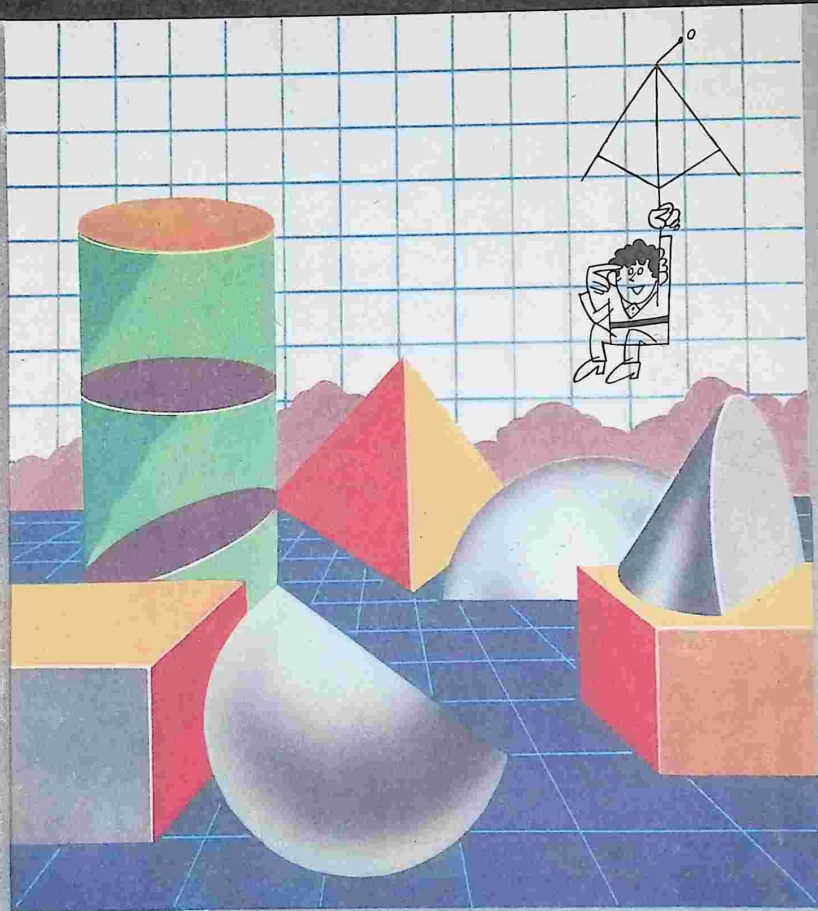


И.Л.НИКОЛЬСКАЯ Е.Е.СЕМЕНОВ

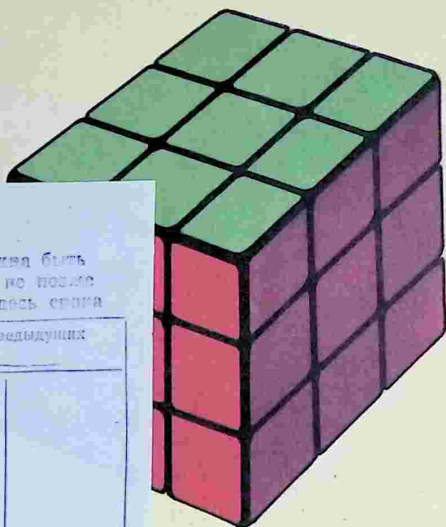
УЧИМСЯ

РАССУЖДАТЬ И ДОКАЗЫВАТЬ

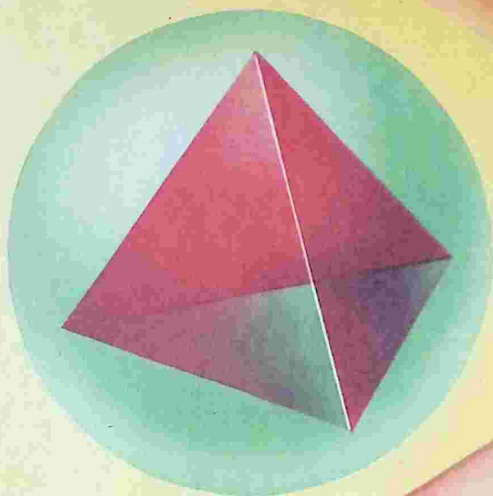


Книга должна быть
возвращена по почте
указанного здесь срока

Количество предыдущих
выдач _____



**радость
открытия**



22.1
H64
И. Л. НИКОЛЬСКАЯ

Е. Е. СЕМЕНОВ

УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ И ДОКАЗЫВАТЬ

Книга для учащихся
6—10 классов
средней школы

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1989

ББК 22.1
Н64

Рецензенты:

доцент, кандидат физико-математических наук В. И. Игошин
(Саратовский государственный педагогический институт им. К. А. Федина);
учитель-методист школы № 420 Москвы Б. П. Пигарев

823.699

Никольская И. Л., Семенов Е. Е.

Н64 Учимся рассуждать и доказывать: Кн. для учащихся 6—10 кл.
сред. шк.— М.: Просвещение, 1989.—192 с.: ил.
ISBN 5-09-000591-5

Помочь школьнику научиться рассуждать, доказывать, вести аргументированный спор, проводить анализ, обобщение, конкретизацию, использовать индукцию, наблюдение, аналогию — главная цель этой книги.

Материал книги подан в виде небольших рассказов, диалогов, бесед, задач, загадок. Изложение ведется в занимательной форме.

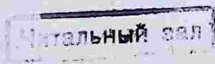
Н 4306020000 — 369 202—88
103(03) — 89

ББК 22.1

ISBN 5-09-000591-5



© Издательство «Просвещение», 1989



часть 1

ЕСЛИ
"СПАРТАК"
ПРОИГРАЕТ,
ТО Я БУДУ
НЕ Я



АЗБУКА РАССУЖДЕНИЙ

Возможно, Вы удивитесь, прочитав название этой книги: «Учимся рассуждать и доказывать». Да кто же этого не умеет? Все мы любим порассуждать, например, о том, какая команда лучше — «Динамо» или «Спартак», или о том, как хороша жизнь во время каникул. А доказывать приходится почти на каждом уроке математики, особенно геометрии.

Но в этой книге речь будет идти не о рассуждениях вообще, а о таких рассуждениях, с помощью которых отыскивается и доказывается истина. Удивительная способность человеческого разума получать новые факты и доказывать истинность каких-то утверждений, не прибегая к опыту, а только рассуждая, Вам хорошо известна. Действительно, этим Вы постоянно занимаетесь на уроках математики, и не только математики. Вы уверенно пишете слово «мышь» с мягким знаком на конце, хотя на слух что «мышь», что «мыш» — одно и то же, и рассуждаете при этом примерно так: «Слово «мыш (ь?)» — существительное женского рода, а все такие слова оканчиваются либо на «а», либо на «я», либо на мягкий знак, значит, надо писать не «мыш», а «мышь».

Рассуждения помогают устанавливать истину отнюдь не только на уроках. С их помощью установлены многие важные естественнонаучные факты. Так, например, испокон веков казалось совершенно очевидным и потому истинным, что тяжелые тела (например, камень) падают быстрее, чем легкие (например, пушинка). Однако Галилей, размышляя над этим вопросом, пришел к другому выводу. «Допустим, — думал он, — что тяжелое тело падает быстрее, чем легкое. Что будет, если связать эти два тела вместе? С одной стороны, легкое тело должно замедлять движение тяжелого, а с другой — скорость падения связанных тел должна быть больше скорости падения тяжелого тела». Полученное противоречие навело его на мысль, что тяжелое и легкое тела должны падать в пустоте с одинаковой скоростью. Этот вывод был подтвержден экспериментально и пополнил запас познанных человеком законов природы.

Умение правильно рассуждать необходимо и в обыденной, повседневной жизни. Так, например, получив тройку или, того хуже, двойку, Вы не станете убеждать учителя в том, что заслуживаете более высокой оценки, с помощью довода «Я учил», если понимаете, что из «учил» не следует «выучил»,

«знаю», т. е. «учил» не является достаточным основанием для получения хорошей оценки.

А что значит — рассуждать правильно? Есть ли тут какие-то правила, которые можно выучить и, руководствуясь ими, безошибочно находить истину? Ответ на этот вопрос будет длинным. Вы сможете получить его, дочитав книгу до конца. А для начала обратите внимание на слова **правильно рассуждать** и **следует**, выделенные в предыдущем абзаце. Что означают эти слова и как связаны стоящие за ними понятия? Если Вы заглянете в словарь, то узнаете, что **правильное рассуждение** — это рассуждение, **построенное по законам логики**. А что такое логика? В поисках ответа на этот вопрос Вы, возможно, натолкнетесь на определение «Логика — это наука о правильных рассуждениях» и окажетесь в положении Иона Тихого (известного героя Ст. Лема), который, пытаясь выяснить по словарям смысл слова «сепулька», прошел длинный путь: сепулька → сепулькарий → сепуление → сепулька, после чего был вынужден отправиться на планету Интеропия, где, по слухам, эти самые сепульки можно было отыскать.

Для выяснения смысла слова **логика** Вам, дорогой читатель, не стоит совершать путешествие на другую планету, тем более что логика инопланетян может оказаться совершенно отличной от нашей. Не советуем Вам копаться с этой целью в словарях и учебниках: определения логики, приводимые в них, как правило, либо длинны и малопонятны, либо неполны (иногда и то и другое одновременно). Заметим, однако, что в одном серьезном учебнике по логике сказано: «Основным предметом изучения в данной книге является отношение логического следования». Если последнюю фразу сопоставить с приведенным выше определением правильного рассуждения, станет ясно, что для уяснения связи между этим понятием и понятием «следует» (логически) необходимо совершить экскурсию в Логику.

Пусть это не пугает Вас, дорогой читатель. В отличие от путешествия Иона Тихого на планету Интеропия, полного неожиданностей, опасностей, столкновений с неведомым, экскурсия в Логiku доставит Вам удовольствие встретиться со старыми знакомыми в новых нарядах и выяснить до конца отношения с ними, что сослужит Вам хорошую службу.

Подобно Журдену (из пьесы Мольера «Мещанин во дворянстве»), который очень обрадовался, узнав, что всю жизнь говорил прозой, Вам будет приятно узнать, что в большинстве случаев Вы говорите и мыслите по законам логики.

Наконец, Вы узнаете, к каким неприятным последствиям ведут нарушения этих законов и как этих неприятностей избежать.

Привыкнуть поскорее к новой обстановке и освоиться с новыми понятиями Вам помогут школьники Петя, Катя и их сосед — студент Митя — герои нескольких «логических» историй, которые мы Вам расскажем.

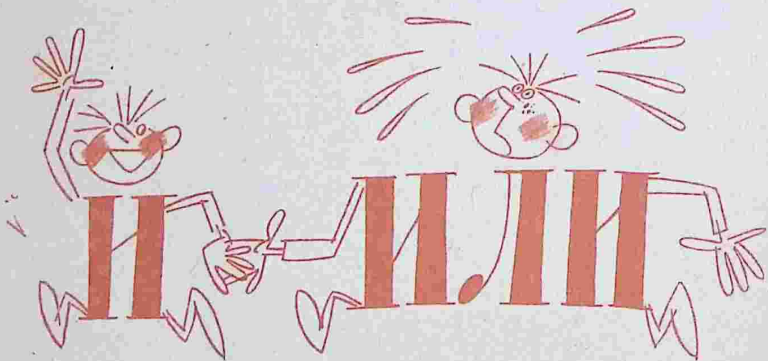
ИСТОРИЯ ПЕРВАЯ («и» и «или»)

Как-то раз Петя попросил сестренку Катю погулять с Джимом, так как он еще не выучил географию, по которой его завтра должны спросить. С прогулки Катя вернулась взволнованная: какой-то прохожий упрекнул ее в нарушении правил содержания собак в городе. Листок с правилами был наклеен на заборе, и одно из них гласило: собака на прогулке должна быть на поводке... в наморднике (кусочек бумаги после слов «на поводке» был оторван).

— Разве это справедливо? — горячилась Катя. — Я действительно спустила Джима с поводка, но он же был в наморднике! Кто же из нас прав?

— М-м-м, — засомневался Петя. — В самом деле, кто прав? Давай-ка позовем Митю — он мастак в логике и наверняка поможет нам разобраться в этом деле.

Митя тут же пришел и, выслушав Петю (Катя слишком взволновалась, чтобы связно рассказать о случившемся), ответил на его вопрос вопросом: «А ты видел эти правила? Как там сказано: «...на поводке **или** в наморднике», а может: «...на поводке **и** в наморднике»?»



СОВАКА
ДОЛЖНА
БЫТЬ
НА ПОВОДКЕ В НАМОРДНИКЕ



— Какая разница? — хором воскликнули Петя и Катя.

— Не все ли равно? А такая разница, — сказал Митя, — что если «или», то права Катя, а если «и» — то прохожий.

— Вот как, — удивился Петя. — Значит, от такой малости зависит, кто прав, кто виноват!

— От такой малости? — усмехнулся Митя. — Разные слова, имеющие разный смысл, совсем не малость. Запятая, и та настолько важна, что может решить вопрос о жизни и смерти. Представь себе, что будет, если в приговоре «Казнить нельзя, помиловать» запятую нечаянно поставят не после, а перед «нельзя». А иногда к недоразумению может привести даже различное понимание одного и того же слова. Допустим, мама, уходя на работу, сказала, что после уроков ты можешь сходить в кино или на каток, а узнав вечером, что ты успел побывать и там, и там, недовольно заметила, что она тебе этого не разрешала. «Но как же так? — возразишь ей ты. — Ведь было сказано «в кино или на каток». Помнишь, Петя, учительница объявила, что на родительское собрание должны прийти мама или папа, но была довольна, когда они пришли оба? И так, кто же будет прав в этом случае — мама или ты? А оба правы. Дело в том, что слово или имеет в нашей обычной речи два значения — *разделительное* и *неразделительное*.

Во многих случаях по смыслу фразы легко понять, какое из этих значений имеется в виду. Например, в знаменитой фразе Гамлета «Быть или не быть — вот в чем вопрос!» слово «или» имеет, несомненно, разделительный смысл: невозможно одновременно «быть» и «не быть». А объявление «Наше бюро добрых услуг поможет Вам вымыть окна или натереть полы» не исключает, разумеется, возможности воспользоваться сразу обоими услугами. В маминой фразе «или» может иметь как разделительный, так и неразделительный смысл. Такая двусмысленность и есть причина ее разногласия с сыном.

БЫТЬ ИЛИ НЕ БЫТЬ?



Непременным условием плодотворности рассуждений является недвусмысленность, однозначность используемых в них слов и выражений. Слова **и**, **или** фигурируют практически во всех рассуждениях и играют в них особую роль, о которой речь пойдет позже. Поэтому с уточнения смысла этих слов, придания им однозначности мы и начнем экскурсию в Логiku. Условимся считать предложения вида **А и В** (где **А** и **В** тоже предложения) истинными в том и только в том случае, когда оба предложения **А** и **В** истинны.

Это определение соответствует нашему обычному пониманию союза «и» в роли связки двух предложений.

В самом деле, если, например, Гидрометцентр сообщил, что завтра будет температура от 0 до 2°C и не будет осадков, то мы вправе считать себя обманутыми в наших ожиданиях не только в том случае, если на завтра увидим на термометре -2°C, а за окном снег, но и если будет мороз без снега или плюсовая температура, но с дождем. Прогноз будет признан верным, истинным, только если окажутся истинными обе его части.

Займемся теперь союзом «или». Как мы знаем, он в отличие от союза «и» употребляется по меньшей мере в двух смыслах — *разделительном* и *неразделительном*. Какой из них выбрать? Вспомним обращенную к сыну мамину фразу «Можешь сходить в кино или на каток», в которую они вложили разный смысл. Мама предполагала, что сын сделает одно из двух — пойдет либо в кино, либо на каток, а сын понял, что он может сделать либо одно из двух, либо и то и другое.

Как видим, фраза **А или В** при разделительном понимании **или** истинна в двух случаях (из четырех возможных), а именно при **А** истинном и **В** ложном или, наоборот, при **А** ложном и **В** истинном. При неразделительном понимании **или** добавляется еще один случай, когда **А или В** истинно, а именно когда **А** истинно и **В** истинно. Таким образом, разделительное «или» в некотором смысле частный случай неразделительного. Поэтому примем за основу неразделительное **или** и условимся считать предложение **А или В**



истинным во всех случаях, когда хотя бы одно из составляющих его предложений **A** и **B** истинно. Иными словами, предложение **A** или **B** будем считать ложным только в том случае, когда **A** ложно и **B** ложно.

Приняв такое соглашение, мы на его основании можем с определенностью утверждать, что в споре между мамой и сыном прав был сын. Конечно, если бы мы исходили из разделительного смысла «или» и договорились бы считать истинным предложение **A** или **B** только в тех случаях, когда одно из предложений **A** и **B** истинно, а другое ложно, то были бы должны признать правоту матери и неправоту сына.

В повседневной жизни обычно не прибегают к определениям, а уточняют смысл сказанного другими способами — интонацией, дополнительными пояснениями — либо вовсе не уточняют, что, как мы видели, может привести к недоразумению. В научном языке таких недоразумений стараются избегать, придавая словам однозначный смысл. Вы, возможно, заметили, что в математике всякий раз, когда допустимо двоякое толкование **или**, ему придается неразделительный смысл.

Например, говоря, что $ab=0$, если $a=0$ или $b=0$, имеют в виду, что a и b могут быть равны нулю одновременно. Когда требуется найти числа, удовлетворяющие «совокупности» неравенств $\begin{cases} x > 2, \\ x < 5 \end{cases}$, т. е. делающие истинными предложение « $x > 2$ или $x < 5$ », то наряду с числами, удовлетворяющими только первому или только второму неравенству, указываются числа, удовлетворяющие обоим неравенствам одновременно (например, 4).

Принятые нами соглашения об **и** и **или** будут нужны в дальнейшем для выяснения смысла слова **следует** (логически) и его связи с правильными рассуждениями. Поэтому запишем их вместе в обозримой форме с помощью следующей таблицы (в которой **и** означает истинно, а **л** — ложно):

A	B	$A \text{ и } B$	$A \text{ или } B$
$и$	$и$	$и$	$и$
$и$	$л$	$л$	$и$
$л$	$и$	$л$	$и$
$л$	$л$	$л$	$л$

Эти определения естественно обобщаются на любое число предложений, связанных союзом **и** (или):

Предложение A_1 и A_2 и ... и A_n истинно в том и только в том случае, когда все составляющие его предложения истинны.

Предложение A_1 или A_2 или ... или A_n ложно в том и только в том случае, когда все составляющие его предложения ложны.

А теперь, пользуясь принятыми определениями, выполните несколько заданий.

* * *

1. Заполните пропуск так, чтобы полученное предложение было: а) истинно; б) ложно.

Число 12 делится на 3 и на ...

Число 8 делится на 3 или на ...

2. Сделайте предложение «Пушкина звали Александром Сергеевичем и ... звали Александром Сергеевичем» истинным, вставив вместо многоточия фамилию известного русского: а) писателя; б) композитора.

3. Найдется ли такое натуральное значение n , при котором предложение « n четно и $n+1$ четно» будет истинным?

4. Может ли при каком-нибудь значении n (натуральном) стать ложным предложение « n четно или $n+1$ четно»?

5. Истинно или ложно предложение:

а) число 2 четное и простое;

б) число 2 четное или простое?

6. Может ли быть ложным предложение:

а) натуральное число n четно или нечетно;

б) функция f четна или нечетна?

7. Ученик, решая неравенство $|x| > 2$, получает неравенства $x > 2$, $x < -2$ и делает вывод, что исходное неравенство не имеет решений, так как нет таких чисел, которые больше 2 и меньше -2. В чем его ошибка?

8. Сформулируйте с помощью союза **и** утверждение «Все нечетные однозначные числа простые». Определите, истинно это предложение или ложно.

9. Сформулируйте с помощью союза **или** утверждение «По крайней мере одно из чисел n , $n+1$, $n+2$ четно». Определите, истинно это утверждение или ложно.

10. Служебное слово — это предлог, **или** союз, **или** междометие, **или** частица. Предлоги и союзы служат для связи слов или предложений, междометиями выражают какие-либо чувства или побуждают к действию. Докажите, что служебное слово *только* — частица.

Ответы и решения.

2. а) Грибоедов; б) Даргомыжский.
5. Оба предложения истинны.
6. а) Не может; б) может.
7. Неравенство $|x| > 2$ равносильно предложению $x > 2$ или $x < -2$, а не $x > 2$ и $x < -2$.
9. « n четно, или $n+1$ четно, или $n+2$ четно». Это предложение истинно при любом n .

10. Обозначим утверждения «Слово только является предлогом (союзом, междометием, частицей)» буквами **А, В, С, Д** соответственно. Предложение **А** или **В** или **С** или **Д** истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из составляющих его предложений. Поскольку **А, В** и **С** ложны, то истинно **Д**.

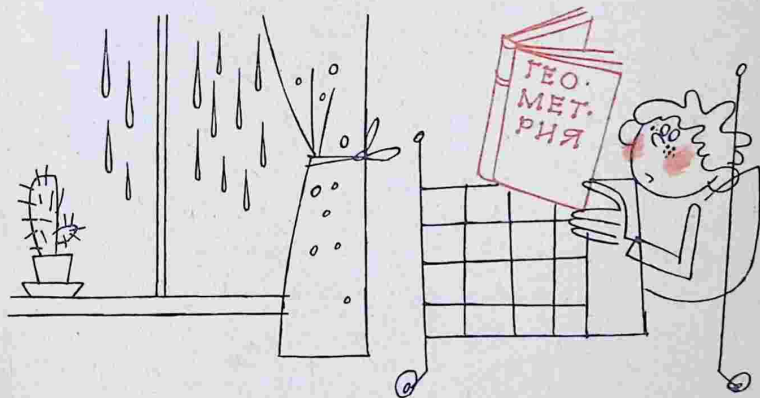
ИСТОРИЯ ВТОРАЯ («Если... , то...»)

Проснувшись, Петя почувствовал, что выздоравливает. Прошла уже почти неделя, как он, съев три порции мороженого, слег с ангиной.

— Не мешало бы в учебник заглянуть, — лениво подумалось ему, — посмотреть, что сейчас проходят.

Прикинув, сколько было без него уроков геометрии, Петя раскрыл учебник и стал читать пункт «Равнобедренный треугольник». В этом пункте доказывались две теоремы: *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны* и *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный*.

Разбирать доказательства Пете было неохота, и он отложил это занятие на потом. Дочитав пункт до конца, он узнал, что вторая теорема называется обратной первой теореме. Что значит *обратная теорема*, разъяснялось в учебнике так: заключение первой теоремы является условием второй, а условие первой — заключением второй. Прочитав это разъяснение, Петя вспомнил, что в теореме, сформулированной в виде предложения «Если **А**, то **В**», условием называют предложение **А**, а заключением — **В**, и решил проверить,



действительно ли получится вторая теорема, если поменять местами условие и заключение в первой. Однако в формулировке первой теоремы не оказалось слов «если» и «то» и было непонятно, где же ее условие, а где заключение.

— Ну ничего,— подумал Петя,— спрошу у Мити, он объяснит,— и, отложив учебник, стал читать детектив.

Катя прибежала из школы насквозь промокшая — шел сильный дождь — и сообщила, что Митя обещал вечером, если дождь кончится, навестить больного друга. С приближением вечера Петя все чаще поглядывал в окошко, но дождь не унимался. Когда он совсем перестал ждать Митю, тот пришел.

— Ты же сказал, что придешь, если не будет дождя,— удивился Петя.

— Но не станешь же ты говорить, что я обманул твои ожидания,— засмеялся Митя.

— Ну что ты, нет, конечно! Я так рад, что ты пришел,— заверил друга Петя.— Но если бы ты не пришел, я бы не обиделся: ведь дождь все еще идет, значит, ты не нарушил бы своего обещания.

— Все правильно,— сказал Митя.— Предложение «Если A , то B » в логике считается истинным в трех случаях: во-первых, когда A истинно (дождя нет) и B истинно (я к тебе пришел), во-вторых, когда A ложно (дождь идет), а B истинно (я к тебе пришел), в-третьих, когда A ложно (дождь идет) и B ложно (я к тебе не пришел). И только если A истинно, а B ложно (дождя нет, а я к тебе не пришел), предложение «Если A , то B » ложно (я не выполнил данного тебе обещания).

— Вот оно что,— протянул Петя, обдумывая сказанное Митей.— Выходит, такое, например, нелепое предложение, как «Если 17 делится на 4, то 17 делится на 2» надо считать истинным?

— Конечно! — воскликнул Митя.— И предложение «Если 18 делится на 4, то 18 делится на 2» тоже истинно. И ничего в этом нет неожиданного. Ведь у тебя не вызывает сомнений истинность утверждения «Если число n делится на 4, то оно делится на 2». Иными словами, ты уверен, что это предложение истинно всегда, т. е. при любом n , в том числе при $n=17$ и при $n=18$ и, разумеется, при $n=16$. А такого значения n , при котором это предложение ложно (A истинно, а B ложно), просто нет; всякое число, которое делится на 4, делится и на 2.

— А интересно,— продолжал размышлять вслух Петя,— если поменять местами условие и заключение, что получится? Будет ли предложение, обратное данному, тоже всегда истинным? Нет, конечно! Предложение «Если число n делится на 2, то оно делится на 4» ложно, например, при $n=6$, потому что A (6 делится на 2) истинно, а B (6 делится на 4) ложно.

— Ага,— подумал он,— в учебнике геометрии так и сказано: «Не всякая теорема имеет обратную» — и приводится пример с вертикальными углами: «Если углы вертикальные, то они равны» — доказанная теорема, а обратное ей предложение «Если два угла равны, то они вертикальные» и теоремой не назовешь: это утверждение неверно, так как вполне возможно, что два угла равны (условие истинно), а углы не являются вертикальными (заключение ложно). Таковы, например, углы при основании равнобедренного треугольника,— вспомнил Петя прочитанную утром теорему и собрался было



спросить у Мити, как же все-таки ее сформулировать в виде «Если А, то В». Но тут его осенило! Ведь раньше и теорема о свойстве вертикальных углов формулировалась просто, без всяких «если» и «то», а теперь... Значит, и теорему об углах при основании равнобедренного треугольника можно сформулировать так: «Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны».

Вошла Катя и сообщила:

— Приходил тренер из Дома пионеров (кандидат в мастера и международный арбитр) и приглашал заниматься в шахматной секции.

— Всех приглашал? — обрадовался Петя.

— Он сказал, что для того, чтобы быть принятым в секцию, достаточно не иметь троек, а у тебя по русскому наверняка будет в четверти тройка, так что о шахматной секции и не мечтай.

Петя сердито посмотрел на сестру, но возразить было нечего: писал он действительно с ошибками и было ясно, что тройку по русскому так быстро ему ни за что не исправить.

— Да подожди ты, не расстраивайся заранее, — попытался ободрить Петю Митя. — Ведь тренер сказал *достаточно*, чтобы не было троек. А что значит — достаточно? Это значит, что **если** у человека нет троек, **то** он может заниматься в шахматной секции. Но это вовсе не означает, что **если** человек занимается в шахматной секции, **то** он не имеет троек. Ты же знаешь, что предложение, обратное верному, может быть и неверным. Иначе говоря, тренер не утверждал, что отсутствие троек необходимо для занятий в шахматной секции. Все знают, что ты большой любитель шахмат и вообще человек спортивный; я думаю, что тебя вполне могут принять в шахматную секцию. А тройку по русскому ты к концу года исправишь.

Петя повеселел и стал подтрунивать над Катей.

— Вот тебя-то в шахматную секцию уж точно не примут: хоть ты и отличница, а ладью от ферзя не отличишь.

— Ничего ты не понял, — сказала она брату. — Раз сказано — **достаточно**, чтобы не было троек, значит, меня примут, если я захочу, и всему научат. Но я не собираюсь учиться играть в шахматы, а запишусь в кружок

хорового пения. Чтобы петь в хоре, необходимо иметь музыкальный слух, а он у меня есть.

— Иметь слух, конечно, необходимо, — если его нет, то лучше не петь. Но достаточно ли этого, чтобы петь в хоре? — засомневался Петя. — Наверное, надо еще и голос иметь приятный, а ты пиццишь, как мышонок.

Катя хотела было, по обыкновению, возразить брату, но Митя сказал примирительно:

— Петя прав, а ты, Катя, запишись лучше в кружок игры на гитаре: чтобы научиться прилично играть на гитаре, **необходимо** и **достаточно** иметь музыкальный слух, ну и усердие, конечно, но его у тебя хоть отбавляй.

Не желая ни в чем уступать сестре, Петя похвастался:

— С сегодняшнего дня у меня тоже усердия хоть отбавляй. Я не поленился утром заглянуть в учебник и узнал, что... — он помедлил, обдумывая, как сказать покороче, и закончил фразу так: — Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно равенство двух его углов.

— Молодец, — похвалил Митя. — Прямую и обратную теоремы всегда можно объединить в одно предложение с помощью слов «необходимо и достаточно». А можно было бы сказать и так «Треугольник равнобедренный **тогда и только тогда**, когда два его угла равны».

Катя, как всегда, стала искать, к чему бы придраться:

— Ну, почему же два угла? А если все три угла треугольника равны, то он уже не равнобедренный?

— Конечно, нет! Тогда он равносторонний, — поспешил продемонстрировать свои познания Петя.

— Не торопитесь, давайте-ка сначала разберемся, — рассудительно сказал Митя. — Прежде чем спорить, надо уточнить предмет спора — смысл утверждения «два угла треугольника равны». Это можно понять по-разному: как «два и только два угла равны» и как «по меньшей мере два угла равны». Здесь имеется в виду второй смысл. Поэтому если у треугольника все три угла равны, то очевидно, что два его угла равны, т. е. треугольник с тремя равными углами тоже равнобедренный, хотя, как правильно сказал Петя, он имеет и специальное название — равносторонний. Равносторонний треугольник — частный случай, вид равнобедренного, так же как квадрат — вид прямоугольника, прямоугольник — вид четырехугольника, береза — вид дерева, а кошка — вид млекопитающего.

— Какой интересный у нас получился разговор, — сказал Петя. — Сколько мы выяснили полезного для себя. — Да, — подтвердил Митя. — Во-первых, мы узнали, что предложение «**Если А, то В**» считается истинным в трех случаях, а ложным только в одном. Запишем этот факт в виде таблички:

<i>А</i>	<i>В</i>	Если <i>А</i> , то <i>В</i>
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>

Во-вторых, вместо «Если A , то B », оказывается, можно сказать « A — достаточное условие B » или « B — необходимое условие A ».

В третьих, если верны оба взаимно обратных утверждения «Если A , то B » и «Если B , то A », то можно сказать: « B — необходимое и достаточное условие A ». Или: « A — необходимое и достаточное условие B ». То же самое можно сформулировать и так: « A тогда и только тогда, когда B ».

Кроме того, мы убедились, как важно всем спорящим точно знать и одинаково понимать смысл употребляемых слов. «Определяйте значения слов, и вы избегнете половины заблуждений» — такова заповедь мудрых.

— А что, — спросил Петя, — разве оборот «если... , то...» может употребляться в каком-нибудь другом смысле, чем тот, который мы выяснили в разговоре? Зачем нам понадобилось это определение?

— Ты забыл, что ли, как Мария Ивановна сказала: «Если студент Митя — прекрасный математик, то его друг Петя ничем, кроме хоккея, не интересуется»? — не упустила случая подразнить брата Катя. — Это утверждение истинно, потому что оба составляющих его утверждения истинны; во всех других случаях оно было бы ложным.

— Ну-ну, — примирительно сказал Митя, — Катя правильно подметила, что в утверждении Марии Ивановны фраза «Если... , то...» близка по смыслу к союзу «и», но вот истинно ли оно — еще вопрос. К тому же Петя интересуется не только хоккеем, но и шахматами, а сегодня он доказал нам, что может всерьез заинтересоваться и математикой.

— Разрази меня гром, если я не докажу это и Марии Ивановне, — решительно произнес Петя.

— Будем надеяться, — смеясь отозвался Митя, — что это твое уверение очень скоро подтвердится: Мария Ивановна заметит твой интерес к математике и гром тебя при этом не поразит, т. е. предложение «Если A , то B » станет истинным в силу ложности A и ложности B . Это соответствует четвертой строке таблицы, с помощью которой записано наше соглашение о союзе «если... , то...».



**А ВОЛГА ВПАДАЕТ
В ЧЕРНОЕ
МОРЕ!**



**ПО АФРИКЕ
БЕГАЮТ
БЕЛЫЕ
МЕДВЕДИ!**



Впрочем, глядя на эту таблицу, легко заметить, что для истинности предложения «Если **A**, то **B**» достаточно ложности **A**. Иначе говоря, если ложно, то предложение «Если **A**, то **B**» истинно независимо от того, истинно или ложно **B**. Поэтому, следуя нашему соглашению, мы должны считать истинными и такие нелепицы, как предложение «Если Волга впадает в Черное море, то белые медведи живут в Африке» (или «... в Арктике»). Но всерьез такую чепуху никто, конечно, городить не станет. А при поиске истинности с помощью логических рассуждений это обстоятельство (истинность «Если **A**, то **B**» при ложном **A**) иметь в виду очень важно более того, совершенно необходимо.

Подробнее мы поговорим об этом в другой раз, дорогой читатель, сейчас попробуйте выполнить несколько упражнений.

* * *

1. Заполните пропуск так, чтобы получившееся утверждение было истинным:

а) Если 2 — число четное, то это число ...

б) Если ..., то $2 \times 2 = 5$.

в) Если $2 \times 2 = 5$, то ...

2. Дополните предложение так, чтобы оно было истинным при любом значении n :

а) Если число n оканчивается нулем, то оно делится на ...

б) Если число n делится на 12, то оно делится на ...

в) Число n делится на 9 тогда и только тогда, когда ...

3. Может ли быть ложным предложение?
- Если x — брат y , то x и y — родственники.
 - Если x — брат y , то y — брат x .
 - Если x — сын или дочь y , то y — мать или отец x .
4. Всегда ли истинно предложение, обратное предложению а), предложению б) из предыдущего упражнения?
5. Сформулируйте утверждение а) из упражнения 3 сначала с помощью слова **достаточно**, а затем с помощью слова **необходимо**.
- б) Сформулируйте утверждение в) из упражнения 3 вместе с обратным ему утверждением с помощью слов **необходимо** и **достаточно**, тогда и только тогда.
6. Сформулируйте с помощью слова **достаточно** теоремы:
- о признаках равенства треугольников;
 - о признаках параллельности прямых.
7. Сформулируйте с помощью слова **необходимо** теорему о свойствах:
- смежных углов;
 - вертикальных углов.
8. Сформулируйте теорему о признаке параллелограмма и обратную ей теорему в виде одного предложения с помощью слов:
- необходимо** и **достаточно**;
 - тогда и только тогда, когда**.

Примечание. Если Вы еще не изучали этих теорем, загляните в учебник и прочтите их формулировки, не вникая в доказательство. Этого достаточно для того, чтобы Вы смогли выполнить задание.

9. Определение трапеции сформулировано так: «Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны». Какое уточнение надо внести в это определение, чтобы из него было ясно, что параллелограмм не является видом трапеции? (Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.)

10. На стол кладутся карточки, на каждой из которых с одной стороны буква, а с другой — число. Предлагается проверить, верно ли для них утверждение «Если на одной стороне карточки гласная, то на другой — четное число», перевернув как можно меньше карточек. Подумайте, как это сделать, если на выложенных карточках Вы видите такой набор букв и чисел:

а)

М	Е	2	6
---	---	---	---

 ; б)

К	З	М	6	Ф
---	---	---	---	---

 ; в)

А	2	Б	3	Г	6
---	---	---	---	---	---

 ;

г)

М	2	4	К	Б
---	---	---	---	---

Ответы и решения.

3. а) Нет; б) предложение ложно, когда x — брат y , а y — сестра x ; в) нет.

9. Добавить, а две другие не параллельны.

10. Утверждение «Если на одной стороне гласная, то на другой — четное число» будет для данного набора карточек ложным лишь в том

случае, когда найдется карточка с гласной и нечетным числом. Поэтому для набора а) достаточно перевернуть карточку с буквой Е, а для набора б) — карточку с числом 3. В наборе в) опровержение могут нести две карточки: с буквой А и с числом 3. Поэтому надо перевернуть одну из них, например с буквой А: если на обороте окажется нечетное число, то

утверждение ложно, если же — четное, то надо перевернуть карточку с числом 3; если на обороте согласная, то утверждение истинно, а если гласная — то ложно. Для набора г) утверждение заведомо истинно, так как в нем сочетание на одной карточке гласной и нечетного числа невозможно.

ИСТОРИЯ ТРЕТЬЯ («Неверно, что...»)

Петя твердо решил развить в себе силу воли и сказал об этом Кате. — Начну с того, — доверительно сказал он сестре, — что составлю план на каникулы и выполняю его по всем пунктам.

Наканиуне каникул Петя торжественно вручил Кате листок бумаги, на котором было аккуратно написано:

В каникулы я обязательно прочту по крайней мере одну толстую книгу, сяду в музей или на лекцию и, если не будет оттепели, все вечера проведу на катке.

Планируя обязательство над кроватью, Петя с первого дня каникул решительно взялся за дело: начал читать «Записки охотника» и принес из библиотеки «Три мушкетера». На другой день он сходил в Зоологический музей посмотреть мамонтенка Диму. Пять вечеров подряд Петя провел на катке, но потом стало совсем тепло (15°C !) и каток пришлось отменить. К концу каникул Петя закончил чтение «Записок охотника» и прочитал половину «Трех мушкетеров». В общем Петя был собой доволен, но Катя сумела испортить ему настроение.



— Между прочим, ты не был на катке ни вчера, ни позавчера, — ехидно заметила она.

— У меня же была уважительная причина! — возмутился Петя.

— Ну, а кроме того, ты не был на лекции, — напомнила Катя.

Сходить на лекцию Петя и в самом деле не собрался, но и тут нашел, что возразить: в Зоологическом музее он слушал экскурсовода, рассказывавшего о мамонтах.

— Но ведь ты собирался в музей или на лекцию, а не в музей и на лекцию сразу, — не унималась Катя, — и «Три мушкетера» не дочитал.

Поняв, что Катю ему не переспорить, Петя махнул рукой и пошел к Мите. Мите захотелось утешить расстроенного друга.

— Мы еще посмотрим, кто прав, ты или Катя, — сказал он. — Что значит — ты не выполнил плана? В этом надо разобраться.

И они стали разбираться.

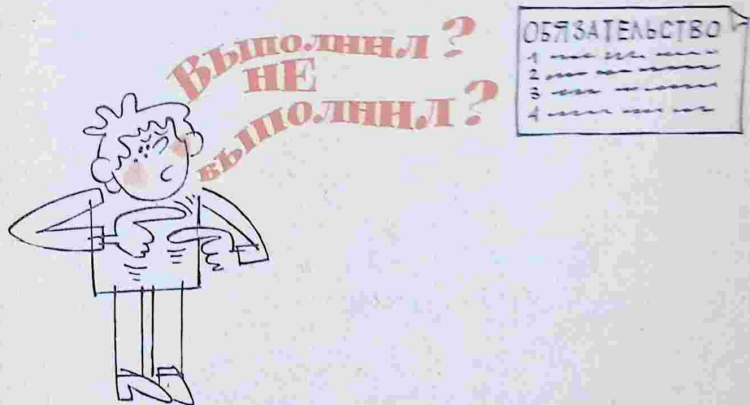
— Сначала давай еще раз перечислим дела, которые ты наметил, — предложил Митя. — Сделаем это так: D_1 — прочитать по крайней мере одну толстую книгу, D_2 — сходить в музей, D_3 — сходить на лекцию, D_4 — всю вечера провести на катке. Теперь запишем взятое тобой обязательство кратко, обозначив условие не будет отпелли буквой Y .

D_1 и (D_2 или D_3) и (если Y , то D_4).

Катя утверждает, что ты не выполнил свое обязательство, т. е. отрицает, что ты его выполнил. Что же значит — отрицает? В каком случае отрицание какого-либо утверждения истинно, а в каком — ложно?

* * *

Начнем с простого. Допустим, ты утверждаешь, что «Чапаяев» сегодня идет в нашем клубе, а Катя, как всегда, спорит, уверяя, что «Чапаяев» сегодня



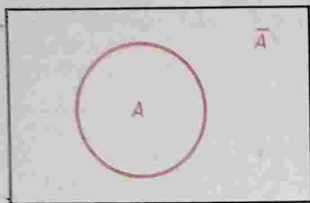


Рис. 1

не идет в нашем клубе. Если твое утверждение истинно, то Катина ложно, а если ты ошибаешься, то Катя права...

В логике предложение, утверждающее, что **А** неверно, называется отрицанием предложения **А**. Если **А** истинно, то его отрицание ложно; если же **А** ложно, то его отрицание истинно. Отрицание предложения **А** иногда записывается так: $\bar{A}$ (рис. 1).

Построить для любого предложения его отрицание проще простого: достаточно поставить перед ним слова **неверно, что**.

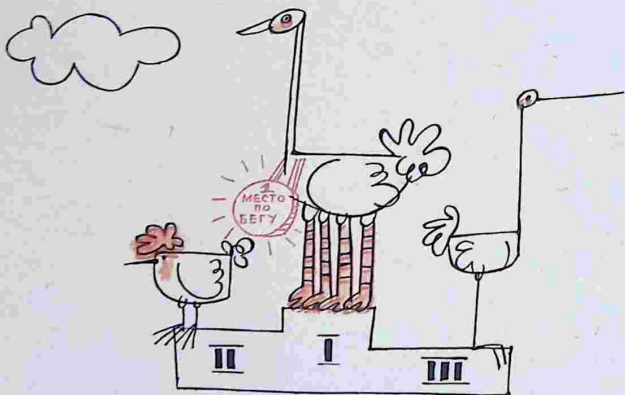
Например, отрицанием предложения «**Чапаев** сегодня идет в нашем клубе» будет предложение **Неверно, что «Чапаев» сегодня идет в нашем клубе**. А предложение **Неверно, что все отличники в нашем классе — спортсмены** — отрицание предложения **Все отличники в нашем классе — спортсмены**.

Однако это **неверно**, что делает предложение громоздким, неуклюжим. В первом случае, как мы уже видели, можно сказать проще, а именно «**Чапаев** сегодня **не** идет в нашем клубе», т. е. вместо **неверно, что** в начале предложения поставить **не** перед его сказуемым. А можно ли и во втором случае поступить так же?

— Почему же нет? — удивитесь Вы. — Пожалуйста: **Все отличники в нашем классе — не спортсмены**.

Напомним, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинными, ни одновременно ложными.

А предложения **Все отличники в нашем классе — спортсмены** и **Все отличники в нашем классе — не спортсмены** оба ложны. Например, Катя — от-



личница и фигуристка, а вот Митя — отличник, а спортом не занимается. К сожалению, бывает, что некоторые отличники в классе — не спортсмены.

Вот мы и сформулировали отрицание предложения **Все отличники в нашем классе — спортсмены**: **Некоторые отличники в нашем классе — не спортсмены**. Это предложение имеет тот же смысл, что и предложение **Неверно, что все отличники в нашем классе — спортсмены**. Вообще отрицанием предложения **Все x обладают свойством P** является предложение **Некоторые x не обладают свойством P** . Кратко это записывают так: $\forall xP(x) \Leftrightarrow \neg \exists x\neg P(x)$. Знак $\forall$ означает все (всякий, каждый, любой), а знак $\exists$ — некоторые (существуют, есть, имеется). Пусть, например, x означает озеро, а P — свойство быть пресноводным; тогда эта запись будет означать следующее: **Неверно, что все озера пресноводные, то же самое, что Некоторые озера не пресноводные**. Интересно, что отрицание предложения, имеющего форму $\exists xP(x)$, строится подобным же образом: $\exists xP(x) \Leftrightarrow \neg \forall x\neg P(x)$. Например, сказать **Неверно, что существуют четвероногие птицы все равно, что сказать Все птицы не четвероноги**.

Так обстоит дело с отрицаниями простых предложений. Если в них нет (и не подразумевается) слова **все** (всякий, любой, каждый) или **некоторые** (существуют, есть, имеется), то для построения отрицания достаточно поставить не перед сказуемым. Если же перед подлежащим простого предложения стоит (или подразумевается) слово **все** либо слово **некоторые**, то для того, чтобы получить это отрицание, нужно не только поставить не перед сказуемым, но и заменить слово **все** словом **некоторые**, а слово **некоторые** словом **все**.

* * *

А теперь посмотрим, как образуются отрицания сложных предложений, имеющих форму **А и В**, **А или В**, **если А, то В**. Как, например, возразить на то, что Вы опоздали в школу и получили двойку? Сказать, что не опаздывали и не получали двойки? Но ведь предложения **Ученик опоздал в школу и получил двойку** и **Ученик не опаздывал в школу и не получал двойки** могут оказаться одновременно ложными. Так будет, например, в том случае, если этот ученик пришел в школу вовремя, но двойку получил. Значит, мы построили свое отрицание неправильно. Отрицанием предложения, имеющего форму **А и В**, является предложение **А или В** (где или имеет *неразделительный смысл*). Понять это поможет рисунок 2. На этом рисунке круг **А** соответствует утверждению «**А** истинно», а круг **В** — утверждению «**В** истинно». Все, что осталось за кругом **А**, соответствует истинности $\bar{A}$, а все, что находится за пределами круга **В**, соответствует истинности $\bar{B}$. Отсюда ясно, что область «в клеточку» соответствует истинности **А и В**, область «в вертикальную полосу» — истинности **А и $\bar{B}$** , область «в горизонтальную полосу» — истинности **$\bar{A}$ и В**, незаштрихованная область — истинности **$\bar{A}$ и $\bar{B}$** . За пределами своей области истинности каждое предложение ложно, а его отрицание истинно.

Итак, область «в клеточку» соответствует истинности **А и В**, а все остальное — истинности **$\bar{A}$ и $\bar{B}$** . Но это «все остальное» состоит из областей

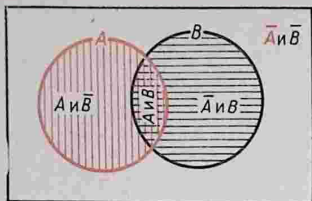


Рис. 2

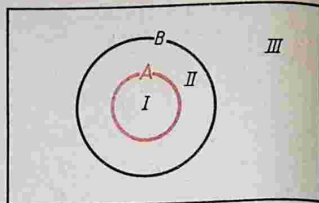


Рис. 3

истинности A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Итак, сказать «Неверно, что A и B » — то же самое, что сказать «Не A или не B ».

А теперь сообразим, как построить отрицание предложения A или B . Как мы уже выяснили, это предложение истинно, когда A истинно, а B ложно, когда A ложно, а B истинно и когда A и B оба истинны. На рисунке 2 этому предложению соответствует вся заштрихованная область. Ясно, что отрицание A или B — это $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

— Значит, отрицанием предложения Мальчик сходил в музей или на лекцию будет предложение Мальчик не сходил в музей и не сходил на лекцию. Так ведь? — продолжал рассуждать Петя. — А я в музее был. Выходит, зря Катя ко мне придиралась.

— Погоди, — отозвался Митя. — Давай до конца разберемся. Ты собирався, если не будет оттепели, все вечера провести на катке. Этот пункт твоего обязательства имеет форму условного предложения Если A , то B . Как же построить отрицание такого предложения?

— Если не A , то не B , — не задумываясь, ответил Петя. — Хотя нет — Если A , то не B . А может быть, Если не A , то B ?

— Не торопись, — остановил его Митя. — На этот вопрос трудно ответить правильно сразу.

Дело в том, что отрицание условного предложения само условным предложением не будет. Разобраться в этом нам опять помогут рисунки. Посмотрите сначала на рисунок 3. На нем изображен случай, когда предложение Если A , то B истинно. В самом деле, из рисунка видно, что если истинно A , то истинно и B . Таким образом, область истинности предложения Если A , то B

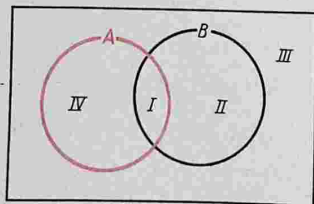


Рис. 4

состоит из областей I, II и III, соответствующих A и B , $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Теперь посмотрите на рисунок 4. Когда я его рисовал, то не имел в виду, что предложение Если A , то B всегда истинно. Поэтому здесь, кроме областей I, II и III, соответствующих A и B , $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$ и составляющих область истинности Если A , то B , есть еще и область IV, соответствующая A и $\bar{B}$. Теперь ясно, что отрицанием предложения Если A , то B будет предложение A и не B .

— A и не B ! — воскликнул Петя.

Вот это неожиданность! Действительно, сразу ни за что не догадаешься. Впрочем, когда я говорю Катьке: «Если я схожу в магазин, то ты дашь мне списать задачу», она так и отвечает: «В магазин сходишь, а задачу списать не дам».

* * *

— Ну вот, — сказал Митя, — теперь мы проверим, выполнил ли ты свое обязательство или нет, и выясним, кто прав, ты или Катя. Вернемся к краткой записи твоего обязательства:

D_1 и (D_2 или D_3) и (если Y , то D_4).

Катя отрицает, что ты его выполнил, т. е. утверждает, что истинно предложение $\bar{D}_1$ и ($\bar{D}_2$ или $\bar{D}_3$) и (если Y , то $\bar{D}_4$).

«Расшифруем» эту запись. Сначала вспомним правило $\overline{A \text{ и } B} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ или } \bar{B}$. Применяя это правило дважды, получим: $\bar{D}_1$ или $\overline{D_2 \text{ или } D_3}$ или если Y , то $\bar{D}_4$ (скобки здесь не нужны, так как черта, обозначающая отрицание, заодно выполняет и роль скобок, указывая начало и конец предложения).

Теперь применим правила $\overline{A \text{ или } B} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ и } \bar{B}$ и Если A , то $B \Leftrightarrow A \text{ и } B$. Получим: $\bar{D}_1$ или ($\bar{D}_2$ и $\bar{D}_3$) или (Y и $\bar{D}_4$). Катя права в том и только в том случае, если хотя бы одно из предложений $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ и $\bar{D}_3$, Y и $\bar{D}_4$ истинно. Разберем каждое из этих предложений в отдельности.

$\bar{D}_1$ означает Неверно, что ты прочитал по крайней мере одну толстую книгу, т. е. что ты не прочитал ни одной толстой книги. Но ты прочитал «Записки охотника»; значит, $\bar{D}_1$ ложно.

$\bar{D}_2$ и $\bar{D}_3$ означает, что ты не сходил ни в музей, ни на лекцию. Но ты сходил в музей; значит, это утверждение ложно.

Y и $\bar{D}_4$ означает, что не было оттепели, но ты не все вечера провел на катке, или, иначе, не было оттепели и были вечера, которые ты не провел на катке. Такие вечера и вправду были, но утверждение Не было оттепели не соответствует действительности, т. е. ложно. Значит, и утверждение Y и $\bar{D}_4$ ложно.

Вот мы с тобой и убедились, что Катя неправа. Теперь нужно и ее в этом убедить.

* * *

Чтобы лучше усвоить все, что Вы узнали об отрицании, и проверить себя, подумайте над такими вопросами и задачами:

1. Какое из предложений $a < 2$, $a \leq 2$ является отрицанием предложения $a > 2$? Почему?

2. Является ли отрицанием предложения Он — мой друг предложение Он — мой враг? Почему?

3. Скажите то же самое по-другому:

а) Неверно, что 551 — простое число.

б) Неверно, что все млекопитающие живут на суше.

в) Неверно, что некоторые собаки летают.

4. Что утверждает предложение **Неверно, что $2 \cdot 2 \neq 4$** ?

5. Что утверждает предложение **Неверно, что все простые — Истинно или ложно это утверждение?**

6. Сформулируйте в утвердительной форме (т. е. так, чтобы предложения не было **не** или **неверно, что**) отрицание предложения **вует школа, все ученики которой не интересуются спортом.**

7. На вопрос Кости, можно ли ему пойти в кино или по ответила отрицательно. Как должен поступить Костя, послуш

8. В правилах содержания собак в городе сказано, что неле собаку без поводка и без намордника.

Юра вывел свою Альму на поводке и в наморднике. Олин А наморднике, но с поводка был спущен. Файфика Миша отпущ без поводка и без намордника. Машина Джолли гуляла на повс намордника. Кто из ребят нарушил правило?

9. Постройте отрицание предложения **Если число 899 делится это число делится на 13.** Установите, истинно это предложение и

Ответы и решения.

1. $a \leq 2$; это предложение можно прочесть как **а не больше 2.**

2. Нет; эти предложения могут быть одновременно ложными.

3. а) 551 — не простое число; б) некоторые млекопитающие не живут на суше; в) все со-баки не летают.

4. $2 \cdot 2 = 4$.

5. Существует простое четное число. Это пред-

ложение истинно, так как простое действительно существует; это 2.

6. В всякой школе некоторые учени-суются спортом.

7. Не пойти в кино и не гулять.

8. Правило нарушил только Миша.

9. Число 899 делится на 31 и не дели-
Это предложение истинно; следо-
предложение **Если число 899 делито-
то это число делится на 13** ложно.

ИСТОРИЯ ЧЕТВЕРТАЯ («Следует, не следует»)

Мария Ивановна вызвала Петю к доске доказать теорему о сумме у-треугольника. Накануне Петя прочёл в учебнике доказательство теор-которое оказалось длинным и трудным, и хотел было прочесть его еще р-повторить. Но в это время по телевизору стали показывать международ-оккейный матч, и Петя отложил работу над доказательством на по-Передача кончилась поздно, и Петя лег спать, успокаивая себя мыслью, автра, авось, не вызовут.

Проплавав у доски минут десять, Петя причалил к желанному бер-то и требовалось доказать», но Мария Ивановна осталась недоволь-сколько утверждений, высказанных Петей в ходе доказательства, были, взгляд, недостаточно обоснованными.

— Больше тройки ты сегодня не заслужил, — сказала она Пете, — хотя-еднее время заметно подтянулся.

— Но я же учил, — попробовал поторговаться с учительницей Пет-

...сла нечетны?

...бы в начале
...ения Сущест-

...улять, мама
...шись маму?
...зя выводить

...гос гулял в
...л побегать
...дке, но без

...на 31, то
...ли ложно.

...етное число

...ки интере-

...ся на 13.

...ательно,
...на 31,

...голов
...емы,
...из и
...ый
...ом.
...что

...гу
...а:
...а

...в



**СЕГОДНЯ
ПОНЕДЕЛЬНИК,
СЛЕДОВАТЕЛЬНО,
ЗАВТРА
ВТОРНИК.**



— И что же из этого **следует**? — пожала плечами Мария Ивановна. — Учил, но не доучил. Садись на место и в следующий раз учи лучше.

Придя домой, Петя открыл учебник геометрии с твердым намерением хорошо подготовиться к следующему уроку. В учебнике было написано: «Из теоремы о сумме углов треугольника **следует**, что у любого треугольника хотя бы два угла острые». Петя прочел доказательство этого утверждения и задумался, что же все-таки это значит — **следует**. Как понимать вопрос Марии Ивановны и что общего между ним и утверждением в учебнике? Его размышления прервала Катя. Она раскрыла перед ним тетрадь с контрольной работой по алгебре и огорченно сказала: «Ну надо же, ни одной ошибки, а отметку почему-то снизили». В тетради красным карандашом была подчеркнута фраза: «Из равенства $x(x-1)=0$ **следует**, что $x=0$ и $x-1=0$ ».

— Где же тут ошибка, — недоумевала Катя, — разве это не так?

— Снова это «**следует**» — оно меня преследует, — нечаянно подумал стихами Петя и, вспомнив, что урок алгебры, на котором будет разбираться контрольная, только послезавтра, предложил Кате сходить вместе к Мите. Митя обрадовался их приходу, но сразу заметил, что и брат, и сестра чем-то огорчены.

— В чем дело? Ты, наверное, из-за тройки расстроился? — спросил он Петю. — Не горюй, исправись. А ты, Катя, что, тоже тройку схватила?

— Да нет, четверку, но ведь ни одной ошибки! Посмотри только! — она протянула Мите тетрадку с контрольной. Митя внимательно прочел подчеркнутую красным карандашом фразу и тоже не сразу понял, в чем дело.

