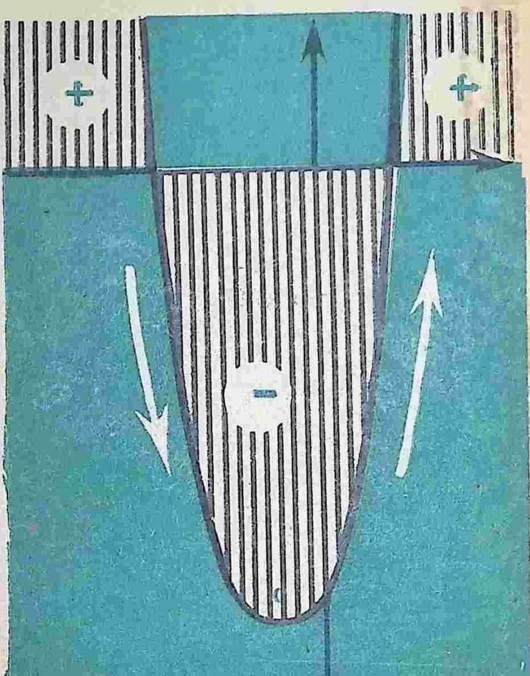
Б.М. САХАЕВ

АЛГЕБРАДАН ҚЎЛЛАНМА



Б. М. САХАЕВ

АЛГЕБРАДАН ҚЎЛЛАНМА

(VI — VIII СИНФЛАР)

ЎҚИТУВЧИЛАР УЧУН ҚЎЛЛАНМА

ТОШКЕНТ — „ЎҚИТУВЧИ“ — 1979

ЎзССР Маориф министрлиги тавсия этган

Тақриз қилдилар: *Д. А. Мавашев* — педагогика фанлари кандидати, Ўзбекистонда хизмат кўрсатган ўқитувчи *Р. Вафоев* — педагогика фанлари кандидати

С $\frac{60501—№ 229}{353(04)—79}$ — 231 — 79, 4306020000

СЎЗ БОШИ

Ўрта мактабда ўқитишнинг янги мазмунига ўтилиши натижасида мактаб математика программаси тубдан ўзгарди, янги дарсликлар ва ўқув қўлланмалари яратилди. Ўқувчилар I — V синфларда ҳар қайси синфга мослаб ёзилган „Математика", VI — VIII синфларда эса „Алгебра" дарсликларидан фойдаланадилар.

Ушбу қўлланма асосан VI—VIII синфларнинг алгебрадан программа материалларини ҳамда IV — V синфларнинг баъзи асосий ва муҳим темаларини ўз ичига олади. Унда VI—VIII синфларнинг алгебра курсига доир назарий маълумотлар берилган. Бу маълумотларга доир кўпгина мисол ва масалалар ечиб кўрсатилган. Шу билан бирга мустақил ечиш учун мисол ва масалалар ҳам берилган (қийинроқ мисолларнинг номерлари устига юлдузча қўйилган).

VI—VIII синфларнинг „Алгебра" программасида бўлмаган баъзи темалар (масалан, $y = |kx + b|$ функциянинг графиги, „сунъий усуллар" билан, ёрдамчи ўзгарувчи киритиш билан ечиладиган системалар ва ҳ. к.) майда шрифтда берилган бўлиб, бу материаллар қизиқувчи ўқувчиларга мустақил ўқиш учун тавсия этилиши ёки тўгарак машғулотларида ўрганилиши мумкин.

Ушбу қўлланмани ёзишда мавжуд адабиётлардан М. Сахаевнинг „Алгебра ва элементар функциялар" китобидан (авторнинг розилиги билан) фойдаланилди.

Бу қўлланма асосан ёш математика ўқитувчиларига мўлжалланган бўлиб, бу қўлланмадан VI — X синфларнинг ўқувчилари, олий ўқув юртлари қошидаги тайёрлов бўлимларининг тингловчилари, мустақил тайёргарлик кўриб олий ўқув юртларига кирувчи абитуриентлар кенг фойдаланишлари мумкин.

Қўлланмани босмага тайёрлашда қимматли маслаҳатлар берган доц. Ж. Икромовга, К. Д. Ушинский номидаги Республика ўқитувчилар малакасини ошириш ва уларни қайта тайёрлаш марказий институти математика кабинетининг мудири, Ўзбекистонда хизмат кўрсатган ўқитувчи С. Д. Ғофуровга катта миннатдорчилик билдираман.

Ҳурматли китобхонларнинг ушбу китоб ҳақидаги танқидий фикр-мулоҳазаларини чуқур мамнуният билан қабул қиламан.

Автор

I БОБ

РАЦИОНАЛ СОНЛАР

1-§. Тўпламлар. Тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси. Қисм-тўплам

Турмушда ҳар хил тўпламлар учрайди. Масалан, яхлит ўнликлар тўплами, синфдаги ўғил болалар тўплами, ўзбек алфавитининг унли ҳарфлари тўплами ва ҳоказо.

Одатда тўплам катта қавслар билан ёзилади. Масалан, яхлит ўнликлар $\{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90\}$ тўпламни ҳосил қилади, бунда 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90 сонларининг ҳар бири тўпламга тегишли бўлиб, тўпламнинг элементлари деб аталади. $\{1; 7; 11\}$ тўплам учта элементга, $\{0\}$ тўплам битта элементга эга. Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\varnothing$ билан белгиланади.

Тўпламлар фақат сонлардангина эмас, балки одамлар, ҳайвонлар, қушлар, буюмлар ва ҳоказолардан тузилиши мумкин.

Турмушда баъзан „тўплам“ термини ўрнида гала (қушлар галаси), пода (сигирлар подаси), йилқи, звено (юз центнерчилар звеноси), бригада, команда („Пахтакор“ командаси), коллекция, тўгарак, ансамбль каби терминлар ҳам ишлатилади.

Тўпламлар латин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, $A = \{1; 2; 3\}$. Агар элемент тўпламга тегишли бўлса, $\in$ белги, тегишли бўлмаса, $\notin$ белги қўйилади. Юқоридаги мисолда $1 \in A$, $5 \notin A$, $0 \notin A$, $3 \in A$. a, b, c, d элементлардан тузилган тўплам $B = \{a, b, c, d\}$ бўлса, $a \in B$, $m \notin B$, $c \in B$, $p \notin B$, $d \in B$.

1-таъриф. *Икки тўпламнинг кесишмаси деб шу тўпламларнинг умумий элементларидан тузилган тўпламга айтилади.*

Масалан, $C = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ ва $D = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12\}$ тўпламларининг кесишмаси $\{1; 2; 4; 8\}$ тўпламдан иборат бўлиб, $C \cap D = \{1; 2; 4; 8\}$ каби ёзилади.

2-таъриф. *Икки тўпламнинг бирлашмаси деб камида шу тўпламлардан бирига тегишли элементлардан тузилган тўпламга айтилади.*

Масалан, C ва D тўпламларининг бирлашмаси $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16\}$ тўпламдан иборат бўлиб, $C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16\}$ каби ёзилади.

$M = \{a; b; c\}$, $L = \{c; d; e\}$ бўлса,

$M \cap L = \{c\}$, $M \cup L = \{a; b; c; d; e\}$;

$P = \{1; 3; 5\}$, $Q = \{2; 4; 6; 7\}$ бўлса,

$P \cap Q = \varnothing$, $P \cup Q = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

A, B, C, D, E, F нуқталар тўпламини X билан, B, D, F, K, P нуқталар тўпламини Y билан белгилайлик, яъни $X = \{A; B; C; D; E; F\}$ ва $Y = \{B; D; F; K; P\}$. У ҳолда $X \cap Y = \{B; D; F\}$, $X \cup Y = \{A; B; C; D; E; F; K; P\}$ бўлади.

Изоҳ. Бир нечта тўплам берилганда ҳам уларнинг кесишмаси ва бирлашмаси юқоридагидек топилади. Масалан, $X = \{1; 2; 5\}$, $Y = \{0; 3; 5\}$, $Z = \{0; 1; 5\}$ бўлса, $X \cap Y \cap Z = \{5\}$, $X \cup Y \cup Z = \{0; 1; 2; 3; 5\}$ бўлади.

3-таъриф. *Агар бир тўпламнинг ҳар бир элементи иккинчи тўпламга тегишли бўлса, биринчи тўплам иккинчи тўпламнинг қисм-тўплами дейилади.*

Агар B тўплам A тўпламнинг қисм-тўплами бўлса, $B \subset A$ каби ёзилади. Масалан, $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; c; d\}$ бўлса, $B \subset A$.

Машқлар

1. $A = \{0; n; a\}$, $B = \{0; m; a\}$, $C = \{0; p; a\}$, $D = \{0; k; a\}$ бўлса, 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $B \cap D$; 4) $A \cap B \cap D$; 5) $B \cup C$; 6) $A \cup B \cup C$; 7) $A \cap B \cap C \cap D$ ларни топинг.

2. Аниқланг: 1) $\{1; 3; 5\} \cup \{1; 3; 5\}$; 2) $\{a; b; c\} \cap \{a; b; c\}$; 3) $\{m; n\} \cup \{m\}$.

3. Қандай икки (уч) тўплам кесишмаси уларнинг бирлашмасига тенг бўлади?

4. A тўплам икки хонали натурал сонлар тўплами билан 1 дан 20 гача бўлган натурал сонлар тўпламининг бирлашмасидан иборат. 1) 5; 15; 19; 21; 99 сонлари A тўпламга тегишли бўладими? 2) Ёзувлар тўғрими: $13 \notin A$, $15 \notin A$, $21 \in A$, $30 \notin A$?

5. Ёзувлар тўғрими: 1) $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$,
2) $\{a; b\} \subset \{a; b\}$?

6. $X = \{m; n; k; l\}$, $Y = \{m; n; l\}$, $P = \{m; p\}$ тўпламлар учун: 1) $X \subset Y$; 2) $P \subset Y$; 3) $P \subset X$; 4) $Y \subset P$ ёзувлар тўғрими?

2-§. Натурал сонлар. Натурал сонлар устида амаллар ва уларнинг хоссалари

1, 2, 3, 4, 5, 6 ... сонлар *натурал сонлар* деб аталади.

Барча натурал сонлар натурал сонлар тўпламини ташкил этади ва N билан белгиланади, яъни:

$$N=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ \ldots\}.$$

N да энг кичик элемент (сон) 1 га тенг; энг катта элемент (сон) мавжуд бўлмагани учун у чексиздир.

1. Агар $a\in N$ ва $b\in N$ бўлса, $a+b\in N$ бўлади, яъни икки натурал соннинг йиғиндиси яна натурал сон бўлади.

Йиғинди: а) $a+b=b+a$ — ўрин алмаштириш;

б) $(a+b)+c=a+(b+c)$ — группалаш хоссаларига эга.

2. Агар $a\in N$ ва $b\in N$ бўлса, $a\cdot b\in N$ бўлади, яъни икки натурал соннинг кўпайтмаси яна натурал сон бўлади. Хусусий ҳолда $a\cdot 1=a$.

Кўпайтма: а) $ab=ba$ — ўрин алмаштириш;

б) $(ab)c=a(bc)$ — группалаш хоссаларига эга;

в) $a+b)c=ac+bc$ — йиғиндининг кўпайтмага нисбатан тақсимот хоссаси ҳам ўринлидир. Умуман $(a+b+c+\ldots+d)\,k=ak+$ $+bk+ck+\ldots+dk$.

2⁰. Агар $a\in N$ ва $n\in N$ бўлса, $a\cdot a\cdot\ldots\cdot a=a^n$ — даража дейилади (бунда a — даража асоси, n — даража кўрсаткичи). Масалан, $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4$, $10\cdot 10\cdot 10=10^3$ ва ҳ. к.

Натурал соннинг натурал кўрсаткичли даражаси ҳам натурал сон бўлади.

3. Агар $a\in N$, $b\in N$ бўлиб, $a>b$ бўлса, $a-b\in N$ бўлади. $a<b$ бўлса, $a-b$ натурал сон мавжуд бўлмайди.

Натурал сонлар тўпламида ихтиёрий икки натурал соннинг йиғиндиси (кўпайтмаси) га тенг биргина натурал сон мавжуд бўлгани учун N тўплам қўшиш ва кўпайтиришга нисбатан ёпиқ тўплам дейилади.

4. Таъриф. *$a\in N$ бўлса,* $1a$, $2a$, $3a$, $4a$, ... *сонларига, яъни a нинг ихтиёрий натурал сон билан кўпайтмасига a нинг карралиси дейилади.*

3 га каррали сонларни $3n$, 4 га каррали сонларни $4n\,(n \in N)$ ва ҳоказо кўринишида ёзиш мумкин.

2 га каррали сонлар жуфт сонлар, 2 га каррали бўлмаган сонлар эса тоқ сонлар дейилади. Жуфт сонлар $2n\,(n \in N)$, тоқ сонлар эса $2n - 1\,(n \in N)$ кўринишдаги формула билан ёзилади. a сони b га каррали бўлса, a сони b га бўлинади. Хусусан, ҳар қандай натурал сон 1 га ҳам, ўзига ҳам бўлинади, яъни $a:1=a$ ва $a:a=1$.

Машқлар

7. $a = 8n\,(n \in N)$ сонлар 2 га бўлинадими? 4 га-чи? 8 га-чи?

8*. $a, b \in N$ бўлиб, $a > 5$, $b > 2$ бўлса, $a - b \in N$ бўладими? $a < 13$, $b < 10$ бўлса, $b - a \in N$ бўладими?

3-§. Туб ва мураккаб сонлар. Сонларнинг бўлиниш аломатлари. Туб кўпайтувчиларга ажратиш

1-таъриф. *Фақат бирга ва ўзига бўлинадиган (бирдан фарқли) сон туб сон деб, бирдан ва ўзидан бошқа сонларга ҳам бўлинадиган сон мураккаб сон деб аталади.*

Масалан, 2, 3, 11, 37—туб сонлар, 4, 18, 46—мураккаб сонлар.

Натурал сонларнинг туб ёки мураккаб эканини аниқлашда сонларнинг бўлиниш аломатларидан фойдаланилади.

а) 2 га ва 5 га бўлиниш аломатлари.

Охирги рақами 2(5) га бўлинадиган ёки ноль бўлган сон 2(5) га бўлинади. Масалан, 64, 170, 206 сонларининг ҳар бири 2 га, 55, 90, 2035 сонларининг ҳар бири эса 5 га бўлинади.

б) 3 га ва 9 га бўлиниш аломатлари.

Рақамлар йиғиндиси 3(9) га бўлинадиган сонлар 3(9) га бўлинади. Масалан, 25107 сони 3 га, 44217 сони 9 га бўлинади.

в) 4 га ва 25 га бўлиниш аломатлари.

Иккита ноль билан тугайдиган ёки охирги икки рақами 4(25) га бўлинадиган сонни ифодалайдиган сонларгина 4(25) га бўлинади. Масалан, 312 сони 4 га, 2375 сони 25 га, 900 сони эса 4 га ҳам, 25 га ҳам бўлинади.

2-таъриф. *Берилган сонни туб кўпайтувчиларга ажратиш деб у сонни туб сонлар кўпайтмаси шаклида тасвирлашга айтилади.*

Масалан, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$ ва ҳ. к.

Бунда $2 \cdot 3 \cdot 7$ кўпайтмага 42 сонининг, $2^3 \cdot 3^2$ кўпайтмага эса 72 сонининг туб кўпайтувчиларга ёйилмаси ҳам дейилади.

Машқлар

9. (Оғзаки.) Қуйидаги сонлар ичида 2 га; 3 га; 4 га; 5 га; 9 га бўлинадиган сонларни аниқланг:

45, 54, 75, 198, 468, 495, 804.

10. 1) 3 га, 2) 5 га, 3) 4 га 4) 9 га бўлинадиган 4 хонали сон ёзинг.

11*. Нима учун 2 га ҳамда 3 га бўлинадиган сон 6 га бўлинади, 3 га ва 5 га бўлинган сон эса 15 га бўлинади?

12. Қуйидаги сонлардан қайсилари 6 га; 15 га; 18 га; 75 га бўлинади: 72, 190, 450, 495, 5040, 6300?

13. 1) 15 га, 2) 12 га, 3) 75 га бўлинадиган беш хонали сон ёзинг.

14. а) 5 га ва 9 га бўлинадиган тўрт хонали сон ёзинг.

б) 3 га ҳам, 4 га ҳам бўлинадиган, аммо 9 га бўлинмайдиган сон ёзинг.

15. Қуйидаги сонларни туб кўпайтувчиларга ажратинг:

1) 108, 2) 150, 3) 600, 4) 1620.

4-§. Энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий бўлинувчи

1-таъриф. *Соннинг бўлувчиси деб шу сон қолдиқсиз (яхлит) бўлинадиган натурал сонга айтилади.*

Масалан, 18 нинг бўлувчилари $A = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ тўпламни, 24 нинг бўлувчилари $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ тўпламни ташкил этади.

2-таъриф. *Бир неча соннинг умумий бўлувчиси деб у сонларнинг ҳар бири қолдиқсиз (яхлит) бўлинадиган сонга айтилади.*

Масалан, 18 ва 24 сонларининг умумий бўлувчилари 1, 2, 3 ва 6 дан иборат бўлиб, $\{1; 2; 3; 6\}$ тўпламни ташкил этади. Бу тўплам 18 ҳамда 24 сонлари бўлувчилари тўпламларининг кесишмасидан иборат: $A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$.

3-таъриф. *Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси деб шу сонларнинг умумий бўлувчилари ичида энг каттасига айтилади.*

18 ва 24 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси 6 бўлиб, Д $(18;\ 24) = 6$ каби ёзилади.

I. Бир неча соннинг энг катта умумий бўлувчисини топиш учун шу сонларнинг ҳар бирини кўпайтувчиларга ажратиб, барча сонларнинг ёйилмалари учун умумий бўлган туб кўпайтувчилар ўзаро кўпайтирилади.

Масалан, 60, 150, 270 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини топайлик: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$; Д $(60;\ 150;\ 270) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

4-таъриф. *Бир неча соннинг умумий карралиси (бўлинувчиси) деб шу сонларнинг ҳар бирига бўлинадиган сонга айтилади.*

Масалан, 4 ва 6 сонларининг умумий бўлинувчиси 12, 24, 36, 48 ва ҳоказо сонлардан иборат бўлиб, $\{12;\ 24;\ 36;\ 48;\ \ldots\}$ тўпламни ташкил этади. 4 га каррали сонлар $C = \{4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ 28;\ 32;\ 36;\ 40;\ 44;\ 48;\ \ldots\}$ тўпламни, 6 га каррали сонлар $D = \{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ 30;\ 36;\ 42;\ 48;\ \ldots\}$ тўпламни ташкил этади. У ҳолда 4 га каррали сонлар тўплами (C) билан 6 га каррали сонлар тўплами (D) нинг кесишмаси $C \cap D = \{12;\ 24;\ 36;\ 48 \ldots\}$ 4 билан 6 га каррали сонлар тўпламини ташкил этади.

5-таъриф. *Бир неча соннинг энг кичик умумий карралиси (бўлинувчиси) деб шу сонларнинг карралилари (бўлинувчилари) ичида энг кичигига айтилади.*

Масалан, 14 ва 21 сонларининг энг кичик умумий карралиси 42 га тенг бўлиб, К $(14;\ 21) = 42$ каби ёзилади.

II. Бир неча соннинг энг кичик умумий карралисини (бўлинувчисини) топиш учун шу сонларнинг ҳар бирини туб кўпайтувчиларга ажратиб, ёйилмалардан камида бирида қатнашган туб сонлар кўпайтмаси олинади. Туб сон кўрсаткичи ҳар хил бўлган ҳолда кўрсаткичи каттаси олинади.

Масалан, 28, 70 ва 84 сонларининг энг кичик умумий карралисини топайлик: $28 = 2^2 \cdot 7$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. К $(28;\ 70;\ 84) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Машқлар

16. 6, 28, 496 сонларининг ҳар бири ўз бўлувчиларининг (шу сонларнинг ўзидан бошқа) йиғиндисига тенг эканини кўрсатинг.

17. (Оғзаки.) Топинг: 1) Д (6; 21), 2) Д (12; 30), 3) Д (18; 27).

18. (Оғзаки.) 1) Умумий бўлувчиси 6 га, 2) энг катта умумий бўлувчиси 6 га тенг бўлган учта сон топинг.

19. Топинг: 1) Д (45; 105); 4) Д (1360; 2700);
2) Д (243; 405); 5) Д (18; 24, 36);
3) Д (216; 864); 6) Д (16; 24 48).

20. (Оғзаки.) Топинг: 1) К (4; 14); 2) К (6; 21); 3) К (10, 25)
4) К (7; 12); 5 К (12; 16).

21. Топинг: 1) К (4; 6; 18); 4) К (12; 18; 24); 7) К (48; 64; 96);
2) К (6; 9; 12); 5) К (32; 48; 72); 8) К (108; 116; 135)
3) К(10; 25; 40); 6) К (24; 54; 108);

22*. Нима учун икки (бир неча) туб соннинг энг кичик умумий карралиси шу сонларнинг кўпайтмасига тенг бўлади?

5-§. Йиғинди, айирма ва кўпайтманинг бўлиниши

1-теорема. Агар қўшилувчи (a ва b) ларнинг ҳар бири бирор (c) сонга бўлинса, йиғинди ҳам шу сонга бўлинади.

Исбот: $a \vdots c$, яъни $a = ca_1$ ва $b \vdots c$, яъни $b = cb_1$ бўлсин*. Бундан $a + b = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1)$. У ҳолда $c(a_1 + b_1)$ кўпайтма c га бўлингани учун бу кўпайтмага тенг бўлган $a + b$ ҳам c га бўлинади.

Умуман, $a, b, c, \ldots, d \in N$, $a \vdots c$, $b \vdots c$, $\ldots$, $d \vdots c$ бўлса, $(a + b + d) \vdots c$ бўлади.

2-теорема. Қўшилувчилардан бири бирор сонга бўлиниб, иккинчиси бўлинмаса, йиғинди шу сонга бўлинмайди.

Умуман, $a, b, \ldots, c, d$ сонлардан (бунда $a, b, \ldots, c, d \in N$) $a \vdots k$, $b \vdots k$, $\ldots$, $c \vdots k$ бўлиб, $d \not\vdots k$ бўлса, $(a + b + \ldots + c + d)$ йиғинди k га бўлинмайди.

3-теорема. Агар камаювчи ва айрилувчиларнинг ҳар бири бирор сонга бўлинса, айирма ҳам шу сонга бўлинади, яъни $a \vdots c$, $b \vdots c$ бўлса, $(a-b) \vdots c$ бўлади.

Исбот: $a \vdots c$ бўлса, $a = a_1 c$, $b \vdots c$ бўлса, $b = b_1 c$ бўлади. У ҳолда $a - b = a_1c - b_1c = (a_1 - b_1)c$ бўлиб, $(a_1 - b_1)c \vdots c$ бўлганидан $(a - b) \vdots c$ бўлади.

4 теорема Агар камаювчи ёки айрилувчилардан бири бирор сонга бўлиниб, иккинчиси шу сонга бўлинмаса, айирма ҳам шу сонга бўлинмайди.

5 теорема Кўпайтувчилардан бири бирор сонга бўлинса, кўпайтма ҳам шу сонга бўлинади.

---

* $a \vdots c$ ёзув a нинг c га бўлинишини, $b \not\vdots c$ ёзув эса b нинг c га бўлинмаслигини билдиради.

Исбот: $a \vdots c$ бўлсин, $ab \vdots c$ эканини исбот қилиш керак. $a \vdots c$ дан $a = c \cdot a_1$. У ҳолда $ab = ca_1 \cdot b = c \cdot (a_1 \cdot b)$ бўлиб, бу кўпайтма c га каррали бўлгани учун c га бўлинади.

Умуман, $ab \cdot \ldots \cdot d$ да $a \vdots c$ бўлса, $(a \cdot b \cdot \ldots \cdot d) \vdots c$ бўлади.

Натижа. Кўпайтма кўпайтувчиларнинг ҳар бирига бўлинади. $a \cdot b \cdot c \cdot \ldots d$ кўпайтма a га ҳам, b га ҳам, c га ҳам, ..., d га ҳам бўлинади.

6-теорема. *Бирор сон икки натурал соннинг кўпайтмасига бўлинса, кўпайтувчиларнинг ҳар бирига ҳам бўлинади.*

Исбот: $a \vdots (bc)$ бўлсин $(a, b, c \in N)$. У ҳолда $a = b \cdot c \cdot d (d \in N)$ бўлади. Тенгликнинг ўнг қисмидаги $b \cdot c \cdot d$ сони b га каррали бўлгани учун b га, c га каррали бўлгани учун c га бўлинади. Шу сабабли a сони b га ҳам, c га ҳам бўлинади.

Умуман $a \vdots (b \cdot c \cdot \ldots \cdot d)$ бўлса,

$$a \vdots b, \quad a \vdots c, \ldots, \quad a \vdots d$$

бўлади, бунда $a, b, c, \ldots, d \in N$.

Машқлар

23. 1) $444 + 252$ йиғинди: а) 3 га бўлинадими? б) 9 га-чи? 2) $7772 - 222$ айирма: а) 3 га бўлинадими? б) 2 га-чи? 3) 21627×371 кўпайтма 9 га бўлинадими? $719 \cdot 19$ кўпайтма-чи?

24. Амалларни бажармасдан туриб: 1) $(171 + 243) \cdot 2$ ифоданинг 18 га, 2) $(68 - 51) \cdot 39$ ифоданинг 51 га бўлинишини исбот қилинг.

25. 1) Қўшилувчиларнинг ҳар бири бирор сонга бўлинмаса, йиғинди шу сонга бўлиниши мумкинми? 2) Камаювчи ҳам, айирилувчи ҳам бир сонга бўлинмаса, айирма шу сонга бўлиниши мумкинми?

26. 1) 5 га ҳам, 4 га ҳам бўлинадиган иккита тўрт хонали сон, 2) 3 га ҳам, 25 га ҳам бўлинадиган тўрт хонали сон; 3) 4 га ҳам, 3 га ҳам бўлинадиган иккита беш хонали сон; 4) 15 га бўлинадиган, аммо 9 га бўлинмайдиган беш хонали сон ёзинг.

6-§. Манфий бўлмаган бутун сонлар тўплами. Қолдиқли бўлиш

Натурал сонлар тўплами ноль билан биргаликда манфий бўлмаган бутун сонлар тўпламини ҳосил қилади. Бу тўпламни Z_0 билан белгилаймиз:

$$Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}.$$

Нолни камаювчи айирилувчига тенг бўлгандаги айирма деб қараш мумкин, яъни

$$a - a = 0.$$

Ноль билан бажариладиган амалларни кўрсатамиз:

$a+0=0+a=a$ (хусусий ҳолда $0+0=0$),
$a-0=a$ (хусусий ҳолда $0-0=0$),
$a\cdot 0=0\cdot a=0$ (хусусий ҳолда $0\cdot 0=0$).

Агар $a\neq 0$ бўлса, $0:a=0$, $a:0$ — мавжуд эмас. Фараз қилайлик, $a\neq 0$ бўлиб, $a:0$ мавжуд ва у бирор b сонга тенг бўлсин, яъни $a:0=b$. У ҳолда $a=0\cdot b$ бўлиб, $a=0$ бўлиши керак. Бу эса фаразга зид, яъни нолга бўлиш мумкин эмас.

Таъриф. (Қолдиқли бўлиш ҳақида.) *a сонини b ($b\in N$) сонига бўлиш деб*

$$a=bq+r$$

кўринишда ёзишга айтилади. Бунда $0\leqslant r<b$, q—бўлинма, r — қолдиқ.

7-теорема. *a манфий бўлмаган бутун сон, b натурал сон бўлса, ҳамма вақт*

$$a=bq+r \quad \text{ва} \quad 0\leqslant r<b$$

шартни қаноатлантирадиган манфий бўлмаган бир жуфт бутун сон (q—бўлинма ва r—қолдиқ) *мавжуд бўлади.*

Масалан, 35 ни 8 га бўлсак, бўлинма 4 ва қолдиқ 3 ни топамиз: $35=8\cdot 4+3$.

$r=0$ бўлса, $a=bq$ бўлиб, a сони b га қолдиқсиз бўлинади.

Иккига бўлганда қолдиқ қоладиган (тоқ) сонларни $2k+1$ ($k\in Z_0$) формула кўринишида, 7 га бўлганда 4 қолдиқ қоладиган сонларни $7m+4$($m\in Z_0$) формула кўринишида ёзилади ва ҳ. к.

Машқлар

27. Ёзувлар тўғрими: 1) $5\in N$; 2) $0\notin N$; 3) $1\notin N$; 4) $0\in Z_0$ 5) $Z_0\subset N$; 6) $N\not\subset Z_0$?

28. Ёзувларда юлдузчалар ўрнига $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ белгиларидан бирини қўйинг:

1) $\{0\} * N$; 2) $\{3\} * Z_0$;
3) $Z_0 * \{0, 1, 2\}$; 4) $N * \{0, 5, 7, 9\}$.

29. Аниқланг: 1) $N\cup Z_0$ 2) $N\cap Z_0$; 3) $N\cup\{1\ 2\}$; 4) $N\cap\{5, 7\}$.

30. $a\in N$ ва $b\in Z_0$ бўлса, 1) $(a+b)\in Z_0$; 2) $a\cdot b\in Z_0$; 3) $(a-b)\in N$ бўладими?

31. 1) 5 га; 2) 7 га; 3) 13 га каррали сонларни формула билан ёзинг.

32*. 1) Ҳам 3 га, ҳам 7 га каррали бўлган сонларни; 2) ҳам 5 га, ҳам 7 га каррали бўлган жуфт сонларни формула билан ёзинг.

33. 11 га бўлганда: 1) 3 қолдиқ қоладиган, 2) 10 қолдиқ қоладиган сонларни формула билан ёзинг.

34*. 1) 7 га бўлганда 2 қолдиқ қоладиган барча жуфт сонларни; 2) 5 га бўлганда 1 қолдиқ қоладиган барча тоқ сонларни формула билан ёзинг.

35. 1) 9 га каррали сонлар билан 6 га каррали сонлар йиғиндиси 3 га бўлинишини, 2) 12 га каррали сонлар билан 8 га каррали сонлар йиғиндиси 4 га бўлинишини исбот қилинг.

36. 1) a ҳам, b ҳам жуфт сонлар бўлса: а) $a+b$, б) $a-b$ ҳам жуфт сон бўлишини; 2) a жуфт сон, b тоқ сон бўлса, $a \cdot b$ иккига бўлинишини исбот қилинг.

37. a сонини 5 га бўлганда 3 қолдиқ, b сонини 5 га бўлганда 2 қолдиқ қолади. 1) $(a+b)$ ни, 2) $(a-b)$ ни 5 га бўлганда қандай қолдиқ қолади?

7-§. Оддий касрлар ва уларнинг асосий хоссалари

1-таъриф. *Каср деб бирликнинг битта ёки бир нечта тенг бўлак (улуш) ларини ифодаловчи сонга айтилади.*

Масалан, бирлик 5 та тенг бўлакка бўлиниб, ундан 3 таси олинса, $\frac{3}{5}$ каби ёзилади ва бешдан уч деб ўқилади. Бунда 3 касрнинг сурати, 5 эса махражи, 3 билан 5 касрнинг ҳадлари, чизиқча эса каср чизиғи деб аталади.

I. Касрнинг асосий хоссаси. Агар касрнинг сурат ва махражи бир хил сон марта орттирилса ёки камайтирилса, касрнинг қиймати ўзгармайди.

Масалан, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{10}{20}=\ldots$ ёки $\frac{30}{90}=\frac{15}{45}=\frac{3}{9}=$ $=\frac{1}{3}$. Умуман: $\frac{a}{b}=\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ ҳамда $\frac{a}{b}=\frac{a : n}{b : n}$.

Агар икки касрнинг махражлари бир хил бўлиб, суратлари ҳар хил бўлса, сурати катта бўлган каср катта бўлади, суратлари бир хил бўлиб, махражлари ҳар хил бўлса, махражи кичик бўлган каср катта бўлади. Масалан, $\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$ (чунки $4>3$), $\frac{5}{10}<\frac{5}{7}$ (чунки $10>7$).

II. Касрларни қисқартириш. 2-таъриф. *Касрни қисқартириш деб унинг сурат ва махражини нолдан фарқли бир (бутун) сонга бўлиб, берилган касрга тенг, аммо ҳадлари кичик бўлган бошқа каср билан алмаштиришга айтилади.*

Масалан, $\frac{12}{24}$ касрнинг сурат ва махражини 12 га бўлиб, $\frac{1}{2}$ касрни ҳосил қиламиз.

III. Ҳадларининг ўзгариши билан каср қийматининг ўзгариши. Агар касрнинг махражини ўзгартирмай, сурати бир неча марта орттирилса (камайтирилса) ёки касрнинг сурати ўзгартирилмай, махражи бир неча марта камайтирилса (орттирилса), каср шунча марта ортади (камаяди).

Масалан, $\frac{5}{6}$ касрдан $\frac{5\cdot 3}{6}=\frac{15}{6}$ каср ёки $\frac{5}{6:3}=\frac{5}{2}$ каср 3 марта катта, $\frac{4}{11}$ касрдан $\frac{4:2}{11}=\frac{2}{11}$ каср ёки $\frac{4}{11\cdot 2}=\frac{4}{22}$ каср 2 марта кичик.

IV. Тўғри ва нотўғри каср. Аралаш сон. 3-таъриф. *Касрнинг махражи суратидан кичик бўлса, тўғри каср деб, сурати махражига тенг ёки ундан катта бўлса, нотўғри каср деб аталади.*

Нотўғри каср 1 га тенг ёки 1 дан катта бўлгани учун тўғри касрдан катта бўлади.

4-таъриф. *Бутун сон ва касрдан тузилган сон аралаш сон деб аталади.*

Масалан, $3\frac{1}{2}$, $1\frac{5}{6}$ сонлар аралаш сонлардир.

Нотўғри касрни аралаш сонга ва аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш мумкин.

1. Нотўғри касрни аралаш сонга айлантириш учун унинг суратини махражига бўлиб, бўлинмани бутун қилиб ёзиш, қолдиқни эса сурат қилиб, махражни махраж қилиб ёзиш керак. Масалан, $\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$; $\frac{71}{10}=7\frac{1}{10}$.

2. Аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш учун махражни бутун сонга кўпайтириш ва кўпайтмага суратни қўшиб, йиғиндини сурат қилиб, махражни эса махраж қилиб ёзилади. Масалан, $3\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 7+5}{7}=\frac{26}{7}$.

Бутун сонни берилган махражли нотўғри касрга айлантириш мумкин. Масалан, 7 ни 3 махражли нотўғри касрга айлантирсак, $\frac{7\cdot 3}{3}=\frac{21}{3}$ бўлади.

V. Касрларни энг кичик умумий махражга келтириш. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ва $\frac{5}{6}$ касрларни умумий махражга келтириш учун бу касрлар махражларининг (3, 4 ва 6 нинг) энг кичик умумий карралиси (12) топилади. 1-касрни 4 га, 2-сини 3 га, 3-сини 2 га кўпайтириб, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$ ҳосил қилинади.

Суратлари ҳам, махражлари ҳам бир хил бўлмаган икки касрни таққослаш учун олдин улар умумий махражга келтирилади. Масалан, $\frac{3}{4}$ ва $\frac{7}{11}$ касрларни таққослаш учун уларни умумий махражга келтирамиз: $\frac{33}{44}$ ва $\frac{28}{44}$. $\frac{33}{44} > \frac{28}{44}$ бўлгани учун $\frac{3}{4} > \frac{7}{11}$ бўлади.

Машқлар

38. (Оғзаки.) Қийматлари тенг, аммо кўринишлари турлича бўлган бир неча касрни айтинг.

39. (Оғзаки.) $\frac{2}{3}$ касрни ўзига тенг, аммо махражи: а) 9 бўлган; б) 15 бўлган; в) 24 бўлган; г) 300 бўлган касрга алмаштиринг.

40. Касрларни қисқартиринг:

1) $\frac{6}{12}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{15}{21}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{19}{95}$,

2) $\frac{12}{20}$; $\frac{21}{35}$; $\frac{15}{25}$; $\frac{22}{77}$; $\frac{35}{84}$; $\frac{20}{250}$; $\frac{13}{260}$.

41. Касрлардан қайси бири катта:

1) $\frac{1}{3}$ ва $\frac{5}{13}$; 2) $\frac{5}{8}$ ва $\frac{14}{32}$; 3) $\frac{3}{7}$ ва $\frac{12}{27}$; 4) $\frac{3}{11}$ ва $\frac{13}{44}$?

42. (Оғзаки.) Қуйидаги касрларнинг ҳар бирини аввал 2 марта камайтиринг, сўнгра ҳосил бўлган натижани 3 марта орттиринг:

$$\frac{2}{5};\ \frac{6}{13};\ \frac{10}{17};\ \frac{16}{25};\ \frac{4}{13};\ \frac{5}{12};\ \frac{8}{9}.$$

43. 1) $\frac{4}{5}$ дан $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{11}{12}$ дан $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{2}{3}$ дан $\frac{2}{9}$ неча марта кичик?

44. 1) $\frac{7}{13}$ дан $\frac{21}{13}$, 2) $\frac{1}{14}$ дан $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{4}{7}$ дан $\frac{2}{21}$ неча марта катта ёки неча марта кичик?

45*. n нинг қандай қийматлар тўпламида: 1) $\frac{n}{5}$ касрнинг қиймати 1 дан катта, аммо 2 дан кичик; 0 дан катта, аммо 1 дан кичик бўлади; 2) $\frac{10}{n}$ касрнинг қиймати 2 дан катта, аммо 5 дан кичик 0,1 дан катта, аммо 0,2 дан кичик бўлади?

46. (Оғзаки.) Аралаш сонларни нотўғри касрга айлантиринг:

$$1\frac{2}{3};\quad 4\frac{3}{5};\quad 30\frac{1}{3};\quad 8\frac{6}{7};\quad 9\frac{7}{12}.$$

47. Нотўғри касрларни аралаш сонга айлантиринг:

$$\frac{7}{3};\quad \frac{22}{7};\quad \frac{27}{8};\quad \frac{35}{9};\quad \frac{57}{11};\quad \frac{70}{13};\quad \frac{83}{16};\quad \frac{203}{20};\quad \frac{501}{25}.$$

48. Нотўғри касрларни аввал қисқартиринг, сўнгра бутунларини ажратинг:

$$\frac{10}{6};\quad \frac{21}{14};\quad \frac{35}{15};\quad \frac{450}{300};\quad \frac{170}{68}.$$

49. (Оғзаки.) Қуйидаги касрларни юздан бир улушлар билан ифода қилинг: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{23}{25}$; $\frac{41}{50}$.

Қуйидаги касрларни энг кичик умумий махражга келтиринг:

50. (Оғзаки.) 1) $\frac{1}{2}$ ва $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{5}{9}$ ва $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{2}{3}$ ва $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{8}{9}$ ва $\frac{2}{5}$.

51. 1) $\frac{1}{20}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{5}$ ва $\frac{7}{16}$; 2) $1\frac{1}{6}$; $2\frac{7}{15}$; $3\frac{9}{10}$ ва $1\frac{13}{30}$.

52. Касрларни таққосланг: 1) $\frac{4}{7}$ ва $\frac{6}{11}$; 2) $\frac{8}{4}$ ва $\frac{10}{11}$; 3) $\frac{18}{71}$ ва $\frac{8}{31}$.

8-§. Ўнли касрлар ва уларнинг асосий хоссалари

1-таъриф. *Махражи бир ва ундан кейинги рақамлари ноллардан иборат бўлган касрга ўнли каср деб аталади.*

Масалан, $\frac{3}{10}$, $\frac{117}{100}$, $\frac{1411}{10000}$ — ўнли касрлар.

Одатда ўнли касрлар махражсиз ёзилади. Масалан, $3\frac{9}{10} = 3,9$; $4\frac{23}{100} = 4,23$.

I. **Ўнли касрларни таққослаш.** Иккита ўнли касрдан қайси бирининг бутунлари сони катта бўлса, ўша каср катта бўлади; бутунлари тенг бўлган ҳолда қайси касрнинг ўнли улуши катта бўлса, ўша каср катта бўлади; бутунлари ҳамда ўнли улушлари тенг бўлган ҳолда қайси касрда юздан бир улушлари катта бўлса, ўша каср катта бўлади ва ҳ. к. Масалан, $3{,}012 > 2{,}999$ (чунки $3 > 2$); $0{,}8149 < 0{,}8211$ (чунки $1 < 2$).

II. **Ўнли касрларнинг асосий хоссалари.** 1. Ўнли касрнинг ўнг томонига ноллар ёзилса ёки охиридаги ноллар ташлаб юборилса, унинг қиймати ўзгармайди, масалан, $3{,}48 = 3{,}480 = 3{,}4800$.

2. Ўнли касрдаги вергулни бир, икки, уч ва ҳ. к. хона ўнг (чап) томонга сурилса, каср мос ҳолда 10, 100, 1000 ва ҳ. к. марта ортади (камаяди). Масалан, 31,746 дан 3174,6 каср 100 марта катта, 3,1746 каср эса 10 марта кичикдир.

Ўнли касрни 10, 100, 1000 ва ҳ. к. сонларга кўпайтириш (бўлиш) учун кўпайтувчида нечта ноль бўлса, кўпаювчи (бўлинувчи) даги вергулни шунча хона ўнгга (чапга) суриш керак.

Масалан, $4{,}219 \cdot 100 = 421{,}9$; $1{,}0008 \cdot 1000 = 1000{,}8$; $71{,}8 : 10 = 7{,}18$; $5{,}4 : 1000 = 0{,}0054$.

III. **Ўнли касрларни яхлитлаш.** Ўнли касрларни яхлитлашда ташланадиган рақамларининг биринчиси (чапдан) 5 дан кичик бўлса, охирги қолдириладиган рақам ўзгартирилмайди; ташланадиган рақам 5 ёки 5 дан катта бўлса, охирги қолдиралади ган рақам битта бирлик орттирилади. Масалан, 8,7547 ни 0,1 аниқликда яхлитласак, 8,8; 0,01 аниқликда яхлитласак, 8,75 бўлади.

Машқлар

53. Касрларни махражсиз ёзинг:

$$\frac{71}{100};\quad \frac{401}{100000};\quad 4\frac{7}{100};\quad \frac{19}{10};\quad \frac{399}{100}.$$

54. Касрларни оддий каср шаклида ёзинг:

0,8; 0,25 4,401. 14,0035; 104,09 4,0021.

55. (Оғзаки.) 1) 0,071 ни 10 марта; 1,4009 ни 1000 марта орттиринг; 2) 478,4 ни 10 марта; 0,71 ни 1000 марта камайтиринг.

56. (Оғзаки.) 1) 4,009 дан 400,9. 2) 301,02 дан 30,102; 3) 41 дан 0,041; 4) 718,1 дан 7,181 нечта марта катта ёки неча марта кичик?

Қуйидаги сонларни яхлитланг (оғзаки).

57. Биргача аниқлик билан: 14,7; 6,5; 0,851; 0,8; 1,53; 1,49.

58. 0,1 гача аниқлик билан: 17,44; 71,501; 0,344; 0,087; 27,143.

59. 0,01 гача аниқлик билан: 8,425; 9,135; 27,015; 4,787; 19,099.

9-§. Ўнли касрлар устида амаллар. Амалларнинг тартиби

I. Қўшиш ва айириш. Икки ўнли касрни қўшиш (айириш) учун уларнинг бутун қисми бутун қисми остига, вергул вергул остига, каср қисми каср қисми остига ёзилиб, бутун сонларни қўшиш (айириш) каби қўшилади (айрилади) ва натижада вергул вергуллар остига қўйилади.

Мисоллар:

$$1)\ \begin{array}{r} +\ 14{,}8171 \\ 3{,}0819 \\ \hline 17{,}8990 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} -\ 7{,}3194 \\ 1{,}2719 \\ \hline 6{,}0475 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} -\ 1{,}8001 \\ 0{,}7883 \\ \hline 1{,}0118 \end{array}$$

II. Кўпайтириш. Ўнли касрни ўнли касрга кўпайтириш учун вергулларига эътибор қилмасдан, бутун сонлар каби кўпайтириш ва кўпаювчи билан кўпайтувчининг ҳар иккаласида нечта каср хонаси бўлса, кўпайтмада ўнгдан шунча каср хонани вергул билан ажратиш керак. Мисоллар:

$$1)\ \begin{array}{r} \times\ 4{,}41 \\ 3{,}9 \\ \hline +\ 3969 \\ 1323\ \ \\ \hline 17{,}199 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \times\ 7{,}3206 \\ 0{,}021 \\ \hline +\ 73206 \\ 146412\ \ \\ \hline 0{,}1537326 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} \times\ 8{,}102 \\ 12 \\ \hline 16204 \\ 8102\ \ \\ \hline 97{,}224 \end{array}$$

III. Ўнли касрни бутун сонга бўлиш. Ўнли касрни бутун сонга бўлиш бутун сонларни бўлиш каби бажарилади. Бунда чиққан қолдиқлар борган сари майда улушларга айлана боради; бўлиш натижасида қолдиқда ноль ҳосил бўлса, аниқ бўлинма, қолдиқда ноль ҳосил бўлмаса, тақрибий бўлинма ҳосил бўлади.

Масалан, 1) 3,846 ни 6 га бўлсак, 0,641 аниқ бўлинма ҳосил бўлади; 2) 3,1 ни 8 га бўлсак, 0,387 тақрибий бўлинма ҳосил бўлади. Буларни 1) $3{,}846:6=0{,}641$; 2) $3{,}1:8\approx 0{,}387$ каби кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $72,81:31$ бўлинмани топиш талаб қилинса, бўлинмада $2,348709\ldots$ ҳосил бўлиб, қолдиқ қолаверади. Бунда натижа талаб қилинган аниқликда яхлитланиши мумкин.

IV. Сонни ўнли касрга бўлиш. Бирор сонни ўнли касрга бўлиш учун бўлувчидаги вергулни ташлаб юбориш ва натижада бўлувчи неча марта ортган бўлса, бўлинувчини ҳам шунча марта орттириш ҳамда бўлиш амалини бажариш керак. Масалан, 3,15 ни 1,4 га бўлиш учун бўлувчидаги вергулни ташлаб юборамиз ва натижада бўлувчи 10 марта ортгани учун бўлинувчини ҳам 10 марта орттириб, 31,5 ни 14 га бўламиз.

V. Амалларнинг тартиби Қўшиш ва айириш биринчи босқич амаллари деб, кўпайтириш ва бўлиш иккинчи босқич амаллари деб аталади.

Амаллар қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Бир хил босқич амаллари ёзилиши тартиби бўйича бажарилади.

Масалан, 1) $7,5-4+3,25=3,5+3,25=6,75$; 2) $5,5\times\times 2:0,5=11:0,5=22$.

2. Агар берилган мисолни ишлашда турли босқич амаллари бўлса, аввал юқори босқич амаллари, сўнгра қуйи босқич амаллари бажарилади.

Масалан: $17,4-3,5\cdot 2=17,4-7=10,4$; 2) $5,8\cdot 5+ +2\cdot 0,5=29+1=30$.

3. Қавслар ичига олинган сонлар устидаги амаллар олдин бажарилади. Масалан, $40,6-8\cdot(5-4,5)=40,6-8\cdot 0,5=40,6-4=36,6$.

Машқлар

Амалларни бажаринг:

60. 1) $5,83+0,505$; 2) $31,83+7,74$; 3) $3+0,04+7,698$; 4) $3,53+9+1,49$.

61. 1) $7,41-3,37$; 2) $10,3-0,45$; 3) $7-4,841$.

62. Қуйидаги амалларни бажаринг:

1) $7,6\cdot 3$; 2) $0,419\cdot 4000$; 3) $1,8\cdot 1,1$; 4) $0,712\cdot 23$; 5) $0,071\cdot 3,4$; 6) $8,061\cdot 0,051$; 7) $72,313\cdot 0,0019$.

Бўлинмани топинг:

63. (Оғзаки.) 1) $819,7:10$, 2) $4,08:1000$; 3) $0,81:10\,000$; 4) $0,84:4$; 5) $18,027:9$; 6) $19,19:19$.

64. 1) $119,7:9$; 2) $13,44:24$; 3) $16:0,8$; 4) $160:0,016$, 5) $18,4:7,36$; 6) $183,96:10,512$; 7) $5,632:51,2$.

