



СПЕЦИАЛЬНОСТЬ

**"АРХИТЕКТУРА"**

Ю.И. Короев

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Москва

---

Стройиздат 1987

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие  
Введение

## Часть первая. Ортогональные проекции

Глава 1. Точка, прямая линия и плоскость  
Глава 2. Способы преобразования проекций  
Глава 3. Многогранные поверхности  
Глава 4. Кривые линии  
Глава 5. Кривые поверхности  
Глава 6. Пересечение поверхностей  
Глава 7. Преобразования  
Глава 8. Формообразование кривых поверхностей и их применение в архитектуре

## Часть вторая. Тени в ортогональных проекциях

Глава 9. Теоретические основы построения теней  
Глава 10. Тени основных геометрических фигур  
Глава 11. Способы построения теней  
Глава 12. Тени архитектурных деталей и фрагментов  
Глава 13. Построение линий равной освещенности

## Часть третья. Аксионометрия

Глава 14. Общие сведения  
Глава 15. Построение аксионометрических изображений

## Часть четвертая. Перспектива

Глава 16. Основные понятия  
Глава 17. Способы построения перспективы  
Глава 18. Перспектива интерьера  
Глава 19. Перспектива деталей и архитектурных фрагментов  
Глава 20. Построение теней в перспективе  
Глава 21. Построение отражений  
Глава 22. Перспектива на наклонной поверхности  
Глава 23. Реконструкция архитектурных перспектив и приемы фотомонтажа в перспективе  
Глава 24. Построение широкоугольной перспективы  
Глава 25. Автоматизированное построение перспективных изображений

## Часть пятая. Проекция с числовыми отметками

Глава 26. Общие сведения  
Развитие начертательной геометрии (краткая историческая справка)  
Список литературы  
Приложения  
Предметный указатель

# DESCRIPTIVE GEOMETRY

## CONTENTS

### Part One. Orthographic Projections

- Chapter 1. Point, Straight Line and Plane
- Chapter 2. Methods of Projection Rectification
- Chapter 3. Polyhedral Surfaces
- Chapter 4. Curved Lines
- Chapter 5. Curved Surfaces
- Chapter 6. Intersection of Surfaces
- Chapter 7. Transformations
- Chapter 8. Shape Formation of Curved Surfaces and Their Application in Architecture

### Part Two. Shadows in Orthographic Projections

- Chapter 9. Theoretical Fundamentals of Shadow Construction
- Chapter 10. Shadows of Main Geometrical Figures
- Chapter 11. Methods of Shadow Construction
- Chapter 12. Shadows of Architectural Details and Fragments
- Chapter 13. Construction of Equal Illuminance Lines

### Part Three. Axonometry

- Chapter 14. General
- Chapter 15. Making Axonometric Drawings

### Part Four. Perspective

- Chapter 16. Basic Notions
- Chapter 17. Methods of Perspective Construction
- Chapter 18. Interior Perspective
- Chapter 19. Perspective of Details and Architectural Fragments
- Chapter 20. Construction of Shadows in Perspective
- Chapter 21. Construction of Reflections
- Chapter 22. Perspective in Inclined Plane
- Chapter 23. Reconstruction of Architectural Perspectives and Procedures of Composite Photograph in Perspective
- Chapter 24. Construction of Wide-Angle Perspective
- Chapter 25. Automated Construction of Perspectives

### Part Five. Projections with Numerical Marks

- Chapter 26. General

22.15

К.68

«Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать свои собственные мысли»

Профессор В. И. Курдюмов (1853–1904) – автор классического русского учебника по начертательной геометрии.





# СПЕЦИАЛЬНОСТЬ "АРХИТЕКТУРА"

---

## Редакционная коллегия:

АВДОТЬИН Л. Н.

АУРОВ В. В. (ответственный секретарь)

БАРХИН Б. Г.

БУГА П. Г.

ЕРМОЛОВ В. В.

ЗМЕУЛ С. Г.

КАСАТКИН В. А.

МУРАВЬЕВ Б. В.

ПОЛЯНСКИЙ А. Т.

ОРЕХОВА Н. И.

РЕВЯКИН П. П.

РЯБУШИН А. В.

СОКОЛОВ Ю. Н. (главный редактор)

СТЕПАНОВ А. В. (заместитель главного редактора)

ЯГУПОВ Б. А.

ЯРГИНА З. Н.

Ю.И. Короев

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебника  
для студентов архитектурных  
специальностей  
высших учебных заведений

Москва Стройиздат 1987

ББК 22.151.3  
К 66  
УДК 514.18 (075.8)

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор В. Е. МИХАЙЛЕНКО, зав. кафедрой Киевского инженерно-строительного института; кафедра основ архитектурного проектирования и графики Московского института инженеров землеустройства.

224486



К 66 **Короев Ю. И.**  
**Начертательная геометрия: Учеб. для вузов.—М.: Стройиздат, 1987.—319 с.: ил.**

Рассмотрены теоретические основы и практическое приложение методов изображений, которые применяются в процессе архитектурного проектирования. Особое внимание уделено вопросам геометрического формообразования и применения кривых и многогранных поверхностей — оболочек и покрытий большепролетных зданий. Излагаются способы построения широкоугольных перспективных изображений и приемы реконструкции перспективы и архитектурных фотоснимков в ортогональные проекции, а также способы перспективного фотомонтажа; дается краткое описание приемов кодирования и ввода в ЭВМ графической информации и автоматизированного построения перспективных изображений.

Для студентов архитектурных вузов и факультетов.

К 1702040000—430  
047 (01) — 87 101—87

ББК 22.151.3  
© Стройиздат, 1987

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание учебника соответствует программе курса начертательной геометрии для архитектурных специальностей, утвержденной Минвузом СССР.

В учебник включены все пять разделов курса, предусмотренных программой: ортогональные проекции, тени в ортогональных проекциях, аксонометрия, перспектива и проекции с числовыми отметками. При написании учебника был учтен большой опыт разработки научно-методических основ преподавания курса, приобретенный кафедрой начертательной геометрии МАрХИ. На основе обобщения этого опыта и систематизации учебного материала проведено некоторое сокращение объема книги по сравнению с другими изданиями. Вместе с тем в соответствии с новой программой курса материал учебника дополнен следующими новыми темами.

В первой части учебника большое внимание уделяется геометрическому конструированию и применению в архитектурной практике различных кривых поверхностей, поверхностей-оболочек и висячих покрытий, а также многогранных структур. Даются общие понятия о кривизне поверхностей.

Вторая часть учебника дополнена способом построения линий равной освещенности (изофот), что должно способствовать устранению некоторого разрыва между построением контуров теней и передачей градаций освещенности на всей изображаемой поверхности.

В третьей части помимо построения изображений в стандартных аксонометрических проекциях излагается способ построения аксонометрии по выбранному направлению проецирования.

Четвертая часть «Перспектива»

дополнена изложением способа реконструкции в ортогональные проекции перспективы и архитектурных фотоснимков на наклонной плоскости и способа перспективного фотомонтажа. Эти темы имеют особое значение для студентов, обучающихся по специализации «Реставрация памятников архитектуры». Кроме того, излагается способ построения широкоугольных архитектурных перспектив, который необходим прежде всего студентам, обучающимся по специализации «Архитектура интерьера».

В пятой части даются некоторые сведения по построению и изображению элементов вертикальной планировки городских территорий.

Поскольку при освоении студентами курса архитектурной графики и изучения дисциплин «Основы архитектурного проектирования» и «История архитектуры» используются фрагменты классических архитектурных форм, некоторая часть материала в учебнике представлена на аналогичных формах.

Учитывая широкое внедрение ЭВМ и автоматизированных средств графического отображения в архитектурное проектирование, в первом и четвертом разделах учебника даны краткие сведения о приемах кодирования и ввода в ЭВМ графической информации о кривых поверхностях, а также излагаются геометрические основы автоматизированного построения перспективных изображений.

Первая часть «Ортогональные проекции» является основой для изучения последующих частей, так как в ней кроме специфического материала изложены общие понятия, не зависящие от вида проекционных отображений.

Каждая глава учебника начинается с теоретических положений, затем из-

учаются геометрические приемы решения прикладных задач, а завершается глава разбором примеров из архитектурной практики.

В некоторых случаях, чтобы не усложнять изображений, обозначения геометрических элементов несколько упрощены — опущены индексы, штрихи, оси проекций и пр.

Для более детального ознакомления с некоторыми теоретическими положениями в учебнике даны ссылки (в квадратных скобках) на источники, которые приведены в списке литературы. В приложении приводятся учебные студенческие работы, иллюстрирующие отдельные положения, содержащиеся в учебнике.

В основу учебника положены лекции, прочитанные автором в Московском архитектурном институте.

В учебнике использован отечественный опыт в области создания учебной литературы для архитектурной специальности.

Начало созданию литературы этого профиля положил проф. А. И. Добряков. Его фундаментальный труд — «Курс начертательной геометрии» (1942), а также сборник задач к нему на протяжении двух десятков лет были основным учебным комплексом. Определенный вклад в расширение круга прикладных вопросов, излагаемых в курсе начертательной геометрии, внес-

ла доц. Е. С. Тимрот в учебном пособии «Начертательная геометрия» (1962). В нем уделено значительное место геометрическому конструированию многогранных и кривых поверхностей.

Наиболее полный по составу комплекс учебной литературы — учебник (1973), учебное пособие и сборник задач — был создан проф. А. Г. Климухиным.

При написании первого раздела учебника был также использован опыт изложения современных понятий о геометрических преобразованиях и приложениях теории к решению прикладных задач, содержащихся в учебниках для строительных специальностей профессоров Н. Л. Русскевича, И. Г. Виницкого и под редакцией профессора Н. Н. Крылова.

При подготовке учебника учтены советы и замечания профессоров Н. А. Соболева и А. Г. Климухина.

Автор приносит искреннюю благодарность рецензентам: проф. В. Е. Михайленко и кафедре Основ архитектурного проектирования и графики Московского института инженеров землеустройства за сделанные замечания и советы, которые способствовали улучшению содержания учебника. Автор благодарит также своих коллег — доц. Ю. Н. Орсю и старшего преподавателя П. Л. Виноградова за помощь в оформлении иллюстраций.

# ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве, обозначают прописными буквами латинского алфавита  $A, B, C, D, \dots$  или римскими цифрами I, II, III, ...

Ортогональные проекции точек – строчными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами:  $a, b, c, d, \dots$  или  $1, 2, 3, 4, \dots$  – на горизонтальной плоскости проекций;  $a', b', c', d', \dots, 1', 2', 3', 4', \dots$  – на фронтальной плоскости проекций.

2. Прямые линии в пространстве, задаваемые отрезками:  $AB, CD, EF, \dots$ ; проекции отрезков прямых линий:  $ab, a'b', cd, c'd', \dots; 1-2, 1'-2', \dots; 1-A, 1'-A', \dots$

3. Плоскости, расположенные в пространстве, – прописными буквами латинского алфавита:  $P, Q, R, S, T, \dots$  или  $ABC$ ; проекции отсеков плоскостей:  $abc, a'b'c', \dots$ ; плоскости проекций: горизонтальная –  $H$ , фронтальная –  $V$ , профильная –  $W$ ; плоскости, заданные следами:  $P_n; P_v; Q_n; Q_v, \dots$

4. Поверхности – прописными буквами греческого алфавита:  $\Gamma, \Pi, \Sigma, \Phi, \dots$

5. Углы – строчными буквами греческого алфавита:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ; символическими записями  $\angle ABC$ ; прямой угол – графическим обозначением на изображении  $\sphericalangle$  (обозначается дугой с точкой внутри).

6. Проекции теней от точек, прямых и плоскостей в ортогональных проекциях – строчными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами с подстрочным индексом, обозначающим плоскость проекций:  $a_n; b_v, c_n, \dots, 1_n, 2_v, 3_n, \dots$  или с подстрочным индексом, обозначающим тени на других поверхностях:  $a'_0, b'_0, \dots, 1'_0, 2'_0, 3'_0, \dots$

7. Аксонометрические и перспективные проекции точек, прямых и плоскостей – буквами, соответствующими натуре, с добавлением знака «штрих» или без него:  $A', A'B', A'B'C', \dots$ ; вторичные проекции точек, прямых и плоскостей – строчными буквами с добавлением знака «штрих» или без него:  $a', b', c', d', \dots, a'b', a'b'c', \dots$

8. Аксонометрические и перспективные проекции теней от точек, прямых и плоскостей – буквами, соответствующими натуре, с добавлением подстрочного индекса:  $A_0, B_0, C_0, \dots$  или индекса, обозначающего соответствующую плоскость проекций:  $A_n, B_n, C_v$ .

9. Основные операции: совпадение (тождественность) двух геометрических элементов –  $A \equiv B$ ;  $a' \equiv b'$ , ..., пересечение прямых, плоскостей – знаком  $\times$ ; параллельность прямых, плоскостей – знаком  $\parallel$ :  $AB \parallel CD$ .

# ВВЕДЕНИЕ

**Предмет начертательной геометрии.** Начертательная геометрия – раздел геометрии, в котором изучаются различные методы изображения пространственных форм на плоскости. Она является одной из основных дисциплин в профессиональной подготовке архитектора.

Важнейшее прикладное значение этой дисциплины состоит в том, что она учит владеть графическим языком архитектора – чертежом, учит выполнять и читать чертежи и другие изображения архитектурных проектов. Невозможно достаточно полно и детально представить себе предмет даже по самому подробному его описанию, однако это легко сделать, имея навыки в чтении проекционных чертежей объекта и пользуясь его наглядными изображениями.

Изучение начертательной геометрии способствует развитию пространственного воображения и умению мысленно создавать представления о форме и размерах объекта по его изображению на плоскости. Выполнение изображений представляет собой необходимую составную часть творческого процесса архитектурного проектирования. Изображение служит важнейшим средством, с помощью которого конкретизируется архитектурный замысел проектируемого объекта.

Принципиальное отличие методов изображения, изучаемых в курсе начертательной геометрии, от всех современных технических средств отображения (фотографии, киносъемки, голографии и др.), заключается в возможности с большой наглядностью и метрической достоверностью отобразить не только существующие предметы, но и возникающие в нашем представлении образы проектируемого объекта.

Процесс архитектурного проектиро-

вания сопровождается графической фиксацией проектируемого объекта на всех стадиях проектирования, начиная с эскизных набросков и проекционных чертежей и кончая разработкой рабочих чертежей, предназначенных для строительства. Детально разработанный проект позволяет осуществить строительство в точном соответствии с зафиксированным в чертежах замыслом.

Итак, в курсе начертательной геометрии изучаются:

1) методы изображения пространственных форм на плоскости;

2) способы графического решения различных геометрических задач, связанных с оригиналом;

3) способы преобразования и исследования геометрических свойств изображенного объекта;

4) приемы увеличения наглядности и визуальной достоверности изображений проектируемого объекта.

**Сущность метода проекций.** Одно из основных геометрических понятий – *отображение множеств*. В начертательной геометрии каждой точке трехмерного пространства ставится в соответствие определенная точка двумерного пространства – плоскости. Геометрическими элементами отображения служат точки, линии, поверхности пространства. Геометрическое пространство как точечное множество отображается на плоскость по закону *проецирования*. Результатом такого отображения является изображение объекта.

Различные способы изображения пространственных форм на плоскости, которые применяют при составлении чертежей и построении наглядных изображений, основаны на методе проекций.

Сущность этого метода следующая. В пространстве выбирают точку *S* – *центр проецирования* и *плоскость*

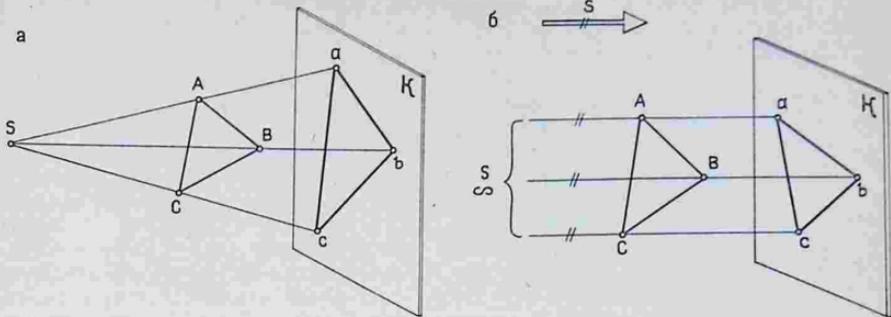


Рис. 1

проекций  $K$ , не совпадающую с точкой  $S$  (рис. 1, а). Проецирование<sup>1</sup>, т. е. получение изображения объекта, заключается в проведении через центр проекций  $S$  и каждую точку  $A, B, C, \dots$  изображаемого объекта прямых линий (лучей), называемых *проецирующими прямыми*. Множество прямых, проходящих через одну точку пространства, называют *связкой прямых*. Совокупность точек пересечения этих прямых с плоскостью проекций даст изображение (проекцию), которое называют *центральной проекцией объекта*.

Центральное проецирование есть наиболее общий случай проецирования геометрических форм на плоскости. Основными и неизменными его свойствами (инвариантами) являются следующие:

- 1) проекция точки – точка;
- 2) проекция прямой – прямая;
- 3) если точка принадлежит прямой,

то проекция этой точки принадлежит проекции прямой.

Частный случай центрального проецирования – *параллельное проецирование*, когда центр проецирования удален в бесконечность, при этом проецирующие прямые становятся параллельными между собой. Положение проецирующих прямых относительно плоскости проекций определяется *направлением проецирования  $S$*  (рис. 1, б). В этом случае полученное изображение называют

*параллельной проекцией предмета*.

Параллельные проекции подразделяются на *прямоугольные*, когда проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций, и *косугольные*, когда направление проецирования образует с плоскостью проекций угол, не равный прямому.

При построении проекций объекта не обязательно проецировать все его точки. Достаточно построить проекции некоторых опорных, характерных точек, которые однозначно определяют форму предмета на изображении. Так, для построения проекции треугольника (см. рис. 1) следует построить проекции трех его вершин.

При параллельном проецировании сохраняются свойства центрального проецирования и добавляются следующие:

4) проекции параллельных прямых параллельны между собой;

5) отношение отрезков прямой равно отношению их проекций;

6) отношение отрезков двух параллельных прямых равно отношению их проекций.

Рассмотрим специфические особенности основных видов проекционных изображений.

На рис. 2 даны три изображения параллелепипеда, построенные различными способами проецирования.

Первое изображение (рис. 2, а) выполнено в *центральной проекции* или *перспективе*. Оно обладает наилучшей наглядностью и наиболее верно пере-

<sup>1</sup> projectio (лат.) – бросить (вперед).

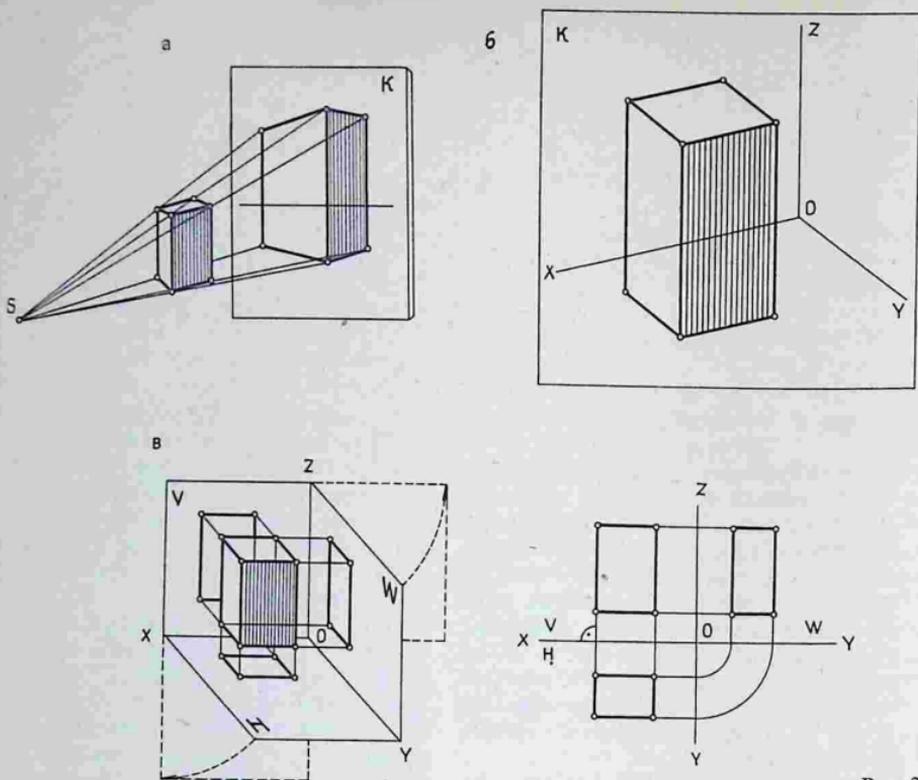


Рис. 2

дает те зрительные впечатления, которые получает наблюдатель, рассматривая предмет в натуре. Перспектива, как и фотография, передает не только общую форму предмета, но и отражает взаимное положение наблюдателя и предмета – поворот и удаление предмета относительно зрителя. Например, вертикальное ребро параллелепипеда, которое расположено ближе к наблюдателю, изобразилось большего размера, чем то, которое расположено дальше. Параллельные горизонтальные прямые изображаются в перспективе линиями, сходящимися в глубину, и т. д.

Однако по перспективному изображению сложно определить истинные размеры и форму предмета. Перспективные изображения внешнего вида здания и внутреннего вида помещений входят в состав демонстрационных материалов проекта.

Второе изображение (рис. 2, б) выполнено в *параллельной проекции – аксонометрии*. Оно не отличается такой наглядностью, как перспектива. Отсутствует перспективное уменьшение удаленных элементов, предмет рассматривается как бы издалека и только сверху или снизу. В аксонометрии невозможно, например, показать внутренний вид помещения, изобразив одновременно стены, пол и потолок. Вместе с тем аксонометрическое изображение дает представление о форме изображаемого предмета, кроме того, по нему легко определить основные размеры предмета.

Аксонометрические изображения применяются для более четкого показа сложных пространственных структур, а также конструкций проектируемого сооружения.

Третье изображение (рис. 2, в) так-

же выполнено в параллельной – *прямоугольной* или *ортогональной* проекции. От первых двух изображений оно отличается тем, что предмет проецируется не на одну плоскость проекций, а на две или три плоскости и таким образом, чтобы форма и основные размеры предмета не искажались. Плоскости проекций после проецирования совмещаются в одну.

По ортогональным проекциям легко определить размеры параллелепипеда, так как его грани изображаются в натуральную величину. Изображение в ортогональных проекциях на чертеже не обладает такой наглядностью, как перспективное или аксонометрическое. Чтобы составить представление об изображенном на чертеже предмете, нужно сопоставить две или три его проекции. Однако ортогональные проекции (чертежи) предмета обладают очень важным качеством: при наличии масштаба, размерных и других данных по чертежам можно воспроизвести изображенные предметы в точном соответствии с проектным замыслом.

Изучению закономерностей построения и свойств ортогональных проекций посвящен первый (основной) раздел учебника.

**Требования, предъявляемые к проекционным изображениям.** К проекционным изображениям в начертательной геометрии предъявляются следующие основные требования:

*обратимость* – восстановление оригинала по его проекционным изображениям (чертежу) – возможность определять форму и размеры объекта, его положение и связь с окружающей средой;

*наглядность* – изображение (перспектива, аксонометрия) должно создавать пространственное представление о форме предмета и о том, как будет выглядеть предмет в реальных условиях;

*точность* – графические операции, выполненные на чертеже, должны давать достаточно точные результаты;

*простота* – изображение должно быть простым по построению и должно допускать однозначное описание объекта в виде последовательности графических операций.

# Часть первая. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Операция проецирования дает возможность построить изображение объекта, т.е. решить прямую задачу. Однако по одной центральной или параллельной проекции объекта невозможно или сложно воспроизвести истинную форму и размеры оригинала. Поэтому чертёж объекта должен быть *обратимым*, а это значит, что каждая точка изображения должна определять единственную точку оригинала. Это условие выполняется ортогональным проецированием объекта на две или три плоскости проекций.

При изучении первых глав учебника

может сложиться впечатление, что излагаемый материал, оперирующий отвлеченными геометрическими элементами — точками, прямыми, плоскостями, далек от конкретных архитектурных форм. Однако это заключение ошибочно. Во-первых, с помощью этих элементов и их сочетаний могут быть сформированы самые различные архитектурные объекты и, во-вторых, для лучшего усвоения существа геометрических закономерностей, приемов и способов построения проекций объекты геометрических преобразований должны быть предельно просты.

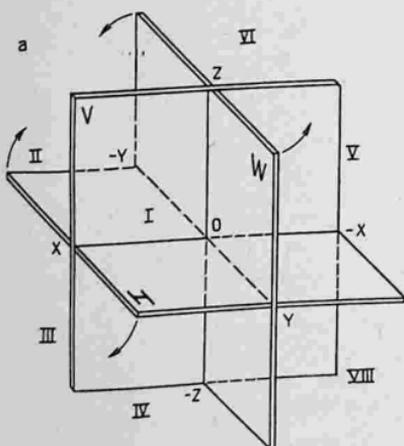
## Глава 1. Точка, прямая линия и плоскость

### 1. Ортогональная система двух и трех плоскостей проекций

Сущность метода ортогонального проецирования заключается в том, что объект проецируется на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций проецирующими прямыми, ортогональными (перпендикулярными) этим плоскостям.

Одну из плоскостей проекций  $H$  называют *горизонтальной*, вторую —  $V$  —

*фронтальной*, третью —  $W$  — *профильной* (рис. 3, а). Они разделяют пространство на восемь трехгранных углов, называемых *октантами*, которые нумеруются в порядке, указанном на рисунке. Линии пересечения плоскостей проекций называются *осями проекций*, или *координатными осями* и обозначают  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . После проецирования объекта плоскости  $H$ ,  $V$  и  $W$  совмещаются в одну плоскость вращением вокруг осей проекций. Полученную систему ортого-



6

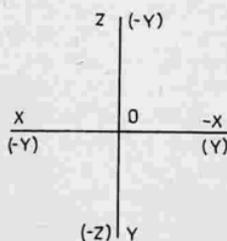


Рис. 3

Рис. 4 ▶

Рис. 5 ▶

нальных проекций называют *эпором*<sup>1</sup>. Плоскости проекций условно приняты ограниченными и непрозрачными, после совмещения их границы не показывают (рис. 3, б).

## 2. Точка

Ортогональной проекцией точки на плоскости проекции называют основную перпендикулярную, опущенного из данной точки на эту плоскость (рис. 4, а). Ортогональные проекции точки  $A$  называют:  $a$  – горизонтальной проекцией точки  $A$ ;  $a'$  – фронтальной проекцией;  $a''$  – профильной.

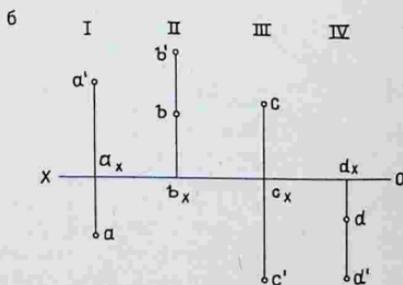
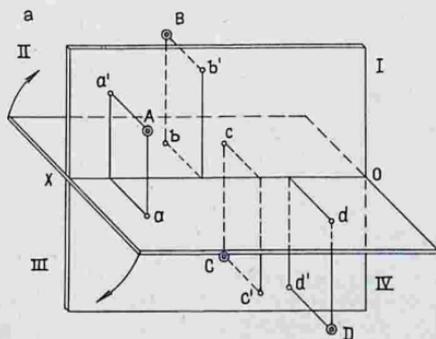
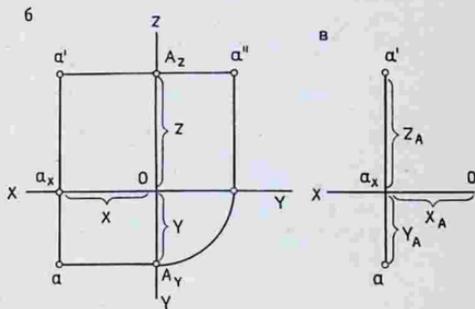
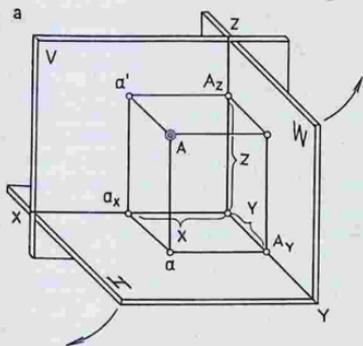
В трехмерном пространстве положение точки определяют с помощью прямоугольных (декартовых) координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Координату  $x$  называют *абсциссой*,  $y$  – *ординатой*,  $z$  – *апplikатой*.

Горизонтальная проекция точки  $A$  определяется на эпюре ее координатами  $x_A$  и  $y_A$ , а фронтальная – координатами  $x_A$  и  $z_A$ .

Прямые линии, соединяющие проекции точки и перпендикулярные осям проекций, называют *линиями проекционной связи* (рис. 4, б). Таким образом, двумя проекциями точки, что равносильно ее заданию тремя координатами, положение точки в пространстве определяется однозначно (рис. 4, в). Поскольку две проекции точки определяют ее положение в пространстве, то по двум проекциям можно построить третью ее проекцию – профильную. Третья проекция оказывается необходимой в тех случаях, когда проекционный чертеж объекта сложен и требуются дополнительные данные для прочтения формы объекта.

Если профильная плоскость проекций  $W$  не используется, плоскости  $H$  и  $V$

<sup>1</sup> épore (франц.) – чертёж.



разделяют пространство на четыре двугранных угла – *четверти* (рис. 5, а). Оси проекций разделяют плоскости проекций на две полуплоскости.

Положение проекций точек на эюре (рис. 5, б) зависит от того, в какой четверти пространства расположена точка. Точка  $B$  расположена во второй четверти, ее проекции на эюре находятся над осью  $x$ . Горизонтальная проекция точки  $C$ , расположенной в третьей четверти, после совмещения плоскостей окажется над осью, а фронтальная проекция – ниже оси. Обе проекции точки  $D$ , расположенной в четвертой четверти, находятся ниже оси  $x$ . Две проекции точки могут совпадать (во второй и четвертой четвертях) или находиться на одинаковом расстоянии от оси проекций (в первой и третьей четвертях), если их координаты одинаковы.

### 3. Прямая линия

Положение прямой в пространстве определяется двумя ее точками. Прямая линия на эюре задается двумя проекциями.

**Прямая общего положения.** Прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой *общего положения*. На эюре (рис. 6) эта прямая задана проекциями двух ее точек  $A$  и  $B$ . Соединяя прямыми одноименные проекции этих точек, получим проекции отрезка прямой.

**Прямые частного положения.** В отличие от прямых общего положения прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*. Прямые, параллельные плоскости проекций, называют *линиями уровня* (рис. 7). Прямая  $AB$ , параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонталью*. Она проецируется на эту плоскость проекций в натуральную величину. Аппликаты ее точек (высоты) одинаковы, поэтому фронтальная проекция параллельна оси  $x$ .

Прямая  $CD$ , параллельная фронтальной плоскости, называется *фронталью* (ее ординаты одинаковы), а прямая  $EF$ , параллельная профильной плоскости проекции, называется *профильной* прямой. У профильной прямой проекции совпадают с направлением линий связи, поэтому дана профильная ее проекция.

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются *проецирующими* (рис. 8). Прямая  $AB$ , перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в точку и называется *горизонтально проецирующей*. Прямая  $CD$ , перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально проецирующей*. Прямая  $EF$  называется *профильно проецирующей*.

**Определение длины отрезка прямой.**

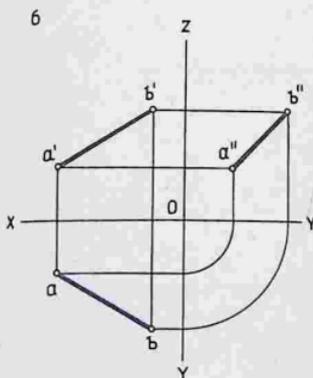
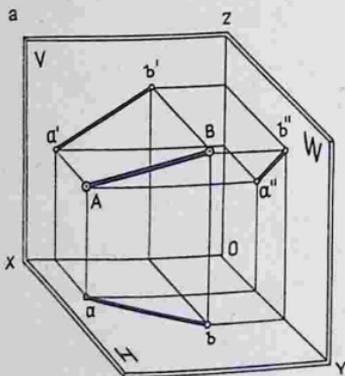


Рис. 6

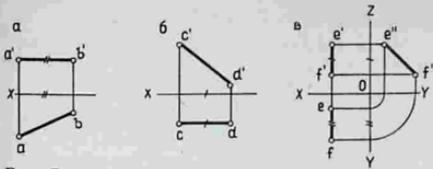


Рис. 7

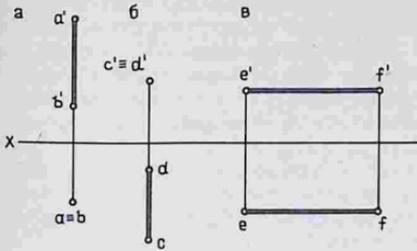
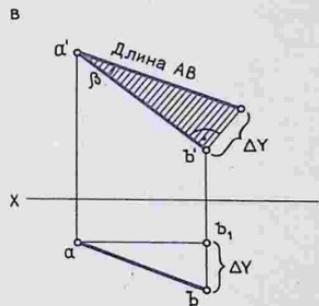
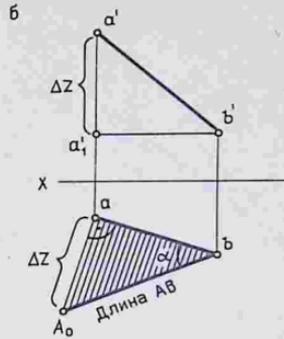
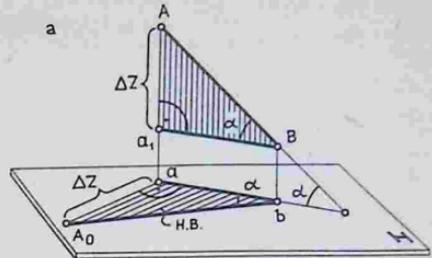


Рис. 8 Рис. 9

Ортогональные проекции отрезка прямой общего положения всегда меньше длины самого отрезка. Длину отрезка прямой можно определить по двум его проекциям из прямоугольного треугольника  $ABa_1$  (рис. 9, а, б), в котором одним катетом является горизонтальная проекция  $ab$  отрезка, а другим катетом — разность координат его концов ( $\Delta z$ ), взятая из другой проекции. Гипотенуза прямоугольного треугольника  $A_0b$  есть длина отрезка. Угол  $\alpha$  в этом треугольнике определяет угол наклона прямой к плоскости  $H$ . Длину отрезка прямой можно определить аналогичным образом, построив прямоугольный треугольник на фронтальной проекции отрезка (рис. 9, в). Угол  $\beta$  в этом треугольнике определяет наклон прямой к плоскости  $V$ .

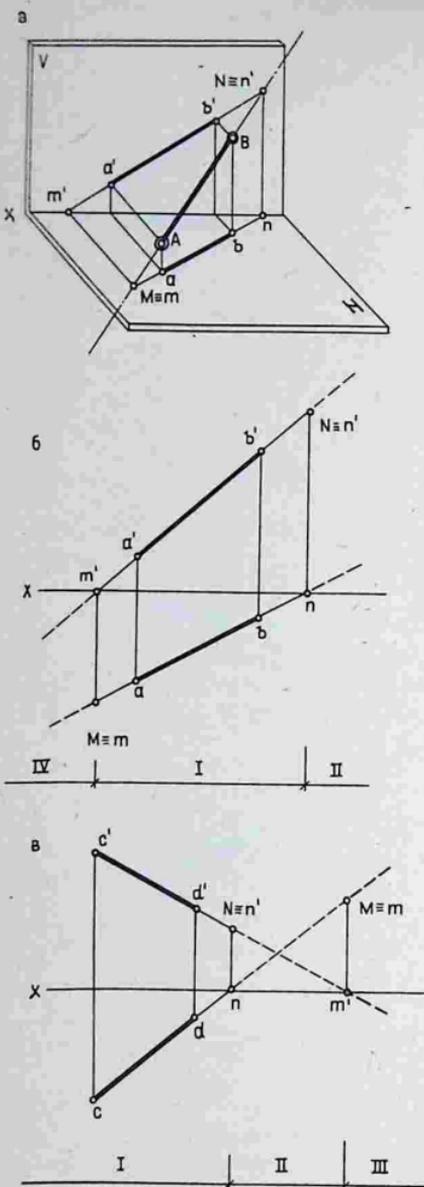
**Следы прямой линии.** Следы прямой называются точки пересечения прямой с плоскостями проекций (рис. 10, а):  $M(m; m')$  — горизонтальный след прямой;  $N(n; n')$  — фронтальный след. На рис. 10, б дан эюпор прямой  $AB$ , а также горизонтальный и фронтальный следы прямой.

Для определения на эюпоре горизонтального следа прямой необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью  $Ox$  и в этой точке



восстановить перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой. Фронтальный след прямой определяют аналогичным образом.

Следы прямой строятся как точки пересечения прямой со своими проекциями, поэтому каждый след совпадает со своей одноименной проекцией. Следы прямой являются точками, в ко-



торых прямая переходит из одной четверти в другую. Так, прямая  $AB$  (рис. 10, а, б) проходит через I, II и IV четверти пространства. Прямая  $CD$  (рис. 10, в) — через I, II и III четверти.

Видимой частью прямой будет та ее часть, которая расположена в первой четверти.

#### 4. Взаимное положение прямых

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися. Они изображаются на эпюре следующим образом.

**Параллельные прямые.** Одноименные проекции параллельных прямых параллельны (рис. 11). Исключением является случай, когда одноименные горизонтальные и фронтальные проекции профильных прямых параллельны. Для оценки их взаимного положения необходимо обратиться к третьей, профильной проекции.

**Пересекающиеся прямые.** Одноименные проекции пересекающихся прямых пересекаются, и точки их пересечения находятся на одной линии связи (рис. 12). Если две прямые пересекаются под прямым углом, то в общем случае их проекции образуют угол, не равный  $90^\circ$ . Прямой угол проецируется в истинную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций (рис. 13).

**Скрещивающиеся прямые.** Одноименные проекции скрещивающихся прямых могут пересекаться, но точки их пересечения не лежат на одной линии связи (рис. 14). Точкам пересечения одноименных проекций скрещиваю-

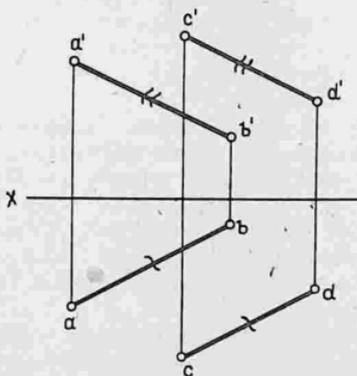


Рис. 10 Рис. 11



ложена ближе к зрителю и будет видимой при взгляде спереди.

Точки скрещивающихся прямых, лежащие попарно на проецирующих прямых, называются *конкурирующими*. Таким образом, рассмотрение на эмпоре взаиморасположения конкурирующих точек дает возможность определить видимость скрещивающихся прямых, если они, например, являются ребрами многогранника. Видимость того или иного элемента объекта решается при этом для каждой проекции в отдельности.

### 5. Плоскость

Положение плоскости в пространстве можно определить: тремя точками, не лежащими на одной прямой, прямой и точкой вне ее, двумя параллельными или пересекающимися прямыми, любой плоской фигурой. Вполне очевидно, что каждый последующий вид задания плоскости может быть получен из предыдущего.

Плоскость может быть также задана следами, что удобно при построении теней и перспективы (рис. 15). *Следами плоскости* называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций. В общем случае плоскость имеет три следа: горизонтальный  $P_H$ , фронтальный  $P_V$  и профильный  $P_W$ . Следы плоскости пересекаются попарно на осях в точках  $P_X$ ,  $P_Y$  и  $P_Z$ , которые называются *точками схода следов* плоскости. Треугольник, образованный следами плоскости, называется *треугольником следов*.

В зависимости от того, какое положение занимают плоскости относительно плоскостей проекций, можно выделить:

- 1) *плоскости общего положения* – не перпендикулярные и не параллельные плоскостям проекций (см. рис. 15);
- 2) *плоскости проецирующие* – перпендикулярные плоскостям проекций;
- 3) *плоскости уровня* – проецирующие плоскости, параллельные плоскостям проекций.

Плоскости уровня и проецирующие плоскости в отличие от плоскости общего положения называются *плоскостями частного положения*.

**Плоскости частного положения.** На рис. 16 изображена *горизонтально проецирующая* плоскость, заданная следами  $P_H$ ,  $P_V$  и треугольником  $ABC$ . Горизонтальная проекция плоскости представляет собой прямую, совпадающую с горизонтальным следом плоскости. Горизонтальные проекции точек и фигур, лежащих в этих плоскостях, совпадают с горизонтальным следом  $P_H$ .

Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально проецирующей* (рис. 17). Фронтальная проекция треугольника  $ABC$ , принадлежащего плоскости  $Q$ , совпадает с фронтальным следом. Угол  $\alpha$  между плоскостями  $Q$  и  $H$  проецируется без искажения.

На рис. 18 изображены *плоскости уровня*, параллельные плоскостям проекций: горизонтальная, фронтальная и профильная.

Решение многих задач в начертательной геометрии выполняется без

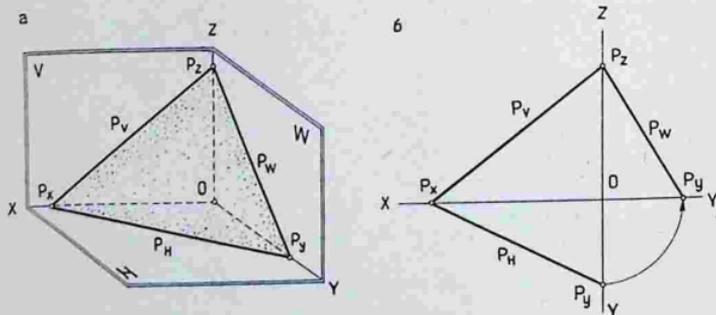


Рис. 15

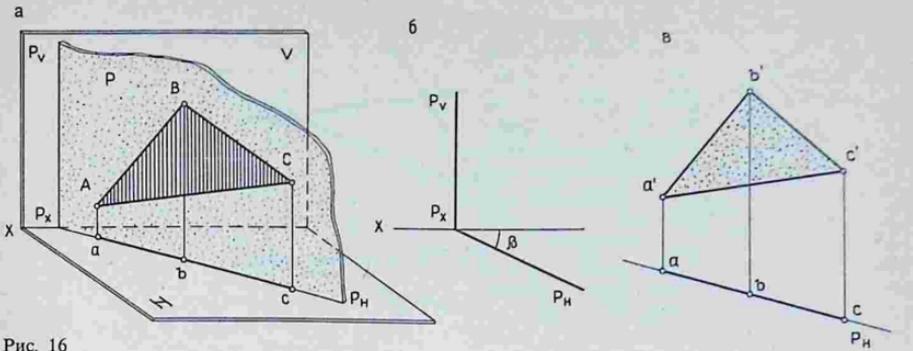


Рис. 16

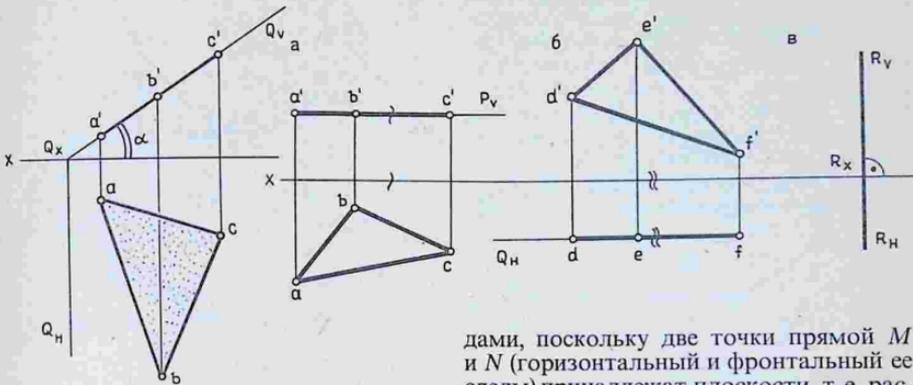


Рис. 17

Рис. 18

установления метрической связи изображаемого объекта с плоскостями проекций. Поэтому довольно часто нет необходимости в указании на эпюре положения осей проекций, что упрощает проекционные изображения. В этих случаях применяют так называемую *безосную систему* изображения (см. рис. 16, в и далее — рис. 19, б; 20, б; 21, б; 24, а и др.).

#### б. Прямые и точки, лежащие в плоскости

*Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат данной плоскости.* Прямая  $MN$  (рис. 19, а) расположена в плоскости  $P$ , заданной сле-

дами, поскольку две точки прямой  $M$  и  $N$  (горизонтальный и фронтальный ее следы) принадлежат плоскости, т. е. расположены на ее следах. Прямая  $l-2$  (рис. 19, б) принадлежит плоскости, заданной пересекающимися прямыми, поскольку имеет с нею две общие точки.

*Точка принадлежит плоскости, если она расположена на прямой, принадлежащей данной плоскости.* Для того чтобы построить в плоскости точку (рис. 19), необходимо провести в плоскости прямую, принадлежащую плоскости, а затем задать на ней точку  $E$ , которая принадлежит прямой и, следовательно, плоскости.

**Главные линии плоскости.** Среди множества прямых, которые могут быть проведены в плоскости, следует выделить главные линии плоскости:

1. **Горизонтали** — прямые, принадлежащие плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (рис. 20). Фронтальная проекция гори-

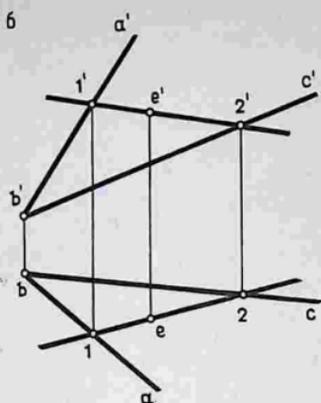
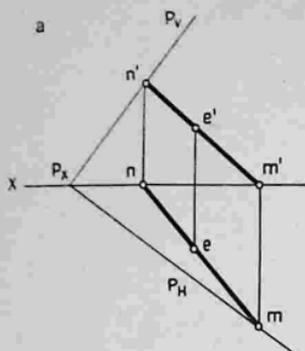


Рис. 19

Рис. 20

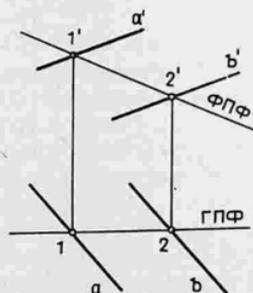
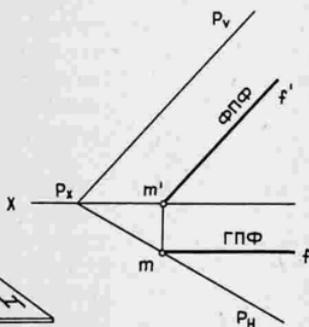
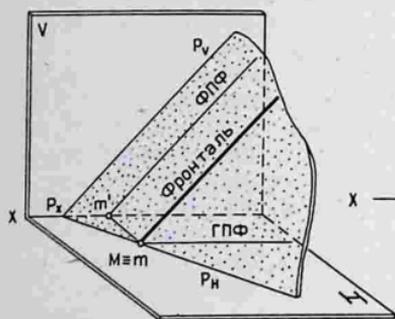
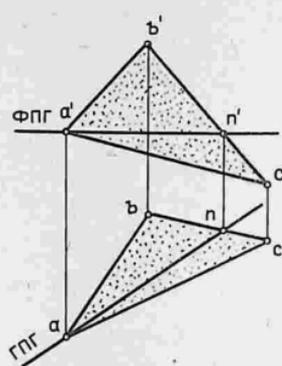
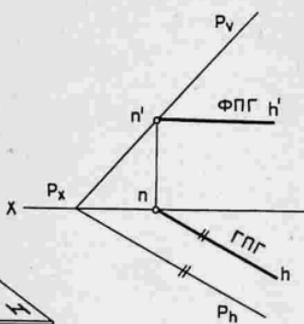
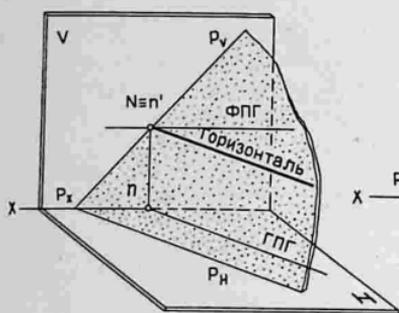


Рис. 21

зонталы как прямой, параллельной плоскости  $H$ , горизонтальна.

2. Фронталы — прямые, принадлежащие плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекции (рис. 21).

Горизонтальная проекция фронталы горизонтальна (перпендикулярна линиям связи).

3. Линии наибольшего ската (наклона) — прямые, принадлежащие данной

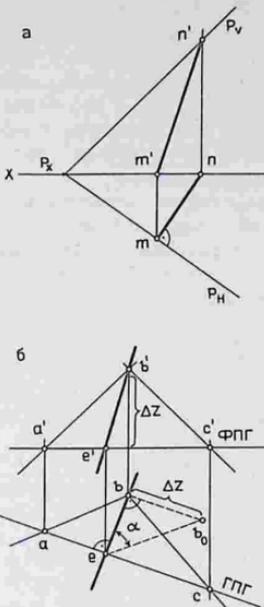


Рис. 22

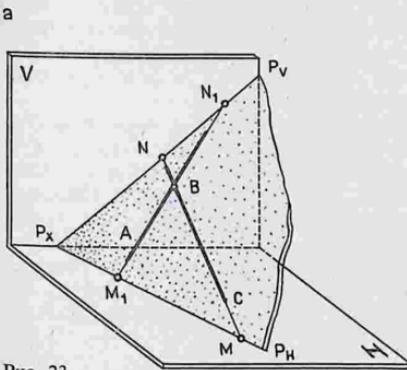


Рис. 23

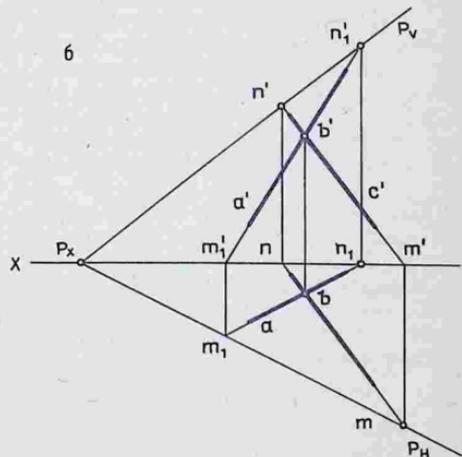
плоскости и перпендикулярные горизонталям (рис. 22) или фронталам плоскости. Линии ската  $NM$  и  $BE$  определяют угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций. Эта задача решается построением на горизонтальной проекции отрезка прямой  $be$  (рис. 22, б) прямоугольного треугольника, вторым катетом которого служит разность аппликат концов отрезка.

Угол  $\alpha$  есть угол наклона плоскости  $ABC$  к плоскости  $H$ .

Следует отметить, что следы плоскости также являются главными линиями плоскости — горизонталью и фронталью, совмещенными с плоскостями проекций. Главные линии плоскости в качестве вспомогательных прямых облегчают решение ряда задач.

**Построение следов плоскости.** Каждый след плоскости представляет собой прямую линию, для построения которой необходимо определить две ее точки (одной из них может служить точка схода следов на оси проекций). Если известно направление следа плоскости, достаточно построить одну точку, принадлежащую искомому следу.

На рис. 23 показано построение следов плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми. Горизонтальный след плоскости определен построением горизонтальных следов  $M$  и  $M_1$  прямых. Фронтальный след плоскости



можно построить с помощью определения одного фронтального следа прямой, поскольку второй точкой искомого следа может служить точка схода следов  $P_x$ .

### 7. Взаимное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекающимися. Частным случаем пересекающихся плоскостей являются взаимно перпендикулярные плоскости.

**Параллельные плоскости.** Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 24, а). Если параллельные плоскости заданы на эюре следами, то одноименные следы этих плоскостей должны быть параллельными (рис. 24, б).

**Пересекающиеся плоскости.** Построение линии пересечения плоскостей — одна из основных задач начертательной геометрии. Она относится к так называемым позиционным задачам.

Позиционными называют задачи на определение общих элементов различных сопрягаемых геометрических форм. К ним относятся задачи на принадлежность геометрических элементов и на пересечение геометрических объектов, например, пересечение прямой и плоскости с поверхностью и, в частности, задача на пересечение двух плоскостей.

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Поэтому для построения линии пересечения плоскостей необходимо определить две точки этой прямой.

Рассмотрим частный случай пересечения плоскостей, когда одна из них — проецирующая.

На рис. 25, а приведены плоскость общего положения  $P$  и горизонтально проецирующая плоскость  $S$ . Двумя общими точками, принадлежащими обеим плоскостям, являются точки пересечения  $M$  и  $N$  одноименных следов этих плоскостей, которые и определяют линию пересечения.

Однако линия пересечения плоскостей может быть определена и другим образом. Если одна из пересекающихся плоскостей проецирующая, то одна из проекций линии пересечения совпадает с ее проецирующим следом. Горизонтальная проекция  $mn$  линии пересечения заданных плоскостей лежит на горизонтальном следе  $S_H$  горизонтально проецирующей плоскости  $S$ . Фронтальная проекция линии пересечения определяется линиями связи.

На рис. 25, б показаны плоскость общего положения, заданная треугольником  $ABC$ , и фронтально проецирующая плоскость  $S$ . На фронтальной проекции в пересечении проецирующего следа плоскости  $S_V$  со сторонами треугольника получим две общие точки  $1'$  и  $2'$  и фронтальную проекцию линии пересечения плоскостей. Горизонтальная проекция определяется с помощью проведения линии связи.

Рассмотрим общий случай пересечения, когда обе плоскости — общего положения. На рис. 26 приведены две плоскости, заданные следами. Общими точками плоскостей являются точки пересечения  $M$  и  $N$  одноименных следов. Соединяя одноименные проекции этих точек прямой линией, получим проекции линии пересечения плоскостей.

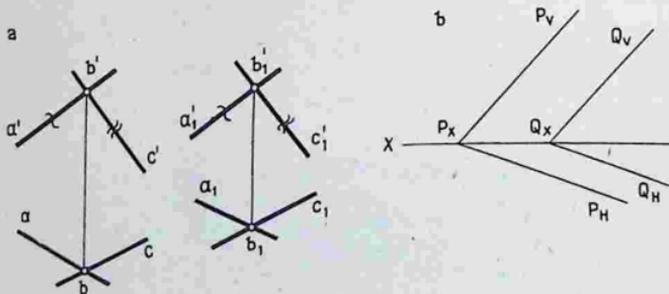
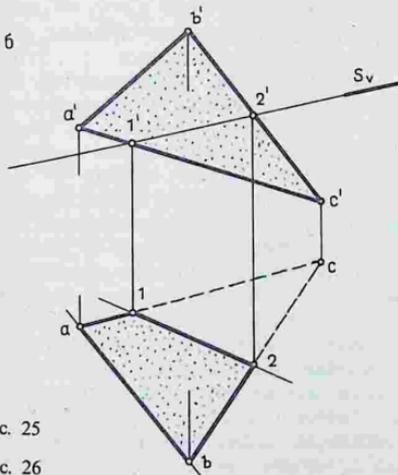
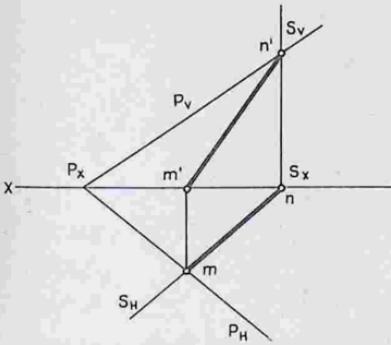
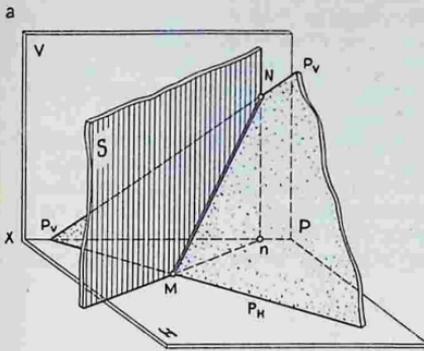


Рис. 24



Если точки пересечения одноименных следов находятся вне поля чертежа, а также в тех случаях, когда плоскости заданы не следами, а другими геометрическими элементами, то для определения линии пересечения плоскостей следует использовать *вспомогательные плоскости уровня* — горизонтальные или фронтальные.

На рис. 27 показаны две плоскости общего положения, заданные треугольником и двумя параллельными прямыми. Для определения двух общих точек линии пересечения плоскостей проводим две вспомогательные (горизонтальные) плоскости уровня  $S$  и  $T$ . Вспомогательная плоскость  $S$  пересекает заданные плоскости по двум горизонталям  $h_1$ , которые в своем пересечении определяют точку  $I$ , общую для плоскостей  $P$  и  $Q$ , так как они одновременно принадлежат вспомогательной секущей плоскости  $S$ . Вторая вспомогательная

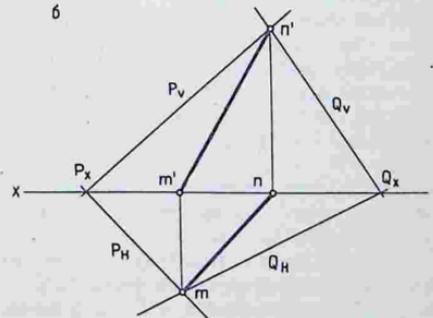
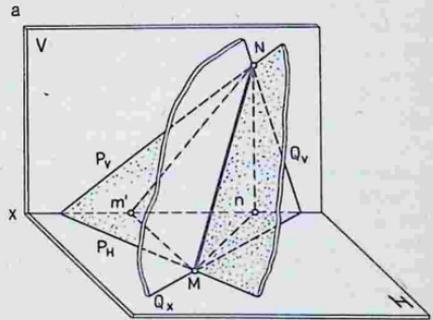
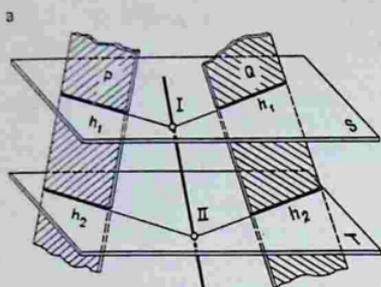


Рис. 25

Рис. 26



быть параллельной плоскости или пересекать ее. При пересечении прямой линии с плоскостью следует выделить частный случай, когда прямая перпендикулярна плоскости.

**Прямая линия, параллельная плоскости.** Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, принадлежащей этой плоскости (рис. 28). Поэтому, чтобы провести через заданную точку прямую, параллель-

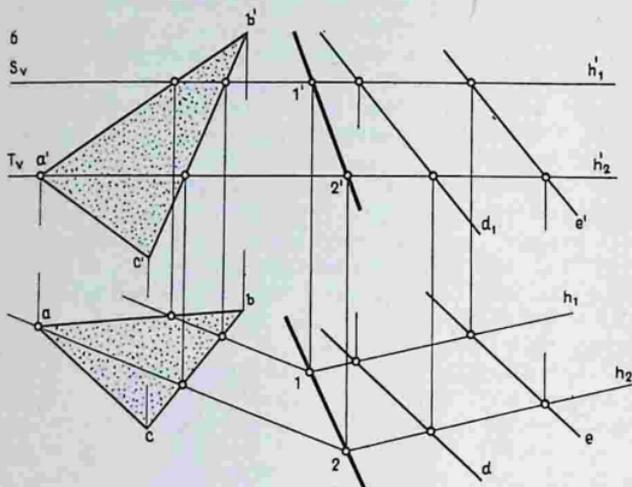


Рис. 27

Рис. 28 ▶

Рис. 29 ▶

плоскость  $T$  также пересекает каждую из заданных плоскостей по горизонталям  $h_2$ , которые параллельны первым двум горизонталям. В пересечении горизонталей получим вторую общую точку  $II$  заданных плоскостей. Соединяя на эюре одноименные проекции этих точек, получим проекции линии пересечения плоскостей.

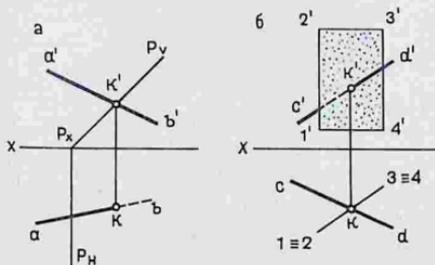
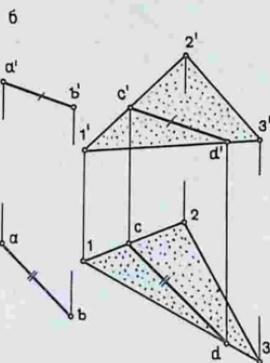
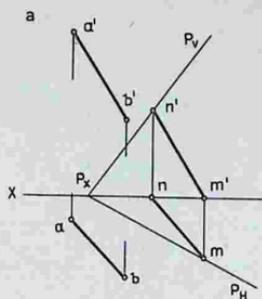
Необходимо отметить, что при построении линии пересечения плоскостей, заданных следами в предыдущей задаче (см. рис. 26), роль вспомогательных секущих плоскостей выполняют плоскости проекций  $H$  и  $V$ .

### 8. Взаимное положение прямой линии и плоскости

Прямая линия в пространстве может принадлежать плоскости (этот случай был рассмотрен ранее в § 6), а также

новую плоскости, надо сначала провести в плоскости произвольную прямую, а затем провести через точку искомую прямую, параллельную прямой, принадлежащей плоскости.

**Прямая линия, пересекающая плоскость.** Если прямая не принадлежит плоскости и не параллельна ей, то она пересекает данную плоскость. Задача на пересечение прямой линии с плоскостью является одной из основных задач начертательной геометрии. Она входит составной частью в решение самых различных задач по всем разделам курса. Решение задач на пересечение прямой и плоскости с поверхностью и взаимное пересечение поверхностей, построение теней в ортогональных проекциях, аксонометрии и перспективе практически сводится к определению точки пересечения прямой с плоскостью или поверхностью.



При решении задач на пересечение прямой с плоскостью следует выделить частный случай. Если плоскость занимает *проецирующее положение*, то одна проекция точки пересечения определяется в пересечении проекции прямой с проецирующим следом плоскости, а другая проекция строится с помощью линии связи (рис. 29).

Если заданная плоскость *общего положения*, точка пересечения прямой

с плоскостью определяется с помощью вспомогательной секущей плоскости.

Для построения точки пересечения прямой с плоскостью необходимо (рис. 30):

- 1) провести через прямую  $DE$  вспомогательную проецирующую плоскость  $S$ ;
- 2) построить линию  $MN$  пересечения данной плоскости и вспомогательной;
- 3) определить искомую точку  $K$  пересечения данной прямой  $DE$  с линией пересечения плоскостей  $MN$ .

Решение задачи завершается определением видимых участков прямой. Видимость прямой относительно плоскости треугольника определяют путем разбора взаимоположения точек заданной прямой и сторон плоскости треугольника, совпадающих на проекциях, как было рассмотрено в § 4 и на рис. 14.

Задача на пересечение прямой с плоскостью решается аналогичным образом и в том случае, когда плоскость задана следами (рис. 31).

**Прямая линия, перпендикулярная плоскости.** Прямая перпендикулярна плоскости, если ее проекции перпендикулярны одноименным следам плоскости или соответствующим проекциям горизонтали и фронтали (рис. 32). На рис. 32, а показана прямая  $AB$ , перпендикулярная плоскости  $P$ , заданной следами. Проведем в плоскости  $P$  через точку  $B$  горизонталь. На основе правила проецирования прямого угла (см. рис. 13, § 4) угол, образованный перпендикуляром  $AB$  и горизонталью, будет проецироваться на плоскости  $H$  прямым ( $\angle abn = 90^\circ$ ). Аналогичный вывод можно сделать и в отношении фронтальной проекции перпендикуляра.

Для того чтобы построить прямую, перпендикулярную плоскости, заданной треугольником  $BCD$  (рис. 32, б), не следует строить следы плоскости. Необходимо сначала построить в плоскости горизонталь и фронталь, а затем провести проекции перпендикуляра под прямым углом к одноименным проекциям горизонтали и фронтали.

Таким образом, если прямая перпендикулярна двум пересекающимся

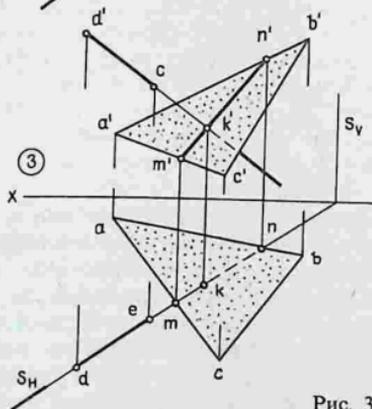
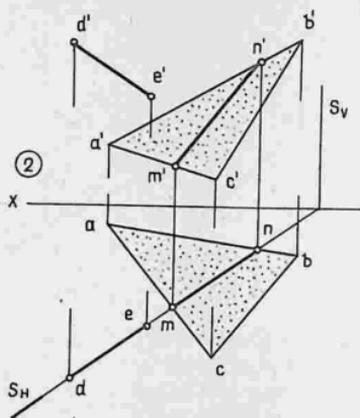
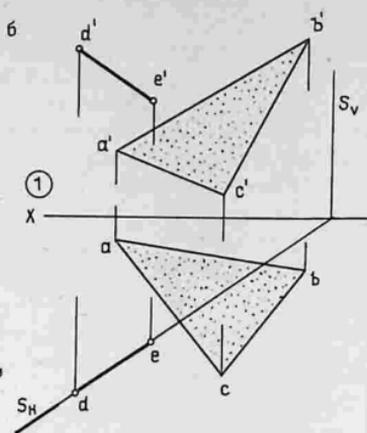
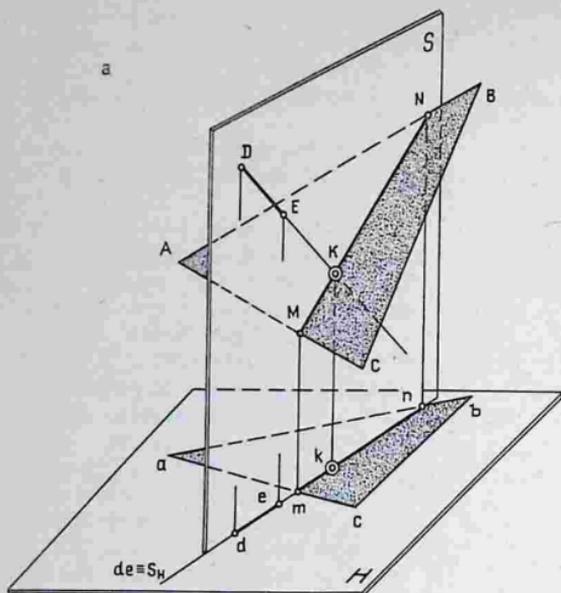


Рис. 30

Рис. 31 ▶

Рис. 32 ▶

прямым, принадлежащим плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

Приведенное положение дает возможность решать ряд задач и, в частности, опустить или восставить перпендикуляр к плоскости, решить обратную задачу – провести плоскость перпендикулярно прямой, определить расстояние от точки до плоскости.

Пусть требуется *определить расстояние от точки до плоскости*. Иными словами, необходимо определить длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

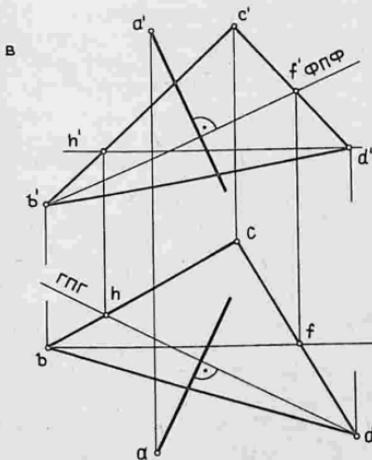
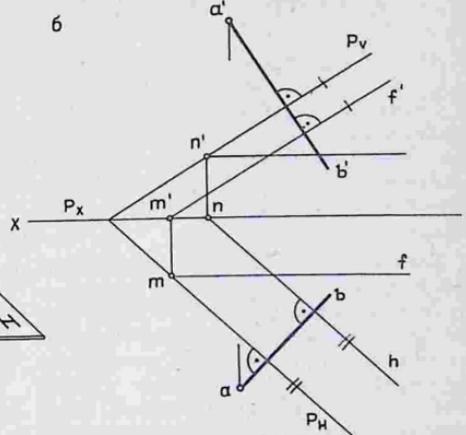
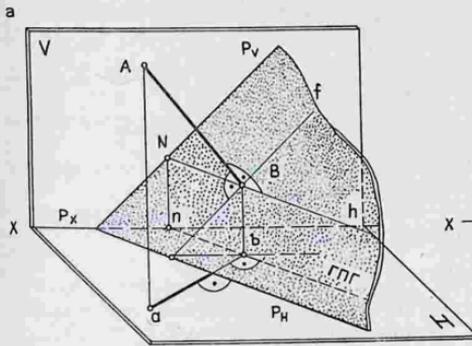
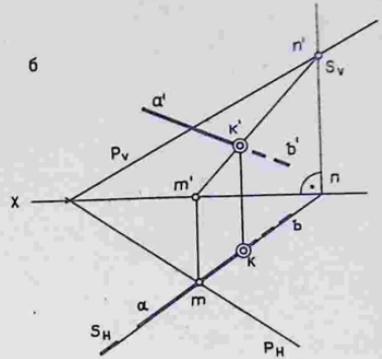
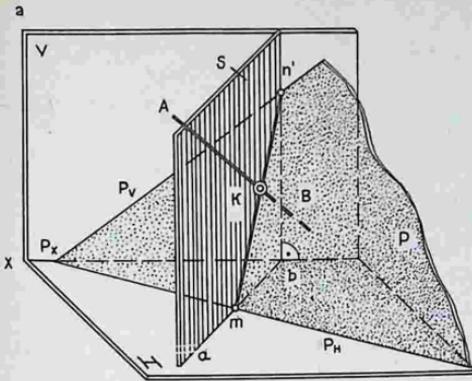
Задача решается в три этапа, каждый из которых представляет собой одну из рассмотренных ранее задач:

1) определить направление проекций перпендикуляра к плоскости (см. § 8, рис. 32);

2) построить точку пересечения прямой (перпендикуляра) с плоскостью (см. § 8, рис. 30);

3) определить длину перпендикуляра способом прямоугольного треугольника (см. § 3, рис. 9).

**Взаимно перпендикулярные плоскости.** Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через



прямую, перпендикулярную к другой. На рис. 33 проведена прямая  $AB$ , перпендикулярная плоскости, заданной в одном случае следами, а в другом — горизонтально и фронтально. Через прямую  $AB$  можно провести множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости. Следовательно, искомая плоскость, заданная пересекающимися прямыми  $AB$  и  $AC$ , будет перпендикулярна плоскостям  $P$  и  $HNF$ .

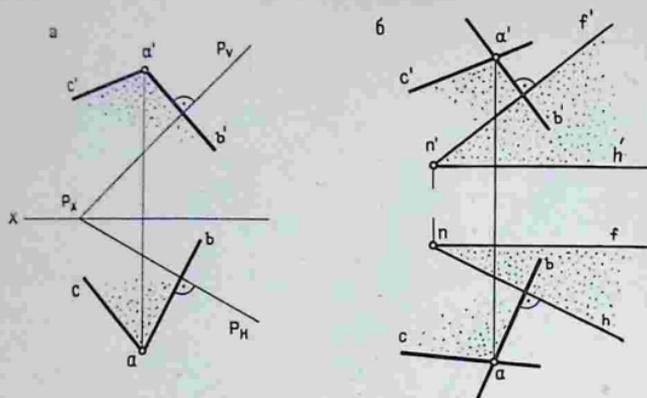


Рис. 33

Рис. 34

## Глава 2. Способы преобразования проекций

### 9. Характеристика способов

Способы преобразования проекций предназначены для решения *метрических задач*, связанных с определением действительных размеров и формы изображенных на эюре геометрических объектов.

Решение многих задач начертательной геометрии значительно упрощается, если заданные геометрические элементы занимают в пространстве частное положение, поэтому в основе способов преобразования проекций — переход от общего положения к частному, когда величина и форма объекта проецируются без искажения.

Основными преобразованиями являются такие, в результате которых прямая линия общего положения становится прямой уровня или проецирующей, плоскость общего положения преобразуется в проецирующую или плоскость уровня. При этом конечный результат преобразований должен давать решение поставленной задачи.

На рис. 34 приведены заключительные этапы преобразований, когда заданный геометрический элемент объекта проецируется без искажения и ответ на поставленную задачу становится очевидным:

$a$  — длина отрезка прямой и угол наклона;

$b$  — расстояние от точки до плоскости;

$v$  — натуральная величина и форма плоской фигуры;

$z$  — расстояние между скрещивающимися прямыми;

$d$  — двугранный угол;

$e$  — угол между прямой и плоскостью.

В первых двух случаях необходимо выполнить одно преобразование, а в остальных случаях — два преобразования. Эти преобразования можно выполнять различными способами.

Далее рассматриваются следующие способы преобразования проекций:

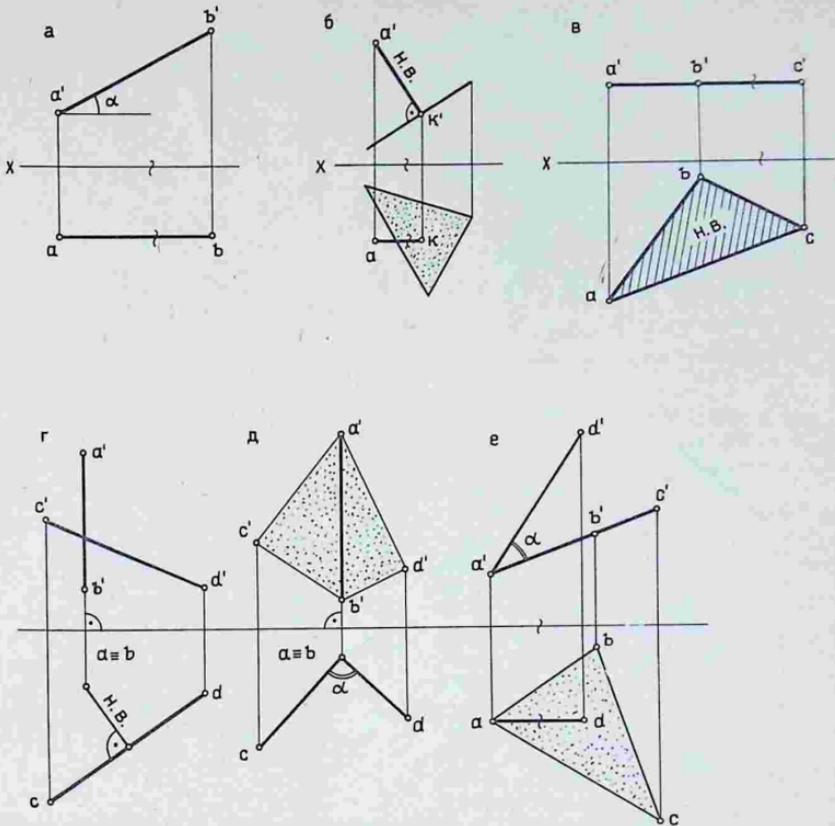
1) способ замены плоскостей проекций;

2) способ вращения;

3) способ косоугольного вспомогательного проецирования.

Новые проекции точек и осей проекций обозначают теми же буквами, но с цифровым индексом внизу, который определяет последовательность преобразований.

Первые два способа преобразования проекций применяют не только при решении метрических задач, но и *позиционных задач*, связанных с построением пересечений геометрических объектов.



### 10. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что при неизменном положении объекта в пространстве производится замена данной системы плоскостей проекцией новой системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций (рис. 35, а). При переходе к новой системе одну из плоскостей таким образом, чтобы данный геометрический элемент (прямая, плоскость) занял частное положение и проецировался без искажения.

При решении ряда метрических задач требуется преобразовать прямую

общего положения в прямую уровня, а затем — в проецирующую, выполнив при этом последовательно два преобразования.

Рассмотрим ход решения этой задачи.

**1-е преобразование** (рис. 35, б). Для того чтобы прямая  $AB$  спроецировалась линией уровня, следует ввести новую плоскость проекций и расположить ее параллельно данной прямой. При этом новая ось  $x_1$  будет параллельна одной из проекций прямой. На рис. 35, а, б ось проведена параллельно горизонтальной проекции  $ab$ , а новая плоскость проекций  $V_1$  расположена параллельно прямой  $AB$ , которая проецируется на эту плоскость в истинную величину (новая

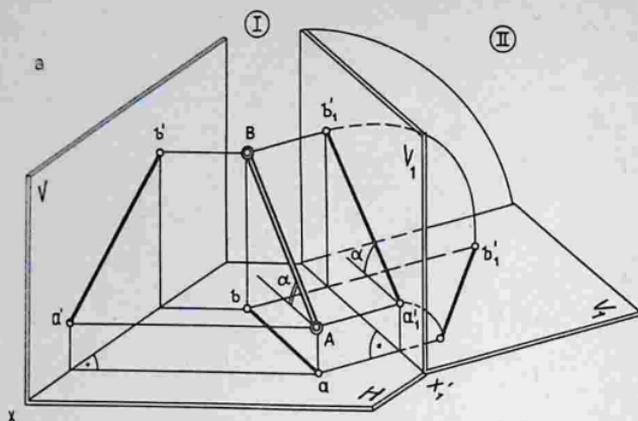
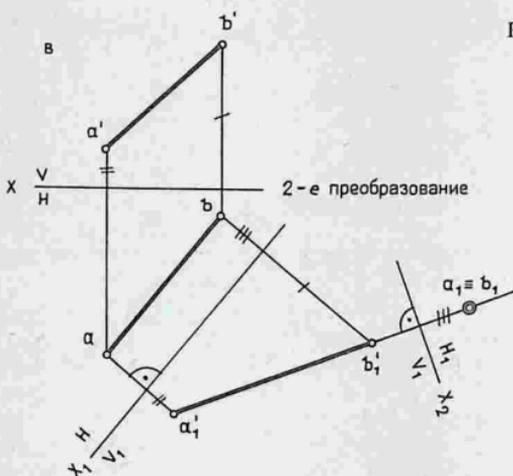
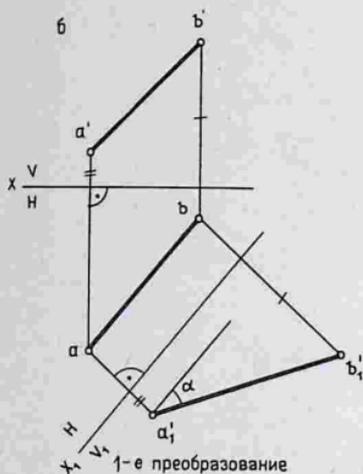


Рис. 36

Рис. 37



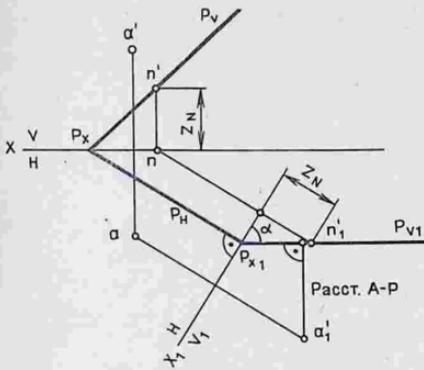
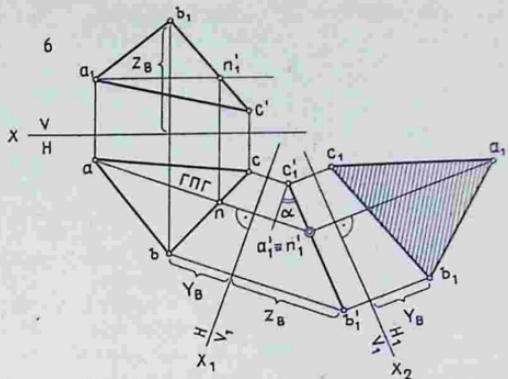
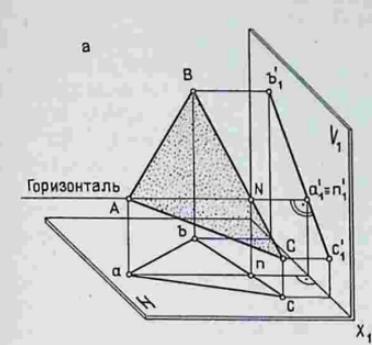
фронтальная проекция прямой  $-a_1'b_1'$ ). Новая ось  $x_1$  и плоскость проекции  $V_1$  могут быть расположены на любом расстоянии от прямой, они могут совпадать с прямой и ее проекцией.

При замене плоскостей проекций расстояние от новой проекции точки до новой оси равно расстоянию от заменяемой проекции точки до старой оси проекций. Иными словами, высоты (апликаты) концов отрезка в новой системе плоскостей проекций останутся прежними. В результате этой замены решена задача на определение действительной величины отрезка прямой и угла наклона  $\alpha$  к плоскости  $H$ . При

переходе к эпюру плоскость  $V_1$  совмещается с плоскостью  $H$ .

2-е преобразование (рис. 35, в). Для того чтобы прямая  $AB$  оказалась проецирующей, т.е. изобразилась точкой, необходимо произвести вторую замену плоскости проекций и расположить новую плоскость проекций и расположить новую ось  $x_2$  выбрана на эпюре перпендикулярно новой фронтальной проекции прямой  $a_1'b_1'$ . На новой плоскости проекций  $H_1$  прямая изобразится точкой, так как координаты концов отрезка в системе  $H/V_1$  одинаковы.

Таким образом, прямая  $AB$  в системе  $H_1/V_1$  стала проецирующей относи-



тельно плоскости  $H_1$ . Преобразования в этой задаче могли быть выполнены и в другой последовательности, сначала могла быть заменена горизонтальная плоскость проекций, а затем — фронтальная.

Рассмотрим еще одну задачу — требуется определить истинную величину плоской фигуры — треугольника  $ABC$ , занимающего в пространстве общее положение. Для решения этой задачи необходимо преобразовать эпор так, чтобы плоскость общего положения стала параллельной одной из плоскостей проекций новой системы. В ортогонально-проекционной системе решить эту задачу одной заменой плоскости проекций нельзя. Как и в предыдущей задаче, необходимо выполнить два преобразова-

ния, но в иной последовательности: сначала следует преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, а затем — в плоскость уровня.

На рис. 36, а сначала заменена фронтальная плоскость проекций новой плоскостью  $V_1$ , перпендикулярной плоскости треугольника. Это условие выполнено с помощью вспомогательной прямой — линии уровня, например, горизонтали  $AN$  (рис. 36, б). Новая ось  $x_1$  проведена на эпоре перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали. На новой плоскости проекций  $V_1$  горизонталь спроецировалась в точку, а плоскость треугольника — в линию. Угол  $\alpha$  определяет угол наклона треугольника к горизонтальной плоскости  $H$ .

На втором этапе решения задачи проведена вторая замена — новая плоскость проекций  $H_1$  установлена параллельно треугольнику. Новая ось  $x_2$  проведена параллельно новой фронтальной проекции треугольника — прямой  $b_1a_1c_1$ . Построенная проекция определяет истинную величину и форму треугольника.

Если плоскость задана следами, а не плоской фигурой, ее следует преобразовать в проецирующую. Для этого новую плоскость проекций и новую ось проекций следует расположить перпендикулярно, например, к горизонтальному следу заданной плоскости (рис. 37), при этом горизонтальный след спроецируется на новой плоскости в точку ( $P_{x_1}$ ).

Для построения новой проекции фронтального следа  $P_{V_1}$  достаточно найти проекцию любой точки заданной плоскости, например произвольной точки  $N$ , лежащей на следе. Прямая  $P_{x_1-n_1}$  является искомым проецирующим следом данной плоскости.

### 11. Способ вращения

Сущность способа вращения состоит в изменении положения объекта, заданного на эпюре, таким образом, чтобы определенные его элементы заняли относительно плоскостей проекции частное положение и проецировались без искажения.

Вращение может производиться вокруг осей, расположенных относительно плоскостей проекций различным

образом. Ниже рассматриваются следующие разновидности способа вращения: проекции оси вращения (рис. 38, а). Окружность, описываемая точкой  $A$ , спроецируется на плоскости  $H$  без искажения, а на плоскости  $V$  — в виде отрезка прямой. При вращении точки вокруг фронтально проецирующей оси ее траектория проецируется на фронтальную плоскость проекций окружностью, а на горизонтальную плоскость — отрезком прямой, перпендикулярным проекции оси.

В процессе решения задач способом вращения вокруг проецирующих осей этапы преобразований геометрических элементов аналогичны тем, которые выполнялись способом замены плоскостей проекций.

На рис. 39 прямая общего положения одним вращением вокруг горизонтально проецирующей оси преобразо-

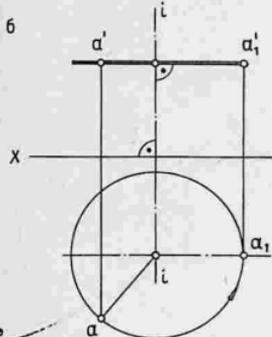
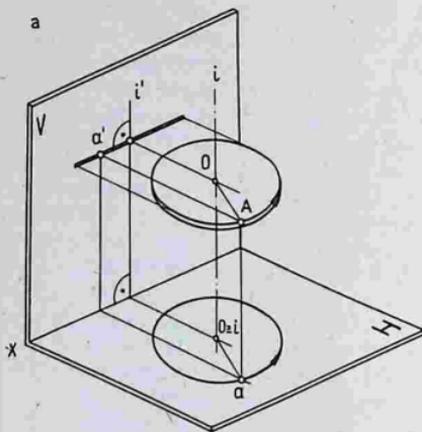


Рис. 38

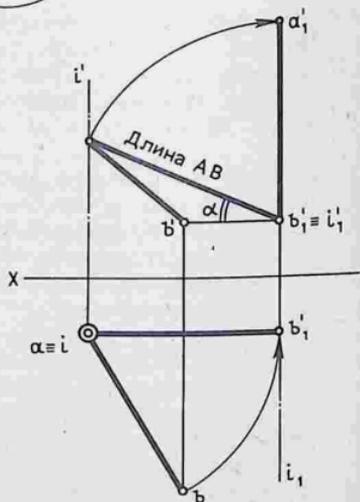
Рис. 39

образом. Ниже рассматриваются следующие разновидности способа вращения:

- 1) вращение вокруг проецирующих осей;
- 2) плоскопараллельное перемещение;
- 3) вращение вокруг линий уровня и совмещение.

#### Вращение вокруг проецирующих осей.

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, одна ее проекция перемещается по окружности, а вторая — по прямой, перпендикулярной



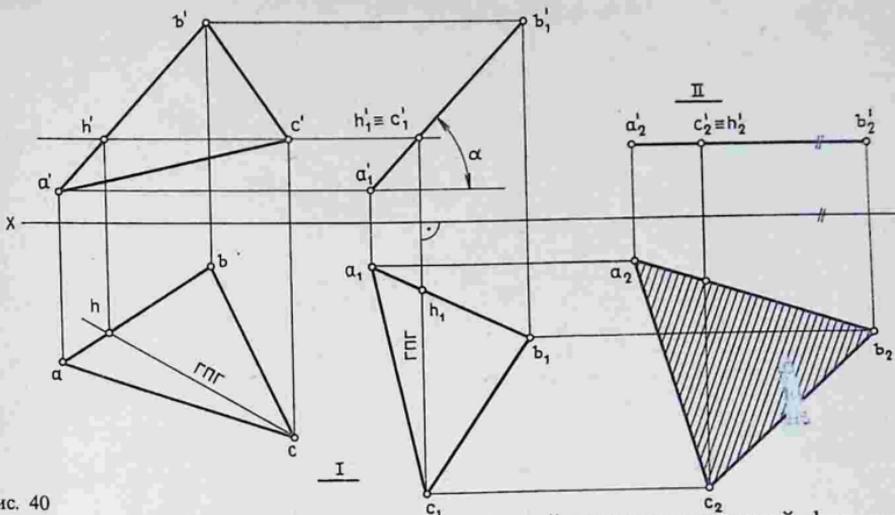
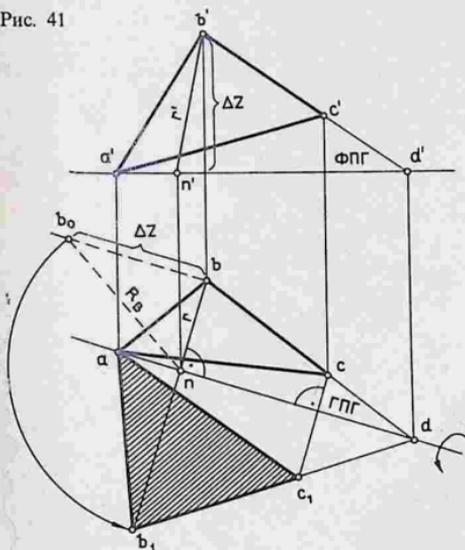


Рис. 40

Рис. 41



тельной величины плоской фигуры.

Двойное вращение вокруг проецирующих осей приводит обычно к тому, что последующие построения и новая проекция объекта накладываются на заданную проекцию, что затрудняет чтение эюра. Поэтому способ вращения вокруг проецирующих осей целесообразно применять при решении задач одним вращением. Этого недостатка лишен способ плоскопараллельного перемещения по траектории произвольного вида.

**Способ плоскопараллельного перемещения.** При вращении прямой линии, плоскости и любого другого объекта, их проекции на плоскость, перпендикулярную оси вращения, сохраняют свою величину и форму (см. рис. 39). Вторые проекции объекта перемещаются по прямым, перпендикулярным проекции оси вращения. Эти свойства проекций позволяют перемещать данный объект в частное положение, используя свободное поле эюра, без нанесения проецирующих осей вращения. Этот способ преобразования проекций получил название *плоскопараллельного перемещения*.

вана в линию уровня (фронталь), затем вторым вращением вокруг оси, перпендикулярной фронтальной проекции, приведена в проецирующее положение—проецируется на плоскость *H* точку.

Преобразования, аналогичные тем, которые выполнялись способом замены плоскостей проекций, производятся и при определении вращением действитель-

Рассмотрим задачу аналогичную той, которая решалась способом замены плоскостей проекций (см. рис. 36): *требуется определить действитель-*

вительную величину треугольника  $ABC$ .

На рис. 40 плоскость треугольника общего положения двумя последовательно проведенными перемещениями приведена в положение, параллельное плоскости  $H$ . Первое перемещение ( $I$ ) выполнено с помощью вспомогательной линии уровня — горизонтали. Треугольник приведен во фронтально-проецирующее положение. Вторым перемещением ( $II$ ) плоскость приведена в горизонтальное положение. Новую проекцию располагают на свободном поле эпюра. Перемещение проводится параллельно плоскостям проекций, поэтому изображения вершин треугольника на второй проекции перемещаются по прямым, перпендикулярным линиям связи.

**Вращение вокруг линии уровня.** Этот способ применяется для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня и для определения действительной величины плоской фигуры. Задача решается одним вращением вокруг линии уровня данной плоскости — горизонтали или фронтали.

На рис. 41 в плоскости, заданной треугольником  $ABC$ , проведена горизонталь через вершину  $A$  и точку  $D$  на продолжении противоположной стороны треугольника. Горизонталь принята за ось вращения. Точки  $A$  и  $D$  при вращении останутся неподвижными. Вершины  $B$  и  $C$  вращаются по окружностям, которые проецируются на горизонтальной проекции отрезками прямых, перпендикулярными проекции

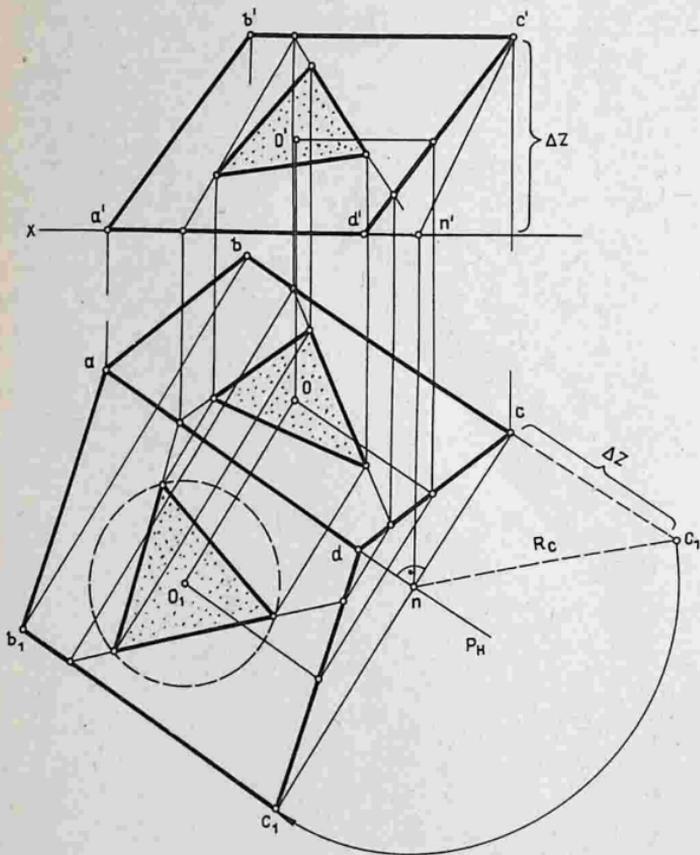


Рис. 42

Рис. 43

оси. Так как треугольник должен занять горизонтальное положение, радиус вращения вершины  $B$ , например, должен проецироваться в натуральную величину. Длину радиуса  $R_B$  можно определить способом прямоугольного треугольника. Определив горизонтальное положение радиуса вращения вершины  $B$ , построим вершину  $C_1$  в пересечении прямой  $b_1d$  с проекцией ее траектории вращения. Полученная проекция  $ab_1c_1$  и определяет истинную величину треугольника.

**Способ совмещения.** Вращение плоскости вокруг оси, совпадающей с плоскостью проекции, т.е. вокруг следа  $P_H$  плоскости, является частным случаем вращения вокруг линии уровня плоскости.

На рис. 42 показано совмещение отсека плоскости  $ABCD$  с плоскостью  $H$ , вращением вокруг горизонтального следа  $P_H$  плоскости. Построения аналогичны решению предыдущей задачи.

Способ совмещения дает возможность не только определить истинную величину отсека плоскости, но и решить другую задачу — построить в совмещенном положении правильную геометри-

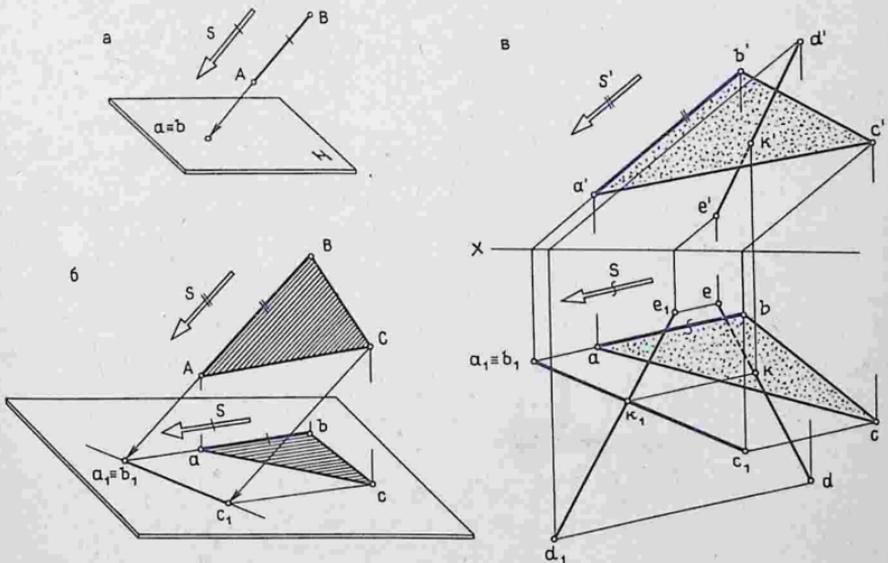
ческую фигуру, а затем восстановить ее в исходные проекции, как показано на эфюре.

## 12. Способ косоугольного вспомогательного проецирования

Способы преобразования проекций применяют при решении как *метрических*, так и *позиционных* задач. Однако при решении задач на пересечение геометрических элементов используется также способ косоугольного вспомогательного проецирования.

Сущность этого способа заключается в замене прямоугольного направления проецирования косоугольным. При этом новая проекция оказывается сходной с проекцией, которая получается при проецирующем положении объекта. Направление проецирования выбирается таким образом, чтобы получить *вырожденную* проекцию объекта, когда прямая проецируется в точку, а плоскость — в линию. Полученные результаты обратным проецированием переносятся на заданные проекции.

Чтобы спроецировать прямую в точку, т.е. получить ее вырожденную про-



екцию, следует выбрать направление проецирования, параллельное прямой (рис. 43, а). Вырожденную проекцию плоскости можно получить, если направление проецирования будет параллельным плоскости (рис. 43, б).

На рис. 43, в задача на *пересечение прямой с плоскостью* решена вспомогательным косоугольным проецированием на плоскость  $H$ . Направление проецирования выбрано параллельно стороне  $AB$  треугольника. Плоскость треугольника спроецировалась в прямую  $a_1 \equiv b_1c_1$ , прямая — в прямую  $d_1e_1$ . Обратным преобразованием полученная вспомогательная проекция точки пересечения  $k_1$  спроецирована на горизонтальную и фронтальную проекции.

На рис. 44 приведена задача на построение линии пересечения треугольника  $ABC$  с плоскостью  $P$ , заданной следами. Направление вспомогательного проецирования выбрано параллельным фронтальному следу плоскости  $P$ . Треугольник  $ab_1c$  на плоскости  $H$  представляет собой косоугольную проекцию треугольника  $ABC$ , а след  $P_H$  — вырожденную проекцию плоскости  $P$ . Точки  $e_1$  и  $f_1$  линии пересечения ко-

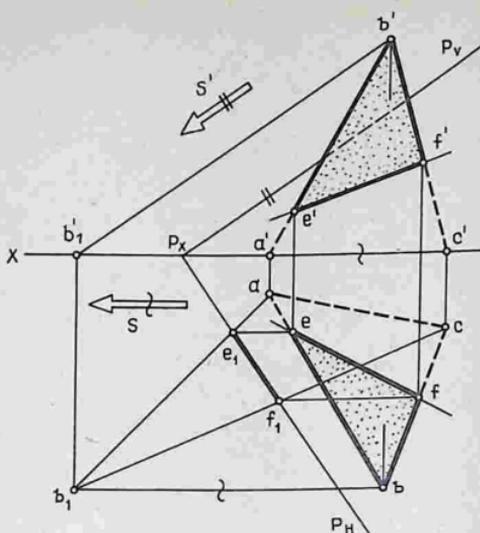


Рис. 44

соугольной проекции треугольника со следом  $P_H$  обратным проецированием переносится на ортогональные проекции сторон треугольника  $ABC$ . Одноименные проекции точек соединяются прямыми.

## Глава 3. Многогранные поверхности

### 13. Общие сведения. Виды многогранников

Многогранные формы с древнейших времен преобладают в архитектуре и строительстве. В русском зодчестве разные периоды истории оставили многочисленные примеры совершенных произведений, где композиция сооружения представляет собой выразительное сочетание гранных форм (шатровые деревянные и каменные церкви, крепостные сооружения и др.). Многогранные формы широко применяются и в современной архитектуре.

Все поверхности можно разделить на две большие группы: многогранные и кривые поверхности.

**Многогранной поверхностью** называется поверхность, образованная частями (отсеками) пересекающихся плоскостей. **Многогранником** называется тело, ограниченное многогранной поверхностью, состоящей из плоских многоугольников. Отсеки плоскостей называются *гранями*, а линии их пересечения — *ребрами*. Точки пересечения ребер называются *вершинами*. Совокупность ребер и вершин многогранной поверхности называется *сеткой*.

Многогранная поверхность называется *выпуклой*, если она расположена по одну сторону от плоскости любой ее грани. Сечение выпуклого многогранника плоскостью — всегда выпуклый многоугольник.

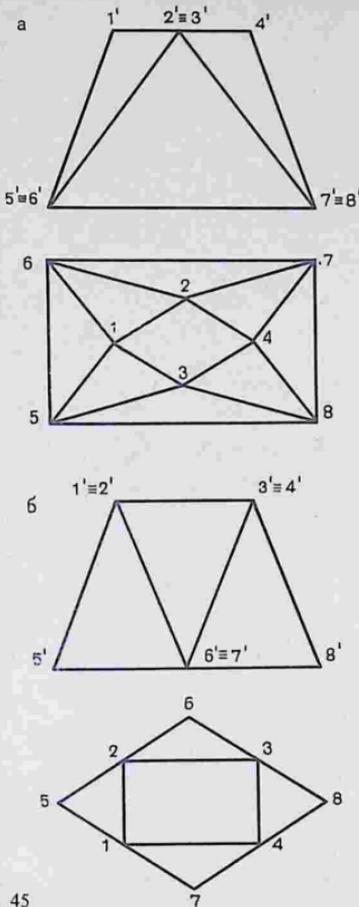


Рис. 45

Наиболее распространенные многогранники — призмы и пирамиды. Призму, ребра которой перпендикулярны основанию, называют *прямой*. Если в основании прямой призмы — прямоугольник, призму называют *параллелепипедом*.

Кроме хорошо известных пирамид и призм представляют интерес также призматоиды, правильные и полуправильные многогранники.

*Призматоидом* называется многогранник, у которого верхнее и нижнее основания — многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях,

а боковые грани представляют собой треугольники и трапеции, вершины которых являются вершинами оснований призматоида (рис. 45).

#### 14. Правильные многогранники

Среди большого числа разновидностей многогранников особую группу составляют правильные выпуклые многогранники. На основе правильных многогранников путем дальнейшего увеличения числа граней проектируются и сооружаются сетчатые большепролетные покрытия зданий (геометрическое конструирование подобных многогранных поверхностей будет рассмотрено ниже, в § 18).

*Правильными многогранниками*, или «телами Платона» называются многогранники, у которых все грани — правильные и равные многоугольники, а углы при вершинах равны. Правильные многогранники и некоторые их свойства были описаны более двух тысяч лет назад древнегреческим философом Платоном. У правильных многогранников длина ребер одинакова, линейные углы равны, в вершинах сходится одинаковое число ребер. Около каждого правильного многогранника можно описать сферу и, наоборот, в каждый многогранник можно вписать сферу.

Существует пять правильных многогранников (рис. 46).

1. *Четырехгранник (тетраэдр)* ограничен четырьмя равносторонними и равными треугольниками (рис. 46, а). Тетраэдр — это правильная трехгранная пирамида. Каждая из четырех граней может быть выбрана ее основанием. Центры граней тетраэдра могут служить вершинами вписанного в него другого тетраэдра меньшей величины.

2. *Шестигранник (гексаэдр)*, или куб. Его поверхность состоит из шести равных квадратов (рис. 46, б). В каждой вершине сходятся три грани и три ребра. Куб представляет собой частный случай призмы и параллелепипеда.

3. *Восьмигранник (октаэдр)*. Его поверхность состоит из восьми равносто-

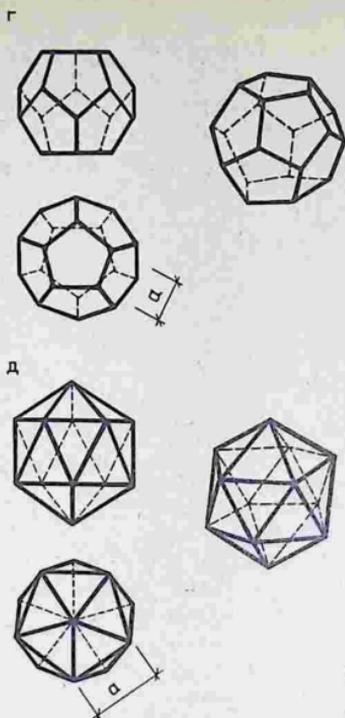
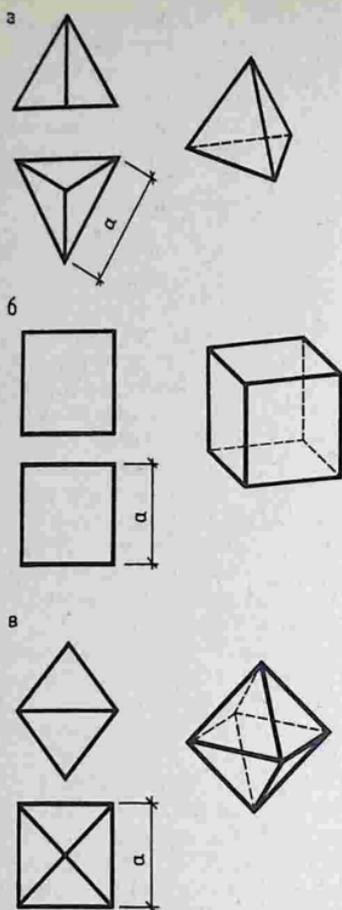
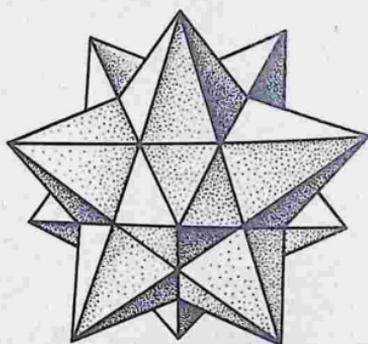


Рис. 46

Рис. 47



ронных и равных треугольников (рис. 46, в). Каждая из диагональных плоскостей делит октаэдр на две пирамиды с квадратными основаниями. Куб и октаэдр имеют одинаковое число ребер. В октаэдр может быть вписан куб, а в куб – октаэдр так, что вершины одного многогранника совпадут с центрами граней другого. Такие многогранники называются *взаимно соответствующими*.

4. Двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен двенадцатью равносторонними и равными пятиугольниками (рис. 46, г). Около каждой вершины соединены три пятиугольника. Додекаэдру соответствует правильный двадцатигранник.

5. Двадцатигранник (икосаэдр). Его поверхность состоит из двадцати равно-сторонних и равных треугольников, соединенных по пяти около каждой вершины (рис. 46, д). В икосаэдр можно вписать додекаэдр. Икосаэдр и додекаэдр также являются взаимно соответствующими многогранниками.

Четырехгранник (тетраэдр) взаимно соответствует самому себе.

Таким образом, у каждой пары

взаимно соответствующих многогранников число граней одного многогранника соответствует числу вершин другого, а количество ребер у них одинаково. Это видно из табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Наименование	Форма граней	Г	В	Р
1. Тетраэдр		4	4	6
2. Гексаэдр (куб)		6	8	12
3. Октаэдр		8	6	12
4. Додекаэдр		12	20	30
5. Икосаэдр		20	12	30

Свойства многогранников изучал Эйлер, ему принадлежит теорема, устанавливающая зависимость между числом граней (Г), вершин (В) и ребер (Р) выпуклых многогранников всех видов.

**Теорема.** У всякого выпуклого многогранника число граней плюс число вершин минус число ребер равно двум, т. е.

$$Г + В - Р = 2.$$

Кроме правильных выпуклых многогранников существует довольно большое число *полуправильных* многогранников, в том числе выпукло-вогнутых *звездчатых* (самопересекающихся) многогранников, образованных на основе пяти правильных многогранников. На рис. 47 приведен один из звездчатых многогранников — *малый звездчатый додекаэдр*. Он образован продолжением граней правильного выпуклого додекаэдра до их пересечения. Его форма представляет собой совокупность боковых поверхностей двенадцати правильных пятигранных пирамид, совмещенных своими основаниями с гранями правильного выпуклого додекаэдра.

### 15. Построение проекций правильных многогранников

Для построения проекций многогранников достаточно построить проекции его сетки — вершин и ребер.

Рассмотрим построение двух правильных многогранников — додекаэдра и икосаэдра [17, 18]. Построение других правильных многогранников не сложно.

**Построение проекций додекаэдра.** На рис. 48 приведены проекции додекаэдра. Построение следует начинать с горизонтальной проекции. Построим пятиугольники верхнего и нижнего оснований со смещением одного относительно другого на  $180^\circ$ , как показано на рисунке.

Построение правильного пятиугольника выполняется следующим образом (рис. 48, б). Проведем взаимно перпендикулярные диаметры окружности. Разделим один из радиусов *ОВ* пополам с помощью дуги того же радиуса, соединив точки пересечения с окружностью прямой линией *ЕС*. Радиусом *С5* из точки *С* проведем дугу окружности до пересечения с горизонтальным диаметром в точке *Н*. Прямая *Н5* равна стороне вписанного пятиугольника.

Продолжим построение проекции додекаэдра. Чтобы определить положение вершин, расположенных на внешнем контуре *горизонтальной проекции*, следует провести прямую, параллельную вертикальным линиям связи через проекции крайних слева (или справа) двух вершин оснований — точек 2 и 3. Точки 1 и 4 лежат на этой прямой и на биссектрисах углов пятиугольников оснований. Фронтальная проекция строится с помощью вертикальных линий связи. Фронтальные проекции вершин, расположенных на четырех горизонтальных уровнях, определяются перенесением отрезков *т* и *п* с горизонтальной проекции. Эта закономерность объясняется следующим образом. Отрезки *т* и *п* являются горизонтальными проекциями диагоналей 1–3 и 3–4 двух пятиугольников. Обе диагонали лежат в профильной плоскости уровня.

Как видно из рис. 48, б, проекции диагоналей взаимно перпендикулярны и в результате угол  $\alpha$ , который составляет одна диагональ с горизонтальной плоскостью, равен углу, который составляет вторая диагональ с фронтальной плоскостью. Поэтому горизон-

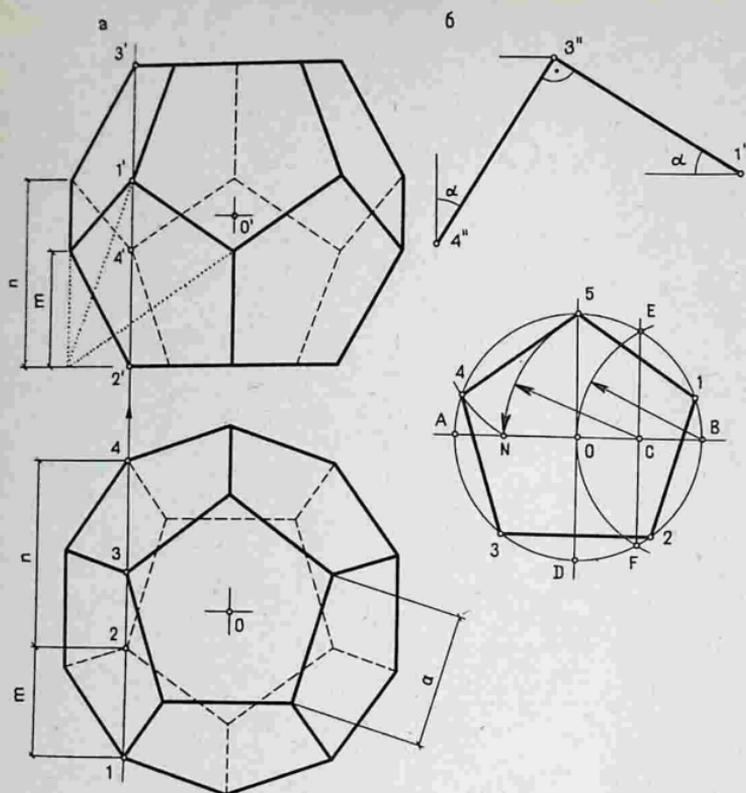


Рис. 48

тальная проекция одной диагонали равна фронтальной проекции другой.<sup>1</sup>

**Построение проекций икосаэдра.** Построение проекций двадцатигранника (икосаэдра) представляет особый интерес, так как этот многогранник является исходным (базовым) для построения сетки многогранных поверхностей покрытий, состоящих из большого числа граней.

Расположим икосаэдр так, чтобы одна из его осей (11–12) была перпендикулярна плоскости проекций  $H$  (рис. 49, а). На горизонтальной плоскости проекций спроецируются в натуральную величину два правильных пятиугольника 1–2–3–4–5 (видимый) и 6–7–8–9–10 (невидимый), каждый из которых со-

стоит из пяти треугольников. Пятиугольники смещены один относительно другого на половину длины ребра ( $a$ ). Построение горизонтальной проекции икосаэдра будет закончено, если соединить прямыми по внешнему контуру все десять вершин.

**Фронтальная проекция** строится с помощью вертикальных линий связи. Положение вершин определяется на четырех горизонтальных уровнях перенесением отрезков  $m$  и  $n$  с горизонтальной проекции. Эта закономерность объясняется следующим образом. Ребро икосаэдра, проходящее через любую вершину, перпендикулярно противоположной стороне треугольника, соответствующего этой вершине. Следовательно, проекция ребра 1–6 перпендикулярна на проекции ребра 5–11 (рис. 49, б). Но

<sup>1</sup> Более строгое доказательство – см. [18, с. 41].

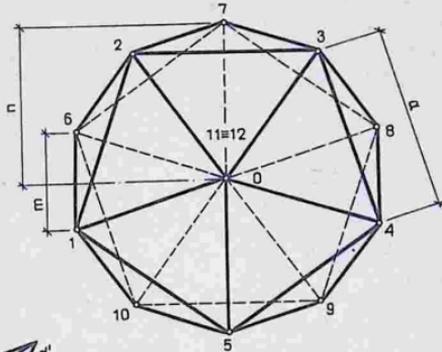
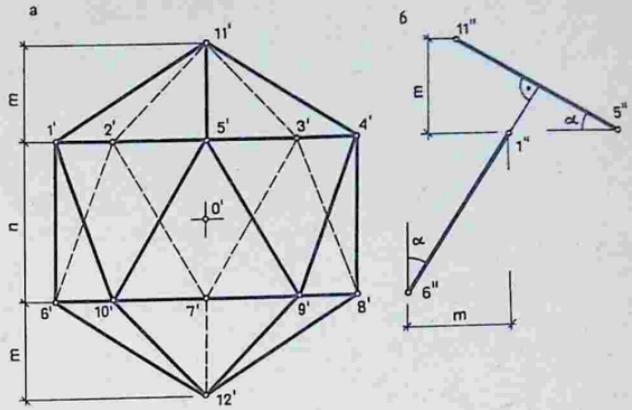
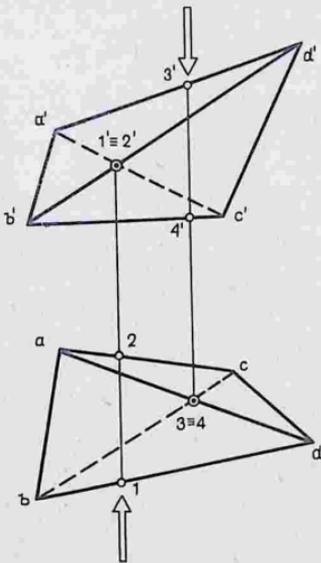


Рис. 49

Рис. 50



так как эти два ребра лежат в профильных плоскостях, то угол  $\alpha$ , который составляет одно ребро с горизонтальной плоскостью, равен углу, который составляет другое ребро с фронтальной плоскостью. Следовательно, горизонтальная проекция одного ребра равна фронтальной проекции другого ребра, и наоборот.

**Видимость ребер многогранника.** Необходимость в определении на эюре видимости проекций ребер многогранника возникает постоянно. Иногда эта задача решается просто, как на рис. 48 и 49. Однако в более сложных случаях целесообразно применить способ конкурирующих точек (см. § 4, рис. 14), что дает безошибочное решение.

Внешний контур проекций многогранника всегда видимый. Видимость

ребер внутри контура следует определять на каждой проекции отдельно, рассматривая взаиморасположение ребер.

На рис. 50 даны проекции четырехгранника. На фронтальной проекции конкурирующими точками скрещивающихся ребер являются точки 1 и 2, а на горизонтальной проекции — точки 3 и 4. Анализ взаиморасположения конкурирующих точек (см. рис. 14) позволяет установить, что на фронтальной проекции ребро  $BD$  будет видимым, а ребро  $AC$  — невидимым. На горизонтальной проекции ребро  $AD$  будет видимым, а ребро  $BC$  — невидимым.

### 16. Пересечение многогранника плоскостью и прямой линией

Построение линии пересечения поверхности плоскостью представляет собой практически важную задачу. Она широко применяется при проектировании и компоновке различных архитектурных форм, при вычерчивании разрезов и планов зданий, при построении сечений и разрезов конструктивных узлов и архитектурных фрагментов.

**Пересечение многогранника плоскостью.** Линией пересечения поверхности многогранника плоскостью является плоский многоугольник. Его вершины являются точками пересечения ребер с заданной плоскостью, а стороны — линиями пересечения граней с плоскостью (рис. 51, а). Таким образом, построение сечения многогранника плоскостью сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линии пересечения плоскостей.

Плоская фигура, которая получается при пересечении многогранника плоскостью, называется *сечением*. Построение сечений значительно упрощается, если секущая плоскость является проецирующей. В этом случае одна проекция сечения совпадает с проецирующим следом плоскости.

1. Пересечение пирамиды фронтально проецирующей плоскостью. На рис. 51, б фронтальная проекция  $a', b', c'$  сечения совпадает

с фронтальным следом  $P_v$  секущей плоскости. Проведя линии связи до горизонтальных проекций соответствующих ребер многогранника, получим горизонтальную проекцию сечения.

2. Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения (рис. 52). Секущая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми — горизонталью и фронталью. Построение сечения, как и в предыдущей задаче, упрощается, так как боковые грани призмы — горизонтально проецирующие плоскости. Следовательно, горизонтальная проекция сечения известна, она совпадает с горизонтальной проекцией боковых граней и ребер призмы.

Для построения фронтальной проекции сечения необходимо спроецировать точки 1, 2, 3 и 4, принадлежащие секущей плоскости, на фронтальную проекцию. Воспользуемся какой-либо линией уровня, например фронталью (или любой другой прямой). Проводим через точки 2, 3 и 4 горизонтальные проекции фронталей, а затем строим фронтальные их проекции. В пересечении с соответствующими фронтальными проекциями ребер получим искомого проекции точек пересечения ребер с плоскостью. Соединив полученные точки прямыми в последовательности, которая задана горизонтальной проекцией, и определив невидимые участки сечения, закончим построение.

Итак, при решении задач на пересечение многогранника плоскостью необходимо выделить частный случай, когда один из пересекающихся элементов (секущая плоскость или пересекаемая поверхность) занимает проецирующее положение и одна проекция сечения известна.