— Как будто бы все верно, — недоуменно произнес он. — Впрочем, минуточку, давайте проверим. Ошибка вот в чем: из равенства $x(x-1)=0$ не **следует**, что $x=0$ и $x-1=0$.



$$x(x-1)=0$$

СЛЕДОВАТЕЛЬНО

$$x=0$$

и $x-1=0$



— Следует, не следует! — проворчал Петя. — Что же это значит? Что это за слово такое, из-за которого сегодня у нас с Катей одни неприятности?

— Слово это очень хорошее, важное и нужное, только употреблять его надо с умом, — сказал Митя. — Говорят, что из предложения P следует предложение Q , если всякий раз, когда истинно P , истинно и Q .

* * *

Предложение $x(x-1)=0$ истинно, например, при $x=0$, а предложение $x=0$ и $x-1=0$ при $x=0$ ложно (вспомните нашу беседу о союзе «и»); значит, из предложения $x(x-1)=0$ предложение $x=0$ и $x-1=0$ не следует.

— Вот оно что! — произнес Петя. — Теперь я понял, что имела в виду Мария Ивановна. Она хотела сказать, что верит мне, не сомневается в том, что я учил доказательство, но бывает так, что учил, но не выучил, т. е. что из «учил» не следует «выучил». Поэтому уверять: «Я учил» — бесполезно. хорошую отметку ставят за «выучил». Вот сегодня я действительно выучил урок по геометрии и твердо знаю, что из теоремы о сумме углов треугольника следует... Поймите, а здесь что значит — «следует»? Наверное, то же самое: если истинно, что сумма углов треугольника равна 180° , то истинно, что у любого треугольника хотя бы два угла острые. Но в учебнике доказывается, что если в треугольнике меньше двух острых углов (один или ни одного), то сумма углов этого треугольника не равна (больше) 180° . Как же так?

— А так, — отвечал Митя. — Предложения «Если A , то B » и «Если не B , то не A » равносильны, т. е. или оба одновременно истинны, или оба ложны. Давай-ка убедимся в этом с помощью таблицы:

<i>A</i>	<i>B</i>	Если <i>A</i> , то <i>B</i>	Не <i>A</i>	Не <i>B</i>	Если не <i>B</i> , то не <i>A</i>
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>

Значит, вместо того чтобы доказывать утверждение «Если *A*, то *B*», можно доказывать утверждение «Если не *B*, то не *A*». А сказать «Если *A*, то *B*» и «Если не *B*, то не *A*» — значит утверждать одно и то же.

— Выходит, зря я вчера обиделся на Катьку, — подумал Петя. — Мама сказала мне: «Если пойдешь в кино, то сначала сделай все уроки». А Катька съехидничала: «Если не сделаешь все уроки, то и в кино не пойдешь». Оказывается, они сказали одно и то же.

— А есть ли между «следует» и «равносильно» какая-нибудь связь? — поинтересовалась Катя.

— А как ты сама думаешь? — ответил Митя на ее вопрос вопросом.

— Если предложения равносильны, то всякий раз, когда истинно одно из них, истинно и другое, — стала рассуждать Катя вслух. — Значит, каждое из них следует из другого.

— Так оно и есть, — подтвердил Катин вывод Митя. — И наоборот, если каждое из двух предложений следует из другого, то они равносильны. Например, из $x(x-1)=0$ следует, что $x=0$ или $x-1=0$ (обрати внимание: или, а не и, как ты написала в контрольной). В самом деле, произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю ($x=0$, либо $x-1=0$, либо то и другое сразу). Но в каждом из этих случаев истинно предложение $x=0$ или $x-1=0$. А поскольку оно истинно только в этих случаях, то из него следует предложение $x(x-1)=0$. Эти предложения равносильны.

* * *

Итак, мы выяснили связь между «следует» и «равносильно». А теперь попытаемся разобраться, какова роль «следует» в рассуждениях.

Рассуждая, мы хотим из истинных исходных утверждений (посылок) получить истинное заключение. Рассуждение, которое это гарантирует, называется правильным. Рассуждение не будет правильным (будет неправильным), если возможен случай, когда все посылки истинны, а заключение ложно. Катя в контрольной рассуждала неправильно, потому что такой случай был возможен, т. е. из посылки не следовало заключение. В случае, когда посылки несколько, тоже говорят: «Из посылок следует заключение», понимая под этим, что всякий раз, когда все посылки истинны, заключение истинно. Таким образом, когда мы говорим, что рассуждение правильное, это означает, что его заключение следует из посылок, т. е. невозможен случай, когда все посылки истинны, а заключение ложно.

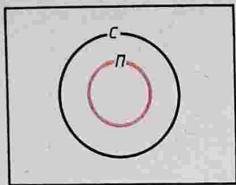


Рис. 5

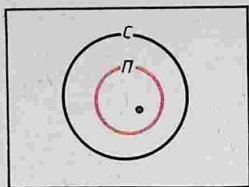


Рис. 6

Рассмотрим несколько примеров рассуждений и попробуем выяснить, какие из них правильные, а какие нет.

1. Все пионеры нашего класса занимаются спортом. Дима — пионер. Значит, Дима занимается спортом.

2. Все пионеры нашего класса занимаются спортом. Костя занимается спортом. Значит, Костя — пионер.

3. Все пионеры нашего класса занимаются спортом. Вася — не пионер. Значит, он не занимается спортом.

4. Все пионеры нашего класса занимаются спортом. Миша не занимается спортом. Значит, Миша — не пионер.

Прибегнем к картинкам. Изобразим в виде прямоугольника множество учащихся нашего класса, а кругами — множества пионеров и спортсменов. Тогда утверждению «Все пионеры нашего класса занимаются спортом» будет соответствовать рисунок 5. С помощью этой картинки мы выясним, какие из приведенных рассуждений правильные, а какие нет.

Рассмотрим первое рассуждение. Утверждение «Дима — пионер» изображено точкой внутри круга **П** (см. рис. 6). Но эта точка находится и внутри круга **С**. Значит, в данном случае при истинных посылках заключение ложным быть не может.

Второе рассуждение можно изобразить рисунком 7. Мы видим, что при истинных посылках «Все пионеры нашего класса — спортсмены» и «Костя — спортсмен» заключение «Костя — пионер» может оказаться ложным. Значит, заключение в данном случае не следует из посылок, т. е. это рассуждение неправильное.

Рисунок 7 обнаруживает и неправильность третьего рассуждения.

Из рисунка 8, соответствующего четвертому рассуждению, видно, что в

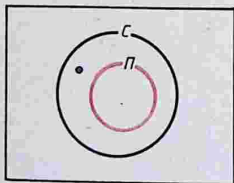


Рис. 7

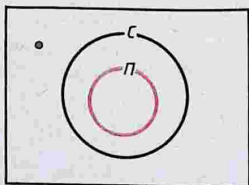


Рис. 8

этом случае при истинных посылах заключение не может быть ложным, т. е. рассуждение правильное.

А теперь ответьте на вопрос, правильно ли следующее рассуждение:

5. Всякая дифференцируемая функция непрерывна. Функция f дифференцируема. Значит, она непрерывна?

Но мы же не знаем, что это такое — «функция дифференцируема», «функция непрерывна»! — скажете Вы.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, этого можно и не знать. Обратите внимание на то, что рисунком 5, изображающим рассуждение 1, с таким же успехом можно проиллюстрировать и рассуждение 5, если под прямоугольником понимать множество всех функций, под большим кругом — множество непрерывных функций, а под меньшим — множество дифференцируемых функций. Рассуждения 1 и 5 имеют одну и ту же форму, а именно: Если A , то x есть B ; x есть A ; значит, x есть B . Или проще: Если A , то B , A ; следовательно, B .

Теперь Вам должно быть ясно, что правильность рассуждения зависит не от содержания составляющих его фраз, а от его формы. Рассуждения, имеющие одну и ту же форму, либо все правильные, либо все неправильные. Как мы выяснили, все рассуждения, имеющие такую же форму, как рассуждение 1 (если A , то B , A ; следовательно, B) или рассуждение 4 (если A , то B , не B ; следовательно, не A), правильные. А все рассуждения, имеющие форму рассуждения 2 (Если A , то B , B ; следовательно, A) или рассуждения 3 (Если A , то B , не A ; следовательно, не B), неправильные.

— А что, всякое рассуждение имеет одну из этих четырех форм? — спросите Вы.

Конечно, нет! Рассуждение может иметь любую сколь угодно сложную форму.

— А как же тогда проверить, правильное оно или неправильное? Ведь наши картинки годятся только для рассуждений этих четырех видов.

Для проверки правильности рассуждения вовсе не обязательно прибегать к картинке. В правильности рассуждения, имеющего форму «Если A , то B , A ; следовательно, B » можно убедиться так: допустим, что рассуждение неправильное, т. е. возможен случай, когда посылки истинны, а заключение ложно. Но этого не может быть, так как при ложном B предложение «Если A , то B » истинно, только если A ложно. Значит, эта форма рассуждения правильная. Для рассуждения, имеющего форму «Если A , то B , B ; следовательно, A », легко показать, что при истинных посылах заключение может быть ложным: так будет при ложном A и истинном B (проверьте!).

А теперь таким же способом проверим более сложное, громоздкое рассуждение:

1. Если мама поедет в командировку, то Коля поедет в лагерь.
2. Мама поедет в командировку или в дом отдыха.
3. Если мама поедет в дом отдыха, то Лена поедет к бабушке.
4. Но Лена не поедет к бабушке.
5. Следовательно, Коля поедет в лагерь.

Выделим сначала форму этого рассуждения. Заменяя простые предложения, составляющие посылки и заключение, буквами, получим:

1. Если A , то B .

2. A или C .
3. Если C , то D .
4. Не D .
5. Следовательно, B .

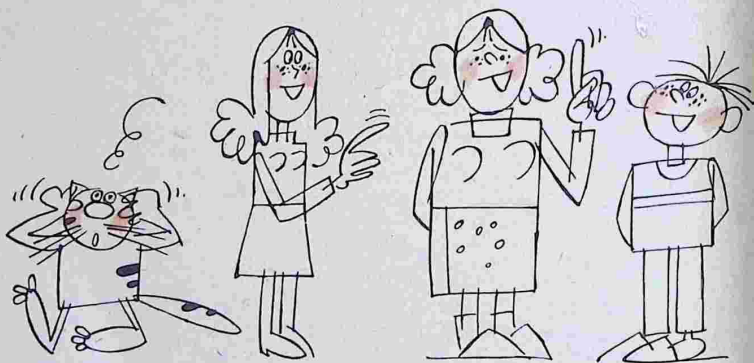
Допустим, что рассуждение неправильно, т. е. возможен случай, когда все посылки истинны, а заключение ложно. Для удобства запишем наше допущение с помощью таблицы и в эту же таблицу будем вносить следствия из этого допущения, указывая в скобках номера строк, из которых получено следствие.

№ строки	μ	λ
1	Если A , то B A или C Если C , то D Не D	B
2		
3		
4		
5		
6	C (2,6) D (3,7)	A (1,5)
7		D (4,8)
8		
9		

Но D не может быть одновременно истинным и ложным. Значит, наше допущение ложно: при истинных посылках заключение не может быть ложным. Итак, рассуждение правильное.

* * *

— Я думаю,— сказал Петя,— что сумею теперь отличить правильное рассуждение от неправильного. А то вчера мама сказала нам с Катей,





уходя на работу: «Если захотите после обеда пойти на каток, то вымойте сначала посуду». А Катя поела и говорит: «Не буду мыть посуду». «Почему это?» — возмутился я. «Да потому, что я не хочу на каток, значит, посуду могу не мыть — так мама сказала». Я не смог ей ничего возразить, вымыл посуду сам и пошел на каток. А сейчас я понимаю, что Катька меня перехитрила. Из посылок «Если хочешь на каток, то должна вымыть посуду» и «Не хочу на каток» не следует «не должна мыть посуду». Я же знаю теперь, что рассуждение, имеющее форму «Если A , то B , не A ; следовательно, не B », неправильное.

— А как вы думаете, — задал вопрос Митя, — правильно ли такое рассуждение: «Если ученик много занимается, то он успешно сдает экзамены. Ученик провалился на экзаменах. Значит, он занимался мало?»

— Конечно, нет, — не задумываясь, ответил Петя. — Заключение тут может быть ложным. Не исключено, что ученик занимался много, но на экзаменах разволновался или просто ему не повезло — вытащил билет, который не успел выучить.

— Нет, — сказала Катя, подумав, — это рассуждение правильное. Ведь оно имеет форму «Если A , то B , не B ; следовательно, не A ». Но заключение и вправду сомнительное. В чем же дело?

— А дело в том, — внушительно изрек Митя, — что правильное рассуждение есть способ получения истины лишь в том случае, когда мы исходим из истинных посылок. А в данном случае посылка «Если ученик много занимается, то он успешно сдает экзамены» не всегда истинна, а потому и заключение не всегда истинно. Поэтому если мы хотим путем рассуждения получить истину, то должны не только позаботиться о том, чтобы рассуждение было правильным, но и тщательно проверить истинность всех посылок. Если хоть одна посылка ложна, все искусно выстроенное и безупречно правильное рассуждение пойдет насмарку: заключение может оказаться как истинным, так и ложным, и мы, вообще говоря, не будем знать, каким именно.

Чтобы лучше осмыслить все, о чем мы говорили, подумайте над следующими вопросами и задачами:

1. Следует ли из первого предложения второе, следует ли из второго — первое?

- а) $x > 3$; $x > 5$.
- б) $|x| < 3$; $|x| < 5$.
- в) Сегодня понедельник; завтра вторник.
- г) Треугольник ABC равнобедренный; треугольник ABC равнобедренный.
- д) Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник; четырехугольник $ABCD$ — квадрат.
- е) Отрезки AB и CD равны; длины отрезков AB и CD равны.
- ж) Треугольники ABC и MNP равны; площади треугольников ABC и MNP равны.
- з) Коля пойдет в театр и в кино; Коля пойдет в театр или в кино.
- и) На контрольной каждую задачу решил по крайней мере один ученик; на контрольной по крайней мере один ученик решил все задачи.

2. Следует ли из теоремы Пифагора, что треугольник со сторонами: а) 3, 4, 5 прямоугольный; б) со сторонами 3, 4, 6 не прямоугольный?

3. Укажите все значения a , при которых из первого предложения следует второе:

- а) $x > a$; $x > 1$.
- б) $x^2 < 9$; $|x| < a$.
- в) $|x| > 3$; $|x| > a$.
- г) $x^2 - 5x + 6 < 0$; $x - a > 1$.

4. Следует ли из предложения $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$ предложение $x^3 - x = 0$ на множестве: а) натуральных чисел; б) целых чисел?

5. Задайте множество значений переменной так, чтобы на этом множестве из первого предложения следовало второе:
 x четно; x кратно 3.

6. Являются ли равносильными следующие предложения?

- а) $xy = 0$; $x = 0$ или $y = 0$.
- б) $x^2 + y^2 = 0$; $x = 0$ и $y = 0$.
- в) Неверно, что $x > 2$; $x < 2$.
- г) Неверно, что я пойду в кино и съезжу за город;
я не пойду в кино и не съезжу за город.

7. Родители сказали детям: «Если мы поедем в дом отдыха, то вы поедете в лагерь». В школе детей спросили, куда они поедут летом. «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха», — ответил Витя. Галя сказала: «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Нет, не так, — вмешался Коля. — Если мы не поедем в лагерь, то родители не поедут в дом отдыха». Чей ответ равносильен тому, что сказали родители? Кто из детей сказал разными словами одно и то же?

**ЕСЛИ Я — ЭТО Я, МЕНЯ
НЕ УКУСИТ СОБАКА МОЯ.
Она меня ВСТРЕТИТ,
Визжа у ворот, а если не я —
на куски РАЗОРВЕТ!**



8. В «Сказке о старушке» С. Я. Маршакa сказано:

...Пойду-ка домой, если я — это я,
Меня не укусит собака моя.
Она меня встретит визжа у ворот,
А если не я — на куски разорвет.

В окно постучалась старушка чуть свет,
Залаяла громко собака в ответ.
Старушка присела сама не своя.
И тихо сказала — ну, значит, не я.

Правильно ли рассуждала старушка? Почему ее заключение абсурдно?

9. Считая утверждения «В хоккей играют настоящие мужчины» и «Трус не играет в хоккей» посылкой и заключением правильного рассуждения, сформулируйте подразумеваемую вторую посылку. Проверьте правильность полученного рассуждения.

10. Из какой точки земного шара надо выйти, чтобы, пройдя 10 км по меридиану к югу, затем 10 км по параллели к востоку и, наконец, снова 10 км по меридиану к северу, прийти в точку отправления?

Коля предложил такое решение этой задачи: два меридиана имеют только две общие точки — полюсы, северный и южный; последний отпадает, так как из него нельзя двигаться на юг. Остается северный полюс в качестве единственного решения.

Правильно ли рассуждал Коля? Действительно ли эта задача имеет единственное решение?

Ответы и решения.

1. а) Нет; да; б) да; нет; в) да; да; г) нет; да; д) нет; да; е) да; да; ж) да; нет; з) да; нет; и) нет; да.

2. а) Нет; б) да.

3. а) $a \geq 1$; б) $a \geq 3$.

4. а) Да; б) нет.

5. Любое множество натуральных чисел, не содержащее четных чисел, не делящихся на 3. Например, $\{1, 3, 6\}$.

6. а) Да; б) да; в) нет: при $x=2$ первое предположение истинно, а второе ложно; г) нет: предположения станут равносильными, если в одном из них «и» заменить на «или».

7. Ответ Коли; Витя и Галя.

9. Настоящий мужчина — не трус. Рассуждение имеет форму «Если A , то B ; если B , то C . Следовательно, если C , то не A » и является правильным.

10. Рассуждение правильное. Однако ложная посылка привела к ложному заключению. Единственности решения. Ложность посылки заключается в предположении, что первый и последний участки пути могут лежать только на различных меридианах. Рассмотрите случаи совпадения первого и последнего участков пути и найдите все решения.

ИСТОРИЯ ПЯТАЯ (Кое-что о доказательствах)

Вечером Петя с Митей играли в «Эрудит».

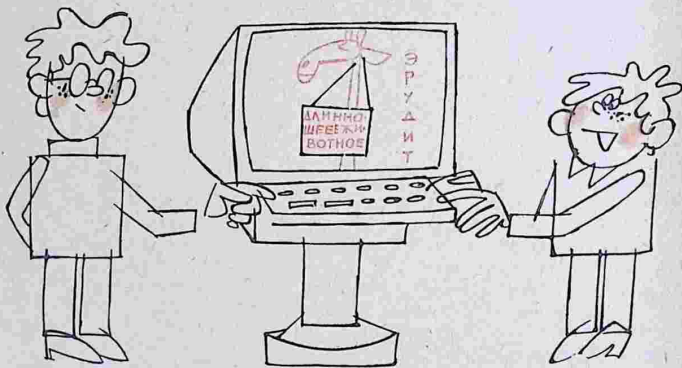
— Как ты думаешь, — спросил Петя друга, — могут быть в слове три одинаковые гласные подряд?

— Конечно, — ответил Митя, — и я могу это доказать.

— Доказать? — удивился Петя. — Как это?

— А очень просто, — засмеялся Митя, — знаешь такое животное — жирафа? Чем оно отличается? А тем, что длиннее. В слове «длиннее» три «е» подряд. Я привел пример — вот тебе и доказательство.

— Доказательство? — недоверчиво переспросил Петя. — А почему же, когда нужно было доказать, что сумма двух нечетных чисел — число четное,



и я привел пример $3+5=8$, Мария Ивановна сказала, что это вовсе не доказательство.

— А потому, — сказал Митя, — что надо разбираться, когда пример может служить доказательством, а когда нет. Если надо доказать, что существует какой-то объект с заданными свойствами, достаточно привести пример такого объекта. Например, чтобы доказать, что уравнение $x^{135} + x^{118} - 2 = 0$ имеет корень, иначе говоря, что существует число, удовлетворяющее этому уравнению, достаточно заметить, что таким числом является 1. А теперь вспомним, как мы в геометрии доказывали существование прямой, параллельной данной. Показывали, как построить такую прямую, и этим все было доказано. Точно так же мы поступали и при доказательстве существования прямой, перпендикулярной данной.

— Так просто? — удивился Петя. — Но мне помнится, что доказательство теоремы о прямой, перпендикулярной данной, было длинным и трудным; я никак не мог его запомнить.

— Это потому, — заметил Митя, — что эта планиметрическая теорема утверждает не только существование перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку, но и единственность такого перпендикуляра. А единственность с помощью примера не докажешь. Как правило, единственность доказывается рассуждением от противного: допуская, что «не один», а «два или более», и выясняем, что из этого допущения следует какая-нибудь чепуха (абсурд, противоречие), на основании чего делаем вывод, что «более одного» быть не может. Так, например, допустив, что через точку на прямой можно провести два перпендикуляра к этой прямой, получаем противоречие с аксиомой «От данной полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить только один угол с заданной градусной мерой».

— Я понял, — обрадовался Петя. — Существование можно доказать указанием или построением примера. Спрашивается: существует ли? Ответаем: существует, вот он, полюбуйтесь, пожалуйста. А вот единственность так просто не докажешь; тут надо исхитриться — доказывать от противного. Ну-ка дай мне какую-нибудь задачу на доказательство существования и единственности, а я попробую ее решить.

— Пожалуйста, — сказал Митя. — Докажи, что для каждой точки плоскости существует точка, ей симметричная относительно данной прямой, и притом единственная.

Петя взялся за работу.

— Сначала докажем существование такой точки. Я знаю, что точки, симметричные относительно данной прямой, лежат на одном перпендикуляре к ней, по разные стороны и на равных расстояниях от нее. Проведу через данную точку A прямую b , перпендикулярную прямой a , отложу от точки O пересечения прямых a и b на луче, дополнительном к лучу OA , отрезок OA' , равный OA . Точка A' симметрична точке A относительно прямой a . Я показал, как можно построить точку A' , и тем самым доказал ее существование. Докажем теперь ее единственность. Предположим, что такая точка — не единственная, т. е. что существует точка A'' (отличная от A'), симметричная точке A относительно прямой a . Если A'' лежит на прямой b , то на полупрямой OA' от точки O отложены два различных отрезка одной и той же длины, что противоречит аксиоме «На любой полупрямой от ее начальной

точки можно отложить только один отрезок заданной длины». Если точка A'' не лежит на прямой b , то выходит, что через точку A к прямой a проведены две перпендикулярные прямые AA' и AA'' , что противоречит теореме единственности перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку. Куда ни кинь — везде клин. Так что допущение о существовании двух точек A' и A'' , симметричных точке A относительно прямой a , с необходимостью приводит к абсурдным следствиям, и мы должны от него отказаться. Тем самым доказана единственность точки, симметричной данной точке относительно заданной прямой.

— Молодец, — похвалил друга Митя, — аккуратно провел доказательство от противного. Правда, в этом случае можно было бы доказать единственность и впрямую, заметив, что результат каждого шага построения точки, симметричной данной относительно данной прямой, может быть только единственным:

1) через точку A к прямой a можно провести **только один** перпендикуляр;

2) от точки O на луче OA' можно провести **только один** отрезок данной длины.

— А что, с помощью примера можно доказывать только утверждения о существовании? — осведомился Петя.

— В общем да, — ответил Митя. — Правда, иногда эти утверждения впрямую говорят не о существовании объекта, а о том, что не всякий объект из данного класса обладает заданными свойствами. Например: «Не всякий четырехугольник с перпендикулярными диагоналями — ромб». Но это все равно, что сказать: «Существует четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, который не является ромбом». Вообще любое утверждение типа «Не все x обладают свойством P » можно переформулировать в виде «Сущест-



ует x , не обладающий свойством P », т. е. свести к утверждению о существовании объекта с данным свойством, а значит, и доказать с помощью примера. В частности, с помощью примера доказываются предложения о неединственности. Докажем так утверждение, что в пространстве (в отличие от плоскости) через любую точку прямой можно провести не единственную прямую, ей перпендикулярную: через данную прямую проведем две плоскости; в каждой из них через данную точку проведем прямую, перпендикулярную данной.

— Как интересно получается, — подытожил сказанное другом Петя. — С помощью примера можно доказать существование и неединственность. Единственность удобно доказывать от противного. А как быть с несуществованием? Такие утверждения, наверное, тоже бывают?

— Как же, конечно, и такие бывают. Давай-ка попробуем доказать, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, иначе говоря, что не существует действительного числа, удовлетворяющего этому уравнению. Пример тут, очевидно, ничего не доказывает. Если предположить «противное» тому, что требуется доказать, т. е. что существует такое действительное число m , которое является корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$, то получим абсурдное равенство $m^2 = -1$ (известно же, что квадрат любого действительного числа неотрицателен!). Итак, с помощью примера доказываются существование и неединственность, а единственность и несуществование чаще всего бывает удобно доказывать от противного.

— Ну вот, — сказал Петя, — теперь я хоть буду знать, как в этих случаях подступиться к доказательству, с чего начать. Но таких теорем и задач не так уж много. А как быть во всех других случаях? Учучу теоремы, а как останусь один на один с задачей на доказательство, не знаю, что с ней делать. То ли попытаться доказывать впрямую, то ли от противного? Как нащупать идею доказательства, за какую ниточку ухватиться?

— Для того чтобы научиться хорошо плавать, надо побольше тренироваться, а чтобы научиться не плавать, решая задачи на доказательство, тоже надо побольше тренироваться, — пошутил Митя. — Однако тренировки тренировками, а советы тренера, как стартовать, какие делать движения, тоже очень помогают. Так вот, учась доказывать, полезно иметь в виду следующее. Прямое доказательство теоремы вида «Если A , то B » — это путь от ее условия A к заключению B , пройдя который мы можем утверждать, что B следует из A . На этом пути расставляются «столбы» — утверждения $M_1, M_2, \dots, M_n$ так, что M_1 следует из A , M_2 — из M_1 и т. д., пока не дойдем до M_n , из которого следует B . Получаем цепочку $A \Rightarrow M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow M_n \Rightarrow B$, (значок « $\Rightarrow$ » заменяет слово «следует»), откуда делаем вывод, что из A следует B , что и требовалось доказать. Например, доказательство теоремы «Если углы вертикальные, то они равны» представляет собой цепочку: $(\angle(a_1b_1) \text{ и } \angle(a_2b_2) \text{ — вертикальные углы}) \Rightarrow (\angle(a_1b_2) \text{ и } \angle(a_1b_1) \text{ — смежные углы, а также } \angle(a_1b_2) \text{ и } \angle(a_2b_2) \text{ смежные углы}) \Rightarrow (\angle(a_1b_2) + \angle(a_1b_1) = 180^\circ \text{ и } \angle(a_1b_2) + \angle(a_2b_2) = 180^\circ \Rightarrow (\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2))$ (см. рис. 9).

Каждый член цепочки, начиная со второго, есть следствие из предыдущего, который для него является посылкой или основанием.

Чтобы нащупать путь доказательства утверждения вида «Если A , то B », надо просмотреть следствия из A и выбрать то, которое является посылкой M_1 для B , либо посылкой для посылки M_2 для B , либо...

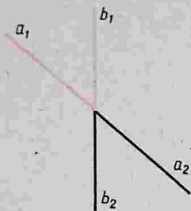


Рис. 9

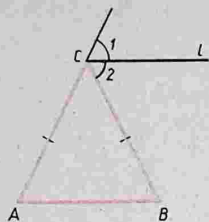


Рис. 10

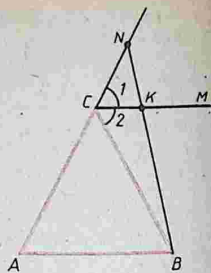


Рис. 11

Таким образом, приступая к поиску доказательства, ты оказываешься в положении шахматиста, просматривающего возможные последовательности ходов и выбирающего ту из них, которая ведет к цели. Однако тебе несравненно легче, чем шахматисту: у тебя нет противника, который неожиданным встречным ходом может перепутать твои планы. Так что не унывай: если уж ты научился прилично играть в шахматы, то и решать задачи на доказательство научишься. Давай-ка для начала решим одну задачу вместе. Пусть, например, надо доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию. Сделаем рисунок, отметим на нем то, что дано: $AC = CB$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 10). Что из этого следует? Да много чего. Например, что $\angle A = \angle B$, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ$. Какие же следствия надо выбрать, чтобы сделать шаг на пути доказательства утверждения $l \parallel AB$?

Чтобы помочь себе в поисках этого шага, сделаем шаг навстречу: подумаем, каким может быть предпоследнее звено цепочки доказательства, помня, что из него должна следовать параллельность l и AB . Ты знаешь, что параллельность прямых можно доказать, доказав равенство внутренних накрест лежащих углов либо равенство 180° суммы внутренних односторонних углов. Значит, достаточно доказать, например, что $\angle 2 = \angle B$. Запишем это: $\angle 2 = \angle B \Rightarrow l \parallel AB$. Сопоставим теперь предполагаемый конец цепочки доказательства с ее возможными началами и попытаемся найти соединяющие их звенья. Будем искать их сразу с двух концов. Чтобы $\angle B$ был равен $\angle 2$, достаточно равенства $\angle A + \angle B = \angle 1 + \angle 2$, так как $\angle A = \angle B$ и $\angle 1 = \angle 2$; таким образом, найдено еще одно возможное звено цепочки «с конца»:

$$\angle A + \angle B = \angle 1 + \angle 2 \Rightarrow \angle B = \angle 2 \Rightarrow l \parallel AB.$$

Основание для равенства $\angle A + \angle B = \angle 1 + \angle 2$ почти очевидно: $\angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ$ и $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, откуда $\angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B$. Итак, доказательство выстроено.

$$\left. \begin{aligned} \angle 1 + \angle 2 + \angle C &= 180^\circ, \\ \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle 2 = \angle B \text{ (так как } \angle 1 = \angle 2 \text{ и } \angle A = \angle B) \Rightarrow l \parallel AB.$$

Попытки наведения моста сразу с двух сторон — от «дано» и от «требуется доказать» — очень помогают в поиске доказательства. Таков самый общий совет «тренера по доказательствам».

В комнату вошла Катя.

— Покажите-ка, чем вы тут занимаетесь, — сказала она, заглядывая в исписанный друзьями листок. — И это, по-вашему, доказательство? А откуда вы знаете, что углы 2 и B накрест лежащие? Из чертежа? Но ссылка на чертеж в доказательстве не допускается. Надо доказать это логически.

— Ты совершенно права, — примирительно сказал Митя, — но я специально на эту тонкость не обратил внимания, чтобы не отвлекаться от темы нашего разговора с Петей: как найти основную, главную линию доказательства. А когда такая линия найдена и доказательство «в грубом виде» проведено, надо проверить, не осталось ли что-нибудь необоснованным, принятым на глазок, и, если окажется, что это так и есть, дополнить доказательство необходимыми деталями, довести его до логического совершенства.

В данном случае надо обосновать, что угол 2 и угол B внутренние накрест лежащие при прямых l и AB и секущей CB . Для этого достаточно указать две точки на лучах CM и BA соответственно, которые лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CB (см. рис. 11).

Биссектриса угла CB проходит между сторонами этого угла и, следовательно, пересекает отрезок BN с концами на сторонах этого угла в некоторой точке K . Точки A и N лежат по разные стороны от прямой BC , так как эта прямая пересекает отрезок MN . Точки N и K лежат по одну сторону от прямой BC , так как прямая BC не пересекает отрезок MK (она пересекает прямую MK в точке B , не принадлежащей отрезку MK). Значит, точки A и K лежат по разные стороны от прямой CB , т. е. углы MCB и CBA внутренние накрест лежащие.

— Ну теперь, Катерина, ты довольна? — спросил Петя сестру, отдуваясь после столь напряженной умственной работы.

— Ну, как сказать, — отвечала Катя. — Надо было объяснить поподробнее. Например, почему точка B не принадлежит отрезку MK ? Да ладно уж, додумаю сама.

И Вы, дорогой читатель, тоже подумайте над этим вопросом, а заодно и над тем, почему биссектриса угла пересекает любой отрезок с концами на сторонах этого угла и почему мы можем «складывать» углы.

— На сегодня хватит, а завтра мы, если хотим, потолкуем еще немного о доказательствах, — предложил ребятам Митя.

На следующий вечер, когда все трое собрались вместе, Митя предложил продолжить разговор о доказательствах от противного. Друзья рассказали Кате о том, что накануне обсудили без нее: о роли примеров и рассуждений от противного в доказательствах существования и единственности.

— Вообще говоря, — заметил Митя, — всегда можно, если доказательство впрямую почему-нибудь не идет, попытаться прибегнуть к доказательству от противного. Давайте разберемся, на чем оно основано. Помните, мы с вами говорили об отрицаниях предложений (см. историю третью)? Если предложение истинно, то его отрицание ложно, а если предложение ложно, то его отрицание истинно. Предложения P и не P являются отрицаниями

**Я —
НАИБОЛЬШЕЕ
ПРОСТОЕ**



число!

**ТЫ НЕ
СУЩЕСТВУЕШЬ!**



друг друга. Если одно из них истинно, то второе ложно. Значит, вместо того чтобы доказывать истинность **P**, можно доказать ложность **не P**. В этом и состоит доказательство от противного. Таким способом еще в III в. до н. э. грек Евклид доказал, что не существует наибольшего простого числа. Предположив, что такое число p_n существует, он построил число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, где $p_1, p_2, \dots$ — простые числа, предшествующие p_n . Число p не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ (в остатке всегда будет единица), а значит, либо оно само простое, либо делится на простое число q , большее чем p_n . Полученное противоречие (p_n — наибольшее простое число и одновременно либо p , либо q — простое число, большее p_n) доказывает ложность сделанного допущения и тем самым истинность утверждения **Наибольшее простое число не существует**.

— Удивительное доказательство, не правда ли? — сказал Митя. — А теперь я хочу предложить каждому из вас самостоятельно решить такую задачу: «Доказать, что число 17 не является корнем уравнения $131x^5 + 73x^4 + 1023x^3 + 19x^2 + 81x - 1000 = 0$. Ну-ка, кто скорее решит?»

Петя и Катя расселись по разным углам и принялись за работу. Через минуту Катя торжествующе сообщила, что у нее все готово, чему Петя очень удивился: он только-только успел 17 в куб возвести и мысленно сокрушался, что предстоит еще так много подсчетов, а под рукой нет калькулятора.

— Да ты что, чудака, стал впрямую проверять, удовлетворяет ли число 17 этому ужасному уравнению? — засмеялась Катя. — Так тебе до завтра работы хватит. Надо рассуждать от противного.

Допустим, что 17 — корень этого уравнения, т. е. что

$$131 \cdot 17^5 + 73 \cdot 17^4 + 1023 \cdot 17^3 + 19 \cdot 17^2 + 81 \cdot 17 = 1000.$$

Но тогда 1000 делится на 17, что неверно, значит, и наше допущение неверно. Вот и все.

— Надо же, как просто, — подумал Петя, — а я не сообразил.

— Ну, не огорчайся, — сказал Митя, — и попробуй-ка доказать, что хотя бы у двоих учеников твоей школы совпадают месяц и день рождения.

Петя подумал, что ни у кого из его друзей дни рождения, слава богу, не совпадают, так что доказать это утверждение существования примером ему не удастся. А не попробовать ли порассуждать от противного? Допустим, что ни у кого из учеников нашей школы день и месяц рождения не совпадают. Но тогда в году должно быть не 365 (или 366) дней, а по меньшей мере 1200 — столько, сколько у нас в школе учится ребят. Эта нелепость и доказывает, что отрицание исходного утверждения ложно, а само оно истинно.

— Молодец, — сказал Митя. — Таким же рассуждением можно доказать, например, что в нашем городе есть по крайней мере двое людей с одинаковым числом волос на голове (не считая лысых, конечно!), а также многое другое.

Петя, польщенный похвалой друга, хотел было позвать всех пить чай, но Кате, как всегда, захотелось, чтобы последнее слово осталось за ней.

— Вот ты, Митя, говоришь, что доказать от противного — значит установить ложность отрицания доказываемого предложения. А вот Мария Ивановна назвала, помню, доказательством от противного совсем другое рассуждение: надо было доказать, что если число n^2 нечетно, то n тоже нечетно, а мы вместо этого доказывали, что если n четно, то и n^2 четно.

— Все правильно, — сказал Митя. — Мы с вами выяснили как-то (см. историю четвертую), что предложение «Если A , то B » равносильно предложению «Если не B , то не A », т. е. такие предложения либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Значит, вместо того чтобы доказывать предложение «Если A , то B », можно доказывать предложение «Если не B , то не A », что вы и сделали, по-видимому, так: если n четно, то $n = 2k$, а тогда $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, т. е. n^2 четно. А теперь я постараюсь убедить вас, что вы действительно провели самое настоящее доказательство от противного. Вы предположили, что при n нечетном n^2 четно (A и не B), и получили противоречие: n^2 нечетно и n^2 четно (A и не A). Тем самым вы доказали ложность отрицания доказываемого предложения, т. е. провели самое настоящее доказательство от противного. В данном случае получено противоречие с условием теоремы ($\bar{A}$), в других случаях это может быть противоречие с аксиомой или ранее доказанной теоремой.

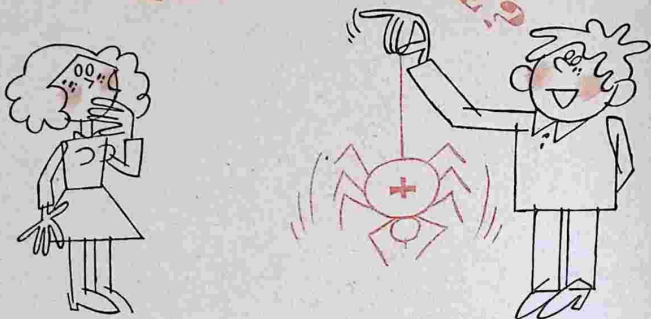
— А почему, — спросил Петя, — противоречие, вытекающее из некоторого предложения, говорит о его ложности?

— А ты забыл, — ответил Митя, — что если из предложения A следует предложение B и B ложно, то A может быть только ложным (см. историю четвертую).

Через несколько дней после разговора о доказательствах к Мите пришел очень довольный собой Петя и сообщил, что получил две пятерки за доказательства: одну — по русскому языку, а другую — по зоологии.

На уроке русского языка ему надо было доказать правильность мысли, высказанной А. М. Горьким в 1931 г.: «Новые слова будут возникать и впредь». Значит, надо доказать, что существуют слова, которых не было в 1931 г., а для этого достаточно привести хотя бы один пример. После недолгого

НАСЕКОМОЕ?



раздумья он нашел такой пример: *луноход*. Учительница похвалила Петю.

На уроке зоологии Катя назвала паука насекомым. Петя доказал, что Катя ошиблась, с помощью такого рассуждения: «Допустим, что паук — насекомое. Тогда у паука, как у всякого насекомого, должно быть 6 ног, а на самом деле у него 8 ног. Значит, паук не насекомое». Кате очень хотелось поспорить с братом, но возразить было нечего.

— Вот видишь, — сказал Митя, — как полезно уметь доказывать. Это тебе еще не раз пригодится в жизни.

* * *

А сейчас давайте немного поупражняемся в столь нужном деле.

1. Докажите, что уравнение $2^x - \cos x = 0$ имеет корень.
2. Докажите, что не всякий четырехугольник с перпендикулярными диагоналями — ромб.
3. Докажите, что не существует числа, которое при делении на 15 дает в остатке 3, а при делении на 5 дает в остатке 1.
4. Докажите, что 3,5,7 — единственная тройка последовательных нечетных чисел, каждое из которых простое.
5. Докажите, что существует окружность, касающаяся каждой из трех попарно пересекающихся прямых, и притом не единственная.
6. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что одна из точек пересечения этих окружностей лежит на гипотенузе треугольника.

7. Если число $\frac{2t}{1+t^2}$ иррациональное, то число t иррациональное. Докажите.

8. Докажите, что прямоугольник с целочисленными сторонами и диагональю, длина которой — нечетное число, не является квадратом.

9. Оле k лет, Коле m лет, Толе n лет. Докажите, что, по меньшей мере, двое из них — ровесники, если известно, что биссектриса внешнего угла треугольника со сторонами k , m и n параллельна его стороне.

10. В КВН участвовали три седьмых класса, в каждом из которых более 30 учеников. Исполнитель номера «Угадывание мыслей на расстоянии» Миша предложил каждому участнику задумать двузначное число, записать его на бумажке и передать свернутую бумажку жюри (в составе которого были Оля и Коля). Когда это было сделано, Миша объявил, что среди задуманных чисел хотя бы два одинаковые. Коля стал было разворачивать записочки с числами, но Оля остановила его, резонно заметив, что истинность сказанного Мишей можно доказать и не заглядывая в бумажки. Проведите это доказательство.

11. Является ли предложение «Жужжат шмели и пчелы» распространенным? Докажите правильность ответа, рассуждая от противного.

12. Докажите, что Каспийское море — не море.

Ответы, указания, решения.

1. Число 0 является корнем этого уравнения.

2. Постройте четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, не являющийся ромбом.

3. Допустим, что такое число M существует, т. е. $M = 15k + 3$ и $M = 5n + 1$, откуда $15k + 3 = 5n + 1$ и $5(n - 3k) = 2$, что невозможно, так как 2 не кратно 5.

4. Допустим, что существует другая тройка последовательных нечетных и одновременно простых чисел: n , $n + 2$ и $n + 4$. Меньшее из них не равно 3, а значит, не делится на 3, т. е. может быть представлено как $3k + 1$ либо как $3k + 2$. Но тогда либо $n + 2$, либо $n + 4$ делится на 3, т. е. не является простым, что противоречит нашему допущению.

5. Такой окружностью является окружность, вписанная в треугольник, образуемый данными прямыми, а также любая из трех внеписанных окружностей, касающихся одной из сторон треугольника и продолжений двух других. Постройте вписанную и внеписанную окружности.

6. Допустив, что верно отрицание этого утверждения, приходим к противоречию с теоремой о единственности перпендикуляра, проведенного к данной прямой через данную точку (рис. 12).

7. Докажите утверждение, обратное проти-

положное данному: «Если t — число рациональное, то $\frac{2t}{1+t^2}$ — число рациональное».

8. Допущение, что такой прямоугольник — квадрат, приводит к противоречию «Четное число равно нечетному».

9. Подумайте, какое свойство треугольника является основанием для утверждения, что по крайней мере двое из детей ровесники. Выведите это свойство из условия «Биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне».

10. Допустим, что все числа, задуманные ребятами, разные. Отсюда следует, что различных двузначных чисел более 90, а это противоречит известному факту, что двузначных чисел ровно 90. Значит, допущение ложно, а Миша заведомо прав.

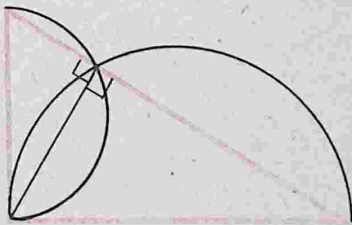


Рис. 12

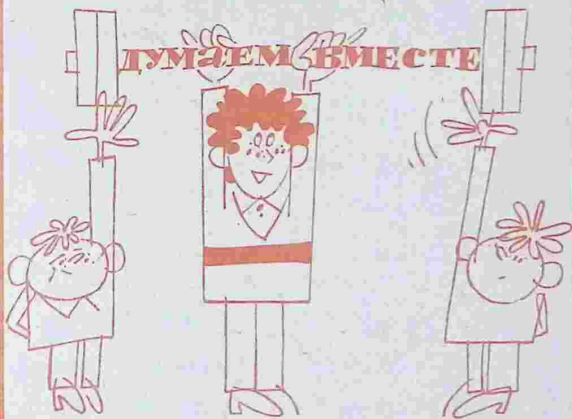
11. Вспомните, какое предложение называется «Море — это часть океана, более или менее распространенным. отделенная от него сушей или подводными порогам, поднятиями дна».
12. Определение моря из учебника географии:

* * *

Дорогой читатель! Вместе с Петей и Катей ты получил некоторые представления о том, что такое правильные рассуждения. Но речь в основном шла о так называемых дедуктивных рассуждениях, которые позволяют из истинных посылок всегда получать истинные заключения. Однако в науке, да и в жизни, нельзя обойтись одними только дедуктивными рассуждениями. Они полезны, когда надо обосновать гипотезу, проверить догадку, вывести следствия из известных посылок. Но сами догадки и гипотезы возникают в результате рассуждений другого рода — индуктивных, по аналогии и других, так называемых правдоподобных, рассуждений. Правдоподобные рассуждения в отличие от дедуктивных не приводят с гарантией к истинам, в той или иной степени заранее известным, но зато позволяют нашупывать совсем новые истины, догадываться о ранее неизвестных фактах. Правдоподобные рассуждения не подчиняются жестким правилам. Умение проводить их с пользой — своего рода искусство, приобретаемое в результате опыта. Ты, читатель, конечно, уже имеешь некоторый опыт проведения как правдоподобных, так и дедуктивных рассуждений. Чтение второй части книги даст тебе возможность обогатить этот опыт путем знакомства с образцами рассуждений, а также в ходе самостоятельного их проведения при выполнении упражнений.

часть 2

ДУМАЕМ ВМЕСТЕ



РАССУЖДАЕМ И ДОКАЗЫВАЕМ

СОВСЕМ МАЛЕНЬКАЯ НЕТОЧНОСТЬ (VI—VII классы)

Однажды мне довелось быть свидетелем интересного спора о том, что такое биссектриса угла. Было это на занятии математического кружка, руководил которым Петр Иванович, учитель математики.

Казалось бы, что такое биссектриса угла — знает каждый. Что тут сложного? Однако, оказывается, просто знать — это одно, а вот использовать знание, применять его в деле — это другое. Многие считают, что если человек не может применить свои знания, то это все равно, что их у него нет.

Для того чтобы достичь единства знаний и умений их применять, ох как много надо поработать! Эту работу я и увидел на кружке Петра Ивановича. Надо сказать, что Петру Ивановичу сильно повезло: старостой его кружка был очень толковый ученик Степа Мошкин. Впрочем, Степе тоже повезло с учителем математики. Не могу сказать, кому повезло больше. Будем считать — обоим.

Впрочем, простите, я отвлекся. Расскажу все по порядку.

Я сидел в классе и перечитывал запись на доске: *«Наш Фома обладает некоторым свойством. Некто обладает тем же свойством. Следует ли из этого, что этот некто и есть наш Фома?»* Кстати, а как думаете вы? Этот некто — наш Фома или не обязательно он? Я невольно вслушивался в разговор ожидавших начала занятия кружковцев. Скоро он меня так увлек, что я стал его кратко записывать.

Ваня Синицын (*обращается к Андрею Веселому*). Андрей, у меня сегодня день рождения. Подари мне что-нибудь математическое.

Андрей Веселый. Я дарю тебе с большой радостью биссектрису угла. Ваня Синицын. Спасибо. А знаешь ли ты, что такое биссектриса угла?

Андрей Веселый. Биссектриса угла? Биссектриса угла — это... Это всякий знает!..

Саша Смышленный (*присоединяется к разговору*). Биссектриса угла — это прямая...

Андрей Веселый (*перебивая*). Это прямая, равноотстоящая от сторон угла!

Оля Серьезная. По-моему, не прямая, а луч. Остальное верно.

Степа. Знаете, Петр Иванович, надо, чтобы договоренность была обшей. А то мы не будем понимать друг друга.

Ваня. Да, да! А то мне скажут: положи в суп побольше картошки, а я под картошкой разумею, например, свеклу. Что тогда?

Петр Иванович. Вы правы. Прошлые наши занятия не пропали даром. Давайте договоримся.

Оля. Раз мы помним, что в учебнике под биссектрисой угла понимается луч, то и нам надо так считать. А то придется писать другой учебник.

Степа. Договорились: биссектриса угла — луч. Но какой? Где его начальная точка?

Оля. Этот луч должен исходить из вершины угла. Его начальной точкой должна быть вершина! Тогда мое определение будет таким: б и с с е к т р и с а угла — это луч, исходящий из вершины угла и равноотстоящий от его сторон

Степа. И все-таки тут что-то не так... В учебнике сказано как-то иначе.

Ваня. Я уверен, что если пользоваться определением из учебника, то биссектриса угла равноудалена от его сторон. И исходит из вершины.

Саша (смотрит на запись на доске: «Наш Фома обладает некоторым свойством. Некто обладает тем же свойством. Следует ли из этого, что этот некто и есть наш Фома?»). Фома! Это же Фома!

Все, за исключением Петра Ивановича, смотрят с недоумением.

Саша. Да читайте же про Фому.

Все читают. Степа Мошкин радостно хватает себя за голову.

Степа. Правильно! Фома — это та биссектриса, о которой говорится в учебнике.

Саша. Да, да! А Олина биссектриса — это некто!

Таня. Значит, Олина биссектриса обладает свойством настоящей биссектрисы из учебника... Как и та, она одинаково удалена от сторон угла.

Ваня. Вот именно. Свекла тоже обладает некоторыми свойствами картошки: растет в земле, употребляется в пищу. И все-таки не является картошкой.

Лена. Разве существует фигура, которая была бы не биссектрисой и была одинаково удалена от сторон угла?

Установилась тишина. Петр Иванович терпеливо ждал.

Саша. Биссектриса равноудалена от сторон угла... Мы говорим эти слова, а понимаем ли, что они значат? Биссектриса — это луч. Стороны угла тоже лучи. Получаем один луч на одинаковом расстоянии от двух других лучей. А что такое — расстояние от луча до луча? Мы ведь этого не знаем.

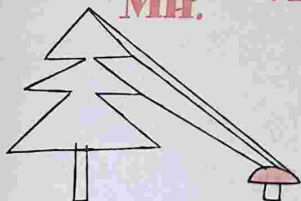
Андрей. Выходит, мы говорим о том, чего не знаем!

Петр Иванович. Правильно. Вы этого не знаете. Но давайте разберемся. Лучи — это геометрические фигуры. Рассмотрим, что такое расстояние от фигуры до фигуры. Пусть имеются две какие-то фигуры. Представьте все такие отрезки, один конец каждого из которых принадлежит одной фигуре, а второй — другой. Длина самого короткого из них и есть расстояние между фигурами.

Лена. А если все такие отрезки равные?

Петр Иванович. Тогда длина любого из них и принимается за расстояние между фигурами.

Длина самого короткого из отрезков и есть расстояние между фигура- ми.



Т а н я. А тогда чему же равно расстояние между сторонами угла?.. Оно равно... нулю?

Л е н а. Правильно! Вершина угла принадлежит как первой стороне, так и второй, как первой фигуре, так и второй фигуре. Это означает, что расстояние между фигурами равно нулю. Меньше нуля расстояние не бывает!

А н д р е й. Но погодите... Вершина угла — это точка, а расстояние — отрезок. Но где же наименьший отрезок, один конец которого принадлежит одной стороне, а второй конец — другой стороне? В этом случае самого короткого отрезка нет!

П е т р И в а н о в и ч. На этот случай договоримся. Будем считать, что если концы отрезка совпали, то отрезок «выродился» в точку, а длина его равна нулю.

С т е п а. Так, так, так... Значит, биссектриса угла удалена от одной стороны угла на нулевое расстояние и от другой стороны на нулевое расстояние. Значит, она одинаково удалена от сторон угла! Интересно. Теперь я все понял.

В а н я. Что же получается? Любой луч, исходящий из вершины угла, от той и другой его стороны удален на одно и то же расстояние — нуль. Тогда, Оля Серьезная, ты должна по своему определению всякий луч, исходящий из вершины угла, считать его биссектрисой! Ведь по твоему определению биссектриса угла — это луч, исходящий из его вершины и равноотстоящий от его сторон!

С а ш а. По Олиному определению и каждая сторона угла есть биссектриса этого угла! От себя она — на расстоянии нуль, от другой стороны — тоже. Значит, сторона угла равноудалена от его сторон. Поскольку сторона угла — это луч, то по Олиному определению она является биссектрисой угла.

Кружковцы зашумели. Считать сторону угла его биссектрисой — это уж слишком!

Андрей. Нам уже ясно, что Олино определение биссектрисы не такое, как в учебнике. И оно нам всем не нравится, потому что приводит к странностям. Например, к такой странности: биссектрис у всякого угла бесконечно много. Но каково же определение в учебнике? Давайте заглянем!

Принесли учебник. Листают его.

Оля. Вот оно, определение. *Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам.*

Андрей. Ну вот, допустили совсем маленькую неточность! А сколько неприятностей!

Степа. Ничего себе «маленькая»!

Петр Иванович. **Язык математики должен быть точным. Всякое его искажение, любая маленькая неточность разрушают логику рассуждений. А что за математика без логики?**

Саша. Да, к определениям нужно относиться бережно. Иначе будем говорить на разных языках.

Ваня. Один будет говорить о моркови, другой будет иметь в виду свеклу.

Лена. Если некто обладает каким-нибудь свойством Фомы, то это не значит, что можно считать его Фомой! Всякий луч, исходящий из вершины угла, обладает двумя свойствами биссектрисы: является лучом и равноудален от сторон угла. Однако это еще не означает, что всякий такой луч есть биссектриса угла. Теперь мне это так ясно!

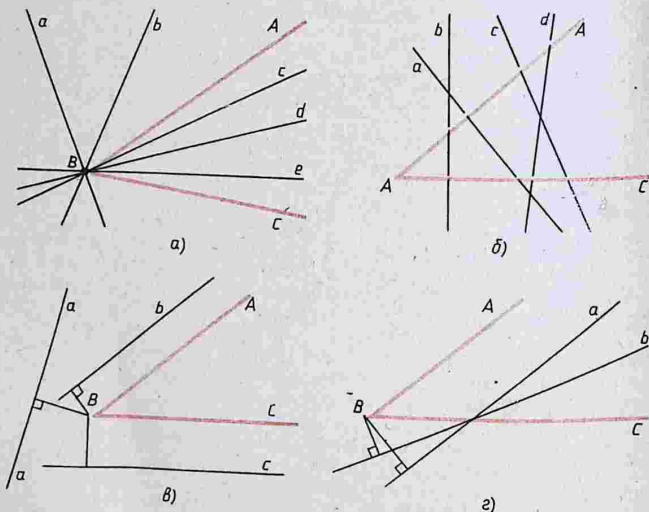


Рис. 14

В заключение Петр Иванович предложил для домашнего решения следующую задачу:

Задача. Дан угол. Исследуйте, какие прямые на плоскости равноудалены от сторон угла, какие нет.

Петр Иванович. Можете пообсуждать сейчас друг с другом, как решается задача.

По команде Степы кружковцы хором произносят: «Если некто обладает каким-нибудь свойством Фомы, то это еще не означает, что он — Фома!»

О т в е т.

Всякая прямая, проходящая через вершину угла, равноудалена от его сторон (рис. 14, а). Всякая прямая, пересекающая обе стороны угла, также равноудалена от сторон угла, так как расстояние от этой прямой до каждой из сторон равно нулю (рис. 14, б). Всякая прямая, не пересекающая ни одну из сторон угла и не проходящая через его вершину, также равноудалена от сторон угла. Расстояние от такой прямой до сторон равно длине перпендикуляра, опущенного из вершин угла на эту прямую (рис. 14, в). Если прямая пересекает одну из сторон угла, а другую сторону не пере-

секает (рис. 14, г), то расстояние от этой прямой до пересекаемой стороны равно нулю, а до непересекаемой стороны больше нуля. В этом случае прямая не равноудалена от сторон угла.

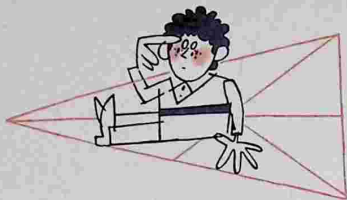
Приведенный ответ дан для неразвернутого угла. Если угол развернутый, то случай б) отпадает, остальные случаи сохраняются, несколько видоизменяясь. Например, случай в) переходит в случай, когда прямые параллельны прямой, содержащей стороны развернутого угла.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СНЫ СТЕПЫ МОШКИНА (VI—VIII классы)

После только что описанной истории с определением биссектрисы угла на занятии математического кружка, когда, казалось бы, маленькая неточность привела к столь неожиданным последствиям, Степа Мошкин, староста кружка, сильно задумался.

— Как же, оказывается, мы до сих пор легкомысленно относимся к определениям! Даже стыдно перед Петром Ивановичем, а еще больше перед самим собой. Неудобно. Говорим о математических понятиях всякую нелепицу и считаем это вполне приличным. А ведь, кроме биссектрисы угла, есть еще биссектриса треугольника. Какая между ними разница? Или разницы никакой? И раз уж я упомянул треугольник, то надо говорить и о его медианах, о его высоте. Возьмусь-ка я за учебник да пересмотрю весь этот материал. Вреда от этого не будет, а польза несомненна.