65. Бўлинмани 0,01 гача аниқликда ҳисобланг:

1) $0,6:27$; 2) $0,8:1,44$; 3) $5:22,5$. 4) $140:0,45$; 5) $1,25:2,8125$.

66. Амалларни бажаринг: 1) $71,813-60,027\cdot 0,8$, 2) $13-(17,2-7,41)$; 3) $1-0,538+(71,01-56)$; 4) $4,5\cdot(4,44-3,54)-(6-5,7)$; 5) $(4,23-3,959)-(1,619-1,448)\cdot 0,09$; 6) $1,09\cdot 12,6+3,41\cdot 0,1-98,4:10$; 7) $4,96:10+35,8:100+0,0042$.

10-§. Оддий касрлар устида амаллар

I. Қўшиш ва айириш. 1. Бир хил махражли касрларни қўшиш (айириш) учун уларнинг суратларини қўшиб (айириб), ўша махражларининг ўзини қолдириш, ҳосил бўлган каср қисқарса, қисқартириш керак. Масалан, 1) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{24}+\frac{7}{24}+\frac{3}{24}+\frac{1}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$. Умуман $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$; $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\ldots+\frac{d}{c}=\frac{a+b+\ldots+d}{c}$.

2. Ҳар хил махражли касрларни қўшиш (айириш) учун дастлаб улар умумий махражга келтирилади, сўнгра қўшилади (айрилади). Масалан, $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$; $\frac{7}{15}-\frac{3}{10}=\frac{14}{30}-\frac{9}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

3. Аралаш сонларни қўшиш (айириш) учун сонларнинг каср қисмлари умумий махражга келтирилиб, бутун ва каср қисмлари кетма-кет қўшилади (айрилади). Масалан, $13\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}=13\frac{3}{6}+4\frac{4}{6}=17\frac{7}{6}=18\frac{1}{6}$; $5\frac{2}{3}-3\frac{1}{2}=5\frac{4}{6}-3\frac{3}{6}=2\frac{1}{6}$.

4. Аралаш сондан аралаш сонни айирганда камаювчи каср айрилувчи касрдан кичик бўлса, камаювчи аралаш соннинг бир бутунини ўзига тегишли каср қисмидаги улушларга майдалаб, камаювчининг каср қисмига қўшиш ва сўнгра айириш керак.

Масалан, $3\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}=3\frac{3}{6}-1\frac{4}{6}=2\frac{9}{6}-1\frac{4}{6}=1\frac{5}{6}$;

$10-7\frac{2}{11}=9\frac{11}{11}-7\frac{2}{11}=2\frac{9}{11}$.

II. Кўпайтириш. Касрни касрга кўпайтириш учун улар суратларининг кўпайтмаси сурат қилиб, махражлари кўпайтмаси махраж қилиб ёзилади.

Масалан, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{2\cdot4\cdot7}{3\cdot5\cdot9}=\frac{56}{135}$;

Умуман $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ ёки $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\ldots\cdot\frac{k}{e}=\frac{a\cdot c\cdot\ldots\cdot k}{b\cdot d\cdot\ldots\cdot e}$.

Кўпайтиришда лозим бўлган ҳолларда қисқартириш керак. Масалан, $\frac{45}{82}\cdot\frac{123}{165}=\frac{45\cdot123}{82\cdot165}=\frac{3\cdot3}{2\cdot11}=\frac{9}{22}$.

III. Бўлиш. Касрни касрга бўлиш учун биринчи касрнинг суратини иккинчи касрнинг махражига кўпайтириб, натижани сурат қилиб ёзиш, биринчи касрнинг махражини иккинчи касрнинг суратига кўпайтириб, натижани махраж қилиб ёзиш керак.

Масалан; $\frac{5}{7}:\frac{3}{4}=\frac{5\cdot4}{7\cdot3}=\frac{20}{21}$. Умуман $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

1-изоҳ. Кўпайтувчилардан (бўлувчи ёки бўлинувчилардан) бири ёки ҳар иккаласи аралаш сон бўлса, аралаш сонларни нотўғри касрга айлантирилиб, сўнгра кўпайтирилади (бўлинади).

Масалан; $2\frac{1}{3}\cdot1\frac{1}{2}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{6}=3\frac{3}{6}=3\frac{1}{2}$.

2-изоҳ. Кўпаювчилардан (бўлинувчи ёки бўлувчилардан) бири бутун сон бўлса, уни махражи 1 га тенг бўлган каср сон деб қараш мумкин.

Масалан; $7\cdot\frac{2}{23}=\frac{7\cdot2}{23}=\frac{14}{23}$; $\frac{7}{9}:4=\frac{7}{9}:\frac{4}{1}=\frac{7}{36}$.

Таъриф. (Ўзаро тескари сонлар.) *Берилган сон* (a) *га тескари сон деб бирнинг шу сонга нисбати* $\left(\frac{1}{a}\right)$ *га айтилади.*

Масалан, 3 ва $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ва 4; n ва $\frac{1}{n}$ ўзаро тескари сонлардир.

$\frac{a}{b}$ касрга тескари сон $1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ дан иборат.

Таърифдан ўзаро тескари сонлар кўпайтмаси 1 га тенг экани бевосита келиб чиқади.

Бир сонни иккинчи сонга бўлиш ўрнига биринчи сонни иккинчисига тескари бўлган сонга кўпайтириш керак, яъни $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Машқлар

67. Қўшинг: $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; 2) $4+1\frac{2}{9}+2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$;
4) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$; 5) $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$;
8) $8\frac{43}{77}+7\frac{25}{66}+11\frac{11}{42}$.

68. (Оғзаки.) Айиринг: 1) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}$; 2) $10\frac{1}{2}-3$; 3) $7-\frac{3}{4}$;
4) $4\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}$.

69. Айирмани топинг: 1) $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$; 2) $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{7}-\frac{5}{66}$;
4) $\frac{23}{33}-\frac{21}{44}$.

70. Оғзаки ҳисобланг: 1) $\frac{1}{7}+1\frac{5}{6}+\frac{6}{7}$; 2) $3-\frac{1}{9}-\frac{7}{9}$;
3) $10\frac{3}{4}-7\frac{2}{7}$; 4) $3\frac{5}{8}-3\frac{5}{16}$; 5) $11-\frac{1}{2}-6\frac{11}{13}$.

71. Амалларни бажаринг: 1) $44\frac{2}{3}+3\frac{1}{8}-\left(5\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}\right)$;
2) $14\frac{3}{4}-\left(13-\frac{7}{8}-10\frac{5}{6}\right)$; 3) $71\frac{111}{120}-\left(5\frac{5}{12}+13\frac{37}{40}+5\frac{13}{24}\right)$;
4) $\frac{13}{18}-\frac{5}{36}-\left(\frac{29}{72}-\frac{1}{24}\right)$.

72. (Оғзаки.) Қуйидаги сонларга тескари сонларни айтинг:
1) 5; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $1\frac{1}{3}$; 6) $7\frac{6}{7}$.

73. (Оғзаки.) Кўпайтиринг: 1) $\frac{2}{7}\cdot 3$; 2) $\frac{3}{16}\cdot 2$; 3) $3\frac{1}{3}\cdot 2$.

74. (Оғзаки.) 1) 24 нинг $\frac{1}{3}$ улушини; 2) 21 нинг $\frac{3}{7}$ улушини топинг.

75. (Оғзаки.) 1) $\frac{5}{28}$ ни 7 марта; 2) $\frac{3}{22}$ ни 10 марта орттиринг.

76. 1) $\frac{4}{5}$ нинг $\frac{2}{3}$ улушини; 2) $3\frac{3}{4}$ нинг $\frac{4}{9}$ улушини топинг.

77. Кўпайтмани топинг: 1) $36\cdot 3\frac{5}{12}$; 2) $1\frac{5}{48}\cdot 24$; 3) $\frac{4}{15}\cdot 2\frac{1}{4}$;
4) $3\frac{5}{9}\cdot 4\frac{7}{8}$; 5) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{25}$; 6) $\frac{7}{15}\cdot\frac{36}{25}\cdot\frac{5}{84}$; 7) $3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{2}{5}\cdot 12\frac{1}{4}$.

78. Даражани ҳисобланг: 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; 3) $\left(\frac{5}{11}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$.

79. Бўлинмани топинг: 1) $\frac{8}{7}:4$; 2) $\frac{12}{25}:16$; 3) $16:\frac{4}{9}$; 4) $1:3\frac{3}{4}$; 5) $1\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$; 6) $2\frac{1}{4}:1\frac{1}{8}$; 7) $2\frac{3}{5}:1\frac{11}{15}:5\frac{1}{3}$.

Амалларни бажаринг:

80. 1) $\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{8}\right)\cdot\left(3\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)$; 2) $\left(\frac{5}{18}+\frac{7}{12}+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{20}{47}\right)$; 3) $\left(20\frac{1}{2}:4\right):\left(3\frac{3}{4}+2\right)$; 4) $\left(3\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}\right):\left(24:2\frac{2}{5}\right)$.

81. 1) $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):3\frac{1}{6}$; 2) $\left(\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}\right):\frac{3}{4}-\right.$ $\left.-\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{20}\right):1\frac{9}{20}\right):\frac{1}{50}$.

82. Студент биринчи куни $61\frac{1}{2}$ кг, иккинчи куни эса 1-кундагидан $1\frac{1}{3}$ марта кўп, учинчи куни эса $101\frac{1}{2}$ кг пахта терди. Студент уч кунда қанча пахта терган?

83. Қопдаги уннинг аввал $\frac{3}{40}$ қисми, сўнгра $\frac{1}{4}$ қисми сотилгандан кейин қопда $47\frac{1}{4}$ кг ун қолди. Қопда дастлаб қанча ун бўлган?

84. Пиёда олдин соатига $4\frac{1}{4}$ км тезлик билан $1\frac{3}{4}$ соат, сўнгра соатига $4\frac{1}{2}$ км тезлик билан $1\frac{1}{2}$ соат юрди. Пиёда 15 км масофани ўтиши учун яна неча км юриши керак?

11-§. Оддий касрни ўнли каср шаклида ёзиш

$\frac{3}{20}$ оддий касрнинг сурати (3) ни махражи (20) га бўлсак, 0,15 ҳосил бўлади. Демак, $\frac{3}{20}=0,15$. Худди, шунингдек, $\frac{91}{25}=3,64$.

Демак, оддий касрни ўнли каср шаклида ёзиш учун оддий каср суратини махражига бўлиб, бўлинмани ёзиш керак экан.

$\frac{2}{3}$ оддий касрнинг суратини махражига бўлсак, ўнли каср ҳосил бўлмайди Бу ҳолда бўлиш жараёни чексиз давом эта бориб, 0,666 . . . ҳосил бўлади. 0,666. . . га чексиз ўнли каср дейилади. Шунингдек, $\frac{25}{11}=2{,}272727$ ҳам чексиз ўнли касрдир.

$\frac{3}{20}$ касрнинг махражини $20=2^2\cdot 5$ каби ёзиш мумкин бўлгани учун уни $\frac{3}{2^2\cdot 5}$ каби ёзамиз. Бу касрнинг сурат ва махражини 5 га кўпайтирсак, $\frac{3\cdot 5}{2^3\cdot 5^2}=\frac{15}{100}=0{,}15$ ҳосил бўлади.

10,100,1000, . . . сонлар 3 га қолдиқсиз бўлинмагани учун $\frac{2}{3}$ касрнинг сурат ва махражини бирор сонга кўпайтириш натижасида махражида 10,100,1000,. . . ҳосил бўлмайди, яъни уни ўнли каср шаклида махражсиз ёзиш мумкин эмас.

Теорема. *Қисқармайдиган оддий каср махражининг туб кўпайтувчиларга ёйилмасида 2 ва 5 дан бошқа туб сонлар қатнашмаса, уни ўнли каср шаклида ёзиш мумкин; 2 ва 5 дан бошқа туб кўпайтувчилар қатнашса, у касрни ўнли каср шаклида ёзиш мумкин эмас (чексиз ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин).*

Агар оддий каср ўнли касрга айланмаса, уни берилган аниқликда яхлитлаш билан тақрибан ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин.

Баъзи мисол ёки масалаларни ишлашда ҳам оддий, ҳам ўнли касрлар билан амаллар бажаришга тўғри келади. Бундай ҳолларда мисолларни қуйидаги усуллар билан ишлаш мумкин:

1. Ҳамма касрларни ўнли касрга айлантириш усули:

$$\left(1\frac{3}{4}+0{,}5\right)\cdot\left(3\frac{1}{5}-0{,}6\right)=(1{,}75+0{,}5)\cdot(3{,}2-0{,}6)=$$
$$=2{,}25\cdot 2{,}6=5{,}85.$$

2. Ҳамма касрларни оддий касрга айлантириш усули:

$$\left(\left(4\frac{1}{2}+0{,}25\right)\cdot\frac{2}{19}\right):\left((13{,}41-4{,}01):\frac{47}{5}\right)=\left(\left(4\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{19}\right):$$
$$:\left(\left(13\frac{41}{100}-4\frac{1}{100}\right):\frac{47}{5}\right)=\left(4\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{19}\right):\left(9\frac{2}{5}:\frac{47}{5}\right)=\left(\frac{19}{4}\cdot\frac{2}{19}\right):$$
$$:\left(\frac{47}{5}\cdot\frac{5}{47}\right)=\frac{1}{2}.$$

3. Бир хил касрларни бошқа хил касрларга айлантирмасдан ечиш:

$$\left((7,8-1,11):3,345\right)\cdot\left(\left(3\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}\right):\frac{25}{3}\right);\ 7,8-1,11=6,69$$

ва $3\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}=5$; $(6,69:3,345)\cdot\left(5:\frac{25}{3}\right)=2\cdot\frac{3}{5}=1\frac{1}{5}$.

Одатда мураккаб мисоллар содда мисолларга ажратиб ечилади.

Мисол. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

$$\left(\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0,8+2\frac{1}{9}\cdot 0,225\right).$$

Ҳисоблаш: 1) $58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}=\ldots=1\frac{39}{40}$; 2) $1\frac{39}{40}:0,8=$ $=\ldots=2\frac{15}{32}$; 3) $2\frac{1}{9}\cdot 0,225=\frac{19}{9}\cdot\frac{9}{40}=\frac{19}{40}$; 4) $2\frac{15}{32}+\frac{19}{40}=$ $=\ldots=2\frac{151}{160}$.

Машқлар

85. Оддий касрни ўнли касрга айлантиринг:

1) $43\frac{1}{4}$; 2) $7\frac{3}{40}$; 3) $10\frac{17}{125}$; 4) $23\frac{37}{80}$; 5) $3\frac{131}{160}$.

86. Ўнли каср кўринишида ёзиш мумкинми:

1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{17}{20}$; 4) $\frac{25}{28}$; 5) $\frac{3}{25}$; 6) $40\frac{51}{75}$?

87. Амалларни бажаринг:

1) $\frac{(5,161+9,374)\cdot 4,5}{0,096+11,23+76,63\cdot 0,8}$; 2) $\frac{15\cdot 1,2-0,468:0,04}{0,048:0,015}$;

3) $\frac{\left(9\frac{1}{6}+13\frac{3}{4}\right):\frac{5}{6}}{\left(18,3-7\frac{1}{2}\right):1\frac{4}{5}}-3\frac{1}{12}$; 4) $\frac{\left(2,7-1\frac{4}{5}\right):\frac{3}{2}}{\left(3,2-1\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{46}}+0,4$;

5) $\left(9\frac{1}{2}:2\frac{3}{8}-7,7:2,8\right)\cdot\left(1,75\cdot 2\frac{2}{3}+3\cdot 1\frac{1}{9}\right)$;

6) $\left(2\frac{1}{7}\cdot 2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}:2\frac{1}{2}\right):\left(2\frac{2}{7}\cdot 1\frac{3}{4}-1\frac{4}{5}:1\frac{2}{7}\right)$.

88. 1 километр темир йўл қуриш учун 260,8 куб м шағал кетади. Шу узунликдаги қўш йўл учун эса $1\frac{4}{5}$ марта ортиқ шағал кетади. Агар битта вагонга $4\frac{3}{4}$ куб м шағал ортилса, $71\frac{3}{5}$ км узунликдаги қўш йўл учун керак бўлган шағални ташишга қанча вагон керак бўлади?

89*. Колхоз ерининг $\frac{13}{20}$ қисми пахта, қолган ернинг $\frac{2}{5}$ қисми бедапоя, ундан қолган ернинг $\frac{1}{5}$ қисми боғлар ва қолган 181,44 га ерга сабзавот ҳамда донли экинлар экилган. Колхознинг қанча ери бор?

12-§. Процентлар

Таъриф. *Соннинг юздан бир бўлаги (қисми) шу соннинг проценти деб аталади.*

Масалан, мактабдаги ўқувчиларнинг 0,08 қисми аълочи дейиш ўрнига мактабдаги ўқувчиларнинг 8 проценти аълочи дейилади; омонат касса йилига омонатга қўйилган пулнинг 0,02 қисми қадар фойда тўлайди дейиш ўрнига омонат касса йилига 2 процент фойда тўлайди дейилади.

„Процент" деган сўз ўрнига % белги ёзиш қабул қилинган бўлиб, бу белги ҳисоблаш даврида қўйилмасдан, масала шартининг баёнида ва ҳосил қилинган натижанинг кетига қўйилади.

Одатда процент белгиси билан берилган бутун сонни ўнли касрга алмаштириш ва, аксинча ўнли касрни процент белгиси билан берилган бутун сонга айлантириш лозим бўлади. Бундай алмаштириш қуйидаги жадвалда берилган:

Процентлар	1%	2%	3%	8%	10%	50%	93%	100%	140%
Сонлар	0,01	0,02	0,03	0,08	0,1	0,5	0,93	1	1,4

I. Соннинг процентини топиш.

1-масала. Мактабда 1200 ўқувчи бўлиб, улардан 7% и аълочидир. Мактабда нечта аълочи ўқувчи бор?

Ечиш. 1200 ўқувчининг 1% и $\frac{1200}{100}$ ўқувчи, 7% и эса $\frac{1200}{100}\cdot 7 = 84$ ўқувчи бўлади*.

Берилган соннинг бир неча процентини топиш учун берилган сонни 100 га бўлиб, натижани процентлар сонига кўпайтирилади.

a соннинг $p\%$ ини b билан белгиласак, $b = \frac{a}{100}\cdot p = \frac{a\cdot p}{100}$ бўлади, яъни $b = \frac{a\cdot p}{100}$.

Масалан, 480 нинг 11% и $\frac{48\cdot 11}{10} = \frac{528}{10} = 52{,}8$ га тенг.

II. Берилган процентига кўра сонни топиш.

2-масала. Пионерлар лагерида 69 та ўн бир ёшли бола бўлиб, булар лагердаги болаларнинг 23% ини ташкил этади. Лагерда нечта пионер бор?

Ечиш. Лагердаги ўқувчиларнинг 23% и 69 та бўлса, 1% и $\frac{69}{23}$ га, 100% и, яъни ҳаммаси эса $\frac{69}{23}\cdot 100 = 300$ га тенг бўлади. *Жавоб.* Лагерда 300 пионер бор.

Берилган процентига кўра сонни топиш учун берилган процентни 100 га кўпайтириб, процент сонига бўлинади.

$p\%$ и b га тенг бўлган соннинг 1% и $\frac{b}{p}$ га, 100% и, яъни шу соннинг ўзи эса $\frac{b}{p}\cdot 100 = \frac{b\cdot 100}{p}$ га тенг бўлади. Демак, $p\%$ и b га тенг бўлган сонни a билан белгиласак, $a = \frac{b\cdot 100}{p}$.

Масалан, 35% и 245 га тенг бўлган сон $\frac{245\cdot 100}{35} = 700$ га тенг.

---

* Масалани бошқача усул билан ечишни бу ерда келтирмаймиз.

III. Бир исмли икки соннинг процент нисбатини топиш.

3-масала. 1050 га ерни ҳайдаш керак. Биринчи куни 63 га ер ҳайдалди. Биринчи куни ернинг неча проценти ҳайдалди?

Ечиш. 63 га ер 1050 га ернинг $\frac{63}{1050}=\frac{3}{50}=0{,}06$ қисмини ташкил этса, у $0{,}06\cdot 100=6\%$ га тенг бўлади. *Жавоб.* 6% и ҳайдалган.

Бир сон иккинчи соннинг неча процентини ташкил қилишини топиш учун биринчи соннинг иккинчи сонга нисбатини 100 га кўпайтириш керак.

a сони b сонининг $p\%$ ини ташкил этсин. У ҳолда $p=\frac{a\cdot 100}{b}$.

Масалан, 21 сони 140 нинг $p=\frac{21\cdot 100}{140}=15\%$ ини ташкил этади.

Изоҳ. Процент нисбати аниқланадиган ҳар икки сон бир хил исмли бўлиши шарт.

Машқлар.

90. (Оғзаки.) 1) 1400 нинг 20% ини; 2) 700 нинг 5% ини; 3) 70 нинг 30% ини; 4) 140 нинг 50% ини топинг.

91. 1) 1200 сўмнинг 12% ини; 2) 480 км нинг 12,5% ини; 3) 1550 т нинг 64% ини; 4) 17 нинг $\frac{1}{3}\%$ ини; 5) 120 нинг $5\frac{1}{5}\%$ ини топинг.

92. Ишчи ойига 110 сўм олар эди. Иш ҳақи 35% орттирилгандан сўнг ишчи ойига қанча оладиган бўлди?

93. Йил бошида омонат кассага қўйилган 780 сўм пул (омонатга 2% дан фойда тўланади) йил охирида неча сўмга айланади? 1250 сўм-чи? 273 сўм-чи? 192 сўм-чи?

94. (Оғзаки). 27 сони қандай соннинг 30% ини ташкил этади?

95. 1) 3% и 51 га; 2) 73% и 292 га тенг бўлган сонни топинг.

96. Ишчининг ойлиги 15% ортгандан кейин 161 сўм бўлди. Дастлаб ишчининг ойлиги неча сўм бўлган?

97. Мактабдаги ўқувчиларнинг сони 16% ошиб, 754 тага етди. Мактабга янгидан нечта ўқувчи қабул қилинган?

98. (Оғзаки.). 4 сони 2 нинг; 4 нинг; 16 нинг; 100 нинг; 200 нинг неча процентини ташкил этади?

99. 240 кг 15 тоннанинг неча процентини ташкил этади? 2,7 тонна-чи? 450 кг-чи? 180 кг-чи?

100. 840 кг лавлагидан 168 кг шакар чиқади. Лавлагидан неча процент шакар олинади?

101. Завод планда белгиланган 840 трактор ўрнига 903 трактор чиқарди. Завод планни неча процент ошириб бажарган?

13-§. Мусбат ва манфий сонлар. Координата тўғри чизиғи. Сонниг абсолют қиймати

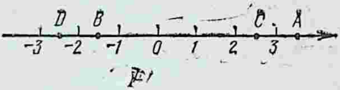
Термометр шкаласида ҳавонинг температураси нолдан бошлаб икки қарама-қарши йўналишда ўлчанади. Агар симоб устуни шкаланинг нолдан юқори томон йўналишдаги сонларни кўрсатса, температура $+1°$, $+2°$, $+3°$, $+7°$, $+11°$ ва ҳоказо ёки $1°$, $2°$, $3°$, $7°$, $11°$ ва ҳоказо сонлар билан белгиланади ва бу сонлар *мусбат сонлар* дейилади. Агар симоб устуни шкаланинг нолдан пастки томон (яъни қарама-қарши) йўналишдаги сонларни кўрсатса, $-1°$, $-2°$, $-3°$, $-9°$ ва ҳоказо сонлар билан белгиланади ва улар *манфий сонлар* дейилади. Бу мисолда мусбат сонлар иссиқликни, манфий сонлар эса совуқни билдиради.

Ноль градусли температура иссиқни ҳам, совуқни ҳам билдирмайди. Ноль мусбат сон ҳам эмас, манфий сон ҳам эмас.

Бирор тўғри чизиқ устида ихтиёрий „0“ нуқта (саноқ боши) ни белгилаб, унинг ўнг ва чап томонига бирор бирлик кесмани масалан, 1 см ни) кетма-кет жойлаштирамиз. Ўнг томондаги кесмалар учини 1, 2, 3, 4 ва ҳоказо сонлар билан белгилаб, мусбат йўналиш деб олинади ва стрелка қўйилади. Саноқ бошидан чап (қарама-қарши) томондаги кесмаларнинг учини -1, -2, -3, -4 ва ҳоказо сонлар билан белгилаймиз (1-*а* расм). Бу тўғри чизиқда A нуқта $3\frac{1}{2}$ сонига, B нуқта $-1\frac{1}{2}$ сонига мос келади. Аксинча $2\frac{1}{2}$ сонига C нуқта, $-2\frac{1}{2}$ сонига D нуқта мос келади, „a сонига мос нуқта“ дейиш ўрнига „a нуқта“ дейилади.

1-таъриф. *Ҳар бир нуқтаси бирор сонни тасвирловчи тўғри чизиққа координата тўғри чизиғи (сонлар тўғри чизиғи) дейилади.*

Координата тўғри чизиғидаги нуқтага мос келган сонга шу нуқтанинг координатаси дейилади. Масалан,



1-*а* расм.

A нуқтанинг координатаси $3\frac{1}{2}$ бўлиб, $A\left(3\frac{1}{2}\right)$ каби, B нуқтанинг координатаси $-1\frac{1}{2}$ бўлиб, $B\left(-1\frac{1}{2}\right)$ каби ёзилади.

2-таъриф. *Фақат ишораси билангина фарқ қиладиган икки сонга қарама-қарши сонлар деб аталади.*

5 билан -5, $2\frac{1}{2}$ билан $-2\frac{1}{2}$ сонлари қарама-қарши сонлардир.

a га қарама-қарши сон $-a$ бўлиб, $a+(-a)=0$.

Координаталари қарама-қарши сонлар бўлган нуқталар координата тўғри чизиғида O нуқта (саноқ боши) дан ҳар икки томонда бир хил масофада жойлашган бўлади.

Натурал сонларга қарама-қарши бўлган -1; -2; -3; -4; -5; -6; ... сонлар манфий бутун сонлар тўпламини ташкил этади.

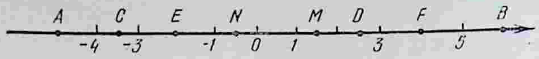
Барча натурал сонлар, ноль сони ҳамда барча манфий бутун сонлар биргаликда бутун сонлар тўпламини ташкил этади ва Z билан белгиланади.

Бутун сонлар тўплами қўшиш ва кўпайтириш амалларидан ташқари айириш амалига нисбатан ҳам ёпиқ тўпламдир, чунки $a, b \in Z$ бўлса, $(a-b) \in Z$ ҳамда $(b-a) \in Z$ бўлади.

3-таъриф. *Соннинг модули деб координата тўғри чизиғида саноқ бошидан шу сонга мос нуқтагача бўлган масофага айтилади.*

1-a расмда $-1\frac{1}{2}$ сонига B нуқта мос келади. Саноқ бошидан B нуқтагача масофа $1\frac{1}{2}$ бирликка тенг. Шунинг учун $-1\frac{1}{2}$ нинг модули $1\frac{1}{2}$ га тенг бўлади ва $\left|-1\frac{1}{2}\right|=1\frac{1}{2}$ каби ёзилади. Шунингдек, $\left|2\frac{1}{2}\right|=2\frac{1}{2}$; $|-5|=5$; $|0|=0$. Соннинг модули манфий сон бўлмайди.

Манфий соннинг модули унга қарама-қарши бўлган сонга тенг, мусбат соннинг ва нолнинг модули эса шу соннинг ўзига тенг, яъни $a \geqslant 0$ бўлса, $|a|=a$, $a<0$ бўлса, $|a|=-a$ бўлади.



1-*б* расм.

Кўпайтма ва йиғиндининг модули. 1. Кўпайтманинг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг, яъни $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

2. Йиғиндининг модули қўшилувчилар модулларининг йиғиндисидан катта эмас, яъни:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

Ҳақиқатан ҳам, a билан b бир хил ишорали сонлар бўлса, $|a+b| = |a| + |b|$ бўлади, ҳар хил ишорали сонлар бўлса $|a+b| < |a| + |b|$ бўлади. Демак, $|a| + |b| \geqslant |a+b|$.

Машқлар

102. Ёзувлардан қайси бири тўғри: 1) $-2 \in Z_0$; $3 \in Z$; $-7 \in Z$; $2{,}4 \in N$; 2) $Z_0 \subset N$; $N \subset Z$; $Z \subset Z_0$; $N \subset Z_0 \subset Z$?

103. Аниқланг: $N \cup \{0\}$; $N \cup Z$; $Z_0 \cap Z$; $N \cap Z_0$; $N \cup Z_0 \cup \{0\}$.

104*. а) $a, b \in N$ бўлса, $(a+b) \in Z_0$; $(a-b) \in Z$, $ab \in Z$ бўладими?
б) $a, b \in Z$ бўлса, $(a+b) \in N$, $(a-b) \in Z_0$, $ab \in N$ бўладими?

105. O, A, B, C, D, E, F, M ва N нуқталарнинг (1-*б* расм) координаталарини ёзинг.

106. Координата тўғри чизиғида $A(-2)$, $B(3{,}5)$ $C(-4{,}5)$, $D(5)$, $E(-5)$, $K(6{,}5)$ нуқталарни белгиланг.

107. (Оғзаки.) Қайси сон катта: $|-1{,}4|$ ёки $|1{,}3|$ ми; $|-4{,}9|$ ёки $|-4|$. ми $|4{,}9|$ ёки $|-5|$ ми?

108. Ҳисобланг: 1) $|-4{,}3| + |4{,}3| + |-2| + |2|$; 2) $|-1{,}7| + |2{,}5| - |-3{,}4| - |-7{,}1|$.

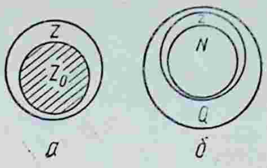
14-§. Рационал сонлар тўплами. Рационал сонлар билан амаллар

Бутун сонлар тўплами билан каср (мусбат ва манфий) сонлар тўплами рационал сонлар* тўпламини ташкил этади. $p \in Z$ ва $q \in N$ бўлса, $\frac{p}{q}$ кўринишидаги барча сонлар рационал сонлар тўпламини ташкил этади. Рационал сонлар тўплами Q билан белгиланади.

---

* „Рационал сон" термини латинча ratio сўзидан келиб чиққан бўлиб, ўзбек тилида нисбат деган маънони англатади.

Ҳар қандай бутун сон рационал сон бўлганидан бутун сонлар тўплами рационал сонларнинг қисм тўпламидир, яъни $Z \subset Q$.



2- расм.

Ихтиёрий икки рационал сондан қайси бири координата тўғри чизиғида ўнгда жойлашган нуқта билан тасвирланса, ўшаниси катта бўлади. 1. Ҳар қандай мусбат сон нолдан ва ҳар қандай манфий сондан катта ($4 > -5$; $1 > 0$; $8 > -9$).

2. Ноль ҳар қандай манфий сондан катта ($0 > -5$; $0 > -5,1$).

3. Икки манфий сондан қайси бирининг абсолют қиймати кичик бўлса, ўшаниси катта ($-2 > -5$; $-9 > -12$).

A тўплам B тўпламнинг қисм-тўплами бўлсин, яъни $A \subset B$. B тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан иборат бўлган тўплам A тўпламнинг B тўпламга **тўлдирмаси** дейилади. Масалан, $A = \{1;\ 2;\ 5\}$ тўпламнинг $B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ тўпламга тўлдирмаси $\{0;\ 3;\ 4\}$ тўпламдан иборат, Z_0 тўпламнинг Z тўпламга тўлдирмаси барча манфий бутун сонлар тўпламидан иборат. Бу Z_0 ва Z тўпламлар орасидаги муносабат 2-расмда, N, Z ва Q тўпламлар орасидаги муносабат эса 2- б расмда „Эйлер доиралари“ ёрдамида тасвирланган.

Қўшиш. Бир хил ишорали иккита сонни қўшиш учун уларнинг абсолют қийматларини қўшиб, йиғиндининг олдига уларнинг ишораси қўйилади; қарама-қарши ишорали иккита сонни қўшиш учун абсолют қиймати каттасидан кичиги айирилади ва айирманинг олдига абсолют қиймати катта бўлган соннинг ишораси қўйилади.

Масалан, $(+3) + (+8) = +11$; $(-7) + (-2) = -9$; $(-13) + (+7) = -6$.

Қарама-қарши сонларнинг йиғиндиси нолга тенг ва аксинча, йиғиндиси нолга тенг бўлган икки сон қарама-қарши сонлар бўлади.

Қўшилувчилардан бири нолга тенг бўлса, йиғинди иккинчи қўшилувчига тенг бўлади, яъни $(+3) + 0 = +3$; $0 + (-5) = -5$.

Бир нечта (иккитадан ортиқ) рационал сонларни қўшиш учун аввал олдинги иккитасининг йиғиндисини топиб, сўнгра бу йиғинди билан учинчи сонни қўшиш керак ва ҳоказо. Масалан: $(+9)+(-5)+(-2)+(+4,3)=(+4)+(-2)+(+4,3)=(+2)+(+4,3)=+6,3$.

Айириш. Бир сондан иккинчи сонни айириш учун камаювчига айрилувчига қарама-қарши сонни қўшиш керак, яъни $a-b=a+(-b)$.

Масалан, $(+4)-(+2)=(+4)+(-2)=+2$; $(-8)-(-5)=(-8)+(+5)=-3$.

Кўпайтириш (бўлиш). Бир хил ишорали икки соннинг кўпайтмаси (бўлинмаси) улар модулларининг плюс ишора билан олинган кўпайтмасига (бўлинмасига), ҳар хил ишорали икки соннинг кўпайтмаси (бўлинмаси) бу сонлар модулларининг минус ишора билан олинган кўпайтмасига (бўлинмасига) тенг.

Масалан, $(-8)\cdot(+3)=-24$; $(-5)\cdot(-3)=+15$; $(-2,4):(-6)=+0,4$.

Бир нечта сонни ўзаро кўпайтирганда манфий кўпаювчилар сони жуфт бўлса, кўпайтма мусбат, манфий кўпаювчилар сони тоқ бўлса, кўпайтма манфий бўлади. Масалан, $(-3)\cdot(-7)\cdot(+4)=+84$; $(-5)\cdot(+6)(+3)\times\times(-2)(-1)=-180$.

Даражага кўтариш. 1-таъриф. *Ҳар бири a га тенг бўлган n та кўпайтувчининг ($n>1$ ва $n\in N$) кўпайтмасига a сонининг кўрсаткичи n га тенг бўлган даражаси деб аталади. a сонининг кўрсаткичи 1 га тенг бўлган даражаси деб a сонининг ўзига айтилади:*

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a}_{n\ \text{марта}}.\quad a^1=a,$$

бунда a—даража асоси, n — даража кўрсаткичи.

2-таъриф. *Даража (бир хил кўпайтувчилар кўпайтмаси) ни топишга даражага кўтариш амали дейилади.* Масалан, 2^5, $(-3)^3$ ва $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ даражани топайлик: $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$; $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$. Шунингдек, $0^n=\underbrace{0\cdot0\cdot\ \ldots\ \cdot0}_{n\ \text{та}}=0$, $1^n=\underbrace{1\cdot1\cdot\ \ldots\ \cdot1}_{n\ \text{та}}=1$. Демак, мусбат соннинг ихтиёрий натурал кўрсаткичли даражаси мусбат сон бўлиб, манфий соннинг жуфт кўрсаткичли даражаси мусбат, тоқ кўрсаткичли даражаси эса манфий сондир.

Даражага кўтариш амали учинчи босқич амали бўлиб, мисол ишлашда барча босқич амалларини бажариш лозим бўлиб қолганда аввал учинчи босқич (даражага кўтариш) амали; сўнгра 2-босқич ва, ниҳоят, 1-босқич амали бажарилади.

Масалан, $4\cdot 3^3-24:2^3=4\cdot 27-24:8=108-3=105$.

Ҳар қандай рационал сонни нолдан фарқли рационал сонга бўлсак, яна рационал сон ҳосил бўлади. Шу сабабдан рационал сонлар тўплами бўлиш амалига нисбатан ҳам ёпиқ тўпламдир.

Машқлар.

Ёзувларнинг қайси бири тўғри:

109. 1) $-5\frac{1}{2}\in Q$; 2) $0\notin Q$; 3) $-5\in N$; 4) $-9\notin Z$; 5) $2{,}4\in Z$.

110. 1) $Z_0\subset Q$; 2) $N\subset Z$; 3) $N\subset Z\subset Q$; 4) $Q\subset Z$; 5) $N\not\subset Z$.

111. 1) $\{3;\ 4;\ 5\}\subset Q$; 2) $\{-1;\ -2;\ -3;\ 5\}\subset Z$; 3) $\{-1;\ 0;\ 1\}\not\subset Q$.

112. Аниқланг: 1) $N\cup Q$; 2) $N\cup Z\cup Q$; 3) $Z_0\cap Q$; 4) $N\cup Z_0\cup Q$; 5) $N\cap Z_0\cap Q$; 6) $Z_0\cap Z\cap Q$; 7) $N\cap Z_0\cap Z\cap Q$; 8) $(N\cap Z)\cup Q$; 9) $(N\cup Z)\cap Q$.

113*. Ёзувлар тўғрими:

1) $(Z_0\cap Q)\subset N$; 2) $(N\cap Z)\subset Z$; 3) $(N\cup Z_0)\subset Z_0$; 4) $(N\cap Z_0)\subset Z$?

114. $x\in Z_0$ ва $y\in Z_0$ бўлса, ёзувлар тўғри бўладими:
1) $x+y\in N$; 2) $x-y\in Z_0$; 3) $x\cdot y\in Z$; 4) $x:y\in Q$?

115. $A=\{0;\ 1\}$ тўпламнинг: 1) $B=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$; 2) $C=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$; 3) $D=\{0;\ 1;\ 10;\ 20\}$ тўпламга тўлдирма тўпламини айтинг.

116. 1) N нинг Z га; 2) Z нинг Q га; 3) $\{0\}$ нинг Z_0 га тўлдирмасини айтинг.

117. 1) N ва Z, 2) Z ва Q тўпламларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирлаб, расмда: 1) N нинг Z га; 2) Z нинг Q га тўлдирма тўпламини штрихланг.

118. 1) Барча жуфт сонлар тўпламининг Z га; 2) барча мусбат сонлар тўпламининг Q га, 3) барча мусбат жуфт сонлар тўпламининг N га тўлдирма тўпламини айтинг.

Йиғиндиларни топинг:

119. (Оғзаки.) 1) $(+11)+(9{,}5)$; 2) $(-4{,}7)+(-2)$; 3) $(-9)+(7{,}4)$; 4) $(+14)+(-3,\ )$.

120. $(+5{,}4)+(3{,}2)+(-4{,}71)+(1{,}73)+(+9{,}83)+(-7{,}03)$.

121. (Оғзаки.) Айирмани топинг: 1) $(+5)-(-4)$; 2) $(-11)-(+3)$; 3) $0-(-8)$; 4) $(+4{,}4)-(-3{,}4)$. 5) $\left(-11\frac{1}{3}\right)-\left(-9\frac{1}{2}\right)$; 6) $(+0{,}8)-(-1{,}81)$.

Амалларни бажаринг:

122. 1) $(-8{,}71)\cdot(+2{,}4)\cdot(-5{,}5)$; 2) $(+1{,}5)(-2{,}4)(-3{,}5)(-1{,}2)$.

123. 1) $(-48):((-72):(-9))$; 2) $((-2,5)\cdot(-1,2)\cdot(-12,4)):(-37,2)$.

124. Қуйидаги сонларнинг қайсилари мусбат, қайсилари манфий:

1) $(1,2)^3$; 2) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $-(-2)^7$; 5) $-(-\sqrt{2})^8$?

125. Амалларни бажаринг: 1) $(3^4\cdot 4-4^3:2)\cdot 3\frac{1}{2}$; 2) $(4\cdot 11^2-$ $-11\cdot 4^2)-35\cdot 2^3$.

126. 1) $a, b\in Q$ бўлса, $a+b\in Z$, $a-b\in Z_0$, $ab\in N$, $a:b\in Q (b\neq 0)$ бўладими? 2) $c, d\in Z$ бўлса, $c+d\in Z_0$, $c-d\in N$, $cd\in Q$, $c:d\in Q (d\neq 0)$ бўладими?

127*. $x, y\in Q$ бўлса, ёзувлар тўғри бўладими: 1) $x+Q\in Q$; 2) $x-y\in N$; 3) $xy\in Q$; 4) $x+y\in Z$; 5) $x\cdot 0+y\in Z_0$; 6) $(x-y)\cdot 0\in Z$?

128. Йиғиндини топинг: 1) $20+(-3)+(-11)$; 2) $40,4+(-3,7)+$ $+(-8,4)$; 3) $14+(-10,2)+(0,9)$; 4) $19+(-0,8)+(-10,7)$.

129. Ифоданинг қийматини топинг: 1) $71,8-(-50,3)+(7,6)$; 2) $-8,4+(-3,8)-(+4,9)$; 3) $(-7,1-3,8)-4,9$; 4) $(-10+5,9)-8,2$.

130. Йиғиндини соддалаштиринг: 1) $a+5-a-12$; 2) $41-b-$ $-13+b$; 3) $5-(+a)-37+a$; 4) $29-(-c)-30-c$.

131. Кўпайтмани топинг: 1) $(-5,4)\cdot 4$; 2) $10,4\cdot(-2)$; 3) $(-3,5)\times$ $\times(-2,4)$; 4) $(-2)\cdot(3,5)\cdot(-5,5)\cdot(-0,2)$; 5) $(-5)\cdot(+4,4)\cdot(-0,1)\cdot(-100)$; 6) $(3,2-2,1)\cdot(-4,5+1)$; 7) $(-2,4+1,2)\cdot(-5,4+1,4)$.

Ифоданинг қийматини топинг:

132. 1) $(-2)^7$; 2) $(0,2)^5$; 3) $(-3)^4$; 4) $(-5)^2\cdot(-2)^3$; 5) $(-0,2)^3\cdot(-5)^4$.

133. 1) $(-44):(-11)$; 2) $(5,5):(-5)$; 3) $40,5:(-8,1)$; 4) $(-42,7):$ $:(-3,05\cdot 2)$.

134. 1) $(-1,5)\cdot(-0,4)+(-25)\cdot(-0,2)^2$; 2) $(-5,1):(-17)+$ $+(-3)^3\cdot(-2)^2$.

135. x нинг қандай қийматида тенглик тўғри бўлади: 1) $x:(-3,4)=-0,5$; 2) $(-4)\cdot x=-2,2\cdot(-0,5)$?

II боб

ФУНКЦИЯ. ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ ПРОПОРЦИОНАЛЛИК

1-§. Алгебраик ифода. Айният

1-таъриф. *Сонлар ва ўзгарувчиларни амал белгилари ёрдамида бирлаштирадиган ёзув (хусусий ҳолда фақат биргина ўзгарувчи ёки сон) алгебраик ифода (ёки қисқача ифода) дейилади.*

8; a^3+3; $2m(n+b)$; b; $(3+2)\cdot 4$ алгебраик ифодалардир

Алгебрада ҳам арифметикадаги амал белгилари ишлатилади, лекин кўпайтириш белгиси қўйилмайди, масалан, $a\cdot b$ ўрнига ab, $9\cdot c$ ўрнига $9c$ ёзилади.

2-таъриф. *Алгебраик ифоданинг сон қиймати деб бу ифодадаги ўзгарувчилар ўрнига уларнинг берилган сон қийматларини қўйиб, шу сонлар устида кўрсатилган амаллар бажарилгандан кейин ҳосил бўлган сонга айтилади.*

Масалан, $2a(b+c)$ ифоданинг сон қиймати $a=3$, $b=0{,}5$ ва $c=2{,}1$ бўлганда $2\cdot 3(0{,}5+2{,}1)=6\cdot 2{,}6=15{,}6$ га тенг.

3-таъриф. *Бир ўзгарувчили ифоданинг аниқланиш соҳаси деб ўзгарувчининг шу ифода маънога эга бўладиган барча қийматлари тўпламига айтилади.*

Масалан, $2a+1$ ифоданинг аниқланиш соҳаси барча сонлар тўпламидан иборат, чунки a нинг ўрнига ҳар қандай сон қўйсак, $2a+1$ йиғиндидан аниқ бир сон ҳосил бўлади, яъни ифода маънога эга бўлади. $\frac{3}{b-1}$ ифоданинг аниқланиш соҳаси 1 дан бошқа ҳар қандай сон, яъни $]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$ тўпламдан иборат, чунки b нинг ўрнига 1 дан бошқа ҳар қандай сон қўйсак, $\frac{3}{b-1}$ ифода аниқ бир сонга тенг бўлиб, $b=1$ бўлганда эса бу ифода маънога эга бўлмайди ($b=1$ бўлганда $b-1=0$ бўлиб, $\frac{3}{b-1}$ ифоданинг сон қийматини топиш учун 3 ни 0 га бўлиш керак бўлар эди. Нолга бўлиш эса мумкин эмас).

4-таъриф. *„Тенг“ (=) белгиси билан бирлаштирилган икки ифода тенглик деб аталади.*

Масалан, $2\cdot 5=7+3$, $a+b=b+a$, $2(c+1)=5-2{,}4c$.

$3a(a-1)$ ва $3a(3-a)$ ифодаларнинг аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан иборат, a нинг баъзи сон қийматларида бу ифодаларнинг сон қийматлари бир-бирига тенг, баъзи сон қийматларида эса тенг эмас. Масалан, $a=2$ бўлса, $3a(a-1)$ ифоданинг сон қиймати $3\cdot 2(2-1)=6\cdot 1=6$ ва $3a(3-a)$ ифоданинг сон қиймати ҳам $3\cdot 2\cdot(3-2)=6\cdot 1=6$ яъни мос сон қийматлар бир-бирига тенг. $a=1$ бўлганда эса ифодаларнинг сон қийматлари бир-бирига тенг эмас: $3a(a-1)=3\cdot 1\cdot(1-1)=0$ ва $3a(3-a)=3\cdot 1\cdot(3-1)=3\cdot 2=6$.

x^2-x ва $x(x-1)$ ифодаларнинг аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан иборат бўлиб, x нинг ихтиёрий қийматида бу ифодаларнинг сон қийматлари бир бирига тенг. Масалан, $x = 2$ бўлса,

$$x^2 - x = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2;$$
$$x(x-1) = 2(2-1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

$\frac{3a}{a^2}$ ва $\frac{3}{a}$ ифодаларнинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ тўпламдан иборат бўлиб, a нинг шу тўпламга тегишли ихтиёрий сон қийматида бу ифодаларнинг сон қийматлари бир-бирига тенг. Масалан, $a = 5$ бўлса, $\frac{3a}{a^2} = \frac{3 \cdot 5}{25} = \frac{3}{5}$ ва $\frac{3}{a} = \frac{3}{5}$.

$\frac{(b-1)^2}{b-1}$ нинг аниқланиш соҳаси $[-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ дан, $b-1$ нинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; +\infty[$ дан иборат бўлиб, ҳар икки ифода аниқланиш соҳаларининг умумий қисми $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ дан иборат.

5-таъриф. *Аниқланиш соҳаларининг умумий қисмида барча мос сон қийматлари бир-бирига тенг бўлган икки ифода айнан тенг ифода дейилади.*

Масалан, $x^2 - x$ билан $x(x-1)$, $\frac{3a}{a^2}$ билан $\frac{3}{a}$ ($]-\infty 0[\cup]0; \infty]$ тўпламда), $\frac{(b-1)^2}{b-1}$ билан $b-1$ ифода ($]-\infty; 1[\cup]1; \infty]$ тўпламда) айнан тенг ифода бўлади.

6-таъриф. *Ҳар икки (чап ва ўнг) қисми айни ифодалардан иборат бўлган ёки бир қисмида айни ифодалар айирмаси, иккинчи қисмида эса ноль бўлган тенглик айният дейилади.*

Масалан, $x^2 - x = x(x-1)$, $\frac{3a}{a^2} = \frac{3}{a}$, $\frac{3a}{a^2} - \frac{3}{a} = 0$, $\frac{(b-1)^2}{b-1} - (b-1) = 0$ айниятлардир.

