \\ \frac{dQ_2}{dt} &= R_2, \\ \frac{dQ_3}{dt} &= R_3.\end{aligned}\quad (306)$$

Система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу ўқдаги проекциясига тенг.

Система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичидаги ўзгаришининг аниқлаш учун (305) ни dt га кўпайтириб, интеграллаймиз:

$$\frac{dQ}{dt} = R, dQ = R \cdot dt, \int dQ = \int R dt, Q_1 = S, \quad \overline{Q} - \overline{Q}_0 = \overline{S} \quad (307)$$

Бунда $\overline{Q}$ - системанинг бошланғич вақтдаги ҳаракат миқдори.

$\overline{Q}$ - системанинг t_1 вақтдаги ҳаракат миқдори. $S = \int R dt - t$ вақт ичида системага таъсир этувчи кучлар бош векторининг импульси.

(307) формула интеграл шаклдаги система ҳаракат миқдорини ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Система ҳаракат миқдорининг бирор вақт ичидаги ўзгариши системага қўйилган барча ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг. (307) ни координата ўқларига проекциялаймиз.

$$Q_{1x} - Q_{0x} = S_x, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = S_y, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = S_z \quad (308)$$

Бунда S_x, S_y, S_z - $\overline{S}$ куч импульсининг проекциялари. Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1) Агар ташқи кучлар бош вектори $R=0$ га тенг бўлса, системанинг ҳаракат миқдори ўзгармас бўлади.

$$\frac{dQ}{dt} = 0; dQ = 0, \int dQ = 0 \quad \overline{Q} = \text{const}$$

2) Агар системага қўйилган ташқи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги, масалан Ox ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармайди.

$$R_x = 0$$

у ҳолда (306)- дан

$$Q_x = \text{const}$$

Бу натижалар система ҳаракат миқдоринини сақлашнинг ҳақидаги қонунини ифодалайди. Демак, системанинг ҳаракат миқдорини ички кучлар ўзгартирмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Нуктанинг ҳаракат миқдори нима?
2. Кучнинг элементар импульси нима?
3. Элементар импульс қандай йўналган?
4. Кучни тўла импульси қандай топилади?
5. Куч импульсининг координата ўқларидан проекцияси қандай топилади?
6. Нукта ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
7. Нукта ҳаракат миқдорини сақлашнинг қонунини айтигинг?
8. Системанинг ҳаракат миқдори деб нимага айтади?
9. Системанинг ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
10. Системанинг ҳаракат миқдори қандай ҳолларда сақланади?

92-§. СИСТЕМА МАССАЛАР МАРКАЗИНИ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системанинг ҳаракат миқдори қуйидагига тенг.

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V} \quad (309)$$

Системанинг ҳаракат миқдорини ўзгариши ҳақидаги формулани ёзамиз.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R} \quad (310)$$

Бу ерда $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ - система нукталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори.

(309) ни (310) га қўйиб ҳосила оламиз:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{R}; \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{W}; \quad M\vec{W} = \vec{R}; \quad (311)$$

бу ерда $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ - система массалар марказининг тезланиши.

(311)-формула система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалайди: система массалар маркази, массаси бутун система массасига тенг бўлган ва система нукталарига таъсир этувчи

барча ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатланади.

(311) иккала қисмининг координата ўқларига проекциялаймиз

$$\begin{aligned} m\ddot{W}_{ix} &= R_x; \\ m\ddot{W}_{iy} &= R_y; \\ m\ddot{W}_{iz} &= R_z; \end{aligned} \quad (312)$$

Бунда R_x, R_y, R_z — R бош векторининг координата ўқлариданги проекциялари.

$$\ddot{W}_{ix} = \frac{d^2 y_x}{dt^2} = \ddot{X}_x; \quad \ddot{W}_{iy} = \frac{d^2 y_y}{dt^2} = \ddot{Y}_y; \quad \ddot{W}_{iz} = \frac{d^2 z_z}{dt^2} = \ddot{Z}_z; \quad (313)$$

Бунда x, y, z — массалар марказининг координаталари. (313) ни (312) га қўямиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_x &= R_x; \\ m\ddot{y}_y &= R_y; \\ m\ddot{z}_z &= R_z; \end{aligned} \quad (314)$$

(314)-формула массалар маркази ҳаракатини дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Исбот қилинган теоремадан куйидаги натижаларни оламиз:

1. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин:

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \sum \overline{F}_k = 0 \\ \text{У ҳолда} \quad \overline{W}_C &= \frac{d\overline{V}_C}{dt} = 0 \quad \text{булиб,} \\ \overline{V}_C &= \text{const} \end{aligned}$$

бўлишини кўраемиз. Яъни система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракат қилади.

Агар массалар маркази бошлангич пайтда тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда $v_C = 0$ бўлиб, системанинг массалар маркази кейинчалик ҳам қўзғалмасдан қолади.

$$\overline{r}_C = \text{const}$$

2. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолдан фарқли бўлиб, унинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлсин:

$$R_x^e = X^e = 0.$$

У ҳолда (314)-тенгламаларнинг биринчисидан

$$\dot{X}_i = 0$$

$$X_i = \text{const}$$

келиб чиқади.

Демак, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор уқдаги проекцияларининг қининдиси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг шу уқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Хусусан, агар бошланғич пайтда $\dot{x} = 0$ бўлса, системанинг ҳаракати давомийда $v_x = 0$ бўлади, яъни бу ҳолда система массалар марказининг координатаси x ўзгармай қолади.

$$x_i = \text{const}$$

Олинган натижалар система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодаланди. Демак массалар марказини ташқи кучлар ҳаракати келтиради. Ички кучлар эса ҳаракатга келтира олмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Нуқтанинг ҳаракат миқдори нимага тенг бўлади?
2. Системанинг ҳаракат миқдорини таърифланг?
3. Дифференциал шаклдаги система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
4. Ташқи кучлар бош вектори нима?
5. Ташқи кучлар бош векторининг проекциясини айтинг?
6. Системанинг массаси нимага тенг бўлади?
7. Системани массалар марказининг координаталари қайси формула билан топилади?
8. Системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар марказининг тезлиги орқали қандай ифодаланади?
9. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани таърифланг?
10. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини айтинг?

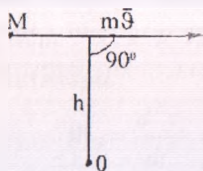
93-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚҚА НИСБАТАН НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ МОМЕНТИ

Нуқта ҳаракат миқдори вектор қатталиқ бўлгани учун унинг бирор марказга ва ўққа нисбатан моментини аниқлаш мумкин. Кучнинг

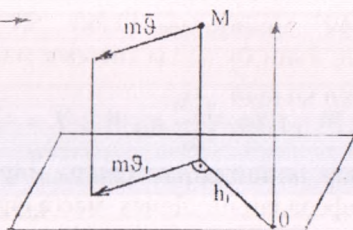
марказга ва ўққа нисбатан моментни қандай ҳисобласа, ҳаракат миқдорининг моментни ҳам шундан топилади.