3. Пересечение пирамиды плоскостью общего положения (рис. 53, а, б). В отличие от задачи, приведенной на рис. 51, здесь необходимо построить обе проекции сечения. Горизонтальный след секущей плоскости не пересекает основание пирамиды, следовательно, пересекается ее боковая поверхность. Сечение должно иметь фор-

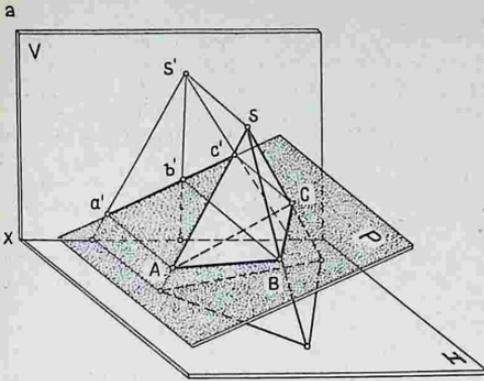


Рис. 51

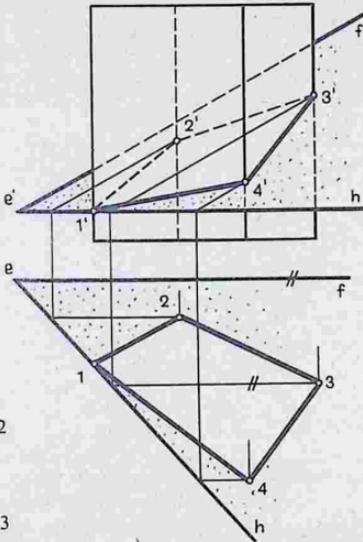
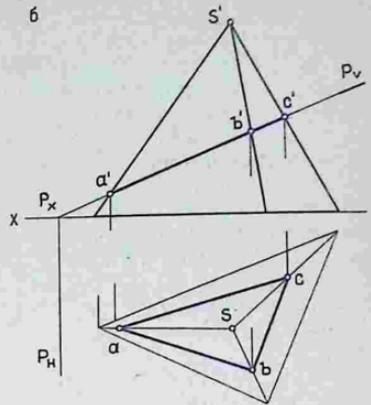
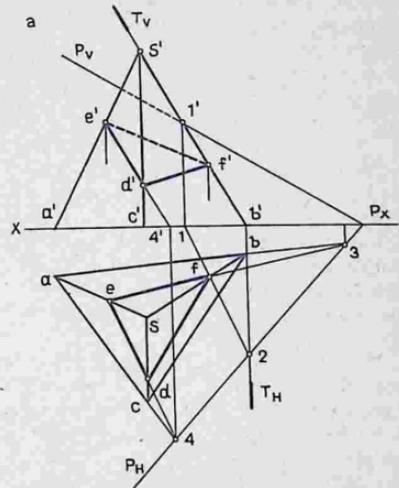
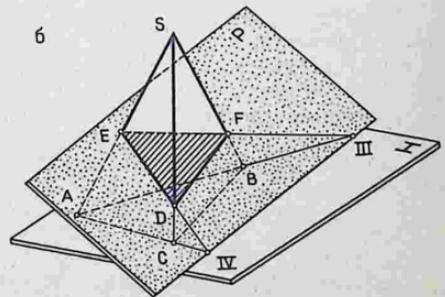


Рис. 52

Рис. 53



му треугольника, вершинами которого будут точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью. Точка пересечения ребра  $SB$  пирамиды с плоскостью  $P$  найдена с помощью вспомогательной фронтально проецирующей плоскости  $T$ . Аналогичным образом могла быть построена точка  $E$  сечения. Однако можно применить и другой прием. Продолжим ребро  $AB$ , которое является горизонтальным следом грани  $ABS$  пира-



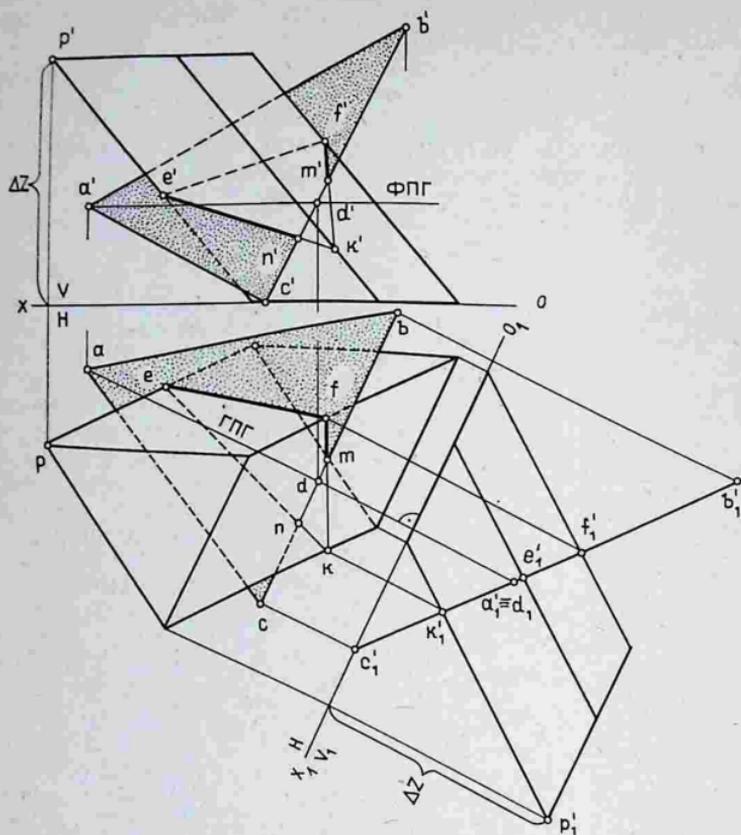
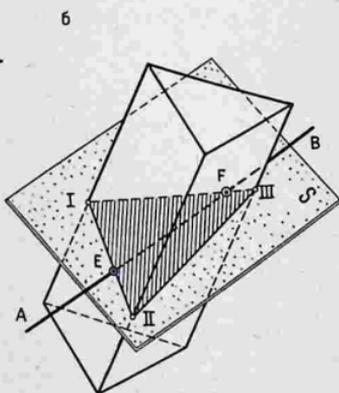
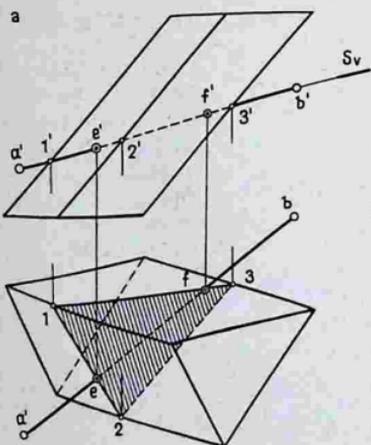


Рис. 54

Рис. 55



миды, до пересечения с горизонтальным следом секущей плоскости в точке 3. Точки  $F$  и 3 принадлежат линии пересечения  $EF$  данной грани и секущей плоскости. Построим третью точку  $D$  таким же способом, так как вспомогательная секущая плоскость, проведенная через ребро  $CS$ , будет параллельна профильной плоскости проекции и не даст решения. Точка 4 является точкой пересечения горизонтальных следов грани  $ASC$  и секущей плоскости. Соединив полученные точки прямыми и выделив на фронтальной проекции невидимый участок  $e'f'$  сечения, закончим построение.

Подобную задачу можно решить и другим способом, преобразовав плоскость общего положения в проецирующую и приведя тем самым задачу к виду, изображенному на рис. 51.

4. Пересечение наклонной призмы плоскостью общего положения  $ACB$  (рис. 54). Для решения задачи преобразуем секущую плоскость во фронтально проецирующую. Проведем в секущей плоскости вспомогательную линию уровня – горизонталь  $AD$  (см. § 10, рис. 37). Новую фронтальную плоскость проекций и ось  $o_1x_1$  расположим перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали ( $ad$ ). Новую проекцию призмы и плоскости треугольника строим, перенося координаты  $\Delta z$  из заменяемой фронтальной проекции. Точки сечения, полученные на проецирующем следе  $b_1c_1'$  секущей плоскости, проецируем на горизонтальную, а затем на фронтальную плоскость проекций.

**Пересечение прямой линии с многогранником.** Задача определения точек пересечения прямой с поверхностью многогранника решается аналогично пересечению прямой с плоскостью. Если многогранник выпуклый, точек пересечения две. Эта задача решается в три этапа (рис. 55):

- 1) через данную прямую проводят вспомогательную секущую плоскость;
- 2) строят линию пересечения многогранника секущей плоскостью;
- 3) определяют точки пересечения данной прямой с контуром сечения.

Полученные точки проецируют на другую плоскость проекций ( $2', 3'$ ), определяют видимость точек пересечения и участков прямой (отрезок прямой  $e'-3'$  невидимый). Точки пересечения прямой с поверхностью многогранника называются *точками встречи*.

### 17. Взаимное пересечение многогранников

Линия пересечения двух многогранников представляет собой одну или две замкнутые ломаные линии. Отрезки ломаной линии являются линиями пересечения граней, а точки излома – точками пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Если один многогранник частично пересекается другим, то линия пересечения будет представлять собой одну замкнутую ломаную линию. Такое пересечение называют *неполным*. Если один многогранник полностью пересекается другим, то пересечение называют *полным*, при этом линия пересечения состоит из двух замкнутых ломаных линий.

1. Пересечение пирамиды с прямой призмой (рис. 56). Боковые ребра призмы проецируются в точки, а боковые ее грани являются горизонтально проецируемыми отсеками плоскостей. И в этой задаче, как это было ранее (см. рис. 51 и 52), следует выделить *частный случай пересечения, когда одна проекция линии пересечения многогранников известна*.

Точки пересечения ребер пирамиды с призмой легко определяются на горизонтальной проекции. С помощью линий связи строим фронтальные проекции этих точек. Из вертикальных ребер призмы лишь одно ребро пересекает пирамиду. Точки пересечения этого ребра с гранями пирамиды определяем, проводя вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость  $S_H$  через ребро и вершину пирамиды. Она пересекает грани пирамиды по прямым, которые пересекают ребро призмы в точках  $7,7'$  и  $8,8'$ . Соединяем построенные проекции точек отрезками

прямых в пределах каждой грани, при этом следует руководствоваться горизонтальной проекцией. Линия пересечения представляет собой две замкнутые ломаные линии. Пересечение полное. Видимыми являются те участки линии пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников.

2. Пересечение двух пирамид. Если пересекаются многогранники, у которых пересекающиеся грани не являются проецирующими, линию пересечения строят с помощью вспомогательных проецирующих плоскостей, определяя точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого, и наоборот. Однако в некоторых случаях, когда пересекающиеся многогранники расположены своими основаниями на горизонтальной плоскости проекций, применение плоскостей общего положения в качестве вспомогательных оказывается более рациональным и дает меньше дополнительных построений.

На рис. 57 приведен подобный пример. Через вершины пирамид проведена прямая и найден ее след  $M$  на плоскости оснований пирамид. Вспомогательные плоскости, проведенные через прямую  $ST$ , пересекают грани по прямым линиям. Следы этих плоскостей проходят

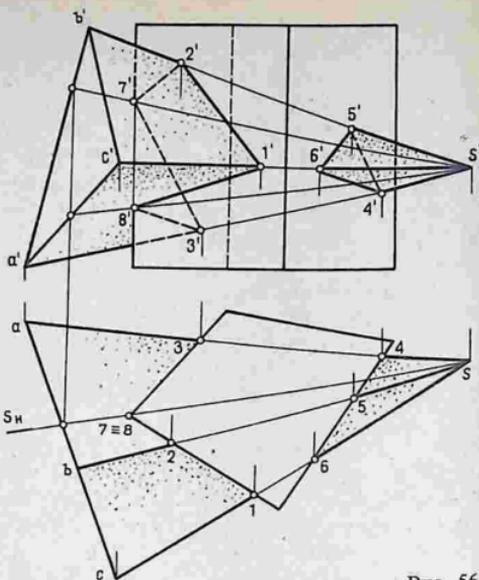
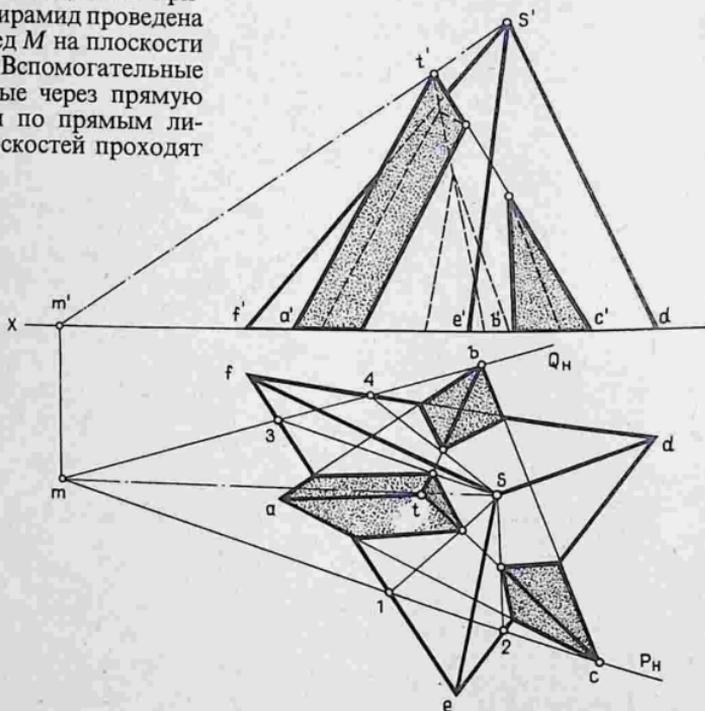


Рис. 56

Рис. 57



через точку  $m$ . Вспомогательные плоскости образуют пучок плоскостей, осью которого является прямая  $SM$ , соединяющая вершины многогранников.

Найдем точки пересечения ребра  $ST$  с гранями пирамиды. Проведем вспомогательную плоскость  $P$  через данное ребро и вершину  $S$ . Горизонтальный след этой плоскости должен пройти через точку  $s$  — горизонтальный след ребра  $ST$ . Вспомогательная плоскость пересечет стороны основания другой пирамиды в точках  $1$  и  $2$ , а ее грани — по прямым  $s1$  и  $s2$ , в пересечении с которыми и определяем горизонтальные проекции точек пересечения ребра  $ST$  с пирамидой. Вторую вспомогательную плоскость  $Q$  проводим через ребро  $BT$  и строим точки пересечения аналогичным образом. Отрезки линий пересечения пирамид проводим из точек пересечения вспомогательными плоскостями сторон оснований пирамид в пределах каждой пары пересекающихся граней. Третье ребро  $AT$  не пересекается с пирамидой  $EFDS$ . Полученные горизонтальные проекции точек и линий пересечения проецируем на фронтальную проекцию пирамид, выделяем невидимые участки линии пересечения.

### 18. Области применения многогранных поверхностей

Многогранники и многогранные поверхности широко применяются в архитектуре и строительстве. По своей общей форме большинство зданий и сооружений, а также фрагменты зданий и их конструктивные элементы представляют собой многогранники — призмы, параллелепипеды и их сочета-

ния. Покрытия зданий в виде скатной кровли и более сложные складчатые и сетчатые пространственные покрытия представляют собой многогранные поверхности различного вида.

**Построение пересечений скатов кровли.** При выполнении чертежей сельских и поселковых малоэтажных домов, а также при выполнении проектов реконструкции зданий и исторической застройки города приходится строить проекции пересечения скатов кровли.

На рис. 58 показаны проекции четырехскатной кровли *прямоугольного в плане здания*. При равных уклонах скатов кровли и при расположении их свесов на одном горизонтальном уровне (на условной горизонтальной плоскости) пересечение скатов кровли строится на основе следующих положений:

- 1) горизонтальная проекция линии пересечения смежных скатов проходит по биссектрисе угла между их следами;
- 2) горизонтальная проекция линии пересечения двух смежных скатов про-

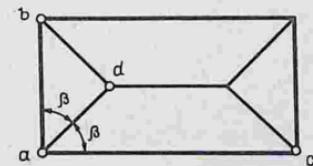
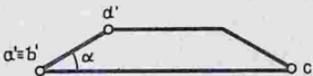
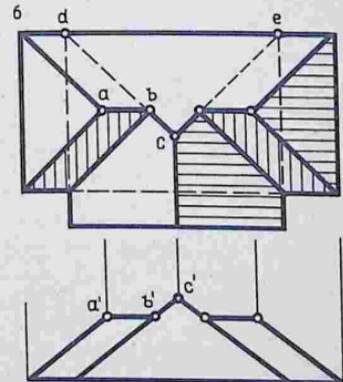
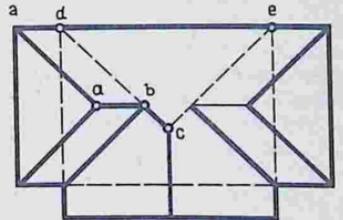


Рис. 58

Рис. 59

ходит через точку пересечения горизонтальных следов этих скатов;

3) если в какой-либо точке на горизонтальной проекции кровли пересекаются проекции двух ребер скатов, то через эту точку проходит и проекция третьего ребра.

Последнее положение объясняется тем, что точка в пространстве определяется пересечением трех плоскостей, которые пересекаются по трем прямым линиям, сходящимся в этой точке.

Рассмотрим построение проекций скатов кровли, имеющей в плане очертание в виде *двух пересекающихся прямоугольников* (рис. 59). Выступающая часть шире основной части зданий и перекрыта двухскатной кровлей.

Построение следует начинать с плана. Продолжаем линии контура и разбиваем план на два прямоугольника. Проводим биссектрисы всех внешних и внутренних углов. Посередине выступающей части проводим горизонтальное ребро (конек крыши) параллельно горизонтальным следам этой части кровли. Горизонтальное ребро следует провести и вдоль основной части кровли.

На плане (рис. 59, а) штриховыми линиями показан несуществующий скат средней части плана, который совпадает со скатом основной части кровли, поэтому прямую  $dc$  следует выделить только на участке  $bc$ , где она является пересечением двух скатов продольной и поперечной частей здания. На рис. 59, б показан законченный план и фасад кровли.

На рис. 60 даны два примера, когда план здания состоит из двух сопряженных прямоугольников и их общей части, выделенной штриховым контуром. Горизонтальное ребро (конек) общей части плана, которое показано утолщенной линией, должно быть расположено в обоих случаях *поперек* продольных сторон части плана, выделенной штриховой линией, что обеспечит водосток в этой части кровли. Если же горизонтальное ребро будет расположено вдоль общего прямоугольника, то

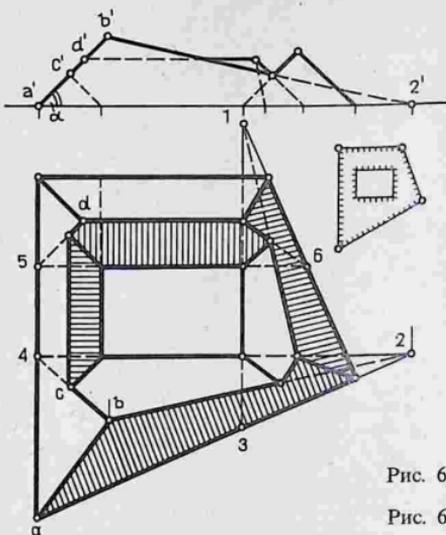
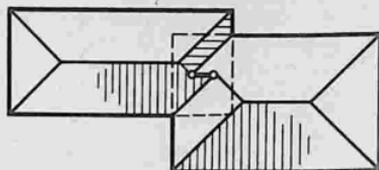
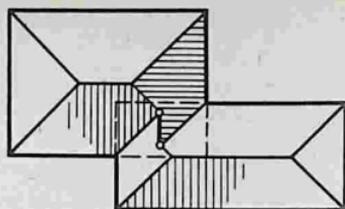


Рис. 60

Рис. 61

образуется продольная выемка (ендова), что недопустимо.

На рис. 61 представлено построение линии пересечения скатов кровли здания сложного в плане очертания с внутренним двором. Построение пересечений скатов выполняется в последовательности, указанной в предыдущей задаче. Цифрами 1...6 обозначены на внешнем контуре плана кровли вершины углов, образованных продолжением горизонтальных следов скатов.

Построение проекций многогранных поверхностей на основе расщепления икосаэдра (правильного двадцатигранника).

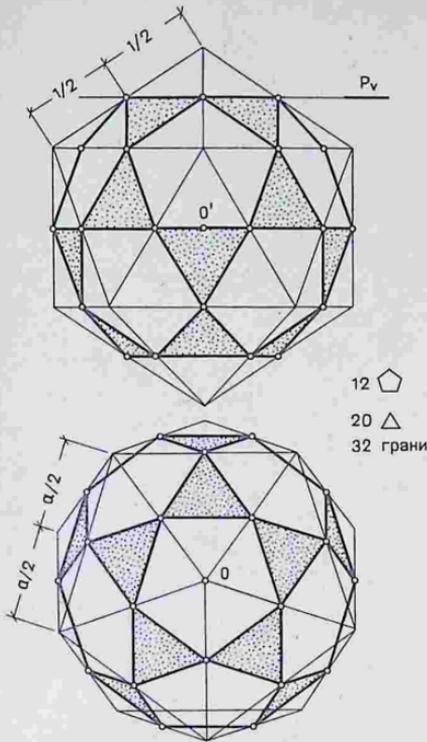


Рис. 62

При проектировании и строительстве покрытий большепролетных зданий с применением индустриальных способов монтажа большое значение имеет применение минимального количества типоразмеров сборных элементов.

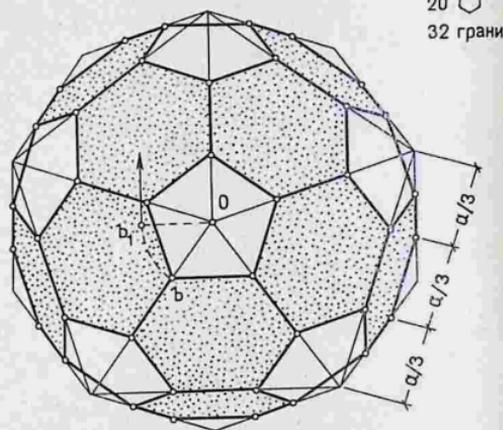
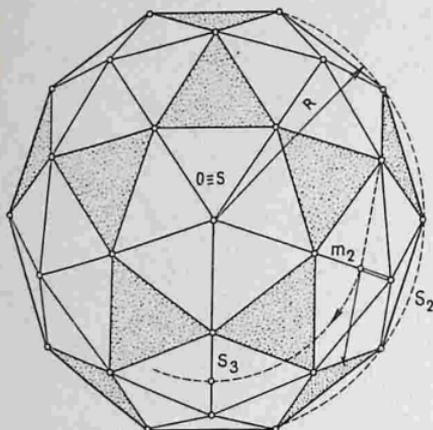
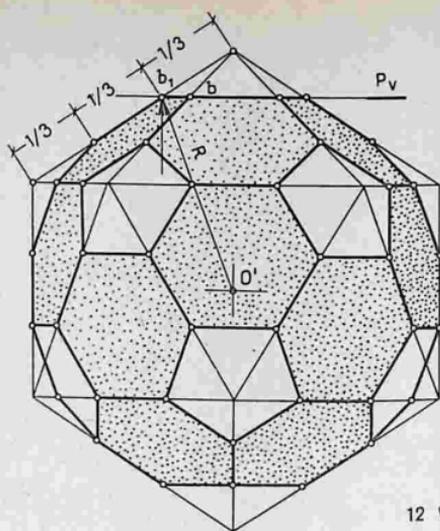
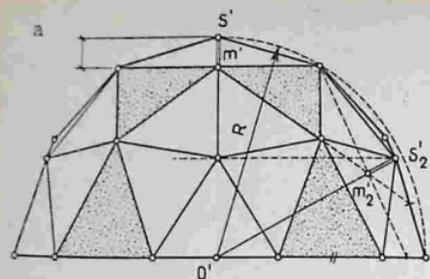
Наилучшим решением было бы использование поверхностей некоторых правильных многогранников, грани которых одинаковы по форме и размерам. Однако большие масштабы современных проектируемых сооружений приводят к значительным размерам отдельных его элементов. Возникла необходимость в дальнейшем увеличении числа граней многогранников при наименьшем количестве их типов. Наиболее приемлемым для этой цели базовым многогранником оказался икосаэдр.

Рассмотрим приемы расщепления икосаэдра и построения проекций некоторых полуправильных многогранников.

1. Построение полуправильного 80-гранника (рис. 62). Способ расщепления икосаэдра и образования полуправильного 80-гранника состоит из двух этапов и заключается в следующем [18]. Сначала от икосаэдра отсекаются плоскостями все двенадцать его вершин так, что каждая секущая плоскость проходит через середины ребер, сходящихся в этой вершине (например, плоскость  $P$ ). Форма каждого сечения — правильный пятиугольник. Получится полуправильный 32-гранник (его сетка выделена утолщенными линиями), на поверхности которого 12 правильных пятиугольников и 20 правильных треугольников. Вершины многогранника расположены на поверхности той же сферы. От каждой грани икосаэдра сохранится правильный треугольник (они заштрихованы на проекциях). Для построения проекций многогранника каждое ребро икосаэдра делим пополам, а точки деления в пределах каждой грани соединяем прямыми.

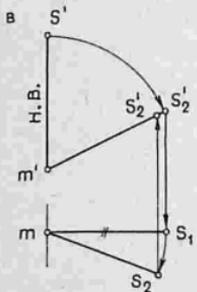
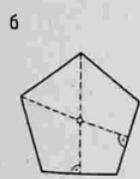
Следующий этап заключается в образовании 80-гранника, грани которого состоят из треугольников двух типов, а вершины расположены на поверхности сферы (рис. 63, а). Над каждой из двенадцати пятиугольных граней надстраиваются пятигранные пирамиды так, чтобы их вершины были расположены на поверхности той же сферы.

Для построения проекций вершин пирамид необходимо сначала определить центр каждого пятиугольника пересечением двух его осей симметрии (рис. 63, б), а затем построить в этой точке проекции высоты пирамиды. Высота пирамиды  $h$  проецируется в натуральную величину на фронтальной проекции, там, где она занимает фронтальное положение (отрезок  $m's'$ ). В остальных случаях высоты пирамид проецируются с искажением. Поэтому для построения проекций вершин пирамид (например, вершины  $s_2$ ) над центром пятиугольника  $M_2(m_2, m_2')$  строим проекции высоты пирамиды, проведя



12   
 20   
 32 грани

$$\frac{20 \Delta}{5 \Delta \times 12 = 60 \Delta} = 80 \Delta \text{ граней}$$



прямую из центра многогранника  $O$  через центр  $M_2$  пятиугольника до пересечения с поверхностью сферы (точка  $s$ ). Для построения этой точки следует найти проекции высоты пирамиды способом вращения (рис. 63, в). Остальные горизонтальные проекции вершин  $s_3, \dots, s_6$  лежат на окружности, а фронтальные – на одном горизонтальном ряду.

2. Построение полуправильного 180-гранника. Способ расщепления икосаэдра и образования полуправильного 180-гранника получил большее распространение<sup>1</sup>. Как и в предыдущем случае, сначала от икосаэдра отсекаются плоскостями все двенадцать вершин, но так, чтобы от каждого ребра была сохранена средняя треть (рис. 64).

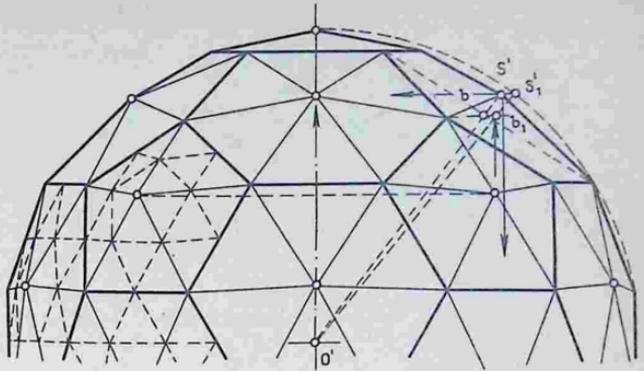
Получим *полуправильный 32-гранник – икосододекаэдр* (его сетка выделена

<sup>1</sup> Этот способ был предложен профессором МАРХИ М.С. Туполевым (Сборные пластинчатые железобетонные куполы и своды-оболочки. – В кн.: Научно-исследовательские и экспериментальные работы. Вып. 1. – МАРХИ, 1961. – С. 124–132).

Рис. 63

Рис. 64

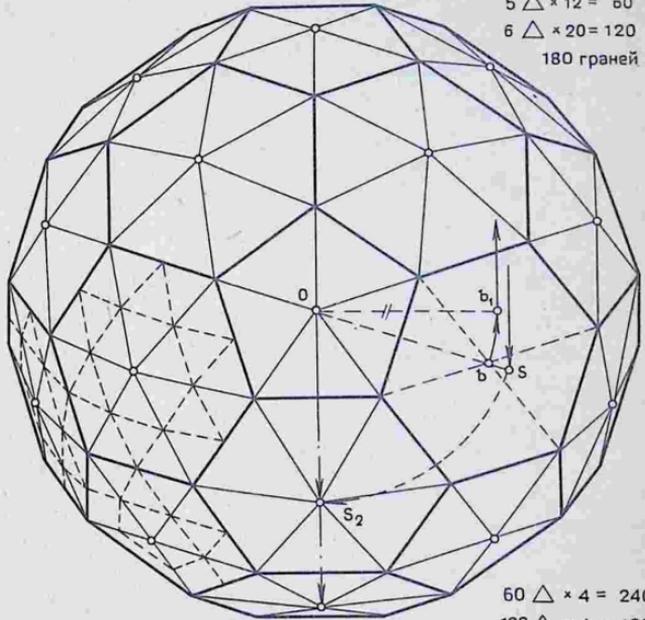
Рис. 65



$$5 \triangle \times 12 = 60$$

$$6 \triangle \times 20 = 120$$

180 граней



$$60 \triangle \times 4 = 240$$

$$120 \triangle \times 4 = 480$$

720 граней

утолщенными линиями), на поверхности которого 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников. Вершины многогранника расположены на поверхности сферы. От каждой грани икосаэдра сохраняется правильный шестиугольник (они заштрихо-

ваны). Для построения проекций многогранника каждое ребро делим на три равные части, а точки деления в пределах каждой грани соединяем прямыми.

Следующий этап заключается в образовании 180-гранника, грани которого состоят из равнобедренных

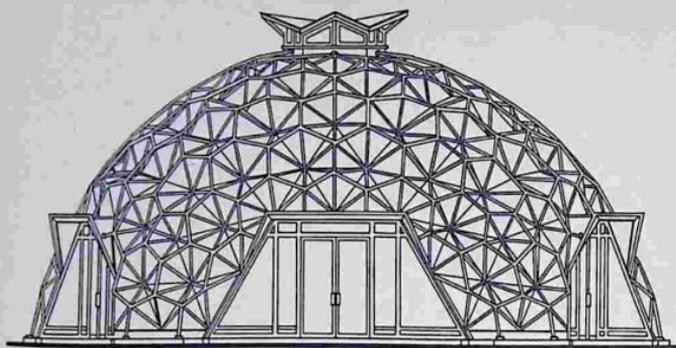


Рис. 66

Рис. 67

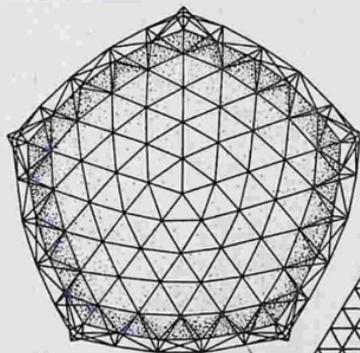
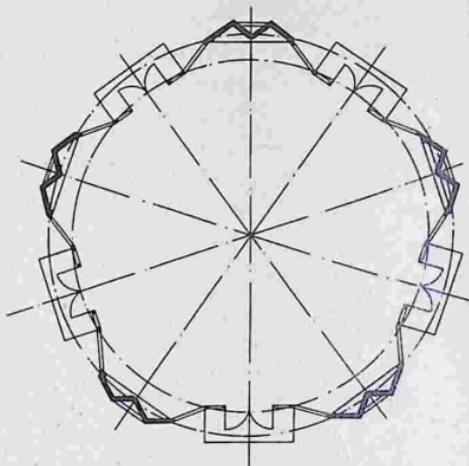
Рис. 68

Рис. 69

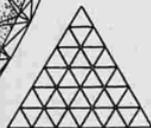
треугольников двух типов, а вершины расположены на поверхности сферы (рис. 65). Над каждой пятиугольной гранью надстраивается пятигранная пирамида, а над каждой шестиугольной гранью — шестигранная пирамида, вершины которых расположены на поверхности той же сферы. Таким образом, поверхность многогранника состоит из  $12 \times 5 = 60$  треугольных граней одного вида и  $20 \times 6 = 120$  треугольных граней другого вида.

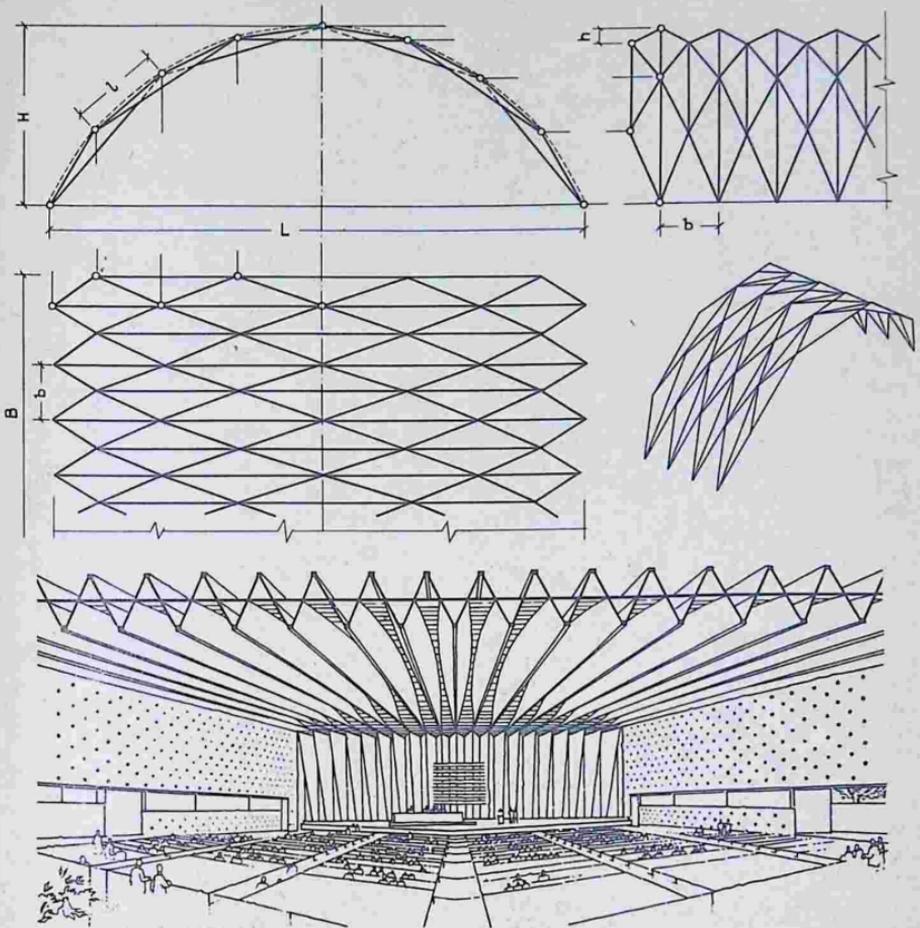
Для построения проекций вершин пирамид определим положение проекций центра  $B$  их оснований пересечением диагоналей или осей симметрии. Вершина пирамиды  $S$  лежит на продолжении прямой, проведенной из центра многогранника  $O$  через центр основания пирамиды  $B$ . Построим способом вращения натуральную величину высоты пирамиды. Повернем горизонтальную проекцию отрезка  $ob$  во фронтальное положение и спроецируем на фронтальную проекцию ( $ob_1$ ). Продолжим фронтальную проекцию прямой  $ob_1$  до пересечения с очерком сферы в точке  $s'_1$ . Вернем эту точку на исходные проекции отрезка  $OB$  ( $s'$  и  $s$ ). Горизонтальные проекции вершин пирамид расположены на одной окружности, а фронтальные — на одном горизонтальном ряду.

На рис. 66 показаны проекции купольного павильона, спроектированного на основе 180-гранника. Для придания поверхности большей жесткости и рельефности каждая грань расчленена четырьмя трехгранными пирамидками («кристаллический» купол).



36Δ × 20  
720 граней



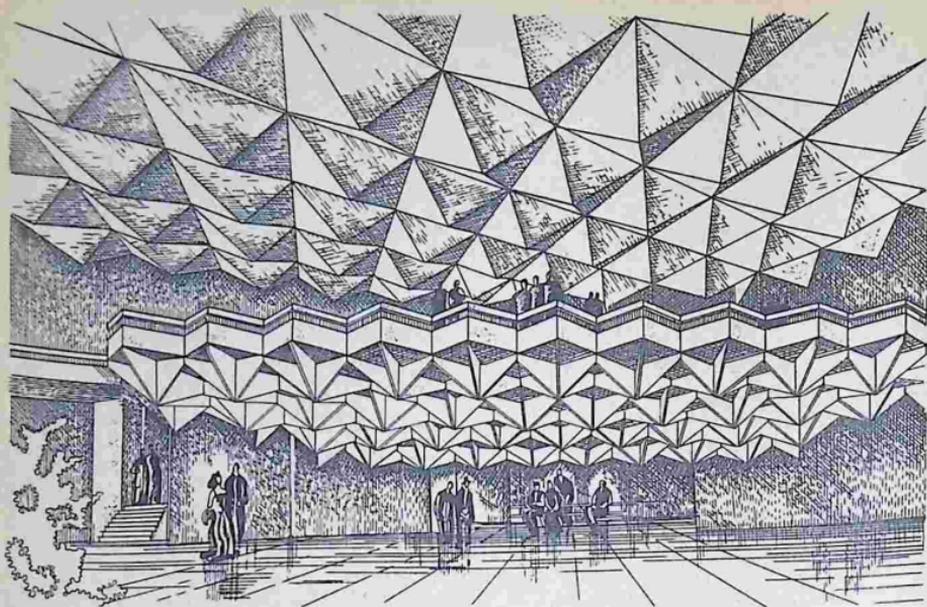


От 180-гранника можно перейти к 720-граннику, расчленив каждую треугольную сферическую грань на четыре треугольные грани (см. рис. 65 — штриховые линии).

На рис. 67 изображены фасад и план купольного сетчатого покрытия, поверхность которого представляет собой отсек 720-гранника, в котором использованы пять граней икосаэдра, каждая из которых состоит из шести ярусов треугольников.

**Построение проекций многогранных поверхностей других видов.** К числу многогранных поверхностей следует отнести и так называемые *складчатые* многогранные формы различных очертаний. Благодаря толщине пространственного слоя складки они обладают большой «жесткостью» и несущей способностью и применяются в виде сводов и плоских покрытий большепролетных сооружений.

На рис. 68 приведены проекции



участка складчатой многогранной поверхности покрытия с направляющей в виде дуги окружности [18]. Построение следует начинать с фронтальной проекции, задавшись параметрами свода: пролетом  $L$ , подъемом свода  $H$ , а также количеством складок на контуре.

Разделим дугу окружности на восемь равных частей ( $l$ ), точки деления соединим прямыми через одну. Вершины складок лежат на окружности. Для построения горизонтальной и профильной проекций разобьем прямоугольник горизонтальной проекции (параметр  $B$ ) на некоторое число равных частей ( $b$ ). Линии связи определяют положения вершин на горизонтальной проекции.

Складчатые многогранные поверхности применяют и для плоских покрытий зданий, имеющих значительные размеры в плане (рис. 69).

На рис. 70 показано покрытие помещения, выполненное в складках кристаллического типа.

К многогранным формам можно отнести и пространственные стержневые конструкции покрытий, которые пред-

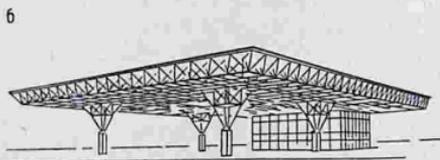
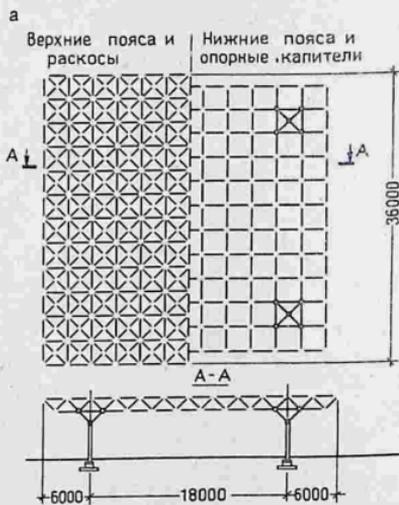


Рис. 70

Рис. 71

ставляют собой сетку многогранника (его ребра и вершины) без заполнения диафрагм — граней (рис. 71 — конструкции МАрХИ). Построение проекций та-

ких поверхностей сводится к построению сетки многогранной поверхности, как было рассмотрено выше (см. рис. 68).

## Глава 4. Кривые линии

### 19. Основные понятия и определения

Кривые линии широко применяются в архитектуре и строительстве. По кривым линиям очерчиваются различные пространственные формы — арки, своды и т. п. Кривые линии применяются для образования поверхностей различных архитектурных объектов и конструкций зданий — покрытий в виде оболочек, сводов и куполов, пандусов и винтовых лестниц. В процессе архитектурного проектирования кривые линии как элемент разнообразных криволинейных форм встречаются довольно часто. Кривые линии могут быть результатом пересечения поверхностей, они могут быть краевыми контурами отсеков поверхностей — оболочек или видимыми и очерковыми контурами поверхностей и т. д.

*Кривые линии в начертательной геометрии рассматриваются как непрерывная совокупность последовательных положений движущейся точки, а также как линия пересечения поверхностей. Если все точки кривой линии лежат в одной плоскости, то такая кривая называется плоской. Примером могут служить окружность, эллипс, парабола. Если кривая не лежит всеми своими точками в плоскости, то она называется пространственной, например винтовые линии. Кривые линии подразделяются и по другим признакам. Кривая может быть описана (задана) аналитически, т. е. уравнением (алгебраическим или трансцендентным), например эллипс, парабола и др. Если образование кривой не имеет строгой закономерности, то она задается графически, например горизонтали на плане местности.*

Степень уравнивания, которое выражает алгебраическую кривую, определяется *порядком кривой*. Геометрически порядок плоской кривой определяется числом точек ее пересечения прямой линией (как действительных, так и мнимых точек). Порядок пространственной кривой определяется числом точек пересечения кривой с плоскостью.

В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям.

Свойства проекций кривой:

- 1) в общем случае проекции кривой линии являются также кривыми линиями;
- 2) если точка принадлежит кривой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой кривой;
- 3) касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции этой кривой, если направление проецирования не параллельно касательной.

### 20. Плоские кривые

Наиболее распространенными являются плоские кривые линии. Для исследования локальных свойств плоской кривой строят в некоторой точке касательную и нормаль.

*Касательной* к плоской кривой в некоторой ее точке называется предельное положение секущей, когда две общие с кривой точки сечения, стремясь друг к другу, совпадут (рис. 72, а). Касательная определяет направление движения точки по кривой.

*Нормалью* называется прямая, лежащая в плоскости кривой и перпендикулярная касательной в точке ее касания.

При решении некоторых задач приходится проводить касательную к кривой. На рис. 72, б приводится прием

построения касательной к кривой из точки, заданной вне кривой с помощью «кривой ошибок». Применение этого приема основано на том положении, что в искомой или заданной точке касания  $M$  длина хорды кривой равна нулю. Требуется провести через точку  $A$  касательную  $t$  к кривой случайного вида. Для этого проведем через точку  $A$  пучок прямых, пересекающих кривую. Полученные хорды делят пополам. Плавная кривая, проведенная через средние точки («кривая ошибок»), в пересечении с заданной кривой определит искомую точку касания  $M$ .

**Свойства точек кривой.** Точка кривой, в которой можно провести единственную касательную, называется *гладкой*. Кривая, состоящая только из одних гладких точек, называется *гладкой кривой*. Точка кривой называется *обыкновенной*, если при движении точки по кривой направление ее движения и направление поворота касательной не изменяются. Точки, не отвечающие этим требованиям, называются *особыми*.

На рис. 73 изображены особые точки кривой:

точка *перегиба*  $A$  — касательная пересекает кривую;

точка *возврата первого рода*  $B$ ;

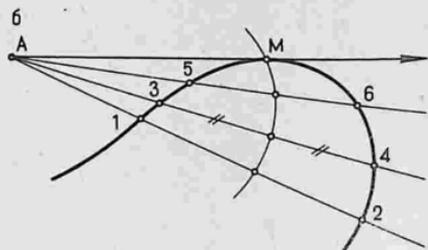
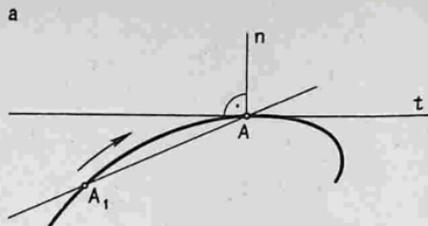
точка *возврата второго рода*  $C$ ;

точка *излома*  $D$  — кривая в этой точке имеет две касательные.

**Понятие о кривизне плоской кривой.**

При исследовании свойств кривой иногда необходимо знать кривизну в ее отдельных точках. Направление кривой меняется от точки к точке. Чем более резко меняется направление кривой, тем больше ее кривизна. На рис. 72,  $a$  кривизна в точке  $A$  больше кривизны в точке  $A_1$ . Так, например, кривизна прямой линии во всех ее точках равна нулю, а кривизна окружности для всех ее точек величина постоянная. Кривизна других кривых в каждой точке различна. Она определяется с помощью окружности, соприкасающейся в этой точке.

*Соприкасающейся окружностью* называется предельное положение окружности, когда она проходит через данную точку и две другие бесконечно близкие



к ней точки. Центр и радиус соприкасающейся окружности определяют центр и радиус кривизны исследуемой кривой в данной ее точке.

*Кривизной ( $K$ ) плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности ( $K = 1/r$ ).* В рассматриваемой точке кривая и соприкасающаяся окружность имеют общие касательную и нормаль. На рис. 74 показано построение центра и радиуса кривизны кривой линии  $BC$  в заданной точке  $A$ . На кривой по обе стороны от данной точки помечают несколько точек и проводят из них и из точки  $A$  полукасательные. На полукасательных откладывают произвольные, но равные отрезки и через полученные точки проводят кривую линию. Точке  $A$  заданной кривой соответствует точка  $A_1$  построенной кривой. В пересечении нормалей, проведенных в точках  $A$  и  $A_1$ , получим точку  $O$  — центр кривизны и величину радиуса кривизны  $r_A$  в точке  $A$  (центр и радиус соприкасающейся окружности).

**Проекции плоских кривых.** Важное прикладное значение имеют некоторые кривые второго порядка — эллипс, парабола, гипербола.

*Эллипс* (замкнутая кривая с двумя

Рис. 72

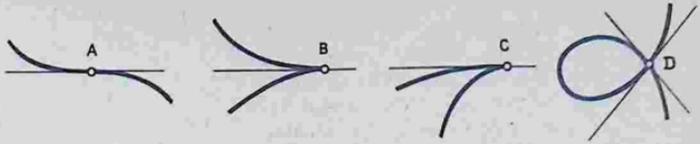
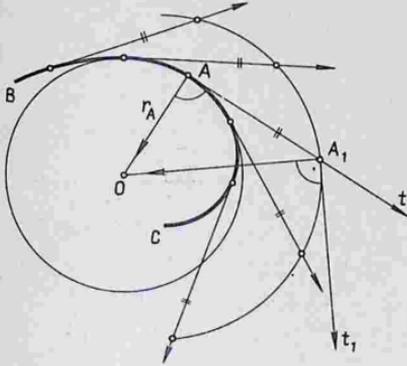


Рис. 73

Рис. 74



осями симметрии и центром) представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 75, а). Эллипс можно построить по точкам исходя из его определения. Из точки  $C$  радиусом  $a$  проводят дугу, которая пересекает большую ось эллипса в точках  $F_1$  и  $F_2$  — фокусах. Затем из фокусов проводят дуги окружностей радиусами  $r$  и  $2a - r$ . Точки пересечения дуг принадлежат кривой эллипса.

**Парабола** (незамкнутая кривая с одной осью симметрии) представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки (фокуса) и прямой (рис. 75, б). Параболу можно построить по точкам исходя из ее определения, если заданы фокус  $F$  и прямая  $ON$  — директриса. Вершина  $A$  параболы делит пополам расстояние между фокусом и директрисой.

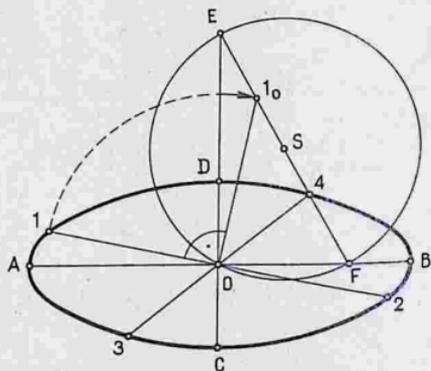
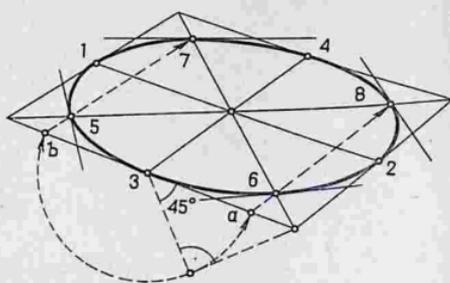
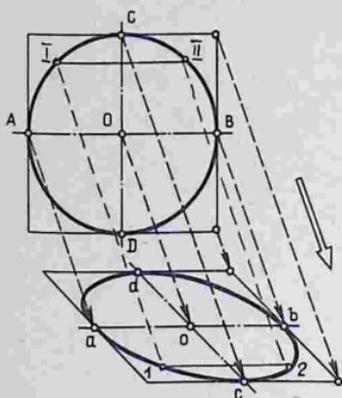
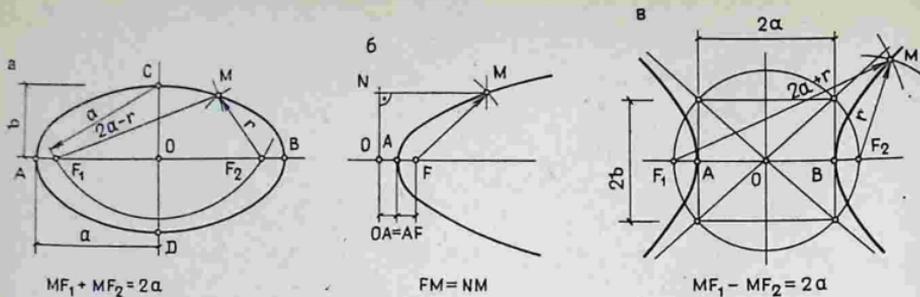
**Гипербола** (кривая, состоящая из двух ветвей, с двумя осями симметрии и центром) представляет собой геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 75, в). Две прямые линии, проходящие через центр  $O$  и касающиеся гипер-

болы в бесконечно удаленных точках, называют **асимптотами** гиперболы. Асимптоты направлены по диагоналям прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Гиперболу, как и параболу, можно построить по точкам.

**Окружность** — самая распространенная кривая, при параллельном проецировании она преобразуется в эллипс (рис. 76). Описанный вокруг окружности квадрат проецируется в параллелограмм, а окружность — в эллипс, так как хорды эллипса, параллельные одному из сопряженных диаметров ( $ab$ ), делятся другим диаметром ( $cd$ ) пополам. Стороны параллелограмма являются касательными к эллипсу в концах сопряженных диаметров.

**Построение эллипса** помимо способа, показанного на рис. 75, а, довольно часто выполняют по **осьми точкам** (рис. 77): четыре точки (1, 2, 3, 4) — концы сопряженных диаметров и четыре точки (5, 6, 7, 8) — пересечения кривой эллипса с диагоналями параллелограмма. Эти точки определяют следующим образом. На любой полустороне параллелограмма строят равнобедренный прямоугольный треугольник. Радиусом, равным катету треугольника, засекают точки  $a$  и  $b$  на данной стороне параллелограмма, а затем проводят прямые, параллельные другим его сторонам, до пересечения с диагоналями параллелограмма.

При построении эллипсов, как параллельной так и центральной проекций окружности, бывает важно **определить большую и малую оси эллипса**, которые являются осями симметрии фигуры и дают возможность проверить точность графических построений. На рис. 78 указан способ построения осей эллипса по заданным его сопряженным диаметрам 1–2 и 3–4. Один из полудиаметров, например  $O-1$ , повернем до по-



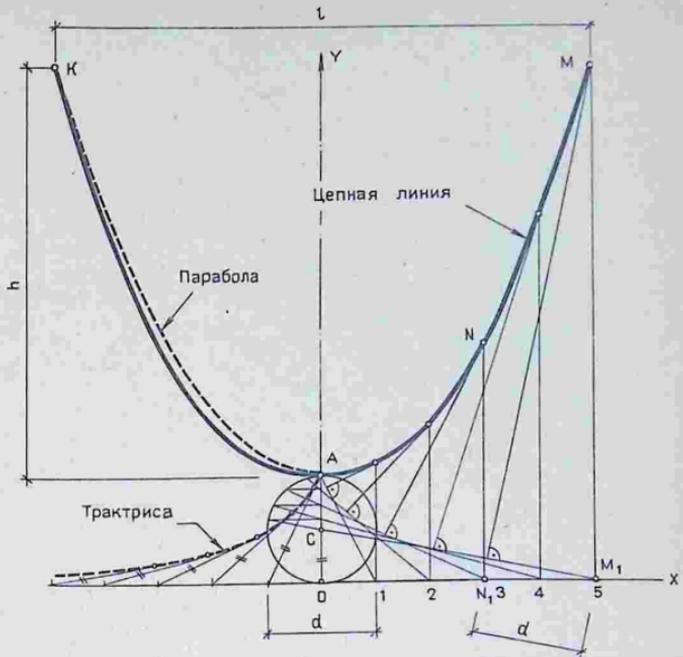
ложения, перпендикулярного этому диаметру. Через точки  $I_0$  и 4 проводим прямую и из середины отрезка  $I_0-4$  описываем дугу радиусом  $OS$ . Прямая  $I_0-4$  пересекает дугу окружности в точках  $E$  и  $F$  (отрезок  $EF$  определяет сумму полуосей эллипса). Прямые  $OE$  и  $OF$  указывают направление малой  $CD$  и большой  $AB$  осей эллипса.

**Области применения кривых.** Регулярные плоские кривые, такие, как окружность и ее дуги, эллипс, парабола, довольно широко применяются в архитектуре. Еще одна плоская кривая, построение которой иногда приходится выполнять при проектировании поверхностей висячих (вантовых) покрытий — цепная линия.

**Цепная линия** — это кривая, форму которой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая нить с закрепленными концами. Для построения кривой (рис. 79) задаются начальной окружностью с центром

ром в точке  $C$  и некоторой точкой  $M_1$ . Чем больше  $CM_1$ , тем полнее кривая [14, с. 99–100]. Величину провисания цепной линии можно выразить также соотношением диаметра начальной окружности  $d$  к стреле провисания  $h$ . Чем соотношение  $d/h$  больше, тем стрела провисания меньше. Горизонтальную прямую  $OM_1$  делят на некоторое число одинаковых отрезков. На прямой, соединяющей центр  $C$  с точкой  $M_1$ , на расстоянии  $d$  от точки  $M_1$  восставим

- Рис. 75  
Рис. 76  
Рис. 77  
Рис. 78  
Рис. 79



перпендикуляр. Точка  $M$  пересечения перпендикуляра с вертикальной прямой является искомой. Построение других точек ясно из чертежа. Форма кривой напоминает параболу. В точке  $A$ , которая называется *вершиной* кривой, касательная горизонтальна. Можно начинать построение кривой в обратном порядке, задавшись сначала точками  $M$ ,  $K$  закрепления нити и вершиной  $A$ . Кривая линия, проведенная через точки оснований перпендикуляров, называется *трактрисой*, или *влекомой* (показана слева от оси  $OY$  штриховой линией). Цепная линия является *эволютой* трактрисы, т.е. геометрическим местом ее центров кривизны. Цепная линия как линия рациональная, отражающая свойства равнонапряженности материала, может быть использована при проектировании различных архитектурных форм.

На рис. 80,а показано построение формы купола. Кривая его очерка представляет собой сочетание двух кривых,

отображающих различные условия работы материала (линия  $O-2$  — растяжение, линия  $2-1-3$  — сжатие). Последний участок выражает линию равного сопротивления — *очертание изогнутой гибкой рейки*.

Рассмотрим графическое построение линии изогнутой рейки (рис. 80, б). На прямой линии выбирают точку  $O$  — *полос* и *вершину*  $A$  кривой. Вычерчивают окружность, центр которой лежит на прямой  $OA$ . На отрезке  $AB$  проводят ряд прямых, перпендикулярных ему. Из точки  $B$  проводят лучи к точкам пересечения параллельных прямых с окружностью (точки  $1_0, 2_0, 3_0, 4_0$ ), а из точки  $O$  проводят лучи, параллельные соответствующим лучам первого пучка, также до пересечения с параллельными прямыми. Получим искомые точки  $1, 2, 3, 4$ . Величина параметра  $a$  относительно диаметра окружности определяет степень изгиба, если он уменьшается — изгиб увеличивается.

Зодчие прошлого, пользуясь изогну-

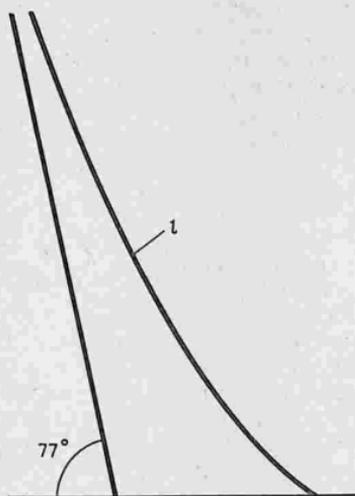
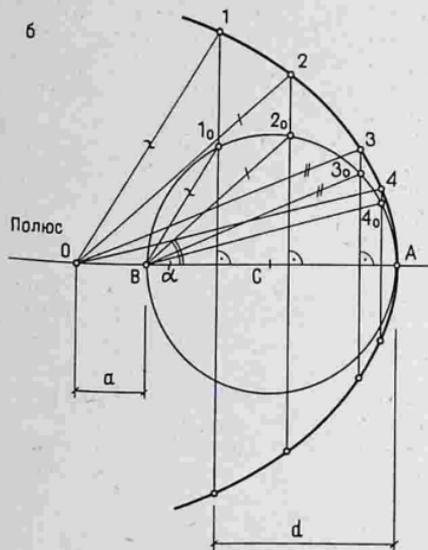
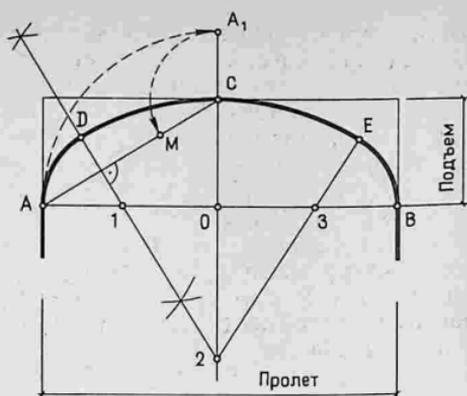
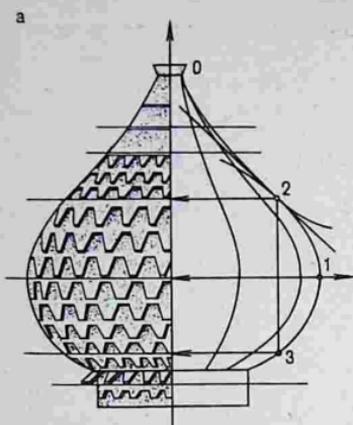


Рис. 80

Рис. 81

Рис. 82

той рейкой, определяли, а затем прорисовывали *энтазис* — незначительную припухлость ствола колонны.

В архитектуре и строительстве применяются и так называемые *составные кривые*. На рис. 81 приведено построение *коробовой кривой* очертания пологого свода. Кривая задана пролетом  $AB$  и подъемом  $OC$  свода и состоит из трех дуг окружностей. Точки сопряжения дуг  $D$  и  $E$  и центры дуг  $1, 3$  и  $2$  определяют следующим образом. На диагонали  $AC$  строим разность полуосей — отрезок

$AM$ . Через середину этого отрезка проводим прямую до пересечения с осями кривой в точках  $1, 2$  и  $3$ . Точки  $D$  и  $E$  сопряжения дуг — гладкие точки. Однако в этих точках радиусы кривизны кривой меняются скачкообразно, например в точке  $D$  — два радиуса, равные  $D-1$  и  $D-2$ . Коробовая кривая гладкая, но не плавная.

Форма кривой может быть задана графически. Так, например, кривая (рис. 82), по которой выполнено очертание тыльной части монумента *Покори-*

телям космоса (Москва, ВДНХ), была сначала прорисована «от руки» авторами проекта, а затем для инженерных расчетов с помощью ЭВМ путем машинного анализа чертежа было найдено уравнение кривой [4]:  $0,3147x^2 - 2 \cdot 1,2876xy - y^2 + 2 \cdot 30,3598x + 289,9827y - 6528,1918 = 0$ .

Итак, к *плавной кривой* должны быть предъявлены следующие требования: непрерывность и существование в каждой точке одной касательной и одного радиуса кривизны.

## 21. Пространственные кривые

Пространственные кривые линии могут иметь самую разнообразную форму. Они могут быть заданы аналитически. Кривые случайного вида задаются графически. Для анализа пространственной кривой необходимо установить самые общие ее свойства, которые изучаются по ее проекциям. Они были рассмотрены в § 19. Для задания на чертеже пространственной кривой линии и точек, принадлежащих ей, достаточно двух ее проекций — горизонтальной и фронтальной. Однако более глубокие локальные свойства пространственной кривой в окрестности любой ее точки исследуются с помощью проекций на гранях так называемого *сопровождающего трехгранника*, который неизменно связан с движущейся по кривой точкой.

На рис. 83, а каждая грань трехгранника пространственной кривой  $e$  располагается параллельно плоскостям проекций  $H$ ,  $V$  и  $W$ , что способствует большей наглядности изображения пространственной кривой.

Допустим, что в точке  $A$  пространственной кривой существует касательная  $t$ . Через касательную можно провести множество плоскостей касательных к кривой в точке  $A$ . Из всего множества касательных плоскостей можно выделить плоскость, которая расположена ближе всех других плоскостей к кривой в точке  $A$ .

Этой плоскости дают следующее более строгое определение: *соприкасающейся плоскостью* называют предельное положение плоскости, проходящей через три смежные и бесконечно сближающиеся точки кривой, одной из которых является данная точка.

Проведем через касательную  $t$  *соприкасающуюся плоскость*  $K$  трехгранника. Вторая плоскость, проходящая через точку  $A$  и перпендикулярная касательной, называется *нормальной плоскостью*  $N$ .

Две эти плоскости пересекутся по прямой  $n$ , которая называется *нормалью*. На ней находится центр кривизны соприкасающейся окружности, которая определяет кривизну пространственной кривой в точке  $A$ .

Третьей плоскостью  $S$  трехгранника является *спрямляющая плоскость*. Ли-

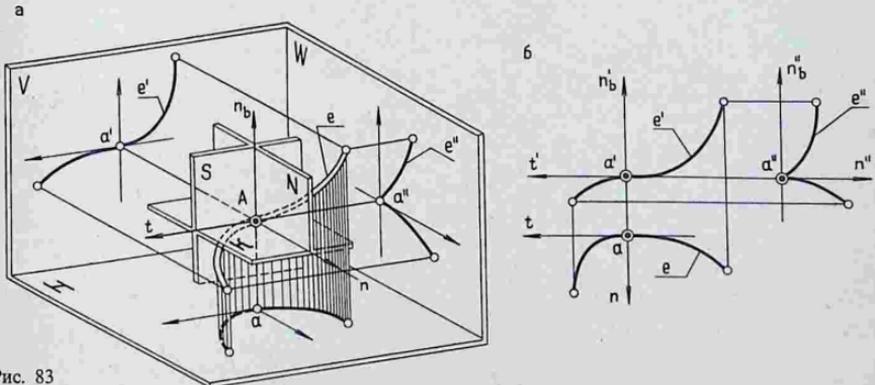


Рис. 83

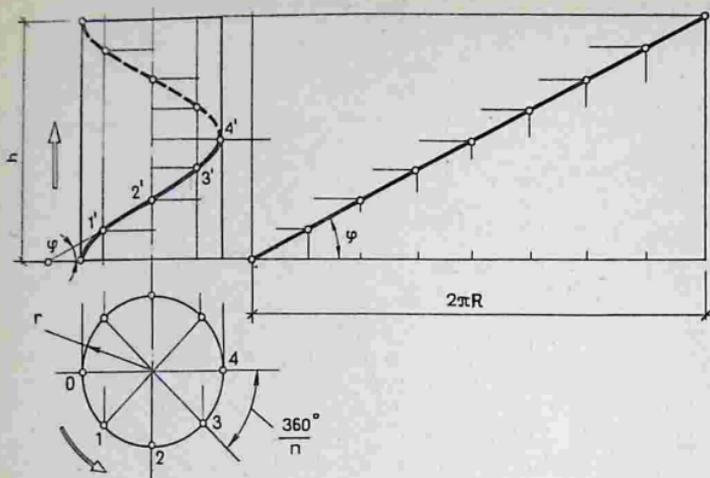


Рис. 84

Рис. 85

ния пересечения  $n_b$  спрямляющей плоскости с нормальной называется *бинормалью*.

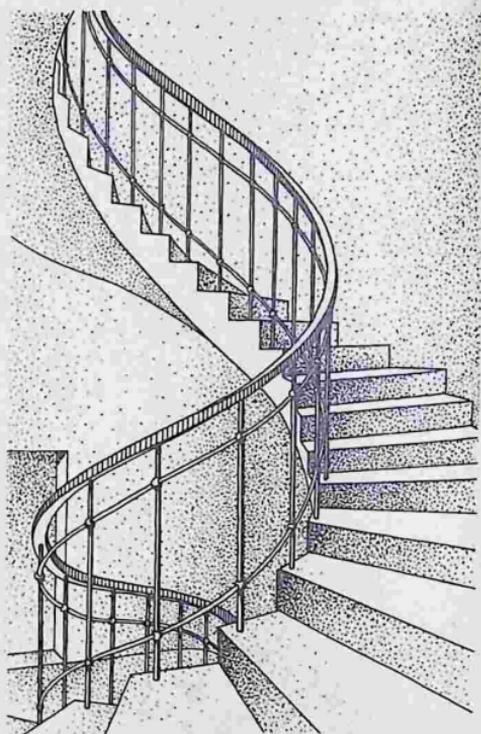
Три взаимно пересекающиеся прямые — касательная  $t$ , нормаль  $n$  и бинормаль  $n_b$  образуют прямоугольную систему координат. Каждая пара этих прямых определяет три плоскости сопрягающего трехгранника кривой.

Локальные свойства пространственной кривой в окрестности точки  $A$  исследуются с помощью проекций на грани трехгранника, что равносильно проецированию на плоскости  $H$ ,  $V$  и  $W$ . Точка  $A$  проецируется на плоскости  $H$  обыкновенной точкой, на плоскость  $V$  — точкой перегиба, а на плоскость  $W$  — точкой с ребром возврата первого рода. На рис. 83, б приведен эпюр проекций пространственной кривой.

#### Проекция пространственных кривых.

Наибольшее применение в практике архитектурного проектирования имеют *закономерные пространственные кривые*, в частности *винтовые линии*. Винтовая линия образуется двойным движением точки — поступательным и вращательным.

На рис. 84 приведено построение проекций *цилиндрической винтовой линии*, или *гелисы*, которая представляет собой траекторию точки, вращающейся вокруг некоторой прямой и совершаю-



щей одновременно равномерное движение вдоль прямой. Фронтальная проекция цилиндрической винтовой линии представляет собой *синусоиду*. Смеще-

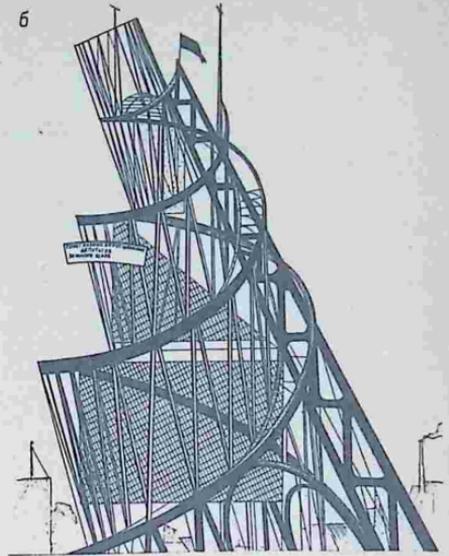
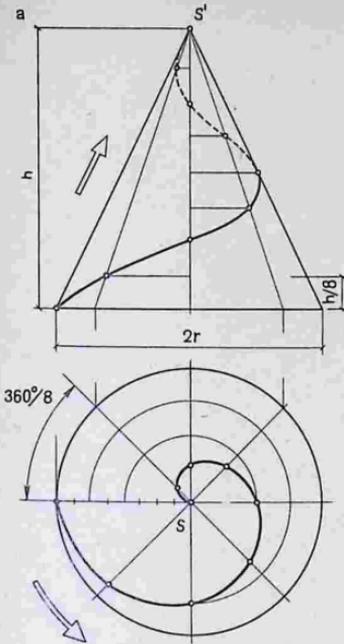


Рис. 86

ние точки вдоль образующей за один оборот называется *шагом*  $h$  винтовой линии. При развертывании цилиндрической поверхности в плоскость цилиндрическая винтовая линия изобразится прямой линией. Угол  $\varphi$ , составленный касательной к винтовой линии с плоскостью, перпендикулярной оси, называется *углом подъема* винтовой линии.

В архитектурной практике цилиндрические винтовые линии применяются для образования контуров каркаса и поверхностей винтовых лестниц (рис. 85), винтовых пандусов для въезда автомашин в многоэтажных гаражах, для устройства развязок в двух уровнях на пересечении магистралей и т. п.

На рис. 86, а дано построение проекций конической винтовой линии, которая представляет собой траекторию точки, равномерно перемещающейся по обра-

зующей прямого кругового конуса и в то же время равномерно вращающейся вместе с образующей вокруг оси. Горизонтальная проекция конической винтовой линии представляет собой *спираль Архимеда*.

Проекции каждой точки конической винтовой линии определяются пересечением соответствующих образующих с проекциями параллелей конуса, плоскости которых смещены по вертикали на расстояние, в данном примере равное  $h/8$ .

На рис. 86, б приведен проект памятника III Интернационалу, созданный в 1919 г. художником В. Татлиным. Металлическая стержневая наклонная башня высотой 400 м сужается кверху. Динамику всей композиции придают элементы двух конических винтовых линий.

## Глава 5. Кривые поверхности

### 22. Общие сведения о кривых поверхностях

Кривые поверхности отличаются большим разнообразием форм — от самых простых до сложнейших, причудливых. Поверхности, полученные на основе геометрического способа образования, отличаются целостностью и структурной четкостью, а также возможностью математического описания и точного отображения на чертеже.

Кривые поверхности открывают широкие возможности для оригинальных и выразительных архитектурных решений. Чтобы выбрать при проектировании ту или иную поверхность, архитектор должен не только представить ее геометрическую форму на чертеже, но и выявить с помощью специальных графических построений и перспективных изображений светотеневые свойства поверхности, а также форму ее граничного и видимого контура для наиболее характерных точек зрения.

Однако геометрическая форма определяет не только эстетические качества поверхности. Выдающийся итальянский архитектор и инженер П. Л. Нерви сказал: «Несущая способность конструкции — функция ее геометрической формы». Современные оболочки способны перекрывать пролеты до 300 м. Так, например, висячая оболочка в виде эллиптического параболоида над стадионом «Олимпийский» в Москве имеет размеры главных осей 224 и 186 м.

**Образование и задание поверхностей.** В начертательной геометрии поверхность рассматривается как непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону (рис. 87). Такой способ образования поверхностей называют *кинематическим*.

Линию  $l$ , которая при своем движении образует поверхность, называют *образующей*. Образующая может пере-

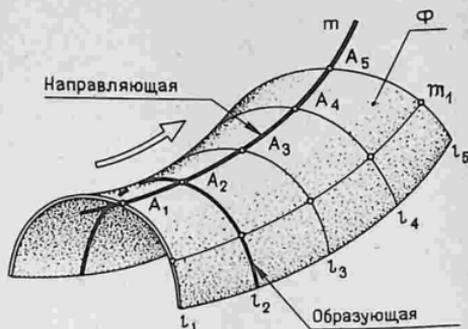


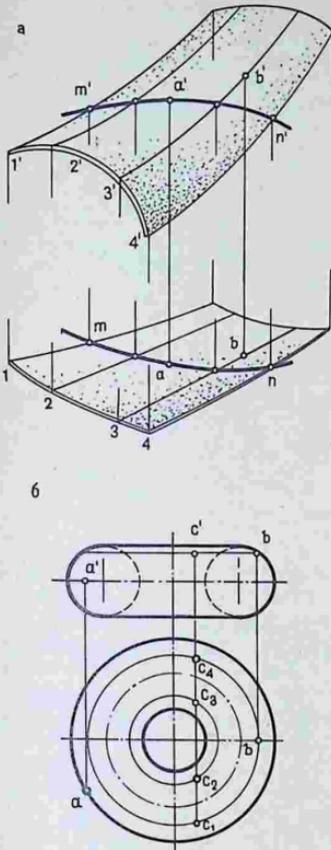
Рис. 87

Рис. 88

мещаться по какой-либо другой неподвижной линии  $m$ , называемой *направляющей*. Поскольку образующая и направляющая могут иметь самую различную форму, то и поверхностей может быть образовано бесчисленное множество. Вместе с тем форма и закон перемещения образующей единственным образом определяют вид кривой поверхности.

**Определитель и каркас поверхности.** При движении образующей каждая ее точка описывает в пространстве некоторую линию  $m_1$ . Таким образом, вся поверхность окажется покрытой сетью линий, состоящей из двух семейств: семейства образующих  $l_1, l_2, \dots$  и семейства линий  $m, m_1, \dots$ , описываемых отдельными точками образующей. Каждая линия одного семейства пересекает все линии второго семейства. Для изображения на чертеже выделяют некоторое количество линий, которые образуют *линейный каркас* поверхности.

Если закон движения образующей и ее форма определенным образом заданы, то поверхность в начертательной геометрии определяют не каркасом, а образующей и условиями ее перемещения. При этом чертеж поверхности должен быть таким, чтобы на нем можно было выделить и построить любую



**Построение точки, принадлежащей поверхности.** Точка принадлежит поверхности, если она лежит на линии этой поверхности.

Чтобы по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, построить вторую ее проекцию (рис. 88, а), необходимо построить каркас поверхности I—II—III—IV, провести через заданную проекцию точки, например  $a'$ , вспомогательную линию  $m'-n'$ , принадлежащую поверхности, а затем построить вторую проекцию вспомогательной линии  $m-n$  и проекцию искомой точки  $a$ . Если образующая каркаса совпадает с заданной проекцией точки  $b$ , построение второй проекции упрощается.

Чтобы построить горизонтальную проекцию произвольной точки  $C$  (рис. 88, б), принадлежащей поверхности вращения, необходимо провести через фронтальную проекцию  $c'$  вспомогательную параллель поверхности. Затем, построив горизонтальную проекцию параллели (окружность), определить на ней горизонтальную проекцию точки  $c$ . Как следует из приведенного построения, фронтальной проекции точки  $c'$  на горизонтальной проекции может соответствовать любая из четырех проекций точек  $c_1$  и  $c_4$ , лежащих на параллели внешней части поверхности, или  $c_2$  и  $c_3$ , лежащих на параллели внутренней части поверхности. Точка  $A$  лежит на экваторе поверхности, точка  $B$ —на главном меридиане.

**Очертание поверхности.** Чтобы придать чертежу поверхности наглядность, строят очерк—проекцию линии контура поверхности (рис. 89).

*Контуром* или *контуром видимости* поверхности называется линия, точки которой являются точками касания проектирующих прямых. Проекция контура на плоскости проекций называется очерком или *очертанием* поверхности на данной плоскости (рис. 89, а). При изображении поверхности на чертеже проекцию контурной линии называют линией *видимости*, которая является границей, отделяющей видимую часть поверхности от скрытой, невидимой ча-

линию и точку, принадлежащие поверхности.

Совокупность геометрических элементов и условий, необходимых и достаточных для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже, называют *определителем* кинематической поверхности. Определитель поверхности содержит две части—геометрическую и алгоритмическую.

Из сказанного выше можно сделать следующий вывод: *поверхность считается заданной, если относительно любой точки пространства однозначно решается вопрос о принадлежности ее к данной поверхности.*

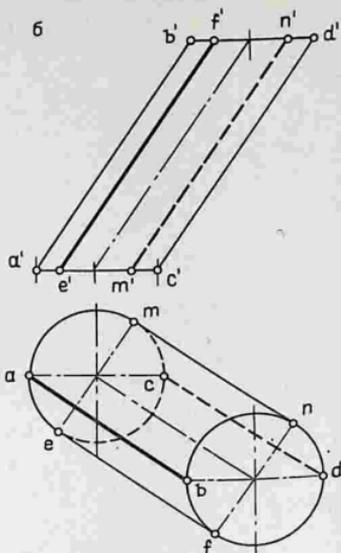
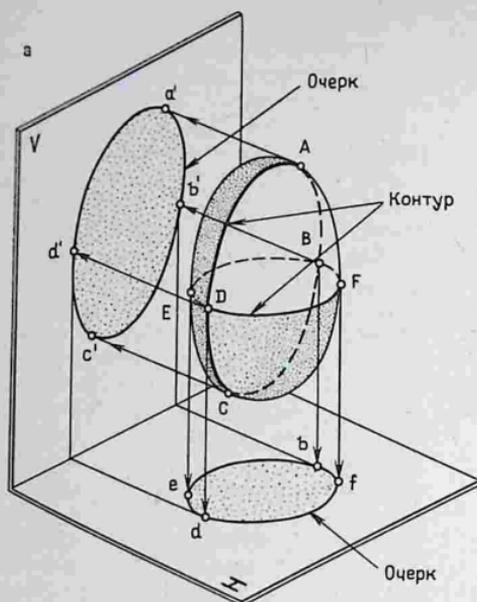


Рис. 89

сти на данной плоскости проекций.

При изображении поверхности на плоскостях проекций образуются разные линии ее контура (см. рис. 89, б). При проецировании на фронтальную плоскость проекции контурными являются образующие  $AB$  и  $CD$ , а на горизонтальной проекции — контурными будут образующие  $MN$  и  $EF$ . Линию или границу отсека поверхности, например линию основания цилиндра, которая также представляет собой контурную линию, но не изменяет своего положения на поверхности при различных ее положениях относительно плоскостей проекций, называют **границным контуром** поверхности.

**Классификация поверхностей.** Из большого числа возможных способов образования поверхностей рассмотрим основные способы, выделив главные признаки их классификации.

1. По закону движения образующей — поверхности с поступательным движением образующей, с вращательным и винтовым движением образующей.

2. По виду образующей различают поверхности с прямолинейной образую-

щей — линейчатые и поверхности с криволинейной образующей — нелинейчатые.

3. По закону изменения формы образующей — с образующей постоянного или переменного вида.

4. По признаку развертывания поверхности на плоскость — развертываемые и неразвертываемые.

5. По способу задания поверхности — аналитическому или графическому<sup>1</sup>.

6. По дифференциальным свойствам — гладкие или негладкие поверхности и по признаку кривизны поверхности.

Необходимо отметить, что одни и те же поверхности могут быть классифицированы по различным признакам. Поэтому в качестве основного признака выделим вид образующей и характер ее

<sup>1</sup> К первой группе относятся поверхности, положение точек которых можно выразить аналитически (алгебраические и трансцендентные поверхности), в отличие от поверхностей случайного вида или поверхностей, образование которых носит эмпирический (опытный) характер, и задаваемых графически — каркасом линий. Аналитический способ задания поверхности отмечает существенную особенность моделирования поверхности. Он важен, в частности, при описании геометрических элементов чертежа для ввода в ЭВМ (см. § 38).



Рис. 90

перемещения, т. е. *кинематический* признак образования поверхностей.

На рис. 90 приведена примерная классификационная схема. Все кривые поверхности разделены на два класса: первый класс является основным — это поверхности, образуемые *кинематическим* способом, второй класс — поверхности, задаваемые *каркасом*. Первый класс в зависимости от вида образующей делится на два подкласса — линейчатые и нелинейчатые поверхности. Второй класс также делится на два подкласса поверхностей, задаваемых линейным и точечным каркасом. Подклассы включают группы или виды поверхностей.

Далее будут рассмотрены формообразование и свойства следующих видов поверхностей: 1) поверхности вращения; 2) развертываемые поверхности; 3) винтовые поверхности; 4) поверхности с плоскостью параллелизма; 5) поверхности параллельного переноса; 6) каркасные поверхности.

### 23. Поверхности вращения

*Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением*

*линии, образующей вокруг неподвижной прямой — оси вращения* (рис. 91). На проекционном чертеже ось вращения полагают перпендикулярно плоскости проекций. Окружности, по которым перемещаются все точки образующей, называются *параллелями*; наибольшую параллель называют *экватором*, наименьшую — *горловиной*. Если ось поверхности вертикальна, то все параллели проецируются на горизонтальной проекции без искажения.

Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность по линиям, называемым *меридианами*. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной плоскости проекций, называется *главным* и проецируется на эту плоскость проекций очерком поверхности. Параллели и меридианы, пересекаясь между собой, образуют на поверхности вращения *ортогональную сеть*. Она называется ортогональной потому, что меридианы пересекаются с параллелями под прямым углом.

Вид поверхности вращения зависит от формы образующей и ее положения относительно оси вращения. Рассмотрим поверхности вращения, образованные вращением кривой линии.

**Сфера.** Поверхность сферы образуется вращением окружности вокруг диаметра.

**Эллипсоид вращения.** Если сферу сжать или растянуть вдоль одного из диаметров, то образуются эллипсоиды вращения (рис. 92, а), их меридианом является эллипс. Если эллипс вращается вокруг большой оси, эллипсоид называют *вытянутым*; если вращение происходит вокруг малой оси, эллипсоид называют *сжатым* или *сфероидом*. Проекции точки А, принадлежащей поверхности эллипсоида, построены с помощью проведения на поверхности вспомогательной параллели.

**Тор.** Поверхность тора образуется вращением окружности вокруг оси, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности (рис. 92, б). Если окружность не пересекает ось вращения, поверхность называют *открытым тором* или *кольцом*. Если ось касается окружности, то поверхность называют *закрытым тором*, а если ось пересекает окружность, тор называют *самопересекающимся*.

**Параболоид вращения.** Меридианом поверхности является парабола, ось которой служит осью поверхности (рис. 92, в).

**Гиперболоид вращения.** Меридианом поверхности является гипербола. Если ось вращения совпадает с действительной осью гиперболы, образуется *двуполостный* гиперболоид вращения (рис. 92, д); если осью вращения является мнимая ось, то — *однополостный* (рис. 92, е).

**Области применения поверхностей вращения.** Поверхности вращения с давних времен получили широкое применение в архитектуре и строительстве. Они наиболее ярко выражают центричность архитектурной композиции и, кроме того, отличаются строительной технологичностью возведения сооружений. Поверхности, образованные вращением окружности, получили довольно большое распространение в архитектуре. Сферическую поверхность имеют резервуары для хранения газа на химических заводах. Части сферической поверхно-

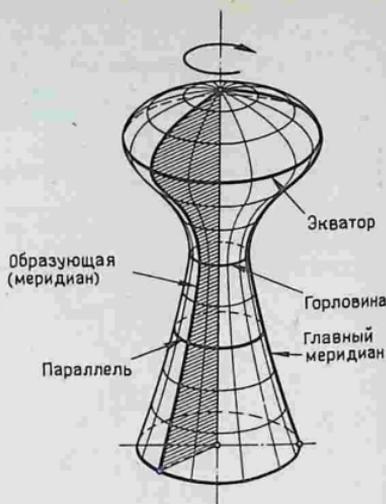


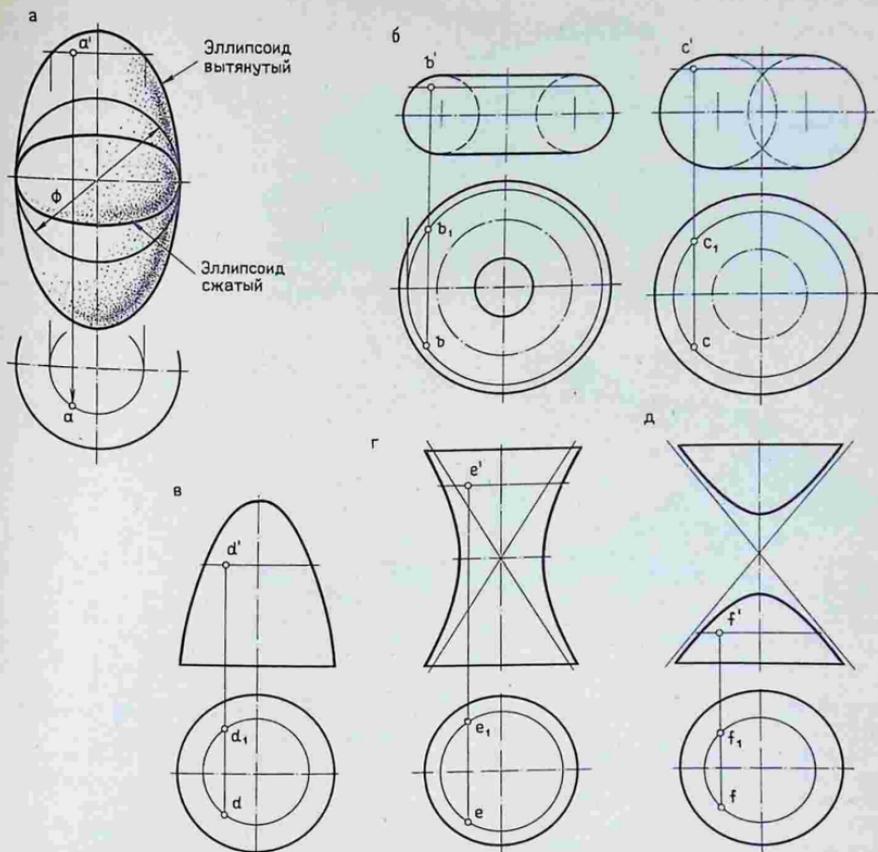
Рис. 91

Рис. 92

сти — сферические сегменты образуют купола и сферические покрытия зданий (рис. 93).

Отсеки поверхности эллипсоида вращения находят применение при сооружении сводчатых покрытий внутренних пространств зданий. Полную поверхность открытого тора — кольца придают корпусу термоядерного реактора, отсеки тора являются элементами целого ряда архитектурных деталей и фрагментов. Поверхность параболоида вращения или близкую к нему форму имеют некоторые купольные покрытия сооружений. Конструкции этой формы вследствие равномерного распределения нагрузки обладают хорошей несущей способностью.

**Линейчатые поверхности вращения.** Рассмотрим поверхности, образованные вращением прямой линии, так называемые *линейчатые* поверхности. К их числу относятся *прямой круговой цилиндр* и *прямой круговой конус*. В первом случае прямая образующая параллельна оси вращения, а во втором — пересекает ее. Так как эти поверхности вращения бесконечно простираются в направлении своих образующих, то на



изображениях их ограничивают следами этих поверхностей на плоскостях проекций или ограничивают параллелью поверхности. Цилиндрические поверхности находят широкое применение при проектировании и строительстве различного рода сводчатых покрытий зданий (рис. 94), сводов перронных залов и тоннелей метро, цилиндрических резервуаров и других устройств.

Рассмотрим еще одну поверхность, образованную вращением прямой линии.

**Однополостный гиперboloид вращения.** Ранее (см. рис. 92, г) указывался

способ образования этой поверхности, меридианом которого служила гипербола. Однополостный гиперboloид вращения может быть образован также вращением прямой линии, которая скрещивается с неподвижной осью вращения (рис. 95, а). При вращении прямой образующей  $AB$  вокруг оси  $i$  каждая точка образующей перемещается по окружности. Одна из параллелей — это окружность с минимальным радиусом  $OC$ , равным кратчайшему расстоянию между скрещивающимися прямыми (горловина поверхности). Очевидно, что та же самая

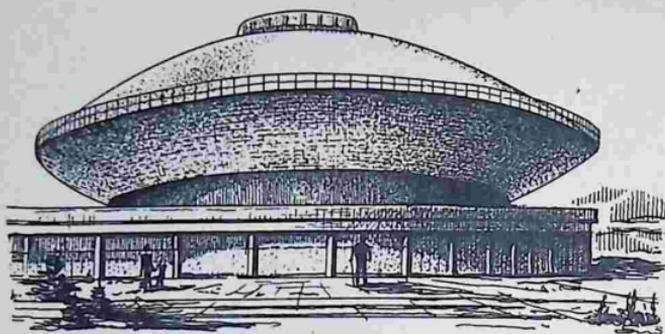


Рис. 93

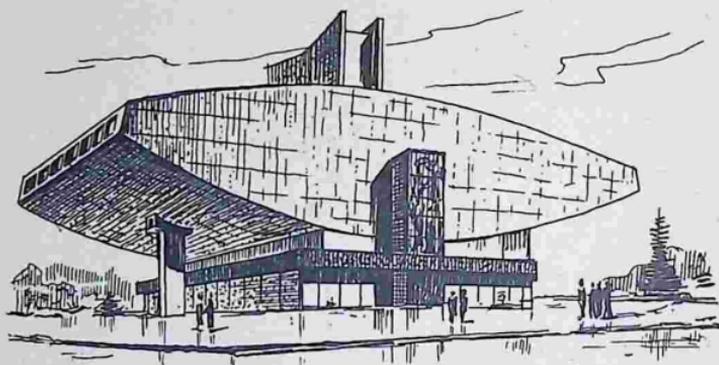


Рис. 94

поверхность может быть образована прямой образующей, наклоненной в противоположную сторону (штриховая прямая). Таким образом, однополостный гиперболоид вращения имеет две образующие прямые линии, на его поверхности имеются два семейства прямолинейных образующих.

Если изменять наклон образующей и привести ее в положение, параллельное оси вращения, гиперболоид вращения вырождается в цилиндр вращения (рис. 95, б). Если, не меняя наклона образующей, приблизить ее к оси так, чтобы они пересеклись, гиперболоид вращения вырождается в конус вращения.

Сформулируем основные свойства однополостного гиперболоида вращения:

- 1) однополостный гиперболоид вращения — дважды линейчатая поверхность;
- 2) очерком (меридианом) поверхности является гипербола;

3) все образующие одного семейства — скрещивающиеся прямые;

4) каждая образующая одного семейства пересекает все образующие другого семейства;

5) через каждую точку поверхности проходят две прямолинейные образующие разных семейств.

**Построение проекций однополостного гиперболоида вращения** (рис. 95, в). Пусть ось вращения расположена перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций. Зададимся основными параметрами отсека поверхности — его высотой, наибольшими и наименьшей параллелями отсека (верхняя и нижняя его параллели могут быть разного диаметра). Разобьем большую параллель на равные части и пронумеруем их. Горизонтальные проекции образующей ( $ab$ ) должны касаться наименьшей окружности — горловины поверхности. После каждого последующего положения горизонтальной проекции образу-

Рис. 95

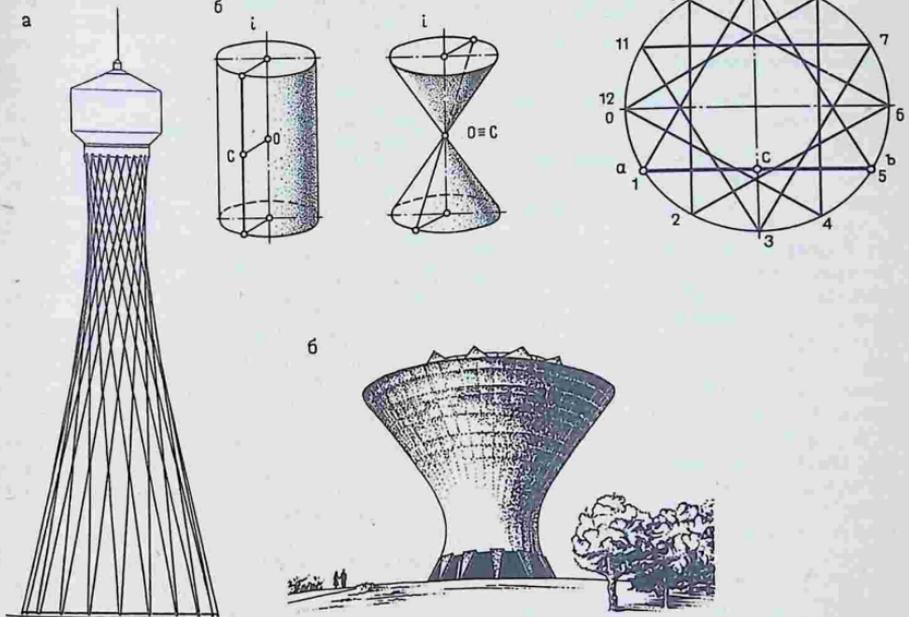
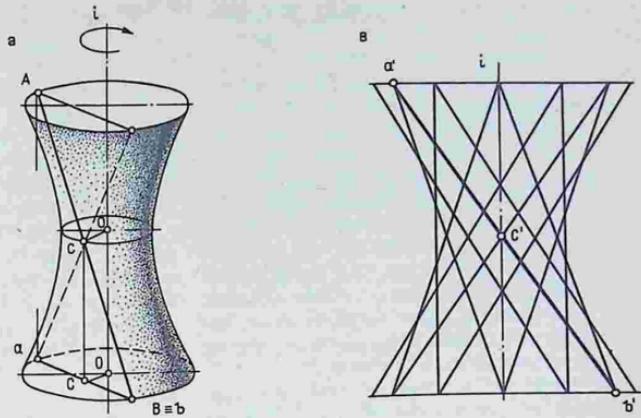


Рис. 96

шей следует построить ее фронтальную проекцию. При построении проекций всех положений образующей при одном ее повороте вокруг оси получаются два

семейства прямых, образующих поверхности, совпадающие на обеих проекциях.

Это свойство однополостного гиперболоида было использовано выдаю-

шимся русским инженером В. Г. Шуховым при сооружении в 1921 г. радиомачты на Шаболовке в Москве. Радиобашня высотой 160 м состоит из шести уменьшающихся сверху ярусов — отсеков гиперboloида вращения. Каждый отсек, как и башня в целом, представляет собой жесткий каркас металлических стержней, соединенных между собой. Большие технологические преимущества этой конструкции и выразительный ажурный силуэт послужили поводом для широкого ее применения при сооружении радиомачт, маяков, водонапорных башен, градирен и других опорных конструкций (рис. 96, а).

Поверхность однополостного гиперboloида вращения находит в настоящее время применение и в конструкциях из железобетона (рис. 96, б). В этом случае линейчатость поверхности выгодно используется также и для устройства скользящей опалубки.

#### 24. Развертываемые поверхности

*Развертываемой называется поверхность, которую можно развернуть без разрывов и складок и совместить с плоскостью.*

Развертываемость — важное свойство кривой поверхности, она дает возможность изготовлять из плоского листового материала путем изгибания разнообразных криволинейные формы — резервуары и трубопроводы промышленных предприятий, элементы вентиляционных систем в зданиях и т. п. При развертывании поверхности сохраняются длины любых линий, принадлежащих поверхности, углы, образованные двумя линиями, и площади фигур, образованные замкнутыми линиями.

Среди большого числа кривых поверхностей к развертываемым относятся линейчатые поверхности, образованные движением прямой образующей. Однако линейчатость не является достаточным условием. К развертываемым относятся только три линейчатые поверхности — цилиндрическая, коническая и торсовая.

*Цилиндрическая поверхность* образуется параллельным перемещением прямой образующей  $l$  по некоторой кривой направляющей линии  $n$  (рис. 97, а).

*Коническая поверхность* образуется движением прямой образующей, проходящей через неподвижную точку  $S$  (вершину), по кривой направляющей  $n$ .

Цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай конической поверхности, у которой вершина — бесконечно удаленная точка образующей. Частные виды этих поверхностей представляют собой прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус.

*Торсовая поверхность* интересна не только своими геометрическими свойствами, но и важным прикладным значением. *Торсовой поверхностью* или *поверхностью с ребром возврата* (рис. 97, б) называется линейчатая поверхность, образованная множеством положений движущейся прямой образующей, касательной к пространственной кривой линии  $n$ . Такая поверхность может быть задана только одной линией — направляющей  $n$ . Направляющая торсовой поверхности называется *ребром возврата*, так как сечение поверхности плоскостью представляет собой кривую  $NKM$  с особой точкой  $K$  — точкой возврата (см. § 20, рис. 73), расположенной на ребре возврата. Точка касания делит касательную на две полупрямые, а ребро возврата делит поверхность на две полости, что наглядно выявляется линией сечения. Если ребро возврата преобразовать в плоскую кривую, то поверхность тора вырождается в отсек плоскости.

Для архитектурно-строительной практики важен случай, когда ребром возврата поверхности служит *цилиндрическая винтовая линия* (рис. 98, а). Кривая сечения поверхности горизонтальной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, или горизонтальный след поверхности, представляет собой плоскую кривую — *эвольвенту*. Горизонтальная проекция ребра возврата (окружность) является *эволютой* этой кривой. Эволю-

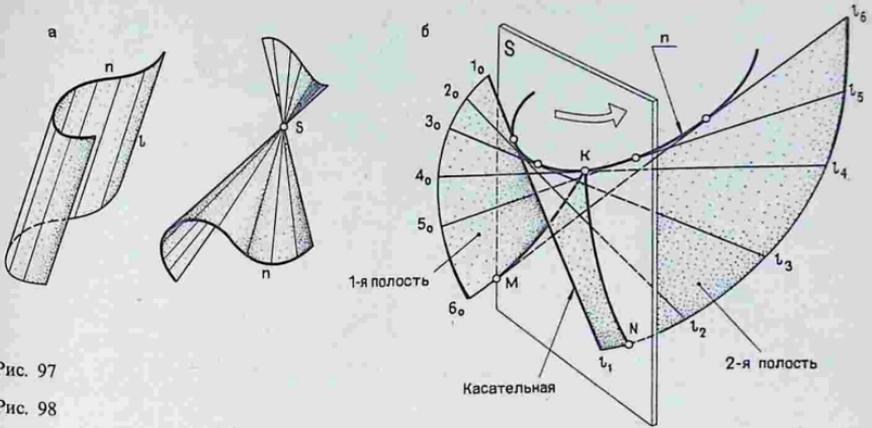
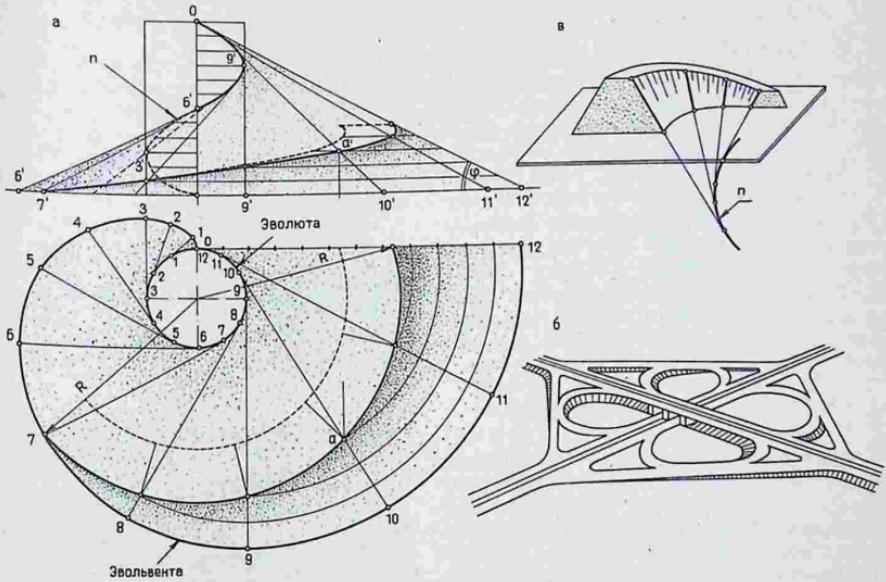


Рис. 97

Рис. 98



та — это множество центров кривизны эвольвенты (точки 1 ... 12 на окружности). Так как углы наклона всех образующих к горизонтальной плоскости равны, этот вид тора получил название *поверхности одинакового ската*.

Поверхность одинакового ската на-

ходит применение при проектировании и устройстве откосов дороги на круглых участках с подъемом, например, откосов транспортной развязки в двух уровнях на пересечении автомагистралей (рис. 98, б).

На рис. 98, а показаны проекции полотна дороги, бровка которой является

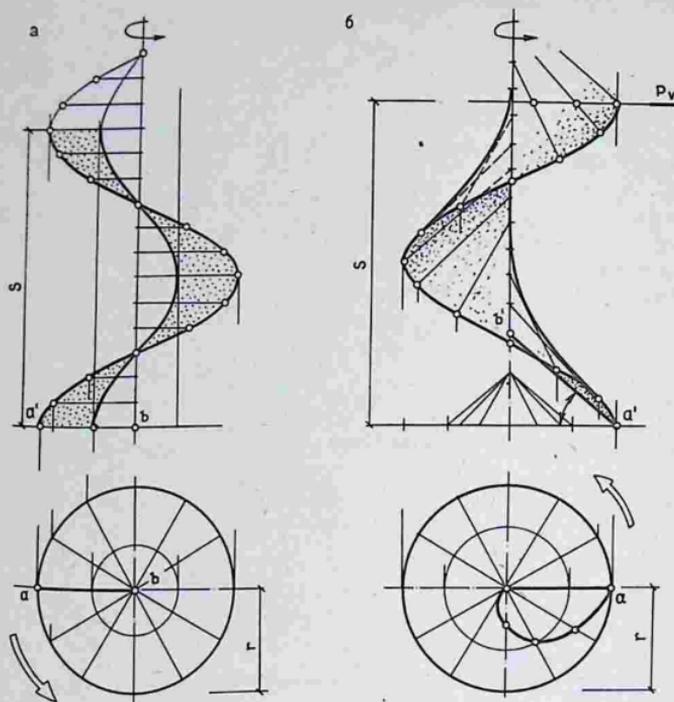


Рис. 99

Рис. 100

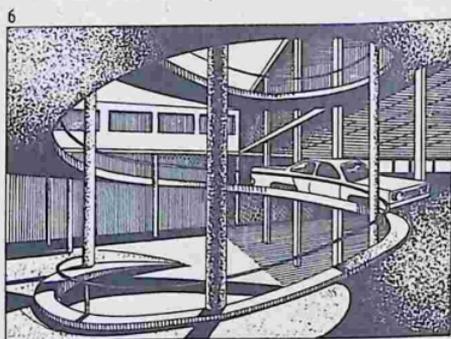
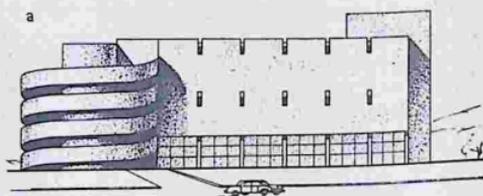
винтовой линией. На противоположной, внутренней, вогнутой стороне полотна дороги (рис. 98, в) откосы также представляют собой поверхность одинакового ската, но с ребром возврата, расположенным ниже поверхности откоса.

## 25. Винтовые поверхности

Винтовая поверхность образуется винтовым движением образующей линии. Это совокупность двух движений образующей — поступательного перемещения вдоль оси поверхности и вращательного вокруг оси.

Если образующая — прямая линия, винтовую поверхность называют геликоидом. Геликоид называют прямым, если образующая составляет с осью поверхности прямой угол; в других случаях геликоид называют наклонным.

На рис. 99, а приведены проекции прямого геликоида. Если образующая пересекается с осью поверхности, гели-



коид называют закрытым, если не пересекается — геликоид называют открытым, как показано на рисунке. На

рис. 99, б изображены проекции наклонного закрытого геликоида. Сечение этой поверхности горизонтальной плоскостью, перпендикулярной оси, дает спираль Архимеда.

При построении проекции наклонного геликоида целесообразно пользоваться направляющим конусом. Углы наклона к оси поверхности образующей геликоида и конуса берутся равными, а образующие — соответственно параллельными.

Поверхность полотна дороги на рис. 98, а также поверхность пандусов многоэтажных гаражей (рис. 100) и некоторых других зданий представляет собой прямой открытый геликоид.

## 26. Поверхности с плоскостью параллелизма

Поверхности этого вида находят широкое применение в образовании поверхностей-оболочек для покрытий большепролетных зданий. Архитектурные формы, образованные на их основе, отличаются не только эстетическими, но также конструктивными и экономическими достоинствами.

При проектировании и конструировании поверхностей-оболочек большое место занимает геометрический этап проектирования.

Рассмотрим некоторые линейчатые поверхности с двумя направляющими  $m$  и  $n$  (рис. 101), образующие  $l$  которых параллельны плоскости  $P$ , называемой направляющей плоскостью или пло-

скостью параллелизма. В зависимости от формы направляющих образуются три частных вида поверхностей.

**Цилиндроид.** Цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей  $l$  по двум направляющим кривым линиям  $m$  и  $n$ , при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма  $P$  (рис. 102, а). Направляющие могут быть как плоскими, так и пространственными кривыми. На проекционном чертеже цилиндроид задают проекциями направляющих и положением плоскости параллелизма. Поверхность цилиндроида находит применение при проектировании и строительстве оболочек покрытий промышленных зданий (рис. 102, б).

**Коноид.** Коноидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей  $l$  по двум направляющим, одна из которых кривая линия  $m$ , а другая — прямая  $n$ , при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма  $P$  (рис. 103, а). Если прямолинейная направляющая коноида перпендикулярна плоскости параллелизма, то коноид называют прямым. На рис. 103, б приведена схема покрытия промышленного здания составной поверхностью из прямых коноидов, так называемое шедовое покрытие, обеспечивающее естественное освещение и вентиляцию помещения.

**Гиперболический параболоид.** Гиперболическим параболоидом или косою плоскостью называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей  $l$ , параллельной плоскости параллелизма  $P$ , по двум направляющим линиям — скрещивающимся прямым  $m$  и  $n$  (см. рис. 101). Эта поверхность, получившая большое распространение в архитектурной практике, обладает рядом замечательных свойств, на которых следует остановиться подробнее.

Гиперболический параболоид — поверхность, дважды линейчатая, как и однополостный гиперболоид (см. рис. 95). Она содержит два семейства прямолинейных образующих. Если принять за направляющие прямые  $AB$

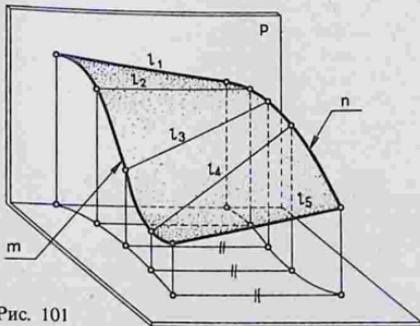


Рис. 101

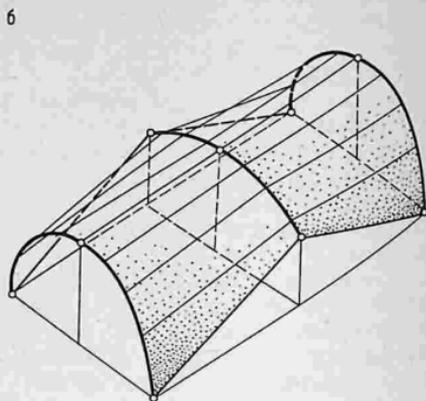
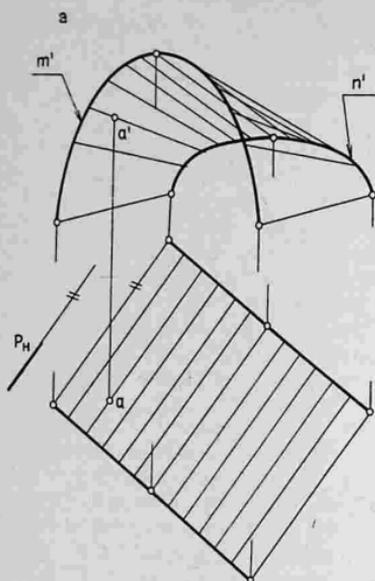
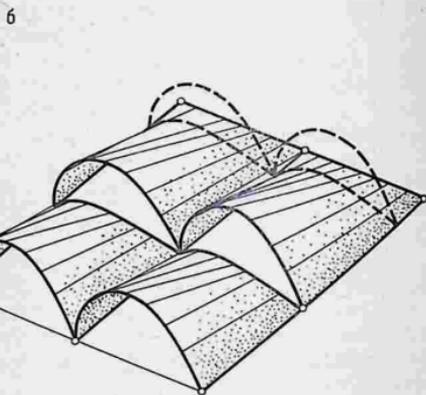
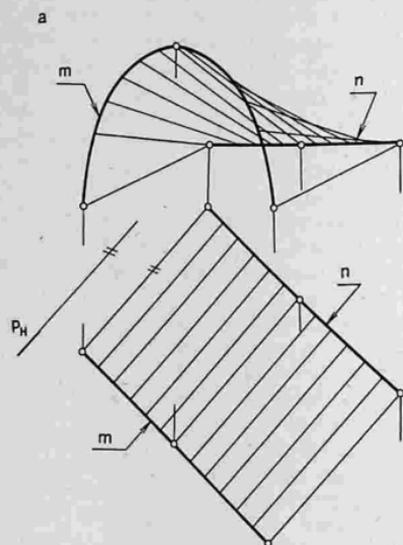


Рис. 102

Рис. 103



и  $CD$  (рис. 104), а за плоскость параллелизма — горизонтально проецирующую плоскость  $S$ , мы получим первое семейство образующих  $BC \dots AD$ , параллельных плоскости параллелизма  $S$  и пересекающих направляющие прямые.

Если принять за направляющие прямые крайние (контурные) образующие первого семейства  $BC$  и  $AD$ , которые тоже являются скрещивающимися прямыми, и другую плоскость параллелизма  $T$ , получим второе семейство образующих  $AB \dots CD$ .

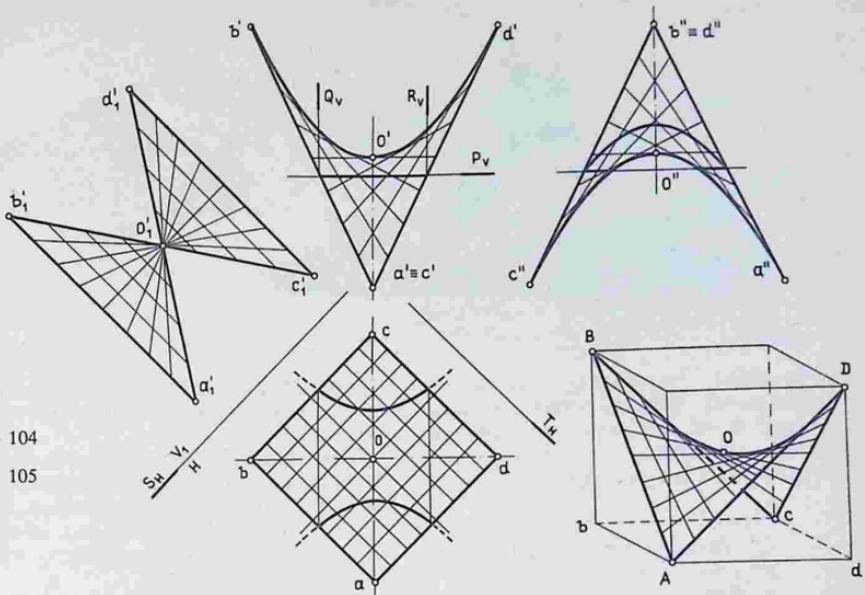
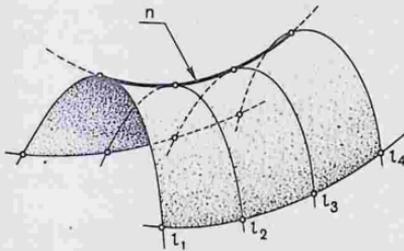


Рис. 104

Рис. 105



Образующие одного семейства — скрещивающиеся прямые; каждая образующая одного семейства пересекает все образующие второго семейства. Таким образом, гиперболический параболоид имеет непрерывный сетчатый каркас из двух семейств пересекающихся образующих. Это свойство придает поверхности большую пространственную жесткость и хорошую технологичность возведения.

Криволинейные очерки поверхности на фронтальной и профильной проекциях представляют собой параболы. Через контурные линии этих очерков на горизонтальной проекции проходят плоскости симметрии  $bd$  и  $ac$ . При про-

ещировании отска поверхности на плоскость параллелизма  $S$  направляющие  $AB$  и  $CD$  проецируются параллельными прямыми, а две другие — пересекающимися в точке  $O'_1$ .

Гиперболический параболоид на чертеже может быть задан так называемым *неплоским четырехугольником*  $ABCD$  — проекциями контура отска поверхности, состоящего из двух прямых образующих одного семейства и двух образующих другого семейства. Поверхность гиперболического параболоида может быть образована и другим способом, как поверхность параллельного переноса, когда одна парабола перемещается параллельно самой себе по направляющей параболе, расположенной во взаимно перпендикулярной плоскости (рис. 105).

В проектной практике гиперболический параболоид задается отсском поверхности, контуры которого определяются архитектурными и конструктивными задачами (рис. 106). Обладая выразительным силуэтом и разнообразными очертаниями граничного контура, поверхность гиперболического

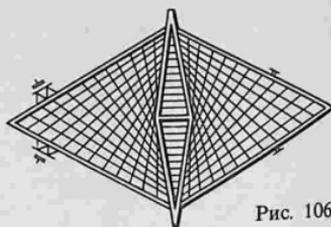
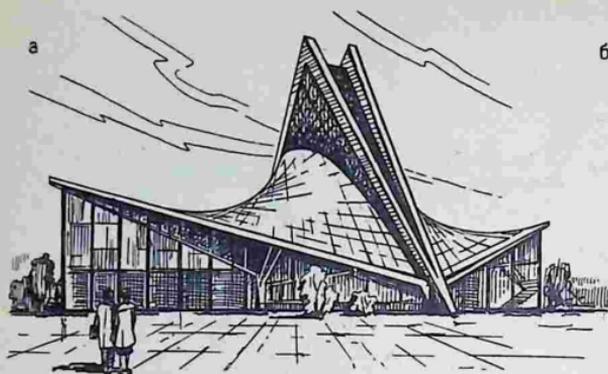


Рис. 106

Рис. 107

Рис. 108

параболоида позволяет создавать оригинальные пространственные композиции. В гл. 8 приведены примеры архитектурных решений с применением поверхностей с плоскостью параллелизма.

### 27. Поверхности параллельного переноса, второго порядка и каркасные

Ниже будут рассмотрены кривые поверхности различного вида. Однако все они могут быть заданы на чертеже каркасом линий.

**Поверхность параллельного переноса.** Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей — плоской кривой линии  $l$  по криволинейной направляющей  $n$  (рис. 107). При поступательном движении все точки образующей перемещаются по параллельным кривым на некоторое одинаковое расстояние путем параллельного переноса. На проекционном чертеже поверхность переноса задается формой образующей и начальным ее положением  $l_1$ , направлением параллельного переноса — формой и положением направляющей  $n$ . Поверхность параллельного переноса может быть образована и другим способом. Ряд положений образующей и параллельные линии перемещения отдельных ее точек создают линейный каркас поверхности. Эта сеть линий определяет поверхность

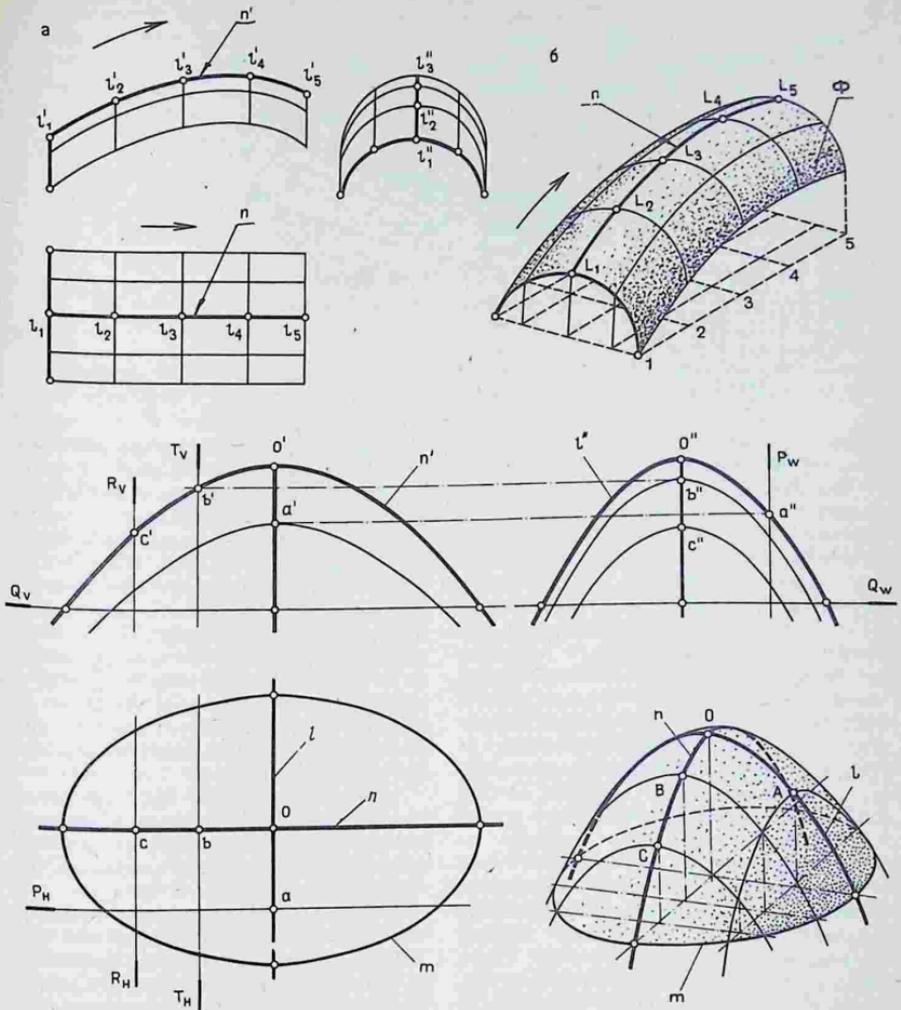
в пространстве, а ее проекции и очерковые линии задают поверхность на чертеже.

Поверхности параллельного переноса обладают важным технологическим достоинством — спроектированные на их основе монолитные и сборные оболочки можно возводить с помощью передвижной опалубки.

**Поверхности второго порядка общего вида.** Поверхности вращения второго порядка, а также гиперболический параболоид были рассмотрены в § 23 и 26. Кроме указанных поверхностей существуют поверхности второго порядка общего вида с эллиптическими параллелями, которые находят применение при проектировании и строительстве оболочек.

Поверхностью второго порядка общего вида называют поверхность, которую можно выразить алгебраическим уравнением второй степени в пространственной системе координат. К поверхностям второго порядка общего вида относятся: трехосный эллипсоид, однополостный и двуполостный эллиптические гиперболоиды, гиперболический параболоид.

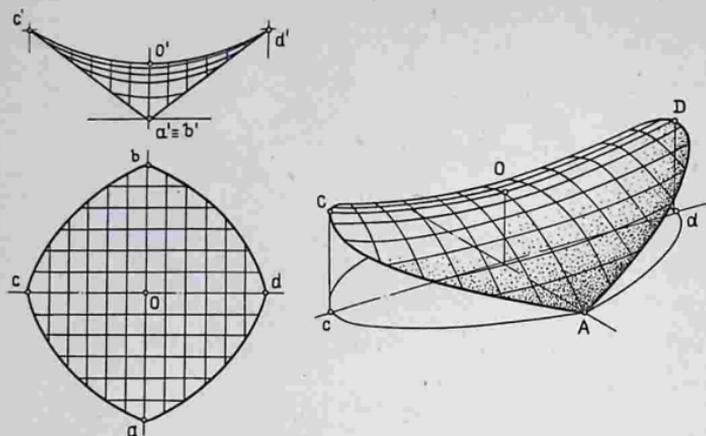
Сечением поверхности второго порядка является кривая второго порядка, видимый контур и очерк поверхности также являются кривыми второго порядка. Поверхность второго порядка может быть определена и задана кинематическим способом. Например, эллиптический параболоид (рис. 108) может быть образован движением обра-



зующей параболы  $l$ , вершина которой перемещается по направляющей параболе  $n$ ; при этом плоскости парабол взаимно перпендикулярны, а вершины парабол направлены в одну сторону. Сечение поверхности плоскостью  $R$ , параллельной образующей, представляет собой параболу, тождественную параболе  $l$ . Сечения плоскостями  $P$ , парал-

лельными направляющей параболе  $n$ , являются параболами, тождественными ей. Горизонтальные плоскости  $Q$  пересекают поверхность по подобным эллипсам  $m$ .

**Каркасные поверхности.** Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности, задают сеть линий, заполняющих поверх-



ность и являющихся *линейным каркасом поверхности*.