Арифметик амаллар хоссаларини ифода қилувчи тенгликлар, масалан, $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a+b)+c = a + (b+c)$ тенгликлар ҳам айниятлардир.

7-таъриф. *Ифодани унга айнан тенг бўлган бошқа ифодага алмаштириш айнан шакл алмаштириш дейилади.*

Масалан, $\frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$ ифодани $\frac{a+b}{c+d}$ ифодага алмаштирсак, берилган ифодани айнан шакл алмаштирган бўламиз.

Агар бир ифода иккинчисига, иккинчи ифода эса учинчи ифодага айнан тенг бўлса, биринчи ифода учинчи ифодага айнан тенг бўлади. Масалан, $a(b+c)$ ифода $ab+ac$ ифодага, $ab+ac$ ифода эса $(b+c)a$ ифодага айнан тенг бўлгани учун $a(b+c)$ ифода $(b+c)a$ ифодага айнан тенгдир.

Машқлар

1. Агар $a \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 3\}$ бўлса, $2a(a-1)$ ифоданинг қийматлар тўпламини топинг.

2. (Оғзаки.) Ифодаларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $\frac{4}{c}$; 2) $\frac{7}{n-3}$; 3) $\frac{11}{2m-8}$; 4) $\frac{19}{a+1}$; 5) $\frac{1}{5b+15}$.

3. Ифодалар айнан тенг бўла оладими: 1) $2a+2b$ ва $2(a+b)$; 2) $3a+3$ ва $3(a+2)$; 3) $|x-3|$ ва $|3-x|$; 4) $|a|$ ва a; 5) $|-a^2|$ ва a^2?

4. Тенгликлар айният бўла оладими: 1) $(x-y)^2=(y-x)^2$; 2) $|-y^2|=(-y)^2$; 3) $b-|-b|=0$?

5 Тенгликлар айният бўла олмаслигини исбот қилинг: 1) $|x|=x$, 2) $y(3-y)=y+1$; 3) $2b=2+b$.

6. Ифодани айнан тенг ифодага алмаштиринг: 1) $5a+5b$; 2) $7(c-1)$; 3) $x(yz)$; 4) $3d-15$.

2-§. Тенглама ва тенгсизлик

I. $2a+1=5+a$ тенглик ўзгарувчи a нинг ҳар қандай қийматида ҳам тўғри бўлавермайди. Масалан, $a=1$ бўлса, $2\cdot1+1=5+1$ нотўғри тенглик ҳосил бўлади. $a=4$ бўлгандагина тўғри тенглик ҳосил бўлади.

$b^2+b+6=3(b+2)$ тенгликда эса b ўзгарувчи 0 га ёки 2 га тенг бўлгандагина тўғри тенглик ҳосил бўлади.

1-таъриф. *Ўзгарувчига эга бўлган тенглик тенглама дейилади.*

$2a+1=5+a$ ва $b^2+b+6=3(b+2)$ -тенгликлар тенгламалардир. Бу тенгламаларда бир ўзгарувчи бўлгани учун бир ўзгарувчили тенглама дейилади.

2-таъриф. *Ўзгарувчининг тенгламани тўғри тенгликка айлантирадиган қиймати тенгламанинг илдизи ёки ечими дейилади.*

Масалан, $2a+1=5+a$ тенгламанинг илдизи 4 га тенг. $b^2+b+6=3(b+2)$ тенглама 0 ва 2 дан иборат иккита илдизга эга бўлиб, илдизлари $\{0;\ 2\}$ тўпламни ташкил этади.

3-таъриф. *Тенгламанинг илдизлари тўпламини топиш тенгламани ечиш дейилади.*

x нинг ихтиёрий қиймати $5(2x-3)=10x-15$ тенгламанинг илдизи бўлади (чунки бу тенгламанинг чап ва ўнг қисмидаги ифодалар айнан тенгдир), яъни бу тенгламанинг илдизлари чексиз кўп бўлиб, $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан иборат.

$7x+1=3+7x$ тенглама илдизга эга эмас, чунки x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $7x+1$ ифоданинг сон қиймати $3+7x$ нинг сон қийматидан 2 та кам бўлади.

Шундай қилиб, тенглама битта, бир нечта, чексиз кўп илдизга эга бўлиши ёки илдизга эга бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

Мисоллар. 1) $2-4x=3$ тенгламани ечиш учун ўзгарувчини топамиз: $4x=2-3$ ёки $4x=-1$. Бундан $x=-\frac{1}{4}$. *Жавоб.* $\{-0{,}25\}$.

2) $5(n-1)=3$ тенгламадан $n-1=\frac{3}{5}$ ёки $n=\frac{3}{5}+1=1\frac{3}{5}$ *Жавоб.* $\{1{,}6.\}$

II. 4-таъриф. *„Катта“ ($>$), „кичик“ ($<$), „катта ёки тенг“ ($\geqslant$), „кичик ёки тенг“ ($\leqslant$) белгиси билан бирлаштирилган икки ифода тенгсизлик деб аталади.*

Икки ифода $>$ ёки $<$ белгилари билан бирлаштирилса, *қатъий* тенгсизлик, $\geqslant$ ёки $\leqslant$ белгилар билан бирлаштирилса, *ноқатъий* тенгсизлик дейилади. Масалан, $3<7$; $b^2>b-1$ қатъий тенгсизлик, $\frac{x}{3}+1\geqslant x-1$ ва $|c|\leqslant 3$ ноқатъий тенгсизлик.

$4\cdot 3>5$ сонли тенгсизликнинг чап қисми ўнг қисмидан катта ($12>5$), бундай тенгсизликка *тўғри* тенгсизлик дейилади. $4\cdot 3<5$ тенгсизликка эса *нотўғри* тенгсизлик дейилади.

$2n<6$ бир ўзгарувчили тенгсизликда $n=2$ бўлса, $2\cdot 2<6$, яъни тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади (бошқача айтганда $n=2$ тенгсизликни қаноатлантиради). $n=2$ га тенгсизликнинг ечими дейилади. Тенгсизликда n ўрнига 4 қиймат қўйилса $2\cdot 4<6$ нотўғри тенгсизлик

3-расм.

ҳосил бўлади. Демак, 4 берилган тенгсизликниг ечими бўла олмайди.

5-таъриф *Бир ўзгарувчили тенгсизликнинг ечими деб ўзгарувчининг шу тенгсизликни тўғри тенгсизликка айлантирадиган қийматига айтилади.*

6-таъриф. *Тенгсизликни ечиш унинг ечимлари тўпламини топишдан иборатдир.*

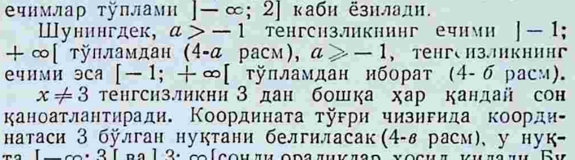
Масалан, $x < 2$ тенгсизликнинг ечими 2 дан кичик барча сонлар тўпламидан, яъни чексиз кўп сонлардан иборат бўлиб, $]-\infty;\ 2[$ каби ёзилади (3-*а* расм). $x \leqslant 2$ тенгсизликнинг ечими эса 2 ва 2 дан кичик барча сонлар тўпламидан иборат (3-*б* расм). Шунинг учун унинг ечимлар тўплами $]-\infty;\ 2]$ каби ёзилади.

Шунингдек, $a > -1$ тенгсизликнинг ечими $]-1;\ +\infty[$ тўпламдан (4-*а* расм), $a \geqslant -1$, тенгсизликнинг ечими эса $[-1;\ +\infty[$ тўпламдан иборат (4-*б* расм).

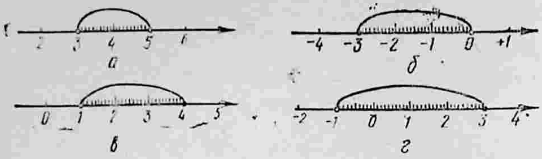
$x \neq 3$ тенгсизликни 3 дан бошқа ҳар қандай сон қаноатлантиради. Координата тўғри чизиғида координатаси 3 бўлган нуқтани белгиласак (4-*в* расм), у нуқта $]-\infty;\ 3[$ ва $]3;\ \infty[$ сонли оралиқлар ҳосил қилади. Бу оралиқларга тегишли сонлар тўплами, яъни бу икки тўпламнинг бирлашмаси $x \neq 3$ тенгсизликнинг ечими бўлади.

Жавоб. $]-\infty;\ 3[\cup]3;\ +\infty[$.

Агар ўзгарувчининг қийматлар тўплами 3 дан катта, аммо 5 дан кичик бўлса, $3 < x < 5$ каби ёзилади. Бу тенгсизликка *қўш тенгсизлик* дейилиб, унинг ечими $]3;\ 5[$ каби ёзилади (5-*а* расм). Қўш тенгсизликлар-



4-расм.



5- расм.

дан: 1) $-3 \leqslant y < 0$ нинг ечими $[-3;\ 0[$ каби (5-*б* расм); 2) $1 < a \leqslant 4$ нинг ечими $]1;\ 4]$ каби (5-*в* расм); 3) $-1 < c \leqslant 3$ нинг ечими эса $]-1;\ 3]$ каби (5-*г* расм) ёзилади.

Ечимга эга бўлмаган ёки ихтиёрий сон ечими бўла оладиган тенгсизликлар ҳам бўлади. Масалан, 1) $x^2 + 1 < 0$ тенгсизлик ечимга эга эмас (чунки $x^2 \geqslant 0$ бўлганидан $x^2 + 1 \geqslant 1$ бўлиб, $x^2 + 1$ ифода x нинг ҳеч бир қийматида нолдан кичик бўла олмайди). *Жавоб.* $\varnothing$. 2) $x^2 + 2 > -1$ тенгсизликни x нинг ихтиёрий қиймати қаноатлантиради, яъни барча сонлар тўплами бу тенгсизликнинг ечими бўлади ва $]-\infty;\ +\infty[$ каби ёзилади; 3) $3x - 6 > 0$ тенгсизликнинг ечимлар тўпламини топайлик. $3x - 6$ айирма мусбат бўлгани учун камаювчи айрилувчидан катта, яъни $3x > 6$ бўлиши керак. 3 та ўзгарувчи 6 дан катта бўлса, $x > 2$ бўлади. Демак, $3x - 6 > 0$ тенгсизликнинг ечимлари $]2;\ +\infty[$ тўпламдан иборат.

Шунга ўхшаш $5x - 15 < 0$ тенгсизликдан $5x < 15$ ёки $x < 3$ бўлиб, унинг ечимлари $]-\infty;\ 3[$ тўпламдан иборат.

Машқлар

7. Тенгламани ечинг: 1) $2a - 1 = 3$; 2) $5 - 2x = 17$; 3) $(x - 1)(x + 1) = 0$; 4) $2a(a + 0{,}7) = 0$; 5) $y(y + 2)(y - 3) = 0$ 6) $(2c - 1)(y - 3c) = 0$.

8. 1) $-5(3m - 4) = 7$; 2) $4 - (3 - 7x) = 7$; 3) $4{,}1 \cdot (2x - 3) - 7{,}9 = 39{,}1$; 4) $7{,}4 - 6{,}8(1 - 7x) = 4$.

9. 1) $7x = 7(1 + x)$; 2) $3(6 - x) = 6 - 3x$; 3) $2x - 3 = 1 + 2x$; 4) $40 - (x - 6) = 40 - x$.

Тенгсизликнинг ечимлар тўпламини ёзинг:

10. 1) $a > -1$; 2) $b < 3$; 3) $c > 2{,}3$; 4) $d < -2$; 5) $-150 < x < 1$; 6) $0 < y < 9$; 7) $4 \geqslant a > -5$.

11 1) $y^2 > -1$; 2) $-x^2 - 3 > 0$, 3) $(a-1)^2 > 0$; 4) $(1-b)^2 < 0$.

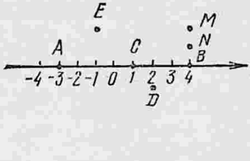
12. Ечимлари тўплами: 1) $]-\infty;\ 3[$; 2) $[1;\ +\infty[$; 3) $]-\infty;\ -10[$; 4) $]-1;\ 3]$; 5) $[2,\ 9]$; 6) $[-3;\ -4]$ бўлган тенгсизлик ёзинг.

13. Тенгсизликни ечинг: 1) $2x > 5$; 2) $3x < -3$; 3) $x - 0{,}5 > 0$; 4) $4x - 2 < 0$; 5) $4x < 3$; 6) $-0{,}2x - 1 > 0$.

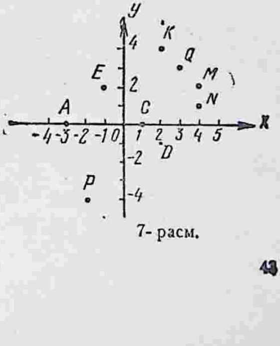
3-§. Координаталар текислиги

Координата тўғри чизиғида (6-расм) ётган ихтиёрий нуқтага шу нуқтанинг координатаси деб аталган сон (масалан, A нуқтага -3 сони, B нуқтага 4 сони) мос келади ва, аксинча, ҳар бир сонга координата тўғри чизиғида битта нуқта мос келади (масалан, 1 сонга координатаси 1 га тенг бўлган C нуқта мос келади).

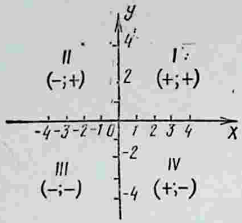
Координата тўғри чизиғидан юқорида ёки пастда, яъни текисликда ётган нуқтанинг ўрнини битта сон аниқлай олмайди. Масалан, N нуқтанинг ўрнини кўрсатиш учун унинг 0 дан 4 бирлик ўнгда ва координата тўғри чизиғидан 1 бирлик юқорида жойлашганини билиш зарур. У ҳолда N нуқтанинг координаталари (4; 1) бўлиб $N(4;\ 1)$ каби ёзилади. Қавс ичидаги иккинчи сон нуқтанинг координата тўғри чизиғидан неча бирлик юқорига (агар у сон мусбат бўлса) ёки пастга (агар у сон манфий бўлса) жойлашганини билдиради. M, D ва E ларнинг координаталари мос ҳолда (4; 2) (2; -1) ва (-1; 2) лардан иборат, яъни $M(4;\ -2)$, $D(2;\ -1)$ ва $E(-1;\ 2)$. Нуқтанинг горизонтал чизиқдан неча бирлик юқорида ёки пастда эканини осон аниқлаш учун саноқ боши 0 нуқтадан горизонтал чизиққа перпендикуляр ўтказилади (7-расм). Расмдан P нуқтанинг координаталари (-2; -4), Q ники (3; 3), K ники эса (2; 4) эканини аниқлаймиз.



6- расм.



7- расм.



8-расм.

Нуқта координаталарининг биринчисига нуқтанинг *абсциссаси,* иккинчисига эса нуқтанинг *ординатаси* дейилади.

Горизонтал чизиққа *абсциссалар* ўқи, вертикал чизиққа эса *ординаталар* ўқи, О нуқтага *координата боши* дейилади. Уларнинг ҳаммасига координаталар текислиги ёки тўғри бурчакли Декарт* координаталар системаси деб аталади (7-расм).

Координаталар системаси текисликни тўрт бўлакка бўлади. Бу бўлакларнинг ҳар бири координата бурчаклари (биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи) деб аталади. Координата бурчаклари баъзан чораклар (биринчи чорак, иккинчи чорак ва ҳ. к.) деб юритилади.

Координаталар текислигидаги ҳар бир нуқтага бир жуфт сон — нуқтанинг координаталари мос келади ва, аксинча, бир жуфт сонга координаталари шу сонлардан иборат нуқта мос келади.

Нуқтанинг қайси координата бурчагида жойлашган бўлишига қараб унинг координаталар ишораси қандай бўлиши 8-расмда тасвирланган (қавс ичида чапда абсциссасининг ишораси, ўнгда эса ординатасининг ишораси қўйилган).

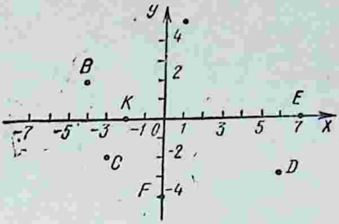
x ўқда ётган барча нуқталарнинг ординаталари, y ўқда ётган барча нуқталарнинг абсциссалари нолга тенг, О нуқтанинг эса ҳам абсциссаси, ҳам ординатаси нолга тенг.

Турмушда координаталар текислигининг аҳамияти каттадир. Масалан, театр ёки кино билетида ёзилган иккита сон (қатор номери ва жой номери) томошабиннинг томоша залидаги координаталари бўлиб, унинг ўрнини аниқлаб беради. Географик картада жойнинг ўрни — координаталари географик кенглик ва географик узунликни билдирувчи икки сон ёрдами билан аниқланади.

---

* Рене Декарт — XVII асрда яшаган машҳур француз философи ва математиги.

Берилган координаталар текислигида:
1) берилган нуқтанинг координаталарини;
2) координаталари берилган нуқтанинг ўрнини топиш мумкин.



9- расм.

Машқлар

14. 9- расмдан A, B, C, D, E, F, K нуқталарнинг координаталарини топинг.

15. Координаталар текислигида $A(1; 5)$, $B(-3; 4)$, $C(2; 4)$, $D(-5; -3)$, $M(0; 4)$, $N(-2; 3)$; $P(0, 3)$ нуқталарни белгиланг.

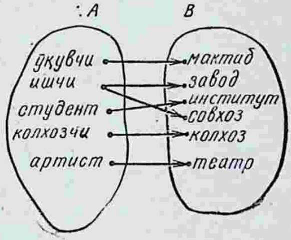
16. (Оғзаки.) $A(5; 1)$, $B(-7; 4)$, $C(3, -2)$, $D(-1; -3)$ нуқталар қайси координата бурчагида жойлашган.

17. (Оғзаки.) а) Абсциссалари; б) ординаталари нолга тенг бўлган нуқталар координаталар системасида қандай жойлашган бўлади?

18. Координаталар текислигида $A(-7; -1)$, $B(1; 7)$, $C(-4; 6)$, $D(5; -3)$, $E(-6; 3)$, $F(6\ -3)$ нуқталарни белгиланг. AB, CD, EF тўғри чизиқларни ўтказиб, кесишув нуқталарининг координаталарини аниқланг.

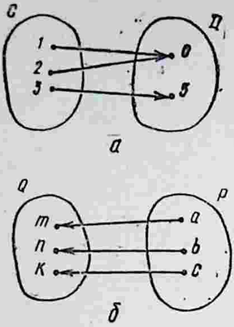
4-§. Тўпламлар орасидаги мослик. Функция

1-мисол. $A=${ўқувчи, ишчи, студент, колхозчи, артист} ва $B=${мактаб, завод, институт, совхоз, колхоз, театр} тўпламлар берилган. A тўплам элементлари ҳунарли кишилардан, B тўплам элементлари эса иш жойларидан иборат. 10- расмда A тўплам элементлари B тўплам элементларига стрелкалар билан мос келтирилган. Масалан, ўқувчига мактаб, ишчига завод ва совхоз, студентга институт, колхозчига колхоз, артистга театр мос келтирилган. Бундай мосликни A тўплам B тўпламда акслантирилган ҳам дейилади.

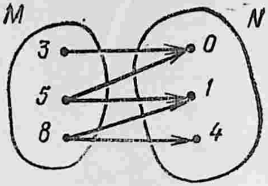


10- расм.

2-мисол. 11-a расмдан $C=\{1;\ 2;\ 3\}$ тўплам



11-расм.



12-расм.

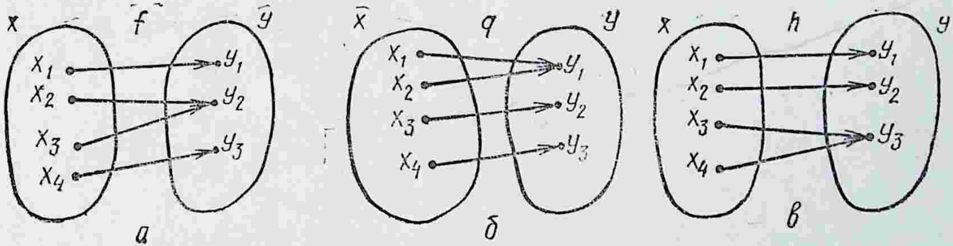
элементлари $D=\{0,\ 5\}$ тўплам элементларига, 11-*б* расмда эса $P=\{a;\ b;\ c\}$ тўплам элементлари $Q=\{m;\ n;\ k\}$ тўплам элементларига акслантирилган.

3-мисол. 12-расмда $M=\{3;\ 5;\ 8\}$ тўплам элементлари $N=\{0;\ 1;\ 4\}$ тўплам элементларига мос келтирилган.

Юқоридаги учта мисолда тўпламларнинг элементлари орасида ўрнатилган мосликлар бир-биридан фарқ қилади. 2-мисолда C тўпламнинг ҳар бир элементига D тўпламнинг аниқ бир элементи мос келтирилган. Бундай ҳолда C ва D тўпламлар орасидаги мосликка (акслантириш) функция деб аталади, P билан Q орасидаги мослик ҳам функциядир.

1 ва 3-мисолдаги мосликлар эса 2-мисолдагидан фарқ қилади. 1-мисолда A тўпламдаги ишчи элементига B тўпламнинг икки элементи (завод ва совхоз) мос келтирилган. 3-мисолда эса M тўпламнинг 5 ва 8 элементларидан ҳар бирига N тўпламнинг иккитадан элементи мос келади. Бундай мослик функцияни ифода қилмайди.

4-мисол. 13-расмда $X=\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\}$ тўплам элементлари $Y=\{y_1;\ y_2;\ y_3\}$ тўплам элементларига 3 хил усул билан мос келтирилган. Учала усулда ҳам X тўплам элементлари Y тўплам элементларига мос келтирилган бўлиб, учала мослик ҳам функцияни ифода


X
f
Y
x1
x2
x3
x4
y1
y2
y3
a
X
q
Y
x1
x2
x3
x4
y1
y2
y3
б
X
h
Y
x1
x2
x3
x4
y1
y2
y3
в

13- расм.

қилади. Бу мосликлар ҳар хил бўлгани сабабли уларни бир-биридан фарқ қилиш учун биринчисини f, иккинчисини g, учинчисини h билан белгиладик.

Таъриф. *Агар X тўпламнинг ҳар бир (x) элементига Y тўпламнинг аниқ битта* (y) *элементи мос келса, X тўплам билан Y тўплам орасидаги мослик функция деб аталади**.

X тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси, Y тўплам эса функциянинг қийматлар соҳаси (ёки ўзгариш соҳаси) дейилади.

14-*а*, *б* расмдаги k, p мосликлар функция бўлиб, уларнинг аниқланиш соҳалари ва қийматлар соҳалари бир хил бўлгани билан мосликлар ҳар хил бўлгани учун бу функциялар ҳар хил функциялардир. 14-*в*, *г* расмдаги g ва s мосликлар ҳам ҳар хил функциялардир.

Умуман f функциянинг аниқланиш соҳасидаги ихтиёрий x элементга қийматлар соҳасидан y элемент мос келса, $f(x)=y$ ёки $x \xrightarrow{f} y$ каби ёзилади.

Машқлар

19. 15-расмда тасвирланган тўпламлар орасидаги мосликлардан қайсилари функциядан иборат?

20. $X=\{1, 2, 3\}$ тўплам элементларини $Y=\{a; b; c\}$ тўплам элементларига мос келтиринг. Сиз ўрнатган мослик функцияни ифода қиладими?

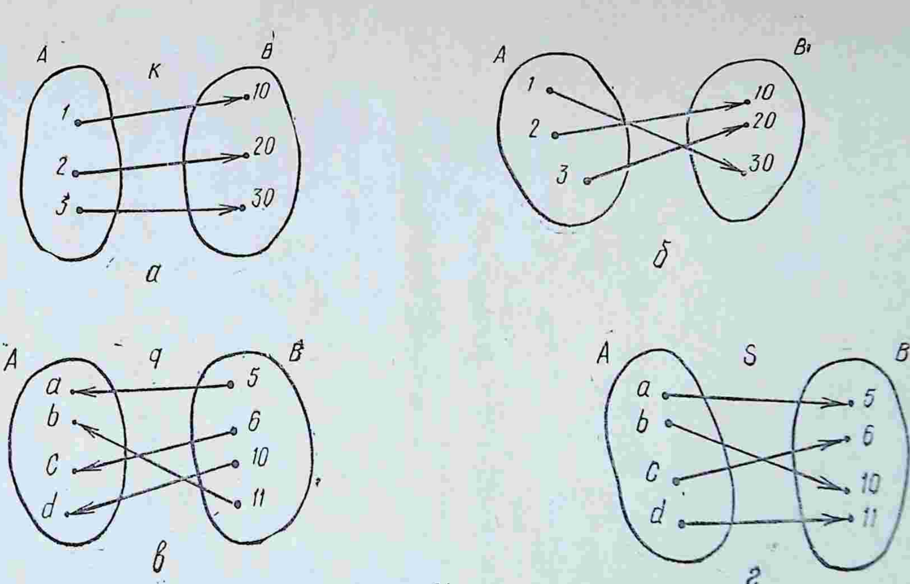
21. $P=\{22; 24; 25; 26; 27\}$ тўплам элементларини бу элементларнинг бўлувчиларидан тузилган $Q=\{2; 3; 4; 5\}$ тўплам элементларига мос келтиринг. Бу мослик функцияни ифода қиладими?

22. $A=\{a; b; c\}$ тўплам элементларини $B=\{a; c\}$ тўплам элементларига шундай мос келтирингки, у мослик функцияни ифода қилсин. Бундай мосликдан нечта бўлиши мумкин?

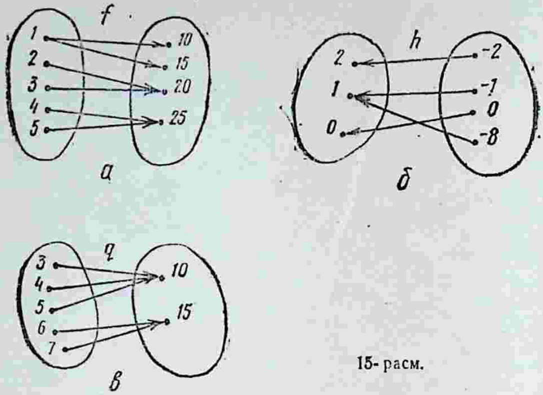
23. $X=\{-2; -3; -4\ 5\}$ тўпламдаги ҳар бир сонга у сонга тескари сон мос келади. а) Бу f мослик функциями? б) Функция бўлса, $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$ ларни топинг. в) Функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

---

* 1977 йилда А. И. Маркушевич таҳрири остида нашр қилинган „Алгебра" дарслигида функцияга муносабатлар тушунчаси заминида таъриф берилган.


A
K
B
1
2
3
10
20
30
а
A
B
1
2
3
10
20
30
б
A
q
B
a
b
c
d
5
6
10
11
в
A
S
B
a
b
c
d
5
6
10
11
г

14- расм.

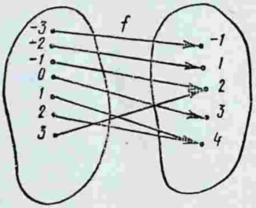


15- расм.

5- §. Функциянинг берилиш усуллари

I. 16-расмда f функция $X = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ тўплам элементлари билан $Y = \{-1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ тўплам элементлари орасидаги мосликдан иборат. Бу мослик стрелкалар билан кўрсатилган, уни мос элементларининг $(-3;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(-1;\ 2)$, $(0;\ 3)$, $(1;\ 4)$, $(2;\ 4)$ $(3;\ 2)$ жуфтлари орқали ёзиш (бериш) ҳам мумкин.

Ҳар бир жуфтда қавс ичидаги биринчи сон X тўпламнинг элементи бўлса, иккинчи сон Y тўпламдаги мос элемент бўлади, лекин ҳар қандай жуфтлар тўплами ҳам функцияни ифода қилавермайди. Масалан, $(1; 3)$, $(2; 5)$. $(3; 7)$, $(1; 8)$ жуфтлар тўплами функцияни ифода қилмайди, чунки $X = \{1;\ 2;\ 3\}$ тўпламнинг 1 элементига $Y = \{3;\ 5;\ 7;\ 8\}$ тўпламнинг иккита 3 ва 8 элементи мос келади. Одатда мос қийматлар жуфтини жад-



16- расм.

валда сатрлар (устунлар) га қуйидагича жойлаштирилади.

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	1	0	3	4	4	2

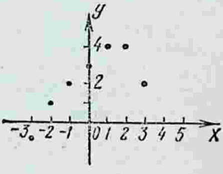
x	y
-3	-1
-2	1
-1	0
0	3
1	4
2	4
3	2

Бу жадвалларнинг юқори сатри (чап устуни) га функция аниқланиш соҳасининг элементлари, қуйи сатри (ўнг устуни) га эса мос ҳолда фунция қийматлар соҳасининг элементлари ёзилади ва функция жадвал усулида берилган, дейилади.

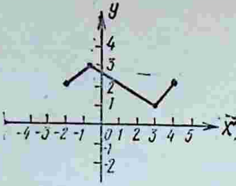
Юқоридаги мисолда f мослик -2 сонига 1 ни мос келтирган. Бу ҳолда $f(-2)=1$ каби ёзилади ва „эф минус икки бирга тенг“ деб ўқилади. Худди шунингдек, $f(-1)=2$; $f(0)=3$; $f(1)=4$.

II. Юқоридаги жадвал билан берилган f функция мос қийматларининг $(-3; -1)$; $(-2; 1)$; $(0; 3)$; $(1; 4)$; $(2; 4)$; $(3; 2)$ жуфтлар тўпламини координаталар текислигида белгилаймиз (17-расм). Ҳосил бўлган нуқталар тўплами бу нуқталарнинг абсциссаларини ординаталарига мос келтиргани учун f функцияни график тасвирлайди, бу ҳолда функция (мослик) график усулда берилган дейилади.

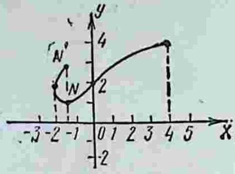
Функциянинг график тасвири бир нечта нуқталар тўпламидангина иборат бўлмай, чексиз кўп нуқталар тўплами (тўғри чизиқ, кесма, синиқ чизиқ, эгри чизиқ) дан иборат



17- расм.



18-расм.



19-расм.

бўлиши ҳам мумкин. Масалан, 18-расмда функциянинг графиги тасвирланган бўлиб, график (синиқ чизиқ) $X=[-2;\ 4]$ тўплам билан $Y=[1;\ 3]$ тўплам орасидаги мосликни тасвирлайди. Лекин ҳар қандай график ҳам функцияни ифода қилавермайди. Масалан, 19-расмда тасвирланган $X=[-2;\ 4]$ тўплам билан $Y=[1;\ 4]$ тўплам орасидаги мосликнинг графиги функцияни ифода қилмайди, чунки чизмада x нинг $x\in]-2;\ -1[$ қийматларида y иккита қийматга эга бўлади. Масалан, $x=-1{,}5$ бўлса, $y=1$ ва $y=3$(N ва N' нуқталарнинг абсцисссалари $-1{,}5$, ординаталари эса мос ҳолда 1 ва 3 га тенг).

III. Ўзгарувчи x нинг қийматлари $X=\{-2;\ 0;\ 1;\ 4\}$ тўпламни ташкил этсин. x нинг ҳар бир қийматини

$$y=\frac{1}{3}(2x+1) \qquad (*)$$

формулага қўйсак, y нинг мос қийматларини топамиз, яъни $x=-2$ бўлса, $y=\frac{1}{3}(-4+1)=-1$; $x=0$ бўлса, $y=\frac{1}{3}$; $x=1$ бўлса, $y=1$; $x=4$ бўлса, $y=3$. y нинг мос қийматлари $Y=\left\{-1;\ \frac{1}{3};\ 1;\ 3\right\}$ тўпламни ташкил этади. (*) формула X тўплам элементларини Y тўплам элементларига мос келтиргани (акслантиргани) учун бу мослик функция бўлади ва унга функциянинг формула билан берилиши ёки f функциянинг аналитик усулда берилиши дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$y=\frac{1}{3}(2x+1),\ x\in\{-2;\ 0;\ 1;4\} \text{ ёки}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}(2x+1);\ x\in\{-2;\ 0;\ 1;\ 4\}.$$

$y=x^2+1$, $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, функциянинг аниқланиш соҳаси $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ тўпламдан, $y=1-2x$, $x\in[-3;\ 1]$, функциянинг аниқланиш соҳаси эса $[-3;\ 1]$ тўпламдан иборат.

$f(x)=x(1-x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси унинг ёнига ёзилмаган. Бундай ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси $x(1-x)$ ифоданинг аниқланиш соҳасидан иборат бўлади. Демак, $f(x)=x(1-x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси эса $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$ тўпламдан иборат.

Машқлар

24. f функция қуйидаги жадвал билан берилган:

а)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-7	-5	-3	-1	0	3	5	7

б)

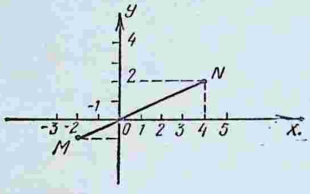
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	6	2	0	0	2	7	12	20	30

1) Функциянинг X аниқланиш соҳаси ва Y қийматлар соҳаси қандай сонлардан тузилган? 2) $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ ларни топинг.

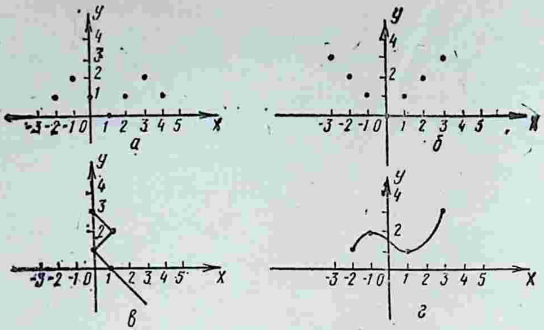
25. A ва B тўплам элементлари орасидаги мослик элементларнинг: 1) (2; 0); (3; 1); (4; 0). (5; 1); 2) (2; 0), (3; 1); (2; 2), (3; 4) жуфтлари ёрдамида берилган. Бу мосликлардан қайси бири функция?

26. MN кесма f функциянинг графиги (20-расм).

1) Бу функциянинг аниқланиш соҳасини ва қийматлар соҳасини топинг; 2) функциянинг $f(-1)$, $f(1)$, $f(2{,}5)$ қийматларини топинг; 3) x нинг қандай қийматларида $f(x)=1{,}5$, $f(x)=1$, $f(x)=-1$ бўлади; 4) x нинг қандай қийматларида f функциянинг қиймати нолга тенг, нолдан кичик, нолдан катта бўлади?



20-расм.

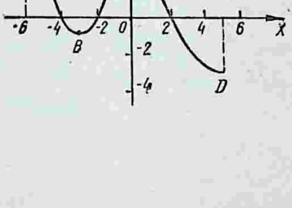


21- расм.

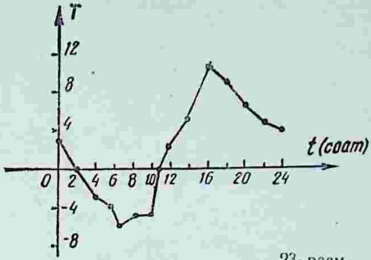
27. 21-расмдаги график функцияни ифодалайдими? Агар функцияни ифодаласа: 1) унинг аниқланиш соҳасини ва қийматлар соҳасини ёзинг; 2) $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ ларни топинг.

28. 22- расмда h функциянинг графиги — $ABCD$ эгри чизиқ ясалган. 1) Функциянинг аниқланиш соҳасини ва қийматлар соҳасини топинг. 2) $f(-6)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(5)$ ларни топинг. 3) x нинг қандай қийматларида $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$ бўлади?

29. 23-расмда ҳаво температурасининг сутка давомида ўзгариш графиги тасвирланган. Графикдан фойдаланиб, саволларга жавоб беринг: 1) Соат 4 да, 13 да, 20 да ҳавонинг температураси (тахминан) неча градус бўлган? 2) Соат нечада ҳавонинг температураси $-4°$, $-2°$, $11°$ бўлган? 3) Температура қанча вақт оралиғида ўрганилган? 4) Сутка давомида энг паст ва энг юқори температура қанча бўлган? 5) Соат нечада ҳавонинг температураси $0°$ га тенг бўлган? 6) Қандай вақт оралиғида ҳавонинг температураси:



22- расм.



23- расм.

а) кўтарилган, б) пасайган, в) 0° дан юқори бўлган, г) 0 дан паст бўлган?

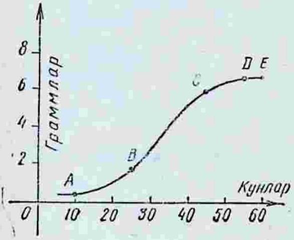
30. 24-расмда чаноқдаги пахта оғирлигини унинг ёшига (кун ҳисобида) қараб ўзгариш графиги берилган. Графикдан фойдаланиб: а) 15 кунлик, 25 кунлик, 35 кунлик ва 45 кунлик пахтанинг оғирлигини аниқланг; б) оғирлиги 2 г; 3,8 г; 6,5 г бўлган пахта неча кунлик бўлади?

31. 25-расмда турист юрган йўл (s) вақт (t) нинг функцияси сифатида график тасвирланган. 1) Турист неча соат йўлда бўлган ва неча км йўл юрган? 2) Турист 1 соатда неча км, 2 соатда неча км, 3 соатда неча км юрган? 3) Турист қанча вақт дам олган?

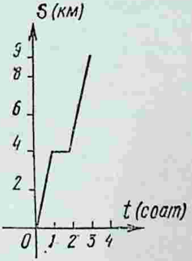
32. $h(x) = 4 - x^2$, $x \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. $h(-1)$, $h(0)$, $h(2)$ ва $h(3)$ ларни топинг.

33. $f(x) = 2x$, $x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ функциянинг қийматлар соҳасини топинг ва графигини чизинг.

34. $g(x) = 4 - x^2$, $x \in \{-1\ \ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ функцияни жадвал билан ифода қилинг ва график тасвирланг.



24- расм.



25- расм.

35. Қуйида формулалар билан берилган функциянинг аниқланиш соҳаси қандай сонлар тўпламидан иборат:

1) $f(x)=3-2x$, 2) $h(x)=\frac{5}{x-1}$, 3) $g(x)=\frac{7}{x(x-1)}$?

6-§. Тўғри пропорционаллик

1-мисол. Квадратнинг томони x(см). Периметри томонидан 4 марта узун бўлгани учун

$$y=4x$$

муносабат ўринли бўлади.

2-мисол. Соатига 30 км тезлик билан текис ҳаракат қилаётган пароходнинг юрган вақти t билан ўтган йўли s орасидаги муносабат

$$s=30t$$

кўринишда бўлади.

3-мисол. 1 килограмми 2,6 сўм турадиган конфетдан сотиб олинган бўлса, килограммлар сони p билан тўланган пул q орасидаги муносабат

$$q=2{,}6p$$

кўринишда тасвирланади.

Юқоридаги мисолларда икки ўзгарувчи x ва y (t ва s ёки p ва q) орасидаги муносабат

$$y=kx \qquad (1)$$

кўринишда тасвирланган.

Таъриф. *$y=kx$ формула билан берилиши мумкин бўлган функцияга тўғри пропорционаллик, k га эса пропорционаллик коэффициенти дейилади* (бунда k нолга тенг бўлмаган сон).

Юқоридаги мисолларда квадратнинг периметри томонига, текис ҳаракат қилаётган пароходнинг юрган йўли сарф бўлган вақтига, сотиб олинган конфетга тўланган пул сотиб олинган конфет оғирлигига пропорционалдир.

1-мисолда $k=4$, 2-сида $k=30$, 3-сида $k=2{,}6$. (1) да $x\neq 0$ бўлса, $\frac{y}{x}=k$. Аксинча, $\frac{y}{x}=k$ бўлса, $y=kx$ бўлади. Шу сабабдан $x\xrightarrow{f}y$ функция тўғри пропорционаллик эканини аниқлаш учун x ва y нинг барча мос қийматлар жуфтлари учун $\frac{y}{x}$ нисбатни битта сонга тенг экани ва $x=0$ бўлганда $y=0$ бўлиши (0 функция аниқланиш соҳасига тегишли бўлган ҳолда) текширилади. Масалан, қуйидаги жадвал билан $x \xrightarrow{f} y$ функция берилган бўлсин:

x	1	2	3	7,1	41	99
y	4	8	12	28,4	164	396

Бу функция тўғри пропорционаллик эканини жадвалдаги барча мос жуфтларнинг нисбатлари битта сон (4) га тенглигидан билиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{4}{1}=4, \quad \frac{8}{2}=4, \quad \frac{12}{3}=4, \quad \frac{28,4}{7,1}=4, \quad \frac{164}{41}=4, \quad \frac{396}{99}=4.$$

Теорема. (Пропорционал ўзгарувчиларнинг хоссаси ҳақида.) *Агар **x** ва **y** ўзгарувчилар пропорционал бўлса, улардан бирининг ихтиёрий иккита қийматининг нисбати иккинчисининг уларга мос иккита қийматининг нисбатига тенг бўлади.*

$x \xrightarrow{f} y$ функция пропорционаллик бўлиб, $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2,\ y_2)$ x ва y ўзгарувчиларнинг мос қийматлар жуфти бўлсин. У ҳолда $y_1=kx_1$ $y_2=kx_2$. Агар $x_2 \neq 0$ бўлса, $\frac{y_1}{y_2}=\frac{kx_1}{kx_2}=\frac{x_1}{x_2}$ ёки $\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}$. x ва y нинг қийматлари мусбат сонлар бўлса, теоремани қуйидагича баён қилиш мумкин.

*Агар **y** ўзгарувчи **x** ўзгарувчига пропорционал бўлса, **x** нинг қиймати бир неча марта ортиши (камайиши) билан **y** нинг мос қиймати ҳам шунча марта ортади (камаяди).*

Эслатма. $y=kx$ $(k \neq 0)$ муносабатдан $x=\frac{y}{k}$ ёки $x=\frac{1}{k}y$. Демак, агар y ўзгарувчи x ўзгарувчига пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффициенти k бўлса, x ўзгарувчи ҳам y ўзгарувчига пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффициенти $\frac{1}{k}$ бўлади.

Машқлар

36. Қуйидаги жадвалларни тўлдиринг. y ўзгарувчи x ўзгарувчига пропорционалми? Пропорционаллик коэффициентини топинг:

а)

x	3	2	1	4	5
y	12	8	4	16	20
y/x					

б)

x	—5	—3	1	2	6	11
y	15	9	—3	—6	—18	—33
y/x						

37. m ва n пропорционал сонлар. Жадвалларни тўлдиринг:

1)

m	1		4		8
n		1		3	4
n/m					

2)

m	—2				—9	
n		0		—9		36
n/m			—3			

38. a ўзгарувчи b ўзгарувчига пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффициенти 40 га тенг. Шу ўзгарувчилар орасидаги муносабатни формула билан ифодаланг. b ўзгарувчи ҳам a га пропорционалми? Пропорционаллик коэффициенти нимага тенг? Пропорционалликни формула билан ёзинг.

39. Функция $c = 0{,}2d$ формула билан берилган. Бу функция тўғри пропорционал боғланиш бўладими? d ни c орқали ифода қилинг. d ўзгарувчи c ўзгарувчига пропорционалми? Пропорционаллик коэффициенти нимага тенг?

7-§. $y = kx$ функциянинг графиги

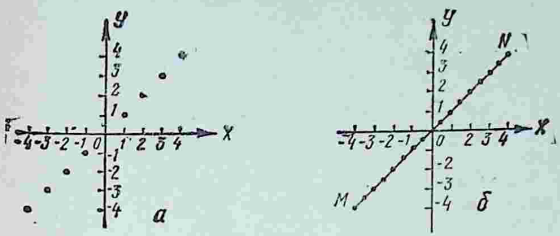
$$y = kx \tag{1}$$

функцияда пропорционаллик коэффициенти $k = 1$ бўлса:

$$y = x.$$

$y = x$ функция учун жадвал тузайлик:

x	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4
y	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4



26-расм.

Жадвалдаги x ва y нинг мос қийматлари жуфтидан иборат бўлган нуқталарни координаталар системасидан аниқласак, бу нуқталарнинг ҳаммаси бир тўғри чизиқнинг устида ётишини кўрамиз (26-*а* расм). x га $-3{,}5$; $-2{,}5$; $-1{,}5$; $-0{,}5$; $0{,}5$ . . . қийматлар бериб, жадвални давом эттирамиз:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	0,5	1,5	2,5	3,5
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	0,5	1,5	2,5	3,5

Ҳосил бўлган янги нуқталарни координаталар системасида белгиласак, бу нуқталар ҳам юқоридаги нуқталар ётган MN тўғри чизиқда ётишини кўрамиз (26-*б* расм). $y=x$ функциянинг графиги топилган нуқталардангина эмас, балки MN тўғри чизиқнинг барча нуқталар тўпламидан иборат бўлади, чунки x га жадвалдагидан ҳам бошқа ҳар қандай қиймат берсак, y нинг мос қиймати x нинг қийматига тенг бўлади. Абсцисса ва ординатаси бир-бирига тенг бўлган барча нуқталар тўплами I ва III координаталар бурчагининг биссектрисасидан иборат бўлади.

(1) тенгликда $k=-1$ бўлса, $y=-x$ бўлади. $y=-x$ нинг графиги II ва IV координаталар бурчагининг биссектрисасидан иборат эканини кўрсатиш мумкин.

$k=0{,}5$ бўлсин. У ҳолда

$$y=0{,}5x. \tag{2}$$

Бу функциянинг графигини чизиш учун қуйидаги жадвални тузайлик:

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
y	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	$1{,}25$	$1{,}5$

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни ясайлик. Бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ (2) функциянинг графиги бўлади (27-расм).

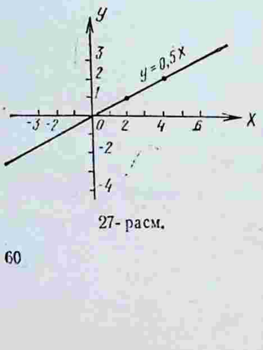
(1) функциянинг графиги $k=1$, $k=-1$, $k=0{,}5$ бўлгандагина тўғри чизиқ бўлмасдан, k нинг ҳар қандай қийматида ҳам координата бошидан ўтадиган тўғри чизиқ эканини исбот қилиш мумкин.

Теорема. *$y=kx$ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқдир.*

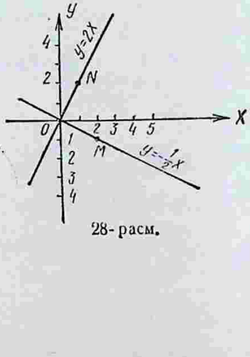
(1) функция графигини чизиш учун унинг иккита нуқтасини топиш етарлидир.

$x=1$ бўлса, $y=k$. Функциянинг графиги координаталар боши ва $N(1;\ k)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқдир. Масалан, $y=2x$ функцияда $x=1$ бўлса, $y=2$ бўлади. Шунинг учун бу функциянинг графиги $O(0;\ 0)$ ва $N(1;\ 2)$ нуқтадан ўтади (28-расм).

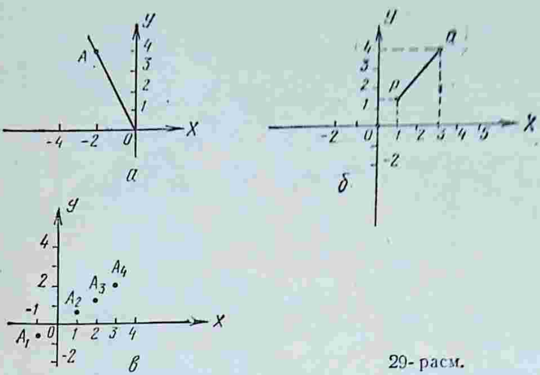
Агар $k=\frac{p}{q}$ қисқармайдиган каср сон бўлса, тўғри чизиқ координата боши ва $M(q;\ p)$ нуқта орқали ўтади. Масалан, $y=-\frac{1}{2}x$ нинг графиги $O(0;\ 0)$ ва $M(2;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқдан иборатдир (28-расм). $k>0$ бўлганда (1) функциянинг графиги



27-расм.



28-расм.



29- расм.