И Степа начал перечитывать, заново обдумывать то, что написано в учебнике. Он рисовал, рассматривал разные, кажущиеся ему подозрительными (а понимает ли он, что тут получается?) случаи. Постепенно он так увлекся этой работой, что думал о геометрии угла и треугольника даже по ночам. Иногда он путал, о чем додумался наяву, о чем — во сне. Геометрические сны стали спутниками Степы. Своей необычностью они были похожи на сказки.



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СНЫ СТЕПЫ МОШКИНА



Если бы описать все то, что Степа Мошкин осознал, выясняя, что же такое биссектрисы, медианы, высоты треугольника, то, вероятно, получился бы следующий рассказ.

* * *

Жила-была Медиана треугольника. Разговорилась как-то она с Биссектрисой угла.

— Слушай, Биссектриса угла, давай, познакомимся поближе. Расскажи о себе. Кто ты такая, как ты живешь? А я тебе поведаю про себя. Будет на сердце легче. А то люди иногда такое на нас наговаривают, что и сказать стыдно. Их невежество ставит иногда меня в тупик. Как им разъяснить их заблуждения?

— Хорошо, добрая Медиана. Расскажу. Я тоже этого хотела. Словно ты прочитала мои мысли. Ну, слушай.

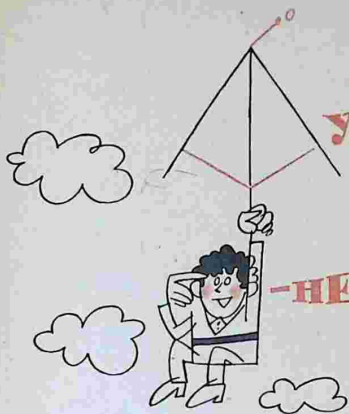
Кто я такая — Биссектриса угла?

Я — Биссектриса угла. И этим многое сказано. Без угла меня нет. Ну, как грома без молнии, как прямой без точек, угла без лучей. Только назовешь себя, а тебе в ответ: «А где же твой угол?» Это во-первых.

Во-вторых, я — луч.

— Прости, моя геометрическая фигура, но ведь и стороны угла тоже лучи. Чем же ты от них отличаешься? — спросила Медиана.

— У меня есть сходство с ними уже потому, что я тоже луч. И исхожу я из той же точки, что и они. Эту точку называют вершиной угла. Но я отличаюсь от них. Хотя бы тем, что прохожу между сторонами угла. Понимаешь, между! Иногда люди забывают про это и путают меня со всякими другими



**Всякая ли
точка, равно-
удаленная от
сторон угла,
принадлежит
биссектрисе
этого угла?**

-НЕТ!!!

лучами, тоже исходящими из вершины угла. Даже если они не проходят между его сторонами.

— Да, извини, что перебиваю, но между сторонами угла не ты одна проходишь? — поинтересовалась Медиана.

— Да что ты, конечно нет. А вот угол пополам делю одна я. Больше никто из лучей не делит угол пополам.

— А что это значит: ты проходишь между сторонами угла? — молвила Медиана.

— А это значит, что я пересекаю отрезок с концами на сторонах угла.

— Теперь я вижу, что фигура ты значительная. Ты и луч, ты и исходяшь из вершины угла, да еще проходишь между его сторонами и делишь свой угол пополам. Ты обладаешь важными свойствами, тебя нельзя не уважать, — сказала Медиана.

— Спасибо за добрые слова. Но должна признаться, что мою значительность многие часто преувеличивают. И происходит это от незнания, от невежества. Например, считают, что все точки, равноудаленные от сторон угла, принадлежат мне. А это не так.

— Но всякая твоя точка, уважаемая Биссектриса угла, равноудалена от сторон этого угла! — проговорила Медиана.

— Что верно, то верно. Только существуют точки, мне не принадлежащие, а все-таки равноудаленные от сторон моего угла. Вот, смотри на рисунок 15, а. На нем изображен угол ABC . Луч BD — это я, Биссектриса угла ABC . Возьмем луч BX — дополнительный ко мне. Теперь скажи: какая точка стороны BA ближе всего к точке X ?

— Ну, конечно, точка B , — ответила Медиана.

— Вот именно. Но тогда длина отрезка XB и есть расстояние от точки X до стороны BA . Потому что под расстоянием от точки до фигуры подразумевается расстояние от этой точки до ближайшей точки фигуры. Это тебе

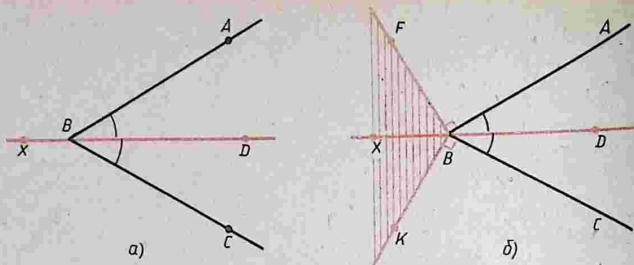


Рис. 15

понятно, Медиана, что расстояние XB и есть расстояние от точки X до луча BA ?

— Конечно, конечно, я все поняла.

— Тогда продолжим. А каково, по-твоему, расстояние от точки X до стороны BC моего угла?

— Так... ближайшей точкой луча BC для X является... та же точка B .

— Вот видишь, дорогая Медиана, расстояние от точки X до сторон BA и BC угла ABC одинаковое! Значит, точка X равноудалена от сторон угла ABC , однако не принадлежит биссектрисе этого угла! Каково? А ведь многие люди утверждают: геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла, что, выходит, неверно.

— Я поняла. Геометрическое место точек, обладающих указанным свойством, содержит в се такие точки. А тебе принадлежат не все точки, равноудаленные от сторон угла. Значит, ты не являешься геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, а составляешь только его часть, — высказалась Медиана.

— Вот именно, ты меня понимаешь.

— Я вижу, что все точки дополнительного к тебе луча равноудалены от сторон угла. А вот имеются ли еще точки, тебе не принадлежащие и равноудаленные от сторон твоего угла? — заинтересовалась Медиана.

— Конечно же имеются. Вот, смотри на рисунок (рис. 15, б). На нем изображен тот же угол ABC . Из его вершины проведен луч BF , перпендикулярный стороне BA и лежащий по другую сторону от BA , чем сторона BC . И еще проведен луч BK , перпендикулярный второй стороне BC и лежащий по другую сторону от BC , чем сторона BA .

— Это просто удивительно! Я вижу: точка F равноудалена от сторон твоего угла ABC ! Потому что для точки F точка B — ближайшая как на одной стороне угла, так и на другой стороне. А потому расстояние FB есть расстояние от точки F и до стороны BA , и до стороны BC , — радостно сообщила Медиана.

— Именно так. И точка K , как и всякая точка луча BK , также равноудалена от сторон угла ABC . Таким образом, все точки угла FBK на рисунке равноудалены от сторон угла ABC . Но это еще не все. Угол FBK делит плоскость

на две области. Та из них, которая содержит мой дополнительный луч (т. е. точку X), — продолжала Биссектриса угла, — обладает свойством: все ее точки также равноудалены от сторон угла ABC . На рисунке эта область закрашена.

— Так-так... Получается, что *геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла ABC* (рис. 15), *представляет собой сложную фигуру. Она состоит из биссектрисы угла — луча BD , угла FBK и всех точек закрашенной на рисунке области*, — обрадованно заговорила Медиана треугольника.

— Ты поняла меня правильно, подруга Медиана, — ответила Биссектриса угла. — Кстати, эту заштрихованную (закрашенную) фигуру на рисунке иногда называют плоским углом, а бывает, и просто углом.

— Уважаемая Биссектриса угла, изобрази, пожалуйста, геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, когда этот угол тупой и когда он прямой, — попросила Медиана треугольника.

— Вот смотри, что получается в этих случаях (рис. 16, 17), — ответила Биссектриса угла. Коричневым цветом она закрасила искомое геометрическое место точек.

— Раз уж ты так подробно рассказала о геометрическом месте точек, равноудаленных от сторон угла, то давай решим несколько несложных задач, — предложила Медиана треугольника.

— Хорошо. Вот задача 1. Дан прямой угол ABC и круг с центром B . Укажи мне такие точки круга, которые равноудалены от сторон угла ABC .

— Так это просто... — ответила Медиана. — Сначала построим геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от сторон угла ABC . Ты это уже делала (рис. 17). А теперь из этого геометрического места точек возьмем те, которые принадлежат построенному кругу. Получили фигуру, состоящую из отрезка BE , равного радиусу окружности (рис. 18), и четверти круга — FBK .

— Решим еще несколько задач, — сказала Биссектриса угла.

Задача 2. Вписать в данный угол ABC окружность заданного радиуса R . Рассмотреть три случая — угол ABC : а) прямой; б) острый; в) тупой.

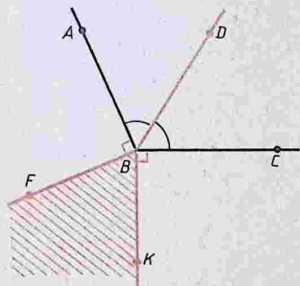


Рис. 16

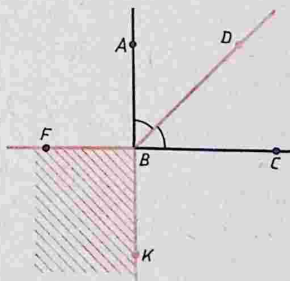


Рис. 17

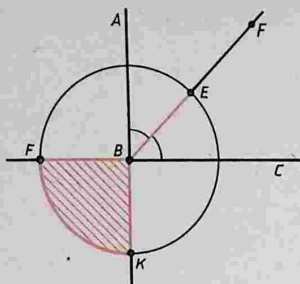


Рис. 18

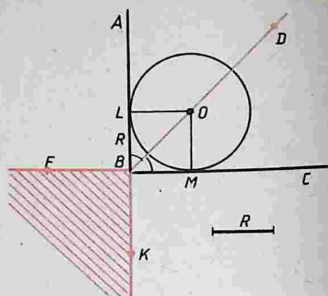


Рис. 19

— Центр искомой окружности равноудален от сторон угла ABC . Значит, он принадлежит геометрическому месту точек, равноудаленных от сторон данного угла. На рисунках (рис. 19, 20, 21) это геометрическое место точек изображено красным цветом. Оно состоит из биссектрисы угла ABC — BD и плоского угла FBK .

Рассуждаем дальше. Искомая окружность касается сторон угла ABC . Конец радиуса, проведенного в точку касания, лежит на стороне угла. Этот радиус перпендикулярен стороне угла, а потому лежит на прямой, перпендикулярной стороне угла и пересекающей ее. Но все такие прямые не имеют общих точек с плоским углом FBK , так как стороны этого угла параллельны этим прямым. Следовательно, центр вписанной окружности может принадлежать только биссектрисе угла ABC . Вот тут что уж правда, то правда, — продолжала Биссектриса угла рассказ о себе. — Центры окружностей, вписанных в мой угол, все принадлежат мне. Все!

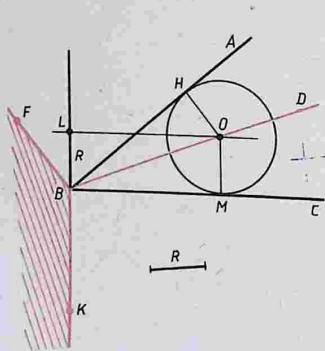


Рис. 20

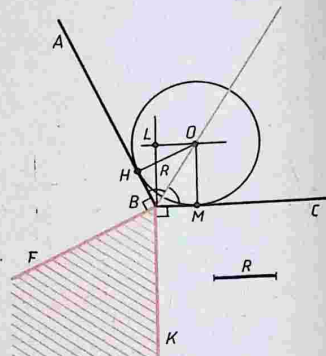


Рис. 21

— Но как же все-таки построить окружность, вписанную в угол, по ее радиусу R ? — спросила Медиана треугольника.

— Понимаешь, мы уже говорили, что центр ее лежит на биссектрисе угла. Кроме того, он удален от любой стороны угла на расстояние R . Биссектриса угла уже построена. Как это сделать, знает, кстати, любой. Что остается? Построить геометрическое место точек, удаленных от прямой AB или BC на расстояние R , точнее, ту его часть, которая пересекает биссектрису угла. А это делается просто: надо на одной из сторон угла, например BC , взять точку, восстановить из нее перпендикуляр к стороне длиной R . Получим точку L . Она удалена от прямой BC на расстояние R . Осталось провести через точку L прямую, параллельную прямой BC . Все точки этой прямой удалены от прямой BC на расстояние R . Эта прямая пересечет биссектрису в некоторой точке O , которая равноудалена от сторон угла на расстояние R . Окружность с центром O и радиусом R искомая. На рисунках для построения точки L мы воспользовались тем, что $BK \perp BC$. В случае, когда угол ABC прямой (рис. 19), точка L оказалась в точкой касания вписанной окружности со стороной BA . В двух других случаях точки касания обозначены M и N (рис. 20, 21).

Задача 3. На рисунке (рис. 22) изображены угол ABC , треугольник MNL , прямая p и точка O . Указать множество точек, равноудаленных от сторон данного угла и принадлежащих: а) треугольнику MNL ; б) прямой p ; в) окружности с центром O и радиусом R .

Задача 4. На рисунке (рис. 23) изображены угол ABC , отрезок ML и прямая m . Построить множество точек, равноудаленных от сторон данного угла и а) равноотстоящих от концов отрезка ML ; б) принадлежащих прямой m .

— Скажи, уважаемая Биссектриса угла, как ты связана с отрезками? — заинтересовалась Медиана, решив задачи 3 и 4 (см. решение, чтобы проверить собственное).

— Да вот, например, имеется еще биссектриса треугольника. Ты ведь

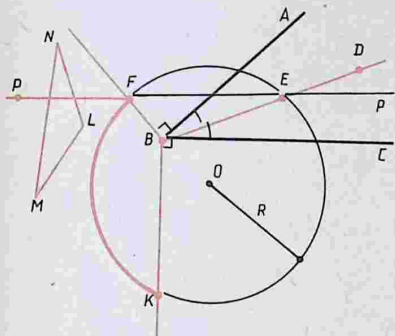


Рис. 22

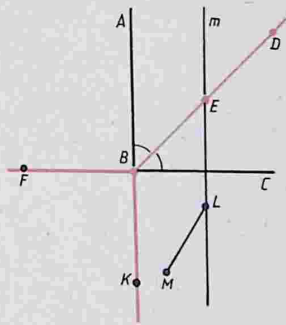


Рис. 23

знаешь, что треугольник не то, что угол; он является фигурой ограниченной. Ну и биссектриса у него тоже фигура ограниченная. Она является отрезком и составляет мою часть. А потому, Медиана, когда ты совпадаешь с биссектрисой треугольника, то тоже оказываешься моей частью. Вот выходит, что мы с тобой связаны.

— Ты сказала, Биссектриса угла, что угол — фигура неограниченная, ты тоже. Я правильно тебя поняла? — спросила Медиана треугольника.

— Ну конечно правильно, — ответила Биссектриса угла.

— Тогда почему же в учебнике утверждается: диагонали ромба являются биссектрисами его углов? Ведь диагонали — это отрезки! Выходит, что и отрезок тоже может быть биссектрисой угла? — докапывалась до истины Медиана треугольника.

— Ни в коем случае! На самом деле диагонали не являются биссектрисами углов ромба; они только лежат на биссектрисах углов ромба, составляя их часть. Но говорить «Диагонали ромба являются частями биссектрис его углов» длиннее, чем «Диагонали ромба являются биссектрисами его углов». В общем в этом случае говорят одно, а подразумевают другое. Считается, что краткости ради такая вольность речи допустима. Вот и все, Медиана, — отвечала Биссектриса угла.

— Слышала я, Биссектриса угла, что если вас трое и вы становитесь биссектрисами углов треугольника, то у вас есть единственная общая точка. Правда ли это? — выясняла Медиана треугольника.

— Правда, правда. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке. Почему? Об этом ты можешь на досуге прочитать в учебнике геометрии, — терпеливо рассказывала о себе Биссектриса угла.

— Я теперь хорошо понимаю, что всякая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. По этой причине точка пересечения биссектрис углов треугольника равноудалена от сторон всех углов треугольника. Но

**СТОРОНЫ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА
являются лучами,
СТОРОНЫ
ТРЕУГОЛЬНИКА —
ОТРЕЗКИ.**



почему эта точка пересечения одинаково удалена от сторон треугольника? — спросила Медиана.

— А вот почему. Посмотри на рисунок (рис. 24). Точка O — точка пересечения биссектрис углов треугольника. Рассмотрим треугольники ABO , BCO , ACO . Каковы углы этих треугольников при вершинах A , B , C ? Острые. (Надеюсь, понятно, почему?) Но тогда основания перпендикуляров OD , OE , OM , опущенных из точки O на прямые AB , BC , AC , лежат на сторонах AB , BC , AC трех рассматриваемых треугольников. Поскольку точка O равноудалена от сторон углов данного треугольника ABC , то $OD=OE=OM$. А

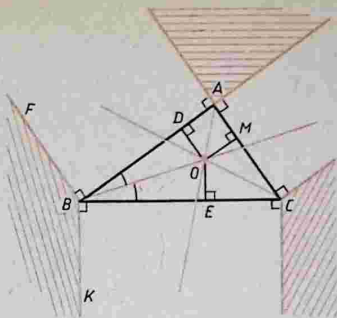


Рис. 24

что это означает? А то, что точка O равноудалена от сторон треугольника ABC . Понимаешь? Отсюда, кстати, следует, что окружность с центром в точке O пересечения биссектрис углов треугольника и радиусом OD касается сторон треугольника ABC в точках D , M , E . Ее называют вписанной в треугольник ABC . Вот какие дела... — сказала, по-житейски вздохнув, Биссектриса угла. — Замечу попутно, что эта точка O принадлежит и биссектрисам треугольника, а не только биссектрисам его углов.

— Слушай, дорогая, я понимаю, что точка пересечения биссектрис углов треугольника равноудалена от всех сторон. Почему? Да потому, что она, во-первых, принадлежит биссектрисе угла BAC и потому равноудалена от сторон AB и AC . Во-вторых, точка O принадлежит биссектрисе угла ABC , а потому равноудалена от сторон BA и BC . Получаем, что расстояние от точки O до сторон AC и BC такое же, что и до стороны AB . Значит, точка O равноудалена от всех сторон треугольника ABC , — рассуждала Медиана треугольника. — Но у меня есть сомнение. Ведь точки, равноудаленные от сторон угла, принадлежат не только биссектрисе угла. Они могут принадлежать и плоским углам с вершинами A , B , C , стороны которых есть лучи, перпендикулярные сторонам углов треугольника. Поэтому, может быть, кроме точки O , существуют еще и другие точки, равноудаленные от сторон треугольника.

— Посмотри на рисунок 24. Ты видишь, что названные тобой плоские углы не имеют общих точек? И ты ведь сможешь это доказать? — ответила Биссектриса угла.

— Надо же, как это я раньше не заметила? Ну конечно же докажу. Это совсем просто, — поспешно проговорила Медиана.

— Ну вот видишь. Значит, углы, входящие в геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, новой точки, равноудаленной от сторон всех углов треугольника ABC , не дадут. Поэтому точка O — единственная равноудаленная от сторон всех углов треугольника, — закончила свой рассказ Биссектриса угла. — Ну, да что это я все о себе да о себе. Ты уж, верно, устала меня слушать. Да и мне хочется послушать тебя, узнать что-нибудь интересное и поучительное.

— Спасибо тебе, Биссектриса угла, за такой терпеливый и содержательный рассказ о себе. Право, обо мне ты услышишь мало занимательного. Жизнь моя обычна. Но все-таки слушай.

Медиана рассказывает о себе

— Прежде всего, как ты уже знаешь, я — отрезок. Только не любой. такой, один конец которого совпадает с вершиной треугольника, а другой является серединой противоположащей стороны. Я долго думала, почему это люди обратили на меня внимание, что это я за важная птица, чтобы мне имя дать, да еще и такое симпатичное: Медиана. Мало ли отрезков с концами в вершине треугольника да на противоположащей стороне? А вот выделили меня, вместе с биссектрисой и высотой треугольника. Ну их конечно, удостоили специальных названий — по заслугам: одну — за равенство углов, другую — за прямой угол. А меня, что же, выходит за середину стороны? Может и так. Но думаю, не только за это, — рассуждала Медиана треугольника.

— А за что же еще? Расскажи! — попросила заинтригованная Биссектриса угла.

— Ой, да даже не знаю, рассказывать ли об этом. Дело в том, что сейчас я на время из геометрии выйду в физику. Ты ведь кое-что знаешь о физике? — поинтересовалась Медиана треугольника.

— Да, конечно, кое-что знаю. Мною иногда в физике пользуются. В другой раз я готова даже рассказать об этом, — ответила Биссектриса угла.

— Ну, тогда слушай. Сидим мы как-то вечером. Мы — это три медианы одного треугольника. Вдруг слышим чей-то бас: «Уважаемые мои медианы, позвольте с вами познакомиться. Я тесно связан с вами тремя». «Кто ты такой? — спрашиваем. — Как тебя зовут?» А он: «Я являюсь точкой вашего пересечения, но этого мало — я Центр масс вашего треугольника». Отвечаем ему: «Мы из геометрии, а ты из физики. Что между нами общего? Объясни!» И вот что он поведал нам. Представь, что из куска картона или из бумаги вырезали треугольник. Провели в нем медианы. Теперь представь, что этот вырезанный треугольник расположили в вертикальной плоскости, ну, как стена дома расположена. Затем в произвольной точке эту бумажную модель треугольника проткнули иглой, горизонтально расположенной. Причем так, что треугольник этот мог вокруг иглы вращаться. Как бы ни поворачивать треугольник вокруг оси-иглолки, он будет поворачиваться и каждый раз занимать одно и то же положение. Мне трудно объяснить это положение. Скажи только, что большая часть массы треугольника (вернее, его модели) оказывается ниже оси. И сколько бы точек в треугольнике ни выбирали, результат получим тот же самый. Но только до тех пор, пока ось не попадет в точку пересечения медиан треугольника.

— И что же тогда произойдет? Что-то будет не так? — заговорила, выдержав, Биссектриса угла.

— Вот именно не так. Теперь-то, как треугольник вокруг оси ни поворачивай, в какое положение его ни приведешь, в таком он и останется.

КАК ЖЕ ВЫБРАТЬ ОСЬ ВРАЩЕНИЯ?



Чудо просто! Конечно, если человек проведет медианы неаккуратно, т. е. проведет лишь «якобы медианы», то результат будет другим. Но мы, медианы, тут уж ни при чем. Ну и, конечно, если картон там или бумага в одном месте толстые, в другом — тонкие или в одном месте «тяжелее», чем в другом (представьте это!), то получится также «другое». Надо, говорят в таком случае, чтобы треугольник был однородным из одного и того же материала, — вела свой рассказ Медиана.

— Да, точка пересечения медиан треугольника обладает поистине удивительным свойством. Для физиков, механиков, инженеров это просто находка. За одно это можно было дать тебе имя, дорогая Медиана. Я читала в учебнике геометрии, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины. Но что точка вашего пересечения центр масс треугольника — об этом я не знала, — призналась Биссектриса угла.

— И вот ведь что еще удивительно: если картонную модель треугольника свободно подвесить за вершину, то вертикаль, проходящая через указанную вершину, будет... Я вижу в твоих глазах любопытство! Конечно. Эта вертикаль будет содержать меня! Я окажусь непременно на вертикали! Каково? Ты изумлена? О, мы, все три медианы, были поражены этой новостью не меньше. Вот уж поистине: сколько ни живи, а все узнаешь о себе что-нибудь новое, — ликовала Медиана. — Правда, я не существую без треугольника, как и ты без угла. Чуть что, у меня спрашивают: где же твой треугольник? Но мне с треугольником интересно. Хотя бы потому, что на мне центр его тяжести. Кроме того, я могу быть медианой не одного, а нескольких треугольников. Вот смотри (рис. 25). На рисунке отрезок BM является одновременно медианой

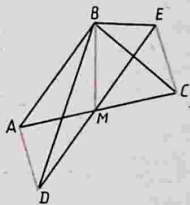


Рис. 25

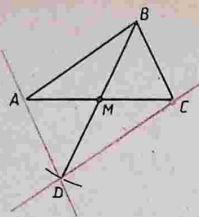


Рис. 26

треугольника ABC и медианой треугольника ABD . Кстати, предлагаю тебе на досуге доказать, что $AD=EC$. Пусть это будет первым заданием.

Задание 1. Отрезок BM является медианой треугольника ABC и треугольника DBE . Докажи, что $AD=EC$ и $AD \parallel EC$.

— А еще что я тебе расскажу про себя, дорогая Биссектриса, так это то, что меня часто бывает полезно продолжить за ту точку, которая является серединой стороны моего треугольника, — продолжает Медиа.

— И для чего это делают? — любопытствует Медиа. Биссектриса угла.

— А вот смотри. На рисунке BM — медиана треугольника ABC (рис. 26). Вот продолжили меня за точку M и отложили $DM=BM$. Получили точку D . Эта точка не какая попало. Она такая, что мой конец M оказался серединой отрезка BD . Но не в этом дело. Самое главное в том, что прямая AD оказывается параллельной прямой BC ! Что это значит? А это значит, что можно использовать для построения прямой, параллельной данной. Вот представь (смотри на тот же рисунок), что AB — данная прямая, а через данную точку C нужно провести прямую, параллельную прямой AB . Как это сделать? Конечно, по-разному. Но можно и с моей помощью. Как? А вот как. Построй треугольник ABC . Построй середину отрезка AC , например. Построй затем медиану BM . На продолжении BM отложи $MD=BM$. Все: $CD \parallel AB$. Конечно, имеется и способ попроще, но иногда только что изложенный способ оказывается выгоднее. Например, при доказательстве теоремы о сумме углов треугольника, — с большим удовольствием раскрывала свои тайны Медиана.

— Но, подруга ты моя, Медиана, прямая AD на рисунке параллельна прямой BC . Стало быть, получившийся четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм? — проговорила Биссектриса угла.

— Ты права. На меня можно опереться не только для проведения через данную точку прямой, параллельной заданной прямой, но и для построения параллелограмма, вершинами которого являются вершины данного треугольника и точка на моем продолжении (точка D — на рис. 26). Ну, да это понятно: раз с моей помощью можно строить параллельные прямые, то и параллелограммы тоже, — ответила Медиана треугольнику.

— И тебе что-нибудь дает это? — поинтересовалась Биссектриса угла.

— Конечно! Построенный параллелограмм помог вычислить мою длину, если заданы длины сторон моего треугольника. Вот смотри (рис. 26). $ABCD$ — параллелограмм. Но сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Поэтому имеем $BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$. Но ведь $BD=2BM$! Значит, $4BM^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$, $BM = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2}$. Видишь, как можно вычислить мою длину по длинам сторон треугольника? Надо вычислить сумму удвоенных квадратов двух сторон треугольника, с которыми у меня общая вершина треугольника, вычесть квадрат стороны, середина которой является моим концом, из полученного результата квадратный корень д

еще разделить этот квадратный корень на 2. Вот и все. Я вычислена. Это же очень интересно! Как ты считаешь? — спросила Медиана, поглядывая на Биссектрису угла.

— Ну что ты, безусловно! Я вот даже начала думать: а как вычислить длину, не мою, конечно, я бесконечна и не имею длины, а длину биссектрисы треугольника? Ведь можно это сделать, а? Пусть это будет заданием для нас, — предложила Биссектриса угла.

Задание 2. Установите, как вычислить длину биссектрисы треугольника, зная длины его сторон.

— Знаешь, Биссектриса, — сказала Медиана. — Способ построения с моей помощью параллелограмма можно использовать для доказательства утверждения: центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Это делается просто. Пусть BM — медиана треугольника ABC (см. рис. 26), точка D принадлежит лучу BM , причем $MD = BM$. Тогда четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поскольку его диагонали точкой пересечения M делятся пополам. А теперь представь, что угол ABC прямой, точка M — середина гипотенузы. Тогда параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. Но диагонали прямоугольника равны, поэтому $BD = AC$. Отсюда следует, что и половины диагоналей равны: $AM = MC = BM$, т. е. точка M равноудалена от вершин треугольника ABC . Получили, что середина гипотенузы треугольника является центром окружности, описанной около него.

— Скажи, пожалуйста, Медиана, почему тебя называют медиана треугольника? Разве медиана бывает не только у треугольников? Может, слово «треугольник» — лишнее? — любопытствовала Биссектриса угла.

— Нет, не лишнее: медианы имеются еще и у тетраэдра. Это слово означает «четырехгранник». У него четыре грани и каждая — треугольник. Граними тетраэдра (рис. 27) являются треугольники ABC (невидимая грань), ADB , BDC , ADC (невидимая грань). С его изображением в средней школе знакомятся в курсе черчения и позднее в стереометрии. Так вот, видишь, в грани BDC проведены медианы треугольника BE и CF . M — точка их пересечения, т. е. центр массы треугольника BDC . Так вот, отрезок AM , соединяющий вершину тетраэдра A с точкой пересечения медиан противоположной грани BDC , называется медианой тетраэдра. У тетраэдра четыре медианы. Однако, когда понятно, о какой медиане идет речь, слово «треугольник» или «тетраэдр» опускают. Потому что если перед вами один Ваня, то его фамилию называть необязательно: и так понятно, о ком речь. Кстати, про меня можно сказать, что я *соединяю вершину треугольника с центром массы противоположной стороны*.

Медиана треугольника и Биссектриса угла заканчивали беседу о себе и хотели расстаться, как вдруг раздался голос.

— Вы знаете, я невольно слышала ваши интересные рассказы. Прощу вас, выслушайте и меня тоже. Я расскажу совсем немного.

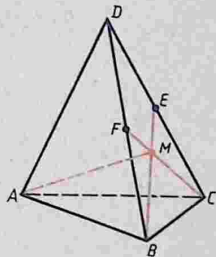


Рис. 27

Я — Высота треугольника

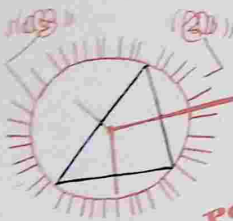
— Я — Высота треугольника. Что такое высота? Это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону. Поскольку перпендикуляр является отрезком, то высота треугольника — отрезок. В этом отношении я сходна с тобой, Медиана, и с Биссектрисой треугольника. Все мы отрезки и этим отличаемся от тебя, Биссектриса угла.

Но имеются еще и так называемые срединные перпендикуляры к сторонам треугольника. А вот они являются прямыми, перпендикулярными к его сторонам и проходящими через их середины, — продолжала Высота треугольника. — Известно что эти срединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника. С помощью срединных перпендикуляров мы, высоты треугольника, установили, что тоже пересекаемся в одной точке. Ее называют ортоцентром треугольника. Как установили? А вот, слушайте.

Вот треугольник ABC (рис. 28). AD , BE , CF — его высоты, — рассказывала своим слушателям Высота треугольника. — Теперь хотите увидеть чудо? Вот оно. Через каждую из вершин треугольника ABC проведем прямую, параллельную противоположной стороне. Получился треугольник KLM . Вы не замечаете ничего удивительного? Да посмотрите: прямые, содержащие высоты треугольника ABC , являются срединными перпендикулярами к сторонам треугольника KLM ! Здорово! Но ведь срединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Следовательно и мы, высоты треугольника ABC , содержащиеся в них, пересекаемся в одной точке. На рисунке — это точка H .

— Это так интересно! — одновременно говорили Биссектриса угла Медиана треугольника. — Спасибо тебе за рассказ, Высота треугольника.

— Да что вы, друзья! Спасибо вам за то, что с таким интересом слушаете.



**ЦЕНТР ОКРУЖНОСТИ,
ОПИСАННОЙ ОКОЛО
ТРЕУГОЛЬНИКА,
ЯВЛЯЕТСЯ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
СРЕДИННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ
К ЕГО СТОРОНАМ.**



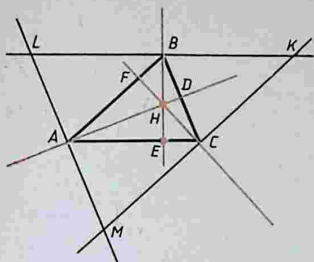


Рис. 28

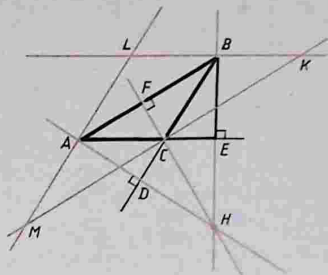


Рис. 29

шали. Только вот вам задание, в котором я допустила одну маленькую неточность. Надо ее исправить.

Задание 1. Всегда ли верно, что высоты треугольника пересекаются в одной точке? Уточните формулировку этого свойства высот треугольника.

— А дело тут вот в чем, — продолжала Высота треугольника. — Вы ведь знаете, что центр описанной около треугольника окружности может лежать внутри треугольника, может быть серединой стороны и может, наконец, лежать вне треугольника. Понимаете? Внутри треугольника он лежит тогда, когда треугольник остроугольный. Если треугольник прямоугольный, то он является серединой гипотенузы. Если треугольник тупоугольный, то центр описанной около треугольника окружности лежит вне треугольника. Другими словами, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежит внутри треугольника, если он остроугольный, на стороне — если треугольник прямоугольный, и вне треугольника, если он тупоугольный.

— Подожди, Высота, ты так много говоришь и все не о себе, — прервала ее Медиана. — Это во-первых. Во-вторых, ты совсем перестала рассуждать, просто пересказываешь, что знаешь да помнишь, а это неинтересно. В-третьих, ты нам рассказывала не о высотах треугольника ABC (см. рис. 28), а о серединных перпендикулярах к сторонам другого, вспомогательного треугольника KLM . Стало быть, ты говоришь о центре окружности, описанной около вспомогательного треугольника KLM .

— Я, кажется, догадалась, в чем состоит неточность, допущенная Высотой, — сказала Биссектриса угла. — Вот, смотрите. Я строю тупоугольный треугольник ABC (рис. 29). Строю высоты треугольника AD , BE , CF . Высота CF , опущенная из вершины тупого угла, вся внутри треугольника. Высоты AD и BE , опущенные из вершин острых углов, вне треугольника. Следовательно, высоты тупоугольного треугольника не пересекаются. А Высота треугольника в своем рассказе утверждала, что высоты всякого треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром треугольника. Получается, что наша уважаемая Высота допустила ошибку.

— Твоя правда, Биссектриса угла, — обрадовалась Высота треугольника. — Ты нашла мою ошибку. Правда, я назвала ее неточностью. Но вы сами понимаете, как иногда не хочется признаваться в собственной ошибке.

Когда назовешь ее неточностью — как-то легче. Печально, но нам, геометрическим фигурам, свойственны человеческие слабости.

— Знаете, без лирических отступлений невозможно жить. Но и дело нельзя оставлять незаконченным. Давайте проведем через вершины тупоугольного треугольника ABC (рис. 29) прямые, параллельные противолежащим сторонам. Получили вспомогательный треугольник KLM . Прямые AD , BE , CF (но не отрезки!) являются серединными перпендикулярами к сторонам полученного треугольника KLM . Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке H . Для треугольника ABC точка H является ортоцентром, а для вспомогательного треугольника KLM — центром описанной окружности, — рассуждала Медиана.

— Ты все так ясно изложила, Медиана. Не то что я: начала и запуталась, — высказалась Высота треугольника. — Устала, видно, я. Вот и стала ошибаться и путаться... Ты совершенно права: *пересекаются во всяком треугольнике в одной точке прямые, содержащие его высоты. Сами же высоты пересекаются только в остроугольных треугольниках. И ортоцентр треугольника — это точка пересечения прямых, содержащих его высоты.* А вот в остроугольном треугольнике ортоцентр является и точкой пересечения высот.

— Мы установили, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке. Высоты тупоугольного треугольника общих точек не имеют, — вновь заговорила Биссектриса угла, — *но вот прямые, их содержащие, пересекаются в одной точке.* А вот как обстоят дела в прямоугольном треугольнике, ничего не говорили.

— Видите ли, в прямоугольном треугольнике каждый катет является его высотой. Проведем еще высоту из вершины прямого угла. Получается, что у всех трех высот прямоугольного треугольника имеется общая точка — вершина прямого угла, — разъяснила Высота треугольника.

— Выходит, ортоцентром прямоугольного треугольника является вершина его прямого угла?! — вопросительно воскликнула Биссектриса угла.

— Ну да, именно так, — ответила Высота, выполнив рисунок (рис. 30).

— Слушайте, мои подруги, мы давно говорим, что прямые AD , BE , CF (рис. 28, 29), содержащие высоты данного треугольника ABC , являются серединными перпендикулярами к сторонам вспомогательного треугольника KLM . Мы все в это поверили. Но почему? — спохватилась Медиана треугольника. — То, что эти прямые перпендикулярны к сторонам вспомогательного треугольника, мне понятно. Потому что если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой. Это всякий знает. А вот почему точки A , B , C — середины сторон вспомогательного треугольника, не понимаю.

— А вот почему. Возьмем одну из сторон данного треугольника, например AB . Она является стороной двух параллелограммов: $ABCM$ и $ABKC$. В параллелограмме противолежащие стороны равны. Следовательно, $CM = CK$. Значит, точка C — середина стороны MK вспомогательного треугольника. Аналогично вершины A и B являются серединами сторон треугольника KLM , — пояснила Высота треугольника.

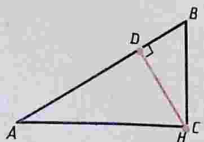


Рис. 30

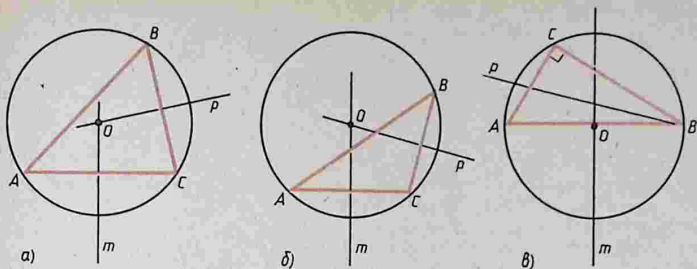


Рис. 31

— Уважаемая Высота треугольника, ты что-то начинала рассказывать нам о положении центра окружности, описанной около треугольника. То он внутри треугольника, то вне, а то и на стороне. Как это объяснить? — поинтересовалась Биссектриса угла.

— Чтобы было вам понятнее, давайте начнем с построения. Изобразим остроугольный треугольник (рис. 31, а), тупоугольный (с тупым углом C , рис. 31, б), прямоугольный (прямой угол C , рис. 31, в). Проведем серединные перпендикуляры m и p к двум сторонам каждого из треугольников. Эти перпендикулярные к сторонам прямые пересекутся в некоторой точке O . Почему пересекутся? А что было бы, если бы они не пересекались? А?.. Да тогда прямые m и p были бы параллельными! А отсюда следовало бы, что прямые AC и BC , будучи перпендикулярными одной прямой, параллельны. А это не так.

— Подожди, Высота, какой же прямой перпендикулярны прямые AC и BC ? — спросила Биссектриса угла.

— Ну вот. Любой из двух: хоть m , хоть p . Ведь если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой, — ответила Высота. — Теперь смотрите: точка O принадлежит прямой m . Что это значит? А это значит, что точка O равноудалена от концов отрезка AC , т. е. она удалена от точки A на такое же расстояние, как и от точки C . Поскольку точка O принадлежит прямой p , то она удалена от точки B на такое же расстояние, как и от точки C . Но тогда получается, что точка O равноудалена от вершин треугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OC пройдет через все вершины треугольника ABC . Она и есть окружность, описанная около треугольника ABC .

— Пока все понятно, — сказала Медиана. — Только как объяснить то, что мы не проводили серединный перпендикуляр к третьей стороне AB треугольника?

— А зачем? Раз точка O равноудалена от вершин A и B , то серединный перпендикуляр к стороне BA пройдет через точку O . Поэтому его можно и не проводить. Все равно от этого ничего не изменится, — объяснила Высота треугольника.

— Так почему же, всезнающая Высота, на рисунках в случае а) точка O

ЖИЛА.
БЫЛА
МЕДИ-
АНА.



оказалась внутри треугольника, в случае б) — вне треугольника, а в случае в) — на стороне треугольника? — обратилась к Высоте Медиана.

— А вот, слушай. В случае а) вписанный в построенную окружность угол ABC острый. Поэтому центр окружности O лежит по отношению к прямой AC по ту же сторону, что и точка B . Аналогично вписанный угол BAC острый, поэтому точка O лежит по отношению к прямой BC по ту же сторону, что и вершина A . Наконец, центр O окружности лежит от прямой AB по ту же сторону, что и вершина C . Вот и получается, что точка O внутри треугольника ABC .

Что мы имеем в случае б)? Угол C тупой. Он — вписанный в окружность с центром O . Поэтому точка O лежит по другую сторону от прямой AB , чем точка C . Вот и получается, что точка O в этом случае вне треугольника.

Ну, а в случае в) угол C прямой, O — центр описанной окружности. Тогда угол AOB равен 180° , откуда следует, что точка O лежит на гипотенузе AB треугольника ABC . Конечно, на ее середине. Разве может быть иначе? — объяснила Высота треугольника.

— Ну что, друзья мои, надо заканчивать наши беседы, — проговорил Медиана треугольника. — Мы узнали друг о друге и о других геометрических фигурах очень многое. Да и собственные свойства осмыслили глубже. Пожелаем друг другу новых открытий, новых доказательств, совершенствования в умении рассуждать и доказывать. До свидания, до новых встреч!

— До свидания, прекрасная Медиана, — ответили Биссектриса угла и Высота треугольника. — Ждем новых встреч с тобой!

Заметим, что Высота по скромности не рассказала о том, как она важна при нахождении площади треугольника. Кроме того, о ней вспоминают, когда только начинается разговор о равновеликости треугольников, особенно если у них есть еще и общая сторона (напомним, что равновеликими фигурами называют фигуры, имеющие равные площади).

Продолжите и закончите рассказ Высоты треугольника. Придумайте ей

свое название. Воспользуйтесь для этого учебником геометрии и своей фантазией. При желании можете ввести в рассказ другие персонажи. Желаем вам писательского успеха в ваших математико-литературных упражнениях.

Ответы, указания, решения к заданиям из «Математических снов Степы Мошкина».

Рассказ Биссектрисы угла.

Задача 3. а) Все точки треугольника MNL равноудалены от сторон угла ABC ; б) Точка E пересечения p с биссектрисой угла ABC и все точки луча FP (см. рис. 22) равноудалены от сторон угла ABC ; в) Точка E окружности и все точки дуги FK , не содержащей точку E , равноудалены от сторон угла ABC .

Задача 4. а) Проведите серединный перпендикуляр к отрезку ML . Он пересечет лучи BF и BK в некоторых точках X и Y . Все точки отрезка XY равноудалены от сторон угла ABC .

Рассказ Медианы.

Задание 1. $\triangle AMD = \triangle CME$ (по двум сторонам и углу между ними (рис. 22). Отсюда следует: $\angle DAM = \angle ECM$, откуда получаем, что $AD \parallel CE$ и $AD = CE$.

Задание 2. Дано: $\triangle ABC$; $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. BD — биссектриса треугольника (рис. 32).

Найти BD .

Решение. Биссектрису BD можно найти по теореме косинусов из треугольника ABD . Но для этого надо знать $\cos A$ и AD .

1) Найдем $\cos A$. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. От-

$$\text{сюда } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

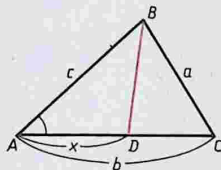


Рис. 32

2) Найдем AD . Пусть $AD = x$. Тогда $DC = b - x$. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника. Следовательно, $\frac{x}{b-x} = \frac{c}{a}$. Отсюда: $ax + cx = bc$, $x = \frac{bc}{a+c}$.

Длина отрезка на AD найдена.

3) Из треугольника ABD находим по теореме косинусов длину биссектрисы BD .

Рассказ Высоты треугольника

Задание 2. Возможное продолжение рассказа о себе Высоты треугольника.

Однажды Вершина B треугольника ABC говорит: «Разреши, пожалуйста, Треугольник, погулять мне по твоей плоскости». А Треугольник отвечает ей: «Пожалуйста, погуляй, только так, чтобы площадь моя при этом не менялась. Не хочу я, Вершина, уменьшать свою площадь, не хочу и увеличивать. Пусть также две другие мои Вершины остаются на месте. Вот и все мое условие». Долго думала Вершина: как же ей гулять? И вообще возможна ли прогулка? И наконец, догадалась. Гуляла потом долго-предолго. Скажите, добрые люди, как она гуляла? Сделайте рисунок, изобразите проторенную Вершиной тропинку. Имеются ли у тропинки концы? (Вместо ответа см. рис. 33.)

Не понравилось Треугольнику, что его Верши-

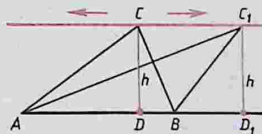
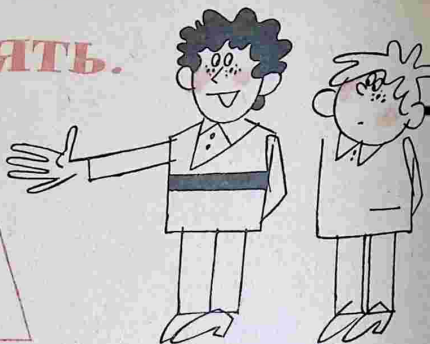
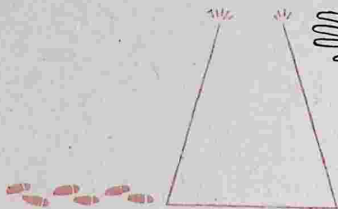


Рис. 33

ВЕРШИНА ТРЕУГОЛЬНИКА ПОШЛА ГУЛЯТЬ.



на гуляла так долго. Да и двум другим Вершинам обидно: их сестра гуляет и гуляет, а им сиди на месте. В следующий раз Треугольник и говорит первой Вершине: «На этот раз ты гуляй, Вершина, так. Сначала иди по перпендикуляру к противоположной стороне. Но как только мой угол, Вершиной которого ты являешься, станет прямым, дальше иди так, чтобы он оставался прямым. Хо-

чу некоторое время побыть с прямым углом. Когда обойдешь все такие точки, сразу же вернешься на то же место прежним путем. Помни: другим Вершинам тоже погулять хочется». Скажите-ка, люди добрые, каким был Треугольник в тот момент, когда Вершина попросилась погулять? Остроугольным; тупоугольным; прямоугольным? Изобразите Треугольник, а затем тропинку, которую протоптала его Вершина.

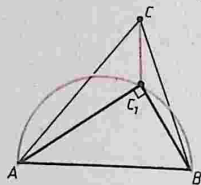


Рис. 34

А вот и ответ. Когда Вершина пошла гулять, Треугольник был остроугольным. На рисунке 34 показана тропинка, протопренная вершиной C. Тропинка эта состоит из отрезка CC_1 и полуокружности с диаметром AB (точки A и B исключены из полуокружности). Если бы один из углов треугольника первоначально был прямым или тупым, вершина C не смогла бы совершить прогулку в соответствии с предписанием Треугольника.

КАК Я РАССУЖДАЛ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ (VIII класс)

— Однажды мне надо было решить такую задачу, — рассказывает Степа Мошкин. — Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей?

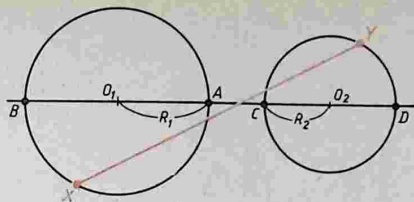


Рис. 35

Я сразу же сообразил, что поскольку расстояние между центрами больше суммы радиусов, то окружности не имеют общих точек и одна находится вне другой. Сделал рисунок (рис. 35). На первой окружности взял произвольную точку X , на второй — точку Y . Потом представил, что точка X перемещается по первой окружности, точка Y — по второй. Из чертежа видно, что расстояние XY будет при перемещении точек меняться. Мой глазомер подсказал мне, что расстояние XY будет больше тогда, когда точка X совпадет с точкой B , а точка Y — с точкой D . Наименьшим это расстояние будет при совпадении точки X с точкой A , а точки Y — с точкой C . Прекрасно! У меня появилась гипотеза: $XY_{\text{наиб}} = BD = R_1 + d + R_2$; $XY_{\text{наим}} = AC = d - R_1 - R_2$... Но это только гипотеза. Ее надо еще доказать. А вдруг она неверна?

Начал размышлять. Чем воспользоваться для доказательства? Какова его идея? Что значит $XY_{\text{наиб}} = R_1 + d + R_2$? Так, так... А это означает, что при перемещении точек X и Y по окружностям всегда выполняется неравенство $XY \leq R_1 + d + R_2$! Чудесно. Стало быть, мне надо доказать, что это неравенство верно. Это уже кое-что. Пригляделся к неравенству. В чем его суть? Да в том, что длина отрезка XY должна быть не больше суммы длин трех других отрезков. Итак, речь здесь идет о длине отрезка и о сумме длин трех других отрезков. Что я знаю об этом? Нет ли теоремы, в которой



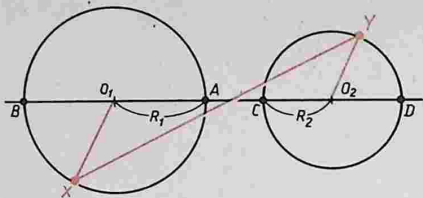


Рис. 36

говорилось бы о сумме длин отрезков и о длине одного отрезка?.. Подождите... Есть такая теорема! Это теорема о длине ломаной и длине отрезка, соединяющего ее концы! Вот она: *длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы*. Но как ею воспользоваться? Никакой ломаной на моем рисунке нет. Выходит, нужно выполнить дополнительное построение так, чтобы ломаная появилась? Какие же точки должны быть концами? Ну конечно же точки X и Y ! Ведь в теореме о ломаной идет речь о длине отрезка, соединяющего ее концы. Стало быть, отрезок XY должен соединять концы ломаной.

Итак, концы ломаной найдены. Но где же ее звенья? Неравенство $XY \leq R_1 + d + R_2$ подсказывает, что звенья ломаной должны иметь длины R_1 , d , R_2 . Значит, одним из звеньев ломаной может быть отрезок O_1O_2 . Ведь его длина равна d ! Что же остается сделать, чтобы получить ломаную с концами X и Y и с одним из звеньев — O_1O_2 ? Ясно! Надо построить отрезки O_1X и O_2Y . Их длины равны соответственно R_1 и R_2 (рис. 36)!

Так какую ломаную мне нужно рассмотреть? Ломаную XO_1O_2Y . По теореме о ломаной получаем $XY \leq XO_1 + O_1O_2 + O_2Y$, т. е. $XY \leq R_1 + d + R_2$. Следовательно, $XY_{\text{наиб}} = R_1 + d + R_2$. Первая часть гипотезы доказана. Берусь за доказательство второй части: $XY_{\text{наим}} = d - R_1 - R_2$.

В первые секунды мне еще казалось, что доказать вторую часть гипотезы ничего не стоит. Но скоро я спохватился: как же быть, если имеешь дело не только с суммой длин отрезков, но и с их разностью? Сейчас надо доказать, что $XY \geq d - R_1 - R_2$... Теорема о ломаной здесь не спасает: в ней ничего не говорится о разности отрезков. Как же быть? Я долго смотрел на последнее неравенство. Вид у меня был печальный. Каждая минута безрезультатного размышления уменьшала уверенность в своих силах. А что бы вы придумали на моем месте? Что?..

Время шло, а я ничего не мог придумать. Нет суммы — и ничего не делаешь. И тут я вспомнил любимую фразу нашего учителя математики Петра Ивановича: «Если чего-то нет, его надо найти!» Стой... Суммы у меня нет, значит, ее надо найти! Как? Ясно! Нужно R_1 и R_2 перенести в левую часть. Тогда получаю $XY + R_1 + R_2 \geq d$. Как доказать, что это неравенство верно? О, вот теперь можно применить теорему о длине ломаной. Ломаная должна состоять из трех звеньев. Длина отрезка, соединяющего ее концы, равна d . Но тогда за отрезок, соединяющий концы ломаной, можно взять отрезок O_1O_2 . Итак, точки O_1 и O_2 — концы ломаной. Одним из звеньев

ломаной должен быть отрезок XY . Длины двух других звеньев — R_1 и R_2 . Все ясно! Рассматриваю ломаную O_1XYO_2 . По теореме о длине ломаной получаю $O_1X + XY + YO_2$, т. е. $R_1 + XY + R_2 \geq d$, откуда $XY \geq d - R_1 - R_2$. А это значит, что $XY_{\text{наим}} = d - R_1 - R_2$. Вторая часть гипотезы доказана! Все, задача решена.

На другой день, войдя в класс, я спросил: «Ну что, орлы, решили задачу?» «А что ее решать? Она в учебнике решена!» — услышал я небрежный ответ. Заглянул в учебник геометрии — на самом деле, задача решена.

— Решите задачу по моему рисунку! — сказал я, выполнив свой рисунок на доске. Времени до начала урока было еще предостаточно, но никто не смог объяснить, как решить задачу по моему рисунку. И я понял, что они просто за помнили решение задачи по рисунку учебника, а не решили ее.

— Вы бездумные зубрилки! — с досадой произнес я. — Вы не осознали идею решения, как этому нас учит Петр Иванович. И не применяли ее. А потому вы не сможете решить задачу не только по другому чертежу, но и не решите сходную задачу.

Так и вышло. Петр Иванович предложил на уроке такую задачу: «Содержащееся в предыдущей задаче (о которой я только что рассказал) неравенство $d > R_1 + R_2$ замените другим: $d < R_1 - R_2$. Решите получившуюся задачу». И что вы думаете? Эту задачу никто, кроме меня, не решил. А для меня она была всего-навсего приятным случаем, когда можно применить знакомую идею. Только для того, чтобы установить взаимное расположение окружностей, неравенство $d < R_1 - R_2$ я представил в другом виде: $d + R_2 < R_1$. Тогда представить взаимное расположение данных окружностей мне оказалось легче.

Попробуйте свои силы, решите вторую задачу. Старайтесь действовать по аналогии с решением первой задачи. Желаю успеха!



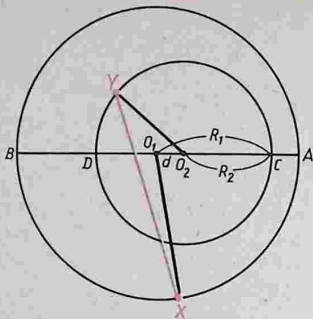


Рис. 37

Ответы и решения к рассказу «Как я рассуждал при решении одной задачи».

Вот как рассуждал, решая предложенную Петром Ивановичем задачу, Степа Мошкин.

Сначала он изобразил окружность с центром O_1 и радиусом R_1 . Затем задумался: где же расположен центр второй окружности — внутри или вне первой? $O_1O_2 = d$. $d < R_1 - R_2$; значит, $d < R_1$. Стало быть, центр O_2 второй окружности расположен внутри первой окружности. И он выбрал точку O_2 . $d + R_2 < R_1$, поэтому все точки второй окружности лежат внутри первой, т. е. окружности не имеют общих точек. Вторая окружность расположена внутри первой окружности. Через центры окружностей он провел прямую. Она пересекла окружности в точках A, B, C (рис. 37). На первой окружности он выбрал произвольную точку X , а на второй окружности — произвольную точку Y .

Теперь, как и в предыдущей задаче, опираясь на рисунок и на свой глазомер, Степа занялся

поиском гипотезы. Кажется, $XY_{\text{наиб}} = BC = R_1 + d + R_2$. Значит, достаточно доказать, что $XY \leq R_1 + d + R_2$. «Воспользуюсь теоремой о длине ломаной», — решил он. Отрезком, соединяющим концы ломаной, должен быть отрезок XY . Значит, концами ломаной должны быть точки X и Y . Одно из звеньев ломаной равно d , поэтому надо, чтобы отрезок O_1O_2 был звеном ломаной. А дальше уже просто: два остающихся звена равны R_1 и R_2 . Чтобы получить их, нужно провести отрезки O_1X и O_2Y . Искомая ломаная — это ломаная XO_1O_2Y . По теореме о длине ломаной имеем $XY \leq XO_1 + O_1O_2 + O_2Y$, т. е. $XY \leq R_1 + d + R_2$. Значит, $XY_{\text{наиб}} = R_1 + d + R_2$.