Поверхности, заданные графически семейством линий, принадлежащих поверхности, называются *каркасными*. Примером каркасной поверхности может служить земная поверхность, заданная дискретным каркасом линий уровня — горизонталями и называемая *топографической поверхностью*. Поверхности такого вида называют также *графическими*, так как их можно задать только чертежом. Топографические поверхности рассматриваются в гл. 26. Для более точного задания формы нерегулярной поверхности ее каркас обычно выражают двумя ортогонально расположенными семействами линий, которые образуют на поверхности *сетку*.

**Поверхности висячих покрытий.** Одно из самых рациональных решений покрытий большепролетных зданий представляют собой *висячие (вантовые) покрытия*. Поверхности вантовых покрытий являются *каркасными* поверхностями и задаются на чертеже линейным каркасом — двумя или тремя дискретными семействами линий. Линии каркаса на чертеже выражаются проекциями конструктивных элементов покрытия — системы натянутых тросов или вантов. Поэтому поверхности вантовых покрытий всегда имеют седловую форму.

Для поверхности гиперболического

параблоида линейчатый каркас заменяется каркасом двух семейств близких (*вантовый каркас*), достаточно близких по форме к семействам линий пересекающихся парабол (см. рис. 105). Однако для свободно висячих поверхностей линии обоих семейств являются не параболом, а *цепной линией* или близкой к ней кривой (см. § 20, рис. 79). Поэтому очерк поверхности несколько отличается от параболы, особенно в области ее вершины, где она имеет более «сглаженные» очертания. Это должно получить отражение и при изображении поверхности на чертеже.

Для поверхностей с предварительно напряженными элементами каркаса вид поверхности и ее очерк на чертеже определяются экспериментальными данными или расчетом.

В § 41 приведены примеры применения в архитектурной практике поверхностей вантовых покрытий зданий.

**Минимальные поверхности.** Поверхности этого вида имеют наименьшую площадь по сравнению со всеми другими, покрывающими заданный опорный контур поверхности. Линии каркаса минимальных поверхностей обычно не соответствуют геометрическим элементам определителя поверхности. На рис. 109 приведена минимальная поверхность покрытия, опорный контур которого состоит из двух пересекающихся парабол.

В последнее время получают распространение поверхности *тенновых* покрытий и *пневмокаркасных* герметично замкнутых оболочек с линейным каркасом, определяемым конструктивными

элементами. Вид этих поверхностей определяется проектными характеристиками или экспериментальными данными и расчетом.

## Глава 6. Пересечение поверхностей

### 28. Касательная плоскость, нормаль, кривизна поверхности

Решение задач, возникающих при проектировании и конструировании поверхностей-оболочек, требует проведения касательных плоскостей и нормалей к поверхности. При построении на проекционном чертеже очерков поверхностей по заданному направлению проецирования, при определении контуров собственных теней также необходимо строить касательные плоскости к поверхностям. Построение касательной плоскости к поверхности представляет частный случай пересечения поверхности плоскостью.

*Касательной плоскостью к поверхности в данной точке называют плоскость, содержащую множество прямых касательных, проведенных к кривым, проходящим через данную точку.* Плоскость может касаться поверхности в точке, если поверхность выгнутая (рис. 110), и по прямой линии, если поверхность линейчатая развертываемая, например цилиндр или конус вращения. Плоскость, касаясь вогнутой поверхности в точке, может одновременно пересекать ее, например поверхность однополостного гиперболоида вращения (рис. 111).

Если в какой-либо точке поверхности можно провести касательную плоскость, точка называется *обыкновенной*, а если несколько касательных плоскостей, точка называется *особой*. Касательная плоскость и нормаль к поверхности — понятия взаимосвязанные. *Нормалью  $N$  к поверхности  $\Phi$  в некоторой ее точке  $M$  называется прямая, перпен-*

*дикулярная касательной плоскости  $P$  и проходящая через точку касания ее с поверхностью* (см. рис. 110). В свою очередь, нормаль поверхности в данной точке определяет положение касательной плоскости в этой точке.

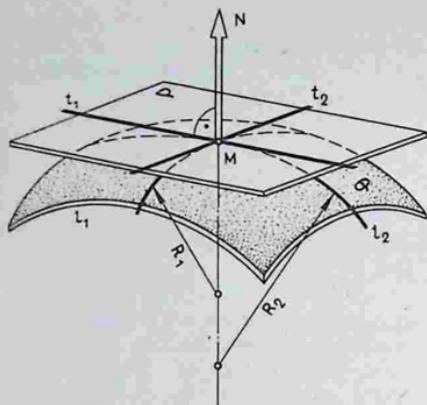
**Понятие о кривизне поверхности.** При исследовании свойств поверхности, связанных с ее формой, касательная плоскость играет важную роль.

Касательная плоскость  $P$  к поверхности  $\Phi$  в точке  $M$  определяется двумя касательными  $t_1$  и  $t_2$ , проведенными к двум кривым линиям  $l_1$  и  $l_2$  поверхности, проходящим через точку  $M$  (см. рис. 110). В дифференциальной геометрии доказывается, что касательные  $t_1$  и  $t_2$  к двум кривым, проведенным на поверхности через точку  $M$  и имеющим экстремальные значения кривизны (максимальную и минимальную), образуют между собой прямой угол и являются так называемыми *главными направлениями* [1].

Максимальный и минимальный радиусы кривизны линий в точке касания  $M$  называются *главными радиусами*  $R_1$  и  $R_2$  кривизны поверхности в данной точке  $M$ , а их центры — *центрами кривизны* поверхности в рассматриваемой точке.

Величины, обратные главным радиусам кривизны  $K_1 = 1/R_1$  и  $K_2 = 1/R_2$ , называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке. Главные кривизны имеют одинаковые знаки, если главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  направлены в одну сторону, и разные знаки, если главные радиусы кривизны направлены в противоположные стороны.

Кривизна поверхности характеризуется так называемой *полной или*



гауссовой<sup>1</sup> кривизной. *Полной или гауссовой кривизной*  $K$  поверхности в данной точке называется произведение главных кривизн в рассматриваемой точке:  $K = K_1 \cdot K_2 = 1/R_1 \cdot 1/R_2$ .

По аналогии с анализом плоской кривой линии с помощью соприкасающейся окружности (см. § 20, рис. 74) анализ кривизны поверхности в окрестности данной точки сводится к анализу пространственной формы поверхности второго порядка — параболоида. При этом форму заданной поверхности и кривизну в окрестности рассматриваемой точки считают сходной с формой *соприкасающегося параболоида*. В зависимости от вида соприкасающегося параболоида различают и типы точек рассматриваемой поверхности.

Рассмотрим три случая касания плоскости к поверхности и кривизну поверхности в окрестности точки касания.

1. Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну точку касания  $M$  (рис. 110, 112, а). В этом случае все линии поверхности, пересекающиеся в данной точке, находятся по одну сторону касательной плоскости. При этом, если соприкасающийся параболоид в рассматриваемой точке является эллиптическим, то эту точку называют *эллиптической*. Поверхности, состоящие только из эллиптических точек, напри-

мер эллипсоид и параболоид вращения, называют *выпуклыми*.

Главные кривизны имеют одинаковые знаки, так как главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  направлены в одну сторону; в этом случае полная гауссова кривизна  $K > 0$ . Поверхности этого вида называют поверхностями *положительной кривизны*, имеющей переменный характер. Поверхностью постоянной положительной кривизны является только сфера.

2. Касательная плоскость к поверхности в данной точке  $M$  может пересекать поверхность по двум прямым линиям. Так, например, в случае дважды линейчатой поверхности — гиперболического параболоида или однополостного гипербоида вращения (см. рис. 111) касательная плоскость пересекает эти поверхности по двум прямым образующим  $l_1$  и  $l_2$ , которые вместе с тем являются их касательными  $t_1$  и  $t_2$ , определяющими касательную плоскость  $P$ .

Поверхность в окрестности точки касания расположена по разные стороны от касательной плоскости. Если соприкасающийся параболоид в данной точке поверхности является гиперболическим параболоидом, то в этом случае точку называют *гиперболической*. Поверхности, состоящие только из гиперболических точек, называют *вогнутыми*, седлообразными.

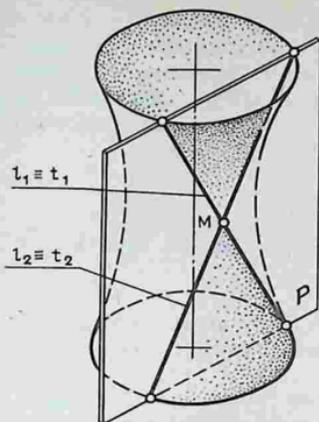
Главные кривизны имеют разные знаки, так как главные радиусы кривизны

Рис. 110

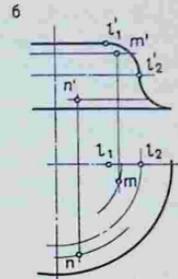
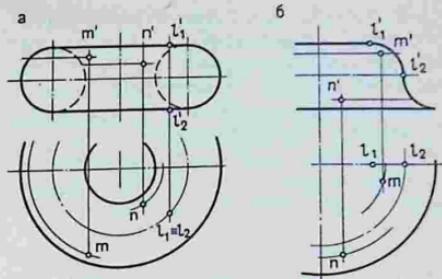
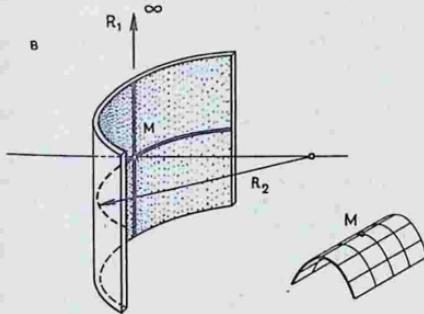
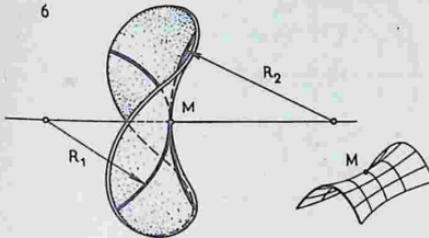
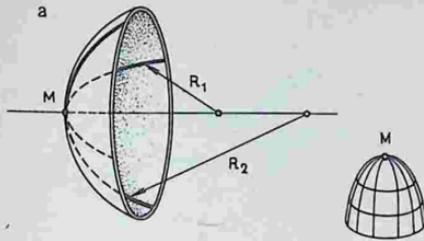
Рис. 111

Рис. 112

Рис. 113



<sup>1</sup> По имени крупнейшего немецкого математика конца XVIII и первой половины XIX в. Карла Гаусса.



имеют общую касательную плоскость (рис. 112, в). Если соприкасающийся параболоид в рассматриваемой точке вырождается в параболы, то в этом случае точку называют *параболической*. Поверхности, состоящие только из параболы — цилиндрические, конические и торсовые, являются *развертываемыми* поверхностями.

Полная гауссова кривизна  $K = 0$ ; так как один из радиусов  $R_1$  бесконечно большой, то их произведение обратится в нуль независимо от величины другого радиуса. Поверхности этого вида называют поверхностями *нулевой кривизны*.

Существуют кривые поверхности (гладкие), которые содержат все типы точек — эллиптические, параболы и гиперболические. Например, поверхность тора (кольца) содержит все типы точек (рис. 113, а). Точки  $M$ , расположенные на внешней, выпуклой части поверхности, — эллиптические; точки  $N$  — на внутренней вогнутой части тора — гиперболические; точки  $L$ , лежащие на двух окружностях, разделяющих внешнюю и внутреннюю части поверхности, — параболы. На рис. 113, б — поверхность вращения, имеющая архитектурный профиль, называемый *обратный гусек*, также содержит все типы точек.

Поверхности, содержащие все типы точек, называются поверхностями *двойной кривизны*. Некоторые виды пространственных покрытий зданий, имеющие волнообразную форму, также представляют собой поверхность двойной кривизны (см. рис. 176).

визны  $R_1$  и  $R_2$  направлены в противоположные стороны (рис. 112, б). Полная гауссова кривизна  $K < 0$ . Поверхности этого вида называются *поверхностями отрицательной кривизны*, имеющей переменный характер.

Поверхности постоянной отрицательной кривизны являются так называемая *псевдосфера* — поверхность, образованная вращением плоской кривой — трактрисы (см. § 20, рис. 79).

3. Касательная плоскость касается поверхности по прямой образующей. Следовательно, все точки образующей

Различные свойства поверхностей-оболочек, применяемых в виде покрытий больших пролетных зданий, в том числе их несущая способность, зависят от формы поверхности и ее кривизны. Оболочки, имеющие форму поверхности положительной или отрицательной гауссовой кривизны, обладают большей пространственной жесткостью, чем поверхности с нулевой кривизной.

Поверхности оболочек *отрицательной* гауссовой кривизны, имеющие выпукло-вогнутую форму, помимо придания покрытиям сооружений пространственной жесткости дают возможность создавать необычные по своей легкости и зрительной напряженности архитектурные формы.

Поверхности покрытий *положительной* гауссовой кривизны находят применение при создании замкнутых пространственных форм, отличающихся зрительной устойчивостью.

## 29. Построение плоскостей, касательных к поверхностям

Плоскости, касательные к поверхности, могут быть построены при различных исходных условиях. Касательная плоскость может быть проведена различным образом. Назовем некоторые из случаев, с которыми придется встретиться в следующем разделе учебника:

- через точку, лежащую на *линейчатой* поверхности;
- через точку, принадлежащую *нелинейчатой* поверхности вращения;
- через точку, заданную вне поверхности;
- параллельно прямой, заданной вне поверхности.

Особое значение для изучения последнего материала имеет последний случай, который является основой построения контуров собственных теней поверхностей вращения.

Рассмотрим некоторые примеры построения касательных плоскостей к линейчатым поверхностям и поверхностям вращения.

**Пример 1.** Построить плос-

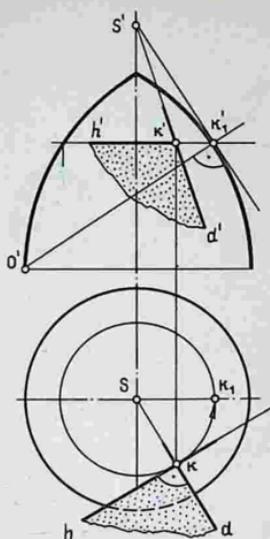


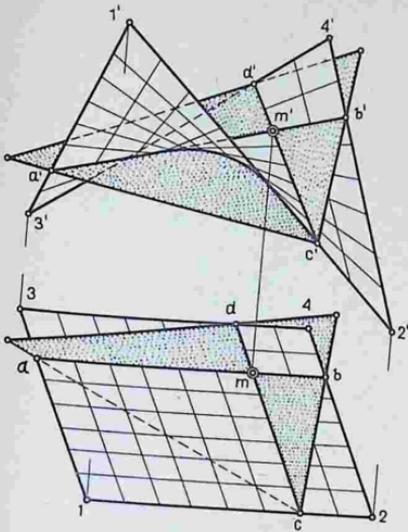
Рис. 114

Рис. 115

Рис. 116

кость, касательную к поверхности вращения в заданной на ней точке  $K$  (рис. 114). Если точка задана одной проекцией, вторую проекцию определяем с помощью вспомогательной параллели (окружности), которую проводим на поверхности через проекцию данной точки. Через точку  $K$  проведены две прямые  $KH$  и  $KD$ , задающие касательную плоскость. Одна из них касательна к проведенной параллели (она является горизонталью), а другая касательна к меридиану (на чертеже не показана). Для построения этой касательной  $KD$  меридиан вращением совмещен с главным меридианом. В этом положении к нему через точку  $k_1'$  проведена касательная под прямым углом к прямой  $o'k_1'$ . Точка  $o'$  является центром дуги окружности—главного меридиана тора. Касательную продолжим до пересечения с осью тора, а затем повернем в первоначальное положение. Две прямые—горизонталь  $KH$  и касательная  $KD$ —определяют искомую касательную плоскость.

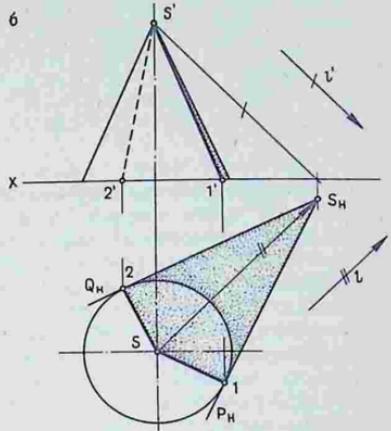
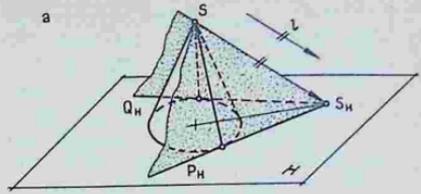
**Пример 2.** Построить касательную плоскость к гиперболическому параболоиду в точке  $M$  (рис. 115). Поверхность гиперболиче-



ского параболоида дважды линейчатая неразвертываемая. Как было показано ранее (см. рис. 111), плоскость, касательная к гиперболическому параболоиду в любой его точке, пересекает поверхность по двум прямым образующим — продольной  $AB$  и поперечной  $CD$ , проходящим через данную точку  $M$ . Эти образующие задают искомую касательную плоскость, которая на чертеже выражена треугольником произвольной формы, содержащим эти прямые.

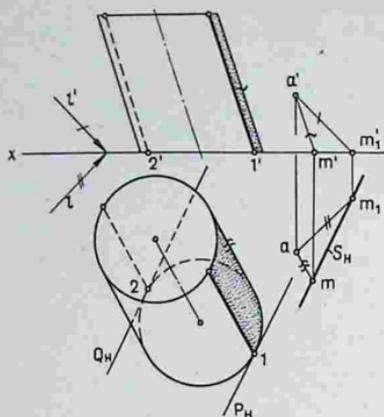
**Пример 3.** Построить плоскость, касательную к конусу и параллельную прямой  $l$  (рис. 116). Любая плоскость, касательная к поверхности конуса, должна проходить через его вершину. Чтобы выполнить также и условие параллельности прямой  $l$ , необходимо провести через вершину конуса вспомогательную прямую, параллельную заданной прямой, и построить ее след на плоскости основания конуса. Затем через полученную точку проводим прямые  $P_n$  и  $Q_n$ , касательные к основанию конуса, — горизонтальные следы искомых плоскостей, которые касаются конуса по образующим  $S_1$  и  $S_2$ .

**Пример 4.** Построить пло-



скость, касательную к наклонному цилиндру и параллельную прямой  $l$  (рис. 117). Для определения следов касательной плоскости построена плоскость  $AMM_1$ , параллельная заданной прямой  $l$  и образующим цилиндра. Параллельно следу  $S_n$  этой плоскости проводим следы  $P_n$  и  $Q_n$  касательных плоскостей, а из точек касания  $1$  и  $2$  — образующие цилиндра, по которым искомые плоскости касаются поверхности цилиндра.

**Пример 5.** Построить плоскость, касательную к сфере и параллельную прямой  $l$  (рис. 118). Эта задача аналогична предыдущей. Однако к сфере можно провести бесчисленное количество касательных прямых и плоскостей. Множество касательных прямых представляет собой *соприкасающуюся цилиндрическую поверхность*. Линию касания построим следующим образом. Касательные прямые



к очеркам сферы на фасаде и плане<sup>1</sup> дадут четыре точки касания 1, 2, 3, 4. Учитывая симметрию относительно плоскости  $P$ , параллельной прямой  $l$ , определяем точки 5 и 6, симметричные точкам 1 и 2. Соединив полученные точки, получим проекции линии касания соприкасающейся цилиндрической поверхности — эллипсы.

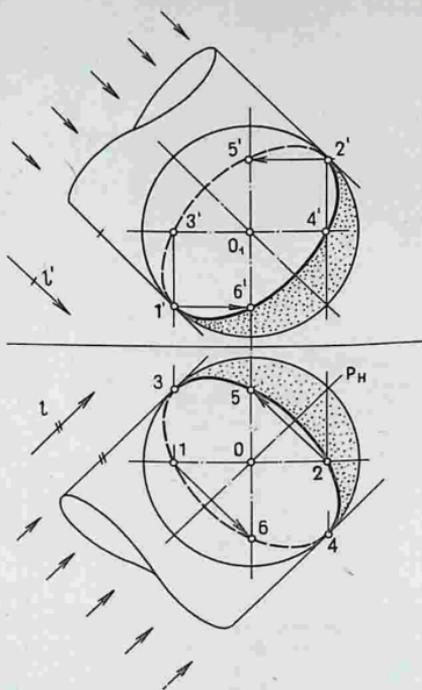
В последних трех примерах построение касательных плоскостей и соприкасающейся поверхности и определение линии касания являются, по существу, построением контуров собственных теней на поверхностях вращения (зоны собственных теней заштрихованы).

Линия касания — это граница, отделяющая освещенную часть поверхности от неосвещенной, а горизонтальные следы касательных плоскостей являются контурами падающих теней.

### 30. Пересечение поверхности плоскостью

Построение линии пересечения поверхности плоскостью находит применение в процессе архитектурного проектирования и разработки чертежей, при вычерчивании разрезов и планов сооружения, деталей и узлов конструкций,

<sup>1</sup> В тех случаях, когда это будет не в ущерб строгости изложения материала, вместо слов «горизонтальная или фронтальная проекция» будем употреблять слова «план» и «фасад», как это принято в архитектурном проектировании.



а также при построении теней на чертежах фасадов зданий.

Прежде чем перейти к построению линии пересечения поверхностей вращения плоскостью, рассмотрим условия получения так называемых конических сечений — кривых линий, полученных в результате пересечения поверхности конуса секущей плоскостью.

**Конические сечения.** При пересечении конуса вращения плоскостью могут образоваться: пересекающиеся прямые, окружность, эллипс, парабола и гипербола. Характер и форма сечения зависят от того, содержит ли конус образующие, параллельные секущей плоскости.

Плоскость, проходящая через вершину, пересекает конус по двум прямыми — образующим конуса. Плоскость, перпендикулярная оси, пересекает конус по окружности.

Если секущая плоскость пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна его оси, то в сечении получится замкнутая кривая — эллипс (рис. 119, а).

Рис. 117

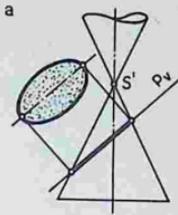


Рис. 118

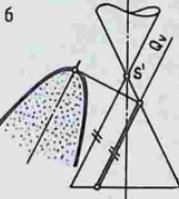
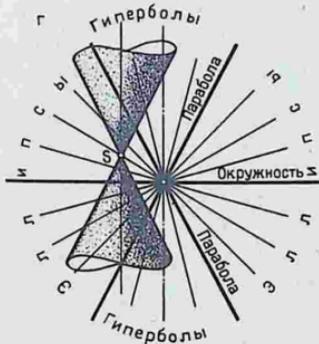
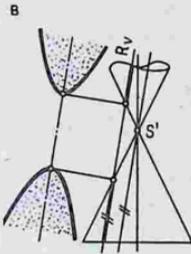


Рис. 119



Если секущая плоскость пересекает одну полу поверхности конуса и параллельна одной образующей конуса, то сечением будет *парабола* (рис. 119, б).

Если секущая плоскость пересекает обе полу поверхности конуса и парал-

лельна двум его образующим, то в сечении получится кривая, состоящая из двух симметричных ветвей, — *гипербола* (рис. 119, а).

На рис. 119, г приведена общая схема, наглядно показывающая скачкообразный характер видоизменений конических кривых и величину области образования той или иной кривой в зависимости от положения секущей плоскости относительно конуса. Как видно из схемы, размеры этой области у окружности и параболы чрезвычайно малы — здесь и возникает качественный скачок, в то время как у эллипса и гиперболы размеры области, напротив, велики.

**Построение линии пересечения поверхностей вращения плоскостью.** Линия пересечения кривой поверхности плоскостью представляет собой плоскую кривую линию (сечение), для построения которой необходимо определить отдельные точки сечения и соединить их последовательно плавной кривой.

Чтобы построить линию пересечения *линейчатой поверхности вращения* плоскостью, необходимо определить точки пересечения отдельных образующих этой поверхности плоскостью. Таким образом, задача на определение линии пересечения *линейчатой поверхности* плоскостью сводится к многократному решению задачи на пересечение прямой с плоскостью.

Для построения точек линии пересечения *нелинейчатой* кривой поверхности плоскостью применяют основной способ — *способ вспомогательных секущих плоскостей*. Вспомогательные секущие плоскости проводят так, чтобы поверхность пересекалась по графически простым линиям, а секущая плоскость — по прямым линиям. Точки пересечения этих линий будут искомыми точками линии пересечения.

Рассмотрим примеры построения линии пересечения поверхностей вращения плоскостью. При построении сечений следует выделить частный случай, когда секущая плоскость является проектирующей или пересекаемая поверхность занимает проектирующее положе-

ние относительно плоскости проекций и одна проекция линии пересечения известна.

**Пример 1.** Построить пересечение конуса фронтально проецирующей плоскостью (рис. 120). Секущая плоскость является проецирующей, поэтому фронтальная проекция линии сечения совмещена с проецирующим следом плоскости  $P_v$ . Полученный в сечении эллипс проецируется на плоскость  $V$  отрезком прямой  $1'-2'$ , который является большой осью эллипса. Горизонтальная проекция оси строится с помощью линий связи. Малая ось эллипса  $3-4$  перпендикулярна большой оси и делит ее пополам. Точки 3 и 4 строим с помощью параллели или двух образующих конуса  $S-3$  и  $S-4$ . На чертеже построен действительный вид сечения конуса способом замены плоскостей проекций. Дополнительные точки сечения могут быть построены аналогично построению точек 3 и 4.

**Пример 2.** Построить линию пересечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения (рис. 121). Секущая плоскость задана пересекающимися линиями уровня — горизонталью и фронталью. Как и в предыдущем примере, решение задачи упрощается, так как ось цилиндра перпендикулярна плоскости  $H$  и боковая поверхность проецируется в линию — горизонтальную проекцию сечения. Наклонная секущая плоскость пересекает цилиндр по эллипсу, малая ось которого (отрезок  $3-4$ ) равна диаметру основания цилиндра.

При построении фронтальной проекции линии сечения необходимо определить следующие характерные (опорные) точки:

а) точки 1 и 2 — точки видимости, лежащие на очерковых образующих цилиндра и разделяющие на фасаде видимую и невидимую часть линии сечения, — с помощью фронтали  $1-2$  ( $1'-2'$ );

б) точки 3 и 4 — концы малой оси эллипса, которая является горизонталью, — с помощью горизонтали  $4-3-n$  ( $n'-3'-4'$ );

в) точки 5 и 6 — низшую и высшую

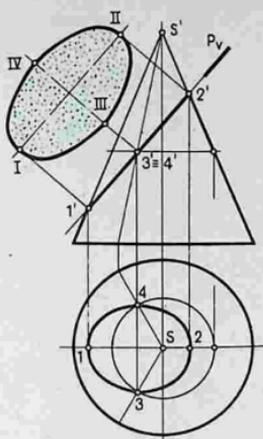


Рис. 120

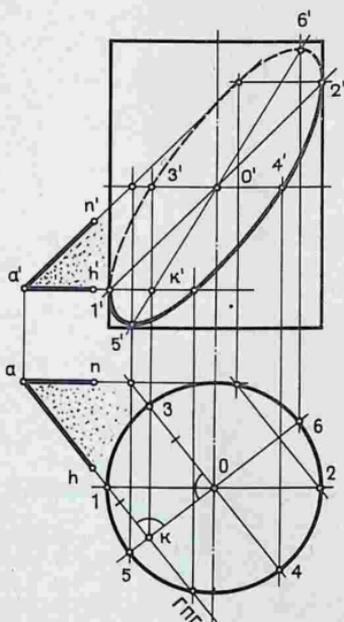
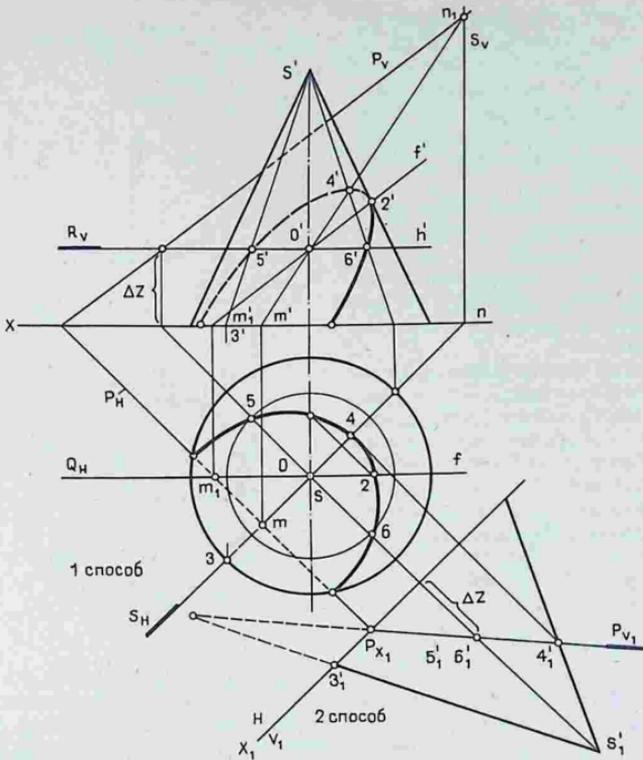


Рис. 121

точки проекции сечения (концы большой оси эллипса), лежащие на оси симметрии сечения, — с помощью линии наибольшего ската плоскости, которую проводим перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали  $ah$  плоскости. Одной точкой этой прямой является точка  $K$ , а второй — точка

Рис. 122



О пересечения оси цилиндра с секущей плоскостью. Эту точку спроецируем с помощью горизонтали 4-3-n. Каждая вспомогательная горизонталь определяет две точки линии сечения.

Через построенные проекции точек линии сечения проводим плавную кривую — эллипс; он должен располагаться в пределах очерковых образующих, касаясь их в точках  $1'$  и  $2'$ .

**Пример 3.** Построить линию пересечения конуса плоскостью общего положения (рис. 122). Эта задача сложнее двух предыдущих, так как здесь отсутствуют проецирующие элементы, поэтому необходимо построить обе проекции линии сечения. Решение задачи выполнено двумя способами.

Рассмотрим *первый способ*. Точки

пересечения отдельных образующих конуса с заданной плоскостью определяются с помощью вспомогательной секущей плоскости аналогично построению точки пересечения прямой с плоскостью. Сечение конуса неполное, оно включает линию пересечения основания конуса. Две точки определяются на плане в пересечении горизонтального следа  $P_H$  плоскости с окружностью основания конуса. Как и в предыдущей задаче, построим характерные точки линии сечения.

Точка пересечения контурной образующей  $s_2, s_2'$  с плоскостью (*точка видимости*) определяется с помощью вспомогательной фронтальной плоскости  $Q$ , проведенной через ось конуса и пересекающей плоскость по фронталу  $M_1F$ . В пересечении ее фронтальной

проекции с очерковой образующей конуса определяем проекции точки 2.

Высшая точка линии сечения 4 расположена на линии наибольшего ската плоскости, проходящей через ось конуса. Она определяется с помощью вспомогательной горизонтально проецирующей плоскости  $S$ .

Промежуточные точки линии пересечения 5 и 6 построены с помощью горизонтальной плоскости  $R$ , которая проходит через точку  $O$  пересечения оси конуса с заданной плоскостью и пересекает конус по окружности, а плоскость  $P$  — по горизонтали.

Кривая линия пересечения представляет собой часть эллипса. Это можно определить построением, продолжив фронтальную проекцию  $n'm'$  линии пересечения плоскостей  $S$  и  $P$  до пересечения с образующей  $s'3'$  конуса. Если бы линия пересечения плоскостей оказалась параллельной образующей  $s3$ , то сечение было бы параболой.

Чтобы упростить решение задачи и уменьшить количество построений, можно применить *второй способ*. Он заключается в преобразовании чертежа заменой фронтальной плоскости проекций, при котором заданная плоскость общего положения преобразуется во фронтально проецирующую. Новая ось  $x_1$  и фронтальная плоскость проекций  $V_1$  выбираются перпендикулярными заданной плоскости и ее горизонтальному следу  $P_H$ . Новый фронтальный след  $P_{V_1}$  проходит через точку  $P_{x_1}$  и точку  $5'_1 \equiv 6'_1$ , которая построена откладываям анпликаты  $\Delta z$  произвольной точки, взятой на заменяемом фронтальном следе  $P_V$ . Дальнейшее решение осуществляется аналогично примеру 1 (см. рис. 120). В этом способе решения более наглядно выявляется пересечение контурной образующей конуса  $s'_13'_1$  с плоскостью.

**Пример 4.** Построить линию пересечения нелинейчатой поверхности вращения — сферы фронтально проецирующей плоскостью (рис. 123). Плоскость  $P$  пересекает сферу по окружности, которая на плоскости  $H$  проецируется эл-

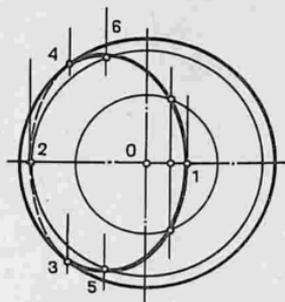
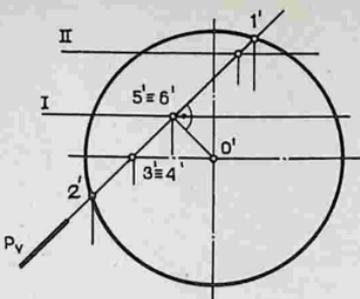


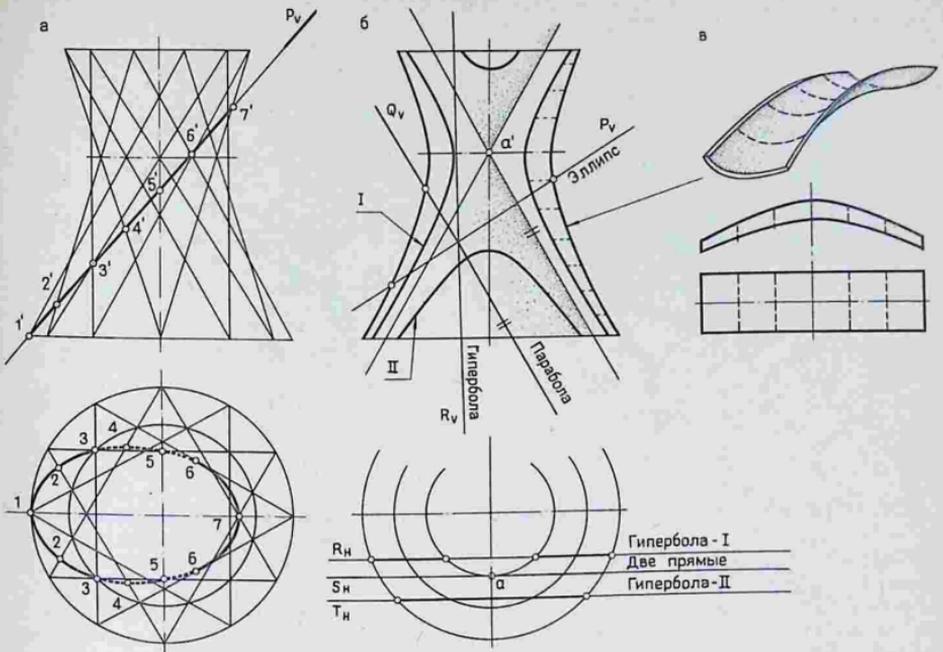
Рис. 123

Рис. 124

липсом. Высшая 1 и низшая 2 точки линии пересечения определяются пересечением фронтального следа плоскости с очерком сферы. Точки 3 и 4, разделяющие на плане видимую и невидимую части проекции линии сечения, лежат на горизонтальном очерке сферы — экваторе. Точки 5, 5' и 6, 6', расположенные на середине отрезка  $1'-2'$ , определяют на горизонтальной проекции большую ось эллипса. Они построены с помощью параллели  $I$ . Аналогично (параллель  $II$ ) могут быть построены промежуточные точки искомой линии сечения.

На основании изложенного выше можно сделать следующий вывод: *если секущая плоскость проецирующая или пересекаемая поверхность занимает относительно плоскости проекций, то решение задачи упрощается и сводится к построению с помощью линий связи недостающих проекций точек линии пересечения.*

**Сечения однополостного гиперболоида вращения плоскостью.** Однопо-



лостный гиперboloид вращения – поверхность дважды линейчатая (см. § 23, рис. 95). Через каждую точку поверхности проходят две прямолинейные образующие. Поверхность двуполостного гиперboloида вращения – поверхность, на которой нельзя провести прямолинейной образующей. На рис. 124, а построено сечение однополостного гиперboloида вращения фронтально проецирующей плоскостью. Горизонтальная проекция линии пересечения – эллипс определяется с помощью линий связи, используя фронтальные проекции точек пересечения образующих с секущей плоскостью. Часть горизонтальной проекции линии пересечения между точками 3 и 6 невидима. Участок линии пересечения между точками 6 и 6 проецируется на внутренней стороне поверхности.

Рассмотрим плоские сечения однополостного гиперboloида вращения. Пусть гипербола – образующая поверхности, вращается вместе со своими асимптота-

ми вокруг мнимой оси (рис. 124, б). Асимптоты опишут коническую поверхность, называемую *асимптотическим конусом* (заштрихован на схеме). Вид плоских сечений гиперboloида вращения аналогичен сечениям асимптотического конуса и зависит от положения секущей плоскости относительно его образующих.

При пересечении однополостного гиперboloида вращения плоскостью образуются все пять видов конических сечений (см. рис. 119):

- 1) *окружность* – если секущая плоскость перпендикулярна оси поверхности;
- 2) *эллипс* – если секущая плоскость  $P$  пересекает все образующие поверхности и асимптотического конуса;
- 3) *парабола* – если секущая плоскость  $Q$  параллельна одной образующей асимптотического конуса;
- 4) *гиперболы* двух семейств – если секущие плоскости  $R$  и  $T$  параллельны

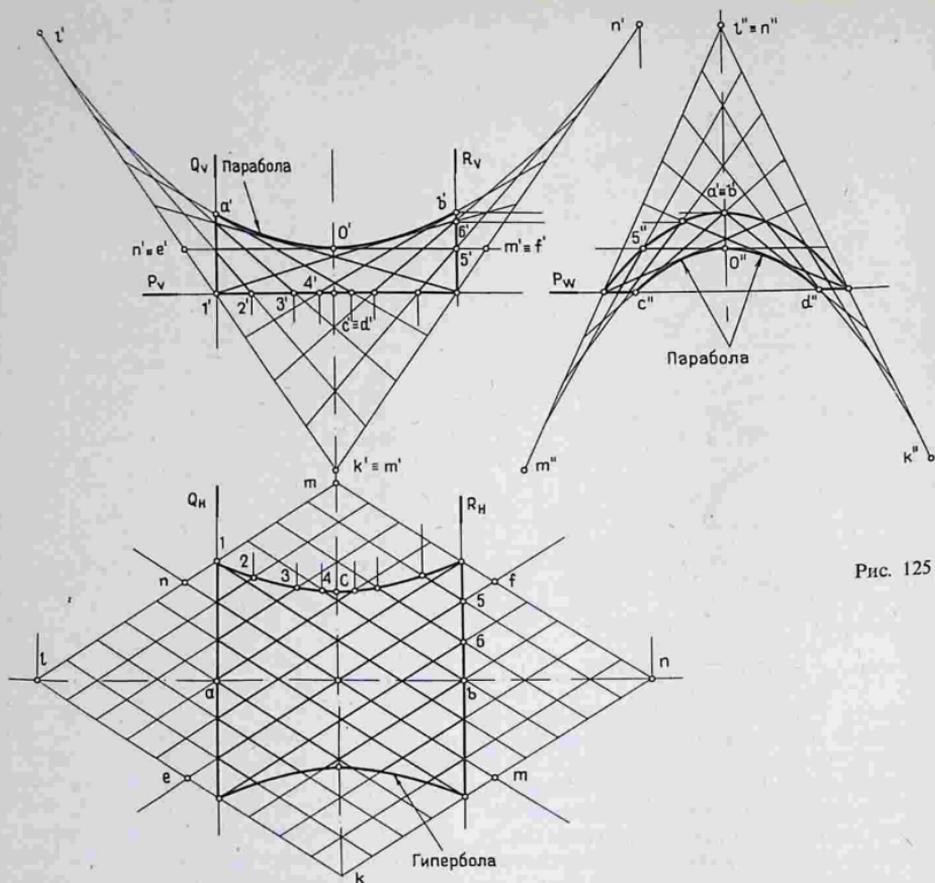


Рис. 125

двум образующим асимптотического конуса;

5) *две прямые* — если секущая плоскость  $S$  касается поверхности в любой ее точке, например в точке  $A(a, a')$ , и пересекает ее по двум прямым, пересекающимся в точке касания.

Поверхность однополостного гиперboloида вращения находит применение не только как пространственно жесткая форма некоторых сооружений (см. рис. 96). Отсеки поверхности, образованные двумя параллельными вертикальными или горизонтальными секущими плоскостями, могут быть использованы как элементы сборного покры-

тия здания. Они являются оболочками переменной отрицательной кривизны и обладают большой пространственной жесткостью (рис. 124, в).

**Сечение гиперболического параболоида плоскостью.** На рис. 125 приведены проекции гиперболического параболоида, заданного неплоским четырехугольником  $KLMN$ . Построим линии пересечения поверхности тремя плоскостями уровня. Горизонтальная плоскость  $P$  пересекает поверхность по гиперболе. Образующие  $EF$  и  $NM$  на плане, пересекающиеся в точке  $O$ , являются асимптотами гиперболы, на фасаде они горизонтальны. Точки  $1', 2', 3', 4'$ ,

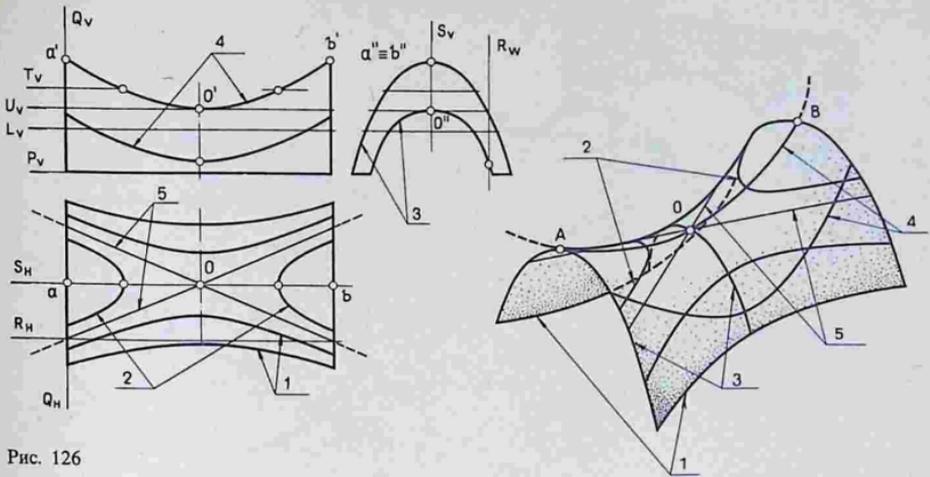


Рис. 126

... пересечения образующих с плоскостью спроецированы на горизонтальную проекцию с помощью линий связи.

Две симметрично расположенные профильные плоскости  $Q$  и  $R$  пересекают поверхность по двум равным параболом. Профильные проекции точек  $1''$ ,  $5''$ ,  $6''$ ,  $a'' \equiv b''$  ... построены с помощью линий связи.

Фронтальным очерком отсека является парабола. На профильной проекции два очерка отсека поверхности также представляют собой параболы. Внешний очерк называют *граничным* или *краевым*.

Рассмотрим плоские сечения гиперболического параболоида. На рис. 126 приведен отсек гиперболического параболоида, выделенный секущими плоскостями в предыдущем примере. В сечении горизонтальными плоскостями, расположенными ниже и выше точки  $O$  (вершины поверхности), получаются *гиперболы 1* и *2* разных семейств, а также *две прямые 5*. На горизонтальной проекции эти линии сечений изображаются *сопряженными гиперболами* с общими асимптотами.

В сечении вертикальными плоскостями образуются *параболы 3* и *4*, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях и обращенные

вершинами в противоположные стороны.

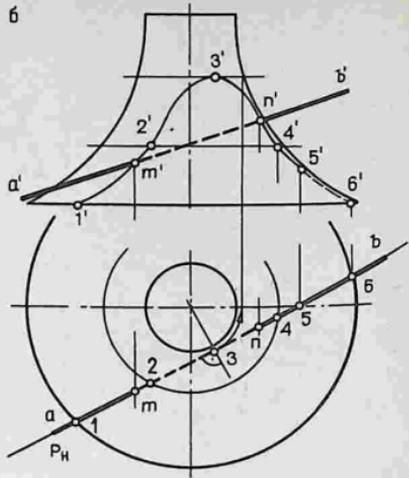
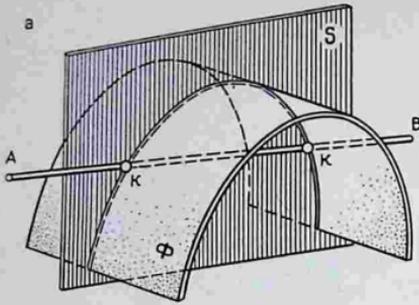
Поскольку поверхность содержит множество гипербол и парабол, она и получила свое название. Как будет показано ниже (в гл. 8), сечения гиперболического параболоида плоскостями образуют отсеки поверхности самых различных форм и очертаний, которые широко применяются в архитектуре и строительстве.

### 31. Пересечение прямой линии с кривой поверхностью

Определение точек пересечения прямой линии с кривой поверхностью находит применение при построении линии пересечения поверхностей, а также при построении падающих теней.

Прямая линия может пересекать поверхность в двух и более точках, может касаться ее. Если прямая не имеет общих точек с поверхностью, это означает, что она не пересекает поверхность. Этими решениями этой задачи аналогичны описанному ранее (§ 8 и 16) построению пересечения прямой с плоскостью и многогранной поверхностью.

Чтобы найти точки пересечения прямой линии с кривой поверхностью (рис. 127, а), следует провести через данную прямую вспомогательную секущую плоскость и построить линию пересече-



ния вспомогательной плоскости с данной поверхностью. Точки пересечения прямой с построенной линией сечения поверхности и будут искомыми точками.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость. Однако в отдельных случаях следует принимать плоскость общего положения с тем, чтобы проекции сечения имели графически простую форму — прямые линии или окружности.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Построить точки пересечения прямой с нелинейчатой поверхностью вращения (рис. 127, б). Получить простое по форме сечение в этой задаче нельзя, поэтому следует провести через прямую вспомогательную проецирующую плоскость и построить сечение с помощью нескольких параллелей.

Горизонтальная проекция линии пересечения совмещена с проецирующим следом плоскости  $P$ . Поэтому задача сводится к построению фронтальных проекций точек, отмечаемых на горизонтальной проекции линии сечения. Фронтальные проекции точек 1, 5 и 6 находят с помощью линий связи. Построение точки 5', лежащей на главном меридиане поверхности, необходимо, так как она отделяет видимый уча-

сток линии сечения от невидимого. В этой точке фронтальная проекция линии сечения касается очерка поверхности. Чтобы найти высшую точку 3 линии сечения, следует на плане определить параллель, которая коснулась бы секущей плоскости, но не пересекала бы ее. Точки  $M$  и  $N$  пересечения прямой с построенной линией сечения будут искомыми. Отрезок прямой между этими точками будет невидимым.

**Пример 2.** Построить точки пересечения прямой с конической поверхностью (рис. 128). Если выбрать в качестве вспомогательных проецирующие плоскости, то сечениями поверхности будут кривые линии — гиперболы или эллипсы. Поэтому для определения точек пересечения прямой с поверхностью конуса через данную прямую следует провести вспомогательную плоскость общего положения, которая пересекала бы поверхность конуса по образующим. Такая плоскость должна быть проведена через данную прямую и вершину конуса.

Чтобы определить образующие, по которым плоскость пересекает конус, построим след секущей плоскости на плоскости основания конуса (в данном примере — на плоскости  $H$ ) с помощью вспомогательной прямой  $SM_1$ . Через два горизонтальных следа прямых

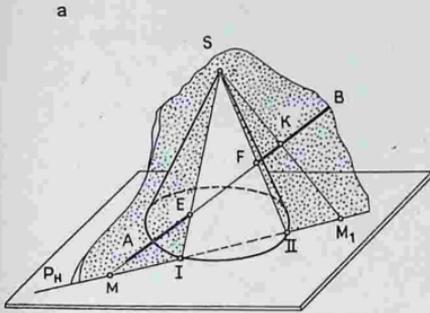
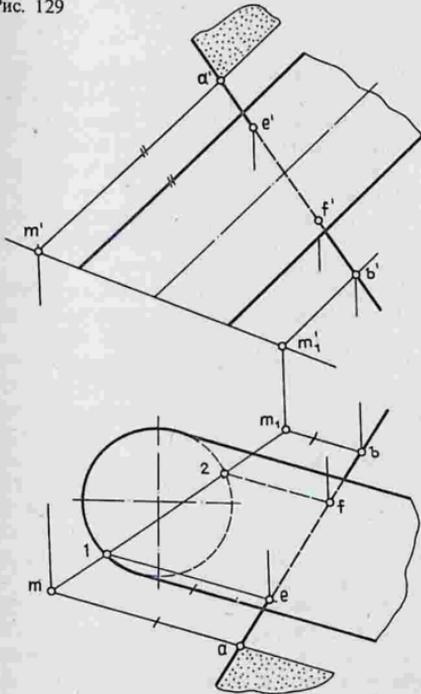
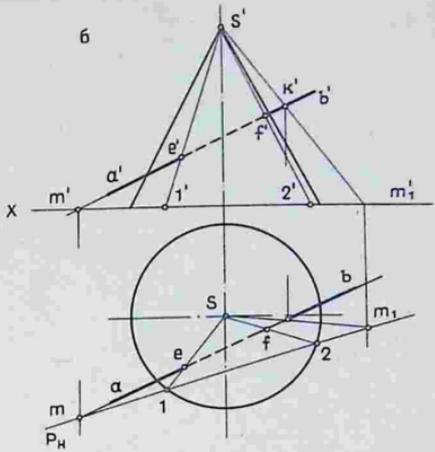


Рис. 127

Рис. 128

Рис. 129

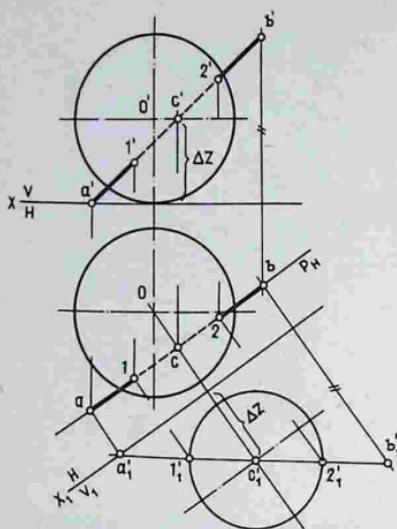


ния конуса. Дальнейшие построения по-  
няты из чертежа.

**Пример 3.** Построить точки пересечения прямой с поверхностью эллиптического цилиндра (рис. 129). Как и в предыдущем примере, через прямую следует провести вспомогательную плоскость, которая пересечет боковую поверхность цилиндра по образующим. Такой плоскостью будет плоскость общего положения, проведенная через заданную прямую и две вспомогательные прямые  $AM$  и  $BM_1$ , параллельные образующим цилиндра. Дальнейшие построения аналогичны предыдущему примеру.

**Пример 4.** Построить точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис. 130). Через прямую проведена горизонтально проецирующая плоскость  $P$ . Она пересекает сферу по окружности, которая на фасаде изображается эллипсом. Чтобы избежать построения эллипса, применим способ замены плоскостей проекций и примем за новую фронтальную плоскость проекций плоскость  $V_1$ , параллельную секущей плоскости. Построим на новой плоскости  $V_1$  проекцию заданной прямой и окружности сечения сферы, отложив высоту ее центра — аппликату  $\Delta z$ . Полученные точки пересечения проекции прямой с контуром сече-

пойдет след  $P_H$  секущей плоскости. Искомые образующие конуса  $S1$  и  $S2$  определяем в пересечении горизонтального следа плоскости с окружностью основа-



ния переносятся затем на исходные проекции. На плане будут видимыми точки, расположенные выше экватора сферы (точка 2), а на фасаде — точки, размещающиеся на передней половине сферы.

### 32. Взаимное пересечение поверхностей

Архитектурные сооружения и здания, различные фрагменты и детали являются сочетанием геометрических форм — призм, параллелепипедов, поверхностей вращения и более сложных кривых поверхностей, пересекающихся между собой. При проектировании и выполнении изображений на проекционных чертежах необходимо строить линии пересечения поверхностей.

Основной способ построения линии пересечения поверхностей — способ *вспомогательных секущих плоскостей*. Он аналогичен построению линии пересечений двух плоскостей общего положения, рассмотренному ранее в § 7 (см. рис. 27).

Для построения линии пересечения поверхностей необходимо построить ряд точек, принадлежащих обеим пересекающимся поверхностям. Положение

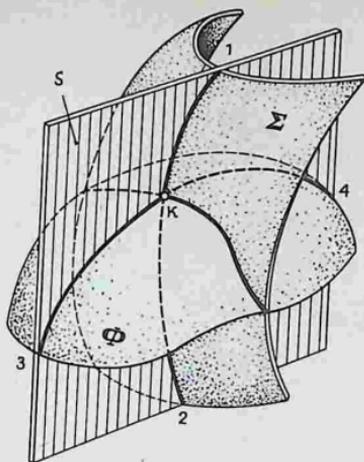


Рис. 130

Рис. 131

Рис. 132

вспомогательных плоскостей выбирают так, чтобы они пересекали заданные поверхности по графически простым линиям — прямым или окружностям.

Построения выполняют в такой последовательности (рис. 131):

1) проводят вспомогательную проектирующую плоскость  $S$ , пересекающую заданные поверхности;

2) строят линии 1–2 и 3–4 пересечения вспомогательной плоскости с заданными поверхностями  $\Sigma$  и  $\Phi$ ;

3) определяют точку  $K$  пересечения вспомогательных линий 1–2 и 3–4.

Поскольку точка  $K$  одновременно принадлежит обеим вспомогательным линиям и, следовательно, пересекающимся поверхностям, то она является точкой, принадлежащей искомой линии пересечения. Проведя несколько вспомогательных секущих плоскостей, получим ряд точек линии пересечения. Их следует соединить плавной кривой в определенной последовательности. Проекция линии пересечения должны располагаться в пределах очерков как одной, так и другой поверхности одновременно.

Построение линии пересечения поверхностей начинают с определения характерных ее точек — *экстремальных*

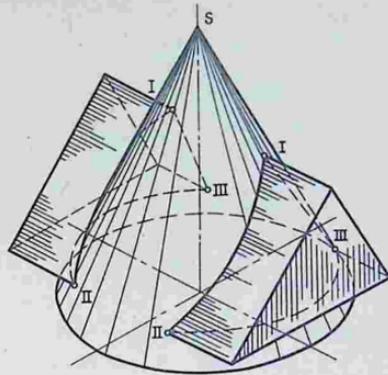
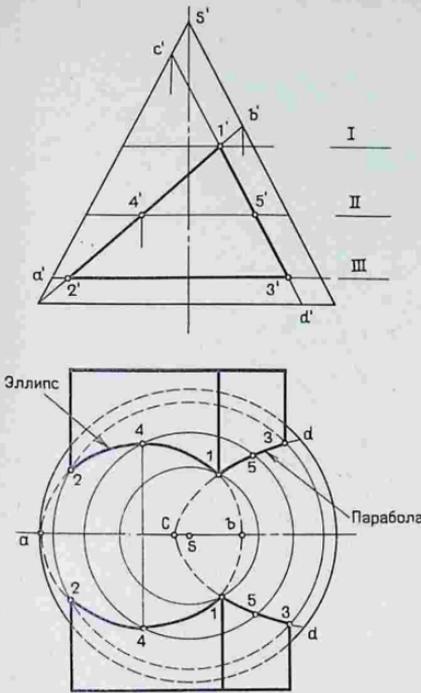


рис. 120). Линия пересечения данных поверхностей представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. Грани призмы пересекают поверхность конуса по окружности, неполному эллипсу и неполной параболе. В данном случае вспомогательными плоскостями можно не пользоваться, так как фронтальные проекции точек линии пересечения известны.

(вышей и ниже) и точек видимости, отделяющих видимую часть линии пересечения от невидимой. Приступая к построению линии пересечения поверхностей, следует выделить более простой случай, когда одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций и решение задачи упрощается.

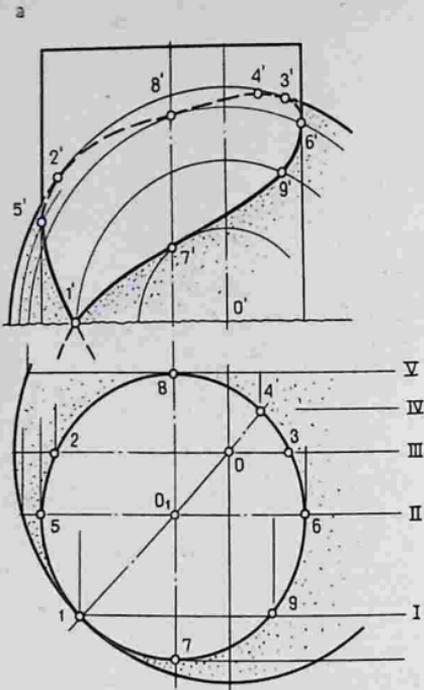
Рассмотрим сначала примеры решения задач этого более простого типа.

**Пример 1.** Построить пересечение трехгранной призмы с конусом вращения (рис. 132). Три боковые грани призмы являются фронтально проецирующими плоскостями, следовательно, построение линии пересечения сводится к решению ранее рассмотренной задачи на пересечение поверхности проецирующей секущей плоскостью и прямой линией (см. § 29,

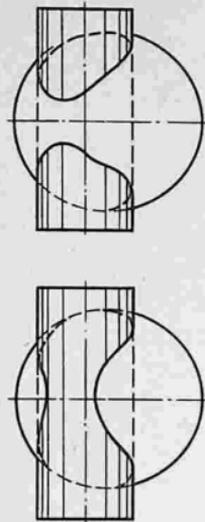
Горизонтальные проекции линий пересечения строим по точкам с помощью трех параллелей конуса, проведенных через характерные точки линии пересечения. Промежуточная точка 4, 4' выбрана посередине отрезка  $a'b'$ , который является большой осью эллипса.

**Пример 2.** Построить линию пересечения цилиндра и сферы (рис. 133, а). Боковая поверхность цилиндра является горизонтально проецирующей, следовательно, горизонтальная проекция линии пересечения известна. Она совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра. Так как пересекаются две поверхности второго порядка, линией пересечения будет *пространственная кривая* — кривая четвертого порядка.

Проведем несколько фронтальных вспомогательных плоскостей, которые пересекут цилиндр по образующим, а сферу — по окружностям, параллельным фронтальной плоскости проекций.



6



Характерными или опорными точками (они выбираются на плане) являются:

а) точки 1, 2 и 3, в которых проекции линии пересечения касаются горизонтальной и фронтальной очерков сферы; они определяются с помощью линий связи;

б) точка 4—высшая, определяется на плане с помощью меридиана сферы, проходящего через ось цилиндра;

в) точки 5 и 6— точки видимости и касания кривой к очерковым образующим цилиндра;

г) точки 7 и 8—определяют границы изменения проекции линии пересечения.

На рис. 133, б приведены два других случая пересечения данных поверхностей при некотором изменении их взаимоположения. В первом из них линия пересечения представляет собой две симметричные замкнутые кривые, во втором—отсутствует общая (узловая) точка самопересечения кривой.

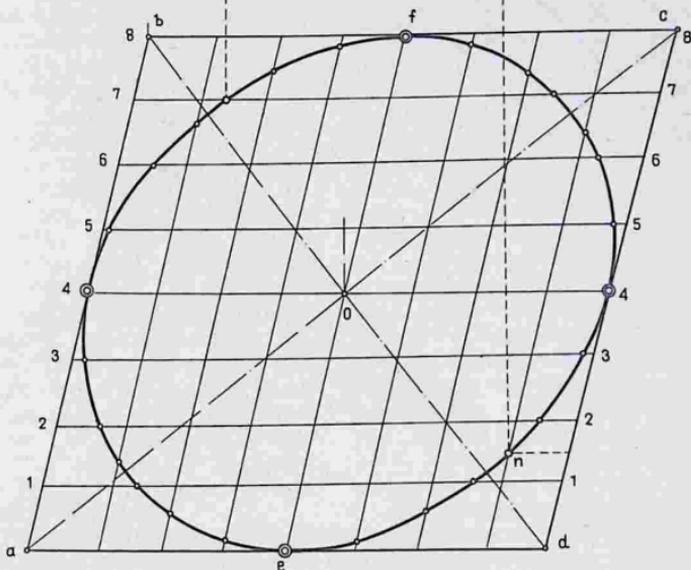
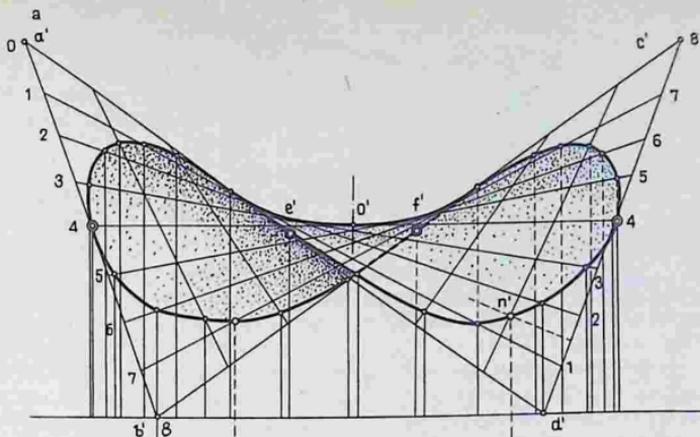
**Пример 3.** Построить линию пересечения гиперболического

параболоида с прямым эллиптическим цилиндром (рис. 134, а). Как и в предыдущей задаче, боковая поверхность цилиндра проецирующая. Для определения фронтальной проекции линии пересечения необходимо найти на плане точки пересечения образующих гиперболического параболоида с цилиндром и с помощью линий связи определить их фронтальные проекции на проекциях тех же образующих.

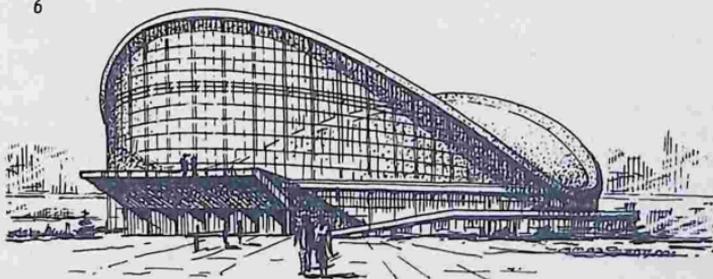
На рис. 134, б приведено изображение проекта павильона строительной выставки, покрытие которого представляет собой аналогичный отсек гиперболического параболоида.

Рассмотрим наиболее *общий* случай пересечения поверхностей, когда отсутствуют проецирующие элементы пересекающихся поверхностей и следует определить обе проекции кривой сечения, применяя основной способ сечения вспомогательными плоскостями (см. рис. 131). При этом сначала следует выбрать наиболее рациональное положение вспомогательных плоскостей,

Рис. 134



6



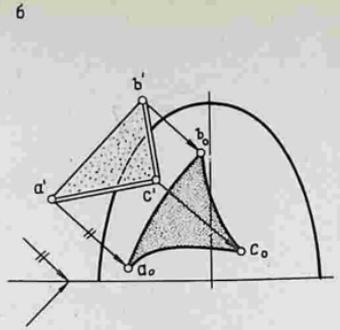
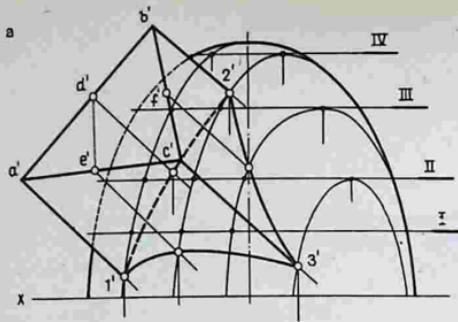
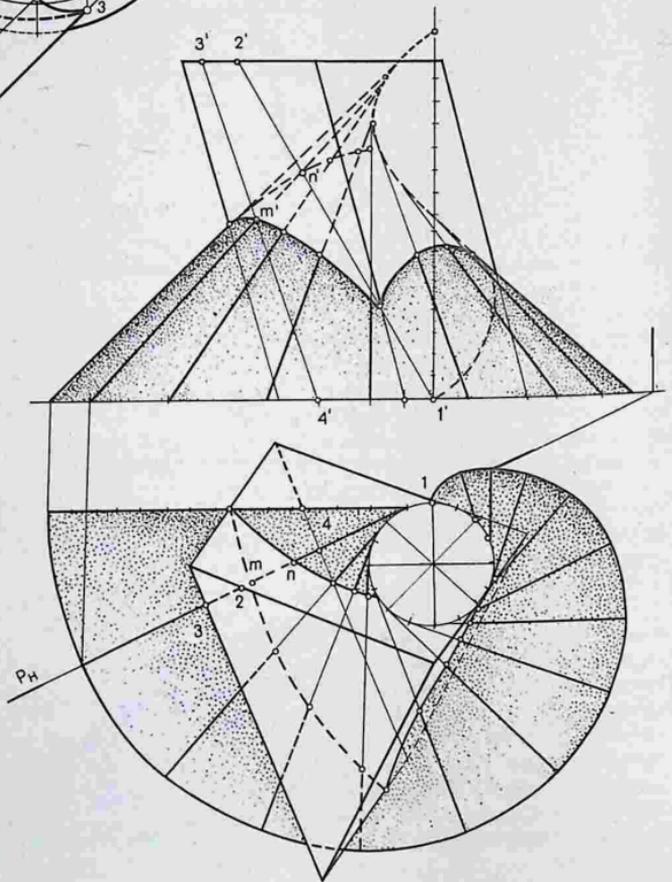
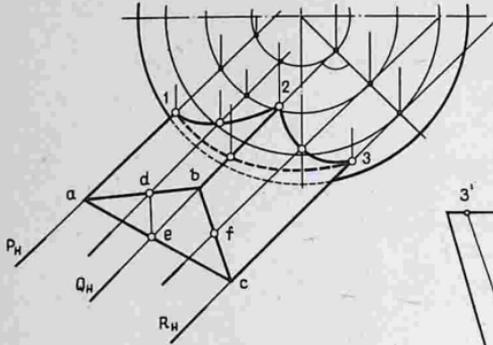


Рис. 135

Рис. 136



учитывая вид поверхности, а затем определить опорные точки линии пересечения, которые должны быть построены.

**Пример 1.** Построить линию пересечения трехгранной призмы с поверхностью эллипсоида вращения (рис. 135, а). Линия пересечения представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. В качестве вспомогательных плоскостей следует применить горизонтально проецирующие плоскости, проведя их через ребра призмы и между ними, с тем чтобы определить не менее трех точек для каждого отрезка линии пересечения. Плоскость  $Q$ , проходящая через ребро  $B$ , пересекает и нижерасположенную грань призмы. Таким образом, решение задачи сводится к многократному построению точки пересечения прямой с поверхностью. Вспомогательные сечения эллипсоида строятся с помощью каркаса линий, состоящего из четырех параллелей.

Ход решения этой задачи аналогичен построению падающей тени от треугольного экрана на кривую поверхность (рис. 135, б).

**Пример 2.** Построить линию пересечения трехгранной наклонной призмы с торсовой поверхностью. На рис. 136 приведен более сложный пример пересечения поверхностей [5]. Торсовая поверхность является линейчатой развертываемой поверхностью одинакового ска- та (см. § 24, рис. 98, а).

Как и в предыдущем примере, линия пересечения представляет собой ломаную линию, состоящую из отрезков трех плоских кривых. Для построения линии пересечения вспомогательные горизонтально проецирующие плоскости следует проводить через образующие тора. Они пересекают призму по прямым линиям, например плоскость  $P$  пересекает призму по двум прямым или четырехугольнику  $1-2-3-4$ , в пересечении с которым определены искомые точки  $m$ ,  $m'$  и  $n$ ,  $n'$  кривой линии пересечения.

### 33. Построение пересечения поверхностей с помощью косоугольного вспомогательного проецирования

Как было показано ранее (см. § 12, рис. 44), при косоугольном вспомогательном проецировании направление проецирования преобразуется таким образом, чтобы получить *вырожденную* проекцию прямой линии, секущей плоскости или поверхности.

Рассмотрим примеры построения линии пересечения поверхностей с использованием косоугольного вспомогательного проецирования.

**Пример 1.** Построить линию пересечения наклонного эллиптического цилиндра плоскостью общего положения, заданной пересекающимися прямыми (рис. 137). Применим вспомогательное косоугольное проецирование на фронтальную плоскость проекций. Направление проецирования  $S$  выбрано параллельно горизонтали  $EN$  плоскости. Секущая плоскость спроецировалась в прямую  $a'_1 b'_1$ . Чтобы определить направление вспомогательных проекций образующих цилиндра, построена точка  $K$ , взятая на образующей  $l$ , которая спроецировалась в прямую  $l_x - k''$ . Косоугольные проекции других образующих, например  $l$ ,  $2$  и  $3$ , спроецировались параллельными прямой  $l_x - k''$ .

Косоугольная проекция линии сечения  $p'' q''$  определена пересечением проекций образующих и плоскости  $MEN$ . Вспомогательные проекции крайних образующих цилиндра определяют проекции высшей  $3'_0$  и низшей  $6'_0$  точек сечения. Точки  $1'_0$  и  $2'_0$  также являются характерными, так как лежат на очерковых образующих фронтальной проекции, являющихся точками касания кривой сечения и точками видимости. Построение других точек линии пересечения следует начинать с определения двух аналогичных точек  $4_0$  и  $5_0$ , принадлежащих очерковым образующим горизонтальной проекции цилиндра.

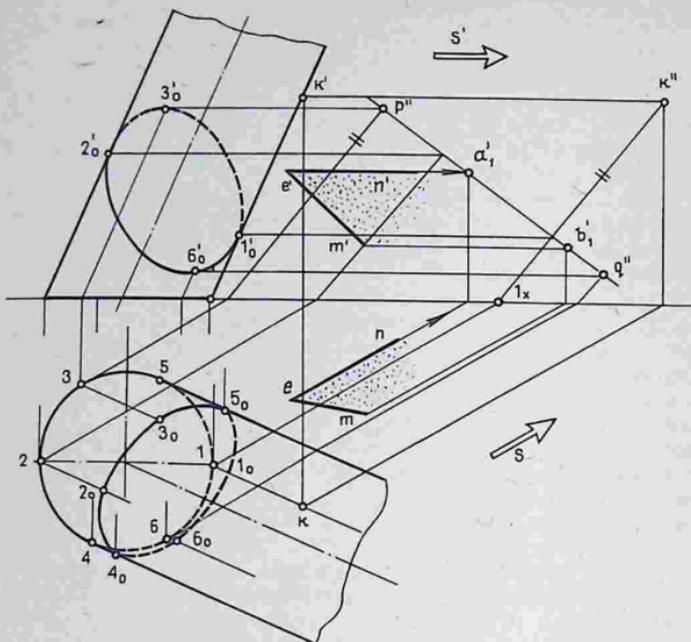


Рис. 137

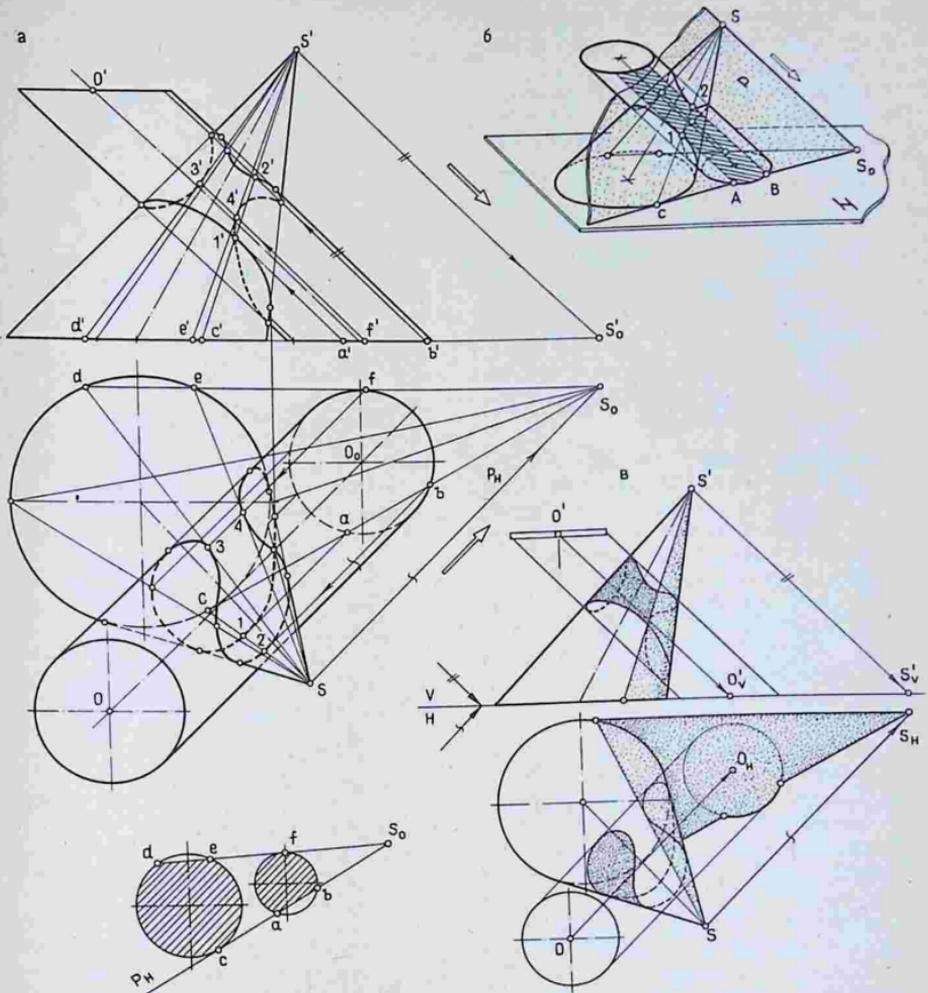
Рис. 138

**Пример 2.** Построить линию пересечения эллиптических поверхностей конуса и цилиндра (рис. 138, а). Применение основного способа вспомогательных секущих плоскостей уровня (горизонтальных) в данном случае нерационально и трудоемко. Помимо этого, невозможно графически точно определить опорные точки линии пересечения — точки касания ее проекций к очерковым образующим конуса и цилиндра.

Для большей простоты и точности графических построений применим вспомогательное косоугольное проектирование на горизонтальную плоскость проекций. Направление косоугольного проектирования выбрано параллельно образующим цилиндра. Строим на плоскости  $H$  косоугольную проекцию поверхностей. Боковая поверхность цилиндра и все его образующие спроецируются в окружность основания, а вершина конуса — в точку  $S_0$ , через которую пройдут все косоугольные проекции образующих конуса.

Для построения точек линии пересечения поверхностей применим способ вращающейся плоскости — пучок плоскостей общего положения, проходящих через прямую  $S - S_0$  — ось пучка, между крайними косоугольными проекциями образующих конуса  $ds_0$  и  $cs_0$ . Секущие плоскости пересекут обе поверхности по образующим (см. § 17, рис. 57).

Прежде всего определим косоугольные проекции крайних образующих конуса  $ds_0$  и  $cs_0$ , в пересечении которых со следом цилиндрической поверхности получим косоугольные проекции соответствующих образующих. Возьмем, например, вспомогательную секущую плоскость  $P$ , проходящую через ось пучка (рис. 138, б). Эта плоскость пересечет окружность основания цилиндра в точках  $a$  и  $b$  и коснется основания конуса в точке  $c$ , а его поверхности — по образующей  $CS$ . В пересечении этих вспомогательных сечений мы получим искомые точки линии пересечения 1 и 2. В общем случае каждая секущая плоскость дает возможность определить



четыре точки сечения (см. аксонометрию).

Из рассмотрения косоугольных проекций поверхностей видно (см. схему плана), что пересечение будет неполным, т. е. ни одна из поверхностей не будет пересечена полностью другой. Чтобы определить характер пространственной кривой сечения, необходимо построить ее опорные точки. К ним относятся точки касания к проекциям очерковых образующих и точки

видимости. Для этого необходимо провести секущие плоскости, проходящие через косоугольные проекции очерковых образующих цилиндра и конуса.

Рассмотренному примеру пересечения поверхностей можно дать иное содержание (рис. 138, в). Если направление косоугольного вспомогательного проецирования будет соответствовать направлению лучей света, то линию пересечения *лучевого цилиндра* с поверхностью конуса на видимой части по-

верхности конуса можно трактовать как контур падающей тени от горизонтального круга.

Световые лучи, проходящие через горизонтальную окружность, образуют эллиптический лучевой цилиндр, который пересекает поверхность конуса по пространственной кривой линии — линии пересечения цилиндра и конуса. В этом случае косоугольная проекция конуса и цилиндра на горизонтальной плоскости проекций будет являться падающей тенью этих геометрических поверхностей.

#### 34. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

При пересечении поверхностей второго порядка линией пересечения в общем случае является пространственная кривая четвертого порядка. Эта кривая пересекается плоскостью в четырех точках (действительных и мнимых). Порядок линии пересечения равен произведению порядков пересекающихся поверхностей. Кривая четвертого порядка может распадаться на две плоские кривые второго порядка.

Справедлива следующая теорема: *если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и по второй плоской кривой.* Справедливость этого положения вытекает из того, что сумма порядков кривых, на которые распалась линия пересечения поверхностей, должна равняться четырем. Следовательно, должна существовать другая плоская кривая второго порядка, по которой пересекаются данные поверхности.

На рис. 139 изображены фронтальные проекции сферы и эллиптического конуса, которые пересекаются по параллели  $a'b'$ . Эта окружность расположена во фронтально проецирующей плоскости  $P_v$ . Она является первой плоской кривой. Вторая плоская кривая линии пересечения, расположенная во фронтально проецирующей плоскости  $Q_v$ , спроецируется на фронтальную плоскость проекций в виде отрезка прямой  $c'd'$ .

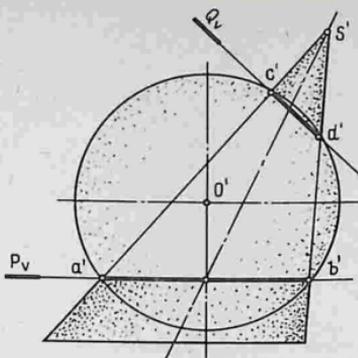


Рис. 139

Рассмотрим некоторые частные случаи взаимного расположения пересекающихся поверхностей второго порядка, когда линиями их пересечения являются кривые второго порядка.

1. Оси двух пересекающихся поверхностей вращения совпадают (рис. 140, а). Две поверхности вращения заданы одной осью и главными меридианами. Такие поверхности называют *соосными*. Точки пересечения меридианов при вращении вокруг оси описывают параллели, которые принадлежат обеим поверхностям. Следовательно, две соосные поверхности вращения пересекаются по параллелям; при этом, если оси поверхностей параллельны плоскости проекции, то параллели проецируются на эту плоскость прямыми линиями, перпендикулярными проекции оси.

2. Оси поверхностей вращения пересекаются (рис. 140, б). Для построения линии пересечения некоторых поверхностей вращения, как в данном случае, нецелесообразно использовать вспомогательные секущие плоскости. Они не могут дать вспомогательные линии сечения, которые проецировались бы графически простыми линиями. Поэтому для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии следует применить так называемый *способ вспомогательных concentric сфер*.

Прежде чем приступить к построе-

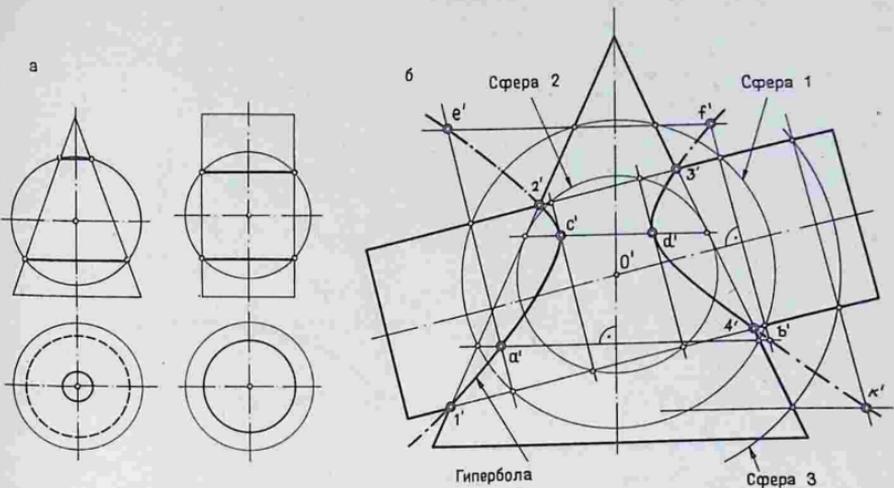


Рис. 140

ниям, отметим четыре общие точки  $1'-2'-3'-4'$  цилиндра и конуса в пересечении очерковых образующих – главных меридианов поверхностей. Примем точку  $O$  пересечения осей за центр концентрических сфер. Проведем из центра  $O'$  вспомогательную секущую сферу 1 произвольного радиуса. Она пересечет каждую из поверхностей по двум параллелям, как это показано на рис. 140, а. Эти параллели принадлежат одной поверхности – сфере 1, следовательно, точки их пересечения одновременно принадлежат и двум данным поверхностям – конусу и цилиндру, т. е. принадлежат линии их пересечения. Выбирая иной радиус вспомогательной сферы, можно построить любое число точек линии пересечения. Каждое сферическое сечение в общем случае определяет восемь точек линий пересечения, попарно совпадающих ( $a', b', e', f'$ ) на фронтальной проекции.

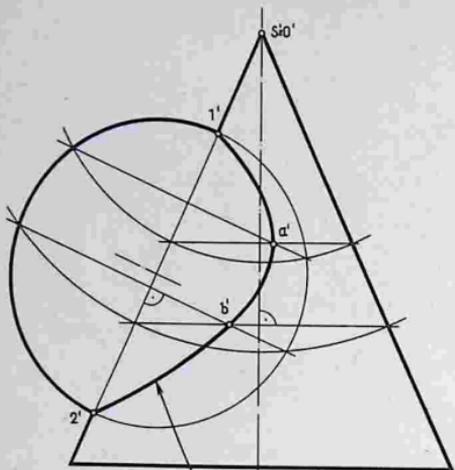
Проведем сферу 2 наименьшего радиуса, которая пересечет цилиндр по двум параллелям и коснется конуса. Это сечение определяет четыре характерные точки противоположных частей линии пересечения, наиболее близко расположенные. Чтобы уточнить вид

кривой, проведем еще одну вспомогательную сферу 3, изобразив частично ее меридиан и параллели. Получим еще две совпадающие проекции точек ( $k'$ ).

Необходимо отметить следующую закономерность: *если оси поверхностей вращения пересекаются и параллельны плоскости проекции, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде плоской кривой второго порядка.*

Пространственная кривая линии пересечения конуса и цилиндра проецируется на плоскость, параллельную их плоскости симметрии, в виде гиперболы. На рис. 141 приведено построение пересечения конуса и сферы. Проекция линии пересечения представляет собой параболу.

3. Пересекающиеся поверхности вращения имеют общую плоскость симметрии (рис. 142). Проекция линии пересечения поверхностей конуса вращения и тора (кругового кольца) построена с помощью вспомогательных сферических сечений *способом эксцентрических сфер*. Необходимо построить вспомогательную сферу, которая пересечет обе поверхности по окружностям. Проведена фронтальная проекция  $a'd'$  окружности



Парабола

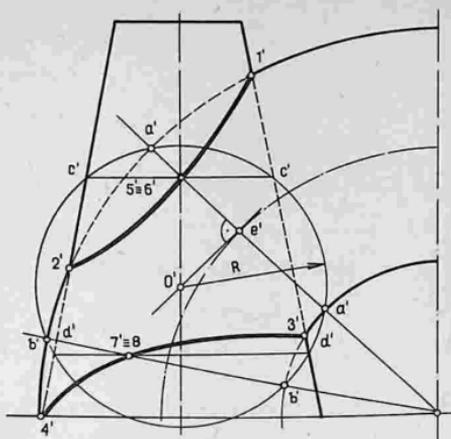


Рис. 141

Рис. 142

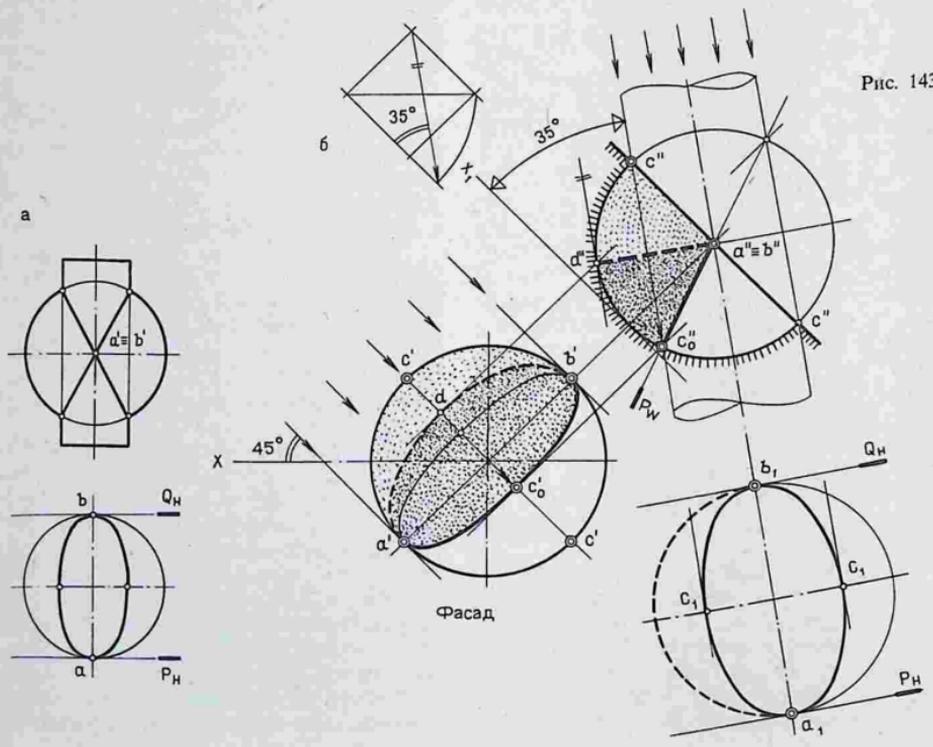


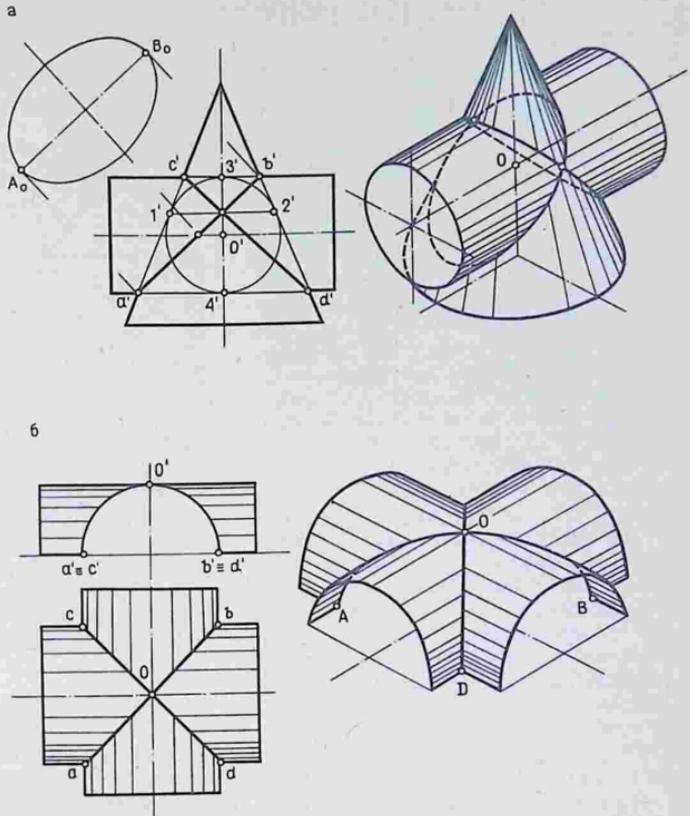
Рис. 143

Фасад

Фасад

Фасад

Рис. 144



кольца, которую можно принять за линию пересечения тора вспомогательной сферой. Затем через середину ее проекции проведена прямая  $e'o'$ , перпендикулярная к ней, до пересечения с осью конуса в точке  $o'$ .

Из точки  $o'$  проводят вспомогательную сферу радиуса  $o'd'$ , которая пересечет кольцо также по второй окружности  $b'b'$ , а конус — по двум окружностям  $c'c'$  и  $d'd'$ . Каждая пара окружностей пересекается в двух общих точках  $5' \equiv b'$  и  $7' \equiv 8'$ , принадлежащих линиям пересечения поверхностей конуса и кольца. Взяв другое сечение тора, найдем новые точки. Линия пересечения поверхностей проходит через точки  $1', 2'$  и  $3', 4'$ .

Таким образом, при частном взаим-

ном расположении поверхностей вращения применение способа сферических сечений позволяет достаточно просто построить линию их пересечения по одной проекции.

4. Поверхности в точках касания имеют общие касательные плоскости (рис. 143, а). Сфера и эллиптический цилиндр пересекаются по двум окружностям. Они имеют две общие точки  $A$  и  $B$  и две общие касательные плоскости в этих точках. Пространственная линия пересечения распалась на две плоские кривые — окружности.

Теорема (о двойном соприкосновении). Если две поверхности второго порядка имеют две точки соприкосновения

и общие касательные плоскости в этих точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.

Этот пример пересечения поверхностей полностью аналогичен построению теней в полусферической нише (рис. 143, б). На чертеже приведены фасад объекта со стандартным направлением луча и дополнительная проекция, построенная способом замены плоскостей проекций [18, 15]. Световые лучи, проходящие через кромку ниши, образуют эллиптический цилиндр, который касается сферы в точках А и В. Линия  $a'c_0b'$  на фасаде является контуром падающей тени от кромки  $a'c'b'$  ниши, а линия  $a'db'$  — контуром собственной тени (см. § 52, рис. 221, а).

5. Две пересекающиеся поверхности касаются третьей поверхности второго порядка (рис. 144, а). Поверхности конуса и цилиндра с общей фронтальной плоскостью симметрии касаются сферы по окружностям  $1'-2'$  и  $3'-4'$ . Линии пересечения поверхностей представляют собой эллипсы, плоскости которых перпендикулярны фронтальной плоскости проекций.

**Теорема (теорема Г. Монжа).** Если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка.

Теорема Монжа — частный случай теоремы о двойном соприкосновении. Эта закономерность имеет важное значение при проектировании различных архитектурных форм и пространственных конструкций, например сводов, на основе поверхностей второго порядка, так как упрощает выполнение сопряжений поверхностей. На рис. 144, б приведено пересечение двух цилиндров, образующих крестовый свод.

Общей поверхностью соприкосновения пересекающихся поверхностей может быть не только сфера, но, как следует из теоремы, любая поверхность второго порядка. На рис. 145

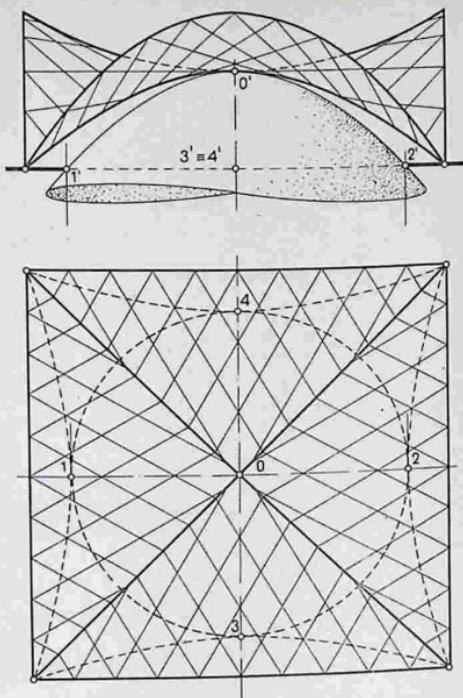


Рис. 145

пересечение двух гиперболических параболоидов, образующих покрытие архитектурного сооружения. Они описаны вокруг поверхности параболоида вращения. Каждая из пересекающихся поверхностей касается параболоида вращения по параболе  $1-0-2$  и  $3-0-4$  (см. план). В этом случае очерк параболоида на фронтальной и профильной плоскостях проекций должен совпадать с очерками гиперболических параболоидов — параболы  $1'-0'-2'$  и  $3''-0''-4''$ . Однако, поскольку внутренние части пересекающихся поверхностей удалены для образования свободного пространства, как в крестовом своде (см. рис. 144, б), на фронтальной проекции это касание не показано.

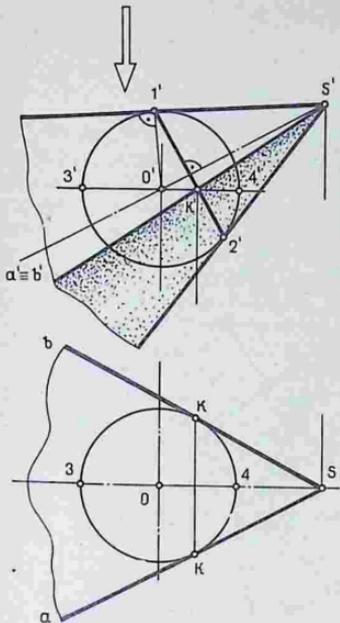


Рис. 146

### 35. Построение очерков поверхностей

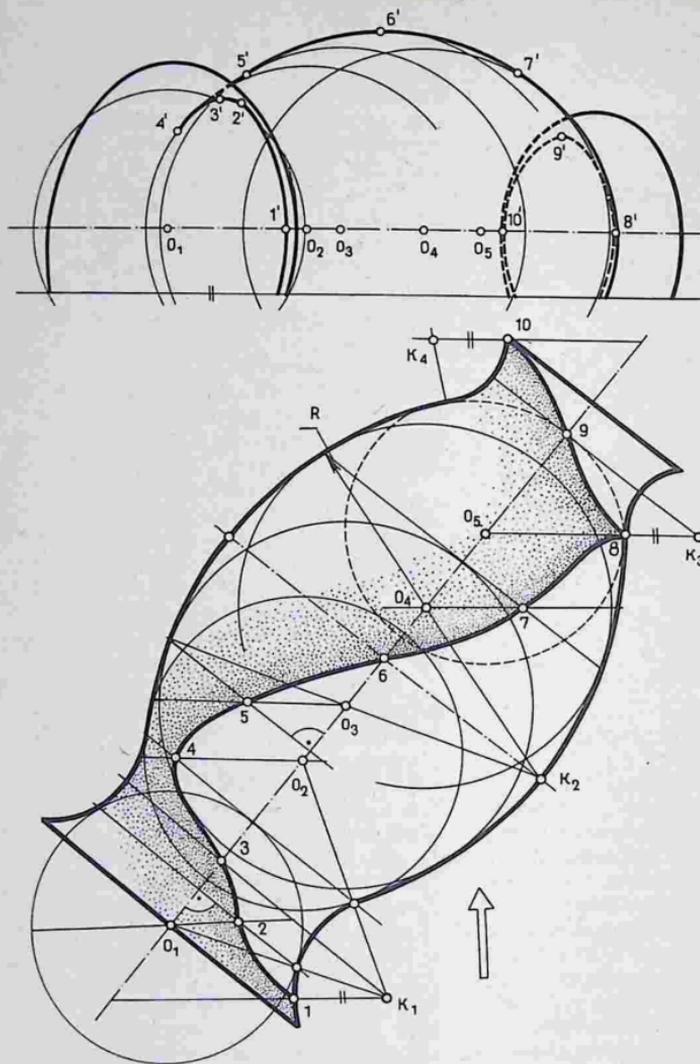
Специальные приемы построения очерков проекций поверхностей вращения (см. § 22, рис. 89) оказываются необходимыми в тех случаях, когда ось поверхности, по композиционным соображениям, расположена непараллельно плоскости фасада или плана. В этих случаях линию очерка поверхности следует определять, пользуясь способом вписанных вспомогательных сфер.

Рассмотрим сначала несложный пример (рис. 146). Ось конической поверхности вращения расположена параллельно плоскости  $V$  и под некоторым углом к плоскости  $H$ . Очерком фронтальной проекции является главный меридиан поверхности. Требуется построить очерк горизонтальной проекции, определив контурные образующие поверхности. Так как образующие конической поверхности —

прямые линии, можно применить одну вспомогательную сферу. Впишем в поверхность некоторую сферу. Она касается поверхности конуса по окружности, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения; ее фронтальной проекцией является отрезок  $1'-2'$ . Построим точку  $k'$  — одну из точек контурной образующей поверхности. Она определяется в пересечении окружности касания с экватором сферы  $3'-4'$ . Прямая  $s'k'$  является контурной образующей конической поверхности. Ее горизонтальную проекцию находим на проекции экватора с помощью линии связи. Контурная образующая разграничивает на поверхности видимую сверху часть от невидимой и определяет тем самым очерк горизонтальной проекции.

На рис. 147 приведен более сложный пример. Поверхность вращения задана очерком горизонтальной проекции. Она представляет собой обобщенную форму, близкую к поверхности мягкой пневмооболочки с открытыми торцами. Требуется построить очерк поверхности на фронтальной плоскости проекций.

Фронтальные проекции двух торцов поверхности строятся с помощью линий связи. Они представляют собой неполные эллипсы. Аналогичным образом строим проекции опорных точек 3, 6 и 9, совпадающих на плане с проекцией оси. Отметим центры  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  дуг кривой очерка горизонтальной проекции. Проекция точек 1, 8 и 10, лежащие на этом очерке, определены с помощью фронтальных прямых. Все остальные промежуточные точки 2, 4, 5 и 7 горизонтальной проекции линий контура и очерка фронтальной проекции определены приемом вписанных сфер, т.е. построением точек пересечения окружностей касания с экваторами сфер и последующим определением их фронтальных проекций на тех же сферах. Точка 4, как и некоторые другие, является экстремальной; на плане она отмечает наиболее «раскрытую» часть поверхности, а на фасаде представляет точку возврата — конечную точку линии очерка внутренней части поверхности. Она носит название «точки исчезнове-



ния». Проекцию линии контура на плане (линию видимости) вычерчивать необязательно.

Построение горизонтальной проекции линии контура и фронтального очерка поверхности сходно с построением собственных и падающих теней, в данном примере — при направлении

световых лучей, перпендикулярном фронтальной плоскости проекций. Тогда горизонтальная проекция линии контура поверхности будет контуром собственной тени, а фронтальный очерк поверхности — контуром падающей тени.

## Глава 7. Преобразования

В настоящую главу включены некоторые специальные темы курса, связанные с графическими операциями над поверхностями, которые оказываются необходимыми в тех случаях, когда основные, традиционные способы решения задач оказываются нерациональными или не дают решения вообще. Это различные преобразования, отличающиеся от ортогонально-проекционных способов решения задач, такие, как развертка поверхностей и гомологические преобразования поверхностей в пространстве, а также преобразования графической информации чертежа в форму, удобную для автоматизированного решения геометрических задач, связанных с поверхностями.

### 36. Развертывание поверхностей и построение сетей на поверхностях вращения

В практике архитектурного проектирования и строительства развертывание поверхностей находит применение при разработке чертежей для раскроя плоского листового материала. Способы развертки поверхностей используются при проектировании пневматических и тентовых сооружений, а также при строительстве резервуаров различной формы, воздуховодов и т. д.

Форма и размеры плоских фигур определяются специальными приемами развертывания по чертежам запроецированных поверхностей. Построение разверток выполняется, как правило, только графическими приемами.

*Развертыванием* называется такое преобразование поверхности, в результате которого она совмещается с плоскостью. Плоская фигура, полученная в результате развертывания поверхности и совмещения ее с плоскостью, называется *разверткой*.

Ранее (§ 24) кривые поверхности бы-

ли подразделены на развертываемые, которые могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и складок, и неразвертываемые. Развертывание последних выполняется приближенно при некоторой деформации или замене частей поверхности отсеками развертываемых поверхностей. Подобная замена отсеков одной поверхности отсеками другой, более простой поверхности называется *аппроксимацией*.

Как отмечалось ранее, к развертываемым относятся все гранные поверхности, а также кривые линейчатые поверхности нулевой кривизны — цилиндрические, конические и торсовые. На развертках этих поверхностей сохраняются длины отрезков линий, углы между пересекающимися линиями, величины площадей замкнутых участков поверхности. Такое преобразование пространственной фигуры в плоскую называют *изометрическим отображением*.

Следовательно, поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие.

Изометрическое отображение поверхности в плоскость включает два преобразования: одно из них, так называемое *конформное*, сохраняет инвариантными (неизменными) величину углов между линиями в точках их пересечения, а другое преобразование — *эквивалентное*, сохраняет величину площадей замкнутой области поверхности.

Свойство сохранения величины площадей в таком преобразовании предопределяет и сохранение длины соответственных отрезков линий поверхности и ее развертки.

**Развертка многогранных поверхностей.** *Разверткой многогранной поверхности называется плоская фигура, полученная в результате последовательного совмещения всех ее граней с плоскостью.*

1. Развертка пирамиды (рис. 148). Основание пирамиды параллельно плоскости  $H$ , поэтому следует определить натуральную величину боковых граней — треугольников. Истинная длина боковых ребер пирамиды определена способом вращения. Затем по трем сторонам строят контуры боковых граней, которые соединяют друг с другом смежными ребрами. К ним присоединяется основание пирамиды. В данном примере поверхность пирамиды совмещена с плоскостью своей внутренней стороной. Это следует иметь в виду при сгибании развертки в объемную форму, чтобы не получить пирамиду, симметричную исходной. Если необходимо на развертке построить точку, то поступают следующим образом. Через точку  $K$ , лежащую на грани  $BCS$ , проводят прямую  $SK$  и горизонталь, а затем переносят на развертку натуральные величины отрезков  $n$  и  $m$ .

2. Развертка призмы. Развертки призмы и пирамиды значительно упрощаются, если они прямые и правильные. В этом случае у пирамиды все боковые грани одинаковые, а у прямой призмы все боковые ребра проецируются в натуральную величину.

На рис. 149 приведено построение развертки наклонной призмы. Существуют различные способы развертки ее поверхности. Один из них (*способ триангуляции*) заключается в проведении диагоналей, которые разбивают каждую грань на два треугольника, и в определении длины сторон треугольников.

Рассмотрим другой способ развертки боковой поверхности призмы, который применяется также и при развертке поверхности наклонного цилиндра. Для построения развертки боковой поверхности призмы преобразуем эппор и построим способом замены плоскостей проекций новую фронтальную проекцию призмы на плоскость  $V_1$ , параллельную боковым ребрам призмы.

Развертывание боковой поверхности и ее совмещение с плоскостью выполнено *вращением* вокруг оси  $I-I_1'$  (отмечена стрелкой). При вращении проекции

точек перемещаются по прямым, перпендикулярным оси, а положение совмещенных концов ребер засекается на этих прямых отрезками сторон основания призмы, взятых с горизонтальной проекции. Поверхность призмы совмещена с плоскостью внешней стороной поверхности.

На чертеже показано построение на развертке точки  $M$ . Через точку проведена вспомогательная прямая, параллельная боковым ребрам призмы. Эта прямая и точка построены сначала на дополнительной проекции, а затем — на развертке.

**Развертка кривых поверхностей.** Развертки поверхностей *прямых* круговых конусов и цилиндров могут быть выполнены точно. Боковая поверхность цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами  $H$  и  $\pi D$ . Боковая поверхность конуса представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине  $l$  образующей конуса, а центральный угол при его вершине  $\alpha = 360^\circ R/l$ .

1. Приближенная развертка наклонного цилиндра. На боковой поверхности цилиндра проводят ряд образующих. Участки поверхности между смежными образующими примем за плоские грани, т. е. аппроксимируем боковую поверхность цилиндра многогранной поверхностью. Далее развертка выполняется аналогично предыдущему примеру (см. рис. 149).

2. Приближенная развертка наклонного (эллиптического) конуса (рис. 150). Боковая поверхность конуса аппроксимируется вписанной в нее многогранной поверхностью пирамиды, которая и развертывается. Натуральные величины боковых ребер (образующих конуса) определены вращением. Преобразованной точкой вершины конуса принята ее фронтальная проекция. Контур развертки боковой поверхности построен по точкам засечками из точки  $s'$  радиусом, равным длине образующей, и отрезком  $m$ , равным стороне многоугольника основания вписанной пирамиды.

Граничные точки ребер пирамиды

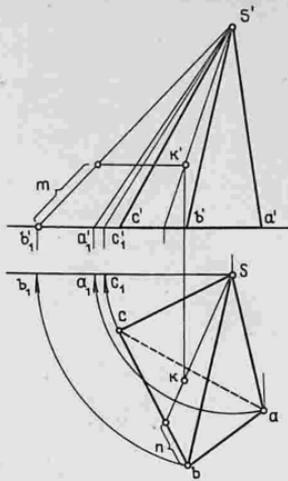
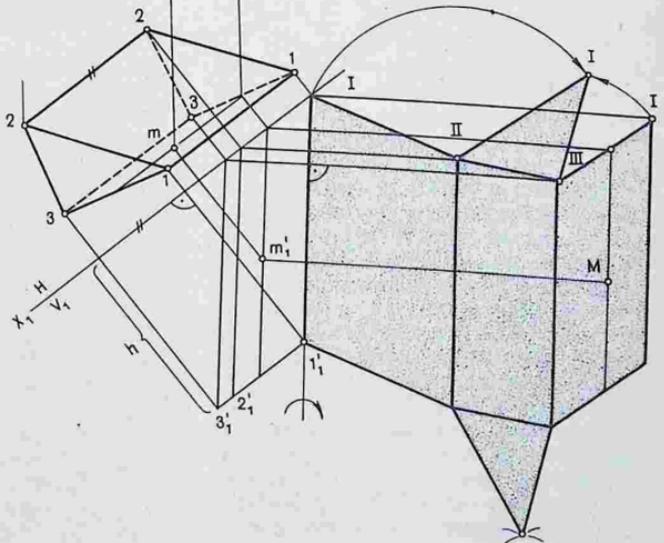
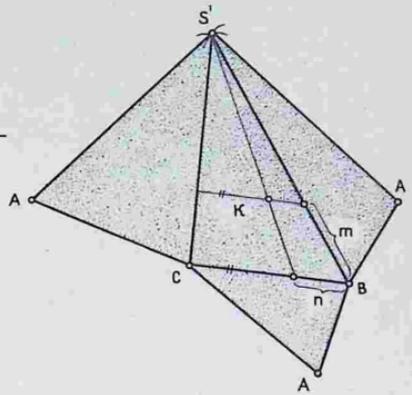
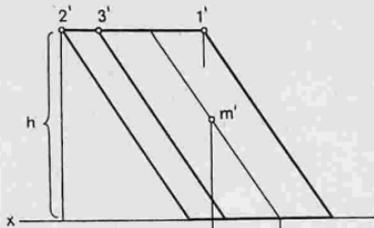


Рис. 148

Рис. 149



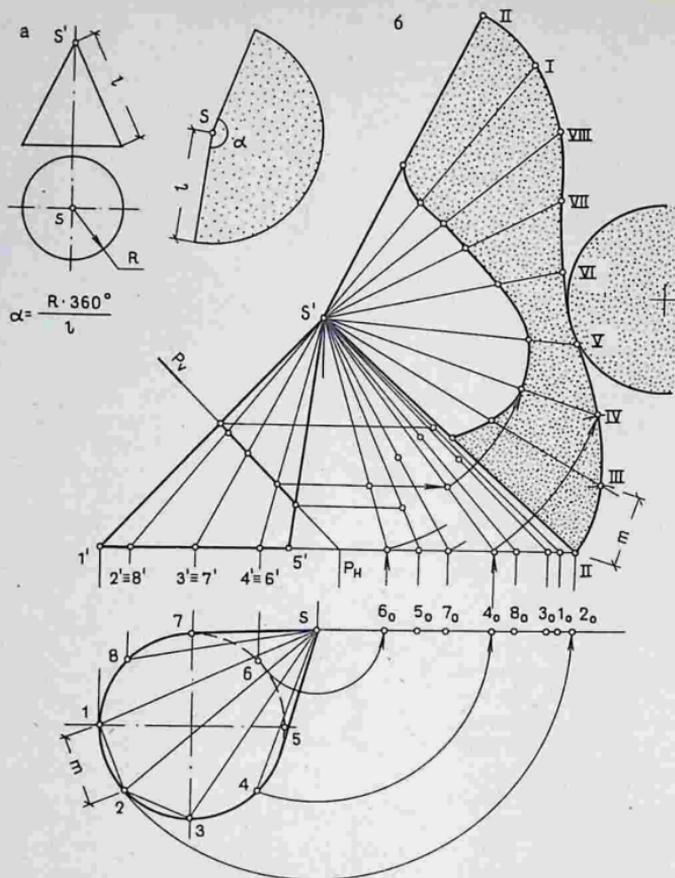


Рис. 150

Рис. 151

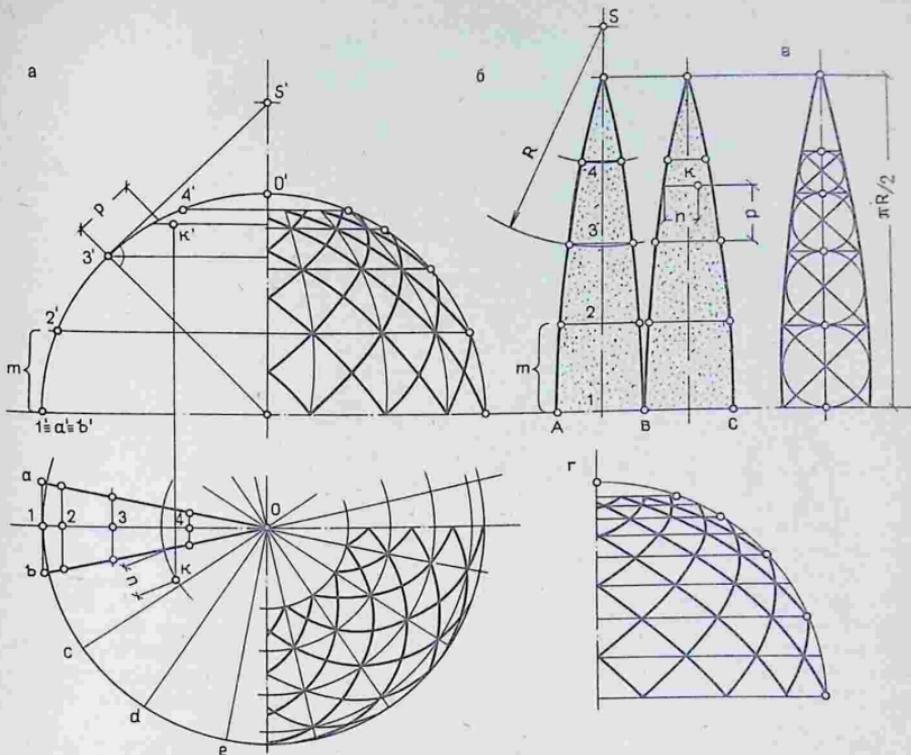
соединены плавной кривой. Поверхность конуса разрезана по образующей S2. Развертка боковой поверхности ограничена двумя прямыми — образующими и кривой линией — преобразованной граничной контурной линией конуса. На развертке показана линия пересечения конуса фронтально проецирующей плоскостью. Эллиптическая кривая сечения поверхности конуса преобразуется в другую плоскую кривую развертки боковой поверхности.

**Построение условных разверток кривых поверхностей с нанесением сетей на развертках.** Построение и изображение на чертежах сетей на поверхностях находят применение при проектирова-

нии сетчатых пространственных покрытий большепролетных зданий. Сети линий на поверхности служат основой для разработки конструктивной схемы покрытия, а также при выборе архитектурных членений поверхности. Отрезки линий сетей должны быть нанесены и на развертках поверхностей.

Сети представляют собой линейный каркас поверхности. Они могут иметь различную линейную структуру и характеризуются рисунком линий и их плотностью. Ранее (см. § 27, рис. 109) упоминалась *вантовая сеть* линий, которая отображала конструктивную схему тросов покрытия.

Наиболее распространенной сетью



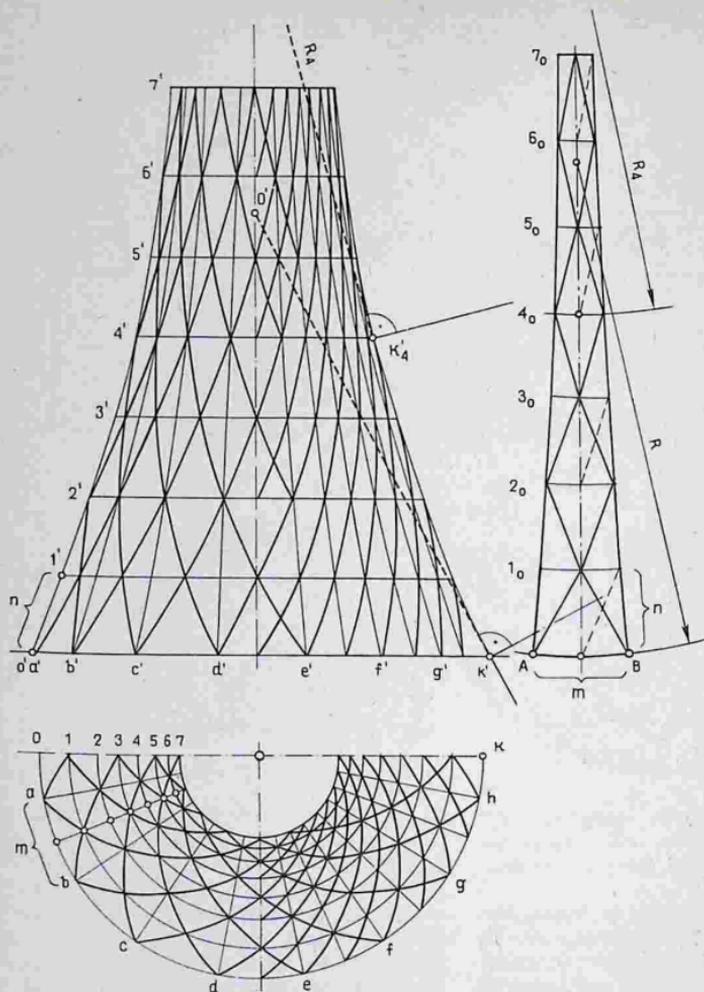
поверхностей вращения является *радиально-кольцевая сеть*, состоящая из пересекающихся меридианов и параллелей.

1. Развертка сферы. Сферическая поверхность неразвертываема. Ее нельзя развернуть на плоскость без разрывов и складок. Для неразвертываемых поверхностей строят *условные развертки*. Один из способов развертки заключается в аппроксимации (замене) сферических элементов сферы цилиндрическими (рис. 151). Для этого поверхность сферы делится меридианами на части. Участки поверхности, заключенные между смежными меридианами, заменяются цилиндрической поверхностью, которая и развертывается.

В нашем примере поверхность полусферы разделена меридианами на 16 равных частей, которые проецируются

на горизонтальную плоскость  $H$  секторами. Часть сферической поверхности, заключенную между смежными меридианами  $AO$  и  $BO$ , заменим цилиндрической поверхностью, касательной к сфере по главному меридиану. Разделим фронтальную проекцию этого элемента на четыре равные части. Определим горизонтальные проекции отрезков образующих 1, 2, 3 и 4 цилиндрического элемента.

Построим развертку этого элемента цилиндрической поверхности. На свободном месте чертежа наметим ось симметрии элемента и отложим на ней четыре раза отрезок  $m$  — расстояние между делениями главного меридиана. В полученные точки откладываем по горизонтали отрезки образующих цилиндрического элемента, взятые с пла-

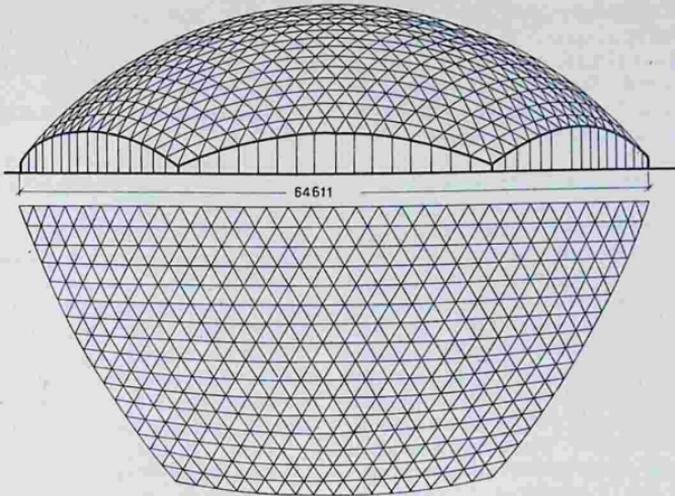


Если развертываемый элемент поверхности начинается с экватора сферы, этот его отрезок (отрезок 1) изображается прямым. Если же элементы развертки начинаются с какой-либо промежуточной параллели сферы (например, когда поверхность представляет собой сферический сегмент), то на развертке эта параллель изобразится дугой окружности (отрезок 3). Радиус этой окружности определяется на фронтальной проекции с помощью касательной  $s'3'$ , проведенной к очерку сферы в со-

ответствующей точке, до пересечения с осью. Положение точки  $K$ , принадлежащей сфере, определяют на развертке с помощью двух измерений  $p$  и  $n$  («координаты» точки), взятых на фасаде и плане. Линии меридианов и параллелей образуют на поверхности полушеры радиально-кольцевую сеть.

Чтобы построить на поверхности полушеры сеть с ромбовидными ячейками одинаковых пропорций, следует в развертку одного построенного элемента вписать соприкасающиеся по оси

Рис. 153



симметрии окружности (рис. 151, в). Расстояния, полученные между горизонтальными отрезками прямых, разделяющих эти окружности, необходимо перенести на фронтальный очерк полушеры (показаны справа – см. рис. 151, а) и построить радиально-кольцевую сеть. Если в каждой ее ячейке провести диагонали, получим ромбическую сеть. Дополнив ромбическую сеть линиями параллелей поверхности, проведенных через все точки пересечений линий сети, получим так называемую кристаллическую сеть линий (рис. 151, г).

2. Развертка поверхности вращения. На рис. 152 показано построение на поверхности вращения переменной отрицательной кривизны сетей двух типов, выполненных на основе радиально-кольцевой сети (тонкие линии). Ее построение аналогично расчленению сферы меридианами и параллелями, выполненному на предыдущем чертеже. На левой половине поверхности изображена сеть, состоящая из двух семейств пересекающихся линий, которые образуют ромбические ячейки, на правой половине – сеть линий, закрупляющихся по спирали.

Построение развертки одного элемента поверхности аналогично предыдущему примеру. Нижний поперечный

отрезок контура элемента является дугой окружности, радиус которой определен с помощью касательной  $o'k'$  к очерку фронтальной проекции. Радиусы кривизны последующих горизонтальных отрезков ( $R_4$ ) увеличиваются, а кривизна отрезков линий уменьшается; последний отрезок представляет собой прямую линию.

На рис. 153 изображен проект сетчатого покрытия лабораторного корпуса. Поверхность покрытия представляет собой сферический сегмент, краевой контур которого образован шестью секущими плоскостями. Сеть линий состоит из трех пересекающихся семейств линий, образующих на поверхности треугольные ячейки. Они образованы аналогично последовательному расчленению поверхности икосаэдра (см. § 18, рис. 65).