Нуқта ҳаракат миқдорининг O — марказга нисбатан моментни қуйидагига тенг:

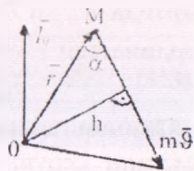
$$L_0 = m \vec{h} \vec{v}, L_0 = m (\vec{h} \vec{v}) \quad (315)$$



170-расм.



171-расм.



172-расм.

z ўққа нисбатан моментни олсак;

$$\begin{aligned} L_z &= m_0 (m \vec{V}_1) = h_1 m V_1 \\ L_z &= h_1 m V_1 \end{aligned} \quad (316)$$

Бунда L_z — нуқта ҳаракат миқдорининг z ўққа нисбатан моментни.

Бирор O марказга нисбатан олинган нуқта ҳаракат миқдорининг моментни шу марказга қўйилган вектор бўлади. (172 -расм) дан

$$\begin{aligned} \frac{h}{r} &= \sin \alpha, \quad h = r \sin \alpha; \\ l_0 &= h m V = r \sin \alpha m v, \\ l_0 &= h m v \sin \alpha \end{aligned} \quad (317)$$

(317) ни ўнг томони вектор қўпайтманини модули бўлади.

$$\vec{l}_0 = [\vec{r} \cdot m \vec{v}] \quad (318)$$

(318) - вектор қўпайтма қуйидагича таърифланади: бирор O марказга нисбатан олинган ҳаракат миқдорининг моментни шу марказга қўйилган вектор катталиқ бўлиб, нуқтанинг радиус — вектори билан шу нуқта ҳаракат миқдорининг вектор қўпайтмасига тенг.

$\vec{l}_0$ - вектори O нуқта ва $m \vec{v}$ вектордан ўтказилган учбурчак текислигига перпендикуляр йўналган бўлади.

94-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚГА НИСБАТАН СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИ

Системанинг бирор марказга нисбатан кинетик моменти системадаги барча нуқталар ҳаракат миқдорининг шу марказга нисбатан олинган моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\begin{aligned} L_0 &= m_0 (m_1 \vartheta_1) + m_0 (m_2 \vartheta_1) + \dots + m_0 (m_n \vartheta_n) \\ &= m_0 (m_k \vartheta_k), \quad L_0 = \sum m_0 (m_k \vartheta_k) \quad k = 1, 2, n. \end{aligned} \quad (319)$$

Бу ерда L_0 - системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти.

Системанинг бирор ўққа нисбатан кинетик моменти шу ўққа нисбатан системадаги нуқталар ҳаракат миқдорлар моментларининг йиғиндисига тенг.

$$\begin{aligned} L_x &= m_x (m_1 \bar{V}_1) + m_x (m_2 \bar{V}_2) + \dots + m_x (m_n \bar{V}_n); \\ L_x &= \sum m_x (m_k \bar{V}_k); \\ L_y &= \sum m_y (m_k \bar{V}_k); \\ L_z &= \sum m_z (m_k \bar{V}_k); \end{aligned} \quad (320)$$

Бунда L_x, L_y, L_z - системанинг x, y, z ўқларига нисбатан кинетик моменти.

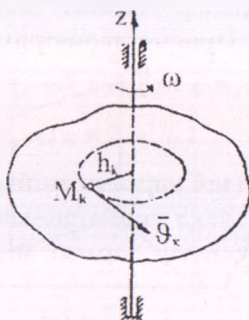
95-§. ҚЎЗГАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ КИНЕТИК МОМЕНТИ

Қўзгалмас z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланаётган абсолют қаттиқ жисм берилган. Шу жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан кинетик моменти ёки ҳаракат миқдорининг бош моментини ҳисоблаш лозим бўлсин. Жисмга система деб қараймиз. Жисмдан ихтиёрий M_k нуқтани оламиз (173-расм). Бу нуқтанинг тезлиги $v_k = \omega \cdot h_k$ га тенг. Нуқта ҳаракат миқдорининг z ўқға нисбатан моменти:

$$\begin{aligned} m_z (m_k \bar{V}_k) &= h_k \cdot m_k \cdot V_k = \omega \cdot m_k h_k^2; \\ L_z &= \sum m_z (m_k \bar{V}_k) = \sum \omega m_k h_k^2; \\ \omega \sum m_k h_k^2 &= \omega \cdot I_z; \\ L_z &= I_z \cdot \omega \end{aligned} \quad (321)$$

(321)-формула билан жисмнинг z ўқиға нисбатан кинетик моменти топилади.

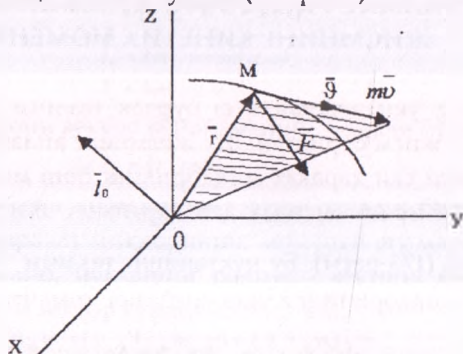
Бу ерда $I_z = \sum m_i h_i^2$ - жисмнинг z ўқга нисбатан инерция моменти. Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланивчи жисмнинг кинетик моменти мазкур ўқга нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг қунартмасига тенг.



173-расм.

96-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИ МОМЕНТИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\vec{F}$ кучи таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасида ҳаракат қилаётган бўлсин (174-расм).



174-расм.

Нуқта ҳаракат миқдорининг O нуқтага нисбатан моменти:

$$l_0 = [\vec{r} \ m\vec{v}] \quad \text{бўлади.} \quad (322)$$

Теоремадан исбот қилиш учун (322)-нинг иккала томонидан $\vec{r}$ билан қўшничи бўйича ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{dl_0}{dt} &= \left[\frac{dr}{dt} m \dot{\varphi} \right] + \left[r \frac{d(m\dot{\varphi})}{dt} \right] \\ \frac{d(m\dot{\varphi})}{dt} &= \dot{F} = \frac{dr}{dt} = 1 \\ \left[\frac{dr}{dt} m \dot{\varphi} \right] &= \left[\dot{\varphi} m \dot{\varphi} \right] = 0 \end{aligned}$$

$\vec{r}$ ва $m\dot{\varphi}$ векторлар бир түтри чизик бўлаб пучалгалини учун улар орасидаги бурчак нолга тенг.

(322) ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{dl_0}{dt} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] \text{ ёки } \frac{dl_0}{dt} = m_0(F); \quad (323)$$

Бунда $\vec{m}_0(\vec{F}) = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$ - $\vec{F}$ кучни O нуқтага нисбатан моменти.

(323) - формула нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.

(323) - ни x, y, z ўқларга проекциялаб қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\vec{F}); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\vec{F}); \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\vec{F}) \quad (324)$$

Бунда l_x, l_y, l_z - нуқталар ҳаракат миқдорининг x, y, z ўқларига нисбатан моментлари.

$m_x(\vec{F}), m_y(\vec{F}), m_z(\vec{F}) - \vec{F}$ кучининг x, y, z ўқларига нисбатан моментлари.

(324)-формулалар нуқталар ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўқга нисбатан моментига тенг.