Чему же равно наименьшее значение XY ? Рисунок и глазомер подсказывают, что

$XY_{\text{наим}} = AC = R_1 - d - R_2$. Значит, достаточно доказать неравенство $XY \geq R_1 - d - R_2$. Это неравенство надо преобразовать так, чтобы оно содержало только сумму длин отрезков. Иначе теореме о длине ломаной не применишь. Итак, $XY + d + R_2 \geq R_1$. Теперь легко отыскать нужную ломаную. Длина отрезка, соединяющего ее концы, равна R_1 , а одним из звеньев является отрезок XY . Чудесно! Стало быть, за концы ломаной можно принять точки X и O_1 . Остается подобрать остающиеся два звена. Их длины — d и R_2 , поэтому нужными звеньями являются отрезки O_1O_2 и O_2Y . Вот она, нужная для решения задачи ломаная: XYO_2O_1 . По теореме о длине ломаной имеем $XY + YO_2 + O_2O_1 \geq XO_1$, т. е. $XY + R_2 + d \geq R_1$. Отсюда $XY \geq R_1 - d - R_2$. А это означает, что $XY_{\text{наим}} = R_1 - d - R_2$.

Задача решена.

КАК РОЖДАЮТСЯ ПРОБЛЕМЫ (VIII—X классы)

Слово «проблема» греческого происхождения. Его буквальное значение — задача, задание. Означает: теоретический или практический вопрос, требующий разрешения. В словаре В. Даля истолковывается как «задача, вопрос, загадка, что предложено на разрешение, на научное решение; задача для отысканья неизвестного по данному».



Как появляются математические проблемы? Конечно, они порождаются любознательностью, пытливостью ума. Тот же В. Даль под любознательностью понимает «дельное любопытство, любовь к наукам, к познаниям, желание поучаться», а под любознательным — того, «в ком есть любознание». Так что можно сказать: чтобы в вашей голове возникла математическая проблема, проявляйте любопытство, изучая математику, укрепляйте в себе желание познать ее, «поучаться» ей.

Важными источниками, «генераторами» новых идей, новых проблем являются такие мыслительные операции, как аналогия, обобщение и конкретизация, анализ.

Таким образом, чтобы стать автором математической проблемы, нужно быть любознательным, проявлять интерес к математике, уметь сознательно пользоваться основными мыслительными операциями, владеть ими. С другой стороны, если вы открыли для себя математическую проблему и решили ее, то ваш интерес к математике укрепитесь, а владение мыслительными операциями станет более полным и надежным. Ваша любознательность будет от этого разностороннее и глубже.

Однако общие советы и призывы не смогут стать руководством к действию, если не показано, как ими пользоваться в конкретных случаях. К ним мы и перейдем.

От теоремы Пифагора — к...

Представьте двух учеников. Первый из них не проявляет любознательности в изучении математики. Он просто осознает и запоминает доказанное. Второй проявляет любопытство, любознательность. Пусть теперь они оба ознакомились с теоремой Пифагора: «*В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов*».

Первый из учащихся поймет, в чем состоит теорема, выучит ее доказательство, возможно, даже установит, что по гипотенузе и катету можно найти второй катет треугольника. Это, конечно, похвально. Но этого мало. А вот второй ученик посмотрит на теорему Пифагора иначе. Что в ней дано? Даны две стороны треугольника и угол между ними. А что нужно найти? Третью сторону треугольника. Подождите... А что, если угол между двумя данными сторонами не прямой? Он задан, но является тупым или острым? Как тогда найти третью сторону? Проблема! Как найти сторону треугольника по данным двум другим сторонам и углу между ними?!

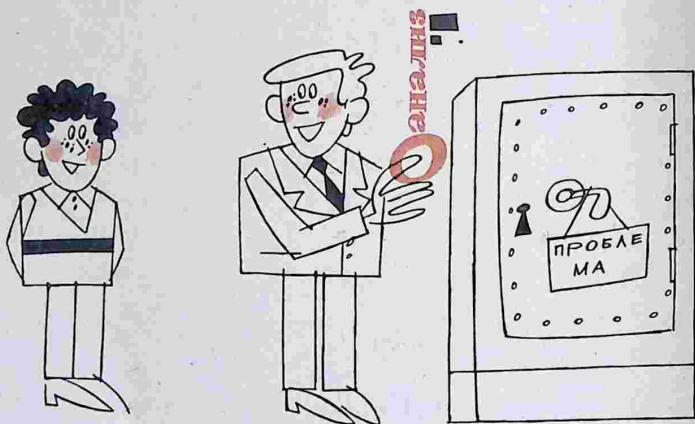
И эта проблема порождена пытливостью второго ученика. А вот первый ее не заметил. Что это дает второму ученику?

Да он установил связь между двумя задачами. В его сознании одна задача (теорема Пифагора) породила вторую. Установлена аналогия между ними. Такой ученик усваивает материал крупными блоками, а не мелкими разрозненными кусками. К тому же он изучает математику не равнодушно, а с увлечением.

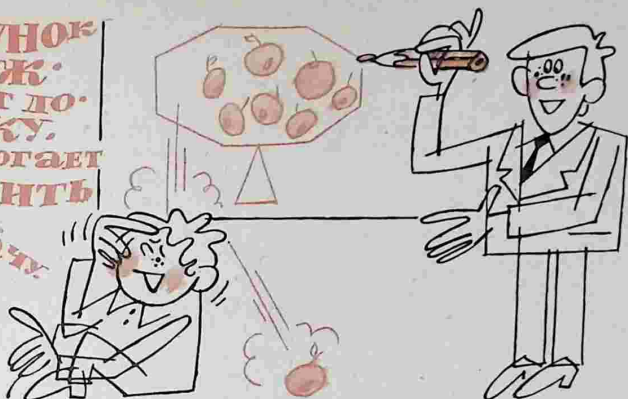
Известно, что положительные эмоции, увлеченность, интерес — необходимые условия настоящего овладения знаниями. То, что человека равнодушного может утомлять и раздражать, любознательного и увлеченного вдохновляет и окрыляет.

Если вы каким-то делом увлечены, вы его выполняете с радостью, ждете, когда им займетесь, не сетау на какую-либо перегрузку. Даже усталость от приятного труда желанна. А труд наиболее приятен тогда, когда вы имеете возможность проявлять пытливость и постоянно делаете это.

Итак, проблема сформулирована: зная две стороны треугольника и угол между ними, найти третью сторону. Но любознательность не остановится на постановке проблемы. Она не даст человеку успокоиться до тех пор



**РИСУНОК
ПОРОЖ-
ДАЕТ ДО-
ГАДКУ.
ПОМОГАЕТ
РЕШИТЬ
ЗАДАЧУ**



пока он не установит, как решить проблему, и не решит ее. Для решения проблемы нужно рассуждать, провести анализ. Займемся этим.

Итак, надо рассуждать. Но как это делать в данном случае? В этом могут помочь общие советы. Смотрите: поставленная проблема уже решена для случая, когда угол между данными сторонами прямой. Тогда надо просто воспользоваться теоремой Пифагора. Остаются два случая: 1) угол между двумя сторонами острый; 2) угол между данными сторонами тупой. В таких ситуациях полезно испытать идею: *нельзя ли неразрешенные случаи разрешить с помощью уже разрешенного?*

Чтобы воспользоваться этой идеей в рассматриваемой ситуации, нужно искомую сторону треугольника «сделать» стороной прямоугольного треугольника. Из этого прямоугольного треугольника и нужно попытаться найти искомую сторону. Чувствуете, в этом что-то есть? Появилась нить для решения проблемы. Правда, может оказаться, что нить эта порвется... Тогда вы, видимо, расстроитесь.

Не надо расстраиваться. Не впадайте в уныние. Не жалеете «потерянного» времени. Оно «потеряно» для того, кто привык изучать математику формально, чтобы запомнить, пересказать, получить желанную оценку в журнале — и все. Заметим, что при таком отношении к математике изучать ее с каждым годом, месяцем все труднее и труднее, потому что тогда человек не развивает в себе умение рассуждать, анализировать, проводить умозаключения, зачастую запоминает методы решения задач и доказательства теорем.

Если же вы хотите «войти» в математику по-настоящему, овладевайте умением проводить рассуждения, анализ, обобщение, пользоваться аналогией и т. д. Овладевайте методами познания математики, основными математическими идеями. Тогда трудности в изучении математики будут, но такими, с которыми вы будете успешно справляться, от преодоления которых будете получать удовлетворение.

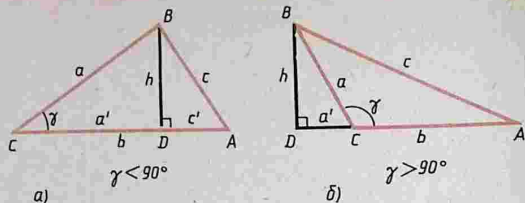


Рис. 38

А потому, даже если идея решения нашей проблемы не приведет нас к желанному результату, мы все равно окажемся в выигрыше.

Во-первых, круг возможных идей сузился.

Во-вторых, всякое разумное рассуждение развивает и обогащает, а наши рассуждения будут в данном случае именно такими.

В-третьих, мы приобретем некоторый опыт решения данной проблемы и это нам поможет в дальнейших поисках.

В-четвертых, мы будем ближе к решению проблемы, чем в начале поиска.

В-пятых, приобретенный опыт может оказаться полезным при решении других проблем.

Но тогда за дело! Прежде всего сделаем рисунки (рис. 38). Рисунок — это средство пробуждения нашей фантазии, интуиции, составления плана решения. Рисунок порождает догадку, помогает открытию.

Итак, обратимся к рисунку. Пусть нам даны стороны a и b и угол между ними γ . На рисунке 38, а $\gamma < 90^\circ$, на рисунке 38, б $\gamma > 90^\circ$. Надо найти c . Наша идея состоит во включении стороны c в прямоугольный треугольник, из которого с помощью теоремы Пифагора можно найти c . Поэтому естественно из вершины B опустить перпендикуляр на прямую AC .

Пусть D — основание этого перпендикуляра. Сторону c можно найти из прямоугольного треугольника ABD . Но для этого надо сначала найти катеты BD и AD . Для удобства (сокращения обозначений) обозначим BD через h , AD через c' .

Итак, надо найти h и c' (или их квадраты). Но это уж просто. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике вы уже знаете? Ну, так вот, получаем $h = a \sin \gamma$ (в случае а)) и $h = a \sin(180^\circ - \gamma)$ (в случае б)). В VIII классе доказывается, что $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$. Но тогда и в случае б) $h = a \sin \gamma$. Теперь как найти c' ? Знаете, при решении задач и доказательстве теорем всегда полезно ставить перед собой следующий вопрос: все ли данные мы использовали? Подумаем над ним сейчас.

Вы видите, данная сторона b нами еще не использовалась! Как ею воспользоваться для нахождения c' ?

Видим, что в случае а) $c' = b - a'$. В случае б) $c' = b + a'$. Что же остается? Остается найти a' ! А это просто: $a' = a \cos \gamma$ в случае а) и $a' = a \cos(180^\circ - \gamma)$. Но вы знаете, что $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$. Тогда получаем, что в случае б) $a' = -a \cos \gamma$ ($a' = CD$).

Теперь получаем в случае а) $c' = b - a \cos \gamma$, в случае б) $c' = b - a \cos \gamma$ (один и тот же результат!).

Наконец, можно найти квадрат c : $c^2 = h^2 + (c')^2 = a^2 \sin^2 \gamma + (b - a \cos \gamma)^2 = a^2 \sin^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma = a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Итак, имеем $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Теперь вы узнали, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, если искомая сторона противолежит острому или тупому углу...

И все? Вы на этом успокоились? Или вы уже устали? Тогда немного отдохните, а потом попробуйте проявить свою пытливость...

Вы знаете, тут напрашивается следующий вопрос. Получается, что при отыскании стороны треугольника в одних случаях нужно пользоваться одной формулой ($c^2 = a^2 + b^2$), в других — другой формулой ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$). А нельзя ли во всех случаях обойтись одной? А? Конечно! Если $\gamma = 90^\circ$, то $\cos \gamma = 0$, и получаем из последнего равенства $c^2 = a^2 + b^2$ тот же результат, что и при использовании теоремы Пифагора! Значит, формула $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ пригодна во всех случаях. Этот интересный вывод не означает, конечно, что мы не будем пользоваться теоремой Пифагора.

Если мы заранее знаем, что угол между двумя заданными сторонами треугольника прямой, то, конечно, воспользуемся теоремой Пифагора. Это проще.

Но если нас одолевает сомнение, верно ли мы воспроизвели равенство, выражающее теорему косинусов, то установленная связь между двумя формулами поможет нам в преодолении нашего сомнения.

Кроме того, если необходимо исследовать, как изменяется сторона треугольника в зависимости от меняющегося угла между другими двумя данными сторонами треугольника, то теперь нам уже ясно: для этого достаточно воспользоваться только равенством $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. А это уже упрощает исследование.

Доказанное нами предложение: *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними* — является теоремой и носит название теоремы косинусов.

Теперь можно расшифровать заголовок данного пункта «От теоремы Пифагора — к...»: «От теоремы Пифагора — к теореме косинусов». Теорема Пифагора является для теоремы косинусов частным случаем, конкретизацией. Теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора. Одним из проявлений любознательности является постоянное стремление обобщать уже известное или конкретизировать имеющиеся знания, выяснять, что мы получим применительно к тому или иному частному случаю. Таким образом, наш совет «быть пытливым» здесь конкретизируется: **стремись обобщать и рассматривать частные случаи.**

Примечание. Кто-то из вас может резонно задать следующий вопрос. Вот мы доказали теорему Пифагора. И мне тут же захотелось обобщить ее. А соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике еще не изучалось. И что такое косинус тупого угла, нам и не снилось. Как быть? Любознательность, выходит, есть, а удовлетворить ее невозможно!

Отвечаем. Вообще говоря, бывает и так. Имеющихся знаний еще мало,

чтобы провести обобщение. Но тогда хорошо бы спросить у учителя: вот вижу, что обобщение возможно, да нужны, видимо, еще какие-то сведения. Когда такие сведения появятся? При изучении какой темы? Учитель, конечно же, удовлетворит ваше любопытство (любопытство научное — порок, а достоинство).

Если необходимые знания входят в школьную программу по математике, то ждите своего часа, когда вы начнете обобщать. В противном случае учитель порекомендует вам изучить нужную литературу самостоятельно, включит этот вопрос в программу математического кружка.

Однако в данном случае обобщение возможно и без использования понятия косинуса. Тогда вместо угла γ понадобится другое данное — длина отрезка a' (длина проекции стороны a на прямую AC , рис. 38). Идея проведения обобщения остается прежней. Каким должен быть окончательный результат такого обобщения (без использования понятия косинуса), можно предсказать, пользуясь доказанной нами теоремой косинусов. Для случая $a \cos \gamma = \frac{a'}{a}$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{a'}{a} = a^2 + b^2 - 2ba'$.

Получаем: *квадрат стороны треугольника, противолежащей острому углу, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию на нее другой стороны.*

Для случая б) $\cos \gamma = -\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \angle BCD = -\frac{a'}{a}$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \left(-\frac{a'}{a}\right) = a^2 + b^2 + 2ba'$.

Получили: *квадрат стороны треугольника, противолежащей тупому углу, равен сумме квадратов двух других сторон плюс удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию на нее другой стороны.*

Сейчас мы получили два «бескосинусных» равенства. Но которое из них является обобщением теоремы Пифагора? Ведь в одном из них имеется в виду сторона, противолежащая острому углу, в другом — сторона, противолежащая тупому углу. А гипотенуза — это сторона треугольника, противолежащая прямому углу! Обобщения-то нет!

Правильно, нет. Пока нет. Чтобы получить обобщение, сначала заметим, что если $\gamma = 90^\circ$, то $a' = 0$, и тогда удвоенные произведения $2ba'$ в обоих равенствах обращаются в нуль.

Отсюда получаем, что $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. утверждение теоремы Пифагора.

А теперь, учитывая замеченное, изменим первую формулировку так: *квадрат стороны, противолежащей прямому или острому углу треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из них на проекцию на нее другой стороны.*

Полученное утверждение является обобщением теоремы Пифагора.

Аналогично, изменив вторую формулировку (о квадрате стороны, противолежащей тупому углу), получим также обобщенную формулировку теоремы Пифагора.

Получены два обобщения теоремы Пифагора. Их можно представить как одно обобщение следующей формулой и указанием к ее использованию: $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ba'$; знак «+» берется в случае, когда противолежащий сто-

роне c угол тупой, знак «—» берется, если указанный угол острый; если противолежащий стороне c угол прямой, можно брать любой из знаков.

Задание 1. Выведите последнее равенство: $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ba'$ (рис. 38) — без использования понятия косинуса.

Задание 2. Выясните, как будет изменяться сторона c треугольника, если стороны a и b не изменяют своей длины, а угол γ возрастает от 0 до 180° .

Возможно, тот, кто учится в VIII классе, возразит нам, что он доказывал теорему косинусов не тем способом, который здесь описан. «Его» способ, возможно, опирается на понятия вектора, суммы векторов и их скалярного произведения и намного короче нашего.

Идея векторного способа состоит в следующем.

Смотрите на рисунок.

Данный угол γ есть угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, поэтому $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ba \cdot \cos \gamma$. Этим можно воспользоваться для отыскания c . Но как? Для этого надо воспользоваться зависимостью между векторами, задаваемыми сторонами треугольника. Она такая: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. Обе части полученного равенства возведем скалярно в квадрат. Получим $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos \gamma$, т. е. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

Как просто!

Нельзя не согласиться, что приведенное доказательство лаконично и изяшно. Раз уж изучили векторы, то грех было бы не воспользоваться таким доказательством. Но для этого надо знать векторы! А предыдущее доказательство теоремы косинусов не нуждается в векторах. Кроме того, в векторном доказательстве преобладает алгебра, оно не пробуждает геометрическую интуицию, «не геометрично». Но это доказательство по-особому прекрасно своей краткостью.

Если же ограничиться целью — привести доказательство теоремы косинусов на экзамене, — можно отказаться от рассмотрения нашего способа доказательства (безвекторного способа).

Но тут опять заходит речь о важности быть любознательным. И любознательность здесь проявляется в выяснении: а имеются ли другие способы доказательства? Всегда интересно открыть новый способ решения задачи.

И с этой точки зрения вся наша работа, проведенная до рассмотрения векторного доказательства, важна и необходима. Кроме того, вероятность самостоятельного отыскания вами безвекторного способа получения теоремы косинусов намного выше, чем векторного, хотя первый способ и длиннее второго.

Задание 3. С помощью теоремы косинусов докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

Выше рассмотрено, как может возникнуть проблема обобщения теоремы Пифагора, какие другие проблемы в связи с этим возникают и как они решаются. Сейчас мы покажем, как возникает новая проблема благодаря использованию аналогии.

Стремление заметить аналогию, отыскать ее и воспользоваться ею еще одно проявление пытливости ума.

Если бы вам предложили написать сочинение о треугольнике, вы бы, видимо, писали его долго и оказалось бы оно длинным-предлинным. Попробуйте сейчас устно перебрать в голове хотя бы часть из того, что вы знаете об этой фигуре.

Вы сделали это? А теперь ответьте, выделили ли вы такое его свойство: треугольник разбивает плоскость на две области. Одна из этих областей конечная, другая — бесконечная.

Этим свойством обладают все простые многоугольники, но треугольник среди них выделяется тем, что имеет наименьшее число сторон.

Скорее всего, вы не обращали внимание на указанные особенности треугольника. Возможно, потому, что они кажутся вам тривиальными (т. е. чрезвычайно простыми, чересчур очевидными, не представляющими интереса, примитивными). На самом же деле свойства треугольника разбивать плоскость на две области, быть многоугольником с наименьшим числом сторон очень глубокие. Сомневаетесь?

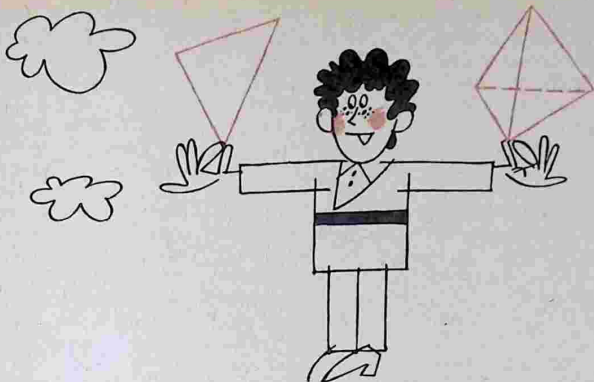
Сейчас мы рассеем ваши сомнения. Чтобы настроиться на наш рассказ, подумайте над его названием. Как вы думаете, что там скрыто за названием? Об этом и пойдет речь.

Итак, треугольник на плоскости — фигура особенная. А вот какая фигура, по-вашему, соответствует ей в пространстве? Ну, видимо, такая, которая пространство разбивает на две области, одна из которых конечная, другая — бесконечная. Из претендентов «на соответствие» вы отвергнете и сферу, и поверхность цилиндра, и поверхность конуса. А почему? Да как-то они не подходят. Отчего не подходят? Ведь они разбивают пространство на две области, одна из которых бесконечная, другая — конечная. Так в чем же дело? В поиске ответов на эти вопросы мы опираемся сейчас на геометрию.

**АНАЛОГИЯ-
ГЕНЕРАТОР**

ИДЕИ.





ческую интуицию, одновременно способствуя усилению интуитивного начала в себе. Говоря о треугольнике, мы говорим о его сторонах, об их числе. Применительно к телам вращения мы аналогии в этом не усматриваем. А вот многогранники... точнее, поверхности многогранников, более подходят. Мы говорим о гранях, об их количестве. Среди многогранников имеется такой, у которого наименьшее число граней. Таким многогранником является тетраэдр (четырёхгранник). Вы, вероятно, согласитесь, что среди фигур в пространстве тетраэдр наиболее близок к треугольнику на плоскости.

Ну и что? Чем этот вывод может быть полезен? Конечно, он интересен сам по себе. Но нельзя ли из него еще что-либо извлечь? Давайте порассуждаем.

Если две фигуры в чем-то сходны, аналогичны, то мы всегда ожидаем, что у них имеются еще какие-то сходные свойства. Но свойства треугольника нам известны довольно хорошо. А что, если, «танцуя» от этих свойств, заняться поиском соответствующих свойств тетраэдра? Например, около треугольника можно описать окружность, притом только одну. Вероятно, около тетраэдра можно описать сферу и притом только одну. Вот и появилась проблема: верно сформулированное с помощью аналогии утверждение или неверно? Как его доказать или опровергнуть? Давайте займемся поиском доказательства.

Что нам надо доказать? Существование точки, равноудаленной от вершин тетраэдра. Нужно отыскать какую-то идею доказательства. Для этого может оказаться полезным вопрос: не решали ли мы ранее сходную задачу? Да, решали. Мы находили геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника. Что представляет такое геометрическое место точек? Прямую, перпендикулярную плоскости треугольника и проходящую через центр описанной окружности. К идее использования этого геометрического места точек мы могли подойти и иначе, прибегнув к другому совету: не видишь, как решать задачу,— сделай послабление. Не можешь доказать существование точки, равноудаленной от четырех точек,— попробуй доказать это для

трех точек, не лежащих на одной прямой. Для трех точек задача решена ранее. Как этим воспользоваться для случая четырех точек?

Вы не устали рассуждать и размышлять? Знаете, ученики, не привыкшие это делать, в таких случаях обычно говорят: «Вы лучше сами нам проведите доказательство, а мы его повторим».

Но мы всего-навсего хотим научить вас рассуждать, думать, мыслить. Мы хотим, чтобы научный стиль мышления стал для вас привычным. А для этого нужно постоянно заниматься *настоящей интеллектуальной работой*. Отдохнули? Тогда продолжим наши рассуждения.

Давайте обратимся к аналогии. Нам надо доказать, что существует точка, равноудаленная от вершин тетраэдра. Но вернемся к аналогичной тетраэдру фигуре на плоскости — треугольнику. Как мы доказывали существование на плоскости треугольника точки, равноудаленной от его вершин?

Мы рассуждали так. Искомая точка равноудалена от концов стороны треугольника, следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру к этой стороне. Но она равноудалена и от концов другой стороны, значит, принадлежит серединному перпендикуляру ко второй стороне. Отсюда следует, что точка, равноудаленная от вершин треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. А что, если, решая такую же задачу для тетраэдра, поступить аналогично?

Искомая точка равноудалена от вершин грани тетраэдра, значит, принадлежит геометрическому месту точек пространства, равноудаленных от вершин этой грани. Но она равноудалена и от вершин другой грани, поэтому принадлежит еще одному *такому же* геометрическому месту точек. Теперь ясно, что надо доказать: прямая, перпендикулярная к одной грани и проходящая через центр описанной около нее окружности, пересекается с аналогичной прямой для второй грани. Если это докажем, то точка пересечения и будет искомой.

Ну что же, приступим к осуществлению составленного плана. Сделаем рисунок (без него трудно рассуждать) (рис. 39). Тетраэдр у нас изображен коричневым цветом. Все построения выполнены черными линиями. K — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Точка K является точкой пересечения серединных перпендикуляров KE и KF к сторонам AB

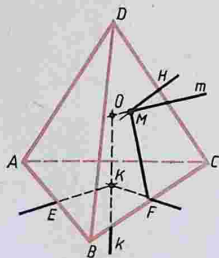


Рис. 39

и BC . k — прямая, перпендикулярная к плоскости ABC и проходящая через точку K и являющаяся геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин треугольника ABC . M — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника BDC , лежащих в плоскости этого треугольника. Она равноудалена от вершин грани BDC , т. е. M — центр описанной около треугольника BDC окружности; m — прямая, перпендикулярная плоскости BDC , проходящая через точку M . Эта прямая — геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника BDC .

Надо доказать, что прямые k и m пересекаются.

Прежде всего, прямые k и m не могут быть

параллельными. В противном случае плоскости ABC и ADC были бы параллельными. Остается доказать, что прямые k и m лежат в одной плоскости. Посмотрите на рисунок. Если эти две прямые лежат в одной плоскости, то в какой? Видимо, в плоскости KFM . Как это доказать? Давайте заметим сначала, какой особенностью обладает эта плоскость.

Прямая BC перпендикулярна плоскости KFM . Но тогда плоскость ABC перпендикулярна плоскости KFM и плоскость BDC перпендикулярна плоскости KFM . Поэтому если в плоскости KFM через точку K проведем прямую, перпендикулярную KF , то она будет перпендикулярной плоскости ABC , а потому совпадет с прямой k . Если через точку M в плоскости KFM проведем прямую, перпендикулярную MF , то она будет перпендикулярной плоскости BDC , а потому совпадет с прямой m .

Следовательно, прямые k и m лежат в плоскости KFM . Мы доказали, что они не параллельны, а значит, пересекаются. На рисунке точка пересечения обозначена буквой O .

Итак, точка O равноудалена от точек A, B и C , а также от точек B, C и D . Отсюда следует, что точка O равноудалена от вершин тетраэдра $ABCD$. Сфера с центром O и радиусом OA описана около тетраэдра. Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин любой из граней тетраэдра, есть прямая, проходящая через точку O . Поэтому эта точка единственна.

Итак, с помощью аналогии мы получили гипотезу: около тетраэдра можно описать сферу и притом только одну. Затем, опираясь на аналогию с доказательством утверждения, что около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну, мы составили план доказательства полученной гипотезы и осуществили его.

Таким образом, аналогия помогает сделать математическое открытие.

* * *

Мы рассмотрели один пример получения и доказательства гипотезы с помощью аналогии. Теперь вы можете расшифровать название данного пункта «От треугольника — к...»: «От треугольника — к тетраэдру». Нельзя, однако, считать возможности использования аналогии для получения гипотез в рассмотренном примере исчерпанными. Их еще много.

Чтобы показать это, обратимся еще к одному свойству треугольника: *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины.*

Какое же аналогичное предложение можно сформулировать применительно к тетраэдру? Чтобы установить это, нередко оказывается полезным выйти за рамки математики, обратиться к какой-либо физической модели. Представим треугольник как бесконечно тонкую однородную пластинку. Разобьем его на очень узкие полоски, параллельные какой-либо стороне. Центр массы каждой такой пластинки можно считать лежащим в «середине» пластинки, близкой по виду к отрезку (рис. 40).

Центры масс этих пластинок лежат поэтому на соответствующей медиане.

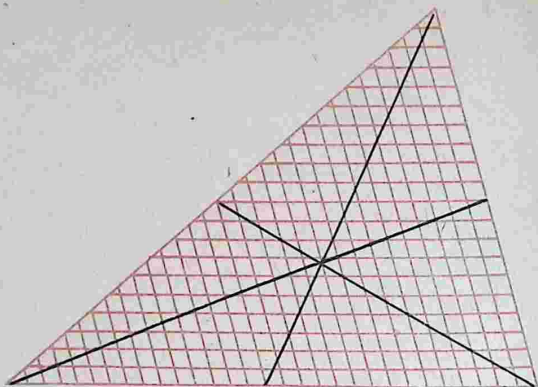


Рис. 40

Отсюда следует, что центр масс рассматриваемого треугольника лежит на его медиане. Но он должен принадлежать и второй медиане. Следовательно, центром масс треугольника является точка пересечения медиан.

А теперь посмотрим на медиану треугольника иначе. Она является отрезком, соединяющим вершину треугольника с серединой противоположной стороны. С другой стороны, с физической точки зрения ее можно считать отрезком, соединяющим вершину треугольника с центром массы противоположной стороны. Какой отрезок применительно к тетраэдру можно считать аналогичным медиане треугольника? Видимо, отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центром массы противоположной грани. Но тогда, пока на физическом языке, мы получаем гипотезу: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами масс противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в одном и том же отношении.

Сформулируем теперь эту гипотезу на языке геометрии. *Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, назовем медианой тетраэдра.* Тогда формулировка гипотезы приобретет вид: *медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в одном и том же отношении.* В каком отношении — это еще надо будет устанавливать.

Как доказать (или опровергнуть) гипотезу? Поскольку гипотеза выдвинута по аналогии со свойством медиан треугольника, то, вероятно, и доказательство гипотезы аналогично доказательству свойства медиан треугольника. Это предположение не исключает, конечно, существования другого способа доказательства. Во всяком случае, если не во всем доказательстве, то в какой-то его части применение аналогии может оказать помощь. Поэтому прежде чем начинать поиск доказательства гипотезы о медианах тетраэдра, освежим в памяти доказательство утверждения о свойстве медиан треугольника.

Пусть AE и CD — медианы треугольника ABC . M — точка их пересечения

СВОЙСТВА ЦЕНТРА МАСС ТЕТРАЭДРА АНАЛОГИЧНЫ СВОЙСТВАМ ЦЕНТРА МАСС ТРЕУГОЛЬНИКА.



(рис. 41). Проведем HF — среднюю линию треугольника AMC . DE — средняя линия треугольника ABC .

$$DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC, HF \parallel AC, HF = \frac{1}{2}AC.$$

Следовательно, $DE \parallel HF$ и $DE = HF$. Поэтому четырехугольник $DEFH$ — параллелограмм. Отсюда $HM = ME$, и, стало быть, $AH = HM = ME$, $DM = MF$, а потому $DM = MF = FC$.

Получили, что точка пересечения медиан делит любую медиану в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины. Но раз это так, то третья медиана любую из медиан AE и CD разделит также в отношении 2:1, считая от вершины, следовательно, пройдет через точку M пересечения этих медиан. Следовательно, *все три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины.*

В проведенных нами рассуждениях о медианах треугольника имеется один маленький дефект. Вы не заметили его? А он вот в чем. В самой первой строке рассуждений сказано: пусть M — точка пересечения медиан. Значит, мы считаем, что любые две медианы треугольника пересекаются. Но почему? И всегда ли? Во всяком ли треугольнике? Это надо выяснить.

Действительно, луч AE пересекает отрезок BC с концами на сторонах угла BAC (см. рис. 41), поэтому он проходит между этими сторонами. Отсюда следует, что луч AE пересекает всякий отрезок с концами на сторонах угла BAC , стало быть, и отрезок CD .

Мы доказали, что любые две медианы пересекаются. Теперь фраза «Пусть M — точ-

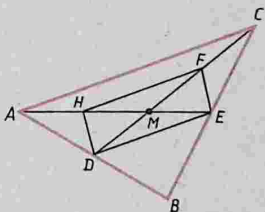


Рис. 41

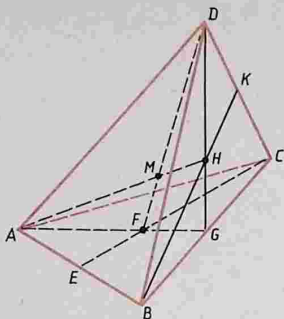


Рис. 42

Луч AH пересекает отрезок GD с концами на сторонах угла DAG , поэтому проходит между сторонами этого угла. Но тогда луч AH пересекает всякий отрезок с концами на сторонах угла GAD , а поэтому пересекает и отрезок DF .

Итак, мы доказали, что любые две медианы тетраэдра (на рис. 42 — медианы тетраэдра AH и DF) пересекаются. Точку пересечения медиан AH и DF обозначим буквой M .

Вопрос, проходят ли остальные медианы тетраэдра через точку M , остается пока открытым. Как же доказать, что другие медианы тетраэдра также пройдут через точку M ? Видимо, аналитично тому, как это доказано для медиан треугольника.

Вот если бы доказать, что точка пересечения медиан делит их в одном и том же отношении, считая, например, от вершины, то отсюда бы следовало, что любая третья медиана должна пересекаться с медианой, например, AH в точке M . Для доказательства изобразим треугольник ADG отдельно (рис. 43).

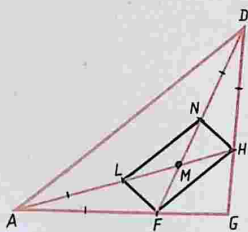


Рис. 43

ка пересечения медиан» не содержит в себе дефекта.

Приступим к доказательству гипотезы о свойстве медиан тетраэдра.

По аналогии сначала нам нужно доказать, что любые две медианы тетраэдра пересекаются, как и любые две медианы треугольника.

Пусть имеем тетраэдр $ABCD$ (рис. 42). F — точка пересечения медиан грани ABC . H — точка пересечения медиан грани BCD (на физическом языке — центры масс граней). Тогда DF и AH — две медианы тетраэдра. Обе они лежат в плоскости ADG . Далее рассуждения аналогичны тем, которые проводились при доказательстве свойства любых двух медиан треугольника пересекаться.

По аналогии с доказательством применительно к медианам треугольника надо построить параллелограмм со стороной FH ; концы стороны, противолежащей FH , должны принадлежать отрезкам AM и DM . Но как выбрать эти концы? При доказательстве свойства медиан треугольника мы проводили среднюю линию треугольника AMD . Сейчас на глаз видно, такое построение не приведет к параллелограмму. Почему? Да потому, что точки F и H не являются серединами сторон треугольника ADG . Но как тогда выбраны эти точки? Да, точка F делит сторону AG в отноше-

нии 2:1, считая от вершины A ; точка H делит сторону DG в отношении 2:1, считая от вершины D . Для медиан треугольника соответствующее отношение равно 1:1.

Что делать? Замечаем, что отрезок $FH = \frac{1}{3}AD$, это следует из подобия треугольников FHG и ADG . Значит, и сторона параллелограмма, противолежащая FH , должна быть равной одной трети AD . А для этого надо отложить отрезок $ML = \frac{1}{3}AM$ (рис. 43) и отрезок $MN = \frac{1}{3}DM$, т. е. отрезки AM и DM нужно делить на три равные части. Целесообразность такого деления вытекает и из соображений аналогии. При доказательстве свойства медиан треугольника стороны AG и DG были бы разделены на две равные части. Поэтому и отрезки AM и DM мы делили на две равные части. В случае же медиан тетраэдра стороны AG и DG разделены на три равные части, поэтому и отрезки AM и DM тоже нужно делить на три равные части.

Итак, мы отложили $ML = \frac{1}{3}AM$ и $MN = \frac{1}{3}DM$. Надо доказать, что четырехугольник $FLNH$ — параллелограмм. $FH = \frac{1}{3}AD$. Это следует из подобия треугольников FHG и ADG (по двум сторонам и углу между ними). $LN = \frac{1}{3}AD$, так как $\triangle LMN \sim \triangle AMD$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $FH = LN$.

Надо доказать еще, что $FH \parallel LN$.

Вспользуемся тем, что в гомотетии прямая, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную ей прямую.

а) В гомотетии с центром G и коэффициентом $\frac{1}{3}$ прямая AD перейдет в прямую FH . Следовательно, $FH \parallel AD$.

б) В гомотетии с центром M и коэффициентом $\frac{1}{3}$ прямая AD перейдет в прямую LN . Следовательно, $LN \parallel AD$.

Но две прямые (FH и LN), параллельные третьей (AD), параллельны между собой, т. е. $FH \parallel LN$.

Поскольку в рассматриваемом четырехугольнике $FHNL$ две противолежащие стороны равны и параллельны, то он является параллелограммом. Но точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам. Поэтому $FM = MN$, $HM = ML$. Отсюда получаем, что $AM = 3MH$, $DM = 3MF$. Последнее означает, что $AM:MH = 3:1$, $DM:MF = 3:1$.

Таким образом, точка пересечения диагоналей тетраэдра делит диагонали в отношении 3:1, считая от вершины. Поскольку этим свойством обладает точка пересечения любых двух медиан тетраэдра, то всякая другая медиана делит медиану AH в отношении 3:1, а потому проходит через точку M .

Гипотеза о медианах тетраэдра доказана. Она стала теоремой.

Сформулируем окончательно свойство медиан тетраэдра: *все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины.*

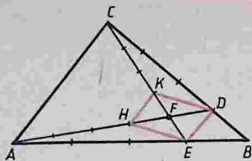


Рис. 44

Таким образом, используя аналогию, мы ввели понятие медианы тетраэдра. С помощью той же аналогии мы выдвинули гипотезу о свойстве медиан тетраэдра. Опираясь на аналогию, мы доказали выдвинутую гипотезу.

Теперь вы еще раз убедились, насколько полезно опираться на аналогию при проведении рассуждений и доказательств.

Вы, вероятно, заметили также, насколько важно быть широко эрудированным человеком: ведь понятие «медиана тетраэдра» получено нами путем использования знаний из курса физики.

Последние рассуждения мы проводили, возвратившись в планиметрию. Получается, что стереометрические задачи могут поставить новые проблемы и в планиметрии.

* * *

Метод, которым мы воспользовались при доказательстве свойства медиан треугольника и свойства медиан тетраэдра, назовем методом построения вспомогательного параллелограмма. Чтобы овладеть им более надежно, выполните следующие два задания:

Задание 4. Глядя на рисунок 44, сформулируйте гипотезу и доказите ее.

Задание 5. Обобщим предшествующие задачи, при решении которых мы пользовались методом построения вспомогательного параллелограмма.

Пусть на рисунке 44 $BE = \frac{1}{n}AB$, $BD = \frac{1}{n}BC$. Докажите, что точка пересечения AD и CE делит эти отрезки в одном и том же отношении, считая от вершины данного треугольника ABC . Найдите, чему равно это отношение.

Задание 6. Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Сформулируйте аналогичное предложение для тетраэдра и доказите его.

Задание 7. Середины сторон треугольника являются вершинами нового треугольника, стороны которого соответственно параллельны сторонам данного. Сформулируйте предложение, аналогичное данному, для тетраэдра.

Задание 8. Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Пересекаются ли в одной точке все высоты тетраэдра, проведенные из его вершин?

* * *

На этом пока наши путешествия от треугольника к тетраэдру (и обратно) мы закончим. Обратим теперь внимание на то, что аналогия помогает нам сформулировать новую гипотезу. Но полученная гипотеза может оказаться и неверной. К тому же нередко аналогия усматривается не в существе дела, а во внешней форме, в сходстве записи, символов. В таком случае говорят об ошибочной аналогии. Возникает вопрос: а можно ли что-либо «извлечь» из ошибочной аналогии? Об этом и пойдет речь в следующем пункте.

Нельзя ли извлечь пользу из ошибочных аналогий?

Всем известно тривиальное равенство $a(b+c)=ab+ac$. Оно выражает распределительный закон умножения относительно сложения. Но вот вы получили задание: найти значение $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, α и β — углы острые.

Нашелся ученик, который решил задачу так: $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1+1,7}{2} = \frac{2,7}{2} \approx 1,3$. Другого ученика осенила догадка:

если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ и угол α острый, то $\alpha = 30^\circ$; поскольку $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и угол β острый, то $\beta = 60^\circ$. Стало быть, $\alpha + \beta = 90^\circ$, откуда $\sin(\alpha+\beta) = \sin 90^\circ = 1$.

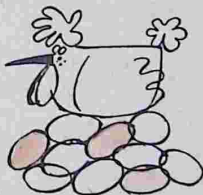
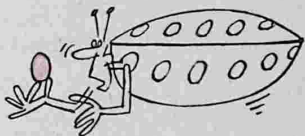
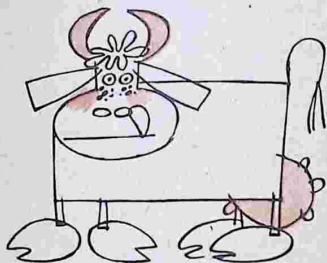
Где же ошибка? И в чем она? Вы правы, ошибся первый ученик. Его подвела ложная аналогия.

С выражением $\sin(\alpha+\beta)$ он поступил по аналогии с тем, как поступают с выражением $a(b+c)$. Распределительный закон умножения одночлена на двучлен он перенес не на умножение, а на знак синуса по отношению к сумме двух углов. Но для знака синуса распределительный закон не выполняется. Ответ второго ученика, решившего задачу верно, подтверждает это.

Первый ученик воспользовался аналогией на основании внешнего сходства в записях двух выражений.

В самом деле, обе символические записи сходны: в обоих случаях имеется сумма $b+c$ и $\alpha+\beta$, только вместо символа «а» во втором случае поставлен символ «sin». Внешне разницы в записи нет, а вот по существу... В одной записи «а» — это множитель, в другой «sin» — это знак функции.

ИТИЧЬЕ
МОЛОКО?



Итак, неверное применение аналогии нами «разоблачено». Но нельзя ли из этой неверной, ошибочной аналогии извлечь какую-то пользу? В данном случае можно.

Появляется, например, такая гипотеза: существуют такие значения α и β , для которых выполняется равенство $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$. Интересно выяснить, верна ли она.

Сразу видно, что если $\alpha = 360^\circ k$, то указанное равенство верное. Поскольку $360^\circ k$ — период синуса, то $\sin(360^\circ + \beta) = \sin \beta$.

С другой стороны, по проверяемой формуле получаем тот же результат: $\sin(360^\circ + \beta) = \sin 360^\circ + \sin \beta = \sin \beta$. Гипотеза, следовательно, верна. Однако ставить на этом точку неразумно и неинтересно. Хорошо бы найти все такие значения α и β , при которых равенство $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ будет верным.

Вот и появилась новая проблема. Человек пытливый не удержится, «пустится» в новые поиски, в разгадывание возникшей «загадки». Ну что же, пойдем вместе с ним. Для удобства назовем последнее равенство странным.

Так как же найти такие значения α и β , при которых это странное равенство верно? Тут надо найти какую-то идею... Давайте (нам это делать не впервые!) прибегнем к помощи анализа. Без анализа мы будем искать решение вслепую.

Для того чтобы странное равенство было верным, между значениями α и β должна выполняться какая-то зависимость. Но какая? И как ее найти?

Видим, что в левой части равенства аргумент сложный, он является суммой двух других аргументов α и β . В правой части аргументами являются α и β .

Идея может состоять в том, чтобы выполнить такие преобразования левой и правой частей странного равенства, при которых аргументы в обеих частях оказались бы одинаковыми. Что можно сделать с правой частью?

Ее можно преобразовать в произведение синуса полусуммы на косинус полуразности аргументов... Что это даст? Ведь в правой части сумма α и β . Это нас не устраивает. Надо, чтобы и в левой части была полусумма... Подождите, а что, если и левую часть преобразовать так, чтобы появилась полусумма α и β ? Это же можно сделать!

Достаточно рассматривать $\sin(\alpha + \beta)$ как синус двойного аргумента!

Вот что у нас тогда получается: $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

В левой и правой частях теперь есть одинаковый множитель $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Если он равен нулю, то равенство наше будет верным. При каком же условии этот множитель равен нулю? Если $\frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ k$. Отсюда $\alpha + \beta =$

$= 360^\circ k$. Получили, что если α и β в сумме дают число, кратное 360, то странное равенство верное. Теперь мы можем привести бесконечное множество пар значений α и β , при которых получим верное равенство. Например: 90° и 270° ; 150° и 210° ; -20° и 380° и т. д.

Итак, случай, когда $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$, мы учли. Теперь пусть $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$.

Тогда на этот множитель можно сократить, не теряя корней уравнения с двумя переменными α и β . После сокращения получаем $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$.

При каком условии косинусы двух аргументов равны? Это возможно в двух случаях: 1) $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} + 360^\circ m$ или 2) $\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{\alpha-\beta}{2} + 360^\circ n$.

Отсюда $\alpha + \beta = \alpha - \beta + 720^\circ m$, $2\beta = 720^\circ m$, $\beta = 360^\circ m$, или $\alpha + \beta = \beta - \alpha + 720^\circ n$, $2\alpha = 720^\circ n$, $\alpha = 360^\circ n$. Одинаковые значения α и β следовало ожидать: ведь α и β в условии задачи равноправны.

Итак, странное равенство $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ верное, если сумма градусных мер α и β кратна 360 или значение хотя бы одной из переменных α или β в градусах кратно 360. Поставленная проблема решена. Числа k, m, n в задаче целые.

А теперь подумайте: какую аналогичную задачу сформулировал бы пытливый ученик, решив только что рассмотренную? Сформулируйте ее и решите. Кстати, вот одна из возможных задач:

Задача 9. При каких значениях α и β верно равенство $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$, если $\beta = \alpha$?

А вот еще одно задание:

Задача 10. При каких значениях a и b верно равенство $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$?

Как видим, ошибочные аналогии могут порождать довольно интересные проблемы. Их решение, с одной стороны, требует свободного владения материалом, а с другой — способствует более глубокому овладению знаниями. Поэтому полезно быть пытливым даже тогда, когда встречаешься с, казалось бы, несуразными аналогиями. Из них все-таки кое-что можно извлечь и при этом, возможно, интересное и полезное.

Иногда в самом возникновении проблемы содержится идея ее решения

Представьте, что вы еще не знаете, как решить квадратное уравнение. Для начала учитель предложил вам такое простенькое уравнение: $x^2 = 4$. Вы тотчас его решили: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Затем вы выясняете, как решить уравнение такого вида в общем случае: $x^2 = a$; если $a < 0$ — корней нет; если $a = 0$, уравнение имеет единственный корень — 0; если $a > 0$, то $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$.

Теперь вам предлагается уравнение посложнее: $(x+1)^2 = 4$. Как его решить? Это несложно: $x+1 = 2$ или $x+1 = -2$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. В общем виде это выглядит так: $(x+a)^2 = b$. Если $b < 0$, уравнение корней не имеет. Если $b = 0$, то $x+a = 0$, откуда $x = -a$ — имеется единственный корень. Если же $b > 0$, то $x+a = \sqrt{b}$ или $x+a = -\sqrt{b}$, откуда $x_1 = -a + \sqrt{b}$, $x_2 = -a - \sqrt{b}$.

Кажется, все идет гладко, но вот кто-то заявил, что уравнение $(x+1)^2 = 4$ он стал решать иначе и у него ничего не получается. Он раскрыл скобки, а

**Иногда в самом
возникновении
проблемы содер-
жится
идея ее
решения**



4 перенес в левую часть с противоположным знаком: $x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$, после чего получил уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$. Что делать дальше, он не знает.

Понятно, вы ему объясните, что возводить в квадрат и переносить 4 в левую часть не нужно было, что он своими преобразованиями все усложнил и что надо было поступать как все во главе с учителем. И вы будете правы.

Ну, а тот ученик не сдается. Он спрашивает вас: а как все-таки поступить, если дано уравнение, например, такое: $x^2 - 6x - 5 = 0$? Как же его решить? Вы задумались над возникшей проблемой.

Для простоты вы решили вернуться к уравнению, полученному при неудачном решении уравнения $(x+1)^2 = 4$. А что нужно сделать, чтобы решить равносильное этому уравнению $x^2 + 2x - 3 = 0$, полученное незадачливым учеником? А что если... его «вернуть» к первоначальному виду? Как? А просто.

Представим левую часть «неудачного» уравнения иначе: $x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$. Первые три слагаемых левой части представляют собой квадрат суммы двух выражений: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Но это же удача! Получаем теперь, что $(x+1)^2 - 4 = 0$, откуда $(x+1)^2 = 4$, а дальше решаем полученное уравнение так, как мы это уже сделали!

Ну, а теперь мы, вероятно, справимся и с уравнением $x^2 - 6x - 5 = 0$? В чем идея? А надо выделить квадрат суммы... извините, здесь нужно выделить квадрат разности двух выражений так, чтобы неизвестное содержалось в нем, но не содержалось в «остающемся» выражении. Тогда получим $(x^2 - 6x + ?) - ? = 0$.

Но какие же числа должны стоять на месте вопросительных знаков? Ну, такие, чтобы в скобках оказался квадрат разности двух выражений. Поскольку $6 = 2 \cdot 3$, то вторым выражением является число 3, поэтому получаем $(x^2 - 6x + 9) - 14 = 0$, $(x-3)^2 - 14 = 0$, $(x-3)^2 = 14$, значит,

$x-3=\sqrt{14}$ или $x-3=-\sqrt{14}$, откуда $x_1=3+\sqrt{14}$, $x_2=3-\sqrt{14}$. Кратко оба корня записывают иногда так: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{14}$.

В рассмотренном случае в самом возникновении проблемы решения квадратного уравнения $x^2+2x-3=0$ содержится идея, воспользовавшись которой можно его решить. Эта идея состоит в выделении квадрата суммы (или разности) двух выражений, причем так, чтобы вне выделенного квадрата неизвестного не было. Но если эта идея приводит к решению конкретных квадратных уравнений, то почему бы ею не воспользоваться для решения квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$?

В вашем учебнике показано, как применение указанной идеи приводит к получению формулы нахождения корней любого квадратного уравнения (если, конечно, корни имеются).

Итак, полезно проанализировать, как возникла та или иная математическая проблема. Возможно, это поможет найти идею решения.

В следующем задании вам предлагается самостоятельно разобраться с аналогичным случаем.

Задача 11. Даны два отрезка a и b , причем $a > b$. Надо построить отрезок $x = \sqrt{(a+b)^2 - 4b^2}$. Как вы будете решать задачу?

Один из учеников осуществил возведение в квадрат, потом привел подобные члены... и задумался: что же делать дальше? Тупик? Ему стали разъяснять, что раскрывать скобки не нужно было, а нужно, наоборот, воспользоваться имеющейся записью. Какую идею вы извлечете из действий этого ученика? Воспользуйтесь этой идеей для построения отрезка $y = \sqrt{a^2 - 4ab - 5b^2}$, если отрезки a и b заданы и $a > 5b$.

А что получим в стереометрии?

Любознательный и пытливый ум приведет любого ученика с самого начала изучения им стереометрии к большому числу геометрических проблем. В пункте 2 вы уже убедились в этом. Рассмотрим еще ряд примеров.

1) Даны прямая a и точка B вне ее. Сколько существует прямых, содержащих точку B и не пересекающих прямую a ?

В планиметрии такая прямая единственна. А как обстоит дело в стереометрии? Так же или иначе?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, проведем плоскость α через прямую a и точку B (рис. 45). В этой плоскости через точку B проведем прямую b , параллельную прямой a . По аксиоме стереометрии существуют точки, не принадлежащие плоскости α . Пусть C именно такая точка. Тогда

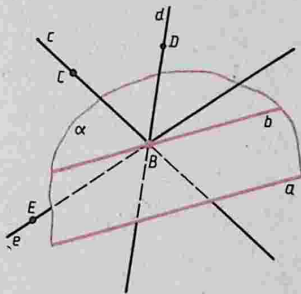


Рис. 45



прямая BC имеет с плоскостью α только одну общую точку B , так как в противном случае она бы лежала в этой плоскости и точка C принадлежала бы плоскости α , а это не так. Здесь мы использовали, как вы заметили, теорему: если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости. Итак, имеем: прямая a лежит в плоскости α , а прямая c пересекает эту плоскость в точке B , которая не принадлежит прямой a . Значит, прямая c не имеет общих точек с прямой a . Таким образом, через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести в пространстве более чем одну прямую, не имеющую общих точек с данной прямой.

Аналогично тому, как была построена прямая c , можно построить другие прямые — e , d и т. д., не имеющие с прямой a общих точек (см. рис. 45).

Итак, через точку вне данной прямой a можно провести в пространстве много (можно доказать — бесконечно много) прямых, не имеющих общей точки с данной прямой. Одна из них будет параллельной a .

Полученный вывод важен. Вы убедились, что если некоторая прямая не имеет общих точек с данной прямой, то это еще не означает, что она параллельна данной прямой. Необходимо еще доказать, что эти прямые принадлежат одной плоскости, и тогда делать заключение об их параллельности.

2) До изучения стереометрии мы хорошо знали, что через каждую точку можно провести прямую, перпендикулярную данной, и притом только одну. Но это предложение было верным в планиметрии. Верно ли это предложение для пространства? Давайте выясним. Вот вам и новая проблема!

Пусть a — данная прямая и B — точка вне ее (рис. 46). Через прямую a и точку B проведем плоскость α . В этой плоскости через точку B можно провести прямую, перпендикулярную a , и притом только одну. Таким образом, в пространстве через точку вне прямой можно провести только одну прямую, пересекающую данную прямую и ей перпендикулярную.

Выясним теперь, сколько прямых, перпендикулярных прямой a , можно провести через точку A этой прямой (рис. 46). В плоскости α через точку A можно провести прямую, перпендикулярную a (на рисунке это прямая m). Через точку, взятую вне плоскости α , и прямую a проведем плоскость β . В этой плоскости через точку A также можно провести прямую, перпендикулярную a (на рисунке это прямая m_1). Возьмем затем точку, не принадлежащую плоскостям α и β ; через прямую a и эту точку проведем плоскость γ . В плоскости γ проведем через A прямую m , перпендикулярную прямой a . Видим, что через точку A прямой a мы провели уже три прямые, перпендикулярные a . Этот процесс построения можно продолжать неограниченно. Таким образом, через точку на прямой в пространстве можно провести сколько угодно прямых, перпендикулярных данной прямой.

Как видим, предложения, доказанные в планиметрии (для одной плоскости), могут оказаться неверными, когда имеется в виду пространство.

Задание 12. В VI классе было доказано, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Верно ли это утверждение для пространства?

Задание 13. В планиметрии доказано, что через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести окружность и притом только одну. Верно ли это утверждение для пространства? Сколько существует сфер, проходящих через указанные три точки?

3) Поговорим о геометрических местах точек на плоскости и в пространстве. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину, утверждает одна из теорем планиметрии. Короче: геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Верно ли данное утверждение в пространстве? На рисунке 47 прямая s — серединный перпендикуляр к отрезку AB . O — середина отрезка AB , C — точка, равноудаленная от точек A и B . Прибегнем теперь к наглядным механическим представлениям. Представьте, что прямая s вращается, как

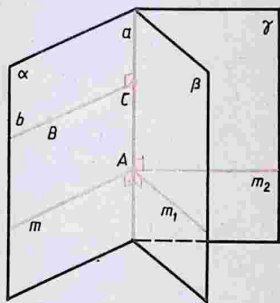


Рис. 46

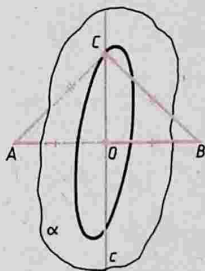


Рис. 47

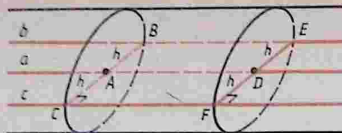


Рис. 48

плоскости α равноудалены от концов отрезка AB . Точки, не принадлежащие плоскости α , не равноудалены от точек A и B . Таким образом, *геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.*

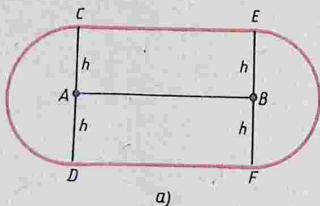
Вот еще одно популярное в планиметрии геометрическое место точек: все точки, удаленные от данной прямой на одно и то же заданное расстояние, образуют две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на заданное расстояние.