### 37. Геометрические преобразования при центральном и параллельном проецировании

Центральное и параллельное проецирование являются отображением пространства на плоскость. Существуют такие отображения, при которых каждой точке одной фигуры со-

ответствует единственная точка другой фигуры. Такое соответствие называется *однозначным*. Если при этом каждой точке второй фигуры соответствует единственная точка первой, то такое соответствие называют *взаимно однозначным*.

Пусть даны две плоскости  $P$  и  $P_1$  (рис. 154, а), пересекающиеся по прямой  $m$ , и центр проекций  $S$ . Построим центральные проекции точек плоскости  $P$  на плоскость  $P_1$ . Точка  $A$  проецируется в точку  $A_1$ , точка  $B$  — в точку  $B_1$  и т. д., прямая  $AB$  — в прямую  $A_1B_1$ . Однако центральное проецирование не обеспечивает полного взаимно однозначного точечного соответствия двух плоскостей: например, для точки  $N_1$ , расположенной на луче  $SN_1$ , параллельном плоскости  $P$ , не существует соответственной точки на плоскости  $P$ . Если же дополнить каждую прямую, принадлежащую плоскости  $P$ , бесконечно удаленной (несобственной) точкой, а плоскость  $P$  — бесконечно удаленной прямой, содержащей все несобственные точки плоскости, то соответствие между этими двумя плоскостями при центральном проецировании будет взаимно однозначным для любых точек.

К понятиям бесконечно удаленных или несобственных точек и прямых мы будем обращаться неоднократно, например при изучении раздела «перспектива».

**Перспективная коллинеация.** Итак, при центральном проецировании имеет место взаимно однозначное соответствие, при котором точкам, расположенным на одной прямой плоскости  $P$ , соответствуют точки, лежащие на соответствующей прямой плоскости  $P_1$ . Такое соответствие, установленное при центральном проецировании, называют *перспективной коллинеацией*, а прямую  $m$  называют *осью перспективной коллинеации*. Каждая точка этой прямой принадлежит обеим плоскостям и тем самым совпадает со своей центральной проекцией. Такие точки называют *двойными*.

Две соответственные прямые плоскостей  $P$  и  $P_1$  пересекаются на оси кол-

линеации: прямые  $BC$  и  $B_1C_1$  — в точке 1, прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  — в точке 2, прямые  $AC$  и  $A_1C_1$  — в точке 3. Каждая пара соответственных прямых находится в одной проецирующей плоскости с точкой  $S$ .

Эти закономерности перспективной коллинеации сформулированы в виде теоремы Дезарга: *если у двух треугольников прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке  $S$ , то точки 1, 2, 3 пересечения соответственных сторон принадлежат одной прямой  $m$ .*

Как сама теорема, так и следствия, вытекающие из нее, имеют принципиальное значение и используются во многих геометрических построениях. Теорема Дезарга, сформулированная для перспективной коллинеации в пространстве, как мы увидим далее, останется справедливой и для плоскости.

**Гомология.** Если плоскость  $P_1$  повернуть вокруг оси до совмещения с плоскостью  $P$ , то соответствие между точками плоскостей сохранится и перспективная коллинеация не нарушится (рис. 154, б). Все прямые, соединяющие соответственные точки, проходят через точку  $S$ , которая изменит свое положение. Такое взаимно однозначное соответствие двух совмещенных плоскостей называется *гомологией*. Точку  $S$  называют *центром гомологии*, а прямую  $m$ , содержащую двойные точки, — *осью гомологии*.

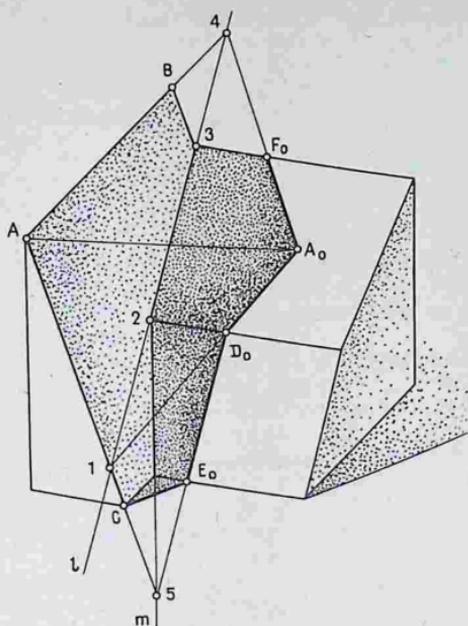
**Перспективно-аффинное (родственное) соответствие.** Перспективно-аффинное соответствие представляет собой частный случай перспективной коллинеации. Соответствие двух плоскостей, установленное параллельным проецированием, когда точка  $S$  является бесконечно удаленной точкой, называется *перспективно-аффинным*.

Значит, перспективно-аффинное или родственное соответствие есть перспективная коллинеация с несобственным центром. При этом все свойства перспективной коллинеации сохраняются и, кроме этого, добавляются свойства параллельного проецирования: сохраняются параллельность прямых и отно-



тия или растяжения по направлению родства. Построение точки  $N$  иллюстрирует более наглядно это положение.

Другим примером родственного соответствия может служить построение в аксонометрии падающей тени от одной плоскости объекта на другую при параллельных лучах света (рис. 156). Тень точки  $A$  на наклонной плоскости призмы задана (точка  $A_0$ ). Эти две точки являются родственными, а осью  $l$  родства является проекция 2–3 линии пересечения наклонных граней призмы. Точки контура падающей тени  $D_0$  и  $F_0$  найдены с помощью соответственных прямых  $A4$  и  $A_04$ , а также прямых  $A1$  и  $A_01$ . Падающую тень  $D_0E_0$  на другой грани построить так же просто, имея ось родства  $m$  и двойную точку 5 на оси родства.

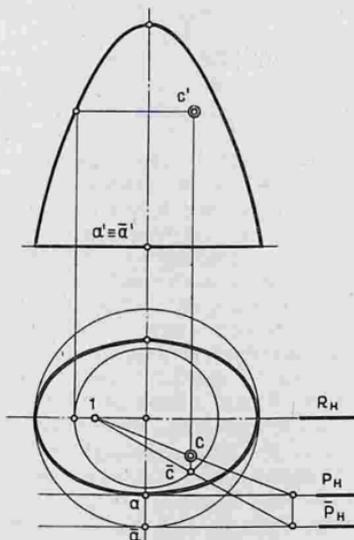


**Родственное преобразование пространства.** Родственное преобразование пространства и объектов, расположенных в нем, находит применение при архитектурном проектировании и геометрическом конструировании поверхностей-оболочек, в основе которых – поверхности второго порядка общего вида с эллиптическими параллелями, когда графические операции затруднены.

Родственное преобразование пространства аналогично преобразованию на плоскости. Вместо оси родства это преобразование определяется *плоскостью родства* и двумя соответственными точками, прямыми или плоскостями. Прямая, соединяющая соответственные точки, определяет направление родства.

Рассмотрим некоторые примеры преобразования поверхностей второго порядка общего вида в родственные им поверхности вращения или поверхность сферы. Это дает возможность, пользуясь простыми приемами, решить позиционную задачу на преобразованной поверхности, а затем обратным преобразованием перенести полученный результат на исходную поверхность.

1. Преобразование поверхности второго порядка с эл-



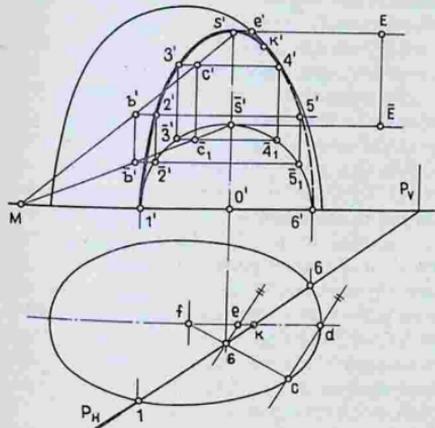
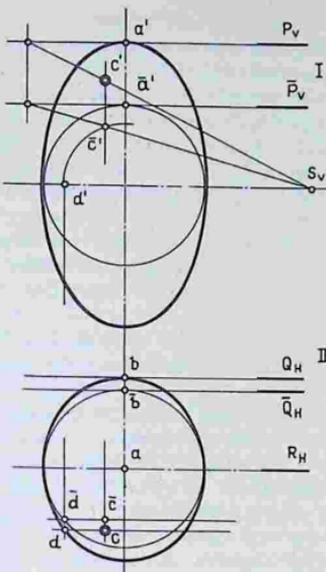
липтическими параллелями в поверхность вращения. На рис. 157 приведен отсек эллиптического параболоида. Требуется построить на

Рис. 156

Рис. 157

Рис. 158

Рис. 159



скостью родства  $R$ , параллельной фронтальной плоскости, и родственными точками  $A$  и  $A'$  или родственными плоскостями  $P$  и  $P'$ . В результате преобразования горизонтальной проекцией эллиптического параболоида станет круг. Фронтальная проекция не изменится.

Построим горизонтальную проекцию точки  $C$ , принадлежащей параболоиду вращения, а затем проведем через точку  $C$  произвольную прямую и, отметив точку  $l$  ее пересечения с плоскостью родства  $R$ , построим родственную ей прямую, а на ней — горизонтальную проекцию точки  $C$ .

Родственное преобразование пространства можно рассматривать как непрерывную деформацию пространства по направлению родства, при этом пространство может растягиваться и сжиматься в сторону плоскости родства.

2. Преобразование трехосного эллипсоида в сферу двумя последовательными преобразованиями. Преобразуем трехосный эллипсоид в сферу двумя родственными преобразованиями (рис. 158).

Первое преобразование зададим плоскостью родства  $S$ , родственными плоскостями  $P$  и  $P'$  и направлением преобразования, перпендикулярным плоскости  $H$ . В результате трехосный эллипсоид преобразуется в эллипсоид вращения, фронтальной проекцией которого будет круг. Фронтальная проекция  $\bar{c}'$  точки преобразуется в точку  $c'$ .

Второе преобразование зададим плоскостью родства  $R$ , родственными плоскостями  $Q$  и  $Q'$  и направлением родства, перпендикулярным фронтальной плоскости. Эллипсоид вращения преобразуется в сферу. Построим горизонтальную проекцию  $\bar{c}$  точки  $C$  на сфере, а затем обратным преобразованием — ее горизонтальную проекцию  $c$  на эллипсоиде с помощью родственных прямых, параллельных  $R$  и проходящих через соответственные точки  $d$  и  $d'$ .

3. Построение плоских сечений поверхностей второго порядка общего вида с по-

верхности точку  $C$ , заданную фронтальной ее проекцией. Построение ряда точек на поверхности равносильно построению линии пересечения поверхности плоскостью или другой поверхностью.

Чтобы преобразовать эллиптический параболоид в параболоид вращения, применим родственное преобразование, которое определяется пло-

мощью родственного преобразования. На рис. 159 приведены отсек трехосного эллипсоида и горизонтально проецирующая секущая плоскость  $P$ . Требуется построить фронтальную проекцию линии сечения, которая будет эллипсом. Поэтому целесообразно подвергнуть преобразованию не поверхность эллипсоида, в этом случае сложно определить степень сжатия поверхности, а выделить плоское сечение и преобразовать искомую проекцию линии сечения.

Как известно, кривая, родственная эллипсу, есть окружность (см. рис. 155). Построим фронтальную проекцию линии сечения, преобразованной в окружность. Родственными точками преобразования будут точка  $s'$  — вершина искомой линии сечения и точка  $\bar{c}'$  на окружности. Осью родства является фронтальная проекция  $1'-6'$  прямой. Точка  $s$  (высшая) расположена посередине горизонтальной проекции сечения отрезка  $1-6$ . С помощью прямой  $fs$  определена точка  $s$ . Точка  $e$  на следе плоскости симметрии эллипсоида определена с помощью прямой  $se$ , параллельной  $cd$ . Точка  $s'$  располагается на фасаде на одной горизонтали с точкой  $e'$ . Отмечаем на оси родства произвольную точку  $M$  и проводим родственные прямые  $s'M$  и  $\bar{c}'M$ . Дальнейшие построения понятны из чертежа.

### 38. Геометрическое моделирование поверхностей, преобразование их формы и графическое отображение с помощью ЭВМ

Язык чертежа — одно из наиболее гибких и информативных средств отображения геометрических объектов и, в частности, кривых поверхностей. Однако в тех случаях, когда в процессе проектирования нужно оперировать сложными или нерегулярными поверхностями с последовательным преобразованием их формы и графическим отображением этапов поиска, автоматизированные средства являются незаменимыми.

Становится необходимым составление алгоритмов автоматизированного решения геометрических задач, что невозможно без знания начертательной геометрии. *Алгоритмом* называют точное предписание, определяющее содержание и последовательность выполнения операций или действий, которое приводит к решению поставленной задачи. Вместе с тем это требует некоторой специальной подготовки в области вычислительной техники и программирования<sup>1</sup>.

Рассмотрим самые общие основы автоматизированных способов моделирования и преобразования формы кривых поверхностей, а также их графического отображения.

**Система автоматизированного проектирования.** В последнее время в связи с усложнением задач в области архитектурного проектирования и строительства происходят серьезные изменения и в некоторых методах проектирования. Ведутся работы и уже созданы *системы автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР ОС)*.

В архитектурном проектировании большое значение имеют графическая информация и операции с нею. Применение электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и автоматизированных средств машинной графики позволяет с большой точностью выполнять чертежи и наглядные изображения<sup>2</sup>, решать геометрические задачи, быстро оценивать результаты проектирования и вносить необходимые коррективы. При этом архитектор освобождается от выполнения трудоемких, рутинных операций для углубленной творческой деятельности.

*Машинной графикой* называют совокупность средств и приемов, обеспечивающих автоматизацию процессов подготовки, преобразования и воспроизведения графической информации с помощью ЭВМ.

<sup>1</sup> Основы автоматизации архитектурного проектирования и программирования изучаются студентами в курсе «Технические средства архитектурного проектирования».

<sup>2</sup> Общие сведения об автоматизированном построении перспективных изображений излагаются в гл. 25.

**Система графического отображения.** Автоматизированная система графического отображения, как и автоматизированная система проектирования, состоит из *технической, аппаратной части*—цифровой вычислительной машины, устройств ввода исходной информации и вывода графических изображений и *программно-математической части*—алгоритмов, определяющих содержание и последовательность машинных процедур при решении геометрических задач, а также программ для анализа и переработки графической информации и управления графическими устройствами.

**Технические средства.** К электронно-вычислительной машине, которая ведет процесс автоматизированного проектирования, или к специально предназначенной для системы отображения *управляющей ЭВМ* подключаются устройства ввода буквенно-цифровой информации (клавишный телеграфный аппарат) и устройство *ввода* графической информации—двухкоординатное устройство электромеханического типа с визиром для считывания и ввода графической информации. В качестве устройств *вывода* графической информации применяют двухкоординатные электромеханические чертежные автоматы планшетного или рулонного типа—*графопостроители*, которые с доволно большой скоростью (от 50 до 500 мм в секунду) производят вычерчивание различных изображений. Размер изображений может достигать нескольких метров в длину и ширину.

Ввод и вывод графической информации может осуществляться также и на устройствах с электронно-лучевым экраном (так называемые *дисплеи*). Электронно-лучевые устройства отличаются значительно большим быстродействием и оперативностью. С помощью специального «светового пера» или других устройств они позволяют вводить графическую информацию с экрана в память ЭВМ, стирать отдельные части изображения, перемещать и деформировать их в режиме диалога «проектировщик—ЭВМ», а также управлять работой программ. Однако

по сравнению с графопостроителями они имеют небольшие размеры экрана и меньшую разрешающую способность, поэтому полностью заменить электромеханические устройства не могут.

**Программно-математическое обеспечение.** Графическая информация архитектурно-строительного чертежа не пригодна для непосредственного ввода в ЭВМ, так как машина может перерабатывать только дискретную цифровую информацию. Поэтому графическая информация в устройстве ввода преобразуется в цифровую, имеющую определенную структуру.

Одну из основных задач машинной графики представляет преобразование графической информации чертежа в вид, пригодный для ввода в ЭВМ, и создание в «памяти» ЭВМ математической, цифровой модели пространственного объекта (аналитическое описание и набор числовых значений параметров объекта).

Неотъемлемая часть системы графического отображения и геометрического моделирования—программное обеспечение. Программы составляются на одном из универсальных алгоритмических языков, например ФОРТРАН. Основной язык программирования недостаточно эффективен для обработки графической информации. Поэтому разработаны *проблемно-ориентированные языки* описания объектов.

В области архитектурно-строительного проектирования одним из специальных геометрически ориентированных языков является язык АЛГРАФ («Алгоритмическая графика»)<sup>1</sup>. Он предназначен для составления подпрограмм геометрических преобразований и построения проекций пространственных объектов.

Математическое обеспечение системы отображения АЛГРАФ содержит программы моделирования и вычерчивания отрезков прямых линий, окружностей и эллипсов, программу криволинейной интерполяции, а также программы построения прямоугольников, призм, поверхностей второго порядка

<sup>1</sup> Автор этой системы графического отображения—Ю. В. Котов (МАрХИ).

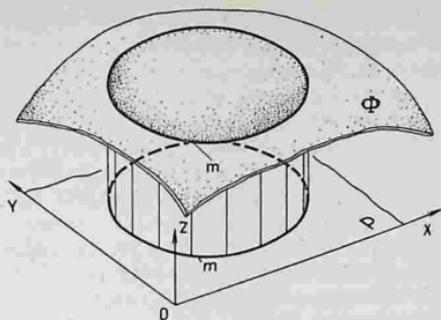
и т. д. Ряд программ выполняют преобразование координатных систем и позволяют вычерчивать фрагменты изображений.

**Моделирование кривых поверхностей и преобразование графической информации для ввода в ЭВМ<sup>1</sup>.** Рассмотрим способы моделирования и преобразования формы сложных поверхностей.

Для выделения ограниченного отсека поверхности  $\Phi$ , заданной аналитически, следует задать и другую поверхность — проецирующую цилиндрическую, которая пересекая заданную, выделяет необходимый отсек и определяет его граничную линию  $m$  (рис. 160).

Задание поверхности дискретным каркасом. При моделировании и воспроизведении кривых поверхностей необходимо задать алгоритмы вычисления координат точек, принадлежащих поверхности. Поэтому на чертеже поверхность задается *дискретным каркасом*, в котором линии каркаса выбраны с необходимым для практики шагом. Эти способы задания поверхностей удобны для реализации с помощью ЭВМ. Поверхность представляется в ЭВМ координатной моделью — координатами множества принадлежащих ей точек. В дальнейшем поверхность аппроксимируется множеством кусков плоскостей или аналитически простых поверхностей. После этого многие стандартные операции — построение точек на поверхности, пересечение поверхности прямой, плоскостью и другой поверхностью — могут выполняться стандартными программами.

Поверхность  $\Phi$  определяется в координатной системе и проецируется на горизонтальную плоскость в прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 161, а). Опорные точки каркаса проецируются в узлы прямоугольной сетки. На поверхности образуется сеть, полученная в результате сечения проецирующими плоскостями  $S$ , параллельными осям координат  $x$  и  $y$ .



Опорные точки каркаса соединяют прямолинейными отрезками или дугами несложных кривых. Весь отсек поверхности оказывается разбитым на элементарные ячейки, имеющие вид *неплоских четырехугольников*, противоположные стороны которых скрещиваются.

В первом случае (рис. 161, б) неплоский четырехугольник можно аппроксимировать отсеком гиперболического параболоида с последующей линейной интерполяцией — нахождением промежуточных (усредненных) значений (точка  $M$ ). Такая интерполяция не обеспечивает гладкость моделируемого образа поверхности.

Во втором случае, когда опорные точки каркаса соединяют кривыми линиями (рис. 161, в), криволинейный пространственный четырехугольник, состоящий из четырех соединенных дуг различной конфигурации, можно «затянуть» гладкой поверхностью. Граничные дуги стягивают хордами. Для некоторой текущей точки  $M$  строят координатные плоскости  $x = x_M$  и  $y = y_M$  и в них — трапеции. Нижние стороны трапеций пересекаются в точке  $S$ . Сумма расстояний от этой точки до верхних сторон трапеции ( $SM = SK_1 + SK_2$ ) определяет точку  $M$  поверхности. Однако вдоль линий сопряжений ячеек гладкость составной поверхности может быть нарушена. В этом случае подключается подпрограмма, которая «сама» строит граничные линии, а затем и сеть на поверхности.

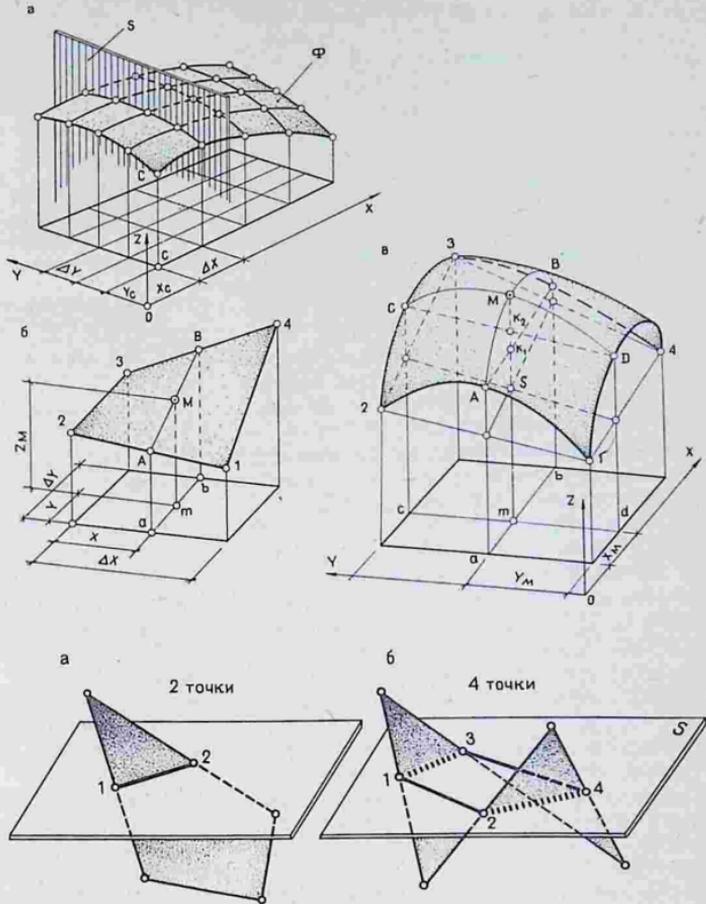
Задание поверхности линейным каркасом. Рассмотрим по-

<sup>1</sup> Более подробное изложение настоящей методики с элементами программирования содержится в работе [11], на основе материалов которой составлена эта часть параграфа.

Рис. 160

Рис. 161

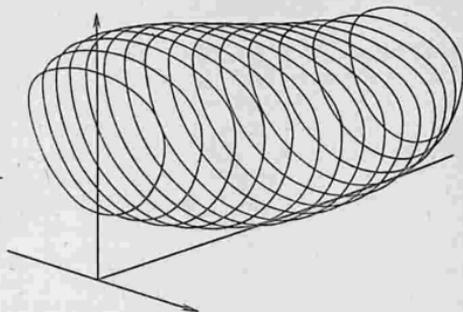
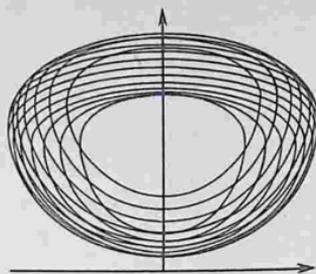
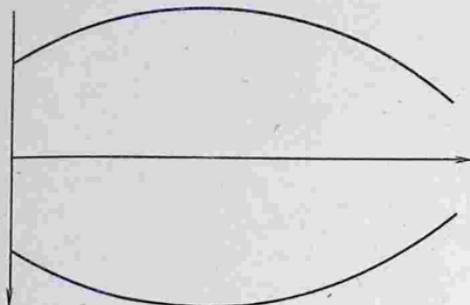
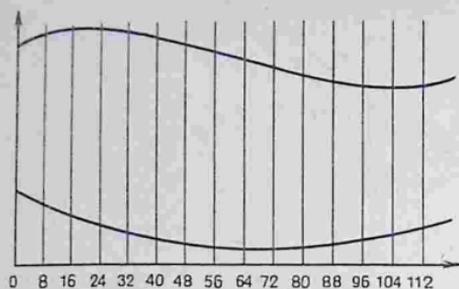
Рис. 162



строение линии уровня поверхностей. Для многих поверхностей, уравнения которых заданы, линии уровня легко определяются. Однако для сложных и нерегулярных поверхностей, например топографических, задачу решают дискретно-численным способом, как и в предыдущем примере. Для выявления всех элементов линии уровня (горизонтали) необходим машинный просмотр всех ячеек поверхности. Для каждой ячейки определяется положение угловых точек относительно секущей плоскости, т.е. заданной плоскости уровня. Находятся точки пересечения

плоскости с граничными ребрами ячейки (рис. 162). Возможны случаи, когда результатом сечения будут один или два отрезка. В результате машинного просмотра всех ячеек поверхности образуется описание линии уровня.

Кинематический способ задания поверхности и преобразование ее формы. По другой программе поверхность может быть задана кинематическим способом моделирования. На рис. 163 приведен машинный чертеж поверхности, заданной очерковыми линиями в двух проекциях. Поверхность сформирована с помощью



ЭВМ плоскопараллельными *аффинно-родственными* сечениями и вычерчена графопостроителем в трех ортогональных проекциях и в аксонометрической проекции.

Изменяя некоторые элементы программы (так называемые *операторы*) и некоторые исходные данные, можно корректировать форму поверхности и получать многочисленные ее варианты.

Таким образом, моделирование и преобразование формы незакономерной поверхности представляется многосложным процессом. Однако при наличии основной программы преобразований и комплекта стандартных подпрограмм, а также соответствующей методики обеспечиваются автоматическое формирование поверхности и вывод многовидовых проекций, а также возможность корректировки параметров поверхности и преобразования ее формы.

Приемы составления алгоритмов для автоматизированного решения геометрических задач с поверхностями. Для наглядного описания последовательности

(алгоритма) решения задач сначала применяют так называемые *блок-схемы* алгоритмов, которые отображают этапы вычислительных и логических процедур. Разработанные алгоритмы записываются затем на одном из проблемно-ориентированных языков программирования.

Рассмотрим блок-схему алгоритма автоматизированного решения задачи на построение линии пересечения кривых поверхностей [13, с. 122]. Описание каждого отдельного этапа (оператора, команды) решения задачи помещают внутри символа, представляющего геометрическую фигуру (рис. 164). Такие фигуры называют *блоками*. Схема состоит из блоков четырех различных очертаний: овалов, параллелограммов, прямоугольников и ромбов. Форма блока соответствует характеру действий. Ход процесса показывают линиями, соединяющими блоки, которые обычно нумеруются.

Операторы начала и конца схемы заключаются в овалы (прямоугольники со скругленными короткими сторонами).

1. Первым этапом процесса реше-

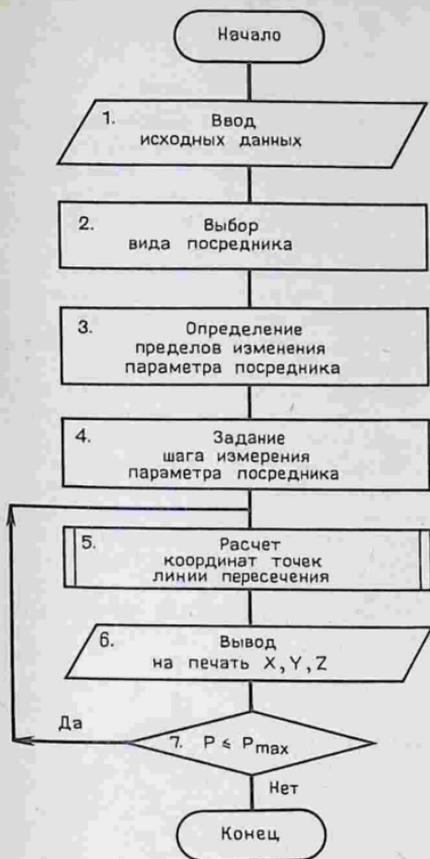


Рис. 163

Рис. 164

ния задачи является ввод в ЭВМ преобразованных исходных данных о поверхностях (блок 1). Ввод и вывод

информации обозначают в параллелограммах.

2. В прямоугольниках обозначают описание основных операций и вычислений. Построение линии пересечения поверхностей может быть выполнено с помощью посредников — вспомогательных плоскостей уровня (§ 32) или вспомогательных сфер — концентрических и эксцентрических сфер (см. § 34). Исходя из вида поверхностей и взаимного их расположения выбирается вид посредника (блок 2).

3. Экстремальные точки линии пересечения (низшая и высшая, точки видимости) определяют пределы изменения параметра посредника (блок 3).

4. Необходимая точность построения задается количеством посредников и шагом изменения параметров (блок 4).

5. Построение точек линии пересечения (расчет координат) выполняется последовательно (блок 5): а) пересечением каждым посредником одной и другой поверхности; б) определением точек пересечения вспомогательных линий пересечения между собой. Поскольку в этом операторе применяются дополнительные алгоритмы построения пересечений, он отмечается прямоугольником с двойными короткими сторонами.

6. Затем происходит вывод результата на печать (блок 6).

7. Символ в виде ромба (блок 7) включает операцию проверки логических условий и если необходимо — возврат к началу цикла и повторный расчет.

Блок-схема разрабатывается таким образом, чтобы программирование осуществлялось почти автоматическим расписыванием команд (операторов) программы по отдельным блокам.

## Глава 8. Формообразование кривых поверхностей и их применение в архитектуре

В архитектурном проектировании и практике строительства накоплен большой опыт по использованию раз-

личных поверхностей и их сочетаний. Такие поверхности, как цилиндрические, конические, сферические и другие по-

верхности вращения, применяются с давних пор. Их геометрия хорошо известна. В последнее время находят все большее применение поверхности тонкостенных оболочек покрытий зданий, имеющие сложную форму и необычные очертания.

В процессе проектирования архитектору недостаточно выявить и определить общую форму поверхности, необходимо знать геометрические свойства поверхности и закон ее образования, определить граничный контур поверхности и учесть ее видимый контур.

Рассмотрим некоторые виды поверхностей, которые находят применение при проектировании и возведении главным образом покрытий зданий, при этом выделим следующие признаки:

- 1) закон образования поверхности;
- 2) способ задания поверхности;
- 3) простые и составные поверхности;
- 4) кривизна поверхности;
- 5) вид направляющих и образующих поверхности;

б) форма граничного контура поверхности.

### 39. Своды и купола

Цилиндрические и сферические поверхности как основа сводчатых покрытий зданий применяются в архитектуре с давних времен. Это объясняется простотой их возведения и хорошей несущей способностью.

**Цилиндрические поверхности.** На рис. 165, а показано образование крестового свода. Два полуцилиндра I и II равных диаметров имеют общую точку и касательную плоскость (см. § 34) и пересекаются по двум плоским кривым — полуэллипсам. В крестовом своде распор отсутствует, вертикальная нагрузка передается на четыре опоры. Если диаметр одного из полуцилиндров меньше другого (рис. 165, б), то линия пересечения будет представлять собой пространственную кривую четвертого порядка. Такое пересечение цилиндрических сводов образует так называемую *распалубку*.

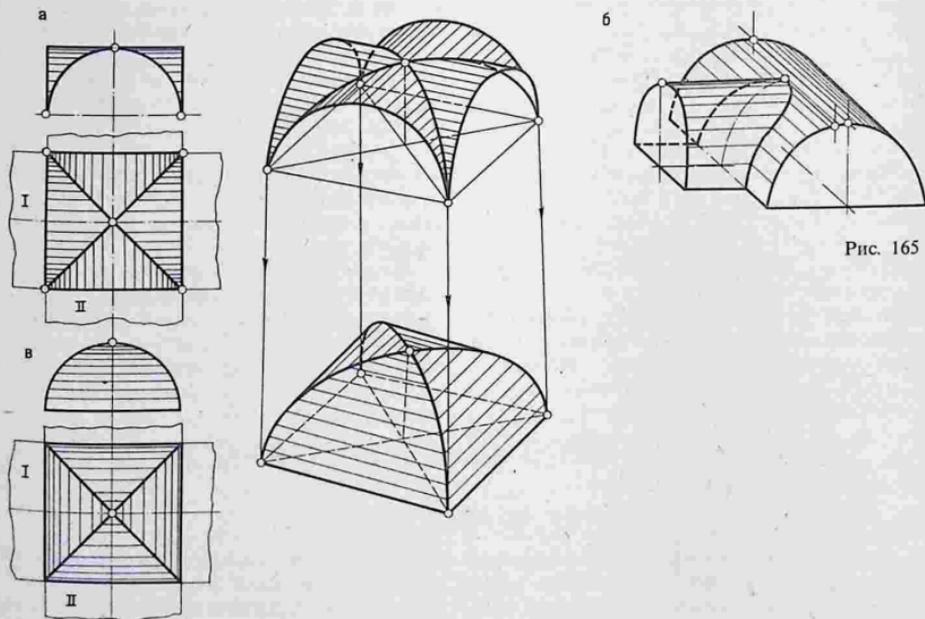


Рис. 165

Рис. 166

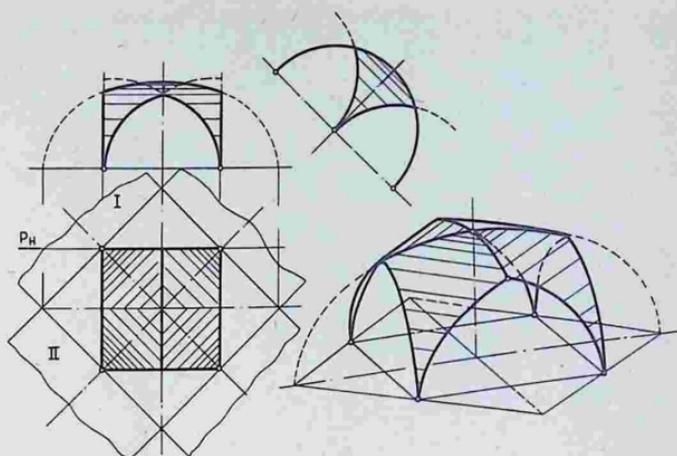


Рис. 167

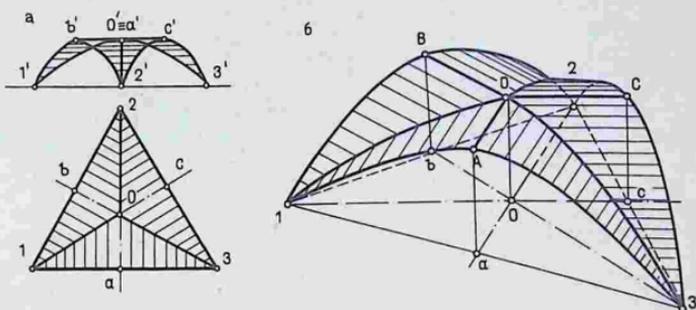
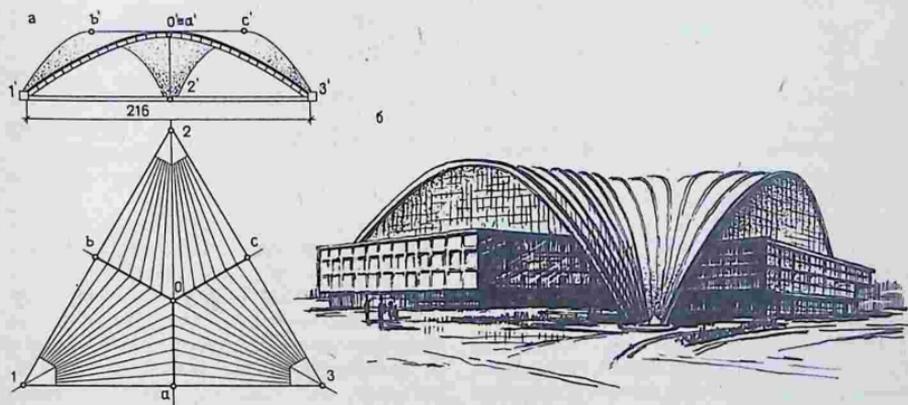
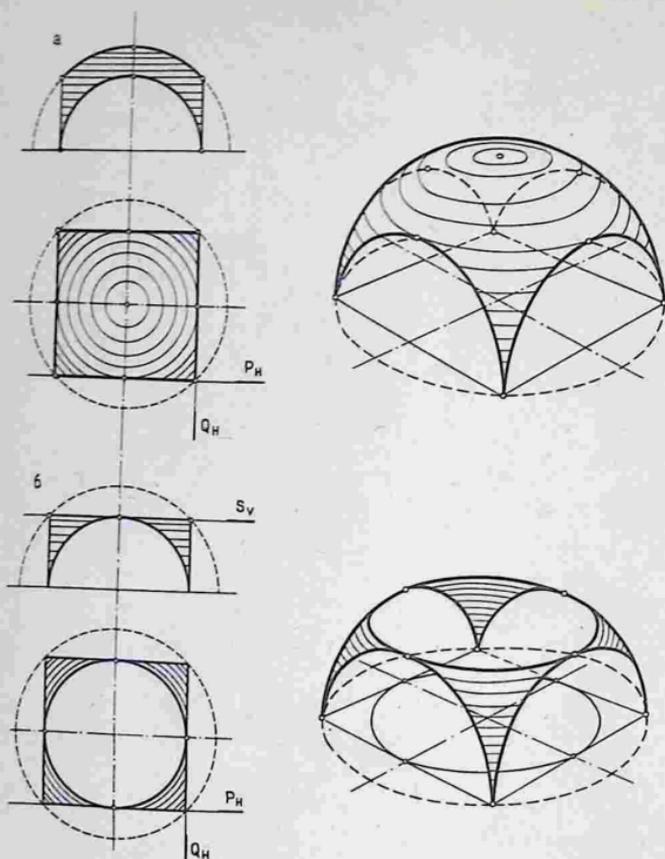


Рис. 168





На рис. 165, *в* приведен *сомкнутый свод*. Его поверхность также является результатом пересечения двух полуцилиндров. В сомкнутом своде используются те отсеки полуцилиндров, которые вычлениются при образовании крестового свода. Это хорошо видно при сравнении фронтальных проекций сводов.

На рис. 166 показана еще одна разновидность свода, образованного пересечением полуцилиндров, — *открытый сомкнутый свод* с углами, отсеченными горизонтально проецирующими плоскостями ( $P$ ).

На рис. 167 приведены проекции и аксонометрическая схема покрытия. Поверхность покрытия образована

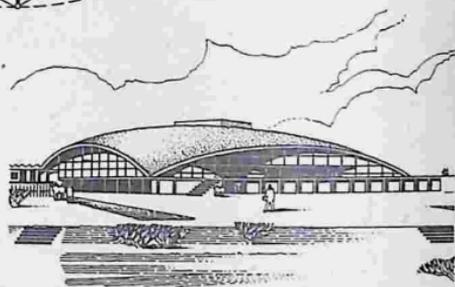


Рис. 170

пересечением трех *параболических цилиндров*, имеющих общую точку  $O$  и плоскость, которая касается цилиндров по прямолинейным образующим, проходящим через вершины направляющих парабол. Отсеки цилиндров пересекаются по плоским кривым — параболам. На рис. 168 архитектурные

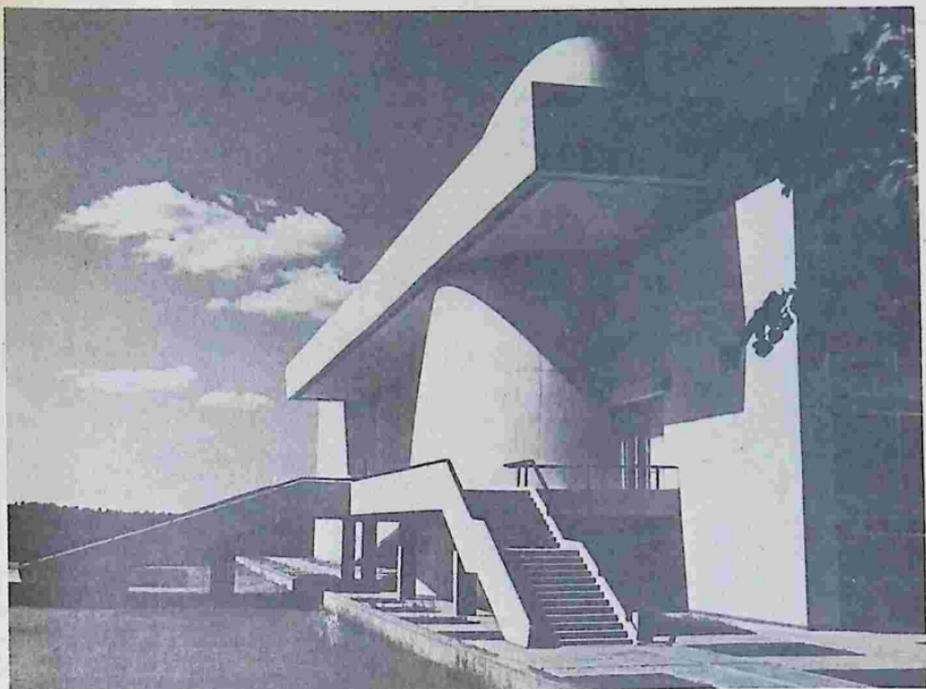


Рис. 171

членения аналогичной поверхности покрытия выставочного зала (Париж, 1958 г.) подчеркивают конструктивную схему сооружения, его тектонику — nervюры каркаса, опираясь на три жестко связанные образующие  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ , сходится к трем опорам.

Все упомянутые выше поверхности сводов и покрытий образованы отсеками цилиндрических развертываемых поверхностей нулевой кривизны.

**Сферическая поверхность.** Столь же распространенными в прошлом были купола и своды сферической формы.

На рис. 169,а приведен *вспарушенный свод*, образованный с помощью четырех плоскостей, отсекающих от полусферического сегмента четыре части. Свод имеет четыре опоры. Сфера — поверхность постоянной положительной кривизны, нелинейчатая и неразвертываемая.

Современные покрытия этого типа отличаются значительно большей перекрываемой площадью и потому меньшей высотой и представляют собой пологий *сферический сегмент* (см. рис. 170).

На рис. 169,б показан так называемый *парусный свод*. От полусферического сегмента помимо четырех боковых частей отсекается горизонтальной плоскостью  $S$  верхняя часть. От полусферы остаются четыре сферических треугольника. Горизонтальная окружность опирается на четыре арки. Парусный свод или «паруса» представляют собой переходную форму от квадратного нижнего основания сооружения к его верхнему цилиндрическому объему.

Широкие возможности для создания оригинальных и разнообразных архитектурных решений открываются благодаря применению в качестве покры-

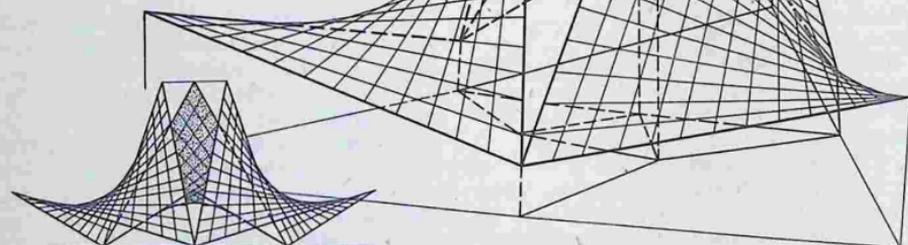
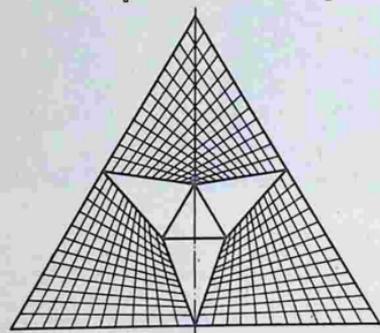
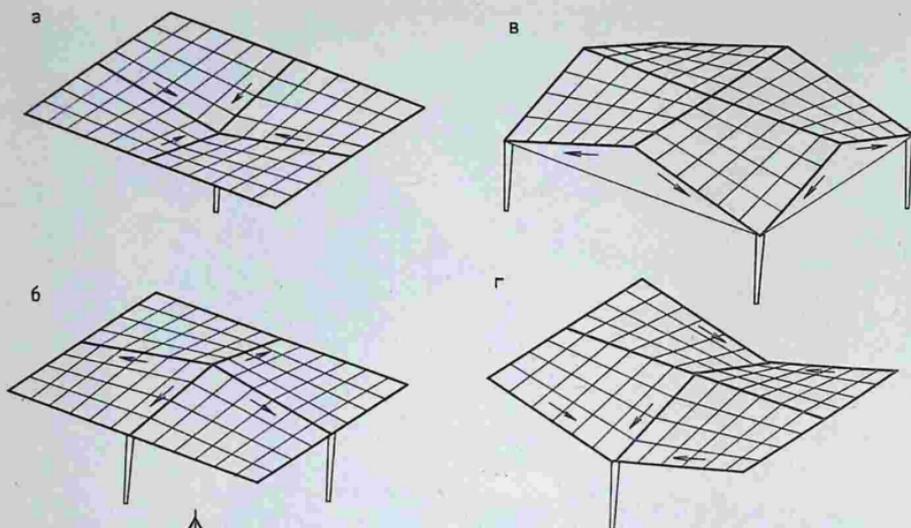


Рис. 172

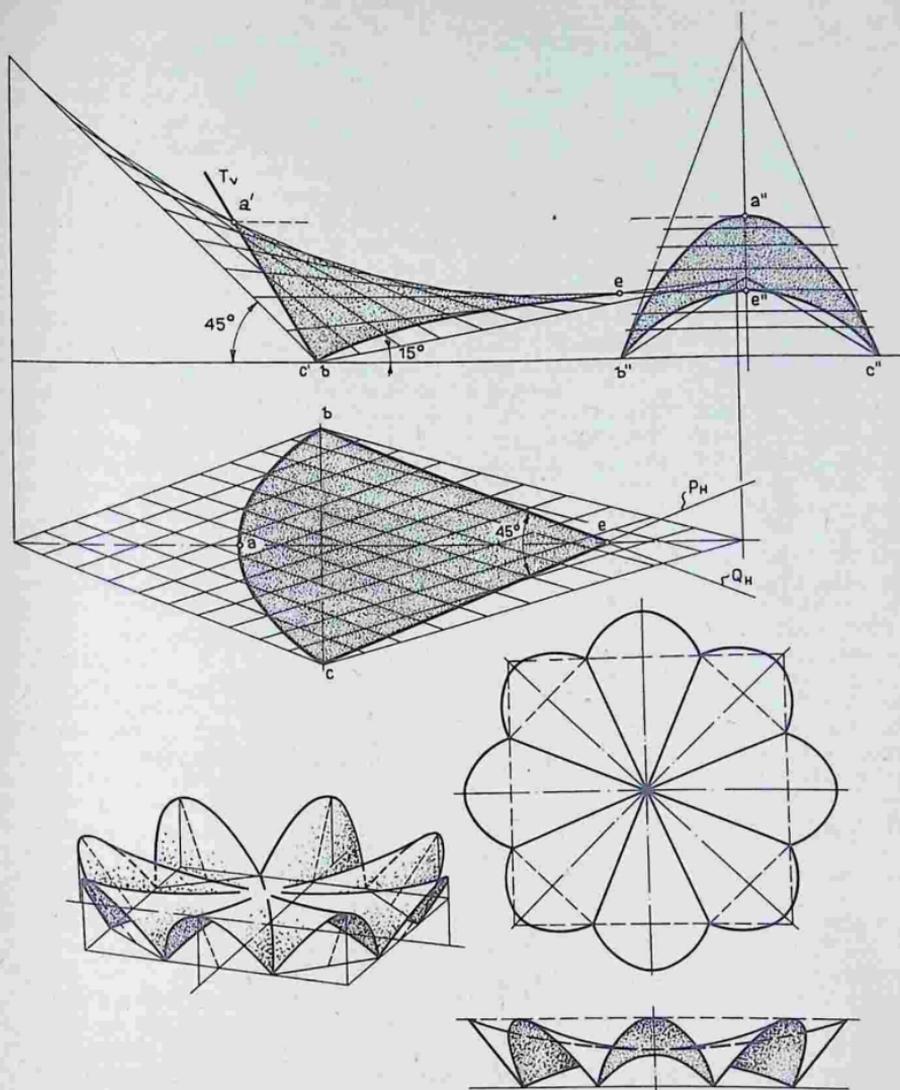
Рис. 173

Рис. 174

тий и других поверхностей вращения. Так, например, покрытие одного из залов (планетарий) Музея истории космонавтики в Калуге (рис. 171) имеет форму отсека эллипсоида вращения, что придает сооружению особую выразительность и неповторимость.

#### 40. Простые и составные поверхности

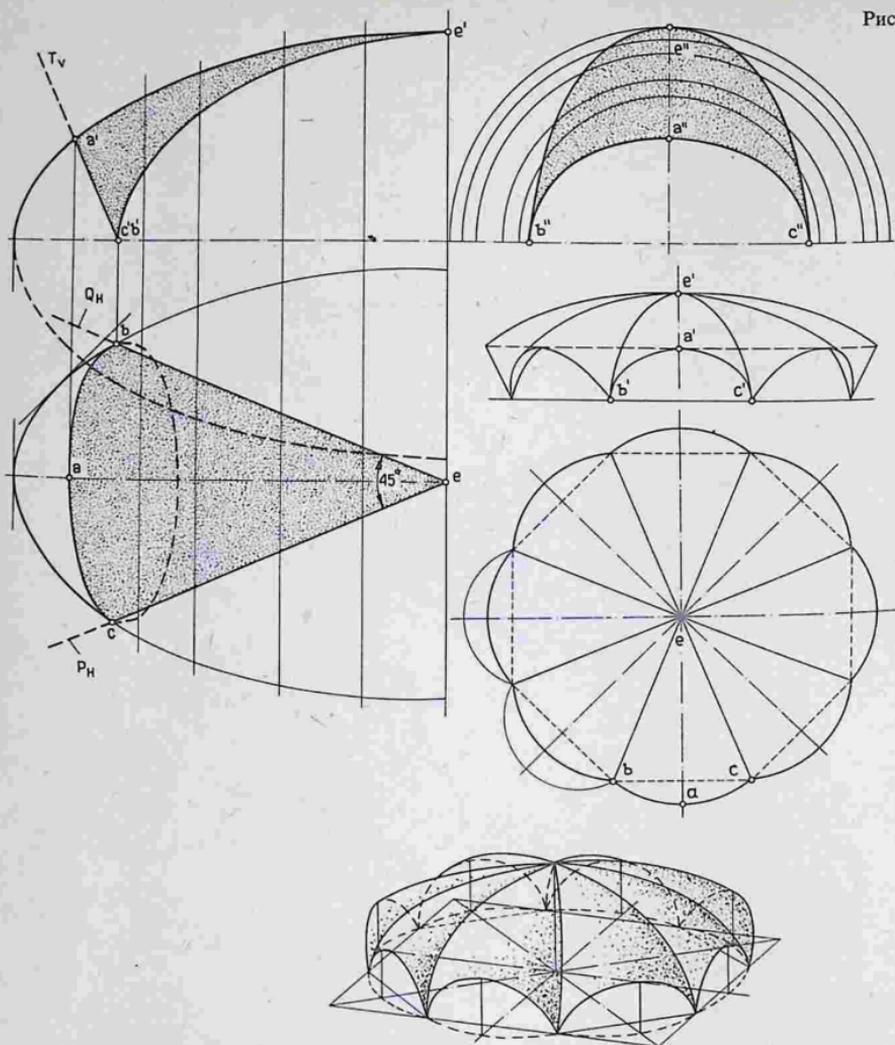
Поверхности, состоящие из нескольких отсеков, называются *составными* в отличие от простых, образованных одной поверхностью. Полусферический,



вспарушенный и парусный своды (см. рис. 169–171) являются простыми поверхностями. Составные поверхности могут сопрягаться как гладко (см. рис. 176), когда кривизна поверхности на участках стыка изменяется плавно, так и негладко (см. рис. 174, 175).

Рассмотрим несколько примеров составных поверхностей, образованных отсеками гиперболических параболоидов и эллипсоида вращения.

На рис. 172 приведены схемы покрытий-оболочек, состоящих из четырех отсеков гиперболического параболои-



да — неплоских четырехугольников, пересекающихся между собой по прямолинейным образующим: воронкообразная, консольная, шатровая и щипцовая оболочки.

На рис. 173 приведена композиция, образованная тремя неплоскими четырехугольниками гиперболического параболоида [7, с. 81]. Составная поверхность опирается на три опоры,

в верхней части отсеки разведены для устройства светового проема. Каждый отсек — это дважды отрицательная кривизны, обладающая пространственной жесткостью. Ценным качеством подобных отсеков является возможность их сочленения по крайевым прямым образующим, по которым и концентрируются усилия.

Следующие два примера составных поверхностей представляют собой более сложные композиции. Каждый отсек поверхности образован отсечением от исходной поверхности [7, с. 76, 77].

На рис. 174 поверхность образована восемью отсеками косоугольного параболоида — поверхности переменной отрицательной кривизны. Каждая пара противоположных отсеков составляет часть одной поверхности, поэтому фронтальная проекция меридионального контура — парабола. Один отсек (клин) образован сечением гиперболического параболоида двумя вертикальными плоскостями с углом между ними  $45^\circ$  и фронтально проецирующей плоскостью. Все плоские сечения — параболы. Поверхность опирается на восемь точечных опор.

Одно из первых сооружений с примененным в нем тонкостенным железобетонным покрытием — оболочкой, представляющей поверхность гиперболического параболоида, было возведено в Мексике (архитекторы Кандела и Ордоньес).

На рис. 175 приведено покрытие, которое образовано восемью отсеками эллипсоида вращения — нелинейчатой поверхности переменной положительной кривизны. Поэтому форма покрытия в целом не вогнутая, а выпуклая. Отсек поверхности, как и в предыдущем примере, образован сечением эллипсоида вращения двумя вертикальными плоскостями и фронтально проецирующей плоскостью. Линии пересечения отсеков друг с другом — плоские кривые — эллипсы.

Аналогичное покрытие осуществлено при сооружении рыночного павильона в Руайане (Франция), состоящего из тринадцати отсеков.

#### 41. Сложные и нерегулярного вида поверхности

Геометрическое формообразование поверхностей располагает не только значительным запасом изученных форм, но и большими возможностями создания новых архитектурных форм.

Рассмотрим некоторые примеры геометрического конструирования сложных поверхностей, основу которых составляют поверхности *регулярной* формы.

На рис. 176, а приведены проекции сложной поверхности вращения с образующей переменной кривизны. Она пересекает ось вращения в точке А и направляющую линию в точке В. Образующая (часть эллипса) совершает двойное движение: равномерное вращение вокруг оси и колебательное движение конца В образующей в вертикальной плоскости на величину  $m$  — амплитуда перемещения.

В результате двойного движения образуется *волнообразная поверхность*, сочетающая в себе двоякую положительную и отрицательную кривизну и обладающая, как и складчатые покрытия, большой пространственной жесткостью. Граничный контур представляет собой синусоидальную пространственную кривую, лежащую на сферической поверхности. На чертеже дана ее условная развертка на плоскость. Период колебательного движения  $n$ , когда точка В вернется в исходное положение, может быть различным, в приведенном примере угловая его величина равна:  $\varphi = 360^\circ/12 = 30^\circ$  [17]. Сходную форму покрытия с эллиптическим планом имеет вечерний клуб в Пуэрто-Рико (рис. 176, б).

На рис. 177 дано изображение покрытия Даниловского рынка в Москве (проект), напоминающее цветок из четырнадцати переплетающихся лепестков. Общая форма оболочки близка к *складчатому сферическому сегменту*. Складчатая форма покрытия, каждый элемент которой — кривая поверхность переменной положительной кривизны, придает покрытию большую пространственную жесткость. При диаметре сооружения больше 70 м толщина оболочки составляет 3–4 см (см. прил. 1).

В последнее время получают все большее распространение поверхности *нерегулярного* вида — *вантовые* или *висячие* покрытия. Форма их несколько отлична от поверхностей, задаваемых ана-

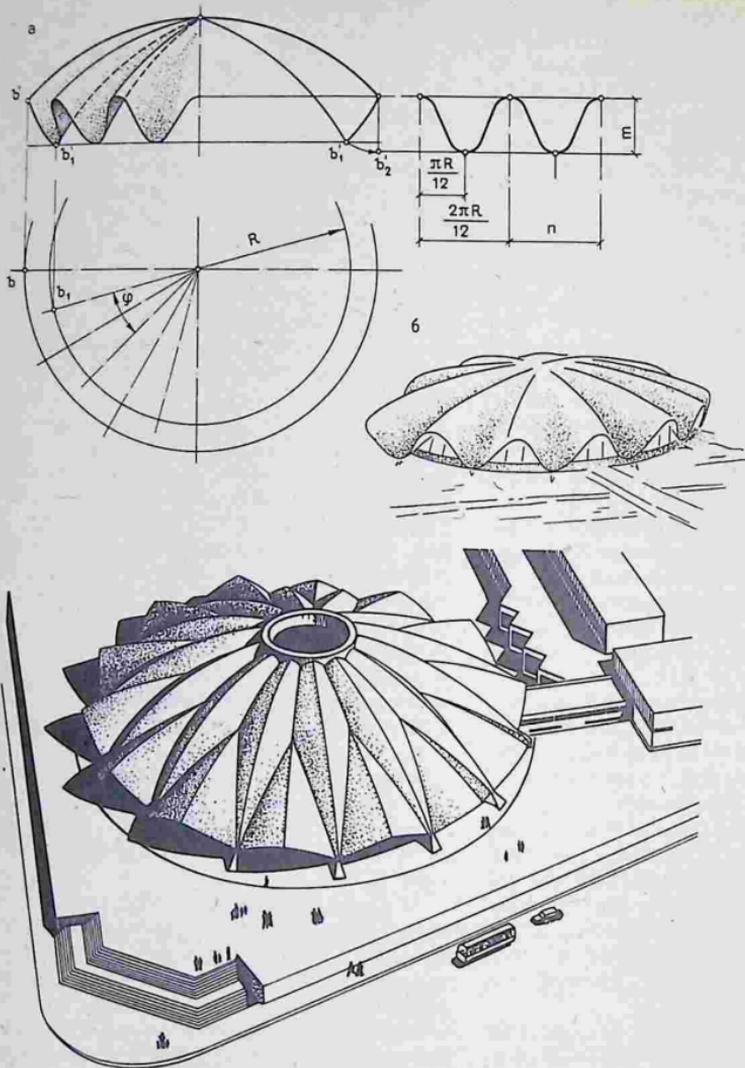


Рис. 176

Рис. 177

литически, уравнениями (см. § 27). Однако они могут быть выражены аналитически путем аппроксимации (замены) отдельных участков отсеками регулярных поверхностей.

На рис. 178 дана схема покрытия, представляющая собой минимальную поверхность с контуром, состоящим из четырех дуг окружностей. Поверхности этого вида имеют наименьшую пло-

щадь при заданном контуре и одинаковую напряженность в любой точке. Форма поверхности зависит только от формы кривой контура, отдельные ее участки имеют положительную и отрицательную переменную кривизну.

На рис. 179 показана схема вантового покрытия Дворца спорта в Москве. Форма граничного контура поверхности — опорного железобетонного коль-

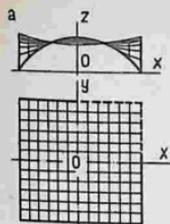
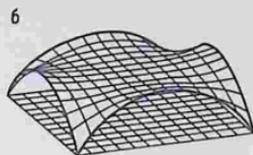


Рис. 178



собой цепную линию (см. § 20), но так как в центральной части покрытия расположена сосредоточенная нагрузка — стальное кольцо, цепная линия преобразуется в кривую, близкую к параболе. Таким образом, форма покрытия — это поверхность переменной положительной кривизны, весьма близкая к эллиптическому параболоиду.

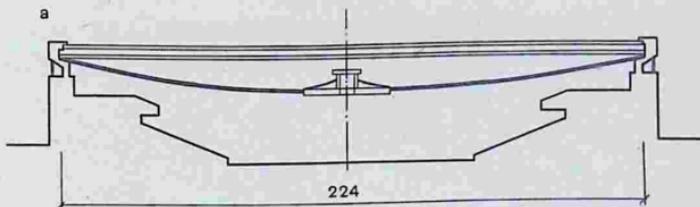


Рис. 179

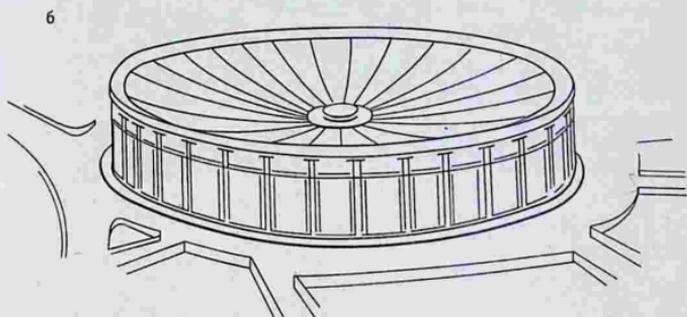
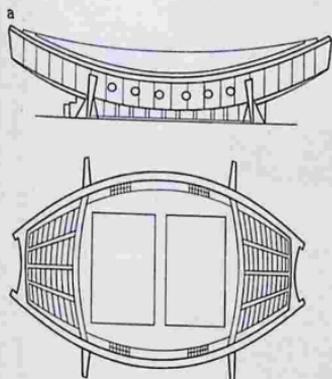
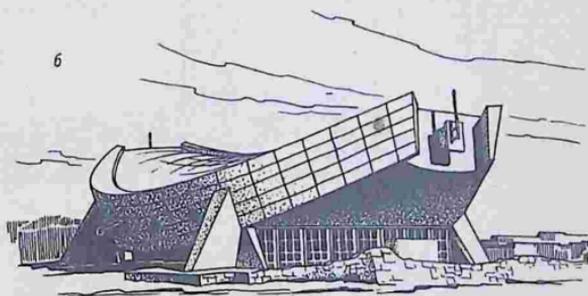


Рис. 180



ца — близка к эллипсу с размерами осей 224 и 186 м. Кривая меридионального сечения должна была бы представлять



На рис. 180 показаны фасад, план и общий вид спортивного зала в Кагаве (Япония), напоминающего корпус корабля. Вантовое покрытие зала представляет собой отсек поверхности,

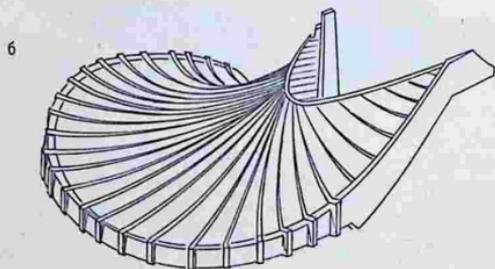
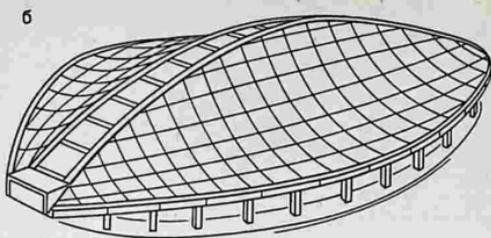
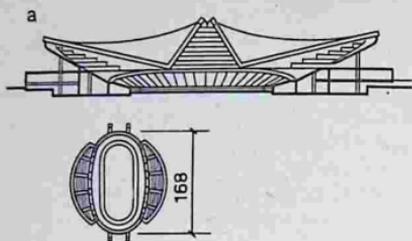
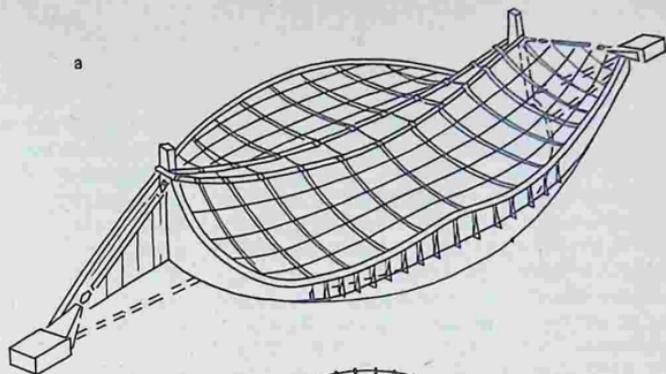


Рис. 181

Рис. 182



6

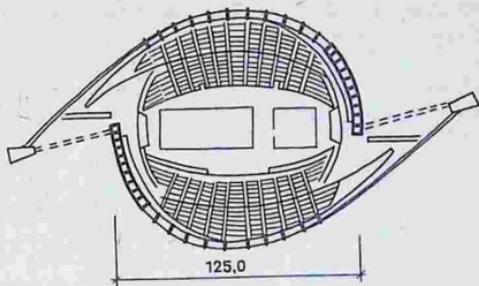
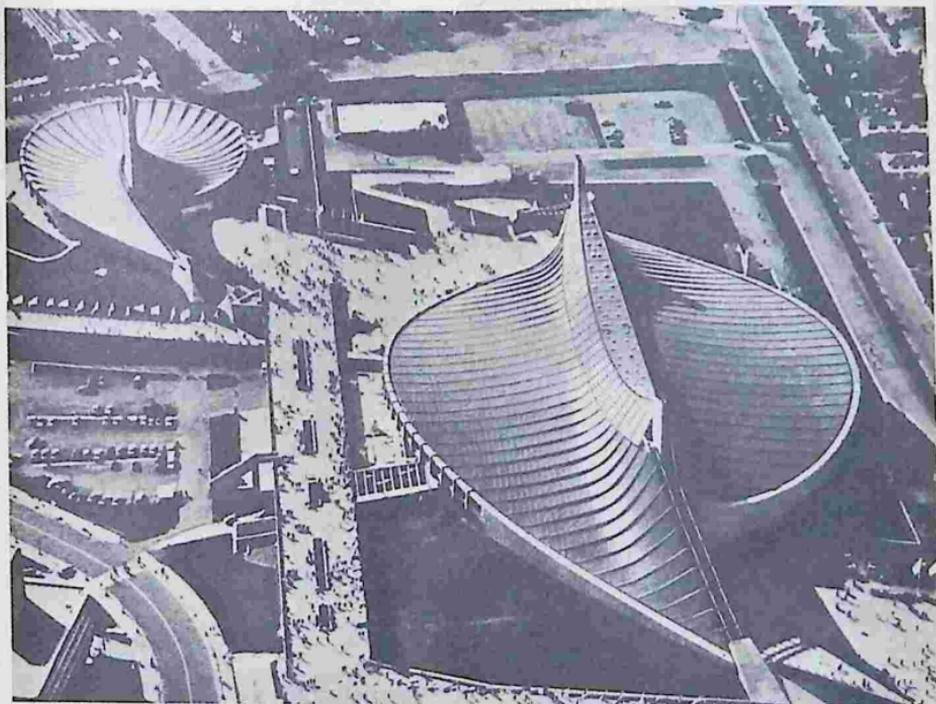


Рис. 183

Рис. 184



близкой к *гиперболическому параболоиду*, заданному двумя семействами кривых. Боковые участки — это линейчатая поверхность *цилиндроида*. Направляющими линиями цилиндроида являются пространственные кривые борта и днища корпуса корабля, имеющие различную кривизну, а образующая — прямая, параллельная направляющей плоскости. Отдельные положения образующей выделены поперечными швами. Обе поверхности — переменной отрицательной кривизны. Сооружение покоится на четырех опорных пилонах.

На рис. 181 даны разрез, план, схема вантового покрытия и общий вид олимпийского велотрека в Крылатском в Москве. Покрытие сооружения состоит из двух симметричных седлообразных оболочек переменной отрицательной кривизны, представляющих отсеки поверхности, близкой к *гиперболическому параболоиду*. Линейный каркас поверхности оболочек образован двумя семействами линий — вантами, которые подвешены к четырем наклонным аркам пролетом 168 м.

На рис. 182 приведены общий вид и схема плана Малой спортивной арены в Токио (архит. Кензо Танге, 1964 г.). Вантовое покрытие сооружения представляет собой довольно сложную фор-

му. Образование этой поверхности аналогично образованию *эвольвентной винтовой поверхности* (см. § 24, рис. 98), но с существенным отличием. Базовой направляющей кривой служит коническая винтовая линия с убыстряющимся подъемом кривой, а вместо прямолинейных касательных, как в эвольвентной поверхности, линейным каркасом поверхности являются ванты, провисающие по цепной линии и перпендикулярные граничному контуру поверхности.

На рис. 183 показаны план и схема вантового покрытия Большой спортивной арены, расположенной в том же архитектурном комплексе в Токио. Линейный каркас поверхности оболочек переменной отрицательной кривизны образован несущими тросами, подвешенными одним концом к главным тросам, соединяющим пилоны с оттяжками, а другим — к опорному кольцу по периметру покрытия. Вантовая поверхность двух симметрично расположенных оболочек имеет форму, близкую к *гиперболическому параболоиду*. Контур отсека поверхности образован пространственными кривыми линиями.

На рис. 184 приведен общий вид спортивного комплекса.

# Часть вторая. ТЕНИ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

Светотень выявляет объемную форму пространственных объектов. Проекционные изображения — чертежи, выполняемые в процессе архитектурного проектирования, помимо удобоизмеримости и метрической определенности должны быть и наглядными. Они должны давать возможно более полное представление о композиции и внешнем облике здания, о его пластическом решении и деталях (см. прил. 2 и 3). Это достигается, в частности, показом на ортогонально-проекционном чертеже светотени с помощью построения теней<sup>1</sup>. Придание архитектурному чер-

тежу наглядности приобретает особое значение на первой стадии проектирования.

Изображение светотени на чертеже, а также в аксонометрии и перспективе состоит из двух этапов: первый — это *построение контуров (границ) теней* точными приемами геометрических построений (этому посвящена основная часть настоящего раздела) и второй — *выявление и передача на чертеже градаций освещенности* с учетом физических закономерностей и «воздушной» перспективы. Эти вопросы излагаются в 13-й главе данного раздела.

## Глава 9. Теоретические основы построения теней

### 42. Общие сведения

Построение теней и изображение светотени на архитектурных чертежах зданий помимо придания им большей наглядности и выразительности имеет и другие, более конкретные цели. Построение теней уменьшает основной недостаток чертежей в ортогональных проекциях — их малую наглядность. Светотень как бы компенсирует отсутствие третьего измерения (на плане — высоты, а на фасаде — глубины).

Архитектурный чертеж с изображением светотени значительно полнее и нагляднее выявляет объемно-пространственную структуру объекта, чем чертеж, выполненный в линейной графике (рис. 185, а, б). Зная масштаб чертежа, можно без плана, который, как правило, помещается на других листах проекта, определить размер или «вынос» любой выступающей от плоскости фасада части здания.

Аналогичную роль могут выполнять тени и на чертежах генеральных планов

застройки. По величине тени, падающей на землю, можно судить о высоте зданий (рис. 185). Поэтому тени должны строиться точными приемами геометрических построений в соответствии с формой и размерами элементов проектируемого сооружения. Рисование теней «на глаз», не имеющее проекционной связи с формой объекта, ведет к ошибкам в оценке объемно-пространственной композиции будущего сооружения.

Тени могут быть построены как при искусственном освещении объекта, так и при естественном (солнечном) освещении. В первом случае источник света расположен на незначительном расстоянии. Лучи света образуют при этом конический пучок лучей — *связку прямых*, центром которой является источник света. При естественном освещении источник света удален в бесконечность и световые лучи параллельны друг другу.

Если на пути световых лучей находится непрозрачный предмет, то его поверхность, обращенная к источнику света, будет освещена, а противоположная

<sup>1</sup> В дальнейшем под выражением «построение теней» следует понимать «построение проекций теней».

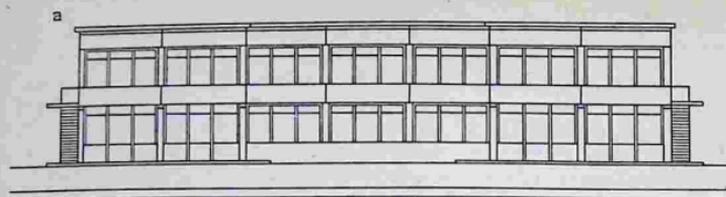
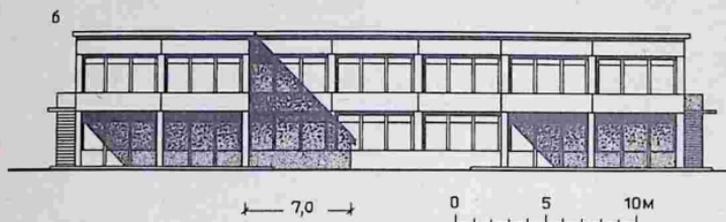


Рис. 185

Рис. 186

Рис. 187



часть поверхности — находится в тени (рис. 186, а). На часть поверхности цилиндра  $aACBb$  лучи света не попадают.

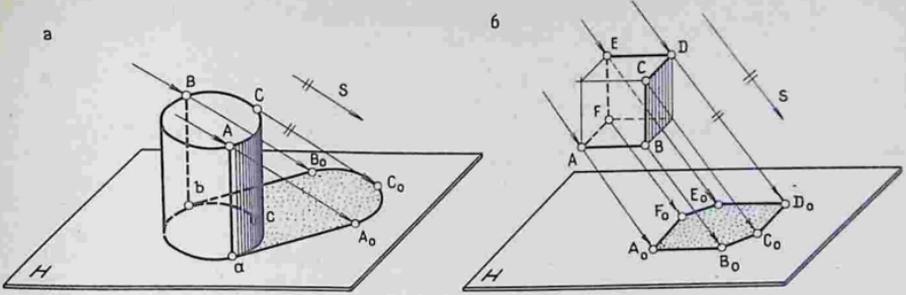
Тень, которая получается на неосвещенной части поверхности предмета, называют *собственной тенью*. Граница (линия) на поверхности предмета, разделяющая освещенную часть от находящейся в тени, называется *контуром собственной тени*. Контур собственной тени представляет собой линию касания *обертывающей лучевой поверхности* с поверхностью предмета.

Тень, отбрасываемая предметом на горизонтальную плоскость или на другую плоскость или поверхность, называется *падающей тенью*, а линия, ограничивающая ее, — *контуром падающей тени* (линия  $aA_0C_0B_0b$ ). Таким образом, контур падающей тени (рис. 186, б) — это линия пересечения обертывающей лучевой поверхности с поверхностью, на которую падает тень. Иными словами, *контур падающей тени* является тенью от контура собственной тени. Контуры собственной и падающей тени всегда представляют собой замкнутую фигуру.

Все операции по построению теней сводятся к определению линии касания



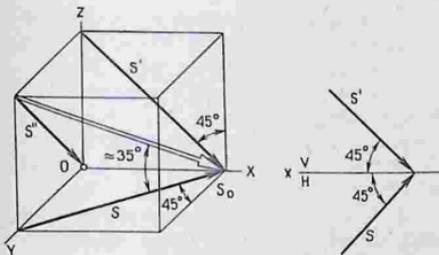
обертывающей лучевой поверхности к объекту и к построению линии пересечения ее с поверхностью, на которой строится падающая тень. На проекционных чертежах (эпюрах) действие



воздушной среды не учитывается, однако зону собственной тени принято показывать светлее падающей тени. Как будет показано ниже (гл. 13), это, как правило, соответствует действительным условиям.

#### 43. Направление световых лучей

При построении теней в ортогональных проекциях направление лучей света принимают параллельным диагонали куба, грани которого совмещены с плоскостями проекций (рис. 187). Проекциями диагонали куба являются диагонали квадратов, т.е. горизонтальная и фронтальная проекции светового луча составляют с осью проекции  $x$  угол  $45^\circ$ , истинный угол наклона луча к плоскости проекций  $\approx 35^\circ$ .



Такое «стандартное» направление световых лучей создает определенные преимущества при построении теней и выполнении архитектурного чертежа: во-первых, достигается постоянство и простота построения проекции лучей и теней на чертежах фасада и плана объекта;

во-вторых, облегчается чтение чертежа и понимание форм, пропорций и размеров элементов изображенного объекта, так как размер тени, отбрасываемой отдельными частями здания, определяется в масштабе чертежа величину выступов и отступов от плоскости фасада здания. При этом тень от вертикально расположенных элементов фасада замечается по горизонтали вправо, а тень от горизонтально расположенных элементов — по вертикали вниз. Так, например, на фасаде здания (см. рис. 185, б) по ширине тени, падающей от выступающего вперед ризалита, можно без плана определить его «вынос», он равен примерно 7 м. Венчающий здание карниз имеет вынос от плоскости фасада 0,5 м и т.д.

На чертеже ситуационного плана застройки (см. рис. 185, в) в северной части территории расположен объект (башня) высотой 10 этажей, рядом с ним — здание 7 этажей и перпендикулярно к нему — четырехэтажное здание.

## Глава 10. Тени основных геометрических фигур

## 44. Тени точки, прямой и плоской фигуры

**Тень точки.** Для построения падающей тени от точки на плоскость или поверхность через точку следует провести луч параллельно принятому направлению световых лучей и определить точку пересечения луча с плоскостью или поверхностью. Так, тень от точки на плоскости есть точка пересечения луча с ближайшей на его пути плоскостью.

На ортогонально-проекционном чертеже через проекции точки следует провести соответствующие проекции луча (рис. 188, *a*) и построить его след на плоскости проекций. В данном примере — это фронтальный след луча  $a_v$ , вторым следом будет горизонтальный след  $a_n$ . Первый след — это реальная тень точки  $A$ , а второй след — мнимая тень. Обе точки расположены на прямой, параллельной оси  $x$ , вторые проекции тени лежат на оси проекций и обычно не обозначаются.

На рис. 188, *b* построена падающая тень от точки  $B$  на плоскости  $H$ . В рассматриваемых примерах тенью точки является след светового луча на плоскости проекций.

Для построения падающей тени от точки на плоскость общего положения или поверхность (рис. 189) следует через точку провести световой луч и построить точку пересечения его с плоскостью или поверхностью. Так как световой луч является прямой линией, то построение тени точки сводится к построению точки пересечения прямой с плоскостью или поверхностью (см. § 8, рис. 30).

**Тень прямой линии.** Световые лучи, проходящие через множество точек прямой линии, образуют лучевую плоскость. Пересекаясь с плоскостью или поверхностью, лучевая плоскость образует падающую тень прямой.

Для построения падающей тени пря-

мой линии на плоскость достаточно построить тени двух ее точек. Тенью прямой линии будет прямая, соединяющая эти точки (рис. 190, *a*). На рис. 190, *b* реальные тени концов отрезка оказались на разных плоскостях проекций. Это означает, что тень прямой будет расположена на двух плоскостях проекций и будет иметь точку излома. Эти точки нельзя соединять прямой линией. Следует построить мнимую тень точки  $D$ , т. е. построить ее горизонтальный след, а затем соединить тени точек, лежащих на одной плоскости, получив точку излома  $\tilde{c}_x$ . В этой точке тень прямой преломится и перейдет с плоскости  $H$  на плоскость  $V$ . Аналогичным образом строится тень от прямой на плоскости  $H$  и плоскости общего положения 1, 2, 3 (см. рис. 180, *b*).

**Тени прямых частного положения.** Тени от прямых частного положения на плоскости проекций будут довольно часто применяться при построении падающих теней различных архитектурных деталей и фрагментов.

1. Тень отрезка прямой, перпендикулярно плоскости проекций, совпадает с проекцией луча на эту плоскость (рис. 191, *a*).

2. Тень отрезка прямой, параллельно плоскости проекций, равна и параллельна самому отрезку (рис. 191, *b*).

3. Тень отрезка горизонтальной прямой, расположенного под углом  $45^\circ$  к фронтальной плоскости проекции, располагается на этой плоскости с уклоном 1 : 2 (рис. 191, *в*).

4. Тень отрезка горизонтальной прямой, параллельной лучевой проецирующей плоскости, в зависимости от ее положения или совпадает с проецирующим следом этой плоскости, или расположена перпендикулярно оси проекций, как в данном примере (рис. 191, *г*).

Все указанные выше особенности построения теней от прямых частного положения остаются неизменными при

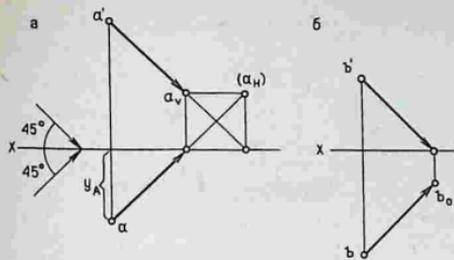


Рис. 188

аналогичном положении прямых относительно другой плоскости проекций. Остановимся более подробно на первом случае и отметим следующие его особенности. Проекция падающей тени на любую поверхность от прямой, перпендикулярной плоскости проекций, совпадает с проекцией луча на эту плоскость, а на другой плоскости проекций повторяет контур нормального сечения этой поверхности, повернутый влево.

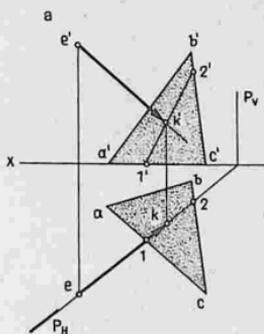


Рис. 189

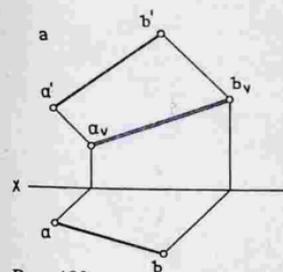
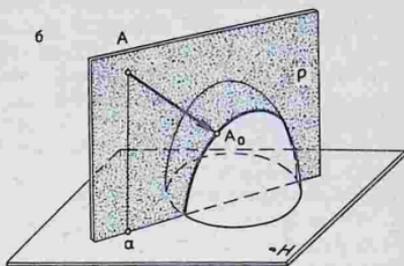


Рис. 190

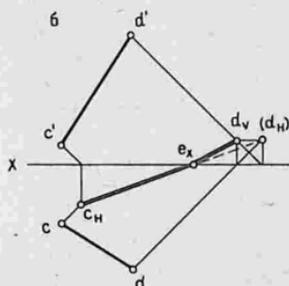
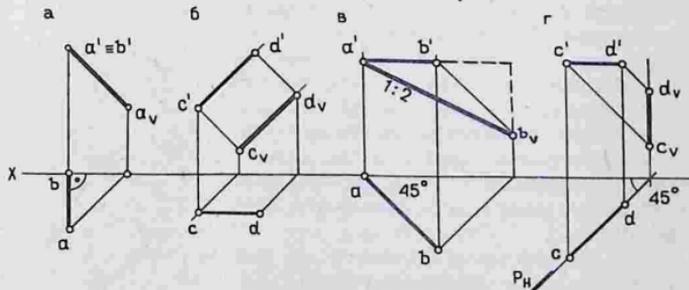
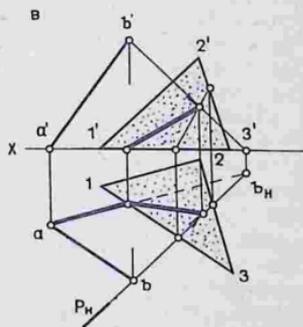


Рис. 191



На рис. 192 световые лучи, проходящие через вертикальную прямую  $AB$ , образуют горизонтально проецирующую лучевую плоскость  $P$ . Эта плоскость пересекает профиль цоколя здания по линии, которая на плане совпадает с проекцией луча, а на фасаде повторяет контур нормального сечения (профиль цоколя), повернутый влево.

На рис. 193 приведен аналогичный пример построения падающей тени на ступенях лестницы (третья, профильная проекция дана для большей наглядности). Теневыми образующими, разделяющими на объемной форме освещенную и затененную части поверхности, являются вертикальное  $AC$  и горизонтальное  $AB$  ребра боковой стенки. Тень от точки  $A$  падает на вертикальную плоскость (подступенок) лестницы.

Чтобы построить падающую тень от вертикального ребра  $AC$  на ступенях лестницы, надо провести через это ребро горизонтально проецирующую лучевую плоскость  $P$ . На плане горизонтальная проекция контура тени совпадает со следом плоскости, а на фасаде тень повторит контур профиля лестницы (см. вид сбоку). Тень на фасаде от горизонтального ребра  $AB$  также совпадает с проекцией луча, а на плане повторяет профиль лестницы.

**Тени плоских фигур.** Вид тени от плоской фигуры зависит как от ее формы и положения в пространстве, так и от формы поверхности, на которую падает тень.

На рис. 194 построена падающая тень от плоскости общего положения, заданной треугольником  $ABC$  на плоскости проекций. Тени от вершин треугольника оказались на разных плоскостях проекций. Построение тени треугольника следует вести в той же последовательности, как и построение тени прямой (см. рис. 190, б). Сначала строят тень на плоскости  $H$ , включая и часть мнимой тени, а затем строят тень на плоскости  $V$ . Тень треугольника преломится и перейдет с плоскости  $H$  на плоскость  $V$ .

*Тень, падающая от плоской фигуры на параллельную ей плоскость, тожде-*

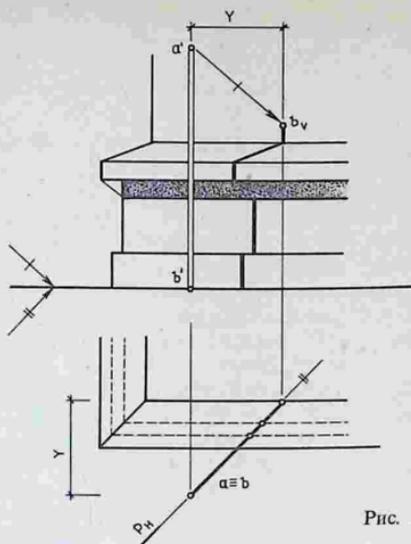


Рис. 192

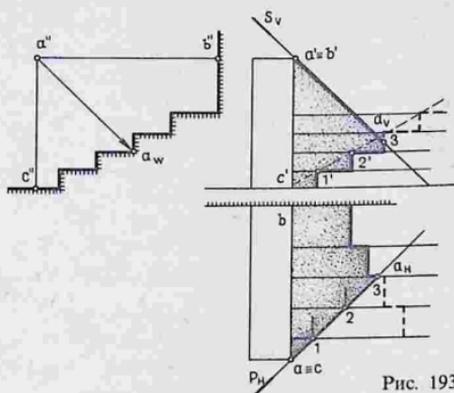


Рис. 193

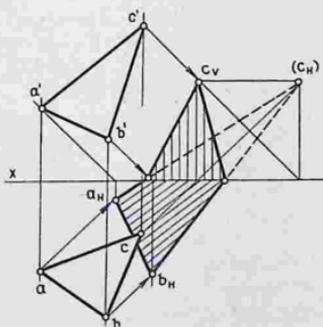
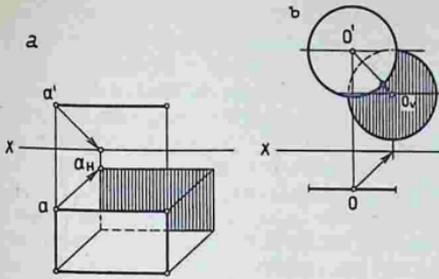


Рис. 194

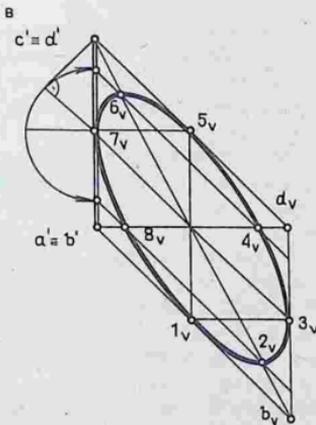
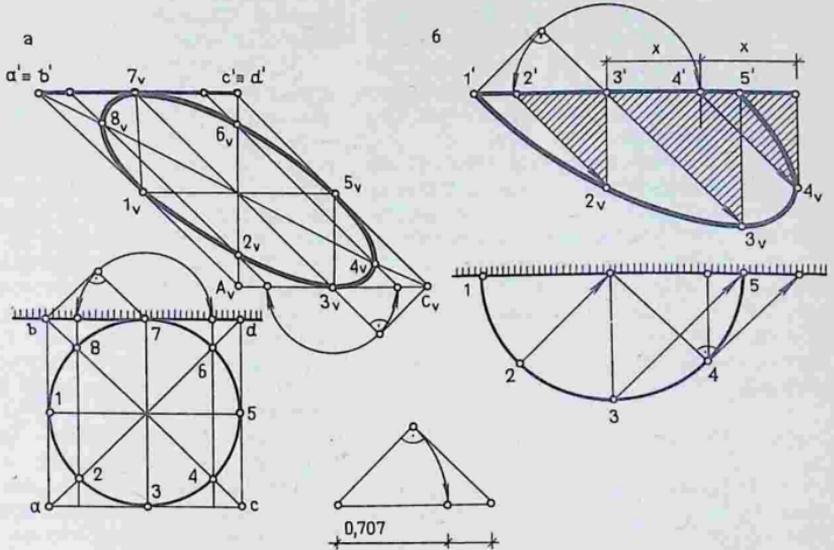


стенна самой фигуре. Эта закономерность дает возможность значительно сократить построения. Достаточно построить тень от одной точки фигуры, а затем изобразить равную (конгруэнтную) ей фигуру — контур падающей тени (рис. 195).

**Тень горизонтальной окружности.** Тень от горизонтальной окружности на фронтальной плоскости проекций изо-

Рис. 195

Рис. 196



бразится в виде эллипса, который является результатом пересечения плоскости обертывающей лучевой цилиндрической поверхностью.

Контур тени может быть получен путем построения теней ряда точек окружности. Тень от окружности может быть построена также с помощью построения тени описанного квадрата, в которую вписывается затем эллипс по восьми точкам (см. § 20, рис. 77).

На рис. 196, а даны две проекции горизонтальной окружности. Тень описанного квадрата представляет собой параллелограм. Его стороны и диагонали — это тени прямых частного положения (см. рис. 191). В параллелограмм вписывается эллипс.

В процессе графических построений, как и в данном примере (см. дополнительную схему), бывает необходимо делить отрезок прямой в соотношении стороны квадрата к его диагонали, равному  $0,707 (\approx 0,7)$ . Тень окружности на фасаде может быть построена без плана, так как тень одной из диагоналей предполагается вертикально.

На рис. 196, б приведено построение падающей тени на фасаде от *горизонтальной полуокружности*. Это построение довольно часто будет применяться при построении теней архитектурных деталей, состоящих из различных поверхностей вращения. Тень полуокружности также может быть построена без второй проекции.

**Тень вертикальной окружности.** На рис. 196, в построена тень на плоскости  $V$  от вертикальной окружности, расположенной в профильной плоскости. Одна из диагоналей описанного вокруг окружности квадрата дает тень по горизонтали  $b' - d_v$ . В параллелограм, который является тенью описанного квадрата, вписывают эллипс по восьми точкам.

#### 45. Тени геометрических тел

При построении теней геометрических тел сначала следует определить контур собственной тени, а затем приступить к построению падающей тени, которая является тенью контура собственной тени.

1. **Тень призмы** (рис. 197, а). Задняя и правая боковая грани призмы находятся в собственной тени. Ребра, разделяющие освещенные и затененные грани призмы, образуют контур собственной тени. Они представляют собой прямые частного положения, падающие тени от которых строятся просто (см. рис. 191). Ширина падающей тени на фасаде от столба прямоугольного поперечного сечения равна сумме сторон плана.

2. **Тень цилиндра** (рис. 197, б). Контур собственной тени определяется двумя образующими 1 и 5, по которым лучевые плоскости касаются его боковой

поверхности. Фронтальная проекция контура собственной тени может быть определена без плана с помощью равнобедренного треугольника с засечкой на гипотенузе, построенного на половине фронтальной проекции основания. Это относится и к цилиндру, расположенному горизонтально (рис. 197, в). Построение падающей тени на плане и фасаде включает уже известные элементы — построение тени горизонтальной окружности и теней вертикальных прямых. Ширина падающей тени на фасаде составляет  $1,41D$ .

3. **Тень конуса** (рис. 198, а). При построении тени конуса сначала строят падающую тень, с помощью которой определяют затем контур собственной тени. Начинают с построения падающей тени вершины на плоскость основания конуса. Такой тенью является мнимая тень  $S_n$ . Касательные, проведенные из этой точки к основанию конуса, определяют теневые образующие конуса, которые и являются контуром собственной тени. Точки касания графически точно определяются с помощью окружности, построенной на проекции падающей тени  $S - S_n$  высоты конуса. Контур собственной тени конуса — линия касания боковой поверхности конуса лучевыми плоскостями, параллельными световым лучам, а контур падающей тени — горизонтальные следы лучевых плоскостей.

*Тень конуса, обращенного вершиной вниз*, строится аналогичным образом (рис. 198, б). Для определения теневых образующих конуса необходимо провести через вершину конуса световой луч в обратном направлении до пересечения с плоскостью основания конуса, а затем провести из этой точки касательные к его основанию.

Сравнивая зону собственной тени первого и второго конусов, заметим, что собственная тень конуса, обращенного вершиной вверх, занимает менее половины боковой поверхности, а собственная тень конуса, обращенного вершиной вниз, — более половины поверхности.

4. **Тень сферы** (рис. 199). Световые

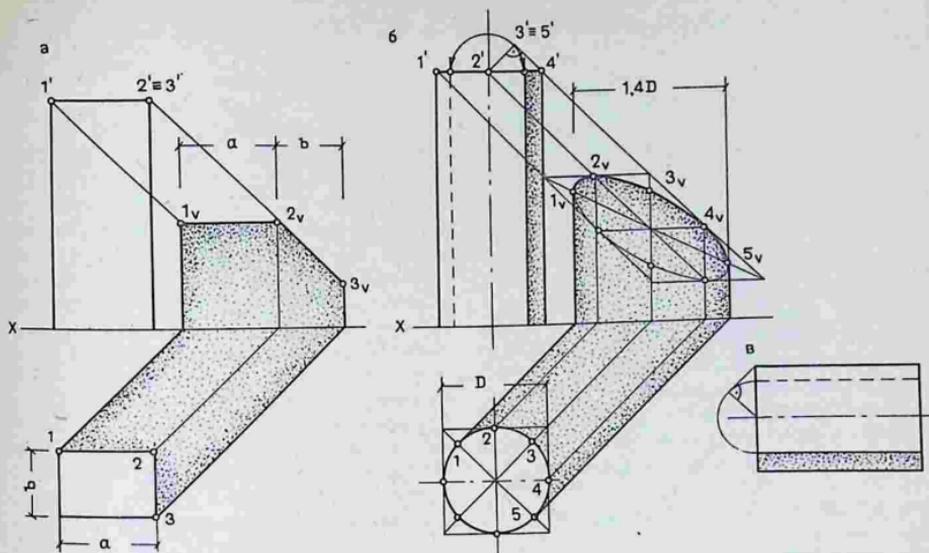
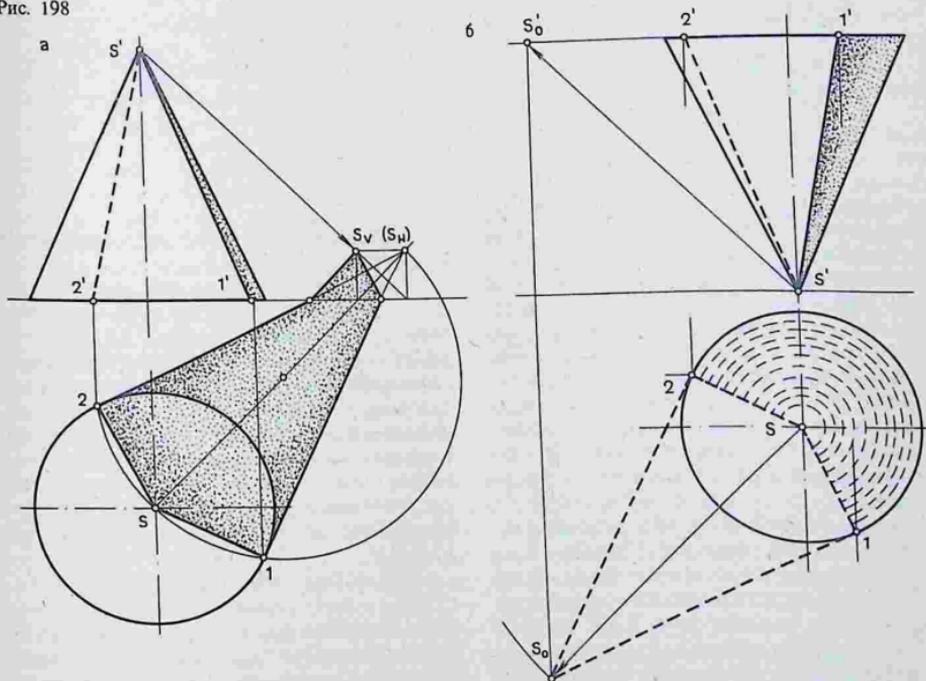


Рис. 197

Рис. 198



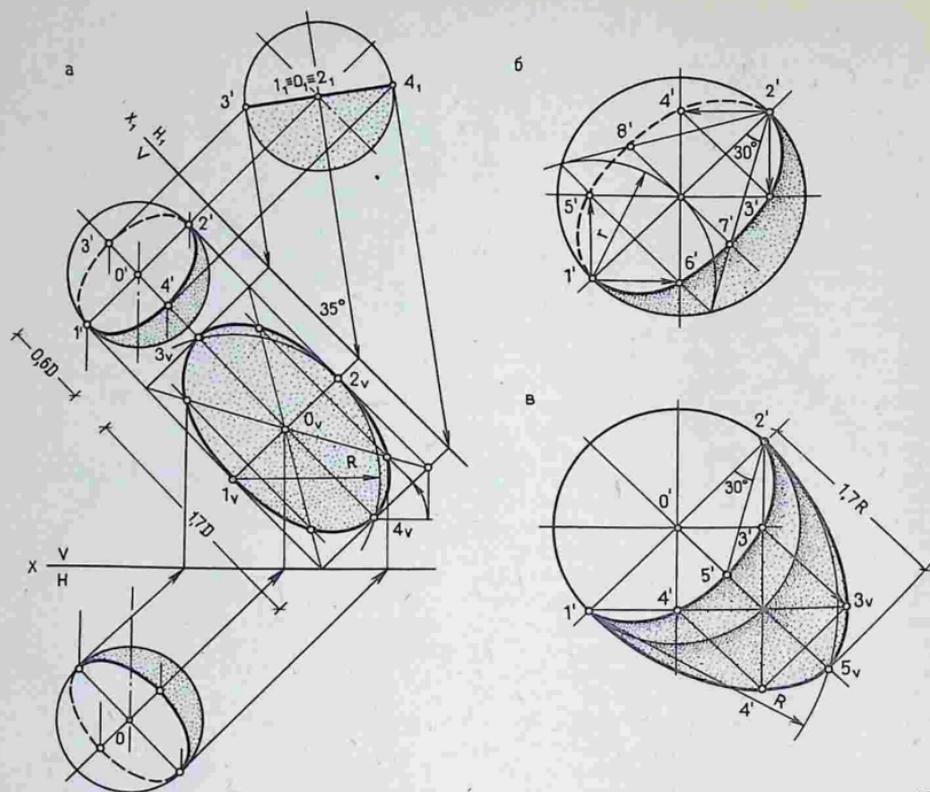


Рис. 199

лучи, касающиеся поверхности сферы, образуют обертывающую цилиндрическую лучевую поверхность. Она касается сферы по большой окружности — контуру собственной тени сферы. Проекциями контура собственной тени являются эллипсы. Большая ось эллипса равна диаметру сферы, а малая ось  $\approx 0,6D$ . Чтобы определить этот параметр, можно применить замену плоскости проекции  $H$  и построить новую проекцию сферы и ее собственную тень на плоскости проекций, параллельной лучам света [5, 17]. В этом случае при истинном наклоне луча ( $\approx 35^\circ$ ) новая проекция контура собственной тени будет перпендикулярна проекциям лучей (графическое построение угла в  $35^\circ$  показано на дополнительной проекции).

Построение падающей тени сферы

на фронтальную плоскость проекций понятно из чертежа.

Собственная тень сферы может быть построена на фасаде без второй проекции по восьми точкам (рис. 199, б). Точки  $3'$ ,  $4'$ ,  $5'$  и  $6'$  определяются с помощью горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных из точек  $1'$  и  $2'$  до пересечения с горизонтальным и вертикальным диаметрами. Точки  $7'$  и  $8'$  находят построением равностороннего треугольника и проведением прямых под углом  $30^\circ$  из точки  $2'$  к диаметру  $1' - 2'$ .

Падающая тень полусферы (рис. 199, в) представляет собой полуэллипс, большая полуось которого равна  $1,7$  радиуса. Она определяется засечкой из точки  $1'$  отрезком, равным диаметру.

## Глава 11. Способы построения теней

В зависимости от формы объекта и его положения в пространстве применяются различные способы построения проекций теней: способ *лучевых сечений*, способ *касательных поверхностей* и способ *обратных лучей*. Кроме указанных основных способов построения теней применяются также способ *вспомогательных плоскостей уровня*, способ *«выноса»* и способ *вспомогательного проецирования*.

При построении теней выбирают такой способ, который дает наиболее точное построение тени с наименьшим количеством графических операций. В ряде случаев в зависимости от формы объекта указанные способы применяются совместно.

### 46. Способ лучевых сечений

Способ лучевых сечений — основной и универсальный способ построения теней. Он применяется при построении как *падающих*, так и *собственных теней* сложных по форме объектов. По своей геометрической схеме он несложен, но требует довольно значительных графических операций, связанных с построением вспомогательных лучевых сечений. Сущность способа состоит в том, что для построения тени, падающей от одного объекта на другой, через данные объекты проводят ряд лучевых секущих плоскостей, строят по точкам вспомогательные сечения и определяют точки пересечения ряда лучевых прямых, проведенных через характерные точки первого объекта, с построенными сечениями второго. Построив ряд точек падающей тени и соединив их в определенной последовательности, получим контур падающей тени. Построение падающей тени дает возможность определить и контур собственной тени первого объекта, если он не был известен.

Таким образом, способ лучевых сечений основан на главных позиционных задачах начертательной геометрии — это

задачи на точку пересечения прямой с плоскостью или поверхностью и на пересечение поверхности плоскостью.

Построение падающей тени от плоской фигуры на поверхность вращения (рис. 200). Световые лучи, проходящие через контур плоской фигуры, образуют призматическую *лучевую поверхность*, которая в пересечении с поверхностью вращения определит контур падающей тени. Таким образом, решение задачи сводится к построению линии пересечения двух поверхностей — четырехгранной призмы с поверхностью вращения (см. § 32, рис. 135).

Для построения контура падающей тени через характерные точки (вершины) плоской фигуры проводят лучевые секущие плоскости  $P, Q, S, T$  и еще одну, промежуточную плоскость  $R$ . Следует также провести секущую плоскость через ось поверхности вращения для определения наивысшей точки контура тени, в данном примере она совпадает с плоскостью  $Q$ .

Для построения вспомогательных лучевых сечений поверхности на ней следует построить каркас линий — окружности  $I, \dots, IV$ . Затем определяют точки пересечения лучевых прямых с построенными линиями сечений поверхности. Для каждого отрезка кривых линий контура тени необходимо построить не менее трех точек тени.

### 47. Способ касательных поверхностей

Способ касательных описанных (или вписанных) поверхностей конусов и цилиндров применяется при построении на фасаде контуров *собственных теней поверхностей вращения* без второй проекции. Сущность этого способа состоит в следующем (рис. 201).

Для построения точек, принадлежащих контуру собственной тени, используются вспомогательные цилиндриче-

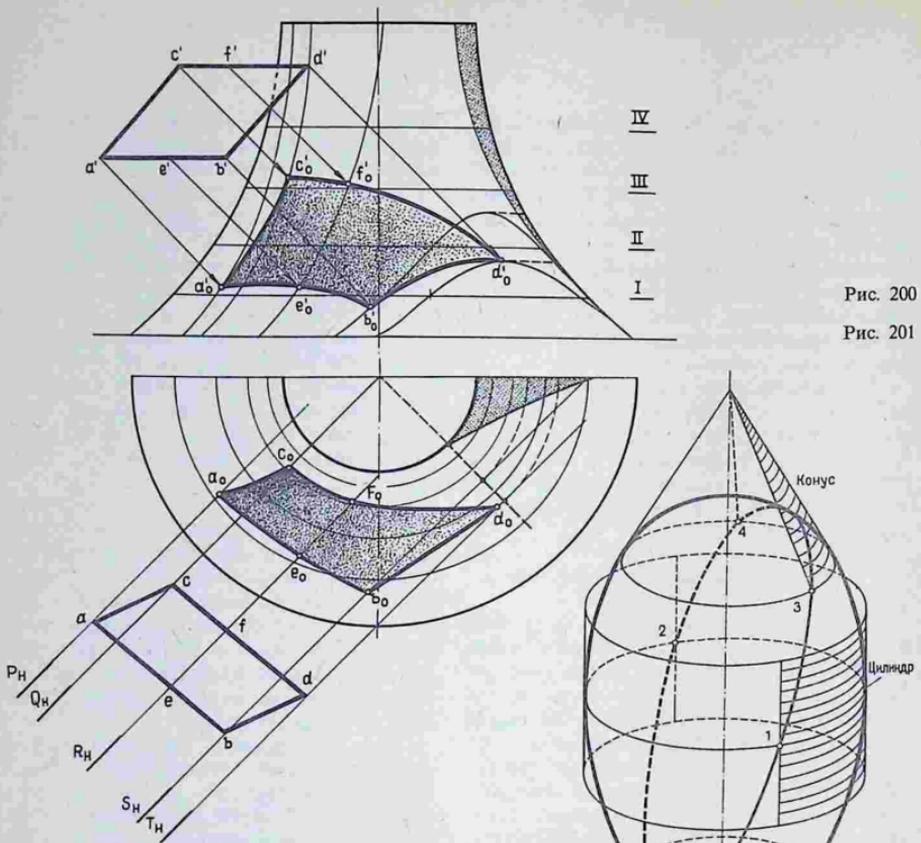


Рис. 200

Рис. 201

ские и конические поверхности, тени которых определяются просто. Эти поверхности касаются заданной поверхности вращения по окружностям — параллелям. Если параллель является экватором поверхности или его горловиной, применяют касательные цилиндры, в других случаях — вспомогательные конусы, соосные с данной поверхностью. Затем определяют теневые образующие вспомогательных поверхностей и отмечают точки их соприкосновения с соответствующими параллелями данной поверхности. Эти точки принадлежат контуру собственной тени поверхности вращения. Полученные точки тени соединяют плавной кривой.

При построении контура собственной тени прежде всего необходимо построить *характерные точки* контура тени, лежащие на фронтальном и профильном очерках поверхности (точки видимости), а также высшую и низшую точки контура тени. Первые две точки определяют с помощью касательных конусов с углом наклона образующей  $45^\circ$ , а вторые две точки — с по-

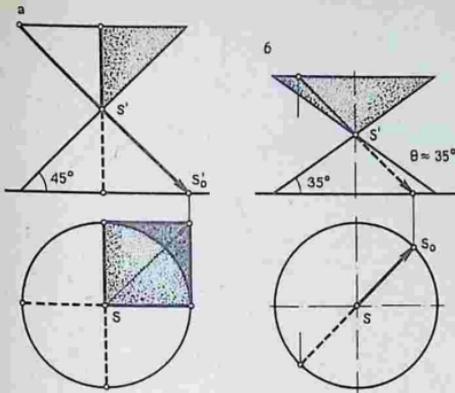
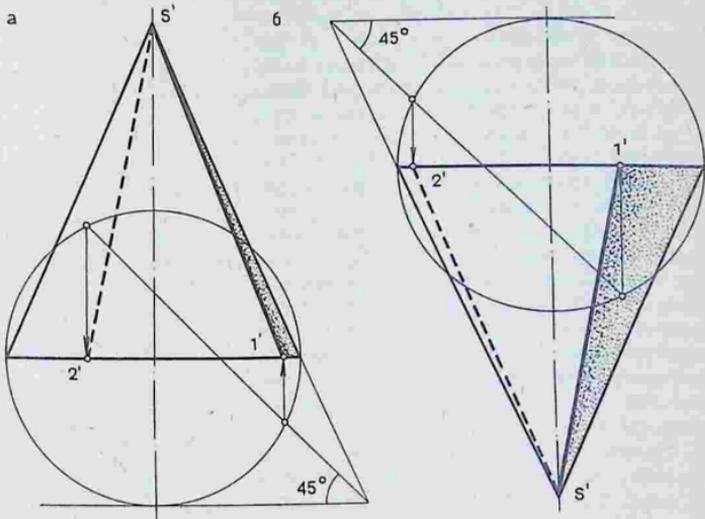


Рис. 202

Рис. 203



мощью конусов с углом наклона образующей  $35^\circ$ .

Рассмотрим собственные тени этих вспомогательных касательных конусов (рис. 202). У конуса с наклоном образующей  $45^\circ$  фронтальная проекция луча совпадает с очерковой образующей. Собственная тень занимает одну четверть поверхности нижней полы конуса и три четверти поверхности верхней полы. Теневыми образующими являются очерковая фронтальная и профильная.

У конуса с наклоном образующей  $35^\circ$  контуром тени может служить един-

ственная образующая, которая на фасаде имеет наклон  $45^\circ$ . Поверхность нижней полы конуса будет вся освещена, а поверхность верхней полы конуса – вся в тени.

Два вида касательных конусов и касательный цилиндр позволяют определить восемь точек контура собственной тени, включая невидимые. Если необходимо построить дополнительные точки тени, применяют касательные конусы с произвольным наклоном образующих.

На рис. 203 приведен один из способов построения на фасаде собственной

тени вспомогательных конусов этого вида без второй проекции. На проекции основания конуса строят совмещенную окружность основания. Проводят горизонтальную касательную до пересечения с продолжением очерковой образующей: у конуса, обращенного вершиной вверх, – с правой, у конуса, обращенного вершиной вниз, – с левой. Из полученной точки проводят прямую под углом  $45^\circ$  до пересечения с окружностью. Проекции этих точек на основании конуса определяют искомые точки  $1'$  и  $2'$  теневых образующих.

Применяя перечисленные выше «стандартные» приемы построения теней цилиндра и конусов, можно построить необходимое число точек контура собственной тени любой поверхности вращения.

Рассмотрим два примера построения собственных теней поверхностей вращения.

**Пример 1.** Построить контур собственной тени выпуклой поверхности вращения—овоида (рис. 204). Для построения точек тени на экваторе поверхности опишем вокруг поверхности соосный цилиндр и на окружности касания определим общие точки тени  $1'$  и  $2'$ . Затем построим фронтальные проекции вспомогательных касательных конусов с углом наклона образующей  $35^\circ$ , проведя касательные к очерку овоида до пересечения с осью, а из этой точки—прямую под углом  $45^\circ$  к линии касания, получим высшую точку  $3'$  (невидимую) и низшую  $4'$ . Конусы с углом наклона образующей  $45^\circ$  дадут на очерке поверхности точки  $5'$  и  $7'$  и точки, совпадающие с проекцией оси,  $6'$  (невидимая) и  $8'$ . Если восьми точек окажется недостаточно, проводят дополнительную параллель поверхности и строят касательный конус произвольного вида. Через полученные точки проводят плавную кривую, в точках  $5'$  и  $7'$  она должна коснуться очерка овоида.

**Пример 2.** Построить контур собственной тени вогнутой поверхности вращения—скоции (рис. 205). Форма поверхности вращения—«предельной» скоции такова, что падающей тени от верхней кромки не будет, так как кривая очерка в верхней и нижней точках касательна к прямой под углом  $35^\circ$ . Точки  $1'$  и  $2'$  построены с помощью вписанного цилиндра. Для более точного построения точек касания образующих вспомогательных конусов к очерку поверхности можно воспользоваться прямыми, проведенными под углами, равными дополнительным углам ( $55^\circ$  и  $45^\circ$ ), из центров дуг очерка поверхности.

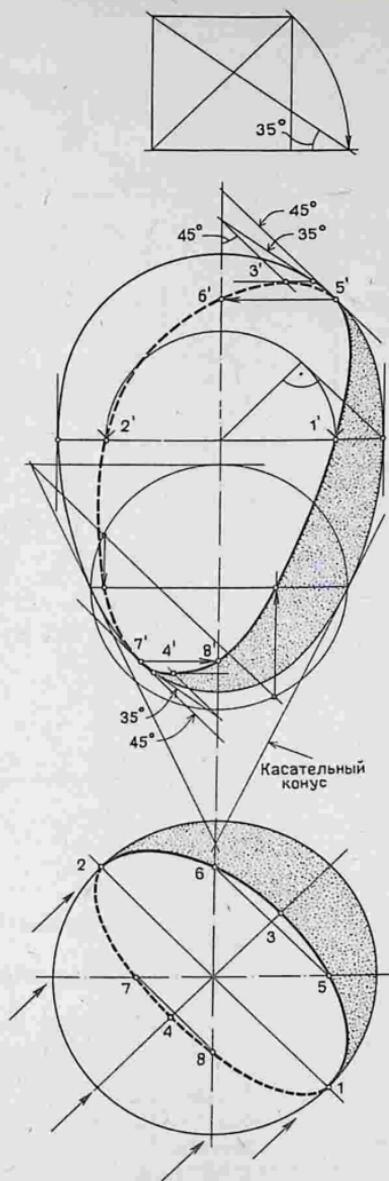
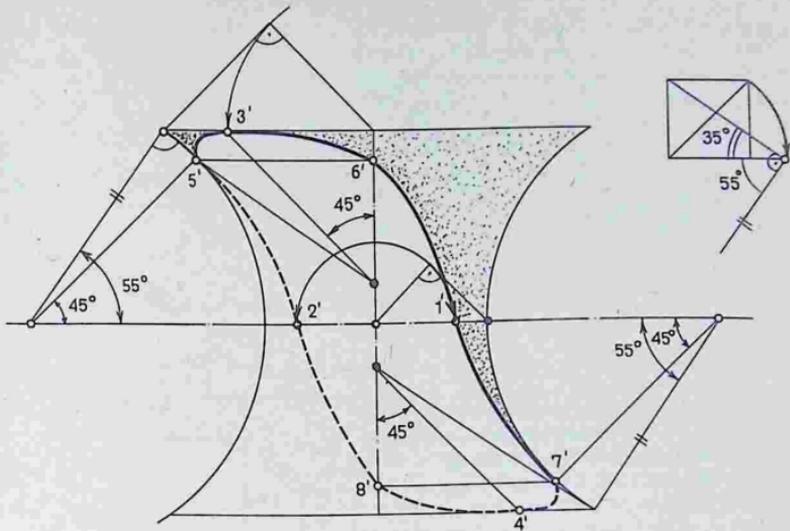


Рис. 204

Рис. 205



#### 48. Способ обратных лучей

Способ обратных лучей применяется для построения *падающих теней от одного предмета на другой*. Существо этого способа заключается в следующем (рис. 206, а). Если требуется построить падающую тень от одного геометрического объекта на другой, сначала строят падающие тени от этих объектов на одну из плоскостей проекций и отмечают на ней *точку пересечения контуров падающих теней*. Она представляет собой совпавшие тени двух точек этих объектов, лежащих на одном световом луче. Затем из этой точки проводят «обратный» по направлению луч, с помощью которого определяют тень точки от одного объекта на другом. Первую точку обычно не определяют.

На рис. 206, б показано построение *падающей тени от прямой EF на плоскость треугольника ABC* в ортогональных проекциях. Прежде всего строят падающие тени треугольника и прямой на плоскость  $H$ . Точка  $1_n \equiv 2_n$  является точкой пересечения контуров теней. Из этой точки проводят

обратный луч до пересечения со стороной треугольника в точке 2,2'. Эта точка будет тенью от точки прямой на плоскость треугольника. Падающая тень прямой должна пройти от точки 3 к построенной точке 2,2'. Если продолжить обратный луч до пересечения с прямой EF, определим точку 1, которая бросает тень в точку 2 треугольника, а затем в точку  $1_n \equiv 2_n$  на плоскости  $H$ . Все три точки лежат на одном световом луче.

На рис. 207 приведено *построение падающей тени от прямой на поверхность конуса*. Световые лучи, проходящие через прямую, образуют лучевую плоскость, которая пересекает конус по кривой второго порядка и представляет собой падающую тень от прямой на конусе. Сначала построены падающие тени от прямой и от конуса на плоскости  $H$  (см. § 45, рис. 198, а). Затем отмечают точку  $s_n$  пересечения контуров теней и с помощью обратного луча определяют точку тени  $s, s'$  на теневой образующей  $S-1$  конуса. Точку  $s, s'$  называют *точкой исчезновения тени*. В ней кривая падающей тени касается луча. Для построения между точками  $s$  и 4 промежуточных точек падающей

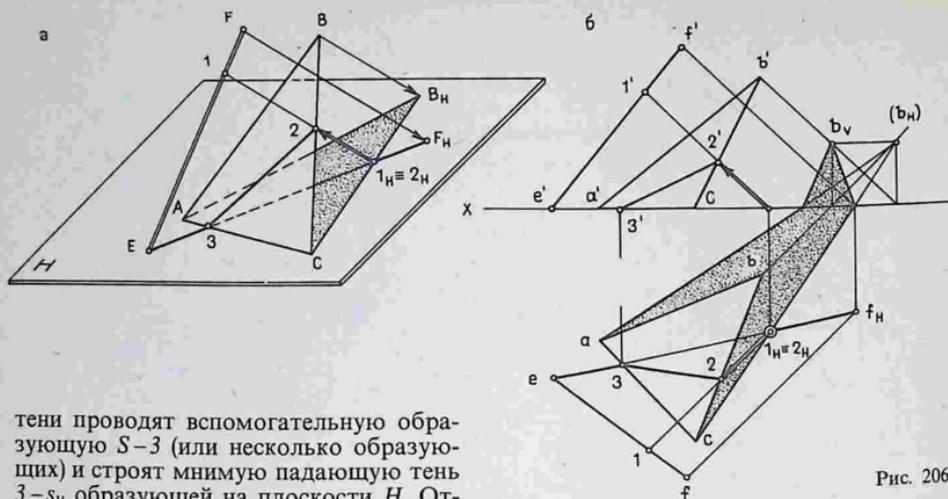


Рис. 206

Рис. 207

тени проводят вспомогательную образующую  $S-3$  (или несколько образующих) и строят мнимую падающую тень  $3-s_H$  образующей на плоскости  $H$ . Отмечают точку  $e_H$  пересечения контуров теней и обратным лучом определяют точку тени  $e, e'$ . Так можно построить любое число точек тени.

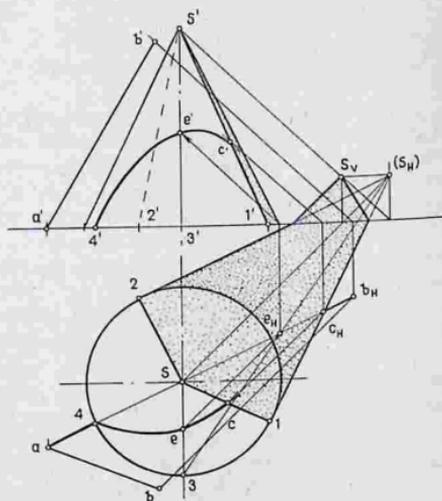
#### 49. Способ «выноса»

Способ «выноса» (ординат) применяется для построения падающих теней на плоскостях проекций и плоскостях уровня. Если известно расстояние (вынос) отдельных точек объекта, например от фронтальной плоскости, падающая тень может быть построена без горизонтальной проекции, по выносу (ординатам  $y$ ) этих точек.

Для построения тени точки  $A$  на фронтальной плоскости проекций (рис. 208) следует от проекции точки  $a'$  отложить вправо величину выноса  $y$  и построить в пересечении с проекцией луча тень  $a_v$  точки.

Рассмотрим два примера построения падающей тени на фасаде без плана, когда вынос некоторых точек объекта известен.

**Пример 1.** Построить падающую тень раскреповки стены с карнизной частью. На рис. 209, *a* на фасаде построена падающая тень с использованием плана. Однако если известна величина раскреповки стены  $y$ , то вся остальная часть падающей тени



может быть построена без плана способом выноса.