(324) - ни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dt} [m_0(m\vec{v})] = m_0(\vec{F}) \quad (325)$$

97-§. СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИНИ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

$M_1, M_2, \dots, M_n$ нуқталардан тузилган система берилган бўлсин. (173-расм).

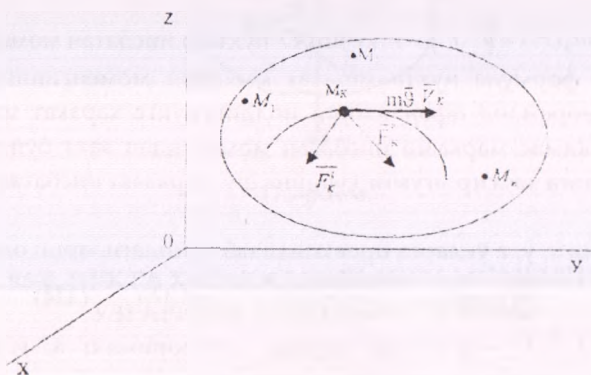
Системадаги ихтиёрий M_k нуқтага нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз.

$$\frac{\sum m_k (m_k \vec{r}_k)}{dt} = \overline{m_k (\vec{F}_k^e)} + \overline{m_k (\vec{F}_k^i)} \quad (326)$$

Бунда $m_k (\vec{r}_k)$ ва $m_k (\vec{F}_k)$ - M_k нуктага қўйилган ташқи ва ички кучларнинг 0 нуктага нисбатан моментли.

(326)-формулани системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб ҳадма-ҳад қиламиз.

$$\frac{\sum m_k (m_k \vec{r}_k)}{dt} = \sum m_k (\vec{F}_k^e) + \sum m_k (\vec{F}_k^i) \quad k=1,2,\dots,n \quad (327)$$



175-расм.

$\sum \overline{m_k (m_k \vec{r}_k)} = \overline{L_k}$ системанинг 0 нуктага нисбатан кинетик моментли.

$\sum \overline{m_k (\vec{F}_k^e)} = \overline{M_k}$ система нукталарига қўйилган ташқи кучларнинг 0 марказга нисбатан бош моментли. Ички кучларнинг хоссасига қўра $\sum \overline{m_k (\vec{F}_k^i)} = 0$.

(327) ни қўйидагича ёзамиз.

$$\frac{dL_k}{dt} = \overline{M_k} \quad (328)$$

(328) – ифода система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: системанинг бирор қўзғалмас нуктага нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олишган ҳосила система нукталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу нуктага нисбатан бош моментига тенг.

(328) - ифоданинг иккала томонини қўзғалмас декарт координата ўқларига проекциялаб қўйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (329)$$

Бунда L_x, L_y, L_z - системани координата ўқларига нисбатан кинетик моментларини, M_x, M_y, M_z - системага қўйилган ташқи кучларнинг шу ўқларга нисбатан бош моментларини.

(329)-тенгламалар қувалмас координата ўқларига нисбатан система кинетик моментини ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: системанинг бирор қувалмас ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу ўққа нисбатан бош моментига тенг.

98-§. СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қўйилган натижаларни оламиз.

1. Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор нуқтага нисбатан олинган бош momenti нолга тенг бўлса, системанинг шу нуқтага нисбатан кинетик моментини миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгармас бўлади.

Агар $M_0 = 0$ бўлса, (328) га кўра:

$$\frac{dL_0}{dt} = 0$$

бўлади. Бундан

$$L_0 = \text{const} \quad \text{келиб чиқади.} \quad (330)$$

2. Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўққа (масалан, Oz ўқиға) нисбатан бош momenti нолга тенг бўлса, системанинг шу ўққа нисбатан кинетик моментини ҳаракат давомида ўзгармасдан қолади.

Агар $M_z = 0$ бўлса, (329) га кўра

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

бўлади. Бундан эса

$$L_z = \text{const} \quad (331)$$

эканлиги келиб чиқади.

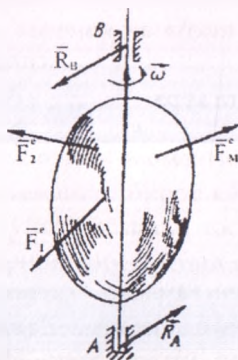
(330)- ва (331)- тенгламалар система кинетик моментининг сақланиш қонунини ифодалайди. Демак системанинг кинетик моментини ташқи кучлар ўзгартиради. Ички кучлар эса ўзгартира олмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг momenti қандай аниқланади?
2. Уққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг momenti қандай аниқланади?
3. Марказга ва шу марказдан утган уққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг momentлари орасида қандай боғланиш мавжуд?
4. Марказга нисбатан системанинг кинетик momenti қандай аниқланади?
5. Уққа нисбатан системанинг кинетик momenti қандай аниқланади? Улар орасида қандай боғланиш мавжуд?
6. Қўзғалмас уқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмни кинетик momenti қандай аниқланади? Қайси формула билан топилади?
7. Нуқта ҳаракат миқдори momentини ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
8. Система кинетик momenti ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
9. Системанинг бирор марказга ва уққа нисбатан олинган кинетик momenti қачон ўзгармайди?

99-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС УҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНИШИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Қаттиқ жисм қўзғалмас z уқи атрофида $\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \dots, \vec{F}_n^*$ ташқи кучлар таъсирида айланаётган бўлсин (176-расм).



176-расм.

Жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини келтириб чиқарини учун система кинетик моментини узгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (332)$$

$$L_z = I_z \cdot \omega \quad (333)$$

Бунда, M_z -айлантирувчи момент;

(333)- ни (332)- га қўйиб вақт бўйича ҳосил оламиз.

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z; \quad J_z \cdot \varepsilon = M_z \quad (334)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

бунда, ε - жисмни бурчак тезланиши. J_z - жисмни z ўққа нисбатан инерция моменти

(334)-га қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.

(334) - формуладан
$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}$$

Агар $M_z = \text{const}$ бўлиб J_z нинг қиймати катта бўлса жисмнинг айланиши кичик бўлади. Агар J_z кичик бўлса, жисмни айланиши тезлашади. Жисмнинг инерция моменти айланма ҳаракат қилувчи жисмнинг инерция улчовидир.

(334) - тенгламадан фойдаланиб иккита масала ечиш мумкин.

1. Агар айлантирувчи момент M_z берилган бўлса, жисм ҳаракатининг тенгламасини топиш мумкин.

$$\varphi = f(t)$$

2. Агар жисм ҳаракатининг тенгламаси берилган бўлса, жисмнинг айлантирувчи моментини топиш мумкин.

100-§. НУҚТА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. НУҚТАНИ ИНЕРЦИЯ КУЧИ

Эркин бўлмаган M нуқтага $\vec{F}$ актив ва $\vec{N}$ реакция кучлари таъсир қилади (175-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N} \quad (335)$$

(335) ни $\vec{F} + \vec{N} + (-m\vec{W}) = 0$ кўринишида ёзиб,

$$\vec{F}^{III} = -m\vec{W} \quad \text{нуқтанинг инерция кучи} \quad (336)$$

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{III} = 0 \quad (337)$$

тенгласини оламиз.