Пусть в некоторой плоскости прямые b и c параллельны прямой a и отстоят от нее на одно и то же расстояние h (рис. 48). Проведем в упомянутой плоскости отрезки BC и EF с концами на прямых b и c и перпендикулярные этим прямым.

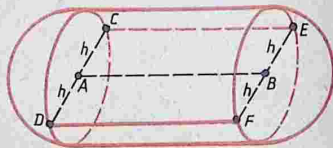
Теперь представим, что $BEFC$ — прямоугольная рамка, вращающаяся вокруг оси a (см. рисунок). Участки BE и CF этой рамки при вращении опишут боковую поверхность цилиндра, основаниями которого являются круги, описанные участками BC и EF . Ясно, что все точки боковой поверхности образованного при вращении цилиндра удалены от прямой a на одно и то же заданное расстояние h . Прямые b и c при вращении вокруг прямой a образуют бесконечную цилиндрическую поверхность. Все точки этой поверхности удалены от прямой a на данное расстояние h . Точки, не принадлежащие цилиндрической поверхности, находятся от прямой a на расстоянии, не равном h .

Таким образом, *геометрическое место точек пространства, удаленных от данной прямой на заданное расстояние, есть цилиндрическая бесконечная поверхность с осью a и радиусом, равным заданному расстоянию.*

Рассмотрим еще один пример рождения геометрической проблемы при переходе от планиметрии к изучению стереометрии.



а)



б)

Рис. 49

Что представляет собой геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от заданного отрезка? На рисунке 49, а задан отрезок AB . Геометрическое место точек, отстоящих от отрезка AB на расстояние h , состоит из отрезков CE , DF и двух полуокружностей с центрами A и B и радиусами h (на рисунке оно изображено коричневым цветом). Так обстоит дело в планиметрии.

Какую же фигуру образует множество всех точек, удовлетворяющих указанному свойству, в пространстве? Представьте, что указанное плоское геометрическое место точек вращается около отрезка AB как вокруг оси (рис. 49, б). Тогда отрезки CE и DF опишут боковую поверхность цилиндра; полуокружности с диаметрами CD и EF опишут полусферы. Всякая точка, принадлежащая боковой поверхности цилиндра или образовавшимся полусферам, удалена от отрезка AB на расстояние h . Точки, занимающие другое положение, удалены от отрезка AB на другое расстояние.

Таким образом, геометрическое место точек пространства, удаленных от данного отрезка на данное расстояние, представляет собой объединение боковой поверхности цилиндра, осью которой служит данный отрезок, с двумя полусферами, центрами которых служат концы данного отрезка, а радиусы равны заданному расстоянию (см. рис. 49, б).

За д а н и е 14. Что представляет собой геометрическое место точек, равноотстоящих от вершин прямоугольника: а) на плоскости; б) в пространстве?

Итак, мы увидели, что перенос геометрических знаний из планиметрии в стереометрию приносит много математических проблем. Одна из черт пытливого в области математики человека — это стремление выяснить, как изменится то или иное утверждение планиметрии при переходе его в стереометрию.

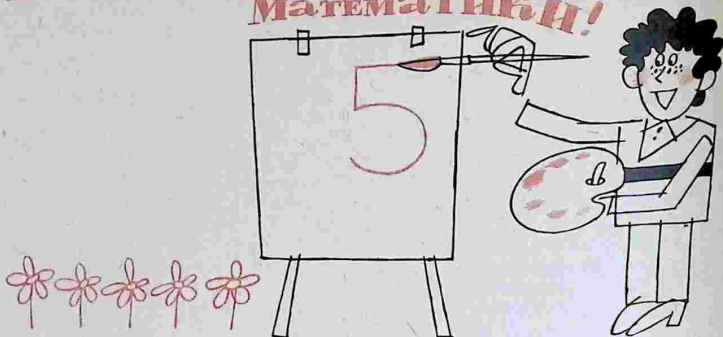
Заметим, что, рассматривая геометрические места точек в пространстве, мы стремились добиться хороших наглядных представлений, понимания существа дела и зачастую поступались строгостью изложения, полнотой обоснования, доказательства. Просим читателя учесть это.

Маленькое заключение

Итак, мы рассмотрели с вами, как рождаются новые математические проблемы, гипотезы, как они разрешаются. Хотелось бы, чтобы эта сторона математической деятельности стала вашей потребностью, неотъемлемой чертой вашей личности. Постоянный интерес к тому, как возникают новые, пусть небольшие, математические проблемы — один из самых эффективных способов поддержания и развития интереса к изучению математики. Если вы еще и наделены страстью во что бы то ни стало решить появившиеся проблемы, вас всегда будет сопровождать счастье математических открытий. Более того, оно будет внутри вас. Да и нужно иметь в виду, что новые всходы увлекательных математических проблем могут появиться лишь в трудах над разрешением предшествующих им.

И тут мы приходим к мысли о необходимости овладения той математикой, которая изложена в школьных учебниках... Правда, математику можно изучать по-разному. Можно только выучивать, а можно изучать ее пытливо, развивая и совершенствуя свой математический склад ума. Впрочем, уверены, что вы предпочтете последнее...

ХОЧУ БЫТЬ ТВОРЦОМ МАТЕМАТИКИ!



Ответы, указания, решения к заданиям из рассказа «Как рождаются проблемы».

З а д а н и е 1. 1-й случай. Угол, противолежащий стороне c , острый (рис. 38, а).

Сначала осознайте план решения. Не изучайте предлагаемое решение строку за строкой в слепую. При таком подходе усвоение будет краткосрочным, непрочным, принесет малую пользу. Сначала подумайте над планом сами. Подумали? Теперь попробуйте осуществить его самостоятельно. Самостоятельно решенная задача дороже десятка выученных готовых решений.

А вот наш план решения задачи. Он обязательно совпадает с вашим и совсем обязательно лучше вашего. Воспользуйтесь им на крайний случай — когда у вас что-то не получается.

1) Воспользовавшись теоремой Пифагора, выразим c^2 через h и c' .

2) Снова с помощью теоремы Пифагора выразим h^2 через a и a' . Вы помните, что нам сейчас дано a , a' — проекция a на b , и b ? Затем выразим c' через b и a' .

3) Подставим полученные значения h^2 и c' в равенство, полученное вначале, выполним тождественные преобразования, получим нужное равенство.

Если вам понятен предложенный план и ничего лучшего вы предложить не можете, приступайте к его выполнению... Вы получили желанное равенство?

Приступайте к выполнению следующего задания... Или у вас что-то не получается? Ну, тогда вот решение. Кстати, его не стоит просматривать сразу до конца. Рассмотрите ту часть, после которой вы почувствуете в себе силы продолжить решение самостоятельно.

$$1) c^2 = h^2 + (c')^2.$$

$$2) h^2 = a^2 - (a')^2, c' = b - a'.$$

$$3) c^2 = a^2 - (a')^2 + (b - a')^2 = a^2 - (a')^2 + b^2 - 2ba' + (a')^2 = a^2 + b^2 - 2ba'.$$

2-й случай. Угол, противолежащий стороне c , тупой (рис. 38, б).

План решения такой же. Под отрезком c' , как и в предыдущем случае, будем подразумевать проекцию c на прямую AC ; $c' = AD$ (как и в первом случае). Отличие лишь в том, что $c' = b + a'$. В итоге получим $c^2 = a^2 + b^2 + 2ba'$.

3-й случай. Противолежащий стороне c угол прямой.

Тогда a' равно нулю. Оба полученных равенства дают тогда один и тот же результат: $c^2 = a^2 + b^2$, выражаемый теоремой Пифагора. Для третьего случая, следовательно, подходит любая из двух полученных формул.

Задание 2. По теореме косинусов $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$. При возрастании γ от 0 до 180° $\cos \gamma$ убывает от 1 до -1 , поэтому $2ab \cos \gamma$ будет убывать от $2ab$ до $-2ab$, а $-2ab \cos \gamma$ будет возрастать от $-2ab$ до $2ab$.

В предельном случае, когда $\gamma = 0$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$.

В другом предельном случае, когда $\gamma = 180^\circ$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$.

Таким образом, при возрастании угла γ от 0 до 180° сторона c возрастает от $|a-b|$ до $a+b$, не включая эти два значения.

Задание 3. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника.

Дано: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказать: угол, противолежащий стороне c , прямой.

Доказательство. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, где γ — угол треугольника, противолежащий стороне c . По условию $c^2 = a^2 + b^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Отсюда $\cos \gamma = 0$, поэтому $\gamma = 90^\circ$.

Задание 4. На рисунке 44 отрезки AB и CB разделены на 4 равные части. Точка E делит сторону AB в отношении 3:1, считая от точки A . Точка D делит сторону CB в отношении 3:1, считая от точки C . Отрезки AD и CE анало-

гичны медианам треугольника на рисунке 41 и отрезкам AH и DF на рисунке 43.

По аналогии в данном случае отрезки AD и CE должны пересекаться и точкой пересечения делиться в отношении 4:1.

Докажем эту гипотезу.

1) Докажем сначала, что отрезки AD и CE пересекаются. Доказательство аналогично предыдущим: о точке пересечения медиан треугольника и точке пересечения медиан тетраэдра. Луч AD проходит между сторонами угла BAC , поскольку пересекает отрезок BC с концами на сторонах угла. Следовательно, он пересекает отрезок CE с концами на сторонах названного угла.

Аналогично луч CE пересекает отрезок AD . Значит, отрезки AD и CE пересекаются. Точку пересечения обозначим F .

2) Докажем, что $AF:FD = CF:FE = 4:1$. Доказательство проведем аналогично тому, как мы это делали при установлении свойства медиан тетраэдра. На отрезке AF возьмем точку H , такую, что $AH:HF = 3:1$. На отрезке CF возьмем точку K , такую, что $CK:KF = 3:1$. $\triangle EDB \sim \triangle ACB$, причем коэффициент подобия $k = \frac{1}{4}$. Следовательно, $ED = \frac{1}{4}AC$. Указанные треугольники гомотетичны с центром гомотетии B , поэтому $ED \parallel AC$. Треугольники



HKF и ACF гомотетичны с центром гомотетии F и коэффициентом гомотетии, равным $\frac{1}{4}$, по-

этому $HK = \frac{1}{4}AC$ и $HK \parallel AC$. Получили, что $ED = HK$ и $ED \parallel HK$. Отсюда следует, что четырехугольник $HKDE$ — параллелограмм. Следовательно, $HF = FD$, откуда $AF:FD = 4:1$, $KF = FE$, а это значит, что $CF:FE = 4:1$.

Задача 5. Доказательство совершенно аналогично предыдущему. Нужно только вместо числа 4 подставить число n , а вместо числа 3 — число $n - 1$. Проведите рассуждения самостоятельно. Вспомогательный параллелограмм строится а н а л о г и ч н о. Для проведения доказательства можно воспользоваться рисунком 44. Получим, что $AF:FD = CF:FE = n:1$.

Задача 6. Во всякий тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну. Докажем это.

Что нам надо доказать? Что существует точка, равноудаленная от всех граней тетраэдра. Она и будет являться центром вписанной в тетраэдр сферы. Радиус вписанной сферы будет равен длине перпендикуляра, опущенного из центра сферы на любую из граней тетраэдра. Основание любого из таких перпендикуляров есть точка касания сферы с соответствующей гранью.

Поставим перед собой сначала более простую задачу: найти точки, равноудаленные от граней двугранного угла тетраэдра. Причем нас будут интересовать те из них, которые ле-

жат внутри тетраэдра, поскольку точки вне тетраэдра не могут быть центрами вписанной сферы.

Возьмем сначала, например, двугранный угол $ABCD$ (рис. 50). Точки тетраэдра, равноудаленные от полуплоскостей ABC и DBC с общей ограничивающей их прямой BC , лежат в плоскости симметрии, проходящей через BC . Плоскость симметрии пересекает отрезок AD с концами в гранях двугранного угла $ABCD$ в некоторой точке E . $\triangle BEC$ является сечением тетраэдра рассматриваемой плоскостью симметрии. Искомая точка, равноудаленная от граней двугранного угла $ABCD$ и являющаяся центром вписанной сферы, принадлежит треугольнику BEC (его внутренней области). Возьмем затем двугранный угол $DABC$. Точки тетраэдра, равноудаленные от его граней, принадлежат их плоскости симметрии, проходящей через прямую AB . Плоскость симметрии пересекает отрезок CD с концами в гранях рассматриваемого двугранного угла в некоторой точке F . $\triangle AFB$ является сечением многогранника плоскостью симметрии. Искомый центр вписанной в тетраэдр сферы принадлежит треугольнику AFB (его внутренней области).

Поскольку центр вписанной сферы должен принадлежать и сечению AFB , и сечению BEC , то он принадлежит их линии пересечения. Построим ее. Точка B — общая точка сечений. Точка K , являющаяся точкой пересечения отрезков CE и AF , также общая точка сечений. Следовательно, линией пересечения двух построенных сечений является отрезок BK . Всякая точка этого отрезка равноудалена от полуплоскостей, образующих двугранный угол с ребрами AB и BC .

Рассмотрим теперь двугранный угол $BACD$. Плоскость его симметрии, проходящая через прямую AC , пересекает отрезок BD в некоторой точке L . $\triangle ALC$ является сечением тетраэдра плоскостью симметрии. Все точки треугольника ALC равноудалены от граней двугранного угла $BACD$, поэтому искомый центр вписанной сферы принадлежит этому треугольнику.

Сечения ALC и BEC имеют две общие точки:

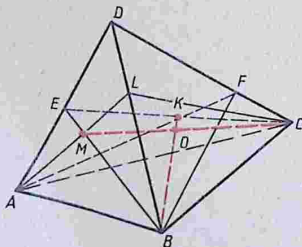


Рис. 50

С и точку M пересечения отрезков AL и BE . Следовательно, эти два сечения пересекаются по отрезку CM . Точки этого отрезка равноудалены от граней BAC , BDC , ADC , ABC двугранных углов с ребрами BC и AC соответственно. Отрезки BK и CM лежат в треугольнике BEC , поэтому пересекаются в некоторой точке O . Точка O равноудалена от всех граней тетраэдра.

Существование сферы, вписанной в тетраэдр, доказано. Ее единственность следует из единственности построенной точки O .

За д а н и е 7. *Отрезки, соединяющие точки пересечения медиан граней тетраэдра, являются ребрами нового тетраэдра, грани которого соответственно параллельны граням данного.*

Аналогия здесь в том, что середины сторон треугольника являются при использовании физической интерпретации центрами масс сторон треугольника, а точки пересечения медиан граней являются с физической точки зрения центрами масс граней. В том и другом случае получилась фигура того же наименования.

Вот другая формулировка той же гипотезы. Плоскости, проведенные через каждую тройку точек пересечения медиан граней тетраэдра, ограничивают тетраэдр, грани которого соответственно параллельны граням данного тетраэдра.

Для доказательства нужно прежде всего построить центры тяжести граней данного тетраэдра. Они являются точками пересечения медиан граней (см. рис. 51). На рисунке точки E, F, K, L, M — середины ребер тетраэдра $ABCD$, N, O, P, Q — центры масс его граней. Точки N, P, Q боковых трех граней данного тетраэдра являются вершинами треугольника NPQ . Соединив их с центром масс основания данного тетраэдра, получим новый тетраэдр $NPQO$.

Остается доказать параллельность соответствующих граней двух тетраэдров. Для этого естественно воспользоваться признаком параллельности плоскостей: если одна из плоскостей параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то плоскости параллельны.

Выясним, не параллельны ли соответствующие

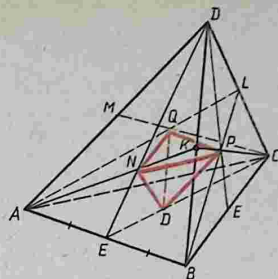


Рис. 51

ребра тетраэдров. Возьмем ребро QP . Оно является стороной треугольника QLP . Этот треугольник гомотетичен треугольнику ALB ($k = \frac{1}{3}$), поэтому $QP \parallel AB$. Ребро NP является стороной треугольника NKP , гомотетичного треугольнику AKC (K — центр гомотетии, коэффициент гомотетии равен $\frac{1}{3}$). Поэтому $NP \parallel AC$. Получили, что грани NPQ и ABC параллельны.

Аналогично доказывается параллельность других граней.

Заметим, что ребра данного и построенного тетраэдров также попарно параллельны.

За д а н и е 8. С помощью аналогии формулируем следующую гипотезу: высоты тетраэдра, проведенные из его вершин, пересекаются в одной точке.

Пусть DE — одна из высот тетраэдра $ABCD$ (рис. 52). Из точки D опустим перпендикуляр DF на AB . По теореме о трех перпендикулярах $FE \perp AB$. $\triangle DFK$ — сечение тетраэдра плоскостью FDE . Плоскость DFE перпендикулярна плоскости ADB , так как плоскость ADB проходит через прямую AB , перпендикулярную плоскости DFE . Высота тетраэдра, проведенная из вершины C , лежит в плоскости, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости ADB .

В качестве такой плоскости возьмем плоскость, параллельную плоскости FDK . Для этого про-

1) Строим отрезок $c = a + b$ и отрезок $k = 2b$.

Тогда получаем равенство $x = \sqrt{c^2 - k^2}$.

2) Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетом k . Второй катет построенного треугольника и есть отрезок x .

Отметим, что имеется еще один простой способ построения отрезка x . Под корнем разность квадратов. Разложив ее на множители, получим $x = \sqrt{(a+3b)(a-b)}$. Построим отрезки $c = a + 3b$ и $k = a - b$. Теперь имеем $x = \sqrt{ck}$. Отрезок x можно построить теперь как среднее геометрическое отрезков c и k .

Искомый отрезок x существует, если $a > b$. Ученик, который произвел возведение в квадрат суммы a и b , а затем привел подобные члены, получил такое подкоренное выражение: $a^2 + 2ab - 3b^2$.

Что делать дальше? Тупик. А вот если бы он сохранил под корнем разность квадратов двух выражений, выполнил бы построение сравнительно просто.

Отсюда идея: если под корнем встретится выражение, похожее на полученное учеником, то надо, наоборот, постараться выделить квадрат суммы или разности двух выражений. Этой идеей и нужно воспользоваться для построения отрезка y .

$$a^2 - 4ab - 5b^2 = (a^2 - 4ab + 4b^2) - 9b^2 = \\ = (a - 2b)^2 - 9b^2. \text{ Теперь имеем } y = \\ = \sqrt{(a - 2b)^2 - 9b^2}.$$

Теперь ясен план построения отрезка y :

1) Строим отрезки $c = a - 2b$ и $k = 3b$.

2) Получили равенство $y = \sqrt{c^2 - k^2}$. Строим прямоугольный треугольник по катету k и гипотенузе c . Второй катет построенного треугольника и есть искомый отрезок y .

Выполните построение отрезка y как среднего геометрического двух отрезков.

Задача 12. Пусть даны прямая a и точки A и B , ей принадлежащие (рис. 53). Возьмем некоторую точку C , не принадлежащую a , и проведем плоскость α через прямую a и точку C . В этой плоскости проведем прямые a_1 и b , перпендикулярные прямой a . $a_1 \parallel b$.

Теперь возьмем точку D , не принадлежащую плоскости α , и проведем через прямую a и эту точку плоскость β . Через точку B в плоскости β проведем $k \perp a$. Прямая k не имеет общих

точек с прямой a_1 и не параллельна ей, так как через точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Прямые k и a_1 скрещивающиеся.

Таким образом, в пространстве есть две прямые, перпендикулярные третьей, необязательно параллельные. Поэтому на случай пространства указанное в задании утверждение должно быть уточнено следующим образом: *если две прямые перпендикулярны третьей и лежат в одной плоскости, то они параллельны*. Стоит только опустить в формулировке слова «и лежат в одной плоскости», утверждение будет неверным.

Задача 13. Окружность — фигура плоская. Но через три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. В этой плоскости через указанные три точки можно провести окружность и притом только одну. Следовательно, через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно в пространстве, как и на плоскости, провести окружность и только одну.

Количество сфер, проходящих через три точки, не принадлежащие одной прямой, равно количеству точек, равноудаленных от данных трех точек. Проведем через центр окружности, проходящей через заданные три точки, прямую, перпендикулярную к плоскости, определяемой этими точками. Всякая точка проведенной прямой равноудалена от заданных трех точек, поэтому является центром сферы, проходящей через них.

Таким образом, существует бесконечно много

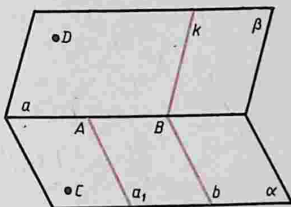


Рис. 53

сфер, проходящих через три точки, не принадлежащие одной прямой.

Задание 14. В планиметрии геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, состоит из одной точки. Она является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (и центром описанной около треугольника окружности).

В пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности и перпендикулярная плоскости треугольника. Эта прямая является линией пересечения трех плоскостей, перпендикулярных сторонам треугольника и проходящих через их середины.

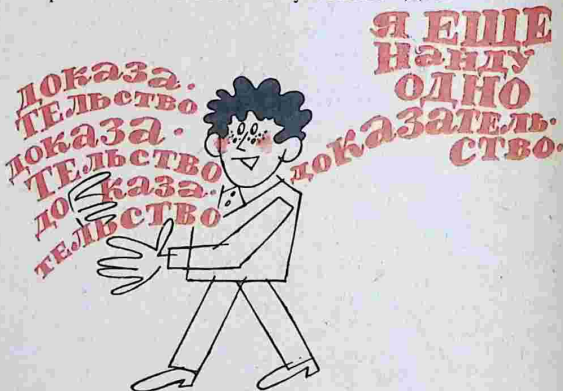
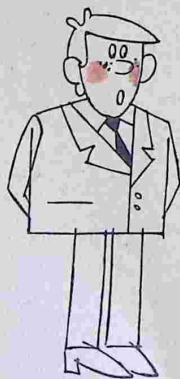
СТЕПА МОШКИН ИЩЕТ ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (IX—X классы)

И вот я вновь на занятии математического кружка Петра Ивановича. На доске крупно написано: *Я нашел другое доказательство!!!*? Поставленный вслед за этой записью явно другой рукой большой вопросительный знак как бы призывал: не торжествуй раньше времени, проверь еще раз — а вдруг ошибка? Тогда доказательства нет. Впрочем, автор вопросительного знака, возможно, имел в виду другое. Может, он спрашивал: «Неужели твое доказательство не было известно раньше? Или ты открыл давно известное?»

«Тот, кто в школьные годы самостоятельно открывает ранее найденное другими, — тот рано или поздно установит то, о чем не знал никто до него», — подумал я.

Звонок. Петр Иванович начал очередное занятие математического кружка.

Петр Иванович. Вы хорошо знаете, как доказывается признак перпендикулярности прямой и плоскости в учебнике. Доказательство,



конечно, не простое. Но и не такое уж страшное, как может показаться на первый взгляд. Но вот наш староста Степа Мошкин захотел найти более простое доказательство. Что из этого получилось, он сейчас и расскажет.

Коля. Зачем. Петр Иванович, извините, пожалуйста, но зачем нам выслушивать еще одно доказательство? По-моему, достаточно того, что имеется в учебнике. На экзаменах ответим. Давайте лучше повторим доказательство какой-нибудь другой теоремы или решим задачу. Ну зачем доказывать доказанную теорему? Неинтересно! К тому же еще неизвестно, верно ли Степино доказательство. Зря время потратим только.

Петр Иванович. Каково мнение у других?

Ваня Синицын. У нас занятие кружка. Математического кружка! А не занятие с отстающими. Теоремы можно «выучивать» и дома по учебнику. А вот других доказательств в учебнике нет. Давайте послушаем Степу Мошкина.

Саша Смышленный. Не пойму, почему Коле другое доказательство неинтересно? Ты, Коля, хотел бы решить задачу. Так она тебе предложена!

Коля. Что-то я не вижу предложенной мне задачи.

Саша. Вот она: «Признак перпендикулярности прямой и плоскости доказан. А теперь докажите его другим способом». Понимаешь, другим! И это трудная задача, а потому стоящая и интересная.

Оля Серьезная. Я очень хочу услышать доказательство Степы. Я даже и представить не могу, как этот признак можно доказать по-другому. Мне почему-то кажется, что это невозможно. Неужели Степа смог?

Таня Пригожая. Петр Иванович! Мы все хотим познакомиться с другим доказательством!

Петр Иванович. Ну что, Коля, придется тебе «потерпеть». Товарищи хотят выслушать Степу. Да и вообще мы придерживаемся правила: если кто-то из кружковцев обнаружил что-либо новое в математике, то знакомит со своим открытием остальных.

Коля. Я все понимаю и согласен!

Петр Иванович. Вот и хорошо. Степа, прошу тебя.

Степа. Цепочка равных треугольников, которая рассматривается при доказательстве по учебнику, мне с самого начала показалась утомительно длинной. Я не раз думал: а нельзя ли «освободиться» хотя бы от некоторых из них? Например, от тех, что под плоскостью. Тогда бы и чертеж стал понятнее, и доказательство, возможно, проще. Но как это сделать? Сколько я ни пытался, у меня ничего не получалось. Мне уже стало казаться, как и Оле, что нет другого доказательства... Но однажды наконец меня осенило! Но давайте сначала сделаем рисунок (рис. 54).

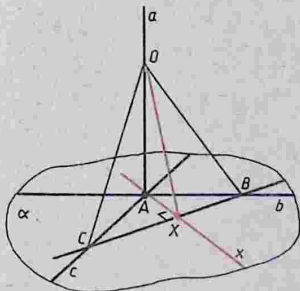


Рис. 54

ВОТ ОНА ИДЕЯ СТЕПЫ

МОШКЕННА



Что нам дано? $a \perp x$; $A \in a$; $b \in \alpha$ и $c \in \alpha$; $A \in b$ и $A \in c$. $a \perp b$ и $a \perp c$.
 $A \in x$, $x \in \alpha$. Надо доказать: $a \perp x$.

Как и в учебнике, я провел прямую, пересекающую прямые b , c , x в точках B , C , X соответственно. Точку O прямой a соединил отрезками с точками B , C , X . Нижние треугольники строить не стал.

Смотрите, что нам нужно сделать: доказать, что в треугольнике OAX угол при вершине A прямой. А как это можно сделать? А? Да по теореме, обратной теореме Пифагора! Если докажем, что $OA^2 + AX^2 = OX^2$, то из этого будет следовать, что $\angle OAX = 90^\circ$. Вот и вся идея. Она диктует весь ход рассуждений.

Ваня. Ну хорошо, запишем мы, что $AO^2 + AX^2 = \dots$ А дальше что делать?

Саша. Ну как же, дальше видно: $AO^2 = OB^2 - AB^2$; $AO^2 = OC^2 - AC^2$.

Таня. Ну и все. Дальше тупик. С отрезком AX ничего не сделаешь.

Степа. Сначала я тоже пришел к такому выводу. Но потом мне пришло в голову: почему бы не провести через точку X прямую BC перпендикулярно прямой x ? Тогда отрезок AX будет катетом двух прямоугольных треугольников: AXB и AXC . Теперь отрезок AX можно выражать через другие! А это, возможно, что-нибудь даст.

Лена. Ну, Степа, и закрутил... Что-то из этого получится?

Андрей Веселый. Должно получиться доказательство! Давайте преобразовывать сумму квадратов $AO^2 + AX^2$!

Оля. Начинать, Степа.

Степа пишет: $AO^2 + AX^2 = OB^2 - AB^2 + AB^2 - BX^2 = OB^2 - BX^2$.

Лена. Слушайте, если бы доказать, что $OX \perp BC$, то мы получим, что $OB^2 - BX^2 = OX^2$! Тогда угол, противолежащий стороне OX , т.е. угол OAX , прямой. И все доказано. Вот чудо!

Ваня. Подожди радоваться-то. Как мы докажем, что $OX \perp BC$?

Оля. Все ли данные мы использовали? Мы пока что воспользовались перпендикулярностью прямых a и b . А по условию еще и $a \perp c$.

Степа. Да, верно. Мы имеем возможность выразить рассматриваемую сумму квадратов еще одним способом. Сделаем это:

$$AO^2 + AX^2 = OC^2 - AC^2 + AC^2 - CX^2 = OC^2 - CX^2.$$

Андрей. Что-то ничего не видно... Получили два равенства... Правда, левые их части равны. Значит, равны и правые... А что дальше?

Степа. Совершенно верно. Мы имеем два равенства:

$$AO^2 + AX^2 = OB^2 - BX^2 \text{ и } AO^2 + AX^2 = OC^2 - CX^2.$$

Назовем эти равенства 1 и 2. Из них, как сказала Оля, получаем третье равенство:

$$OB^2 - BX^2 = OC^2 - CX^2.$$

Ваня. М-да-а... Что-то не ясно, как из этого следует, что $OX \perp BC$.

Степа. Я долго мучился над этим. Преобразовал последнее равенство в другое: $OB^2 - OC^2 = BX^2 - CX^2$, а ничего не мог усмотреть. Не могу доказать, что $OX \perp BC$, и все. А потом как-то думаю: точка X на отрезке BC задана? Задана. Сделал отдельный рисунок для плоскости OBC . Вот такой (рис. 55). Провел через точку X прямую y , перпендикулярную BC . Взял на ней произвольную точку Y .

Имеем $BY^2 - CY^2 = XY^2 + BX^2 - (XY^2 + CX^2) = BX^2 - CX^2$. Вы видите, всякая точка прямой y , перпендикулярной прямой BC , обладает свойством: разность квадратов расстояний от нее до концов отрезка BC равна разности квадратов расстояний от точки X прямой BC до соответственных концов того же отрезка:

$$BY^2 - CY^2 = BX^2 - CX^2.$$

И я подумал: а ведь все точки, обладающие таким свойством, принадлежат прямой y ! Но точка O обладает этим свойством: $OB^2 - OC^2 = BX^2 - CX^2$. Поэтому точка O принадлежит прямой y , значит, $OX \perp BC$.

Таня. Кажется, все верно... Только почему... все точки Y , такие, что $BY^2 - CY^2 = BX^2 - CX^2$, принадлежат прямой y , перпендикулярной прямой BC ?

Саша. Да... Это неясно.

Степа. Тут я затрудняюсь. Но верю, что это именно так.

Молчание.

Петр Иванович. Какую идею вы предлагаете?

Коля. Надо взять какую-нибудь точку не на прямой y и доказать, что разность квадратов расстояний от нее до точек B и C будет не такой!

Степа. Я пробовал, но не смог осуществить эту идею.

Петр Иванович. Давайте возьмем такую точку на прямой CY . (Продолжает отрезок CY красным мелом и выбирает на его продолжении точку.) Обозначим эту точку буквой M .

Ваня. Петр Иванович, но точка-то M не произвольная. Она взята на прямой CY . А как быть с другими точками?

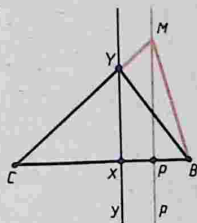


Рис. 55

Петр Иванович. Точка Y на прямой y какая? Произвольная! Ведь так, Степа? Значит, и точка M , получается, произвольная. Ну, хорошо, будем считать, что мы взяли произвольную точку M и провели отрезки MC и MB . (Проводит отрезок MB на рисунке Степы красным мелом.) Вот и получили точку Y .

Ваня. Понятно. Теперь надо доказать, что

$$MB^2 - MC^2 \neq BX^2 - CX^2.$$

Но как?

Петр Иванович. Проведем через M прямую p , перпендикулярную BC . Точку пересечения ее с прямой BC обозначим P . Вам ясно, что это дает?

Степа (удивленно). Как это я до этого не додумался? Нет... вы посмотрите, что получается:

$$MB^2 - MC^2 = MP^2 + BP^2 - (MP^2 + CP^2) = BP^2 - CP^2 \neq BX^2 - CX^2,$$

так как $BP < BX$, $CP > CX$ (или $BP > BX$, $CP < CX$).

Ну вот. Точка O принадлежит обязательно прямой y , перпендикулярной прямой BC и проходящей через точку X прямой x . Поэтому $OX \perp BC$. Теперь получаем $AO^2 + AX^2 = OB^2 - BX^2$ (это мы получили раньше) $= OX^2$. Итак, имеем $AO^2 + AX^2 = OX^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, $a \perp x$. Доказательство завершено.

Оля (обращаясь к Коле). Ну что, Коля, тебе не жаль времени, потраченного на другой способ доказательства?

Коля. Да не-е-т. Не жаль. Мы же, собственно, чем занимались? Решением задач. Это интересно. Только вот пригодятся ли они на вступительных экзаменах? Они же не из сборников для поступающих в вуз.

Саша. Опять за свое. Да Петр Иванович скоро выпустит такой сборник, и в нем будут и эти задачи!

Коля (обрадованно). Ну, тогда совсем другое дело! Я рад!

Все смеются.

Таня. Петр Иванович, а как сформулировать последний, полученный с Вашей помощью результат?

Петр Иванович. Этот результат можно сформулировать так. Пусть имеем три точки B , C и X на одной прямой. Тогда геометрическое место точек Y , лежащих в плоскости, содержащей эту прямую, и обладающих свойством $YB^2 - YC^2 = BX^2 - CX^2$, есть прямая y , проходящая через точку X и перпендикулярная BC .

Лена. Хорошо бы этим геометрическим местом точек еще раз воспользоваться!

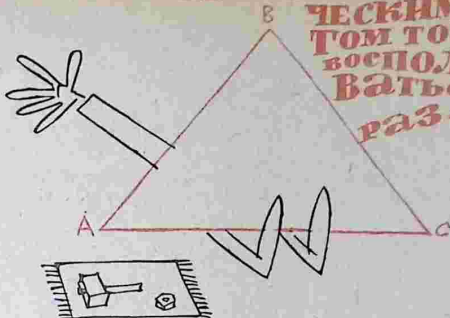
Петр Иванович. Да, оно нам еще не раз пригодится. Дело вот в чем. В рассуждениях Степы рассматривается случай, когда прямая, перпендикулярная прямой x , пересекает обе прямые b и c , причем точка X оказалась лежащей между точками пересечения B и C прямой x с прямыми b и c .

Ваня. Значит, надо рассмотреть еще случай, когда точка X не лежит между точками B и C ?

Петр Иванович. Случай, когда точка X не лежит между точками B и C , не является принципиально новым как при доказательстве по



ХОРОШО БЫ ЭТИМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ МЕСТОМ ТОЧЕК ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ ЕЩЕ РАЗ.



учебнику, так и при Степнном доказательстве. Все проведенные рассуждения и тогда полностью проходят. Но проведение тех же рассуждений по другому чертежу всегда полезно. Поэтому получите задание для домашней тренировки. Вот оно.

Задание. Проведите аналогичным образом доказательство перпендикулярности прямых a и x для случая, когда точка X не лежит между точками B и C .

Итак, мы с вами рассмотрели случай, когда прямая, перпендикулярная прямой x , пересекает обе прямые b и c .

Коля. Осталось доказать теорему для случая, когда прямая, перпендикулярная x , параллельна одной из двух прямых — b или c .

Петр Иванович. Совершенно верно, Коля. Сделаем перерыв, а потом завершим доказательство.

Степа. Антракт, математики! Пошли к доске искать идею штурма последней крепости Признака перпендикулярности прямой и плоскости! (Почти все собираются у доски около Степы.)

После перерыва на доске появился рисунок (рис. 56) еще без прямой y и точки Y , а также без прямой BC . Все поглощены поиском решения задачи. Петр Иванович тоже сосредоточенно, сидя за столом, думает над задачей.

Петр Иванович. На доске рисунок. Что за ситуация на нем изображена?.. Расскажи, пожалуйста, Лена Славная!

Лена. Прямая a , пересекающая плоскость α , перпендикулярна прямым b и c , проходящим через точку пересечения и лежащим в

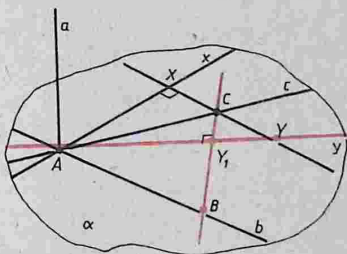


Рис. 56

плоскости α . Надо доказать способом Степы Мошкина, что прямая a перпендикулярна произвольной прямой x плоскости α . Причем прямая x такая, что проходящая через произвольную ее точку X перпендикулярная ей прямая параллельна b .

Петр Иванович. Такая ли уж прямая x произвольная?

Таня. Да нет, Петр Иванович, она, пожалуй, не произвольная... Это прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой b ! Мы получили бы тот же случай, если бы она была перпендикулярна прямой c .

Петр Иванович. Кто-нибудь нашел идею доказательства?

Оля. Нельзя ли воспользоваться предыдущим случаем, когда прямая, перпендикулярная x , пересекает прямую b и прямую c ?

Андрей. Есть идея. Давайте через точку A в плоскости α проведем прямую, пересекающую прямую XC . Пусть это будет прямая y , пересекающая прямую XC в точке Y (рис. 56). Если мы докажем, что $a \perp y$, то все! Тогда получим предыдущий случай: $a \perp c$, $a \perp y$, прямая XC , перпендикулярная x , пересекает c и y . Следовательно, $a \perp x$.

Лена. Получится, что мы ввели вспомогательную прямую y , которая заменила прямую b .

Таня. Это хорошо. Но как доказать, что $a \perp y$?

Оля. После того как мы докажем, что $y \perp a$, для доказательства перпендикулярности прямых a и x достаточно воспользоваться предыдущим случаем, для которого доказательство уже проведено. Так почему бы не воспользоваться предыдущим случаем и при доказательстве перпендикулярности прямых a и y ?

Степа. Вот именно! Давайте через точку C проведем прямую, перпендикулярную прямой y . В плоскости α , конечно.

Степа Мошкин проводит прямую, перпендикулярную y . Точки ее пересечения с прямыми y и b обозначает Y и B соответственно.

Ваня. Прекрасно! Что мы имеем? $a \perp b$, $a \perp c$, и прямая CB пересекает прямую y . Причем $CB \perp y$. А для такого случая нами доказано, что $a \perp y$. Все! Отсюда получаем, что $a \perp x$.

Петр Иванович. Итак, сейчас нас дважды выручила идея Оли Серьезной. В чем она? А вот в чем. Если задача решена для одного случая и нужно решить ее для другого, надо попытаться новый случай свести к предыдущему и воспользоваться результатом, полученным при рассмотрении первого случая.

Коля. Петр Иванович, как Вы думаете, есть еще другие доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости?

Петр Иванович. Конечно, есть, Коля.

Коля. Правда?! Тогда я найду еще одно доказательство! До свидания!

* * *

Кружковцы разошлись. Спрашиваю у Петра Ивановича: «Как Вы думаете, найдут еще?» — «Должны, — ответил он. — По крайней мере, пороятся в литературе — и найдут». — «Но почему бы не указать нужную

литературу?» — «Пока не надо. А вдруг кто-нибудь имеющееся в литературе доказательство найдет сам? Разве это можно сравнить с простым пересказом выученного?»

Предсказание Петра Ивановича сбылось. Об этом в следующем рассказе.

Решение задания

Дано (рис. 57): $a \times \alpha = A$; $b, c, x \in \alpha$, $A \in b, c, x$, $a \perp b$, $a \perp c$, $p \perp x$, $p \in \alpha$, $p \times b = B$, $p \times c = C$, $p \times x = X$; X не лежит между B и C . Доказать: $a \perp x$.

Идея. Докажем, что $AO^2 + AX^2 = OX^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, получим $a \perp x$.

Воспользуемся тем, что $a \perp b$, $a \perp c$, $p \perp x$. $AO^2 + AX^2 = OB^2 - AB^2 + AB^2 - BX^2 = OB^2 - BX^2$; $AO^2 + AX^2 = OC^2 - AC^2 + AC^2 - CX^2 = OC^2 - CX^2$.

Имеем: $AO^2 + AX^2 = OB^2 - BX^2$; $AO^2 + AX^2 = OC^2 - CX^2$.

Отсюда $OB^2 - BX^2 = OC^2 - CX^2$, т. е. $OB^2 - OC^2 = BX^2 - CX^2$.

Точка O принадлежит геометрическому месту точек плоскости OCX , разность квадратов расстояний которых от точек B и C прямой p равна разности квадратов расстояний от данной точки X прямой p до тех точек B и C соответственно. Поэтому $OX \perp p$.

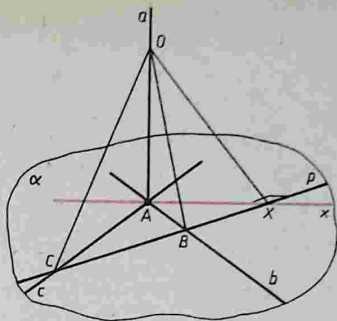


Рис. 57

Но тогда получаем: $AO^2 + AX^2 = OB^2 - BX^2 = OX^2$.

По теореме, обратной теореме Пифагора, $a \perp x$.

Обобщая все рассмотренные случаи, получаем вывод: прямая, пересекающая плоскость и перпендикулярная двум прямым этой плоскости, проходящим через точку пересечения, перпендикулярна всякой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения. По определению прямой, перпендикулярной плоскости, данная прямая перпендикулярна этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости доказан.

Я НАЙДУ ЕЩЕ! (X класс)

С нетерпением ждал я очередного занятия математического кружка Петра Ивановича. Прошлый раз, если вы помните, кружковцы ушли с намерением отыскать третий способ доказательства теоремы — признака перпендикулярности прямой и плоскости. И хотелось узнать: произойдет ли это чудо? Конечно, очень хотелось, чтоб оно произошло.

У верхнего края доски были написаны слова: *Я найду еще!* Они обрадовали меня. Раз они есть, то ожидаемое мною чудо произойдет, подумал я. И вот у доски Коля Зачем.

Петр Иванович. На прошлом занятии математического кружка мы обсудили новое доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости. Теперь вы знаете два доказательства одной и той же



теоремы: по учебнику и Степину. Тогда Коля Зачем воскликнул: «Я найду еще!» — и, как оказалось, не напрасно. Сейчас он познакомит вас с еще одним доказательством признака перпендикулярности прямой и плоскости. Слушаем тебя, Николай.

Коля. К сожалению, это доказательство не мое. Я отыскал его в старом учебнике геометрии. Мне оно показалось несколько легче двух других, известных нам.

Идея доказательства состоит в использовании теоремы: если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Запишем условие теоремы.

Дано: $a \perp \alpha$, $a \times \alpha = A$, $b, c, x \in \alpha$, $A \in b, c, x$, $a \perp b$, $a \perp c$.

Доказать: $a \perp x$.

На доске появилась одновременно с записями часть рисунка 58.

Доказательство. На прямой a от точки A отложим произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$, а на прямой x отложим от той же точки произвольный ненулевой вектор $\vec{x}$. Что нам остается делать?

Лена. Доказать, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{x}$ равно нулю.

Коля. Как это сделать?

Степа. Надо, естественно, воспользоваться условием теоремы. Если на прямых b и c от точки A отложить векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

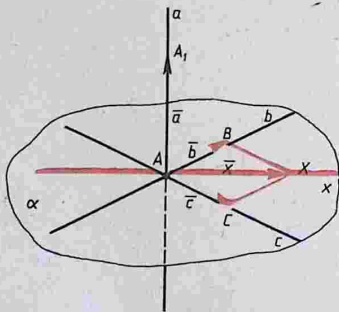


Рис. 58

Коля. Но как воспользоваться тем, что высказал Степа?

Таня. Надо как-то вектор $\vec{x}$ выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$. А вот как?

Пауза. Все напряженно размышляют.

Коля. Знаете, есть «правило параллелограмма» сложения векторов. «Вектор-диагональ» параллелограмма равен сумме векторов, определяемых его двумя смежными сторонами как направленными отрезками. Нужно только, чтобы они были отложены от одной вершины параллелограмма.

Лена. Вектор $\vec{x}$ мы уже выбрали. Пусть X — его конец. Чтобы получить параллелограмм, диагональю которого является отрезок AX , надо через X провести прямые, параллельные прямым b и c .

Коля. Хорошо. Я выполняю предложенные Леной построения (рис. 58).

На доске дополняется ранее выполненная часть рисунка. Появляется параллелограмм $ABXC$.

Ваня. Но тогда векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ нужно выбирать не как угодно. За вектор $\vec{b}$ нужно принять вектор $\vec{AB}$, а за вектор $\vec{c}$ принять вектор $\vec{AC}$.

Коля. Совершенно верно. Тогда мы и получим равенство $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$. Дальнейший ход доказательства вам, очевидно, ясен или почти понятен. Давайте запишем кратко ход доказательства.

Доказательство. 1) $X \in \vec{x}$, $\vec{x} = \vec{AX}$.

2) $XC \parallel b$, $XB \parallel c$. $C \in c$, $B \in b$.

3) $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$. Тогда $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$ (по правилу параллелограмма).

4) $A_1 \in a$, $\vec{a} = \vec{AA_1}$.

5) $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 + 0 = 0$.

6) $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$, следовательно, $a \perp x$.

7) x — произвольная прямая в плоскости α . По определению прямой, перпендикулярной плоскости, $a \perp \alpha$. Конец.

Андрей. Странно, но длинное Степино доказательство, которым мы занимались на предыдущем занятии, мне больше по душе. Там было много мук, поиска, там мы попутно узнали так много нового. А это уж больно скоротечное.

Оля. Мне даже как-то жаль, что имеется такое короткое доказательство теоремы. От этого она кажется менее значительной.

Коля. Зато «мое» доказательство легко выучить к экзамену.

Саша. По-моему, каждый из способов доказательства интересен по-своему. У каждого своя красота. И едва ли можно говорить: тот способ плох, а этот — хорош. Все они хороши, только по-разному.

Степа. Петр Иванович, нельзя ли каждому из трех способов доказательства дать какое-то название?

Петр Иванович. Первый способ, что в учебнике, можно назвать доказательством «путем рассмотрения цепочки треугольников». Степино доказательство можно назвать доказательством «способом геометрических мест точек». Коля. Зачем ознакомил нас сегодня с «векторным доказательством».

Что касается вашей беседы о красоте доказательства, о его практичности, о доказательствах длинных и коротких, то она отразила разные стороны красоты математики. Каждый из вас прав по-своему.

Богатство рассуждений и доказательств, разнообразие способов

обоснований — одна из привлекательных сторон математики, как и ее стремление к лаконизму.

Но продолжим нашу тему. Как вы думаете, есть ли четвертое доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости?

Молчание. Все сосредоточенно думают.

Оля. Может, и есть, но с помощью, например, высшей математики, нам недоступной.

Петр Иванович. Нет, я имею в виду только методы, вам вполне доступные и знакомые.

Лена Славная. Знакомые?!

Петр Иванович. Ну да, знакомые.

Лена. Доступные?!

Петр Иванович. Да, доступные.

Степа. А что, может, и есть.

Лена. Не верю.

Петр Иванович. Не буду вас томить. Саша Смышленный нашел еще одно доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Лена. И какова же идея этого доказательства?!

Саша. Воспользоваться свойствами движения в пространстве.

Лена. Тогда мы слушаем тебя, Саша.

Саша идет к доске и начинает свой рассказ.

Саша. Когда я нашел свое доказательство, был просто ошеломлен от его неожиданности и простоты.

Все началось с того, что, глядя на рисунок к теореме, я подумал: а ведь при симметрии относительно прямой a плоскость α , перпендикулярная ей, перейдет в себя. Понимаете? Точка A перейдет в себя, поскольку она принадлежит прямой a . Но ведь симметрия относительно прямой является движением! Значит... Хотя я забегаю вперед. Начну все по порядку.



Прежде всего воспользуюсь условием теоремы, записанным Колей. Зачем, и его рисунком (рис. 58).

Прямая b перпендикулярна прямой a . Значит, при симметрии относительно прямой a прямая b перейдет в себя. Прямая c перпендикулярна прямой a . Поэтому при симметрии относительно прямой a прямая c также перейдет в себя. Но плоскость, содержащая прямые b и c , единственна: это плоскость α .

Как я уже сказал, симметрия относительно прямой есть движение. В движении всякая плоскость переходит в плоскость. В какую же плоскость перейдет плоскость α ? Понятно в какую. Раз пересекающиеся прямые b и c этой плоскости перешли в себя, то и плоскость α перейдет в себя. Ну, а что будет в симметрии с прямой x ? Ну конечно, она перейдет в прямую, лежащую в плоскости α . Но в какую прямую?

Давайте посмотрим на плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые a и x . Назовем ее β . В какую плоскость перейдет в симметрии относительно прямой a плоскость β ? Ясно, что сама в себя. Потому что всякая плоскость, проходящая через ось симметрии, переходит в себя.

Итак, что мы имеем? Плоскость α и плоскость β при симметрии относительно прямой a переходят в себя. Ну, а куда деваться линии их пересечения — прямой x ? Ей остается одно — перейти в линию пересечения этих плоскостей, т. е. в себя.

Теперь вы понимаете, что произошло? При симметрии относительно прямой a пересекающая ее прямая перешла в себя. Что это значит? А это значит, что $x \perp a$. Вот и все. Теорема доказана.

Таня. Петр Иванович, а Шашино доказательство имеется в какой-либо книжке?

Петр Иванович. Знаете, я не встречал такого доказательства. Но и сказать, что о нем нигде не написано, тоже не могу. Доказательство Шаши Смышленного можно назвать «доказательством методом геометрических преобразований». Точнее, методом симметрии относительно прямой. И как вы думаете: это четвертое из известных теперь нам доказательств — последнее?

Оля. Сомневаюсь, что есть еще доказательства. По-моему, больше нет.

Степа. А я еще поищу!

Петр Иванович. Ну что ж, пожелаем Степе успеха! До свидания. Кружковцы. До свидания, Петр Иванович.

ПЯТЫЙ СПОСОБ — РАССКАЗ СТЕПЫ МОШКИНА (X класс)

На уроке и на занятиях математического кружка мы с помощью Петра Ивановича нашли четыре способа доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости. Четыре! Я, конечно, верил, что имеется второй способ, в крайнем случае третий. Но чтоб четыре! Уму непостижимо... Меня это поразило.

Но там, где есть четыре способа доказательства, почему бы не быть пятому? Ведь существуют же избы с четырьмя стенами, но есть и избы-



пятистенки. При этом я имел в виду, конечно, обычные, вечные российские деревенские дома. Да и в школе у нас не четырехбалльная, а пятибалльная система оценок. Правда, об оценке «единица» учителя только говорят. «Вот я поставлю тебе единицу!» — изредка припугнут они. Но все мы прекрасно знаем, что этого не случится. Двойка тоже бывает редко, к тому же в конце года она обычно волшебным образом перерождается в тройку. Впрочем, я отвлекся!

Я понимал, что мои рассуждения такого рода — сплошная тарабарщина, что никакой логики в них нет, не говоря уж о математике. Тем не менее, такого рода рассуждения, несмотря на всю их нелепость, настроили меня на поиск еще одного способа доказательства известной теоремы.

Каков он, этот пятый способ? Как его отыскать? Постепенно он превратился для меня в некое реальное существо, которое я непременно должен найти. Пока я его не найду, не будет мне покоя... А если пятого способа нет? Однако надо было что-то делать.

Я сделал рисунок (рис. 59) к доказательству, приведенному в учебнике. Правда, никаких надежд, что это мне что-то даст, не было. «В тупике тупица не творит, а обзревает давно известное старое», — выговаривал я сам себе, потешаясь над собой. Однако через некоторое время понял, что прав во мне оказался тот человек, который терпеливо перебирал давно известные геометрические факты. Конечно, он оказался правым потому, что был не одинок. Рядом с ним все время был второй, живущий во мне человек, вечно сомневающийся и ищущий новое, сотканный из нигилизма, сарказма и веры в реальность всякой умной фантазии.

Так вот, смотрю я на рисунок и рассуждаю:

— Ну что из этого рисунка можно извлечь? Что тут мы делали? Как этот рисунок получили? $OA = OA_1$... Подожди, что это означает? Точку А взяли на прямой a . Потом... построили точку A_1 , симметричную ей

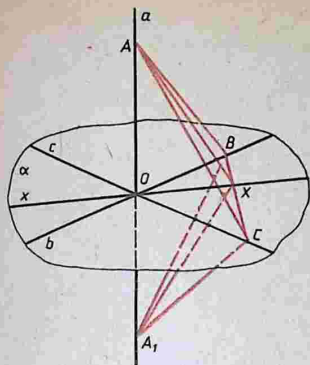


Рис. 59

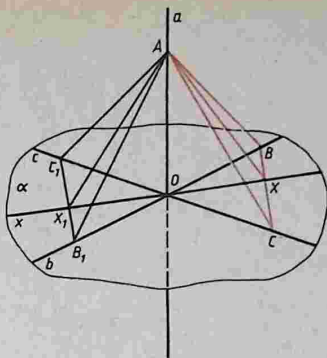


Рис. 60

относительно точки O ... Ну и что? Как что? А почему мы строили точку, симметричную точке A ? А что, если построить точки, симметричные точкам B , C , X относительно точки O ? Не даст ли это что-нибудь? Попробую (рис. 60). Давайте освежим в памяти условие теоремы.

Что нам дано? Плоскость α и прямая a , ее пересекающая. O — точка их пересечения. Что еще? В плоскости α через точку O проведены прямые b и c . Известно, что прямая a перпендикулярна этим прямым. Далее... в плоскости α через точку O проведена произвольная прямая x . Что надо доказать? А то, что прямая a перпендикулярна прямой x . Это будет означать, что прямая a перпендикулярна плоскости α , поскольку если прямая перпендикулярна всякой прямой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (по определению).

Итак, как же, пользуясь рисунком (точки B_1 , C_1 , X_1 симметричны соответственно точкам B , C , X относительно точки O), доказать, что прямая a перпендикулярна прямой x ?

Точка O — середина отрезка XX_1 . Если доказать, что $AX_1 = AX$, то получим: прямая a есть серединный перпендикуляр к отрезку X_1X . А это будет означать, что прямая a перпендикулярна прямой x ! Тогда теорема будет доказана.

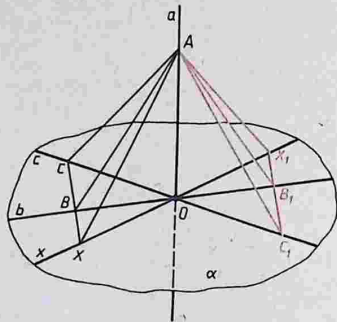
Но как доказать, что $AX_1 = AX$?

С VI класса мы знакомы с одним прекрасным способом доказательства равенства двух отрезков: надо доказать равенство двух треугольников, в которых эти два отрезка являются соответственными сторонами. Почему бы не воспользоваться этим способом сейчас? Отрезок AX является, например, стороной треугольника ABX . Какой же треугольник, скорее всего, равен ему? $BX = B_1X_1$ как отрезки плоскости α , симметричные относительно точки O . Стало быть, скорее всего, треугольнику ABX равен треугольник AB_1X_1 . В этих треугольниках, как уже замечено, $BX = B_1X_1$.



Кроме того, кажется, что $AB = AB_1$... Почему? Да потому, что прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку BB_1 (в плоскости ABB_1). Следовательно, $AB = AB_1$. Что же мы имеем? А две стороны треугольника ABX соответственно равны двум сторонам треугольника AB_1X_1 . Остается доказать, что углы, заключенные между этими сторонами, также равны: $\angle ABX = \angle AB_1X_1$.

Как доказать, что $\angle ABX = \angle AB_1X_1$? С VI класса мы знаем прекрасный способ доказательства равенства двух углов: надо доказать равенство двух треугольников, в которых эти два угла являются соответственными.



Дано: $a \perp \alpha = O$, $b \in \alpha$, $c \in \alpha$, $x \in \alpha$; $a \perp b$, $a \perp c$

Доказать: $a \perp \alpha$

Рис. 61

По-моему, этот способ в данном случае приведет нас к желанному результату. Указанные два угла являются углами треугольников ABC и AB_1C_1 . Как доказать равенство этих треугольников? Кажется, все хорошо и просто. Их стороны соответственно равны. На самом деле... Стороны BC и B_1C_1 равны, поскольку они симметричны относительно точки O . Равенство отрезков AB и AB_1 уже доказано. Прекрасно: отрезки AC и AC_1 также равны, так как прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку CC_1 . Треугольник ABC равен треугольнику AB_1C_1 по трем сторонам. Следовательно, $\angle ABX = \angle AB_1X_1$. Отсюда $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AX = AX_1$.