На рис. 209, *б* приведено построение падающей тени карниза по выносу  $y$ . Вынос карниза  $y_1$  проецируется на фронтальной плоскости проекций, следовательно, величина тени от карниза будет равна этой величине. Затем строится тень карнизного выступа; необходимо отметить такую особенность — ее вели-

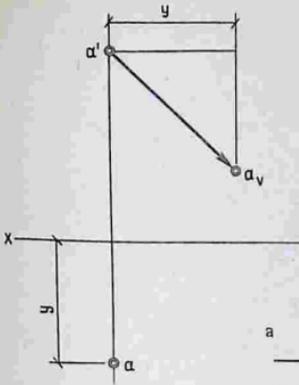
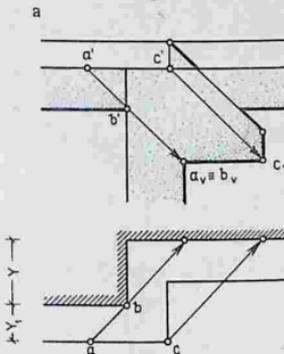


Рис. 208

Рис. 209



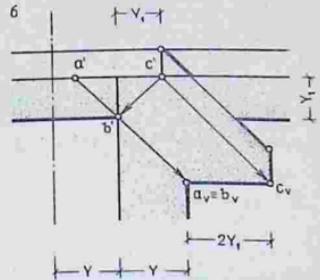
чина равна удвоенному выносу  $2y_1$  карниза.

Построение тени способом выноса графически точнее, чем построение тени по двум проекциям.

**Пример 2.** Построить падающую тень от валика на меридиональной фронтальной плоскости (рис. 210). Собственная тень валика построена способом касательных поверхностей (см. § 47, рис. 204). Требуется построить падающую тень валика без плана, способом выноса. Схема плана приведена для пояснения хода рассуждений.

Точки  $1'$  и  $5'$  являются началом и концом контура падающей тени. Точка  $2$  — низшая точка контура собственной тени, лежит в плоскости лучевой симметрии, проходящей через ось валика, величина ее выноса равна  $y$  — расстоянию на фасаде по горизонтали до проекции оси. Вынос точки  $3$ , равный  $y_1$ , определяется на фасаде, он равен горизонтальному отрезку  $3' - 3_0$ . Вынос точ-

ки  $4$ , равный  $y_2$ , также определяется на фасаде. Он равен расстоянию от проекции оси до точки  $4'$  (вынос  $y_2$  на плане является высотой прямоугольного треугольника). Построенные точки тени соединяют плавной кривой. Точному вычерчиванию кривой способствует выполнение касания кривой к четырем прямым: в точке  $3_v$  — горизонтали, в точке  $4_v$  — вертикали, в точках  $1'$  и  $5'$  — к прямым, наклоненным по углом  $45^\circ$ .

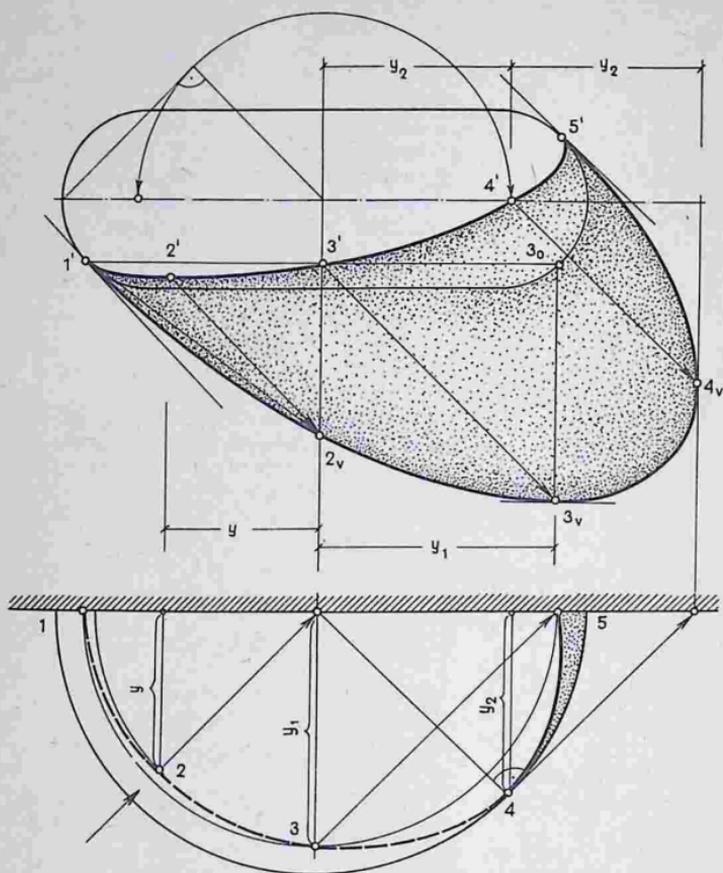


### 50. Способ вспомогательных плоскостей-посредников

Этот способ применяется для построения *падающих теней* на поверхностях, которые могут быть заданы линейным каркасом из прямых или окружностей. Для построения теней применяются вспомогательные секущие плоскости-посредники (горизонтальные и фронтальные), на которых несложными приемами строятся вспомогательные тени, с помощью которых определяются затем отдельные точки искомого контура падающей тени.

Рассмотрим построение падающих теней на конкретных примерах.

**Горизонтальные плоскости-посредники.** **Пример 1.** Построить падающую тень от прямой на поверхность вращения (рис. 211). Лучи, проходящие через прямую, определяют лучевую секущую плоскость. Линия сечения поверхности будет падающей тенью прямой. Сначала строят падаю-



щую тень от прямой  $AB$  на плоскость  $H$  и получают начальную  $1$  и конечную  $2$  точки сечения. Затем проводят вспомогательную горизонтальную плоскость-посредник  $P$  и строят окружность-сечение поверхности этой плоскостью. Падающей тенью от прямой  $BC$  на плоскости  $P$  будет прямая, параллельная тени  $AB_n$ . В пересечении этой тени со вспомогательным сечением-окружностью, получим еще две точки  $3$  и  $4$  контура падающей тени. Так можно построить любое число точек падающей тени. Световой луч, проведенный из точки  $B$  прямой, определит на линии сечения конечную точку  $B_0$  искомой падающей тени.

**Пример 2.** Построить падающую тень от квадратной плиты на поверхность вращения-эхин колонны (рис. 212). Собственная тень на поверхности вращения построена способом касательных поверхностей (см. § 47, рис. 204). Для построения фронтальной проекции падающей тени от квадратной плиты на поверхности вращения применим горизонтальные секущие плоскости-посредники.

Световые лучи, проходящие через два горизонтальных ребра плиты-фронтальное и профильное, образуют на поверхности вращения два одинаковых и симметрично расположенных

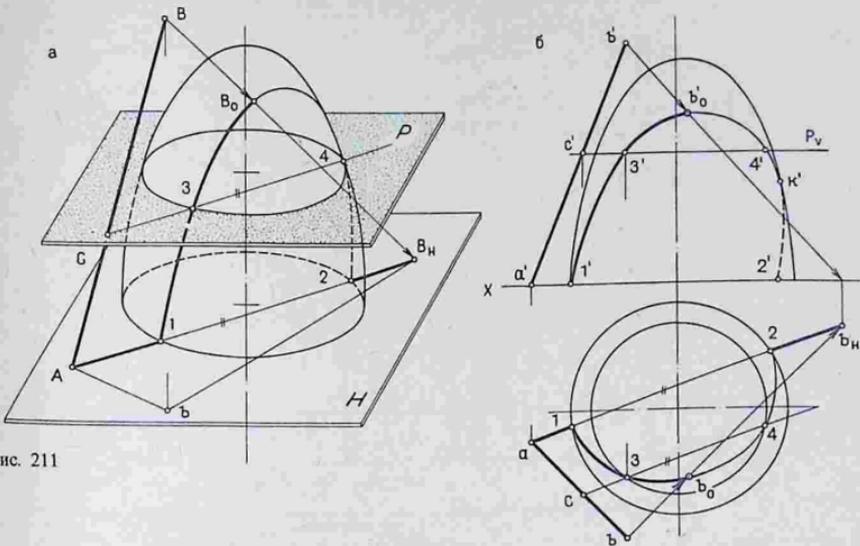


Рис. 211

лучевых сечения. Так, например, тень от квадратной плиты на цилиндрическую поверхность проецируется в виде двух пересекающихся окружностей (рис. 212, а). Эти окружности являются проекциями эллипсов, которые образуются при пересечении цилиндра лучевыми плоскостями  $S$  и  $T$ . Эта закономерность используется при построении падающей тени на любой другой поверхности вращения (рис. 212, б). Для построения падающей тени на эхине колонны проведем вспомогательные плоскости-посредники  $I$ ,  $II$  и  $III$ , которые пересекут эхин по окружностям, имеющими радиусы  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

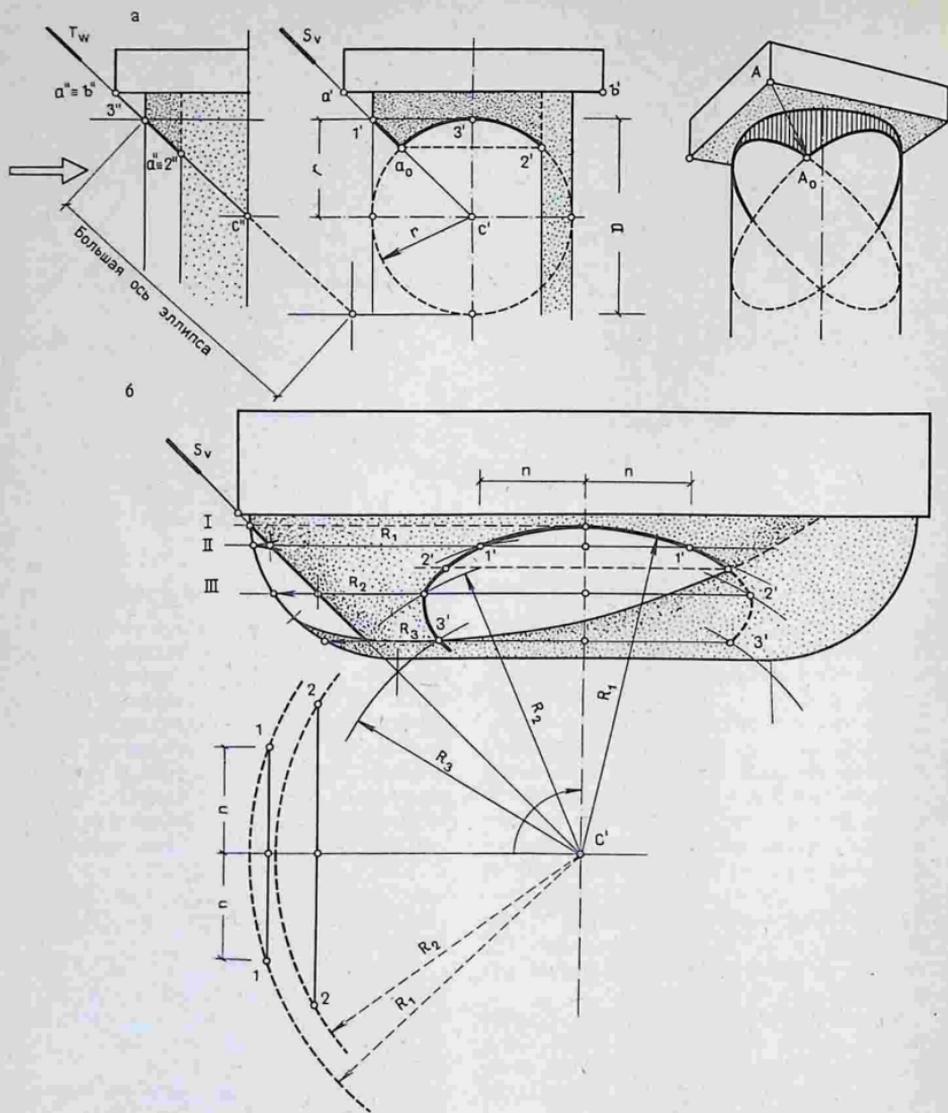
Фронтально проецирующая лучевая плоскость  $S$ , проходящая через профильное ребро плиты, пересечет каждую из окружностей в двух симметрично расположенных точках  $1-1$ ,  $2-2$ , ... Это показано штриховыми линиями на совмещенном плане, который приводится для пояснений. Полученные точки лучевого сечения и будут точками контура падающей тени, проекция которого совпадает со следом  $S_0$  лучевой плоскости.

Чтобы построить аналогичный контур падающей тени на фасаде от фронтального ребра плиты, примем левую часть фронтальной проекции эхина и плиты за профильную проекцию и выполним на фасаде построения, аналогичные сделанным на плане. Из точки  $c'$  радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  сделаем засечки на соответствующих фронтальных следах секущих плоскостей-посредников  $I$ ,  $II$  и  $III$  и получим точки  $1'$ ,  $2'$  и  $3'$  искомого контура падающей тени. Верхняя точка тени переносится с профильного лучевого сечения.

Построение тени с помощью вспомогательных плоскостей-посредников позволяет графически точно построить на фасаде необходимое число точек тени без второй проекции.

**Фронтальные плоскости-посредники.** В тех случаях когда каркас поверхности может быть задан фронтальными окружностями, для построения падающей тени применяют вспомогательные фронтальные плоскости-посредники.

*Требуется построить падающую тень в нише от ее внешней кромки (рис. 213). Поверхность ниши образова-*

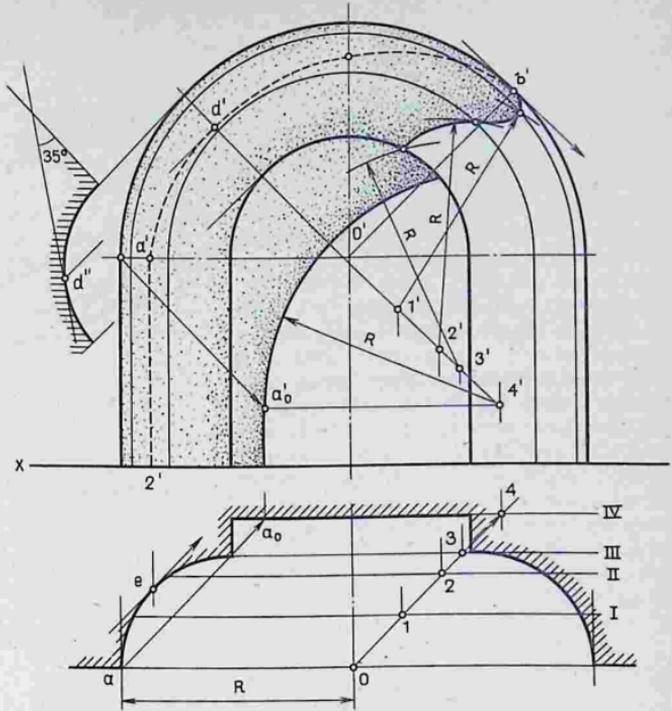


на тороидальной и цилиндрической поверхностями и фронтальной плоскостью. Собственная тень ниши построена с помощью вспомогательного сечения, проведенного в плоскости луча (точка  $d'$ ). Для построения падающей тени от кромки ниши проведены четыре

фронтальные плоскости-посредники и построены сечения ниши этими плоскостями. Затем на каждой плоскости строят тени от кромки ниши — засечки другой окружности радиуса  $R$  и от ее центра  $O$ . Центры 1, 2, 3 и 4 окружностей вспомогательной тени смещаются по

Рис. 212

Рис. 213



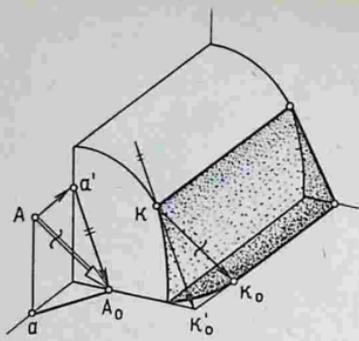
проекция луча, как показано на рис. 195, б. В точке  $b'$  контур падающей тени должен коснуться кромки ниши.

### 51. Способ вспомогательного проецирования

Этот способ может быть применен как для построения *собственных*, так и *падающих теней* объектов, имеющих форму цилиндрической поверхности с образующими параллельными плоскости проекций. Если цилиндрическая поверхность занимает не проецирующее положение, а параллельное плоскости проекций, то тени строят, используя вспомогательную проекцию луча на плоскость сечения поверхности (рис. 214). При этом направление вспомогательного проецирования берут параллельным образующим цилиндрической поверхности. В этом примере  $a'A_0$  будет вспомогательной проекцией луча

на плоскость основания цилиндра. Касательная к основанию поверхности, проведенная параллельно полуцилиндрической проекции луча, определяет границу собственной тени  $K$  и контур падающей тени от теневой образующей цилиндра.

**Пример 1.** Построить собственные и падающие тени цилиндрической арки (рис. 215). Спроецируем световой луч  $AB$  (см. дополнительную схему) на плоскость основания полуцилиндра. Прямая  $SV$  является *вспомогательной проекцией луча*. Касательная к основанию цилиндра в точке  $K$  определит теневую образующую. Падающая тень на плоскости  $H$  построена с помощью точек тени  $k_n$  и  $d_n$ . Тенеобразующая кромка полуцилиндра бросит тень на внутреннюю сторону поверхности. Точки  $1'_0$  и  $2'_0$  этого контура тени построены с помощью вспомогательных проекций лучей  $1'-1$  и  $2'-2$ .



**Пример 2.** Построить собственные и падающие тени наклонного карниза (рис. 216). Правый профиль карниза не лежит в лучевой плоскости, поэтому световой луч  $AB$  следует спроецировать на плоскость профиля. Направление вспомогательного проецирования должно быть параллельным образующим карниза, тогда вспомогательной проекцией луча будет отрезок  $A_1-B$ . Вспомогательную проекцию луча и построение теней выполняют без плана (см. дополнительную

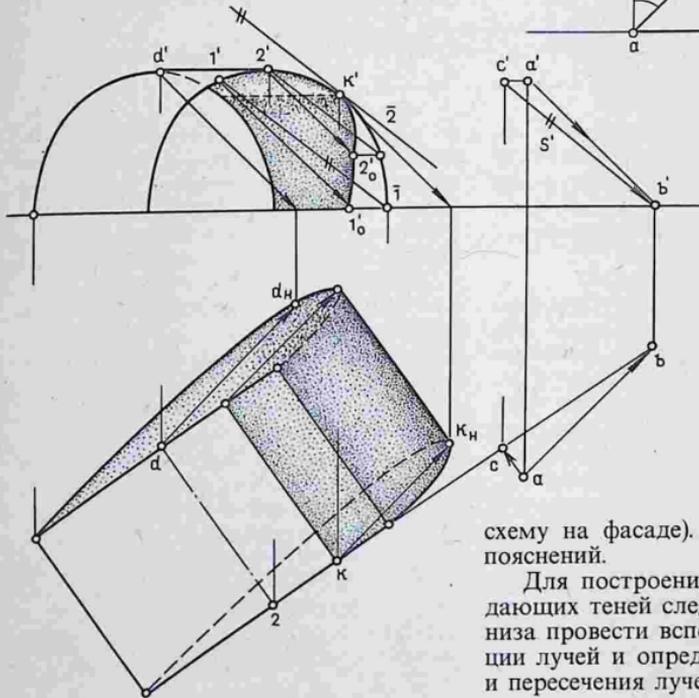
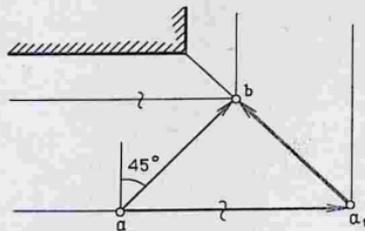
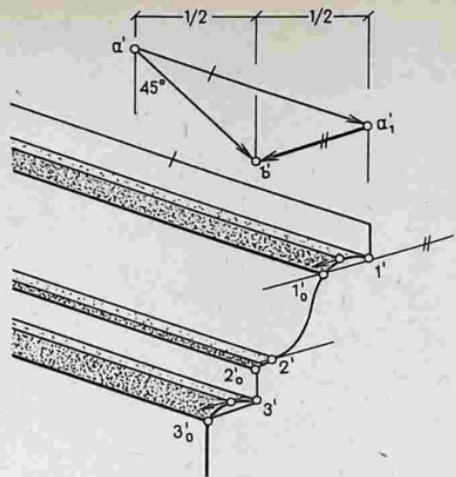


Рис. 214

Рис. 215

Рис. 216

схему на фасаде). План приведен для пояснений.

Для построения собственных и падающих теней следует к профилю карниза провести вспомогательные проекции лучей и определить точки касания и пересечения лучей с кривой профиля.

## Глава 12. Тени архитектурных деталей и фрагментов

В настоящей главе будут рассмотрены различные примеры построения теней, где указанные выше способы применяются совместно в различных сочетаниях. Приемы построения теней некоторых классических архитектурных фрагментов, включающие самые простые и распространенные геометрические поверхности, могут быть использованы при построении теней разнообразных современных композиций.

### 52. Тени многогранных и цилиндрических поверхностей

Чтобы построить тень архитектурной детали или фрагмента гранной формы, следует определить ребра, разделяющие освещенные и затененные грани, и построить падающие тени этих ребер, соединив тени вершин прямыми.

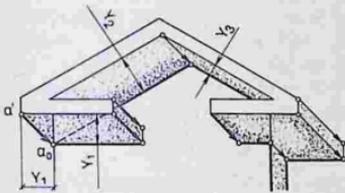
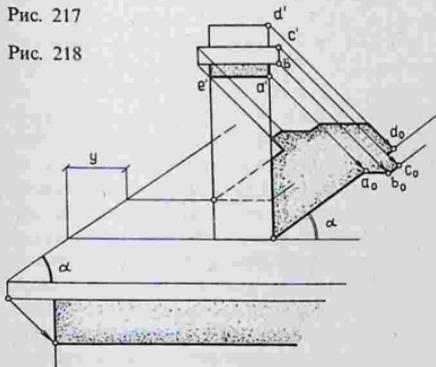


Рис. 217

Рис. 218



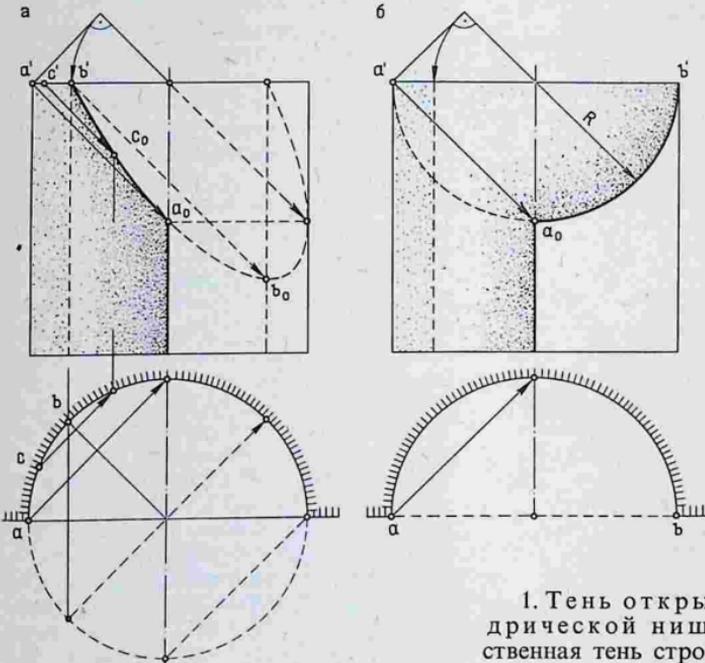
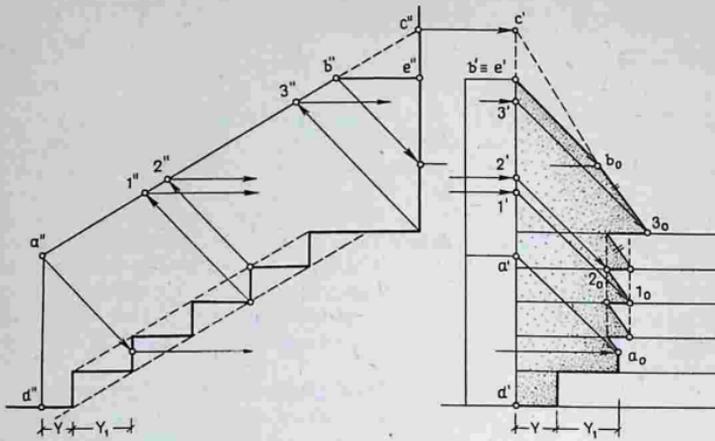
1. **Тень карниза фронтона** (рис. 217). Так как вынос  $y_1$  карниза, как правило, одинаков со всех сторон объема, падающая тень строится без плана. Тени наклонных частей карниза в одном случае шире ( $y_2$ ) горизонтального участка, а в другом ( $y_3$ ) — уже. Ширина падающей тени зависит от угла наклона проекции луча к тенеобразующей прямой: чем угол больше, тем тень шире —  $y_2 > y_1 > y_3$ .

2. **Построение тени от трубы на крышу** (рис. 218). Тень от трубы может быть построена без второй проекции, если известно соотношение сторон плана трубы (размер  $y$ ). Тенеобразующими ребрами служат прямые частного положения: *вертикальные прямые* образуют тени, *параллельные скату кровли* (угол  $\alpha$ ); *горизонтальные прямые*, параллельные скату кровли, образуют тени, параллельные самим прямым, а *прямые, перпендикулярные фасаду*, образуют тени, совпадающие с проекцией луча.

3. **Тень на ступенях лестницы** (рис. 219). Тенеобразующими ребрами боковой стенки являются вертикальное, наклонное и горизонтальное ребра, ломаная линия  $d' - a' - b' - e'$ . Вертикальное ребро повторяет профиль лестницы до точки  $a_0$ . Тень от горизонтального ребра совпадает с проекцией луча.

Построим тень от наклонного ребра  $AB$  на вертикальной плоскости (подступенок) одной ступени. Проведем профильные проекции обратных лучей, затем построим на фасаде тени  $1_0$  и  $2_0$ . Так как наклонное ребро  $AB$  параллельно наклону лестничного марша, проекции точек тени, аналогичные построенным, будут располагаться на остальных ступенях на вертикальных прямых.

**Тени в нишах.** Внутренней поверхностью ниш являются обычно цилиндрические и сферические поверхности, поэтому тени от кромки ниш образуют на их внутренней поверхности контуры



теней, которые на основе теоремы о плоских сечениях (см. § 34, рис. 144) будут плоскими кривыми — эллипсами. Поэтому тени ниш можно строить по опорным точкам без второй проекции. План приводится для пояснений.

1. Тень открытой полуцилиндрической ниши (рис. 220, а). Собственная тень строится так же, как на круговом цилиндре. Падающая тень от вертикальной кромки — образующей поверхности совпадает с проекцией оси до точки тени  $a_0$ . Контур тени от точки  $b'$  до точки  $a_0$  представляет собой часть эллипса и является тенью от горизонтальной кромки  $AB$ . Промежуточную точку  $C_0$  тени можно не строить, так как

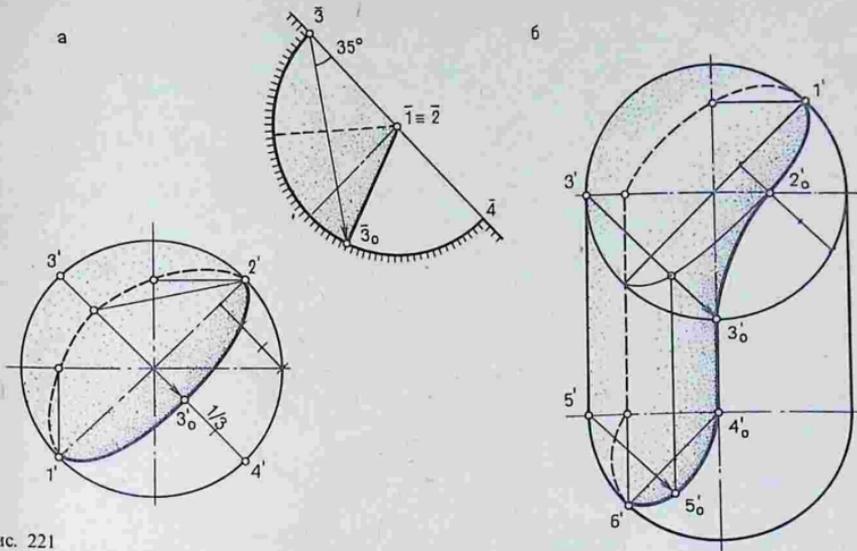


Рис. 221

в точке  $a_0$  контур тени должен быть касательным к проекции луча  $a'a_0$ .

2. Тень перекрытой полуцилиндрической ниши (рис. 220, б). Контур падающей тени от горизонтальной кромки-прямой  $AB$  повторяет план ниши. Лучи, проходящие через кромку  $AB$ , образуют лучевую плоскость, наклоненную под углом  $45^\circ$ . Она пересекает полуцилиндр по полуэллипсу, который проецируется полуокружностью.

3. Тень полусферической ниши (рис. 221, а). Проекция падающей тени от кромки  $1-2-3$  ниши на внутренней стороне полусферы представляет собой полуэллипс, который является проекцией плоского сечения — полуокружности. Световые лучи, проходящие через кромку ниши, образуют лучевой эллиптический цилиндр и на основе уже упомянутой закономерности (см. § 34, рис. 143) сечение будет плоской кривой. Малая полуось полуэллипса равна  $\frac{1}{3}$  радиуса сферы. Любой отрезок полуэллипса, параллельный малой полуоси, также составит  $\frac{1}{3}$  полу хорды. Собственная тень полусферы соответствует невидимому участку контура соб-

ственной тени сферы (см. § 45, рис. 199, б).

4. Тень комбинированной ниши (рис. 221, б). Контуры собственных и падающих теней включают участки, аналогичные рассмотренным выше построениям теней в нишах. Верхняя часть контуров тени соответствует верхней половине полусферической ниши. В нижней части ниши участок контура тени от точки  $6'$  до точки тени  $5_0'$  повторяет тень нижней половины полусферической ниши. Тень средней цилиндрической части ниши аналогична тени полуцилиндрических ниш. Участки контура падающей тени от точки тени  $2_0'$  до точки  $3_0'$  и от точки тени  $4_0'$  до точки  $5_0'$  соединяют плавными кривыми линиями с выполнением сопряжений в указанных точках.

**Тени кронштейнов.** Форма кронштейнов представляет собой цилиндрическую поверхность различного профиля, ограниченную параллельными плоскостями (рис. 222). Построение собственных и падающих теней кронштейнов, имеющих выпуклые и вогнутые части цилиндрической поверхности, выполняются с помощью профильной про-

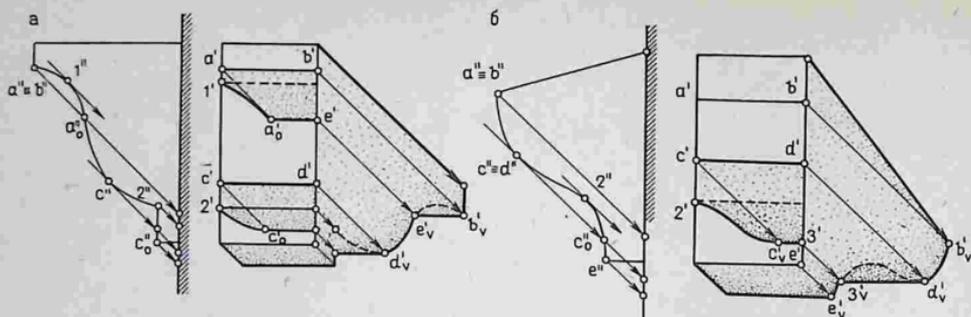
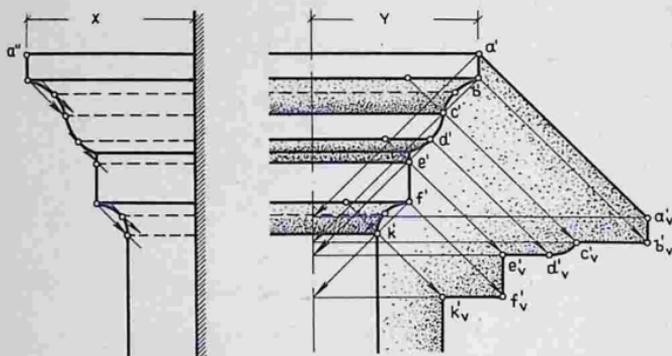


Рис. 222

Рис. 223



екции. Профильные проекции лучей, касательные к профилю кронштейнов, определяют контуры собственной тени. Для более точного построения кривой контура падающей тени на стену следует изобразить и мнимые участки тени (штриховые линии).

Тень на внутренней поверхности цилиндрической части первого кронштейна (рис. 222, а) аналогична тени открытой ниши. Кривые участки контура падающей тени от левых теневых кромок  $c'2'$  обоих кронштейнов повторяют характер кривой этих кромок и касаются горизонтальных участков тени в точке  $c'_0$ . Во втором кронштейне (рис. 222, б) кривая тени имеет точку перегиба.

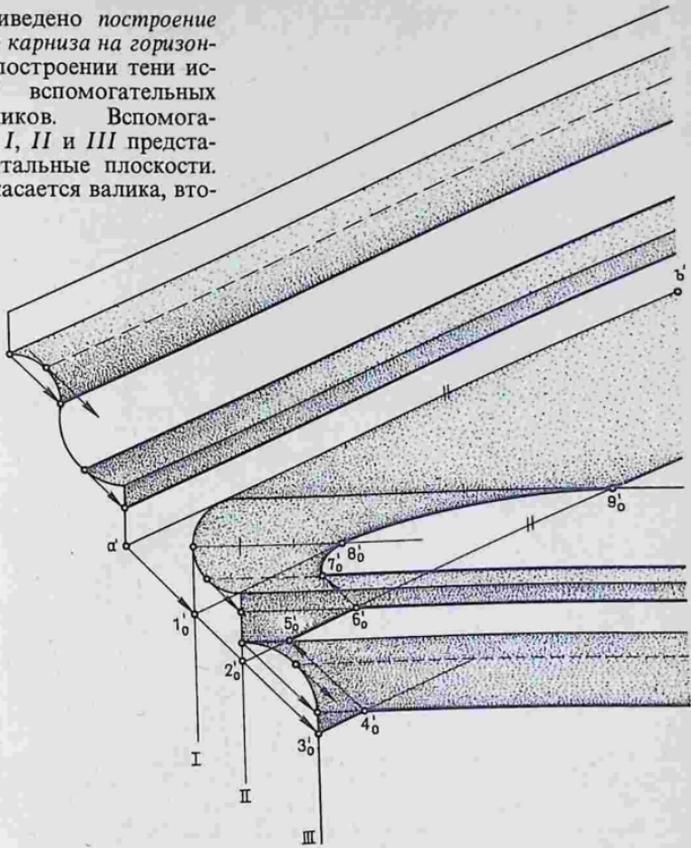
**Тени карнизов.** Тяги карнизов состоят обычно из цилиндрических поверхностей различного профиля и плоских элементов. В местах сопряжения горизонтального карниза с противоположным его направлением угловой про-

филь расположен в вертикальной плоскости, которая образует угол  $45^\circ$  к этим направлениям. При построении тени карниза (рис. 223) удобно пользоваться левым угловым профилем. Однако можно построить тень на правом угловом профиле без второй проекции. При этом проекции лучей следует проводить в направлении, симметричном основному, т.е. справа налево. Падающую тень на фронтальную плоскость стены также можно построить без профильной проекции, если нанести величину выноса  $y$  от плоскости стены на изображении правого углового профиля. Опорные точки падающей тени строят, проводя проекции лучей сначала до линии стены, а затем в основном направлении до пересечения с соответствующими горизонтальными линиями связи.

При построении контура падающей тени на стену следует использовать точки  $c'$ ,  $d'$ ,  $k'$  «исчезновения» падающей тени на самом профиле карниза.

На рис. 224 приведено построение тени от наклонного карниза на горизонтальный [9]. При построении тени использован способ вспомогательных плоскостей-посредников. Вспомогательные плоскости I, II и III представляют собой фронтальные плоскости. Первая плоскость касается валика, вто-

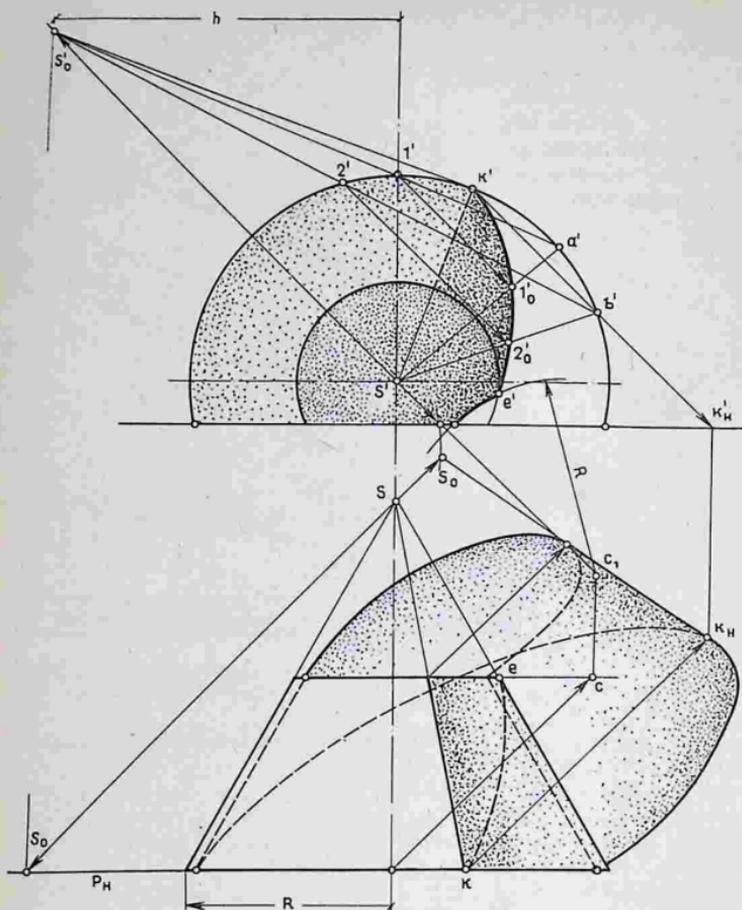
Рис. 224



### 53. Тени конических поверхностей

рая и третья совмещены с полкой профиля и стеной. Их расположение видно на боковом профиле. На плоскостях-посредниках построены вспомогательные тени — прямые, параллельные тенеобразующему ребру  $AB$  ( $a'b'$ ) наклонного карниза. Тень на первой плоскости-посреднике даст общую точку тени  $8'_0$ , на второй — точки тени  $5'_0$ ,  $6'_0$  и  $9'_0$  и на третьей плоскости — точки  $3'_0$  и  $4'_0$ . Точка тени  $7'_0$  определена обратным лучом. Кривая тени  $7'_0-8'_0-9'_0$  является частью эллипса как результат сечения полуцилиндра лучевой плоскостью, проходящей через ребро  $a'b'$ .

1. Тени ниши в форме полого усеченного конуса (рис. 225). Для построения собственной тени следует построить тень вершины на плоскости основания конуса (см. § 45, рис. 198). Проводим обратный по направлению луч и строим тень  $S_0$  вершины на плоскости основания. С помощью касательной  $s'_0-k'$ , проведенной к окружности основания конуса, определяем контур собственной тени  $KS$ . Теневая образующая  $KS$  отделяет на внешней стороне поверхности освещенную часть от затененной, а на



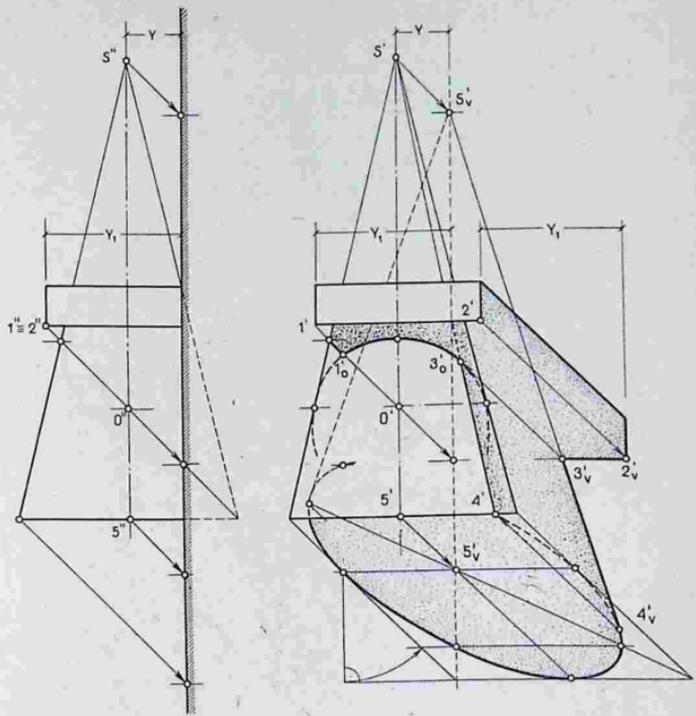
внутренней стороне, наоборот, — затененную от освещенной.

Контур падающей тени на плоскости  $H$  состоит из тени двух оснований конуса и образующей  $ks$ . Контур падающей тени от кромки ниши на ее внутреннюю поверхность построен способом обратных лучей и способом фронтальных плоскостей-посредников. Начальная точка тени — точка  $K$ . Конечная точка  $e'$  найдена построением падающей тени — дуги окружности радиуса  $R$  на торцовую плоскость ниши (см. § 44, рис. 195). Промежуточные точки  $1'_0$  и  $2'_0$  тени определены с помощью по-

строения «обратных» теней  $a's'_0$  и  $b's'_0$  двух образующих на плоскости основания конуса. Затем из точек  $1'$  и  $2'$  пересечения теней с кромкой ниши проводим проекции лучей до пересечения с образующими в искомых точках  $1'_0$  и  $2'_0$  (см. § 48, рис. 207). Соединим полученные точки плавной кривой. Эта кривая будет результатом пересечения конической поверхности с лучевым эллиптическим цилиндром, лучевые образующие которого проходят через кромку ниши (см. § 34, рис. 143).

2. Тень от квадратной плиты на коническую поверхность архитектурной дета-

Рис. 226



ли — «капельки» (рис. 226). Падающие и собственные тени могут быть построены без второй проекции способом обратных лучей. Вынос у оси детали от плоскости стены откладывают на фронтальной проекции от оси и проводят вертикальную прямую, которая может служить совмещенной профильной проекцией линии стены (см. рис. 223). Лучевая плоскость, проходящая через фронтальную кромку  $1'-2'$  плиты, пересечет коническую часть детали по эллипсу, который построен с помощью лучевой прямой  $1'-0'$  (см. § 50, рис. 212). Линия тени от кромки плиты  $1'_0-3'_0$  будет частью эллипса.

3. Тени полого конуса, обращенного вершиной вниз (рис. 227). Падающая тень от конуса на плоскости  $H$  и  $V$  построена с помощью построения действительной и мнимой тени верхнего основания и его центра  $C_v$  ( $C_H$ ). Соб-

ственную тень конуса и падающую тень на внутренней стороне поверхности от кромки можно построить способом, показанным на рис. 213. Однако при этом построения уйдут за пределы поля проекций. Применим способ замены плоскостей проекций, расположив новую фронтальную плоскость проекций  $V_1$  параллельно световым лучам. Построим истинный наклон луча —  $35^\circ$ . Световые лучи, проходящие через верхнюю кромку полого конуса, образуют лучевую эллиптический цилиндр, который пересечется с конической поверхностью по двум плоским кривым — окружности и эллипсу (см. § 34, рис. 143). Часть эллипса  $1'_1-a'_1-3'_1$  будет контуром падающей тени от кромки конуса на его внутренней поверхности.

Контур падающей тени на фасаде можно построить по плану. Однако проще и графически точнее перенести

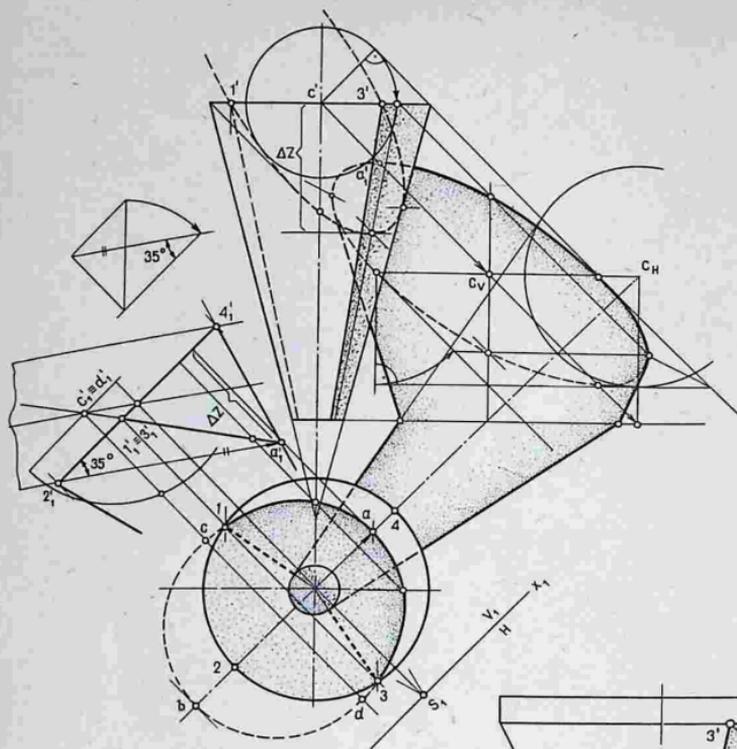
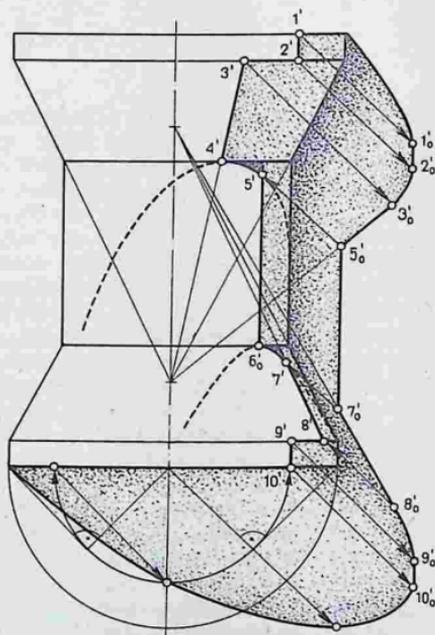


Рис. 227

Рис. 228

апликаты  $\Delta z$  точки  $A$  и других точек с дополнительной проекции  $V_1$ , откладывая их от проекции  $2'_1-4'_1$  основания конуса.

4. Тени конусов, сопряженных с цилиндром (рис. 228). В этом примере хорошо прослеживается органичная взаимосвязь контуров собственных и падающих теней. Точки исчезновения  $5'$  и  $7'$  падающих теней от конуса на цилиндр и от цилиндра на конус построены с помощью обратных лучей. Наклонная лучевая плоскость, проходящая через теневую образующую  $3'4'$  конуса, пересекает цилиндр по эллипсу. Другая лучевая плоскость, проходящая через образующую  $5'6'$  цилиндра, пересекает конус по гиперболе. Точка  $6'_0$  является ее вершиной.



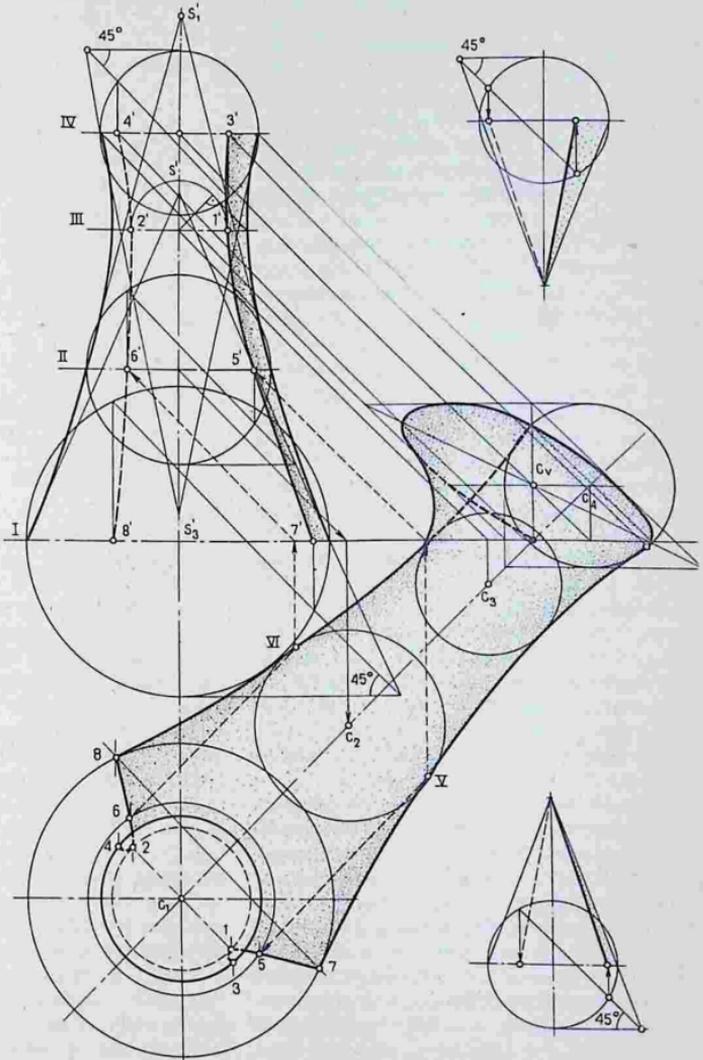
54. Тени поверхностей вращения с вертикальной осью

Собственные тени поверхностей вращения строят способом касательных поверхностей. При построении падающих теней находят применение различные способы. Чаще других приме-

няют способ обратных лучей и способ выноса.

Распространенным приемом построения характерных точек тени, падающей на поверхность вращения от другого предмета, является построение падающей тени на вспомогательную меридиональную фронтальную пло-

Рис. 229



кость с применением способа обратных лучей. В ряде рассматриваемых ниже примеров построения тени используется этот прием.

1. Тени однополостного гиперboloида вращения (рис. 229). Собственная тень поверхности построена способом касательных поверхностей. К четырем параллелям поверхности проведены касательные поверхности — цилиндр (III), два прямых конуса (I и II) и один конус, обращенный вершиной вниз (IV), с помощью которых построены восемь точек контура тени. Горизонтальная проекция собственной тени построена с помощью линий связи. Падающая тень от поверхности на плоскости  $H$  построена с помощью теней трех параллелей. Плавные кривые, огибающие тени параллелей и основание поверхности, представляют собой контур падающей тени. Собственная тень поверхности могла быть также построена способом обратных лучей. Из точек касания контура падающей тени к теням параллелей, например из точек IV и V, проводят обратные лучи до пересечения с соответствующими проекциями параллелей (штриховые линии).

Кривые линии построенных контуров собственных и падающих теней являются гиперболами.

2. Построение собственной тени параболоида вращения (рис. 230). Линией прикосновения лучевой цилиндрической поверхности к параболоиду вращения с вертикальной осью будет плоская кривая линия, лежащая в вертикальной плоскости. Контур собственной тени представляет собой параболу, конгруэнтную очерку гиперboloида вращения.

Для построения контура собственной тени повернем вокруг оси поверхности световой луч  $AO$  во фронтальное положение  $A_1O$  и найдем точку касания  $s'_1$  проекции луча к фронтальному очерку поверхности, а затем повернем световой луч вместе с полученной точкой  $S$  в исходное положение. На горизонтальной проекции контур собственной тени изобразится прямой линией, проходящей через точку  $s$  и перпендикулярной про-

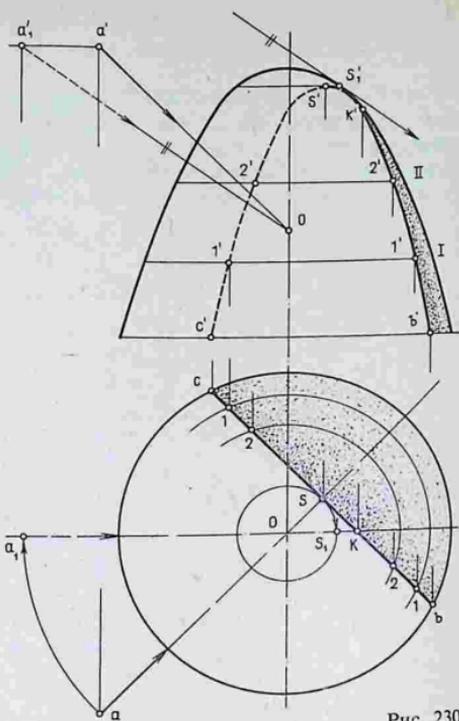


Рис. 230

екции луча  $ao$ . Точки пересечения  $\tilde{c}$  и  $b$  с основанием поверхности проецируем на фронтальную плоскость, а промежуточные точки  $1'$  и  $2'$  на фронтальной проекции строим с помощью вспомогательных параллелей I и II.

3. Построение падающей тени поверхности вращения типа «скоция» (рис. 231). Собственная тень поверхности построена способом касательных поверхностей (см. § 47, рис. 205). В упомянутом построении скоция имела так называемую предельную форму, когда падающая тень не возникла. В данном примере для нахождения контура падающей тени на поверхности вращения следует сначала построить падающую тень на вспомогательной меридиональной плоскости. Контур падающей тени на эту плоскость и на поверхность строят без второй проекции, план приведен для пояснений.

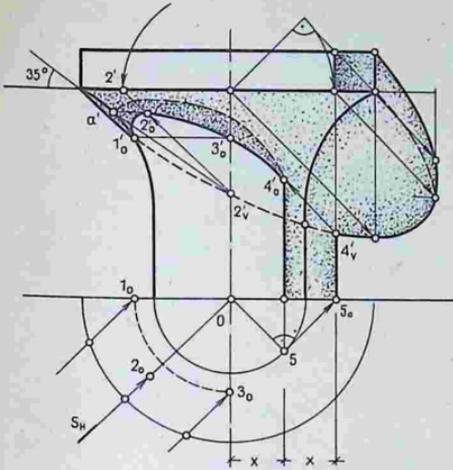


Рис. 231

Рис. 232

Падающая тень на плоскости стены от горизонтальной полуокружности цилиндра построена по пяти точкам (см. § 44, рис. 196, б). Контур падающей тени на стене от полуцилиндрической части поверхности вращения определяется откладыванием расстояния  $x$  от проекции оси до линии контура собственной тени (см. план). Точка тени  $1_0$  найдена в пересечении контура падающей тени на стене с левым очерком поверхности. Симметричная ей точка  $3_0$

определяется на оси с помощью горизонтальной линии связи. Горизонтально проецирующая плоскость  $S_H$ , проходящая через ось поверхности, представляет собой плоскость лучевой симметрии (см. план). Контур собственной и падающей теней, расположенные по обе стороны от этой плоскости, симметричны. Точка  $2'_0$  — высшая, построена с помощью конуса, обращенного вершиной вниз, и с углом наклона образующей  $35^\circ$ . Из точки  $2'_v$  пересечения образующей конуса с осью проводим обратный луч до пересечения с линией  $a' - 2'_0$  касания конуса к поверхности. Точка  $4'_0$  исчезновения тени найдена обратным лучом, проведенным из точки  $4'_v$  пересечения контуров падающих теней.

4. Построение тени от круглой плиты на колонну (рис. 232). Построение падающей тени на колонну можно выполнить аналогично предыдущему примеру. Однако падающая тень на колонну может быть построена без вспомогательной тени на меридиональной плоскости. Для построения начальной точки тени  $1_0$  следует из точки  $0'$  на проекции оси провести дугу окружности радиусом  $r$ , равным радиусу окружности плиты. В пересечении с прямой, проведенной из точки  $c'$  под углом  $45^\circ$ , получим точку  $b'$ , через которую проведем горизонталь, и определим на ней точки  $1_0$  и  $3_0$ . Точка тени  $2_0$  определена лучом, проведенным из точки  $2'$ , отмечающей невидимый контур собственной тени цилиндра плиты, на невидимый контур тени колонны. Точка  $4_0$  исчезновения тени получена засечкой дуги окружности радиусом, равным отрезку  $0'4'$ .

5. Построение тени от поверхности вращения (валика) на колонну (рис. 233). Построение собственной тени валика и падающей тени от валика на меридиональную плоскость было рассмотрено ранее (см. § 49, рис. 210). Точки  $a_0$ ,  $b_0$  и  $e_0$  контура падающей тени от валика на колонну построены с помощью падающей тени от валика на стену, а высшая точка  $2_0$  тени — построением вспомогательного конуса с наклоном образующей  $35^\circ$  (см. рис. 231).

6. Тени схематизированной капители (рис. 234). Все элементы теней этого архитектурного фрагмента были рассмотрены ранее (см. рис. 196, 210, 212). Собственная тень полувалика (эхина) построена способом касательных поверхностей. Падающие тени от квадратной плиты (абаки) на эхин и на колонну построены способом горизонтальных плоскостей-посредников и с помощью лучевого сечения колонны фронтально проецирующей плоскостью (см. рис. 212). Падающая тень от эхина на колонну построена с помощью тени на меридиональной плоскости (см. рис. 233). Точка тени  $a_0$  является точкой пересечения

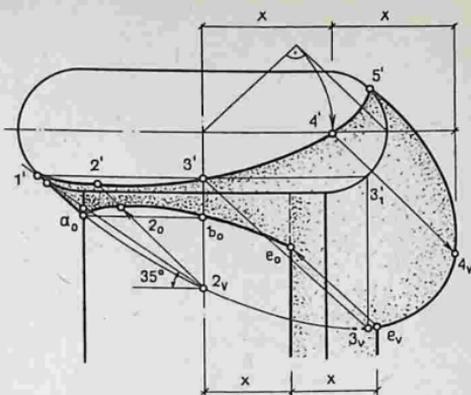


Рис. 233

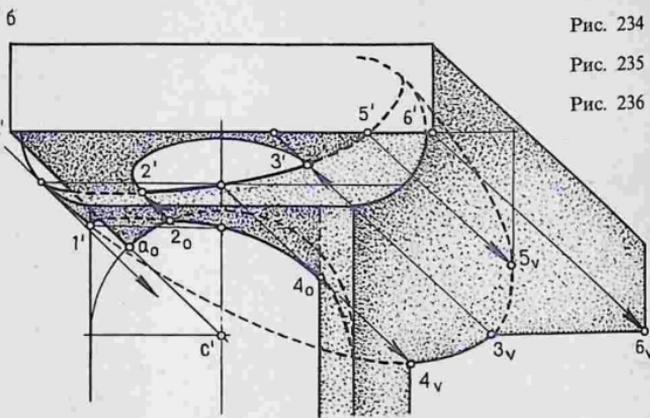
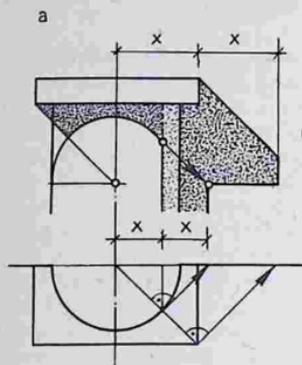


Рис. 234

Рис. 235

Рис. 236

контуров падающих теней от двух горизонтальных ребер квадратной плиты на ствол колонны.

Следует обратить внимание на четкую взаимосвязь контуров теней, а также на следующие закономерности:

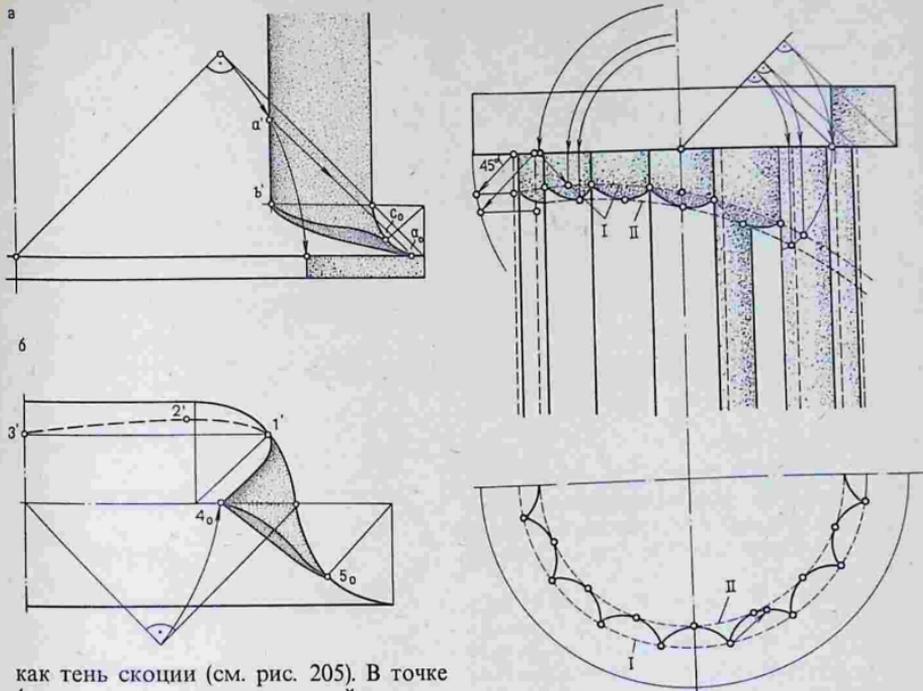
1) точка исчезновения тени и точка пересечения контуров падающих теней лежит на одном луче, это точки  $2'$  и  $2_0$ ,  $3'$  и  $3_v$ ,  $4_0$  и  $4_v$ ;

2) в точках  $2'$ ,  $3'$  и  $4_0$  исчезновения тени, где контур падающей тени пересекает контур собственной тени, линия контура падающей тени касательна к проекции луча.

7. Тени поверхностей вращения — архитектурных деталей с обратным профилем (рис. 235). Контур падающей тени

от теневой образующей ствола колонны на выкружку (рис. 235, а) начинается от точки  $b'$ . Конечную точку  $a_0$  тени можно определить, если найти точку  $a'$  пересечения дуги окружности, проведенной для построения собственной тени цилиндра основания с теневой образующей ствола колонны. Световой луч, проведенный из точки  $a'$  в пересечении с верхней кромкой основания, даст искомую точку тени  $a_0$ . Промежуточную точку можно построить, если провести вспомогательную параллель выкружки и продлатать аналогичные построения.

Собственная тень детали, имеющей профиль обратный гусек (рис. 235, б), в верхней ее части построена как тень валика (см. рис. 210), а в нижней части —



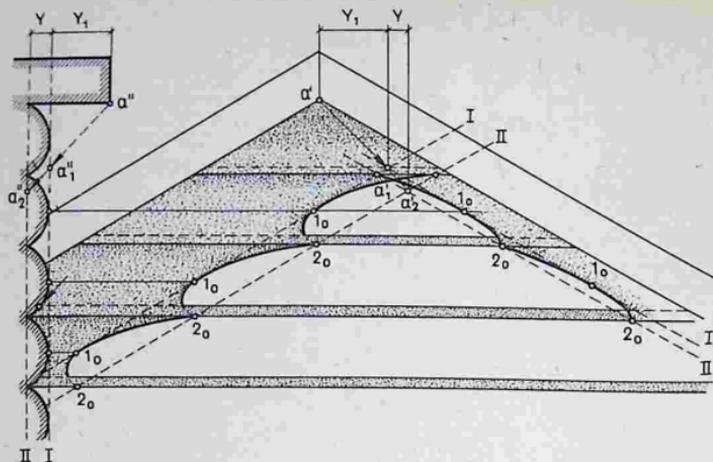
как тень скоции (см. рис. 205). В точке  $4_0$ , на границе между выпуклой и вогнутой частями поверхности, образуется резкий перелом контура тени. Подобный характер кривой контура тени кажется необычным, так как поверхность всюду гладкая. Однако если рассмотреть кривизну поверхности, мы убеждаемся, что светотень наглядно характеризует дифференциальные свойства поверхности (см. § 28). Выпуклая ее часть является поверхностью положительной кривизны, а вогнутая часть, напротив, — поверхностью отрицательной кривизны. Параллель, разделяющая эти части поверхности, содержит параболические точки и аналогична поверхности нулевой кривизны.

### 55. Тени сложных архитектурных фрагментов и поверхностей

При построении теней сложных по форме архитектурных фрагментов следует применить принцип аналогий:

в одном случае — *расчленить* сложную форму на простые элементы, тени которых можно построить по известным образцам, а в другом, напротив, — *обобщить* расчлененную сложную форму простой поверхностью и построить на ней тень, а затем перенести совпадающие точки на контур тени исходного объекта.

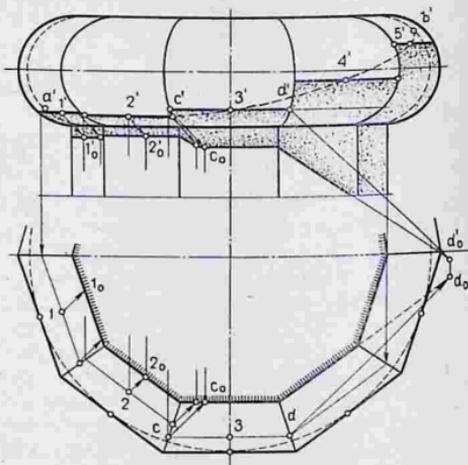
**Приемы обобщения сложной формы.**  
**Пример 1.** Тени от круглой плиты на каннелированную колонну (рис. 236). Опишем вокруг ствола колонны две вспомогательные цилиндрические поверхности-посредники, одна из них *I* касается ребер каннелюр, а другая *II* касается внутренних стенок каннелюр. Построим контуры падающих теней от нижней кромки круглой плиты на поверхности цилиндрических посредников по способу, приведенному на рис. 232. В пределах каждой каннелюры получим три точки тени. Контур падаю-



шей тени будет волнистой линией, проходящей через точки пересечения линии контура *I* с ребрами каннелюр и через точки касания контура *II* к серединам каннелюр.

**Пример 2.** Тень от фронтона кровли на бревенчатую стену (рис. 237). Для построения падающей тени от наклонных кромок фронтона проведем две вспомогательные плоскости-посредники [9]. Одна из них *I* коснется наружной поверхности бревен, а другая *II* пройдет через линии стыков бревен. Построим падающие тени  $a'_1$  и  $a'_2$  от точки  $a'$  пересечения кромок фронтона на обе вспомогательные плоскости и проведем прямые линии, параллельные кромкам фронтона – тени на вспомогательных плоскостях (штриховые линии *I* и *II*). Точки  $1_0$  тени совпадают с поверхностью бревен, а точки  $2_0$  тени совпадают с линиями стыков. Линии контуров падающей тени на каждой цилиндрической поверхности бревна являются частью эллипса.

**Пример 3.** Тени гранного столба и плиты (рис. 238). Впишем в поверхность плиты, состоящую из сопряженных горизонтальных полуцилиндров, вспомогательную поверхность вращения – тор и построим контур собственной тени этой поверхности способом касательных поверхностей (см. рис. 204). Отметим на построенном



контуре тени точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$  и  $5'$  посередине каждого отсека и проведем через эти точки горизонтальные теневые образующие. Для построения контура падающей тени спроецируем теневые образующие контура собственной тени на горизонтальную проекцию и построим точки перелома контура тени.

**Приемы расчленения сложной формы.** Построение тени арочного наличника полукруглого профиля (рис. 239). Расчленим поверхность архитектурного фрагмента нормальными сечениями в пяти местах. Построим

Рис. 239

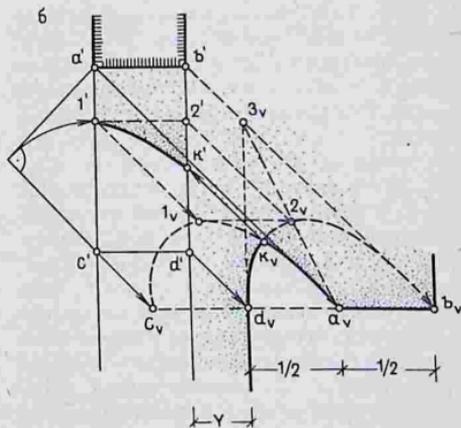
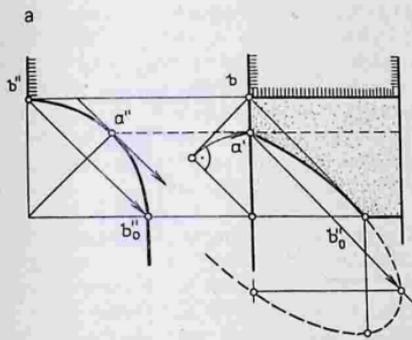
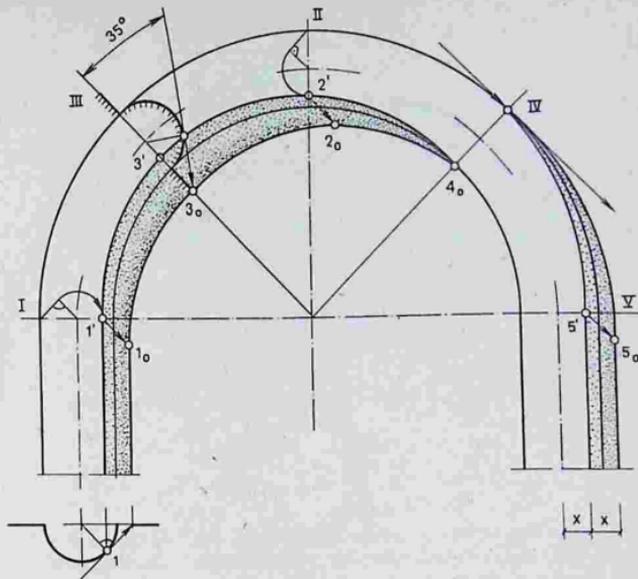


Рис. 240

в плоскости *I, II* и *V* сечений точки собственной тени, как на описанных полуцилиндрах. В лучевой плоскости наклонного сечения *III* касательный луч проведен под углом  $35^\circ$  к совмещенному с фасадом профилю. В плоскости наклонного сечения *IV* точки тени не будет, так как поверхность вспомогательного полуцилиндра будет освещена. С помощью этих же проекций лучей по-

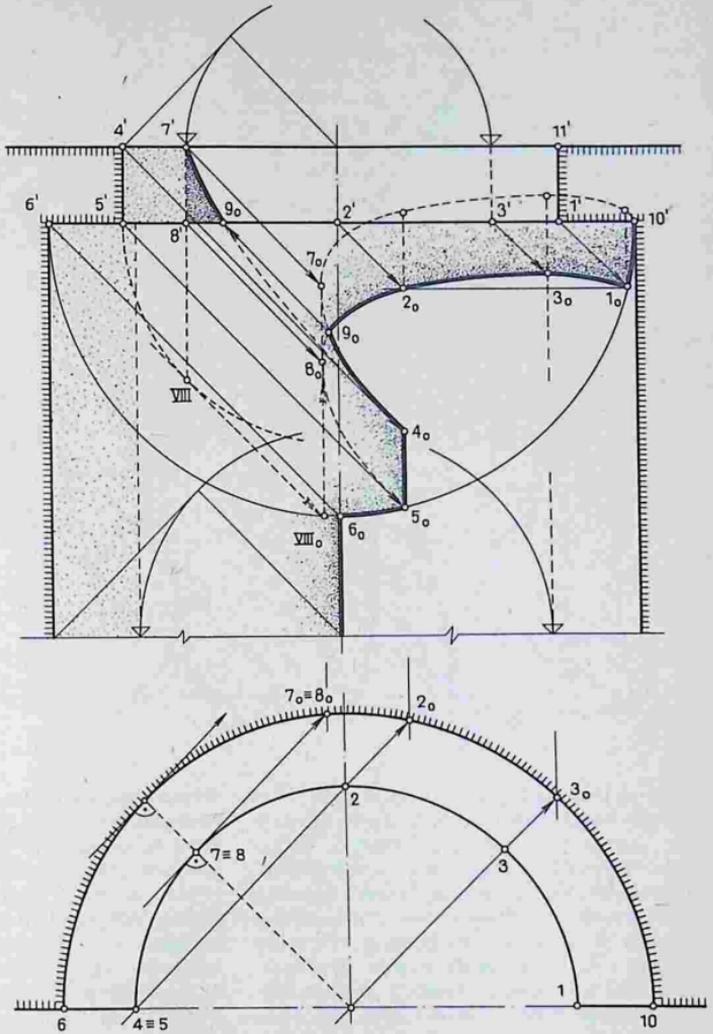
строены точки контура падающей тени.

**Тени в разрезе арок и сводов.** Для более наглядного выявления светотенью архитектурного решения внутренних пространств проектируемых зданий допускается на чертежах разрезов строить тени от условной линии контура разреза.

**Пример 1.** Тени в разрезе арочного проема (рис. 240). Тень в разре-



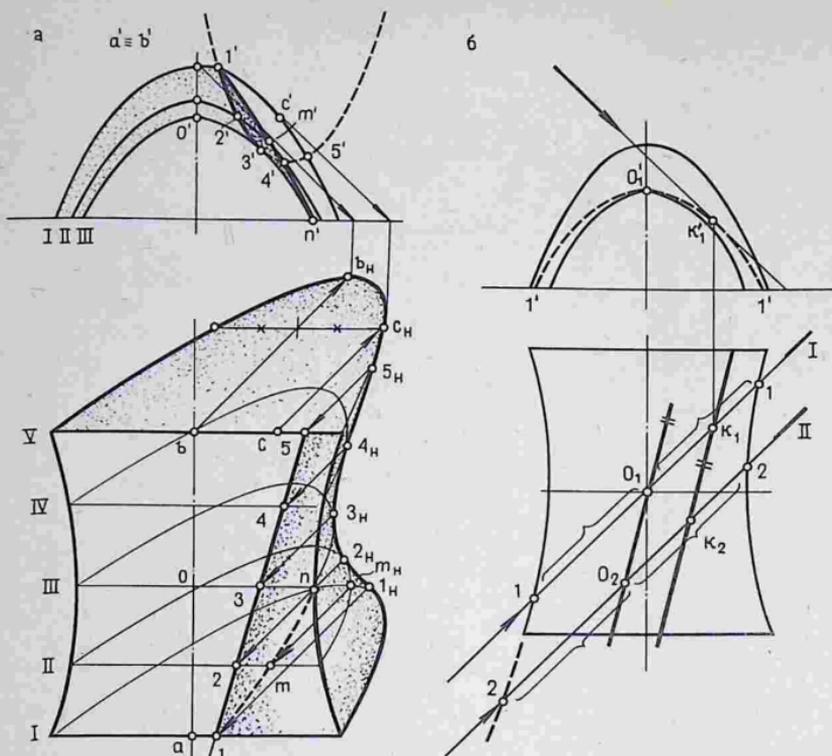
Рис. 242



с круглым отверстием (рис. 242). Тени могут быть построены без второй проекции. План приведен для пояснений. Построение тени следует начать с собственных теней полуцилиндра и цилиндрического отверстия.

Тень на внутренней поверхности помещения падает от дуги окружности  $4'-7'$  верхней кромки отверстия, а затем от дуги  $9_0-1'$  нижней кромки. К этим

участкам тени добавляются падающие тени от вертикальных ребер  $4'-5'$  и  $11'-1'$  и горизонтальных ребер  $6'-5'$  и  $1'-10'$  отверстия. Сначала следует построить вспомогательный контур тени — полуокружность  $6'-10'$ , как от кромки перекрытой ниши (см. § 52, рис. 220, б), и выделить в нем два участка  $10'-1_0$  и  $5_0-6_0$ . Построение точек тени  $2_0$ ,  $3_0$  и  $4_0$  понятно из чертежа. Для



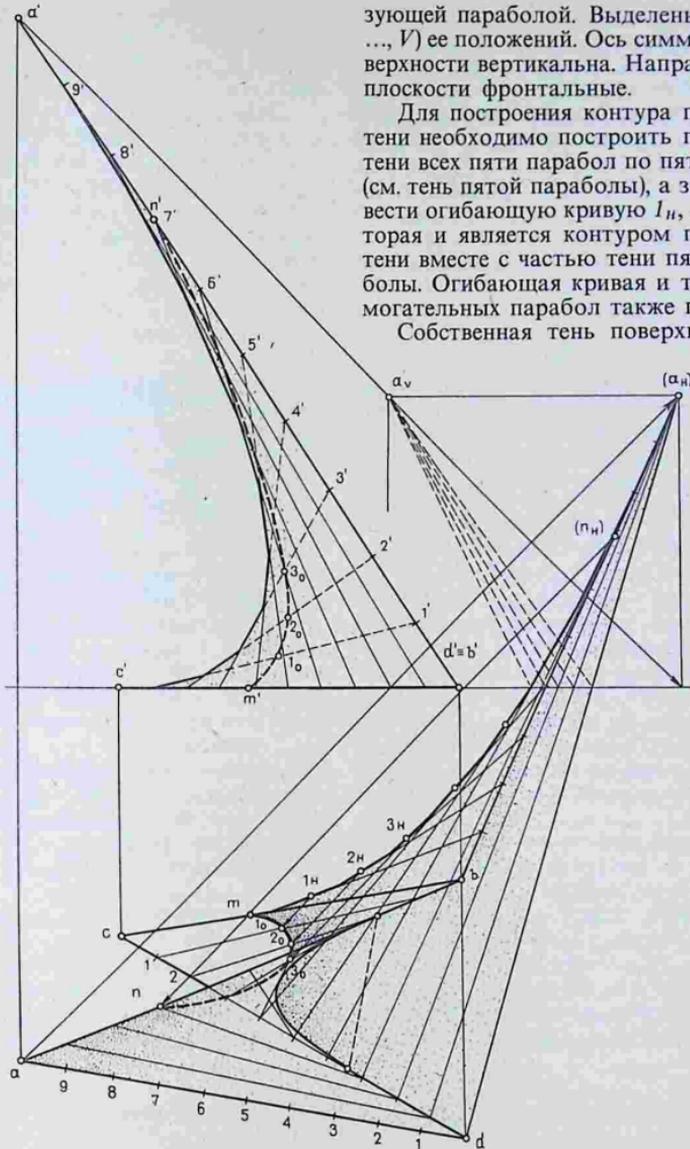
того чтобы закончить построение тени от нижней кромки отверстия, необходимо построить вспомогательную (мнимую) тень от теневой образующей  $7'-8'$  отверстия. Ее можно построить без второй проекции, совместив часть плана (штриховые линии) и проведя луч через точку  $VIII$  до пересечения с совмещенным планом большого полуцилиндра в точке  $VIII_0$ . Таким образом, тень от нижней кромки пройдет через точки  $1_0, 3_0, 2_0$  через мнимую тень точки  $\delta_0$  (где коснется вертикали) и далее к точке  $5_0$ . Падающую тень от верхней кромки  $4'-7'$  строят как в открытой нише (см. § 52, рис. 220, а). Оставшаяся ее часть перейдет на поверхность большого полуцилиндра между точками тени  $9_0$  и  $4_0$ . В точке  $4_0$  она должна коснуться проекции луча.

**Тени отсеков поверхности гиперболи-**

**ческого параболоида.** Построение теней гиперболического параболоида имеет свои особенности. Возможны два приема построения теней: 1) если поверхность задана *линейчатый каркасом* (прямолинейными образующими), построение теней упрощается; строят падающие тени прямых образующих и проводят огибающую кривую контура падающей тени; способом обратных лучей на поверхности определяют контур собственной тени; 2) если поверхность задана *нелинейчатый каркасом* (семейством парабол), построение теней несколько усложняется. Строят падающие тени парабол и проводят огибающую-контур падающей тени, затем обратными лучами определяют контур собственной тени.

**Пример 1.** Тени отсека гиперболического параболоида, за-

Рис. 244



зующей параболой. Выделены пять (I, ..., V) ее положений. Ось симметрии поверхности вертикальна. Направляющие плоскости фронтальные.

Для построения контура падающей тени необходимо построить падающие тени всех пяти парабол по пяти точкам (см. тень пятой параболы), а затем провести огибающую кривую  $1_n, \dots, 5_n$ , которая и является контуром падающей тени вместе с частью тени пятой параболы. Огибающая кривая и тени вспомогательных парабол также параболы.

Собственная тень поверхности по-

данного семейством парабол (рис. 243, а).<sup>1</sup> Отсек поверхности задан направляющей параболой  $AOB$  и обра-

<sup>1</sup> Более подробное изложение этого вопроса содержится в работе [18].

строена с помощью обратных лучей, проведенных из точек касания огибающей параболы к теням вспомогательных парабол до пересечения с соответствующими горизонтальными

проекциями парабол  $I, \dots, V$  поверхности. Горизонтальная проекция  $I, \dots, 5$  контура собственной тени представляет собой прямую линию, а сама линия тени является параболой, расположенной в вертикальной плоскости, ее фронтальная проекция – парабола  $I', \dots, 5'$ . Эта особенность объясняется следующим образом. Лучевые горизонтально проецирующие плоскости ( $I, II, \dots$ ), параллельные вертикальной оси (рис. 243, б), пересекают гиперболический параболоид по конгруэнтным параболом ( $1-O_1-1; 2-O_2-2, \dots$ ). Это свойство и одинаковая направленность лучей света приводят к тому, что все точки ( $K_1, K_2, \dots$ ) касания световых лучей конгруэнтных парабол находятся на одинаковом расстоянии от их вершин ( $O_1, O_2, \dots$ ). Таким образом, все точки касания, расположенные на огибающей параболы, на горизонтальной проекции изобразятся в виде прямой  $K_1-K_2$ , параллельной линии вершин ( $O_1, O_2, \dots$ ) конгруэнтных парабол. Аналогичный пример был приведен на рис. 230.

Следовательно, если у гиперболического параболоида направляющие плоскости или ось симметрии поверхности вертикальны, то контуром собственной тени является парабола, расположенная в вертикальной плоскости, а ее горизонтальной проекцией станет прямая линия.

Передняя кромка поверхности бросает тень на внутреннюю сторону. Начальную точку контура падающей тени представляет точка  $I$ , а конечную – точка  $n$  пересечения падающей тени кромки (параболы  $I$ ) с горизонтальным очерком поверхности. Промежуточная точка  $m$  на горизонтальной проекции параболы  $II$  построена с помощью обратно-

го луча, проведенного из точки пересечения  $m_n$  падающих теней парабол  $I$  и  $II$ . Фронтальная проекция тени – линия  $I'm'n'$ .

**Пример 2.** Тени отсека гиперболического параболоида, заданного прямолинейными образующими (рис. 244). Отсек поверхности (неплоский четырехугольник) задан семейством прямолинейных образующих. Две контурные прямые  $CB$  и  $AD$ , являющиеся образующими разных семейств, лежат на плоскости  $H$ .

Направляющие прямые –  $AB$  и  $CD$ . Разобьем их на десять равных частей и проведем образующие поверхности, соединив соответствующие точки направляющих, выделив только видимые их участки. Для построения падающей тени на плоскости  $H$  достаточно построить тень точки  $A$ , соединив ее прямыми с точками  $B$  и  $D$ , а затем построить тени промежуточных образующих. Проведем кривую, огибающую падающие тени контурных отрезков образующих – параболу. Точки тени  $m$  и ( $n_n$ ) являются точками касания параболы падающей тени к прямым  $b(a_n)$  и  $cb$ . Обратные лучи, проведенные из этих точек и из промежуточных точек  $1_n, 2_n, 3_n, \dots$  касания параболы контура тени к отрезкам теней образующих, при пересечении с горизонтальными проекциями соответствующих образующих поверхности определяют горизонтальную проекцию контура собственной тени  $m, 1_0, 2_0, 3_0, \dots, n$ .

С помощью линий связи строим фронтальную проекцию контура собственной тени, она будет невидимой. Контур собственной тени поверхности, так же как и криволинейный участок падающей тени, является параболой.

## Глава 13. Построение линий равной освещенности

Изображение светотени при графическом оформлении архитектурных чертежей состоит из двух этапов.

Первый этап – построение контуров собственных и падающих теней, основанное на геометрических приемах определения линии касания лучевой по-

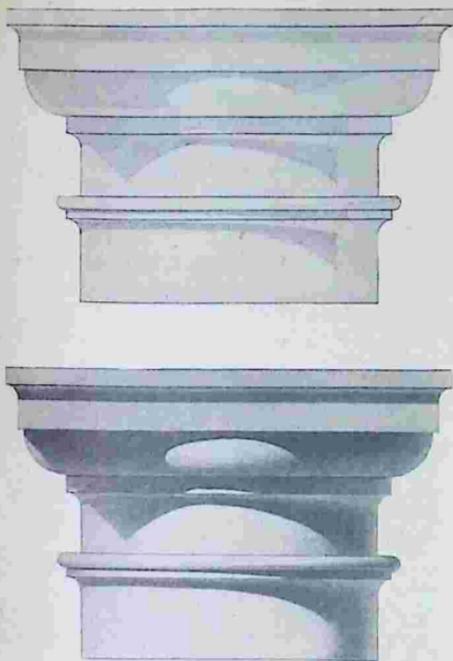


Рис. 245

верхности к данному объекту и построения линии пересечения лучевой поверхности с горизонтальной плоскостью или другими предметами. Построение контуров теней представляет собой точную геометрическую основу дальнейшей светотеневой моделировки формы объекта на чертеже.

Второй этап — *передача на изображении градаций освещенности объекта* как в освещенных его частях, так и в зоне собственной и падающей тени. Эта часть графической передачи светотени на архитектурном чертеже основана на физических закономерностях освещенности и на эффектах воздушной перспективы.

На рис. 245 приведены два изображения архитектурной детали. Первое выполнено в линейной графике с построением теней, второе представлено в завершенном графическом оформле-

нии с передачей градаций светотени отмывкой. Эти изображения соответствуют упомянутым выше этапам изображений светотени.

Линейная графика архитектурного чертежа и геометрические приемы построения контуров теней обладают позиционной и метрической достоверностью. В дальнейшей светотеневой моделировке формы изображаемого объекта также должны использоваться точные приемы передачи на чертеже физических свойств освещенности объекта. Это достигается построением на проекционном изображении объекта так называемых *линий равной освещенности*, которые составляют основу правильного тонового изображения объемно-пространственной структуры объекта в отмывке тушью или акварелью.

#### 56. Теоретические основы построения линий равной освещенности

**Общие сведения об освещенности.** Степень освещенности поверхности предмета зависит от интенсивности света, величины угла, под которым лучи света падают на поверхность, от фактуры поверхности, ее окраски и других факторов. При очень интенсивном, ярком освещении на поверхности объекта возникает резкое разграничение света и тени, а при слабом освещении, в зоне собственной тени становятся незаметными различия оттенков. И те и другие условия освещения недостаточно выявляют форму объекта. Наиболее выгодно *среднеяркое освещение*. В естественных условиях предметы освещаются комбинированным светом, который состоит из прямого света, отраженного и рассеянного.

*Отраженным светом* называют свет, который отражается от смежных поверхностей объекта и других окружающих его предметов, освещенных прямым светом. Отраженный свет вызывает появление *рефлексов*, более светлых участков, которые способствуют выявлению формы объекта в тени. Поэтому *падающие тени всегда темнее собственных*.

Рассеянный свет возникает в результате многократного отражения света от окружающих предметов, имеющих различную фактуру поверхности, а также под действием диффузного света небосвода. Под влиянием рассеянного света смягчаются резкие разграничения света и тени на поверхности объекта, что также способствует выявлению пластики и рельефа поверхности как в освещенных, так и в теневых частях.

В самом общем виде градиции освещенности можно выразить следующими общеупотребительными терминами:

- 1) *свет* — самое освещенное место поверхности, где свет падает под прямым углом; на блестящей, полированной поверхности в зоне максимальной освещенности образуется *блик*;
- 2) *полутон* — при освещении лучами, падающими под острым углом;
- 3) *полутень*;
- 4) *собственная тень*, ее начальная, пограничная с освещенной частью зона является самым темным местом на поверхности;
- 5) *рефлекс*;
- 6) *падающая тень*, как и собственная тень, неоднородна, она сильнее у начала тени и слабее к ее концу, у линии контура тени.

Влияние воздушной перспективы сказывается на восприятии светотеневого контраста на поверхности объекта, который погашается вместе с увеличением расстояний до отдельных удаленных частей объекта. При этом освещенность поверхности объекта становится слабее, а затененные ее части высветляются (см. прил. 3). Освещенность зависит также от строения поверхности и от ее цвета. Светлая, почти белая матовая поверхность обеспечивает наилучший контраст освещенных и теневых участков поверхности. Необходимо учесть также адаптацию зрения к яркостям и чрезмерному контрасту света и тени.

Из сказанного выше следует, что градиции освещенности объекта зависят от многих, иногда противоречивых факторов, сложное взаимодействие которых учесть весьма трудно. Поэтому

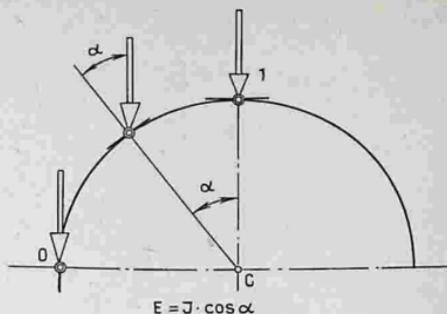


Рис. 246

следует отдать предпочтение *усредненному, оптимальным условиям освещенности*, дополненным результатами натуральных наблюдений, которые лучше отвечают поставленной цели — дать выразительное и достоверное изображение объемно-пространственной структуры архитектурного объекта.

**Физические основы освещенности.** Интенсивность освещения поверхности объекта зависит от угла падения лучей света, она уменьшается с уменьшением этого угла.

При параллельных лучах света освещенность в данной точке поверхности прямо пропорциональна косинусу угла наклона луча к нормали поверхности в данной точке (рис. 246):  $E = J \cos \alpha$ , где  $\alpha = 0$  — освещенность максимальная; при  $\alpha = 90^\circ$  — минимальная.

При распределении светотени на регулярных поверхностях и геометрических телах можно установить линии, где лучи света падают под одинаковым углом; такие линии называются *линиями равной освещенности* или *изофотами*<sup>1</sup>.

Изофоты проходят через точки поверхности, нормали которых расположены под одинаковыми углами к направлению световых лучей. Они разделяют тональные зоны на поверхности и представляют собой основу правильного тонального изображения формы объекта на чертеже.

**Построение шарового масштаба освещенности**

<sup>1</sup> Изофоты (isos — греч. — равный, одинаковый и photos — свет) — линии равной освещенности.

ценности (масштабной сферы). Для построения линий изофот на различных поверхностях вращения и их сочетаниях следует построить изофоты на поверхности постоянной кривизны, которая могла бы служить вспомогательной поверхностью-посредником для нанесения освещенности на любых поверхностях вращения. Такой поверхностью является *сфера*.

На рис. 247, а изображена фронтальная проекция сферы. Способом замены плоскости проекций построена дополнительная проекция, параллельная световым лучам. На новой проекции сферы наносят проекции параллелей, расположенных в плоскостях, перпендикулярных направлению световых лучей ( $\alpha \approx 35^\circ$ ). Четыре проекции параллелей проведены через концы диаметров на главном меридиане проекции сферы. В верхней относительно экватора части сферы проведены через равные интервалы еще две проекции параллелей. В нижней относительно экватора части проведена одна проекция параллели. Штриховыми линиями показаны две промежуточные проекции параллелей, проведенные через средние точки дуг окружности.

Изофоты, построенные на дополнительной проекции сферы, следовало бы обозначить в относительных соотношениях коэффициентами кажущейся освещенности от 1 до 0 на экваторе. Эта шкала представляет собой следующий ряд чисел, взятых с округлением значений: 1—0,9—0,8—0,7—0,6—0,4—0,2—0 (на экваторе). Однако для целей графического оформления чертежей в виде отмывки удобнее заменить коэффициенты освещенности обратными величинами — *коэффициентами «оттенения»* (по Н. А. Рынину),<sup>1</sup> что может соответствовать числу слоев раствора туши при словесной отмывке чертежа. При данной схеме распределения изофот на масштабной сфере коэффициентами оттенения в зоне прямого света будет ряд чисел от 0 до 5 (по 10-балльной шкале).

#### Построение линий изофот в зоне соб-

ственной и падающей тени. Необходимо установить коэффициенты оттенения в зоне собственной тени и рефлекса, а также в зоне падающей тени от данного объекта и падающей тени на самом объекте. Эти данные можно установить только на основе усреднения экспериментальных и натуральных наблюдений [3]. Они сводятся к следующим общим положениям:

1) направление отраженных лучей условно принимается обратным прямому свету. Обратные лучи в затененной части дают *обратные тени*, направленные в противоположном относительно прямого света направлении снизу вверх и справа налево;

2) в зоне рефлекса освещенность условно принимается не более половины максимальной освещенности прямым светом;

3) наиболее освещенные участки поверхности объекта в условиях падающей тени становятся наиболее темными. Распределение градаций светотени на кривой поверхности, находящейся в падающей тени, будет обратным распределению светотени при условии освещения этой поверхности прямым светом (рис. 248);

4) на вогнутой поверхности распределение градаций светотени будет обратным распределению светотени на выпуклых поверхностях;

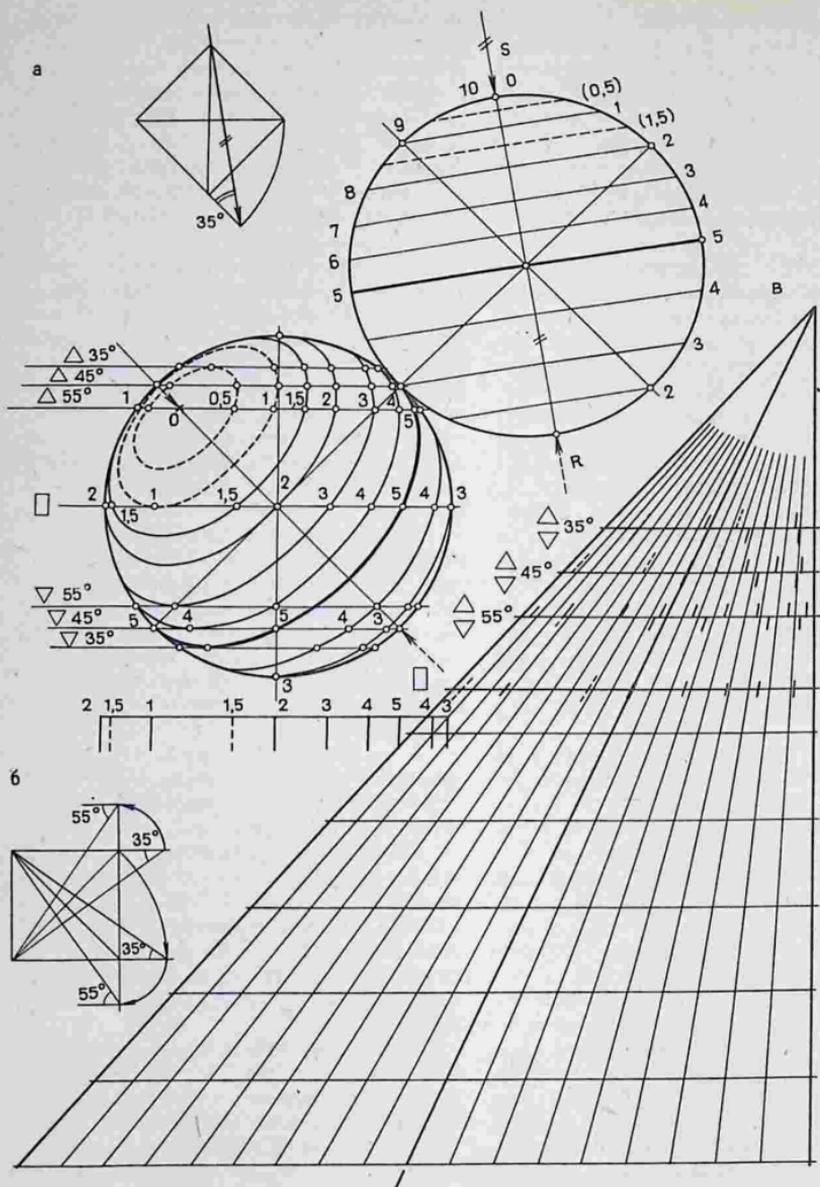
5) в зоне падающей тени от данного объекта на фронтальную плоскость освещенность наиболее затененного ее участка условно принимают равной освещенности на границе контура собственной тени объекта, а в зоне глубоких теней — в полтора раза меньше этого уровня;

6) видимая освещенность поверхности и сила теней на ней находятся в обратной зависимости от расстояния между зрителем и объектом;

7) блик на блестящей поверхности изменяет свое положение и не совпадает с самыми освещенными частями поверхности, так как он образуется лучом, отраженным в сторону глаз наблюдателя.

Коэффициенты оттенения в зоне

<sup>1</sup> Рынин Н. А. Начертательная геометрия. — М.—Л.: Стройиздат, 1939. — С. 260—265.



собственной и падающей тени, а также падающей тени на данную поверхность, установленные на основе перечисленных выше общих положений, нано-

сену на дополнительной проекции сферы слева — от 5 до 10 (см. рис. 247, а). Коэффициенты оттенения в зоне падающей тени определяются просто:

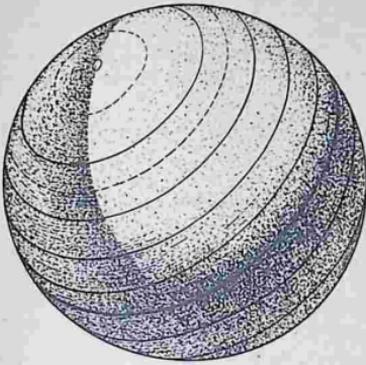
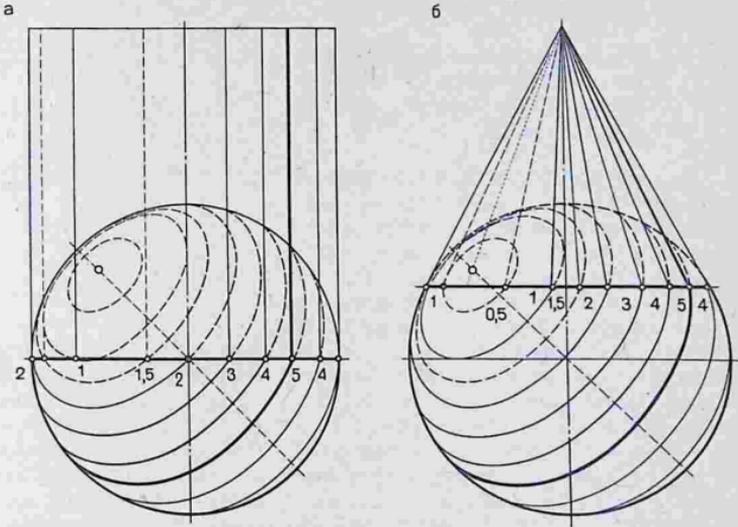


Рис. 248

Рис. 249



сумма коэффициентов оттенения освещенной части поверхности и падающей на нее тени должна быть равна 10. Эти положения не могут считаться абсолютными, так как условия освещения архитектурного объекта в конкретной обстановке чрезвычайно разнообразны. Они могут корректироваться, при этом относительная значимость отдельных положений может изменяться.

Линии изофот, построенные на дополнительной проекции, спроецированы затем на фронтальную проекцию масштабной сферы. Они изображены

углами к соответствующим участкам этих поверхностей.

Для нанесения линий изофот на поверхностях вращения применяют способ касательных поверхностей — конусов и цилиндров, которые и служат вспомогательными поверхностями-посредниками. Это цилиндр (см. рис. 247, а), конусы, обращенные вершиной вверх, с углами наклона образующих 55, 45, 35°, и конусы, обращенные вершиной вниз и с углами наклона образующих 45 и 35°. Эти углы строят с помощью дополнительной диаграммы (рис. 247, б).

Могут быть применены также вспомогательные конусы с произвольным наклоном образующих.

Линии изофот, разделяющие tonальные зоны поверхности, строят по точкам, которые наносят сначала на линиях касания поверхностей-посредников к масштабной сфере (рис. 249), а затем переносят с помощью *графического углового масштаба* (см. рис. 247, в) на соответствующие линии касания поверхности вращения.

Если после нанесения достаточного числа точек соединить плавными кривыми точки с равнозначными коэффициентами, получим линии изофот данной поверхности вращения.

### 57. Построение линий изофот на геометрических поверхностях, архитектурных деталях и фрагментах

Рассмотрим несколько примеров построения линий равной освещенности (равного тона) на поверхностях вращения, на гиперболическом параболоиде и на многогранных поверхностях. На рис. 247 и 249 был показан прием нанесения линий изофот на поверхности прямого кругового цилиндра с вертикальной осью, который часто применяется в сочетании с другими поверхностями вращения в архитектурных деталях. В зоне прямого света промежуточные (штриховые) линии изофот оказались необходимыми.

**Пример 1.** Построение линий изофот на архитектурных обломах (рис. 250). Приведенные элементарные профили обломов составлены из частей кругового цилиндра с горизонтальной осью. Вписывая в них масштабную сферу и снимая точки изофот с вертикального ее диаметра (они аналогичны точкам горизонтального диаметра), получим положение прямолинейных изофот на профилях обломов.

В зоне падающей тени берем разность коэффициентов оттенения.

**Пример 2.** Распределение линий изофот на выпуклой и вогнутой поверхностях враще-

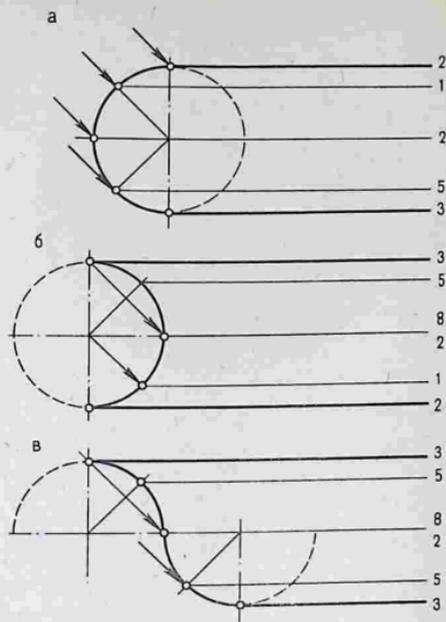


Рис. 250

ния (рис. 251). На поверхностях тора и скоши нанесены изофоты с применением упомянутых ранее шести вспомогательных поверхностей-посредников. Проставлены коэффициенты оттенения и в зоне падающей тени на меридиональной плоскости, на стене. Перекрестием отмечены точки максимального света. Они могут быть определены и без масштабной сферы. Необходимо отметить, что *контур собственной тени совпадает с линиями изофот, а контур падающей тени не совпадает с ними.*

**Пример 3.** Построение изофот на поверхности гиперболического параболоида (рис. 252). Рассмотрим прием перенесения линий изофот с масштабной сферы I на поверхность гиперболического параболоида III. Промежуточной поверхностью-посредником будет *соприкасающийся параболоид вращения II*. Фронтальный очерк параболоида вращения конгруэнтен

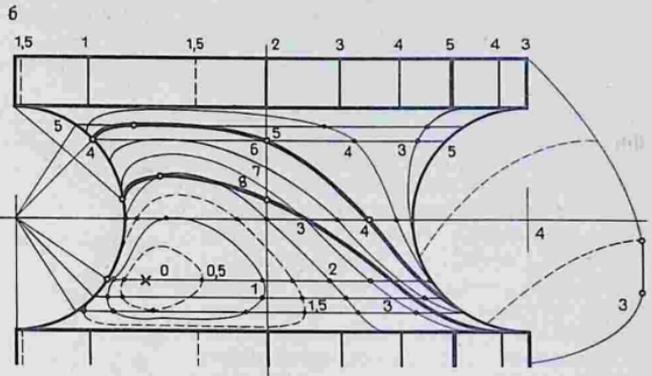
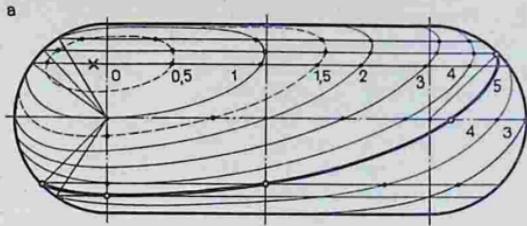
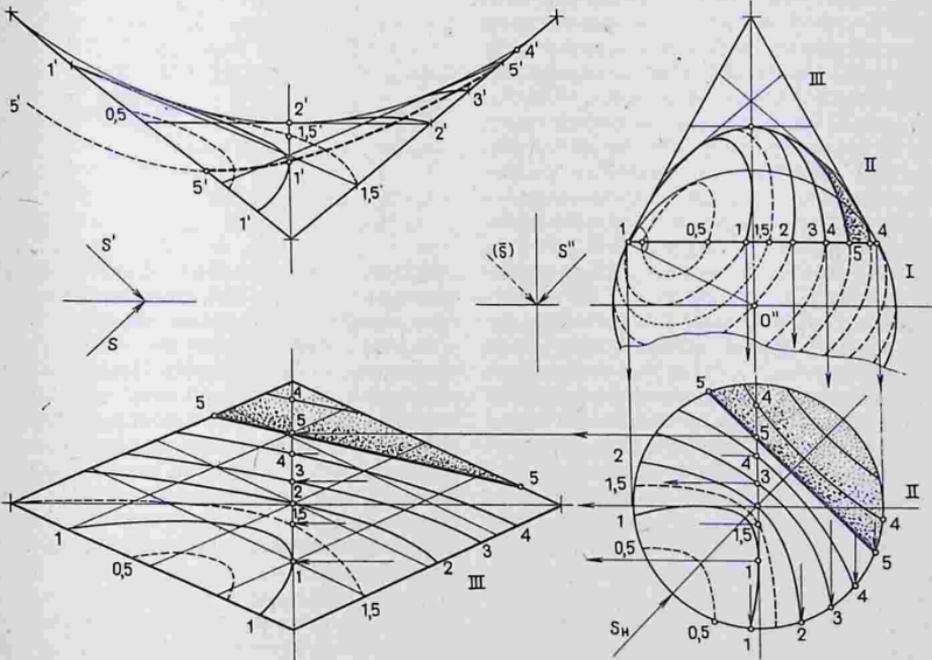


Рис. 251

Рис. 252



профильному очерку гиперболического параболоида — параболе.

Вписываем в окружность основания параболоида вращения масштабную сферу, построив ее центр  $o''$  на нормали к очерку параболоида. Переносим точки изофот с масштабной сферы на линию касания параболоида. Проецируем полученные точки на горизонтальную проекцию параболоида-посредника и строим изофоты, симметричные относительно лучевой плоскости симметрии  $S$ . Линии изофот на профильной и горизонтальной проекции параболоида вращения построены в зеркальном отображении относительно вертикальной оси с тем, чтобы на исходных проекциях — плане и фасаде гиперболического параболоида — отобразить заданное направление освещения. Точки линий изофот переносят затем на горизонтальную проекцию гиперболического параболоида, на линию касания параболоида вращения и на фронтальную проекцию. На основных проекциях гиперболического параболоида показан контур собственной тени (5-5), который представляет собой вертикально расположенную параболу (штриховая линия 5'-5' на фасаде). На плане она проецируется в прямую 5-5 (см. § 55, рис. 243).

Аналогичным образом определяют и другие ряды точек изофот с помощью параболоида вращения, соприкасающегося с конгруэнтными параболоидами гиперболического параболоида.

**Пример 4.** Определение тональных зон на плоскогранной архитектурной детали — триглице (рис. 253). На плоских гранях архитектурных деталей определить коэффициенты оттенения несложно. Вертикальные грани триглица касаются масштабной сферы по экватору. В точках касания масштабной сферы определяют коэффициенты оттенения тональных зон — грани детали. В зоне падающей тени они определяются как разность от десяти.

**Пример 5.** Градации светотени на архитектурном фрагменте (рис. 254). Градации тональных зон

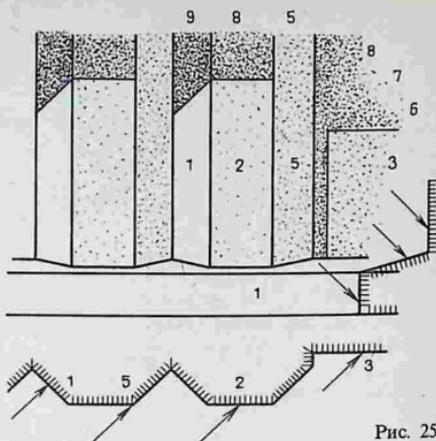


Рис. 253

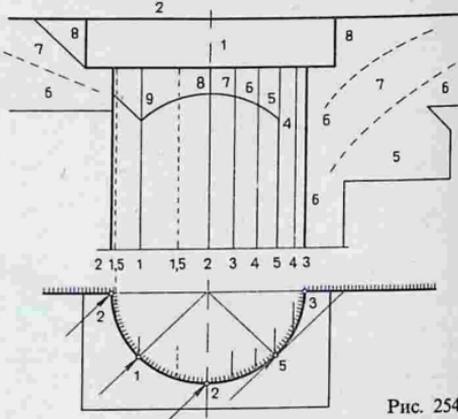


Рис. 254

определены аналогично предыдущему примеру. В глубокой падающей тени под архитравом справа затененность в полтора раза сильнее (6), чем в зоне рефлекса полуколонны (4). На противоположной стороне показана обратная тень (8) от фронтально проецирующего ребра плиты. Она построена с помощью проекции луча, обратной по направлению. Следует также отразить глубинное построение фрагмента, степень освещенности ближних и дальних планов — фронтальной плоскости плиты (1), фронтальной грани полуколонны и архитрава (2), а также плоскости стены (3).

## Часть третья. АКСОНОМЕТРИЯ

Широкое применение в архитектурной практике чертежей, выполняемых в ортогональных проекциях, объясняется их удобоизмеримостью и простотой построения проекций объекта. Объект относительно плоскостей проекций располагают таким образом, чтобы не искажались основные его параметры. В этом случае применяют два или три изображения, на каждом из которых отсутствует третье измерение. Однако такой чертеж недостаточно нагляден.

Если чертеж не дает достаточно полного представления о форме и структуре объекта, выполняют его

*аксонометрическое изображение*, проецируя объект на одну плоскость проекций и располагая его так, чтобы различились все основные стороны объекта. К недостаткам аксонометрических проекций, по сравнению с ортогональными, относятся ограниченная измеримость и сложность построения.

В архитектурном проектировании аксонометрические проекции находят применение при изображении сложных объемно-пространственных структур и конструктивных схем, отдельных зданий со сложной конфигурацией плана и планировочных композиций.

### Глава 14. Общие сведения

#### 58. Сущность метода и основные понятия

*Аксонометрическими проекциями называют наглядные изображения объекта, получаемые параллельным проецированием его на одну плоскость проекций вместе с осями прямоугольных координат, к которым этот объект отнесен.*

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат и точку  $A$ , положение которой относительно осей координат определено (рис. 255). Для получения аксонометрической (параллельной) проекции точки  $A$  выберем направление проецирования  $S$  и картинную плоскость  $K$  (плоскость проекций). Проведем через точку  $A$  проецирующий луч и спроецируем точку  $A$  вместе с осями прямоугольных координат. Полученное изображение на плоскости  $K$  будет *аксонометрической проекцией* точки  $A$ . Однако для того, чтобы построить аксонометрическую проекцию точки  $A$  на плоскость  $K$  необходимо спроецировать не только точку  $A$ , но и одну из ее ортогональных проекций (обычно горизон-

тальную проекцию  $a$ ). Аксонометрическую проекцию  $a'$  горизонтальной проекции точки  $A$  называют *вторичной проекцией*.

Отложим на осях пространственной системы координат единицы измерения  $e_x, e_y, e_z$  и спроецируем их на плоскость  $K$ . В зависимости от положения объекта и осей координат относительно плоскости проекций, а также в зависимости от направления проецирования единицы измерения проецируются в общем случае с искажением. Отношение длины аксонометрической единицы к ее истинной длине называется *показателем искажения* для данной оси. Показатели искажения по аксонометрическим осям равны: по оси  $x' = e_x'/e_x = p$ ; по оси  $y' = e_y'/e_y = q$ ; по оси  $z' = e_z'/e_z = r$ .

Аксонометрические проекции называются *изометрическими*, если показатели искажения по всем осям равны ( $p = q = r$ ); *диметрическими*, если показатели равны по двум осям ( $p = r$ ), и *триметрическими*, если все показатели искажения различны.

В зависимости от направления проецирования аксонометрическая проек-

ция называется *прямоугольной*, если направление проецирования  $S$  перпендикулярно плоскости проекций, и *косугольной*, если направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекций.

#### Основная теорема аксонометрии.

При изменении взаимного положения осей координат и направления проецирования относительно плоскости изменяется положение аксонометрических осей и показателей искажения по ним. Этому вопросу посвящена основная теорема аксонометрии (теорема Польке): *три произвольно выбранных отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, могут быть приняты за параллельную проекцию трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков, выходящих из некоторой точки пространства.*

Таким образом, из основной теоремы аксонометрии следует, что аксонометрические оси и показатели искажения по ним могут быть выбраны произвольно. Если задать на плоскости проекций  $K$  (см. рис. 255) три проходящие через одну точку отрезка произвольной длины ( $e'_x$ ,  $e'_y$  и  $e'_z$ ), можно утверждать, что они являются аксонометрической проекцией трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков пространства.

#### 59. Стандартные аксонометрические проекции

При построении аксонометрических изображений в соответствии с показателями искажения приходится вычислять размеры объекта. Процесс построения упрощается, если выполнять построения в так называемых *приведенных показателях искажения*. При этом наибольший показатель искажения приводят к единице, а другие соответственно увеличивают.

Для выполнения аксонометрических изображений ГОСТ 2.317-69 рекомендует применять пять видов аксонометрических проекций.

**Прямоугольные аксонометрические проекции.** Изображения в прямоуголь-

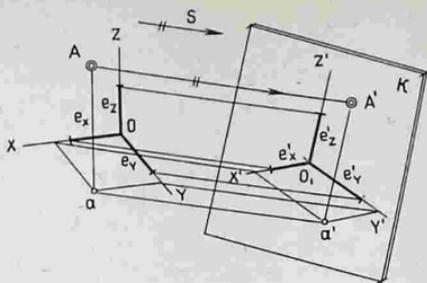


Рис. 255

ной аксонометрии обладают хорошей наглядностью. Проекция отрезков, взятых по осям, меньше самих отрезков, а показатели искажения всегда меньше единицы.

Прямоугольная изометрия (рис. 256). Этот вид аксонометрической проекции широко распространен благодаря хорошей наглядности изображений и простоте построений. В прямоугольной изометрии координатные оси расположены под равными углами к плоскости проекций, поэтому и аксонометрические оси также расположены под равными углами ( $120^\circ$ ) одна к другой, ось  $z$  вертикальна. Показатели искажения по всем осям равны 0,82. В *приведенной* изометрии они условно приняты равными единице. В этом случае при построении аксонометрических изображений размеры объектов, параллельные направлениям аксонометрических осей, откладываются без сокращений — в истинную величину. При этом масштаб аксонометрического изображения увеличивается.

Окружности, расположенные в координатной плоскости или в плоскости, параллельной ей, проецируются эллипсами, большие оси которых перпендикулярны соответствующим аксонометрическим осям, а малые оси совпадают с этими осями. Для построения аксонометрической проекции окружности — эллипса — сначала следует построить параллелограмм — аксонометрическую проекцию описанного ква-

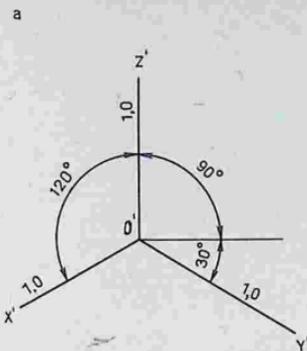


Рис. 256

Рис. 257

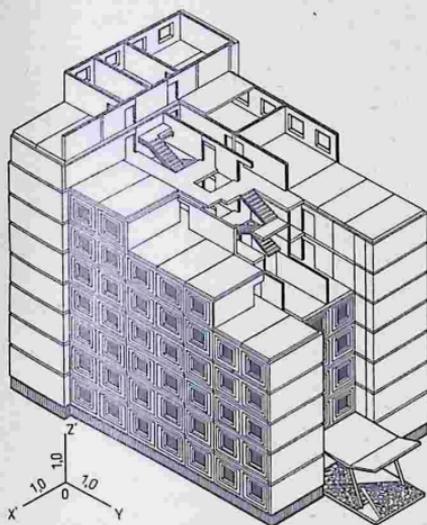
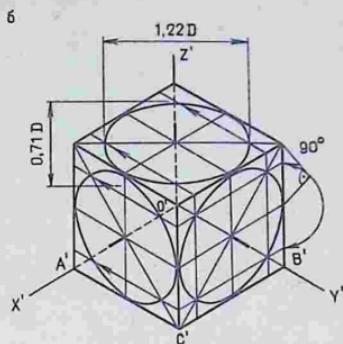


Рис. 258

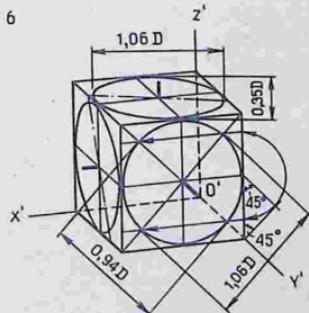
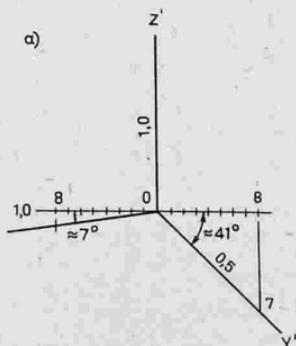


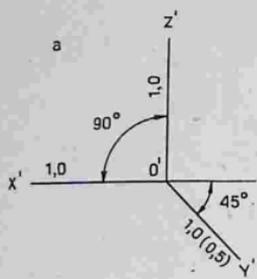
драта, а затем вписать в него эллипс по восьми точкам (см. рис. 78). Изображение сферы будет окружностью, радиус которой равен 1,22 радиуса данной сферы.

На рис. 257 приведено аксонометрическое изображение здания, выполненное в прямоугольной изометрии. На изображении хорошо показана общая схема конструкций здания из панелей.

Прямоугольная диметрия (рис. 258). Аксонометрические изображения, построенные в прямоугольной диметрической проекции, обладают наилучшей наглядностью, однако построение изображений сложнее, чем в прямоугольной изометрии.

При построении осей прямоугольной диметрии пользуются транспортиром или уклонами осей, равными 1 : 8 (ось  $x'$ ) и 7 : 8 (ось  $y'$ ). Показатели искажения по осям  $x'$  и  $z'$  равны 0,94, а по оси





$y' = 0,47$ . Для практических целей применяют приведенную диметрию, в которой показатели искажения равны 1 и 0,5. Окружности, параллельные координатным плоскостям, в прямоугольной диметрии представляют собой эллипсы двух видов. Большие оси эллипсов перпендикулярны соответствующим аксонометрическим осям, а малые оси совпадают с этими осями. Изображение сферы будет окружностью, радиус которой равен 1,06 радиуса заданной сферы.

Выбирая тот или иной вид прямоугольной аксонометрической проекции, следует иметь в виду, что в прямоугольной изометрии ракурсы боковых сторон объекта получаются одинаковым и поэтому изображение иногда оказывается не наглядным. Кроме этого, часто диагональные в плане ребра объекта на изображении сливаются в одну линию. Эти недостатки отсутствуют на изображениях, выполненных в прямоугольной диметрии.

**Косоугольные аксонометрические проекции.** Косоугольные аксонометрические проекции характеризуются двумя основными признаками:

плоскость аксонометрических проекций располагается параллельно одной из сторон объекта, которая изображается без искажения;

направление проецирования выбирается косоугольным (составляет с плоскостью проекции острый угол), что дает возможность спроецировать и две другие стороны объекта, но уже с искажением.