Миқдор жиҳатидан нуқтанинг массаси билан унинг тезланишининг куйаймаслига тенг. Йўналишини тезланиш векторига тескари бўлган кучга инерция кучи дейилади.

(337)-тенглик эркин бўлмаган нуқта учун Даламбер принципини фойдалайди: актив куч ва боғланиш реакция кучи таъсирида ҳаракатланувчи нуқтага ҳар онда инерция кучининг куйсак, бу кучлар ўзаро мувозанатлашади.

Даламбер принципини ёрдамида динамиканинг биринчи масаласини ечиш мумкин.

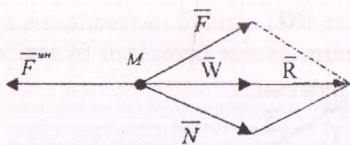
Динамика масалаларини ечишда Даламбер принципиндан, асосан номатълум реакция кучларини топишда фойдаланилади.

Агар нуқта эгри чизикли траектория бўйлаб потекис ҳаракатда бўлса, инерция кучи $\vec{F}^{\text{ин}}$ траекторияга утказилган уринма ва бош нормаллар бўйича йўналаган танкил этувчиларга ажратилади (178-расм).

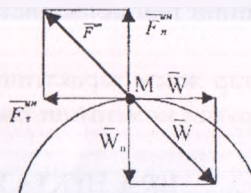
$$\vec{F}^{\text{ин}} = \vec{F}_t^{\text{ин}} + \vec{F}_n^{\text{ин}} \quad (338)$$

Бунда, $\vec{F}_t^{\text{ин}}$ ва $\vec{F}_n^{\text{ин}}$ ларга мос равишда нуқтани уринма ва нормал инерция кучлари дейилади. Бу кучлар уринма ва нормал тезланишларга тескари йўналади,

$$\begin{aligned} \vec{F}_t^{\text{ин}} &= -m\vec{W}_t \\ \vec{F}_n^{\text{ин}} &= m\vec{W}_n \end{aligned} \quad (339)$$



177-расм.



178-расм.

Уринма ва нормал тезланишлар $w_t = \frac{dV}{dt}$, $w_n = \frac{V^2}{p}$ формулалардан аниқланишини эъгиборга олсак, нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучларини модули учун ушбу муносабатларни оламиз

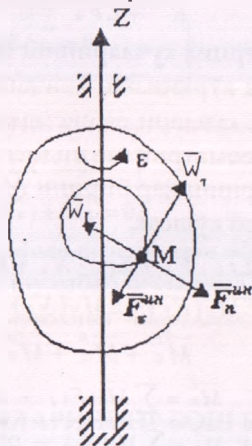
$$F_t^{\text{ин}} = m \frac{dV}{dt}, \quad F_n^{\text{ин}} = \frac{mV^2}{p} \quad (340)$$

Агар нукта эгри чизик бўйича текис ҳаракатда бўлса, $W_t = 0$, $F^{un} = 0$ ва инерция кучи F^{in} фақат нормал ташкил этувчидан иборат бўлади. Нукта түгри чизик бўйича нотекис ҳаракатланганда $W_n = 0$ ва инерция кучи фақат уринма ташкил этувчидан иборат бўлади. Нукта түгри чизикли текис ҳаракатланганда $W=0$ бўлиб, инерция кучи $F^{un} = 0$ бўлади. Бу ерда ρ - траекториянинг эгрилик радиуси.

Қузғалмас уқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуктасининг тезланиши уринма ва нормал тезланишлардан иборат бўлгани учун мазкур нуктанин уринма ва нормал инерция кучлари мос равишда уринма ва нормал инерция кучлари дейилади, ҳамда уларнинг қиймати қуйидаги формулалардан аниқланади (179-расм):

$$F_t^{un} = m\epsilon h, \quad F_n^{un} = m\omega^2 h.$$

Бунда h нуктадан айланиш ўқигача бўлган масофа, ω ва ϵ жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланишидир.



179-расм.

101-§. МЕХАНИК СИСТЕМА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ

Системанинг ҳар бир M_k нуктаси учун Даламбер принципини ёзамиз:

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{F}_k^{un} = 0, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (341)$$

бунда F_k — M_k нуктага таъсир этувчи актив кучларининг тенг таъсир этувчиси; N_k — боғланнинг реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси; $\overline{\Phi}_k = -m_k \overline{H}_k$ шу нуктанинг инерция кучи.

(341)-тенгламалар механик система учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва боғланнинг реакция кучлари таъсиридати системанинг ҳар бир нуктасига ҳар онда шу нукталарининг инерция кучини қўйсақ, бу кучлар системаси шу қўйилган актив ва реакция кучлари билан мувозанат мувозанатланади.

(341) тенгламаларни қўшиб қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum \overline{F}_k + \sum \overline{N}_k + \sum \overline{F}_k^{''''} = 0 \quad (342)$$

ёки

$$\overline{R}' + \overline{R}'' + \overline{R}^{'''} = 0 \quad (343)$$

бунда: $\overline{R}' = \sum \overline{F}_k$ — актив кучларининг бош вектори; $\overline{R}'' = \sum \overline{N}_k$ — реакция кучларининг бош вектори;

$$\overline{R}^{'''} + \sum \overline{F}_k^{'''} = 0 \quad (344)$$

система нукталари инерция кучларининг бош векторидир.

(343)-тенгламадан кўрамизки, боғланшдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нукталари инерция кучлари бош векторларининг геометрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(341)-тенгламаларнинг ҳар бирини M_i нуктанинг радиус-вектори r_i га векторди қўнайтириб қўшсақ,

$$\begin{aligned} \sum \overline{r}_k \cdot \overline{F}_k + \sum \overline{r}_k \cdot \overline{N}_k + \sum \overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^{'''} &= 0 \\ \text{ёки} \quad \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k) + \sum \overline{M}_0(\overline{N}_k) + \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k^{'''}) &= 0 \end{aligned} \quad (345)$$

$$\overline{M}_0' + \overline{M}_0'' + \overline{M}_0^{'''} = 0 \quad (346)$$

ҳосил бўлади. Бунда $\overline{M}_0' = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k)$ — актив кучларининг 0 марказга нисбатан бош моментни; $\overline{M}_0'' = \sum \overline{M}_0(\overline{N}_k)$ — реакция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моментни;

$$\overline{M}_0^{'''} = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k^{'''}) \quad (347)$$

система нукталари инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моментини ифодалайди.