I ва III координаталар бурчагида, $k<0$ бўлганда эса II ва IV координаталар бурчагида жойлашган бўлади.

Агар функция $y=kx$ формула билан берилиб, аниқланиш соҳаси барча сонлар тўпламининг қисми бўлса, график тўғри чизиқнинг қисмидан иборат бўлади. Масалан, $y=-2x$, $x\in]-\infty;\ 0]$, функциянинг графиги OA нурдан (29-*а* расм); $y=\frac{4}{3}x$, $x\in[1;\ 3]$, функциянинг графиги PQ кесмадан (29-*б* расм); $y=\frac{2}{3}x$, $x\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, функциянинг графиги бешта нуқта (A_1, O, A_2, A_3, A_4) дан иборат (29-*в* расм).

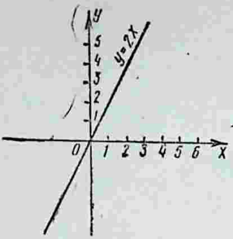
Машқлар

40. (Оғзаки.) 1) $y=4x$, 2) $y=-\frac{3}{4}x$, 3) $y=1{,}5\,x$ функцияларнинг графигини қандай нуқталар ёрдамида чизган маъқул?

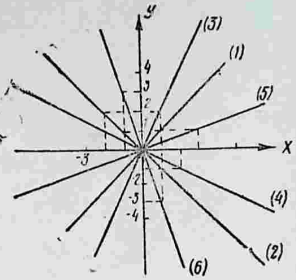
41. (Оғзаки.) $y=kx$ функциянинг графиги $A(3;\ 5)$, $B(-3;\ 1)$ нуқта орқали ўтиши маълум. k нинг сон қийматини топинг.

42. Координата боши ҳамда 1) $A(5;\ 7)$, 2) $B(-6;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ билан берилган функцияни аналитик ифода қилинг.

43. Нима учун: 1) $y=3{,}5\,x$ функциянинг графиги I ва III координата чоракларига, 2) $y=-\frac{3}{5}x$ функциянинг графиги II ва IV координата чоракларига жойлашади?



30- расм.



31- расм.

44. 1) $y=-2x$, 2) $y=2{,}5x$, 3) $y=-\frac{1}{6}x$, 4) $y=0{,}8x$ функциялар графигини битта координаталар системасида чизинг.

45. 1) $y=1{,}5x$, $x\in[0;\ +\infty[$; 2) $y=-\frac{2}{3}x$, $x\in[-4;\ 2]$; 8) $y=\frac{5}{2}x$, $x\in\{-2;\ 0;\ 1;\ 2\}$ функциянинг графигини чизинг.

46. 30-расмдаги функция графигидан фойдаланиб, қуйидаги жадвални тўлдиринг:

x	$-2{,}5$	-1	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y											
y/x											

y ўзгарувчи x ўзгарувчига пропорционалми? Пропорционаллик коэффициенти нимага тенг?

47. 31- расмда тасвирланган тўғри чизиқлар билан берилган функцияларни аналитик ифода қилинг.

48. $A\ (-4;2)$, $B\ (3;\ 9)$, $C\ (-1;-3)$, $D\ (2;\ -1)$ нуқталарнинг қайси бири: 1) $y=-\frac{1}{2}x$, 2) $y=3x$ функцияларнинг графигига тегишли?

49. 1) $y=3{,}2x$, 2) $y=-0{,}7x$ функцияларнинг графиклари қайси координата бурчагида жойлашган?

50. Тўғри чизиқ координата бошидан ўтиб, x ўқ билан: 1) 45° ли, 2) 135° ли бурчак ташкил этади. Шу тўғри чизиқ билан берилган функциянинг аналитик кўриниши қандай бўлади?

51. 1) $y=2x$, $x\in[-1;\ 5{,}5]$, 2) $y=-3{,}5x$, $x\in[0;\ 2]$, 3) $y=5x$, $x\in[-10;\ 6]$ функцияларнинг қийматлар соҳасини аниқланг.

52. $[-4;\ 1]$ оралиқдаги ҳар бир сонга унга қарама-қарши сон мос келтирилган. Шу мослик билан берилган f функциянинг: 1) графигини чизинг, 2) аналитик ифода қилинг, 3) қийматлар соҳасини топинг.

8-§. Тескари пропорционаллик

1-мисол. Тўғри тўртбурчакнинг юзи 12 (см) га тенг бўлса, унинг эни x билан бўйи y орасидаги муносабат

$$xy=12$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. Икки станция орасидаги масофа 180 км. Текис ҳаракат қилаётган поезднинг тезлиги v (км/соат) билан шу масофани ўтишга сарф қиладиган вақти t (соат) орасидаги муносабат

$$vt=180$$

кўринишда бўлади.

Демак, икки ўзгарувчи (x билан y ёки v билан t) орасидаги муносабат

$$xy=k\ (3)\quad \text{ёки}\quad y=\frac{k}{x}\ (3').$$

Таъриф. $y=\frac{k}{x}$ *формула билан бериш мумкин бўлган функцияга тескари пропорционаллик дейилади* (бунда k нолга тенг бўлмаган сон). Бу ҳолда y ўзгарувчи x ўзгарувчига тескари пропорционал дейилади.

(3′) функцияда x нолга тенг бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли бу функциянинг аниқланиш соҳаси нолдан бошқа барча сонлар тўпламидан иборат бўлади.

$y=\frac{k}{x}$ муносабатдан: $x=\frac{k}{y}$. Демак, y ўзгарувчи x ўзгарувчига тескари пропорционал бўлса, x ўзгарувчи ҳам y ўзгарувчига тескари пропорционал бўлади.

$y=\frac{k}{x}$ дан $xy=k$ ва, аксинча, $xy=k\ (k\neq 0)$ дан $y=\frac{k}{x}$ бўлгани сабабли $x\xrightarrow{f}y$ функция тескари пропорционаллик эканини аниқлаш учун x ва y нинг барча мос жуфтларининг кўпайтмаси нолдан фарқли (k) сонга тенг экани текшириб кўрилади. Масалан, $x \xrightarrow{f} y$ функция қуйидаги жадвал билан берилган бўлсин:

x	10	12	15	20	25	40	50	60
y	18	15	12	9	7,2	4,5	3,6	8

x ва y ўзгарувчиларнинг жадвалдаги барча мос қийматлар жуфтининг кўпайтмаси 180 га тенг, яъни

$$10 \cdot 18 = 12 \cdot 15 = 15 \cdot 12 = 20 \cdot 9 = 25 \cdot 7{,}2 = 40 \cdot 4{,}5 =$$
$$= 50 \cdot 3{,}6 = 60 \cdot 3$$

бўлгани учун бу функция тескари пропорционалликдир.

Теорема. (Тескари пропорционал ўзгарувчиларнинг хоссаси ҳақида.) *Агар x ва y ўзгарувчилар тескари пропорционал бўлса, улардан бирининг ихтиёрий икки қийматининг нисбати иккинчисининг уларга мос қийматларининг тескари нисбатига тенг.*

Исбот. $y = \frac{k}{x}$ тескари пропорционалликда (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) x ва y ўзгарувчилар қийматларининг мос жуфтлари бўлсин. У ҳолда $y_1 = \frac{k}{x_1}$ ва $y_2 = \frac{k}{x_2}$ бўлиб,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{ёки} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Агар x ва y ўзгарувчилар тескари пропорционал бўлиб, мусбат қийматлар қабул қилса, юқорида исбот қилинган теоремани қуйидагича баён қилиш мумкин.

Агар x ва y ўзгарувчилар тескари пропорционал бўлса, x нинг қиймати бир неча марта ортиши (камайиши) билан y нинг мос қиймати шунча марта камаяди (ортади).

Машқлар

53. y ўзгарувчи x ўзгарувчига тескари пропорционалми?

1.

x	2	3	4	5	6	8	10
y	12	8	6	4,8	4	3	24

2.

x	$-0,5$	$-0,8$	-1	-2	-3	-4
y	$-9,6$	-6	$-4,8$	$-2,4$	$-1,6$	$-1,2$

54. b ўзгарувчи a ўзгарувчига тескари пропорционал бўлган жадвални тўлдиринг:

a	-4			0,1	1,5		4		8	
b		-12	-24		1,6	8		4,8		2,4
ab										

55. Тенгламани $y = \frac{k}{x}$ кўринишга келтиринг: 1) $-xy = 3,4$; 2) $\frac{y}{5} = \frac{2}{x}$; 3) $2xy + 3 = 0$.

9-§. $y = \frac{k}{x}$ функциянинг графиги

Тескари пропорционалликда $k > 0$, масалан, $k = 24$ бўлса, (3) дан:

$$y = \frac{24}{x}. \tag{4}$$

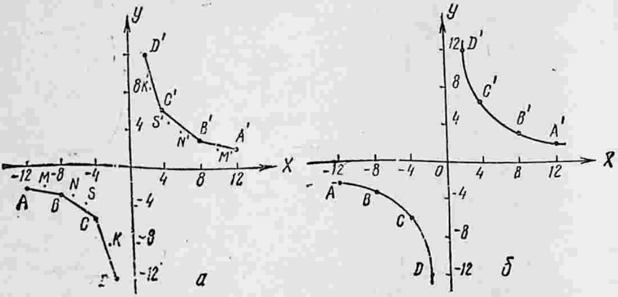
(4) нинг графигини чизайлик. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ тўпламдан иборат. Жадвал тузамиз:

Нуқталар	A	B	C	D	D'	C'	B'	A'
x	-12	-8	-4	-2	2	4	8	12
$y=\frac{24}{x}$	-2	-3	-6	-12	12	6	3	2

Нуқталар	M	N	S	K	K'	S'	N'	M'
x	-10	-6	-5	-3	3	5	6	10
$y=\frac{24}{x}$	$-2{,}4$	-4	$-4{,}8$	-8	8	$4{,}8$	4	$2{,}4$

Координаталари жадвалда берилган нуқталарни координаталар системасида белгилаб, уларни кесмалар билан туташтирамиз. Синиқ чизиқлар ҳосил бўлади (32- *а* расм).

Ҳосил бўлган $ABCD$ ва $A'B'C'D'$ синиқ чизиқлар (4) функциянинг графиги бўладими? Бу сўроққа жавоб бериш учун x га жадвалдагидан бошқа қийматлар берамиз ва расмда янги нуқталар топамиз. Изланган график бу нуқталардан ҳам ўтиши керак. Аммо бу нуқталар чизилган синиқ чизиқнинг устида ётмайди. Демак, $ABCD$ ва $A'B'C'D'$ синиқ чизиқлар (4)



32- расм

функциянинг графиги эмас, чунки кейин топилган M, $N, S, K, \ldots$ нуқталар унинг устида ётмайди. Топилган барча нуқталарни ўзаро кетма-кет кесмалар ёрдамида туташтирсак, $AMBNSCKD$ ва $A'M'B'N'S'C'K'D'$ синиқ чизиқлар ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган синиқ чизиқ олдингисига нисбатан топилган нуқталардан ўтувчи эгри чизиққа жуда ҳам яқин. Шу эгри чизиқ (4) функциянинг графиги бўлади. Агар x га яна бошқа қийматлар бериб, жадвални давом эттирсак ва тегишли нуқталарни аниқласак, уларнинг ҳосил бўлган эгри чизиқнинг устида ётишини кўрамиз (32-б расм).

$x \neq 0$ бўлгани учун график y ўқи билан умумий нуқтага эга бўлмайди. x нинг ҳеч қандай қийматида $\frac{24}{x} = 0$ тенглик ўринли бўлмагани учун графикнинг ординатаси ноль бўлган нуқтаси ҳам бўлмайди, яъни график билан x ўқи умумий нуқтага эга эмас.

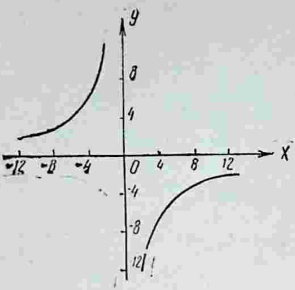
Жадвалда x ва y нинг ишоралари бир хил бўлгани учун (x ва y нинг мос қийматлари бир хил ишорали бўлсагина $xy = 24$ мусбат сон бўлади) нуқталар I ва III координата бурчакларидагина жойлашган бўлади. Демак, нолдан бошқа барча сонлар тўпламида берилган $y = \frac{24}{x}$ функциянинг графиги I ва III координата бурчакларига жойлашган бўлиб, **гипербола** деб аталувчи эгри чизиқ бўлади. Гипербола 2 та тармоқдан иборат бўлиб, координата бошига нисбатан симметрик жойлашганини пайқаш қийин эмас.

33-расмда $y = -\frac{24}{x}$ функциянинг графиги ясалган. Бу график ҳам икки тармоқдан иборат эгри чизиқ (гипербола) бўлиб, координаталар текислигининг II ва IV чоракларига жойлашган.

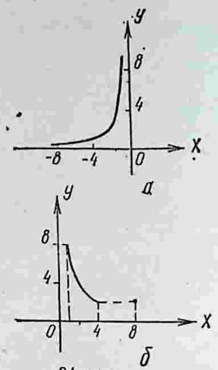
Демак, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциянинг графиги иккита тармоқдан иборат гипербола бўлиб, $k > 0$ бўлганда координаталар текислигининг I ва III чорагида, $k < 0$ бўлганда эса II ва IV чорагида жойлашган бўлади.

$y \neq 0$ бўлгани учун $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ тўплам (4) функциянинг ўзгариш соҳаси бўлади.

Агар $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламининг қисми бўлса, унинг



33- расм.



34-расм.

графиги гипербола нуқталарининг қисм тўпламидан (гипербола тармоғи ёки унинг қисми, бир нечта нуқта ва ҳ. к.) иборат бўлади. 34- *а* расмда $y=\frac{-4}{x}$, $x\in\,]-\infty;\,0[$, функциянинг графиги, 34- *б* расмда $y=\frac{8}{x}$, $x\in[1;4]$, функциянинг графиги тасвирланган.

Машқлар

56. $A(2;\,5)$; $B(-4;\,4)$; $C(10;\,-1{,}6)$; $D(-5;\,-2)$ нуқта: 1) $y=\frac{-16}{x}$, 2) $y=\frac{10}{x}$ функциянинг графигига тегишли бўладими?

57. (Оғзаки.) $y=\frac{k}{x}$ функциянинг графиги: 1) $A(3;\,-1)$, 2) $B(-2;\,2)$ нуқта орқали ўтиши маълум бўлса, k нинг сон қиймати қандай бўлади?

58. (Оғзаки.) Нима учун: 1) $y=\frac{10}{x}$ функция графиги I ва III координата чоракларида; 2) $y=\frac{-7}{x}$ функциянинг графиги II ва IV координата чоракларига жойлашади?

59. 1) $y=-\frac{6}{x}$; 2) $y=\frac{10}{x}$; $x\in\,]-\infty;\,0[$; 3) $y=\frac{8}{x}$, $x\in[1;8]$, функциянинг графигини чизинг.

60. 1) $y=\frac{16}{x}$, $x\in[-16;\ -4]$; 2) $y=-\frac{12}{x}$, $x\in[-4;\ -1]$; 3) $y=\frac{40}{x}$, $x\in[0,5;\ 4]$, функциянинг қийматлар соҳасини топинг. Бу функцияларнинг графиги координаталар текислигининг қайси чорагида жойлашган бўлади? Нима учун?

III БОБ

БУТУН РАЦИОНАЛ ИФОДАЛАР

1-§. Натурал кўрсаткичли даражанинг хоссалари

I бобда асоси a га, кўрсаткичи $n>1$ $(n\in N)$ га тенг бўлган даража деб ҳар бири a га тенг бўлган n та кўпайтувчининг кўпайтмасига, асоси a га, кўрсаткичи 1 га тенг бўлган даража деб a сонига айтилади деб таъриф берилган эди, яъни

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{n\text{ та}}\ (n>1\text{ ва }n\in N),\ a^1=a.$$

1-теорема. Бир хил асосли даражаларни кўпайтириш (бўлиш) учун даража кўрсаткичларини қўшиш (айириш), асосини эса ўзгаришсиз қолдириш керак, яъни $m,\ n\in N$ бўлганда

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ (1);\quad a^m:a^n=a^{m-n}\ (a\neq 0;\ m>n).\ (2)$$

Исбот: 1) Даражанинг таърифидан фойдаланамиз:

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{m\text{ та}};\ \underbrace{a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{n\text{ та}}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{(m+n)\text{ та}}=a^{m+n},$$

$$\text{демак, } a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

2) (2) тенгликни исбот қилиш ўрнига $a^{m-n}\cdot a^n=a^m$ тенгликни исбот қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, $a^{m-n}\cdot a^n=a^{(m-n)+n}=a^{m-n+n}=a^m$.

(1) формула кўпаювчилар сони исталганча бўлганда ҳам ўринлидир, яъни

$$a^m\cdot a^n\cdot a^k\cdot\dots\cdot a^l=a^{m+n+k+\dots+l},\qquad (1')$$

Натижа. Даражани даражага кўтариш учун даража асосини ўзгартирмай, кўрсаткичлари кўпайтирилади, яъни $m \in N$, $n \in N$ ва $k \in N$ бўлса,

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (3), \quad (a^{mn})^k = a^{mnk}. \qquad (3')$$

Исбот: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ та}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ та}}} = a^{m \cdot n}$.

Мисоллар. 1) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12} = 4096$; 2) $3^{40} : 3^{35} = 3^{40-35} = 3^5 = 243$; 3) $(2^{5n})^3 = 2^{15n}$.

2-теорема. *Кўпайтманинг даражаси кўпаювчиларнинг ўша кўрсаткичли даражалари кўпайтмасига тенг.*

Агар $n \in N$ бўлса,

$$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (4)$$

Исбот: $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ та}} =$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ та}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ та}} = a^n \cdot b^n.$$

Иккитадан ортиқ кўпаювчилар учун ҳам теорема ўринлидир, яъни

$$(ab \ldots d)^n = a^n b^n \ldots d^n. \qquad (4')$$

(4) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \qquad (4'')$$

яъни бир хил кўрсаткичли даражаларни кўпайтириш учун шу даражаларнинг асосларини кўпайтириб, даража кўрсаткичлари ўзгаришсиз қолдирилади.

3-теорема. *Касрнинг даражаси сурат ва махражнинг ўша кўрсаткичли даражалари нисбатига тенг.*

Агар $n \in N$ бўлса, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

Масалан, $(2a)^5 = 2^5 \cdot a^5 = 32a^5$; $81b^4c^4 = 3^4b^4c^4 = (3bc)^4$.

1-мисол. a^4b^9 дан кўпайтманинг даражасини ажратинг.

Ечиш. $a^4b^9 = a^4b^8b = (ab^2)^4 \cdot b$.

2-мисол. 2^{30} ва 3^{20} даражалардан қайси бири катта?

Ечиш. Ҳар икки даражанинг кўрсаткичларини тенглаймиз: $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$; $3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$. $8^{10}<9^{10}$ бўлгани учун $2^{30}<3^{20}$.

3-мисол. 256^4 ва 64^5 даражалардан қайси бири катта?

Ечиш. Даражаларни бир хил асосли даражаларга келтирамиз: $256^4=(2^8)^4=2^{32}$; $64^5=(2^6)^5=2^{30}$, $2^{32}>2^{30}$ бўлгани учун $256^4>64^5$.

Машқлар

1. Кўпайтмани даража шаклида ифодаланг: 1) $bbbbb$, 2) $(-5)(-5)(-5)(-5)$, 3) $(-3m)(-3m)(-3m)$; 4) $(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)$; 5) $7n\cdot 7n\cdot 7n$; 6) $c^3\cdot c^3\cdot c^3\cdot c^3$ 7) $\underbrace{k\cdot k\ \dots\ k}_{p\ \text{та}}$.

2. Даражаларни кўпайтма шаклида ифодаланг: 1) a^5; 2) $(-3a)^4$; 3) $(-5)^5$; 4) $(2b^2)^3$; 5) $(1-c)^4$.

3. $2^5\cdot 2^{11}$ кўпайтмани: 1) асоси 2; 16; 256 бўлган; 2) кўрсаткичи 2; 4; 8 бўлган даража шаклида ёзинг.

4. Кўпайтма ёки бўлинмани даража шаклида ёзинг: 1) $(5a)^2\times\times(5a)^3$; 2) $(3b)^5:(3b)^3$; 3) $(-2y)^8:(-2y)^4$; 4) $16^2\cdot 4^3\cdot 2^3$; 5) $3^7\cdot 3:3^9$; 6) $27\cdot 3^4\cdot 9^3$; 7) $7^m\cdot 7^3\cdot 7\ (m\in N)$; 8) $a^n\cdot a^{2n}\cdot a^{n+4}\ (n\in N)$.

5. Ифодани a асосли даража шаклида ёзинг: 1) $(a^4)^3$, 2) $a^5\times\times a^7\cdot a^8$, 3) $a^3\cdot(a^4)^2$, 4) $(a^k)^5$, бунда $k\in N$.

6. 2^{40} ни асоси 2^2; 2^4; 2^5; 2^8 бўлган даража шаклида ёзинг.

7. x ни шундай даража билан алмаштирингки, натижада айният ҳосил бўлсин: 1) $2^4\cdot x=2^7$; 2) $x\cdot b^3=b^{10}$; 3) $x:3^4=3^3$; 4) $x:c^4=c$ 5) $2^2\cdot 2^4\cdot 2^8\cdot 2^{16}=2^x$; 6) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{81}=\frac{1}{3^x}$.

8. Ифодаларни соддалаштиринг: 1) $(0{,}2)^5\cdot 5^5$; 2) $25^4\cdot(0{,}04)^4$; 3) $3^3\cdot 9^3\cdot 27^3\cdot 81^3$; 4) $(0{,}2)^3\cdot(0{,}04)^3\cdot(0{,}008)^3\cdot 5^{15}$; 5) $2^n\cdot 2^n\cdot 2^n\cdot 2^n\times\times 2^n$, $(n\in N)$. 6) $(-5)^m\cdot(-5)^m\cdot(-5^m)\cdot(-5)^m\ (m\in N)$.

9. Қуйидаги даражалардан қайсилари катта: 1) 8^5 ва 32^3; 2) 81^4 ва 9^7; 3) 125^7 ва 625^5; 4) $8^3\cdot 2^3$ ва $32^4\cdot 16^2$ 5) 2^{42} ва $5^7\cdot 13^7$?

10. Ифодаларни ҳисобланг: 1) $2^{10}\cdot 5^{12}$; 2) $4^4\cdot 25^5$; 3) $(0{,}2)^4\cdot 5^7$; 4) $(0{,}25)^{10}\cdot 4^{12}$.

11. Ифодадан кўпайтманинг даражасини ажратинг: 1) $x^4y^4z^{10}$; 2) m^3n^8; 3) $3^4\cdot a^8\cdot b^{10}$; 4) $a^5b^7c^8$.

2-§. $y=ax^2$ ва $y=ax^3$ функциялар ва уларнинг графиклари

Квадратнинг юзи s томони x нинг функцияси сифатида $s=x^2$ формула билан, эркин тушаётган жисмнинг ўтган йўли s (м) вақт t (с) нинг функцияси сифатида $s=\frac{g}{2}t^2$ формула билан, доиранинг юзи k унинг радиуси r нинг функцияси сифатида $k=\pi r^2$ формула билан ифодаланади.

$$y=ax^2 \qquad (1)$$

формула билан ифодаланган функциянинг графигини ясайлик (бунда x, y — ўзгарувчилар, $a \neq 0$).

1-ҳол. $a>0$, масалан, $a=1$ бўлсин. У ҳолда

$$y=x^2 \qquad (2)$$

формула билан ифодаланган функциянинг графигини чизиш учун қуйидаги жадвални тузамиз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни координаталар системасида белгилаймиз (35-*а* расм). График шу нуқталар орқали ўтади. Функциянинг графигини аниқлаш учун x га қўшимча қийматлар бериб, жадвални давом эттирамиз:

35-расм.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$-2,5$	$-1,5$	$-0,5$	0,5	2,5	2,5
$y=\lambda^2$	9	4	1	0	1	4	9	6,25	2,25	0.25	0,25	2,25	6,25

Бу нуқталарни ҳам координагалар системасида белгилаймиз (35-*б* расм) ва уларни силлиқ эгри чизиқ билан туташтирамиз. Бу эгри чизиқ (2) формула билан берилган функциянинг графиги бўлади (35-*в* расм).

(2) функциянинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; +\infty[$ тўпламдан иборат, яъни $x \in]-\infty; +\infty[$.

Қийматлари берилган функциянинг аниқланиш соҳасини ташкил этадиган x ўзгарувчи функциянинг *аргументи* дейилади.

График координаталар боши $0(0; 0)$ дан ўтади (чунки $x=0$ бўлганда $(y=0)$. $x \neq 0$ бўлганда $x^2 = y$ мусбат бўлгани учун функция графигининг $a(0; 0)$ нуқтадан бошқа ҳамма нуқталари x ўқидан юқорида жойлашган. Аргумент x нинг қарама-қарши қийматларига y нинг тенг қийматлари мос келади. $(-x^2) = x^2$ бўлгани учун график y ўққа нисбатан симметрик.

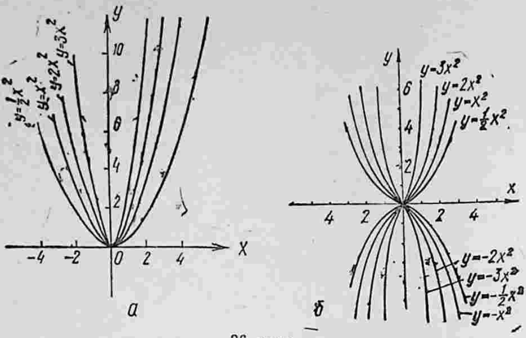
x нинг бир хил сон қийматида $y = 2x^2$ функциянинг қийматлари $y = x^2$ нинг мос қийматларидан 2 марта ортиқ бўлганидан, $y = x^2$ функциянинг графигидаги нуқталарнинг ординаталарини 2 марга узайтирилса, $y = 2x^2$ нинг графиги 3 марта узайтирилса, $y = 3x^2$ нинг графиги 2 марта камайтирилса, $y = \frac{1}{2}x^2$ нинг графиги ҳосил бўлади (36-*а* расм).

36-*а* расмдаги эгри чизиқлар *парабола* деб аталади, 0 нуқта параболанинг учи, графикнинг 0 нуқтадан чап ва ўнгдаги қисмлари параболанинг *тармоқлари* дейилади. Парабола учидан ўтган y ўқ унинг симметрия ўқидир.

2-ҳ о л. $a < 0$, масалан, $a = -1$ бўлсин.

$$y = -x^2 \qquad (3)$$

функциянинг графигини чизайлик. (3) функциянинг қиймати (2) нинг мос қийматларидан факат ишораси билан фарқ қилади. Шунинг учун унинг графиги x ўққа нисбатан (2) функция графигига симметрик жойлашган бўлади (36-*б* расм).



36- расм.

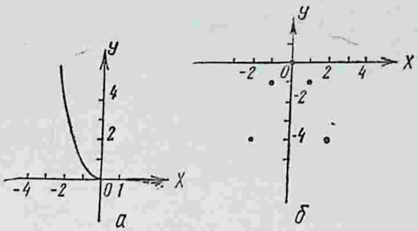
Шунингдек, $y=-2x^2$, $y=-3x^2$, $y=-\frac{x^2}{2}$ функцияларнинг графиклари ҳам мос ҳолда x ўққа нисбатан $y=2x^2$, $y=3x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ ларнинг графигига симметрик жойлашган бўлади (36- *б* расм).

Демак, $y=ax^2$ формула билан берилган функциянинг графиги учи координаталар бошида бўлиб, $a>0$ бўлганда тармоқлари юқорига йўналган, $a<0$ бўлганда эса тармоқлари пастга йўналган парабола экан.

Юқоридаги жадвалдан кўрамизки, аргумент $x=0$; 1; 2; 3; 4; ... қийматлар қабул қилиб ортса, y мос ҳолда 0; 1; 4; 9; 16; ... қийматлар қабул қилади, яъни орта боради. Бундай ҳолда $y=x^2$ функция $[0; +\infty[$ оралиқда *ўсувчи* дейилади. Аргумент $x=\ldots-4$, -3, -2, -1, 0 қийматлар қабул қилса, яъни ортса, y мос ҳолда ... 16; 9; 4; 1; 0 бўлади, яъни камая боради. Бу ҳолда (2) функция $]-\infty; 0[$ оралиқда *камаювчи* дейилади.

Таъриф. *Бирор оралиқда аргументнинг қиймати ортиши билан функциянинг қиймати ортса (камайса), шу оралиқда функция ўсувчи (камаювчи) деб аталади.*

Функция бирор оралиқда ўсувчи бўлса, унинг графиги шу оралиқда чапдан ўнгга томон пастдан юқорига кўтарила боради. Функция бирор оралиқда камаювчи бўлса, унинг графиги ўша оралиқда чапдан



37- расм.

ўнгга томон қуйи туша боради. (2) функцияни $]-\infty; 0]$ оралиқда камайишини, $]0; +\infty[$ оралиқда эса ўсишини 35-*в* расмдан яққол кўриш мумкин.

(2′) функциянинг қийматлари ичида 0 энг кичик қийматдир, чунки x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $x^2 \geqslant 0$, бу функция энг катта қийматга эга эмас. Унинг қийматлар соҳаси $[0; +\infty[$ дан иборат.

(3) функциянинг энг катта қиймати ноль, чунки x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $-x^2 \leqslant 0$. Бу функция энг кичик қийматга эга эмас. Унинг қийматлар $]-\infty; 0]$ дан иборат.

Агар $y = ax^2$ формула билан ифодаланган функция барча сонлар тўпламида эмас, унинг қисм-тўпламида берилган бўлса, унинг графиги парабола нуқталарининг қисм-тўплами бўлади. 37-*а* расмда $y = x^2$, $x \in]-\infty;0]$ функциянинг графиги, 37-*б* расмда эса $y = -x^2$, $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ функциянинг графиги тасвирланган.

Энди

$$y = ax^3 \qquad (4)$$

кўринишдаги функциянинг графиги билан танишайлик.

$a = 1$ бўлса, (4) формула

$$y = x^3 \qquad (5)$$

кўринишда бўлади. Қуйидаги жадвални тузамиз:

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$y = x^3$	-8	$-3,375$	-1	$-0,125$	0	0,125	1	3,375	8

Тегишли нуқталарни координаталар текислигида белгилаб (38- *а* расм), силлиқ эгри чизиқ билан туташтирамиз (38- *б* расм). График координаталар бошидан ўтиб ($x=0$ бўлганда $y=0$ бўлгани учун), I ва III координата чоракларига жойлашади (нима учун?).

x нинг қарама-қарши x_0 ва $-x_0$ қийматларига y нинг қарама-қарши қийматлари мос келади ($x_0^3=y_0$ ва $(-x_0)^3=-y_0$). Демак, график координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашади.

$x\in]-\infty;0[$ бўлса, (5) функция манфий сонларга; $x\in]0;+\infty[$ бўлганда эса мусбат сонларга тенг (бу ҳолни жадвалдан ҳам кўриш мумкин) бўлгани учун $]-\infty;0[$ оралиқда график x ўқининг остига, $]0;+\infty[$ оралиқда эса x ўқининг юқорисига жойлашади.

x нинг қийматлари ортиши билан y нинг ҳам мос қийматлари ортгани учун (буни жадвалдан ҳам кўриш мумкин) функция ўсувчи бўлиб, унинг қийматлар соҳаси $]-\infty;+\infty[$ дан иборат.

x нинг бир хил қийматларида $y=2x^3$ нинг қиймати $y=x^3$ нинг мос қийматларидан 2 марта катта бўлгани учун $y=x^3$ функция графигидаги нуқталарнинг ординаталарини 2 марта узайтирсак, $y=2x^3$ нинг графиги, 2 марта камайтирсак, $y=\frac{1}{2}x^3$ нинг графиги ҳосил бўлади (38- *г* расм).

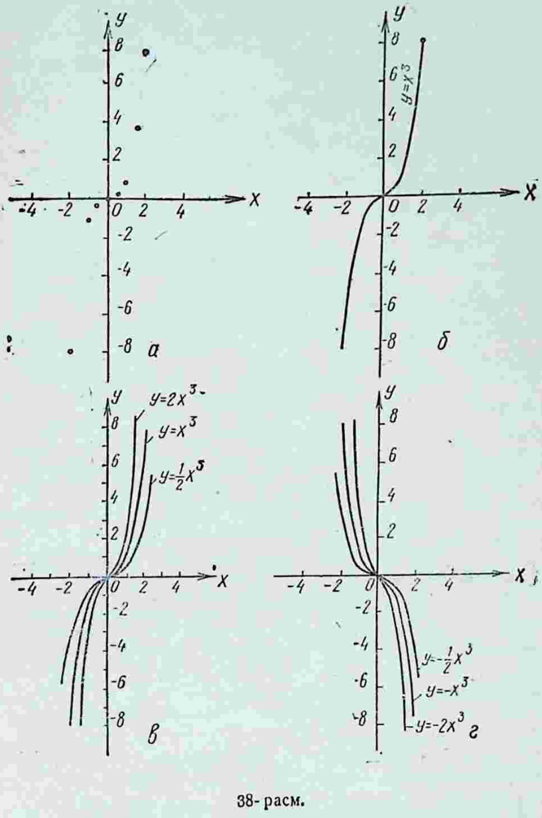
$y=-x^3$, $y=-2x^3$, $y=-\frac{1}{2}x^3$ функцияларнинг графиги x ўққа нисбатан мос равишда $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=\frac{1}{2}x^3$ функцияларнинг графигига симметрик бўлгани учун II ва IV координата чоракларига жойлашган бўлади (38- *г* расм).

Машқлар

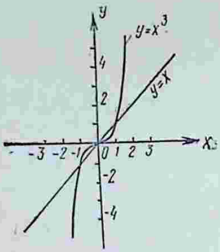
12. (Оғзаки.) Қуйидаги формулалар билан ифодаланган функцияларнинг графиклари битта координаталар системасида координата ўқларига нисбатан қандай жойлашган: 1) $y=0{,}2x^2$ ва $y=-0{,}2x^2$; 2) $y=x$ ва $y=-x$; 3) $y=-\frac{y}{x}$ ва $y=\frac{y}{x}$?

13. 1) $A(10$ $-20)$; 2) $B(-10,\ 20)$; 3) $C(5$ $-5)$; 4) $D(-5;-5)$ нуқта $y=-0{,}2x^2$ функциянинг графигига тегишлими?

14. $y=ax^2$ функциянинг графиги: 1) $A(10;\ 10)$; 2) $B(-0{,}1;\ -0{,}5)$; 3) $C(0{,}5;\ 1)$ нуқтадан ўтади a нинг қийматини аниқланг.



38- расм.



39- расм.

15. $y = 0{,}04x^2$ функция берилган. x нинг қандай қийматларида y нинг қиймати: 1) нолга тенг, 2) нолдан катта, 3) нолдан кичик бўлади?

16. $y = 0{,}5x^2$ функция графигини чизинг. Графикдан фойдаланиб, $f(-4)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(3)$ ларни топинг. x нинг қандай қийматларида функция: а) ўсади, б) камаяди, в) энг кичик қийматга эга бўлади?

17. Функция графигини чизинг ва қийматлар соҳасини аниқланг: 1) $y = 0{,}25x^2$, $x \in [0;\ 3]$ 2) $y = 2x^2$, $x \in [-1;\ 1]$; 3) $y = -0{,}5x^2$, $x \in [0;\ \infty[$.

18. Функциянинг қийматлар соҳасини аниқланг: 1) $y = 5x^2$, 2) $y = -4x^2$; 3) $y = -x^2$, $x \in]-\infty;\ 0]$; 4) $y = x^2$, $x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

19. Битта координаталар системасида $y = x^2$ ва $y = x + 2$ функцияларнинг графикларини ясанг.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$						
$y = x+2$						

Жадвални тўлдиринг. График ва жадвалдан фойдаланиб: а) $x^2 = x + 2$ тенгламанинг, б) $x^2 > x + 2$ ва в) $x^2 < x + 2$ тенгсизликларнинг ечимлар тўпламини топинг.

20. 1) $A(10;\ 1)$; 2) $B(-20;\ -8)$, 3) $C(-100;\ -1000)$ 4) $D(-1;\ -0{,}01)$ нуқталар $y = 0{,}001x^3$ функциянинг графигига тегишлими?

21. a нинг қиймати қандай сон бўлганда $y = ax^3$ функциянинг графиги: 1) $A(-10;\ -100)$; 2) $B(5;\ -25)$; 3) $C(-5;\ -1)$; 4) $D(10;\ -27)$ нуқтадан ўтади?

22. $y = -0{,}01x^3$ функция берилган. x нинг қандай қийматларида y нинг қиймати: 1) нолга тенг, 2) нолдан катта, 3) нолдан кичик бўлади? Функция ўсувчими ёки камаювчими?

23. Функциянинг графигини чизинг ва қийматлар соҳасини аниқланг: 1) $y = 0{,}5x^3$, $x \in [-1;\ 2]$; 2) $y = -0{,}5x^3$, $x \in]-\infty;\ 0]$.

24. Функциянинг қийматлар соҳасини аниқланг: 1) $y = 3x^3$, $x \in [1;\ 9]$; 2) $y = 0{,}3x^3$, $x \in [-2;\ 2]$; 3) $y = 0{,}7x^3$, $x \in [-2;\ 4]$.

25. 1) 39- расмда $y = x$ ва $y = x^3$ функцияларнинг графиги чизилган. Графикдан фойдаланиб: а) $x^3 = x$ тенгламанинг; б) $x^3 > x$; в) $x^3 < x$ тенгсизликларнинг ечимлари тўпламини топинг.

3- §. Бирҳад. Бирҳадларни кўпайтириш. Асоси бирҳаддан иборат бўлган даража

1- таъриф. *Қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш амаллари ёрдамида сонлар ва ўзгарувчилардан тузилган алгебраик ифодалар рационал ифодалар дейилади.*

Хусусий ҳолда, битта сон ёки бир ҳарфдан тузилган алгебраик ифода ҳам рационал ифода дейилади. Масалан, 5,3; a; b^2+c; $m+\frac{1}{n}$. $\frac{x^2+y^2}{x-y}$; $\frac{5}{3+a^2}$ рационал ифодалардир.

2-таъриф. *Рационал ифодада бўлувчи таркибида ўзгарувчи бўлмаса, унга бутун ифода, ўзгарувчи бўлса, каср ифода дейилади.*

Юқоридаги $1-3$ мисоллар бутун ифодалар, $4-6$-мисоллар эса каср ифодалардир.

3-таъриф. *Фақат кўпайтириш ва даражага кўтариш амалларини ўз ичига олган бутун ифода бирҳад деб аталади.*

Хусусий ҳолда бирҳад битта сон ёки бир ўзгарувчидан иборат бўлиши ҳам мумкин. Масалан, 2,1; a; $5b$; $\frac{1}{4}a^2b$; $-1{,}7x^3y^2z$ бирҳадлардир.

$(5+c)^2$ бирҳад эмас, чунки даражанинг асоси йиғиндидан иборат, $\frac{7a^2}{5}$ ҳам бирҳад эмас, чунки у бўлинмадан иборат. Аммо бу ифодани $\frac{7}{5}a^2$ бирҳад кўринишида ёзиш мумкин.

$2aabbbc$; $2a^2bbbc$; $2a^2bb^2c$ ва $2a^2b^3c$ лар бирҳадлар бўлиб, улар турли шаклда ёзилган. $2a^2b^3c$ бирҳад олдида сонли кўпайтувчи ёзилган бўлиб, ҳар бир ўзгарувчи битта даража шаклида ифода қилинган. Бирҳаднинг бундай шакли б и р ҳ а д н и н г с т а н д а р т ш а к л и дейилади. $5a^2b^3$, $-0{,}5c^5$; $\frac{5}{6}p^2q^4$ лар стандарт шаклдаги бирҳадларга мисол бўла олади.

4-таъриф. *Стандарт шаклдаги бирҳаднинг сонли кўпайтувчиси бирҳаднинг коэффициенти дейилади.*

Масалан, $-3a^2b$ нинг коэффициенти -3, x^3 нинг коэффициенти 1, $-c^3d$ нинг коэффициенти эса -1 (чунки бу бирҳадни $(-1)\,c^3d$ кўринишда ёзиш мумкин).

$2a^2b^3\cdot 4ab^2c$ бирҳадни стандарт шаклга келтириш учун кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларидан фойдаланиб, $(2\cdot 4)\cdot(a^2\cdot a)\cdot(b^3\cdot b^2\cdot c)$ кўринишда ва ниҳоят, даражанинг асосий хоссасидан фойдаланиб, $8a^3b^5c$ шаклда ёзамиз.

$2a^2b^3 \cdot 4ab^2c$ бирҳадни иккита бирҳаднинг кўпайтмаси деб ҳам қараш мумкин, яъни

$$2a^2b^3 \cdot 4ab^2c = 8a^3\ {}^5c.$$

Қоида. **Бирҳадларни кўпайтириш учун уларнинг коэффициентларини ўзаро кўпайтириш, бир хил ҳарфларнинг даража кўрсаткичларини қўшиш, фақат битта кўпайтувчида бўлган ҳарфларни ўз кўрсаткичлари билан кўпайтмага ёзиш керак.**

Бу қоида бир нечта бирҳадни кўпайтиришда ҳам ўринлидир.

Мисоллар. 1) $0{,}5ab^2c^3 \cdot (-6a^2bc^4) = -3a^3b^3c^7$;

$$2)\ 3x^2y \cdot 2xy^3 \cdot \frac{1}{7}x^3y^2 = \frac{6}{7}x^6 \cdot y^6.$$

Натижа. Асоси бирҳаддан иборат бўлган даражани топиш учун ҳар бир кўпайтувчини шу даражага кўтариб, натижаларнинг бир-бирига кўпайтмаси ёзилади.

Масалан, $(2a^3b^2c)^4 = 16a^{12}b^8c^4$; $\left(-\frac{3}{4}xy^2z^3\right)^2 = \frac{9}{16}x^2y^4z^6$.

Машқлар

26. Ушбу йиғиндиларни коэффициент билан ёзинг: 1) $x^2y^3 + x^2y^3 + x^2y^3 + x^2y^3$; 2) $\frac{a}{7} + \frac{a}{7} + \frac{a}{7} + \frac{a}{7} + \frac{a}{7}$.

27. Бирҳадни стандарт шаклга келтиринг: 1) $5a^2bab^3$, 2) $3x^2yx^4y^5$, 3) $3ax^2yzx^2y^8$; 4) $1{,}2xyy \cdot \frac{5}{2}xx^2y$; 5) $-3{,}5m^3n^7 \cdot (-0{,}2m^4n)$; 6) $7a^nb^8a^2b^{2n} (n \in N)$.

28. Бирҳадни стандарт шаклга келтириб, қийматини топинг:
1) $-1{,}5x^2y^3 \cdot 1{,}6xy$, бунда $x = 1{,}5$; $y = -2{,}5$,
2) $2{,}5a^4b^2 \cdot 4ab^2$, бунда $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$.

29. Бирҳадлар кўпайтмасини стандарт шаклдаги бирҳад кўринишида ёзинг: $(-0{,}25a^3b)(12a^2b^3)$; 2) $(-0{,}2b^3c) \cdot (-2{,}5b^2c)$; 3) $(3{,}1x^3y^4)(-1{,}6xy^7)$; 4) $(-5x^ny^{n-1}z)(-3x^{2n}y^{n+1}z^{\prime})$, 5) $(-3{,}2a^4b^7)(-2{,}5a^7b^4)$; 6) $(-5x^ny^{n+1})(-2x^{n+1}y^8)$, бунда $n \in N$.

30. Номаълум кўпайтувчини аниқланг: 1) $(\ldots) \cdot (-3y^3z) = -21y^7z^4$ 2) $(-3{,}2b^2c) \cdot (\ \ldots\ ) = -16b^3c^5$, 3) $11a^nb^2 \cdot (\ \ldots\ ) = -22a^{n+2}b^{m+3}$ $(m,\ n \in N)$.

31. Даражаларни бирҳад кўринишида ёзинг: 1) $(2a^2b^4)^3$, 2) $(-3c^2d^5)^2$; 3) $\left(-\frac{2}{3}a^2b^2c^4\right)^5$; 4) $(3a^nb^{m-1})^2$.

32. Даражаларни стандарт шаклдаги бирҳад кўринишида ёзинг: 1) $(0{,}1a^3b^2)^4$; 2) $\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^5$; 3) $(2{,}5m^2n^3)^3$; 4) $(-3x^{n+1}y^n)^2$; 5) $(5b^3c^2d)^n$ бунда $n \in N$.

4-§. Кўпҳад. Ўхшаш ҳадлар ва уларни ихчамлаш

1-таъриф. *Стандарт шаклдаги бирҳадлардан тузилган кўпҳаднинг бир-бирига тенг ёки бир-биридан фақат коэффициентлари билангина фарқ қиладиган ҳадлари ўхшаш ҳадлар дейилади.*

Масалан, $5ab^2 + 4c^2 - 15ab^2 - 10c^2$ кўпҳадда $5ab^2$ билан $-15ab^2$, $4c^2$ билан $-10c^2$ ўхшаш ҳадлардир.

2-таъриф. *Ўхшаш бўлмаган бир нечта бирҳаднинг алгебраик йиғиндиси кўпҳад дейилади.*

Кўпҳадни ташкил этувчи бирҳадлар шу кўпҳаднинг ҳадлари дейилади.

Кўпҳад ўхшаш бўлмаган иккита бирҳаддан тузилган бўлса, *иккиҳад* деб, учта бирҳаддан тузилган бўлса, *учҳад* деб аталади. Масалан, $a + b$, $m^2 - 5n^3$, $a + b + c$, $1 - m^2 - 3n^5$.

Бирҳадни ҳади битта бўлган кўпҳад дейиш мумкин.

3-таъриф. *Кўпҳадда ўхшаш ҳадлар йиғиндисини шу йиғиндига айнан тенг бўлган бирҳадга алмаштириш ўхшаш ҳадларни ихчамлаш дейилади.*

Масалан, $4x^2 + 5x^2 + 3y - y$ кўпҳадда $4x^2$ билан $5x^2$ ўхшаш ҳадлар ихчамланса, $9x^2$ бўлади, $3y$ билан $-y$ ўхшаш ҳадлар ихчамланса, $2y$ бўлади. Демак, берилган кўпҳаднинг ўхшаш ҳадлари ихчамланса, $9x^2 + 2y$ кўринишни олади

Қоида. **Кўпҳаднинг ўхшаш ҳадларини ихчамлаш учун ўхшаш ҳадларнинг коэффициентларини қўшиб, йиғиндини ўша ҳарфий ифода олдига сонли коэффициент қилиб ёзиш керак.**

Масалан, 1) $5a^2b^3 + 7a^2b^3 - 3a^2b^3 = (5 + 7 - 3)\, a^2b^3 = 9a^2b^3$, 2) $4x^2y - 5c - 2x^2y + 8x^2y + 8c =$
$= (4x^2y - 2x^2y + 8x^2y) + (-5c + 8c) =$
$= (4 - 2 + 8)\, x^2y + (-5 + 8)\, c = 10x^2y + 3c.$

4-таъриф. *Кўпҳад ўхшаш бўлмаган стандарт шаклдаги бир ҳадлардан тузилган бўлса, стандарт шаклдаги кўпҳад дейилади.*

$5a^2b^3 - 3aab + 2abbb + 1$ кўпҳадни стандарт шаклга келтириш учун иккинчи ва учинчи ҳадларини стандарт шаклда ёзамиз. У ҳолда $5a^2b^3 - 3a^2b + 2ab^3 + 1$ кўринишни олади. $5x^2y - 7xy^3 + 3x^2y + xy^3 - y$ кўпҳаднинг ўхшаш ҳадларини ихчамласак, $8x^2y - 6xy^3 - y$ стандарт шаклга келади.

5-таъриф. *Бирҳаддаги ўзгарувчи (ўзгарувчилар)нинг даража кўрсаткичига (даража кўрсаткичлари йиғиндисига) шу бирҳаднинг даражаси дейилади.*

Масалан, $10x^3$ — учинчи даражали, ab — иккинчи даражали, $-3xy^2z^3$ — олтинчи даражали бирҳад.