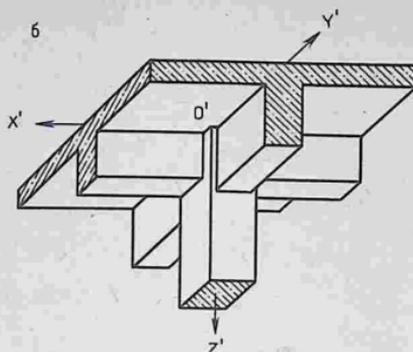


Рис. 259

Рис. 260

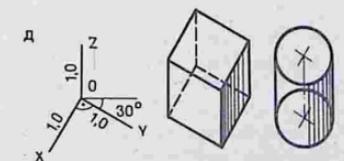
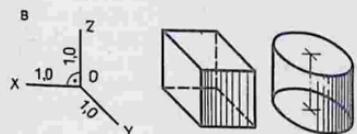
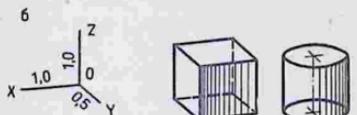
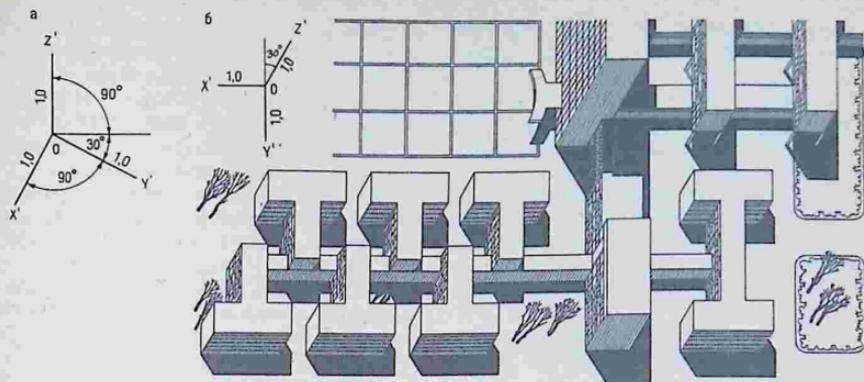
Рис. 261

Название *фронтальная* или *горизонтальная* определяет положение плоскости аксонометрических проекций относительно основных сторон объекта. Аксонометрические изображения при косоугольном проецировании оказываются менее наглядными, чем при прямоугольном проецировании. Однако они обладают и важным преимуществом — элементы объекта, параллельные плоскости аксонометрических проекций, проецируются без искажения.

Фронтальная изометрия и диметрия (рис. 259, а). Оси координат  $x'$  и  $z'$ , параллельные аксонометрической плоскости проекции, проецируются в истинную величину. Показатели искажения равны единице. Ось  $y'$  расположена по биссектрисе угла  $z'o'x'$  с углом наклона  $45^\circ$  от горизонтали. Во фронтальной изометрии показатель искажения по оси  $y'$ , как и по другим аксонометрическим осям, равен единице, а во фронтальной диметрии — вдвое меньше (0,5).

Расположение осей во фронтальных аксонометрических проекциях, как и в других аксонометрических проекциях, дает вид объекта сверху. Если необходимо дать вид предмета снизу, допускается располагать оси, как показано на рис. 259, б. В этом случае ось  $z'$  направлена вниз, а ось  $y'$  — вправо вверх. При этом углы между осями и показатели искажения сохраняются.

Горизонтальная изометрия (рис. 260, а). Плоскость аксонометрических проекций располагают горизон-



тально, параллельно координатной плоскости  $xoy$  и принимают все показатели искажения равными единице. Допускается применять горизонтальную изометрию с углом наклона оси  $y'$   $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Горизонтальная изометрическая проекция применяется в тех случаях, когда необходимо сохранить без искажения конфигурацию объекта в плане и его размерные соотношения. Это свойство проекций часто используется при изображении в аксонометрии архитектурных объектов. В практических построениях горизонтальную изометрию применяют также и при повернутом плане (рис. 260, б). При этом ось  $z'$  образует угол  $30^\circ$  относительно вертикали.

Как в косоугольных, так и в прямоугольных аксонометрических проекциях допускается менять местами положение осей  $x'$  и  $y'$ .

**Выбор аксонометрических проекций.** Выбор аксонометрических проекций для построения изображений может подчиняться различным требованиям. Главные из них — наглядность и простота построений.

Сравнительная оценка изображений, построенных в различных аксонометрических проекциях (рис. 261), показывает, что самым наглядным изображением, лишенным заметных искажений формы, является прямоугольная диметрия. В прямоугольной изометрии (рис. 261, а) одинаковый ракурс боковых граней куба делает изображение недоста-

точно наглядным. В прямоугольной диметрии этот недостаток отсутствует (рис. 261, б).

Выбирая тот или иной вид косоугольной аксонометрической проекции, следует иметь в виду, что наряду с неизменностью формы одной части объекта возникают заметные искажения других его частей. Изображенные объекты воспринимаются несколько деформированными, со скошенностью в направлении, перпендикулярном плоскости проецирования.

Сфера в косоугольных аксонометрических проекциях изображается в виде эллипсоида.

#### 60. Построение аксонометрии по выбранному направлению проецирования

##### Выбор направления проецирования.

Сравнивая основные виды стандартных аксонометрических проекций (см. рис. 261), мы видим, что изображения, выполненные в прямоугольных аксонометрических проекциях, обладают большей наглядностью и естественностью. Однако и они не всегда могут удовлетворить проектировщика, так как иногда нельзя избежать нежелательных совпадений и закрытий одних частей объекта другими и достигнуть хорошей видимости и выразительности изображения. В этом случае необходимо правильно выбрать направление аксонометрического проецирования, учитывая характер композиции объекта, и перейти к построению *прямоугольной триметрической проекции*, когда масштаб для каждой аксонометрической оси оказывается различным.

Рассмотрим условия обеспечения хорошей видимости и наглядности аксонометрического изображения на примере. На рис. 262, а показаны схемы плана, фасада и разреза здания. Штриховыми стрелками показаны направления проецирования, которые нежелательны, поскольку происходит совпадение ребер объекта и слияние их в одну линию. Такое неудачное направление представляет собой, в частности,

и «стандартное» направление проекции луча ( $45^\circ$ ), так как вертикальное ребро ближнего выступа (ризалита) здания сливается с ребром входного портика, поэтому не виден его выступ от фасада здания. Выбираем направление проецирования, обозначенное стрелкой S.

**Определение положения аксонометрических осей и показателей искажения.** Построим ортогональные проекции проецирующего луча — отрезок  $OS$ , соответствующий выбранному направлению проецирования (рис. 262, б). Затем построим плоскость аксонометрических проекций  $K$ , проводя ее следы  $K_v$ ,  $K_n$  и  $K_w$  перпендикулярно (прямоугольная аксонометрия) соответствующим проекциям луча  $OS$ .

Построим аксонометрию *треугольника следов*, располагая горизонтальный след  $K'_n$  горизонтально (рис. 263, а). Через вершины треугольника проводим высоты. Точка их пересечения  $O'$  есть начало аксонометрических осей, а сами высоты станут аксонометрическими осями  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ . Далее необходимо определить показатели искажения по ним. Треугольник следов можно рассматривать как основание пирамиды, грани которой при вершине имеют прямые углы, а точку  $O'O$  — как ортогональную проекцию вершины этой пирамиды. Тогда высоты треугольника следов  $O'K'_x$ ,  $O'K'_y$  и  $O'K'_z$  будут ортогональными проекциями ребер пирамиды, которые и определяют аксонометрические оси  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  *прямоугольной триметрии*.

Построим истинную величину грани пирамиды  $OK_zK_x$ , совмещая ее с плоскостью  $K$  вращением вокруг фронтального следа  $K_p$ . Зная, что угол при вершине  $O$  прямой, вписываем прямоугольный треугольник в полуокружность с этой окружностью, определяем положение вершины треугольника на ней.

На сторонах треугольника откладываем отрезки, равные единице измерения, а затем возвращаем треугольник обратным вращением в исходное положение. При этом построенные на сторонах треугольника отрезки займут со-

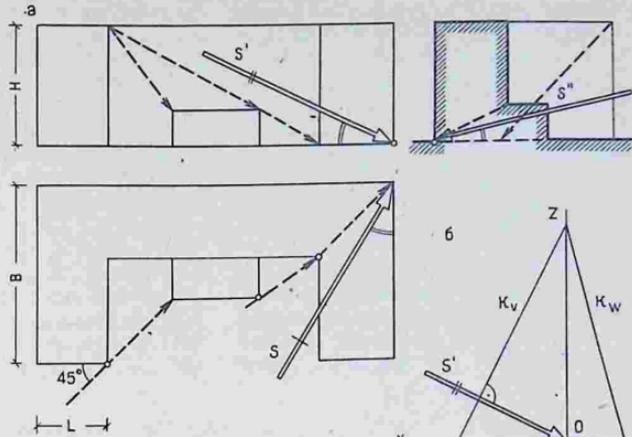
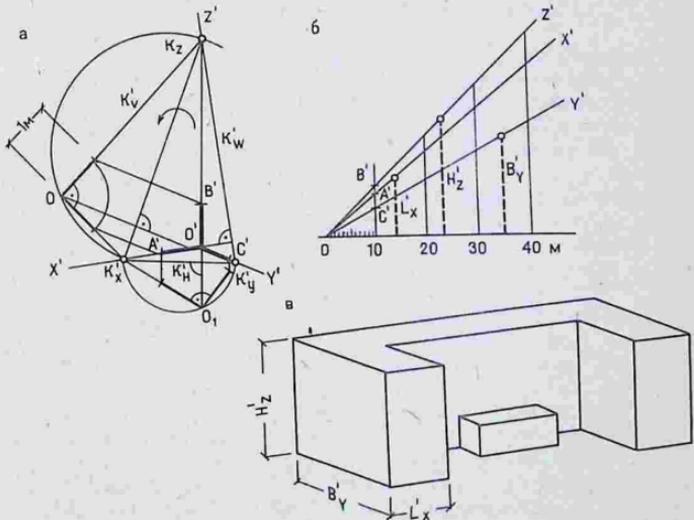


Рис. 262

Рис. 263



ответствующее положение на аксонометрических осях. Отрезки  $O'A'$  и  $O'B'$  окажутся аксонометрическими единицами измерения на осях  $x'$  и  $z'$ . Аналогичное построение отрезка  $O'C'$  на оси  $y'$  понятно из чертежа. Отношения полу-

ченных аксонометрических единиц к истинной единице длины будут показателями искажений.

**Построение прямоугольной триграммы объекта.** Чтобы упростить определение сокращенных величин аксономет-

трического масштаба при построении изображения, целесообразно пользоваться *угловым графическим масштабом* (рис. 263, б). Для построения масштаба (удобно использовать для этого миллиметровку) необходимо на его горизонтальной шкале отложить истинные единицы измерения, а по вертикали от нее — аксонометрические масштабы для осей — отрезки  $O'A'$ ,  $O'B'$  и  $O'C'$ . Через полученные точки проводим наклонные линии. Построение сокращенных аксонометрических величин отрезков, взятых из ортогональных проекций здания — плана и фасада, происходит аналогично построению самог

уголового масштаба. Так, например, высота здания  $H$  (см. рис. 262) откладывается сначала по горизонтальной шкале уголового масштаба (рис. 263, б). Из полученной точки по вертикали берется отрезок  $H'_z$  до соответствующей линии  $z'$ . Аналогично определяется сокращенная аксонометрическая ширина объекта  $B'_y$  и ризалитов здания  $L'_x$ .

На рис. 263, в показана аксонометрия здания. Изображение построено не в приведенных, а в *истинных показателях искажения*, а потому масштаб аксонометрического изображения соответствует истинным параметрам ортогональных проекций объекта.

## Глава 15. Построение аксонометрических изображений

### 61. Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям объекта

Приемы построения аксонометрических изображений не зависят от вида аксонометрических проекций. Для всех аксонометрических проекций они одинаковы. Аксонометрическое изображение обычно строится на основе ортогональных проекций объекта. Поэтому по чертежу объекта следует представить его форму, затем выбрать вид аксонометрической проекции. Прежде чем приступать к построению аксонометрического изображения, полезно выполнить от руки предварительный эскиз аксонометрического изображения объекта.

При построении аксонометрических изображений применяют *способ координат*. Аксонометрические проекции отдельных точек строят по координатам, взятым с ортогональных проекций объекта.

Построение аксонометрии объекта выполняют в такой последовательности (рис. 264):

1. На ортогонально-проекционном чертеже объекта наносят дополнительные оси координат  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , совме-

щая их с осями симметрии объекта или с основными его гранями (рис. 264, а). Такая система координат называется *внутренней*.

2. Строят оси выбранной аксонометрической проекции.

3. По размерам, взятым с ортогональных проекций объекта, строят вторичную аксонометрическую проекцию (план объекта), используя симметрию и параллельность прямых (рис. 264, б).

4. В характерных точках вторичной проекции объекта строят высоты (откладывают аппликаты точек) и заканчивают построение аксонометрии.

На рис. 264 изображение блок-подушки фундамента построено в прямоугольной изометрии.

Построение прямоугольной диметрии поверхности-оболочки, состоящей из пересекающихся гиперболических параболоидов (рис. 265). Требуется построить прямоугольную диметрию объекта по его ортогональным проекциям с *увеличением заданных параметров в два раза*. Это построение представляет собой довольно сложную задачу.

1-й этап. Нанесем в ортогональных

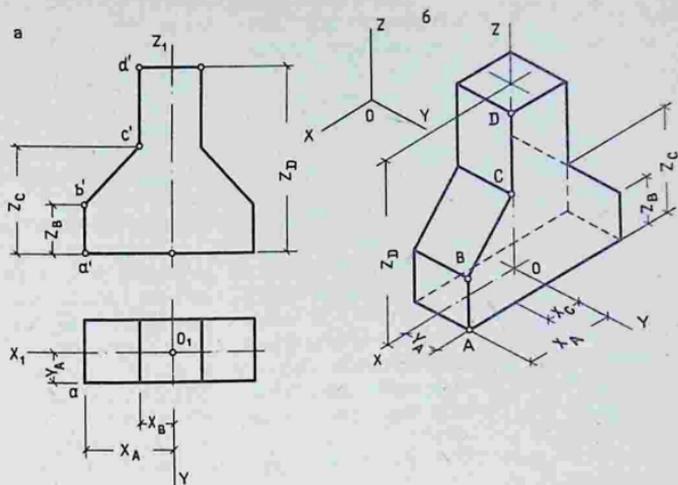
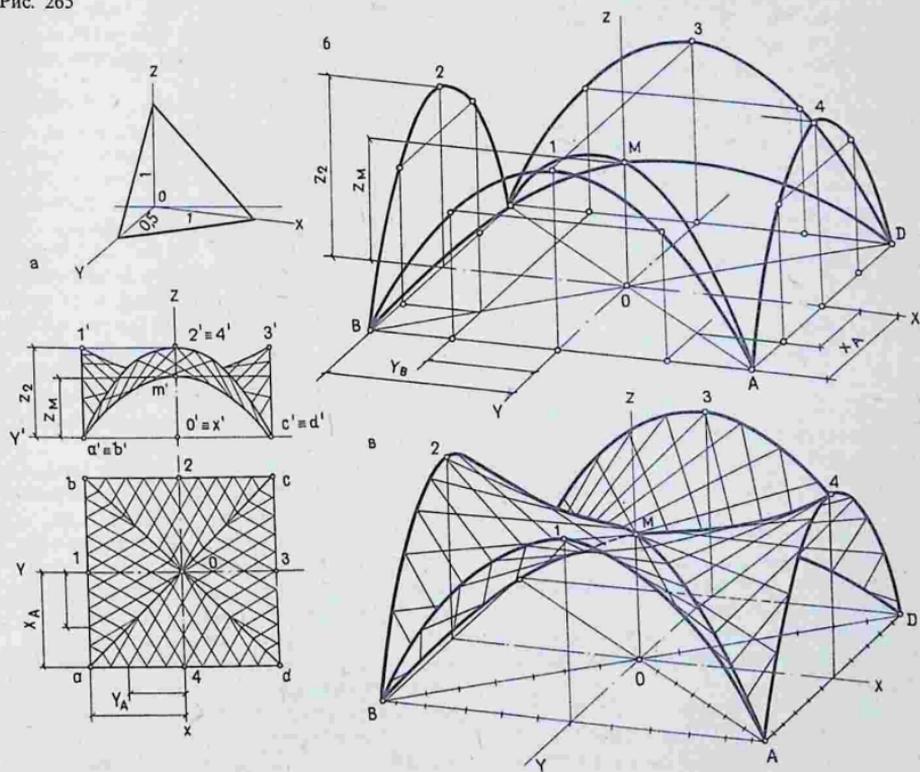


Рис. 264

Рис. 265



проекциях дополнительные оси внутренней системы координат, учитывая симметрию объекта (рис. 265, а). Построим аксонометрические оси и вторичную проекцию объекта, откладывая измерения по обе стороны от аксонометрических осей (рис. 265, б). По оси  $x$  — с увеличением в два раза, а по оси  $y$  — в истинную величину, так как по этой оси показатель искажения равен 0,5. Граничные контуры поверхности являются параболой. Построим вершины внешних парабол — точки 1, 2, 3 и 4 и точку  $M$  — вершины двух парабол пересечения поверхностей, лежащую на оси симметрии поверхности. Аналогичным образом построим по две промежуточные точки каждой параболы. По пяти точкам можно вычертить параболические кривые.

**2-й этап.** Для нахождения на параболах точек пересечения прямолинейных образующих нанесем на вторичных проекциях парабол точки пересечения образующих (рис. 265, в), взятые с ортогональной проекции (с плана), а затем с помощью вертикалей определим их положение на аксонометрическом изображении соответствующих парабол. После этого следует провести прямолинейные образующие поверхностей, последовательно соединяя соответствующие точки граничных и диагональных парабол, пользуясь планом объекта.

## 62. Решение позиционных задач в аксонометрии

Способы решения позиционных задач в аксонометрии аналогичны решениям задач в ортогональных проекциях. Построение линий пересечений непосредственно в аксонометрии без перенесения точек линии пересечения, построенной в ортогональных проекциях, оказывается, как правило, графически более точным и простым.

Рассмотрим два примера построения пересечения поверхностей в аксонометрии.

**Пример 1.** Построить в прямоугольной изометрии пересечение прямого кругового ци-

линдра фронтально проецирующей плоскостью  $P$  (рис. 266). Прямоугольная изометрия цилиндра построена с увеличением исходных данных в полтора раза. Положение секущей плоскости в аксонометрии может быть задано величиной ее уклона или двумя точками  $A$  и  $B$  на противоположных образующих цилиндра.

Построим в аксонометрии точку  $B$ , отложив ее аппликату  $z_B$ . Прямая  $AB$  является аксонометрическим изображением большой оси эллипса. Аксонометрия малой оси  $CD$  эллипса построена с помощью вторичной проекции  $cd$ . Сначала найдена точка  $O$  на большой оси эллипса, а затем построены точки  $C$  и  $D$ , симметрично расположенные на одной горизонтали с нею. Аналогичным образом построены промежуточные точки  $I, I'$  и  $II, II'$ . Они определены по вторичной проекции на очерковых образующих цилиндра с тем, чтобы построить точки видимости кривой сечения.

**Пример 2.** Построить в прямоугольной диметрии пересечение двух полуцилиндров (рис. 267). Требуется построить в аксонометрии линию пересечения полуцилиндров при соотношении размеров их оснований, равном  $m:n$ . Ортогональные проекции, как и в предыдущем примере, даны для пояснений. Сначала построены (с увеличением в два раза) граничные контуры полуцилиндров — четыре полуэллипса. Для построения точек линии пересечения применим способ вспомогательных секущих плоскостей-посредников.

Первая горизонтальная плоскость  $P$  проведена так, чтобы она коснулась малого цилиндра по образующей 1. Чтобы определить вспомогательное сечение второго полуцилиндра, найдем точку  $K$  пересечения вторичных проекций оснований полуцилиндров и на вертикальной прямой отметим точку  $I_0$ . С помощью прямой, проведенной из этой точки параллельно оси  $x$ , определим в пересечении с основанием второго полуцилиндра положение двух образующих 1 и 1', по которым вспомога-

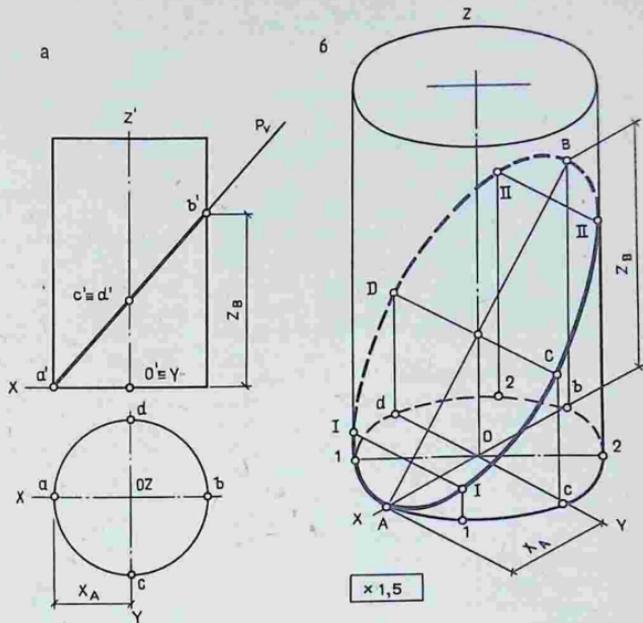
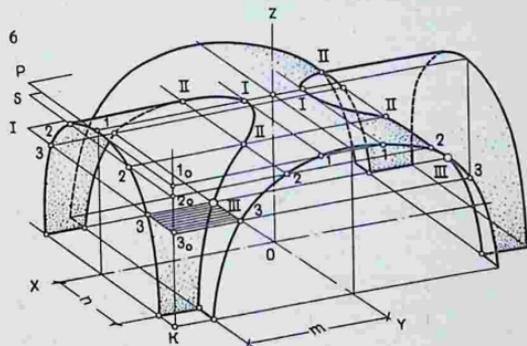
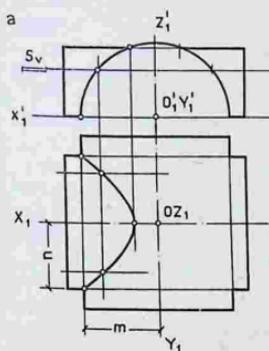


Рис. 266

Рис. 267



тельная плоскость  $P$  пересечет поверхность второго полуцилиндра. Точки  $I$  и  $I'$  будут принадлежать двум симметричным отрезкам кривой линии пересечения. С помощью вспомогательных плоскостей  $S$  и  $T$  аналогично определяются по две пары точек  $II$  и  $III$  про-

странственной кривой линии пересечения полуцилиндров.

Подобное неполное пересечение полуцилиндров получило название *распалубка*, оно упоминалось ранее (см. § 39, рис. 165, б).

### 63. Построение теней в аксонометрии

Для придания аксонометрическим изображениям большей наглядности строят тени при освещении объекта параллельными лучами света. Это относится главным образом к изображению внешнего вида зданий или архитектурных фрагментов. Направление лучей света выбирают произвольным с тем, чтобы лучше выразить форму объекта. Однако при этом следует учесть ориентацию здания по странам света и высоту солнца.

*Приемы построения теней в аксонометрии аналогичны основным способам построения теней в ортогональных проекциях.* Чаще других применяются способы лучевых сечений и обратных лучей. Направление светового луча задается его основной аксонометрической проекцией, а также вторичной (горизонтальной) проекцией луча с дополнительной проекцией на одну из вертикальных плоскостей объекта.

Рассмотрим несколько примеров построения теней в аксонометрии.

**Пример 1.** Построить в прямоугольной триметрии собственные и падающие тени здания (рис. 268). Требуется построить тени на изображении здания, аксонометрия которого по выбранному направлению проецирования была построена ранее (см. рис. 263). Направление лучей света выбрано справа налево и параллельно картине с тем, чтобы на ризалитах здания образовались собственные тени. Наклон светового луча  $45^\circ$ . Направление светового луча и его аксонометрические проекции можно задать дополнительной схемой или точкой тени на самом аксонометрическом изображении, например падающей тенью  $A_0$  от точки  $A$ . Остальные построения теней понятны из чертежа.

**Пример 2.** Построить в прямоугольной изометрии падающие тени на ступенях наружной лестницы (рис. 269). Зададим на дополнительной схеме аксонометрическую проекцию луча света  $AA_0$ , парал-

лельную картине и ее проекции. Тень от вертикального ребра  $Aa$  боковой стенки совпадает с горизонтальной проекцией луча. Тень от наклонного ребра на горизонтальной плоскости построена на основе родственного соответствия между вертикальной плоскостью боковой стенки и горизонтальной плоскостью. Осью родства является прямая  $Sa'$ , а родственными точками — точки  $A$  и ее тень  $A_0$ . Тени на горизонтальных плоскостях (ступенях) ступеней будут параллельны построенному контуру падающей тени — отрезку  $A_0C_0$ . Контур теней на вертикальных плоскостях (подступенках) построены с помощью проекции луча на фронтальной плоскости, параллельно проекции луча  $a_0a'$  на дополнительной схеме. Аналогичное построение теней лестницы было выполнено ранее в ортогональных проекциях (см. § 52, рис. 219).

**Пример 3.** Построить собственные и падающие тени цилиндра (рис. 270). Направление световых лучей задано аксонометрической проекцией луча  $BB_0$  и его вторичной проекцией  $bB_0$ . Контур собственной тени определен касанием вторичной проекцией луча к основанию цилиндра. Контур падающей тени на внутренней стороне поверхности цилиндра от верхней его кромки построен способом лучевых сечений и следа луча. Падающие тени случайных точек  $C$  и  $D$  построены с помощью горизонтальных проекций лучей. Точка тени  $E_0$ , где контур падающей тени касается очерковой образующей, также определена с помощью вторичной проекции, проходящей через точку  $e'_0$  — горизонтальную проекцию очерковой образующей. Световые лучи, проходящие через окружность верхней кромки цилиндра, образуют лучевую поверхность эллиптического цилиндра, которая на основе теоремы о плоских сечениях (см. § 34, рис. 144) в пересечении с данным цилиндром образует два плоских сечения, одно из них представляет собой эллипс. Половина этого эллипса и есть контур падающей тени на внутренней стороне цилиндрической поверхности.

Рис. 268

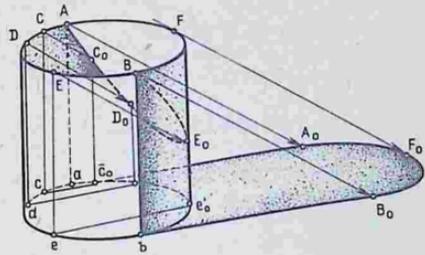
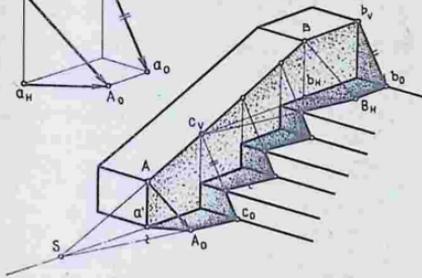
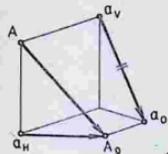
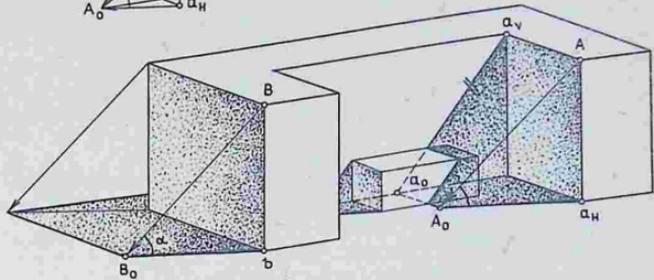
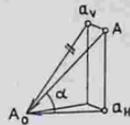


Рис. 269

Рис. 270

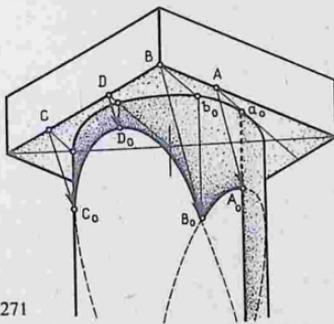


Рис. 271

**Пример 4.** Построить тени от квадратной плиты на цилиндрический столб (рис. 271). Так как аксонометрия фрагмента построена как вид на него снизу, вто-

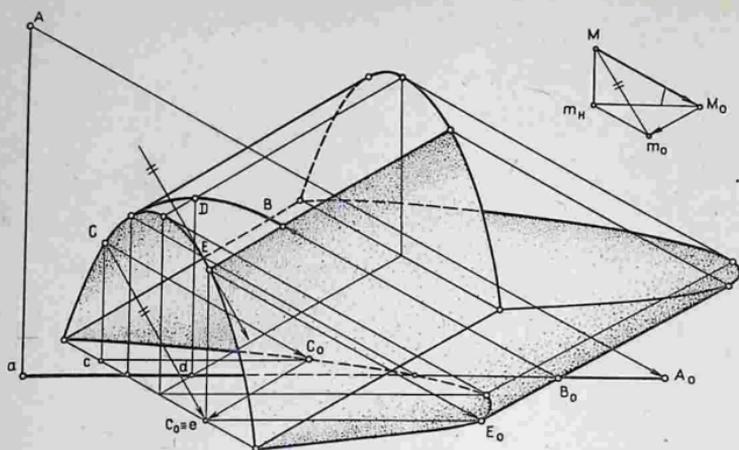
ричными проекциями лучей являются проекции на нижней плоскости плиты. Освещение фрагмента задано аксонометрической проекцией луча, образующей падающую тень  $B_0$  на цилиндре от точки  $B$ , тем самым задана и вторичная проекция луча  $Bb_0$ .

Для построения контура падающей тени от двух горизонтальных ребер плиты выбраны характерные точки, которые определены вторичными проекциями лучей, проведенными в обратном направлении:

точка  $A$  определена вторичной проекцией луча, касающейся в точке  $a_0$  основания цилиндра и определяющей контур собственной тени цилиндра и точку  $A_0$  исчезновения тени;

точка  $C$  бросает тень на очерковую образующую цилиндра, здесь контур падающей тени касается очерка;

точка  $D$  определяет наивысшую точ-



ку тени  $D_0$ , она определена с помощью вторичной проекции луча, проходящей через точку пересечения оси цилиндра с плитой.

Контур падающей тени — это части двух сопряженных эллипсов, которые являются результатом пересечения цилиндра двумя лучевыми плоскостями.

**Пример 5.** Построить тени параболического цилиндра и вертикального шеста (рис. 272). Для построения собственной тени цилиндрической поверхности спроеци-

руем световой луч на плоскость основания цилиндра параллельно проекции  $Mm_0$  на схеме. Контур падающей тени поверхности образован ее теневой образующей, а также тенеобразующими частями кромок цилиндрической поверхности. Падающая тень от шеста на цилиндрической поверхности построена с помощью вспомогательной вертикальной лучевой плоскости. Точка  $B$  исчезновения тени определена обратным лучом, проведенным из точки  $B_0$  пересечения контуров теней.

## Часть четвертая. ПЕРСПЕКТИВА

Перспектива<sup>1</sup> в отличие от ортогональных проекций представляет собой вид проекций, с помощью которого можно с наибольшей наглядностью изобразить архитектурное сооружение и всю окружающую его среду.

Современные приемы и способы наглядного изображения на плоскости объемно-пространственных композиций появились в результате длительного периода их развития и совершенствования. Основные принципы построения перспективы, заложенные мастерами Возрождения, прочно вошли в современную науку о построении перспективных изображений.

В последнее время создаются различные технические средства, облегчающие построение перспективы, используется для этой цели сложная электронно-вычислительная техника. Однако это не снижает значения обычных графических способов построения перспективы в творческом процессе архитектурного проектирования. Простота выполнения и достоверность изображений способствуют объективности оценки архитектурного проекта. Перспективное изображение является неотъемлемым элементом архитектурного проекта и входит в состав его демонстрационных материалов.

### Глава 16. Основные положения

#### 64. Место и значение перспективы в архитектурном проектировании

Ортогонально-проекционные чертежи, как никакие другие изобразительные средства, позволяют архитектору оперировать всей сложной системой взаимосвязанных размеров и форм проектируемого сооружения. Опираясь на чертежи, архитектор устанавливает реальные основы функционального, конструктивного и художественного решения. И вместе с тем ортогонально-проекционный чертеж представляет собой условное изображение. Чтобы «прочтеть» чертежи объекта, необходимо за отдельными проекциями увидеть проектируемое сооружение во всей сложности его объемно-пространственной структуры и реального окружения.

По этому поводу выдающийся советский архитектор В. А. Веснин говорил, что «... план и фасад составляют

неразрывное целое, что любой выступ плана отражается на фасаде, закрепляет его основные пропорции. Та или иная глубина выступа вносит изменения в объемную композицию сооружения и без проверки в перспективе этот вопрос решить нельзя»<sup>1</sup>.

Перспектива дает возможность наглядно изобразить трехмерность объемно-пространственных форм, их взаимное расположение, выявить глубинность внутреннего и внешнего пространства, передать пространственный характер окружающей среды и пейзажа.

Перспектива, как и фотография, показывает не только форму объекта, но и отражает взаимное положение наблюдателя и объекта. Она передает кажущиеся изменения величины и формы изображаемого объекта, вызванные его расположением и удаленностью от наблюдателя. Существенное преимущество перспективы по сравнению с фотографированием и другими современными техническими средствами отображе-

<sup>1</sup> Perspicere, perspectus (лат.) — увиденный сквозь; ясно, правильно увиденный. Перспективой называют как само наглядное изображение объекта, так и область начертательной геометрии, изучающей теорию и практические способы построения перспективных изображений.

<sup>1</sup> Веснин В. А. О воспитании молодых архитекторов // Архитектура СССР. — 1938. — № 6. — С. 8.

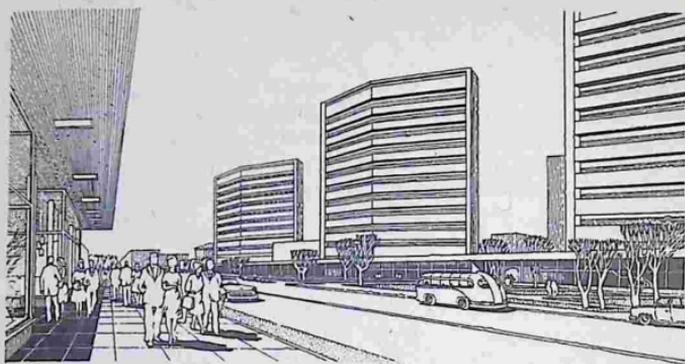
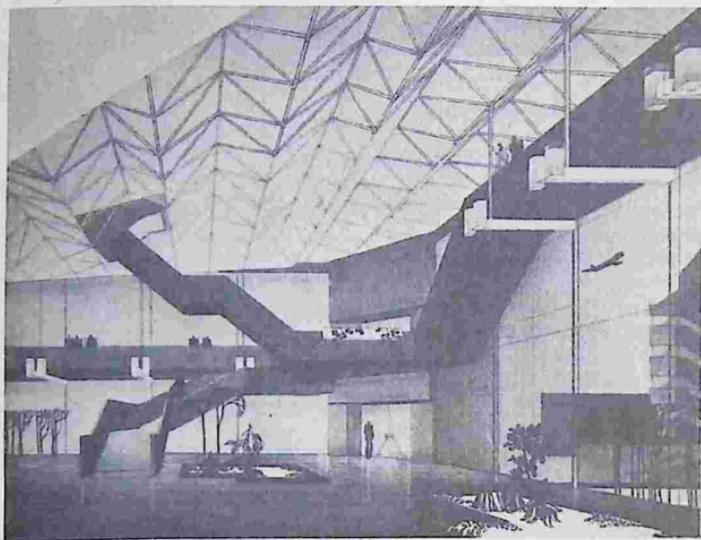


Рис. 273

Рис. 274



ния (киносъемкой, голографией и др.) состоит в том, что с помощью перспективы можно получить наглядное изображение *несуществующего, проектируемого объекта*. Перспектива имеет некоторые преимущества и в сравнении с макетами зданий. Они заключаются в том, что перспективное изображение отображает конкретную точку зрения, с которой будет восприниматься будущее сооружение (рис. 273). Макет позволяет непосредственно видеть объемно-планировочную структуру принятого композиционного решения, в этом

и заключается его основное положительное качество. Однако в макете, например, сложно, а иногда и невозможно наглядно отобразить все стороны архитектурного решения внутреннего пространства здания (рис. 274), а также особенности восприятия разнообразных фрагментов городской застройки с конкретных точек зрения. Кроме того, построение перспективного изображения в процессе проектирования значительно проще и дает возможность в более короткие сроки проверить композицию сооружения, видимую с наиболее ре-



Рис. 275

альных точек. При передаче реальной освещенности, цвета и воздушной перспективы, а также существующего или спроектированного окружения перспективное изображение приобретает большую наглядность и выразительность (рис. 275). Возможны два подхода к задаче построения перспективы. В зависимости от того, на каком этапе проектирования она выполнена и какая цель при этом ставится, перспектива может или своевременно *выявить недостатки* архитектурного решения, или *показать достоинства* уже законченного проекта. В первом случае, когда перспектива выполняется в процессе разработки композиции объекта, она имеет важное проверочное и корректирующее значение, а во втором — представляет наглядную иллюстрацию уже законченного проекта.

Роль и значение перспективы зависят от тех требований, которые к ней предъявляются на различных стадиях проектирования и которые следует

учитывать при выполнении перспективных изображений. Можно установить три основных этапа применения перспективы в творческом процессе архитектурного проектирования [3]:

1) в начальной стадии проектирования в процессе эскизирования, при выполнении первых набросков в ортогональных проекциях параллельно делаются от руки перспективные наброски создаваемой композиции. Они требуют хорошего знания законов перспективы и умения свободно их использовать в рисунке. Эти наброски дают в эскизной форме первое объемно-пространственное выражение композиции проектируемого объекта, они дают возможность сопоставить и рассмотреть различные варианты ее проработки;

2) второй этап применения перспективы связан с окончательным выбором конкретного архитектурного решения и его закрепления в ортогональных проекциях. На этом этапе выполняется точное построение перспективы, кото-

рому предшествуют наброски и эскизная перспектива. В этом случае перспективное изображение не только выражает общее объемно-пространственное представление автора о будущем сооружении, но служит также для проверки принятого композиционного замысла, а также для его уточнения, дальнейшей проработки и внесения необходимых коррективов в ортогонально-проекционные чертежи;

3) третий этап построения перспективы связан с завершением проработки композиции объекта в ортогональных проекциях. На данной стадии проектирования перспективное изображение архитектурного объекта с окружающей его средой приобретает законченный в графическом оформлении вид. Правильная передача всех деталей архитектурного решения и достоверность изображения способствуют наиболее полному раскрытию общего композиционного замысла.

Все это в равной мере относится как к внешнему облику сооружения или комплекса зданий, так и к внутреннему пространству сооружения, которое является неотъемлемой частью общего функционального и композиционного решения. Выполнение перспективы на втором и третьем этапах требует точного построения.

## 65. Геометрические основы перспективы

**Сущность метода центрального проецирования.** Перспективой называется центральная проекция объекта на плоскость, отвечающая определенным условиям. Этими условиями ограничивается взаимное положение центра проекции и объекта с целью наибольшего приближения его изображения к виду объекта в натуре.

Для построения перспективы объекта из центра проекции  $S$  (точки зрения) проводят проецирующие лучи к точкам объекта (рис. 276) и находят их пересечение с плоскостью проекций  $K$  (картиной), которую обычно располагают перед объектом. Полученное изображе-

ние отличается от аксонометрического. Параллельные прямые в общем случае изображаются сходящимися; равные по величине отрезки прямых изображаются уменьшающимися по мере их удаления от точки зрения.

Для построения на плоскости картины центральной проекции точки  $A$  проводим к этой точке проецирующий луч. Точка пересечения луча с плоскостью проекций  $K$  определяет точку  $A_1$  — центральную проекцию или перспективу точки  $A$ . Чтобы определить на картине положение точки  $A_1$ , следует через проецирующий луч, направленный к точке  $A$ , провести вертикальную лучевую плоскость и найти ее пересечение с картиной. Линия пересечения этой плоскости с картиной пройдет через точку  $a_0$ , представляющую пересечение горизонтального следа лучевой плоскости с картиной. Вертикальная прямая, проведенная из этой точки в пересечении с проецирующим лучом, определит искомую перспективу  $A_1$  точки  $A$ . Одна центральная проекция точки  $A$  не определяет ее положения в пространстве, так как перспективе  $A_1$  точки соответствует любая точка проецирующего луча  $SA$ . Для того чтобы можно было определить положение точки в пространстве по ее перспективе и сделать изображение обратимым, следует построить перспективу  $a_1$  ее горизонтальной проекции  $a$  — вторичную проекцию точки  $A$  (первой считается  $A_1$ ).

Таким образом, для определения положения точки в пространстве по ее перспективе необходимо кроме перспективы точки иметь еще и вторичную ее проекцию.

Для построения перспективы объекта исходным материалом служат его ортогональные проекции — план и фасад.

**Элементы построения перспективы.** При построении перспективы применяют некоторые вспомогательные геометрические элементы — точки, прямые и плоскости, которые обозначаются следующим образом (рис. 277):

$K$  — вертикальная плоскость проекций (картина);

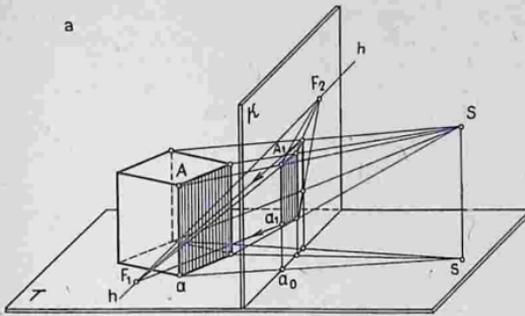
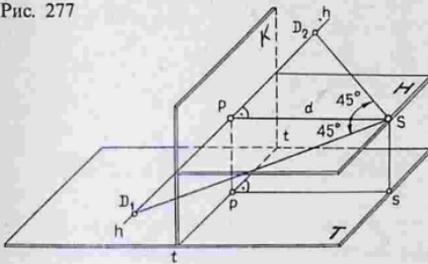


Рис. 276

Рис. 277



$T$ —предметная плоскость (горизонтальная), на которой обычно располагается объект;

$S$  и  $s$ —точка зрения (центр проекций) и ее горизонтальная проекция (основная точка зрения);

$H$ —плоскость горизонта, горизонтальная плоскость, проходящая через точку зрения;

$SP$ —главный луч, перпендикулярный картине;

$P$  и  $p$ —главная точка картины и ее горизонтальная проекция;

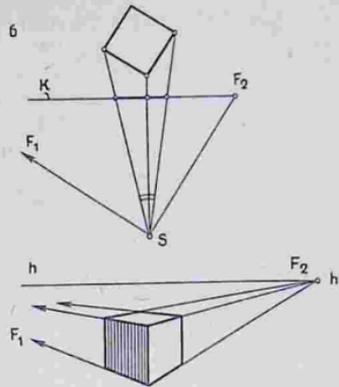
$d$ —расстояние (дистанция) точки зрения, равное  $SP$  и  $sp$ ;

$hh$ —линия горизонта, линия пересечения плоскости горизонта с картиной;

$tt$ —основание картины, линия пересечения картины с предметной плоскостью;

$Pp$  и  $Ss$ —высота горизонта;

$D_1$  и  $D_2$ —дистанционные точки (точки дальности), расположенные на расстоянии  $d$  от главной точки картины  $P$ .



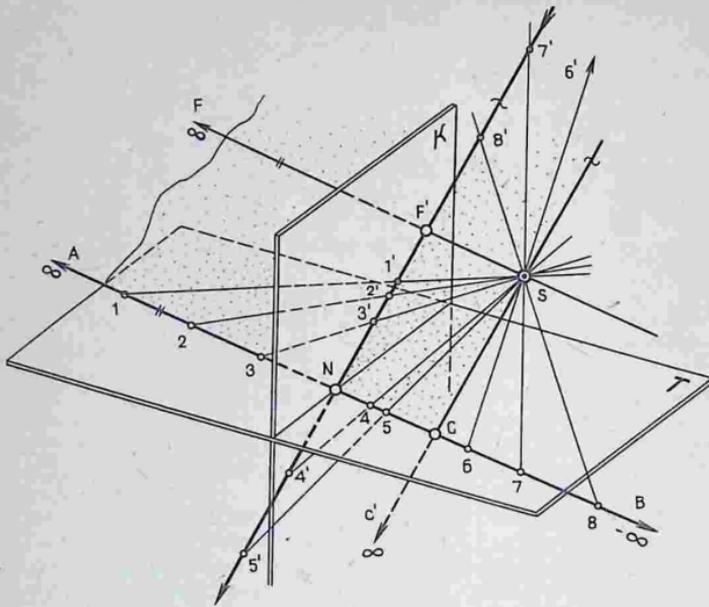
### 66. Перспектива прямой линии, точки и плоскости

Прежде чем перейти к построению перспективы прямых, точек и плоскостей, рассмотрим некоторые положения геометрии, придающие необходимую общность закономерностям элементарной геометрии и новым понятиям *бесконечно удаленных* точек и прямых, с которыми при построении перспективы приходится встречаться.

**Дополнение евклидова пространства несобственными элементами.** Метод центрального проецирования рассматривался в геометрическом пространстве, называемом *евклидовым*. В евклидовом пространстве параллельные прямые не пересекаются, параллельные плоскости также не пересекаются. Однако, как будет показано далее, применение метода центральной проекции в евклидовом пространстве встречает существенные затруднения.

Рассмотрим центральную проекцию прямой  $AB$  на плоскость проекций  $K$  (рис. 278). Некоторым точкам  $1, 2, 3, \dots$  прямой  $AB$  соответствуют определенные точки  $1', 2', 3', \dots$  ее центральной проекции. Такое соответствие, установленное между точками прямой  $AB$  (оригинала) и точками ее центральной проекции (изображения), называется *взаимно однозначным*.

Однако распространить это положение на все точки соответственных



прямых (оригинала и изображения) не удастся. В двух случаях произойдет нарушение взаимной однозначности:

1) для точки-оригинала  $C$ , расположенной на проецирующем луче  $SC$ , параллельном плоскости  $K$ , не существует соответственной точки-изображения, так как луч  $SC$  не пересекает плоскость  $K$ ;

2) для точки-изображения  $F'$  пересечения проецирующего луча  $SF'$  с плоскостью  $K$  и параллельной прямой  $AB$  также не существует на прямой соответственной точки-оригинала, так как луч  $SF'$  параллелен прямой  $AB$ .

Таким образом, точечное соответствие, установленное с помощью центрального проецирования, обладает существенными нарушениями, без устранения которых применение метода центральных проекций невозможно. Это нарушение можно устранить, если дополнить каждую прямую бесконечно удаленной или несобственной точкой. Тогда можно считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной, несобственной точке  $C_\infty'$ . Собственными элементами приня-

то называть прямые и плоскости, расположенные в ограниченном (конечном) пространстве. Множество прямых, принадлежащих плоскости, также будут иметь несобственные точки. Совокупность несобственных точек составляет несобственную прямую плоскости. Каждая плоскость дополняется несобственной прямой. По этой прямой пересекаются взаимно параллельные плоскости.

Рассуждая так и дальше, приходим к представлению о *несобственной плоскости пространства*. Пространство, дополненное несобственными элементами — точками, прямыми и плоскостью, называется *расширенным евклидовым пространством*. Поэтому введение несобственных точек и прямых привело к полной разрешимости операции центрального проецирования.

Эти положения находят наглядное подтверждение при построении перспективы параллельных прямых и плоскостей (рис. 280, а и 282, б), где точка  $F$  (точка схода) перспектив параллельных прямых есть изображение несобственной точки  $F_\infty$ , а линия горизон-



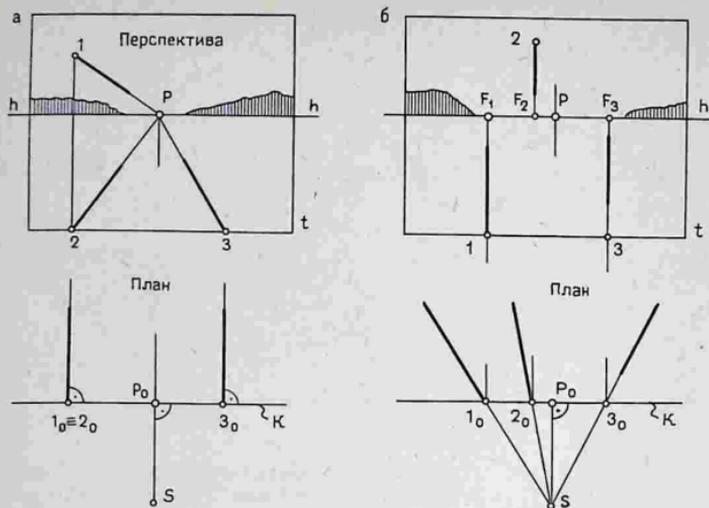


Рис. 280

резка, как это было сделано на рис. 276. Соединив полученные точки прямой линией, получим перспективу  $A'B'$  прямой  $AB$ . Однако удобнее построить перспективу прямой по двум особым ее точкам: картинному следу  $N$  прямой и точке схода  $F$ .

Картинным следом прямой называется точка пересечения прямой с картиной. Для определения картинного следа сначала необходимо найти след  $n$  горизонтальной проекции прямой, а затем на вертикали от него — след  $N$  самой прямой.

Точкой схода прямой называется перспектива бесконечно удаленной точки прямой. Она служит точкой схода для всех прямых, параллельных данной прямой. Для построения точки схода прямой надо сначала определить точку схода  $f$  ее горизонтальной проекции, а затем построить на плане в совмещенном положении на отрезке  $Sf$  угол  $\alpha$  наклона прямой и полученную величину  $\Delta z$  отложить в перспективе от точки  $f$  вверх. Положение точки схода  $F$  на картине позволяет судить о том, как расположена прямая общего положения в пространстве. Если точка находится выше линии горизонта, то прямая  $AB$  — восходящая, если точка  $F$  — ниже

линии горизонта (рис. 279, б) — прямая нисходящая. Точка  $M'$ , в которой перспектива прямой пересекает вторичную проекцию, является перспективой горизонтального следа прямой.

**Перспектива прямых линий частного положения.** Построение перспективы прямых частного положения выполняется проще, чем построение прямых общего положения, поэтому они находят широкое применение как вспомогательные прямые при построении перспективы.

К прямым частного положения относительно картинной плоскости относятся:

1) горизонтальные прямые, точки схода которых в перспективе располагаются на линии горизонта (рис. 280, а, 281, а);

2) прямые, перпендикулярные картине, точкой схода которых в перспективе является главная точка картины  $P$  (рис. 280, а);

3) прямые, лежащие в предметной плоскости и проходящие через основную точку зрения (назовем их радиальными), а также другие прямые, вторичные проекции которых проходят через основание точки зрения, изображаются в перспективе вертикальными

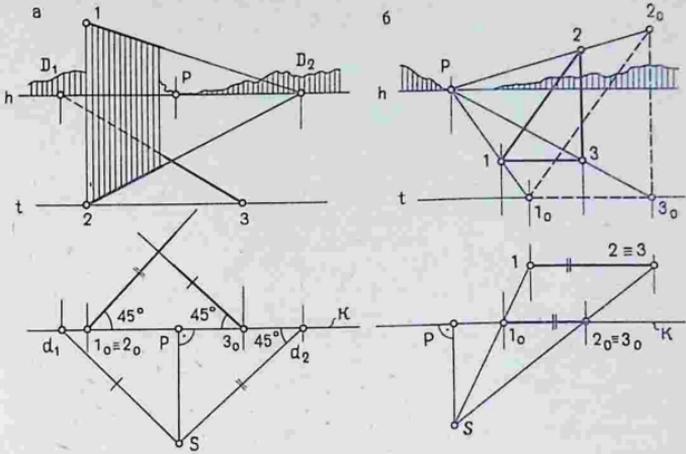
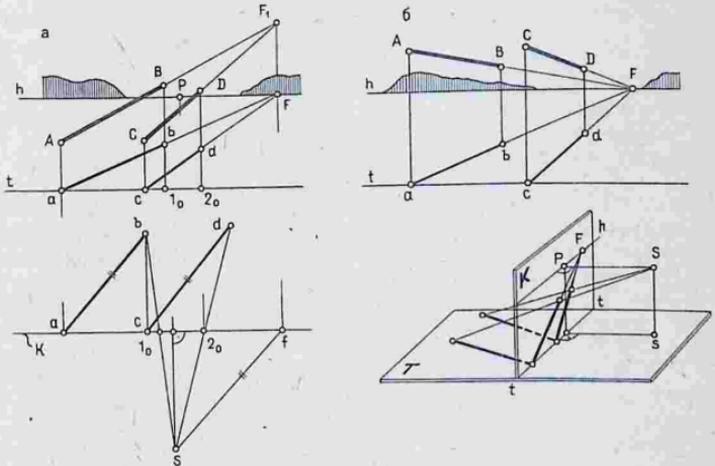


Рис. 281

Рис. 282



(рис. 280, б). Такие прямые расположены в вертикальных плоскостях, которые пересекают картину по вертикальным прямым;

4) горизонтальные прямые, расположенные под углом  $45^\circ$  к картине, точками схода которых в перспективе являются дистанционные точки  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 281, а);

5) прямые, параллельные картине, не имеют точек схода, их перспективы параллельны самим прямым (рис. 281, б). Они не имеют и картинных следов, так

как не пересекаются с нею.

Плоские фигуры, параллельные картине, изображаются в перспективе подобными.

**Параллельные прямые.** Перспективы параллельных прямых пересекаются, т.е. имеют общую точку схода (рис. 282, а).

Как было установлено ранее (см. рис. 279), для построения точки схода прямой следует из точки зрения провести проецирующий луч параллельно данной прямой до пересечения с картиной.

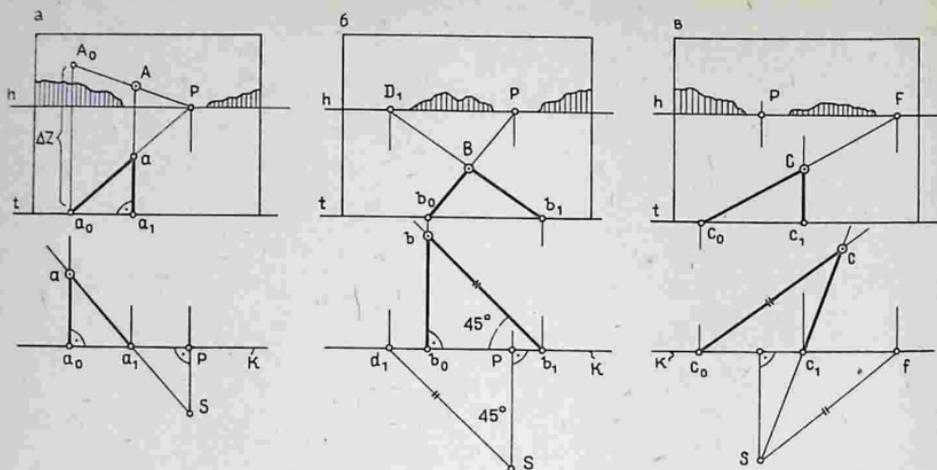


Рис. 283

Следовательно, эта точка будет точкой схода для всех прямых, параллельных данной прямой. Точки схода горизонтальных прямых расположены на линии горизонта (рис. 282, б).

**Перспектива точки.** Перспектива точки определяется как точка пересечения перспектив двух прямых, обычно прямых частного положения. Из вспомогательных прямых наиболее удобны прямые, лежащие в вертикальных проецирующих плоскостях, прежде всего прямые (радиальные), проходящие через основание  $S$  точки зрения (см. рис. 280, б).

На рис. 283 приведены перспективы точек, построенные с помощью пересечения перспектив следующих пар прямых:

а — перпендикулярной картине и проецирующего луча (радиальной прямой); высоту точки  $A$  (ее аппликату  $\Delta z$ ) откладывают в плоскости картины, где она проецируется в истинную величину, от точки  $a_0$  — картинного следа вторичной проекции прямой;

б — перпендикулярной картине и прямой, направленной под углом  $45^\circ$  к картине, точка схода которой — дистанционная точка  $D_1$ ;

в — проецирующего луча (радиальной прямой) и горизонтальной прямой произвольного положения.

При расположении точки вблизи оси изображения перспектива вспомогательных прямых пересекаются под острым углом, что не обеспечивает необходимой графической точности. Поэтому использовать в качестве точки схода главную точку картины нецелесообразно. В этом случае следует применять вспомогательные прямые, изображенные на рис. 283 б, в.

**Перспектива плоскости.** Перспектива плоскости может быть построена как перспектива точек, прямых или плоской фигуры. Изображение плоской фигуры — наиболее распространенный случай. Построение перспективы, как правило, начинают с построения перспективы плана объекта. Рассмотрим несколько примеров построения перспективы плоскости.

1. Построение перспективы горизонтальной плоскости — прямоугольного четырехугольника, расположенного в предметной плоскости (рис. 284).

Для построения точек схода двух пар параллельных прямых (сторон четырехугольника) проведем на плане через точку зрения проецирующие лучи параллельно этим прямым до пересечения с картиной в точках  $f_1$  и  $f_2$  и перенесем эти точки вертикальными прямыми на линию горизонта. Построим на пла-



ции точки зрения и провести перспективу прямой, которая направлена под углом  $45^\circ$  к картине. Она засечет на перспективе продольной стороны квадрата его вершину. Точки схода  $D_1, P, D_2$  горизонтальных прямых, как и любых других горизонтальных прямых, лежат на линии горизонта. Следовательно, линия горизонта по аналогии с точкой схода параллельных прямых представляет собой линию схода горизонтальных плоскостей.

*Линией схода плоскости является перспектива бесконечно удаленной, не собственной прямой данной плоскости. Она служит линией схода и всех других плоскостей, параллельных данной.*

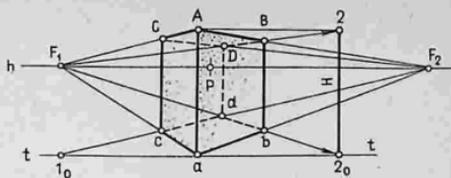
2. Построение перспективы вертикальных плоскостей — четырех попарно параллельных плоскостей равной высоты (рис. 286).

Построения следует начать с перспективы плана, они аналогичны предыдущему примеру. В точках пересечения сторон плана строится перспектива вертикальных прямых. Вертикальные прямые, параллельные картине, не имеют точек схода и изображаются в перспективе вертикальными. Чтобы построить перспективу высот четырехугольников, истинный размер можно нанести только в плоскости картины — в точке  $a$ , где вертикальный отрезок совмещен с картиной, или найти картинный след  $2_0-2$  одной из вертикальных плоскостей.

*Картинным следом плоскости называется линия пересечения плоскости с картиной.*

Проведя перспективу горизонтальных прямых через точки  $A$  и  $2$  вертикальных прямых, закончим построение перспективы плоскостей. Полученное изображение аналогично перспективе прямой четырехгранной призмы — параллелепипеда.

Следовательно, картинными следами вертикальных плоскостей являются вертикальные прямые  $aA$  и  $2_02$ , совмещенные с картиной. Картинным следом горизонтальной плоскости нижнего основания призмы служит линия основания картины — прямая  $tt$ , на которой рас-



положены картинные следы  $1_0, 2_0$  и  $a$  горизонтальных прямых, лежащих в предметной плоскости.

3. Перспектива плоскости общего положения (рис. 287). Наклонная грань призмы является плоскостью общего положения. Перспектива этой грани построена на основе перспективы ее горизонтальной проекции. Точка схода  $F_3$  наклонных (восходящих) прямых  $AB$  и  $CD$  расположена на одной вертикали с точкой схода  $F_2$  вторичных проекций.

Для построения линии схода плоскости общего положения  $ABCD$  надо найти две точки схода наклонных прямых данной плоскости. Такими точками являются точки схода  $F_1$  и  $F_3$  и любые другие точки схода, например, точка схода  $F_3$  диагонали  $AC$  грани. Прямая, проходящая через эти точки, и есть линия схода данной плоскости, т.е. перспектива бесконечно удаленной прямой плоскости. Чтобы построить картинный след этой плоскости, достаточно найти картинный след  $N_1$  одной прямой, принадлежащей плоскости, например перспективы прямой  $AD$ , и провести через эту точку прямую, параллельную линии схода плоскости. Прямая  $N_1N_2$  является картинным следом плоскости.

*Линия схода перспективы плоскости параллельна картинному следу данной плоскости.* Линиями схода вертикальных граней призмы будут перспективы бесконечно удаленных прямых этих плоскостей — прямая  $F_2-F_3$  и вертикальная прямая, проходящая через точку схода  $F_1$ . Прямая  $F_1N_2$  является горизонтальным (предметным) следом перспективы плоскости  $ABCD$ .

**Деление перспективы отрезков прямых.** Построение перспективы объекта обычно состоит из двух этапов:

Рис. 286

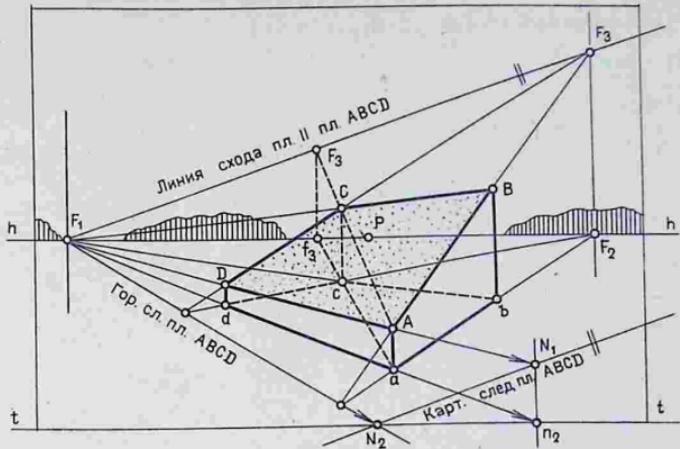
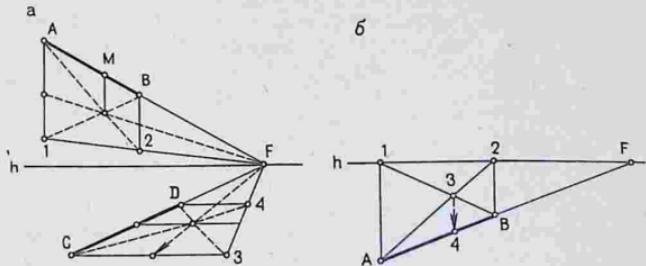


Рис. 287

Рис. 288



1) с помощью плана и фасада строят перспективу основных объемов объекта; 2) членения объема и деталей строят непосредственно в перспективе на основе приемов перспективного деления отрезков прямых на части, так как большинство деталей на плане не изображается. Прямые в перспективе можно отнести к двум основным группам — прямые, параллельные и не параллельные картинной плоскости. *Соотношения отрезков прямой линии, параллельной картине и разделенной на равные или пропорциональные части, не изменяются в перспективе.*

Рассмотрим способы деления перспективы отрезков прямых, не параллельных картине.

1. Деление перспективы отрезков прямых на две равные

части (рис. 288). Чтобы разделить перспективу *горизонтального* отрезка прямой  $AB$  пополам, следует достроить отрезок до перспективы вертикального четырехугольника, а затем через точку пересечения его диагоналей провести вертикаль (рис. 288, а). Перспективу горизонтального отрезка можно разделить на две равные части тем же приемом, используя в качестве перспективы второй параллельной прямой линию горизонта (рис. 288, б).

2. Деление перспективы отрезков прямых на равные или пропорциональные части (рис. 289). Деление отрезков прямых линий в перспективе на равные или пропорциональные части основано на том, что стороны угла делятся параллельными прямыми на пропорциональные части.



Это положение и будет искомым. Если третья, промежуточная точка не известна, необходимо определить середину  $M'$  перспективы отрезка одним из способов, указанных на рис. 288.

### 67. Перспектива окружности

Построение перспективы окружности находит применение при изображении архитектурных сооружений и внутренних пространств зданий круглой формы, а также при построении перспективы сводов, арок и других архитектурных фрагментов.

Проецирующие лучи, проходящие через точку зрения и окружность, образуют наклонный конус с круговым основанием (рис. 291). Пересечение конической поверхности картинной плоскостью является перспективой окружности. В зависимости от положения точки зрения относительно окружности она может проецироваться любой из трех конических кривых:

а) *эллипсом*, если основание точки зрения располагается вне окружности — картина пересекает все образующие конуса (схема 1);

б) *параболой*, если основание точки зрения совпадает с точкой окружности — картинная плоскость параллельна одной образующей конуса (схема 2);

в) *гиперболой*, если основание точки зрения располагается внутри окружности — картинная плоскость параллельна двум образующим конуса (схема 3).

В частном случае, если картина параллельна плоскости окружности, ее перспектива будет окружностью.

На аксонометрическом изображении (см. рис. 291) точка зрения  $S$  расположена над одной из точек средней окружности.

Внутренняя окружность изображается в перспективе эллипсом. Этот наиболее распространенный случай свойствен перспективе *внешнего вида* сооружения круглой формы. Средняя окружность изображается в перспективе параболой, а внешняя окружность — гиперболой. Второй и третий случаи обычно имеют место при построении перспективы *ин-*

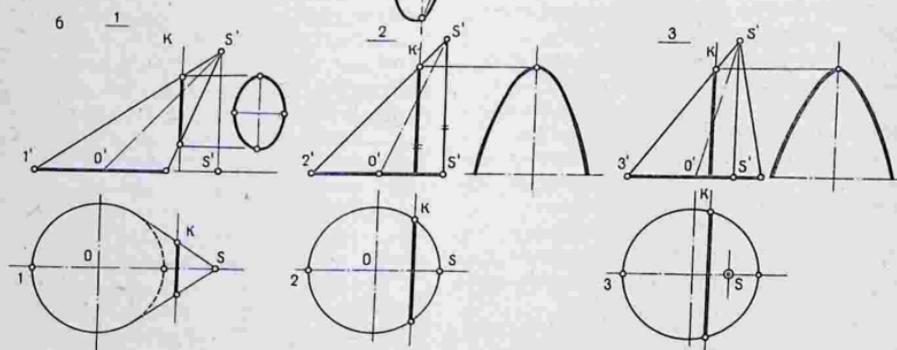
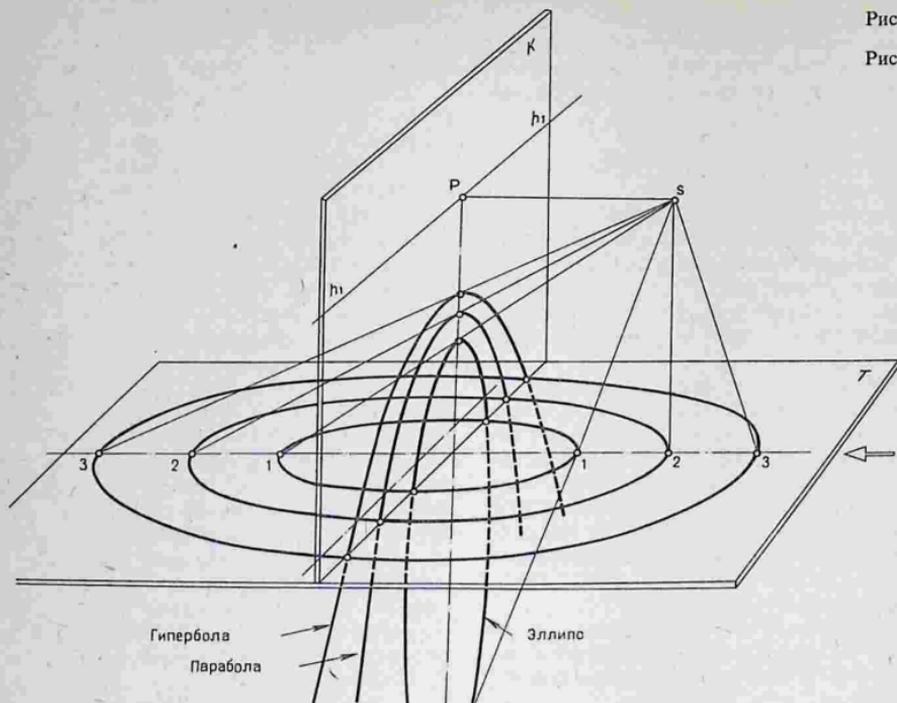
*терьера* круглой в плане формы и воспринимаются на изображении как искажение истинной формы помещения.

1. Построение перспективы окружностей, расположенных в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Применим наиболее простой способ построения перспективы окружности (рис. 292, а) — с помощью построения перспективы описанного квадрата и восьми точек эллипса аналогично построению падающей тени и аксонометрии окружности.

Построим перспективу описанного квадрата, *две стороны которого параллельны основанию картины*, с помощью дистанционной точки  $D$ . Если дистанционная точка окажется за пределами чертежа, можно воспользоваться дробной дистанционной точкой  $D/2$ , проведя перспективу диагонали полуквадрата — прямую  $1-D/2$  (штриховая линия). При вычерчивании кривой эллипса необходимо иметь в виду, что точка  $O$  — перспектива центра окружности и точка  $A$  — центр эллипса не совпадают. Аналогично строится перспектива вертикальной окружности.

Если необходимо вписать эллипс в уже построенную перспективу квадрата, *стороны которого не параллельны картине* (рис. 292, б), следует половину стороны квадрата вынести в плоскость картины с помощью любой точки на горизонте и построить на ней равнобедренный прямоугольный треугольник с соотношением 0,707 для определения точек эллипса на диагоналях перспективы квадрата. Это построение можно выполнить и на горизонтальной прямой  $DC_0$  способом пропорционального деления в перспективе (см. рис. 289, а).

2. Деление перспективы окружности на равные части (рис. 293). На фронтальном диаметре перспективы окружности строим полуокружность, разделенную на части. Полученные точки деления переносим вертикальными линиями на диаметр окружности. Эти прямые в перспективе будут перпендикулярны картине, поэтому через точки на диаметре проводим перспективу прямых, идущих в главную



точку  $P$ . В пересечении с эллипсом получим искомые точки.

**Построение перспективы соосных окружностей.** Изображение нескольких окружностей равного или разных диаметров, расположенных в парал-

лельных плоскостях, довольно часто приходится выполнять при построении перспективы архитектурных фрагментов и сооружений круглой формы. При этом на основе уже выполненной перспективы одной окружности можно по-

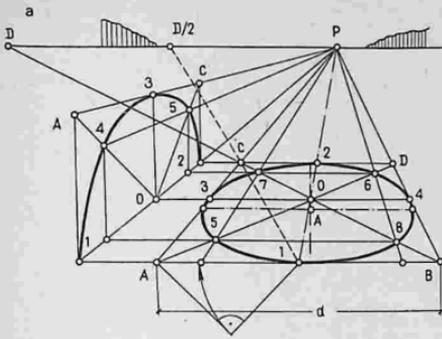
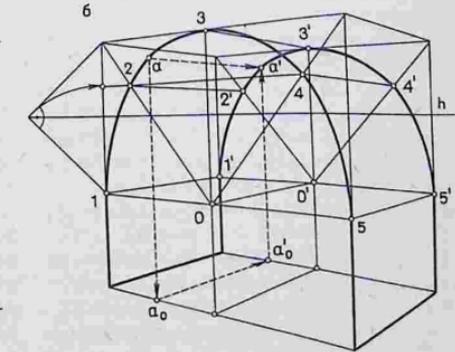
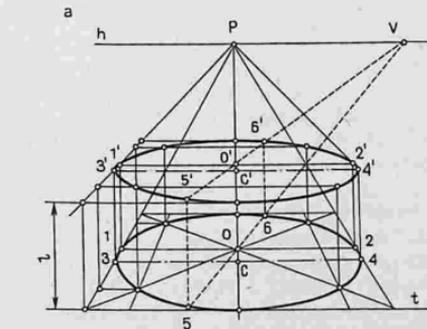


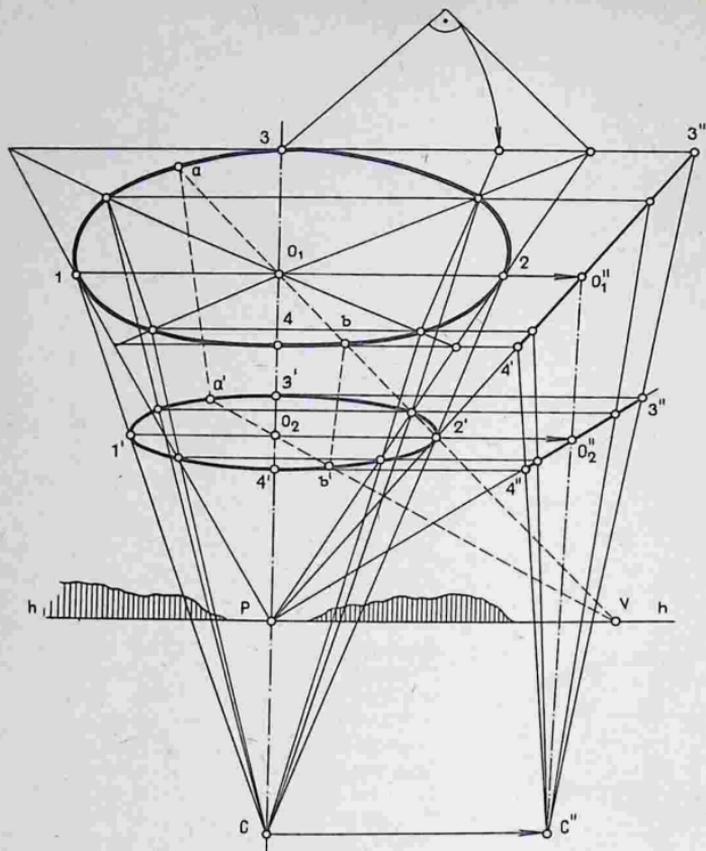
Рис. 293

Рис. 294



строить перспективы остальных, используя структурное соответствие между ними.

1. Построение перспективы второй окружности, расположенной в параллельной плоскости. На рис. 294, а приведена перспектива горизонтальной окружности с центром  $O$ . Для построения перспективы второй окружности откладываем в плоскости картины расстояние  $l$  между окружностями и строим перспективу вспомогательной плоскости, с помощью которой горизонтальными прямыми переносим перспективу центра первой окружности через точки  $1$  и  $1'$  на плоскость второй окружности. В пересечении горизонтали  $1'-2'$  с осью определим центр  $O'$ . Все восемь точек первой окружности переносим с помощью вспомогательной вертикальной плоскости и параллельных горизонта-



лей. Необходимо также перенести точки 3 и 4 — концы большой оси эллипса. Любая дополнительная точка эллипса может быть перенесена также с помощью произвольного диаметра 5–6 с точкой схода  $V$  (штриховые линии).

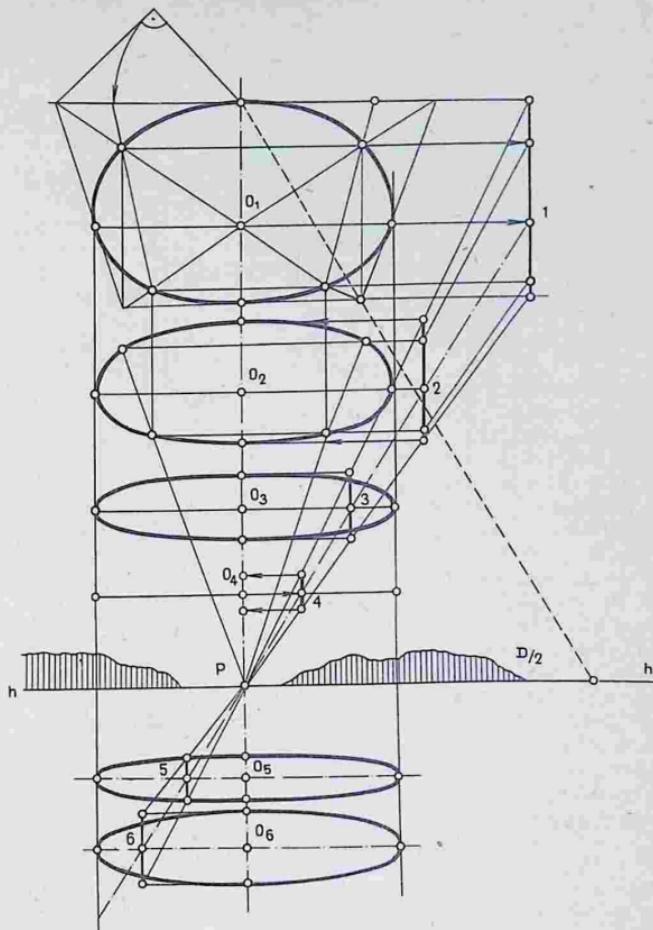
На рис. 294, б показано построение перспективы двух соосных вертикальных полуокружностей. Дополнительная точка  $a$  может быть перенесена на второй полуэллипс с помощью второй горизонтальной проекции.

2. Построение перспективы второй окружности меньшего диаметра, расположенной в параллельной плоскости (рис. 295). Через концы диаметров проводим

прямые до пересечения с осью в точке  $C$ . Проецируем центры окружностей и вершину  $C$  вспомогательного конуса на вспомогательную вертикальную плоскость аналогично построениям на рис. 294, а.

Строим на этой плоскости проекцию оси и профильную проекцию  $3''-4''$  данной перспективы окружности, проводя прямую в главную точку  $P$ . Строим образующие профильной проекции вспомогательного конуса с вершиной в точке  $c''$ . Через профильную проекцию второго центра  $O_2''$  проводим прямую в главную точку  $P$  и определяем положение искомых точек перспективы второй окружности. Дополнительные точ-

Рис. 296

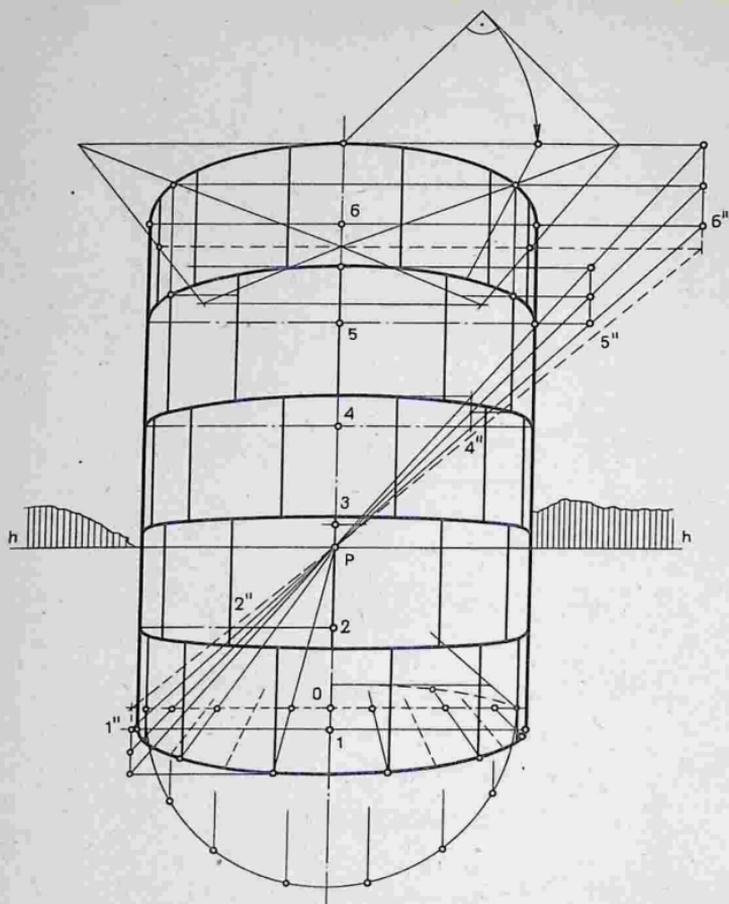


ки  $a'$  и  $b'$  построены с помощью перспективы произвольного диаметра  $ab$  (штриховые линии).

3. Построение перспективы нескольких параллельных окружностей равных диаметров (рис. 296). Перспектива описанного квадрата основной (базовой) окружности с центром  $O_1$  построена с помощью дробной дистанционной точки  $D/2$ . Центр перспективы этой окружности и размер малой оси эллипса выносим на свободное поле чертежа и проводим

вспомогательные прямые через главную точку  $P$  или любую другую точку на линии горизонта.

На рис. 297 приведена перспектива сооружения цилиндрической формы (резервуар), расчлененного на горизонтальные цилиндрические отсеки, которые состоят из блоков с перевязкой швов. В построении перспективы использованы приемы построения сосных параллельных окружностей и деление окружности на равные части. Перспективы окружностей построены



в пределах видимых их частей до концов больших осей эллипсов и точек их

касания к очерковым образующим цилиндрической поверхности.

## Глава 17. Способы построения перспективы

Существует несколько способов построения перспективных изображений. В каждом из них используются различные элементы центрального проецирования. Выбор того или иного способа построений зависит от вида объекта

и его объемно-пространственной структуры. В процессе построения перспективного изображения за основу берется один из способов, однако привлекаются отдельные элементы других способов построения.

Далее будут рассмотрены следующие основные способы построения перспективы:

- 1) способ архитекторов, основанный на использовании точек схода параллельных прямых;
- 2) способ прямоугольных координат и перспективной сетки;
- 3) радиальный способ и способ совмещенных высот.

Прежде чем приступить к построению перспективного изображения и применению того или иного способа, необходимо правильно выбрать положение точки зрения, проверив величину углов зрения.

### 68. Выбор точки зрения и параметров угла

Основная задача перспективы — показать, как будет выглядеть проектируемое сооружение после его возведения в конкретных условиях. Для выполнения этого основного требования необходимо при построении перспективных изображений соблюдать определенные условия по выбору точек зрения (см. прил. 7).

Первое и неперемное условие — *реальность точки зрения*. Она должна выбираться с учетом существующей или запроектированной планировочной ситуации. Выбирая точку зрения, следует мысленно проследить, как будет выглядеть проектируемое здание с различных пунктов улицы или площади. Еще лучше выполнить несколько перспективных эскизов и выбрать лучший из них.

Точка зрения должна выбираться на таком расстоянии от объекта, чтобы его можно было легко охватить одним взглядом. *Горизонтальные углы зрения* между крайними лучами в плане должны находиться в пределах от 20 до 50° (рис. 298, а). *Горизонтальный угол* 50° — это предельная величина угла зрения. Лучшими углами следует считать углы 30–40°. С более близких точек зрения рассматривать объекты целиком трудно, а на перспективных изображениях, построенных с этих точек зрения,

возникают чрезмерные перспективные искажения.

На рис. 298, б показаны перспективные схемы объекта, построенные при различных расстояниях зрителя от объекта. Из сравнения схем видно, что по мере удаления точки зрения от объекта *перспективные ракурсы*<sup>1</sup> уменьшаются и перспектива становится более «спокойной». Однако при дальних точках зрения ( $S_3$ ) точки схода перспектив горизонтальных прямых объекта располагаются на большом расстоянии друг от друга, что усложняет построение перспективы.

При выборе точки зрения необходимо учитывать также и композицию объекта. Если изображается высотное здание, надо проверить и *вертикальный угол зрения* (рис. 299). Для этого следует провести на плане проецирующий луч  $S_0a$  к ближайшему вертикальному ребру объекта, а затем, повернув его вместе с точкой зрения во фронтальное положение, спроецировать на фасад, на линию горизонта. Из полученной точки  $S'$  надо провести луч к верхней точке ребра здания и проверить величину угла.

*Вертикальный угол зрения* удобно *отсчитывать от перпендикуляра, проведенного к картине, т. е. от главного луча*. Это половина полного угла зрения. Вертикальный угол зрения  $\varphi/2$  не должен превышать 40°. Если он выходит за эти пределы, следует отдалить точку зрения от здания и определить обратным движением новое ее положение на плане (штриховые линии — точка  $S_1$ ).

Правильный выбор положения точки зрения предопределяет и высоту горизонта зрения, которая также должна быть реальной.

Итак, предварительную, но очень важную часть работы выполняют в такой последовательности:

- 1) выбирают положение точки зрения и проверяют величину углов зрения;

<sup>1</sup> Ракурсом называется величина отклонения плоскости объекта относительно картинной плоскости, которая выражается на перспективном изображении в степени сходимости горизонтальных прямых этой плоскости к линии горизонта и в уменьшении перспективных размеров вертикальных отрезков по мере их удаления от картины.

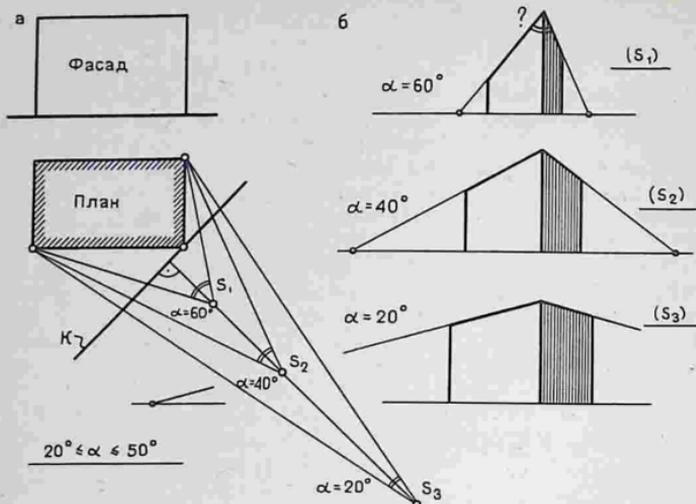


Рис. 298

Рис. 300

Рис. 301

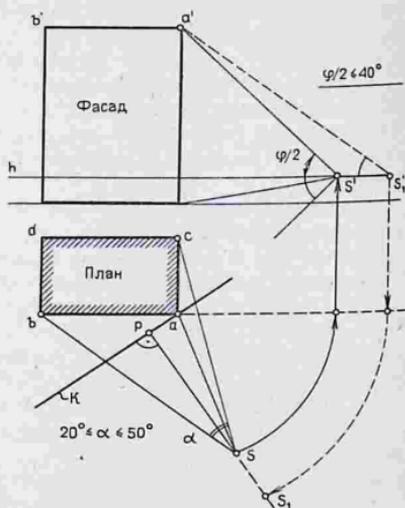
Рис. 299

2) проводят биссектрису горизонтального угла зрения, которая представляет собой направление главного луча зрения;

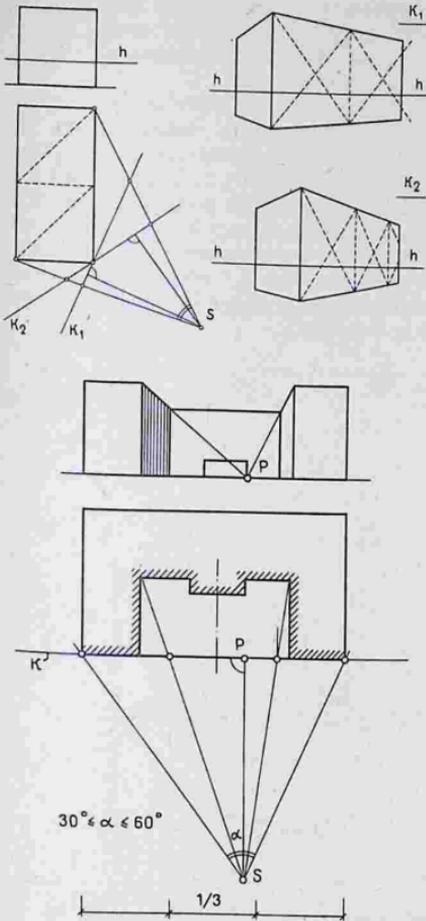
3) перпендикулярно главному лучу проводят след картинной плоскости.

Нарушение указанных требований приводит к неестественным и недостоверным результатам. Как следует из схем, изображенных на рис. 300, если произвольно располагать главный луч и связанную с ним картину в пределах горизонтального угла зрения, можно получить целый ряд различных изображений объекта. Этот факт приводит к неправдоподобному выводу, что наблюдатель, рассматривая объект из неподвижной точки зрения, видит его по-разному.

Перемещение картинной плоскости вдоль главного луча параллельно самой себе не оказывает влияния на характер перспективного изображения, оно сказывается только на размере перспективной проекции. Картину можно провести как через ближее вертикальное ребро здания, так и в любом другом месте плана. При этом следует иметь в виду, что параметры объекта и его высота (при совмещении с картиной) проецируются в истинную величину (в масштабе ортогональных проекций).



В зависимости от положения точки зрения и картинной плоскости относительно объекта возможны два вида перспектив. Если картинная плоскость не параллельна основным плоскостям фасадов здания, перспектива называется *угловой* (см. рис. 275, 298). Это наиболее распространенный в архитектурной практике вид перспективного изображения и более сложный для построения.



Если картинная плоскость параллельна одной из основных плоскостей объекта, перспектива называется *фронтальной* (см. рис. 274). Она по построению проще угловой перспективы, так как строится с одной точкой схода. Фронтальные перспективы находят применение при построении интерьеров зданий<sup>1</sup>, внутренних дворов, улиц, а также внешнего вида здания с ризалитами и отступом средней части.

При построении фронтальных пер-

спектив зданий горизонтальный угол зрения должен находиться в пределах  $30-60^\circ$  (рис. 301). Нарушение этого условия в одном случае приводит к перспективным искажениям, а в другом — к невыразительному, плоскостному изображению здания, близкому к фасадной его проекции.

При фронтальном положении картинной плоскости точка зрения должна была бы находиться на оси симметрии плана и угла зрения. Однако при симметричном положении точки зрения перспективный ракурс продольных плоскостей объекта оказывается одинаковым, что приводит к композиционному безразличию изображения объекта. Поэтому при выборе положения точки зрения допускается отклонение от оси симметрии плана в пределах средней трети ширины объекта (см. рис. 301). При этом картина остается расположенной фронтально.

### 69. Способ архитекторов

В практике построения архитектурных перспектив этот способ получил наибольшее применение. Он основан на использовании точек схода перспектив параллельных горизонтальных прямых объекта и благодаря этому отличается большой графической точностью и простотой построений. Этот способ принято называть способом архитекторов<sup>1</sup>.

При построении перспективы могут быть использованы две точки схода прямых или одна точка схода и картинные следы прямых. Рассмотрим оба приема построений.

**Построение перспективы с двумя точками схода.** На рис. 302, а даны план и фасад объекта. Вся предварительная часть построений уже выполнена: выбрана точка зрения и проверена величина горизонтального и вертикального углов зрения, на фасаде нанесена линия горизонта, на плане проведена биссектриса угла зрения — главный луч; след

<sup>1</sup> Основные сведения о построении перспективы интерьера и выборе точки зрения излагаются в гл. 18.

<sup>1</sup> Назван так, поскольку основы этого способа были разработаны и применялись архитекторами и художниками Возрождения (Филиппо Брунеллески, Гвидо Убальди и др.). Он с успехом применяется и в современной архитектурной практике.

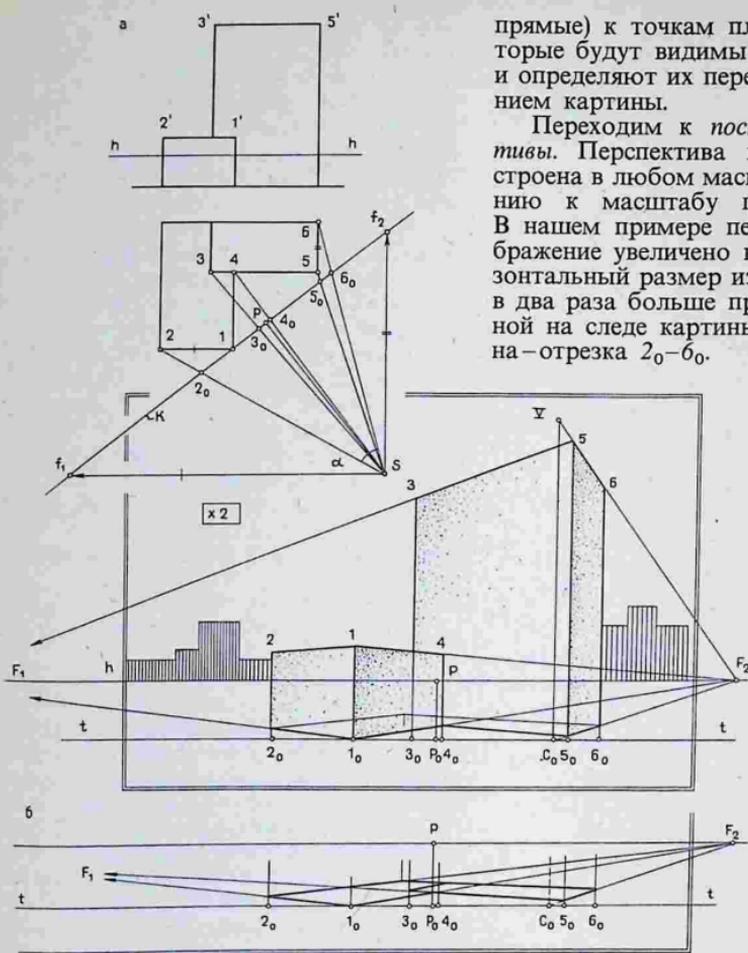


Рис. 302

прямые) к точкам плана объекта, которые будут видимы из точки зрения, и определяют их пересечение с основанием картины.

Переходим к построению перспективы. Перспектива может быть построена в любом масштабе по отношению к масштабу плана и фасада. В нашем примере перспективное изображение увеличено в два раза. Горизонтальный размер изображения будет в два раза больше проекции, полученной на следе картины исходного плана — отрезка  $2_0-6_0$ .

картинной плоскости проведен через ближнее вертикальное ребро пониженного объема здания перпендикулярно главному лучу.

Дальнейшие построения на исходном плане выполняют в такой последовательности:

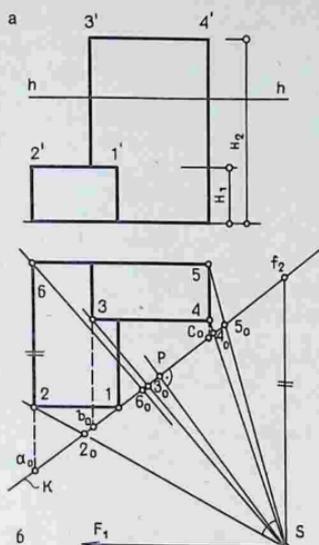
1) определяют точки схода  $f_1$  и  $f_2$  прямых, проводя через основание  $s$  точки зрения проецирующие лучи параллельно соответствующим прямым объекта;

2) из основания  $s$  точки зрения проводят проецирующие лучи (радиальные

Рассмотрим последовательность построения перспективы здания.

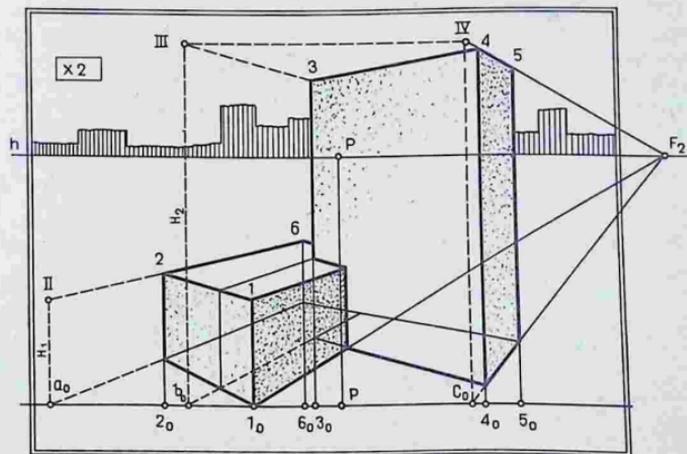
1. Построение перспективного изображения объекта начинают с перспективы плана (рис. 302, а). На линию горизонта переносят главную точку  $P$  и точки схода  $F_1$  и  $F_2$  с увеличением расстояний между ними в два раза. На основание  $tt$  картины переносят точки, полученные засечками на следе картины исходного плана, откладывая их от второй проекции  $p_0$  главной точки картины. На рис. 302, б показано более детально построение перспективы плана.

Рис. 303 а



2. Построение перспективы вертикальных ребер объекта (высот) начинают с точки  $1_0$ , где размер ребра пониженного объема, взятый с фасада, проецируется в истинную величину (с учетом масштаба увеличения). Чтобы построить перспективу вертикального ребра 5, необходимо на плане построить вторичную проекцию  $c_0$  картинного следа прямой  $5_0b_0$ , проходящей через данное ребро в точку схода  $F_2$ . В точке  $c_0$  картинного следа можно нанести истинный размер ребра 5 (штриховые линии). Прямая, проведенная из точки  $V$  в точку схода  $F_2$ , разделит перспективу данного ребра. Перспективы горизонтальных прямых, проведенные через точки 1 и 5 в точки схода, определяют высоты остальных вертикальных ребер. Перспектива основных объемов здания построена.

При построении перспективы данным способом одна точка схода



Через точки, нанесенные на основание картины, проводят вертикальные прямые — перспективу радиальных прямых. Затем проводят перспективу прямых в точки схода  $F_1$  и  $F_2$  и в пересечении с вертикальными прямыми получают точки перспективы плана в такой последовательности: точки  $2_0$ ,  $4_0$ ,  $5_0$  и  $6_0$ . Следует выделить видимые участки перспектив прямых плана.

обычно оказывается на значительном расстоянии от поля чертежа, поэтому строить перспективу с двумя точками схода целесообразно при выполнении эскизной перспективы небольшого размера, когда обе точки схода размещаются на чертеже.

Построение перспективы с одной точкой схода. Последовательность отдельных этапов остается прежней. Перс-

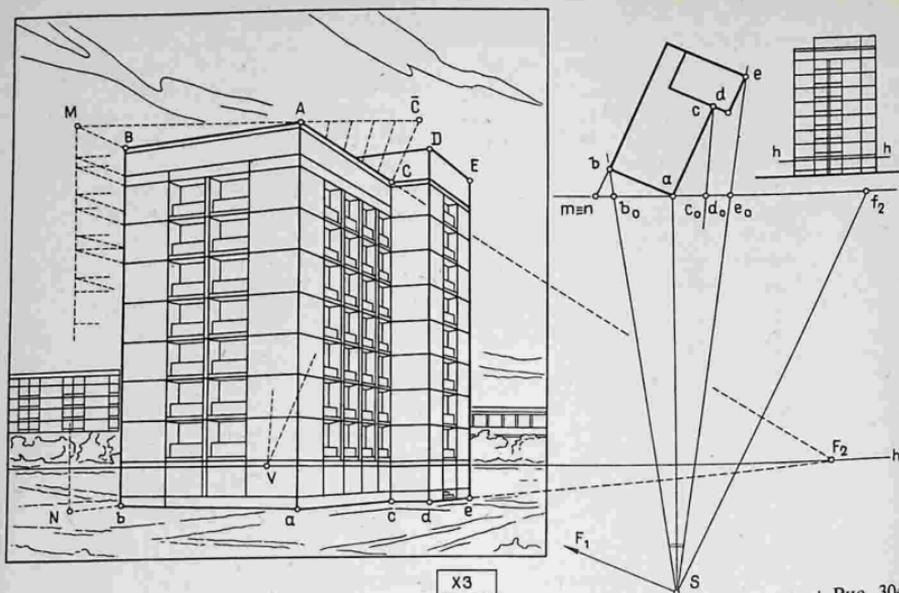
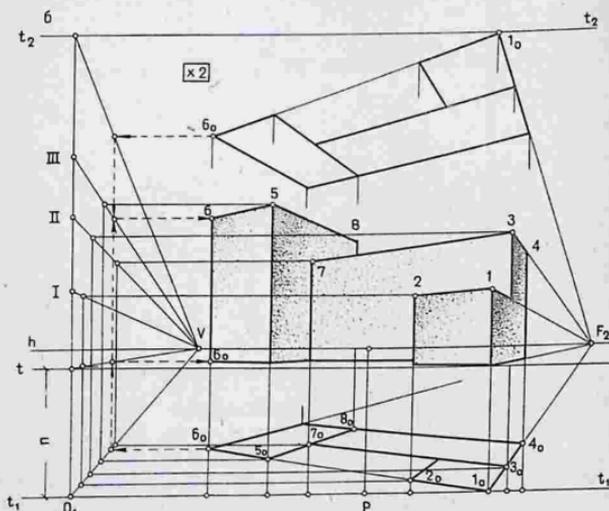
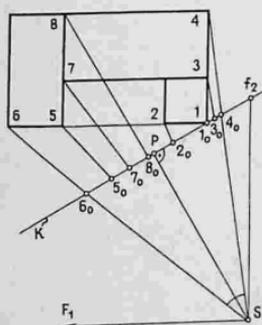
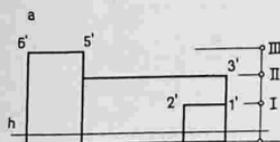


Рис. 304

Рис. 305



перспективы точек плана определяют пересечением двух прямых: прямой плана, проходящей через картинные следы и доступную точку схода  $F_2$ , и проеци-

рующей радиальной прямой. Для построения перспективы плана с одной доступной точкой схода  $F_2$  (рис. 303,а) сначала следует на исходной проекции

плана построить картинные следы  $a_0, b_0$  и  $c_0$  прямых, проходящих через точки 2, 3 и 4 плана и точку схода  $F_2$  (штриховые линии). Это даст возможность построить перспективу этих точек, через которые можно будет затем провести перспективу отрезков прямых плана без недоступной точки  $F_1$ , но направленных к ней (рис. 303, б).

Перспективу вертикальных ребер строят с помощью картинных следов  $a_0, b_0$  и  $c_0$  вторичных проекций прямых. В плоскости картины наносят истинные размеры вертикальных ребер 2, 3 и 4 и проводят прямые в точку схода  $F_2$  (штриховые линии). Перспективу горизонтальных прямых в одном случае проводят в точку схода  $F_2$ , а в другом — соединяют пару построенных точек 1—2 и 3—4.

Первый и второй примеры показывают, что с помощью чертежей плана и фасада можно построить перспективу основных объемов зданий. Построение членений и архитектурных деталей выполняется на самом перспективном изображении приемами деления отрезков в перспективе (см. § 66).

На рис. 304 приведена перспектива жилого дома, построенная способом архитекторов с одной точкой схода  $F_2$ . Размеры исходных проекций увеличены в три раза. Перспектива прямых, идущих в недоступную точку схода  $F_1$ , а также поэтажные членения вертикального ребра  $Vb$  построены с помощью картинного следа  $MN$  невидимой продольной плоскости фасада здания. Членения вертикального ребра перенесены с фасада на картинный след плоскости — прямую  $MN$ , а затем прямыми, идущими в точку схода  $F_2$ , перенесены на перспективу  $Vb$  ребра. Членение перспективы  $AC$  горизонтального ребра построено способом пропорционального деления с центром соответствия  $V$  на линии горизонта.

**Применение дополнительного плана и вспомогательной вертикальной плоскости.** В случаях когда высота горизонта мала и вторичная проекция объекта оказывается сжатой (рис. 305), что затрудняет дальнейшие построения на

перспективе плана, применяют *вспомогательную горизонтальную плоскость*. Перспективу плана строят не на предметной плоскости, а на этой вспомогательной, опущенной вниз от предметной плоскости на произвольное расстояние  $n$  (основание картины  $t_1t_1$ ) или поднятой вверх. При этом перспектива плана оказывается более раскрытой (см. прил. 4). Затем с помощью другой *вспомогательной вертикальной плоскости* переносят построения на предметную плоскость. Картинным следом этой плоскости будет вертикальная прямая  $O_1O_2$ , а точкой схода ее горизонталей — произвольная точка  $V$  на линии горизонта. На картинном следе вертикальной плоскости откладывают истинные размеры  $I, II, III$  вертикальных ребер объекта (в масштабе увеличения) и проводят прямые в точку  $V$ .

Таким образом, с помощью дополнительного плана и вспомогательной вертикальной плоскости можно построить с одной точкой схода как перспективу плана на предметной плоскости, так и перспективы вертикальных ребер объекта (см. построение точки  $b$ , выделенное штриховыми линиями).

### 70. Радиальный способ и способ совмещенных высот

Сущность *радиального способа* построения перспективы заключается в определении точек пересечения проецирующих лучей с картинной плоскостью с помощью построения картинных следов прямых, перпендикулярных картине. Этот способ поэтому называется также *способом следа луча*. Он находит применение главным образом при построении фронтальных перспектив улиц, внутренних дворов, фасадов зданий с выступающими вперед частями и т. д.

Рассмотрим примеры построения перспективы способом следа луча:

1. Построение фронтальной перспективы здания (рис. 306). Точка зрения располагается в пределах средней трети ширины фасада, как это было установлено ранее (см. § 68,

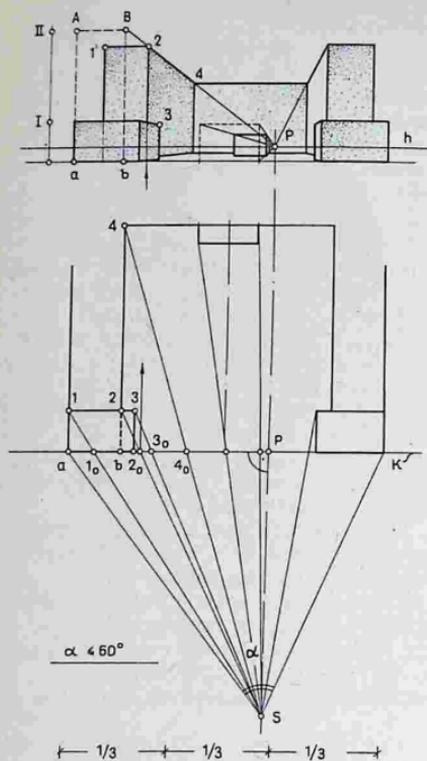


рис. 301). Картина совмещена с фронтальными плоскостями выступающих вперед объемов здания. Точкой схода перспективы прямых является главная точка картины  $P$ . Для построения перспективы точки, например точки 2, сначала строят картинный след  $B$  ( $b$ ) прямой  $4-b$ , проходящей через точку 2, отложив на перспективе высоту  $H_{II}$  точки 2, взятую с фасада. Затем проводят горизонтальную  $S2$  и фронтальную  $PB'$  проекции луча. Вертикаль, проведенная из точки  $2_0$  плана, в пересечении с перспективой прямой  $PB'$  (фронтальной проекцией луча) определит перспективу точки  $2'$ . Некоторые плоскости объекта совпадают с картинной плоскостью или параллельны ей; эти плоскости изображаются в перспективе или в истинную величину или проецируются с уменьше-

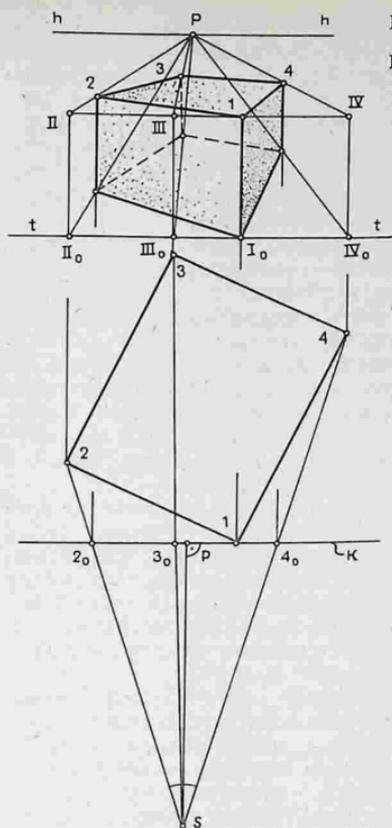


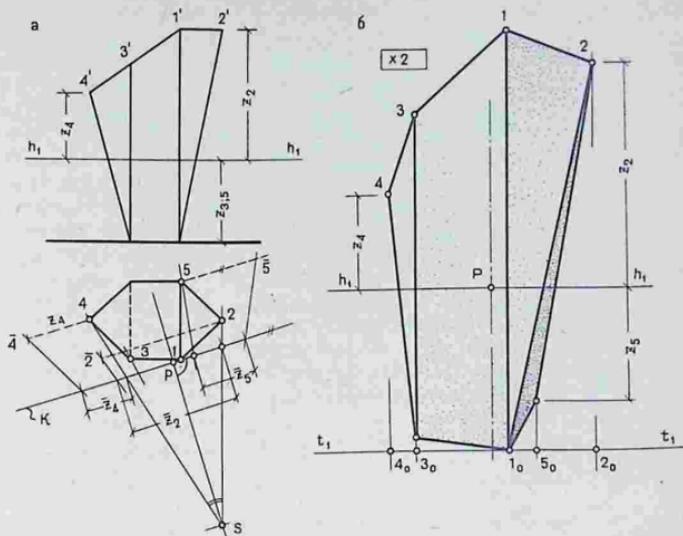
Рис. 306

Рис. 307

нием, оставаясь подобными своим действительным формам.

2. Построение угловой перспективы. На рис. 307 построена угловая перспектива объекта. Построения аналогичны предыдущему примеру, однако при построении перспективы точек, определяя картинные следы прямых, оказывается необходимым вычертить дополнительную фронтальную проекцию объекта в повернутом положении. Положительное качество радиального способа состоит в компактности построений и отсутствии удаленных от поля чертежа точек схода. К числу недостатков следует отнести малую графическую точность построений в средней части изображения вли-

Рис. 308



зи главной точки картины  $P$  (например, построение перспективы точки 3), а также необходимость выполнения дополнительной ортогональной проекции фасада при построении угловой перспективы.

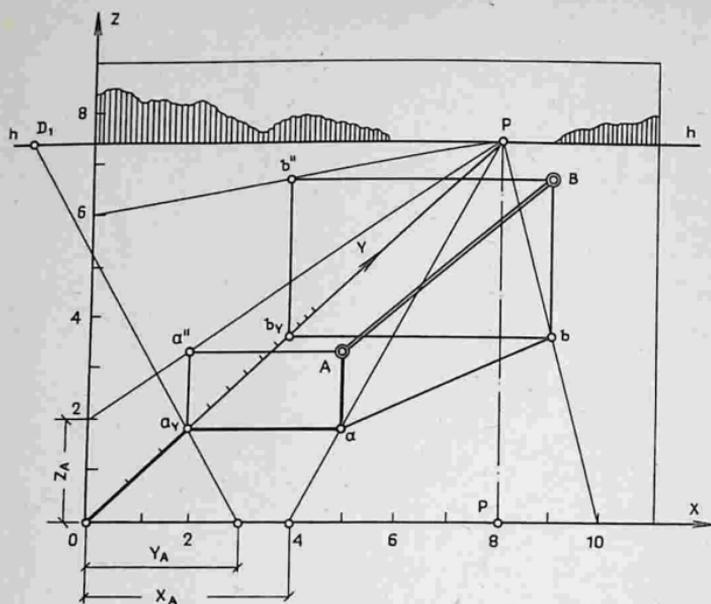
**Способ совмещенных высот.** Этот способ представляет собой разновидность радиального способа построения перспективы с совмещением высот точек на плане (рис. 308) и является простейшим способом построения перспективы. Его применение не требует знания теории перспективы. Он применяется при построении перспективы несложных объектов нерегулярной формы, когда использование точек схода прямых нецелесообразно. Несмотря на некоторую многодедность построений, этот метод выгодно отличается от радиального способа, основанного на применении картинных следов прямых, своей простотой, а также определенной универсальностью. *Пользуясь совмещением высот, можно построить как угловую, так и фронтальную перспективу без точек схода, а также перспективу объектов неправильной формы.*

После определения точек пересечения процирующих лучей с основанием

картины для построения перспективы точки, например точки 4, расстояние от линии горизонта до фронтальной проекции точки, взятое с фасада, совмещают с планом, проводя прямую параллельно основанию картины. Затем из совмещенной точки 4 проводят лучевую прямую к точке зрения. Пересечение этой прямой с основанием картины определяет расстояние  $\bar{z}_4$  перспективы точки 4 от линии горизонта. С целью экономии рабочего места на поле чертежа совмещение высот точек на плане можно производить в любую сторону.

### 71. Способ прямоугольных координат и перспективной сетки

Координатный способ построения перспективы, как и радиальный способ, имеет ограниченное применение. Он используется главным образом при изображении несложных объектов неправильной формы. Сущность этого способа заключается в построении перспективы объекта, отнесенного к прямоугольной системе координат с помощью изображения в перспективе координатной системы (рис. 309).



Для построения перспективы объекта на план и фасад наносят оси прямоугольной системы координат таким образом, чтобы картинная плоскость совпала с координатной плоскостью  $xoz$ , а предметная плоскость — с координатной плоскостью  $xoy$ . При этом основание картины совпадает с осью  $x$ , ось  $z$  вертикальна, ось  $y$ , перпендикулярная картине, проходит через главную точку картины. Координатные оси, построенные в перспективе, называют *перспективным масштабом*. Ось  $x$  называют *масштабом широт*, ось  $z$  — *масштабом высот*, ось  $y$  — *масштабом глубины*. По осям  $x$  и  $z$  откладывают натуральные единицы измерения. По оси  $y$  их откладывают с помощью дистанционной точки  $D$ . Так, например, для построения перспективы точки  $A$  — одного из концов отрезка  $AB$  — на осях  $x$  и  $z$  откладывают абсциссу и аппликуату точки  $A$ . Ординаты точки в перспективе строят с помощью дистанционной точки, откладывая истинную величину ординаты  $y_A$  на основании картины. Затем проводят вспомогательные горизонтальные и верти-

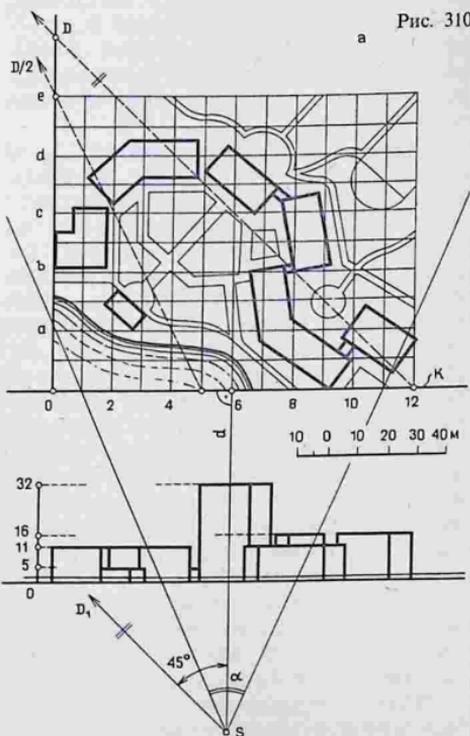


Рис. 310

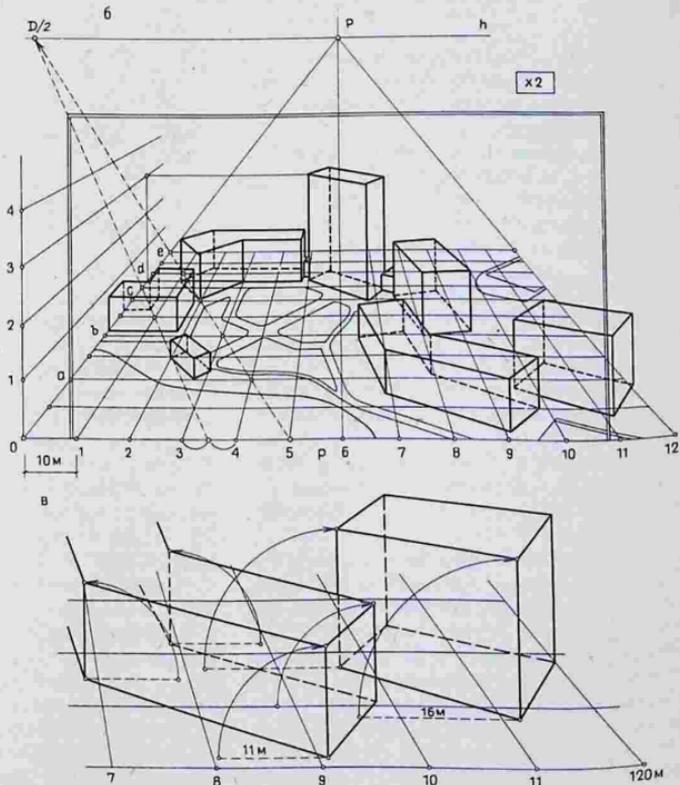
кальные прямые и получают вторичную проекцию  $a$  точки и ее перспективу  $A$ .

**Способ перспективной сетки.** Этот способ является разновидностью координатного способа. Он также основан на применении перспективных масштабов. Способ сетки применяют при построении «планировочных» перспектив с высоким горизонтом при проектировании градостроительных и промышленных объектов, расположенных на значительной территории.

После выбора точки зрения (рис. 310, *a*) на исходный план объекта наносят сетку фронтально расположенных квадратов со стороной, равной 1, 2, 5, 10, ... м. По сторонам сетки ставят буквенные и цифровые обозначения ячеек. На фасаде отмечают размеры высот объектов. Перспективную сетку строят

с помощью дистанционной точки или *дробной дистанционной точки*  $D/2$ , как в данном примере (рис. 310, *б*). Учитывая увеличение перспективы в два раза, от главной точки  $P$  на линии горизонта отложена величина дистанции  $d$ . Пересечение прямой  $5-e$ , проведенной в точку  $D/2$ , с прямыми сетки, идущими в главную точку, определит положение линий сетки (через одну), параллельных основанию картины. Чтобы найти положение промежуточных прямых сетки, следует провести вторую прямую через середину любой фронтальной стороны квадрата. Определив положение точек на плане относительно сторон ячейки, наносят их на перспективную сетку, пользуясь интерполированием на глаз на продольных линиях сетки и с помощью графического углового масшта-

Рис. 310



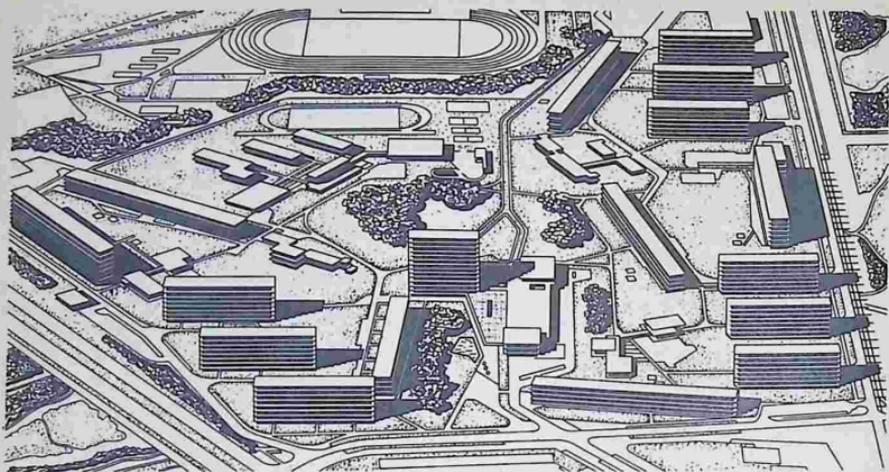


Рис. 311

ба на поперечных линиях. Соединив построенные точки прямыми или кривыми линиями, получают вторичную проекцию объекта.

*Перспективу высот* можно построить, применяя вспомогательную вертикальную плоскость с горизонталями, идущими в главную точку картины, или используя ячейки сетки как перспективную масштабную шкалу (см. рис. 310, в), откладывая размер от вторичной проекции точки параллельно поперечным линиям сетки аналогично способу совмещенных высот.

При построении вторичной проекции точек и перспективы высот необходимо учитывать отметки соответствующего участка рельефа местности – величину превышения оснований точек над условной плоскостью, принятой за нулевую.

На рис. 311 приведена *планировочная перспектива*, построенная при высоком горизонте зрения (так называемая перспектива «с птичьего полета»). Построение планировочной перспективы может быть выполнено обычными приемами с использованием точек схода прямых основных направлений, а также способом перспективной сетки, когда размещение архитектурных объектов

имеет нерегулярный характер (см. прил. 6).

#### 72. Проведение перспектив прямых в недоступную точку схода

При построении архитектурных перспектив обычно одна из точек схода прямых оказывается за пределами чертежа. В таких случаях применяют *способы построения перспектив параллельных прямых без точки схода*. Чтобы можно было провести через любую точку картины перспективу прямой в недоступную точку схода, необходимо наличие на картине *перспектив двух прямых*, имеющих направление в эту точку схода. Одной из таких прямых может служить *линия горизонта*.