(346)-дан кўрамизки, боғланшдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нукталари инерция кучларининг ихтиёрый қўзғалмас марказга нисбатан бош моментларининг геометрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(342)- ва (346)- тенгламаларни координата уқларига проекциялаб, кучлар системасининг олтига мувозанат тенгламасини оламиз:

$$\begin{aligned}\Sigma X_k + \Sigma N_{k_1} + \Sigma F_{k_1} &= 0 \\ \Sigma Y_k + \Sigma N_{k_2} + \Sigma F_{k_2} &= 0 \\ \Sigma Z_k + \Sigma N_{k_3} + \Sigma F_{k_3} &= 0 \\ \Sigma M_x(\bar{F}_k) + \Sigma M_x(N_k) + \Sigma M_x(\bar{F}_k''') &= 0 \\ \Sigma M_y(\bar{F}_k) + \Sigma M_y(N_k) + \Sigma M_y(\bar{F}_k''') &= 0 \\ \Sigma M_z(\bar{F}_k) + \Sigma M_z(N_k) + \Sigma M_z(\bar{F}_k''') &= 0\end{aligned}\quad (348)$$

Агар системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган кучларни ички ва ташқи кучларга ажратсак, ички кучларнинг бош вектори ва бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлгани учун (342)- ва (345)- тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left. \begin{aligned}\Sigma \bar{F}_k^* + \Sigma \bar{F}_k''' &= 0 \\ \Sigma M_0(\bar{F}_k^*) + \Sigma M_0 \bar{F}_k''' &= 0\end{aligned}\right\} \quad (349)$$

(344) ва (347) ларга кўра (349) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned}\Sigma \bar{F}_k^* + \Sigma \bar{R}^* &= 0 \\ \Sigma M_0(\bar{F}_k^*) + \bar{M}_0^* &= 0\end{aligned}\right\} \quad (350)$$

(350)- тенгламаларнинг афзалиги шундан иборатки, бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди, шу сабабли система динамикасининг қўшима масалаларини ечишда бу мувозанат шартларидан фойдаланиш қулай бўлади.

102-§. ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини ҳисоблаш учун система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги ва кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремалардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned}M \cdot \bar{\omega}_C &= \Sigma \bar{F}_k^* \\ \frac{d\bar{L}_0}{dt} &= \Sigma M_0(\bar{F}_k^*)\end{aligned}\quad (351)$$

Бунда: M — системанин массаси; W — массалар марказининг тезланиши; L — системанин O марказга нисбатан кинетик моменти.

(351)- тенгламаларни (350)- билан солиштириб:

$$\left. \begin{aligned} R^{\text{ин}} &= -M \cdot \omega_c \\ M_z^{\text{ин}} &= -\frac{dL_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (352)$$

муносабатларни оламиз.

Шундай қилиб, ихтиёрий механик система (ёки қаттиқ жисм) инерция кучларининг бош вектори миқдор жиҳатдан система массасининг мазкур система (қаттиқ жисм) массалар марказининг тезланиши қўлланмасига тенг бўлади ва бу тезланишга тескари йўналди; инерция кучларининг O марказга нисбатан бош моменти эса миқдор жиҳатдан шу марказга нисбатан система (қаттиқ жисм) кинетик моментида вақт бўйича олинган ҳосилга тенг, йўналиши унга тескари бўлади.

Қаттиқ жисм илгариланма, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ва текис параллел ҳаракатда бўлганда инерция кучларининг бош вектори ва бош моментида ҳисоблашни қўриб чиқамиз.

1. Илгариланма ҳаракат. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганда массалар маркази атрофида айланмайди $\omega=0$. Шу сабабли $\sum \vec{M}_i(\vec{F}_i) = 0$ ва (350)- га қўра:

$$\vec{M}_i^{\text{ин}} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари массалар марказига қўйилган ва массалар марказининг тезланишининг қарама-қарши йўналган битта кучга келтиради.

$$\vec{R}^{\text{ин}} = -M \cdot \vec{W}_c \quad (353)$$

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат. Агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда инерция кучлари умумий ҳолда бирор ихтиёрий O нуқтага қўйилган $\vec{R}^{\text{ин}}$ кучга ва $\vec{M}^{\text{ин}}$ моментида тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади. Дастлаб жисмнинг айланиш ўқи Oz га нисбатан инерция кучларининг бош моменти $M_z^{\text{ин}}$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (351) нинг иккинчи тенгласи Oz ўққа проекциялаймиз:

$$M_z^{\text{ин}} = -\frac{dL_z}{dt}$$

Аммо қуриладиган ҳолда $L_z = L \sin \theta$ бўлгани учун:

$$M_z^{\text{ин}} = -L_z \varepsilon \quad (354)$$

тенгликни оламиш, бунда L_z — айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти. (354)-даги манфий инерция инерция кучларининг айланиш ўқига нисбатан бош моменти $M_z^{\text{ин}}$ жисмнинг бурчак тезлигининг ε га тескари йўналишининг ифодалайди.

Хусусий ҳолда, агар айланиш ўқи жисмнинг модал симметрия ўқи билан ўсма-ўси тўғрисида, жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади ва қўзғалмас бўлади. Бунда $\Pi = 0$ бўлгани учун инерция кучларининг бош вектори $R^{\text{ин}} = 0$ бўлади. Бинобарин, бу ҳолда қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг инерция кучлари ва моменти (354)-формуладан аниқланадиган битта жуфт кучга келтирилади. Жисм симметрия ўқида эга бўлгани учун бу жуфт куч айланиш ўқида перпендикуляр текисликда ётади.

3. Текис параллел ҳаракат. Фараз қилайлик, жисм симметрия текислигига эга бўлсин ва унга параллел равишда ҳаракатлансин. Бу ҳолда инерция кучлари жисмнинг массалар марказига қўшилган, (353)-формула ёрдамида аниқланадиган $R^{\text{ин}}$ кучга ва жисмнинг симметрия текислигида ётувчи битта жуфт кучга келтирилади ҳамда унинг моменти ҳам (354)-формула ёрдамида аниқланади. Бунда L га жисмнинг массалар марказидан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ётувчи ўққа нисбатан инерция моменти деб қаралади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги дифференциал тенгламасини ёзинг?
2. Айланма ҳаракатдаги жисмнинг инерция моменти нимани ифодалайди?
3. Нуқтанинг инерция кучи нима?
4. Инерция кучи қандай йўналган?
5. Агар нуқта тўғри чизиqli текис ҳаракат қилса, инерция кучига эга бўладими?
6. Уринма инерция кучи нима?
7. Уринма инерция кучи қандай йўналган?
8. Нормал инерция кучи нима? У нимага тенг?
9. Агар нуқта эгри чизиqli ҳаракатда бўлса, нормал инерция кучи ҳосил бўладими?

10. Даламбер принципининг моҳияти нимадан иборат ва у қандай таърифланади?

103-§. БОҒЛАНИШЛАР. БОҒЛАНИШЛАРДАГИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

Моддий нуқтанинг ҳаракатига маълум йўналишда чек қўйилган бўлиши мумкин. Нуқта ҳаракатини бирор йўналишда чекловчи сабабга боғланиш дейилади. Боғланиш сирт, текислик, эгри чизик ёки тўғри чизикли бўлиши мумкин. Нуқта бирор сирт бўйлаб ҳаракатлансин, у ҳолда боғланишнинг тенгламаси $f(x, y, z) = 0$ кўринишда бўлади. Агар моддий нуқта бирор фазовий эгри чизик бўйлаб ҳаракатланса, бундай эгри чизик икки $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ сиртларининг кесилиши чизиги сифатида олинishi мумкин. Бу икки тенглама фазовий эгри чизикнинг тенгламаси, яъни боғланиш тенгламасини ифодалайди. Боғланишлар фақат тенгламалар билангина эмас, тенгсизликлар билан ҳам берилиши мумкин.