Ҳар қандай сон бирҳад бўлиб, бундай бирҳаднинг даражасини нолга тенг деб ҳисоблашга келишилган[1], яъни $7 = 7 \cdot x^0 = 7x^0 \cdot y^0$. Демак, $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$, $y^0 = 1$ $(y \neq 0)$.

6-таъриф. *Стандарт шаклдаги кўпҳаднинг ҳадлари ичида даражаси энг каттасига кўпҳаднинг юқори ҳади дейилади.*

Масалан, $5a^2 - 4a - 2a^5 + 9$ кўпҳаднинг юқори ҳади $-2a^5$ дан иборат.

7-таъриф. *Стандарт шаклдаги кўпҳаднинг даражаси деб унинг юқори ҳадининг даражасига айтилади.*

Масалан, $a^3 - 2a^2 + 3a + 1$ — учинчи даражали, $5xy^2 - x^3y^2 - 7x^3y + 4y$ — бешинчи даражали кўпҳад.

Машқлар

Ўхшаш ҳадларни ихчамланг:

33. 1) $7a + 9a - 10a$; 2) $-5b^2 + b^2 - 9b^2$; 3) $\frac{3}{4}c^3 + \frac{4}{5}c^3 - \frac{7}{10}c^3$; 4) $4,61x + 2,09x - 2,18x$.

34. 1) $3x^2 - 4y^3 + x^2 + 7y^3$; 2) $4ab^3 - 14ab + 3ab^3 + 7ab + 2c$; 3) $15a^3b + 19ac^2 - 7b^2c^2 + ac^2 + 8b^2c^2 - a^3b$; 4) $-3,5xy^2 + 8x^2y - 4xy - 2,7x^2y + 1,25xy^2 - 1,5xy$.

35. Қуйидаги кўпҳаднинг ўхшаш ҳадларини ихчамланг ва тушириб қолдирилган ҳадларини топинг: 1) $2y - 4y + 12y - ? = -20y$; 2) $? - 5a + 9a - 5a = 0$; 3) $5n - 6m + 9n - 5m - ? + ? = 20m - 12n$.

36. Кўпҳадни стандарт шаклга келтиринг: 1) $4aaab + 3aabb + 5bbb$; 2) $5x \cdot (-2y) + 9x^2 \cdot 3y + 7y^3$; 3) $2m + 3n + 5m + 0,4n + 1,3m$; 4) $4m \cdot 3n + 2a^2b \cdot 3ab^2 - mn - 5a^3b^3 + ab \cdot a^2b^2$; 5) $15x^2 - 3x^3 \cdot 2y + 4xy \cdot y - 9x \cdot 2x^2y$.

37. Кўпҳаднинг даражасини аниқланг:

1) $10 - 2a + a^2$; 2) $7xy^2 - y + 9$; 3) $1 - b^6$; 4) $c^3 - cd^3 + c^2d - cd^4$.

38. Кўпҳадни стандарт шаклга келтириб, даражасини аниқланг:

1) $5a^3 - 7a^2 + 0,1a^3 + a^4 - 2,3a^2$; 2) $3x^3 - 2,9x^2y^4 + y - x^5 + 4x^3$.

---

[1] Ноль сони бундан мустасно (яъни 0 маънога эга эмас).

5- §. Бирҳадларнинг, кўпҳадларнинг йиғинди ва айирмасини стандарт шаклдаги кўпҳадга айлантириш

1- *қоида*[1]. **Бирҳадларнинг йиғиндисини топиш учун уларни кетма-кет (алгебраик йиғинди шаклида) ўз ишоралари билан ёзиб чиқиш ва ҳосил бўлган йиғиндида ўхшаш ҳадлар бўлса, уларни ихчамлаш керак.**

Масалан, $2a$; 5; $5a^3$; $-7a$; $2a^3$ бирҳадларни қўшайлик: $2a+5+5a^3-7a+2a^3$. Ўхшаш ҳадларни ихчамласак: $-5a+5+7a^3$.

Натижа. Абсолют қиймати тенг, лекин ишоралари қарама-қарши бўлган бирҳадлар йиғиндиси нолга тенг. Масалан, $-4a^3b$ билан $4a^3b$ бирҳадлар йиғиндиси: $-4a^3b+4a^3b=(-4+4)\,a^3b=0\cdot a^3b=0$.

2- *қоида.* **Кўпҳадларнинг йиғиндисини стандарт шаклдаги кўпҳадга айлантириш учун уларнинг ҳамма ҳадларини кетма-кет (алгебраик йиғинди шаклида) ўз ишоралари билан ёзиб чиқиш ва ҳосил бўлган йиғиндида ўхшаш ҳадлар бўлса, уларни ихчамлаш керак.**

Масалан, $7x+5y^2+3$ кўпҳад билан $3y^2-4x-xy$ кўпҳадни қўшайлик: $(7x+5y^2+3)+(3y^2-4x-xy)=$ $=7x+5y^2+3+3y^2-4x-xy=3x+8y^2+3-xy$.

3- *қоида.* **Бирҳад ёки кўпҳаддан бирҳадни айириш учун айрилувчини қарама-қарши ишора билан камаювчининг ёнига ёзиш ва ўхшаш ҳадлар бўлса, уларни ихчамлаш керак.**

Масалан, 1) $5ab-(+2ab)=5ab-2ab=3ab$; 2) $4x^2y-(-3xy^2)=4x^2y+3xy^2$; 3) $(5b^2c^3+13c)-$ $-(+2c)=5b^2c^3+13c-2c=5b^2c^3+11c$.

4- *қоида.* **Кўпҳад ёки бирҳаддан кўпҳадни айириш учун камаювчининг ёнига айрилувчининг ҳамма ҳадларини қарама-қарши ишоралари билан ёзиш ва ўхшаш ҳадлари бўлса, уларни ихчамлаш керак.**

Масалан, 1) $(3a^2+2b-c)-(5b+4c-5d)=3a^2+$ $+2b-c-5b-4c+5d=3a^2-3b-5c+5d$; 2) $7x-$ $-(5y+3x)=7x-5y-3x=4x-5y$.

5- *қоида.* **Агар қавс олдида ҳеч қандай белги турмаса ёки плюс (+) ишораси турган бўлса, қавсни очганда қавс ичидаги ҳадлар ўз ишоралари билан,**

---

[1] 1 — 4- қоидаларда гап стандарт шаклдаги бирҳад ва кўпҳадлар устида боради.

агар қавс олдида минус (—) ишора турган бўлса, қавс ичида турган ҳадларнинг ҳар бири қарама-қарши ишоралар билан ёзиб чиқилади.

Масалан, 1) $(m^2-mn+8)=m^2-mn+8$;
2) $-(-a^3+2b-5c^2)=a^3-2b+5c^2$.

9-*қоида.* Агар қавс олдига плюс ишораси қўйилса, қавс ичига олинадиган кўпҳаднинг барча ҳадлари ўз ишоралари билан ёзилади, агар қавс олдига минус ишораси қўйилса, қавс ичига олинадиган кўпҳаднинг барча ҳадлари қарама-қарши ишоралар билан қавс ичига ёзилади.

Масалан, 1) $-3ab+4a^2-3b=+(-3ab-4a^2-3b)$;
2) $-3ab+4a^2-3b=-(+3ab-4a^2+3b)$.

Машқлар

39. Бирҳадлар йиғиндисини аниқланг:

1) $(-5xy^2)+(-8xy^2)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}a^2\right)+\left(-\frac{1}{4}a^2\right)$; 3) $(-0{,}5\,b^2c)+$ $+(5b^2c)$; 4) $\frac{1}{5}n+(-4n)+(n)$; 5) $3a^nb+(-5a^nb)+(-a^nb)$;
6) $12x^2y^n+(+5{,}7x^2y^n)+(-x^2y^n)$, бунда $n\in N$.

40. Тушириб қолдирилган бирҳадни ёзинг:
1) $(\ldots)+(+3n^2)=7n^2$; 2) $(-5a^3)+(\ldots)=a^3$; 3) $(\ldots)+(-4b^4)=$ $=2b^4$; 4) $(-3x^2y)+(\ldots)=4x^2y$; 5) $(+4a^3)+(-5a^3)+(\ldots)=a^3$;
6) $(-6b^4)+(\ldots)+(-11b^4)=-20b^4$; 7) $(-2m^4)+(\ldots)+(-7{,}1m^4)=$ $=10m^4$.

Кўпҳадларнинг йиғиндисини стандарт шаклдаги кўпҳадга алмаштиринг.

41. (Оғзаки.) 1) $(5x+4y)+(3x-2y)$; 2) $(5ab-5cd)+(4cd-2ab)$;
3) $(c^2+5c-1)+(c^2+c+3)$; 4) $(a^2+2ab+b^2)+(2ab-a^2-b^2)$.

42. 1) $(7a-3b+4c)+(2b-9c-5a)+(4c+3b-9a)$;
2) $(4x^2y+3xy^2-7xy-11y^3)+(x^2y-9xy^2+4xy+7y^2)$.
3) $(4a^m+3b^n+c^3)+(-3b^n+a^m+7c^3)$; 5) $(5x^{n-1}+7x^n-4x^{2m}-2x^2)+$ $+(4x^2-3x^{2m}-7x^n+x^{m+1})$, $m,\ n\in N$.

43. Айирмани ҳисобланг: 1) $13x-(+5x)$ 2) $7b-(-9b)$;
3) $-10c^4-(+7c^4)$; 4) $-12y^2-(-19y^2)$; 5) $(a+2b)-(-3b)$;
6) $(7b^2c-9bc^2)-(-3bc^2)$.

44. Айирмани стандарт шаклдаги кўпҳадга айлантиринг:
1) $(17a-9b)-(10a-5b)$; 2) $(41b^2-13c^3)-(31b^2+2c^3)$;
3) $(10x-8y+6z)-(5x-6y+2z)$; 4) $(3ab-4a^2b-2ab^2)-$ $-(-2ab+3a^2b-1)$; 5) $(13x^n+8y^m-11xy-5)-(7x^n-3y^m+3xy-4)$.

6-§. Кўпҳадга кўпайтириш. Қисқа кўпайтириш айниятлари

1-*қоида.* (Бирҳадни кўпҳадга кўпайтириш ҳақида.) **Бирҳадни кўпҳадга кўпайтириш учун бирҳадни кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириб, ҳосил бўлган кўпайтмаларни қўшиш керак.**

Масалан, $(-2a^2c)\cdot\left(3a^2b^3-5ab^2c-\frac{2}{3}a^3b\right)=$

$=-6a^4b^3c+10a^3b^2c^2+\frac{4}{3}a^5bc.$

2-*қоида.* (Кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш ҳақида.) **Кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш учун биринчи кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини иккинчи кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириб, ҳосил бўлган кўпайтмаларни қўшиш керак.**

Масалан, $(2a-3b-5c)(2x-3y)=4ax-6ay-$ $-6bx+9by-10cx+15cy.$

Кўпҳадни кўпҳадга кўпайтирганда кўпайтмада ўхшаш ҳадлар бўлса, улар ихчамланади, масалан, $(2x+y)\times$ $\times(0{,}5x-y)=x^2-2xy+0{,}5xy-y^2=x^2-1{,}5xy-y^2.$ $(a-b)(a+b)$ кўпайтмани стандарт шаклдаги кўпҳадга алмаштирайлик: $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=$ $=a^2-b^2,$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2. \qquad \text{(I)}$$

3-*қоида.* (Иккиҳад айирмасининг шу ҳадлар йиғиндиси билан кўпайтмаси ҳақида.) **Икки ифода айирмаси билан шу ифодалар йиғиндисининг кўпайтмаси улар квадратларининг айирмасига тенг.**

Мисоллар. 1) $\left(0{,}5a^2-\frac{1}{2}\right)\left(0{,}5a^2+\frac{1}{2}\right)=(0{,}5a^2)^2-$ $-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25a^4-\frac{1}{4}$; 2) $(x-2y+3z)(x-2y-3z)=$ $=((x-2y)+3z)((x-2y)-3z)=(x-2y)^2-9z^2=$ $=x^2-4xy+4y^2-9z^2.$

(I) айниятга икки ҳад айирмаси билан шу ҳадлар йиғиндиси кўпайтмасининг формуласи ёки *қисқа кўпайтириш формуласи* дейилади.

(I) айниятда бирор ўзгарувчини бирор ифода билан алмаштирсак, бу айниятдан бошқа айният келиб чиқади. Масалан, a нинг ўрнига $5x$ қўйсак, $(5x-b)(5x+b)=$ $=25x^2-b^2$ айният, a нинг ўрнига 3, b нинг ўрнига эса $4c^2$ ни қўйсак, $(3-4c^2)(3+4c^2)=9-16c^4$ айният ҳосил бўлади.

Иккиҳад квадратини стандарт шаклли кўпҳадга алмаштирайлик:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad \text{(II)}$$

4-*қоида*. (Иккиҳаднинг квадрати ҳақида.) **Иккиҳаднинг квадрати биринчи ҳад квадрати, биринчи ҳад билан иккинчи ҳад кўпайтмасининг иккилангани ва иккинчи ҳад квадратининг йиғиндисига тенг.**

(II) айният иккиҳад йиғиндиси квадратининг формуласи дейилади.

Мисоллар. 1) $(3a+2b^2)^2=(3a)^2+2(3a)(2b^2)+(2b^2)^2=9a^2+12ab^2+4b^4$; 2) $(2x-3y)^2=(2x)^2+2(2x)(-3y)+(-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$.

Иккиҳад кубини стандарт шаклдаги кўпҳадга алмаштирайлик:

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+a^2b+2ab^2+2a^2b+ab^2+b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^3+b^3. \qquad \text{(III)}$$

5-*қоида*. (Иккиҳаднинг куби ҳақида.) **Иккиҳаднинг куби биринчи ҳаднинг куби, биринчи ҳад квадрати билан иккинчи ҳад кўпайтмасининг учлангани, биринчи ҳад билан иккинчи ҳад квадрати кўпайтмасининг учлангани ва иккинчи ҳад кубининг йиғиндисига тенг.**

(III) айният иккиҳад кубининг формуласи дейилади.

Мисоллар. 1) $(2x+5y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(5y)+3(2x)(5y)^2+(5y)^3=8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$; 2) $(2n-3)^3=(2n)^3+3(2n)^2(-3)+3(2n)(-3)^2+(-3)^3=$
$=8n^3-36n^2+54n-27$.

Иккиҳад йиғиндисининг квадрати $a^2+2ab+b^2$ га тенг экани (II) айниятда кўрсатилди. a^2+ab+b^2 йиғиндида ab нинг коэффициенти 2 эмас, 1 бўлгани учун бу йиғиндига иккиҳад йиғиндисининг чала квадрати дейилади. Худди шунингдек, a^2-ab+b^2 га иккиҳад айирмасининг чала квадрати дейилади.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ кўпайтмани стандарт шаклдаги кўпҳадга алмаштирайлик:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=$$
$$=a^3+b^3,$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3. \qquad \text{(IV)}$$

6-*қоида*. **Иккиҳад йиғиндисининг шу ҳадлар айирмасининг чала квадратига кўпайтмаси икки ҳад кубларининг йиғиндисига тенг.**

(IV) айниятда b ни $-b$ га алмаштирсак, қуйидаги айният ҳосил бўлади:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \qquad \text{(IVa)}$$

7-*қоида*. **Иккиҳад айирмасининг шу ҳадлар йиғиндисининг чала квадратига кўпайтмаси иккиҳад кубларининг айирмасига тенг.**

Мисоллар. 1) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)=(2a^3)+b^3=$ $=8a^3+b^3$; 2) $(3x^2-2y)(9x^4+6x^2y+4y^2)=$ $=(3x^2)^3-(2y)^3=27x^6-8y^3$.

(I), (II), (III), (IV), (IV a) айниятларни қисқа кўпайтириш айниятлари ёки қисқа кўпайтириш формулалари дейилади.

Машқлар

Кўпайтмани топинг:

45. 1) $3a(4a+5b-7c)$; 2) $(-5x-2y+9z)5x$, 3) $3a^2b(4a^2-2b^3+ab)$; 4) $(4+y^3-3x^2y)(-5xy^2)$; 5) $(-4ab^2)(4a^3-3a^2+2a-1)$; 6) $(4xy^4-3xy^2+2xy)(7x^2y^3)$.

46*. 1) $x^2(x^{n-2}+x^n)$; 2) $y^{n-2}(y^4-y^3+1)$; 3) $(a^{3-n}-a^2+a^n)\times$ $\times a^{n-1}$; 4) $(b^{n-1}-3b^{n+4}+4b^{n+5})\cdot 2b^{n-4}$, $n\in N$.

47. Тушириб қолдирилган бирҳадларни ёзинг: 1) $(3ab-\ldots+$ $+\ldots)\cdot 3a=9a^2b-12a^3+3ab^3$; 2) $(3x^2y^3+2xy^3-4x^2y)\cdot\ldots=$ $=\ldots+10x^2y^5-\ldots$

Кўпайтмани стандарт шаклдаги кўпҳадга алмаштиринг:

48. 1) $(a-b)(c+d)$; 2) $(x-y)(m-n)$; 3) $(a+1)(a-3)$. 4) $(2b+c)(2c-b)$; 5) $(2a-2b)(3a-2b)$; 6) $(1-n^2)(n^4+2)$.

49. 1) $(5a+3b-4)(-3a+2b)$; 2) $(-4x-5y+9)(3x+2y)$; 3) $(2a^2-3a+4)(3a-5)$; 4) $(4m^2-6mn+9n^2)(2m+3n)$.

50. 1) $(x^3+x^2+x-1)(x+1)$; 2) $(y^4+y^3+y^2+y+1)(y-1)$; 3) $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$; 4) $(3x^2+11-5x)(8x-6+2x^2)$.

51*. 1) $(2x^n+3x^{n-1}-4x^{n-2}+7x^{n-3}+8x^{n-4})(x^2-x+1)$; 2) $(x^{n+1}-x^n+x^{n-3}-x^{n-2}+x^{n-2})(x^2+x+1)$.

52. Ифодаларни соддалаштиринг: 1) $(0{,}45z^3 - 0{,}24z^2 + 1{,}2z) \times$ $\times (8z + 10) + (6z + 20)$; 2) $(3b^3 + 8 - 4b)(b^3 - 2 + 6b) - 5b^5 + 10b^2 + 3b^3$.

53. Тушириб қолдирилган бирҳадларни ёзинг: 1) $(a + \ldots)(\ldots - d) =$ $= ac - ad + bc - \ldots$; 2) $(\ldots - n)(p - \ldots) = mp - np - \ldots + \ldots$; 3) $(a + \ldots)(\ldots + \ldots) = ax + ay + bx + \ldots$; 4) $(m - n)(\ldots + \ldots) =$ $= mp - nq - \ldots + \ldots$.

54. (Оғзаки.) Кўпайтиринг: 1) $(2b - 3)(2b + 3)$; 2) $\left(3c + \frac{1}{3}d\right) \times$ $\times \left(3c - \frac{1}{3}d\right)$ 3) $(2x^2 - 3y^2)(2x^2 + 3y^2)$; 4) $\left(0{,}1 + \frac{3}{5}m^4\right)\left(0{,}1 - \frac{3}{5}m^4\right)$.

55. (I) айниятда ўзгарувчилардан бирини бошқа ифодага алмаштириш билан 3 та айният ҳосил қилинг.

56. Кўпайтмани иккиҳадга айлантиринг: 1) $(1 - n)(1 + n)$; 2) $(2a + 3)(2a - 3)$; 3) $(b^2 - 2)(b^2 + 2)$; 4) $(3c - 4)(3c + 4)$; 5) $(ab^3 - 2c)(ab^3 + 2c)$; 6) $(5xy^2 - 3z)(5xy^2 + 3z)$

57. Кўпайтмани кўпҳаднинг стандарт шаклига келтиринг:

1) $\left(5a + \frac{1}{2}b\right)\left(5a - \frac{1}{2}b\right)$; 2) $(2x^2y + 3xy^2)(2x^2y - 3xy^2)$;

3) $\left(0{,}5a^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(0{,}5a^2 - \frac{1}{3}x\right)$; 4) $\left(1\frac{1}{2} + 5mn^3\right)\left(1\frac{1}{2} - 5mn^3\right)$;

5) $\left(\frac{3}{2}x^2 + 0{,}3\right)\left(\frac{3}{2}x^2 - 0{,}3\right)$; 6) $a^4\left(\frac{3}{4}c^2 - d^3\right)\left(\frac{3}{4}c^2 + d^3\right)$.

58. Кўпайтмани иккиҳадга айлантиринг: 1) $\left(a^n + \frac{3}{2}b\right)\left(a^n - \frac{3}{2}b\right)$;
2) $(x^{2n} - 5y^n)(x^{2n} + 5y^n)$, $n \in N$ 3) $(a - 2)(a + 2)(a^4 + 4)$; 4) $(3 - b^2)(3 + b^2)(9 + b^4)$.

59*. (I) айниятдан фойдаланиб кўпайтмани кўпҳаднинг стандарт шаклига келтиринг: 1) $(x + y + z)(x + y - z)$, 2) $(a + b + c) \times$ $\times (a - b - c)$ 3) $(x^n + 2y^m)(x^n - 2y^m)(x^{2n} + 4y^{2m})$;
4) $\left(a^{m-1} + \frac{1}{2}b^n\right)\left(a^{m-1} - \frac{1}{2}b^n\right)\left(a^{2m-2} + \frac{1}{4}b^{2n}\right)$, $m, n \in N$,

60. 1) $(a + b)^2 - (a - b)^2$; 2) $(c + 9)^2 - (c - 9)^2$, 3) $(a + b - c)^2 -$ $- (a - b + c)^2$; 4) $(x + 2y - 3z)^2 - (2x - y + z)^2$.

61*. Тенгликда тушиб қолган бирҳадларни ёзинг:
1) $(\ldots + 1{,}2b^{n-1})(0{,}4a^{2n-1} - \ldots) = 0{,}16a^{4n-2} - 1{,}44b^{2n-2}$;
2) $(2{,}3x^{n-1} + \ldots)(2{,}3x^{n-1} - \ldots) = \ldots - 0{,}04y^{6n-2}$;

62. (Оғзаки) Ҳисобланг: 1) $(3 + b)^2$; 2) $(2c - 1)^2$; 3) $(2m^2 + n^3)^2$; 4) $(2a - 5)^2$; 5) $(3x + 2y)^2$; 6) $(2b^2 - 3c^3)^2$.

63. (II) айниятда: 1) a нинг ўрнига $5a$, 2) b нинг ўрнига -4, 3) a нинг ўрнига m^2, b нинг ўрнига эса $2n$ қўйиш билан айният ҳосил қилинг.

Иккиҳад квадратини кўпҳад шаклига келтиринг.

64. 1) $(3+y)^2$; 2) $(x^2-2)^2$, 3) $(2a-b)^2$, 4) $(2b+5c)^2$; 5) $(3+2b^3)^2$.

65. 1) $(5a^2+3b^3)^2$; 2) $(x^4y+xy^2)^2$; 3) $\left(\frac{1}{6}b^3+3c^2\right)^2$; 4) $(5bc^2-1{,}2bc^4)^2$; 5) $(x^2y-4xy^2)^2$.

66. 1) $(x^{m+1}-4y^n)^2$; 2) $\left(2a^{m+1}-\frac{1}{2}b^{n-1}\right)^2$; 3) $\left(\frac{1}{3}a^{n-1}c^2+3a^{n+1}c^3\right)^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}a^2b^n+\frac{6}{5}a^{m-1}b^{m-1}\right)^2$, m, $n \in N$.

67. Ифодани энг қулай усул билан кўпҳаднинг стандарт шаклига келтиринг: 1) $(a-b)^2(a+b)^2$; 2) $(m^2-2n^2)^2(m^2+2n^2)^2$; 3) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$; 4) $(m^2-2)^2(m^2+2)^2(m^4+4)^2$.

68 Қуйидаги тенгликларда ёзилмаган бирҳадларни ёзинг: 1) $(3a-?)^2=?-?+4c^2$; 2) $(4m+?)^2=?+24mn+?$.

69. (III) айниятда: 1) a нинг ўрнига $2c^2$; 2) b нинг ўрнига 1; 3) a нинг ўрнига m^2, b нинг ўрнига эса -1 қўйиш билан айният ҳосил қилинг.

Кўпҳад шаклига келтиринг:

70. 1) $(p-q)^3$; 2) $(b-1)^3$; 3) $(2-c)^3$; 4) $(c^2-d^2)^3$; 5) $(x+y^2)^3$; 6) $(x^2-z^4)^3$.

71. 1) $(2a-b)^3$; 2) $(x-3y)^3$; 3) $(3c^2-d)^3$; 4) $(n^3-2m)^3$; 5) $(3a-2b^2)^3$; 6) $(4c^3-3)^3$.

72. 1) $a^2(b+c)^3$; 2) $2b^2(c-3)^3$; 3) $a^3(a+2d)^3$; 4) $(x^m-1)^3$; 5) $(2-y^{2n})^3$; 6) $(a^n+b^{2n})^3$, $n \in N$.

73. Тенгликда ёзилмаган бирҳадларни ёзинг: 1) $(x+?)^3=?+3x^2y+?+?$; 2) $(?-3x)^3=8-?+?-?$; 3) $(?-m^3)^3=?-3m^2n^4+?-?$, 4) $(a^3+?)^3=?+?+3a^2b^2+?$.

74. (IV) айниятда: 1) a нинг ўрнига c^2; 2) b нинг ўрнига 3; 3) a нинг ўрнига n^3, b нинг ўрнига эса 1 қўйиш билан айният ҳосил қилинг.

Кўпайтмани иккиҳадга алмаштиринг.

75. 1) $(x+2)(x^2-2x+4)$; 2) $(2z-c)(4z^2+2cz+c^2)$; 3) $(p^2+q^2)(p^4-p^2q^2+q^4)$; 4) $(m^2-3n)(m^4+3m^2n+9n^2)$; 5) $(7x^3y-2z^2)(49x^6y^2+14x^3yz^2+4z^4)$; 6) $(x^{2n}y-z^n)(x^{4n}y^2+x^{2n}z^ny+z^{2n})$, $n \in N$.

76. 1) $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$; 2) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$; 3) $(2-c)(8+c^3)(4+2c+c^2)$ 4) $(x^4+3x^2+9)(27+x^6)(x^2-3)$.

77. Номаълум ҳадлар ўрнига шундай ифодалар ёзингки, натижада айният ҳосил бўлсин: 1) $(?-?)(4n^2+?+?)=?-m^6$; 2) $(?+xy^2)(?-?+?)=125x^6y^3+?$; 3) $(?-?)(25a^4+?+4b^4)=?-?$; 4) $(?+?)(?-6xy+?)=8x^3+?$.

7-§. Бирҳадга бўлиш. Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиш

1-*қоида.* (Бирҳадни бирҳадга бўлиш ҳақида.) **Бирҳадни бирҳадга бўлиш учун: 1) бўлинувчининг коэффициентини бўлувчининг коэффициентига бўлиш; 2) чиққан бўлинма ёнига бўлинувчидаги ҳар бир ҳарфни бўлинувчи ва бўлувчидаги шу ҳарфлар кўрсаткичларининг айирмасига тенг кўрсаткич билан ёзиш; 3) бўлинувчининг бўлувчида бўлмаган ҳарфларини эса кўрсаткичларини ўзгартирмасдан бўлинмага кўчириш лозим.**

Мисоллар. 1) $7a^3b^4c : 8ab^2 = \frac{7}{8}a^2b^2c$, 2) $1{,}2xy^3z^n : (-0{,}2xy^3z^2) = -6z^{n-2}$.

Эслатма. Бу қоидани қўлланишда: 1) бўлинувчидаги бирор ҳарфнинг кўрсаткичи бўлувчидаги шу ҳарфнинг кўрсаткичидан кичик бўлса ёки: 2) бўлувчида бўлган ҳарф бўлинувчида бўлмаса, бирҳадни бирҳадга қолдиқсиз бўлиш мумкин эмаслиги келиб чиқади.

Масалан, $15a^3b^2$ ни $5ab^3$ га ёки $8x^2y$ ни $4xyz$ га бўлиш (қолдиқсиз бўлиш) мумкин эмас.

2-*қоида.* (Кўпҳадни бирҳадга бўлиш ҳақида). **Кўпҳадни бирҳадга бўлиш учун кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини шу бирҳадга бўлиш ва чиққан натижаларни қўшиш керак**

Масалан, 1) $(48a^3b^4 - 36a^4b^3 - 12ab^2) : 6ab^2 = 8a^2b^2 - 6a^3b - 2$.

Таъриф. *Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш деб берилган кўпҳадни икки ёки бир неча бирҳад ва кўпҳадларнинг кўпайтмасига айнан алмаштиришга айтилади.*

Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратишнинг бир неча усуллари бор.

1. Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш усули.

$48a^3b^2 + 36a^2b - 12a^4b^3$ кўпҳаднинг барча ҳадлари $12a^2b$ дан иборат умумий кўпайтувчига эга бўлгани учун уни $12a^2b \cdot 4ab + 12a^2b \cdot 3 + 12a^2b(-a^2b^2)$ кўринишда ёзиб, тақсимот қонунини қўлласак, $12a^2b \times (4ab + 3 - a^2b^2)$ ҳосил бўлади, яъни $48a^3b^2 + 36a^2b - 12a^4b^3 = 12a^2b(4ab + 3 - a^2b^2)$. $a^2(2x-y) - 3b(2x-y)$ кўпҳаднинг ҳадлари $(2x-y)$ кўпҳаддан иборат умумий кўпайтувчига эга бўлгани учун уни қавс олдига чиқарсак:

$$a^2(2x-y)-3b(2x-y)=(2x-y)(a^2-3b).$$

II. Группалаш усули.

$2ax+bx+cx+ay+by+cy$ кўпҳаднинг ҳадлари умумий кўпайтувчига эга эмас. Аммо олдинги учта ҳад (биринчи группа) x дан иборат умумий кўпайтувчига эга, кейинги учта ҳад (иккинчи группа) эса y дан иборат умумий кўпайтувчига эга. Биринчи учта ҳаддан x ни, кейинги учта ҳаддан y ни қавс олдига чиқарамиз: $(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)=x(a+b+c)+$ $+y(a+b+c)$. Ҳосил бўлган кўпҳад $a+b+c$ дан иборат умумий кўпайтувчига эга бўлиб, уни қавс олдига чиқарсак, $(a+b+c)(x+y)$ кўпайтма ҳосил бўлади. Ёки бошқача, кўпҳадни учта группага ажратсак, яъни 1- ва 4- ҳадлардан a ни, 2- ва 5- ҳадлардан b ни, 3- ва 6- ҳадлардан c ни қавс олдига чиқарсак, $a(x+y)+$ $+b(x+y)+c(x+y)$ учҳад ҳосил қилинади. Булардан умумий кўпайтувчи $x+y$ ни қавс олдига чиқарсак, $(x+y)(a+b+c)$ кўпайтма ҳосил бўлади.

Кўпҳадни группаларга ажратишда шуни эътиборга олиш кераки, ҳар қайси группадан умумий кўпайтувчи қавс олдига чиқарилгандан кейин қавс ичида бир хил ифода (кўпҳад) лар қолиши керак.

m^2-3m+2 кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш керак бўлсин. Бу кўпҳалда қавс олдига чиқадиган умумий кўпайтувчи йўқ. Группалаш ҳам мумкин эмас. Аммо, агар $-3m$ ни $-m-2m$ кўринишда ёзсак, берилган кўпҳад $m^2-m-2m+2$ кўринишни олади ва буни группалаб кўпайтувчиларга ажратамиз, яъни

$$m^3-3m+2=(m^2-m)+(-2m+2)=$$
$$=m(m-1)-2(m-1)=(m-1)(m-2).$$

Ҳар қандай кўпҳадни ҳам группалаш билан кўпайтувчиларга ажратиб бўлмайди. Масалан, $ab+ac+mn-$ $-n^2$ кўпҳад кўпайтувчиларга ажралмайди.

III. Қисқа кўпайтириш айниятларидан фойдаланиш усули.

Олдинги параграфдаги қисқа кўпайтириш айниятларининг чап ва ўнг қисмлари ўрнини алмаштириб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b), \qquad (\mathrm{I}')$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \qquad (\mathrm{II}')$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3, \qquad (\mathrm{III}')$$
$$(a^3\pm b^3)=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2). \qquad (\mathrm{IV}')$$

Мисоллар. 1) $36a^2b^4-25=(6ab^2)^2-5^2=$ $=(6ab^2-5)(6ab^2+5)$; 2) $4x^4-4x^2+1=$ $=(2x^2)^2-2(2x^2)+1^2=(2x^2-1)^2$;
3) $8+36y+54y^2+27y^3=2^3+3\cdot2^2(3y)+3\cdot2(3y)^2+$ $+(3y)^3=(2+3y)^3$; 4) $27c^3-0{,}001d^6=(3c)^3-(0{,}1d^2)^3=$ $=(3c-0{,}1d^2)(9c^2+0{,}3d^2c+0{,}01d^4)$.

IV. Баъзан кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратишда бир неча усулдан фойдаланишга тўғри келади. Масалан, a^4+8a йиғиндида a ни қавсдан ташқарига чиқарсак: $a(a^3+8)$; a^3+8 ифодага (IV′) формулани қўлласак: $a(a+2)(a^2-2a+4)$.

Мисоллар. 1) $4x^2-4y^2-16z^2-16yz=$ $=4(x^2-y^2-4z^2-4yz)=4(x^2-(y^2+4yz+4z^2))=$ $=4(x^2-(y+2z)^2)=4(x-y-2z)(x+y+2z)$;
2) $a^3+2a^2+2ab+2b^2-b^3=(a^3-b^3)+(2a^2+2ab+2b^2)=$ $=(a-b)(a^2+ab+b^2)+2(a^2+ab+b^2)=$ $=(a^2+ab+b^2)(a-b+2)$.

$(a+b-c)(a+b+c)$ ва $(a+b)^2-c^2$ ифодаларнинг айнан тенг эканлигини, бошқача айтганда

$$(a+b-c)(a+b+c)=(a+b)^2-c^2$$

тенгликнинг айният эканини исбот қилиш керак бўлсин.

1-усул. Тенгликнинг чап қисмидаги ифоданинг шаклини айнан алмаштириб, ўнг қисмидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$(a+b-c)(a+b+c)=((a+b)-c)((a+b)+c)=$$
$$=(a+b)^2-c^2.$$

2-усул. Тенгликнинг ўнг қисмидаги ифоданинг шаклини айнан алмаштириб (кўпайтувчиларга ажратиб), чап қисмидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$(a+b)^2-c^2=((a+b)-c)((a+b)+c)=$$
$$=(a+b-c)(a+b+c).$$

3-усул. Тенгликнинг ҳар икки қисмидаги ифодани уларга айнан тенг бўлган кўпҳадларга алмаштирамиз: $(a+b+c)(a+b-c)$ кўпайтма $a^2+2ab+b^2-c^2$ кўпҳадга тенг:

$$(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2.$$

Айнан бир хил ифодалар ҳосил бўлди. Тенгликнинг чап ва ўнг қисмидаги ифодалар айни бир ифодага айнан тенг бўлгани учун улар айнан тенг бўлади.

Машқлар

Амалларни бажаринг:

78. (Оғзаки.) 1) $7a : a$; 2) $(-10b) : b$; 3) $(-20d) : (-4d)$; 4) $20xz : (-4x)$; 5) $(-28mn) : 2mn$.

79. 1) $a^5 : a^2$; 2) $-c^{11} : c^8$; 3) $n^9 : (-n^9)$; 4) $a^n : a^2$; 5) $-b^{3m} : b^m$; 6) $c^{2n+1} : (-c^{n+1})$; $n \in N$

80. 1) $18a^{12}b^8 : 6a^4b$; 2) $30b^6c : (-5b^3c)$; 3) $(-11m^4n^4) : (-5m^3n)$; 4) $-70a^{11}x^7z : 2ax^6$; 5) $0{,}16a^3b^4c^2 : 4a^2bc^2$; 6) $-3{,}6x^4y^5z : 1{,}8x^4y$.

81. 1) $(a^8)^3 : (a^7)^2$; 2) $(m^8n^7)^2 : (m^2n^7)$; 3) $(xy^5)^5 : (xy^4)^4$; 4) $(m^5n^5)^4 : (m^4n^4)^5$.

82*. 1) $1\frac{1}{2}a^nb^{m+1}c : \frac{1}{2}a^2b^3$; 2) $-7x^{3m}y^{n+2}z : 5x^my^3z$; 3) $(a^{n+1})^3 : (a^{n-1})^2$; 4) $(c^{2n-1})^4 : (c^{n+1})^5$; 5) $(y^{n+2})^n : (y^{n-1})^n$; 6) $(z^{n-2})^{n-3} : (z^{n-6})^{n-1}$.

83. Қуйидаги тенгликларда номаълум бирҳадларни ёзинг: 1) $27y^7 : ? = 9y^6$; 2) $28x^4y^2z : ? = 2xy^8$; 3) $? : 2a = 4a^2$; 4) $? : 96m^2 = \frac{1}{2}mn^7$; 5) $b^{n-1}c : ? = b^4$; 6) $x^{2n+1}y^n : ? = x^{n+8}y^{n-4}$.

Амалларни бажаринг:

84. 1) $(14a-12b-2c) : 2$ 2) $(-a^2x+a^3y+az) : (-a)$; 3) $(-24m^4-15m^3+9m^2) : 3m^2$; 4) $(48n^4-36n^5+24n^3) : (-12n^3)$; 5) $(6a^3b^2-15a^3b^4-9a^4b^3c) : (-3a^2b^2)$; 6) $(-65a^3b+45a^2b-25a^2b^2) : (-5a^2b)$.

85*. 1) $(84a^nb^{m-1}-70a^{n+3}b^m+42a^{n+2}b^{m+1}-18a^{n+1}b^{m+2}) : 7a^nb^2$; 2) $(3x^{2n}y^{8n+1}-2x^{2n+1}y^{3n-1}+3x^{2n-1}y^{4n+5}-5x^{3n-1}y^{3n}) : (-2x^{2n-2}y^{8n-1})$, $n \in N$.

86. Қуйидаги тенгликларда номаълум бирҳадларни ёзинг: 1) $(36a^3-24a^2) : ? = 3a - ?$; 2) $(54b^2+72bc) : ? = ? + 4c$; 3) $(60x^3y^4+8x^2y^5) : ? = 3x + ?$; 4) $(48a^6b^4 - ?) : (?) = 3a^2b^3-2a^3b$.

Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқаринг:

87. 1) $7c-14d$; 2) $18x+12y$; 3) $33a-11c$; 4) a^3-a; 5) b^2+b^5; 6) $2c^2-3c^3$.

88. 1) $2a^3-6a$; 2) $3b^3+15b^2$; 3) $7ac-28a^2c$; 4) $144m^3n-48m^2n$.

89. 1) $9a-6b-3c$; 2) $2x^2-3x^3+x^4$; 3) $3a^4-6a^3+9a^2$; 4) $48c^8-28c^3-16c^2$.

90. 1) $-175ax^3+75x^3-125ax^2$; 2) $60x^5y^7-160x^3y^5-40x^2y^2$; 3) $72x^5y^3z^4+54x^4y^4z^3-108x^3y^2z^3$; 4) $275x^{10}y^6-143x^7y^9-121x^5y^{11}$.

91*. 1) $x^n+x^{n+1}+x^{n+2}$; 2) $y^n-y^{n-1}-y^{n-2}$; 3) $b^{2n-1}+b^{2n-2}+b^{2n}$; 4) $4c^{3n-1}+12c^{2n-1}-6c^{n-1}$, $n\in N$

92. 1) $2(x-y)-5(x-y)$; 2) $3(m-n)-m+n$; 3) $(5a-2b)-3(2b-5a)$. 4) $2(x-y)-a(y-x)+b(x-y)$.

93. 1) $3(x+y)-z(x+y)+(x+y)$; 2) $a(m^2-n)-b(m^2-n)-m^2+n$; 3) $(a+b)(c-d)+(a+b)(d-n)$; 4) $(b-c)^2-(b-c)(p+q)$; 5) $2x(y-x)-(y-x)(3-y)$; 6) $(x-y)(x+y)^2-(x-y)^2(x+y)$.

94. Тенгламанинг ечимлар тўпламини топинг:
1) $2x(3x+1)=4(3x+1)$; 2) $(5y-3)(y+2)=(5y-3)(3-2y)$; 3) $(2x-5)^2-(2x-5)(x-1)=0$; 4) $3x^2(5x-1)+2x(5x-1)=0$.

95. Тенгликларда номаълум бирҳадларни ёзинг: 1) $18a^2b^3-?=?(9b^2-3a^2)$; 2) $?-12a^3b^5=?\cdot(2a^2-3ab^3)$; 3) $90x^3y^8+?-75x^8y^3=?\cdot(6y^5+4x^2y^2-?)$; 4) $?-35a^7x^4+28a^4x^6=?\cdot(3x^4-?+4ax^3)$.

Кўпҳадларни группалаб, кўпайтувчиларга ажратинг:

96. $5a+5b+ax+bx$; 2) $3x-ax+3y-ay$; 3) $a^2-ab-ac+bc$; 4) $a^2b-abc+c^2-ac$; 5) $15a^3c-5a^2+12bc-36abc^2$; 6) $7xy^3-21y^2-9axy+27a$.

97. 1) a^2-5a+4; 2) b^4+4b^2+3; 3) $24+z^4-10z^2$; 4) $3+2z-z^2$.

98. 1) $an^2+cn^2-ap+ap^2-cp+cp^2$; 2) $3a^3+5abc+6ab^2-a^2c-15a^2b-2b^2c$; 3) $n^3+an^2+abn+bn^2+bcn+acn+cn^2+abc$; 4) $y^3-cy^2+acy-ay^2-bcy+by^2-aby+abc$.

99*. 1) $a^{2n+1}+a^2b^{n+1}-b^{n+2}-a^{2n-1}b$;
2) $10^{n-1}+2^{2n}-5^{n-1}-2^{n+1}$.

(I′), (II′), (III′) ва (IV′) айниятлардан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

100. 1) $4+4b+b^2$; 2) c^4+1-2c^2; 3) m^2+9n^2-6mn; 4) $-x^2+2xy^2-y^4$.

101. 1) $8-12c+6c^2-c^3$; 2) $d^6-8-6d^4+12d^2$; 3) $64x^3+27z^3-144x^2z+108xz^2$; 4) $12m-1+64m^3-48m^2$.

102. 1) $(c^2-2)^2-c^4$; 2) $16-(a+b)^2$; 3) $(a+2c)^2-(2a-c)^2$; 4) $(x-y+z)^2-(x-y-z)^2$.

103. 1) $27+b^6$; 2) $8a^3b^9-125$; 3) $(a+b)^3-c^3$; 4) $x^3-(y+z)^3$; 5) $(4y-3)^3+8$; 6) $(2a+1)^3-(2a-1)^3$.

104*. 1) $4-9^n$; 2) 4^m-25; 3) $3^{2n}-4^{n+1}$; 4) $81^{n+1}-7^{4n}$; 5) $16+8a^{n-1}+a^{2n-2}$; 6) $y^{2n}+9x^{2n+2}-6x^{n+1}y^n$.

105*. 1) 8^n-27; 2) $125-3^{3n}$; 2) $27^{n-1}-8^{n+1}$; 4) $64^{2n}+8^{n-1}$, $n\in N$.

Тенгламанинг илдизлар тўпламини аниқланг:

106. 1) $x^2-121=0$; 2) $144y^2=121$; 3) $4x^3-9x=0$ 4) $25y=36y^3$.

107. 1) $(x+1)^2-4=0$; 2) $y^2+4y+4=16$; 3) $4(x-5)^2=9x^2$; 4) $(2y-3)^2=(5+y)^2$.

108. Тенгликлардаги номаълум ҳадларни топинг: 1) $25a^2-?+16b^2-(?-?)^2$; 2) $?-10xy^2+25y^4=(?-?)^2$; 3) $125-?+?-8c^3=(?-?)^3$; 4) $a^3b^6-18a^3b^4+?-?=(?-?)^3$.

109. Номаълум ҳад ўрнига шундай ифода ёзингки, берилган ифодани иккиҳаднинг квадрати шаклида тасвирлаш мумкин бўлсин: 1) $a^2+18a+?$; 2) $m^2n^4+4-?$; 3) $24bc+144b^2+?$; 4) $6x^2y+?+?$.

Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

110. 1) $4a^2-36b^2$; 2) $88c^2-22$; 3) $9x^3y-81xy^3$; 4) $4a^{16}+108ab^{12}$; 5) $b^{n+1}-b^{n-2}$; 6) $c^{4n}-c^{n-3}$.

111. 1) $7a^2+28ab+28b^2$; 2) $8a-24a^2+24a^3-8a^4$, 3) a^3+2a^2+2a+1; 4) $3c^3+c^2+c+3$.

112. 1) $a^2+2ab+b^2-c^2$; 2) $-x^2+y^2-2yz+z^2$; 3) $16x^2-25y^2-24ax+9a^2$; 4) $81m^2-49m^2n^2+144mn+64n^2$; 5) $a^{12}-b^{12}$; 6) $16m^2-4n^2+12np-9p^2$; 7) $a^3+a^2-2ab+b^2-b^3$; 8) $18m^4(a^3-8b^3)-8m^6(a^3-9b^3)$.

113. Ифодаларнинг қийматини топинг: 1) $(a+2b-3c)^2-(b-a+3c)^2$, бунда $a=0{,}5$; $b=2$; $c=1$; 2) $(a+b)^2-2(a^2-b^2)+(a-b^2)$, бунда $b=0{,}5$.

114. 1) $x^2(a^2-9)-2x(a^2-9)+a^2-9$; 2) $x^3+x^2z+xyz+y^2z-y^3$; 3) $4^n+2\cdot 6^n+9^n$; 4) $25^n-2\cdot 10^n+4^n-100$, $n\in N$.

115*. 1) $x^4+x^2y^2+y^4$; 2) a^8+a^4+1; 3) $(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)-24$.

116. Кетма-кет иккита жуфт соннинг кўпайтмаси 8 га бўлинишини исбот қилинг.

117. Кетма-кет ихтиёрий иккита тоқ сон квадратларининг айирмаси 4 га бўлинишини исбот қилинг.

118. Ҳар қандай натурал соннинг квадрати билан шу соннинг айирмаси жуфт сон бўлишини исбот қилинг.

119. Натурал соннинг куби билан шу соннинг айирмаси 6 га бўлинишини исбот қилинг.

120. n жуфт сон бўлганда n^3+3n^2+2n ифоданинг 24 га бўлинишини исбот қилинг.

121. $n\in Z$ бўлса, $n^6-2n^4+n^2$ ифоданинг сон қиймати 36 га бўлинишини исбот қилинг.

122. Айниятлар исбот қилинсин:

1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$; 2) $(a-b^3)+(a+b)^3=2a(a^2+3b^2)$;

8-§. Тартибга солинган кўпҳадлар устида тўрт амал

Таъриф. *Кўпҳадда бирор ўзгарувчининг даража кўрсаткичи биринчи ҳадидан охирги ҳадига қараб ортиб ёки камайиб борадиган тартибда ёзилган бўлса, бу кўпҳад ўша ўзгарувчининг даражасига нисбатан тартибга солинган дейилади.*

Масалан, $5x^3-4x^2+x+6$ кўпҳад x ўзгарувчининг даражасига нисбатан тартибга солинган. $7a^3-6b^2+a^2b-3ab^4$ кўпҳадни a ўзгарувчининг даража кўрсаткичини ортиб бориш тартибида жойлаштирсак, $7a^3+a^2b-3ab^4-6b^2$ кўринишни олади. Агар b ўзгарувчининг даража кўрсаткичини ортиб бориш тартибида жойлаштирсак,

$$7a^3+a^2b-6b^2-3ab^4$$

кўринишни олади.

Тартибга солинган кўпҳадларнинг ўхшаш ҳадлари бир-бирининг остига ёзиб олинса, уларнинг йиғинди, айирма ва кўпайтмаларини стандарт шаклдаги кўпҳад кўринишида ёзиш осонлашади. Мисоллар.