Точка O прямой a является серединой отрезка XX_1 , точка A той же прямой равноудалена от концов отрезка XX_1 , следовательно, прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку XX_1 . Поэтому прямая a перпендикулярна прямой x .

Итак, пятый способ доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости найден!

О новом доказательстве я рассказал Петру Ивановичу. Он похвалил меня и сообщил, что это доказательство имеется в книге А. Д. Александрова «Геометрия, 9—10». Я от этого, к своему удивлению, несколько не расстроился. Ведь радость открытия состоялась, и ее ничто и никто не сможет «отменить». А названная книга стала у меня настольной. Мне сильно повезло: купил ее в «Букинисте».

Тем, кто прочитал мой рассказ, предлагаю провести доказательство пятым способом по другому чертежу (см. рис. 61).

Желаю удачи! Спасибо, что читали мой рассказ.

БЕСЕДЫ О СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ (IX—X классы)

— Скрещивающиеся прямые — это удивительно! Если бы их не было, стереометрия была бы во сто крат менее интересной. Иногда мне кажется, что если стереометрию и стоит изучать, то из-за того, что в ней есть скрещивающиеся прямые, — горячо убеждал меня Петр Иванович. — Ты посмотри, сколько у них глобальных, интереснейших свойств! Во-первых, всякие две скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях. Понимаешь, прямые — скрещиваются, а лежат в параллельных плоскостях. Возьмем теперь точку, не принадлежащую ни одной из этих плоскостей. Оказывается, что существует — нет, ты подумай! — существует прямая, проходящая через взятую точку и пересекающая обе скрещивающиеся прямые. Но мало того, эта прямая еще и единственная! Вот тебе во-вторых. Что, впечатляет? В-третьих, у всяких двух скрещивающихся прямых имеется общий перпендикуляр. Представляешь, один конец отрезка лежит на первой из скрещивающихся прямых, другой конец — на второй, а отрезок этот перпендикулярен и первой прямой, и второй. Занимательная, скажу тебе, конструкция! Посмотришь на ее модель и испытываешь радость. А сколько в ней скрыто очаровательных задач?! Всякий геометр понимает, что стереометрия без скрещивающихся прямых — это глупость. Да что там. Без скрещивающихся ребер нет и многогранника. А геометрия без многогранников — что это за геометрия?

* * *

Мне хочется, чтобы удивление Петра Ивановича перед уникальностью скрещивающихся прямых передалось и вам. Но как это сделать? Для начала выполните следующие простые задания. Их выполнение, возможно, поможет хотя бы зрительно представить то, о чем сказано в приведенном монологе.

Задание 1. Приготовьте две ручки. Они будут служить моделями прямых. Приготовьте два листа бумаги, которые будут служить моделями плоскостей. Теперь расположите ваши прямые так, чтобы они скрещивались. Приложите приготовленные вами листочки к прямым так, чтобы получить параллельные плоскости. Проведите рассуждения: как построить такие плоскости? Единственны ли они?

Задание 2. Изобразите скрещивающиеся прямые двумя ручками. Представьте некоторую точку. Расположите третью ручку так, чтобы она проходила через представленную вами точку и пересекала обе скрещивающиеся прямые. Проведите рассуждения: так построить такую прямую? Всегда ли такая прямая существует?

Задание 3. Изобразите ручками две скрещивающиеся прямые. Третью ручку — модель отрезка — расположите так, чтобы она изображала общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. Интересная конструкция?

Не правда ли? Петр Иванович прав? Какие фигуры получатся при вращении скрещивающихся прямых около оси — общего перпендикуляра? Каково их взаимное расположение?

Задание 4. Возьмите несколько моделей различных многогранников или изобразите многогранники на бумаге. Укажите пары скрещивающихся ребер в каждом из них.

* * *

1. С кубом под мышкой:

Почему с кубом? Да потому, что в известном смысле в кубе сокрыта вся геометрия. В том числе и геометрия скрещивающихся прямых. Вы еще в этом не раз убедитесь.



Изобразим куб. Проведем диагонали двух противоположных граней (рис. 62). Пусть O и O_1 — точки их пересечения. Диагонали AC и A_1C_1 , BD и B_1D_1 попарно параллельны. А каково взаимное расположение диагоналей AC и B_1D_1 ? BD и A_1C_1 ? Чтобы выяснить это, давайте порассуждаем.

Прежде всего, замечаем, что прямые AC и B_1D_1 лежат в параллельных плоскостях граней куба. Следовательно, они не пересекаются. Тогда, может быть, они параллельны? Да нет. Ведь через точку O_1 проведена одна прямая, параллельная AC ! Такой прямой является прямая A_1C_1 . А мы знаем, что прямая, проходящая через данную точку, не принадлежащую данной прямой, и параллельная другой заданной прямой, единственная!

Так что же получаем? Прямая B_1D_1 не имеет с прямой AC общих точек и не параллельна ей. Остается — прямые B_1D_1 и AC скрещивающиеся.

Аналогично прямые BD и A_1C_1 скрещивающиеся.

А теперь представьте, что даны скрещивающиеся прямые AC и B_1D_1 . Как провести через них плоскости, параллельные этим прямым и друг другу?

Просто. Скажем, через точку O прямой AC проведем прямую BD , параллельную прямой B_1D_1 . Получаем плоскость $ABCD$, параллельную прямой B_1D_1 . Аналогично через точку O_1 прямой B_1D_1 проведем прямую A_1C_1 , параллельную прямой AC . Получим проходящую через прямую B_1D_1 плоскость $A_1B_1C_1D_1$, параллельную прямой AC . Причем плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, поскольку одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

Вот видите, сколь много мы узнали о скрещивающихся прямых, опираясь на изображение куба! Но это еще далеко не все.

Однако выполните сначала несколько заданий, а потом мы продолжим нашу беседу.

* * *

Задание 5. Докажите, что прямые, содержащие ребра AA_1 и BC куба (рис. 62), скрещиваются.

Задание 6. Расскажите, каким образом вы проведете через прямые AA_1 и BC параллельные плоскости (рис. 62). Каково расстояние между этими плоскостями, если ребро куба a ? Каково расстояние между прямыми AA_1 и BC ?

* * *

А теперь продолжим беседу, как договорились.

Расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC , изображенными на рисунке 62, равно длине ребра куба a . Этот ответ легко получается,

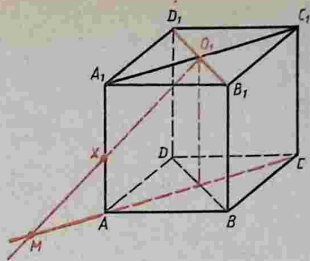


Рис. 62

если заметить, что отрезок AB является общим перпендикуляром названных скрещивающихся прямых. Здесь нам повезло: общий перпендикуляр был уже построен. А вот как быть, если его нет? Что же, надо его построить. Впрочем, обязательно ли это? Может, расстояние между двумя скрещивающимися прямыми можно найти и не строя общего их перпендикуляра? Ну да, конечно же!

Например, по отношению к скрещивающимся прямым AA_1 и BC можно поступить следующим образом. Через прямую BC проведем плоскость, параллельную прямой AA_1 . Такой плоскостью является плоскость BCC_1B_1 . Затем из произвольной точки прямой AA_1 опускаем перпендикуляр на эту плоскость, например из точки A_1 (прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости BCC_1B_1). Длина перпендикуляра A_1B_1 и есть расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC .

Вернемся теперь к разговору о скрещивающихся прямых AC и B_1D_1 . Каково расстояние между ними? Через прямую AC проведена плоскость, параллельная прямой B_1D_1 . Эта плоскость $ABCD$. Остается из какой-нибудь точки прямой B_1D_1 , например из B_1 , опустить перпендикуляр на плоскость $ABCD$ (B_1B перпендикулярна плоскости $ABCD$, $B_1B = a$). Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AC и B_1D_1 равно a — длине ребра куба.

Расстояние между скрещивающимися прямыми AC и B_1D_1 найдено. Но как все-таки построить их общий перпендикуляр? Давайте порассуждаем вместе. Общий перпендикуляр указанных прямых является и перпендикуляром к прямой BD , параллельной B_1D_1 , а потому является и перпендикуляром к плоскости $ABCD$. Значит, из всех перпендикуляров, опущенных из точек прямой B_1D_1 на плоскость $ABCD$, надо выбрать тот, основание которого принадлежит прямой AC . Сделать это просто.

Опустим из двух точек прямой B_1D_1 перпендикуляры на плоскость $ABCD$ (B_1B перпендикулярна плоскости ABC , DD_1 перпендикулярна плоскости ABC). Все перпендикуляры, опущенные из точек прямой B_1D_1 на плоскость ABC , лежат в плоскости D_1B_1BD и параллельны B_1B . Стало быть, основания всех таких перпендикуляров лежат на прямой пересечения плоскостей ABC и D_1B_1BD — BD .

Итак, основание искомого перпендикуляра должно принадлежать прямой AC и прямой BD , т.е. являться точкой их пересечения. Проведя через точку пересечения прямую, параллельную BB_1 , получим общий перпендикуляр OO_1 скрещивающихся прямых AC и B_1D_1 .

Задание 7. Проведите рассуждения, связанные с построением общего перпендикуляра скрещивающихся прямых BD и A_1C_1 (рис. 62).

Задание 8. Докажите, что прямые AD_1 и CB_1 на рисунке 62 скрещивающиеся. Постройте их общий перпендикуляр.

Задание 9. Даны две параллельные плоскости и прямая, содержащаяся в одной из них. Как построить в другой плоскости прямую, скрещивающуюся с данной?

Из всех названных Петром Ивановичем свойств скрещивающихся прямых нами не рассмотрено одно: о существовании прямой, проходящей через данную точку и пересекающей две данные скрещивающиеся прямые.



Рассмотрим это свойство, вновь обращаясь к изображению куба (рис. 62).

Обратимся к скрещивающимся прямым AC и B_1D_1 . Представьте, что некоторая точка X принадлежит плоскости ABC . Через нее надо провести прямую, пересекающую обе указанные скрещивающиеся прямые. Существует ли такая прямая?

Давайте порассуждаем. Поскольку точка X искомой прямой принадлежит плоскости ABC и искомая прямая пересекает прямую AC , то две ее точки принадлежат плоскости ABC . Следовательно, всякая прямая, проходящая через точку X и пересекающая прямую AC , лежит в плоскости ABC . Но плоскость ABC параллельна прямой B_1D_1 . Следовательно, никакая прямая, проходящая через точку X и пересекающая прямую AC , не пересекает в этом случае вторую из скрещивающихся прямых — B_1D_1 .

Таким образом, искомой прямой в данном случае не существует. Ее не существует и тогда, когда точка X принадлежит плоскости $A_1B_1C_1$.

Рассмотрим теперь случай, когда точка X не принадлежит параллельным плоскостям, проведенным через скрещивающиеся прямые AC и B_1D_1 . Для определенности возьмем точку X на прямой AA_1 . Тогда все прямые, проходящие через точку X и пересекающие прямую AC , лежат в плоскости AA_1C_1C . Из них надо выбрать ту, которая пересекает еще и прямую B_1D_1 . Плоскость AA_1C_1C пересекает прямую B_1D_1 в единственной точке O_1 . Поэтому прямая XO_1 искомая, притом единственная. Она пересекает прямую AC потому, что лежит с ней в одной плоскости и не параллельна ей.

Теперь вы убедились, что «с кубом под мышкой» можно рассмотреть и осознать многие свойства скрещивающихся прямых.

В самом конце мы выбрали точку X на прямой AA_1 , содержащей ребро куба. Возможно, вы не удовлетворены этим случаем из-за его чрезмерной простоты? Если так, то вот вам задание.

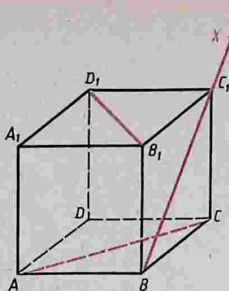


Рис. 63

Задание 10. На рисунке 63 изображен куб. Через точку X , принадлежащую прямой BC_1 , проведите прямую, пересекающую скрещивающиеся прямые AC и B_1D_1 .

2. Извлечь гипотезу.

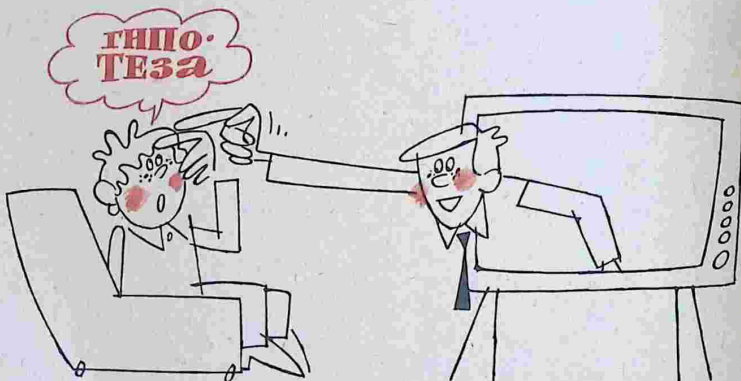
Начнем с решения следующей задачи:

Найти геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков, концы которых принадлежат двум данным параллельным прямым (один конец каждого из отрезков принадлежит одной из параллельных прямых, второй — другой).

Изобразите две параллельные прямые и постройте несколько искомых точек. Вы, несомненно, выдвинете гипотезу: искомое геометрическое место точек есть прямая, параллельная данным. Как доказать эту гипотезу? Сначала построим названную прямую. Для этого возьмем некоторый отрезок AB , концы которого принадлежат данным параллельным прямым a и b (рис. 64). Построим его середину — точку X . Через точку X проведем прямую, параллельную данным. Докажем теперь, что построенная прямая x и есть искомое геометрическое место точек.

Прежде чем приступать к доказательству, нужно хорошо понять, что надо доказать. А надо доказать два предложения:

- 1) Всякая точка прямой x обязательно является серединой какого-либо, хотя бы одного, отрезка с концами на заданных параллельных прямых.
- 2) Середина любого отрезка с концами на данных параллельных прямых принадлежит прямой x . Если не доказано первое предложение,



то, доказав лишь второе, можно считать доказанным, что искомое геометрическое место точек есть прямая x или прямая x «с дырами», «с просветами» на ней. Ведь нами еще не доказано, что всякая точка прямой x является серединой какого-либо отрезка с концами на данных параллельных прямых! Если не доказано второе предположение, то, доказав первое, мы можем быть уверены, что прямая x входит в искомое геометрическое место точек; но у нас нет никакой гарантии, что искомое геометрическое место точек не представляет собой некоторую более сложную фигуру, в которую входит и прямая x .

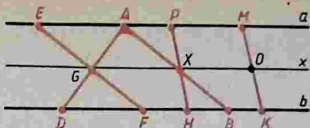


Рис. 64

Итак, вы теперь представляете, что нам надо доказать и как проводить доказательство? Тогда приступаем.

1) Возьмем на прямой x произвольную точку G . Как доказать, что она является серединой некоторого отрезка с концами на данных параллельных прямых? Видимо, нужны дополнительные построения, причем такие, которые позволили бы воспользоваться условием: прямая x проходит через середину отрезка AB и параллельна данным прямым. Здесь возможны разные варианты. Вот один из них.

Строим отрезок AD (рис. 64), содержащий точку G . А дальше ясно. Поскольку точка X середина отрезка AB и $XG \parallel BD$, то отрезок XG совпадает со средней линией треугольника ABD . Поэтому точка G — середина отрезка AD , вследствие чего принадлежит искомому геометрическому месту точек.

Другой вариант использует свойство равенства противоположных сторон параллелограмма. В этом варианте через точку G проводим отрезок EF , параллельный отрезку AB , а затем рассматриваем три параллелограмма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ СОСТОИТ ИЗ ДВУХ ЧАСТЕЙ.



Получаем $EG=AX$, $GF=XB$, откуда $EG=GF$, т. е. точка G есть середина отрезка EF . Можно, наконец, предложить третий вариант, основой которого является использование свойства средней линии трапеции. Итак, мы доказали, что всякая точка прямой x является серединой какого-либо отрезка с концами на данных параллельных прямых. Приступим к доказательству второго предложения.

2) Пусть имеем отрезок с концами на данных параллельных прямых. Может быть два случая.

Случай 1. Отрезок проходит через точку X . На рисунке 64 таким отрезком является отрезок PH . Поскольку $\triangle AXP = \triangle BXH$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, то $PX=HX$, т. е. точка X является серединой отрезка PH . Но тогда получаем, что середина всякого отрезка с концами на данных параллельных прямых, проходящего через точку X , есть точка X , а потому принадлежит прямой x .

Случай 2. Пусть отрезок не проходит через точку X . На рисунке 64 таким отрезком является отрезок MK . Пусть O — точка пересечения отрезка MK с прямой x . Через точку X проведем отрезок PH , параллельный отрезку MK . Точка X — середина отрезка PH . $MO=PX$, $OK=XH$ как противолежащие стороны параллелограмма. Но $PX=XH$, следовательно, $MO=OK$. Получили, что середина отрезка MK также принадлежит прямой x .

Таким образом, середина всякого отрезка с концами на данных параллельных прямых a и b принадлежит прямой x .

Середина отрезка с концами на прямых a и b , и им перпендикулярного, как и всякого другого, концы которого принадлежат прямым a и b , принадлежит прямой x . Следовательно, прямая x равноудалена от прямых a и b . Поэтому полученный результат можно сформулировать так: *геометрическое место середин отрезков, концы которых принадлежат двум параллельным прямым (один конец каждого из отрезков принадлежит первой прямой, другой — второй прямой), есть прямая, параллельная данным прямым и равноудаленная от них.*

Что можно извлечь из проведенных рассуждений?

А вот что. Если имеются равные отрезки, да еще и параллельные прямые, то для доказательства равенства других двух отрезков нужно попытаться воспользоваться свойством средней линии треугольника или трапеции, свойством противолежащих сторон параллелограмма, признаками равенства треугольников, теоремой Фалеса. Вообще из всяких рассуждений целесообразно извлекать то ценное, что может пригодиться при решении других задач. Это увеличит ваши возможности в осуществлении поиска решения задач, доказательства теорем.

— Все это хорошо, — скажете вы, — и даже интересно и полезно. Мы с этим согласны. Но, извините, причем же здесь скрещивающиеся прямые? Ведь данный раздел называется «Беседы о скрещивающихся прямых». Мы ушли от темы!

На самом деле, мы отошли от скрещивающихся прямых. Пора возвращаться к ним. Но что же, только что рассмотренную задачу мы решили так просто? Для счета? Да нет. Давайте, опираясь на нее, перейдем из планиметрии в стереометрию. А там, глядишь, перейдем и к беседам о

скрещивающихся прямых. Но как это сделать? Давайте воспользуемся для этого аналогией. Нельзя ли составить задачу на случай пространства, аналогичную только что решенной? Естественно, пару параллельных прямых заменить параллельными плоскостями. Отрезки с концами на параллельных прямых заменить отрезками с концами на двух параллельных плоскостях (один конец каждого отрезка на первой плоскости, другой — на второй). Какую фигуру представляет собой геометрическое место середин таких отрезков?

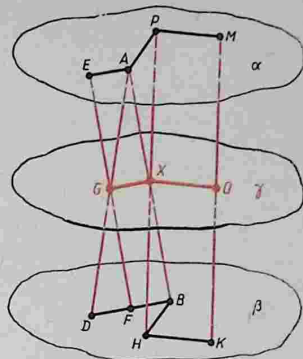


Рис. 65

Гипотеза может быть получена здесь с помощью аналогии. Данные параллельные прямые заменены параллельными плоскостями. Вероятно, и искомое геометрическое место середин отрезков с концами на двух параллельных плоскостях будет представлять собой плоскость, параллельную данным плоскостям. Ведь в предыдущей задаче две параллельные прямые «породили» фигуру того же наименования — прямую, им параллельную! Видимо, и в данном случае две параллельные плоскости должны «породить» параллельную им плоскость.

Итак, надо доказать, что *геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на данных двух параллельных плоскостях (один конец каждого отрезка на одной плоскости, второй конец — на другой), есть плоскость, параллельная данным плоскостям и равноудаленная от них.*

Прежде чем приступать к доказательству, давайте осознаем, что надо доказать... Вам понятно, что же нужно доказывать?

Впрочем, сначала нужно сделать рисунок. Пусть плоскости α и β параллельны (рис. 65). Возьмем произвольный отрезок AB с концами на этих плоскостях. Через точку X (середину этого отрезка) проведем плоскость γ , параллельную данным плоскостям. Докажем, что плоскость γ и есть искомое геометрическое место середин соответствующих отрезков. Для этого нужно доказать два предложения: 1) всякая точка плоскости γ является серединой некоторого отрезка с концами на данных плоскостях α и β ; 2) середина любого отрезка с концами на данных плоскостях принадлежит плоскости γ .

Заметим также, что поскольку решаемая нами задача аналогична уже решенной задаче планиметрии, то, видимо, и ее решение будет аналогичным решению предшествующей. Поэтому попробуем рассуждать по аналогии с тем, как это мы делали, решая задачу-предшественницу, породившую новую задачу — задачу стереометрии.

Итак, приступаем.

1) Пусть точка G принадлежит плоскости γ . Надо доказать, что она является серединой некоторого отрезка с концами на плоскостях α и β . Как это сделать? Конечно же, надо воспользоваться условием: принадлежащая

плоскости γ точка X является серединой отрезка AB и плоскость γ параллельна данным плоскостям. Для этого проведем отрезок AG и продолжим его до пересечения с плоскостью β в точке D . Прямые XG и BD являются прямыми пересечения параллельных плоскостей γ и β третьей плоскостью ABD , поэтому они параллельны. Но тогда отрезок XG совпадает со средней линией треугольника ABD , поэтому точка G является серединой отрезка AD с концами на данных параллельных плоскостях.

Другой вариант доказательства может состоять в проведении через точку G отрезка EF , параллельного отрезку AB , и в использовании свойства противоположных сторон параллелограмма. В этом случае имеем $EG=AX$, $GF=XB$, следовательно, $EG=GF$ и точка G является серединой отрезка EF с концами на данных параллельных плоскостях.

Итак, мы доказали, что всякая точка G плоскости γ является серединой некоторого отрезка с концами на двух данных параллельных плоскостях α и β .

2) Как и в планиметрической задаче, породившей данную задачу стереометрии, рассмотрим два случая.

Случай 1. Отрезок с концами на плоскостях α и β содержит точку X . На рисунке 65 таким отрезком является отрезок PH . Поскольку прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны, то $AP\parallel BH$. Но тогда $\triangle AXP=\triangle BXH$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $PX=HX$, т. е. середина отрезка PH , которой является точка X , принадлежит плоскости γ . Таким образом, получили, что всякий отрезок с концами на параллельных плоскостях α и β и проходящий через точку X имеет серединой точку X .

Случай 2. Отрезок с концами на данных плоскостях α и β не содержит точку X . На рисунке 65 таким отрезком является отрезок MK . Пусть точка O есть точка пересечения отрезка MK с γ . Проведем через точку X отрезок PH , параллельный отрезку MK . Поскольку прямые пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны, то $PM\parallel OH\parallel NK$. Так как противоположные стороны параллелограмма равны, то $MO=XP$, $OK=XN$. Но $XP=XN$, следовательно, $MO=OK$. Получили, что середина отрезка MK принадлежит плоскости γ .

Всякий отрезок с концами в данных параллельных плоскостях α и β и перпендикулярный этим плоскостям, делится плоскостью γ пополам. Следовательно, плоскость γ равноудалена от данных плоскостей α и β .

Задача решена.

А теперь, наконец, обратимся к скрещивающимся прямым. Что представляет собой геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых?

Сначала надо извлечь гипотезу. Но из чего извлечь? Решая две предшествующие задачи на геометрические места середин отрезков с концами на параллельных прямых или плоскостях, мы сначала извлекли гипотезу из наблюдений за рисунком, а потом опираясь на аналогию новой задачи с предшествующей. Как поступить сейчас? Снова воспользоваться рисунком? Каким? А что, если вновь воспользоваться изображением куба? Ведь этот рисунок нами хорошо освоен! Ну что ж, воспользуемся этой идеей.

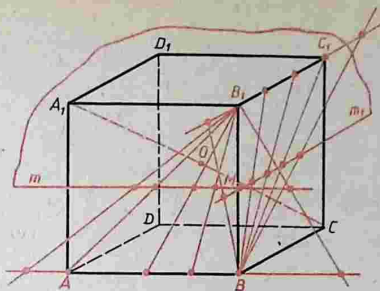


Рис. 66

На рисунке 66 изображен куб. За данные скрещивающиеся прямые выберем прямые AB и B_1C_1 .

Сначала рассмотрим отрезки, одним концом которых является точка B_1 , другим — точки, принадлежащие прямой AB . Поскольку один конец каждого из отрезков оказывается принадлежащим прямой A_1B_1 , а другой — прямой AB , причем $AB \parallel A_1B_1$, то середины рассматриваемых отрезков принадлежат прямой, параллельной AB и проходящей через середину отрезка BB_1 . Вы поняли, о чем сейчас идет речь?

Середины рассматриваемых отрезков принадлежат геометрическому месту середин отрезков с концами на скрещивающихся прямых AB и B_1C_1 и в то же время принадлежат геометрическому месту середин отрезков с концами на параллельных прямых AB и A_1B_1 . Это объясняется тем, что точка B_1 принадлежит прямой B_1C_1 , скрещивающейся с прямой AB , и прямой A_1B_1 , параллельной AB .

Рассмотрим затем отрезки, одним концом которых является точка B , а вторые концы принадлежат прямой B_1C_1 . Середины этих отрезков принадлежат геометрическому месту середин отрезков с концами на скрещивающихся прямых AB и B_1C_1 . В то же время середины указанных отрезков принадлежат геометрическому месту середин отрезков с концами на параллельных прямых B_1C_1 и BC , т. е. на прямой, параллельной прямой B_1C_1 и проходящей через середину отрезка BB_1 — точку M .

Сейчас нам стало уже ясно, что в геометрическое место середин отрезков с концами на скрещивающихся прямых AB и B_1C_1 входят две построенные нами прямые m и m_1 , проходящие через середину отрезка BB_1 и соответственно параллельные данным скрещивающимся прямым AB и B_1C_1 . Какую гипотезу можно выдвинуть относительно геометрического места середин отрезков с концами на скрещивающихся прямых? Может, оно состоит из двух пересекающихся прямых m и m_1 ? Нет. Потому что середина отрезка AC_1 с концами на скрещивающихся прямых AB и B_1C_1 не принадлежит ни одной из этих прямых. Скорее всего, искомое геометрическое место точек представляет собой плоскость, проходящую через пересекаю-

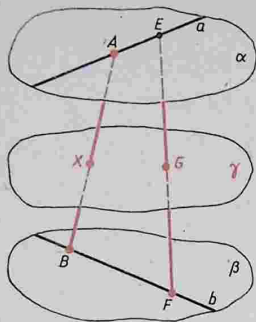


Рис. 67

щиеся прямые m и m_1 . Чтобы укрепить свою уверенность в правильности такой гипотезы, полезно обратиться к своей комнате как модели прямоугольного параллелепипеда, частным случаем которого является куб.

Для этого выберите сначала две скрещивающиеся прямые на этой модели, например прямую пересечения плоскости пола и плоскости передней стенки и прямую пересечения плоскости, равностоящей от плоскостей пола и зрительно представьте плоскость, равноотстоящую от плоскости пола и плоскости потолка. После этого представьте зрительно середины отрезков с концами на выделенных скрещивающихся прямых. Кажется, они принадлежат плоскости, равноотстоящей от плоскостей пола и потолка.

Итак, какую же гипотезу мы получили? Вот она: *геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных скрещивающихся прямых есть плоскость, равноудаленная от двух параллельных плоскостей, проведенных через данные скрещивающиеся прямые.*

Итак, пусть a и b — две данные скрещивающиеся прямые. Проведем через них две параллельные плоскости α и β (рис. 67). Построим произвольный отрезок AB с концами на данных скрещивающихся прямых. Через его середину X проведем плоскость γ , параллельную плоскостям α и β . Надо доказать, что плоскость γ и есть геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых a и b .

Все, кажется, хорошо. Остается только доказать. Но... Вас ничто не удивляет? Не гложет червь сомнения? Не кажется ли вам выдвинутая гипотеза ошибочной? Нет, на самом деле, давайте обратимся к рисунку 67.

Плоскости α и β параллельны. Нами доказано, что геометрическое место середин отрезков с концами на плоскостях α и β есть плоскость γ . Затем вместо плоскости α мы берем прямую a этой плоскости, а вместо плоскости β берем прямую b этой плоскости. Из каждой плоскости только по одной прямой! Вслед за указанным выбором только двух прямых вместо двух плоскостей возьмем из всех отрезков с концами на параллельных плоскостях α и β только отрезки с концами на выбранных прямых.

— Ну и что? — скажете вы.

— Как ну и что? Ведь мы отбросили бесконечное множество отрезков с концами на параллельных плоскостях, оставив только те, концы которых принадлежат прямой a и b ! И все-таки, несмотря на это, геометрическим местом середин этой оставшейся части отрезков остается та же, прежняя, вся (!) плоскость γ ! Нет, согласитесь, здравый смысл подсказывает, что гипотеза, которую мы собираемся доказать, выглядит странной и сомнительной... Знаете, хочется как-то снять напряжение от возникшего сомнения. Но как это сделать? Как?

Проще всего, видимо, обратиться к более простой задаче. Ну, например,

давайте вместо параллельных прямых a и b возьмем их часть — параллельные противонаправленные лучи a и b с начальными точками A и B соответственно (рис. 68). И давайте выясним, какая геометрическая фигура является геометрическим местом середин отрезков, концы которых принадлежат лучам a и b . Если искомое геометрическое место по-прежнему есть прямая x , равноудаленная от прямых a и b (лежащая в плоскости прямых a и b), то возникшее сомнение в правильности гипотезы о серединах отрезков с концами на скрещивающихся прямых, пожалуй, исчезнет и мы охотно возьмемся за доказательство гипотезы.

Рассмотрим сначала отрезки, одним концом каждого из которых является точка B , а другой конец принадлежит лучу a . Ясно, что геометрическое место середин этих отрезков представляет собой луч, параллельный лучу a и исходящий из точки X — середины отрезка AB (рис. 68).

Прекрасно! А теперь рассмотрим отрезки, одним концом каждого из которых является точка A , а другим — точка, принадлежащая лучу b . Геометрическим местом середин этих отрезков будет луч, параллельный лучу b и исходящий из точки X . Но полученные два луча с началом X образуют прямую, проходящую через точку X и параллельную прямым a и b ! Несмотря на то что часть отрезков с концами на параллельных прямых a и b была исключена, мы получили прежнее геометрическое место точек — прямую x !.. Но как объяснить этот парадокс? Ведь, казалось бы, раз часть отрезков исключена, то и их середины будут исключены, а потому и новое геометрическое место должно составить лишь часть прежнего?!

А объяснить наш парадокс можно так. Дело в том, что каждая точка прямой x является серединой бесконечного множества отрезков с концами на двух параллельных прямых. Оттого что часть отрезков исключена, точки прямой x не перестают быть серединами других проходящих через них отрезков. В этом весь секрет.

Ну что же, подозрение в ошибочности выдвинутой гипотезы, кажется, было напрасным. Хотя, почему напрасным? Оно принесло нам пользу: мы выяснили причину кажущегося парадокса, когда исключение части отрезков не ведет к изменению фигуры, составленной из середин оставшихся отрезков, по отношению к первоначальной.

Итак, надо доказать, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость равноудаленная от двух параллельных плоскостей, проведенных через данные скрещивающиеся прямые. Для этого вернемся к рисунку 67, который мы оставили для выяснения сомнений в правильности выдвинутой гипотезы.

Напомним себе, что плоскость γ проведена через середину одного из отрезков с концами на данных скрещивающихся прямых параллельно

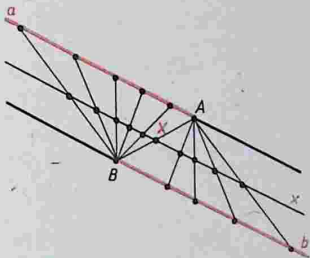


Рис. 68



плоскостям α и β . Надо доказать, что плоскость γ и является искомым геометрическим местом точек.

Так что же надо доказать? А доказать нужно два предложения.

1) *Середина всякого отрезка с концами на данных двух скрещивающихся прямых принадлежит плоскости γ .*

Доказать это просто. Ведь ранее уже доказано, что середина всякого отрезка с концами на параллельных плоскостях α и β принадлежит плоскости γ ! Отрезки с концами на скрещивающихся прямых a и b являются одновременно и отрезками с концами на параллельных плоскостях α и β . Поэтому их середины принадлежат плоскости γ .

2) Кроме того, надо доказать, что *всякая точка плоскости γ является серединой некоторого отрезка с концами на скрещивающихся прямых a и b .*

Как это сделать? Возьмем в плоскости γ произвольную точку G (рис. 67). Точка G не принадлежит параллельным плоскостям α и β . Поэтому существует и единственная прямая, проходящая через эту точку и пересекающая скрещивающиеся прямые a и b . На рисунке 67 таким отрезком является отрезок EF . Получили, что точка G является точкой пересечения отрезка с концами на плоскостях α и β с плоскостью γ . Но тогда точка G является серединой отрезка EF с концами на скрещивающихся прямых a и b . Следовательно, точка G принадлежит искомому геометрическому месту точек — середин отрезков с концами на скрещивающихся a и b .

Всё! Справедливость гипотезы доказана.

Что можно извлечь из доказанного? Полученный результат говорит о том, что плоскость в пространстве можно задать с помощью двух скрещивающихся прямых. Только нужно задать эти прямые «как надо». Для этого достаточно на одном и том же расстоянии от плоскости, которую мы хотим задать, провести две параллельные плоскости α и β , а в этих двух плоскостях провести две произвольные скрещивающиеся прямые a и b .

Средины отрезков с концами на проведенных скрещивающихся прямых и образуют нужную плоскость γ . Можно поступить и иначе. Надо провести две скрещивающиеся прямые AB и EF , пересекающие плоскость γ в точках пересечения на проведенных прямых отложить равные отрезки: $XA = XB$, $GE = GF$. Скрещивающиеся прямые AE и BF задают плоскость γ .

Итак, мы рассмотрели три геометрических места середин отрезков: а) с концами на двух параллельных прямых; б) с концами на двух параллельных плоскостях; в) с концами на двух скрещивающихся прямых.

В первом случае это была прямая, в двух других случаях — плоскость. В каждом из них наши рассуждения облегчались тем, что мы нашли достоверную гипотезу.

В поиске гипотез мы опирались на зрительное впечатление от выполненных построений, на аналогию с другим случаем, на использование частного случая (в качестве примера скрещивающихся прямых использовали две прямые, содержащие скрещивающиеся ребра куба), на предметы окружающей нас обстановки (например, на комнату как на модель прямоугольного параллелепипеда, представляющего собой обобщение куба).

В поиске гипотезы важно, конечно, уметь рассуждать, иметь необходимые знания. С другой стороны, выдвинутая гипотеза делает последующие рассуждения целенаправленными, а ее доказательство расширяет имеющиеся знания.

А теперь выполните следующие задания.

Задание 11. Изобразите призму. Постройте геометрическое место середин отрезков с концами на основаниях призмы.

Задание 12. Изобразите пирамиду. Постройте геометрическое место середин отрезков, один конец каждого из которых совпадает с вершиной пирамиды, а другой — принадлежит ее основанию.

Задание 13. Проведем обобщение трех рассмотренных геометрических мест середин отрезков. Как провести обобщение? Мы брали середины отрезков с концами на двух заданных фигурах (на двух параллельных прямых, или двух параллельных плоскостях, или двух скрещивающихся прямых). Это можно выразить иначе: на указанных отрезках мы брали точки, которые делили каждый отрезок в одном и том же отношении — $1:1$. Теперь заменим это отношение отношением $m:n$, считая от того конца отрезка, который принадлежит во всех случаях одной и той же из двух указанных фигур.

Пользуясь аналогией, установите, какую фигуру представляет собой геометрическое место точек, делящих отрезки в отношении $m:n$, считая от принадлежащего одной и той же фигуре конца, если концы отрезков принадлежат: а) двум параллельным прямым; б) двум параллельным плоскостям; в) двум скрещивающимся прямым.

Задание 14 потруднее. Даны две пересекающиеся прямые. Какую фигуру образует геометрическое место середин отрезков с концами на данных прямых (один конец на одной прямой, второй — на другой прямой).

Задание 15. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.

Ответы и решения к «Беседам о скрещивающихся прямых».

Задание 2. Искомая прямая содержится в плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых и данную точку. Кроме того, искомая прямая должна пересекать вторую, скрещивающуюся с первой прямую. Поэтому она проходит через точку пересечения указанной плоскости со второй прямой и через данную точку.

Если данная точка принадлежит одной из двух параллельных плоскостей, проходящих через заданные скрещивающиеся прямые, то искомой прямой не существует при условии, что данная точка не принадлежит ни одной из данных скрещивающихся прямых. Если данная точка принадлежит одной из скрещивающихся прямых, то искомым прямыми бесконечно много (все они пересекают одну из скрещивающихся прямых в данной точке).

Если же данная точка не принадлежит ни одной из двух параллельных плоскостей, проведенных через скрещивающиеся прямые, то искомая прямая существует и единственна.

Задание 3. При вращении получаются две плоскости, перпендикулярные общему перпендикуляру скрещивающихся прямых.

Задание 5. Прямые AA_1 и BC лежат в параллельных плоскостях, поэтому общих точек не имеют. Поскольку прямая AD параллельна прямой BC , то $AA_1 \parallel BC$. Остается, что прямые AA_1 и BC скрещиваются.

Задание 6. Через точку A проведем прямую AD , параллельную BC . Через точку B проведем прямую BB_1 , параллельную прямой AA_1 . Плоскости AA_1D и BB_1C (содержащие две противоположные параллельные грани куба) искомые. Расстояние между этими плоскостями равно a . Это означает, что расстояние между любыми двумя точками, одна из которых принадлежит одной из параллельных плоскостей, вторая — другой, равно a или больше чем a . Отсюда следует, что расстояние между точками A и B является расстоянием между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC .

Задание 7. Через одну из названных скрещивающихся прямых, например через BD , проведем плоскость, параллельную другой прямой — A_1C_1 . Такой плоскостью является плоскость $ABCD$, так как $AC \parallel A_1C_1$. Ортогональной (перпендикулярной) проекцией прямой A_1C_1 на плоскость $ABCD$ является прямая AC . Прямая AC пересекает прямую BD в некоторой точке O . Через точку O проведем прямую, параллельную прямой AA_1 . Проведенная прямая пересечет прямую A_1C_1 в некоторой точке O_1 . Отрезок OO_1 — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD и A_1C_1 .

Задание 8. Прямые AD_1 и CB_1 лежат в параллельных плоскостях, поэтому общих точек не имеют. Обозначим точку пересечения прямых BC_1 и CB_1 буквой M . Получаем, что через точку M проведена прямая CB_1 , параллельная прямой AD_1 . Но тогда $CB_1 \parallel AD_1$. Остается, что прямые AD_1 и CB_1 скрещиваются.

Задание 9. Через данную прямую и некоторую точку X второй плоскости проведем плоскость. Эта плоскость пересечет вторую из данных плоскостей по некоторой прямой x , проходящей через точку X . Через точку X в данной плоскости проведем произвольную прямую y , отличную от прямой x . Прямая y скрещивается с данной прямой и содержится во второй из данных плоскостей.

Задание 10. Искомая прямая проходит через точку X и пересекает прямую B_1D_1 , поэтому она содержится в плоскости XB_1D_1 . Из всех прямых, проходящих через точку X и пересекающих прямую B_1D_1 , нужно найти такую, которая пересекает прямую AC . Следовательно, решение задачи сводится к построению точки пересечения плоскости XB_1D_1 с прямой AC . Как построить эту точку? Поскольку прямая AC содержится в плоскости $ABCD$, то искомая точка принадлежит прямой пересечения плоскостей XB_1D_1 и $ABCD$. Как построить прямую пересечения указанных плоскостей? Прежде всего замечаем, что она параллельна прямой B_1D_1 , поскольку прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью парал-

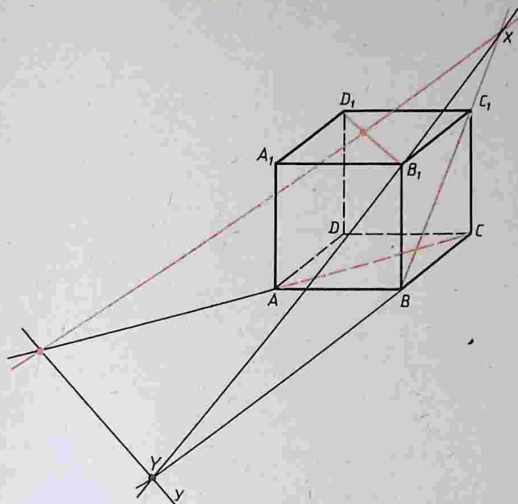


Рис. 69

лельны. Значит, для построения нужной нам прямой пересечения достаточно построить одну общую точку плоскостей XB_1D_1 и $ABCD$. Такой точкой является точка пересечения прямых BC и XB_1 . Обозначим эту точку Y (рис. 69). Через точку Y проведем прямую u , параллельную прямой B_1D_1 . Прямая u есть прямая пересечения плоскостей XB_1D_1 и $ABCD$. Строим точку пересечения прямых AC и u — точку M . Прямая XM пересекает прямую B_1D_1 в некоторой точке E . Следовательно, прямая MX искомая.

Дополнительное задание. Постройте точку пересечения прямой XM с плоскостью AA_1D_1D .

Задание 11. Искомое геометрическое место точек является многоугольник (вместе с его внутренней областью), вершинами которого являются середины боковых ребер призмы, а его стороны лежат в боковых гранях данной призмы.

Задание 12. Искомое геометрическое место точек есть многоугольник (с его внутренней областью), вершинами которого являются середины боковых ребер пирамиды, а стороны лежат в боковых гранях пирамиды.

Задание 13. а) Пусть даны две параллельные прямые a и b (рис. 70). Возьмем произвольный отрезок AB с концами на этих прямых. На отрезке AB возьмем точку X , такую, что она делит отрезок в отношении $m:n$, считая от конца, принадлежащего прямой a ($AX:XB=m:n$). Через точку X

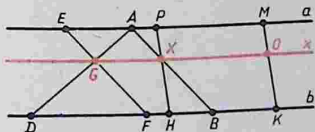


Рис. 70

проведем прямую x , параллельную прямой a . Прямая x и есть искомое геометрическое место точек.

Докажем это.

1) Сначала докажем, что всякая точка G прямой x является точкой некоторого отрезка с концами на данных параллельных прямых и делит его в отношении $m:n$, считая от конца, принадлежащего прямой a . Возможны разные варианты доказательства. Вот один из них. Строим отрезок AD , содержащий точку G ($D \in b$). Из подобия треугольников

AGX и ADB следует, что $\frac{AG}{GD} = \frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}$,

т. е. точка G удовлетворяет требованию задачи. Другой вариант доказательства опирается на свойство: противолежащие стороны параллелограмма равны. Для этого проведем через точку G отрезок EF , параллельный отрезку AB . Поскольку $EG=AX$, $GF=XB$, то $\frac{EG}{GF} = \frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}$, т. е. точка G прямой x удовлетворяет требованию задачи.

Наконец, можно воспользоваться обобщенной теоремой Фалеса.

Итак, мы доказали, что всякая точка прямой x является точкой некоторого отрезка с концами на данных параллельных прямых a и b и делит этот отрезок в отношении $m:n$, считая от конца, принадлежащего прямой a . Следовательно, всякая точка прямой x принадлежит искомому геометрическому месту точек.

2) Пусть теперь имеем отрезок с концами на данных параллельных прямых. Возьмем на нем точку, делящую его в отношении $m:n$, считая от конца, принадлежащего прямой a . Надо доказать, что эта точка принадлежит прямой x . Может быть два случая.

Случай 1. Отрезок с концами на данных прямых содержит точку X . На рисунке 70 таким отрезком является отрезок PH . Из подобия треугольников AXP и BXH следует, что $XP:XH=XA:XB=m:n$. Получаем, что точка X делит отрезок PH в отношении $m:n$, считая от конца, принадлежащего прямой a . Но такая точка на отрезке PH

единственная. Следовательно, если отрезок с концами на данных прямых a и b проходит через точку X , то точкой, делящей его в отношении $m:n$, считая от конца, принадлежащего прямой a , является точка X . Но точка X принадлежит прямой x , что и требовалось доказать.

Случай 2. Отрезок с концами на данных параллельных прямых не содержит точку X . На нашем рисунке таким отрезком является отрезок KM . Этот отрезок пересекает прямую x в некоторой точке O . По доказанному в первой части $MO:OK=m:n$. Но такая точка на отрезке MK единственная. Значит, всякая удовлетворяющая требованию задачи точка принадлежит прямой x .

Доказательство завершено.

б) Искомое геометрическое место точек есть плоскость, параллельная данным плоскостям. Доказательство а н а л о г и ч н о доказательству в предыдущем случае а) и доказательству для случая, когда $m:n=1$ (тогда речь идет о геометрическом месте середин отрезков с концами на данных параллельных плоскостях).

в) Искомое геометрическое место точек есть плоскость, параллельная параллельным плоскостям, проходящим через данные скрещивающиеся прямые. Доказательство аналогично доказательству для случая, когда $m:n=1$ (оно приведено в тексте).

З а д а н и е 14. У нас нет никакой гипотезы. Надо ее получить. Но как? Давайте прибегнем к зрительному образу. В геометрии это часто приходится делать. Изобразим две пересекающиеся прямые a и b (рис. 71, а). Точку их пересечения обозначим X . Возьмем произвольную точку A на прямой a . Что за отрезок XA ? Удовлетворяет ли он требованию задачи?

Его конец X принадлежит обеим прямым. Конец A принадлежит только прямой a . Следовательно, его можно рассматривать как отрезок с концами на данных пересекающихся прямых: один его конец на прямой a , другой — на прямой b . Середина отрезка — точка M принадлежит прямой a . Кажется, всякая точка прямой a является серединой

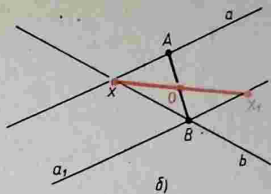
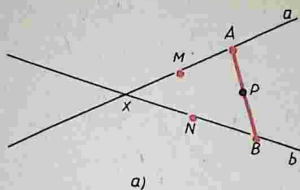


Рис. 71

некоторого отрезка, один конец которого на прямой b (совпадает с точкой X), другой — на прямой a . Хотя... нет. Точка X составляет исключение: она не может быть серединой отрезка с концами на данных прямых a и b . Но все точки прямой a , за исключением точки X , принадлежат искомому геометрическому месту точек.

Возьмем точку B на прямой b (отличную от точки X). Середина N отрезка XB также принадлежит искомому геометрическому месту точек. Ясно, что все точки прямой b , за исключением точки X , принадлежат искомому геометрическому месту точек. Середина отрезка AB — точка P также принадлежит искомому геометрическому месту точек. Будем зрительно представлять отрезки, ни один конец которых не совпадает с точкой X , а один конец принадлежит одной из данных пересекающихся прямых, второй конец — другой прямой. Будем также представлять середины отрезков. Кажется, середины этих отрезков заполняют все четыре плоских угла. Какова же гипотеза? Видимо, такова: искомое геометрическое место точек есть плоскость, содержащая прямые a и b , за исключением одной точки — точки пересечения данных прямых. Приступим к доказательству гипотезы.

Сначала докажем, что всякая отличная от точки X точка прямой a принадлежит искомому геометрическому месту точек. Возьмем на прямой a некоторую точку M . Отложим на луче XM от точки M отрезок $MA = XM$. Отрезок XA имеет одним концом точку A

прямой a , другим — точку X прямой b . Точка M — середина этого отрезка. Следовательно, точка M принадлежит искомому геометрическому месту точек. Итак, всякая точка прямой a , отличная от точки X , принадлежит искомому геометрическому месту точек. Аналогично доказываем, что всякая отличная от точки X точка прямой b принадлежит искомому геометрическому месту точек.

Теперь возьмем произвольную точку, не принадлежащую ни одной из данных пересекающихся прямых. Пусть этой точкой будет точка O (рис 71, б). Надо доказать, что существует отрезок с концами на данных прямых a и b , для которого точка O является серединой. Как это сделать?

Построим прямую a_1 , симметричную прямой a относительно точки O . Прямая a_1 параллельна прямой a , поэтому пересекает прямую b в некоторой точке B . Точка, симметричная точке B , лежит на луче BO и на прямой a . Построим эту точку — A . Поскольку точка A симметрична точке B относительно точки O , то точка O — середина отрезка AB . Таким образом, всякая точка, не принадлежащая данным пересекающимся прямым a и b , принадлежит искомому геометрическому месту точек.

Точка X искомому геометрическому месту точек не принадлежит.

Получили, что всякая точка, принадлежащая плоскости пересекающихся прямых a и b , за исключением их точки пересечения, принадлежит искомому геометрическому месту точек.

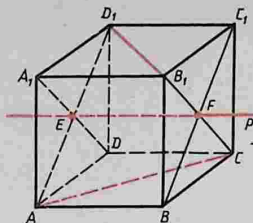


Рис. 72

Поскольку все отрезки с концами на данных пересекающихся прямых содержатся в плоскости этих прямых, то точек вне этой плоскости, принадлежащих искомому геометрическому месту точек, нет.

Гипотеза доказана.

Задача 15. Возьмем сторону основания призмы — AB и не пересекающую ее диагональ призмы — A_1C (рис. 72). Через прямую A_1C проведем плоскость, параллельную прямой AB . Этой плоскостью является плоскость A_1CD , так как $AB \parallel CD$. Сечением призмы плоскостью A_1CD является четырехугольник A_1DCB_1 . Проведем $BM \perp B_1C$. Плоскость A_1DCB_1 перпендикулярна плоскости правой грани BB_1C_1C , так как проходит через прямую CD , перпендикулярную второй плоскости. B_1C — прямая пересечения этих плоскостей. Поскольку $BM \perp B_1C$, то BM перпендикулярна плоскости A_1DCB_1 . Следовательно, длина

отрезка BM есть расстояние между прямыми AB и A_1C . Вычислить его просто. С одной стороны, площадь треугольника BB_1C равна половине произведения катетов — 150 ед.^2 . С другой стороны, площадь того же треугольника равна $\frac{1}{2} B_1C \cdot BM$. Следовательно,

$B_1C \cdot BM = 300$. Отсюда $BM = 300 : B_1C$. Вычисляем B_1C по теореме Пифагора, получаем 25. Следовательно, $BM = 12$. Расстояние между скрещивающимися прямыми AB и A_1C равно 12. Построим их общий перпендикуляр. Для этого построим ортогональную (прямоугольную) проекцию прямой AB на плоскость A_1DCB_1 . Поскольку прямая AB параллельна этой плоскости, то не имеет с ней, а стало быть, и со своей проекцией на эту плоскость общей точки. Так как прямая AB и ее проекция еще и лежат в одной плоскости, то они параллельны. Следовательно, искомая проекция проходит через точку M параллельно AB : $ME \parallel AB$ (рис. 72). ME пересекает A_1C в точке F . Проведя $FK \parallel BM$, получим общий перпендикуляр прямым AB и A_1C ($K \in AB$). Длина отрезка FK является расстоянием от стороны основания призмы — AB до диагонали призмы — A_1C . Почему? Да потому, что расстояние между любыми двумя другими точками отрезков AB и A_1C будет большим FK . Таким образом, расстояние между отрезками AB и A_1C равно FK . Но $FK = BM$, поэтому искомое расстояние равно 12.

НАЙТИ ИДЕЮ (X класс)

Десятиклассник Степа Мошкин перелистывал учебник геометрии. Это занятие с давних пор стало для него привычным. Он любил обдумывать заново ранее изученное и проявлял любопытство к тому, что еще предстоит изучать.

Его внимание на этот раз привлекло утверждение: преобразование симметрии относительно прямой в пространстве является движением. Доказательства не было. Почему? А, этот материал изучался в ознакомительном порядке, вспомнил он слова учителя, временно заменявшего Петра Ивановича. Отсутствие доказательств всегда вызывало у Степы Мошкина досаду, которая не проходила до тех пор, пока он не

находил их. После этого Степа даже испытывал чувство благодарности к авторам учебника, опустившим доказательство. Правда, временный учитель разъяснил, что это необходимо для разгрузки ума школьников, а потому Степан совершенно не прав. Но Мошкин, несмотря на столь убедительное разъяснение, по-прежнему упорно искал отсутствующие обоснования и доказательства, считая, что иначе у него «сломается» характер.

Не изменил себе Степа и на этот раз. В таких случаях он не испытывал никаких колебаний. Его мозг включался в поиски тотчас, словно так было предписано природой. Ему всегда не нравилось, что многие ученики возможность «изучать в ознакомительном порядке» принимали за разрешение не изучать.

— Надо доказать, что *при симметрии относительно прямой в пространстве расстояние между любыми двумя точками сохраняется*, — рассуждал Степа. — В планиметрии мы это доказывали. Впрочем, может, и нет. Возможно, изучали, вернее, не изучали, из-за «ознакомительности».

Степа Мошкин вновь полистал учебник, где, как оказалось, это было доказано еще в VII классе.

— Итак, если две точки лежат в одной плоскости с данной прямой, то при симметрии относительно этой прямой расстояние между ними сохраняется. Значит остается провести доказательство для случая, когда данные две точки не лежат в одной плоскости с прямой, относительно которой рассматривается симметрия.

Что значит, что *две точки не лежат в одной плоскости с некоторой прямой*?.. Это значит, что данная прямая и прямая, содержащая эти две точки, скрещивающиеся.

Степа изобразил прямую, две точки, принадлежащие скрещивающейся с ней прямой. Что и как делать дальше, было непонятно. Прежде всего, необходимые построения трудно было представить. К вашему сведению,

**ГЛАВНОЕ —
НАЙТИ ИДЕЮ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.**



А перейдет в точку D_1 , так как $AD_1 \perp p$ и $ED_1 = AE$. Естественно, точка D_1 перейдет при этом в точку A . Далее имеем $A_1 \rightarrow D$, $D \rightarrow A_1$, $B \rightarrow C_1$, $C_1 \rightarrow B$, $B_1 \rightarrow C$, $C \rightarrow B_1$. (Стрелки здесь заменяют слово «переходит».)

— Но вернемся к нашей задаче. Чтобы найти идею ее решения, надо на изображении куба взять отрезок, скрещивающийся с p , — рассуждал Мошкин. — Таким отрезком является, например, диагональ нижнего основания AC . Почему прямая AC скрещивается с прямой p ? Да потому, что, во-первых, прямая p с плоскостью нижнего основания куба, а стало быть, и с прямой AC общих точек не имеет. Во-вторых, $AC \nparallel EF$, потому что $AB \parallel p$ (через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной).

При симметрии относительно прямой p точка A перейдет в точку D_1 , точка C — в точку B_1 . $D_1B_1 = AC$, так как длины диагоналей равных квадратов равны.

Итак, в данном, конкретном случае, опираясь на изображение куба, мы установили, что в симметрии относительно прямой p точки A и C переходят в такие точки D_1 и B_1 , что $D_1B_1 = AC$.

Теперь вернемся к общему случаю.

Пусть дана прямая p и скрещивающийся с ней отрезок AC (рис. 74). В симметрии относительно прямой p точки A и C перейдут в точки A_1 и C_1 (не относите эту фразу к рис. 73, она будет отнесена к рис. 74). Надо доказать, что $A_1C_1 = AC$. Как выполнить построение? Какой идеей воспользоваться для доказательства?

Ее надо извлечь из решения задачи «на кубе». Что такое отрезок AC на рисунке 73? Это гипотенуза прямоугольного треугольника ACB . Чем интересен этот треугольник? Один его катет параллелен p , а другой лежит в плоскости, перпендикулярной p . Это любопытно. Идея: на рисунке 74 надо выполнить следующие построения: 1) Через точку C провести плоскость α , перпендикулярную p . 2) Через точку A провести прямую, параллельную p . Она пересечет плоскость α в некоторой точке B . Тогда получим прямоугольный треугольник ABC (ведь $AB \perp \alpha$).