**Применение пропорционального деления прямых.** На рис. 312, а через точку С проведена перспектива прямой, параллельной горизонтальной прямой АВ, с помощью двух подобных треугольников с параллельными сторонами. Если необходимо провести перспективу *нескольких прямых* через точки вертикальной прямой (рис. 312, б), точечный

Рис. 312

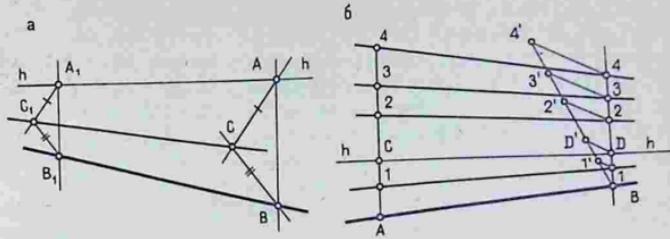


Рис. 313

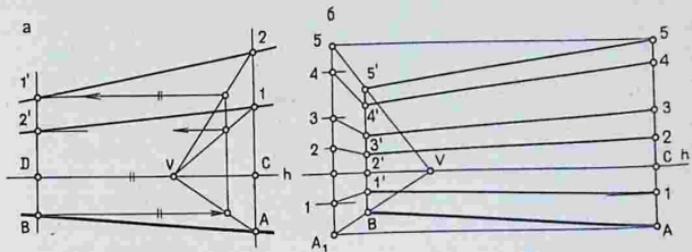
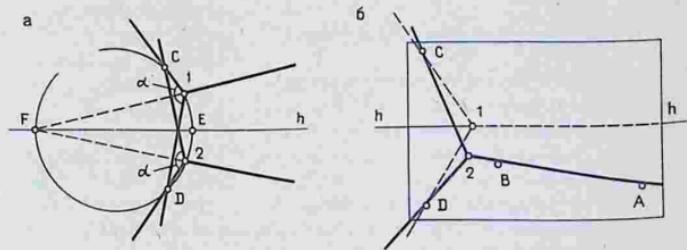


Рис. 314



ряд  $1 \dots 4$  переносят на сокращенную перспективу вторую вертикаль с помощью пропорционального угла.

На рис. 313 приведены еще два приема построения перспективы нескольких прямых, направленных в недоступную точку схода.

В первом из них (рис. 313, а) через точки исходной вертикали проводят пучок прямых через произвольную точку  $V$  на линии горизонта. Из точки  $B$  проводят горизонталь и в пересечении с прямой  $AV$  пучка проводят вертикаль. Точки пересечения прямых пучка с этой вертикалью переносят затем горизонталями (засечками по рейсшине) на вторую вертикаль перспективы.

Во втором приеме (рис. 313, б) аналогичный пучок прямых выстраивают на противоположной стороне, у второй вертикали.

**Применение перспективной линейки.**  
В тех случаях, когда необходимо провести в недоступную точку схода значительное число перспектив прямых линий, применяют несложное приспособление — перспективную линейку («трилинейку»), состоящую из трех соединенных наглухо или шарнирно линеек — рабочей и двух направляющих (рис. 314). Принцип, на котором основано применение перспективной линейки, заключается в следующем (рис. 314, а). Если стороны угла  $\alpha$  перемещать по двум неподвижным точкам  $C$  и  $D$  вместе с третьей стороной, жестко связанной с первыми двумя, то третья прямая в любом положении будет проходить в своем продолжении через одну точку  $F$  окружности, проходящей через точки  $C$  и  $D$ .

Рассмотрим применение перспек-

тивной линейки с жестким соединением (рис. 314, б). Рабочую кромку линейки совмещают с линией горизонта и прочерчивают по направляющим кромкам прямые линии (см. положение 1). Затем рабочую кромку линейки прикладывают к перспективе линии  $AB$ , направленной к недоступной точке  $F$ , и также прочерчивают по направляющим кромкам прямые (см. положение 2). Пересечение проведенных прямых определит положение точек  $C$  и  $D$ . Эти точки закрепляют чертежными булавками, по которым в процессе работы скользят направляющие кромки. Чтобы точки  $C$  и  $D$  разместились по краям листа, положение точек подбирают несколько раз. При стандартном размере чертежного листа длина рабочей линейки равна примерно 80–90 см, а направляющих — 40–60 см.

### 73. Композиция перспективы

Перспективное изображение должно отвечать своему основному назначению — *создавать достоверное представление* о проектируемом сооружении и наиболее полно и выразительно представить его внешний облик и объемно-пространственную структуру здания, а также композиционную связь с окружающей застройкой.

**Выбор положения точки зрения.** Приступая к построению перспективы, следует выбрать точки зрения, наиболее точно раскрывающие авторский замысел. Однако при этом должно выполняться основное требование — *точка зрения должна быть реальной*. Она должна соответствовать существующей или проектируемой планировочной ситуации и наиболее характерным пунктам улицы или площади с интенсивным пешеходным движением.

Следует сначала мысленно проследить, как будет выглядеть проектируемое здание с различных пунктов улицы, а затем выполнить два-три эскиза небольшого размера без разработки деталей, но с точным перспективным построением. Подобная предварительная, но очень важная часть работы должна

проходить по следующей примерной схеме. На рис. 315 на плане показаны различные положения зрителя и перспективные схемы, соответствующие каждой из четырех точек зрения.

*Первая схема* (точка  $S_1$ ) показывает вид здания сбоку. При этом оказывается скрытой основная часть главного фасада с входом в здание. Перспектива не может дать достаточно полного представления о композиции здания.

*На второй схеме* ( $S_2$ ) представлен вид здания с главного фасада. Здесь хорошо показан основной фасад, но мы не видим бокового и не представляем себе объема здания в целом.

*На третьей схеме* ( $S_3$ ) — угловая перспектива здания. Видны оба фасада, однако вследствие того, что перспективный ракурс фасадов одинаков, перспектива здания оказалась невыразительной и композиционно безразличной. Кроме того, ближний ризалит закрывает входную часть здания.

Наиболее удачной следует считать точку  $S_4$ .

Все эти схемы должны быть прослежены и проанализированы автором. Затем на эскизе определяют композицию изображения: намечают окружение здания (антураж), общий характер светотени, а также рамку, обрамляющую перспективное изображение (см. рис. 315, схема  $S_4$ ).

Если подобная проверка даст положительные результаты, переходят к выполнению основной перспективы. Если же окажется, что композиция проектируемого здания на перспективе выглядит недостаточно выразительной, не следует искусственно «подправлять» перспективу, достигая при этом лишь внешнего эффекта изображения; необходимо обратиться к самому проекту и внести в него необходимые коррективы, а затем снова проверить их в перспективе.

Необходимо учесть также, что при выборе положения точки зрения на планировочной ситуации могут возникнуть случайные совпадения в перспективе отдельных элементов здания или его граничных контуров, слияние ребер объе-

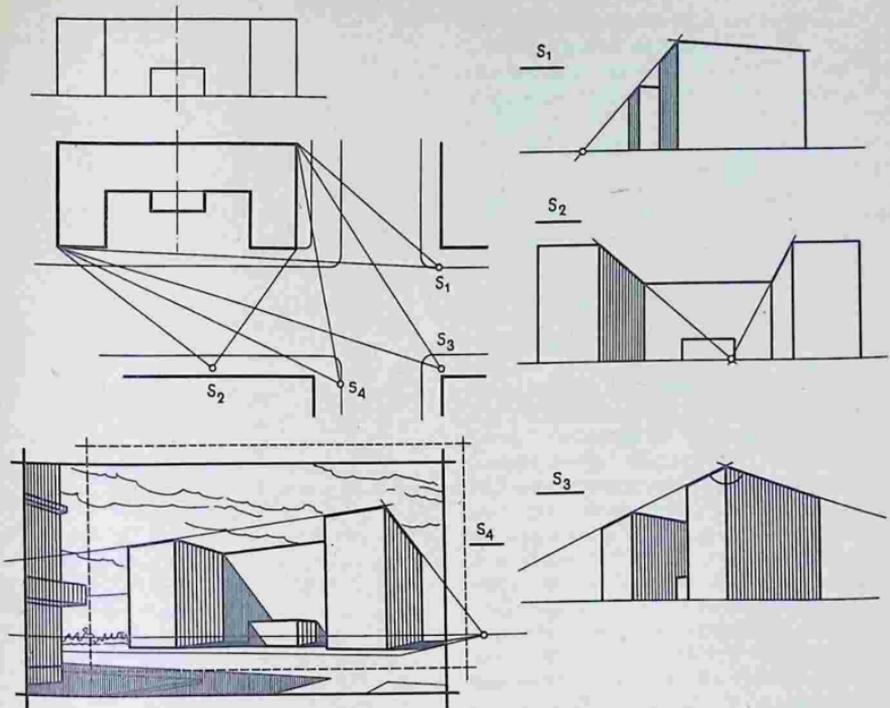


Рис. 315

мов здания в одну линию, а также совпадение линии горизонта с горизонтальными членениями (рис. 316). Это не только снижает выразительность изображения, но и затрудняет восприятие композиции здания. Незначительное перемещение точки зрения в пределах данного участка плана, как правило, устраняет эти отрицательные моменты.

**Композиция перспективного изображения на листе.** Размещение перспективы сооружения на листе (подрамнике) имеет более важное значение, чем расположение других видов проекций, поскольку поле изображения воспринимается как окружающее здание пространство. При построении композиции листа следует предусмотреть свободное пространство перед главным фасадом со стороны входов в здание (рис. 317, а). Ограничивая пространство вокруг

изображения объекта, можно подчеркнуть его монументальность, значительность. Как правило, сверху над изображением оставляют большее пространство. Однако высота здания может быть подчеркнута уменьшением свободного пространства над изображением.

При выборе рамки изображения и пропорций листа многое зависит от того, в какой мере в композицию перспективы включаются окружающая среда и пейзаж. Существует связь между углами зрения и рамкой перспективы. Изображение проектируемого сооружения должно находиться в пределах *нормального угла зрения*  $40-45^\circ$  (рис. 317, б). Окружающая застройка, пейзаж, небо могут незначительно выходить за эти пределы и ограничиваться большими горизонтальными углами, назовем их *углами охвата*, которые должны быть не более  $60-70^\circ$ . Нельзя, по-

строив перспективу здания в пределах указанных углов зрения, неограниченно раздвигать затем рамки картины, меняя композицию изображения и пририсовывая в перспективе окружающие здания и пейзаж [3]. Если это необходимо сделать, следует изменить положение точки зрения и снова проверить композицию изображения в эскизной перспективе.

При построении панорамных перспектив, отображающих большие пространства градостроительных комплексов, горизонтальные углы зрения могут достигать  $80-90^\circ$  (рис. 318). Панорамные перспективные изображения при небольших вертикальных углах зрения ( $\varphi/2 \leq 30-35^\circ$ ) отличаются вытянутыми по горизонтали пропорциями с соотношением сторон рамки изображения  $1:3; 1:4$ . Большие горизонтальные углы зрения требуют применения специальных способов построения широкоугольных перспектив (см. гл. 24).

Построение и композиция панорамных перспектив требуют выявления объемно-пространственной структуры архитектурного комплекса, изображения массивов зелени и других элементов благоустройства.

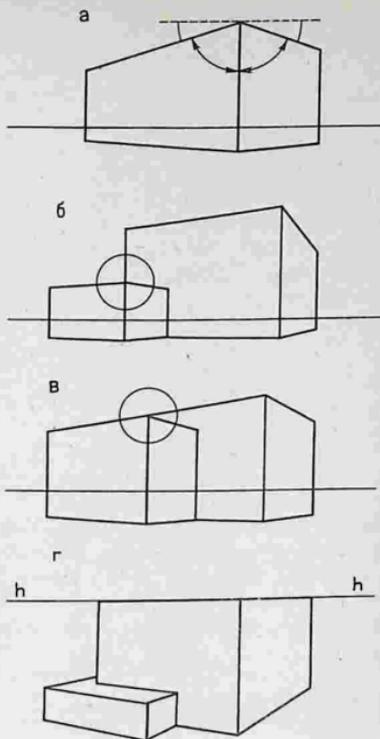


Рис. 316

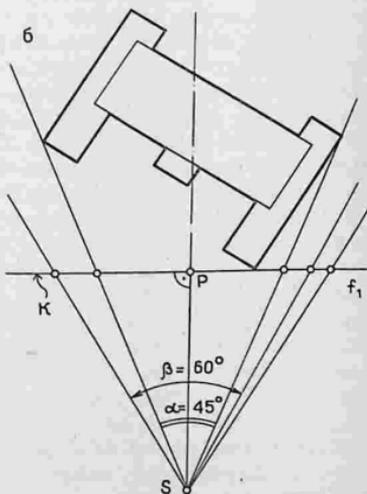
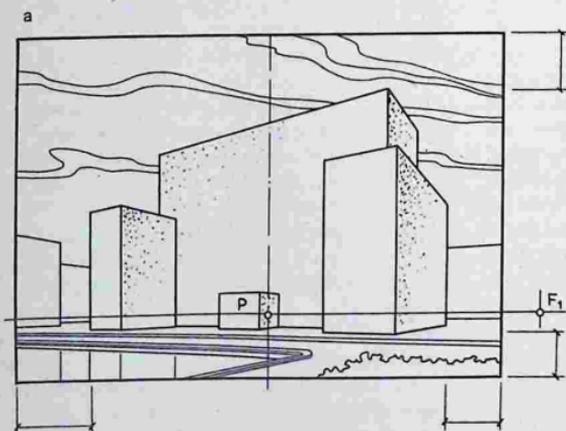


Рис. 317



Рис. 318

## Глава 18. Перспектива интерьера

В творческом процессе архитектурного проектирования построение перспективы интерьера играет важную роль. Перспектива интерьера является необходимым дополнением к ортогонально-проекционным чертежам — плану, разрезам, развертке, которые представляют собой метрически точные изображения, однако недостаточно наглядны и не всегда позволяют представить реальные условия восприятия интерьера. Применение перспективы необходимо еще и потому, что использование макетов оказывается малоэффективным. На макете весьма сложно создать аналогичные условия восприятия внутреннего пространства здания и передать общий вид интерьера в цвете, фактуру и природную окраску отделочных материалов, а также мебель и оборудование (см. прил. 8). Полное представление о качестве архитектурного решения интерьера дает совокупность ортогонально-проекционных чертежей и перспективных изображений.

**Выбор точки зрения.** При построении перспективы интерьера правильный выбор положения точки зрения и величины углов зрения имеет важное значение. Если при построении перспективы внешнего вида зданий обычно могут быть использованы достаточно удаленные видовые точки при сравнительно небольших углах зрения, то для по-

строения перспективы интерьера подобное ограничение угла зрения ( $\alpha = 30^\circ$ ) связано с тем, что в поле зрения попадает лишь небольшая его часть, примерно половина (рис. 319, а). При этом глубина внутреннего пространства является слабо, пропорции помещения по глубине воспринимаются укороченными. Напротив, при близком положении точки зрения и большом угле зрения ( $\alpha = 90^\circ$ ) глубина внутреннего пространства воспринимается преувеличенной (рис. 319, б), перспективные сокращения членений резко убывают, предметы первого плана получают сильные искажения формы. Оптимальными горизонтальными углами зрения при построении перспективы интерьера следует считать углы  $40\text{--}60^\circ$ .

**Фронтальная перспектива интерьера.** Перспективное изображение интерьера, у которого одна из стен расположена параллельно картине, а другие перпендикулярно, называется *фронтальной перспективой*. Фронтальные перспективы получили большое распространение. Они значительно проще по построению, чем угловые. Картинная плоскость может быть расположена в любом месте по глубине интерьера. Перспектива строится с одной точкой схода — главной точкой картины  $P$ .

На рис. 320 приведена фронтальная перспектива цеха химического combina-

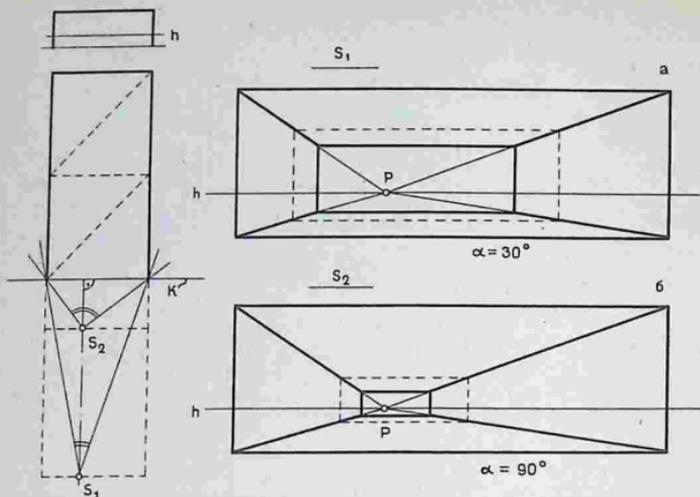
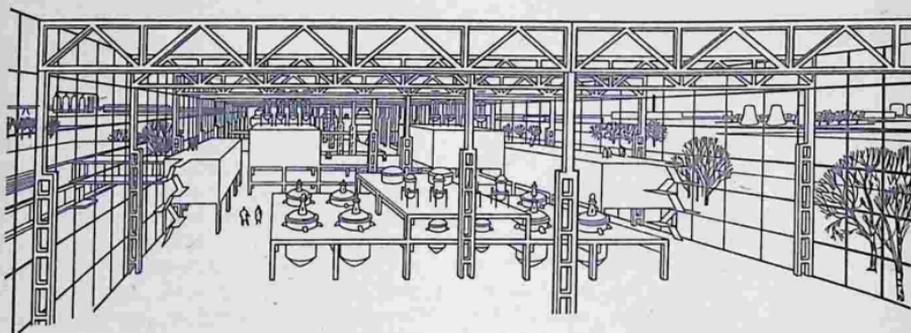


Рис. 319

Рис. 320



та. Благодаря высокому горизонту хорошо выявляется система расстановки оборудования и все внутреннее пространство цеха. Перспектива создает наглядную и естественную картину внутреннего пространства, которую мог бы наблюдать зритель, находясь внутри помещения. Достичь такой же реалистичности в макете довольно сложно.

Очень большое значение имеет также положение точки зрения относительно поверхностей, ограничивающих внутреннее пространство, и предметов переднего плана. При симметричном положении точки зрения относительно боковых стен помещения создается впечатление композиционного безразличия в изображении интерьера (рис. 321, а).

Однако и чрезмерное приближение точки зрения к одной из боковых стен также нежелательно, так как в этом случае она окажется в чрезмерном сокращении и вместо фронтальной перспективы должна быть построена угловая перспектива (рис. 321, б).

Как показывает большая изобразительная практика прошлого, при незначительном смещении точки зрения от оси симметрии интерьера довольно широко применялась фронтальная перспектива. При этом изображение воспринималось более естественным, чем угловая перспектива, построенная с той же точки зрения. Истолкование этого факта будет сделано в гл. 24. При построении фронтальной перспективы ин-

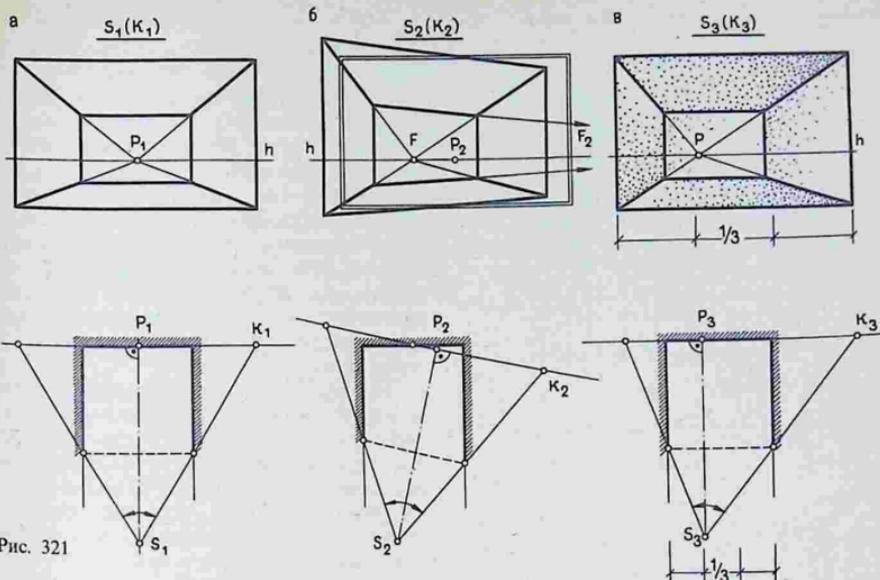


Рис. 321

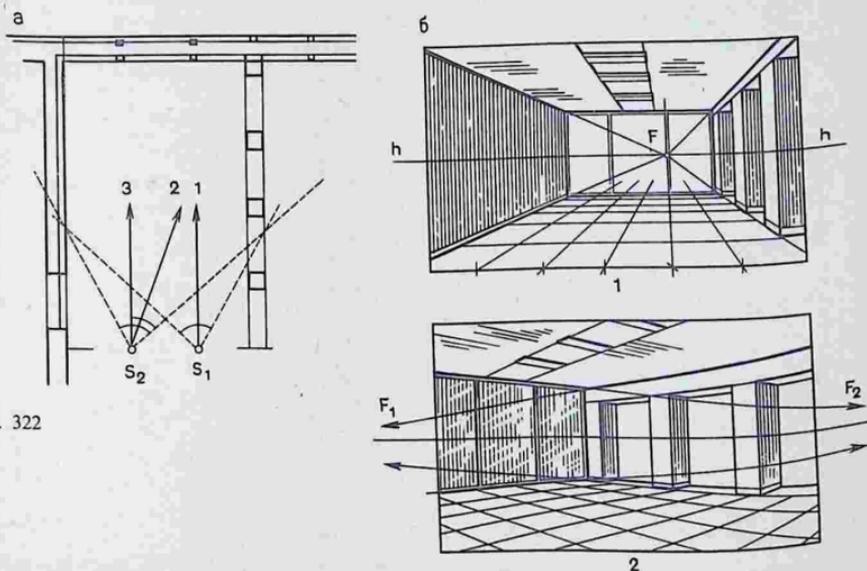


Рис. 322

терьера рекомендуется устанавливать точку зрения в пределах средней трети ширины пространства интерьера (рис. 321, в).

Выбор положения точки зрения на

плане интерьера еще не решает характер и вида перспективного изображения. Имеет значение направление главного луча и картинной плоскости по отношению к глубинной оси интерьера.

Выбор положения точки зрения и направления главного луча рекомендуется вести по следующей примерной схеме.

На рис. 322 приведены план помещения и два эскиза. На первом эскизе, выполненном во фронтальной перспективе, построенной из точки зрения  $S_1$ , внутреннее пространство достаточно хорошо выявлено, однако положение точки зрения выбрано неудачно, так как в результате сильного перспективного сокращения правой стороны помещения исчезли просветы между столбами и не видно пространство смежного помещения.

На втором эскизе, выполненном из точки  $S_2$ , — угловая перспектива. Главный луч направлен к углу помещения. На этом эскизе хорошо просматривается смежное пространство. Однако перспектива оказалась невыразительной, глубина пространства основного помещения выявлена слабо.

На рис. 323 показано построение перспективы интерьера из точки  $S_2$  при фронтальном положении картинной плоскости. Здесь устранены недостатки

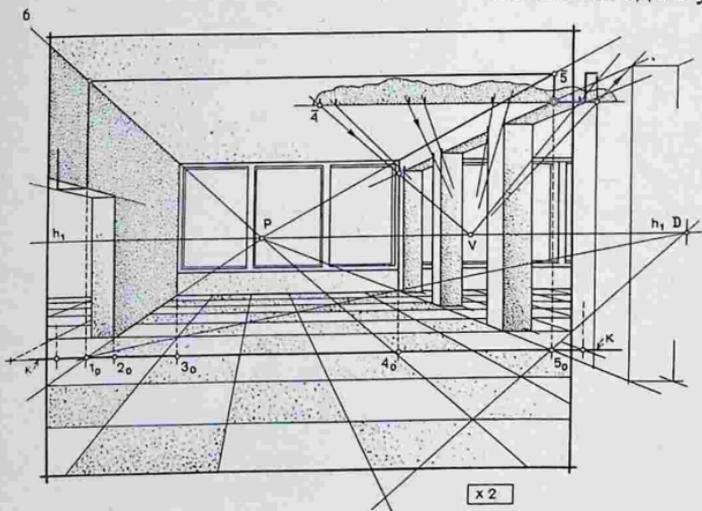
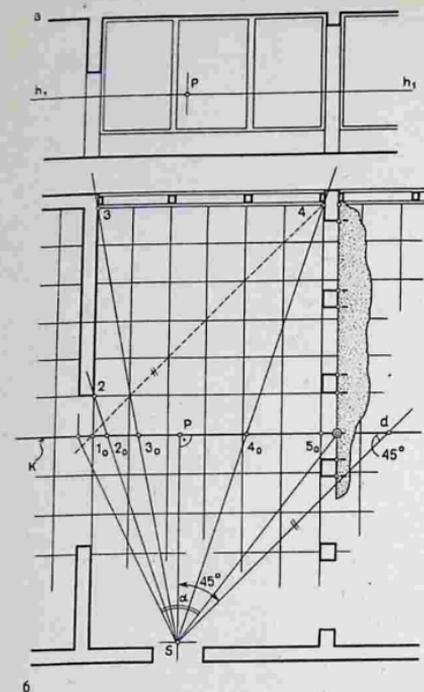


Рис. 323

Прежде чем приступить к построению перспективы, рекомендуется выполнить эскизные наброски от руки или построить эскизные перспективы небольшого размера.

как первого, так и второго эскиза. Картинная плоскость расположена на плане в месте, где крайние проецирующие лучи ограничивают изображаемую часть интерьера. Исходные данные при по-



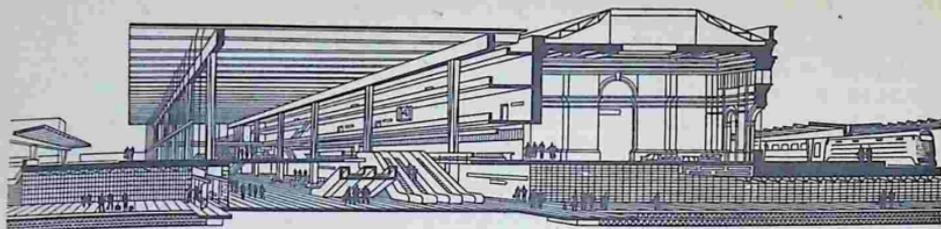


Рис. 326

перспективы интерьера, по существу, ничем не отличается от построения перспективы внешнего вида здания.

На рис. 324 построена перспектива интерьера при одной доступной точке схода с увеличением исходных данных в два раза. Проведены крайние проецирующие лучи, которые определяют горизонтальный угол зрения ( $\alpha = 60^\circ$ ) и ту часть внутреннего пространства, которое будет изображено в перспективе. Высота помещения может быть отложена в истинную величину в точке  $I_0$ , где плоскость стены совмещена с картиной, и в точке  $m$ , которая является картинным следом прямой, проходящей через точку  $4$  плана. Остальные построения не требуют пояснений.

Для построения перспективы интерьера *криволинейных в плане очертаний*, включающих часть окружности или полную окружность, следует построить перспективу описанного вокруг окружности квадрата, в которую вписать затем перспективу окружности. Если конфигурация плана помещения представляет собой полный круг, целесообразно применить фронтальный описанный квадрат. В случаях когда очертание кривой в плане имеет нерегу-

лярный характер, перспективу кривой строят по отдельным точкам радиальным способом с совмещением высот точек.

На рис. 325 приведено построение перспективы интерьера киноконцертного зала. Перспектива может быть построена с одной точкой схода  $F_2$  с помощью определения картинных следов прямых. Перспективы высот также построены с использованием картинных следов прямых и способом совмещенных высот.

В практике архитектурного проектирования находит применение построение перспективы интерьера здания и части внешнего пространства с изображением поперечного разреза сооружения фронтальной плоскостью, обычно совмещенной с картиной. На рис. 326 показан *перспективный разрез* к проекту реконструкции Курского вокзала в Москве. Такое изображение совмещает чертеж архитектурного разреза, выполненный в определенном масштабе, и перспективу внутреннего пространства здания.

## Глава 19. Перспектива деталей и архитектурных фрагментов

Перспектива деталей и архитектурных фрагментов строится на основе уже построенной перспективы основных объемов сооружения. Значительная часть построений производится на

самом перспективном изображении без использования плана и фасада (см. прил. 5). Это вызвано тем, что построения на плане мелки и неточны, при перенесении с увеличением в перспективу не-

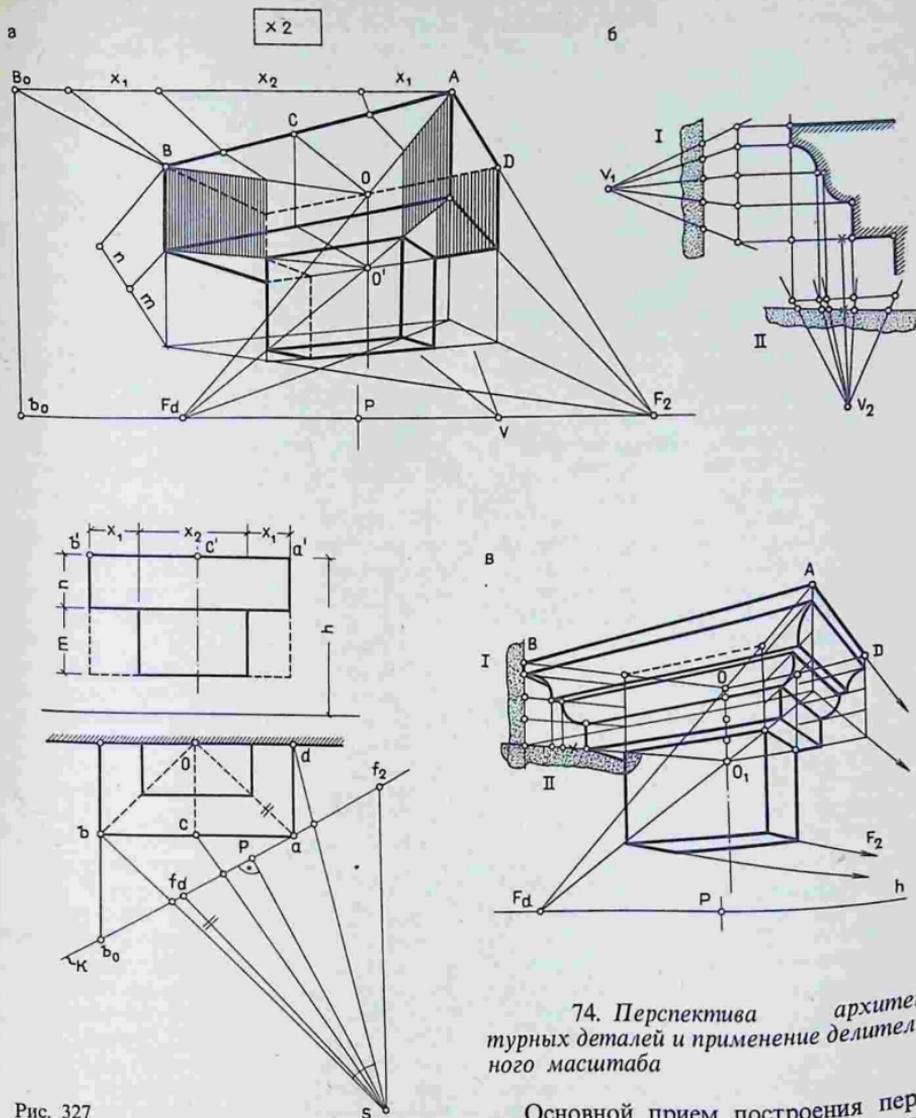


Рис. 327

точность возрастает. Кроме этого, далеко не все детали могут быть изображены на плане.

Это необходимо также и для точного построения теней.

#### 74. Перспектива архитектурных деталей и применение делительного масштаба

Основной прием построения перспективы архитектурной детали или фрагмента заключается в построении сначала объемлющей формы с последующим расчленением ее на части и последующей детализацией этих частей приемами пропорционального деления отрезков. Построение объемлющей формы детали выполняют по основным

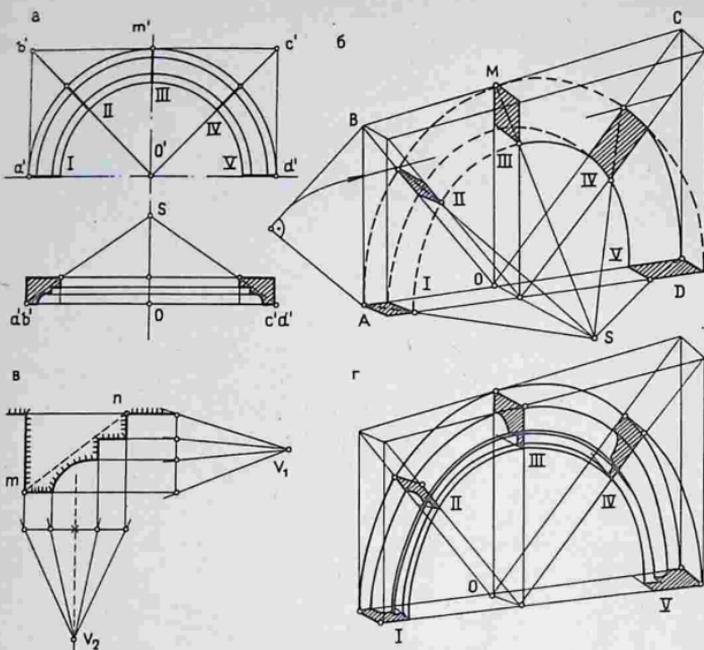


Рис. 328

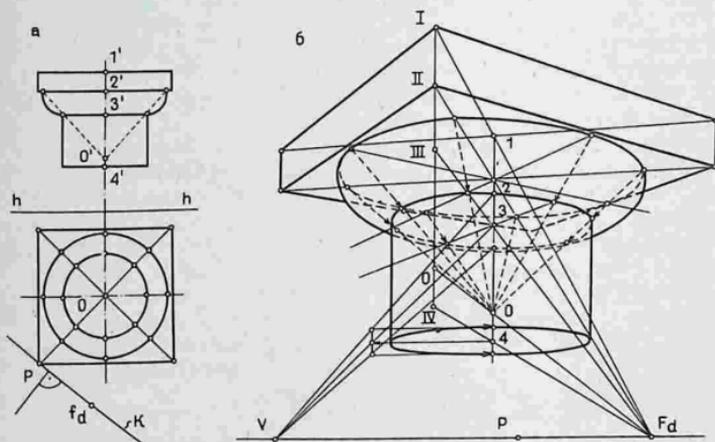


Рис. 329

ее параметрам, взятым с плана и фасада.

1. **Перспектива раскреповки карниза** (рис. 327). Архитектурная деталь вписана в параллелепипед, который разделен затем на две части, включающие карнизную часть и пилон (рис. 327, а). Два

профиля карниза расположены в бисекторных плоскостях. Для построения перспективы этих профилей и оси симметрии детали построена точка схода  $F_d$  с помощью проецирующего луча  $SF_d$ , проведенного на плане параллельно одному из профилей. На перспективе

выделены прямоугольники, в которые надо вписать профили — два биссекторных и один нормальный.

Для построения членений профиля в перспективе на чертеже профиля (рис. 327, б) наносят два пучка прямых, проведенных из произвольных точек. Членения профиля по вертикали  $I$  переносятся с помощью полоски бумаги, которая располагается на пучке вертикально. Членения профиля по горизонтали  $II$  переносятся на основе установления перспективного соответствия между рядами точек с помощью середины отрезков (см. § 66, рис. 290). Для построения членений по вертикали на перспективе профилей целесообразно разделить отрезок  $OO_1$  на оси, который может быть использован для всех трех профилей.

2. **Перспектива архивольты** (рис. 328). Архивольт вписан в параллелепипед. На основе двух полуокружностей, которые проходят через точку  $M$  и точку  $N$ , построены пять радиальных сечений — два горизонтальных  $I$  и  $V$ , одно вертикальное  $III$  и два наклонных  $II$  и  $IV$ . Окружности и описанные около профилей прямоугольники легче построить, если определить в перспективе точку  $S$ , которая является центром прямых, проходящих через диагонали  $MN$  прямоугольников. В прямоугольнике вписывается профиль с помощью пропорционального деления стороны.

3. **Перспектива капители** (рис. 329). С помощью плана и фасада построена перспектива квадратной плиты с увеличением исходных данных в три раза [7]. Дальнейшие построения выполнены на картине. Проводим диагональ перспективы нижнего квадрата плиты в точку схода  $F_d$ . На вертикали, проведенной через переднее вертикальное ребро плиты, которое совмещено с картиной, наносим расстояния между центрами  $2'$ ,  $3'$  и  $4'$  трех окружностей и точкой  $O'$ , взятые с фасада и увеличенные в три раза. С помощью прямых, проведенных из этих точек в точку схода  $F_d$ , определяем на оси капители центры перспектив окружностей: 2 — примыкания эхина к плите; 3 — ствола колонны к эхину;

4 — горизонтального сечения ствола колонны и точку  $O$  — вершину вспомогательного конуса. Затем строим перспективу окружности с центром в точке 2 и на ее основе — две другие окружности. Точки окружностей определены с помощью восьми образующих вспомогательного конуса, проведенных через точки основной окружности, и сечений вспомогательными плоскостями, проходящих через ось детали, в верхней части конуса в пределах эхина. Очерковая кривая эхина (невидимый участок) должна пройти несколько ниже перспективы окружности с центром 3.

### 75. Перспектива архитектурных фрагментов, сводов и поверхностей покрытий

Рассмотрим построение перспективы нескольких архитектурных фрагментов, включающих поверхности различных видов: многогранные, цилиндрические, пересекающиеся по плоским и пространственным кривым, поверхности вращения, а также поверхность гиперболического параболоида.

1. **Перспектива лестницы**. На рис. 330 приведено построение двухмаршевой лестницы в интерьере. Перспектива может быть построена способом архитекторов на основе вторичной проекции  $abcd$  первого марша и его высоты подъема, заданного отрезком  $Vb$ . Вторичная проекция марша разделена на шесть равных частей по числу ступеней. Из полученных точек с обеих сторон марша проведены вертикали. Проведены также восходящие прямые  $AB$  и  $dC$  в точку схода  $F_3$ . Восходящая прямая  $CD$  второго марша проведена через точку схода  $F_4$ . Расстояния от линии горизонта до точек схода  $F_3$  и  $F_4$ , расположенных на линии схода, должны быть равны, так как уклоны маршей одинаковы. Восходящие прямые в пересечении с вертикалями ступеней определяют точки горизонтальных ребер ступеней. Остальные построения не требуют пояснений.

2. **Перспектива амфитеатра** (рис. 331). Перспектива амфитеатра, состоящего

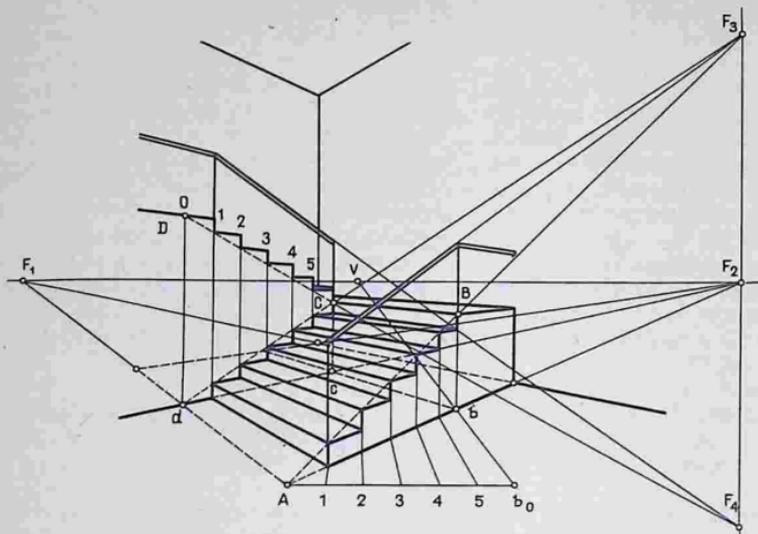


Рис. 330

из пяти ступеней, каждая из которых имеет высоту  $n$  и ширину  $l$ , построена способом меридиональных сечений. Два фронтальных сечения совмещены с картиной и проецируются в истинную величину. Третье сечение расположено в вертикальной плоскости, проходящей через дистанционную точку  $D_1$ . Четвертое построено в произвольном месте.

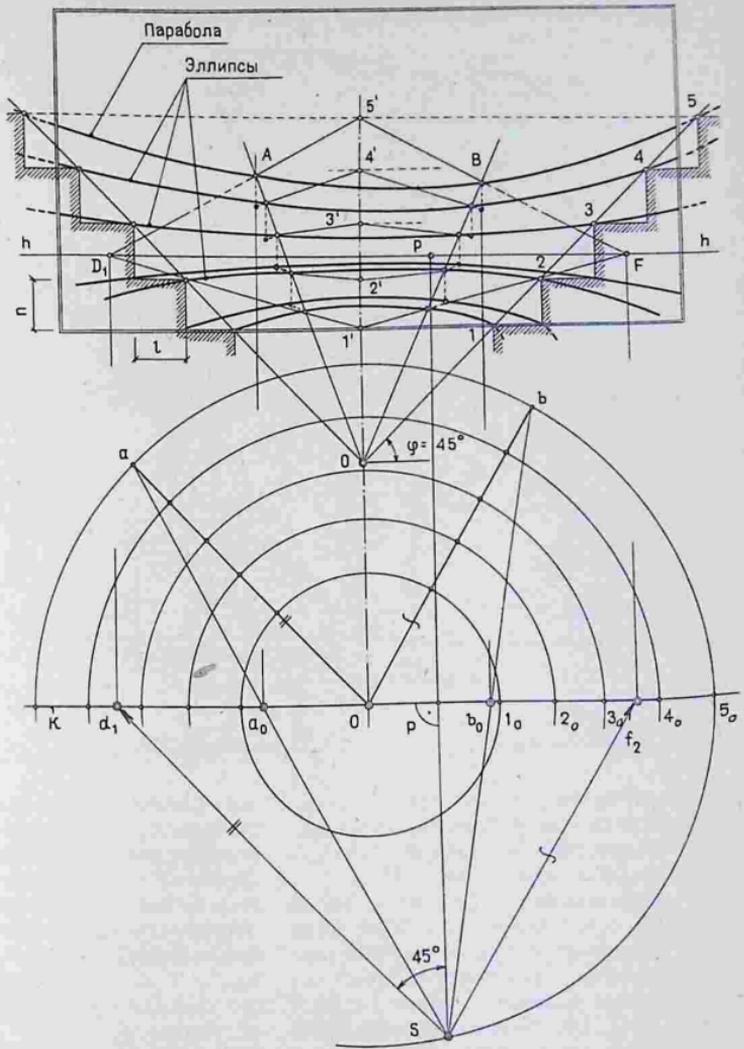
Высоты ступеней перенесены на ось композиции, также совпадающую с картиной. Точки ступеней двух последних сечений определены на перспективах восходящих прямых  $OA$  и  $OB$  в пересечении с прямыми, проведенными через точки  $1, \dots, 5$  на оси в точки схода  $D_1$  и  $F$ . Четыре восходящие прямые могут быть представлены как образующие вспомогательного обратного конуса с вершиной  $O$  и осью  $O-5'$ . Через полученные перспективы точек проведены кривые линии. Пятая окружность изображается параболой, остальные — дугами эллипсов (см. § 67, рис. 291).

**3. Перспектива распалубки свода** (рис. 332). Фронтальная перспектива свода построена способом следа луча или радиальным способом (см. § 70, рис. 306), поэтому фронтальная полуокружность изобразилась без искаже-

ний. Пересечение двух полуцилиндров, один из которых имеет несколько меньший диаметр, будет пространственной кривой. Перспектива этой кривой построена с помощью двух направляющих полуокружностей — фронтальной с центром  $O'$  и профильной с центром  $C$  (штриховая линия). Перспективы точек линии пересечения построены способом вспомогательных плоскостей-пересечений. Четыре вспомогательные горизонтальные плоскости пересекают основания полуцилиндров по прямым, которые пересекаются на вертикали  $A'5'$ , а поверхности полуцилиндров — по образующим. В пересечении одноименных образующих полуцилиндров определяются перспективы точек линии пересечения. Сечение плоскостью 3 выделено. Аналогичное построение было выполнено в аксонометрии (см. § 62, рис. 267).

**4. Перспектива поверхности вращения** (рис. 333). Построение в перспективе очерка поверхности вращения может быть выполнено двумя способами — способом параллелей и способом меридианов. Первый из них получил большее распространение. На поверхности вращения в ортогональной проекции про-

Рис. 331



водят несколько параллелей, располагая их чаще в месте, где кривизна очерка больше (рис. 333, а). Строят перспективу параллелей — четыре соосные окружности, отложив на оси центры 1, ..., 4 окружностей и вершину А поверхности (картина проведена через ось поверхности). Перспективу окружностей — эллипсы — вписывают в перспективу горизонтальных квадратов, построенных

с помощью дистанционной точки D или дробной точки D/2. Прямая BC проведена в точку D/2 через середину отрезка 1E. К перспективам построенных окружностей проводят касательную кривую очерка поверхности. Видимый силуэт поверхности по своим пропорциям (1:1,3) заметно отличается от действительных соотношений поверхности на фасаде (1:2,2). В перспективе,

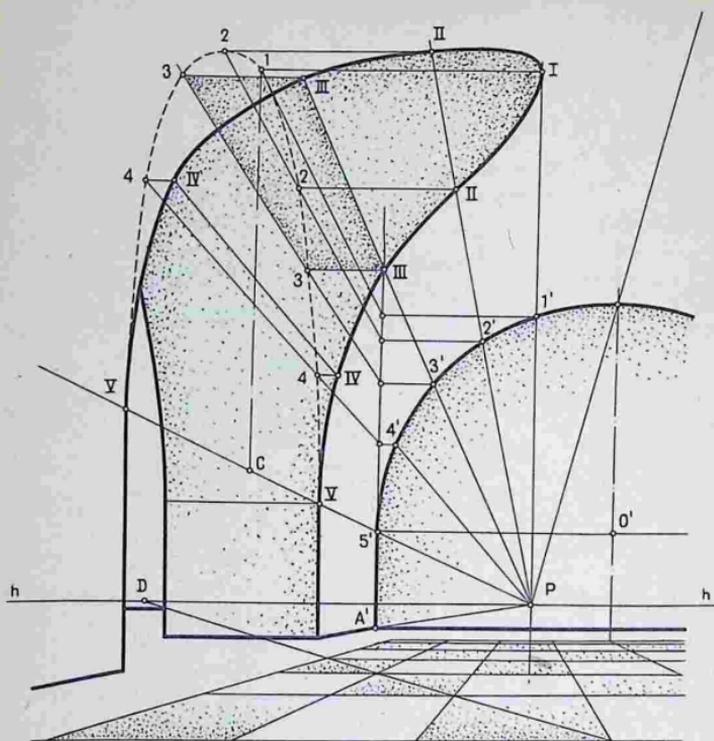


Рис. 332

при восприятии с естественной, пониженной точки зрения, поверхность купола как бы западает, ее вершина (точка  $A$ ) оказывается скрытой (рис. 333, б).

5. **Перспектива крестового свода** (рис. 334). Крестовый свод образуется пересечением двух полуцилиндров равного диаметра. Линию пересечения составляют две плоские кривые — полуэллипсы. Для построения фронтальной перспективы крестового свода (линии пересечения полуцилиндров) используют две направляющие полуокружности. Одна из них расположена во фронтальной плоскости спереди, а другая — в профильной плоскости слева. Сначала строят вторичную проекцию линии пересечения полуцилиндров — прямые  $AB$  и  $CD$  — диагонали перспективы квадрата (штриховые линии). Перспектива линии пересечения — два полуэллипса — может быть построена двумя способа-

ми — с помощью горизонтальных или вертикальных вспомогательных плоскостей-посредников. Применим второй способ. В этом случае может быть использована одна направляющая полуокружность — фронтальная. Проведем пять вертикальных секущих плоскостей  $I, \dots, V$  и рассмотрим сечение плоскостью  $II$ . Она пересекает продольный полуцилиндр по образующей, перспектива которой направлена в главную точку  $P$ , а вторичную проекцию линии пересечения — в точках  $2_0$  и  $2_0'$ . Вертикали, проведенные из этих точек в пересечении с образующей  $II$ , определяют две искомые точки  $2$  и  $2'$  линии пересечения. Точка  $O$  — перспектива пересечения двух полуэллипсов — построена с помощью вспомогательной плоскости  $III$ . Построенные точки соединяют плавными кривыми. Последовательность соединения определяют по вто-

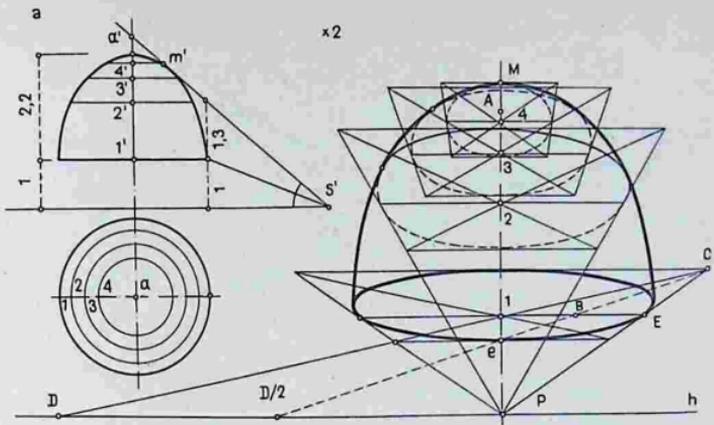


Рис. 333

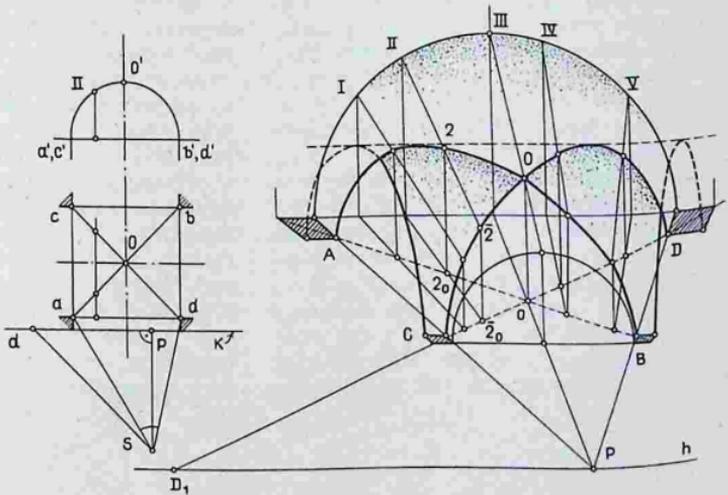
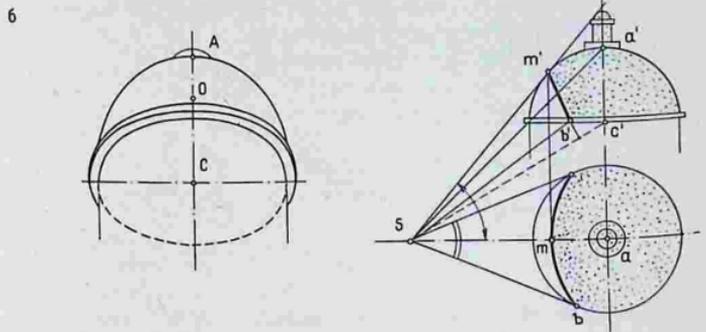


Рис. 334

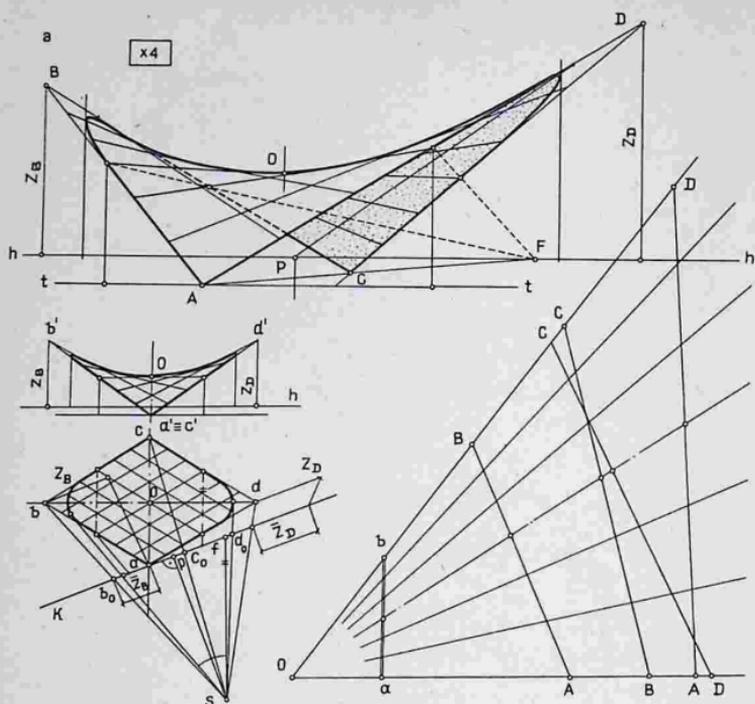


Рис. 335

ричной проекции пересечения. Перспективы двух полуэллипсов и двух полуокружностей, расположенных в профильных плоскостях, должны касаться одной образующей поперечного полуцилиндра (горизонтальная штриховая прямая).

6. Перспектива поверхности гиперболического параболоида. На рис. 335 показана перспектива отсека гиперболического параболоида, который представляет собой оболочку покрытия. Отсек вписан в неплоский четырехугольник  $ABCD$ . Для построения перспективы поверхности наиболее рациональным является радиальный способ с совмещением высот (см. § 70, рис. 308). Сначала построена перспектива граничного кон-

тура неплоского четырехугольника  $ABCD$  с увеличением исходных данных в четыре раза. На плане показаны совмещение высот точек  $B$  и  $D$  и построение перспективы этих точек. Перспективное деление сторон четырехугольника выполнено на основе соответствия трех пар точек прямых (см. § 66, рис. 290). Этот прием применялся при построении перспективы карниза и архивольты (рис. 327 и 328). Соединив соответственные точки контурных образующих двух семейств прямыми линиями, получим перспективу очерка поверхности. Перспектива кривых участков граничного контура поверхности построена по трем точкам с помощью проецирующих прямых на плане.

## Глава 20. Построение теней в перспективе

Достоверность и реалистичность перспективного изображения зависят не только от правильности построений и соответствия выбранной точки зрения условиям натурального восприятия, но и от верной передачи на изображении реальной освещенности, от построения теней. При построении теней в перспективе необходимо учитывать конкретные условия, в которых окажется проектируемое здание в натуре, в частности ориентацию здания, широту места, и верно передать на перспективном изображении существующее направление лучей.

## 76. Построение теней при параллельных лучах света

Построение теней в перспективе и в аксонометрии имеет много общего. Так же, как и в аксонометрии, для построения теней в перспективе необходимо иметь две проекции — перспективу луча и вторичную ее проекцию. Но поскольку в основе перспективы — центральное проецирование, а не параллельное, то лучевые прямые, а также их проекции, параллельные в пространстве, имеют в перспективе свои точки схода. При этом точки схода вторичных проекций лучей находятся на линии горизонта, так как источник света (солнце) считается удаленным в бесконечность.

В зависимости от направления лучей и положения источника света относи-

тельно зрителя и картины возможны три основные схемы теней (рис. 336).

На первой из них солнце находится позади зрителя, слева. При этом точка схода проекций лучей  $S$  расположена на горизонте, а точка схода самих лучей (перспектива солнца  $S$ ) — ниже горизонта на одной вертикали с точкой  $s$ .

На второй схеме солнце расположено перед зрителем, справа. Точка схода вторичных проекций лучей находится на горизонте, а точка схода  $S$  перспектив лучей — выше горизонта.

На третьей схеме лучи света параллельны картинной плоскости, поэтому они изображаются и на перспективе параллельными, а вторичные их проекции — параллельными основанию картины.

При построении теней в перспективе наиболее часто применяют направление лучей света, изображенное на первой схеме.

Закономерности построения теней в ортогональных проекциях, установленные во втором разделе, в основном сохраняются и при построении теней в перспективе, поэтому рассмотрим лишь несколько характерных примеров построения теней.

1. Тень точки. Тенью точки, падающей на плоскость или поверхность, является точка пересечения светового луча, проходящего через данную точку, с плоскостью или поверхностью. Поэтому построение тени точки сводится к решению основной позиционной зада-

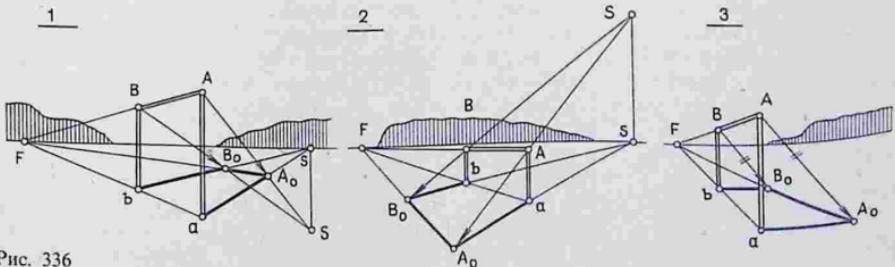


Рис. 336

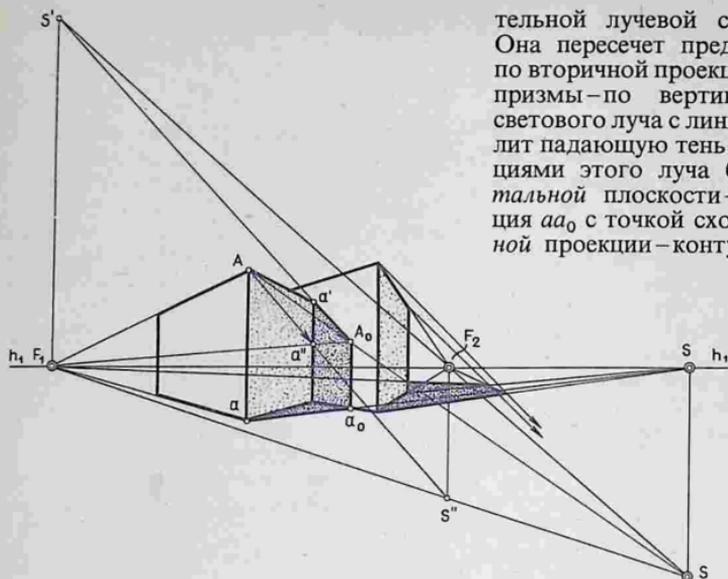


Рис. 337

чи на построение точки пересечения прямой с плоскостью или поверхностью. Тень от точки  $A$  на предметную плоскость (см. рис. 336) определяется как точка пересечения перспективы луча  $AA_0$ , проходящей через данную точку, с вторичной проекцией  $aA_0$  луча.

2. Построение тени призматических тел (рис. 337). Направление лучей задано точками схода перспектив лучей  $S$  и вторичных проекций  $s$ . Грани призм, находящиеся в собственной тени, определяют с помощью вторичных проекций лучей, проведенных на предметной плоскости. Другой признак следующих: если точка схода  $s$  вторичных проекций лучей находится за точкой  $F_2$  справа, то грани призм, линия схода которых проходит через точку  $F_2$ , будут в собственной тени. Тени от вертикальных ребер имеют направление в точку схода  $s$  вторичных проекций лучей. Тени от горизонтальных ребер будут параллельны этим ребрам, а следовательно, точкой схода их перспектив будет точка схода  $F_2$ . Тень точки  $A$  может быть построена как точка пересечения светового луча с вертикальной гранью призмы с помощью вспомога-

тельной лучевой секущей плоскости. Она пересечет предметную плоскость по вторичной проекции  $aa_0$  луча, а грань призмы — по вертикали. Пересечение светового луча с линией сечения определит падающую тень  $A_0$  точки  $A$ . Проекциями этого луча будут: на горизонтальной плоскости — вторичная проекция  $aa_0$  с точкой схода  $s$ ; на фронтальной проекции — контур падающей тени

$a'A_0$  с точкой схода  $S'$  на вертикали, проходящей через точку схода  $F_1$ ; на профильной проекции — отрезок  $Aa''$  с точкой схода  $S''$ , которая определяется в точке пересечения двух линий схода — вертикали  $F_2S''$  и прямой  $SF_1$ .

3. Тени цилиндрического столба с квадратной плитой (рис. 338). Этот пример свидетельствует о полной аналогии построения теней в аксонометрии (см. рис. 271) и перспективе. Отличие заключается в наличии на перспективном изображении двух точек схода перспектив параллельных ребер на линии горизонта и двух точек схода перспектив лучей  $S$  и их вторичных проекций  $s$ .

4. Построение тени в арочном проеме (рис. 339). Тень в проеме определяется точками схода  $S$  и  $s$ . Падающая тень на вертикальной плоскости проема от тенеобразующего ребра  $Aa$  построена с помощью вторичной проекции  $aa_0$  луча. Чтобы построить контур собственной тени цилиндрической части проема — теньевую образующую  $KK'$ , надо спроецировать луч  $AA_0$  на фасадную плоскость стены  $Aa'$ . Далее следует провести касатель-

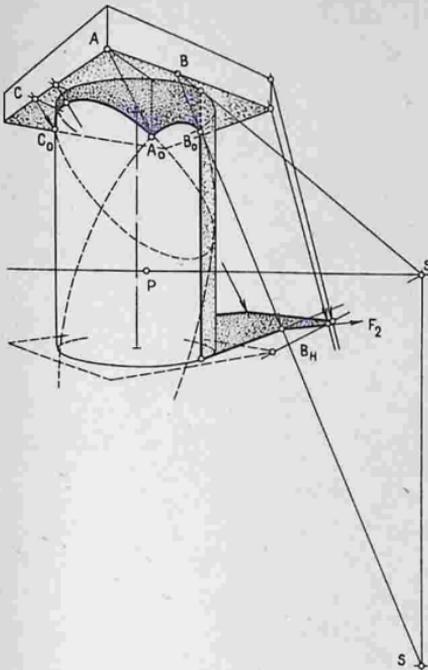


Рис. 338

ную проекцию и предметную плоскость. Световые лучи, проходящие через кромку проема — дугу  $ABK$ , образуют лучевую эллиптическую поверхность, образующие которой сходятся в точке  $S$ . В пересечении с полуцилиндром проема и вертикальной плоскостью на участке  $C_0A_0$  она образует контур *падающей тени*. Промежуточные точки контура тени, например  $B_0$ , строят аналогично точке-тени  $A_0$ .

5. Построение собственной тени сферы и поверхности вращения (рис. 340). Для построения собственной тени сферы (рис. 340, а) надо сначала построить перспективу экватора в точку схода с проекций лучей, которые определяют точки 1, 2 тени, а затем — касательные к очерку сферы в точку схода  $S$  перспектив лучей, определив тем самым еще две точки тени 3 и 4. Через полученные точки проводят кривую контура собственной тени сферы — эллипс.

Аналогично строят собственную тень поверхности вращения (рис. 340, б).

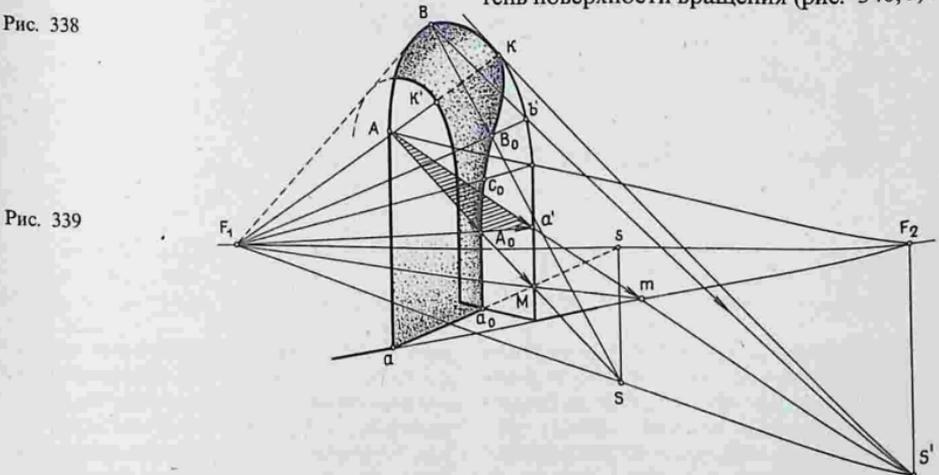


Рис. 339

ную к кривой основания цилиндра параллельно найденной проекции  $Aa'$  луча. Чтобы провести такую касательную, надо найти бесконечно удаленную точку схода  $S'$  проекции  $Aa'$ , которая будет находиться на вертикали  $F_2S'$ . В точке  $M$  перспектива луча пересечет вторич-

6. Построение тени карниза (рис. 341). Для построения собственных и падающих теней необходимо построить *лучевое сечение* карниза. В произвольном месте карниза проводят вертикальный отрезок, на который переносят членения карниза (см. рис. 327, б).

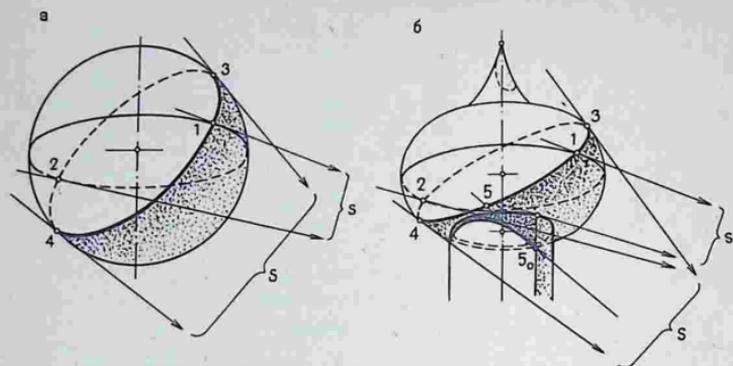


Рис. 340

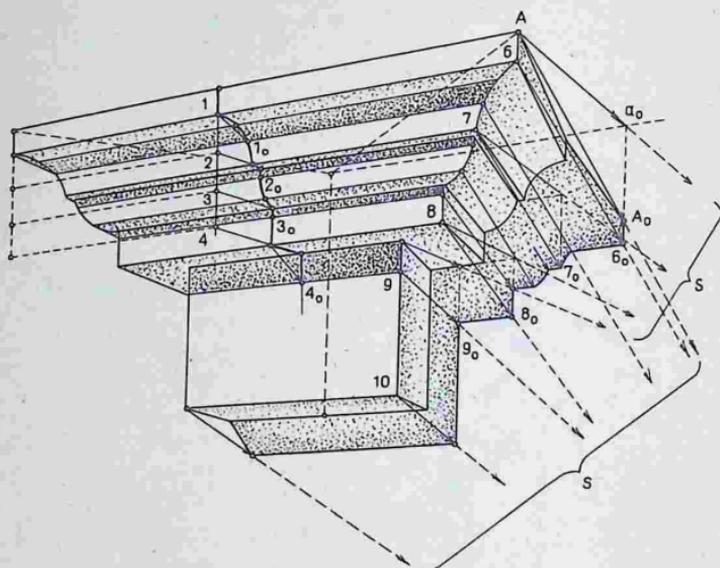


Рис. 341

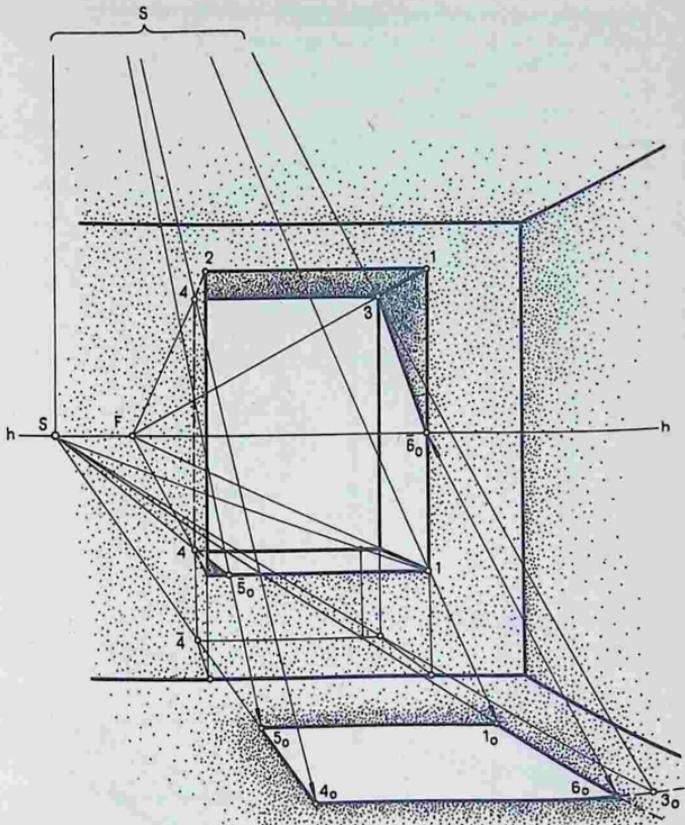
Через точки 1, ..., 4 проводят прямые в точку схода  $s$  проекций лучей до пересечения с соответствующими прямыми профиля карниза и вычерчивают лучевое сечение. В плоскости сечения проводят в точку  $S$  касательные лучи к построенному сечению и определяют контуры собственных, а затем и падающих теней. Падающая тень на стену построена с помощью вторичных проекций лучей. Так, например, падающая тень точки  $A$  построена с помощью горизонтальной проекции  $Aa_0$ , проведен-

ной в точку  $s$ . Точка пересечения  $a_0$  этой проекции луча со стеной определена на линии пересечения соответствующей горизонтальной плоскости со стеной. Через полученную точку проводят вертикаль до пересечения с перспективной луча.

### 77. Построение теней в интерьере

Построение теней в интерьере представляет собой довольно сложную зада-

Рис. 342



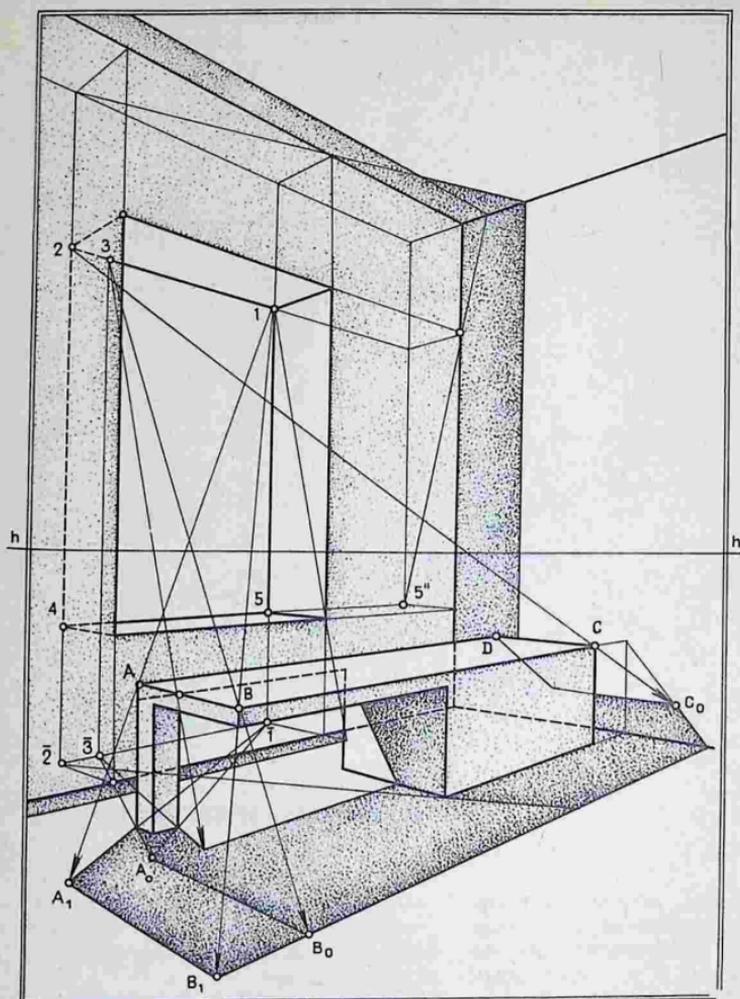
чу. Это объясняется, во-первых, наличием различных источников освещения – солнечного, рассеянного или искусственного света и, во-вторых, в условиях освещения искусственными источниками света большое их число, разнообразие форм и расположения в современном интерьере делают задачу точного построения контуров теней довольно сложной.

В зависимости от вида источников освещения интерьера возможны три случая построения контуров теней:

- 1) при солнечном освещении, проникающем через оконные проемы;
- 2) при рассеянном (диффузном) дневном освещении;

3) при точечных источниках света. Рассмотрим примеры построения контуров теней в интерьере при различном освещении.

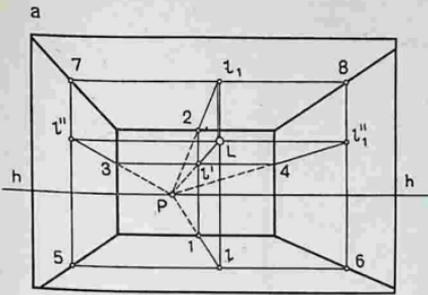
**Построение теней при солнечном освещении** (рис. 342). Солнечный свет, проникающий через оконный проем прямоугольной формы, образует на полу четкий и контрастный четырехугольник. Прием построения контуров падающей тени аналогичен второй схеме на рис. 336. Точки тени построены в пересечении перспективы луча с вторичной проекцией. Падающая тень  $3-6_0$  на боковом откосе проема построена с помощью обратного луча  $b_0-6_0$ , проведенного из точки  $b_0$  пересечения конту-



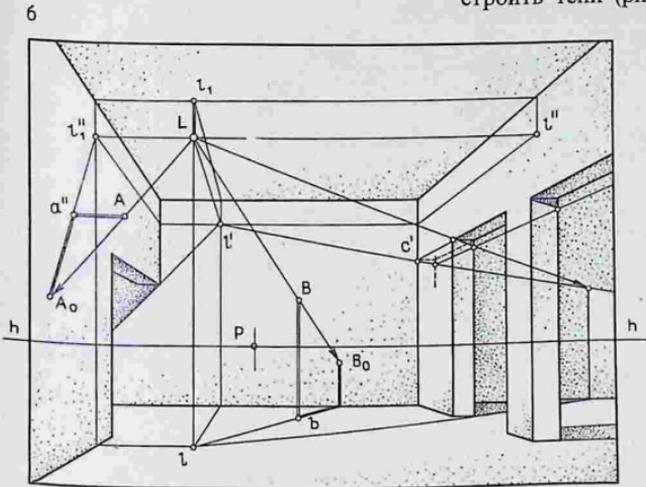
ров падающих теней от горизонтально-го ребра 3-4 откоса и вертикального ребра 1-1 (штриховые линии).

**Построение теней при рассеянном освещении** (рис. 343). При диффузном, рассеянном свете, проникающем через оконный проем, излучение света происходит со всей площади проема. Контуры теней как бы налагаются один на другой, их границы оказываются все более «размытыми» по мере удаления от

светопроема. Плоскости откосов освещены, поэтому вертикальные и горизонтальные ребра откосов проема, обращенные внутрь помещения, являются тенеобразующими. Из множества «светящихся» точек в проеме выделяют точки, расположенные в углах проема. С помощью точек 1, 2 и 3 строят падающие тени на полу, а с помощью точек 4 и 5 – на потолке. Для построения теней необходимо спроецировать эти точки



**Построение теней при точечном источнике света.** Как и в предыдущем случае, при точечном источнике света лучевые прямые не параллельны между собой и не имеют точек схода, они пересекаются в «светящейся» точке — в точке источника света. Падающие тени строят с помощью вторичной проекции  $l'$  светового луча, поэтому следует построить сначала проекции источника света  $L$  на те ограждающие плоскости интерьера, на которых надо будет строить тени (рис. 344, а).



на те плоскости помещения, на которых должны быть построены тени: на пол (точки  $1, 2$ ), на потолок и боковую стену ( $5''$ ). Затем проводят из «светящихся» точек перспективы лучевых прямых через тенеобразующие точки объекта до пересечения с вторичными проекциями лучей. Так, например, из точки  $1$  проведены лучи  $1A$  и  $1B$  через углы стола до пересечения с горизонтальными проекциями  $1A_1$  и  $1B_1$  лучей. Аналогичным образом построена вторая тень  $A_0B_0$  на полу от того же ребра крышки стола с помощью лучевых прямых, проведенных через «светящуюся» точку  $3(3)$ . Для построения теней на потолке проводят лучевую прямую из точки  $4$  или  $5$  и т. д. Остальные построения не требуют пояснений.

Для построения тени от точки  $A$  (рис. 344, б) через точку проводят луч  $LA$ , а через профильную проекцию  $l''$  источника света — вторичную проекцию  $l''a''$  луча до пересечения с перспективой луча в искомой точке  $A_0$ . Аналогично построена тень точки  $B$  и вертикального шеста. Вертикальная лучевая плоскость, проходящая через отрезок прямой  $Bb$ , пересекает пол по вторичной проекции  $lb$  луча, а фронтальную стену — по вертикали. Тени в простенках построены с помощью проекции  $l'c'$  луча на фронтальную стену.

На рис. 345 приведен еще один пример построения теней в интерьере от точечного источника света. Если источник света представляет собой «светящуюся площадь», контуры теней могут быть





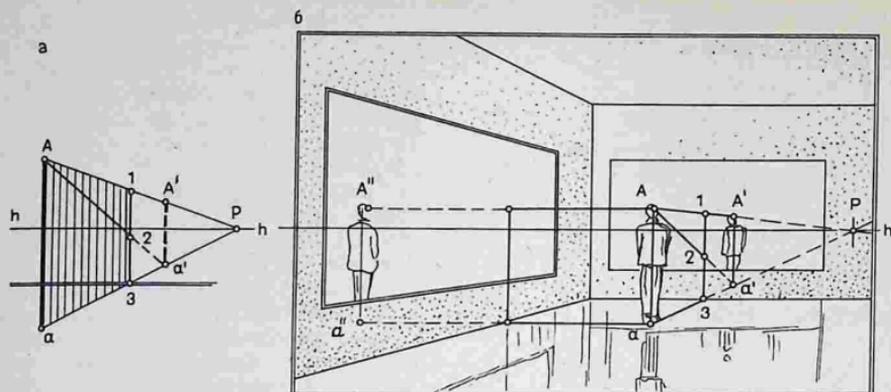


Рис. 349

Построение отражений в вертикальных отражающих плоскостях-зеркала основано на тех же закономерностях, что и отражения в горизонтальных плоскостях. На рис. 349 построение в перспективе отражения  $A''$  точки  $A$  в зеркале, расположенном в профильной плоскости, наглядно подтверждает это — расстояние от точки  $A$  до зеркала равно расстоянию от него до отражен-

ной точки  $A''$ . Для того чтобы построить отражение точки  $A$  в зеркале, расположенном фронтально, надо отложить в перспективе отрезок  $A1$  по другую сторону отражающей плоскости в направлении главной точки  $P$ . Для этого следует разделить отрезок  $1-3$  пополам и через среднюю точку  $2$  провести прямую  $A2a'$  — перспективу диагонали прямоугольника.

## Глава 22. Перспектива на наклонной плоскости

### 80. Общие сведения

Необходимость в построении перспективы на наклонной плоскости возникает довольно редко. Перспективу на наклонной плоскости строят, как правило, в двух случаях. Во-первых, когда городская застройка, окружающая проектируемое сооружение, развитое по вертикали, не позволяет выбрать точку зрения на таком расстоянии, чтобы можно было построить перспективу при нормальных вертикальных углах зрения, и, во-вторых, при построении перспективы интерьера, когда необходимо изобразить верхнюю часть внутреннего пространства помещения, вертикальные измерения которого преобладают над остальными. Возможен и такой частный

случай, когда при высоком положении точки зрения объект оказывается ниже горизонта зрителя. Однако здесь, как правило, ограничений в размещении точки зрения не существует, и перспектива может быть построена на вертикальной картине.

Применение наклонной картинной плоскости дает возможность построить перспективу при значительных вертикальных углах зрения, превышающих углы зрения при вертикальной картине более чем в два раза. При этом детали, расположенные в верхней части сооружения, изображаются без искажения.

На рис. 350 угол зрения  $\phi/2$  при вертикальной картине составляет  $52^\circ$ , а при наклонной плоскости — только  $32^\circ$ .

Вертикальная картинная плоскость

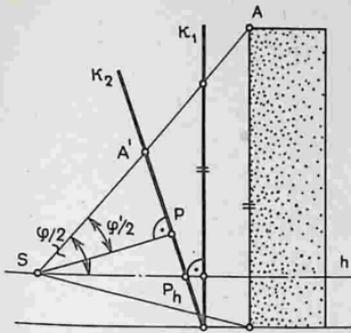
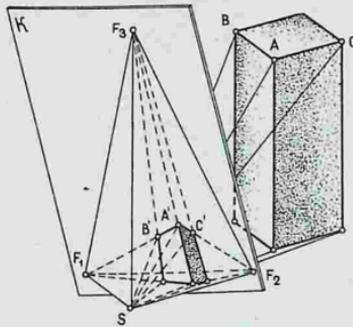
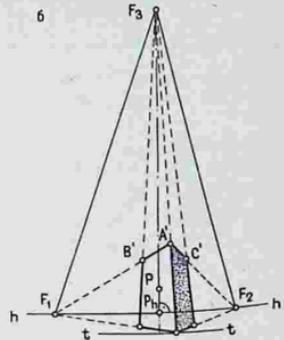


Рис. 350

Рис. 351



6



параллельна вертикальным ребрам объекта, которые в перспективе изображаются вертикальными. При наклонной картине они не параллельны картине и поэтому изображаются сходящимися в третьей точке схода  $F_3$  (рис. 351, а). Это приводит к дополнительно усложнению построений, связанному с проведением перспектив прямых в третью, как правило, недоступную точку схода и с определением перспектив вертикальных прямых в зависимости от наклона картинной плоскости.

Плоскости, параллельные граням объекта и проходящие через точку зрения, пересекают картину по трем прямым (линиям схода), которые образуют так называемый *треугольник схода* (рис. 351, б). Вершинами этого треугольника являются точки схода  $F_1$  и  $F_2$  горизонтальных ребер объекта и точка схода  $F_3$  вертикальных ребер. Точку

пересечения  $P$  перпендикуляра, опущенного из точки зрения на картинную плоскость, называют *главной точкой картины*, а точку  $P_h$  пересечения горизонтального луча, перпендикулярного линии горизонта, называют *главной точкой горизонта*.

Линия горизонта  $hh$  и основание картины  $tt$  определяются так же, как и при вертикальной картине, — пересечением с картиной горизонтальной плоскости, проходящей через точку зрения, и пересечением с картиной предметной плоскости.

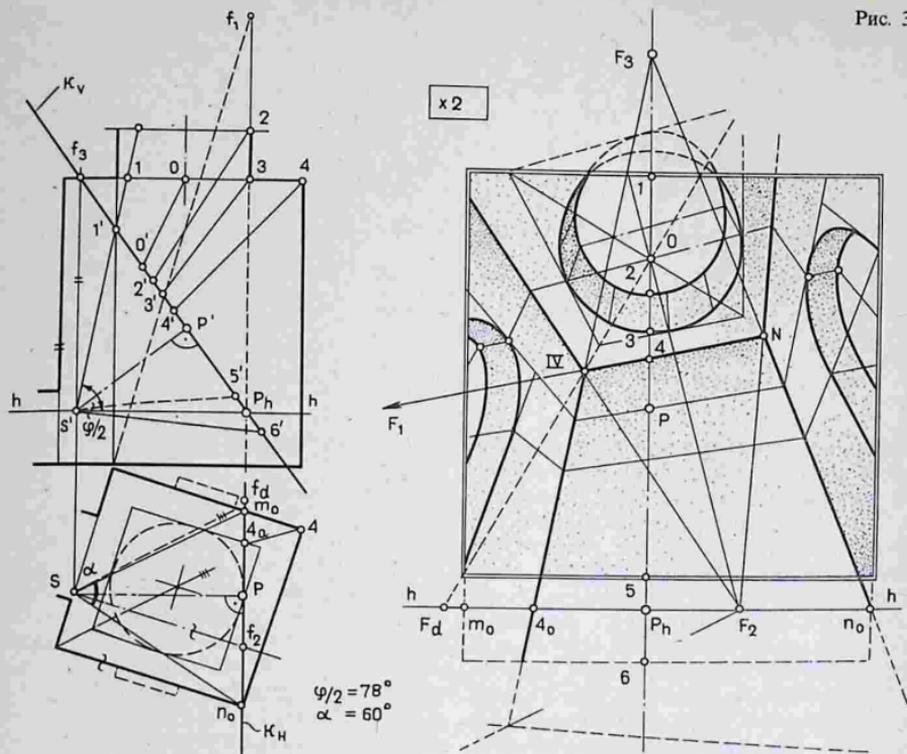
### 81. Построение перспективы на наклонной плоскости

Перспективные изображения на наклонной плоскости строят по ортогональным проекциям объекта. В рассматриваемых ниже примерах построений в некоторых случаях точка зрения выбрана с нарушением рекомендуемых ограничений величины углов зрения с тем, чтобы более четко показать возникновение искажений и сделать размещение построений на чертеже более компактным.

**Построение перспективы объекта с использованием точек схода прямых.** На рис. 352, а план объекта расположен таким образом, что главный луч параллелен фронтальной проекции, а основание картины — перпендикулярно ей. На плане определены проекции  $f_1$  и  $f_2$  точек схода прямых, на основании картины







главный луч проведен по биссектрисе горизонтального и вертикального углов зрения, главная точка картины находится посередине изображения, поэтому незначительные перспективные искажения, несмотря на предельные углы зрения, равномерно распределены по краям изображения. За пределами рамки изображения они оказываются чрезмерными.

**Построение теней в перспективе** (рис. 355). Приемы построения перспективы теней на вертикальной и наклонной картинах аналогичны. Чтобы построить горизонтальную проекцию источника света – солнца, надо через перспективу солнца провести перпендикуляр к предметной плоскости. Его основание как бесконечно удаленная горизонтальная проекция точки будет находиться на линии горизонта. Таким образом, необ-

ходимо провести через точки  $S$  и  $s$  перспективу вертикальной прямой, направленной в точку схода  $F_3$  вертикальных ребер объекта. Элементы построения перспективы теней объекта на наклонной картине показаны на рис. 355 и не требуют пояснений.

**О выборе точки зрения и наклона картины.** Сравнивая перспективные изображения на рис. 352 и 354, можно прийти к выводу, что на первом из них при вертикальном угле зрения  $\varphi/2 = 58^\circ$  перспективные искажения оказались более значительными, чем на втором изображении – перспективе фрагмента, где вертикальный угол зрения равен  $78^\circ$ .

Из этого факта можно сделать следующий вывод: *параметры углов зрения и углов наклона картины должны быть различными для случаев, когда изображается весь объект и линия горизонта*

Рис. 355

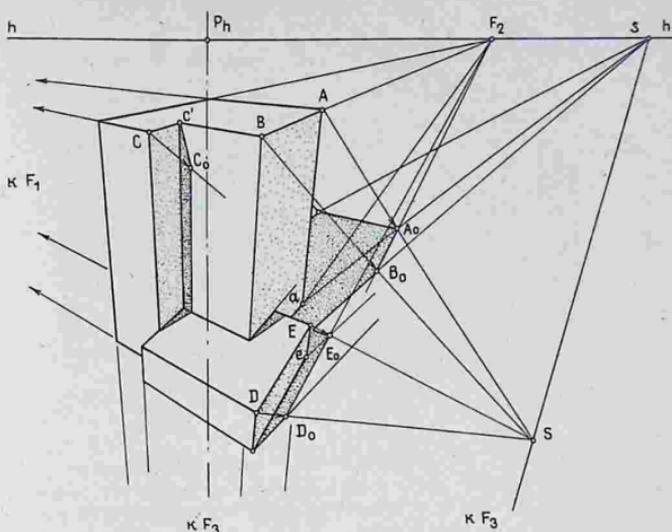
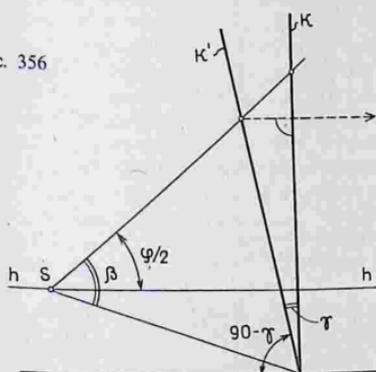


Рис. 356



$\varphi/2$	$\gamma$	$(90 - \gamma)$
$30^\circ$	$3^\circ$	$87^\circ$
$45^\circ$	$6^\circ$	$84^\circ$
$60^\circ$	$10^\circ$	$80^\circ$

пересекает его перспективу или когда изображается фрагмент объекта, а также объект при виде сверху.

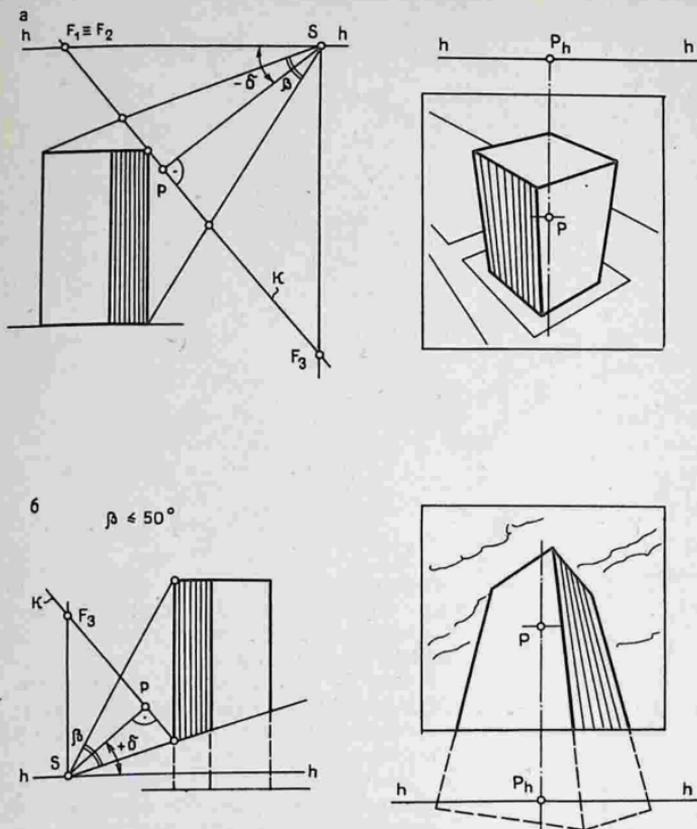
В практике построения перспективных изображений на наклонной картине выработаны следующие рекомендации.

1) При изображении всего объекта и линии горизонта,

пересекающей его перспективу, определяющим параметром при выборе наклона картины служит вертикальный угол зрения  $\varphi/2$ , отсчитываемый от линии горизонта (рис. 356). Для того чтобы перспективные искажения были наименьшими, углы наклона  $\gamma$  картинной плоскости от вертикального положения при вертикальном угле зрения на объект  $\beta \leq 60^\circ$  должны быть равны: при  $\varphi/2 = 30^\circ$  — угол  $\gamma = 3^\circ$ ; при  $\varphi/2 = 45^\circ$  — угол  $\gamma = 6^\circ$ ; при  $\varphi/2 = 60^\circ$  — угол  $\gamma = 10^\circ$ .

По способу построения, приведенному на рис. 352, переносят проекции точек с фронтального следа  $K_v$  картины на перспективу не после совмещения картины с вертикальной плоскостью, а горизонтальными линиями связи непосредственно с наклонной картины на перспективу. При этом точку схода  $F_3$  и малую картину, если она используется, переносят после совмещения наклонной картины с вертикалью.

2) При построении перспективных фрагмента здания или всего объекта при виде сверху, когда линия горизонта не пересекает его изображение, определяющий параметр при выборе наклона



картины составляет угол  $\delta$  между линией горизонта и направлением главного луча, который является биссектрисой вертикального угла зрения на объект  $\beta \leq 50^\circ$  (рис. 357).

В зависимости от направления отсчета угла  $\delta$  от горизонта вверх или

вниз величину угла удобно обозначать со знаком плюс или минус. Угол  $\delta$  может быть равен  $\pm 40 \dots 60^\circ$  и более, вплоть до получения так называемой *плафонной перспективы*, когда главный луч направлен вертикально (перпендикулярно к картинной плоскости).

## Глава 23. Реконструкция архитектурных перспектив и приемы фотомонтажа в перспективе

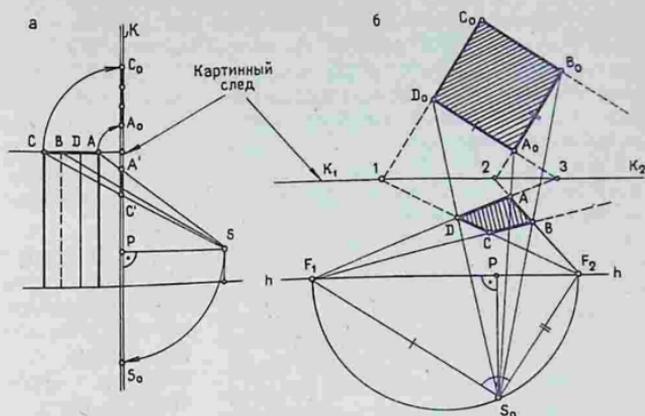
### 82. Основные положения

Перспективу строят по ортогональным проекциям объекта, по его

плану, фасаду, разрезам, выполненным в определенном масштабе.

Понятие масштаб относится к параллельным (ортогональным) проек-

Рис. 358



циям и не может быть распространено на центральную проекцию, на перспективу. Величина проекции какого-либо элемента объекта в перспективе зависит от того, на каком расстоянии он находится от картинной плоскости, от точки зрения. Таким образом, перспективное изображение объекта на плоскости не определяет метрически точно ни размеров, ни истинной формы, ни положения объекта относительно точки зрения.

В архитектурной практике возникает ряд задач, когда под перспективному изображению или фотоснимку объекта необходимо определить действительные его параметры. Это происходит в следующих случаях:

1) при разработке композиции объекта и проверке ее восприятия с помощью эскизного перспективного изображения с последующей корректировкой композиции на перспективе с внесением соответствующих поправок в ортогональные проекции;

2) при реставрационных работах и восстановлении разрушенных памятников архитектуры, когда необходимо воспроизвести ортогонально-проекционные чертежи объекта по сохранившемуся фотоснимку;

3) при необходимости выполнения в короткие сроки и без специальных работ обмерных чертежей по фотоснимкам архитектурного сооружения.

Определение по перспективному изображению или фотоснимку размеров, формы и относительного положения объекта и воспроизведение его ортогональных проекций (плана и фасада) называется *реконструкцией перспективы в ортогонально-проекционный чертеж*.

В основе способов реконструкции перспективы лежит одна из фундаментальных закономерностей геометрии — взаимно однозначное преобразование плоскости в себя, которое называется *гомологией* (см. § 37, рис. 154, а, б). В результате гомологического преобразования устанавливается соответствие между перспективой плоской фигуры и самой фигурой, при этом плоскость фигуры должна быть совмещена с картиной.

**Совмещение плоскости объекта с картиной.** На рис. 358, а показана профильная проекция объекта, картины и точки зрения. *Перспективное соответствие двух плоскостей (плоскости ABCD объекта и плоскости картины) не нарушится, если эти плоскости совмещены.* При совмещении двух плоскостей одну из них (плоскость объекта) совмещают с картиной вращением вокруг картинного следа (рис. 358, б), а точку зрения вращением в том же направлении вокруг линии горизонта совмещают с картиной. При этом перспективное соответствие совмещенных фигур не нару-

шится. Совмещенная точка зрения  $S_0$  представляет собой *центр соответствия*. Картинный след  $K_1K_2$  является *осью соответствия*. Между перспективной квадрата  $ABCD$ , расположенного выше линии горизонта, и совмещенной плоскостью  $A_0B_0C_0D_0$  объекта установлено соответствие — все прямые, соединяющие соответственные точки, проходят через центр соответствия  $S_0$ . На оси соответствия в точках 1, 2, 3, ... пересекаются пары соответственных прямых.

Таким образом, если задана перспектива объекта (в данном примере — горизонтальный квадрат), а также задана или определена точка зрения и проведен картинный след плоскости объекта (он может быть выбран в любом месте картины), то для реконструкции данной плоскости объекта следует через точку зрения и перспективу объекта провести проецирующие прямые, а через картинные следы 1, 2 и 3 сторон перспективы квадрата — прямые, параллельные линиям  $S_0F_1$  и  $S_0F_2$  совмещенного плана. В пересечении этих соответственных прямых получим искомые точки ортогональной проекции (плана) плоскости объекта. Прямые  $S_0F_1$  и  $S_0F_2$  образуют прямой угол. Окружность, построенная на отрезке  $F_1F_2$ , пройдет через совмещенную точку зрения. Точка зрения находится на вертикальной оси перспективы, что соответствует исходному условию о размещении главного луча по биссектрисе горизонтального угла зрения. Перпендикуляр, проведенный из точки зрения на линию горизонта, определяет главную точку  $P$  картины.

### 83. Реконструкция перспективы на вертикальной картине

При реконструкции перспективы в ортогональные проекции должны быть известны некоторые геометрические признаки формы объекта. Часть из них можно считать заведомо известными, такие, например, как параллельность вертикальных и горизонтальных ребер здания; можно установить также, что горизонтальные ребра здания и вер-

тикальные его плоскости образуют между собой прямые углы и т. д.

Однако для реконструкции и определения необходимых элементов перспективы, в том числе главной точки картины и дистанции точки зрения, необходимы дополнительные геометрические признаки. Рассмотрим некоторые из них:

1) *Перспектива горизонтального квадрата, стороны которого соответственно параллельны и перпендикулярны картине, и вписанная в него окружность* (рис. 359, а). С помощью диагонали квадрата определяют дистанционную точку и дистанцию точки зрения.

2) *Перспектива горизонтального квадрата в произвольном положении* (рис. 359, б). С помощью диагонали квадрата определяют на линии горизонта точку схода  $F_d$ . Совмещенная точка зрения  $S_0$  будет лежать на окружности, построенной на отрезке  $F_1F_2$ , как на диаметре.

3) *Перспектива горизонтального прямоугольника с известным соотношением сторон* (рис. 359, в). С помощью перспективного деления стороны прямоугольника выделяют квадрат, а затем определяют главную точку картины и дистанцию точки зрения по предыдущей схеме.

Помимо указанных выше геометрических признаков можно использовать и ряд других — перспективу вертикального квадрата и вертикального прямоугольника с известным соотношением сторон, перспективу угла, лежащего в вертикальной плоскости, и др.

На основе этих признаков можно определить план и фасад объекта. Такой вид определения истинной формы объекта называют реконструкцией «до подобия формы».

Реконструкция истинной формы объекта упрощается, если построение эскизной перспективы выполнялось в соответствии с существующими рекомендациями о выборе направления главного луча по биссектрисе горизонтального угла зрения. В этом случае положение главной точки картины и ди-

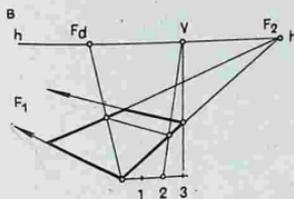
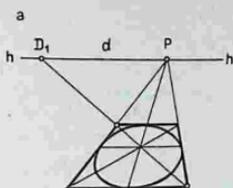
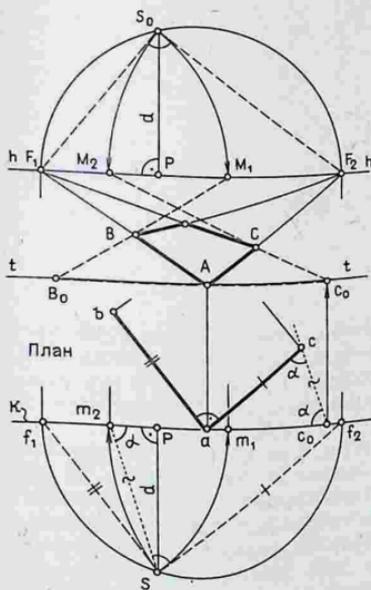
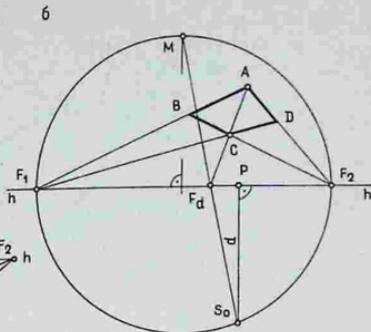


Рис. 359

Рис. 360



станция точки зрения определяются просто.

Если реконструкция подвергается фотоснимок объекта, он должен быть полным, т. е. без кадрирования и обрезки кадра. Фотопленка при съемке должна располагаться в вертикальном положении. В этом случае главная точка картины лежит в центре кадра или на

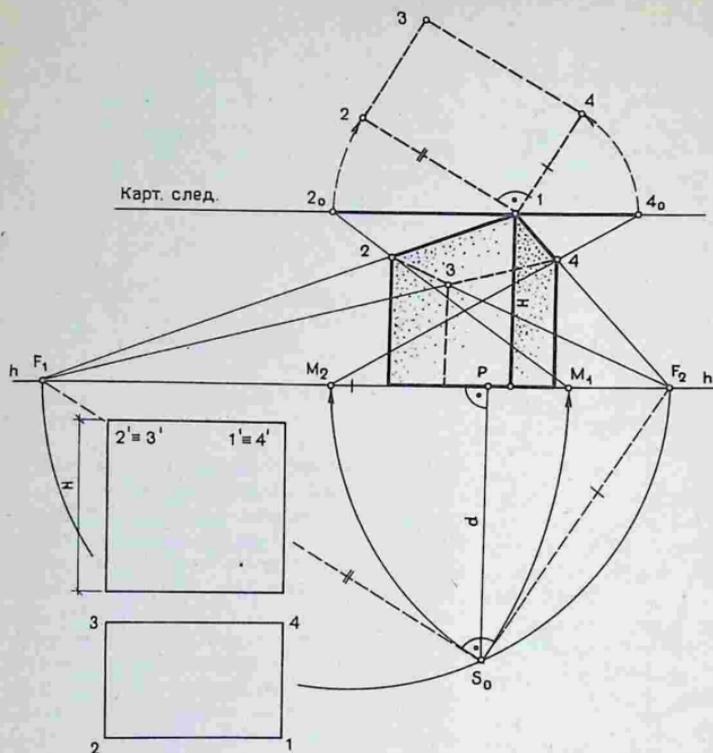
его средней вертикали (если пленка занимала наклонное положение).

Для получения при реконструкции перспективы проекции объекта в определенном масштабе необходимо наличие на перспективе или фотоснимке метрического признака — элементов объекта, размеры которого известны: например, изображение фигуры человека, размеры оконного или дверного проема, ступеней входной лестницы, размеры элементов кладки или сборных конструкций и т. д. Такую реконструкцию перспективы называют *полной*.

Графическая точность реконструкции перспективы тем выше, чем ближе к объекту расположена точка зрения или точка фотосъемки.

**Точки измерения.** Как было показано выше (см. рис. 358), для определения истинной формы плоской фигуры по ее перспективе (для реконструкции перспективы) необходимо совместить плоскость фигуры с картиной. Это в равной мере относится и к отрезкам прямых линий и, в частности, к перспективе горизонтальных прямых с точками схода  $F_1$  и  $F_2$  на линии горизонта, которые широко используются при построении перспективы объекта способом архитекторов.

Чтобы на плане (рис. 360) совместить с картиной, т. е. измерить отрезок горизонтальной прямой  $ac$ , необходимо повернуть его вокруг точки  $a$  до совме-



нения с картиной в точке  $s_0$ . Это вращение можно заменить проведением прямой  $cs_0$  (пунктирная линия) под одинаковыми углами  $\alpha$  к прямой и к ее совмещенной проекции на картину. Проведя затем из точки зрения  $s$  прямую, параллельную отрезку  $cs_0$ , или сделав засечку дугой радиуса  $f_2s$ , определим на следе картины точку  $m_2$ , а на линии горизонта — соответствующую точку схода  $M_2$  для прямых, параллельных отрезку  $CC_0$ . Точка  $M_2$  является *точкой измерения* прямых, идущих в точку схода  $F_2$ . Аналогичные построения можно выполнить без плана непосредственно на перспективе, сделав засечку радиусом  $F_2S_0$  из совмещенной точки зрения  $S_0$  на линии горизонта. Если за центр дуги принять точку схода  $F_1$ , получим точку измерения  $M_1$  для горизонтальных прямых, идущих в точку схода  $F_1$ .

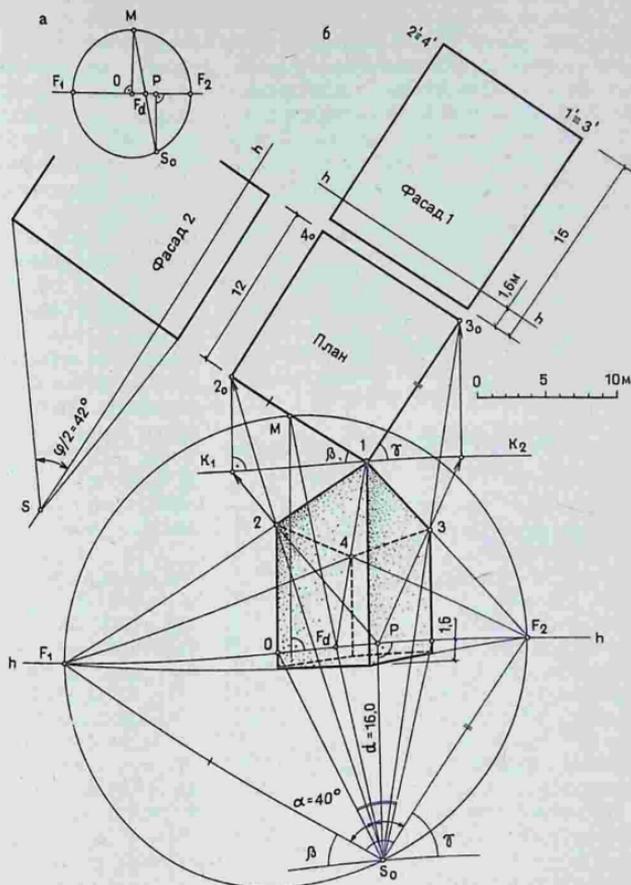
Прямые, проведенные из точек измерения через перспективы точек  $B$  и  $C$ , определяют на основании картины истинные размеры сторон прямоугольника в масштабе плана.

Итак, при наличии на перспективе совмещенной точки зрения  $S_0$  реконструкция горизонтальной плоской фигуры может быть выполнена двумя способами — с помощью точек измерения (рис. 360) или с помощью лучевых прямых и картинных следов сторон прямоугольника (рис. 358).

**Способы реконструкции перспективы объекта.** На рис. 361 приведен способ реконструкции перспективы объекта, имеющего форму параллелепипеда, с помощью точек измерения.

Картинный след верхнего основания объекта проведен через точку  $1$  вертикального ребра. Построены точки изме-

Рис. 362



рения, из которых проведены затем прямые через точки 2 и 4 сторон верхнего основания объекта. Отрезки прямых  $1-2_0$  и  $1-4_0$ , полученные на картинном следе, представляют собой стороны плана объекта, а его высоту — размер вертикального ребра 1, которое совмещено с картиной.

Таким образом, проведена реконструкция перспективы объекта «до подобия формы» — на плане и фасаде отображены истинные соотношения параметров объекта.

На рис. 362 приведен другой способ реконструкции перспективы объекта,

имеющего форму прямой призмы с квадратным основанием, с помощью проведения лучевых прямых из совмещенной точки зрения  $S_0$  или прямых, проведенных из главной точки картины  $P$  и перпендикулярных картине. Наличие перспективы квадрата дает возможность определить совмещенную точку зрения и главное расстояние  $S_0P$  (см. рис. 359, б и 362). Картинный след проведён через точку 1 вертикального ребра, которое совмещено с картиной и проецируется в истинную величину (рис. 362, б). Стороны совмещенного плана проведены параллельно прямым

$S_0F_1$  и  $S_0F_2$ . Точки  $2_0$  и  $3_0$  плана могут быть построены двумя приемами — лучевыми прямыми, проведенными из совмещенной точки зрения  $S_0$ , или прямыми, идущими из главной точки картины  $P$ , которые в совмещенном положении изображаются перпендикулярными картинному следу (на рисунке показаны оба приема).

Поскольку на перспективе отображена высота горизонта зрителя (1,6 м), можно выполнить *полную реконструкцию* перспективы объекта, определить размеры сторон плана и высоту объекта. Расстояние точки зрения равно 16 м, горизонтальный угол зрения  $\alpha = 40^\circ$ , а вертикальный угол  $\varphi/2 = 42^\circ$ .

#### 84. Реконструкция перспективы на наклонной плоскости

Способы реконструкции перспективы на наклонной картине (или фотоснимков объекта) имеют важное значение, так как в подавляющем большинстве случаев фотоснимки архитектурных сооружений выполняются при наклонном положении плоскости фотопленки и оси аппарата. Эти способы применяют, например, при реставрационных и восстановительных работах для реконструкции в ортогональные проекции архивных фотоснимков несохранившихся зданий.

Возникающая при этом сходимость перспективы вертикальных прямых объекта в третью точку схода  $F_3$ , которая несколько усложняет построения, вместе с тем дает возможность определить при реконструкции главную точку картины и другие параметры перспективы без наличия ряда дополнительных геометрических признаков формы объекта (см. § 83), которые далеко не всегда бывают известны. Это представляет большое преимущество данного способа реконструкции.

**Определение главной точки картины и расстояния точки зрения.** При построении перспективы на наклонной плоскости три прямые, проведенные из точки зрения параллельно горизонтальным и вертикальным ребрам объекта, при

пересечении с картиной определяют три точки схода  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  прямых. Плоскости — две вертикальные и одна горизонтальная, проведенные через точки зрения и параллельные граням объекта (рис. 363, а), пересекают картину по трем линиям схода, которые образуют на картине *треугольник сходов*. Три плоскости вместе с точкой зрения можно рассматривать как треугольную пирамиду с вершиной  $S$ , основанием которой служит треугольник сходов. При точке зрения эти плоскости имеют три прямых угла. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, пересечет картинную плоскость в точке  $P$  пересечения высот треугольника основания пирамиды. Точка  $P$  — *главная точка картины*. В пересечении главной вертикали с линией схода  $F_1F_2$  (линией горизонта) находится *главная точка  $P_h$  горизонта*.

При реконструкции перспективы, как правило, используется совмещенная с картиной точка зрения. Совместим три грани пирамиды с плоскостью ее основания вращением вокруг соответствующих линий схода (рис. 363, б). При этом точка зрения трижды совместится с плоскостью картины. Поскольку точка зрения представляет собой вершину прямого угла грани, она должна лежать на окружности, диаметром которой является линия схода, и на продолжении высоты треугольника сходов. В дальнейшем, будем производить вращение граней *внутрь* треугольника сходов. Эти *совмещенные точки зрения также будут лежать на высотах треугольника сходов*.

Для того чтобы определить дистанцию точки зрения  $S$ , совместим высоту пирамиды  $SP$  (дистанцию точки зрения) с ее основанием. Высотой пирамиды станет второй катет прямоугольного треугольника  $SPP_h$  (см. рис. 363, а). Построим в совмещенном положении этот треугольник, вершину  $S_0$  которого заседем из точки  $S_3$  радиусом, равным гипотенузе  $SP_h$  треугольника (пунктирная линия).

**Способы реконструкции перспективы**

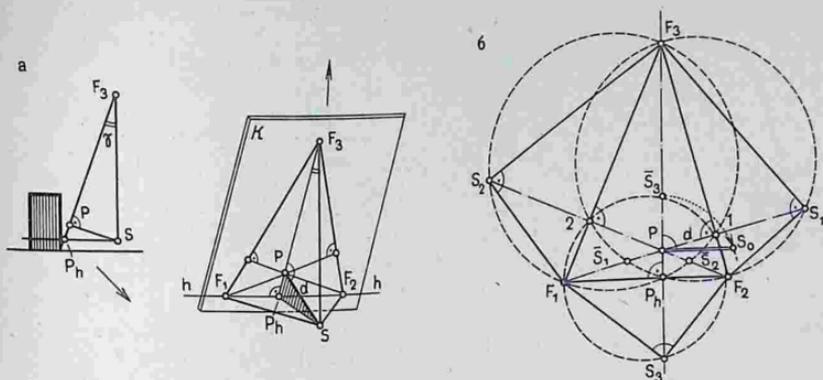


Рис. 363

на наклонной картине. Рассмотрим два способа реконструкции перспективы или фотоснимка объекта. Как и при реконструкции перспективы на вертикальной картине, в одном из способов реконструкция производится с помощью проецирующих лучей, проведенных из совмещенной точки зрения, а в другом — с помощью точек измерения. Первый способ менее удобен, так как искомые параметры объекта сопряжены построениями с перспективой или наложены на нее. Второй способ лишен этих недостатков.

1) Реконструкция перспективы с помощью проецирующих лучей, проведенных из совмещенной точки зрения. На рис. 364, а построен треугольник схода и определены две совмещенные внутри треугольника точки зрения  $S_1$  и  $S_3$ . Картина касается объекта в точке  $A$  (рис. 364, б), через которую проведен картинный след верхнего основания объекта. Реконструкция и определение плана выполнены с помощью проецирующих лучей, проведенных из совмещенной точки зрения  $S_3$ , аналогично приему, показанному на рис. 362. Для определения высоты объекта через точку  $A$  следует провести прямую параллельно линии  $S_1 F_3$ , как это сделано со сторонами плана, а затем определить на ней истинную высоту ребра  $AE$  объекта — отрезок  $AE_0$ , проводя прямую  $S_1 E$ , которая заскачет точку  $E_0$ . Эти постро-

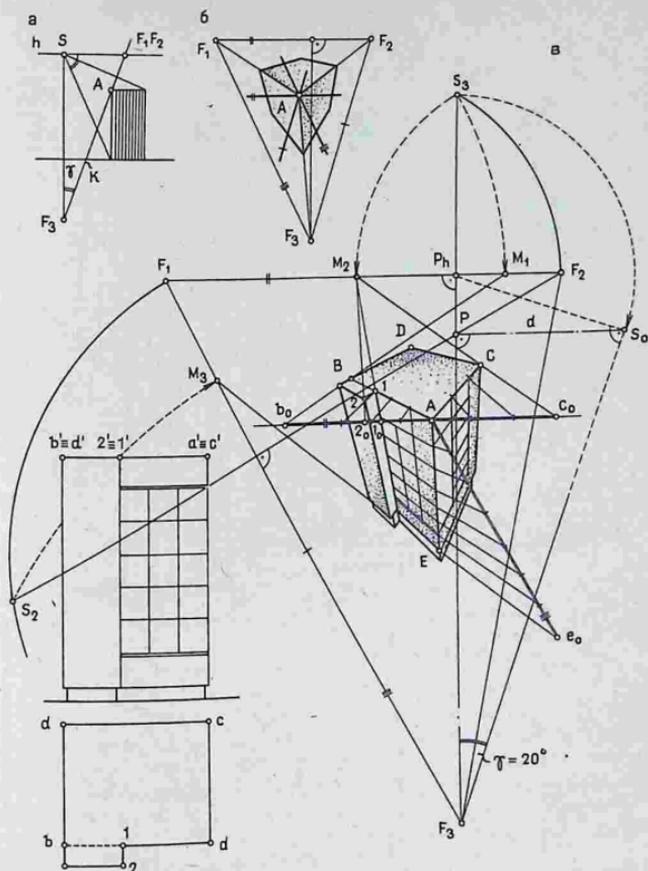
ния аналогичны построениям при реконструкции плана объекта. Положение линии горизонта на совмещенном фасаде объекта может быть определено с помощью прямой  $P_h$  перпендикулярно прямой  $AE_0$  или построением точек пересечения перспективы вертикальных ребер с линией горизонта. Расстояние (дистанция) точки зрения определено приемом, приведенным на рис. 358 и 363. Угол  $\gamma$ , образованный главной вертикалью и прямой, проведенной через совмещенную точку зрения  $S_0$ , является углом наклона картинной плоскости и равен  $21^\circ$ .

На рис. 364, в даны реконструированные план и фасад объекта, а также положение точки зрения и картины.

2) Реконструкция перспективы с помощью точек измерения. На рис. 365 приведена реконструкция перспективы здания в ортогональные проекции, выполненная с помощью точек измерения и построения картинных следов основных плоскостей объекта. Перспектива построена с высокой точки зрения, картина касается объекта в точке  $A$  (рис. 365, а). Вертикальные и горизонтальные плоскости объекта образуют в перспективе три линии схода. Три грани объекта, сходящиеся в вершине  $A$ , пересекаются с картиной по трем прямым — следам плоскостей (рис. 365, б). Через точку  $A$  проходит картинный след верхней грани и два



Рис. 365



перспективы или фотоснимка с помощью точек измерения без использования третьей недоступной точки схода (рис. 366). Фотоснимки архитектурных сооружений выполняют, как правило, при незначительном наклоне от вертикали картинной плоскости (плоскости фотопленки). В этом случае сходимость перспектив вертикальных прямых в точку схода  $F_3$  очень мала и точка схода оказывается далеко за пределами изображения объекта (рис. 366, а).

Рассмотрим способ реконструкции перспективы без использования недо-

ступной точки схода  $F_3$  перспектив вертикальных прямых (рис. 366, б).

Для реконструкции фотоснимка и определения параметров объекта (проекции плана и фасада) необходимо определить: положение главной вертикали, главной точки картины  $P$  и главной точки горизонта  $P_h$ , а также точек измерения  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ .

Главную вертикаль и главную точку горизонта можно определить следующим построением (рис. 366, в), аналогичным описанному в § 72 (рис. 313) способу проведения перспектив прямых

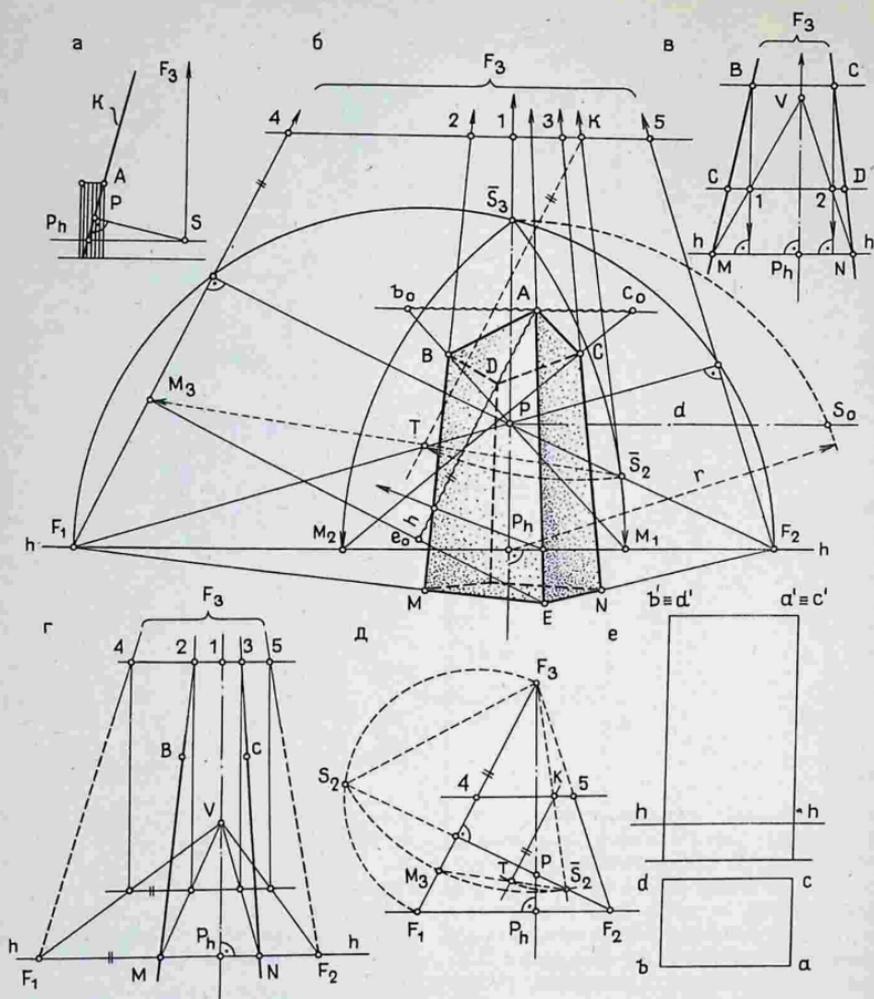


Рис. 366

в недоступную точку схода. Проводят две горизонтальные прямые  $BC$  и  $CD$ . Из точек  $B$  и  $C$  опускают перпендикуляры на линию горизонта, а затем через точки  $1$  и  $2$  пересечения с прямой  $CD$  проводят наклонные прямые, которые при пересечении определяют точку  $V$ , лежащую на главной вертикали [6, 18]. После этого, построив совмещенную

точку зрения  $\bar{S}_3$  на полуокружности, можно определить точки измерения  $M_1$  и  $M_2$  и найти относительные размеры  $Ab_0$  и  $Ac_0$  горизонтальных ребер объекта, как это было сделано в предыдущем примере (см. рис. 365).