1) $(5a^4+4a^3b-3a+5b)+(a^4-2a^3b-2b)$.

$$+\begin{array}{r}5a^4+4a^3b-3a+5b\\ a^4-2a^3b-2b\\ \hline 6a^4-2a^3b-3a+3b\end{array}$$

2) $(11x^4+9x^3-x^2+21x-1)-(9x^4-10x^3+11x+9)$.

$$-\begin{array}{r}11x^4+9x^3-x^2+21x-1\\ 9x^4-10x^3+11x+9\\ \hline 2x^4+19x^3-x^2+10x-10\end{array}$$

3) $(2x^2-5xy-3y^2)\cdot(-3x^2+xy-2y^2)$.

$$\times\begin{array}{r}2x^2-5xy-3y^2\\ -3x^2+xy-2y^2\\ \hline -6x^4+15x^3y+9x^2y^2\\ +2x^3y-5x^2y^2-3xy^3\\ -4x^2y^2+10xy^3+6y^4\\ \hline -6x^4+17x^3y+7xy^3+6y^4\end{array}$$

Тартибга солинган кўпҳадни кўпҳадга бўлиш ҳам мумкин. Масалан, $(6x^4-20-11x-11x^3+x^2):(5-x+3x^2)$ бўлинмани топиш учун бўлинувчини ҳам, бўлувчини ҳам ўзгарувчининг даража кўрсаткичи камайиб борадиган тартибда жойлаштириб, 1-ҳад 1-ҳадга бўлинади ва бўлинмани бўлувчи ҳадларининг ҳар бирига кўпайтириб, бўлинувчининг ўхшаш ҳадлари остига ёзилади. Ҳосил бўлган кўпҳадни камаювчидан айириб, 1-қолдиқ топилади, яъни

$$\begin{array}{rr|l} & -\ \ 6x^4-11x^3+x^2-11x-20 & 3x^2-x+5 \\ & +6x^4-2x^3+10x^2 & \overline{2x^2} \\ \hline \text{1-қолдиқ:} & -9x^3-9x^2-11x-20 & \end{array}$$

Энди 1-қолдиқнинг 1-ҳади бўлувчининг 1-ҳадига бўлиниб, бўлинма $-3x$ ни $2x^2$ нинг ўнг томонига ёзилади. Сўнгра бу бўлинмани бўлувчининг ҳар бир ҳадига кўпайтириб, натижа 1-қолдиқ остига ёзилади ва 1-қолдиқдан айрилади ва қолдиқда 0 қолгунча шундай давом эттирилади:

$$\begin{array}{rr|l} & +\ \ 6x^4-11x^3+x^2-11x-20 & 3x^2-x+5 \\ & 6x^4-2x^3+10x^2 \ - & \overline{2x^2-3x-4} \\ \hline \text{1-қолдиқ:} & -\ \ -9x^3-9x^2-11x-20 & \\ & -9x^3+3x^2-15x & \\ \hline \text{2-қолдиқ:} & -\ \ -12x^2+4x-20 & \\ & -12x^2+4x-20 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

(I), (IV) ва (IV а) қисқа кўпайтириш айниятларидан: $(a^2-b^2):(a\pm b)=a\pm b$ (V), $(a^3\pm b^3):(a\pm b)=$ $=a^2\mp ab+b^2$ (VI), $(a^3\pm b^3):(a^2\mp ab+b^2)=a\pm b$ (VII).

(V), (VI), (VII) формулаларни кўпҳадни кўпҳадга бўлиш билан ҳам текшириб кўриш мумкин. Бу формулалар қисқа бўлиш формулалари дейилади.

Мисоллар. 1) $(4x^2y^4-9):(2xy^2-3)=2xy^2+3$; 2) $(27-8a^3):(3-2a)=3^2+3\cdot(-2a)+(-2a)^2=9-$ $-6a+4a^2$; 3) $(b^6+64c^3):(b^4-4b^2c+16c^2)=b^2+4c$.

Машқлар

123. Қуйидаги кўпҳадларни x нинг даража кўрсаткичи камайиб (ортиб) борадиган тартибда жойлаштиринг:

1) $x^2+7x^3+4-x^4$; 2) $0{,}4x^2-x^7+3{,}1x-10+8x^6$; 3) $5x^2-$ $-7x^8+6x^4-9x^3+1$.

Амалларни бажаринг:

124. 1) $(4x^4-3x^3+2x^2-x+10)+(-3x^3+5x^2+7x+1)$; 2) $(3y^5+2{,}1y^4-7{,}4y^2+5)+(-2y^4+3y^3+4{,}1y^2-y)$; 3) $(7{,}8a^4-6{,}9a^3+$ $+5{,}7a^2-4{,}6a-3{,}4)-(-1{,}1a^4+4{,}1a^2-2{,}9a+1{,}4)$.

125. 1) $(a^2+2ab+b^2)(a+b)$; 2) $(x^6-4x^3y+4y^2)(x^3-2y)$; 3) $(1{,}2a^5+5a^3-8a-3a^4-16)(5a^2+0{,}25-7a)$; 4) $(18b^6+2{,}3b^4-11b^5-7b+0{,}75)(6b+1{,}5b^3-8b^2)$.

Бўлинмани топинг:

126. 1) $(x^2-3x+2):(x-1)$; 2) $(x^2+2xy-8y^2):(x-2y)$; 3) $(m^4-m^3n-m^2n^2+mn^3):(m^2-n^2)$; 4) $(27a^3+8b^3):(9a^2-6ab+2b^2)$.

127*. 1) $(6a^{2n-2}+a^{2n+4}-a^{2n}):(a^4+2a^2)$; 2) $(a^{m+n}+a^{m+n+2}):(a^{n-1}+a^n)$.

(V), (VI), (VII) формулалардан фойдаланиб, амалларни бажаринг:

128. 1) $(8+a^6):(2+a^2)$; 2) $\left(4b^4-\frac{1}{4}\right):\left(2b^2-\frac{1}{2}\right)$; 3) $(c^6-125):(c^2-5)$; 4) $(0{,}04-x^4):(x^2+0{,}2)$; 5) $(x^3y^6+64):(x^2y^4+4-4xy^2)$.

129*. 1) $(9-n^{4m}):(3+n^{2m})$; 2) $(a^{6n}b^{3n}-8):(a^{2n}b^n-2)$; 3) $(x^{3n+6}-y^{6m}):(x^{2m+4}+x^{n+2}y^{2m}+y^{4m})$.

130. (V), (VI) ва (VII) формулалардан фойдаланиб, бажарилган амалларда номаълум ҳадларни топинг: 1) $(a^3+?):(a+?)=a^2-?+4$, 2) $(27-b^6):(?-b^2)=9+?+b^4$; 3) $(m^9+?):(?-?+n^2)=m^3+n$; 4) $(?-z^9):(?+?+z^6)=x^2y-?$

IV БОБ

ЧИЗИҚЛИ ФУНКЦИЯ. БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ТЕНГЛАМА

1-§. Чизиқли функция ва унинг графиги

1-таъриф. *Ушбу*

$$y=kx+b \tag{1}$$

формула билан ифодаланадиган функция чизиқли функция дейилади, бунда x ва y — ўзгарувчилар, k ва b — сонлар.

Агар $b=0$ бўлса, чизиқли функция $y=kx$ кўринишда бўлади. Бу эса чизиқли функциянинг хусусий ҳоли бўлиб, x ва y ўзгарувчилар орасидаги тўғри пропорционал боғланишни ифода қилади. $k=1$, $b=2$ бўлсин. У ҳолда

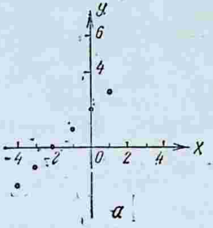
$$y=x+2 \tag{2}$$

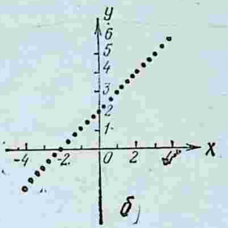
бўлади. (2) функциянинг графигини чизайлик.

x ва y нинг қийматлар жадвалини тузамиз:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=x+2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Координаталари жадвалдаги x ва y нинг мос қийматларидан иборат бўлган нуқталарни координаталар текислигида белгиласак, уларнинг бир тўғри чизиқ устида ётишини кўрамиз (40- *а* расм). Агар жадвалда x га 1 тадан ортиб борадиган қийматлар бермай, 0,2 тадан ортиб борадиган қийматлар, масалан, -4, $-3{,}8$; $-3{,}6$; $-3{,}4$; ... 0; 0,2; 0,4; ... 3,6; 3,8; 4 қийматлар бериб, y нинг мос қийматларини топсак ва тегишли нуқталарни координаталар текислигида белгиласак, топилган нуқталар ҳам ўша тўғри чизиқ устида ётишини ва бу нуқталар аввалгиларидан „зич“роқ жойлашганини кў-

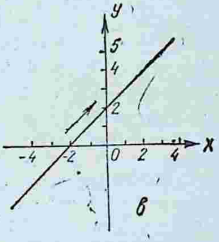




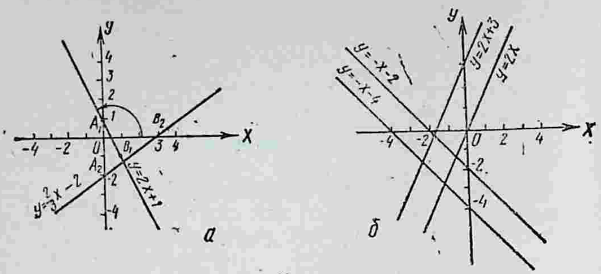
рамиз (40- *б* расм). Топилган бу нуқталарни туташтирсак, тўғри чизиқ ҳосил бўлади (40- *в* расм).

Теорема. *Чизиқли функциянинг графиги тўғри чизиқдир* (теорема исботини келтирмаймиз).

Мисоллар. 1. $y=-2x+1$ $(k<0)$ функциянинг графиги y ўқни $A_1(0,1)$ нуқтада кесиб ўтади (чунки $x=0$ бўл-



40- расм.



41-расм.

ганда $y=1$), $x=1$ бўлса, $y=-2\cdot 1+1=-1$ бўлиб, $B_1(1;\ -1)$ нуқта аниқланади ва (A_1B_1) тўғри чизиқ чизилади.

2. $y=\frac{2}{3}x-2\,(k>0)$ функциянинг графиги эса $A_2(0;\ -2)$ ва $B_2(3;\ 0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқлар (41-*а* расм). Демак, $k>0$ бўлганда тўғри чизиқ x ўқ билан ўткир, $k<0$ бўлганда эса ўтмас бурчак ташкил қилар экан. Бурчак k га боғлиқ бўлгани учун k ни тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти дейилади.

Демак, $y=kx+b$ нинг графиги y ўқни координата бошидан b бирлик юқорида ($b>0$ бўлса) ёки b бирлик пастда ($b<0$ бўлса) кесиб ўтади.

$y=kx+b$ функциянинг қиймати $y=kx$ нинг мос қийматларидан b та ортиқ ($b>0$) ёки b та кам ($b<0$) бўлгани учун k нинг бир хил қийматида $y=kx+b$ нинг графигини $y=kx$ функция графигини b бирлик юқорига ($b>0$) ёки пастга ($b<0$) суриш билан, бошқача айтганда $\vec{r}(0,\ b)$ параллел кўчириш билан ҳосил қилиш мумкин, яъни ҳар иккаласининг графиги параллел тўғри чизиқлар бўлади. Масалан, $y=2x+3$ билан $y=2x$, $y=-x-2$ билан $y=-x-4$ функцияларнинг графигини чизсак, улар ўзаро параллел эканини кўрамиз (41-*б* расм).

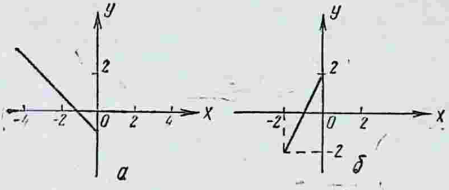
k ва b маълум бўлганда (1) функциянинг графиги қандай жойлашганини аниқлаш мумкин. Масалан, $y=2{,}5x+3$ функция графиги y ўқни (0,3) нуқтада кесиб ўтиб (чунки $b=3$), x ўқининг йўналиши билан ўткир бурчак ташкил этади (чунки $k=2{,}5>0$).

Агар чизиқли функциянинг аниқланиш соҳаси барча сонлар тўпламидан иборат бўлмаса, унинг графиги тўғри чизиқнинг бир қисми (нур, кесма, чекли нуқталар тўплами) бўлади. Масалан, $]-\infty;\ 0]$ тўпламида $y=-x-1$ функциянинг графиги нур (42-a расм). $[-2;0]$ тўпламда $y=2x+2$ функциянинг графиги кесма (42-*б* расм), $A=\{-2;\ -1;\ 0,\ 1;\ 2;\ 3\}$ тўпламда $y=-x+2$ функциянинг графиги нуқталар тўплами (42-*в* расм).

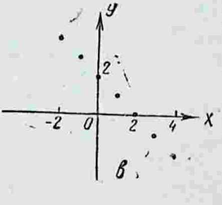
Аргумент x ортса, (2) функциянинг қиймати ортади, яъни функция ўсувчи бўлади. Аргумент $x=-2$ бўлса, (2) функция нолга тенг бўлади. -2 га функциянинг илдизи дейилади.

2-таъриф. $y=f(x)$ *функциянинг илдизи деб аргумент* x *нинг бу функцияни нолга айлантирадиган, яъни* $f(x)=0$ *тенгламани қаноатлантирадиган қийматига айтилади.*

(2) функциянинг графиги x ўқ билан $(-2;\ 0)$ умумий нуқтага эга (40-*в* расм). Демак, функциянинг илдизи унинг графиги x ўқни қайси нуқтада кесиб ўтишини билдирар экан.



(2) функциянинг графигидан (40-*в* расм), бу функция x нинг $]-2;+\infty[$ оралиқдаги қийматларида мусбат (бу оралиқда график x ўқидан юқорида жойлашган), x нинг $]-\infty;\ -2]$ оралиқдаги қийматларида эса манфий (бу оралиқда график x ўқидан пастда жойлашган) эканини кўрамиз.



42-расм.

3-таъриф. *Функция аргументнинг қандай қийматлар тўпламида мусбат (плюс ишорали) сонларга, аргументнинг қандай қийматлар тўпламида манфий (минус ишорали) сонларга тенг эканини аниқлашга функциянинг ишорасини текшириш дейилади.*

Мисол. $y=2x-3$ функциянинг ишорасини текширинг.

Ечиш. а) $2x-3>0$ да $2x>3$ ёки $x>1{,}5$, яъни $x\in\,]1{,}5;+\infty[$ оралиқда функция мусбат; б) $2x-3<0$ дан $2x<3$ ёки $x<1{,}5$, яъни $x\in\,]-\infty;1{,}5[$ оралиқда функция манфий.

Машқлар

1. Функцияларнинг графигини битта координаталар системасида чизинг:

1) $y=3x-4$; 2) $y=-\frac{3}{4}x+4$; 3) $y=0{,}8x-5$; 4) $y=-0{,}2x+1$.

2. (Оғзаки.) 1) $y=5x-3$; 2) $y=-2x+4$. 3) $y=x-0{,}4$; 4) $y=-7x+1{,}4$ функцияларнинг графиги y ўқни координата бошидан неча бирлик узоқликда (юқорида ёки пастда) кесиб ўтади?

3. (Оғзаки.) Ушбу функциялардан қайсиларининг графиги ўзаро параллел, қайсиларининг графиги y ўқни битта нуқтада кесади 1) $y=-2x+1$; 2) $y=3x+4$; 3) $y=3x+1$, 4) $y=-2x-9$, 5) $y=2x+4$?

4. (Оғзаки.) 1) Графиклари ўзаро параллел бўлган иккита чизиқли функцияга мисол айтинг. 2) Графиги y ўқни битта нуқтада кесиб ўтадиган иккита чизиқли функцияга мисол айтинг.

5. (Оғзаки.) 1) Графиги $y=-5x+4$ функция графигига параллел бўлган функцияга мисол келтиринг. 2) Графиги y ўқни $y=5x+0{,}2$ функция графиги кесиб ўтган нуқтада кесадиган функцияга мисол айтинг.

6. (Оғзаки). 43-*а, б* расмда тасвирланган тўғри чизиқлар қандай функцияларнинг графиги бўлади (аналитик ифодасини айтинг)?

7. 1) $y=3x+b$ функциянинг графиги $N(1;\ 1)$ нуқтадан ўтади. b ни топинг. 2) $y=ax-6$ функциянинг графиги $M(2,\ 2)$ нуқтадан ўтади. a ни топинг.

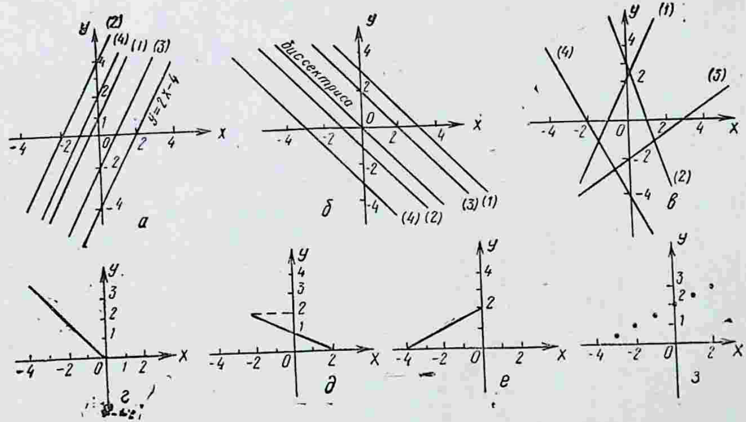
8. $y=kx+b$ нинг графиги: 1) $A(0,\ 2)$ ва $B(-3;\ 4)$ 2) $C(-1;\ 4)$ ва $D(0;\ 8)$ нуқталардан ўтади. k ва b ни аниқланг.

9. $[-2;\ +\infty[$ тўпламда $y=-0{,}5x-1$ функциянинг; 2) $[-3;\ 4]$ тўпламда $y=0{,}5+1$ функциянинг; 3) $[-3;\ -1]\cup[0;\ 2]$ тўпламда $y=x+2$ функциянинг графигини ясанг.

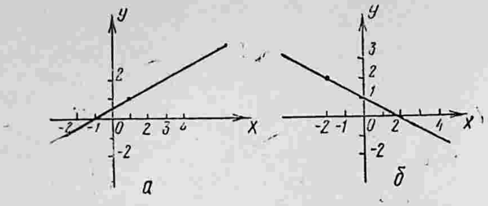
10. Графиги 43-*в* расмда берилган функцияларни аналитик ифодаланг.

11. Графиги 43-*г, д, е, з* расмда берилган функцияларни аналитик ифодаланг.

12. Функциянинг илдизини топинг: 1) $y=4x$; 2) $y=3x+2$; 3) $y=0{,}2x+1$; 4) $y=5$; 5) $y=\frac{4}{x}$; 6) $y=-2x^2$.



43- расм.

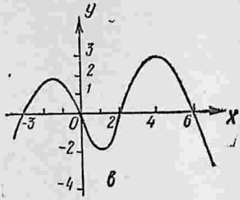


13. Функциянинг графиги x ўқини қайси нуқтада кесиб ўтади: 1) $y = 5x+1$; 2) $y = 4x + 3$; 3) $y = -2,5$; 4) $y = -2x$?

14. Илдизи: 1) 4 га, 2) -3 га, 3) 0 га, 4) 2,4 га тенг бўлган чизиқли функцияга мисол келтиринг.

15. Функция ишорасини текширинг: 1) $y = 3,2x$; 2) $y = -\frac{4}{x}$; 3) $y = 7x - 6$; 4) $y = 2x + 4$.

16. 1) $]-\infty; 0[$ оралиқда мусбат, $]0; +\infty[$ оралиқда манфий; 2) $]-\infty; 1[$ оралиқда манфий, $]1; +\infty[$ оралиқда мусбат бўлган функцияга мисол келтиринг.



44- расм.

17. Графиги 44-*а*, *б*, *в* расмда берилган функциянинг: а) илдизини, б) ўсиши ёки камайишини, в) ишорасини аниқланг.

18. $y = 2x$; 2) $y = 0,5x - 1$; 3) $y = -2x + 1$; 4) $y = 3 + 3x$ функциянинг графигини чизинг. Унинг: 1) аниқланиш соҳасини, 2) илдизини, 3) ишорасини, 4) ўсиши ёки камайишини аниқланг.

2-§. $y = |kx + b|$ функциянинг графиги. Бир нечта формула билан берилган функциянинг графиги

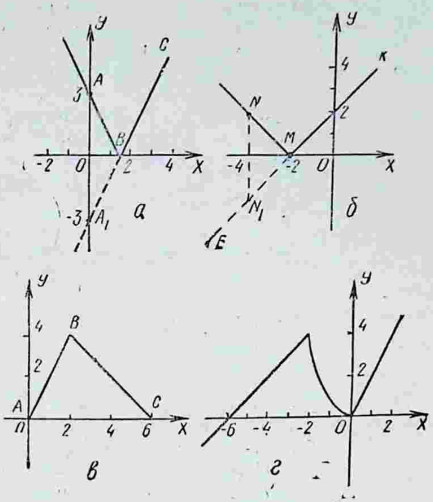
I. 1-мисол. $y = |2x - 3|$ функциянинг графиги чизилсин. Агар $2x - 3 \geqslant 0$ ёки $x \geqslant 1,5$ бўлса, $|2x - 3| = 2x - 3$. Агар $2x - 3 < 0$ ёки $x < 1,5$ бўлса, $|2x - 3| = -(2x - 3)$. Шуларни эътиборга олсак, берилган функцияни

$$y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ агар } x \geqslant 1,5 \text{ бўлса,} \\ -(2x - 3), \text{ агар } x < 1,5 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$\text{ёки } y = \begin{cases} 2x - 3, & x \in [1,5; +\infty[, \\ 3 - 2x, & x \in]-\infty; 1,5[\end{cases}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Дастлаб $x \geqslant 1,5$ ёки $[1,5; \infty[$ оралиғида берилган $y = 2x - 3$ функция графиги (расмда $[BC)$), сўнгра $x <$



45- расм.

$<1{,}5$ ёки $]-\infty;\ 1{,}5[$ оралиғида берилган $y=3-2x$ функция графиги (расмда $]BA)$) чизилади (45- a расм). B нуқтада кесишувчи нурлар берилган функциянинг графиги бўлади[1].

$y=2x-3$ ва $y=-(2x-3)$ функцияларнинг графиги x ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун берилган $y=|2x-3|$ функцияни иккита формула билан ифода қилиб, графигини чизиш ўрнига, аввал $y=2x-3$ функциянинг графиги $-A_1BC$ тўғри чизиқ (x ўқ остидаги $]BA_1)$ қисми пунктир билан) чизилади. Сўнгра бу чизиқнинг x ўқ остидаги қисмига x ўққа нисбатан симметрик бўлган $[BA)$ нур чизилади, $y=|2x-3|$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча сонлар тўпламидан иборат бўлиб, илдизи 1,5 га тенг. Функция $]-\infty;$ $1{,}5[$ оралиқда камаяди, $]1{,}5;\ +\infty[$ оралиқда эса ўсади,

[1] График $x=1{,}5$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик. $x=1{,}5$ нуқтага графикнинг синиш нуқтаси дейилади.

x нинг 1,5 дан бошқа ҳар қандай қийматида, яъни $]-\infty; 1,5[\cup]1,5; +\infty[$ тўпламда мусбат бўлиб, унинг қийматлар тўплами $]0; +\infty[$ дан иборат.

2-мисол. $y=|x+2|$ функциянинг графиги чизилсин.

$y=x+2$ нинг графиги — EK тўғри чизиқни (x ўқнинг остидаги қисмини пунктир билан) чизамиз. Бунда ҳам функциянинг x ўққа нисбатан симметриклигидан фойдаланамиз ва $]MN)$ ни ўтказамиз. NMK синиқ чизиқ функциянинг графиги бўлади (45-*б* расм).

II. $X=[0; 6]$ ва $Y=[0; 4]$ тўпламлар орасидаги мослик $[0; 2]$ оралиғида $y=2x$ формула билан, $]2; 6]$ оралиғида эса $y=6-x$ формула билан берилган. Бу мосликни

$$y=\begin{cases}2x, & x\in[0; 2],\\ 6-x, & x\in]2; 6]\end{cases}$$

кўринишда ёзамиз. Бу ерда функция иккита формула билан берилган. Бу функциянинг графиги $[0; 2]$ оралиқда $y=2x$ функция графиги—тўғри чизиқнинг $[AB]$ кесмасидан, $]2; 6]$ оралиқда эса $y=6-x$ функция графиги — тўғри чизиқнинг $]BC]$ кесмасидан иборат бўлиб, ABC синиқ чизиқ берилган функциянинг графиги бўлади (45-*в* расм).

$$y=\begin{cases}x+6, & x\in]-\infty; -2],\\ x^2, & x\in]-2; 0[,\\ 2x, & x\in[0; +\infty[\end{cases}$$

функциянинг графиги 45-*г* расмда тасвирланган.

Машқлар

19. Функциянинг графигини чизинг: 1) $y=|x|$; 2) $y=|x+3|$; 3) $y=|-2x+4|$; 4) $y=|3x-1,5|$.

20. (Оғзаки.) $y=|x|$ функциянинг графиги чизилган бўлса, ўша координаталар системасида қандай қилиб: 1) $y=2|x|$; 2) $y=|x|+3$; 3) $y=|x+2|$; 4) $y=|x-3|$ функцияларнинг графикларини ҳосил қилиш мумкин?

21. $y=|x+2|$ функциянинг: 1) аниқланиш соҳасини, 2) илдизини, 3) камайиши ёки ўсишини, 4) ишорасини, 5) қийматлар соҳасини аниқланг.

22. 45-*в* расм ва 45-*г* расмлардан фойдаланиб, бу расмларда берилган функцияларнинг: 1) аниқланиш соҳасини, 2) илдизларини, 3) ўсиш ва камайишини, 4) ишорасини аниқланг.

23.

1) $f(x)=\begin{cases} -x-2, & x\in]-4;\ -1], \\ -1, & x\in[-1;\ 1[, \\ x-2, & x\in[1;\ 5[. \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\in[-3;\ 0], \\ -x+3, & x\in]0;\ 3], \\ 2x-6, & x\in[3;\ 5]. \end{cases}$

1) $f(-3)$; $f(-0{,}5)$, $f(2)$, $f(4)$ ларни топинг;
2) графигини чизинг; 3) қийматлар соҳасини аниқланг.

24.*

1) $h(x)=\begin{cases} x^2, & x\in]-\infty;\ 0], \\ \frac{1}{2}x, & x\in]0;\ +\infty[. \end{cases}$

2) $h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x\in]-\infty;\ 0[, \\ \frac{1}{2}, & x\in]0;\ \infty[. \end{cases}$

1) $h(-2)$, $h(-0{,}3)$, $h(4)$, $h(6{,}4)$ ларни топинг; 2) графигини чизинг; 3) қийматлар соҳасини аниқланг; 3) а) илдизини, б) ишорасини, в) ўсиши ёки камайишини аниқланг.

3-§. Тенг кучли жумлалар

„a сонининг охирги рақами беш" ва „a сони 5 га каррали (бўлинади)" деган жумлаларнинг мазмунини таҳлил қилайлик.

Бу жумлаларнинг ҳар бири a ўзгарувчининг баъзи қийматларида тўғри мулоҳазага айланса, баъзиларида нотўғри мулоҳазага айланади. Масалан, $a=40$ бўлса, биринчи жумла нотўғри, иккинчиси эса тўғри (ҳақиқий), $a=13$ бўлса, биринчи жумла ҳам, иккинчиси ҳам нотўғри, $a=65$ бўлса, ҳар иккала жумла ҳам тўғри, яъни ҳақиқий мулоҳазага айланади. a сонининг бирор қийматида биринчи жумла тўғри бўлса, иккинчиси ҳам тўғри бўлади, яъни биринчи жумланинг ҳақиқийга айланишидан иккинчиси ҳам ҳақиқийга айланади. Бундай ҳолда иккинчи жумла биринчисидан келиб чиқади дейилади ва $\Rightarrow$ белги билан ёзилади, яъни: (a сонининг охирги рақами беш) $\Rightarrow$ (a сони 5 га каррали). Бу ёзув шундай ўқилади: a сонининг охирги рақами беш бўлса, a сони 5 га каррали бўлади ёки a сонининг охирги рақами 5 бўлишидан a сонининг 5 га каррали экани келиб чиқади.

Мисоллар. 1) $2x-5=0$ ва $(2x-5)(3x+2)=0$ тенгламаларнинг ҳар бири x ўзгарувчили жумла бўлиб, x нинг $x=2,5$ қийматида биринчи тенглама ҳақиқий мулоҳазага (тўғри тенгликка) айланса, иккинчи тенглик ҳам ҳақиқий мулоҳазага (тўғри тенгликка) айланади. Демак,

$$(2x-5=0) \Rightarrow ((2x-5)(3x+2)=0).$$

2) $y<0$ ва $y<3$ тенгсизликлар y ўзгарувчили жумлалар бўлиб, y нинг бирор қийматида биринчи тенгсизлик ҳақиқий мулоҳазага (тўғри тенгсизликка) айланса, иккинчи тенгсизлик ҳам ҳақиқий мулоҳазага (тўғри тенгсизликка) айланади. Демак,

$$(y<0) \Rightarrow (y<3).$$

3) ($\angle A$ ва $\angle B$—қўшни бурчаклар) $\Rightarrow$ ($\hat{A}+\hat{B}=180°$).

Энди b ўзгарувчили иккита жумлани таҳлил қилайлик: „b сонининг охирги рақами ноль“ ва „b сони 10 га каррали (бўлинади)“. Бу икки жумланинг биринчисидан иккинчиси ва, аксинча, иккинчидан биринчиси келиб чиқади, яъни:

(b сонининг охирги рақами ноль) $\Rightarrow$ (b сони 10 га каррали);

(b сони 10 га каррали) $\Rightarrow$ (b сонининг охирги рақами ноль).

Таъриф. *Агар биринчи жумладан иккинчиси, иккинчисидан биринчиси келиб чиқса, бундай икки жумлалар тенг кучли дейилади.*

Бундай жумлалар $\Leftrightarrow$ белги ёрдамида ёзилади.

(b сонининг охирги рақами ноль) $\Leftrightarrow$ (b сони 10 га каррали). Бу ёзув: 1) b сонининг охирги рақами ноль бўлса, 10 га каррали бўлади (бўлинади), 2) b сони 10 га каррали бўлса, охирги рақами ноль бўлади, 3) b охирги рақами ноль бўлган сон бўлсагина, 10 га каррали бўлади (бўлинади), 4) „b охирги рақами ноль бўлган сон“ деган жумла „b 10 га каррали“ деган жумлага тенг кучли ва ҳ. к. эканини билдиради.

Тенг кучли жумлаларга мисоллар келтирамиз:

1) $(5x=1) \Leftrightarrow (x=0,2)$; 2) ($a$—мусбат) $\Leftrightarrow$ ($-a$—манфий);
3) $(y>2) \Leftrightarrow (2y>4)$; 4) ($\angle A$—тўғри бурчак) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\hat{A}=90°)$.

Машқлар

25. Ёзувни ўқинг: 1) (b охирги рақами 6 бўлган сон) $\Rightarrow$ b жуфт сон); 2) $x-4=0) \Rightarrow (2x-8=0)$; 3) $(2x>4) \Rightarrow (x>2)$; 4) (a, b, c тўғри бурчакли учбурчак томонлари, c—гипотенузанинг узунлиги) $\Rightarrow (a^2+b^2=c^2)$.

26. Иккинчи жумла биринчисидан келиб чиқадими: 1) (a ва b мусбат сонлар) ва ($a+b$ мусбат сон); 2) (a ва b манфий сонлар) ва (ab мусбат сон); 3) (c мусбат, d манфий сон) га ($c+d$ мусбат сон); 4) (a ва b мусбат сонлар, $n \in N$) ва ($an+bn$ мусбат сон)?

27. Иккинчи тенглама биринчисидан келиб чиқадими: 1) $7x=7$ ва $x=1$; 2) $2x-3=0$ ва $2x=3$; 3) $2x+y=3$ ва $4x+2y=6$?

28. Биринчи жумла иккинчисидан келиб чиқадими ёки иккинчиси биринчисидан келиб чиқадими? Шунга қараб уларнинг ўртасига логик хулоса белгисини қўйинг: 1) $a=1$ ва $a^2=1$; 2) $|b|=2$ ва $b=-2$; 3) $3x=0$ ва $5x(y+1)=0$; 4) $x^2-x=0$ ва $2x=0$; 5) $x+1=0$ ва $\frac{x+1}{10}=0$; 6) $\frac{2y-1}{5}=0$ ва $2y-1=0$.

29. Ёзувни ўқинг:

1) $(x<1) \Leftrightarrow (x-1<0)$; 2) ($a-b$ мусбат сон) $\Leftrightarrow (a>b)$; 3) $(a=b) \Leftrightarrow (a+c=b+c)$; 4) ($r$ — айлана радиуси) $\Leftrightarrow$ ($2\pi r$ — айлана узунлиги).

30. Жумлалар тенг кучли бўлса, орасига $\Leftrightarrow$ белги қўйинг: 1) a ва b мусбат сонлар, $a+b$ мусбат сон; 2) $a=0$ ва $b=0$, $a+b=0$; 3) a ва b тоқ сонлар, ab кўпайтма тоқ сон; 4) a ва b жуфт сонлар, ab кўпайтма жуфт сон; 5) $a=b$ ва $c=d$, $a+c=b+d$; 6) $a>0$ ва $-a<0$.

31. Тенг кучли жумлаларга мисоллар келтиринг.

4-§. Тенг кучли тенгламалар. Тенглама илдизининг йўқолиши ва чет (бегона) илдизнинг ҳосил бўлиши

Таъриф. *Иккита тенгламадан бирининг илдизлари иккинчисининг ҳам илдизлари бўлса ва, аксинча, иккинчисининг илдизлари биринчисининг ҳам илдизлари бўлса, улар тенг кучли тенгламалар деб аталади.*

Масалан, $7x-3=x+3$ ва $4+2x=6x$ тенгламаларнинг ҳар иккаласининг илдизи ҳам 1 га тенг, яъни улар тенг кучли тенгламалар бўлиб, қуйидагича ёзилади:

$$(7x-3=x+3) \Leftrightarrow (4+2x=6x).$$

$(x-3)(x-1)=0$ ва $x-3=0$ тенгламалар тенг кучли эмас, чунки биринчи тенглама иккита илдизга эга (илдизлари 3 ва 1), иккинчи тенглама эса битта ($x=3$) илдизга эга. 1-тенгламанинг илдизи $x=1$ 2-тенгламага илдиз бўла олмайди.

Изоҳ. Илдизлари бўлмаган тенгламалар ҳам тенг кучли тенгламалар деб ҳисобланади.

1-теорема. *Агар тенгламанинг иккала қисмига бир хил сон ёки ўзгарувчининг барча қийматлари учун аниқланган бир хил ифода қўшилса ёки айрилса, ҳосил бўлган янги тенглама берилган тенгламага тенг кучли бўлади.*

Масалан, $11x-4=x+6$ тенглама $x=1$ дан иборат битта илдизга эга. Бу тенгламанинг ҳар икки қисмига $4-x$ ни қўшсак:

$$11x-4+4-x=x+6+4-x.$$

Бу тенглама $x=1$ дан иборат битта илдизга эга. Демак,

$$(11x-4=x+6) \Longleftrightarrow (11x-4+4-x=x+6+4-x).$$

1-натижа. Агар тенгламанинг ҳар икки қисмида ўзгарувчининг барча қийматларида аниқланган бир хил ҳадлар бўлса, уларни ташлаб юбориш мумкин.

Мисоллар. 1) $(3x-1)+2x=5+2x$ тенгламанинг илдизи $x=2$. Агар бу тенгламанинг ҳар икки қисмига $-2x$ ни қўшсак (бу ифода ўзгарувчининг барча қийматларида аниқланган), $3x-1+2x-2x=5+$ $+2x-2x$ ёки $3x-1=5$ тенглама ҳосил бўлиб, бу тенгламанинг ҳам илдизи $x=2$. Демак,

$$(3x-1)+2x=5+2x \Longleftrightarrow 3x-1=5.$$

2) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x-10}=5+\frac{3}{x-10}$.

Тенгламанинг ҳар икки қисмидаги $\frac{3}{x-10}$ ифодани ташлаб юбориш мумкин эмас, чунки бу ифода $x=10$ бўлганда аниқланмаган. Ҳақиқатан ҳам, бу ифодани тенгликнинг ҳар икки қисмидан ташлаб юборсак, ҳосил бўлган тенглама берилган тенгламага тенг кучли бўлмайди, чунки $\frac{x}{2}=5$ тенгламанинг илдизи $x=10$ берилган тенгламанинг илдизи бўла олмайди ($x=10$ бўлганда берилган тенглама маънога эга бўлмайди).

2-натижа. Ўзгармас сонни ёки ўзгарувчининг барча қийматлари учун аниқланган ихтиёрий қўшилувчини унинг ишорасини қарама-қаршисига ўзгартириб, тенгламанинг бир қисмидан иккинчи қисмига ўтказиш мумкин.

Масалан, $7x-1=23-x$ тенгламанинг ҳар икки қисмига $1+x$ ни қўшсак, $7x-1+1+x=23-x+$ $+1+x$ ёки $7x+x=23+1$.

$$7x-1=23-x \Longleftrightarrow 7x+x=23+1.$$

2-теорема. *Агар тенгламанинг иккала қисми нолга тенг бўлмаган бир хил сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, ҳосил бўлган тенглама берилган тенгламага тенг кучли бўлади.*

Масалан, $\frac{x}{2}-1=2$ тенгламанинг илдизи $x=6$. Агар бу тенгламанинг ҳар икки қисмини 2 га кўпайтирсак, $x-2=4$ тенглама ҳосил бўлади ва бу тенгламанинг ҳам илдизи $x=6$ бўлади. Демак,

$$\frac{x}{2}-1=2 \Longleftrightarrow x-2=4.$$

1-натижа. Берилган тенглама барча ҳадларининг ишорасини қарама-қаршисига алмаштириш мумкин.

Эслатма. Тенгламанинг ҳар иккала қисмини ҳамма вақт ўзгарувчиларни ўз ичига олган ифодага кўпайтириш (ёки бўлиш) мумкин эмас.

Масалан, $2x-1=7$ тенгламанинг илдизи $x=4$. Агар бу тенгламанинг ҳар иккала қисмини x га кўпайтирсак, $(2x-1)x=7x$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама $x=4$ дан бошқа $x=0$ илдизга ҳам эга бўлади, лекин берилган тенгламага тенг кучли бўлмайди. Бундай ҳолда ҳосил бўлган, аммо берилган тенгламани қаноатлантирмайдиган илдиз $x=0$ га чет илдиз деб аталади. $x^2-x=0$ тенгламанинг илдизлари 0 ва 1 (текшириб кўринг!). Агар бу тенгламанинг ҳар икки қисмини x га бўлсак, $x-1=0$ тенглама ҳосил бўлади ва бу тенглама $x=1$ дан иборат биргина илдизга эга бўлади. Демак, у берилган тенгламага тенг кучли эмас. Бу ҳолда берилган тенгламани x га бўлиш натижасида битта илдизи йўқолди дейилади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ҳар икки қисмини ўзгарувчини ўз ичига олган ифодага кўпайтириш ёки бўлиш натижасида чет илдиз ҳосил бўлиши ёки илдизнинг йўқолиши мумкин.

Машқлар

Тенгламалар тенг кучли бўлса, орасига $\Leftrightarrow$ белги қўйинг:

32. 1) $5x-3=0$ ва $5x=3$; 4) $x^2-x=0$ ва $x^2=x$;
2) $x-2y=3$ ва $4x-8y=12$; 5) $x^2=9$ ва $|x|=3$;
3) $x-1=0$ ва $x(x-1)=0$; 6) $|y|=4$ ва $y=2$.

33. 1) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ ва $(x-1)(x+1)=0$; 2) $(x-1)(x^2+2)=0$ ва $5(x-1)=0$.

34. Берилган тенгламага тенг кучли бўлган тенглама тузинг: 1) $5x-4=1$; 2) $x^2-5x=0$; 3) $(x^2+1)(2x-1)=0$; 4) $x^2=3x$.

35. Тенг кучли тенгламаларга мисоллар келтиринг.

5-§. Биринчи даражали бир ўзгарувчили тенглама

Таъриф. *Биринчи даражали бир ўзгарувчили тенглама деб*

$$ax+b=0 \tag{3}$$

кўринишдаги ёки айнан алмаштиришлардан сўнг (3) *кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгламага айтилади*, бунда x — номаълум сон, a ва b (озод ҳад) берилган ихтиёрий сон.

Биринчи даражали бир ўзгарувчили тенглама (3) кўринишда бўлмаса, у қуйидаги тартибда ечилади:

1) тенглама каср кўринишида бўлса, уни каср ҳадлардан қутқарилади; 2) қавслар бўлса, улар очилади; 3) номаълум ҳадларни тенгламанинг бир қисмига, маълумларини эса тенгламанинг иккинчи қисмига ўтказилади; 4) ўхшаш ҳадлар ихчамланади ва ниҳоят; 5) тенгламанинг иккала қисмини ўзгарувчи олдидаги коэффициентга бўлинади.

Топилган қийматни берилган тенгламага қўйиб, тенглама тўғри-нотўғри ечилганини текшириш мумкин.

Берилган тенглама устида 1 — 4- пунктларда баён қилинган ишлар бажарилса, у

$$ax=b \tag{4}$$

кўринишга келади. Бунда $a\neq 0$, b — берилган ихтиёрий сон. (4) тенгламага биринчи даражали бир ўзгарувчили тенгламанинг нормал шакли дейилади.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{3x-4}{2}+\frac{x+5}{3}-x=\frac{x+2}{6}+2.$$

Ечиш. Тенгламанинг барча ҳадларини 6 га кўпайтирамиз[1]:

$$3(3x-4)+2(x+5)-6x=x+2+12.$$

Қавсларни очамиз:

$$9x-12+2x+10-6x=x+14.$$

Номаълум ҳадларни тенгламанинг чап қисмига, маълум ҳадларни эса тенгламанинг ўнг қисмига ўтказамиз:

$$9x+2x-6x-x=14+12-10.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$4x=16.$$

Тенгликнинг ҳар икки қисмини ўзгарувчи олдидаги коэффициент 4 га бўламиз. У ҳолда $x=4$.

Текшириш. $\frac{3\cdot 4-4}{2}+\frac{4+5}{3}-4=4+3-4=3$, $\frac{4+2}{6}+2=1+2=3$, яъни $3=3$. Тенглама тўғри ечилган. *Жавоб:* $\{4\}$.

Ҳар қандай тенглама берилганда ҳам юқорида санаб ўтилган 5 пунктнинг ҳаммасини бажариш шарт эмас. Масалан, берилган тенглама каср кўринишда бўлмаса, касрдан қутқариш керак бўлмайди. Қавслар ҳосил бўлмаса, қавс очишга зарурият қолмайди ва ҳ. к.

Машқлар

Тенгламани ечинг:

36. 1) $7x-4=5x-2$; 2) $13-2x=33-7x$; 3) $3(x-2)-2(4x-13)=2+(3-2x)$; 4) $5x-(7-2x)-(4x+8)=2x$.

37. 1) $(7x-4)4=12$; 2) $5(x-2)-3(x-3)=3$; 3) $3(5-2y)-2(2y+1)+4(3y-2)=9$; 4) $5(x-1)+3(3x-4)-2(2x-3)=19$.

38. 1) $(2x-3)(2x+3)-(4x^2-17)=8$; 2) $(x+3)(x-1)-(x-2)(x+4)=5$; 3) $(x+3)^2-(x+2)(x-2)=37$; 4) $(x+4)^2-(x+1)^2+3(x+3)=6$.

---

[1] 6 берилган тенгламанинг барча ҳадларининг умумий махражи.

39. 1) $2x-\frac{16-x}{3}=\frac{x+3}{2}+6;$

2) $\frac{5x+21}{3}-2x=\frac{4-3x}{4}+\frac{8x+62}{8};$

3) $\frac{x-0,5}{4}+\frac{x-0,25}{3}+\frac{x+0,125}{2}=0;$

4) $\frac{2(x+2)}{3}-\frac{3(x-4)}{4}=\frac{4(x-6)}{5}-\frac{5(x+8)}{6}.$

6-§. Тенглама тузиш билан масалалар ечиш

1-масала. Математика факультетининг 1, 2, 3-курс студентлари бир кунда 31267 кг пахта теришди. Биринчи курс студентлари иккинчи курс студентларига қараганда 4343 кг ортиқ, учинчи курс студентлари эса 1195 кг кам пахта терди. Иккинчи курс студентлари неча кг пахта терган?

Ечиш. Иккинчи курс студентлари x кг пахта терган бўлсин. У ҳолда биринчи курс студентлари $(x+4343)$ кг, учинчи курс студентлари эса $(x-1195)$ кг, учала курс студентлари эса

$$x+(x+4343)+(x-1195)=31267$$

кг пахта терган бўлади. Бу тенгламани ечсак: $3x=28119$ ёки $x=9373$ (кг).

Текшириш. Биринчи курс студентлари 9373 кг$+$ $+$4343 кг$=$13716 кг, учинчи курс студентлари 9373 кг$-$ $-$1195 кг$=$8178 кг, учала курс студентлари эса 13716 кг$+$9373 кг$+$8178 кг$=$31267 кг пахта терган.

Жавоб. Иккинчи курс студентлари 9373 кг пахта терган.

2-масала. ИЛ-18 самолёти соатига 900 км тезлик билан учди. Самолёт учиб ўтганига қараганда 400 км кам масофа қолганда у соатига 700 км тезлик билан учди. Самолётнинг бутун йўлдаги ўртача тезлиги соатига 800 км бўлган бўлса, самолёт ҳаммаси бўлиб неча км учиб ўтган?

Ечиш. Самолёт соатига 900 км дан юрган масофани x(км) деб белгиласак, у яна $(x-400)$ км учиши керак бўлади. У ҳолда самолёт ҳаммаси бўлиб

$$x+(x-400)=(2x-400)$$

км учган бўлади. Самолётнинг ўртача тезлиги соатига

800 км бўлса, у бутун йўлга $\frac{2x-400}{800}$ соат сарфлаган.

Йўлнинг 1-қисмига $\frac{x}{900}$ соат, 2-қисмига эса $\frac{x-400}{700}$ соат, ҳамма йўлга эса $\frac{x}{900}+\frac{x-400}{700}$ соат сарфланган.

Самолётнинг бутун йўлни учиб ўтишга сарф қилган вақтининг икки хил ифодаси топилди. Бу ифодалар бир-бирига тенг бўлиши керак:

$$\frac{x}{900}+\frac{x-400}{700}=\frac{2x-400}{800}.$$

Тенгламанинг ҳар иккала қисмини 50400 га кўпайтирамиз:

$$56x+72(x-400)=63(2x-400),$$

$$56x+72x-28800=126x-25200 \quad \text{ёки} \quad 2x=3600.$$

Бундан: $x=1800$. Демак, йўлнинг 1-қисми 1800 км, 2-қисми 1800 км — 400 км = 1400 км. Бутун йўл 1800 км + + 1400 км = 3200 км экан.

Текшириш. Самолёт йўлнинг 1-қисмига $\frac{1800}{900}=2$ соат, 2-қисмига $\frac{1400}{700}=2$ соат, бутун йўлни учиб ўтишга 4 соат вақт сарфлаган. Ўртача тезлиги $\frac{3200}{4}=800$ км/соат.

Жавоб. 3200 км.

Машқлар

Тенглама тузиш билан қуйидаги масалаларни ечинг:

40. 1) Икки синфда 72 та ўқувчи бор. Улардан биридаги ўқувчилар иккинчисидагидан 6 та ортиқ. Ҳар қайси синфда нечта ўқувчи бор?

2) 24 ни шундай икки бўлакка бўлингки, биринчи бўлакнинг иккинчи бўлакка нисбати $\frac{3}{5}$ га тенг бўлсин.

41. 1) 85 ни шундай икки бўлакка бўлингки, биринчи бўлакни 2 га, иккинчи бўлакни 3 га бўлганда чиққан бўлинмалар тенг бўлсин.

2) Берилган сонни айирмаси 6 бўлган шундай икки бўлакка ажратингки, биринчи бўлакни 6 га, иккинчи бўлакни 5 га бўлганда ҳосил бўлган бўлинмалар тенг бўлсин.