Что дальше? А дальше надо продолжать использовать идею: поступать по аналогии с задачей «на кубе».

Плоскость α пересекает p в некоторой точке F (рис. 74). Точка, симметричная точке C относительно p , лежит на луче CF , причем $FC_1 = FC$. Точка C_1 построена. Аналогично строим точку B_1 , симметричную точке B относительно p . Чтобы построить точку A_1 , симметричную точке A , надо через точку A провести прямую, параллельную BB_1 , а через точку B_1 провести прямую, параллельную p .

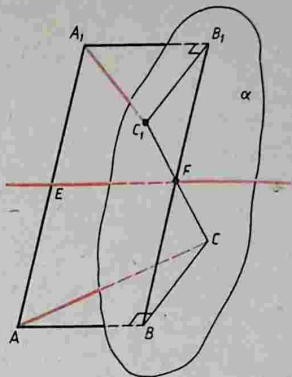


Рис. 74

Как же теперь доказать равенство $A_1C_1=AC$?. Для этого достаточно доказать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Посмотрим, какие равные элементы в них имеются. Прежде всего, они оба прямоугольные. Углы при вершинах B и B_1 у них прямые по построению. Кроме того, катеты AB и A_1B_1 у них равны как противолежащие стороны параллелограмма. А что же вторые катеты? Они тоже равны, так как $\triangle BFC = \triangle B_1FC_1$ по двум сторонам и углу между ними. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум катетам.

Следовательно, $A_1C_1=AC$. Поскольку расстояние между любыми двумя точками в симметрии относительно прямой сохраняется, то это преобразование является движением. Но при движении отрезок переходит в отрезок, плоскость переходит в плоскость, многоугольник — в многоугольник. Поэтому при симметрии относительно прямой p (см. рис. 73) куб перейдет сам в себя, — рассуждал Степа Мошкин.

Предложение: *симметрия относительно прямой в пространстве является движением*, — казалось, было доказано. Однако Степа испытывал какое-то беспокойство, словно что-то было еще недоделано. А что? Он стал подводить итог своим рассуждениям.

— Случай, когда данные две точки лежат в одной плоскости с прямой p , рассмотрен в планиметрии. Тогда расстояния при симметрии относительно p сохраняются. Случай, когда данные две точки не лежат в одной плоскости с прямой p , тоже только что изучен. Что еще? — спрашивал себя Степан. — Что?

— Как я доказывал сохранение расстояния во втором случае? Строил прямоугольный треугольник ABC . Так-так. Но всегда ли его можно построить? А что, если... Если отрезок AC лежит в плоскости, перпендикулярной p ? Например, вместо точек A и C (рис. 74) заданы точки B и C ? Тогда нужного треугольника не получится. Как быть?..

— Голова ты моя, — обрадованно сказал Мошкин. — Тогда и нужды в таком треугольнике нет. Тогда $B_1C_1=BC$ из равенства треугольников BFC и B_1FC_1 .

— Ну вот, теперь все.

* * *

Мы привели рассуждения Степы Мошкина, конечно, примерно. Но их дух передали довольно точно.

Какую главную мысль можно вынести из этого поучительного поиска доказательства утверждения? А вот какую. *Если не видишь пути доказательства в общем случае, обратись к частному, более конкретному. Рассуждения, которые мы проводим в частном случае, могут носить общий характер и привести к решению обобщенной задачи.*

Вот вам еще один поучительный пример.

Вы помните, как был получен признак делимости на 9 в IV классе? Вам предлагалось установить, можно ли разложить, например, 783 яйца в 9 корзин поровну? Возможно ли это сделать? Причем ответить на вопрос нужно было, не производя деления.

Можно ли разложить 783 яйца в 9 корзин поровну?

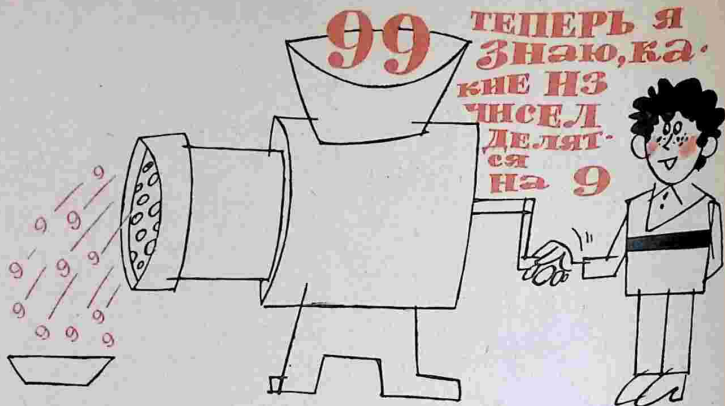


Как проводились рассуждения? Они проводились следующим образом. У нас 7 сотен яиц. Поступаем так. Берем от каждой сотни 99 яиц и раскладываем их в 9 корзин поровну. Тогда от 7 сотен при таком раскладывании останется 7 яиц. У нас имеется еще 8 десятков яиц. От каждого десятка берем по 9 яиц и раскладываем их в 9 корзин поровну. При таком раскладывании от 8 десятков останется 8 яиц. Получается, что осталось $7+8+3$ неразложенных яиц. От чего теперь зависит — можно ли все яйца разложить в 9 корзин поровну? А от этой суммы: $7+8+3$. Если эту сумму яиц можно разложить в 9 корзин поровну, то и все яйца можно разложить поровну. Если же эту сумму яиц нельзя разложить поровну в 9 корзин, то и все 783 яйца невозможно разложить в 9 корзин поровну. Проверяем: $7+8+3=18$. 18 яиц можно разложить поровну в 9 корзин. Следовательно, все 783 яйца можно разложить в 9 корзин поровну.

Не правда ли, очень удачная задача для четвероклассников! Теперь нужно только отвлечься от ее конкретности. Имеем число 783. Надо узнать, делится ли оно на 9, не выполняя деления. Как это сделать? А узнать, делится ли на 9 сумма его цифр: $7+8+3$... Если сумма цифр числа делится на 9, то и число делится на 9. Если сумма цифр числа не делится на 9, то и число не делится на 9.

Полученный вывод о делимости числа на 9 кажется убедительным, хотя он получен путем рассмотрения лишь одного числа и доказательством не является. В чем секрет этой убедительности? А в том, что мы интуитивно чувствуем, что проведенные рассуждения носят общий характер. Мы понимаем, что те же рассуждения можно провести применительно к любому натуральному числу и при этом получим тот же вывод.

И это именно так. Чтобы не быть голословными, рассмотрим вывод признака делимости в общем виде для любого натурального числа, воспользовавшись той же идеей раскладывания яиц поровну в 9 корзин. Пусть



дано натуральное число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$. (Черта сверху означает, что здесь имеется в виду не произведение чисел, а цифры записанного числа.) Идея получения признака делимости на 9 ясна: надо единицу каждого разряда (кроме разряда единиц) представить в виде суммы числа 1 и оставшейся от единицы разряда части, которая будет числом, записанным с помощью только цифры 9. Тогда данное число примет вид:

$$\underbrace{a_n(1 + \overline{99\dots 9})}_{n \text{ цифр}} + \underbrace{a_{n-1}(1 + \overline{99\dots 9})}_{n-1 \text{ цифра}} + \dots + a_2(1 + 99) + a_1(1 + 9) + a_0.$$

Раскроем скобки и сумму слагаемых, делящихся на 9, обозначим $9k$. Получим:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = 9k + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0).$$

Данное число представлено в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое $9k$ делится на 9, второе слагаемое равно сумме цифр данного числа. Если сумма цифр разделится на 9, то и данное число разделится на 9. Если же сумма цифр числа не разделится на 9, то и число не разделится на 9.

Признак делимости числа на 9 теперь доказан. Если в первом примере идея доказательства была найдена путем рассмотрения конкретного случая, когда скрещивающийся с прямой p отрезок оказался элементом куба, то сейчас мы почерпнули идею доказательства путем анализа рассуждений, проведенных применительно к конкретному числу.

В обоих случаях мы использовали важные мыслительные операции — конкретизацию и обобщение, а именно обобщение метода рассуждения, его перенос в новые условия. Умение это делать важно для всякого всерьез изучающего математику.

КАК РАССУЖДАТЬ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СЕЧЕНИЙ — ИЗ РАССКАЗОВ ПЕТРА ИВАНОВИЧА (X класс)

Петр Иванович — учитель математики и наш давний друг. Много раз нам доводилось слушать его рассказы о преподавании математики, об учениках. Писать их сам он не хочет, и мы сочли, что повествования учителя-мастера в нашем изложении все-таки лучше, чем их безвестность. Думаем, что юный читатель почерпнет из предлагаемых рассказов немало интересного и полезного.

Итак, приступаем.

Пространственные представления без рассуждений?

Петр Иванович изобразил на доске куб (см. рис. 75) и записал условные задачи.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. $O \in$ лучу BB_1 , B_1 между B и O .

Построить точку пересечения прямой OD_1 с плоскостью ABC .

Итак, задача предложена. Надо построить точку пересечения прямой и плоскости.

Андрей Веселый. А что тут думать? У меня хорошие пространственные представления. Я все вижу. Разрешите, я построю эту точку пересечения.

Петр Иванович. Иди, Андрюша, построй.

Андрей провел прямую OD_1 , продолжил отрезок AD и обозначил точку их пересечения F .

— Вот и все дела! — самоуверенно произнес Андрей. — Надо доказать, что точка F искомая? Пожалуйста! По построению точка F принадлежит прямой OD_1 . Стало быть, одно требование условия выполнено. Кроме того, также по построению точка F принадлежит прямой AD , а прямая AD лежит в плоскости ABC , значит, и точка F принадлежит плоскости ABC .

— Кто не согласен с Андреем? — обратился к классу Петр Иванович.

Десятиклассники долго молчали. Потом появилась одна рука, вторая, третья...

Степа Мошкин. Так что же это, у Веселого получается дело веселое: прямая OD_1 пересекает плоскость $AA_1 D_1$ в двух точках — D_1 и F ? Но тогда она должна лежать в плоскости передней грани куба, а потому не может пересекать плоскость задней грани? Стало быть, прямая OD_1 не проходит через точку O ? Тут столько противоречий!

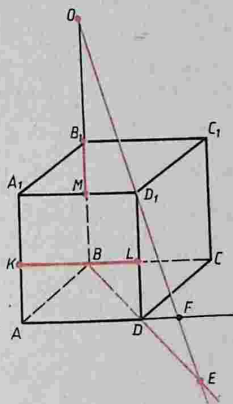


Рис. 75

Таня Пригожая. Прямая OD_1 пересекает плоскость передней грани куба в точке D_1 . Прямая AD лежит в плоскости передней грани и не проходит через точку D_1 . Значит, прямые OD_1 и AD скрещивающиеся, поэтому пересекаться не могут.

Андрей. Какие странности. На рисунке видно, что прямые пересекаются. А на самом деле не пересекаются. Где же правда?

Петр Иванович. Дело в том, что в задаче идет речь о кубе. А на рисунке мы имеем дело с его изображением на плоскости. Скрещивающиеся прямые на плоском рисунке всегда изображаются пересекающимися или параллельными прямыми. А как иначе? Ведь на плоскости других различных прямых нет! *Правильные пространственные представления по плоскому чертежу без рассуждений получить трудно. Пространственные представления могут совершенствоваться и развиваться только одновременно с развитием умения рассуждать, обосновывать, объяснять, доказывать. И надо учитывать, что когда мы рассуждаем, глядя на чертеж пространственной фигуры, то имеем в виду не расположение элементов на чертеже, а расположение элементов самой фигуры, которая на этом чертеже изображена. В этом принципиальное отличие рисунков в планиметрии от рисунков в стереометрии.*

Степа. Значит, так: представляя — рассуждай, рассуждая — представляй! Иначе не будет ни того, ни другого.

Петр Иванович. Именно так. Этим правилом (назовем его правилом Степы Мошкина) мы и будем руководствоваться при изучении стереометрии. Кто его забудет, того ждут геометрические неудачи. Не будут у него развиваться ни геометрические представления, ни умение рассуждать. А без этого какая математика?

Но все-таки как построить точку пересечения прямой OD_1 с плоскостью нижнего основания куба?

Саша Смышленый. Видите, наша ошибка в том, что на плоскости нижнего основания мы выбрали прямую, скрещивающуюся с прямой OD_1 (я имею в виду саму пространственную фигуру, а не ее изображение). А надо было в плоскости нижнего основания выбрать такую прямую, которая пересекается с прямой OD_1 . Но как найти такую прямую? Тоже, видно, надо рассуждать...

Лена Славная. А что, смотрите, параллельные прямые BB_1 и DD_1 лежат в одной плоскости. В этой же плоскости лежит прямая OD_1 . И в той же плоскости лежит прямая BD , принадлежащая плоскости нижнего основания. Раз прямые OD_1 и BD лежат в одной плоскости, то они или параллельны, или пересекаются. Проверим это построением. *(Идет к доске.)* Вот, видите, они пересекаются в точке E . Точка E и есть точка пересечения прямой OD_1 с плоскостью ABC . Все.

Андрей. А вот все-таки смотрите. На прямой AD я беру точку F (как на рис. 75) Строю отрезок FD_1 . Так, этот отрезок лежит в плоскости передней грани. А прямая ED_1 не лежит в этой плоскости. Чему же верить? Рассуждениям нашим или нашим глазам?

Петр Иванович. Андрюша, наш рисунок (рис. 75) — это изображение пространственной фигуры, а не сама фигура. Понимаешь? Изображение ее в параллельной проекции. А теперь представь, что некоторая

плоскость параллельна проектирующей прямой. Такую плоскость называют проектирующей. На какую фигуру спроектируются прямые, лежащие в этой плоскости? Для наглядности прибегнем к рисунку (рис. 75).

Пусть CC_1 — направление проектирования. Плоскость передней грани куба параллельна CC_1 , поэтому является проектирующей. Пусть мы все элементы проектируем на плоскость нижнего основания куба. Тогда какая фигура будет проекцией отрезка A_1D_1 ? Отрезок AD . А какой отрезок будет проекцией отрезка KL (Петр Иванович изобразил этот отрезок), лежащего в плоскости передней грани? Тот же отрезок AD . Если прямая, как, например, A_1A , окажется проектирующей, то все ее точки спроектируются в одну точку A . Все другие прямые плоскости передней грани спроектируются в прямую AD . Вот и получается, что на рисунке одна и та же прямая является изображением бесконечного множества прямых.

На нашем рисунке прямая D_1F тоже является изображением многих прямых. Ты имеешь в виду прямую D_1F , лежащую в плоскости передней грани куба, а нам при построении нужна не эта прямая, а прямая OD_1 , не лежащая в плоскости передней грани.

В условии задачи это оговорено: точка O принадлежит прямой BB_1 и стало быть, не принадлежит плоскости передней грани. На рисунках стараются избегать случаев, когда две рассматриваемые в задаче прямые изображались бы одной и той же прямой. Чертеж становится тогда не наглядным.

Вот в передней грани куба я взял отрезок KL . Хорошо ли это? Нет. Я получил, что две понадобившиеся для рассуждений прямые — BC и KL — изображены одной и той же прямой. Такой рисунок влечет за собой неясности и ошибки. Вот еще пример бездумного отношения к чертежу: я провожу отрезок B_1M (см. рис. 75). Он является, например, изображением отрезка, лежащего на ребре BB_1 , и отрезка, лежащего на верхней грани. И трудно понять, который из них имеется в виду. На том же рисунке непонятно также, лежит ли отрезок DL на ребре DD_1 или в нижней грани куба. А вот пока все ребро BC было изображено пунктирной линией, была ясность. Так что на рисунке важна также «пунктирность» линий.

Рассуждать и доказывать по не наглядному чертежу трудно: тогда требуется много оговорок, уточнений, что имеется в виду. Поэтому стремитесь к наглядным чертежам.

Степа (тихо). Назовем этот призыв еще одной заповедью Петра Ивановича.

Петр Иванович. Слышу, слышу, Степан. Я бы добавил еще одну заповедь. Ее высказала Лена Славная, и она будет очень нужна в дальнейшем. Вот она. Чтобы построить точку пересечения прямой с данной плоскостью, нужно в этой плоскости найти прямую, лежащую в одной плоскости с данной прямой. Если данная и найденная прямые пересекаются, то их точка пересечения искомая.

Богатство задач на одном рисунке

Петр Иванович снова изобразил на доске куб и кратко записал:
Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. $O \in$ лучу BB_1 , $B_1 O = BB_1 = a$.



а) Построить: $E = OD_1 \times \text{пл. } ABC$, $F = OC_1 \times \text{пл. } ABC$.

б) Найти площадь четырехугольника $CDEF$.

Крестик в пункте а) заменяют у Петра Ивановича слово «пересечение» (напоминают точку пересечения двух прямых). Знак « $=$ » заменяет здесь слова «есть», «является». Таким образом, первое выражение « $E = OD_1 \times \text{пл. } ABC$ » читается так: «Точка E является точкой пересечения прямой OD_1 с плоскостью ABC » (с плоскостью нижнего основания). Итак, в задаче требуется построить точку пересечения прямой OD_1 с плоскостью нижнего основания и точку пересечения прямой OC_1 с той же плоскостью.

Построение первой точки было повторением выполненного в предыдущем случае (рассказ первый). Точка F была построена верно. В результате появился рисунок 76. Надо было переходить к выполнению пункта б).

Степа. Кажется, четырехугольник $CDEF$ является трапезией. Почему? Во-первых, прямые EF и C_1D_1 лежат в одной плоскости OEF . Во-вторых, они не пересекаются, поскольку прямая D_1C_1 параллельна плоскости нижнего основания, в которой лежит прямая EF . А раз прямые D_1C_1 и EF лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то по определению они параллельны.

Оля. Чему равна площадь тра-

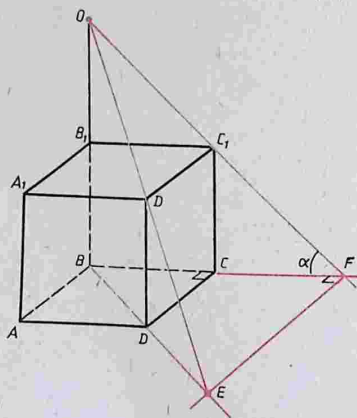


Рис. 76

пещи? Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Основание $CD = a$ по условию. А вот чему равно основание EF — ума не приложу. И как провести высоту трапеции? Что это за трапеция? Подождите, ведь по условию $ABCD$ — квадрат, значит, $DC \perp CF$. Но тогда трапеция $CDEF$ прямоугольная, и сторона CF является ее высотой! Кажется, CF можно найти...

Саша. Конечно! Смотрите, точка B_1 — середина отрезка OB и $B_1C_1 \parallel BF$. Следовательно, точка C_1 — середина отрезка OF . По теореме Фалеса: если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Ваня Синицын (*перебивая*). Можно обойтись без теоремы Фалеса. Достаточно воспользоваться свойством средней линии треугольника. Она же параллельна третьей стороне, а параллельную можно провести только одну (через данную точку). Вот треугольник BOF , вот B_1 — середина его стороны, и через B_1 проведена прямая B_1C_1 , параллельная BF . Отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника BOF , поэтому C_1 — середина OF .

Лена. Все понятно. Дальше получаем, что точка C — середина стороны BF треугольника BOF . Используем при этом или теорему Фалеса, или свойство средней линии треугольника. Теперь мы знаем, что $CF = BC = a$. Высота трапеции найдена.

Таня. Петр Иванович, $EF = 2a$!

Петр Иванович. Почему?

Таня. Да потому, что CD — средняя линия треугольника EBF . Ведь C — середина BF и $CD \parallel EF$. А потому площадь четырехугольника $CDEF$ равна...

Сейчас, найду устно... Она равна... $\frac{3a^2}{2}$.

Задача была решена. Однако Петр Иванович не любил тут же бросать решенную задачу. Ученики привыкли к этому и ждали от учителя новых задач по тому же самому чертежу. Дело в том, что на выполнение рисунка в стереометрии уходит много времени, иногда не меньше, чем на само решение. Хорошо еще, когда в выполнении чертежа имеются элементы новизны. А если их нет и вся чертежная работа представляет собой простое повторение ранее известного? Тогда время для поиска решения, проведения рассуждений, для доказательства «съедается» механическим выполнением рисунков. Всякий же дополнительный вопрос или задача по выполненному рисунку дают увеличение доли времени на саму геометрию, а доля чисто чертежной, графической работы уменьшается.

Петр Иванович. Прошу придумать дополнительный вопрос по рисунку на доске.

Андрей. Найти градусную меру двугранного угла с ребром EF (т.е. угла $BEFO$).

Заметим, что Петр Иванович использовал краткое обозначение двугранного угла « $\angle BEFO$ ». Две средние буквы указывали прямую, являющуюся ребром двугранного угла, одна из крайних обозначала точку на одной грани, другая крайняя буква обозначала точку на второй грани двугранного угла. Глядя на эту запись, сразу же можно было назвать грани: грань BEF и грань OEF .

Отвечать на вопрос Андрея вызвался Коля Зачем.

Коля. Найти градусную меру двугранного угла — значит найти меру его линейного угла. Поскольку лучи FC и FC_1 перпендикулярны ребру EF , то $\angle CFC_1$ является линейным углом угла $BEFO$. Так как треугольник CC_1F прямоугольный и равнобедренный, то $\angle CFC_1 = 45^\circ$.

Андрей. Почему $C_1F \perp EF$?

Коля. По теореме о трех перпендикулярах.

После этого Петр Иванович раздал всем ученикам карточки с одними и теми же задачами. Их можно было решать устно или письменно. Решивший задачу рассказывал о своем решении у доски. Нерешенные задачи служили домашним заданием. В процессе решения рисунок 76 переходил постепенно в рисунок 77.

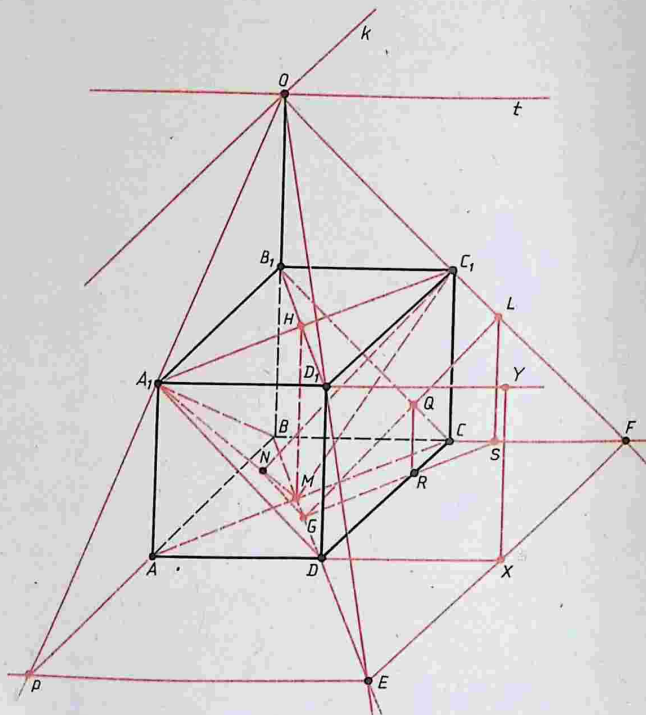


Рис. 77

Приведем предложенные задачи, а также их решения. Советуем читателям сначала решить задачу самостоятельно, а затем ознакомиться с предлагаемым решением. Возможно, оно будет отличаться от вашего. Ваше решение может оказаться лучше предложенного, потому что приведенные нами решения — это решения учеников Петра Ивановича. А разве ваши головы хуже? Впрочем, если вы совершенно уверены в правильности и полноте вашего решения, приведенные решения вообще можно не смотреть.

* * *

Итак, вот они, задачи Петра Ивановича с использованием рисунков 76 и 77.

1. Найти расстояние между прямыми OF и A_1D_1 .

Решение. Эти прямые скрещивающиеся. C_1D_1 — их общий перпендикуляр. Следовательно, расстояние между указанными прямыми равно длине отрезка D_1C_1 , т. е. равно a .

2. Найти расстояние между прямыми EF и A_1D_1 .

Решение. Плоскость нижнего основания куба проходит через прямую EF и параллельна прямой A_1D_1 . Поэтому расстояние от прямой A_1D_1 до скрещивающейся с ней прямой EF равно расстоянию от прямой A_1D_1 до плоскости нижнего основания, т. е. равно AA_1 . Получили, что искомое расстояние равно a .

3. Построить общий перпендикуляр к прямым EF и A_1D_1 .

Решение. а) Строим $X = AD \times EF$. б) Параллельный перенос, в котором точка D перейдет в точку X , переведет отрезок DD_1 в отрезок XY . в) XY — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых EF и A_1D_1 .

4. Найти расстояние между прямыми AD и OF .

Решение. Плоскость задней грани куба проходит через прямую OF и параллельна прямой AD . Прямые OF и AD скрещивающиеся, так как, во-первых, они не имеют общих точек, поскольку лежат в параллельных плоскостях; во-вторых, $AD \nparallel OF$, поскольку $A_1D \parallel OF$ (через точку D , как и через всякую точку вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную OF). Но тогда расстояние от прямой AD до прямой OF равно расстоянию от AD до плоскости задней грани куба, т. е. равно a .

5. Построить общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AD и OF .

Ответ. Общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AD и OF является отрезок XF .

6. Найти угол между прямыми OF и A_1B_1 .

Решение. $C_1 \in OF$, $C_1D_1 \parallel A_1B_1$. Следовательно, угол между названными прямыми равен углу между прямыми OF и C_1D_1 , т. е. равен 90° .

7. Найти угол между прямыми BD и OF .

Решение. $A_1D \parallel B_1C$, $B_1C \parallel OF$, поэтому $A_1D \parallel OF$. Значит, угол между указанными в задаче прямыми равен углу между прямыми BD и A_1D . Найдем $\angle A_1DB$ из треугольника DA_1B . Этот треугольник равносторонний. Поэтому $\angle A_1DB = 60^\circ$. Угол между прямыми BD и OF равен 60° .

8. Найти угол A_1OC_1 .

Ответ. $\angle A_1OC_1 = 60^\circ$, так как $\triangle A_1OC_1$ равносторонний.

9. Доказать, что $OF \parallel \text{пл. } A_1BD$.

10. Найти градусную меру углов E и D трапеции $CDEF$.

Ответ. $\angle DEF = 45^\circ$, $\angle CDE = 135^\circ$.

11. Построить линию пересечения плоскости OEF с плоскостью AA_1D_1D .

Решение. Эти плоскости имеют две общие точки: D_1 и X . Следовательно, прямая D_1X есть линия их пересечения.

12. Построить линию пересечения плоскостей OEF и AA_1B_1B .

Решение. Названные плоскости имеют общую точку O . Следовательно, они имеют общую прямую, проходящую через эту точку. Прямая пересечения указанных плоскостей и прямая C_1D_1 лежат в параллельных плоскостях левой и правой граней куба, поэтому не пересекаются. Поскольку они еще и лежат в одной плоскости OEF , то они параллельны. На рисунке 77 искомая прямая обозначена « k ».

13. Построить прямую пересечения плоскостей OA_1D_1 и BB_1C_1C .

Ответ. Искомая прямая проходит через точку O и параллельна прямой A_1D_1 . На рисунке 77 она обозначена « l ».

14. Построить многогранник, симметричный многограннику $CDEFC_1D_1$ относительно плоскости BB_1D_1D .

Решение. Названная плоскость перпендикулярна плоскостям верхнего и нижнего основания куба и пересекает их по прямым BD и B_1D_1 . Мы знаем, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости. Поэтому AC перпендикулярна плоскости BB_1D_1D и A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1D_1D . Кроме того, отрезки AC и A_1C_1 делятся указанной плоскостью пополам. Следовательно, в симметрии относительно плоскости BB_1D_1D точка C_1 перейдет в точку A_1 , а точка C — в точку A . Точки D и E перейдут каждая в себя. Вершина F многогранника является точкой пересечения лучей BC и OC_1 . Точка B в рассматриваемой симметрии перейдет в себя, точка O также перейдет в себя.

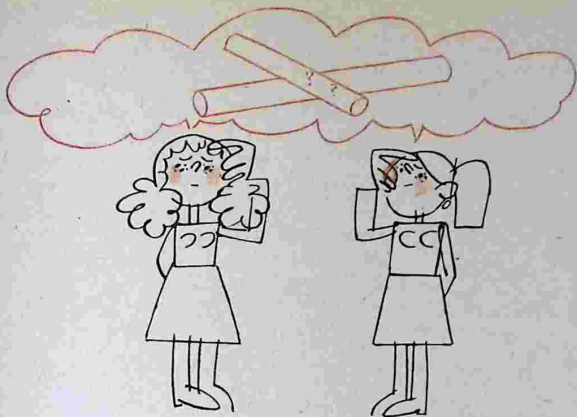
Следовательно, луч BC перейдет в луч BA , а луч OC_1 — в луч OA_1 . Но тогда точка F перейдет в точку P пересечения лучей BA и OA_1 . В результате установили, что многогранник $CDEFC_1D_1$ переходит в симметричный относительно плоскости BB_1D_1D многогранник $ADEPA_1D_1$.

15. Доказать, что точка D принадлежит отрезку PF и делит его пополам.

Доказательство. Отрезки DF и DP симметричны относительно плоскости BB_1D_1D , поэтому $DF = DP$. $\angle EDF = 90^\circ$. $\angle PDE = \angle EDF$ как симметричные относительно плоскости, поэтому $\angle PDE = 90^\circ$. Поскольку через точку D проходит в плоскости нижнего основания куба единственная прямая, перпендикулярная прямой BD , то прямые PD и FD совпадают. Поэтому точка D принадлежит отрезку PF .

На рисунке 77, чтобы не усложнять чертеж, отрезки DF и DP не проведены. Представьте их мысленно. Умение представлять мысленно, в воображении, элементы пространства важно. Оно помогает в поиске доказательства, позволяет избежать ненужных дополнительных построений, затрудняющих понимание рисунка, способствует развитию пространственной «фантазии».

16. К какой фигуре будет стремиться трапеция $CDEF$, если $BO \rightarrow \infty$?



Ответ. Высота трапеции тогда уменьшается, стремясь к нулю. Трапеция будет «приближаться» к отрезку CD .

17. Найти расстояние между прямыми BD и OF .

Решение. Ранее было уже доказано, что прямая OF параллельна плоскости A_1BD , проходящей через прямую BD . Теперь достаточно из точки C_1 прямой OF опустить перпендикуляр на плоскость A_1BD и найти его длину. Но прежде надо выяснить, где будет расположено основание этого перпендикуляра. Воспользуемся следующей идеей. Плоскость, проходящая через искомый перпендикуляр, будет перпендикулярна плоскости A_1BD . Раз мы не можем построить нужный нам перпендикуляр к плоскости, то давайте пока через ту же точку C_1 проведем плоскость, перпендикулярную плоскости A_1BD . В ней и будет лежать «предмет нашего интереса». К тому же построением указанной плоскости можно себя и не утруждать. Она уже имеется: это плоскость AA_1C_1C . Вам ясно, что эта плоскость перпендикулярна плоскости нижнего основания куба. Прямая BD лежит в одной из них и перпендикулярна линии пересечения указанных перпендикулярных плоскостей, а потому перпендикулярна другой — плоскости AA_1C_1C . Поскольку плоскость A_1BD проходит через прямую BD , перпендикулярную плоскости AA_1C_1C , то она перпендикулярна последней. Линией их пересечения является прямая A_1M , где M — точка пересечения диагоналей нижнего основания куба. Основание перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на плоскость A_1BD , принадлежит, таким образом, прямой A_1M . Но где оно на прямой A_1M ? Поскольку углы A_1 и M треугольника A_1C_1M острые, то основание перпендикуляра принадлежит стороне A_1M . Чтобы узнать, к которому из ее концов оно ближе, надо сравнить длины A_1C_1 и MC_1 . Ясно, что длина первой стороны больше длины второй: $A_1C_1 > MC_1$. Следовательно, основание N перпендикуляра ближе к точке M . Выберем точку таким образом и проведем перпендикуляр C_1N .

Остается найти его длину. Это можно сделать из треугольника A_1C_1N . $A_1C_1 = a\sqrt{2}$. Найдем угол NA_1C_1 из треугольника A_1MH , где H — точка пересечения диагоналей верхней грани куба. MH — линия пересечения двух диагональных плоскостей, перпендикулярных плоскостям оснований, поэтому прямая MH перпендикулярна плоскостям оснований. Значит, $MH = a$. Имеем $\operatorname{tg} \angle MA_1H = \frac{MH}{A_1H} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

Итак, $\angle NA_1C_1 = \arctg \sqrt{2}$. Из треугольника A_1C_1N находим искомое расстояние между прямыми BD и OF : $C_1N = A_1C_1 \sin NA_1C_1 = a\sqrt{2} \sin \arctg \sqrt{2}$. Итак, $C_1N = a\sqrt{2} \sin \arctg \sqrt{2}$. Задача решена.

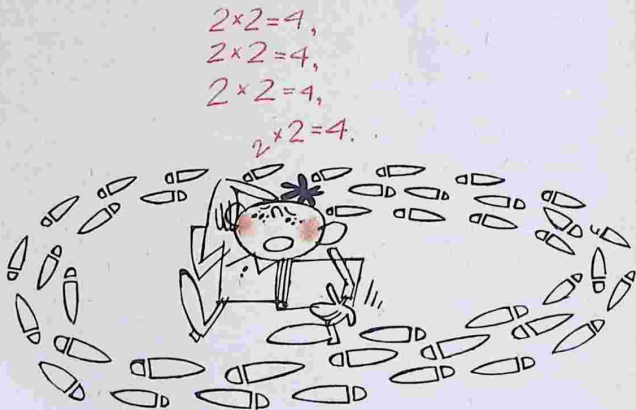
* * *

Заметим, что, вообще говоря, точку N мы взяли в определенной степени произвольно. Чтобы выбрать точку N на отрезке A_1M точно, нужно построить треугольник A_1C_1M по трем сторонам в натуральном виде. Его стороны таковы: $a\sqrt{2}$, $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Затем из вершины C_1 опустить перпендикуляр на сторону A_1M (например, с помощью угольника). После этого отрезок A_1M на рисунке 77 разделить в том же отношении, в каком он разделен на неискаженном изображении треугольника A_1C_1M .

* * *

18. Построить общий перпендикуляр прямых BD и OF .

Решение. Прямая OF параллельна плоскости A_1BD , поэтому ее ортогональная проекция на эту плоскость будет ей параллельна и проходит через точку N . Проведем через точку N прямую, параллельную прямой



OF . Она пересечет прямую BD в некоторой точке G . Прямая GL , проходящая через точку G и параллельная прямой NC_1 , перпендикулярна прямой OF и BD и пересекает их. Отрезок GL является общим перпендикуляром к прямым OF и BD .

Задача решена, но остается неясным, какая часть отрезка GL видимая и какая — невидимая (и ее нужно изображать пунктирной линией). Чтобы установить это, поступим следующим образом. Проведем $LS \perp BF$. Тогда LS перпендикулярна плоскости ABC . Построим точку R пересечения отрезков GS и CD . Линия пересечения плоскостей GLS и DD_1C_1C проходит через точку R и параллельна LS . Пусть Q — точка пересечения этой линии с отрезком GL . Тогда GQ — невидимая часть отрезка GL , QL — видимая часть.

* * *

Возможно, задачи 17 и 18 заинтересуют не каждого любителя математики. Они довольно сложны. Если вы их решили или основательно разобрали приведенное решение, обосновали каждый шаг, значит вы обладаете упорством, достаточным для овладения математикой.

Вы, наверное, заметили, что среди задач Петра Ивановича всегда есть повторяющиеся по методу решения. Овладеть методом — это гораздо больше, чем решить ту или иную задачу. Д. Пойа, известный математик и педагог, сказал, что метод — это искусственный прием, примененный дважды.

Как рассуждать при построении сечений?

— Геометрия много бы потеряла, если бы в ней не было задач на построение сечений многогранников, — любит повторять Петр Иванович.



— Если бы этих задач не было, их следовало бы выдумать. Представляете, сколько богатства сокрыто в них: пространственные представления, фантазия, интуиция, интереснейшие поиски идей и методов решения, богатство рассуждений и доказательств, включающее в себя всю планиметрию и стереометрию! Это же такое интеллектуальное и практическое раздолье! И оно обогащает всех.

Кроме того, это прекрасная школа для будущих инженеров, архитекторов, художников, рационализаторов и конструкторов, квалифицированных рабочих и техников, всех, кто хоть в какой-то мере будет связан с начертательной геометрией и черчением, с изображениями пространственных ситуаций на плоскости. Заменить задачи на построение сечений ничем нельзя! Нет, вы скажите, что может быть прекраснее погружения зрения, ума и воображения в пространство, запечатленное на рисунке?

И Петр Иванович начал рассказывать свои педагогические школьные были о задачах на построение сечений. Их мы сейчас и изложим, освободив от той части, которая представляет интерес только для учителей математики.

Осторожно, это не сечение!

— Представляете, предлагаю я ученикам однажды первую задачу на сечение. Дана правильная четырехугольная призма. На боковых ребрах даны три точки: E , F и K (см. рис. 78, а). Представьте теперь, что через них проведена плоскость. Эта плоскость пересекает левую грань призмы по отрезку EF , заднюю грань — по отрезку FK . Поскольку плоскость EFK имеет общие точки и с другими гранями (например, с передней и правой боковой), то она пересекает по отрезкам и эти грани. Все полученные от пересечения плоскости с гранями отрезки образуют замкнутую ломаную, являющуюся многоугольником. Этот плоский многоугольник называется сечением данного многогранника. Ваша задача состоит в том, чтобы построить это сечение.

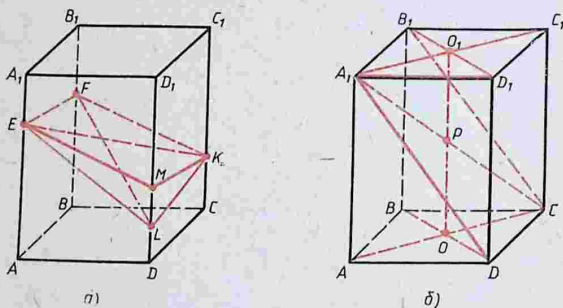


Рис. 78

— А что тут решать? — сказал Степа Мошкин. — Вот, беру на ребре DD_1 точку L , строю отрезки EL и KL . Четырехугольник $EFKL$ — искомое сечение.

— Нельзя ли точку L выбрать пониже или повыше? — спросил Петр Иванович.

— Можно, конечно, — ответил Степа.

— Осторожно! Это не сечение! — обратился к классу Петр Иванович. — Не надо чертить. Звенья ломаной $EFKLE$ не лежат в одной плоскости. Воцарилась тишина.

Первым догадался Саша Смышленный.

— Противолежащие грани правильной призмы параллельны. Значит, и линии пересечения плоскости EFK с плоскостями противоположных граней должны быть параллельными. А у Степана $LK \parallel EF$, $LE \parallel FK$. Значит, сечение построено Степой неверно.

Надо провести, например, $EM \parallel FK$. Четырехугольник $EFKM$ — искомое сечение.

— Как по-вашему, каково взаимное расположение прямых EK и FL ? — спросил Петр Иванович.

— Прямая EK лежит в плоскости EFK , а прямая FL пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей прямой EK . Следовательно, эти прямые скрещивающиеся, — ответила Таня Пригожая.

— Вот видите, — подвел итог учитель, — если считать построенную Степой фигуру плоским сечением многогранника, то нужно считать, что две скрещивающиеся прямые лежат в одной плоскости.

А теперь снова изобразите правильную четырехугольную призму и постройте ее сечение плоскостью.

а) A_1B_1C ; б) A_1C_1C (рис. 78, б).

Ваня Синицын рассуждал так. Поскольку плоскости верхнего и нижнего оснований призмы параллельны, то и линии их пересечения с плоскостью A_1B_1C также параллельны. Получим, что линия пересечения плоскости нижнего основания с плоскостью A_1B_1C проходит через точку C и параллельна A_1B_1 . Но такой линией является прямая CD . Значит, секущая плоскость имеет с нижней гранью призмы общий отрезок CD . Четырехугольник A_1B_1CD — искомое сечение призмы плоскостью A_1B_1C .

Лена Славная рассуждала несколько иначе.

— Проведем плоскость через параллельные прямые A_1B_1 и CD . Эта плоскость совпадает с секущей плоскостью A_1B_1C . Следовательно, искомым сечением является четырехугольник A_1B_1CD .

Вторым сечением оказался четырехугольник AA_1C_1C .

* * *

Предлагаем читателю несколько вопросов Петра Ивановича.

1. По рисунку 78, а выясните, является ли построенное сечение прямоуг-
ольником.

2. По рисунку 78, б постройте линию пересечения построенных двух
сечений.

3. Являются ли построенные на рисунке 78, б сечения прямоугольниками?

4. Докажите, что отрезок OO_1 , где O и O_1 — точки пересечения диагоналей верхнего и нижнего оснований правильной четырехугольной призмы (рис. 78, б), перпендикулярен ее основаниям.

5. Постройте общий перпендикуляр к прямым OO_1 и CD . Найдите расстояние между ними, если ребро основания равно a .

6. Докажите, что точка P пересечения отрезков OO_1 и A_1C делит их пополам.

7. Постройте общий перпендикуляр к прямым A_1D и B_1C_1 и найдите расстояние между ними, если сторона основания равна a .

Новая задача

Вот она. В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противоположащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a . Найдите площадь построенного сечения.

В качестве указанных в задаче сторон верхнего и нижнего оснований мы выбрали стороны E_1D_1 и AB (рис. 79). При таком выборе будет обеспечена большая наглядность чертежа. Тогда секущая плоскость будет иметь с передней и нижней гранями данной призмы общий отрезок AB , а с задней и верхней гранями — отрезок E_1D_1 . Ну, а что дальше?

С чего начать?

А начинать надо с выяснения: имеются ли другие грани, которые имеют с секущей плоскостью общую точку? Потому что если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.



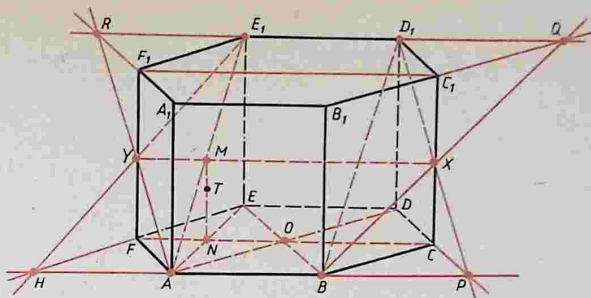


Рис. 79

В данном случае оказывается, что все грани данного многогранника имеют общую точку с секущей плоскостью. Поскольку линии пересечения секущей плоскости с передней, задней, верхней и нижней гранями уже имеются (это отрезки AB и E_1D_1), то нужно рассмотреть четыре остающиеся грани многогранника. Выберем, например, грань DD_1C_1C . У нее имеется общая точка с секущей плоскостью — D_1 . Следовательно, секущая плоскость и плоскость грани DD_1C_1C пересекаются по прямой, проходящей через D_1 . Но для построения линии пересечения двух плоскостей одной общей точки мало. Что делать? Давайте посмотрим на грань, параллельную выбранной. Такая грань имеется. Это квадрат AA_1F_1F . Поскольку линия пересечения этой грани еще не построена, то воспользоваться параллельностью граней, как в приведенных выше задачах, мы не можем.

Тогда остается один хороший вариант: построить еще одну точку пересечения секущей плоскости с плоскостью грани DD_1C_1C . Как это сделать? А надо использовать все данные. По условию прямая AB содержится в секущей плоскости. Давайте построим точку пересечения прямой AB с плоскостью грани DD_1C_1C . Для этого в плоскости названной грани надо отыскать прямую, лежащую с прямой AB в одной плоскости. Такой прямой является прямая CD . $AB \times CD = P$. Но тогда прямая D_1P есть линия пересечения плоскости рассматриваемой грани с секущей плоскостью. Пересекаясь с ребром CC_1 , построенная прямая дает еще одну точку грани BB_1C_1C , принадлежащую секущей плоскости. Отрезок BX этой грани содержится в секущей плоскости и является их пересечением.

Ну, а дальше можно уже использовать появившийся опыт. Можно поступить так. Мы уже говорили, что грани DD_1C_1C и AA_1F_1F параллельны. Секущая плоскость пересекает их по параллельным прямым. Поэтому строим отрезок A_1Y , параллельный отрезку D_1X (рис. 79). Построенный отрезок является пересечением грани AA_1F_1F с секущей плоскостью. После этого остается провести отрезок E_1Y , являющийся пересечением еще одной грани с секущей плоскостью. Многоугольник $A_1YE_1D_1XB$, являющийся сечением призмы, построен.



Можно поступить иначе. Строим точку пересечения прямой AB с плоскостью грани FF_1E_1E . Для этого в названной плоскости находим прямую, лежащую с прямой AB в одной плоскости. Такой прямой является прямая EF . Получаем $AB \times EF = H$, секущая плоскость и плоскость грани FF_1E_1E имеют две общие точки: E_1 и H . Поэтому прямая HE_1 — линия их пересечения. Она пересекает ребро FF_1 в точке Y . Проведя отрезок YA , получим пересечение секущей плоскости с гранью FF_1A_1A . Построение сечения завершено.

— Таким вот образом шло построение сечения, — увлеченно и стремительно рассказывал Петр Иванович. — Но построить сечение — это только полдела. Если после этого разойтись по домам, ученики строить сечения не научатся. Из всякого дела нужно извлекать уроки, а из решения задачи нужно выносить идею, метод решения. Я всегда сначала предлагаю это сделать ученикам, а потом уточняю, подправляю.

Обращать внимание нужно прежде всего на грани, которые имеют с секущей плоскостью общую точку. Пусть мы выявили такую грань. Тогда ясно, что она пересекается с секущей плоскостью.

При построении пересечения грани с секущей плоскостью полезно выяснить, имеется ли параллельная ей грань. Если пересечение параллельной грани с секущей плоскостью уже построено, то достаточно через общую с секущей плоскостью точку первой грани провести отрезок, параллельный пересечению секущей плоскости с параллельной гранью. Можно поступить и иначе. Надо построить вторую точку пересечения секущей плоскости с плоскостью рассматриваемой грани. Для этого надо выявить прямую в секущей плоскости и прямую в плоскости грани, лежащие в одной плоскости. Их пересечение даст вторую общую точку двух названных плоскостей.

Известный математик и педагог Д. Пойа называет указанную работу после завершения решения «взглядом назад». Взгляд назад должен быть неотъемлемым элементом решения всякой серьезной задачи. Извлечь идею,

метод решения — вот к чему должен стремиться ученик. Этот призыв должен быть для него руководством к действию.

Каким должно быть продолжение?

Надо, чтоб ученик прежде всего понимал, а потом уж и запоминал, — любит говорить Петр Иванович. — Вот если оставить решенную задачу как есть, он будет прежде всего запоминать. Например, с какой грани построение начали, к какой грани перешли после этого и т. д. А важно ли это — с какой грани и в каком порядке? Нет, это несущественно. Вот я и предлагаю ученикам рассказать, как они будут строить сечение, если начнут свои рассуждения с грани AA_1F_1F , затем перейдут к грани BB_1C_1C . Вот они строят сначала точку R , затем точку Q (см. на рис. 79). После этого они осознают идею решения, метод и запоминают их потому, прежде всего, что понимают. При этом они освобождаются от «необходимости» запоминать порядок выбора граней. Вместо этого усваивается сам принцип, которым нужно руководствоваться при построении сечения. Последнее куда важнее, потому что готовит к решению новых задач, вооружает их руководством к действию. Осознание свершенного, его идей и методов нужно рассматривать как продолжение решения данной задачи и «построение мостика» к задачам будущим. Сами понимаете, разве можно без этого? Иначе получится, что отсутствует работа, направленная на понимание настоящего и подготовку к будущему.

Есть ли другие способы?

— Надо, чтоб ученик, покончив с задачей, всегда спрашивал себя: а нельзя ли решить иначе? И с этим «иначе», если оно найдено, разумно знакомить других. Не исключено, что именно при построении сечения



другим способом многие по-настоящему представляют сечение и способы его построения, как новые, так и старые. Ученики ведь разные, — убеждал нас Петр Иванович, продолжая рассказывать свои педагогические были. — Один лучше примет один способ построения, другой — второй, третий — третий способ. К тому же *изучение одного и того же явления с разных сторон, разными методами — прекрасное занятие, предупреждающее догматизм и скованность в применении знаний.*

Стати, разносторонний подход к изучению математических объектов — важный метод развития математической речи учащихся. Надо, чтобы об одном и том же учились говорить по-разному, свободно, раскованно, со смыслом, пониманием всех математических терминов.

Рассмотрение разных способов решения задачи эффективно способствует этому. Важно научить ученика находить новые способы решения. Как это сделать? В данном случае нужно посоветовать *исследовать особенности расположения элементов построенного сечения. Потому что нередко новый способ скрыт в имеющемся решении.* Сейчас мы имеем именно такой случай. Приступим к анализу расположения элементов построенного сечения (рис. 79).

— Построение сечения данной призмы сводится к построению точек X и Y пересечения секущей плоскости с ребрами CC_1 и FF_1 . Как расположены названные точки на ребрах призмы?

— Кажется, они являются их серединами.

— Что еще можно заметить относительно точек X и Y ?

— $XY \parallel AB$; $XY \parallel FC$; $XY \parallel F_1C_1$.

— Как это обосновать?

— Плоскость FF_1C_1C параллельна плоскости передней грани, так как $AA_1 \parallel FF_1$ и $AB \parallel FC$.

— Как этим воспользоваться для доказательства параллельности отрезка XY другим указанным отрезкам?

— Получается, что секущая плоскость пересекает две параллельные плоскости. Линии пересечения AB и XY параллельны. Поскольку $FC \parallel AB$, то и $XY \parallel FC$. Аналогично $XY \parallel F_1C_1$ и $XY \parallel E_1D_1$.

— Если бы мы сумели построить одну точку прямой XY , то смогли бы построить эту прямую: ведь она параллельна AB ! Как найти точку, принадлежащую прямой XY ? И которую из точек легче найти?

— Прямая AE_1 принадлежит секущей плоскости и пересекает прямую XY . Обозначим точку их пересечения M . Думаю, что точка M является серединой отрезка AE_1 .

— Как доказать это?

— В основании призмы лежит правильный шестиугольник. Поэтому отрезок AE делится отрезком FC пополам. Обозначим точку их пересечения N . Вот если $MN \parallel EE_1$, то по теореме Фалеса (или по свойству средней линии треугольника) точка M — середина отрезка AE_1 .

Но, конечно же, $NM \parallel EE_1$, так как эти две прямые являются линиями пересечения двух параллельных плоскостей плоскостью AA_1EE_1 . Все! Точка M — середина отрезка AE_1 . Находим ее. Это можно сделать так: а) Строим точку $N = AE \times FC$. б) Через точку N проводим прямую, параллельную EE_1 . Точка M построена: $M = AE_1 \times NT$, $NT \parallel EE_1$.

Затем через M проводим прямую, параллельную AB , и получаем точки X и Y . Многоугольник $ABXD_1E_1Y$ — искомое сечение.

— Удивительно короткое решение.

Найдем площадь

— Как найти площадь полученного сечения?

— Ортогональной проекцией сечения является основание призмы. Площадь основания легко найти. Соединим центр правильного многоугольника, являющегося основанием данной призмы, с его вершинами. Получим шесть равнобедренных треугольников с боковыми сторонами a (поскольку углы при вершинах указанных треугольников по 60° , то эти треугольники равносторонние).

Пусть S_0 — площадь основания призмы. Тогда $S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Найдем теперь угол, который образует секущая плоскость с плоскостью основания.

$AE \perp AB$. ($\triangle AFE$ равнобедренный с углом при вершине 120° . Тогда углы при его основании по 30° . Но тогда $\angle EAB = 90^\circ$.)

$AE_1 \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах.

Получили, что угол между плоскостью основания и плоскостью сечения равен углу EAE_1 . Найдем косинус этого угла. $AE = a\sqrt{3}$ как сторона правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса a . По теореме

Пифагора $AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$. Отсюда $\cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, где $\alpha = \angle EAE_1$.

Пусть площадь сечения S . Тогда $S = \frac{S_0}{\cos \alpha} = 3a^2$. Площадь сечения найдена.

Забыл формулу...

— Что делать, если окажется, что ты не помнишь формулу, устанавливающую соотношение между площадью многоугольника и площадью его ортогональной проекции? Смогли бы мы вычислить площадь сечения, не зная этой формулы?

— Конечно, смогли бы.

— Как?

— Сечение состоит из двух равных трапеций с общим основанием XY . Надо найти площадь одной из них и удвоить.

— Давайте сделаем это.

— Пожалуйста. $AB = a$, $XY = 2a$, высота $AM = \frac{1}{2}AE_1 = a$. Площадь трапеции равна $\frac{3a^2}{2}$, а площадь всего сечения равна $3a^2$.

— А почему $AM \perp XY$? Может, AM не высота трапеции?

— По теореме о трех перпендикулярах $AB \perp AE_1$, $XY \parallel AB$, следовательно, $XY \perp AE_1$ (если одна из параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и вторая тоже).

— Но если я и площадь трапеции не помню как находить? Тогда все?! Мне задачу не решить?

— Ну почему же? Можно обойтись и без знания формулы площади трапеции.

— Как?

— Найдём площадь параллелограмма HE_1QB . Его сторона $HB = 2a$. Почему? Потому что $HEDA$ — параллелограмм и, стало быть, $HA = ED$. Отсюда $HB = 2a$. Высота AE_1 параллелограмма найдена: $2a$. Отсюда площадь параллелограмма равна $4a^2$.

— Догадываюсь. Теперь из площади параллелограмма надо вычесть площади двух треугольников или в силу их равенства удвоенную площадь треугольника HYA . Остается разгадать, как найти площадь этого треугольника. Наверное, это сложно.

— Да нет. Просто. Сторона $HA = a$, высота треугольника, опущенная на эту сторону, равна $AM = a$. Тогда удвоенная площадь треугольника HYA равна a^2 . Вычитаем эту площадь из площади параллелограмма и получаем площадь сечения $3a^2$. Впрочем, площадь треугольника HYA , нет, лучше сумму площадей двух «лишних» треугольников, можно было бы вычислить проще.

— Как? Площадь этого треугольника можно вычислить проще, чем мы это сделали? Что-то не верится.

— А вот, следи за моими рассуждениями. Площадь параллелограмма равна $4a^2$. Теперь сторону XD_1 треугольника XD_1Q приложим к стороне AU треугольника HYA . Получим параллелограмм. Этот параллелограмм подобен большому нашему параллелограмму. Его стороны вдвое меньше сторон большого параллелограмма, а площадь, стало быть, меньше вчетверо. Из $4a^2$ вычитаем a^2 — получаем площадь сечения $3a^2$.

Можно рассуждать и иначе. У треугольника HYA сторона HA вдвое меньше стороны HB параллелограмма. Высота AM треугольника тоже меньше высоты AE_1 параллелограмма в 2 раза. Но тогда его площадь меньше площади параллелограмма в 8 раз, а удвоенная площадь меньше площади параллелограмма вчетверо. Далее так же.

Воспользуемся той же идеей, но...

Дана четырехугольная призма (рис. 80). На ее боковых гранях даны три точки: E , F и G . Чтобы было видно, какой грани принадлежит каждая из точек, через эти точки в гранях проведены прямые, параллельные боковым ребрам призмы. Таким образом, точки E_1 , F_1 , G_1 — параллельные проекции заданных точек на плоскость основания.

Надо построить сечение призмы плоскостью EFG .

Решение. Советы, полезные в одних случаях, в определенном смысле полезны всегда. Именно в определенном смысле, т.е. они полезны не буквальным, догматическим их использованием, а зачастую в видоизменен-

ном, приспособленном к новой ситуации виде. Иногда оказывается, что прежние советы могут быть использованы лишь частично. Наконец, они могут «породить» другие, более широкие или более узкие советы, а то и совсем отличающиеся от них.