Главную точку картины и точку измерения  $M_3$  можно определить, если найти направление линий схода  $F_1 F_3$  и

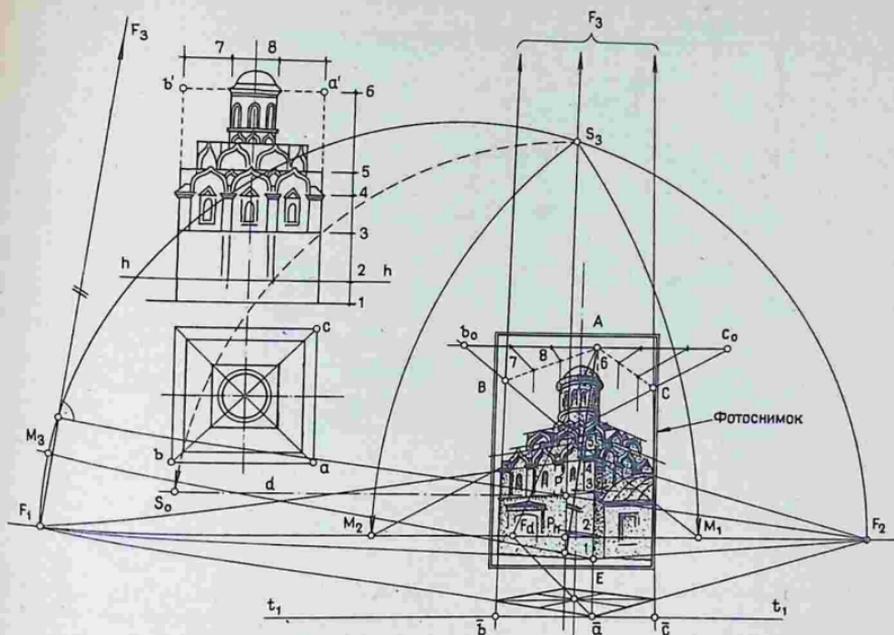


Рис. 367

$F_2F_3$ . Они могут быть построены любым из способов проведения перспективы прямыми линиями в недоступную точку схода (рис. 366, з). Главную точку  $P$  определяют в пересечении одной из высот треугольника сходов с главной вертикалью перспективы.

Для определения высоты объекта необходимо построить точку измерения  $M_3$  на линии схода  $F_1F_3$ . Через совмещенную точку зрения  $S_2$  (рис. 366, д) проводим перспективу прямой в недоступную точку схода  $F_3$  описанным выше способом и определяем на вспомогательной горизонтали 4–5 точку  $K$ , через которую проводим затем прямую  $KT$  параллельно линии схода  $F_1F_3$ . Точку  $T$  определяем засечкой из точки  $K$  радиусом, равным  $KS_2$ . Прямая, проведенная через точки  $S_2$  и  $T$ , пересечет линию схода  $F_1F_2$  в искомой точке измерения  $M_3$ . Через перспективу вершины  $A$  объекта проводим картинный след грани  $ABME$  параллельно линии

схода  $F_1F_3$  и с помощью прямой, проведенной из точки измерения  $M_3$  через точку  $E$ , определяем на нем точку  $e_0$  и относительный размер  $Ae_0$  ребра  $AE$ .

Высота линии горизонта определена на картинном следе с помощью точки измерения  $M_3$ .

На рис. 366, е изображены план и фасад объекта.

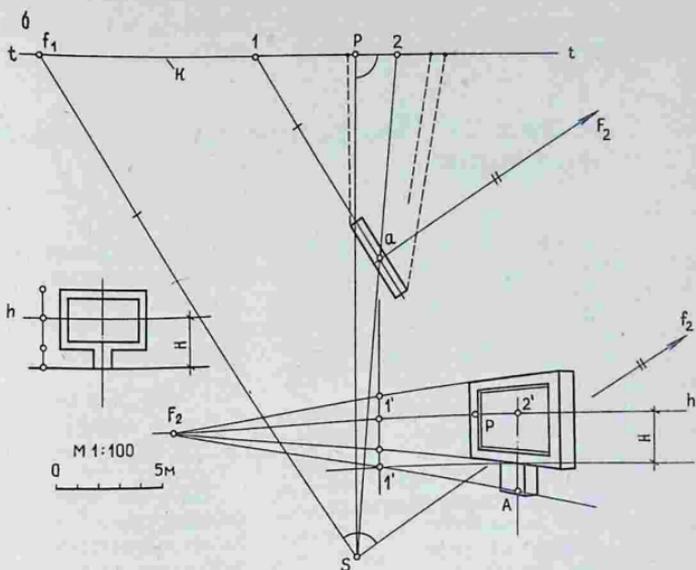
На рис. 367 показана реконструкция фотоснимка Казанского собора в Москве описанным выше способом (см. рис. 365, 366), выполненная для проведения реставрационных работ и восстановления первоначального облика собора.

### 85. Приемы фотомонтажа в перспективе

При построении перспективы проектируемого объекта способы реконструкции могут быть применены для геометрически точного монтажа пер-



Рис. 368



ложение этого отрезка соответствует основанию картины  $tt$ , которая определяет масштаб перспективного изображения на картинной плоскости ( $M 1:100$ ). Перспектива прямой  $aF_1$  пересекает основание картины в точке 1. Вертикаль, проведенная из этой точки, определяет на снимке действительное положение точки 1. Из вторичной проекции точки  $a$  проведем вертикаль и отметим на следе картины точку 2<sub>0</sub>.

**Построение перспективы стенда в масштабе фотоснимка.** На рис. 368, б строят план, на котором изображают точку зрения  $S$  и основание картины  $tt$ , перенося с перспективной схемы на рис. 368, а отрезки  $F_1P$ , и перпендикулярно ему — дистанцию точки зрения  $S_0P$ . На основание картины переносят также точки 1 и 2. Через точку 1 проводят прямую, параллельную линии  $Sf_1$ , а через точку 2 — проецирующий луч  $S2$ . Точка пересечения этих прямых на плане будет местом постановки стенда. На плане в точке  $a$  вычерчивают горизонтальную проекцию стенда в масштабе 1:100, а на свободном поле чертежа — его фасад, на который переносят высоту линии горизонта  $H$ , взятую с фотоснимка в точке

1 пересечения перспективы прямой  $AF_1$  с основанием картины (см. рис. 368, а). Перспективу стенда строят, проводя параллельно основанию картины линию горизонта  $F_1-2'$  и откладывая на ней точки  $F_1$ , 1 и 2. В точке 1 откладывают высоту, взятые с фасада, а поперечные размеры перспективного изображения берут со следа картины, на которую проецируют из точки  $S$  опорные точки плана стенда (штриховые линии).

Построенную перспективу воспроизводят затем на фотоснимке, «привязывая» ее с помощью точек  $A$ ,  $2'$  и  $P$ .

**Построение теней.** Направление светового луча при построении падающих теней от стенда должно соответствовать освещенности на фотоснимке фоновое здания. Для построения перспективы солнца и его горизонтальной проекции выделим на снимке (рис. 368, а) тенеобразующую точку  $B$  и падающую от нее тень  $B_0$  и построим вторичную проекцию тени — точку  $b$ . Продолжив вторичную проекцию луча  $Bb$  до линии горизонта, получим точку  $s$ , а затем на одной вертикали с ней — перспективу солнца  $S$ .

Основные принципы фотомонтажа

в перспективе на вертикальной картине сохраняются и в том случае, когда фо-

тоснимок выполнен на наклонной плоскости.

## Глава 24. Построение широкоугольных перспектив

В современных условиях, когда объектами проектирования и строительства стали крупные сооружения и градостроительные комплексы, нельзя ограничиться при построении перспективы небольшими углами зрения (40–50°).

Однако при увеличении углов зрения возникают значительные искажения изображенных форм и пропорций объектов, особенно на периферии картины. Поэтому нередко перспективные изображения выполняют при сравнительно небольших углах зрения, но с удаленных точек зрения, которые не соответствуют реально существующим пунктам в плане, обусловленным планировочной ситуацией и окружающей зданию застройкой. Построения с большими углами зрения приходится осуществлять также, изображая внутренний вид помещений.

Широкоугольные перспективные проекции дают возможность построить изображение крупных архитектурных комплексов при углах зрения, значительно превышающих существующие пределы, примерно до 120–140°. Это и есть те границы поля зрения, в пределах которых у зрителя создается устойчивая и целостная картина увиденного и то, что он может *графически отобразить на плоскости*.

Необходимо вместе с тем отметить, что для большого числа задач, возникающих в практике проектирования, существующий метод проекций на вертикальной плоскости остается незаменимым и не имеет себе равных по простоте и геометрической стройности. Способы построения широкоугольных перспектив целесообразно применять в процессе проектирования, когда автору проекта важно получить наиболее

точные и достоверные сведения о том, как будут восприниматься в реальных условиях пропорции и объемно-пространственная композиция проектируемого сооружения

### 86. Перспективные искажения и основы способа построения широкоугольных перспектив

Одну из причин недостоверности перспективных изображений составляют перспективные искажения. Различие между зрительным образом, возникающим в результате восприятия объекта, и образом этого объекта, который создается при рассмотрении перспективного изображения, называют *перспективным искажением*.

#### Виды перспективных искажений.

Можно выделить три вида перспективных искажений: периферические, нелинейные, глубинно-пространственные.

Наиболее наглядными примерами *первого* вида искажений могут служить деформации на изображении тел вращения (см. рис. 369, а), приобретающих на периферических участках изображения несимметричные по контуру очертания, преувеличенные, а не уменьшенные в перспективе поперечники и неестественные наклоны осей эллипсов. Необходимо отметить, что периферические искажения обнаруживаются только при изображении знакомых по форме объектов.

*Второй* вид нелинейных перспективных искажений проявляется в виде неестественного искривления на изображении прямолинейных элементов объекта. Эти искажения возникают при построении на цилиндрической картине (рис. 369, б), а также при панорамной фотосъемке. Этот вид искажений легко

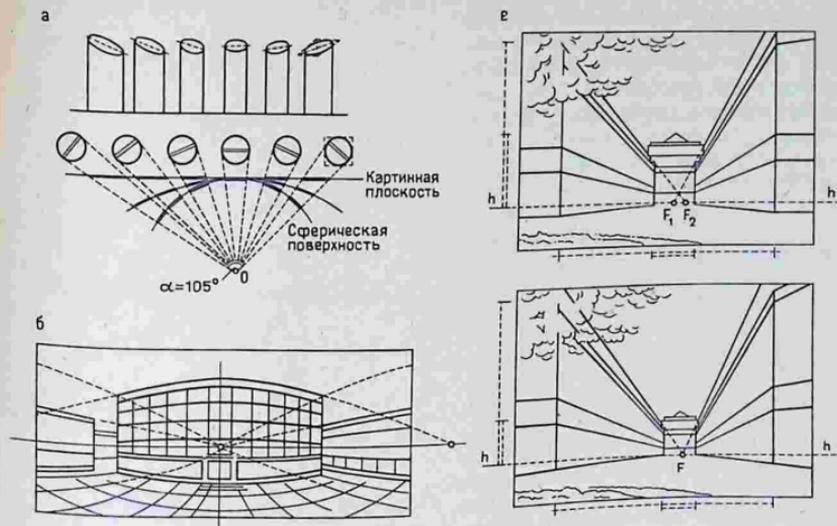


Рис. 369

обнаруживается при изображении регулярных композиций. Проецирование на цилиндрическую поверхность было вызвано стремлением устранить периферические искажения, возникающие при больших углах зрения<sup>1</sup>.

Третий вид деформации перспективных изображений — это глубинно-пространственные искажения, которые носят неявный характер и не устраняются при уменьшении угла зрения на объект (рис. 369, в). При этом оказывается, что перспективные сокращения, наблюдаемые в природе, изменяются не прямо пропорционально увеличению расстояния до объекта. Оба изображения выполнены при оптимальных углах зрения, не превышающих  $45^\circ$ . На первом из них (рисунок с натуры) перспективные сокращения по глубине улицы сравнительно невелики, а на втором (фотография или проекция на вертикальную плоскость) улица выглядит значительно более протяженной.

Человек в процессе пространствен-

ного восприятия зрительно как бы приближает удаленные объекты и «поворачивает» их в свою сторону, уменьшая периферические ракурсы<sup>1</sup>.

**Основы способа построения широкоугольных перспектив.** В результате экспериментальных исследований и геометрического анализа реалистического рисунка с натуры была установлена такая проекционная поверхность «преломления» (точнее — система поверхностей), которая давала бы возможность устранить на перспективном изображении наибольшее число искажений и вместе с тем — увеличить углы зрения более чем вдвое, до  $120\text{--}140^\circ$  [10, 19].

Горизонтальная направляющая этой проекционной поверхности может быть представлена дугой окружности с центром  $K$ , расположенным относительно точки зрения  $O$  на двойном расстоянии от вершины кривой (рис. 370, а). Эта кривая отражает воспринимаемую в натуре степень перспективных сокращений по горизонтали.

<sup>1</sup> Устранить противоречие между этими двумя видами перспективных искажений, сохранив на изображении как прямолинейность линий, так и изометричность (отображение величин площади пропорционально их угловым размерам), без нарушения непрерывности и взаимной однозначности невозможно.

<sup>1</sup> Настоящее явление несоответствия так называемому угловому закону, экспериментально широко подтвержденное, получило в психологии название «относительной константности» восприятия величины и формы предмета [10, 19].

Вертикальная образующая поверхности может быть представлена в виде кривой, построение которой показано на второй схеме (рис. 370, б). Проводятся две дуги окружностей. Одна — из точки зрения  $O$ , а другая — из точки  $K$ , вдвое удаленной. Затем вдоль лучей зрения от точек пересечения со второй окружностью откладывают промежутки между точками первой и второй окружностей. Полученные точки соединяются плавной кривой. Эта кривая отражает степень перспективных сокращений по вертикали. При этом вертикальные элементы объекта, получив соответствующие сокращения, остаются на перспективном изображении вертикальными.

Как видно из сравнения этих схем, степень перспективных сокращений по вертикали оказывается более чем вдвое меньше ( $\approx 4,5 R$ ), чем в горизонтальном направлении ( $2R$ ). Установленная проекционная поверхность представляется своеобразным перспективным эквивалентом плоскости. В процессе проецирования на эту поверхность элементов объекта она аппроксимируется (замещается) отдельными плоскими участками, что устраняет перспективное искривление на изображении прямолинейных элементов объекта.

Рассмотрим схему построения перспективы (рис. 371). Для построения перспективы одной вертикальной плоскости  $AB$  объекта через точку зрения  $O$  на плане проводят две оси —  $x$  и  $y$  параллельно и перпендикулярно этой плоскости и окружность произвольного радиуса  $R$ . Из точки  $K_1$  на оси  $y$  проводят дугу радиусом  $2R$ . Чтобы получить изображение другого фасада  $AC$ , необходимо след второй поверхности расположить аналогично первому, но с центром  $K_2$  на оси  $x$ . Оба участка заменяются плоскостями, следы которых затем приводятся к совпадению в точке, являющейся проекцией линии пересечения плоскостей фасадов. Более подробно схема построения будет разобрана ниже, сейчас же важно отметить следующее:

1) для каждой основной видимой плоскости объекта используется своя

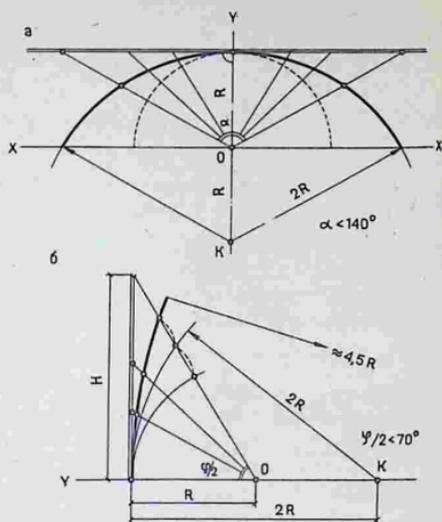


Рис. 370

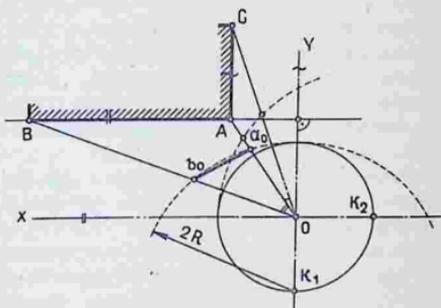


Рис. 371

проекционная поверхность — перспективный эквивалент данной плоскости, которая затем аппроксимируется плоскостью;

2) в результате центрального проецирования на такую систему проекционных поверхностей (плоскостей) и последующего ортогонального перепроецирования на плоскость изображения создается необходимое соответствие с указанными выше особенностями натурального восприятия и, в частности, соответствующее уменьшение перспективных сокращений по глубине изображаемого пространства.

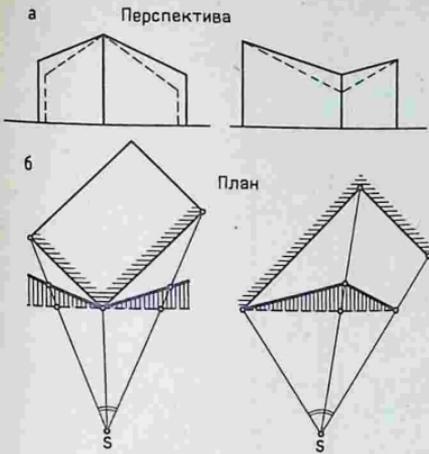


Рис. 372

Система проекционных плоскостей отображает объемно-пространственный характер композиции. Путем «подвижной» аппроксимации ее структура меняется в зависимости от вида композиции, от того, например, имеет ли объект «выступающую» или «отступающую» в глубину форму (рис. 372).

Геометрическая система построения перспективы, отображающая эти закономерности и влияние относительной константности восприятия, получила в литературе название *перцептивной перспективы*<sup>1</sup>. Ее следует отнести к нелинейным системам отображения, допускающим частичное нарушение взаимной однозначности отображения.

### 87. Способы построения широкоугольной перспективы

Приемы построения широкоугольных перспектив архитектурных объектов различного вида имеют некоторые специфические особенности. Однако процесс построения отличается от метода построения перспективы на вертикальной плоскости лишь в начальной стадии, когда выполняется перспектива основных объемов сооружения. Построения выполняются, как правило,

без использования точек схода и вспомогательного плана. Дальнейшая детализация перспективы производится известными приемами. Общая схема построения перспективы точек аналогична радиальному способу построения с совмещением высот (см. § 70, рис. 308).

**Перспектива здания высотной композиции.** Способы построения широкоугольной перспективы применяют в тех случаях, когда углы зрения на объект, в том числе и вертикальные, превышают рекомендуемые пределы.

На рис. 373, а приведено построение перспективы здания высотной композиции. Точка зрения в соответствии с условиями места должна быть расположена достаточно близко от здания. Вертикальный угол зрения  $\varphi/2$  составляет около  $60^\circ$  (полный угол — около  $120^\circ$ ).

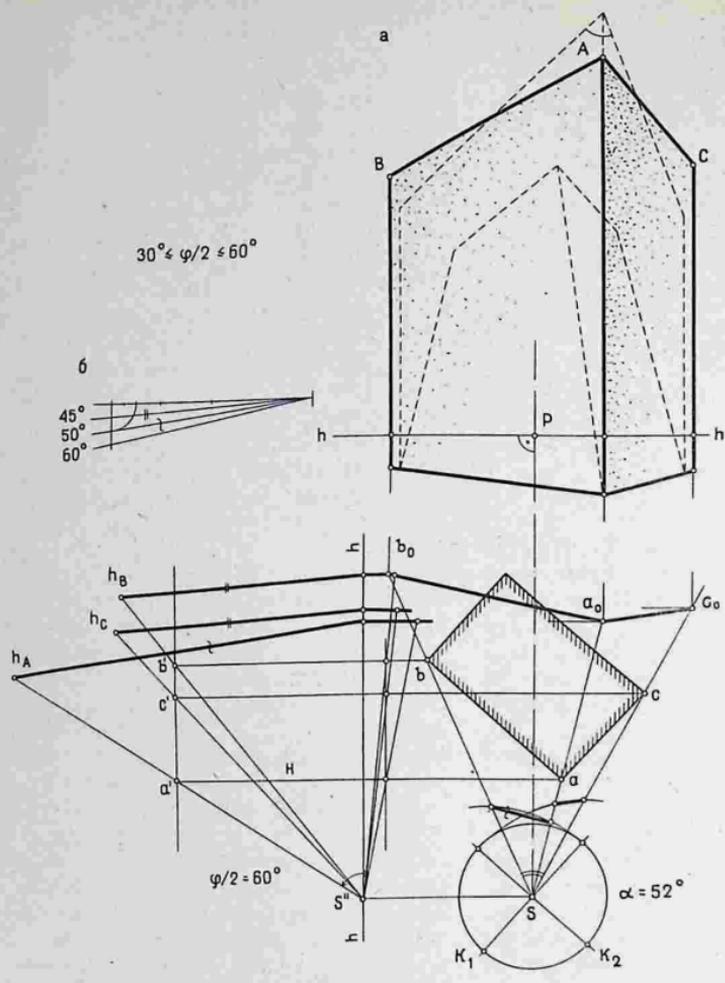
Биссектриса горизонтального угла зрения определяет ось перспективы. Как указывалось выше, необходимо на плане построить следы поверхностей для каждого из видимых фасадов здания. Эти участки поверхностей, аппроксимированные плоскостями, оказываются разномасштабными, поэтому их надо совместить на общем проецирующем луче. При этом следует определить требуемый размер изображения, перемещая следы плоскостей вдоль оси перспективы параллельно соответствующим участкам поверхностей первоначальной схемы. Проецируя точки  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  вдоль оси, получим на перспективе положение вертикальных ребер здания. Линия горизонта должна быть перпендикулярна оси перспективы.

При построении перспективы высотных объектов, когда вертикальные углы зрения превышают  $40^\circ$ , необходимо учесть *перспективные сокращения по вертикали*, используя вертикальную образующую проекционной поверхности (см. рис. 370, б).

Высота  $H$  и характерные точки объекта совмещены с планом. Через концы проекций ребер совмещенной проекции проводят проецирующие лучи. Кривые участки вертикальной образующей поверхности аппроксимируют

<sup>1</sup> perceptio [лат.] — восприятие.

Л  
И  
С  
Б  
У  
Т  
Н  
Ж  
С  
П  
С  
В  
М  
Ш  
Т  
СТ  
ВЕ  
М  
НА  
ЕК  
СВ  
ЛЕ  
РО  
ОБ  
НЯ  
МИ  
ИСК  
НЕЙ  
пек  
пер  
ско  
ОН  
рал  
пло  
рад  
дят  
изо  
ход  
лож  
тро  
зам  
гор  
в то  
пере  
под  
ран  
лед  
1.  
лос



прямыми, наклоненными в соответствии с величиной вертикальных углов зрения.

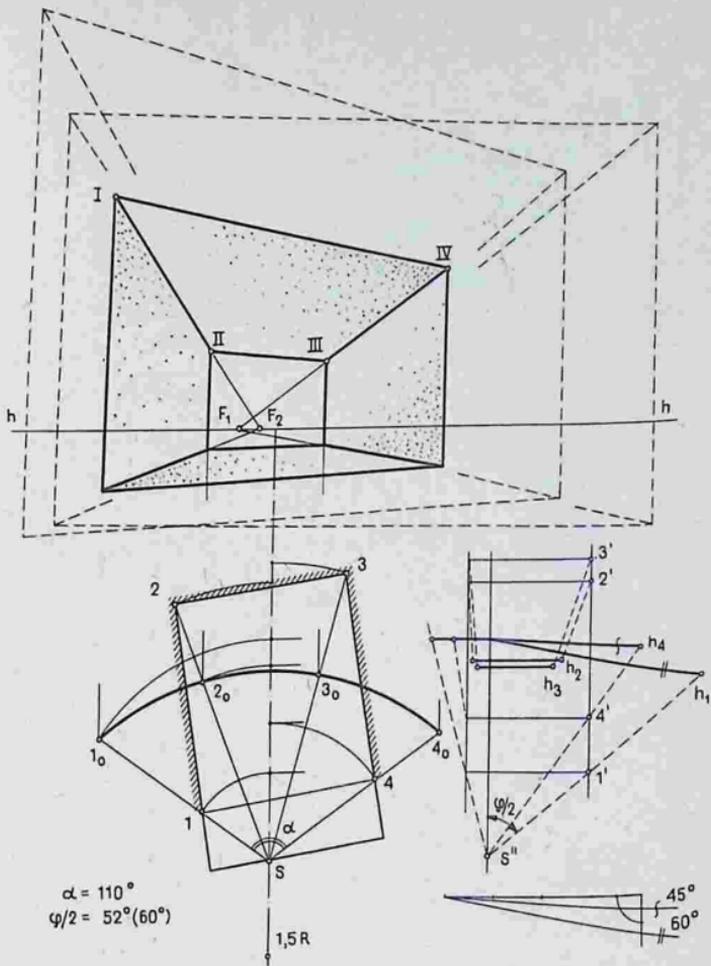
С целью упрощения построений углы наклона, выраженные в градусах, можно заменить несложной графической схемой (рис. 373, б), где отношение катетов для вертикального угла  $\varphi/2$  в  $45^\circ$  составит  $1/16$ , для угла в  $50^\circ - 1/8$  и для углов, близких к  $60^\circ - 1/5$ . Вспомогательный график строят следующим образом. Отрезок горизонтальной прямой произвольного размера делят на восемь частей. Одну часть откладывают под прямым углом к отрезку, затем по-

лученный катет делят пополам, и эту половину откладывают на продолжении катета. Полученные высоты ребер ( $h_A, h_B, h_C$ ) переносят на перспективе откладывая от линии горизонта вверх а участки прямых, расположенные ниже горизонта,— вниз.

На перспективе штриховым контуром показаны построения, выполненные методом проекций на вертикальную и наклонной картинах.

Перспектива интерьера прямоугольной формы плана (рис. 374). При построении перспективы интерьера аналогии с предыдущим построением

Рис. 374

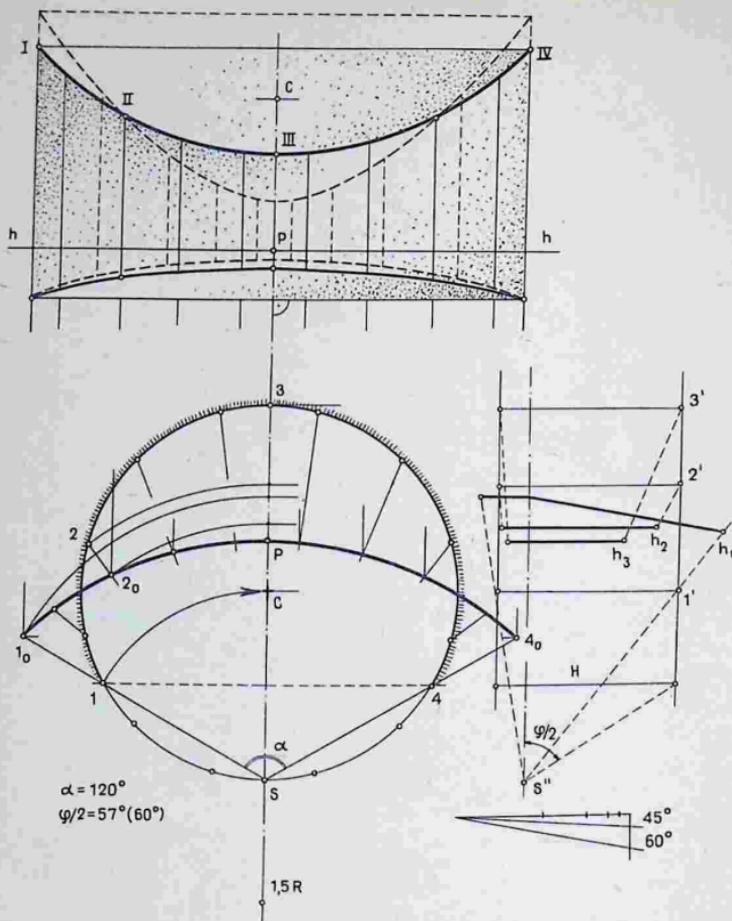


можно было бы использовать три плоскости проекций, соответствующие трем вертикальным плоскостям объекта. Однако, учитывая пространственную взаимосвязь нескольких плоскостей (не трех, а пяти), с достаточной для практики точностью можно заменить эту систему проекционных плоскостей одной поверхностью с центром кривой, удаленным от ее вершины на  $1,5R$ , с последующим перепроецированием полученных проекций точек линиями связи, параллельными оси перспективы. Вычеты построены с помощью совмещенной с планом проекции, вынесенной на свободное поле чертежа. Построение перспективы производится в два этапа:

сначала — центральное проецирование на криволинейную поверхность «преломления», а затем — ортогональное перепроецирование на основную плоскость изображения; благодаря этому отображается определенная степень визуального сжатия изображаемого архитектурного пространства<sup>1</sup>.

На перспективной схеме показаны штриховым контуром два построения на вертикальной картине — фронтальная и угловая перспективы. Оба изображения сильно искажают пропорции той части пространства интерьера, которая

<sup>1</sup> Эти выводы и практические предложения сделаны на основе экспериментальных исследований, проведенных по восприятию «скрытых» внутренних пространств [10, 19].



находится в поле зрения и составляет в пропорциях плана немногим более квадрата.

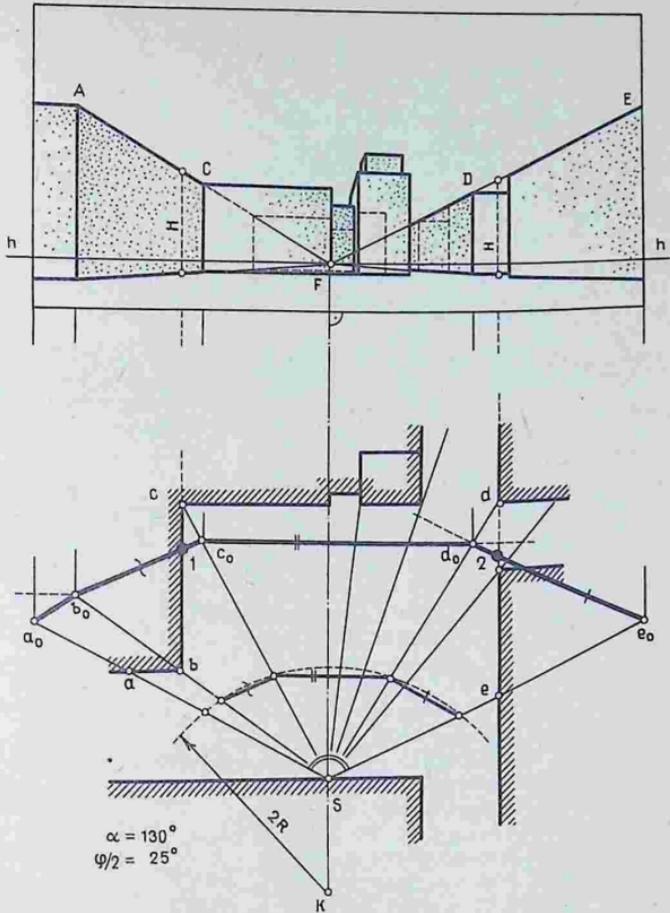
**Построение перспективы объектов различной композиции и приемы детализации изображения.** Рассмотрим способы построения широкоугольных перспектив объектов различной формы и комплекса зданий, а также приемы построения членений и детализации перспективного изображения.

1. Перспектива круглого в плане помещения (рис. 375). Построение перспективы аналогично предыдущему примеру. Чтобы точнее пере-

дать ритм вертикальных членений, они построены не способами пропорционального деления, а проецирующими лучами. При значительном вертикальном угле зрения ( $\varphi/2 = 57^\circ$ ) искажения в проекции на вертикальной картине (штриховой контур) оказываются значительными, окружность в перспективе изображается параболой. Пространственная глубина помещения оказывается сильно преувеличенной.

2. Перспектива застройки городской площади (рис. 376). Перспективная схема повторяет предыдущее построение. Отличие заключает-

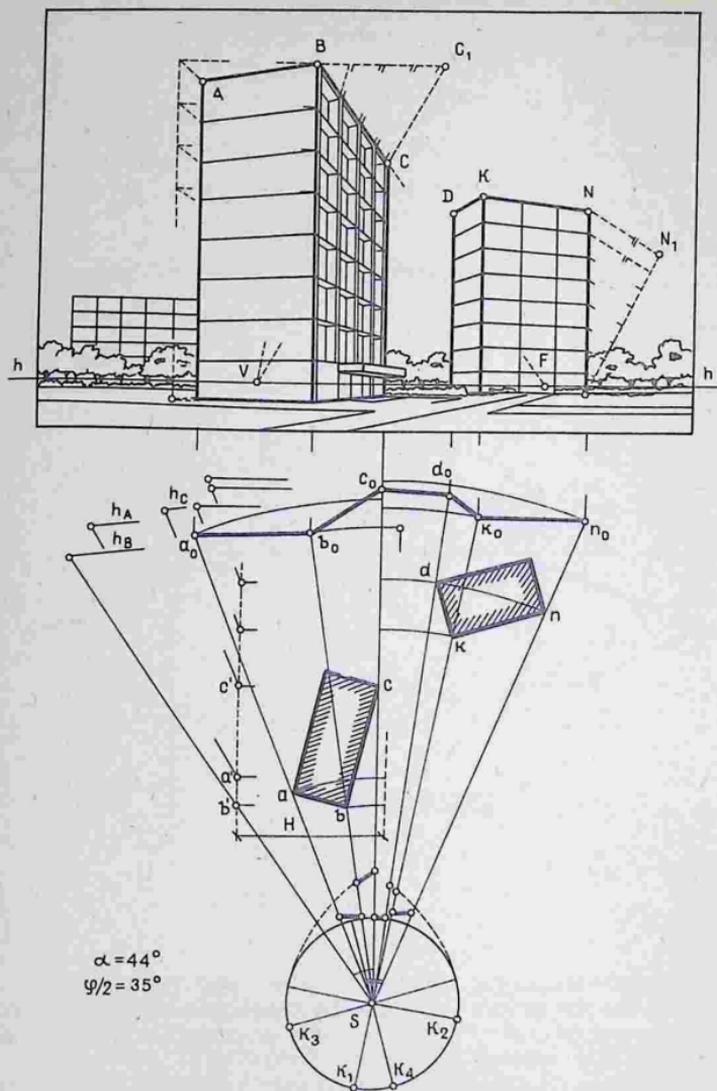
Рис. 376



ся в том, что направляющая кривая поверхности «преломления» представляет собой дугу окружности радиуса  $2R$  (а не  $1,5R$ ). Эта особенность обусловлена тем, что композиция площади в отличие от интерьера является «открытым» полузамкнутым пространством (а не «закрытым», как в интерьере), и потому пространственная взаимосвязь элементов площади выражена слабее. Фронтально расположенные плоскости фасадов зданий (участки  $A$  и  $D$ ) построены на перспективе проекцией на вертикальную картину (штриховые линии на плане), чтобы устранить перспективное ис-

кривление участков горизонтальных прямых. Штриховыми линиями показана проекция на вертикальной плоскости.

3. Перспектива группы зданий «свободной» планировки. Для построения перспективы зданий, расположенных без строго регулярной схемы (рис. 377), применяют несколько последовательно расположенных проекционных поверхностей. Для каждого из объемов строят две картинные плоскости и еще одну для разрыва между ними. Таким образом, вся многогранная поверхность составлена из пяти после-



довательно расположенных плоскостей. Незначительные сокращения по вертикали следует учесть только для двух ближних ребер  $h_B$  и  $h_A$  здания. Детализацию изображения выполняют обычными приемами деления отрезков прямыми в перспективе.

#### 4. Перспектива интерьера

производственного здания. Построение широкоугольной перспективы приобретает особое значение при изображении внутреннего пространства здания-интерьера, когда рекомендуемые ограничения углов зрения при построении перспективы на вертикальной картине практически не позволяют

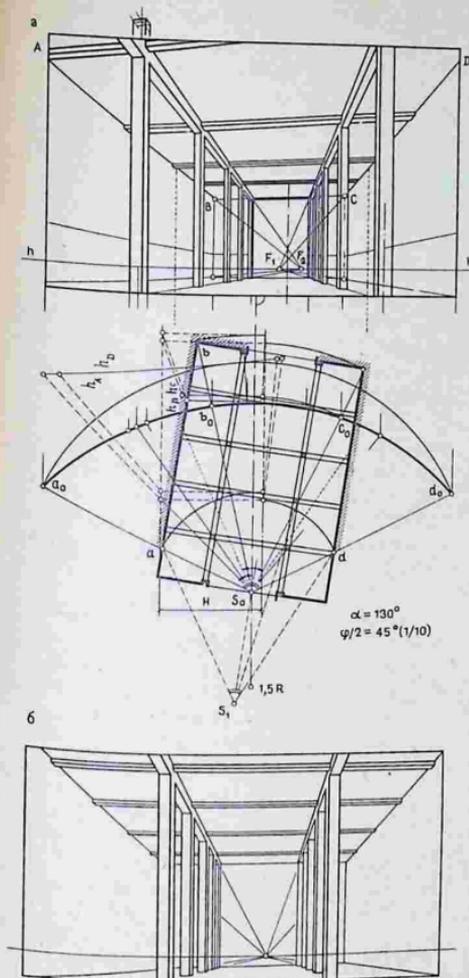


Рис. 378

с достаточной полнотой отобразить внутреннее пространство здания.

На рис. 378, а угол зрения близок к предельному и составляет  $130^\circ$ , что соответствует натурным условиям восприятия и дает возможность изобразить значительную часть внутреннего пространства. Построение колонн и горизонтальных членений произведено не приемами делительного масштаба,

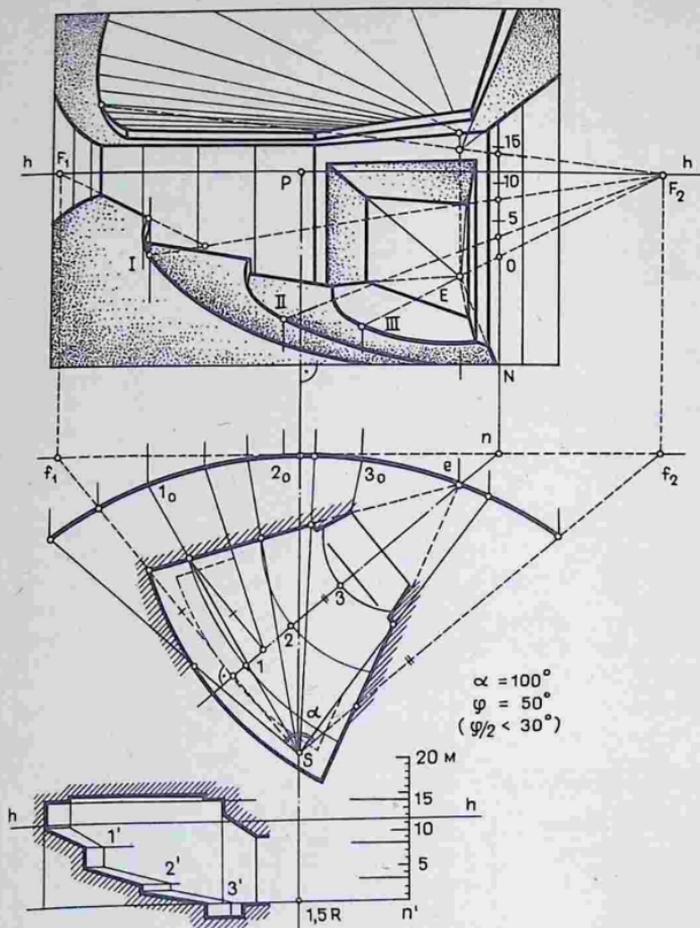
а проецирующими лучами. Это позволяет точнее отобразить видимые соотношения между колоннами и просветами между ними. Для сравнения пунктирными линиями на перспективе показано максимальное поле зрения при построении перспективы на вертикальной картине ( $\alpha \leq 60^\circ$ ), которое охватывает незначительную часть интерьера (меньше половины).

Для устранения этого недостатка был выработан заведомо условный прием — строить перспективу из точки зрения, расположенной за пределами помещения (точка  $S_1$ ). Однако такое изображение недостоверно и не может иметь серьезного корректирующего значения (рис. 378, б). Просветы между колоннами отсутствуют, неестественно сгущен ритм колонн по глубине и т. д.

Поэтому при проектировании интерьеров зданий, когда применение макетов исключается или оказывается весьма сложным, широкоугольная перспектива становится единственным средством визуальной проверки архитектурного замысла.

5. Перспектива интерьера нерегулярной схемы плана (рис. 379). Особенность данной схемы построения перспективы — использование точек схода двух взаимно перпендикулярных направлений (оси симметрии зала и поперечных вспомогательных прямых). Эти точки схода  $f_1$  и  $f_2$  построены в пересечении с прямой, касательной к вершине направляющей кривой проекционной поверхности, что дает близкое совпадение с построением точек схода по приведенной ранее схеме (см. рис. 375). Перспективы высот средних точек полукружий рядов зала I, II, III построены с помощью вертикальной размерной шкалы в масштабе плана и разреза, помещенной в точке  $n(N)$ , на линии пересечения оси симметрии плана с прямой  $f_1f_2$ .

Для построения перспективы криволинейных участков интерьера необходимо построить не менее трех точек каждого из них.



## Глава 25. Автоматизированное построение перспективных изображений

Для архитектурного проектирования характерна исключительная роль объемно-пространственной формы, ее зрительных образов и графических отображений этих образов. При этом важно обеспечить достоверность и полноту их отображения, а также необходимую оперативность выполнения изображений.

Автоматизированные средства отображения могут взять на себя выполнение ряда рутинных и трудоемких процедур архитектурного проектирования и, в частности, построения перспективных изображений, высвобождая архитектора для углубленной творческой работы.

Общие сведения об автоматизированном проектировании и составе си-

стемы графического отображения были изложены в § 38. В настоящей главе будут рассмотрены методические приемы кодирования исходного чертежа и машинного построения перспективных изображений.

### 88. Кодирование и ввод графической информации

Аппаратная и математическая части системы отображения дополняются методическими приемами кодирования, обработки и декодирования графической информации. В результате кодирования исходного чертежа в ЭВМ формируется модель объекта в форме его пространственного описания. Исходная информация представляется в виде цифровых и алфавитно-цифровых кодов, принятых в ЭВМ. Математическая часть системы отображения позволяет получить изображения плоских и пространственных объектов в различных проекциях — ортогональных, аксонометрических и перспективных. Исходным материалом для описания объекта проектирования и кодирования информации является эскиз или чертеж, содержащий параметры геометрических элементов объекта, привязанных к координатным осям.

Чтобы получить удобное и краткое описание изображения геометрических объектов, созданы специальные *проблемно-ориентированные* входные языки описания объектов и к ним специальные программы, обеспечивающие расшифровку таких описаний, решение задач геометрического характера и управление графическими устройствами. Один из таких языков представляет язык АЛГРАФ (см. § 38).

Одним из способов ввода исходной графической информации является полуавтоматическое считывание на кодировочном устройстве, с помощью которого координаты отдельных точек и элементы изображения регистрируются на перфоленте, магнитной ленте или поступают в память ЭВМ. Для считывания стандартных элементов изображения — отрезков прямых, ломаных линий,

окружностей, эллипсов и дуг и т. д. — предусмотрены специальные коды. К ним присоединяются дополнительные численные данные — число повторений, радиус окружности, уровень (отметка) горизонтали поверхности и т. д., которые вводятся с помощью алфавитно-цифровой клавиатуры.

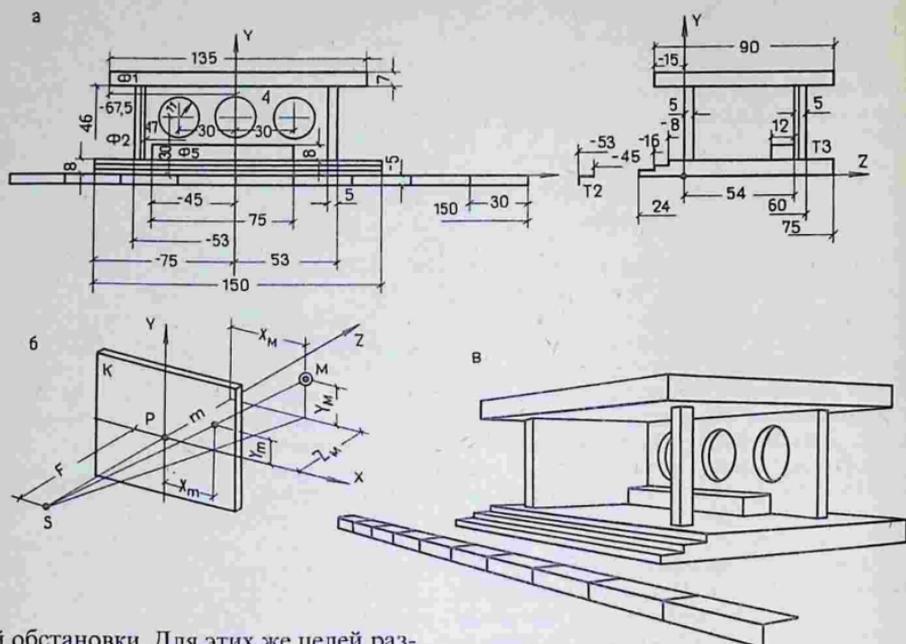
### 89. Построение машинных перспективных изображений

При построении перспективных изображений пространственных объектов помимо геометрического описания объекта приходится решать различные задачи. Наиболее существенные из них — *устранение невидимых на перспективной проекции линий и элементов объекта и определение видимых контуров на кривых поверхностях.*

Ниже приводятся некоторые примеры геометрического описания объекта и машинные перспективные проекции, полученные с помощью системы АЛГРАФ [11]. В качестве примера на рис. 380, а приводится геометрическое описание несложного объекта — *павильона остановки общественного транспорта*, которое предназначено для кодирования информации и формирования в запоминающем устройстве ЭВМ модели объекта.

Алгоритм построения перспективного изображения и машинная программа содержат известную схему перспективного преобразования координат, в результате которого изображение синтезируется следами лучей, идущих от объекта к точке зрения и пересекающих объект плоскость (рис. 380, б). По картинную плоскость, введенной в ЭВМ и до этой программе, введенной в ЭВМ и до этой программы, выполненной подпрограммой устранения невидимых линий объекта, выполнено машинное перспективное изображение павильона (рис. 380, в).

Если полученное линейное изображение предназначено не только для первичного анализа проектируемой композиции, а должно войти в демонстрационную часть проекта, производится его доработка — нанесение светлоты и цвета, изображение окружаю-



шей обстановки. Для этих же целей разработаны специальные алгоритмы и машинные подпрограммы построения контуров теней и штриховки, изменения масштаба чертежа или размеров перспективного изображения и т. д.

На рис. 381 приведена машинная



Рис. 380

Рис. 382



Рис. 381

*перспектива жилого дома.* Отдельные части здания расположены в плане под тупыми углами, каждая часть здания описана в отдельной системе. Плоскости фасадов (без выступающих балконов и лоджий) описаны в двумерных системах, которые затем преобразуются в пространственную систему. Поскольку структура фасадов состоит из повторяющихся элементов, эти элементы кодируют один раз, а затем с помощью операции *параллельного переноса* размещают на фасаде. Повторяющийся элемент симметричен, поэтому он может быть получен с помощью *зеркального*

*отражения* одной своей половины. Первоначальная проекция объекта получена как преобразование трехмерной пространственной системы описания объекта в двумерную систему чертежных координат.

На рис. 382 приведена учебно-экспериментальная машинная перспектива *перронного зала метро «Кропоткинская»*<sup>1</sup>. Геометрическое описание было выполнено очень рационально. Структура одной колонны была описана в ши-

<sup>1</sup> Геометрическое описание и кодирование информации были выполнены в МАРХИ студенткой второго курса О. Мишневой. Руководитель работы — Ю. В. Котов.



Рис. 383

линдрической координатной системе. Сначала был закодирован один элемент нижней десятигранной части колонны и одна доля верхней части колонны, состоящей из пяти элементов. С помощью изменения преобразования — поворота вокруг оси системы на заданный угол — были получены остальные элементы колонны. Затем с помощью операции *параллельного переноса* автоматически были сформированы все колонны видимой части зала.

На рис. 383 приведена машинная перспектива, изображающая один из проектных вариантов сочетания сложившегося архитектурного ансамбля с новой застройкой, со зданиями повышенной этажности.

С помощью автоматизированных средств графического отображения, математического и алгоритмического их обеспечения можно решать ряд задач архитектурного проектирования:

1) на основе внутреннего описания объекта, хранящегося в «памяти» машины, задавая лишь параметры точек зрения, можно получить *серию различных перспективных изображений*

проектируемого объекта с построением контуров теней и полутоновой отштриховкой изображений;

2) при проверке композиционного сочетания проектируемых сооружений с существующей застройкой, памятниками архитектуры и ландшафтом хорошие результаты дает автоматизированный *фотомонтаж существующей ситуации и машинных перспективных изображений*; при этом решается вопрос совмещения параметров фотоснимка и машинной перспективной проекции;

3) машинное построение стереоскопических изображений с хорошим пространственным эффектом выполняется с большой графической точностью;

4) автоматизированное построение последовательного ряда перспективных изображений городской застройки с задаваемой скоростью последовательной смены точек зрения и выводом изображений на электронно-лучевой экран позволяет создавать *машинные кинофильмы застройки* для проверки восприятия объектов проектирования в движении.

# Часть пятая. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

Проектирование и строительство жилых, общественных и промышленных зданий не может осуществляться без инженерной подготовки и благоустройства городских территорий. Такие сооружения, как магистрали и транспортные развязки, путепроводы и мосты, набережные и подземные переходы, являются неотъемлемым элементом современного города. В процессе

проектирования зданий и сооружений составляют разнообразные чертежи. На многих чертежах изображается спланированная по проекту земная поверхность. Проектирование упомянутых выше сооружений, а также чтение и выполнение подобных чертежей требуют знания специального способа изображения — метода проекций с числовыми отметками.

## Глава 26. Общие сведения

### 90. Сущность метода

Составной частью архитектурного проекта являются чертежи, которые содержат данные о планировке и благоустройстве окружающей здание территории, о связи проектируемого здания с рельефом местности, об устройстве проездов, тротуаров и организаций стока поверхностных вод. Все эти данные содержатся в специальной части проекта, в которую кроме генерального плана и некоторых других материалов входят чертежи и схемы *вертикальной планировки* застраиваемой территории.

Объекты вертикальной планировки — это участки земной поверхности с различными сооружениями на ней: строительными площадками, котлованами, насыпями, выемками, лотками для стока воды и т.д. Отличительная черта этих объектов кроме их формы — значительное преобладание горизонтальных размеров над вертикальными, поэтому метод ортогонального проектирования на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций применять в этом случае нецелесообразно.

В практике архитектурного проектирования и строительства для изображения земной поверхности применяют специальный способ изображения, который получил название метода проекций с числовыми отметками.

*Сущность этого метода проекций*

заключается в том, что данный участок спланированной земной поверхности ортогонально проецируют на одну горизонтальную плоскость проекций (план), а фронтальную плоскость проекций, которая определяет высоты точек объекта, заменяют числами (отметками) этих точек, указывающими расстояния (превышение точек) по отношению к некоторой горизонтальной плоскости, принятой за нулевую. Перед числовой отметкой ставят знак минус, если точка расположена ниже плоскости нулевого уровня. Нулевую плоскость обычно принимают на уровне пола первого этажа здания. При разработке проекта вертикальной планировки окружающей здание территории осуществляют «привязку» условной нулевой плоскости к абсолютной отметке топографического (опорного) плана. Проекции точек обозначают буквами с числовым индексом или одними числами. Абсолютные отметки обозначают в метрах с двумя десятичными знаками после запятой.

**Проекция прямой.** На рис. 384 изображен отрезок прямой  $AB$ . Длину горизонтальной проекции отрезка прямой называют *заложением* прямой и обозначают буквой  $L$ . Отношение разности превышений концов отрезка  $(h_B - h_A)$  к заложению прямой  $L$  называют *уклоном* прямой и обозначают  $i$ . Эта величина равна тангенсу угла  $\alpha$  наклона пря-

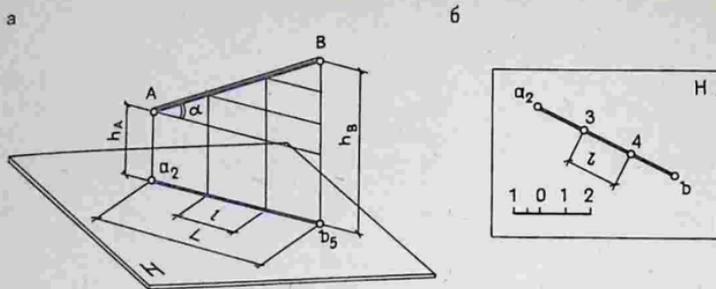
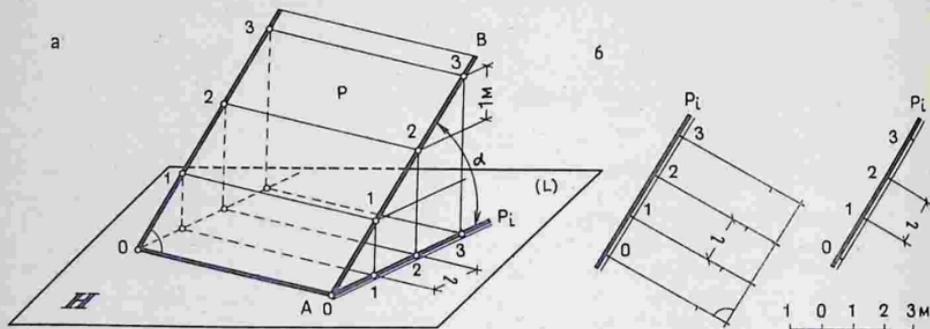


Рис. 384

Рис. 385



мой. Величину горизонтального заложения, которая соответствует единице превышения, называют *интервалом* прямой и обозначают  $l$ . Определение на прямой точек с целочисленными отметками называют *градуированием* прямой. Уклон и интервал величины взаимно обратные – чем больше уклон, тем меньше интервал, и наоборот.

**Проекция плоскости.** Если через целочисленные отметки прямой  $AB$  (рис. 385, а) провести горизонтали, то будет задана плоскость того же уклона, что и прямая. Плоскость в проекциях с числовыми отметками удобно выразить так называемым *масштабом* уклона или падения (рис. 385, б). *Масштабом* уклона плоскости называют горизонтальную проекцию линии наибольшего ската плоскости, на которой показаны отметки точек через единицу измерения (1 м). Масштаб уклона изображают двойной линией (утолщенной и тонкой) и обозначают буквой с индексом  $i$ . Проекция горизонталей плоскости на плане перпендикулярны масштабу уклона, а расстояния между соседними проек-

циями горизонталей (с целыми отметками) являются интервалами.

**Проекция поверхности.** Рельеф местности, а также спланированную по проекту поверхность участка застройки изображают горизонталями, которые представляют собой результат сечения поверхности горизонтальными плоскостями, взятыми по высоте через одинаковые расстояния. Эти расстояния выбирают в зависимости от масштаба чертежа и рельефа местности, обычно через 0,5–1,0 м. План участка территории, выполненный в проектных горизонталях и числовых отметках, обычно не требует составления вертикальных профилей, он дает полную характеристику поверхности.

### 91. Пересечение плоскостей

Для построения линий пересечения двух плоскостей необходимо определить две точки пересечения двух пар горизонталей с одинаковыми отметками.

На рис. 386 плоскости заданы масштабами уклонов. Горизонтالي с от-

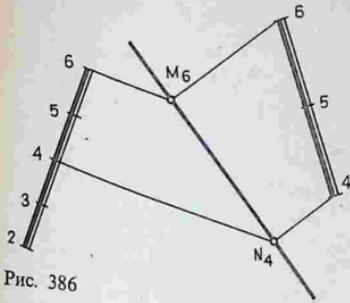


Рис. 386

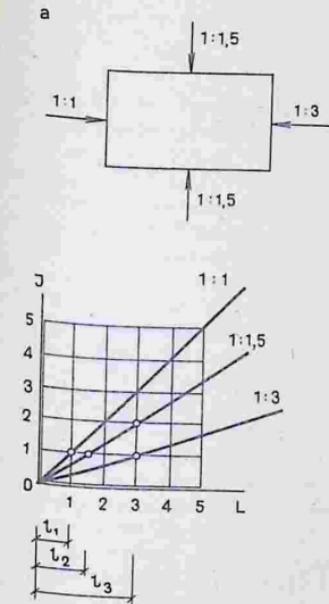


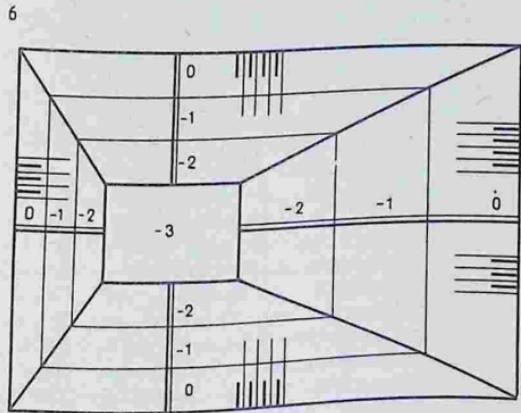
Рис. 387

метками 4 и 6 попарно пересекаются в точках  $M_6$  и  $N_4$ . Прямая  $MN$  является искомой линией пересечения плоскостей.

На рис. 387 приведено построение проекций откосов котлована при заданных отметке дна котлована и уклонах откосов. Отметка поверхности земли принята равной нулю.

В случаях когда необходимо определить при разных уклонах интервалы

или заложения откосов, удобно предварительно построить график, называемый *масштабом уклонов*. Его горизонтальная ось представляет собой линейный масштаб чертежа, на ней откладывают величину заложения. На вертикальной оси отложены линейные единицы масштаба (высоты). Проведены три наклонные прямые, соответствующие заданным уклонам. Отрезки  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , вынесенные вниз с высоты 1 м, являются интервалами заложения откосов. Откладывая интервалы по направле-



ниям, перпендикулярным соответствующим сторонам дна котлована, получим горизонтали откосов. Точки пересечения горизонталей с нулевой отметкой и угол контура дна котлована определяют *линии пересечения откосов*.

Для придания чертежу большей наглядности у верхней кромки скатов наносят по направлению линии наибольшего ската плоскости (перпендикулярно проекциям горизонталей) штрихи — попеременно длинные и короткие утолщенные.

## 92. Пересечение плоскости с топографической поверхностью

Любая поверхность, как и плоскость, задается в проекциях с числовыми отметками семейством горизонталей. По-

этому линия пересечения поверхностей может быть построена с помощью определения ряда точек пересечения горизонталей с одинаковыми отметками.

На рис. 388 показано построение линии пересечения плоскости, заданной масштабом уклона, с топографической поверхностью. Через точки с одинаковыми отметками масштаба уклона  $P_i$  плоскости проведены горизонталы до пересечения с соответствующими горизонталями топографической поверхности (точки  $a_5, b_6, c_7, d_8, l_9, f_{10}$ ). Через эти точки проходит линия пересечения.

**Построение границ откосов.** Линия пересечения откосов выемок и насыпей с поверхностью земли называют *границами откосов*. Эти границы на чертеже определяют линии срезки или подсыпки грунта, что дает возможность подсчитать баланс земляных работ (согласованные их объемы).

На рис. 389 приведено построение линии пересечения откосов дорожного полотна с топографической (земной) поверхностью. На участке местности спроектирована автомобильная дорога с уклоном полотна дороги  $i = 0,04$ . Отметки горизонталей полотна взяты через каждый метр, а горизонталей местности — через два метра. Полотно дороги проложено таким образом, что часть его (с западной стороны) оказывается выше поверхности земли, а другая (с восточной стороны) — ниже. Таким образом, с одной стороны запроектирована насыпь, а с другой — выемка. Уклоны скатов одинаковы и составляют  $i = 1 : 1,5$ . На участке выемки предусмотрены кюветы шириной 2 м.

Интервал полотна дороги при уклоне  $i = 0,04$ , или  $1 : 25$  есть величина заложения, которая приходится на 1 м подъема и составляет 25 м. Горизонталей местности проведены через 2 м, поэтому горизонталей откосов также проложены через 2 м, при этом интервал между ними составляет 3 м. Поскольку поверхность полотна дороги не горизонтальна, а имеет уклон, горизонталей откосов не будут параллельны бровке полотна дороги.

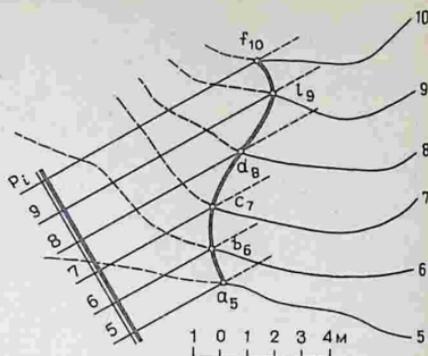


Рис. 388

Горизонталей откосов проводят касательно к горизонталям вспомогательного конуса (см. схему на рис. 389), вершина которого находится в точке пересечения соответствующей горизонтали полотна с бровкой дороги. Образующие этого конуса имеют уклон такой же, как и откосы насыпи ( $1 : 1,5$ ). Горизонтальная проекция вспомогательного конуса на чертеже представляет собой несколько concentric окружностей (горизонталей конуса), проведенных одна от другой на расстоянии интервала откосов (3 м).

В результате касательная, проведенная, например, из точки  $B$  (см. схему) к соответствующей горизонтали вспомогательного конуса с той же отметкой, будет являться горизонталью плоскости откоса насыпи. Остальные горизонталей проводят параллельно построенной.

Аналогичным образом строят горизонталей выемки, однако здесь задается конус с вершиной, обращенной книзу. Точки, где линии границ насыпи и выемки пересекают бровку полотна дороги, определены с помощью вспомогательных горизонталей, проведенных для насыпи на отметке 126 до пересечения с соответствующей горизонталью местности с отметкой 126, а для выемки — с помощью горизонтали с отметкой 124 также проведенных до пересечения с горизонталью местности. Пересечение этих вспомогательных горизонталей

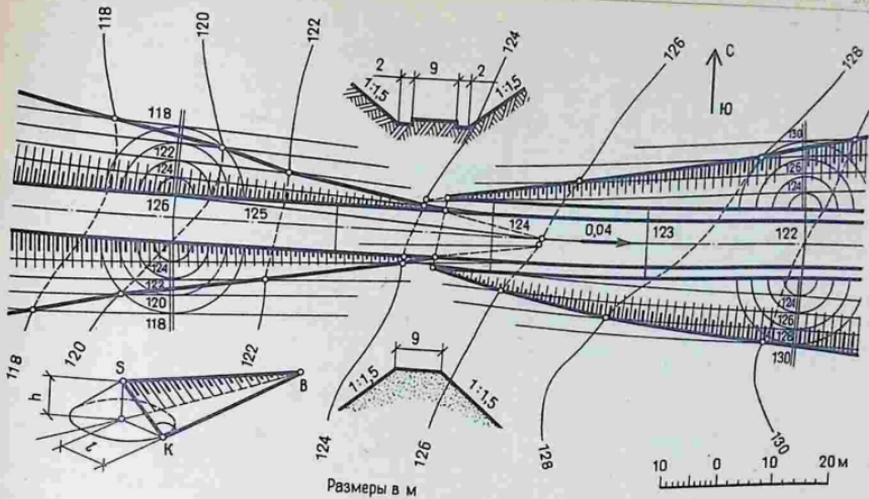


Рис. 389

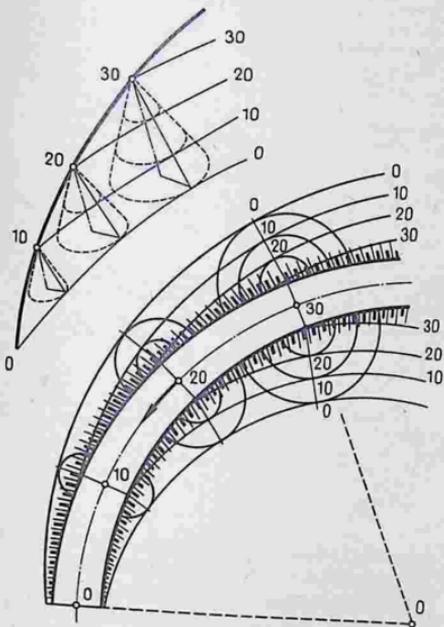


Рис. 390

с бровкой полотна дороги дает искомые точки, лежащие на нулевой линии в месте перехода насыпи в выемку.

На рис. 390 дано построение горизонталей откосов полотна дороги на криволинейных участках. Как и в предыдущем случае, построены вспомогательные прямые круговые конусы, вершины которых расположены на пространственной кривой — бровке полотна дороги. Каждая горизонталь откоса является огибающей семейства одинаковых по отметке горизонталей конусов. Все вместе эти горизонтали образуют *поверхность одинакового ската*, огибающую вспомогательные конусы (см. § 24, рис. 98). Прямолинейные образующие этой поверхности представляют собой линии наибольшего ската и имеют одинаковые углы наклона к горизонтальной плоскости.

### 93. Основы вертикальной планировки

Одна из основных задач вертикальной планировки — получение данных для выравнивания поверхности застраиваемого участка с тем, чтобы создать необходимые уклоны проездов и площадок и организовать отвод поверхностных

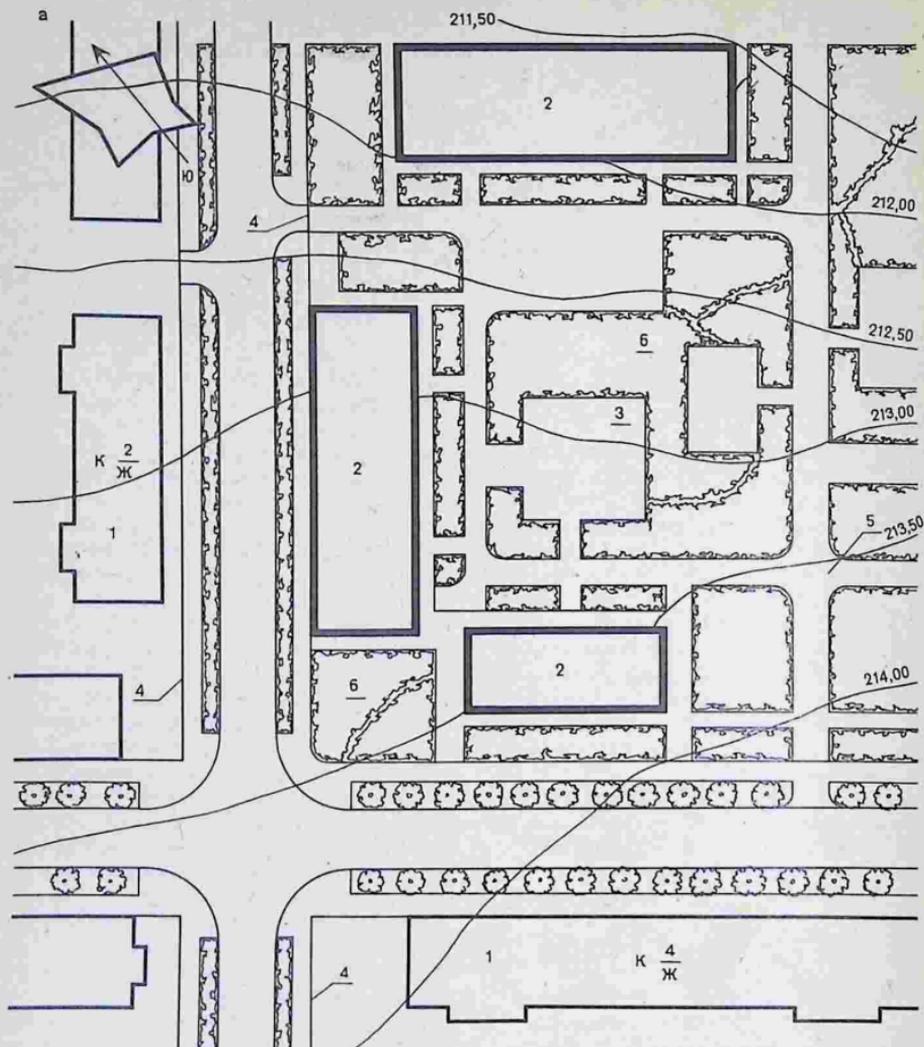


Рис. 391

вод. Для этого на основе генерального плана и плана благоустройства территории составляют проект вертикальной планировки.

На рис. 391 показана часть генерального плана застройки жилого квартала. На плане кроме проектируемых жилых зданий 2 показаны

существующие и сохраняемые здания 1 в границах застраиваемого участка 4, а также внутриквартальные проезды 5, площадки для отдыха 3, зеленые насаждения 6 и т.д.

На участке плана нанесены горизонтали. Падение рельефа местности в направлении с юго-запада на северо-во-

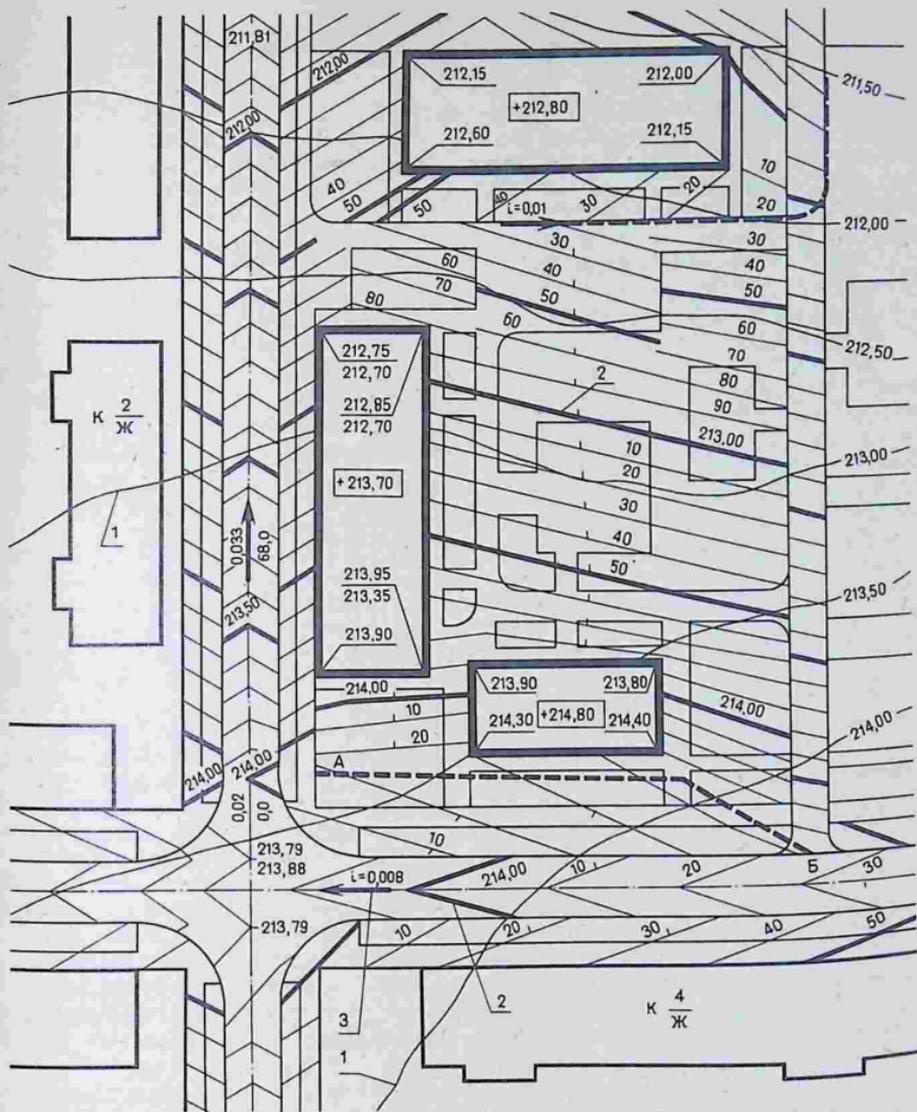


Рис. 392

сток составляет 2 м. На рис. 392 приведен чертеж вертикальной планировки части этого жилого квартала. На плане с помощью горизонталей изображают естественный (существующий) рельеф участка — черные горизонталей 1. Применительно к суще-

ствующему рельефу строят и показывают проектные, красные горизонталей 2, отображающие проектируемую поверхность участка.

Таким образом, проектирование поверхности сводится к выравниванию естественного рельефа и к «выпрямле-

нию» существующих горизонталей. И те и другие горизонтали снабжаются числовыми отметками. При малых уклонах рельефа горизонтали проводят обычно через 20 или 10 см. Проектные горизонтали проведены через 0,5 м и выделены утолщенной линией. Между ними через 10 см проведены промежуточные горизонтали.

Горизонтали поверхности проездов проводят после градуирования линии оси проезжей части по заданному уклону. У поперечного проезда, прилегающего к кварталу с короткой стороны, уклон равен  $i = 0,008$ , а у продольного  $-0,033$ . Поперечный профиль полотна имеет выпуклый криволинейный профиль (рис. 393). Для упрощения графического выполнения чертежа криволинейные горизонтали проездов заменяют ломаными прямыми. При выпуклом профиле полотна вершина горизонталей направлена в сторону уклона полотна дороги. Чем острее угол, образованный отрезками горизонталей, тем уклон меньше.

Поперечная улица расположена выше территории квартала. Поэтому во избежание стока поверхностных вод с улицы создан искусственный водораздел (гребень), проходящий по фасаду здания, выходящего на эту улицу. Линия искусственного водораздела обозначена штриховой линией АБ (см. рис. 392). На линии этого водораздела образован выпуклый перелом (отметка 214,00) в продольном профиле улицы, идущей вдоль длинной стороны квартала, поэтому уклон этой части полотна проезда направлен к перекрестку. На

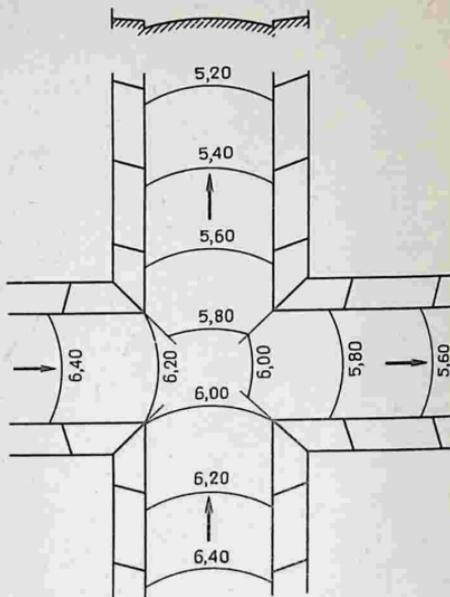


Рис. 393

противоположной стороне участка, вдоль фасада здания по проезду, наоборот, образуется продольная лоткообразная впадина с уклоном  $i = 0,01$ . На плане проставлены также проектные числовые отметки углов проектируемых зданий.

План участка, выполненный в проектных горизонталях и числовых отметках, обычно не требует составления продольных и поперечных профилей, он дает полную характеристику спланированной поверхности.

# РАЗВИТИЕ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (краткая историческая справка)

Рисунки пространственных форм в виде однопроекционных изображений на плоскости восходят к глубокой древности, ко времени сооружения храмов Египта и Ассирии.

В античный период появляются сведения о проекционных изображениях и перспективе. Одним из наиболее древних, дошедших до нас письменных источников является трактат римского архитектора Витрувия (I в. до н.э.) «Десять книг об архитектуре». В нем упоминается о несохранившемся сочинении великого греческого геометра Эвклида (III в. до н.э.), в котором излагались правила составления планов и фасадов (без проекционной связи между ними). По свидетельству Витрувия, строительство здания предшествует составлению проекта, состоящего из плана и фасада. Он приводит первоначальные сведения, необходимые для построения наглядных изображений, упоминает «центральную проекцию», «главную точку» и «точку зрения».

Средневековье не оставило значительных работ по теории изображений.

В эпоху Возрождения (XIV–XVI вв.) бурное развитие архитектуры, живописи и скульптуры в Италии, Германии, Нидерландах создало условия для теоретической разработки основ перспективы на геометрической основе. Вводится целый ряд основных понятий: центральное проецирование, картинная плоскость, дистанция, главная точка, линия горизонта, дистанционные точки и т.д. Одним из первых, кто с успехом применял перспективу в своих творческих работах, был итальянский архитектор и ученый Филиппо Брунеллески (1377–1446). Художественный и профессиональный опыт Брунеллески и других мастеров в области перспективы обобщил и теоретически развил в своих трактатах «О живописи» и «О зодчестве» разносторонний ученый и теоретик искусства Леон Баттиста Альберти (1404–1472). Им предложен способ построения перспективы

с помощью сетки. В трактате по перспективе гениального художника, ученого и инженера Леонардо да Винчи (1452–1519) не только приводятся примеры применения перспективных изображений, но и содержатся сведения о воздушной перспективе и теории светотени. Большой вклад в теорию перспективы внес выдающийся немецкий живописец, гравер и архитектор Альбрехт Дюрер (1471–1528). В его трактате излагается способ построения перспективы по плану и фасаду, так называемый способ следа луча. Им сделана попытка теоретически обосновать способ ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Наиболее подробное изложение основных положений перспективы содержится в «Шести книгах по перспективе» итальянского ученого Гвидо Убальди (1545–1607).

В XVII столетии появляется сочинение французского архитектора и математика Дезарга (1593–1662) — «Общий метод изображения предметов в перспективе». В этом сочинении излагаются положения, которые стали основными в проективной геометрии, а также впервые применяется для построения перспективы способ координат.

До конца XVIII в. продолжается применение отдельных методов изображений, разрабатывается метод проекций с числовыми отметками, совершенствуется способ наглядного аксонометрического изображения. Однако различные приемы и способы изображений носили разрозненный характер.

В становлении начертательной геометрии как науки выдающуюся роль сыграл французский ученый, геометр и общественный деятель Гаспар Монж (1746–1818), который свел в единую систему и теоретически обобщил весь материал по теории и практике изображений пространственных форм на плоскости. Он основал систему ортогонального проецирования на две плоскости проекции, получившую широкое

применение в архитектуре и технике, и поэтому по праву считается основателем начертательной геометрии как научной дисциплины.

В Древней Руси уже были известны проекционные способы изображений. Об этом свидетельствует изучение иллюстраций к летописям, а также старинных документов и рисунков, применявшихся при создании планов угодий и городов. Дошедшие до нас изображения Пскова (1581) и план Московского Кремля (1606) представляют собой «вольную перспективу», близкую к фронтальной аксонометрической проекции.

В течение XVIII столетия архитектурные, судостроительные и другие технические чертежи выполнялись в прямоугольных проекциях. Примерами правильно построенных проекционных чертежей могут служить изображение «Молотовой фабрики» (1741), выполненное Р. Санниковым, изображение рудника медеплавильного завода (1760) — И. Поспелова, чертежи знаменитого русского изобретателя И. П. Кулибина (1735—1818).

Чертежи выдающегося зодчего Д. В. Ухтомского (1719—1774) были выполнены в точной проекционной связи ортогональных проекций — плана и фасада, т. е. задолго до появления работ Г. Монжа. Архитектурные проекты В. И. Баженова, М. Ф. Казакова, И. Е. Старова свидетельствуют о том, что в России второй половины XVIII в. архитекторы свободно владели ортогональными и аксонометрическими проекциями.

Впервые курс начертательной геометрии начал читаться в Петербургском институте (корпусе) инженеров путей сообщения в 1810 г. учеником Г. Монжа французским инженером К. И. Потье. Позднее курс начертательной геометрии, изданный Потье, был переведен на русский язык Я. А. Севастьяновым. В 1821 г. был издан оригинальный труд проф. Я. А. Севастьянова «Основания начертательной геометрии». Он выгодно отличается от курса Потье не только терминологией, которая сохранилась до настоящего времени, но и об-

стоятельным изложением теоретических вопросов. Построение курса, предложенное Я. А. Севастьяновым, оставалось неизменным вплоть до выхода в свет в 1870 г. полного курса начертательной геометрии проф. Н. И. Макарова. В 1883 г. вышел его подробный курс «Перспектива» с большим числом практических примеров.

Классическим учебником является «Курс начертательной геометрии» (1895) проф. В. И. Курдюмова. Помимо этого курса им написан ряд трудов, в которых содержатся систематические сведения по всем видам изображений.

Обширную литературу по начертательной геометрии создал известный русский ученый проф. Н. А. Рынин (1887—1943). Особое значение имеет его труд «Перспектива» (1918), ставший самым полным изложением этой части курса начертательной геометрии и содержащий подробный анализ различных прикладных вопросов перспективы. Уже в советский период его учебник «Начертательная геометрия» для строительных вузов выдержал четыре издания.

После Великой Октябрьской социалистической революции начертательная геометрия как наука получила новое развитие. В вузах страны были организованы специальные кафедры, были созданы научно-методические советы и специализированные советы по защите диссертаций, появилась обширная учебная литература по начертательной геометрии.

Значительный вклад в создание курса начертательной геометрии для архитектурно-строительных специальностей вузов сделал проф. А. И. Добряков (1895—1947). Он — автор капитального «Курса начертательной геометрии» (1942), в котором помимо ортогональных проекций много внимания уделено построению перспективы, аксонометрии и теней.

Значительными успехами начертательная геометрия обязана трудам замечательных советских ученых Н. Ф. Четверухина, М. Я. Громо-

ва, С. М. Колотова, Д. И. Каргина, И. И. Котова.

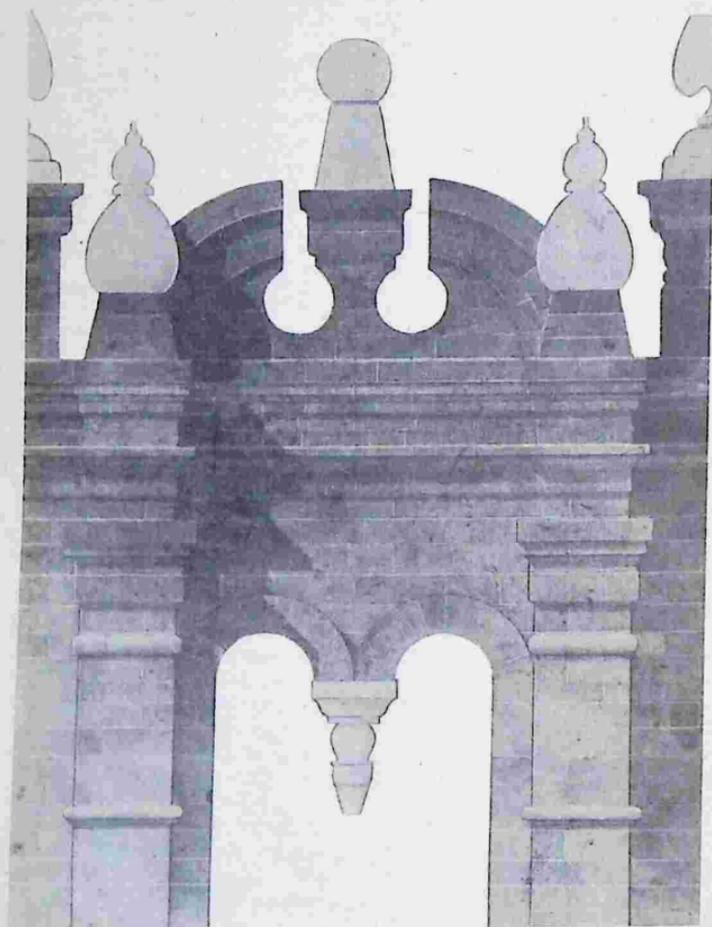
В настоящее время большую научную и педагогическую работу ведут многие коллективы кафедр, руково-

димые видными учеными, которые вносят большой вклад в углубление отдельных направлений начертательной геометрии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакельман И. Я. Высшая геометрия.— М.: Просвещение, 1967.— 368 с.
2. Бубеников А. В. Начертательная геометрия.— М.: Высшая школа, 1985.— 288 с.
3. Введение в архитектурное проектирование/Под ред. В. Ф. Кринского.— М.: Стройиздат, 1962.— 176 с.
4. Виницкий И. Г. Начертательная геометрия.— М.: Высшая школа, 1975.— 280 с.
5. Добряков А. И. Курс начертательной геометрии.— М.— Л.: Стройиздат, 1952.— 494 с.
6. Зметный А. Я. Линейная перспектива на наклонной плоскости.— Л.: Стройиздат, 1968.— 103 с.
7. Климухин А. Г. Начертательная геометрия.— М.: Стройиздат, 1978.— 334 с.
8. Климухин А. Г. Сборник задач по начертательной геометрии.— М.: Стройиздат, 1982.— 213 с.
9. Климухин А. Г. Тени и перспектива.— М.: Стройиздат, 1967.— 199 с.
10. Короев Ю. И. Построение широкоугольных архитектурных перспектив.— М.: Высшая школа, 1970.— 40 с.
11. Котов Ю. В. Геометрическое конструирование и машинная графика, ч. II.— М.: МАДИ, 1983.— 114 с.
12. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия.— М.: Высшая школа, 1981.— 262 с.
13. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ)/Под ред. А. М. Тевлина.— М.: Высшая школа, 1983.— 175 с.
14. Михайленко В. Е., Ковалев С. Н. Конструирование форм современных архитектурных сооружений.— Киев: Будівельник, 1978.— 112 с.
15. Начертательная геометрия/Под ред. Н. Н. Крылова.— М.: Высшая школа, 1984.— 224 с.
16. Основы архитектурной композиции и проектирования/Под ред. А. А. Тица.— Киев: Вища школа, 1976.— 256 с.
17. Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия.— Киев: Будівельник, 1970.— 392 с.
18. Тимрот Е. С. Начертательная геометрия.— М.: Стройиздат, 1962.— 276 с.
19. Федоров М. В. Рисунок и перспектива.— М.: Искусство, 1960.— 130 с.
20. Фролов С. А. Начертательная геометрия.— М.: Машиностроение, 1983.— 240 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ





**Приложение 1.** Чертеж фасада Дворца спорта, покрытие которого представляет собой складчатую оболочку, близкую по форме к сферическому сегменту. Учебный проект. (с. 310 верх)

**Приложение 2.** Фрагмент башни Новодевичьего монастыря (XVII в.). Чертеж выполнен с построением теней и передачей в отмылке тушью фактуры материала. Учебная работа. (с. 310 низ)

**Приложение 3.** Палаты Поздних. Псков (XVII в.). Чертеж фасада с построением теней и передачей в отмылке воздушной перспективы. Учебная работа (с. 311).

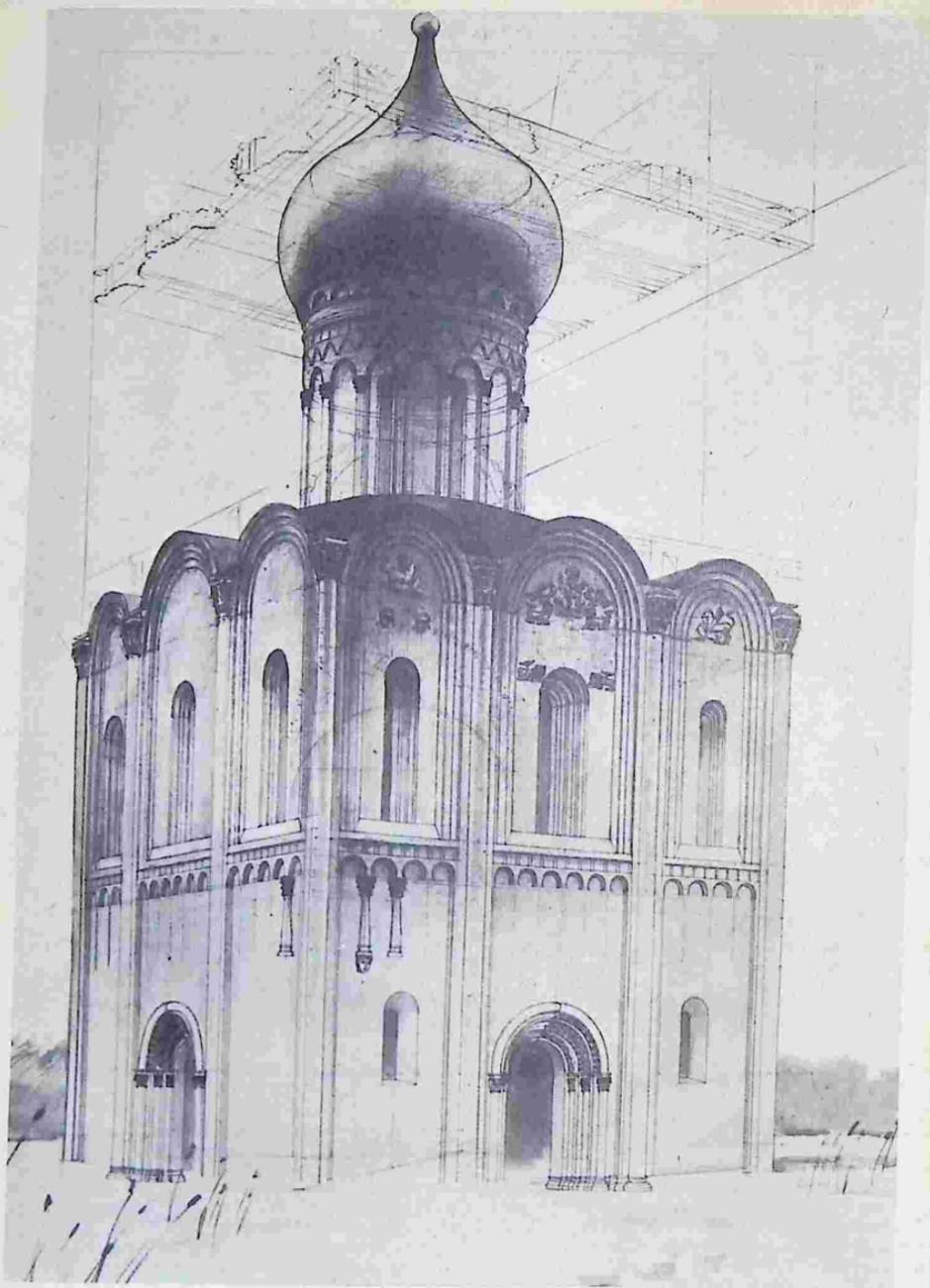
**Приложение 4.** Перспектива церкви Покрова на Нерли (XII в.), выполненная с построением перспективы плана на поднятой вверх вспомогательной плоскости и с передачей диффузного освещения. Учебная работа. (с. 312)

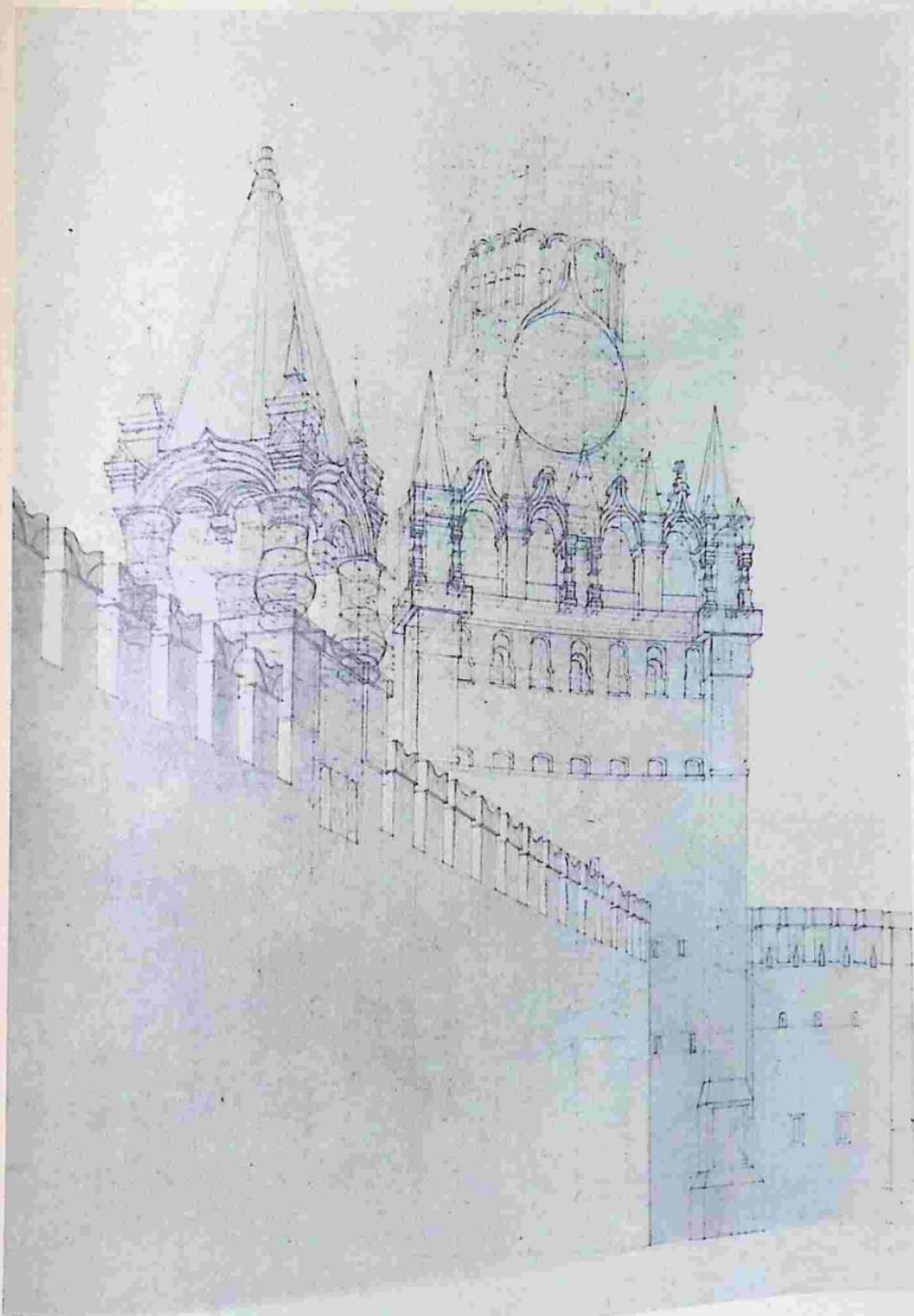
**Приложение 5.** Перспектива архитектурного фрагмента Спасской башни Московского Кремля, выполненная в линейной графике с передачей всех элементов построения деталей объекта. Учебная работа. (с. 313)

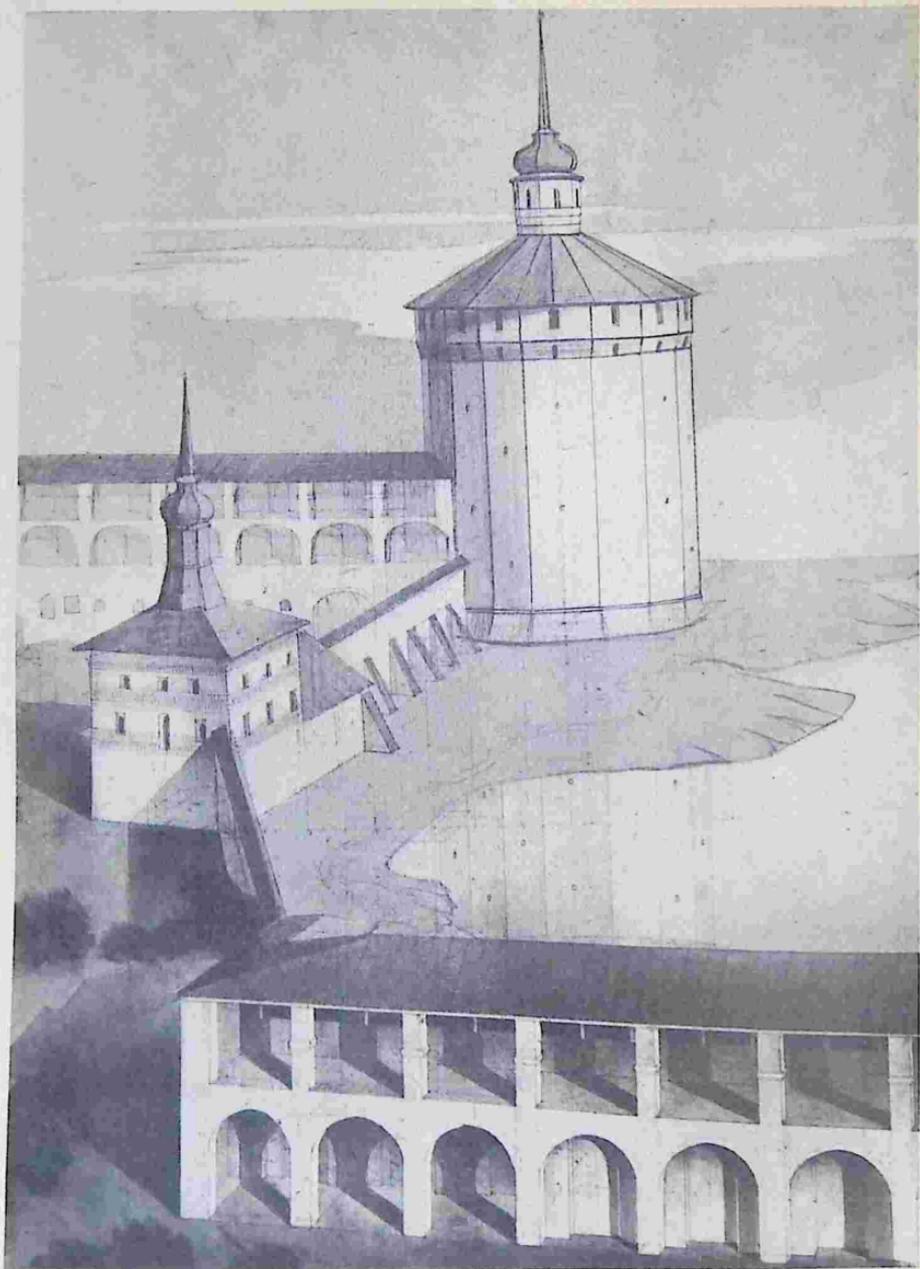
**Приложение 6.** Перспектива Кирилло-Белозерского монастыря (XVI в.), построенная с высоким горизонтом зрения. Раскрывает объемно-пространственную композицию ансамбля. Учебная работа. (с. 314)

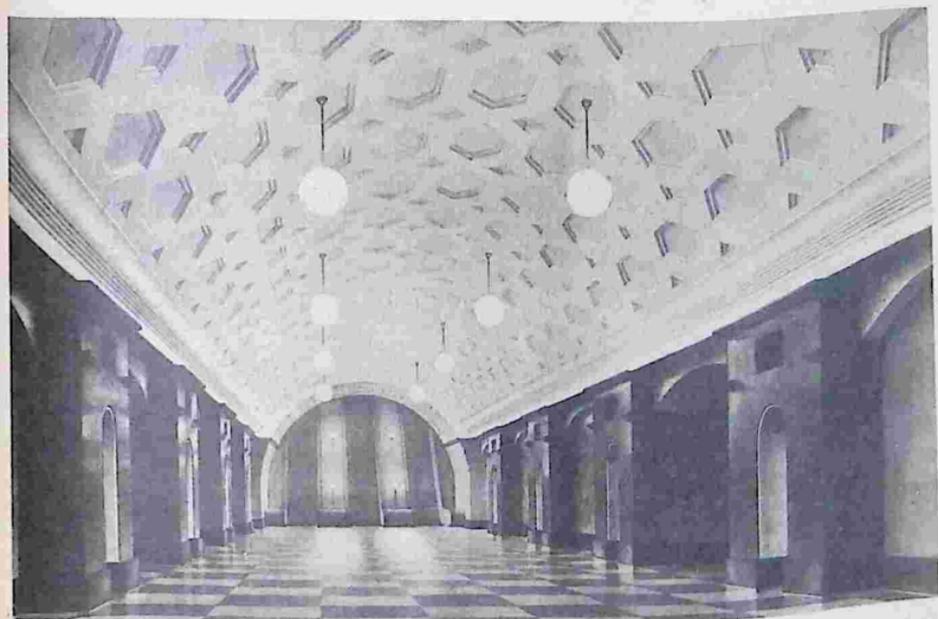
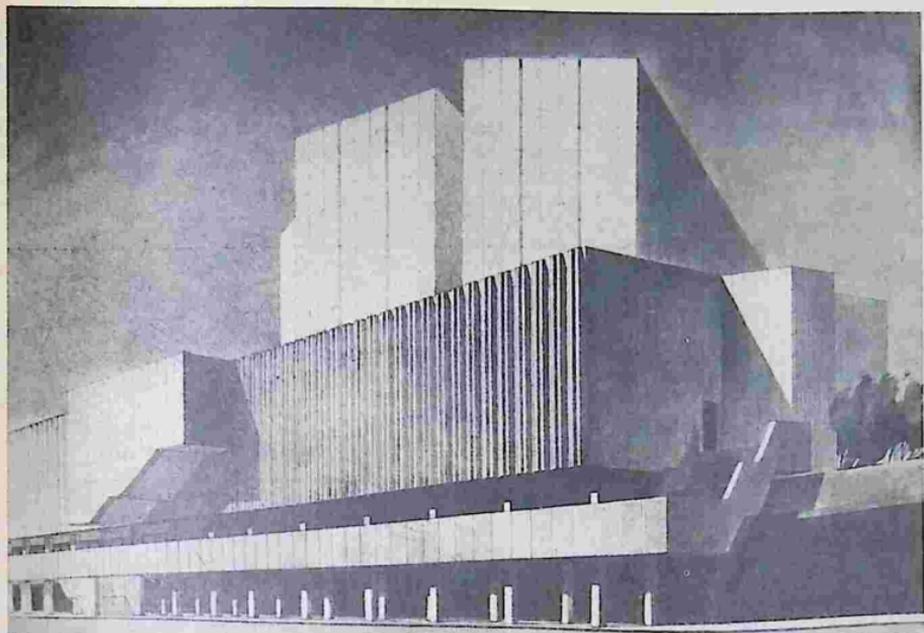
**Приложение 7.** Перспектива здания Зала конгрессов. Хельсинки (архит. А. Аалто, 1971 г.). Удачно выбранная точка зрения и светотень выявляют масштаб и композицию сооружения. Учебная работа. (с. 315 верх)

**Приложение 8.** Фронтальная перспектива перронного зала станции метро «Красные ворота» (архит. И. И. Фомин, 1935 г.), хорошо передающая пластику архитектурных форм светотеневыми и фактурными соотношениями. Учебная работа. (с. 315 низ)









# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксонометрия 10, 191
  - косоугольная 194
  - прямоугольная 192
  - триметрия 197
- Алгоритм 122, 126
- Аппроксимация 136, 286, 287
- Бинормаль** 62
- Блок-схема алгоритма 126
- Вантовое покрытие 80
- Вершина 72
- Вращение 32
- Гаусс** 82
- Гексаэдр 37
- Геликоид 74
- Гелиса 62
- Гиперболический параболоид 75
- Гиперболоид 68, 70
- Гомология 118, 271
- Горизонталь 14, 23
- Горловина поверхности вращения 67
- Градуирование 300
- Граница светотени 142
- Грань 36
- Диметрия** 191, 193
- Дисплей 123
- Додекаэдр 38
- Евклид** 209
- Задачи**
  - метрические 28, 29
  - позиционные 28, 35
- Заложение отрезка прямой 299
- Замена плоскостей проекций 29
- Изометрия** 191, 192
- Изофоты 184
- Икосаэдр 38
- Интервал прямой линии 300
- Искажения перспективные
  - глубинно-пространственные 284, 285
  - нелинейные 284
  - периферические 284
- Каркас**
  - дискретный 67
  - линейный 67, 80, 180
- Коллинеация перспективная 118
- Конгруэнтность 182
- Коноид 75
- Кривая**
  - второго порядка 55
  - коробовая 60
  - ошибок 56
  - плоская 55, 111
  - пространственная 55, 61
- Кривизна поверхности** 81
  - двоякая 83
  - нулевая 83
  - отрицательная 83, 84
  - положительная 82, 84
  - постоянная 82
- Линия**
  - винтовая 62
  - горизонта 209
  - направляющая поверхности 64
  - образующая поверхности 64
  - связи 13
  - спираль Архимеда 63
  - схода плоскости 216
  - уровня 14, 125
  - цепная 58, 80
- Лучевая**
  - плоскость 144
  - поверхность 103, 108, 151
- Метод проецирования** 8
- Многогранник** 36
  - звездчатый 39
  - полуправильный 39
  - правильный 37
- Множество** 8
- Направление**
  - главное 81
  - преобразования 118, 120
  - проецирования 8
- Несобственные элементы** 118
- Нормаль** 55, 81
- Обратимость** 12
- Окружность соприкасающаяся** 56
- Октаэдр** 37
- Оператор** 126
- Определитель поверхности** 64
- Основание**
  - картины 209
  - точки зрения 209
- Ось**
  - аксонометрическая 191, 196
  - вращения 32
  - гомологии 118
  - координат 12
  - поверхности вращения 67, 105
  - проекций 12
- Отметка** 295, 299
- Отображение**
  - изометрическое 111
  - эквивалентное 111
- Очерк поверхности** 89, 93
- Параболоид соприкасающийся** 82
- Параллель поверхности вращения** 67
- Перемещение плоскопараллельное** 33
- Перспектива**
  - интерьера 241
  - панорамная 240
  - перцептивная 287
  - планировочная 236
  - плафонная 270
  - угловая 244, 245
  - фронтальная 241
  - широкоугольная 274, 287
- Платон** 37
- Плоскость**
  - аксонометрических проекций 191
  - картины 208
  - касательная 81, 84
  - лучевая 144
  - меридиональная 173
  - нормальная 61
  - параллелизма 75
  - предметная 209
  - проецирующая 18
  - соприкасающаяся 61
  - спрямляющая 61

- уровня 18
- Пневмокаркасные оболочки 81
- Поверхность
  - винтовая 74
  - второго порядка 78
  - дважды линейчатая 70, 75
  - задаваемая каркасом 79
  - коническая 72
  - линейчатая 68
  - минимальная 80
  - многогранная 36
  - одинакового ската 73, 303
  - переноса 78
  - развертываемая 72
  - с направляющей плоскостью 75
  - соприкасающаяся 85
  - топографическая 80
  - торсовая 72
  - цилиндрическая 72
  - эвольвентная 140
- Показатель искажения 192
- Преобразование
  - гомологическое 118
  - конформное 111
  - родственное 118
  - эквиреальное 111
- Проецирование
  - косоугольное 9
  - параллельное 9
  - прямоугольное 15
  - центральное 9, 208
- Пространство
  - евклидово 209
  - проективное 210
- Прямая
  - восходящая 212, 249
  - нисходящая 212
- Псевдосфера 83
- Развертка поверхности 111
  - приближенная 112
  - условная 114
- Распалубка 128
- Расстояние точки зрения 209
- Ребро возврата 72
- Реконструкция перспективы 271
- Свод
  - вспарушенный 131
  - крестовый 108, 128, 252
  - парусный 131
  - сомкнутый 130
  - цилиндрический 128
- Связка прямых 9, 141
- Сеть поверхности 84, 114
  - вантовая 80, 122
  - кристаллическая 117
  - ортогональная 67
  - радиально-кольцевая 115
  - ромбическая 117
- След
  - плоскости 18
  - прямой 15
- Совмещение 35, 271
- Соответствие
  - взаимно однозначное 118, 209
  - перспективно-аффинное 118
- Способ построения перспективы
  - архитекторов 227
  - координатный 233
  - перспективной сетки 235
  - радиальный 231
  - следа луча 231
  - совмещения 233
- Способ построения теней
  - вспомогательного проецирования 161
  - «выноса» 156
  - касательных поверхностей 151
  - лучевых сечений 151
  - обратных лучей 155
  - плоскостей-посредников 157, 159
- Способ сферических сечений 104
  - триангуляции 112
  - эксцентрических сечений 105
- Сфера 131
- Тени
  - мнимые 144
  - падающие 142
  - реальные 144
  - собственные 142
- Тентовые покрытия 81
- Теорема
  - Дезарга 118
  - Монжа 108
  - о двойном соприкосновении 107
  - Польке 192
  - Эйлера 39
- Тетраэдр 37
- Тор 68
- Торс 72
- Точка
  - гиперболическая 82
  - дистанционная 209, 219
  - измерения 273
  - картины главная 209
  - конкурирующая 18
  - параболическая 83
  - схода 212
  - схода следов плоскости 18
  - экстремальная 96
  - эллиптическая 82
- Трактриса 59, 83
- Треугольник
  - следов 18
  - схода плоскости 265, 276
- Трехгранник сопровождающий 61
- Триметрия 191, 196
- Фотомонтаж перспективный 281
- Фронталь плоскости 20
- Центр
  - гомологии 118
  - проецирования 8, 209
- Цилиндр
  - лучевой 103
  - эллиптический 98, 101
- Цилиндроид 75, 140
- Шаг винтовой линии 63
- Эвольвента 72
- Эволюта 72
- Эйлер 39
- Экватор поверхности вращения 67
- Эллипсоид 68
- Эллиптический параболоид 78, 137
- Энтазис 60
- Эпюр 13

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5	29. Построение плоскостей, касательных к поверхностям . . . . .	84
Введение . . . . .	8	30. Пересечение поверхности плоскостью . . . . .	86
<b>ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ</b>	12	31. Пересечение прямой линии с кривой поверхностью . . . . .	93
<i>Глава 1. Точка, прямая линия и плоскость</i>	12	32. Взаимное пересечение поверхностей . . . . .	96
1. Ортогональная система двух и трех плоскостей проекций . . . . .	12	33. Построение пересечения поверхностей с помощью координатного вспомогательного проецирования . . . . .	101
2. Точка . . . . .	13	34. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка . . . . .	104
3. Прямая линия . . . . .	14	35. Построение очерков поверхностей . . . . .	109
4. Взаимное положение прямых . . . . .	16	<i>Глава 7. Преобразования</i> . . . . .	111
5. Плоскость . . . . .	18	36. Развертывание поверхностей и построение сетки на поверхностях вращения . . . . .	111
6. Прямые и точки, лежащие в плоскости . . . . .	19	37. Геометрические преобразования при центральном и параллельном проецировании . . . . .	117
7. Взаимное положение двух плоскостей . . . . .	22	38. Геометрическое моделирование поверхностей, преобразование их формы и графическое отображение с помощью ЭВМ . . . . .	122
8. Взаимное положение прямой линии и плоскости . . . . .	24	<i>Глава 8. Формообразование кривых поверхностей и их применение в архитектуре</i> . . . . .	127
<i>Глава 2. Способы преобразования проекций</i>	28	39. Своды и купола . . . . .	128
9. Характеристика способов . . . . .	28	40. Простые и составные поверхности . . . . .	132
10. Способ замены плоскостей проекций . . . . .	29	41. Сложные и нерегулярного вида поверхности . . . . .	135
11. Способ вращения . . . . .	32	<b>ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ТЕНИ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ</b>	141
12. Способ координатного вспомогательного проецирования . . . . .	35	<i>Глава 9. Теоретические основы построения теней</i> . . . . .	141
<i>Глава 3. Многогранные поверхности</i>	36	42. Общие сведения . . . . .	141
13. Общие сведения. Виды многогранников . . . . .	36	43. Направление световых лучей . . . . .	143
14. Правильные многогранники . . . . .	37	<i>Глава 10. Тени основных геометрических фигур</i> . . . . .	144
15. Построение проекций правильных многогранников . . . . .	39	44. Тени точки, прямой и плоской фигуры . . . . .	144
16. Пересечение многогранника плоскостью и прямой линией . . . . .	42	45. Тени геометрических тел . . . . .	148
17. Взаимное пересечение многогранников . . . . .	45	<i>Глава 11. Способы построения теней</i> . . . . .	151
18. Области применения многогранных поверхностей . . . . .	47	46. Способ лучевых сечений . . . . .	151
<i>Глава 4. Кривые линии</i>	55	47. Способ касательных поверхностей . . . . .	151
19. Основные понятия и определения . . . . .	55	48. Способ обратных лучей . . . . .	155
20. Плоские кривые . . . . .	55	49. Способ «выноса» . . . . .	156
21. Пространственные кривые . . . . .	61	50. Способ вспомогательных плоскостей-посредников . . . . .	157
<i>Глава 5. Кривые поверхности</i>	64	51. Способ вспомогательного проецирования . . . . .	161
22. Общие сведения о кривых поверхностях . . . . .	64	<i>Глава 12. Тени архитектурных деталей и фрагментов</i> . . . . .	163
23. Поверхности вращения . . . . .	67	52. Тени многогранных и цилиндрических поверхностей . . . . .	163
24. Развертываемые поверхности . . . . .	72		
25. Винтовые поверхности . . . . .	74		
26. Поверхности с плоскостью параллелизма . . . . .	75		
27. Поверхности параллельного переноса, второго порядка и каркасные . . . . .	78		
<i>Глава 6. Пересечение поверхностей</i>	81		
28. Касательная плоскость, нормаль, кривизна поверхности . . . . .	81		

	53. Тени конических поверхностей . . . . .	167	деталей и применение действительного масштаба . . . . .	247
	54. Тени поверхностей вращения с вертикальной осью . . . . .	171	75. Перспектива архитектурных фрагментов, сводов и поверхностей покрытий . . . . .	249
	55. Тени сложных архитектурных фрагментов и поверхностей . . . . .	175	<i>Глава 20. Построение теней в перспективе</i> . . . . .	255
<i>Глава 13.</i>	<i>Построение линий равной освещенности</i> . . . . .	182	76. Построение теней при параллельных лучах света . . . . .	255
	56. Теоретические основы построения линий равной освещенности . . . . .	183	77. Построение теней в интерьере . . . . .	258
	57. Построение линий изофот на геометрических поверхностях, архитектурных деталях и фрагментах . . . . .	188	<i>Глава 21. Построение отражений</i> . . . . .	262
<b>ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ. АКСОНОМЕТРИЯ</b>		191	78. Построение отражений в горизонтальных отражающих плоскостях . . . . .	262
<i>Глава 14.</i>	<i>Общие сведения</i> . . . . .	191	79. Построение отражений в вертикальных отражающих плоскостях . . . . .	263
	58. Сущность метода и основные понятия . . . . .	191	<i>Глава 22. Перспектива на наклонной плоскости</i> . . . . .	264
	59. Стандартные аксонометрические проекции . . . . .	192	80. Общие сведения . . . . .	264
	60. Построение аксонометрии по выбранному направлению процирования . . . . .	196	81. Построение перспективы на наклонной плоскости . . . . .	265
<i>Глава 15.</i>	<i>Построение аксонометрических изображений</i> . . . . .	198	<i>Глава 23. Реконструкция архитектурных перспектив и приемы фотомонтажа в перспективе</i> . . . . .	270
	61. Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям объекта . . . . .	198	82. Основные положения . . . . .	270
	62. Решение позиционных задач в аксонометрии . . . . .	200	83. Реконструкция перспективы на вертикальной картине . . . . .	272
	63. Построение теней в аксонометрии . . . . .	202	84. Реконструкция перспективы на наклонной плоскости . . . . .	276
<b>ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ. ПЕРСПЕКТИВА</b>		205	85. Приемы фотомонтажа в перспективе . . . . .	281
<i>Глава 16.</i>	<i>Основные понятия</i> . . . . .	205	<i>Глава 24. Построение широкоугольной перспективы</i> . . . . .	284
	64. Место и значение перспективы в архитектурном проектировании . . . . .	205	86. Перспективные искажения и основы способа построения широкоугольных перспектив . . . . .	284
	65. Геометрические основы перспективы . . . . .	208	87. Способы построения широкоугольной перспективы . . . . .	287
	66. Перспектива прямой линии, точки и плоскости . . . . .	209	<i>Глава 25. Автоматизированное построение перспективных изображений</i> . . . . .	294
	67. Перспектива окружности . . . . .	219	88. Кодирование и ввод графической информации . . . . .	295
<i>Глава 17.</i>	<i>Способы построения перспектив</i> . . . . .	224	89. Построение машинных перспективных изображений . . . . .	295
	68. Выбор точки зрения и параметры углов . . . . .	225	<b>ЧАСТЬ ПЯТАЯ. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ</b> . . . . .	
	69. Способ архитекторов . . . . .	227	<i>Глава 26.</i>	<i>Общие сведения</i> . . . . .
	70. Радиальный способ и способ совмещенных высот . . . . .	231	90. Сущность метода . . . . .	299
	71. Способ прямоугольных координат и перспективной сетки . . . . .	233	91. Пересечение плоскостей . . . . .	300
	72. Проведение перспектив прямых в недоступную точку схода . . . . .	236	92. Пересечение плоскости с топографической поверхностью . . . . .	301
	73. Композиция перспективы . . . . .	238	93. Основы вертикальной планировки . . . . .	303
<i>Глава 18.</i>	<i>Перспектива интерьера</i> . . . . .	241	Развитие начертательной геометрии (краткая историческая справка) . . . . .	307
<i>Глава 19.</i>	<i>Перспектива деталей и архитектурных фрагментов</i> . . . . .	246	Список литературы . . . . .	310
	74. Перспектива архитектурных		Приложения . . . . .	316
			Предметный указатель . . . . .	

Учебник

Юрий Ильич Короев

## НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редакция литературы по градостроительству и архитектуре

Зав. редакцией *Т.Н. Федорова*

Редактор *Н.Н. Чернецов*

Младший редактор *М.А. Ескина*

Художественный редактор *Э.С. Хвостюк*

Технический редактор *Л.И. Шерстнева*

Корректор *Г.Г. Морозовская*

ИБ № 3536

Сдано в набор 04.07.86. Подписано в печать 31.03.87. Формат 70 × 100<sup>1/16</sup> д.д. Гарнитура Тайме. Печать офсетная. Бумага офсетная № 2. Усл. печ. л. 25,8. Усл. кр.-отг. 51,32. Уч. изд. л. 27,72. Тираж 37000 экз. Изд. № А1-15. Заказ № 749. Цена 1 р. 40 к.

Стройиздат, 101442, Москва, Калаяевская, 23а

Можайский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

## Комплексные учебники и учебные пособия по специальности «Архитектура»

1. Архитектурное проектирование общественных зданий и сооружений
2. Рисунок
3. Скульптура
4. Колористика
5. Живопись
6. История русской архитектуры
7. История советской архитектуры
8. Современная советская архитектура
9. История градостроительного искусства
10. Реставрация памятников архитектуры
11. Основы теории градостроительства
12. Основы архитектурной композиции
13. Градостроительство
14. Объемно-пространственная композиция
15. Архитектурное проектирование промышленных предприятий
16. Основы архитектурного проектирования
17. Типология зданий
18. Начертательная геометрия
19. Архитектурное материаловедение
20. Архитектурные конструкции
21. Строительная механика
22. Строительная физика
23. Технические средства в архитектурном проектировании
24. Санитарно-техническое оборудование зданий и сооружений

Complex text – book  
in speciality “Architecture”

1. Architectural designing of public buildings and structures
2. Drawing
3. Sculpture
4. Colour matching
5. Painting
6. History of russian architecture
7. History of soviet architecture
8. Modern Soviet Architecture
9. History of town building art
10. Rectoration of architectural monuments
11. Fundamentals of town building theory
12. Fundamentals of architectural composition
13. Town building
14. Three – dimensional arrangement
15. Architectural designing of industrial enterprises
16. Fundamentals of architectural designing
17. Typology of buildings
18. Descriptive geometry
19. Architectural materials
20. Architectural structures
21. Structural mechanics
22. Structural physics
23. Use of technical means in architectural designing
24. Sanitary – engineering equipment of buildings and structures

1940