42. 1) 96 ни шундай икки бўлакка бўлингки, биринчи бўлакни 3 га, иккинчисини 15 га бўлганда ҳосил бўлган бўлинмалар орасидаги айирма 2 га тенг бўлсин;

2) Икки сонинг бири иккинчисидан 9 та кам. Агар кичик сонни 9 га, каттасини 3 га бўлсак, биринчи бўлинма иккинчисидан 4 марта кичик бўлади. Иккала сонни топинг.

43. 1) Клубнинг томоша залида 22 қатор бор. Қаторлар сонини 2 та, ҳар қатордаги жойлар сонини эса 4 та орттирсак, клубдаги жойлар сони аввалгисидан 128 та ортади. Томоша залидаги жойлар нечта бўлди?

2) Материаллар арзонлаштирилгандан кейин газламанинг метри 2 сўм 55 тийинга арзонлашди. Натижада янги баҳода 25 м газлама эски баҳо билан 20 м газламага нисбатан фақат 1 сўм қиммат турадиган бўлди. Янги баҳода 1 м газлама қанча туради?

44. 1) 400 ни шундай икки бўлакка бўлингки, биринчи бўлакнинг 12% и билан иккинчи бўлакнинг 4% и биргаликда берилган сонинг 9% ини ташкил этсин.

2) Бир киши 2% фойда тўлайдиган омонат кассага пул қўйди. Бу киши бир йилдан кейин кассадан 360 сўм пул олиб, қолганини 3% дан фойда тўлайдиган муддатли омонат қилиб қолдирди. 2-йил охирида 417 сўм 15 тийин пули бор экани аниқланди. Бу киши дастлаб кассага қанча пул қўйган?

45. 1) A дан B га қараб соатига 48 км юрадиган поезд йўлга чиқди. 45 минутдан кейин B дан A га қараб соатига 50 км юрадиган поезд жўнади. Агар A дан B гача 232 км бўлса, поездлар B дан қандай масофада учрашадилар?

2) Ораларидаги масофа 11 км бўлган A ва B қишлоқлардан соат 7 да иккита йўловчи бир-бирига қараб йўлга чиқди. Улар 4,5 км соат ва 3,5 км/соат тезлик билан юрса, соат нечада уларнинг орасидаги масофа 1 км бўлиб қолади?

46. Бир бочкада 940 л, иккинчисида 480 л сув бор эди. Биринчи бочкадан соатига иккинчисига нисбатан уч баравар ортиқ сув қуйиб олина бошланди. 5 соатдан сўнг биринчи бочкада иккинчисига нисбатан 40 л кам сув қолди. Ҳар қайси бочкадан соатига неча литр сув қуйиб олинди?

47 Иккита катер бир вақтда A пристандан 100 км наридаги B пристанга жўнади. Биринчи катер соатига иккинчисига нисбатан 3 км ортиқ юриб, 4 соатдан кейин унга нисбатан B пристанига 2 марта яқинроқ масофада бўлди. Ҳар қайси катернинг тезлигини топинг.

48. Мотоциклчи M шаҳардан N шаҳарга жўнади. Агар у 35 км/соат тезлик билан юрса, 2 соат кечикади, 50 км/соат тезлик билан юрса, N шаҳрига муддатидан 1 соат олдин келади. M дан N гача неча км?

49. Катер бирор масофани оқим бўйича 5 соат юрса, оқимга қарши эса шу масофани 6 соат-у 16 минутда ўтади. Оқим тезлиги 2,4 км/соат бўлса, катернинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

7-§. $|ax+b|=c$ кўринишдаги тенгламалар

$|x|=5$ тенгламага x нинг ўрнига $+5$ қўйсак ҳам, -5 қўйсак ҳам у тенгламани қаноатлантиради. Демак, бу тенглама 2 та илдизга эга. *Жавоб.* $\{-5;\ 5\}$.

$|x|=0$ тенглама фақат $x=0$ дан иборат илдизга эга бўлади. $|x|=-3$ тенглама эса ечимга эга бўла олмайди, чунки x нинг ҳар қандай қийматида ҳам

$|x| \geqslant 0$ бўлгани сабабли $|x|$ нинг манфий сонга тенг бўлиши мумкин эмас.

$|ax+b|$ ифода x нинг ҳар қандай қийматида ҳам манфий бўла олмайди, нолга ёки мусбат сонларгагина тенг бўлади. Демак,

$$|ax+b|=c \tag{5}$$

тенглама фақат $c \geqslant 0$ бўлгандагина ечимга эга бўлади. $c<0$ бўлганда ечимга эга бўлмайди.

1-мисол. $|4x-1|=7$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Абсолют қиймат белгиси ичидаги $4x-1$ ифода $+7$ га тенг бўлса ҳам, -7 га тенг бўлса ҳам тенглик бажарилаверади. Шу сабабдан $4x-1=-7$ ва $4x-1=7$ тенгламаларни ечамиз. Биринчисидан $x=-1{,}5$; иккинчисидан $x=2$.

Текшириш. 1) $|4\cdot(-1{,}5)-1|=|-6-1|=|-7|=7$; 2) $|4\cdot 2-1|=7$. *Жавоб.* $\{-1{,}5;\ 2\}$.

Демак, берилган тенгламанинг ечими $4x-1=-7$ ёки $4x-1=7$ тенгламаларидан бирини қаноатлантиради ва, аксинча, $4x-1=-7$ ёки $4x-1=7$ тенгламанинг ечими берилган тенгламани қаноатлантиради. Бундай ҳолда берилган тенглама бу икки тенгламага тенг кучли дейилади ва

$$|4x-1|=7 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-1=-7,\\ 4x-1=7\end{array}\right.$$

каби ёзилади.

Берилган тенгламанинг ечилишини қуйидагича расмийлаштириш мумкин:

$$|4x-1|=7 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-1=-7,\\ 4x-1=7\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=-6,\\ 4x=8\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1{,}5,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Жавоб. $\{-1{,}5;\ 2\}$.

Тенгламалар тўпламининг ечими деб шундай сонлар тўпламига айтиладики, бу тўпламга тегишли ҳар бир сон тенгламалар тўпламини ташкил этувчи тенгламалардан камида битгасининг ечими бўлади. Масалан, $\left[\begin{array}{l}x+4=0\\ x-1=0\end{array}\right.$ тенгламалар тўпламининг ечими $\{-4;\ 1\}$, $\left[\begin{array}{l}x+1=0,\\ x-2=0,\\ -x-3=0\end{array}\right.$ тенгламалар тўпламининг ечими эса $\{-1;\ 2;\ 3\}$.

Эслатма. $(2x+1)(3x-2)(x-5)=0$ кўринишдаги тенгламани ечиш ҳам тенгламалар тўпламини ечишдан иборат. Чунончи:

$$(2x+1)(3x-2)(x-5)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=0,\\ 3x-2=0,\\ x-5=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2},\\ x=\frac{2}{3},\\ x=5.\end{array}\right. \quad \text{\textit{Жавоб.}} \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 5\right\}.$$

2-мисол. Тенгламани ечинг: $|2x-5|=0$.

Ечиш. $|2x-5|=0 \Longleftrightarrow 2x-5=0 \Longleftrightarrow x=2{,}5$.

Жавоб. $\{2, 5\}$.

Машқлар

50. Қандай тенгламалар тўпламининг ечими: 1) $\{-3;\ 6\}$ тўпламдан; 2) $\{-9;\ 2{,}1;\ 7\}$ тўпламдан; 3) $\{0;\ -1;\ 1\}$ тўпламдан иборат бўлади?

Тенгламани ечинг:

51. 1) $|2x|=1$; 2) $|2-5x|=7$; 3) $|3-4x|=10$; 4) $|8x-0{,}6|=3$; 5) $|11x+1{,}1|=0$; 6) $|2x-5|=13$.

52. 1) $\dfrac{4}{|x-5|}=3$; 2) $\dfrac{0{,}02}{|x+0{,}01|}=4$; 3) $0{,}2|x+5|=-a$.

V БОБ

БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

1-§. Икки ўзгарувчили чизиқли тенглама ва унинг графиги

1-таъриф. *Биринчи даражали икки ўзгарувчили тенглама деб*

$$ax+by=c \qquad (1)$$

кўринишдаги ёки айний алмаштиришлардан сўнг (1) кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгламаларга айтилади.

Бунда x ва y ўзгарувчилар, a, b ва c сонлар бўлиб, a ва b дан ақалли биттаси нолга тенг эмас.

$(5;\ 2)$, $(-1;\ -2,5)$, $(9;\ 5)$ сонлар жуфти $3x-4y=7$ тенгламани тўғри тенгликка айлантиради (текшириб кўринг!). Бундай сонлар жуфти $3x-4y=7$ тенгламанинг ечими дейилади.

2-таъриф. *Икки ўзгарувчили тенгламанинг ечими деб шу тенгламани тўғри тенгликка айлантирадиган ўзгарувчиларнинг қийматлари жуфтига айтилади.*

$3x-4y=7$ тенгламани y га нисбатан ечсак, $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$ тенглама ҳосил бўлади. Унда x га ҳар хил сон қийматлар бериб, y нинг унга мос қийматларини топамиз. x ва y нинг топилган қийматлар жуфти берилган тенгламани қаноатлантиради, яъни унинг ечимлари бўлади. Демак, бу тенгламанинг ечимлар тўплами чексиз тўпламдир.

Демак, икки ўзгарувчили тенгламанинг графиги координаталари шу тенгламанинг ечими бўлган нуқталар тўпламидан иборатдир.

(1) тенгламада $b \neq 0$ бўлса, унинг ҳар икки қисмини b га бўлиб,

$$\frac{a}{b}x+y=\frac{c}{b} \qquad \text{ёки} \qquad y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

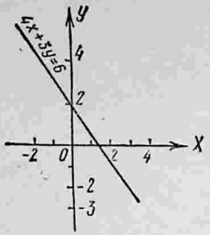
кўринишга келтирамиз. Бунда $-\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{b}=b'$ деб белгиласак,

$$y=kx+b'$$

чизиқли функция ҳосил бўлади. Бунинг графиги эса тўғри чизиқдир. Демак, $b \neq 0$ бўлганда (1) тенгламанинг графиги тўғри чизиқ экан.

(1) тенгламада $b=0$ бўлса, $ax+0y=c$ $(a \neq 0)$. Бу тенгламанинг графиги нимадан иборат? $3x+0y=6$ тенгламада x ўзгарувчи 2 га тенг, y эса ихтиёрий сон. Демак, $(2; -3)$, $(2; 0)$, $(2; 7)$ ... сонлар жуфти тенгламани қаноатлантиради (ечим бўлади). Шундай қилиб, $3x+0\cdot y=6$ нинг графиги координаталар текислигида абсциссаси 2 дан, ординатаси эса ихтиёрий сондан иборат бўлган нуқталар тўпламидан иборат бўлади, яъни тенгламанинг графиги $A(2; 0)$ нуқтадан y ўқига параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқдан иборат.

Демак, $b=0$, $a \neq 0$ бўлганда (1) тенгламанинг графиги тўғри чизиқ экан. Шунинг учун (1) кўринишдаги тенгламага *икки ўзгарувчили чизиқли тенглама* дейилади.



46- расм.

(1) тенгламанинг графиги тўғри чизиқ бўлгани учун унинг графигини чизишда икки нуқтасини топиш кифоя. (1) да $x = 0$ бўлса, $by = c$ дан $y = \frac{c}{b}$ бўлиб, $A\left(0; \frac{c}{b}\right)$ нуқта, $y = 0$ бўлса, $ax = c$ дан $x = \frac{c}{a}$ бўлиб, $B\ \left(\frac{c}{a}; 0\right)$ нуқта аниқланади. A ва B орқали тўғри чизиқ чизилади.

$4x + 3y = 6$ тенгламанинг графигини ясайлик.

$x = 0$ бўлса, $y = 2$ бўлади. $y = 0$ бўлса, $x = 1{,}5$ бўлади. Координаталар текислигида $A(0; 2)$ ва $B(1{,}5; 0)$ нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз (46- расм).

Машқлар

1. $(1; -1)$, $(2; -2)$, $(2; 1)$, $(3; -3)$ сонлар жуфти: 1) $2x - 5y = 7$; 2) $3x + 7y = 13$ тенгламанинг ечими бўладими?

2. Тенгламанинг графигини чизинг: 1) $x - y = 2$; 2) $2x + y = 4$; 3) $x = 1 - y$; 4) $0x - 2y = 4$; 5) $3x + 0 \cdot y = -6$; 7) $2x + 3y - 6 = 0$.

3. Шундай чизиқли тенглама тузингки: 1) $(3; -0{,}25)$; 2) $(-2; 4)$; 3) $(-5; 2)$ сонлар жуфти унинг ечими бўлсин.

2-§. Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаси ва уларни график усул билан ечиш

Икки ўзгарувчили $a_1x + b_1y = c_1$ тенгламанинг ечимлари тўплами A_1, $a_2x + b_2y = c_2$ тенгламанинг ечимлар тўплами A_2 бўлса, ҳар икки тенгламани қаноатлантирадиган, ҳар икки тенглама учун умумий бўлган ечимлар A_1 ва A_2 тўпламларнинг кесишмасидан, яъни $A_1 \cap A_2$ тўпламдан иборат бўлади.

Агар юқоридаги тенгламаларнинг ҳар иккаласини қаноатлантирадиган ечимлар тўпламини топиш талаб қилинса,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

система ечилади.

(2) системани ташкил этган ҳар икки тенгламанинг ҳам графиги тўғри чизиқ бўлгани учун уни икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаси ҳам дейилади.

1-таъриф. *(2) кўринишдаги ёки айни алмаштиришлардан сўнг (2) кўринишга келтириш мумкин бўлган системани икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаси дейилади.*

Бунда x ва y — ўзгарувчилар, a_1, b_1, c_1 ва a_2, b_2, c_2 — берилган сонлар.

Хусусий ҳолда x ва y нинг коэффициентларидан бири нолга тенг бўлиши ҳам мумкин.

(2) системага икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасининг *нормал* шакли дейилади.

2-таъриф. *Агар (2) системада $c_1 = c_2 = 0$ бўлса,*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

системага бир жинсли система дейилади; c_1 ва c_2 озод ҳадлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (2) системага бир жинслимас система дейилади.

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасидан учинчиси бир жинсли, қолганлари эса бир жинслимас системалардир:

1) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 2y - 3x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 7y = 1, \\ 2x = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 0{,}5 - y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 6x + 2y = 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 2x - 4y = 4. \end{cases}$

3-таъриф. *Икки ўзгарувчили икки тенглама системасини ташкил этувчи ҳар бир тенгламани қаноатлантирадиган ўзгарувчиларнинг қийматлар жуфти шу тенгламалар системасининг ечими дейилади.*

4-таъриф. *Тенгламалар системасини ечиш унинг барча ечимлар тўпламини топишдан иборатдир.*

$(x_0; y_0)$ сонлар жуфти юқоридаги 5) системанинг биринчи тенгламасини қаноатлантирса, яъни $x_0 - 2y_0 = 2$ бўлса, иккинчи тенгламани ҳам қаноатлантиради (ҳақиқатан ҳам, $2x_0 - 4y_0 = 2(x_0 - 2y_0) = 2 \cdot 2 = 4$). Биринчи тенглама чексиз кўп ечимга эга эди, бу ечимларнинг ҳар бири иккинчи тенгламанинг ҳам ечими бўлганидан 5) системанинг ҳам ечими бўлади. Демак, 5) система чексиз кўп ечимга эга.

Ечимга эга бўлмаган системалар ҳам бўлади. Бунга 4) система мисол бўла олади. Ҳақиқатан ҳам, 4) система бирор $(x_0; y_0)$ ечимга эга бўлганда эди биринчи тенгламанинг чап қисми $3x_0+y_0=1$ бўлганидан иккинчи тенгламанинг чап қисми $6x_0+2y_0=2(3x_0+y_0)$ эса 7 га эмас, 2 га тенг бўлиши керак эди. Демак, икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаси битта ёки чексиз кўп ечимга эга бўлиши; битта ҳам ечимга эга бўлмаслиги мумкин.

5-таъриф. *Камида битта ечимга эга бўлган система биргаликдаги система деб, биронта ҳам ечимга эга бўлмаган система эса биргаликда бўлмаган система деб аталади.*

1), 2), 3), 5) системалар биргаликдаги системалар, 4) система эса биргаликда бўлмаган системадир.

(2) системани график усул билан ечиш учун системани ташкил этган тенгламаларнинг графиклари — икки тўғри чизиқ чизилади. Бу икки тўғри чизиқ бир-бирига нисбатан уч хил вазиятда бўлади: 1) кесишади; 2) ўзаро параллел бўлади; 3) устма-уст тушади. Агар кесишса (битта умумий нуқтага эга бўлса), кесишув нуқтасининг координаталари системанинг биргина ечимини аниқлайди; тўғри чизиқлар параллел бўлса (умумий нуқтага эга бўлмаса), система ечимга эга бўлмайди; устма-уст тушса (умумий нуқталар тўплами чексиз кўп бўлса), ечим чексиз кўп бўлиб, тўғри чизиқ устидаги ихтиёрий нуқтанинг координаталари системанинг ечими бўлади.

Юқоридаги 1), 4) ва 5) системаларнинг график усулда ечилиши 47-*а*, *б*, *в* расмда тасвирланган. Бу системаларни ташкил этган тенгламаларни y га нисбатан ечсак, улар қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} y=-3x+7, \\ y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}; \end{cases} (4) \quad \begin{cases} y=-3x+1, \\ y=-3x+3{,}5; \end{cases} (4') \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1, \\ y=\frac{1}{2}x-1. \end{cases} (4'')$$

(4) системадаги тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари $\left(-3 \text{ ва } \frac{3}{2}\right)$ ўзаро тенг бўлмаганидан бу тўғри чизиқлар кесишган (47-*а* расм); (4′) системадаги тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг бўлиб, аммо бошланғич ординаталари (1 ва 3,5) тенг бўлмаганидан улар параллел (47-*б* расм); (4″) системада эса бурчак коэффициентлари $\left(\frac{1}{2}\right)$ ҳам, бошлан-

47-расм.

ғич ординаталари (−1) ҳам ўзаро тенг [illegible]
тўғри чизиқлар устма-уст жойлашган (47-в расм).

Машқлар

4. Тенгламалар системасини график усул билан ечинг:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y + x + 2 = 0, \\ 2y + x - 4 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x - 0{,}5y = 2. \end{cases}$

3-§. Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасини алгебраик қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш

Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаси (2) ни алгебраик қўшиш усули билан ечиш учун биринчи тенгламани b_2 га, иккинчисини $-b_1$ га кўпайтириб, ўзаро қўшсак,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = b_2c_1 - b_1c_2$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан x аниқланади.

Биринчи тенгламани $-a_2$ га, иккинчисини a_1 га кўпайтириб, ўзаро қўшсак, $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$ тенглама ҳосил бўлади ва бундан y аниқланади. Топилган x ва y нинг қийматлари (2) системанинг ечими бўлади. Масалан,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \qquad (5)$$

системани ечиш учун аввал биринчисини 3 га, иккинчисини -2 га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни қўшамиз ва ундан y ни топамиз. Сўнгра биринчи тенгламани -4 га, иккинчисини 3 га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни қўшамиз. Олинган тенгламадан эса x ни топамиз, яъни

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \left| \quad \begin{cases} 6x+9y=24, \\ -6x-8y=-22 \end{cases} \right.$$

$$y=2$$

$$\begin{cases} -8x-12y=-32, \\ 9x+12y=33. \end{cases}$$

$$x=1$$

(2) системани ўрнига қўйиш усули билан ечиш учун тенгламадан биридаги бирор ўзгарувчини (қулайлик учун коэффициенти кичик мусбат сон бўлганини) иккинчи ўзгарувчи орқали ифодалаб, бу ифода иккинчи тенгламага қўйилади.

Масалан, биринчи тенгламадан x ни топамиз: $x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}$ $(a_1\neq 0)$. Буни иккинчи тенгламага қўйсак,

$$a_2\cdot\frac{c_1-b_1y}{a_1}+b_2y=c_2$$

бир ўзгарувчили тенглама ҳосил бўлади ва ундан y аниқланади. y нинг қийматини $x=\frac{c_1-b_1y}{4a_1}$ ифодага қўйиб, x топилади.

(5) системани ўрнига қўйиш усули билан ечайлик.

Биринчи тенгламадан: $x=\frac{8-3y}{2}$. Буни иккинчи тенгламага қўйсак: $3\cdot\frac{8-3y}{2}+4y=11$ ёки $24-9y+8y=$ $=22$. Бундан $y=2$. y нинг қийматини $x=\frac{8-3y}{2}$ га қўйсак: $x=\frac{8-3\cdot 2}{2}$. Демак, $x=1$, $y=2$. *Жавоб*[1]. $\{(1;2)\}$.

Демак, (2) системани ҳар икки усулда ҳам ечиш бир ўзгарувчили (1- даражали) тенгламани ечишга келтирилар экан.

---

[1] Топилган ечимни системага қўйиб, ҳар қайси тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилинади.

Машқлар

Тенгламалар системасини ечинг:

5. (Оғзаки.)

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 2x+y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+5y=25, \\ x+y=13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y=7, \\ y-x=2. \end{cases}$

6. (Оғзаки.)

1) $\begin{cases} 2x=4, \\ 3y-x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 4y-4=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 2x-4y=11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 4x+2y=10. \end{cases}$

7. Ечими қуйидаги сонлар жуфтидан иборат бўлган икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасини ёзинг: 1) (3; 5), 2) (−2; 4), 3) (1,5; 7), 4) $\left(-1\frac{1}{3}; -2\frac{3}{4}\right)$.

8. Ечимга эга бўлмаган, чексиз кўп ечимга эга бўлган икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасига мисол келтиринг.

Системани ечинг:

9. 1) $\begin{cases} 3x+4y=19, \\ 5x+4y=21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12x-7y=22, \\ 3x+2y=13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-4y=26, \\ 2x+5y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x-3y=33, \\ 8x-5y=47. \end{cases}$

10. 1) $\begin{cases} \frac{7x}{6}+\frac{5y}{3}=34, \\ \frac{7x}{8}+\frac{y}{8}=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15, \\ y-\frac{y-x}{5}=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5}, \\ \frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0{,}25x+0{,}04y=2, \\ 0{,}4x+2{,}5y=64{,}1. \end{cases}$

11. 1) $\begin{cases} x-3=\frac{xy+13}{y+6}, \\ y-2=\frac{xy-13}{x+4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y-2)=(x+4)(y-1)-14, \\ (x+1)(y+3)-24=(x-1)(y-1). \end{cases}$

12. 1) $\begin{cases} \frac{8x+1{,}5}{5}-0{,}1=\frac{3(y-4)}{4}-7, \\ \frac{y-10}{8}=\frac{2x-5}{5}+1{,}05; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (2x-3y-1)(x-y)-6y^2= \\ \quad =(x-3y)(2x+y), \\ (x-1)(y+1)=(x+4)\times \\ \quad \times(y-3). \end{cases}$

4-§. Тенгламалар системаси тузиш билан масалалар ечиш

1-масала. 5 та ёзув дафтари билан 3 та умумий дафтар 1 сўм 52 тийин, 7 та ёзув дафтари билан 2 та умумий дафтар эса 1 сўм 16 тийин туради. 1 та ёзув дафтари неча тийин ва 1 та умумий дафтар неча тийин туради?

Е ч и ш. Ёзув дафтари x тийин, умумий дафтар y тийин турсин. 5 та ёзув дафтари $5x$ тийин, 3 та уму-

мий дафтар $3y$ тийин бўлиб, биргаликда 1 сўм 52 тийин$=$
$=152$ тийин туради, яъни

$$5x+3y=152.$$

7 та ёзув дафтари $7x$ тийин, 2 та умумий дафтар эса $2y$ тийин бўлиб, биргаликда 1 сўм 16 тийин $=116$ тийин туради, яъни

$$7x+2y=116.$$

Натижада

$$\begin{cases}5x+3y=152,\\7x+2y=116\end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиш учун биринчи тенгламани -2 га, иккинчисини 3 га кўпайтириб қўшсак, $11x=44$ ёки $x=4$ тийин. x нинг қийматини тенгламалардан бирига, масалан, биринчисига қўйсак, $5\cdot4+3y=152$ ёки $3y=132$. Бундан $y=44$ тийин.

Текшириш. 5 та ёзув дафтари $5\cdot4=20$ (тийин), 3 та умумий дафтар $3\cdot44=132$ (тийин), биргаликда $20+$ $+132=(152$ тийин), яъни 1 сўм 52 тийин туради. 7 та ёзув дафтари $7\cdot4=28$ (тийин), 2 та умумий дафтар $2\cdot44=88$ (тийин), биргаликда $28+88=116$ (тийин), яъни 1 сўм 16 тийин туради. *Жавоб.* 1 та ёзув дафтари 4 тийин, 1 та умумий дафтар 44 тийин туради.

2-масала. Агар икки хонали сонни шу сон рақамлари билан тескари тартибда ёзилган сонга бўлсак, бўлинмада 2, қолдиқда 7 чиқади. Агар рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сонни рақамлари йиғиндисига бўлсак, бўлинма 3 га тенг бўлиб, қолдиқ 5 га тенг бўлади. Шу икки хонали сонни топинг.

Ечиш. Икки хонали соннинг бирлар хонасидаги рақам y, ўнлар хонасидаги рақам x бўлсин. У ҳолда изланувчи сон $10x+y$, рақамларни тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон $10y+x$, рақамлар йиғиндиси эса $x+y$ бўлади. Масала шартига кўра:

$$\begin{cases}10x+y=2(10y+x)+7,\\10y+x=3(x+y)+5\end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases}8x-19y=7,\\7y-2x=5\end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Жавоб. 83[1].

[1] Жавобни текшириб кўришни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

Машқлар

13. 1) Йиғиндиси 58 га, айирмаси 24 га тенг бўлган икки сон топинг.

2) 84 ни шундай икки бўлакка бўлингки, биринчи бўлакни 4 га, иккинчисини 3 га бўлганда чиққан бўлинмалар тенг бўлсин.

14. 1) Икки сондан бирининг ярми билан иккинчисининг учдан бирининг айирмаси 6 га, бирининг тўртдан бири билан иккинчисининг ярмини йиғиндиси 39 га тенг. Шу икки сонни топинг.

2) Каср ҳадларига 5 тадан қўшсак, $\frac{4}{5}$ ҳосил бўлади, 1 тадан айирсак, $\frac{1}{2}$ ҳосил бўлади. Касрни топинг.

15. 1) 30 м икки хил газлама учун 512 сўм тўланди. Биринчи хилининг метри 18 сўм, иккинчи хилиники 16 сўм туради. Ҳар қайси хилидан неча метр олинган?

2) 4 м чит билан 5 м штапель 11 сўм 20 тийин, 7 м чит билан 3 м штапель 10 сўм 40 тийин туради. 1 м чит қанча, 1 м штапель қанча туради?

16. 1) Икки соннинг айирмаси 29. Катта сонни кичигига бўлганда бўлинмада 3, қолдиқда 1 ҳосил бўлади. Шу сонларни топинг.

2) Икки соннинг ўрта арифметик қиймати 110. Агар у сонлардан бирини иккинчисига бўлсак, бўлинмада 3, қолдиқда 12 ҳосил бўлади. Шу сонларни топинг

17. Икки уста бир ишни бажариб, 169 сўм пул олишди. Биринчи уста 12 кун, иккинчиси эса 17 кун ишлади. Агар иккинчи устанинг тўрт кунлик иши учун олган пули биринчи устанинг 5 кунлик иши учун олган пулидан 15 сўм кам бўлса, бу усталарнинг ҳар бири кунига қанчадан пул олган?

18. Икки колхоз биргаликда 58760 ц пахта топширди. Биринчи колхоз 860 га ерга, иккинчиси эса 820 га ерга пахта эккан эди. Агар биринчи колхоз ҳар 8 га ердан иккинчи колхознинг 5 га ердан олган ҳосилига қараганда 92 центнер ортиқ ҳосил топширган бўлса, ҳар бир колхоз 1 га ердан ўрта ҳисобда неча центнердан пахта топширган?

19. Иккита путёвка 270 сўм туради. Бу путёвкалар икки ишчига берилди. Бир ишчи путёвка баҳосининг 30% ини, иккинчиси эса 40% ини тўлади. Иккала ишчи биргаликда 93 сўм тўлаган бўлса, ҳар қайси ишчи путёвкага неча сўмдан тўлаган?

20. Иккита ишчи бир ишни биргаликда 8 соат бажариши мумкин эди. Биринчи ишчи 6 соат, иккинчи ишчи 9 соат ишлаб, ишнинг $\frac{51}{56}$ қисмини бажарди. Бу ишни ҳар бир ишчининг ёлғиз ўзи неча соатда тамом қилиши мумкин?

21. Шундай масала тузингки, уни ечиш учун

$$1)\ \begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 14; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 2y = 6{,}5 \end{cases}$$

системани ечиш лозим бўлсин.

22. 1) Колхозчиларнинг икки бригадаси биргаликда ишлаб, ҳосилни 12 кунда йиғиб-териб олишлари керак эди. 8 кун бирга ишлагандан кейин биринчи бригада бошқа ишга кўчирилди, иккинчи

бригада эса ишнинг қолган қисмини 7 кунда тамомлади. Ҳар қайси бригада алоҳида ишлаб, бу ишни неча кунда тамомлай олади?

2) Икки қувурдан сув келганда ҳовуз $9\frac{3}{8}$ соатда тўлади. Иккала қувур бир вақтда очилиб, 5 соат ишлаб турди; кейин иккинчи қувур бузилиб, уни ёпиб қўйишга тўғри келди. Биринчи қувур эса шундан сўнг ҳовузни 7 соатда тўлдирди. Шу ҳовузни ҳар қайси қувур ёлғиз ўзи қанча соатда тўлдирар эди?

23. Теплоход биринчи марта оқим бўйича 50 км ва оқимга қарши 248 км юришга 18 соат сарф қилди. Иккинчи марта оқим бўйича 90 км ва оқимга қарши 88 км юриш учун эса 10 соат сарф қилди. Теплоходнинг турғун сувдаги тезлигини ҳамда оқим тезлигини топинг.

5-§. Кўп ўзгарувчили тенгламалар системаси

Агар уч ўзгарувчили учта тенглама системаси, тўрт ўзгарувчили тўртта тенглама системаси берилса ҳам уни алгебраик қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш мумкин.

1-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\left\{\begin{array}{l|c|c|} 2x+3y-z=4, & 1 & 3 \\ x-2y+3z=9, & & 1 \\ 3x+y+z=10 & 1 & \end{array}\right.$$

Бу системани алгебраик қўшиш усули билан ечиш учун биринчи ва учинчи тенгламаларни қўшиб, $5x+4y=14$ тенгламани, биринчи тенгламани 3 га кўпайтириб, иккинчисига қўшиб, $7x+7y=21$ ёки $x+y=3$ тенгламани ҳосил қиламиз. Натижада қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} 5x+4y=14, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Уч ўзгарувчили учта тенглама системасини ечишни икки ўзгарувчили иккита тенглама системасини ечишга келтирдик. Ҳосил бўлган системани ечсак, $x=2$, $y=1$. x ва y нинг қийматларини берилган системани ташкил этувчи тенгламалардан бирига, масалан, учинчисига қўйсак, $2\cdot 3+1+z=10$. Бундан: $z=3$. Демак, $x=2$, $y=1$, $z=3$ ёки $(2;\ 1;\ 3)$. *Жавоб.* $\{(2;\ 1;\ 3)\}$.

Берилган системани ўрнига қўйиш усули билан ечиш учун учинчи тенгламадан z ни (коэффициенти 1 бўлгани учун) қолган ўзгарувчилар орқали ифодалаймиз:

$$z=10-3x-y. \qquad (6)$$

z нинг қийматини биринчи ва иккинчи тенгламага қўйсак:

$$2x+3y-(10-3x-y)=4,\quad x-2y+3(10-3x-y)=9;\quad \begin{cases}5x+4y=14,\\ -8x-5y=-21;\end{cases}\quad \begin{cases}5x+4y=14,\\ 8x+5y=21.\end{cases}$$

Бу системани ечсак, $x=2$, $y=1$. x ва y нинг қийматини (6) тенгликка қўйсак: $z=10-6-1=3$. Демак, $\{2;\ 1;\ 3\}$.

2-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}3x+y+2z-u=4,\\ x-2y-3z+4u=13,\\ 2x+3y-4z+2u=3,\\ 4x-y+5z-3u=5.\end{cases}\quad \begin{array}{|c|c|c|}1 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1\\ 1 & & 3\end{array}$$

Бу системани алгебраик қўшиш усули билан ечайлик. Биринчи ва тўртинчи тенгламаларни қўшсак: $7x+7z-4u=9$. Биринчи тенгламани 2 га кўпайтириб, иккинчисига қўшсак: $7x+z+2u=21$. Ниҳоят тўртинчи тенгламани 3 га кўпайтириб, учинчисига қўшсак, $14x+11z-7u=18$. Натижада уч ўзгарувчили учта тенглама системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases}7x+7z-4u=9,\\ 7x+z+2u=21,\\ 14x+11z-7u=18.\end{cases}$$

1-мисолда бундай системани ечишни кўрсатган эдик. Системанинг ечими: $x=2$, $y=-1$, $z=1$, $u=3$ бўлади. Бу ечимни қисқача $(2;\ -1;\ 1;\ 3)$ каби ёзиш мумкин. *Жавоб.* $\{(2;\ -1;\ 1;\ 3)\}$.

Машқлар

Тенгламалар системасини ечинг:

24. 1) $\begin{cases}2x+y+5z=2,\\ x+3y-2z=8,\\ 3x-y+3z=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x-2y=17,\\ 3y+4z=5,\\ 4x+3y+z=11\end{cases}$

3) $\begin{cases}2z+3y+5x=17,\\ -2y+4x+3z=9,\\ 9x-7y+5z=10;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}0{,}1x+0{,}4y+0{,}6z=1{,}2,\\ 0{,}2x+0{,}5y+0{.}9z=2{,}1.\\ 0{,}3x+0{,}7y+0{,}8z=2{,}1.\end{cases}$

25. 1) $\begin{cases}x-2y+3z-u=5,\\ -x+y-2z+3u=0,\\ 3x-y-2u+4z=0,\\ -2x+3y-z+u=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+y-5z+4t=2,\\ x+4y+z-3t=5,\\ 3x-5y+2z-2t=9,\\ 4x-3y-z-4t=2.\end{cases}$

6-§. „Сунъий усул“ лар билан ечиладиган тенгламалар системаси

Системани ташкил этган биринчи даражали тенгламалар сони системадаги ўзгарувчилар сонига тенг бўлса, бундай системани алгебраик қўшиш ёки ўрнига қўйиш усули билан ечиш (агар у ечимга эга бўлса) мумкин. Аммо баъзи бир биринчи даражали тенгламалар системасини ечишда „махсус муҳокама“ юритиш, яъни ўша системани ечишга хос „сунъий усул“ қўллаш билан системани осонгина ечиш мумкин.

1-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x + z = 5, \\ y + z = 3. \end{cases}$$

Ечиш. Учала тенгламани қўшсак, $2(x + y + z) = 14$ ёки $x + y + z = 7$. Бу тенгламадан юқоридаги тенгламаларни галма-гал айирсак, $z = 1$, $y = 2$, $x = 4$ экани аниқланади. *Жавоб.* $\{(4;\ 2;\ 1)\}$.

2-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x - y - z - u = 4, \\ -x + 2y - z - u = -2, \\ -x - y + 2z - u = -8, \\ -x - y - z + 2u = -5. \end{cases}$$

Ечиш. Тенгламаларни қўшсак, $-(x + y + z + u) = -11$ ёки $x + y + z + u = 11$. Ҳосил бўлган тенгламани системани ташкил этувчи ҳар бир тенгламага галма-гал қўшиш билан $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$, $u = 2$ экани аниқланади. *Жавоб.* $\{(5;\ 3;\ 1;\ 2)\}$.

Машқлар

26. Тенгламалар системаларини ечинг:

1) $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - y + z = 3, \\ -x + y + z = 5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + y - z = 6, \\ x - y + z = -4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z - u = 4, \\ x + y - z + u - 2, \\ x - y + z + u = 8, \\ -x + y + z + u = 6; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x + y + z + u = 2, \\ x + y + z - u = -6, \\ x + y - z + u = 8, \\ -x + y + z + u = 4. \end{cases}$

7-§. Ёрдамчи ўзгарувчи киритиш билан ечиладиган тенгламалар системаси

Баъзан тенгламалар системаси соддалаштирилгандан кейин (махраждан қутқариб, қавслар очилса ва ўхшаш ҳадлар ихчамланса) тенгламани ўзгарувчилар киритиш билан биринчи даражали тенгламалар системасига келтириб осонгина ечиш мумкин.

1 - м и с о л. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2y = 9 - \dfrac{2y}{x}, \\ 3y = 6 - \dfrac{2y}{x}. \end{cases}$$

Е ч и ш. Тенгламаларни умумий махражга келтирсак, иккинчи даражали система ҳосил бўлади. Аммо берилган системани ташкил этувчи ҳар қайси тенглама ҳадларини $y \neq 0$ га бўлсак,

$$\begin{cases} \dfrac{9}{y} - \dfrac{2}{x} = 2, \\ \dfrac{6}{y} - \dfrac{2}{x} = 3 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системада $\dfrac{1}{y} = u$, $\dfrac{1}{x} = v$ деб белгиласак,

$$\begin{cases} 9u - 2v = 2, \\ 6u - 2v = 3 \end{cases}$$

ёрдамчи тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани ечсак;

$$u = -\frac{1}{3},\ v = \frac{-5}{2}.$$

u ва v нинг қийматини ўрнига қўйсак:
$\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{3}$ дан $y = -3$, $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2}$ дан $x = -\dfrac{2}{5}$. *Жавоб.* $\{(-\dfrac{2}{5};\ -3)\}$.

2 - м и с о л. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+z} + \dfrac{6}{2x-y} + \dfrac{1}{y-3z} = 1, \\ \dfrac{6}{x+y+z} + \dfrac{4}{2x-y} - \dfrac{1}{y-3z} = 3, \\ \dfrac{15}{x+y+z} - \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{3}{y-3z} = 5. \end{cases}$$

Е ч и ш. $\dfrac{1}{x+y+z} = u$, $\dfrac{1}{2x-y} = v$, $\dfrac{1}{y-3z} = t$ деб белгиласак,

$$\begin{cases} 3u + 6v + t = 1, \\ 6u + 4v - t = 3, \\ 15u - 2v - 3t = 5 \end{cases}$$

ёрдамчи система ҳосил бўлади. Бу системани ечсак: $u = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{4}$, $t = -1$. Буларнинг қийматларини ўрнига қўйсак,

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{y-3z} = -1. \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x+y+z = 6, \\ 2x - y = 4, \\ y - 3z = -1 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб, $x = 3$, $y = 2$ ва $z = 1$ экани аниқланади. *Жавоб.* $\{(3;\ 2;\ 1)\}$.

Машқлар

Тенгламалар системасини ечинг:

27. 1) $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 12, \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3}{2x} + \frac{2}{3y} = 2{,}5, \\ \frac{9}{x} - \frac{1}{2y} = 1{,}5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{4}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 3, \\ \frac{7}{x-y} - \frac{6}{x+y} = 5. \end{cases}$

28. 1) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7, \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 11, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5}{x+y} + \frac{2}{y-z} = 3, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{1}{2-x} = 0{,}1, \\ \frac{3}{y-z} + \frac{2}{z-x} = 2. \end{cases}$

8-§. Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасини текшириш

Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасини ўрганиш учун зарур бўлган детерминант тушунчаси билан танишамиз.

Таъриф. *Тўртта a, b, c ва d сонларидан тузилган*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ёзувга иккинчи тартибли детерминант деб аталади ва бу ёзув $ad - bc$ айирмани билдиради.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ га (2) системанинг асосий детерминанти дейилади ва Δ билан белгиланади.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2$ га (2) системанинг 1- ёрдамчи детерминанти, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ га эса (2) системанинг 2- ёрдамчи детерминанти дейилади.

1 - ҳ о л. (2) системада $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ бўлсин.

1- теорема. Агар (2) системанинг асосий детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлса, бу система биргаликда бўлиб, ягона ечимга эга бўлади ва бу ягона ечим $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ ва $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ дир.

И с б о т: $(x_0; y_0)$ (2) системанинг ечими бўлсин. У ҳолда (2) дан:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, & (7) \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. & (8) \end{cases}$$

(7) тенгликни b_2 га, (8) тенгликни $-b_1$ га кўпайтириб қўшсак: $(a_1b_2 - a_2b_1)\ x_0 = b_2c_1 - b_1c_2$ ёки $\Delta \cdot x_0 = \Delta x$. (7) тенгликни $-a_2$ га, (8) тенгликни a_1 га кўпайтириб, сўнгра қўшсак:

$$(-a_2b_1 + a_1b_2)\ y_0 = -a_2c_1 + a_1c_2 \text{ ёки } \Delta y_0 = \Delta y.$$

Демак, (x_0, y_0) (2) системанинг ечими бўлса,

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x,$$
$$\Delta \cdot y_0 = \Delta_y$$

тенгликлар ўринли бўлиб, $\Delta \neq 0$ бўлгани учун $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ бўлади яъни система $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ дан иборат биттагина ечимга эга бўлади.

$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ва $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ (2) системанинг ечими эканини текширишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

Демак, (2) система бирдан-бир ечимга эга бўлиши учун $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ёки $a_1b_2 \neq a_2b_1$ бўлиши керак. Бундан:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \qquad (9)$$

Натижа. (2) системадаги ўзгарувчилар олдидаги мос коэффициентлар пропорционал бўлмаса, бу система биргаликда бўлиб, биргина ечимга эга бўлади.

2-теорема. Агар (2) системанинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиб, ёрдамчи детерминантларидан камида биттаси нолга тенг бўлмаса, система биргаликда бўлмайди.

И с б о т Система $(x_0; y_0)$ дан иборат ечимга эга деб фараз қилайлик. У ҳолда 1-теоремага асосан

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta,\ \Delta_x \cdot y_0 = \Delta_y \qquad (10)$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак. $\Delta = 0$ бўлиб, Δ_x, Δ_y лардан камида биттаси нолга тенг бўлмагани сабабли (10) тенгликлар бир вақтда бажарилмайди. Демак, система ечимга эга деган фаразимиз нотўғри, яъни система биргаликда эмас.

Теорема шартига кўра: $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ дан $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (11);

$$\Delta_x = b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0 \quad \text{дан} \quad \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \tag{12}$$

(11) ва (12) муносабатлардан:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}. \tag{13}$$

Натижа. (2) системада ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар пропорционал бўлиб, ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар билан мос озод ҳадлар пропорционал бўлмаса, бундай тенгламалар системаси биргаликда бўлмайди.

3-теорема. *(2) системанинг асосий ҳамда ёрдамчи детерминантлари нолга тенг, яъни $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ бўлса ва ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, тенгламалар системаси биргаликда бўлиб, чексиз кўп ечимга эга бўлади.*

Исбот: $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ дан $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; (11)

$\Delta x = b_2c_1 - b_1c_2 = 0$ дан $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (11′), $\Delta y = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (11″).

(11), (11′) ва (11″) тенгликлардан:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{14}$$

Тенг нисбатларни k деб белгилаймиз:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k.$$

У ҳолда $\frac{a_1}{a_2} = k$ дан: $a_1 = ka_2$; $\frac{b_1}{b_2} = k$ дан $b_1 = kb_2$,

$$\frac{a_1}{c_2} = k \text{ дан } c_1 = kc_2.$$

(2) системанинг биринчи тенгламасида a_1, b_1, c_1 ўрнига мос ҳолда ka_2, kb_2 ва kc_2 ларни қўйсак, бу система

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{15}$$

кўринишни олади. (15) системадаги иккинчи тенгламани қаноатлантирган ҳар қандай $(x_0; y_0)$ сонлар жуфти биринчи тенгламани ҳам қаноатлантиргани сабабли бу сонлар жуфти системанинг ечими бўлади. Демак, $a_2x + b_2y = c_2$ икки ўзгарувчили чизиқли тенглама чексиз кўп ечимга эга экан.

Натижа. (2) системада ўзгарувчиларнинг коэффициентлари билан озод сонлар мос ҳолда пропорционал бўлса, бу система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

1-мисол. m ва n нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x - my = 2, \\ 3x + y = n \end{cases}$$

система: 1) битта ечимга эга бўлади; 2) ечими чексиз кўп бўлади; 3) ечимга эга бўлмайди?

Ечиш. 1) Система битта ечимга эга бўлиши учун $\frac{1}{3} \neq -\frac{m}{1}$ ёки $m \neq -\frac{1}{3}$ бўлиши керак; 2) система чексиз кўп ечимга эга бўлиши учун $\frac{1}{3} = -\frac{m}{1} = \frac{2}{n}$ муносабат бажарилиб, $\frac{1}{3} = -m$ ва $\frac{1}{3} = \frac{2}{n}$ тенгликлардан $m = -\frac{1}{3}$, $n = 6$ бўлиши керак; 3) система ечимга эга бўлмаслиги учун $\frac{1}{3} = -m \neq \frac{2}{n}$ муносабат бажарилиши зарур. Бундан $m = -\frac{1}{3}$ ва $n \neq 6$. *Жавоб.* $m \neq -\frac{1}{3}$ бўлса, система битта ечимга $m = -\frac{1}{3}$ ва $n = 6$ бўлса, система чексиз кўп ечимга эга бўлади; $m \neq -\frac{1}{3}$ ва $n \neq 6$ бўлса, система ечимга эга бўлмайди.

2-мисол. Параметрнинг қандай қийматлари тўпламида

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 50x - k^2y = 14 \end{cases}$$

тенгламалар системаси биргина ечимга эга бўлади?

Ечиш. Система биргина ечимга эга бўлиши учун (9) муносабат ўринли бўлиши, яъни $\frac{1}{50} \neq \frac{2}{k^2}$ ёки $k^2 \neq 100$ бўлиши керак. Бундан: $k \neq \pm 10$. *Жавоб.* $k \in]-\infty; -10[\cup]-10, 10[\cup]10, \infty[$.

2-ҳол. (2) системада $c_1^2 + c_2^2 = 0$ (ёки $c_1 = c_2 = 0$) бўлсин. У ҳолда

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

бир жинсли система ҳамма вақт $x = 0$ ва $y = 0$, яъни (0; 0) дан иборат тривиал ечимга эга бўлади.

4-теорема. *Агар асосий детерминант $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ нолга тенг бўлса, (3) система (0, 0) дан фарқли ечимга ҳам эга бўлади.*

Исбот. $a_1b_2-a_2b_1=0$ тенгликдан: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. Агар $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$ деб белгиласак, $\frac{a_1}{a_2}=k$ дан $a_1=ka_2$, $\frac{b_1}{b_2}=k$ дан $b_1=kb_2$. (3) системада биринчи тенгламадаги a_1 ва b_1 ўрнига тегишли қийматларни қўйсак, бу система

$$\begin{cases} a_2kx+b_2ky=0, \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$$

кўринишни олади. Бу системани иккинчи тенгламасининг $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$ ечими биринчи тенгламани ҳам қаноатлантиради, яъни (3) системанинг тривиал бўлмаган ечими ҳам бўлади.

5-теорема. *Агар (3) система тривиал бўлмаган ечимга ҳам эга бўлса, у ҳолда бу системанинг асосий детерминанти нолга тенг бўлади.*

1-натижа. Агар (3) система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлса, у ҳолда бундай ечимлар сони чексиз кўп бўлади.

2-натижа. Агар асосий детерминант $\Delta\neq 0$ бўлса, (3) система фақат тривиал ечимга эга бўлади ва, аксинча, агар (3) система фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда системанинг асосий детерминанти $\Delta\neq 0$ бўлади.

3-ҳол. Биринчи даражали икки ўзгарувчили тенгламалар системаси

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=c_1, \\ 0\cdot x+0\cdot y=c_2 \end{cases} \tag{16}$$

кўринишда бўлсин.