Тенглик ишораси билан берилган боғланишлар бўшатмайдиган боғланишлар дейилади. Тенгсизлик билан ифодаланадиган боғланишлар бўшатадиган боғланишлар дейилади. Боғланишлар тенгламасига фақат нуқта координатлари кирса, бундай боғланишлар голоном (ёки геометрик) боғланишлар дейилади. Боғланишлар тенгламасига нуқта координатасини вақт бўйича ҳосилалари ҳам кириб, бу боғланишлар интегралланадиган бўлса, уларга беголономлар ёки кинематик боғланишлар дейилади. Голономли боғланишлар ҳам, беголоном боғланишлар ҳам стационар ва ностационар боғланишларга бўлинади. Вақтга боғлиқ бўлмаган боғланишлар стационар боғланишлар дейилади. Агар боғланишлар вақтга боғлиқ бўлса, у ностационар боғланишлар дейилади. Стационар ва ностационар боғланишлар бўшатмайдиган ва бўшатадиган бўлиши мумкин. Боғланишлар тенгламаларини қуйидагича синфлаш мумкин:

1. Стационар бўшатмайдиган голономли боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) = 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

2. Ностационар бўшатмайдиган голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, t) = 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

3. Бўшатадиган стационар, голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

4. Бўшатадиган ностационар голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, t) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

5. Беголоном стационар, бўшатмайдиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, x, y, z) = 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

6. Беголоном ностационар бўшатмайдиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, x, y, z, t) = 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

7. Беголоном стационар бўшатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, x, y, z) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

8. Беголоном ностационар бўшатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, x, y, z, t) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq 3$$

Боғланишдаги моддий нукта ҳаракатини ўрганишда унга қўйилган кучлар каторига боғланиш таъсирини берадиган реакция кучини ҳам қўйиш керак. Боғланиш реакция кучи эса нолга умум қатталиклар каторига киради.

104-§. АНАЛИТИК МЕХАНИКА. МЕХАНИК СИСТЕМАГА ҚЎЙИЛГАН БОҒЛАНИШЛАР

Механик системага қўйилган боғланишлар ҳам голоном ва беголоном стационар ва ностационар бўшатадиган ва бўшатмайдиган бўлиши мумкин. Фақат голоном боғланишлар қўйилган система голоном система дейилади ва қуйидаги кўринишдаги тенгламалар билан ифодаланади.

$$f_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

$$(p = 1, 2, 3, \dots, S)$$

S билан голоном сони белгиланган.

Беголоном боғланишлар система нуқталари тезликларининг проекцияларига нисбатан чизикли ёки чизикли бўлмаган тенгламалар билан ифодаланиши мумкин, чизикли бўлган ҳолда боғланиш тенгламалари қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$f_\mu = a_\mu + \sum (b_\mu i - x_i + G_\mu i \cdot y_i + d_\mu i \cdot z_i)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, Si)$$

Бунда Si билан беголоном боғланишлар сони белгиланган.

Системага қўйилган боғланишларнинг бир қисми голоном, қолган қисми эса беголоном боғланишлар ҳам бўлиши мумкин. Биз асосан голоном система ҳаракати ёки мувозанатини ўрганамиз.

Механик система n та нуқтадан ташкил топган бўлса, унга қўйилган боғланишлар тенгламасининг сони $3n$ дан ошмаслиги керак.

105-§. СИСТЕМАНИНГ МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШЛАРИ. ИДЕАЛ БОҒЛАНИШЛАР

Системанинг мумкин бўлган кўчишини урганишдан аввал нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини таърифлаймиз.

Берилган пайтда нуқтанинг унга қўйилган боғланиш чеклашларини қаноатлантирувчи ҳар қандай чексиз кичик кўчишларга мумкин бўлган кўчишлар дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини $\delta \mathbf{r}$ вектор билан белгилаймиз. δ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини δx , δy , δz билан белгилаймиз; бу катталиклар нуқта координаталарининг вариациялари деб ҳам аталади. У ҳолда мумкин бўлган кўчиш векторини нуқта координаталарининг вариациялари оркали қўйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}$$

Агар боғланиш $f(x, y, z, t) = 0$ тенглама билан ифодаланган бўлса, нуқтанинг координаталар бўйича ҳақиқий кўчишлари узаро қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Системани ташкил этувчи нуқталар мумкин бўлган кўчишлари системанинг мумкин бўлган кўчишлари дейилади. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги икки шартни қаноатлантириши керак..

1. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари чексиз кичик бўлиши керак. Агар бу кўчишлар чекли бўлса, система бошқа вазиятга угиб системанинг мувозанат шarti ўзгаради.

2. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча боғланишлар сақланиб қолиши керак. Агар боғланишлар бузилса, системанинг кўриниши ўзгаради.

Стационар голономли боғланишдаги системанинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган мумкин бўлган кўчишлари сони шу системанинг эркинлик даражаси дейилади. S та голономли боғланиш таъсиридаги n та нуқтадан ташкил топган системанинг эркинлик даражасини k билан белгиласак,

$k = 3n - S$ деб ёзиш мумкин.

Актив куч қўйилган нуқтанинг бирор $\delta \mathbf{r}$ мумкин бўлган кўчишдаги шу кўчининг элементар ишини қисқача, кўчининг мумкин бўлган иши деб

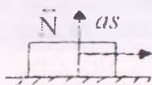
атаймиз ва унни δA билан белгилаймиз. У ҳолда элементар ишн таърифига кура

$$\delta A = \vec{F}_i^r \delta \vec{r}_i$$

формула уриниш бўлади. n та нуктадан ташкил топган механик системага таъсир этувчи кучлар мумкин бўлган ишларнинг йиғиндисини нолга тенг бўладиган боғланишлар идеал боғланишлар дейилади. Идеал боғланишларни қуйидагича ифодалани мумкин.

$$\delta A' = \sum \vec{F}_i^r \delta \vec{r}_i = 0$$

$\vec{F}^r$ -системага қўйилган боғланиш реакция кучи



180-расм.

$$\delta A' = N \delta S \cos 90^\circ = 0 \quad \delta A' = 0$$

Силлиқ текислик идеал боғланишига мисол бўлади.

106-§. МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШЛАР ПРИНЦИПИ

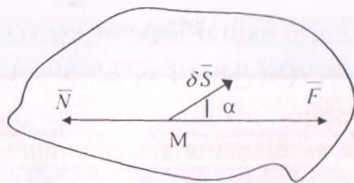
Идеал боғланишдаги система узига қўйилган актив ва реакция кучлари таъсирида мувозанатда бўлсин. $\vec{F}$ кучининг dS силжишдаги бажарган элементар ишни қуйидагича тенг.

$$\delta A = F \delta S \cos \alpha$$

N реакция кучининг бажарган элементар ишни

$$\delta A' = N \delta S \cos(180^\circ - \alpha) = -N \delta S \cos \alpha = -F \delta S \cos \alpha$$

Ишларни қўшамиз.