При решении предыдущей задачи мы советовали прежде всего обратить внимание на грани, содержащие точку секущей плоскости. В данной задаче таких граней три. Затем советовалось выбрать одну из них и заняться построением еще одной точки, принадлежащей линии пересечения секущей плоскости с плоскостью выбранной грани. В новой ситуации (см. рис. 80) этот совет

«не срабатывает». Это, конечно, не означает, что он плох и его надо забыть. Дело в том, что нет советов, которые бы помогали в любой ситуации. В одном случае тот или иной совет поможет, и за это его надо ценить, в другом — может оказаться бесполезным, и придется искать другой подход к решению.

Интересно то, что в последней задаче (см. рис. 80) полезно поступить «наперекор», противоположно прежнему совету. Смотрите, прямые EE_1 и FF_1 параллельны и потому лежат в одной плоскости. Прямые FF_1 и GG_1 также параллельны и, стало быть, также лежат в одной плоскости. Что мы тогда имеем?

В плоскости нижнего основания имеется прямая E_1F_1 , лежащая в одной плоскости с прямой EF секущей плоскости. Строим их точку пересечения: $X = EF \times E_1F_1$. Она принадлежит секущей плоскости и плоскости нижнего основания. Далее, прямая F_1G_1 лежит в одной плоскости с прямой FG секущей плоскости. Строим их точку пересечения: $Y = FG \times F_1G_1$. Она общая для секущей плоскости и плоскости нижнего основания. Но тогда имеем: прямая XY есть линия пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Что это дает? А мы построили пересечение нижней грани призмы с секущей плоскостью — отрезок MH . Дальше все просто. Строим линии пересечения граней с секущей плоскостью: HG , ME . Получаем отрезки HK и ML пересечения граней призмы с секущей плоскостью. Линией пересечения плоскости задней грани призмы с секущей плоскостью является прямая KF . Прямая LF та же самая. Иначе: точка F должна принадлежать прямой KL . Всякое отклонение — результат недостаточно аккуратного построения. (Не может же плоскость пересекать грань по ломаной!)

Многоугольник $MLKH$ — искомое сечение.

Данный пример поучителен тем, что на всякий совет найдется «антисовет». Однако не забудем и другое: мы все-таки сейчас использовали ранее найденную идею. Вот эта идея.

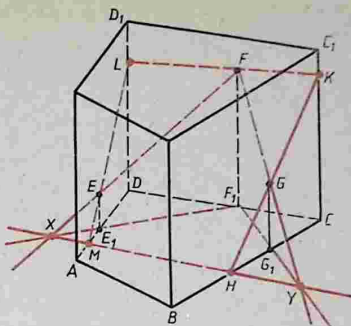


Рис. 80

Чтобы построить общую точку двух плоскостей, одна из которых секущая, надо в секущей плоскости выбрать некоторую прямую, а затем во второй плоскости выявить прямую, лежащую в одной плоскости с выбранной прямой секущей плоскости. Точка пересечения этих прямых является общей точкой двух плоскостей, в которых прямые расположены.

Как видите, не все советы оказались бесполезными. Мы воспользовались той же идеей, что и в предыдущих задачах, но в союзе с новой: иногда целесообразно построить линию пересечения секущей плоскости с плоскостью грани многогранника, даже если она не содержит заданной точки секущей плоскости. Это диктуется наличием пересекающихся пар прямых, в которых одна прямая лежит в секущей плоскости, другая — в плоскости грани многогранника.

При решении задач на построение нужно проявлять гибкость, подходить к их решению творчески. Надо помнить, что не может быть советов на все случаи, но советы все-таки нужны и полезны. Только осознавать их нужно в процессе решения задач и, если они не приводят к решению, нужно искать новые, иногда неожиданные идеи, иногда обращаться к «анти-советам». Советы, как решать задачу, не запреты вида: «делай только так и никак иначе», а напоминание о возможных методах решения. Возможных, но не единственных и не всегда осуществимых.

Еще одна задача

Вот она. Дана четырехугольная призма. Построить ее сечение плоскостью, проходящей через данные точки E и F , принадлежащие ребрам AA_1 и CC_1 соответственно, и параллельной диагонали основания BD (рис. 81).

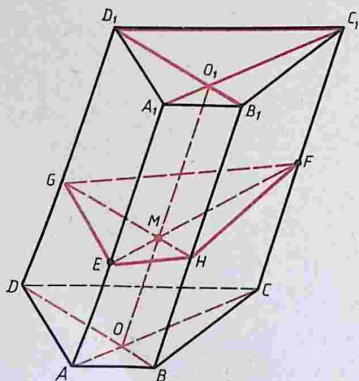


Рис. 81

Решение.

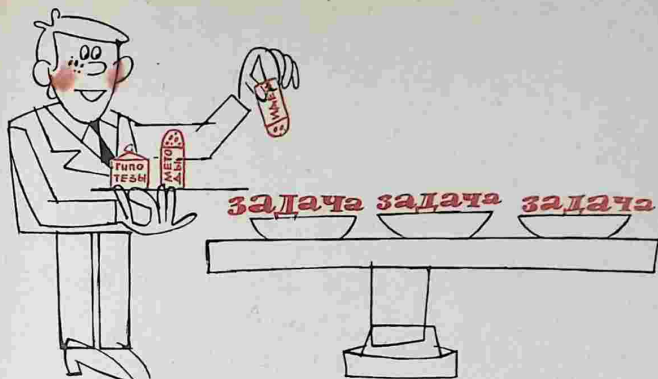
— Секущая плоскость задана здесь нестандартно, — обговаривал задачу Петр Иванович. — Задание плоскости надо разнообразить. Нешаблонность всегда интересна, она предупреждает монотонность в изучении математики, «подсыпает перцу» в процесс решения задач. Данная задача как раз обладает некоторой свежестью, пробуждающей геометрическое любопытство.

А решали мы ее так. (Воспроизведем приблизительно диалог Петра Ивановича с учениками.)

— Что нам известно о прямой EF ?

— Прямая EF лежит в секущей плоскости и в диагональной плоскости AA_1C_1C призмы.

— Что мы знаем о секущей плоскости?



— Секущая плоскость проходит через прямую EF и параллельна прямой BD .

— Какое расположение диагонали BD ?

— Диагональ BD лежит в диагональной плоскости BB_1D_1D . Еще она параллельна секущей плоскости.

— Как этим воспользоваться для построения сечения?

— Линия пересечения секущей плоскости с диагональной плоскостью BB_1D_1D должна быть параллельна диагонали BD , так как в противном случае прямая BD будет пересекать секущую плоскость. Вот если бы найти одну точку линии пересечения секущей плоскости с плоскостью BB_1D_1D , то мы бы построили и всю линию пересечения.

— Как построить такую точку?

— Я заметил, что прямая EF пересекает диагональную плоскость BB_1D_1D . Надо только построить точку пересечения. Она лежит сразу в двух диагональных плоскостях, следовательно, принадлежит линии их пересечения. Построим ее. Получим прямую OO_1 . Получили точку $M = EF \times OO_1$. Точка M лежит на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью DD_1B_1B . Поскольку, как мы заметили раньше, эта линия пересечения параллельна BD , то проводим через точку M прямую, параллельную BD . Она пересекает ребра BB_1 и DD_1 в точках H и G . Четырехугольник $EHFG$ — искомое сечение.

— А теперь подумаем, что мы можем извлечь из решения данной задачи, — подводил итог Петр Иванович. — Здесь мы воспользовались тем, что принадлежащая секущей плоскости прямая EF оказалась принадлежащей другой плоскости AA_1C_1C , линию пересечения которой с третьей плоскостью BB_1D_1D легко построить. Но тогда точка пересечения прямой EF с третьей плоскостью принадлежит прямой OO_1 пересечения второй и третьей плоскостей. Таким образом, решенная задача открыла перед нами еще одну возможность построения точки пересечения прямой с плоскостью. Она состоит в следующем:

Пусть надо построить точку пересечения прямой с плоскостью α . «Включим» данную прямую в некоторую плоскость β . Построим линию пересечения плоскостей α и β . Строим точку пересечения данной прямой с построенной линией пересечения. Построенная точка и есть точка пересечения данной прямой с плоскостью α .

Такой возможностью удобно воспользоваться тогда, когда легко построить линию пересечения указанных плоскостей.

Раздолье построений

— Люблю задачи, которые заключают в себе раздолье в выборе способов построений и в то же время вносят некоторое ограничение в возможности их использования. Ситуации, заставляющие отказываться от ряда построений, ведущих к решению задачи, бывают по разным причинам. То построил бы «так», да некоторые из прямых и отрезков, которые при этом появятся, совпадают с уже имеющимися элементами чертежа. Или хочешь провести некоторые линии, да видишь — плохо получится, потому что на маленьком участке чертежа будет слишком много проведенных линий. В обоих случаях теряется наглядность чертежа, — излагал свои методические мысли Петр Иванович. — А какая польза от построений,

результатом которых является совершенно «темный» рисунок? Иногда кажется, что намеченные построения наглядны, удобны для восприятия, — а нет, опять беда: листа бумаги не хватает. Не будешь же к тетрадному листу приклеивать лист ватмана? И вот получается, что в таких сложных ситуациях надо перебирать и взвешивать много вариантов, выбирая лучшие. Ищешь, как гоголевская невеста: вот к носу Ивана Савича, да приставить бы губы Егора Кузьмича, да добавить подбородок Петра Савельевича... В жизни это сделать невозможно, а вот при решении задач на построение сечений это иногда удается. И такое удовлетворение от этого испытываешь в таких случаях!

Кроме того, в задачах такого рода большой выбор идей построения. И разве такие задачи могут быть не интересными? Вот пример интересной задачи.

Задача. Дана шестиугольная пирамида. Надо построить ее сече-

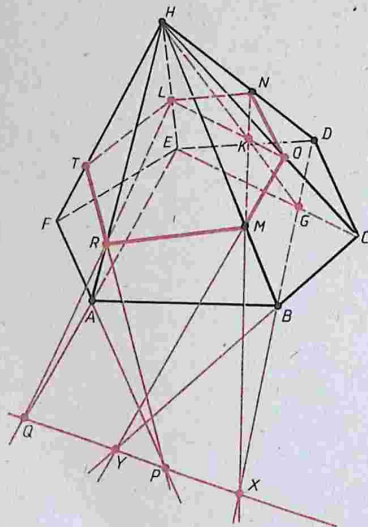


Рис. 82

ние плоскостью, проходящей через точки M и N , принадлежащие боковым ребрам (см. рис. 82), и параллельной диагонали основания EC .

— С чего начнем решение задачи? Какой идеей, каким советом воспользоваться? — спрашивает Петр Иванович.

— Знаете, прямая EC лежит в плоскости ENC (рис. 82), а прямая MN пересекает эту плоскость. Надо построить их точку пересечения.

— Как это сделать?

— В предыдущей задаче встречалась такая же ситуация. При ее разрешении мы пришли к одному полезному совету. Если требуется построить точку пересечения прямой с плоскостью, надо выявить такую вторую плоскость, в которой лежит данная прямая, и построить линию пересечения этих плоскостей. Причем вторую плоскость нужно выбрать так, чтобы было легко построить их линию пересечения.

— Что же, попробуйте воспользоваться этим советом.

— В качестве второй плоскости нужно взять плоскость BHD . Прямая MN содержится в этой плоскости, а линию пересечения плоскостей ENC и BHD легко построить: это прямая GH . Прямые MN и GH лежат в одной плоскости BHD . Строим точку пересечения прямой: $K = MN \times GH$. Точка K является точкой пересечения прямой MN с плоскостью ENC .

— Что это даёт?

— Точка K — общая для секущей плоскости и плоскости ENC . Следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через точку K . Каково расположение этой прямой? Поскольку по условию секущая плоскость параллельна EC , то проходящая через K линия пересечения не может пересекаться с прямой EC . Она ей параллельна. Поэтому проводим через точку K в плоскости ENC прямую, параллельную EC : $LO \parallel EC$.

Теперь можно построить отрезки пересечения секущей плоскости с тремя боковыми гранями пирамиды: LN , NO , OM .

— Что же делать дальше?

Прошлый раз мы говорили о пользе «антисоветов» в определенных ситуациях. Особенно это замечание относится к плоскости основания призмы или пирамиды. Вот в данном случае в плоскости основания не указано ни одной точки, принадлежащей секущей плоскости. Зато в ней легко построить две такие точки. Вот они: $X = BD \times MN$, $Y = BC \times MO$. Прямая XY — линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания пирамиды. Остается только умело «распорядиться» этой прямой, одновременно лежащей в плоскости основания и в секущей плоскости.

Заметим, что, возможно, в поиске пути построения прямой XY у вас появилась мысль построить сначала не точку X , а точку пересечения прямых CD и NO . Однако точка пересечения этих прямых расположена слишком далеко, пожалуй за пределами чертежа. Поэтому от этого построения пришлось отказаться. Надо искать более удобный вариант. И мы его нашли, построив точки X и Y .

Важно также обратить ваше внимание на следующее. Если построенные две точки X и Y оказались бы слишком близко расположенными друг к другу, то лучше одну из них заменить построенным более удаленной точки. Иначе прямая, определяемая этими точками, будет построена недостаточно точно, что приведет к искажению в построениях, может породить ошибки.

**ПРЕДСТАВЬТЕ
МЫСЛЕННО.**



Впрочем, это замечание носит не геометрический, а чисто чертежный, практический характер.

— Итак, как же «умело распорядиться» теперь прямой XY ?

— А вот посмотрите. Строим $Q = XY \times AE$. Точка Q лежит в секущей плоскости и в плоскости HAE . Но тогда эти две плоскости пересекаются по прямой QL . Находим $R = AH \times QL$. Точка R принадлежит секущей плоскости. Следовательно, отрезок RM является пересечением грани AHB с секущей плоскостью.

— Что же дальше?

— Далее поступаем аналогично. Смотрите: $P = XY \times AF$. Точки P и R общие для плоскостей AHF и секущей. Следовательно, прямая PR — линия пересечения этих плоскостей. Строим теперь $T = HF \times PR$. В итоге получаем отрезки, по которым пересекаются с секущей плоскостью две оставшиеся боковые грани пирамиды: отрезок RT и отрезок TL .

Многоугольник $LNOMRT$ — искомое сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MN и параллельной диагонали EC .

Задача решена.

ЮНЫЙ ПЕДАГОГ ОБУЧАЕТ МАТЕМАТИКЕ — ПЕТР ИВАНОВИЧ БЕСЕДУЕТ, СОВЕТУЕТ, УЧИТ (VIII—X классы)

Возможно, этот заголовок вызовет у вас недоумение. Ведь книжка называется «Учимся рассуждать и доказывать!»! Причем же тут обучение математике?

Дело в том, что в жизни важно уметь проводить рассуждения и дока-

зательства не только перед учителем и товарищами, но и для людей другой подготовки, другого возраста, с иным кругозором. Если вы хотите подвести их к важному выводу, убедить в своей правоте, научить творчески мыслить, сделать то, о чем вы ведете речь, интересным и понятным, увлечь напряженной работой в поиске истины, надо учиться этому с юных лет. Такую возможность можно получить, выполняя роль педагога, обучающего математике младших школьников. Уверяю вас, что это вам в любом случае пригодится. Разве плохо уметь оказать квалифицированную помощь младшим сестренке или брату? Да еще по математике! К тому же когда-то у вас будут собственные дети. Они будут весьма довольны, если испытают на себе ваш талант педагога-математика. Наконец, среди вас есть и такие, которые занимаются на факультетах будущих учителей математики. И кроме того, обучение математике малышей — дело само по себе интересное.

Важно также, что, обучая математике младших, вы сами более глубоко будете ее понимать и осваивать.

А теперь представьте, что вы решили вести математический кружок с учащимися IV или V класса. С чего начать?

Удобно начать первое занятие с решения интересной, непростой, но доступной задачи. Вот пример такой задачи.

Задача 1. Найти прямоугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами, а площадь численно равна периметру.

* * *

Вы все прекрасно понимаете, что от того, как подана задача, зависит интерес к ней ваших учеников. Поэтому обсудим сначала:

1. Как подать задачу?

Поиск ответа на поставленный вопрос означает решение важной педагогической задачи. (В отличие от нее математическую задачу будем называть просто задачей.)

Сначала подумайте, как бы поступили вы... Вы подумали? Это принесет вам пользу: сейчас вы более готовы к ознакомлению с предлагаемыми вариантами и к их оценке.

Возможны разные варианты. Рассмотрим два следующих:

Первый вариант. Он очень прост. Читаем условие задачи. Просим учеников повторить условие.

Второй вариант. Сложнее первого, но и интереснее. Он состоит из трех пунктов.

1) Текст задачи не читаем; мы будем подводить к нему. Предлагаем изобразить три прямоугольника с длинами сторон: а) 4 ед. и 6 ед.; б) 4 ед. и 3 ед.; в) 2 ед. и 2 ед. Ученики выполняют рисунки в тетрадях, а вы, юный педагог, — на доске.

2) Предлагаем в каждом случае сравнить численные значения площади и периметра прямоугольника. Учащиеся сообщают: в случае а) численное значение площади прямоугольника больше численного значения его периметра ($S > P$, так как $24 > 20$); в случае б) $S < P$ ($12 < 14$); в случае в) $S < P$.

3) Предлагаете выяснить, существуют ли такие прямоугольники, стороны которых выражены натуральными числами, а площадь численно равна периметру.

Кстати, здесь нужно выяснить, представляют ли ученики, какие числа являются натуральными. Надо, чтобы они понимали: натуральные числа — это 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., что они, в частности, служат для счета предметов.

Подумайте теперь над каждым из предложенных двух вариантов. Какой вы предпочтете? Почему?

Давайте обсудим варианты. У каждого из них имеются свои достоинства.

В первом варианте мы знакомим с условием математической задачи при минимальной затрате времени. Ученику сообщен текст задачи, его дело теперь решать ее.

Во втором варианте на подведение учеников к проблеме затрачено много времени (по сравнению с первым вариантом). Зато ученики чувствуют себя в этом случае составителями задачи, а это всегда приятно. И решать ее они, видимо, будут с большими охотой и интересом, чем в первом случае. Кроме того, затраченное время не пропало даром. Ученики усвоили теперь условие задачи гораздо глубже, чем при первом варианте, и им понадобится меньше времени для отыскания метода решения. Выполненные рисунки помогут в этом.

При втором варианте «введения» задачи ученики будут мыслить активной, чем при первом.

Таким образом, вам, видимо, ясно, что второй вариант преподнесения задачи предпочтительнее первого.

Мы решили первую педагогическую задачу. Перейдем к решению следующей.

2. Задача подана... Решать ее с учеником или за ученика? (Вторая педагогическая задача)

Одним из способов решения задачи является следующий: учитель указывает, что надо делать (какие дополнительные построения выполнить, какие переменные ввести, какие фигуры следует рассмотреть и сравнить). Почему надо поступать так, а не иначе, не объясняется. Ученик слушает, старается понять и запомнить ход решения. Такое решение задачи является, скорее, решением за ученика, вместо ученика, а не решением совместно с учеником. При таком способе на «решение» затрачивается мало времени, но вряд ли происходит обучение его поиску, умению рассуждать и доказывать.

Другой способ состоит в том, что учитель ставит вопросы так тонко и в такой последовательности, что ученик не просто запоминает предлагаемое ему готовое решение, а сам его находит. Давая советы, учитель при этом разъясняет, почему разумно так поступить. При таком подходе педагог решает задачу с учеником, а не за ученика, учит поиску решения, умению рассуждать и доказывать. Рассмотрим, как можно осуществить этот подход применительно к решению нашей задачи 1.

Начинаем беседу.

— Как будем решать задачу?



Постановка такого вопроса свидетельствует о нашем уважении к ученикам, к их знаниям и развитию. Мы не исключаем, что кто-то из них сможет отыскать решение без помощи учителя! Поставленный вопрос ничего не подсказывает, «не направляет». Он рассчитан на полную самостоятельность. Вообще вопросы надо ставить так, чтобы они оставляли наибольшие возможности для ума учащихся. Если ученики этими возможностями воспользоваться не в состоянии, придется задать другой, более узкий вопрос (не злоупотребляя, однако, этим). Возможно, придется дать и совет. Но прежде чем задавать новый вопрос, нужно дать время на поиск решения. Вам в это время надо наблюдать за работой учеников, подходить к каждому из них, выслушивать возникающие у них идеи индивидуально. Когда кем-либо из учеников идея решения будет найдена (может, частично), можно обсудить ее со всеми.

Нужно иметь в виду, что одни ученики могут заниматься поиском решения долго и с увлечением, пока не отыщут его, другие же скоро начинают отключаться от работы. В связи с этим важно не затянуть отпущенное на поиск решения время и в то же время не прервать поиск преждевременно. Если время затянем, ученики оставят свои размышления над задачей. Если прервем поиск преждевременно, вызовем досаду у ученика: учитель помешал ему сделать открытие, когда он был к нему так близок! Минуты напряженного поиска решения — самые драгоценные, и надо относиться к ним бережно.

Допустим худшее: никто из ваших учеников не смог выдвинуть ведущей к решению идеи. Вопрос «Как будем решать задачу?» остался без ответа. Тогда, как мы уже сказали, надо поставить более узкие вопросы. Однако они должны оставлять ученикам как можно больше пищи для ума. Например:

— Длины сторон прямоугольника выражаются натуральными числами. Что показывает в этом случае периметр?

— Периметр прямоугольника показывает тогда, сколько единичных отрезков содержат стороны прямоугольника, вместе взятые! — говорят ученики.

— Что показывает площадь прямоугольника с целочисленными сторонами?

— Площадь в этом случае показывает, сколько единичных квадратов содержится в прямоугольнике, — получаете ответ.

— Как, учитывая ваши ответы, можно иначе сформулировать задачу?

— Нам надо найти такие прямоугольники с целочисленными сторонами, у которых число содержащихся в них единичных квадратов равно числу единичных отрезков на всех сторонах вместе.

— Как воспользоваться измененной формулировкой задачи?

— Давайте на нашем рисунке разобьем прямоугольники на единичные квадраты и подумаем, что получается, — услышим мы, возможно, желаемый ответ.

Проведенные рассуждения, постановка вопросов таковы, что побуждают к поиску решения. Наши вопросы не были подсказывающими, предписывающими. Они учат учащихся раскрывать смысл тех понятий, которые содержатся в задаче.

Научить других рассуждать и доказывать намного сложнее, чем научиться этому самому. Вместе с тем умное обучение других обогащает и развивает самого учителя. Обучение других — это и обучение самого себя. И если вы станете юным педагогом, ведущим занятия математического кружка с младшими школьниками, вы не пожалеете об этом. Ваши математические знания станут от этого полнее и надежнее, да и рассуждать вы будете глубже, а доказывать более аргументированно.

Надо иметь в виду, что при проведении занятия математического кружка всегда присутствуют элементы экспромта. Но этот экспромт должен опираться на основательную предварительную подготовку, а не быть следствием безответственности. Для всякого хорошего экспромта нужен надежный фундамент, прочный каркас.

Нужно тщательно продумывать ход, сценарий занятия математического кружка. Одна и та же задуманная учителем пьеса каждый раз ставится по-новому, с разнообразными изменениями. Она является результатом творческой совместной работы учителя и учащихся. Другие ученики и другое состояние учителя порождают и новую пьесу. Хотя основа ее может быть одной и той же. Мы хотели бы, чтобы как можно больше юных педагогов испытывали радость и муки такого творчества. Пусть даже большое число разочарований не остановит вас в стремлении к педагогическому совершенству.

Но вернемся после столь долгого отвлечения к поиску решения нашей математической задачи на занятии математического кружка.

Итак, мы решили разбить изображенные на рисунке прямоугольники на единичные квадраты. Это разбиение учитель сделает на доске, а ученики — в тетрадях.

Предлагаем подумать, что получается.

— У кого появилась идея решения?

Предположим, что идею решения никто не предлагает. Что делать? Можно начать проговаривать условие задачи в новой, полученной при совместной работе с учениками редакции, несколько видоизменяя ее.

— Единичных квадратов в искомом прямоугольнике должно быть



столько же, сколько единичных отрезков на сторонах. Что это значит?.. (Делаете паузу: а вдруг кого-либо осенит?!) Это значит, — продолжаете вы, — что каждому единичному отрезку на сторонах должен соответствовать «свой» единичный квадрат. Какой квадрат удобно поставить в соответствие вот этому отрезку? (Показываете при этом некоторый единичный отрезок на рис. 84, а.)

Ученики предлагают поставить в соответствие единичному отрезку квадрат, стороной которого является этот отрезок. Вы помечаете указанный квадрат («крестиком», проведя в нем диагонали). Аналогично ставим в соответствие квадраты другим единичным отрезкам. В процессе выполнения данной работы кто-то, возможно, заметит, что четырем единичным отрезкам, отложенным от вершин прямоугольника, не хватило прилежащих к ним единичных квадратов. Если этого никто не заметит, придется поставить вопрос:

— Всякому ли единичному отрезку на сторонах прямоугольника соответствует свой квадрат?

Для удобства проведения дальнейших рассуждений можно сказать: давайте условимся говорить, что отмеченные на рисунке единичные квадраты образуют рамку прямоугольника. После этого нужно задать вопрос:

— Каково соотношение между числом единичных отрезков на сторонах прямоугольника и числом квадратов рамки?

Вот ответ учеников:

— Число единичных отрезков на сторонах на 4 больше, чем число квадратов рамки.

После такого ответа естественно установить причину указанного соотношения между числом единичных отрезков на сторонах прямоугольника и числом квадратов рамки. Ведь если выявленное на частных примерах

соотношение случайно, то им едва ли возможно воспользоваться для решения задачи. Возможно, ученики подметят, что единичные квадраты при вершинах данного прямоугольника соответствуют сразу двум единичным отрезкам на сторонах прямоугольника. Каждый из оставшихся квадратов рамки соответствует только одному единичному отрезку на сторонах прямоугольника. Поэтому число единичных отрезков на сторонах на 4 больше, чем квадратов, образующих рамку. То, что и в еще двух случаях соотношение между числом единичных отрезков на сторонах прямоугольника и числом квадратов рамки оказалось тем же, заставляет предполагать, что так будет всегда. После этого можно снова предложить объяснить причину найденного соотношения.

Теперь подводим итог.

— Итак, мы установили, что число единичных отрезков на сторонах прямоугольника на 4 больше, чем число квадратов рамки. При каком условии число единичных отрезков на сторонах прямоугольника будет равным числу квадратов всего прямоугольника?

— Это равенство будет при условии, если внутри рамки прямоугольника окажутся ровно 4 единичных квадрата, — отвечают ученики.

— Как же найти прямоугольники с целочисленными сторонами, у которых периметр равен численно их площади?

Надо дать время на обдумывание ответа на этот вопрос. Найти ответ для учеников может оказаться не простым делом. Подождите. Повторите вопрос.

Кто-то в конце концов заметит, что часть прямоугольника, расположенная внутри его рамки, имеет форму прямоугольника. Этот внутренний прямоугольник должен состоять из четырех единичных квадратов. Вот если бы этот внутренний прямоугольник найти, то осталось бы сделать его обрамление из единичных квадратов (построить рамку из квадратов) — и искомый прямоугольник найден.

— Из четырех квадратов можно образовать такой прямоугольник, — догадываются ученики.

— Можно ли из четырех квадратов составить другие прямоугольники?

— Нельзя, — отвечают вам. — Площадь прямоугольника, составленного из четырех единичных квадратов, равна 4. Мы знаем, что площадь любого прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Но число 4 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только двумя способами: $4 = 1 \cdot 4$ или $4 = 2 \cdot 2$. Следовательно, из четырех единичных квадратов можно составить только два прямоугольника: 1) с длинами сторон 1 и 4; 2) с длинами сторон 2 и 2.

Предлагаете далее ученикам самостоятельно построить прямоугольники с целочисленными сторонами, периметры которых численно равны их площади. Один из выполнивших в тетради построение учеников может для контроля выполнить построение на доске, рассказав, как он это делал.

Итак, видимо, искомыми прямоугольниками являются два: со сторонами 3 и 6 единиц и 4 и 4 единицы. Но почему «видимо»?..

Дело в том, что решение задачи не завершено. В самом деле, мы нашли метод решения для случая, когда прилежащие к сторонам прямоугольника

квадраты образуют рамку. Но всегда ли это так? Оказывается, нет. Подумайте, для каких прямоугольников с целочисленными сторонами рамка из единичных квадратов, прилежащих к сторонам, не образуется.

Вот ответ.

а) В случае прямоугольника, хотя бы одна из сторон которого равна 1, говорить о рамке из единичных квадратов не приходится. Тогда ее нет. На занятии кружка можно предложить учащимся доказать, что если длина одной из сторон прямоугольника равна 1, а длина другой равна k , то разность между числами, выражающими периметр и площадь, равна $k+2$. Для единичного квадрата эта разность равна $1+2=3$. Для прямоугольника со сторонами 1 и 2 число, выражающее периметр, больше числа, выражающего площадь, на $2+2=4$ и т. д. Другими словами, для прямоугольника, хотя бы одна сторона которого равна 1, число, выражающее периметр, по крайней мере на 3 больше числа, выражающего площадь прямоугольника.

б) Пусть у прямоугольника с целочисленными сторонами нет стороны, равной 1. В случае, когда одна из сторон равна 2, можно считать, что рамка, составленная из пограничных единичных квадратов, существует. Только эта рамка полностью заполнила прямоугольник, единичных квадратов внутри рамки нет. В этом случае проходят ранее проведенные нами в процессе решения задачи рассуждения. Во всех таких прямоугольниках число, выражающее периметр, на 4 больше числа, выражающего площадь прямоугольника. Когда любая из сторон прямоугольника больше 2, то внутри пограничной рамки из единичных квадратов имеется хотя бы один единичный квадрат. Для такого случая мы установили существование ровно двух искомым прямоугольников.

Теперь можно подвести итог. Прямоугольники со сторонами: а) 3 и 6; б) 4 и 4 — удовлетворяют условию задачи. Среди прямоугольников, в которых можно выделить рамку из единичных пограничных квадратов, других искомым прямоугольников нет. Среди прямоугольников без рамки таких, у которых числа, выражающие периметр и площадь, были бы равными, не существует.

Следовательно, искомыми прямоугольниками являются только два найденных прямоугольника со сторонами: а) 3 и 6; б) 4 и 4. Теперь задача решена.

Читая и обдумывая описание предполагаемого хода решения задачи на занятии кружка, вы, вероятно, осознали: решение задачи не должно сводиться к его простому пересказу, а должно быть результатом совместной работы учащихся и учителя; необходимо тщательно продумывать постановку вопросов на всех этапах решения. Конечно, может оказаться, что подготовленных вопросов недостаточно, чтобы ученики отыскали решение. Тогда придется ставить другие, незапланированные вопросы. Они могут оказаться более мелкими, а то и более широкими, неожиданными. Однако постановка незапланированных вопросов будет облегчена тем, что основные вопросы были продуманы заранее. С течением времени, с накоплением опыта формулировать незапланированные вопросы вам будет легче. Не исключено также, что в некоторых из подготовленных вами вопросов



не будет нужды благодаря хорошей сообразительности учащихся¹. Но мы не имеем права ориентироваться только на лучший вариант. Тщательное продумывание, как организовать поиск решения задачи, необходимо. Оно принесет вам несомненную пользу, позволит избежать простого пересказа решения вместо того, чтобы организовать его поиск.

Итак, мы рассмотрели две педагогические задачи. Первая была посвящена вопросу, как подать задачу ученикам, вторая — как организовать ее решение. Обе задачи обсуждены, решены сразу же, в тексте. Однако надо иметь в виду, что предлагаемые решения педагогических (методических) задач являются приближенными. При реальном решении задачи на занятии с конкретными учащимися не следует обязательно все выполнять точно так же, как это здесь предлагается. Педагог не тот, кто скрупулезно выполняет данные ему советы, рекомендации, а тот, кто использует их творчески, вносит собственную мысль, свои решения и соображения. Вместе с тем лучше следовать хорошему совету, чем действовать необдуманно, наугад.

Кроме того, надо учитывать, что всякая математическая задача имеет свою специфику. Эта специфика должна быть учтена при организации поиска решения и при осуществлении плана решения. Другими словами, решение разных математических задач с учащимися представляет нередко и разные педагогические задачи — как осуществлять решение этих математических задач.

Сейчас мы рассмотрим несколько новых педагогических задач, связанных с первой задачей о прямоугольнике с целочисленными сторонами и ее

¹ В практике преподавания математики бывают изредка такие курьезы, когда начинающий или плохо знающий возможности учащихся учитель собирается занять подобранными задачами весь урок или занятие кружка, а ученики «расправляются» с ними за 20 мин. Что тогда делать, если нет задач про запас? Беда! Учитывайте такую опасность!



решением.

3. Хорошо ли так долго решать задачу на занятии кружка? (Третья педагогическая задача)

Обдумывая две предшествующие педагогические задачи, один юный педагог сказал: «Так много затрачено труда, а решена лишь одна задача! Не лучше ли решить за это время несколько, пусть более легких задач? Или не лучше ли было бы самому побыстрее рассказать, как решается задача?»

Что думаете об этом вы? Разрешите сомнения юного педагога.

4. Математическая задача на занятии кружка решена. Что же дальше?.. (Четвертая педагогическая задача)

— Хорошо бы решить одну или несколько задач, аналогичных решенной. Особенно это важно, если найдена интересная идея решения, метод. Если их больше не использовать, то ученики могут не оценить должным образом найденную идею, метод, не овладеют ими, забудут их. При изучении математики важно не только и не столько количество решенных задач, сколько овладение идеями и методами их решения. Овладение ими означает продвижение вперед в математическом образовании и развитии.

В чем же состоит идея, с помощью которой мы решили задачу?

А вот в чем. Во-первых, нужно воспользоваться тем, что если хотя бы одна из сторон прямоугольника с целочисленными сторонами равна 1, а другая — k , то число, выражающее его периметр, на $k+2$ больше числа, выражающего площадь. Во-вторых, нужно опереться на следующее соотношение: если каждая из сторон целочисленного прямоугольника больше 1, то число, выражающее его периметр, на 4 больше числа единичных квадратов, прилежащих к его сторонам.

Метод решения математической задачи 1 состоит в построении вспомогательного прямоугольника, содержащегося внутри рамки искомого прямоугольника. Вспомогательный прямоугольник состоит из четырех единичных квадратов. Построив вспомогательный прямоугольник, мы дополняем его затем до искомого («обрамляем» его рамкой из единичных квадратов).

Приведем задачу, решить которую можно, используя указанные идею и метод. (Она взята из раздела для младших школьников журнала «Квант», № 8 за 1983 г.)

Задача 2. В моей квартире две комнаты. Число, выражающее в квадратных метрах площадь первой комнаты, на единицу больше числа, выражающего периметр этой комнаты в метрах, а площадь второй комнаты в квадратных метрах на единицу меньше ее периметра. Каковы размеры этих комнат, если известно, что длина и ширина каждой комнаты выражается целым числом метров?

Задание. 1) Решите предложенную задачу. 2) Обдумайте, как вы подадите задачу 2 на занятии кружка. 3) Как организуете поиск решения задачи?

Ответ найдете в следующей педагогической задаче. Не спешите к ней переходить. Предполагается, что содержащийся в ней ответ вы будете оценивать, сравнивая с собственным.

5. Первая проба педагогических умений. (Пятая педагогическая задача)

Один юный педагог решил математическую задачу 2 и написал (с помощью учителя) следующий план ее подачи и поиска решения на занятии математического кружка. Ознакомьтесь с планом и оцените его.

— Вот вам еще одна задача. Читаю задачу 2. Выполняю краткую запись условия задачи на доске.

Буквами S и P обозначим численное значение площади и периметра соответственно.

1-я комната: S_1 больше P_1 на 1.

2-я комната: S_2 меньше P_2 на 1.

Длина и ширина — числа целые.

Каковы размеры комнат?

Вот мои вопросы и предполагаемые ответы учеников.

— Не видите ли вы сходства данной задачи с какой-либо ранее решенной задачей?

— Предшествующая задача (задача 1) и данная сходны. В них сравниваются численные значения периметра и площади прямоугольника, длины сторон которого выражены натуральными числами. Только в предыдущей задаче нужно было найти прямоугольники, у которых площадь и периметр выражались бы одним числом, а в данной задаче они отличаются на 1.

— Итак, вторая задача аналогична первой. Возможно, что и метод решения второй задачи такой же, что и первой. На какую идею мы опирались при решении первой задачи?

— Предполагается, что пол каждой комнаты имеет форму прямоугольника. Сначала мы рассмотрим прямоугольники, у которых хотя бы одна сторона имеет длину, равную 1 м. У всех таких прямоугольников число, выражающее периметр, отличается от числа, выражающего площадь,

по крайней мере на 2. Следовательно, среди них нет такого, у которого численное значение периметра на 1 отличается от численного значения площади. К тому же комнат шириной 1 м в квартирах не бывает, поэтому пол комнаты не может иметь ширину, равную 1. Остается рассмотреть прямоугольники со сторонами, длины которых больше 1. В них число, выражающее периметр, на 4 больше числа единичных квадратов, прилежащих к сторонам. Надо это использовать.

— Как воспользоваться указанным соотношением для решения задачи?

— Будем искать сначала размеры первой комнаты. Надо, чтобы число, выражающее площадь комнаты, было на 1 больше, чем число, выражающее периметр. Значит, внутри рамки прямоугольника должны разместиться 5 единичных квадратов. Из 5 единичных квадратов можно составить только один прямоугольник — со сторонами 1 и 5 м. Получаем, что размеры первой комнаты — 3 м на 7 м.

Вторую часть задачи ученики решают самостоятельно. Я наблюдаю за ходом решения задачи, подходя к ученикам и беседуя с ними индивидуально (если это необходимо). Ученики сообщают мне ответы.

6. Хорошо бы для домашнего решения подобрать задачи, аналогичные решенным. Нельзя ли их составить самому? (Шестая педагогическая задача)

— В данном случае вам это вполне по силам. Вообще одним из способов овладения математикой является придумывание аналогичных задач и их решение.

Один юный педагог придумал две такие задачи. Причем одна из них имела два решения, другая — одно. Он привел также их решения.

Прodelайте и вы аналогичную работу.

7. Занятия математического кружка полезно разнообразить. Например, можно играть в математические игры! (Седьмая педагогическая задача)



Вот одна из математических игр. С ее помощью проверяется знание учащимися свойств различных математических понятий. Назовем ее «Да — нет!».

Пусть мы хотим проверить знание свойств геометрических фигур.

Один из учеников, названный нами, называет какую-либо фигуру.

— Окружность! — произносит ученик.

Следующий должен сформулировать какое-либо утверждение о свойстве окружности. Если это утверждение верно, догадавшиеся об этом произносят: «Да!», если сформулированное утверждение о свойстве окружности неверно, надо произнести: «Нет!»

Итак, первый ученик назвал фигуру — окружность. Предлагаете следующему ученику назвать какое-либо свойство. Он формулирует его.

— Окружность делит плоскость на две области!

Другие ученики отвечают хором:

— Да!

Если кто-то произнес: «Нет!», то это значит, что по его мнению окружность не делит плоскость на две области. Надо выяснить, почему он так считает. Кому-то можно предложить разъяснить ошибку этого ученика. Для этого разъясняющий может выйти к доске, изобразить окружность и убедить всех, что окружность делит плоскость на две области.

Третий ученик формулирует новое утверждение. Снова нужно выяснить каждому, выполняется ли оно для окружности.

— Через две точки можно провести только одну окружность!

— Нет! — возражают ученики.

— А почему вы считаете это утверждение неверным? — можете спросить вы. Кто-то должен, вооружившись циркулем, показать, что через две точки можно провести сколько угодно окружностей. Если участники игры не четвероклассники или пятиклассники, а шестиклассники (в конце учебного года) или семиклассники, то от них можно потребовать и логического (строного) обоснования.

Игру продолжаем.

— Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность!

— Да! — отозвались (и совершенно верно) ваши питомцы.

Как вы думаете: ученики какого класса знают, можно ли провести окружность через три точки, не лежащие на одной прямой?

— Через любые три точки можно провести окружность!

— Нет!

Как вы думаете: почему в последнем случае ответ «Нет»?

— Через данную точку можно провести сколько угодно окружностей!

— Да!

— Точки окружности неодинаково удалены от ее центра!

— Нет!

Игра продолжается. Один из школьников назвал какое-то свойство окружности; прозвучал ответ «Нет!». Какое свойство он мог назвать?

Вы скажете, что такая игра слишком шумна. Дети будут кричать на всю школу! Ну, на кружке это не так уж и страшно. Пусть дети прокричат

несколько раз — разрядятся. К тому же их можно попросить ответить негромко, спокойным голосом (но, конечно, не шепотом). Наконец, можно предложить поднимать так называемые фонарики, изготовленные из цветной бумаги: красный фонарик означает «Нет!», зеленый — «Да!». При таком способе сигнализации об ответе игру можно провести и на уроке. При сигнализации с помощью фонариков легче установить, кто какого мнения, кто как считает. При ответе путем произношения слова «Да» или слова «Нет» при большом числе учеников могут возникнуть затруднения с выяснением, кто как считает. Можно также предложить при верном утверждении поднимать руку, а при неверном не поднимать ее.

8. Вместо окружности — прямоугольник... (Восьмая педагогическая задача)

В игре «Да — нет!» ученик назвал понятие.

— Прямоугольник!

Далее ход игры воспроизведен с пропусками. Если вы их заполните, получите материал для математического кружка. Вы ведь хорошо знаете свойства прямоугольника? Итак:

Задание 1. Замените далее многоточия словом «Да!» или «Нет!» (в записях эти слова можно заменить знаком «+» или «—» соответственно).

— Прямоугольник!

— Смежные стороны перпендикулярны!

— ...

— Во всякий прямоугольник можно вписать окружность!

— ...

— Квадрат является прямоугольником!

— ...

— Любой прямоугольник не является ромбом!

— ...

— Имеет только одну ось симметрии!

— ...

— Имеет ось симметрии!

— ...

— Имеет две оси симметрии!

— ...

— Не имеет центра симметрии!

— ...

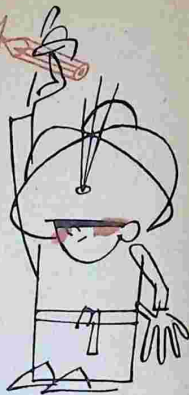
Задание 2. Выясните, в каком классе могла быть проведена данная игра.

Задание 3. После заполнения пропусков вы получите конспект игры. Вооружившись соответствующим учебником, напишите конспект, аналогичный полученному: а) для IV кл.; б) для V кл.; в) для VI кл.; г) для VII кл. Проведите по составленному конспекту игру в соответствующем классе.

9. А что, если игра не получается?.. Ученики молчат? Что тогда делать? (Девятая педагогическая задача)

Юный педагог написал конспект предполагаемой игры «Да — нет!» и подумал: а что, если ученики не назовут ни одного свойства? Что тогда делать? Как выйти из положения?

Помогите юному педагогу своим советом.



10. Еще одна игра, посерьезнее... (Десятая педагогическая задача)
Участник предлагаемой игры «Факир угадывает записанные числа» мог бы описать ее так.

На сцену вышел ведущий.

— Уважаемые товарищи! Сейчас перед вами выступают факиры-математики. Их математические способности феноменальны! Вы можете написать на доске любые однозначные или двузначные числа. Один факир будет сообщать другому факиру, у которого завязаны глаза, о том, что число записано и его надо назвать. Второй факир установит, какое число написано, и назовет это число. Только сидите тихо, не спугните глубокие мысли факира.

Итак, начинаем!

В класс вошли факиры. Поклонились публике, прижав правые руки к груди.

— Кто первый?! — произнес ведущий.

К доске побежал один из бойких учеников. Появилось первое число: 87.

— Число написано, глубокоуважаемые факиры, — произнес ведущий.

— Знаешь, жизнь наша, факир, нелегка. И только занятия математикой скрашивают ее. Прошу тебя, назови записанное число, мой брат, — сказал «зрячий» факир «незрячему». После некоторой паузы он продолжал:

— Занятное, желанное для загадавшего число будет освещено твоим голосом, мой брат!

— Число это на 13 меньше 100. Называю его: 87, — ответил незрячий факир.

Присутствующие были удивлены.

— Подсматривает! — выкрикнул кто-то под общий смех: факир с завязанными глазами сидел спиной к доске.

— Давайте я запишу новое число! — нетерпеливо произнес ученик из зала.

На доске появилось новое число: 33.

— Второе число записано! — объявил ведущий.

— Вы всегда отгадываете число верно! — сказал «зрячий» факир незрячему. — Не ошибетесь, я уверен, и на этот раз!

— 33, — ответил «слепой» факир степенно.

Зал загудел, пораженный быстротой ответа.

— Пусть «зрячий» факир уйдет, он подсказывает! — высказался один «большой нелюбитель думать».

— Мой бедный брат живет в темном одиночестве, да Вы еще будете настаивать, чтоб я оставил его? — возмутился зрячий. — Ему нужна постоянная моя поддержка! Не стыдно ли Вам выдвигать такое требование? Один я могу активизировать его ум!

Страсти скоро улеглись. Все решили оставить в покое зрячего факира. Если он и помогает незрячему, то нам это нужно доказать, выяснить, каким образом это делается.

— На доске появилось число, — сообщил вновь ведущий. (Это число 9.)

— Интересно, сколько времени Вы затратите, мой брат, на отгадывание предположенного числа? — произнес зрячий факир.

— Это число — 9, — ответил незрячий. Появилось число 10.

— Ах, надежда есть, что Ваш всеильный ум не устал и Вы удивите наших друзей еще раз, — обратился зрячий факир к незрячему.

— А ну-ка, удиви еще раз добрых людей! — продолжал он.

— 10, — последовал ответ.

Я сидел и гадал. Наверное, секрет скрыт в тех словах, которые произносит зрячий. Но если целое слово обозначает какое-то число или цифру, то сколько же слов надо запоминать? Нет, такое невозможно. А что, если... — осенило меня... — Ведь чтобы записать любое число, достаточно 10 цифр. Зашифровать 10 цифр легче, чем все числа. Но как лучше зашифровать их? С помощью целого слова? Я решил проверить. Пошел к доске и записал число 55. А сам думаю: если каждая цифра зашифрована словом, то одно и то же слово будет повторено дважды. Не может быть, чтобы одну и ту же цифру засекречивали с помощью двух слов?!

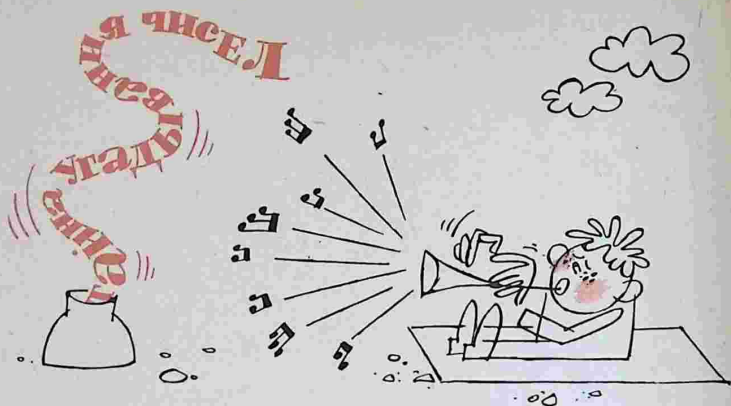
— Думайте! Почему бы Вам, о, способнейший факир, не удивить публику еще раз?

— Задумано число 55! — ответил всемогущий факир.

— Да-а... — соображал я... — Скорее всего, слова-шифровки должны произноситься первыми. Иначе трудно разобраться, какое слово надо иметь в виду. Допустим, что это так. Но первые слова, произнесенные зрячим факиром, различны («думайте», «почему»), хотя обе цифры числа 55 одинаковы. Значит, дело не во всем слове. Но в чем же? Самое простое... А что, если иметь в виду первую букву слова? Тогда цифра 5 заменена буквой «д», — подумал я. — А что, проверю! — И я написал на доске число 51.

— Долго августа нам ждать, но мы его, факир, дождемся! Поспеют яблоки тогда, мы ими насладимся! — проговорил зрячий.

Моя догадка подтвердилась! Буква «д» означает 5! Тогда первая буква слова «август» означает 1? Но... буква «а» — первая буква в алфавите! Тогда «б» — это 2?!



— Вот еще вам, факиры, одно число: 21,— записал я на доске вновь. Пока зрячий факир, видимо, соображал, что же ему надо сказать, я успел подобрать слова: были антоновские яблоки сочны и вкусны; будь аккуратен, забудь лень, чисти зубы каждый день!

— Будущие Архимеды ждут ответа, Ваша светлость! — произнес зрячий. Незрячий факир назвал написанное число. Ведущий поблагодарил факиров за труд.

— Было приятно провести вечер с двумя великими математиками Востока! — произнес он.

— 22,— ответил незрячий.

— Игра закончена! — сообщил ведущий.

— 98,— с поклоном ответил незрячий факир, вызвав смех у сидящих в зале.

Факиры сняли свое факирское облачение и превратились в учеников. Началось отгадывание: как удавалось незрячему факиру называть загаданные числа? Как он пользовался для отгадывания речами зрячего? Найдите ответ. Попробуйте вдвоем с товарищем сыграть роли факиров. Которая из ролей труднее? Подготовьте к исполнению этих ролей двух учеников из подшефного класса (сохраняя эту подготовку в тайне до их выступления).

11. Обдумайте, как будете решать еще одну задачу. (Одиннадцатая педагогическая задача)

В журнале «Квант» (№ 2, 1984) для младших школьников предложена следующая задача:

Задача 3. В коробке лежали спички. Их количество удвоили, а затем убрали 8 спичек. Остаток спичек снова удвоили, а затем снова отняли 8 спичек. Когда эту операцию проделали в третий раз, в коробке не осталось ни одной спички. Сколько их было сначала?

Опишите, как вы будете решать эту задачу с учащимися. Обсудите конспект решения задачи с учителем. Внесите улучшения.

12. Спланируем занятия. (Двенадцатая педагогическая задача)

Итак, вы рассмотрели, как решать три предложенные математические задачи, познакомились с математическими играми «Да — нет!» и «Отгадывание чисел с завязанными глазами».

Возникает вопрос: как распределить этот материал на занятиях математического кружка? Сколько занятий можно провести, если не пользоваться другими материалами? Дать ответ на все случаи невозможно. Надо знать, в каком классе вы будете проводить занятие, какова математическая подготовка учеников, проводился ли кружок раньше и как и т. д. Многие зависят от вас. Чтобы принять то или иное решение, вам нужно посоветоваться с учителем. От того, насколько удачно вы спланируете занятия, зависит, успешно ли вы будете обучать своих подшефных тому, как надо рассуждать и доказывать.

Возможно, окажется разумным такое распределение.

Занятие 1. Решение математической задачи 1. Для домашнего задания может быть предложена задача 2.

Занятие 2. Видимо, не все решат дома задачу 2. Поэтому второе занятие целесообразно начать с решения задачи 2 (или с обсуждения этого решения, если кто-то с ней справился). В оставшееся время и дома можно предложить придумывать и решать аналогичные задачи.

Занятие 3. Решение математической задачи 3 и проведение игры «Да — нет!». Начать занятие целесообразно с обсуждения решения некоторых из придуманных учащимися задач. Если таковых не окажется, нужно предложить для решения собственную придуманную задачу, аналогичную решенным на предшествующих занятиях. Не исключено также, что придуманных задач будет много. Поэтому, возможно, все третье занятие окажется посвященным решению придуманных задач. Тогда задача 3 и игра «Да — нет!» окажутся перенесенными на четвертое занятие. Если вы почувствуете, что решение всех придуманных задач утомит учащихся, интерес к ним от их большого числа будет угасать, то часть из них можно взять для домашнего просмотра и оценки. На следующем занятии вы сделаете обзор задач, выделите лучшие из них и лучшие их решения.

Занятие 4 (а может, занятие 5?). Игра «Незрячий факир угадывает записанные числа». Игру нужно довести до того, чтобы каждый из кружковцев разгадал секрет, понял, в чем он состоит, и смог попробовать свои силы в роли того и другого факира.

Можно также перенести отгадывание секрета на следующее занятие. В этом случае, быть может, на начало четвертого занятия кружка нужно будет подобрать еще одну математическую задачу. Можно также предложить задачу, аналогичную задаче 3 (заменив, например, число 8 другим числом).

Имейте в виду, что предложенное распределение материала на занятии кружка приближенное, одно из возможных.

13. Нет ли другого способа решения? (Для тех, кто пойдет к семиклассникам.) (Тринадцатая педагогическая задача)

**ДОБРО
ПОЖАЛОВАТЬ!**



БУДУ-
ЩИЕ
УЧИТЕ-
ЛЯ МА-
ТЕМА-
ТИКИ



Вернемся к математической задаче 1: найти прямоугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами, а площадь равна численно периметру. Мы решили ее чисто геометрическим способом, не используя алгебраический материал. На кружке с семиклассниками эту задачу можно решить путем составления уравнения с двумя переменными.

Пусть x и y — длины двух смежных сторон прямоугольника. По условию задачи длины x и y должны выражаться натуральными числами и удовлетворять уравнению $xy = 2(x + y)$. Выразим из уравнения y через x :

$$xy - 2y = 2x; y(x - 2) = 2x, y = \frac{2x}{x-2} = \frac{2x-4+4}{x-2} = \frac{2(x-2)+4}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Искомое значение y будет натуральным числом только тогда, когда значение дроби $\frac{4}{x-2}$ будет натуральным числом. Но тогда значение разности $x-2$

должно быть делителем числа 4. Число 4 имеет 3 делителя: 1, 2, 4.

Рассмотрим эти три случая:

1) $x-2=1$. Тогда $x=3$, $y=6$.

2) $x-2=2$. Тогда $x=4$, $y=4$.

3) $x-2=4$. Тогда $x=6$, $y=3$.

Случаи 1 и 3 совпадают, поскольку в том и другом случае получаем прямоугольник со сторонами 3 и 6. Поэтому существуют два прямоугольника, удовлетворяющие условию задачи: прямоугольник со сторонами 3 и 6 и прямоугольник со сторонами 4 и 4 (квадрат).

Задание. Решите способом составления уравнения математическую задачу 2 и составленные вами аналогичные задачи.

На занятиях математического кружка семиклассников можно рассмотреть оба способа решения задач 1 и 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведя занятие кружка, подведите итог (желательно вместе с учителем). Обдумайте, что у вас получилось хорошо, что — неудачно. Постарайтесь учесть это при подготовке к следующему занятию. Если вам покажется, что-то здесь написанное неудачным или недостаточно подробно описанным, посоветуйтесь с учителем.

Желаем вам успешного решения математических и педагогических задач в работе с младшими школьниками! Обучая их рассуждать и доказывать, вы будете совершенствоваться в этом сами.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I. Азбука рассуждений	4
История первая («и» и «или»)	6
История вторая («Если..., то...»)	11
История третья («Неверно, что...»)	18
История четвертая («Следует, не следует»)	24
История пятая (Кое-что о доказательствах)	34
Часть II. Рассуждаем и доказываем	45
Совсем маленькая неточность (VI—VII классы)	46
Математические сны Степы Мошкина (VI—VIII классы)	51
Как я рассуждал при решении одной задачи (VIII класс)	70
Как рождаются проблемы (VIII—X классы)	74
Степа Мошкин ищет другое доказательство (IX—X классы)	106
Я найду еще! (X класс)	113
Пятый способ — рассказ Степы Мошкина (X класс)	117
Беседы о скрещивающихся прямых (IX—X классы)	121
Найти идею (X класс)	140
Как рассуждать при построении сечений — из рассказов Петра Ивановича (X класс)	147
Юный педагог обучает математике — Петр Иванович беседует, советует, учит (VIII—X классы)	172

Учебное издание

Никольская Инна Львовна
Семенов Ефим Евстафьевич

УЧИМСЯ РАССУЖДАТЬ И ДОКАЗЫВАТЬ

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*. Редактор *Т. В. Автономова*. Младшие редакторы *Е. В. Казакова*, *Л. И. Заседателева*. Художественный редактор *Е. Р. Дашук*. Художники *В. А. Галкин*, *Ю. М. Аратовский*, *Е. П. Титков*. Технические редакторы *Т. П. Локтионова*, *Е. Н. Зелянина*.
Корректоры *И. В. Белоусова*, *Н. Б. Гитлевич*

Сдано в набор 20.05.88. Подписано к печати 01.02.89. Формат 70×90¹/₁₆. Бум. офсет. № 2. Гарнит. литерат. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,04+0,29 форз. Усл. кр.-отт. 29,60. Уч.-изд. л. 13,74+0,48 форз. Тираж 500 000 экз. Заказ 1823. Цена 1 р. 00 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфкомбинат Росглавополиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.