181-расм.

$$\delta A + \delta A' = F \delta S \cos \alpha - F \delta S \cos \alpha = 0$$

$$\delta A + \delta A' = 0$$

(355)

(355) ни системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб қўшиб чиқсак, қўишдан кича ёзилади.

$$\begin{aligned} \sum \delta l + \sum \delta l' &= 0 \\ \sum \delta l' &= 0 \quad \text{бўлса} \quad \sum \delta l = 0 \quad \text{бўлади} \end{aligned} \quad (356)$$

(356) система учун мумкин бўлган қўишнинг принципини ифода қилади. Идеал боғланишдаги система мувозанатда бўлса, унинг ҳар қандай мумкин бўлган қўишида системага қўишлан барча актив қўишларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

(356) ни қўишдан кича ёзиш мумкин.

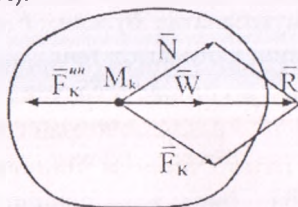
$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \quad (357)$$

Бунда X, Y, Z системага таъсир этувчи қўишларнинг координата ўқларидаги проекцияси, $\delta x, \delta y, \delta z$ – қўишлар қўишлан нукталарининг сўлжишнн.

107-§. ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ. (ДАЛАМБЕР ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАСИ)

n та нуктадан иборат бўлган идеал боғланишдаги система берилган бўлсин. Система билан боғланишнинг ўртасида ишқаланиш нук.

F ва N системадаги ихтиёрин M нуктага таъсир қилувчи актив ва реакция қўишлари (182-расм).



182-расм.

M нуктага инерция қўишларини қўямиз. Инерция қўиш ҳар доим тизманинг қарама-қарши йўналган бўлади. Даламбер принципинга асосан актив, реакция ва инерция қўишларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади.

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{F}_k^{'''} = 0$$

Система нукталарига мумкин бўлган δs сўлжиш берамиз. Мумкин бўлган қўишлар принципинга асосан

$$\delta A_k + \delta A_k^r + \delta A_k^{'''} = 0 \quad (358)$$

$$\sum \delta I_k + \sum \delta I_k' + \sum \delta I_k'' = 0 \quad (359)$$

Системага қўйилган боғланишлар идеал бўлганини учун реакция кучларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади. (358) ни системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб қўшиб чиқамиз.

$$\sum \delta I_k' = 0$$

$$\sum \delta I_k + \sum \delta I_k'' = 0 \text{ бўлади } k=1,2,\dots,n \quad (360)$$

Бу тенгламага динамиканинг умумий тенгламаси ёки Даламбер – Лагранж тенгламаси дейилади: идеал боғланишдаги системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кучинида системага қўйилган барча актив кучларнинг ва инерция кучларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай системага эркин система дейилади?
2. Қандай системага эрксиз система дейилади?
3. Боғланиш нима?
4. Реакция кучи нима?
5. Қандай боғланишга стационар боғланиш дейилади?
6. Қандай боғланишга стационар бўлмаган боғланиш дейилади?
7. Қандай боғланишга голономли боғланиш дейилади?
8. Қандай боғланишга беголономли боғланиш дейилади?
9. Мумкин бўлган кучиш принципини таърифланг?
10. Динамиканинг умумий тенгламасининг формуласини ёзинг?

108-§. УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАР ВА УМУМЛАШГАН ТЕЗЛИКЛАР

Система n та нуктадан ташкил топган бўлса, унинг ҳолатини $3n$ та Декарт координаталари орқали аниқлаш мумкин.

Системага S та голоном боғланишлар қўйилган бўлса $3n$ координаталардан $k=3n-S$ таси бир-бирига боғлиқ бўлмайди. Декарт координаталардан k тасини бир-бирига боғлиқ қилмай, S тасини эса бир-бирига боғлиқ қилиб танлаш мумкин. Бир бирига боғлиқ бўлмаган k та Декарт координаталари ўрнига бошқа $q_1, q_2, \dots, q_n$ параметрларни ҳам киритиш мумкин. Система ҳолатини бир кийматли аниқлайдиган бир-бирига боғлиқ бўлмаган параметрлар умумлашган координаталар дейилади. Умумлашган координаталар қуйдагича белгиланади:

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

Умумлашган координаталар бир-бирларига боғлиқ бўлмаганидан улар турлича ўлчов бирлигида (масалан м, радиан, м ва х.к.) бўлиши мумкин. Умумлашган координаталардан вақт бўйича олинган ҳосилалар умумлашган тезликлар дейилади. Умумлашган тезликларни $q_1, q_2, \dots, q_n$ билан белгилаймиз.

$$q_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad q_2 = \frac{dq_2}{dt}, \dots, q_n = \frac{dq_n}{dt}$$

Умумлашган тезликнинг ўлчов бирлиги умумлашган координата ўлчов бирлигининг вақт бирлигига нисбати билан ифодаланади. Масалан q координата «м» да ўлчанганда $\dot{q} = \frac{m}{c}$ да, q учун радиан олинганда $\dot{q} = \frac{rad}{c} = c^{-1}$ га ўлчанади.

Система ихтиерий нуқтасининг бирор санок системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_i$ координаталарини (x_i, y_i, z_i) десак, ҳар бир q_i умумлашган координатани улар орқали ифодалаш мумкин.

$$\vec{r}_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларини қуйидагича ифодалай оламиз:

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (361)$$

(356)-ифодадаги δq_j ($j = 1, 2, 3, \dots, k$) мумкин бўлган кўчишларнинг умумлашган координаталари орқали ифодаларидан иборат.

109-§. УМУМЛАШГАН КУЧЛАР ВА УЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Эркинлик даражаси k бўлган n та моддий нуқтадан ташкил топган голоном механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_k$ умумлашган координаталар орқали аниқлансин. Система нуқталарига мос равишда таъсир этувчи кучларни $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ билан белгилайлик. Система нуқталарининг радиус векторларини $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ десак бу кучлар мумкин бўлган ишларининг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$\delta l = \sum_{i=1}^n F_i \delta r_i$$

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \text{ шунга кўра}$$

$$\delta l = \sum_{i=1}^n F_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^k \left(F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Қуйидагича белгилани киритайлик

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \text{ у ҳолда:}$$

$$\delta l = \sum Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k;$$

Q_j кагталikka q_j умумлашган координатата мос келувчи умумлашган куч дейлади.

$$Q_j = \sum \left(F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + F_2 \frac{\partial y_1}{\partial q_j} + F_3 \frac{\partial z_1}{\partial q_j} + \dots \right)$$

Ихтиёрий q_i умумлашган координатата мос келувчи Q_j умумлашган кучни ҳисоблани учун

$$Q_j = \frac{\delta l}{\delta q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

формула ҳосил қилинади.

110-§. ЛАГРАНЖНИНГ ИККИНЧИ ХИЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Эркинлик даражаси n га тенг голономли идеал боғлашшидаги механик система ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координата орқали аниқлансин.

Бу тенгламаларни келтириб чиқариш учун динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum (F_i - m_i \ddot{a}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (362)$$

$$\text{ёки} \quad \sum F_i \delta r_i = \sum m_i \ddot{a}_i \delta r_i$$

(362)-тенгламани умумлашган координаталар орқали ифодалаймиз (362)-формулага мувофиқ

$$\sum F_i \delta r_i = \sum Q_j \delta q_j.$$

Энди (362)-тенгликнинг ўнг томонини умумлашган координаталар орқали ифодалаймиз:

$$\sum m_i \ddot{a}_i \delta r_i = \sum m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \cdot \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum \left(\sum m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \cdot \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Кавс ичидаги ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} - \sum m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (363)$$

Лагранжийинг айниятидан (362), (363) ва система кинетик энергиясининг таърифидан: қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} - \sum m_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned} \quad (364)$$

Шундай қилиб (364) муносабат қуйидаги кўринишга олади:

$$\sum m_i a_i \delta \vec{r}_i = \sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \delta q_i \quad (365)$$

(364)- ва (365)- формулалардан фойдаланиб динамиканинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum \left(Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \cdot \delta q_i = 0 \quad (366)$$

(366)-тенглама динамика умумий тенгламасининг умумлашган координаталаридаги ифодасидир. Бу тенгламада:

$$\sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \delta q_i$$

ҳад система нуқталарининг $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ қўйишдаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун (366) да барча умумлашган координаталарининг ортгирмалари $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ эркин бўлгани учун улар олдидаги ифодаларни айрим-айрим нолга тенглаш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги n та тенгламалар системасини оламиз:

$$\begin{aligned} Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (367)$$

(367)-тенгламалар Лагранжийинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламалар сонин системанинг эркинлик даражасига тенг бўлиб, системани таъкил этувчи нуқталар сонига боғлиқ бўлмайди.

Бу тенгламалар системанинг умумлашган координаталарига нисбатан иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалардир.

Уларни интеграллаб ва интеграллаш доимийларини ҳаракатнинг боғланган шартлари асосида аниқлаб, системанин умуумлашган координаталар орқали ифодаланган n та ҳаракат тенгламаларини оламиз:

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари аналитик механикада муҳим аҳамиятга эга ва кўпчилик техника масалаларини ечинда ундан самарали фойдаланилади. Лекин бу тенгламалар таркибда боғланган реакция кўчларини аниқлаш лозим бўлганда Даламбер принципиндан фойдаланиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Системани эркинлик даражаси деб нимага айтилади?
2. Қандай боғланганга идеал боғланган дейилади?
3. Системани мумкин бўлган кўчиши деб нимага айтилади?
4. Мумкин бўлган кўчиш принципи қандай таърифланади?
5. Динамиканин умуумий тенгламаси қандай ёзилади?
6. Умуумлашган координата нима?
7. Умуумлашган тезлик нима?
8. Умуумлашган куч нима? Унинг ўлчов бирлигини айтинг?
9. Умуумлашган куч қандай тартибда ҳисобланади?
10. Агар система потенциал бўлса, у ҳолда умуумлашган куч потенциал энергия орқали қандай ифода қилинади?
11. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини ёзинг?
12. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларининг сони нечта бўлади?

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. П. Шохандарова, Ш. Шозиётов, Ш. Зоиров. «Назарий механика», дарслик. Тошкент, 1991 йил.
2. Т. Р. Рашидов, Ш. Шозиётов, К. Б. Муминов. «Назарий механика асослари», дарслик. Тошкент, 1990 й.
3. С. К. Азизкориев, Янгуразов Ш. «Назарий механикадан масалалар ечини». Уқув қўлланма. Тошкент, 1980 й.
4. Д. И. Толибова. «Назарий механика (динамика)». Уқув қўлланма. Тошкент, 1987 й.
5. М. С. Яхёев, К. Б. Муминов. «Назарий механика» Тошкент, «Ўқитувчи», 1990 й.
6. Н. С. Бибутов, М. Муродов. «Амалий механика». Тошкент, «Ўзбекистон», 2002 й.
7. С. М. Тарг. «Краткий курс теоретической механики». Дарслик. Москва, 1986 й.
8. И. В. Мещерский. «Назарий механикадан масалалар йўлنامи». Уқув қўлланма. Тошкент, 1989 й.

М У Н Д А Р И Ж А

1. КИРИШ	5
2. Статика бўлими. Статиканинг асосий тушунчалари	7
3. Боғланишлар ва боғланиш реакциялари	13
4. Бир нуқтада кесинувчи кучлар системаси	20
5. Кучнинг ўқдаги проекцияси	24
6. Нуқтага нисбатан куч моменти	31
7. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси	42
8. Ферма ҳақида тушунча	55
9. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси. Ўқга нисбатан куч моменти	65
10. Кинематика бўлими. Нуқта кинематикаси	86
11. Табиий координаталар системаси.....	98
12. Қаттиқ жисм кинематикаси	102
13. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати	112
14. Тезликлар оний маркази	118
15. Нуқтанинг мураккаб ҳаракати	124
16. Динамика бўлими. Динамиканинг асосий тушунчалари	131
17. Нуқта динамикасининг биринчи масаласини ечиш.....	137
18. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенглама- лари. Кучирма ва Кориолис инерция кучлари	143
19. Нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати, тебраниш амплитудаси, фазаси, частотаси ва даври	145
20. Нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати. Резонанс ҳодисаси..	153
21. Механик система	156
22. Кучнинг элементар ва тула иши.....	164
23. Нуқта ва системанинг кинетик энергияси	171
24. Нуқта ва системанинг ҳаракат миқдори	176
25. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема ..	181
26. Марказга ва ўқга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти	183
27. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланишининг дифференциал тенгламаси	190
28. Боғланишлар. Боғланишлардаги моддий нуқтанинг ҳаракати..	198
29. Умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар	203
30. Фойдаланилган адабиётлар	208

Муродов Мустафо Муродович,
Иноятова Хаприйисо Мирхалидовна,
Уснатдинов Кенис Уснатдинович

«НАЗАРИЙ МЕХАНИКА»

Ушбу қўлланма Бухоро озиқ-овқат ва енгил саноат технологияси институтининг услубий кенгашида (8-сонли баёни, 27.03.2003 йил) ва Олий таълим вазирлигининг (43-сонли баёни, 26.03.2004 йил) Қарори асосида нашрга тавсия этилган. Қўлланма Олий ўқув юрглариининг профессионал таълим йўналишинида ўқиётган бакалаврларига мўлжалланган.

Такризчилар:

Тошкент Давлат Техника Университети,
«Назарий механика ва машина деталлари»,
кафедраси мудир, техника фанлари доктори,
профессор **Ш. А. Шообидов**,
Бухоро Давлат Университети техника
фанлари доктори, профессор **З. Жумаев**.

Масъул муҳаррир: доц. **З. Х. Ғайбуллаев**.

Саҳифаловчи: Б. Ахмедов.

Босишга рухсат этилди 8.10.2004. Бичими 84 x 108 $\frac{1}{32}$. Нашр табоғи 13,0. Босма табоғи 12,0. Адади 1000 нусха. Баҳоси келишилган нархда.

«Истиқлол» нашриёти, Тошкент ш. Навоий кўчаси, 30-уй.
Шартнома № Г- 41.