6-теорема. *Агар c_1 ва c_2 лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (16) система биргаликда бўлмайди (яъни ечимга эга бўлмайди).*

7-теорема. *Агар $c_1=c_2=0$ бўлса, ихтиёрий бир жуфт сон (16) системанинг ечими бўлади.*

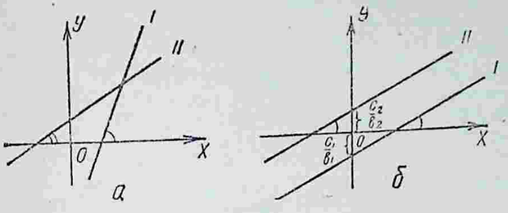
(2) системани текшириш якунларининг геометрик маъносини кўрсатамиз.

(2) системада $b_1\neq 0$ бўлса, $y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}$, (17)

$b_2\neq 0$ бўлса, $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$. (18)

(17) ва (18) чизиқли функцияларнинг графиги тўғри чизиқ бўлиб, биринчи тўғри чизиқ y ўқини $\left(0, \frac{c_1}{b_1}\right)$ нуқтада кесади, иккинчи тўғри чизиқ эса y ўқини $\left(0; \frac{c_2}{b_2}\right)$ нуқтада кесиб ўтади.

1. (9) муносабат бажарилсин, яъни $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ бўлсин. У ҳолда тўғри чизиқлар параллел бўлмайди, кесишади (48-*а* расм). Бу кесишиш нуқтаси ҳар икки тўғри чизиқ устида ётгани сабабли унинг координаталари ҳар икки тенгламани қаноатлантиради ва системанинг ечими бўлади.



48- расм.

2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (13) муносабат бажарилсин. У ҳолда: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ дан $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ (19), $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ дан $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$ (20). (20) муносабат (17) ва (18) тўғри чизиқлар y ўқини координата бошидан ҳар хил масофада кесиб ўтишини, (19) муносабат эса тўғри чизиқлар параллел эканини билдиради. Бу ҳолда тўғри чизиқлар умумий нуқтага эга бўлмайди (48 - б расм), яъни система ечимга эга бўлмайди.

3. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (14) муносабат бажарилсин. У ҳолда $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ дан $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ (19), $\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ дан $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ (21).

(21) муносабат ҳар икки тўғри чизиқ y ўқини битта нуқтада кесиб ўтишини, (19) муносабат эса бу тўғри чизиқлар параллел эканини билдиради. Бу ҳолда тўғри чизиқлар устма-уст тушади ва бу тўғри чизиқ устидаги ихтиёрий нуқтанинг координаталари системанинг ечими бўлаверади, яъни ечим чексиз кўп бўлади.

Изоҳ. Параметрли (ҳарфли) тенгламалар системасини ечишда ҳам юқорида баён қилинган якунлардан фойдаланилади.

Машқлар

Қуйидаги тенгламалар системаларидан қайси бири биргина ечимга, қайси бири чексиз кўп ечимга эга, қайси бири ечимга эга эмас?

29. 1) $\begin{cases}4x+y=12,\\2x+0{,}5y=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y=-5,\\x-\frac{1}{3}y=1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=6,\\2x-y=9.\end{cases}$

30. 1) $\begin{cases}4x-y=7,\\x-0{,}25y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=0,\\4y-2x=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}0\cdot x-0\cdot y=1,\\0\cdot x-0\cdot y=0.\end{cases}$

31. Параметрларнинг қандай қийматлари тўпламида

1) $\begin{cases}5x-y=9,\\2x+ny=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}a^2x-2y=5,\\2x-y=1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5x+10y=13,\\48x+b^2y=10\end{cases}$

тенгламалар системаси битта ечимга эга бўлади?

82. Параметрларнинг қандай қийматлари тўпламида

1) $\begin{cases} 9x+3y=2, \\ 3x+y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y=b, \\ x-0{,}5y=\dfrac{1}{2b} \end{cases}$

системалар: а) чексиз кўп ечимга эга бўлади; б) ечимга эга бўлмайди?

33. a ва b нинг қандай қийматларида

1) $\begin{cases} ax+2y=6, \\ 4x-y=b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax+by=10, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ax-by=4, \\ 4x+2y=7 \end{cases}$

система: а) битта ечимга эга бўлади; б) чексиз кўп ечимга эга бўлади; в) ечимга эга бўлмайди?

34. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} cx-y=3, \\ 5x+3y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} nx-y=m, \\ 3x+y=5; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x-qy=4, \\ 5x+y=p. \end{cases}$

VI БОБ

КАСР РАЦИОНАЛ ИФОДАЛАР

1-§. Каср. Касрнинг аниқланиш соҳаси

1-таъриф. *Бўлиш чизиғи ёрдамида ёзилган икки ифоданинг бўлинмаси (нисбати) каср дейилади.*

Масалан, 1) $\frac{5}{7}$, 2) $\frac{41-3{,}7}{2{,}1}$, 3) $\frac{a}{b}$, 4) $\frac{7}{c}$, 5) $\frac{2mn}{-5y}$, 6) $\frac{a^2+b+c}{c^2-d}$. Бўлинувчига сурат, бўлувчига эса махраж, касрнинг сурат ва махражига унинг ҳадлари дейилади. Касрнинг махражи нолга тенг бўлмайди (чунки нолга бўлиш мумкин эмас).

Ўзгарувчилари бўлган касрнинг сон қиймати ўзгарувчиларнинг қийматига боғлиқ бўлади. Масалан, $\frac{a+7}{a-2}$ касрнинг қиймати $a=13$ бўлганда $\frac{20}{11}$ га, $a=4$ бўлганда $\frac{11}{2}$ га тенг. $a=2$ бўлганда бу касрнинг махражи $(a-2)$ нолга тенг бўлгани учун каср маънога эга бўлмайди. Демак, берилган каср $a\neq 2$ дан бошқа ҳар қандай сон бўлганда маънога эга бўлади. Шунинг учун $\frac{a+7}{a-2}$ касрнинг аниқланиш соҳаси 2 дан бошқа барча сонлар тўплами бўлади ва $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ каби (баъзан $a \neq 2$ каби) ёзилади.

2-таъриф. *Каср (ифода) нинг аниқланиш соҳаси деб ўзгарувчининг шу каср (ифода) маънога эга бўладиган барча қийматлари тўпламига айтилади.*

1-мисол. $\frac{4-3x}{2x-5}$ касрнинг аниқланиш соҳасини топинг. $2x-5=0$ ёки $x=2,5$ бўлганда касрнинг махражи ноль бўлгани учун каср маънога эга бўлмайди. $x \neq 2,5$ бўлганда каср маънога эга бўлади. Демак, берилган касрнинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; 2,5[\cup]2,5; +\infty[$ тўпламдан иборат.

2-мисол. $\frac{b}{a^2-a}$ касрнинг аниқланиш соҳасини топинг. $a^2-a=0$ ёки $a(a-1)=0$. Бундан $a=0$ ёки $a=1$ бўлади. Демак, $a=0$ ёки $a=1$ бўлса, берилган каср маънога эга бўлмайди. $a \neq 0$ ёки $a \neq 1$ бўлганда маънога эга. Демак, берилган касрнинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$ тўпламдан иборат.

3-мисол. $\frac{5}{a-2b}$ касрнинг аниқланиш соҳасини топинг. $a-2\ b \neq 0$ ёки $a \neq 2b$ бўлганда каср маънога эга бўлади. Демак, берилган касрнинг аниқланиш соҳаси (маънога эга бўлиш шарти) $a \neq 2b$.

Машқлар

1. $a \in \{2; 5; -3; -0,5\}$ бўлганда $\frac{a-1}{a+1}$ касрнинг қийматлари тўпламини топинг.

2. Касрнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $\frac{10}{3b-1}$; 2) $\frac{1+a}{a(2a+3)}$; 3) $\frac{k}{3+2c^2}$; 4) $\frac{71}{1+|x|}$; 5) $\frac{7}{|x|-1}$.

3. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x)=\frac{4}{x}$; 2) $f(x)=\frac{5}{x-2}$; 3) $f(x)=\frac{x}{3+x^2}$;

4) $f(x)=\frac{9}{x^2-3x}$.

4. Қандай шартда каср маънога эга бўлмайди:

1) $\frac{3}{ab}$; 2) $\frac{c}{c^2+3d^2}$; 3) $\frac{8}{2a-b}$; 4) $\frac{n}{m^2(n+1)}$?

2-§. Касрнинг хоссалари. Касрларни қисқартириш

1. $\frac{a}{b}$ каср $b=0$ бўлганда маънога эга эмас. Демак, каср маънога эга (бирор сонга тенг) бўлиши учун $b\neq0$ бўлиши керак. Нолнинг нолдан бошқа ҳар қандай сонга нисбати ноль бўлгани учун $\frac{a}{b}$ каср $a=0$ ва $b\neq0$ бўлгандагина нолга тенг бўлади.

1-мисол. $\frac{3x-2}{1-x}=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\frac{3x-2}{1-x}$ каср $3x-2=0$ ва $1-x\neq0$ бўлгандагина нолга тенг бўлгани сабабли $\begin{cases}3x-2=0\\1-x\neq0\end{cases}$ системани ечамиз. $3x-2=0$ тенгламанинг илдизи $x=\frac{2}{3}$ бўлади, $x=\frac{2}{3}$ бўлганда $1-\frac{2}{2}\neq0$ мулоҳаза тўғри.

Жавоб. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

2-мисол. $\frac{x^2-4}{3x+6}=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\frac{x^2-4}{3x+6}$ каср $x^2-4=0$ ва $3x+6\neq0$ бўлгандагина нолга тенг бўлади. Шунинг учун $\begin{cases}x^2-4=0\\3x+6\neq0\end{cases}$ системани ечамиз. $x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$. Бундан: $x=2$ ёки $x=-2$. x нинг топилган қийматларида $3x+6\neq0$ бўлишини текшириб кўрамиз:

$x=2$ бўлса, $3\cdot2+6=12\neq0$ мулоҳаза тўғри;

$x=-2$ бўлса, $3\cdot(-2)+6=-6+6=0$ мулоҳаза нотўғри.

Демак, берилган тенгламанинг илдизи $x=2$ экан.
Жавоб. $\{2\}$.

2. $\frac{5x}{7x^2}$ ва $\frac{5}{7x}$ касрлар $x=0$ бўлганда мавжуд эмас, аммо x нинг нолдан бошқа ҳар қандай қийматида бир-бирига тенг. Масалан, $x=1$ бўлганда бу касрлар $\frac{5}{7}$ га, $x=-5$ бўлганда $-\frac{1}{7}$ га $\left(\frac{5\cdot(-5)}{7\cdot(-5)^2}=\frac{-25}{7\cdot25}=-\frac{1}{7};\ \frac{5}{7\cdot(-5)}=-\frac{1}{7}\right)$ тенг. Демак, берилган касрлар

бир-бирига айнан тенг, яъни

$$\frac{5x}{7x^2}=\frac{5}{7x}$$

тенглик айниятдир.

$\frac{5x}{7x^2}$ касрнинг сурат ва махражини x га бўлсак, $\frac{5}{7x}$ каср, $\frac{5}{7x}$ касрнинг сурат ва махражини x га кўпайтирсак, $\frac{5x}{7x^2}$ каср ҳосил бўлади. Демак, касрнинг сурат ва махражи нолга тенг бўлмаган битта сонга (бирҳад ёки кўпҳадга) кўпайтирилса ёки бўлинса, касрнинг қиймати ўзгармайди, яъни:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \quad \text{ёки} \quad \frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}, \quad \text{бунда } c\neq 0.$$

Бу хоссадан қуйидаги натижаларни чиқариш мумкин: 1) касрнинг сурат ва махражи -1 га кўпайтирилса, яъни сурат ва махражининг ишораси қарама-қаршисига алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди;

2) каср ҳадларидан бирининг ишораси ҳамда каср олдидаги ишорани қарама-қарши ишорага алмаштирилса, касрнинг қиймати ўзгармайди, яъни $\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=$ $=-\frac{a}{-b}$.

1-таъриф. *Агар касрнинг сурат ва махражининг энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг бўлса, қисқармайдиган каср деб, 1 дан фарқли бўлса, қисқарадиган каср деб аталади.*

Масалан, $\frac{cd}{ad}$ қисқармайдиган, $\frac{ab}{bc}$ эса қисқарадиган каср.

2-таъриф. *Қисқарадиган касрнинг сурат ва махражини уларнинг умумий бўлувчисига бўлиб, унга айнан тенг каср ҳосил қилишга касрни қисқартириш дейилади.*

Масалан, $\frac{ab}{bc}$ касрнинг сурат ва махражини умумий бўлувчи b га ($b\neq 0$) бўлсак, $\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$ бўлади; $\frac{3x(x-5)}{4(x-5)}$

касрнинг сурат ва махражини умумий бўлувчиси $(x-5)$ га $(x-5\neq 0)$ бўлсак, $\frac{3x(x-5)}{4(x-5)}=\frac{3x}{4}$ бўлади. $\frac{3x(x-5)}{4(x-5)}$ касрнинг аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$ тўпламдан, $\frac{3x}{4}$ касрнинг аниқланиш соҳаси эса $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан иборат. Демак, касрларни қисқартириш натижасида аниқланиш соҳаси кенгроқ бўлган каср ҳосил бўлар экан.

Баъзан алгебраик касрнинг сурат ва махражини олдин кўпайтувчиларга ажратиб, сўнгра умумий бўлувчига бўлинади. Масалан,

$$\frac{a^3-2a^2}{a^2-4}=\frac{a^2(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a^2}{a+2}.$$

Машқлар

5. Ўзгарувчининг қандай қийматлари тўпламида касрнинг қиймати нолга тенг бўлади:

1) $\frac{x}{71}$; 2) $\frac{3(y+1)}{2+y^2}$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{10}$;

4) $\frac{y^2-1}{y}$; 5) $\frac{x^2+0{,}1}{4-x}$; 6) $\frac{(y-3)^2}{y^2+3}$?

6. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{4-3x}{x}=0$; 2) $\frac{|x|-2}{3+|x|}=0$; 3) $\frac{2x-|+2|\,0{,}5-x}{x}=0$;

7. 1) $f(x)=\frac{3x^2-15x}{5-x}$; 2) $f(x)=\frac{y^2+7}{1+y}$; 3) $f(x)=\frac{x+3}{9-x^2}$.

$f(0)$ ни топинг.

8. Касрларни қисқартиринг:

1) $\frac{7a}{7ab}$; 2) $\frac{36xy^3}{42x^2y^2}$; 3) $\frac{-51a^6b^5}{-18a^6b^7}$; 4) $\frac{x(y+3)^2}{y(y+3)}$;

5) $\frac{a(x-2)}{b(2-x)}$; 6) $\frac{a^3b^2(c-d)^4}{ab^3(d-c)^2}$.

Ифодаларни соддалаштиринг:

9. 1) $\frac{a^7}{a^n}$; 2) $\frac{b^5}{b^{n+5}}$; 3) $\frac{c}{c^{n+3}}$; 4) $\frac{x^ny^{2n+1}}{x^{n-1}y^{n+2}}$;

5) $\frac{a^{n-1}(b+1)^n}{a^{n+1}(b+1)^{n-1}}$.

10. 1) $\frac{c^3-2c^2}{c^3-4c}$; 2) $\frac{15m^2-10mn}{8n^2-12mn}$; 3) $\frac{144a^2-25b^2}{25b^2-120ab+144a^2}$;

4) $\frac{(y-1)^3-1}{y^3+1}$; 5) $\frac{b^2+5b+25}{2b^4-250b}$; 6) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$.

11. 1) $\frac{a^{3n+1}-a^4}{a^{2n+3}+a^{n+4}+a^5}$; 2) $\frac{x^{2n+10}-x^{n+12}+x^{14}}{x^{3n}+x^6}$.

3-§. Икки касрнинг кўпайтмаси ва бўлинмасини касрга алмаштириш. Касрнинг даражаси

1. $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}$ ва $\frac{a\cdot b}{n\cdot m}$ ифодаларда a, b, n, m ўзгарувчилар натурал қийматлар, масалан, $a=2$, $b=4$, $n=5$, $m=7$ қийматлар қабул қилса, оддий касрларни кўпайтириш таърифига асосан $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 7}$ бўлади.

Ўзгарувчиларнинг бошқа барча ($n\neq 0$, $m\neq 0$) қийматларида ҳам бу ифодаларнинг сон қийматлари тенг бўлади.

Масалан, $a=\frac{3}{5}$; $n=\frac{5}{2}$; $b=1,5$; $m=0,2$ бўлса,

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1,5}{0,2}=\ldots=1\frac{4}{5};\quad \frac{a\cdot b}{n\cdot m}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 1,5}{\frac{5}{2}\cdot 0,2}=\ldots=$$
$$=1\frac{4}{5}.$$

Демак, $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}$ ва $\frac{ab}{nm}$ айний ифодалар бўлиб, $\frac{a}{n}\times$ $\times\frac{b}{m}=\frac{ab}{nm}$ айниятдир.

Икки касрнинг кўпайтмасини касрга алмаштириш учун суратлари кўпайтмасини сурат, махражлари кўпайтмасини эса махраж қилиб ёзиш керак.

Масалан, 1) $\frac{3x}{5y}\cdot\frac{7a^2b}{8c^2d}=\frac{21a^2bx}{40c^2dy}$; 2) $\frac{2(a-b)}{a+b}\cdot\frac{(a+b)^2}{3(a-b)^2}=$ $=\frac{2(a-b)(a+b)^2}{3(a+b)(a-b)^2}=\frac{2(a+b)}{3(a-b)}$.

2. $c\neq 0$, $d\neq 0$ нинг барча қийматларида $\frac{c}{d}$ ва $\frac{d}{c}$

касрлар тескари сонлар бўлгани учун $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ бўлинма $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ кўпайтмага тенг, яъни $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Демак, икки касрнинг бўлинмасини касрга алмаштириш учун бўлинувчи билан бўлувчига тескари касрнинг кўпайтмасини ёзиш керак:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Масалан, $\frac{5m^2n}{12bc^2} : \frac{15mn^2}{18b^3c} = \frac{5m^2n}{12bc^2} \cdot \frac{18b^3c}{15mn^2} = \frac{5m^2n \cdot 18b^3c}{12bc^2 \cdot 15mn^2} = \frac{mb^2}{2nc}$.

3. Асоси каср бўлган даражани касрга алмаштириш учун суратнинг даражасини сурат, махражининг даражасини махраж қилиб ёзиш керак, яъни: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Масалан, 1) $\left(\frac{2a^2b^3}{3c^4}\right)^2 = \frac{4a^4b^6}{9c^8}$; 2) $\left(\frac{3(m+n)}{2cd^2}\right)^3 = \frac{27(m+n)^3}{8c^3d^6}$.

Машқлар

Кўпайтмани касрга алмаштиринг:

12. 1) $\frac{x}{3y} \cdot \frac{6z}{x}$; 2) $\frac{5m}{6n} \cdot 9n^2$; 3) $8a^3 \cdot \frac{3b^2}{a}$; 4) $\frac{12x^3y^2}{35z^4} \cdot \frac{49y^4}{2x^6z^3} \times \frac{5x^4z^7}{42y^6}$; 5) $\frac{2(a+b)^3}{21c^3} \cdot \frac{28c^2}{(a+b)^3}$.

13. 1) $\frac{c+2}{d} \cdot \frac{6d^3}{c^2-4}$; 2) $\frac{a+c}{8b^2} \cdot \frac{2b^3}{a^2-c^2}$; 3) $\frac{2x+2a}{3x-3a} \cdot \frac{9x-9a}{4x+4a}$; 4) $\frac{x^2-xy}{a^2b-b^3} \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{x^2-2xy+y^2}$; 5) $\frac{x^2+x-2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$.

Бўлинмани каср кўринишида тасвирланг:

14. 1) $9ab : \frac{6a}{5b}$; 2) $-\frac{13x^3}{42y^2} : \frac{90x^2}{63y^3}$; 3) $\frac{8b^5c^6}{33x^5} : \frac{12b^5}{55c^3x^4}$; 4) $\frac{72m^9n^7}{65a^5b^3} : \frac{63mn^5}{26ab^5}$.

15. 1) $\frac{3-d}{5n^2} : \frac{9-d^2}{4n^3}$; 2) $\frac{(x+y)^2}{y^2-b^2} : \frac{y+x}{y+b}$; 3) $\frac{x^2-2xy+y^2}{6x^3-6y^3} : \frac{6x^2-6y^2}{9x^2+9xy+9y^2}$; 4) $\frac{ab+b^2}{9x^2-4z^2} : \frac{a^3+2a^2b+ab^2}{2z^2-3xz}$.

16. 1) $\frac{a^n}{b^{n-1}} : \frac{a^{n-2}}{b^{n+1}}$; 2) $\frac{b^{m-2}}{c^{m+3}} : \frac{b^{m+3}}{c^{m+1}}$; 3) $\frac{a^n b^{m-1}}{c^{k-1}} :$
$: \frac{a^{n-1}b^m}{c^k}$.

17. Даражани каср кўринишида тасвирланг:

1) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{5b^2}{2c^3}\right)^3$; 3) $\left(\frac{c^3d^4}{2n^5}\right)^5$; 4) $\left(\frac{2a^n}{3b^m}\right)^4$.

Ифодани соддалаштиринг:

18. 1) $\left(-\left(-\frac{c}{d}\right)^3\right)^4$; 2) $\left(-\left(\frac{c}{a}\right)^{n+2}\right)^3$; 3) $\left(-\left(\frac{b}{c^2}\right)^3\right)^{2n}$;
4) $\left(\frac{a^{m+1}}{2b^{m-1}}\right)^n$; 5) $\left(\frac{a^4b^2}{c^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^6}{a^5b^2}\right)^3$; 6) $\left(-\frac{3a^6b^5}{c^7}\right) : \left(\frac{9a^{10}b^3}{c^9}\right)^2$.

19. 1) $\left(\left(-\frac{a^2}{b}\right)^3\right)^{2n}$; 2) $\left(-\left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1}\right)^3$; 3) $\left(\frac{a^{2n}}{b^{3n}}\right) \cdot \left(\frac{b^{n+1}}{a^{2n-1}}\right)^4$;
4) $\left(\frac{a^{2n-1}}{b^{n+2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^{n-1}}{a^{2n-7}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^3b}\right)^3$.

4-§. Касрларнинг йиғиндиси ва айирмасини касрга алмаштириш

1. Махражлари тенг бўлган икки касрнинг йиғиндиси $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ ва $\frac{a+b}{c}$ ифодаларнинг сон қийматлари a, b ва $c \neq 0$ га ҳар хил сон (бутун, каср) қийматлар берсак, улар бир-бирига тенг бўлади, яъни:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Шунингдек, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Демак, махражлари тенг бўлган касрлар йиғиндиси (айирмаси) сурати берилган касрлар суратларининг йиғиндисига (айирмасига), махражи эса ўша касрлар махражига тенг бўлган касрга айнан тенг экан.

Қўшилувчи касрлар сони иккидан ортиқ бўлганда ҳам йиғиндини айнан тенг каср кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}+\frac{k}{c}=\frac{a+b+d+k}{c}.$$

Мисоллар. 1) $\frac{5a}{7n}+\frac{7a}{7n}+\frac{9a}{7n}=\frac{5a+7a+9a}{7n}=\frac{21a}{7n}=\frac{3a}{n}$.

2) $\frac{2a^2}{(a-x)^2}-\frac{x^2+a^2}{(a-x)^2}=\frac{2a^2-x^2-a^2}{(a-x)^2}=\frac{a^2-x^2}{(a-x)^2}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a-x)^2}=$
$=\frac{a+x}{a-x}$.

2. $\frac{a}{x}$ ва $\frac{b}{y}$ касрларни қўшиш (айириш) учун биринчи касрнинг сурат ва махражини y га, иккинчи касрнинг сурат ва махражини эса x га кўпайтириб, махражлари бир хил бўлган касрлар кўринишига келтирилади:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}.$$

Бунга касрларни *умумий махражга келтириш* дейилади. Биринчи каср учун y ни, иккинчи каср учун эса x ни қўшимча кўпайтувчи дейилади. Касрлар умумий махражга келтирилгач, йиғиндига айнан тенг каср топилади:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}=\frac{ay+bx}{xy}.$$

Агар берилган касрларнинг махражлари ҳар хил бўлиб, кўпҳаддан иборат бўлса, аввал уларни кўпайтувчиларга ажратиб, сўнгра қўшимча кўпайтувчига кўпайтирилади ва умумий махражга келтирилади.

Мисоллар. 1) $\frac{ax}{x^2-y^2}+\frac{ay}{y^2-x^2}=\frac{ax}{x^2-y^2}+\frac{ay(-1)}{x^2-y^2}=$
$=\frac{a(x-y)}{x^2-y^2}=\frac{a}{x+y}$; 2) $\frac{4n+5}{4-n^2}-\frac{3}{2-n}=\frac{4n+5}{4-n^2}-\frac{3(2+n)}{4-n^2}=$
$=\frac{4n+5-6-3n}{4-n^2}=\frac{n-1}{4-n^2}$.

Машқлар

20. Ифодаларни каср кўринишида тасвирланг:

1) $\frac{4a}{7}+\frac{2a}{7}$; 2) $\frac{x}{12}+\frac{5x}{12}+\frac{7x}{12}$; 3) $\frac{a+2}{x}+\frac{3-a}{x}$;

4) $\frac{11m+7n}{a}-\frac{5m-3n}{a}$; 5) $\frac{(a+b)^2}{ax}-\frac{(a-b)^2}{ax}$.

Касрларни умумий махражга келтиринг:

21. 1) $\frac{x}{2a}$ ва $\frac{y}{3b}$; 2) $\frac{5}{2x^2y}$ ва $\frac{7}{5xy^3}$; 3) $\frac{1}{2a^3b}$, $\frac{4}{3ab^2}$ ва $\frac{5}{9ab}$.

22. 1) $\frac{11}{x^ny}$ ва $\frac{13}{x^2y^m}$; 2) $\frac{1}{x^{n+2}y}$, $\frac{3}{x^2y^{n+1}}$ ва $\frac{5}{x^3y^3}$;

3) $\frac{a}{b^3(b-c)}$, $\frac{c}{b(c-b)}$ ва $\frac{b}{b^2-c^2}$.

Ифодани соддалаштиринг:

23. 1) $\frac{a}{12}-\frac{3a}{18}+\frac{5d}{24}$; 2) $\frac{3b}{a^3c}-\frac{c}{a^2b}$; 3) $\frac{2a-5b}{5a}-\frac{a-3b}{10b}$.

24. 1) $\frac{a+c}{a-c}-\frac{a-c}{a+c}$; 2) $\frac{4a^2-bc}{4a^2-b^2}-\frac{3a^2-bc}{b^2-4a^2}$;

3) $\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}$.

25. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{4-7x}{33}-\frac{x+9}{11}=0$; 2) $\frac{x-1}{x-6}+\frac{4+x}{6-x}-\frac{2x-11}{x-6}=0$.

26. Функциянинг графигини чизинг:

1) $y=\frac{8x+1}{3}-\frac{10x-4}{6}$; 2) $y=\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{x-1}$.

5-§. Каср ифодаларни айнан алмаштириш

Мисол. Қуйидаги ифодани каср кўринишига келтиринг:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)-1.$$

Бу мисол амалларни бажариш тартибини эътиборга олган ҳолда, яъни дастлаб 1-қавсдаги айирмага, сўнгра 2-қавс ичидаги йиғиндига айнан тенг касрлар топилади, яъни:

1) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\ldots=\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}=\ldots$ $\ldots=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$; 3) энди $\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$ бўлинмага айнан тенг каср топилади:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}=\frac{4ab\cdot(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)\cdot 2(a^2+b^2)}=\frac{2ab}{a^2+b^2};$$

4) ниҳоят $\frac{2ab}{a^2+b^2}-1$ айирмага айнан тенг каср ҳосил қилинади:

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}-1=\frac{2ab}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=\frac{2ab-a^2-b^2}{a^2+b^2}=-\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}.$$

Демак, берилган ифодани $-\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ кўринишга келтирдик.

Машқлар

Ифодаларни соддалаштиринг:

27. 1) $(a-b)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; 2) $\left(x+\frac{x^2}{y}\right):\left(b-\frac{b^2}{y}\right)$;
3) $\left(1-\frac{m-n}{m+n}\right)\cdot\left(2+\frac{2n}{m-n}\right)$; 4) $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

28. 1) $\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a-b}\right)$; 2) $\left(m+\frac{mn}{m-n}\right):$ $:\left(m-\frac{mn}{m+n}\right)-\frac{m-n}{m+n}$; 3) $\left(\frac{c}{c-2}-\frac{c^2}{c^3+8}\cdot\frac{c^2-2c+4}{c-2}\right):$ $:\frac{8}{c^2-4c+4}-\frac{c^2+c+6}{4c+8}$.

6-§. Бутун кўрсаткичли даража

5^6, 5^5, 5^4, 5^3, 5^2, 5 даражаларнинг ҳар бири олдингисидан 5 мартадан кичик бўлиб, кўрсаткичлари 1 тадан камая боради. 5^4 ни 5 га бўлиш учун 5^4 ни кўрсаткичидан 1 ни айириш керак, яъни $5^4:5=5^{4-1}=5^3$. 5 дан 5 марта кичик сон $5^1:5^1=5^{1-1}=5^0$ га тенг. Иккинчи томондан $5^1:5^1=\frac{5}{5}=1$. Демак, $5^0=1$. $5^0=1$ дан 5 марта кичик сон $5:5^1=5^{0-1}=5^0$ га ёки $5^0:5=1:5=\frac{1}{5}$ га тенг. Демак, $5^{-1}=\frac{1}{5}$. Шунингдек, $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$, ... $5^{-n}=\frac{1}{5^n}$ $(n\in N)$.

1-таъриф. *$a\neq 0$ бўлса, $a^0=1$.*

Масалан, $(-2a^2b^3)^0=1$ (бунда $a\neq 0$, $b\neq 0$), $(1+\sqrt{3})^0=1$; $((1-a):(1+a^2))^0=1$.

2-таъриф. $a \neq 0$ ва $n \in N$ бўлса, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Бу таърифга асосан: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Демак, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Мисоллар. 1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Манфий кўрсаткичли даража каср ифодани кўпайтма кўринишда ёзишга ёрдам беради. Масалан, $\frac{1}{10} = 10^{-1}$; $\frac{5a^2}{b^3} = 5a^2b^{-3}$.

Натурал кўрсаткичли даражанинг хоссалари: 1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$; 4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Бу хоссалар бутун кўрсаткичли даражалар учун ҳам ўринлидир (буни исбот қилиш мумкин).

Мисоллар. 1) $5^{-3} \cdot 5^4 = 5^{-3+4} = 5$; 2) $a^{2m} : a^m = a^{2m-m} = a^m$; 3) $(0{,}5a^2b^{-3})^2 = 0{,}25a^4b^{-6}$.

Мисол. Амалларни бажаринг: $\left(\frac{(x-2y+1)^0}{x-1} + \frac{x+1}{x-2y+1}\right)^0 - \left(\frac{(x-y)^0}{x} + \frac{x}{(x+1)^0}\right) : \frac{x^0+x^2}{x}$.

Ечиш. Биринчи қавс ичидаги амалларни бажаришнинг зарурияти йўқ, чунки унинг қиймати 1 га тенг. У ҳолда:

$$1 - \left(\frac{(x-1)^0}{x} + \frac{x}{(x+1)^0}\right) : \frac{x^0+x^2}{x} = 1 - \left(\frac{1}{x} + x\right) : \frac{1+x^2}{x} = 1 - \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x}{1+x^2} = 1 - 1 = 0.$$

Машқлар

29. Ҳисобланг:

1) 3^{-4}; 2) 2^{-6}; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{5^0}{3}\right)^{-3}$.

30. Касрни кўпайтма шаклида тасвирланг: 1) $\frac{7}{m^2}$; 2) $\frac{a^3}{4}$; 3) $\frac{3a}{2b^3}$; 4) $\frac{m}{2x^2y^3}$; 5) $-\frac{(x+y)^2}{(x-2)^3}$.

31. Кўпайтмани каср шаклида ёзинг: 1) $5a^{-3}$, 2) $10x^{-3}y$; 3) $5^0(x+y)^{-3}$; 4) $b^{-2}(d-n)^2$.

32. Амалларни бажаринг: 1) $a^{-4}\cdot b^{-6}$; 2) $c^9 : c^{-4}$; 3) $a^{-2}\times\times a^8\cdot a^{-4}$; 4) $a^{-3n} : a^n$.

33 Даражани ҳисобланг: 1) $(3a^{-1}b^{-2})^{-3}$, 2) $(x^{-2}y^{-1})^{-5}$; 3) $(-5m^{-4}n)^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}a^{-2}b^{-1}\right)^{-4}$.

Амалларни бажаринг:

34 1) $(a^{-1}+2b^{-2})^2$; 2) $x^2(x^{-1}-2)(x^{-1}+2)(x^{-2}+$ $+4)(x^{-4}+16)$.

35. 1) $(((a^{-m})^n)^0)^{-p}$; 2) $(((a^n)^{-n})^0)^{-n}$; 3) $((((c^{-1})^2)^{-3})^4)^{-5}$.

36. 1) $\left(\frac{y^2-y+y^0}{y^2}\right)-\left(\frac{y-1}{(x+1)^0\cdot y}\right)^2$; 2) $\frac{(b^{-1}+b^0)(b^{-1}-b^0)}{b^0-b^{-2}}$.

7-§. Бутун кўрсаткичли даражали функция

Таъриф. $y=ax^n$ (1) *функцияга бутун кўрсаткичли даражали функция дейилади,* бунда x ва y — ўзгарувчилар, $n\in Z$.

$$y=ax^{-2}\qquad (a\neq 0)\qquad (2)$$

функция графигини чизамиз. $a=1$ бўлса, $y=ax^{-2}$ функция $y=x^{-2}$ кўринишни олади. Дастлаб $y=x^{-2}$ ёки $y=\frac{1}{x^2}$ функциянинг графигини чизамиз. $x=0$ бўлганда $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ мавжуд эмас. $x\neq 0$ бўлганда x^{-2} ифода маънога эга. Демак,

$$y=x^{-2}$$

функциянинг аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$ тўпламдан иборат.

Қуйидаги жадвални тузамиз:

x	-4	$-3{,}5$	-3	$2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-\frac{3}{4}$
$y=x^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{16}{9}$

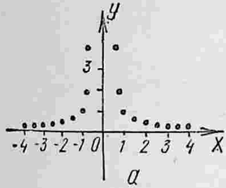
→

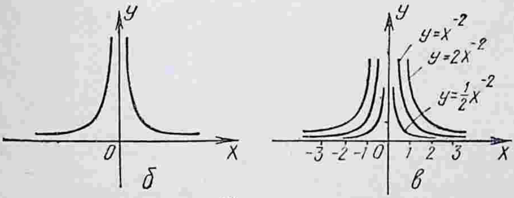
x	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$-\frac{3}{4}$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$y=x^{-2}$	4	—	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{16}$

Координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни координаталар системасида белгилаймиз (49-*а* расм).

$x=0$ бўлганда функция аниқланмагани сабабли функциянинг графиги y ўқ билан умумий нуқтага эга эмас. x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $x^2>0$ $(x\neq 0)$ бўлгани учун $x^{-2}=\frac{1}{x^2}>0$, яъни функция мусбат. Шу сабабли графикка тегишли нуқталар абсцисса ўқининг юқорисига жойлашган бўлади. Аргументнинг қарама-қарши сонлардан иборат қийматларига тегишли функция қийматлари ўзаро тенг, яъни $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-x)^2}$. Шунинг учун график y ўққа нисбатан симметрикдир.

Аниқланган нуқталарни силлиқ эгри чизиқлар билан туташтирамиз (49-*б* расм). Демак, $y=x^{-2}$ функциянинг графиги x ўқининг юқорисида y ўқига нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқ экан. $y=2x^{-2}$ функция қийматлари $y=x^{-2}$ нинг мос қийматларидан икки марта катта, $y=0{,}5x^{-2}$нинг қийматлари эса 2 марта кичик бўлгани учун $y=x^{-2}$ функция графиги нуқталарининг ординаталарини 2 марта орттириш (узай-





49- расм.

тириш) билан $y=2x^{-2}$ функциянинг графигини, 2 марта камайтириш (қисқартириш) билан $y=0.5x^{-2}$ функциянинг графигини ҳосил қилиш мумкин экан (49-*в* расм).

Демак, $y=x^{-2}$ функция $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ оралиқда берилган бўлиб, $]-\infty; 0[$ оралиқда ўсади, $]0; +\infty[$ оралиқда эса камаяди, ишораси мусбат, қийматлар соҳаси $]0; +\infty[$ дан иборат.

(2) да $a<0$ бўлса, график 49-*в* расмдаги эгри чизиқларга x ўқига нисбатан симметрик бўлади (масалан, $y=-x^{-2}$ нинг графиги x ўқига нисбатан $y=x^{-2}$ нинг графигига симметрик).

(1) формулада $a=1$ бўлиб, $n=2$, $n=4$, $n=6$ бўлсин. У ҳолда $y=x^2$; $y=x^4$; $y=x^6$ бўлади.

Бу функцияларнинг графиги $O(0; 0)$; $A(1; 1)$ ва $A'(-1; 1)$ нуқталардан ўтади (50-*а* расм).

Демак, $y=x^n$ формулада $n=2k$ жуфт сон, яъни $y=x^{2k}$, (бунда $k\in N$) бўлса, бундай функцияларнинг графиги $(0; 0)$, $(1; 1)$ ва $(-1; 1)$ нуқталардан ўтувчи, ордината ўқига нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқлар бўлади. (1) формулада $a=1$ бўлиб, $n=1$, $n=3$, $n=5$ бўлсин. У ҳолда $y=x$; $y=x^3$, $y=x^5$ бўлади. Бу функцияларнинг графиги $O(0; 0)$, $A(1; 1)$ ва $A'(-1 -1)$ нуқталардан ўтади (50-*б* расм).

Демак, $y=x^n$ формулада $n=2k+1$ тоқ сон, яъни $y=x^{2k+1}$ (бунда $k\in N$) бўлса, бундай функцияларнинг графиги $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$ нуқталардан ўтувчи, координата бошига нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқлар бўлади.

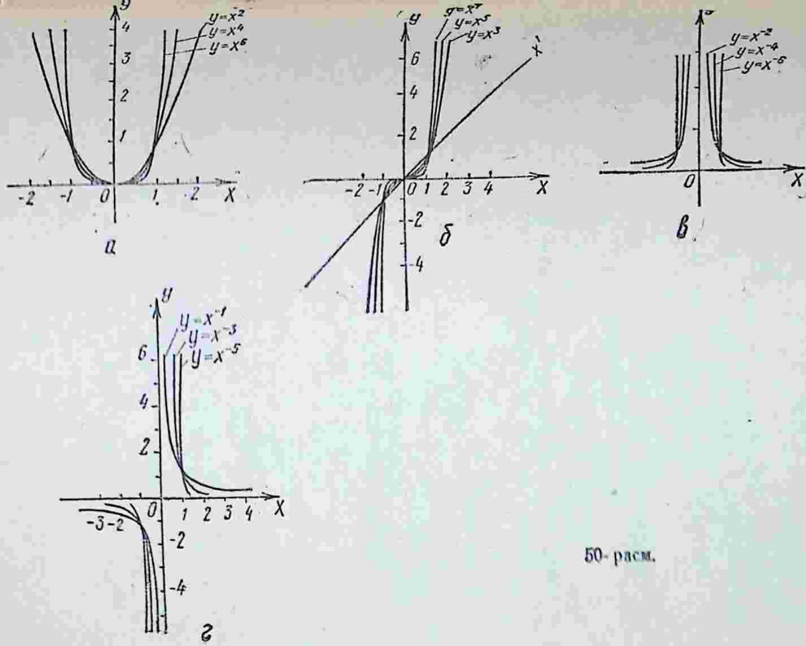
$y=x^n$ даражали функциянинг кўрсаткичи манфий жуфт сонлар бўлса, бундай функцияларнинг графиги 50-*в* расмда, манфий тоқ сонлар бўлса, 50-*г* расмда тасвирланган.

Машқлар

37. (Оғзаки.) 1) $y=x^{-1}$ билан $y=-x^{-1}$ функциянинг; 2) $y=-2x^{-2}$ билан $y=2x^{-2}$ функциянинг; 3) $y=x^{-1}$ билан $y=x^{-1}+2$ функциянинг; 4) $y=x^{-1}$ билан $y=(x-2)^{-1}$ функциянинг; 5) $y=x^{-1}$ билан $y=|x^{-1}|$ функциянинг графиги бир-бирига нисбатан қандай жойлашган?

38. $y=-x^{-2}$ функция графигини чизинг ҳамда: 1) аниқланиш соҳасини, 2) ўсиш ва камайишини, 3) ишорасини, 4) қийматлар соҳасини аниқланг.

39. 1) 50-*б* расмда тасвирланган $y=x^{2n+1}$ функциянинг; 2) 50-*г* расмда тасвирланган $y=x^{-2n-1}$ функциянинг: а) аниқланиш соҳаси, б) илдизи, в) ўсиш ва камайиши, г) ишораси, д) қийматлар соҳаси ҳақида нима дейиш мумкин?



50- расм.

8-§. Махражида ўзгарувчи бўлган тенгламалар

1-мисол. Тенгламани ечинг: $\frac{6}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}+$ $+\frac{x^2}{x^2-4}=0.$

Ечиш. Тенгламанинг чап қисмидаги ифодани умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{6(x-2)-(x+2)^2+x^2}{(x^2-4)}=0.$$

Касрнинг нолга тенг бўлиш шартига асосан:

$$\begin{cases} 6(x-2)-(x+2)^2+x^2=0, \\ x^2-4\neq 0. \end{cases}$$

Бундан $6x-12-x^2-4x-4+x^2=0 \Longleftrightarrow 2x=16 \Longleftrightarrow x=$ $=8$ бўлади, $x=8$ бўлганда $8^2-4\neq 0$ мулоҳаза тўғри. *Жавоб.* $\{8\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=$ $=\frac{4}{(x+2)(x+3)}.$

Ечиш. Тенгламанинг чап қисмидаги касрлар йиғиндисини айнан тенг касрга алмаштирамиз:

$$\frac{4(x+3)+7(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{4}{(x+2)(x+3)}.$$

Демак,

$$\begin{cases} 4(x+3)+7(x+2)=4, \\ (x+2)(x+3)\neq 0 \end{cases}$$

шартлар бажарилганда тенглик бажарилади. Тенгламани ечамиз: $4x+12+7x+14=4 \Longleftrightarrow 11x=-22 \Longleftrightarrow x=$ $=-2.$ $x=-2$ бўлганда $(-2+2)$, $(-2+3)\neq 0$ мулоҳаза нотўғри. Демак, тенглама ечимга эга эмас. *Жавоб.* $\varnothing$.

Машқлар

Тенгламанинг ечимлар тўпламини топинг:

40. 1) $\frac{3}{x-3}-\frac{5}{x+1}=0;$ 2) $\frac{7}{y-4}=\frac{1}{2+y};$ 3) $\frac{5x-1}{x+4}=$ $=\frac{10x+1}{2x-1};$ 4) $\frac{2y}{y-3}-\frac{4y+28}{1+2y}=0.$

41. 1) $\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-5}{x}=2$; 2) $\frac{1}{1+x}=\frac{24}{1-x^2}$; 3) $\frac{\text{[illegible]}}{2x-3}-\frac{14}{2x+3}=\frac{7}{4x^2-9}$; 4) $\frac{3x-1}{6x-3}-\frac{1}{1-4x^2}=\frac{x}{2x+1}$.

42. 1) $\frac{x^2-1}{x}=\frac{4x-1}{x}$; 2) $\frac{x^2+3x}{x}-\frac{x+3}{x}=0$; 3) $\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}=0$; 4) $\frac{5}{2x+5}+\frac{2x}{2x+5}=0$.

43. 1. Касрнинг сурати махражидан 2 та кам. Агар унинг суратидан 2 ни айириб, махражига 2 ни қўшсак, касрнинг қиймати $\frac{1}{2}$ га тенг бўлади. Касрни топинг.

2. Касрнинг махражи суратидан 2 та кам. Агар касрнинг суратига 3 ни, махражига 1 ни қўшсак, касрнинг қиймати 2 га тенг бўлади. Касрни топинг.

44. Коммунистик меҳнат бригадаси маълум муддатда 720 та деталь тайёрлаши керак эди. Бригада биринчи 8 кунда кунлик нормасини 20 %, кейинги кунларда эса 25 % орттириб бажарди ва топшириқни бажариш билан бирга пландан ташқари 164 та деталь тайёрлади. Бригада неча кун ишлаган?

45. M пунктдан N пунктга қараб велосипедчи жўнади. У жўнагандан 2 соат-у 40 минут ўтгач, M пунктдан N пунктга қараб мотоциклчи жўнади. Мотоциклчи велосипедчидан 2,8 марта тез юриб, N га велосипедчидан 25 минут кейин келди. $|MN|=67{,}5$ км бўлса, велосипедчи ва мотоциклчининг тезлигини топинг.

46. Қайиқ оқимга қарши 10,5 км сузиб, сўнгра орқага қайтди. Қайтиб келишга оқимга қарши юрганига нисбатан 21 минут кам вақт сарф қилди. Агар қайиқнинг оқим бўйича тезлиги оқимга қарши тезлигидан 20 % ортиқ бўлса, қайиқнинг оқим бўйича тезлигини топинг.

9-§. Бир ўзгарувчили параметрли тенгламалар

Баъзан тенгламада ўзгарувчилардан ташқари „параметр"лар ҳам қатнашади. Масалан, $2x+1=3a-x$ тенгламада x ўзгарувчидан ташқари a параметр, $my+n=py$ тенгламада эса y ўзгарувчидан ташқари m, n, p параметрлар қатнашаётир.

Берилган тенгламада параметрларнинг қиймати тенгламанинг берилишида олдиндан чеклаб қўйилган бўлмаса, у параметрлар шу тенглама ўз маъносини йўқотмайдиган барча қийматларни қабул қилиши мумкин деб қаралади. Масалан,

$$a(x-c)=b(x+d)$$

тенгламада a, b, c ва d параметрлар ихтиёрий сон қийматни қабул қила олади. Шу сабабли бу тенгламани ечиш жараёнида (яъни илдизлар тўпламини топишда) унда қатнашувчи параметрларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини лозим бўлган хусусий ҳоллар учун текширилади ва ҳар қайси хусусий ҳолда ечим сони (ечим биттами, чексиз кўпми ёки ечим йўқлиги) изоҳланади. Масалан,

$$ax - ac = bx + bd \quad \text{ёки} \quad (a - b)\,x = ac + bd$$

тенгламани ечайлик. Бу тенгликни $a - b$ га бўлиш учун $a - b \neq 0$ ёки $a \neq b$ бўлиши керак. Демак, бу ерда иккита ҳол бўлиши мумкин:

1) $a \neq b$ бўлсин. Бу ҳолда $x = \dfrac{ac + bd}{a - b}$ берилган тенгламанинг биргина илдизи бўлади;

2) $a = b$ бўлсин. Агар $a = b = 0$ бўлса, ихтиёрий сон берилган тенгламанинг ечими бўлади. Агар $a = b \neq 0$ бўлса, берилган тенглама $ax - ac = ax + ad$ ёки $(a - a)x = a(d + c)$ кўринишни олади ва бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $d + c = 0$ ёки $d = -c$ бўлса, тенглама $0 \cdot x = a \cdot 0$ кўринишни олади ва ихтиёрий сон унинг ечими бўлади, яъни тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлади;

б) $d + c \neq 0$ ёки $d \neq -c$ бўлса, тенглама $0 \cdot x = a(d + c)$ кўринишни олади ва $a(d + c) \neq 0$ бўлгани учун у илдизга эга бўлмайди.

Жавоб. $a \neq b$ бўлса, $\left\{\dfrac{ax + bd}{a - b}\right\}$; $a = b = 0$ ёки $a = b \neq 0$ бўлиб, $c = -d$ бўлса, ечимлар тўплами $]-\infty; \infty[$; $a = b \neq 0$ бўлиб, $c \neq -d$ бўлса, ечимлар тўплами $\varnothing$.

Қуйидаги параметрли тенгламани ечайлик:

$$\frac{a - 1}{x - 2} = 2.$$

Ечиш. Берилган тенгламани $\dfrac{a - 1}{x - 2} - 2 = 0$, $\dfrac{a - 1 - 2(x - 2)}{x - 2} = 0$ ёки $\dfrac{a + 3 - 2x}{x - 2} = 0$ кўринишга келтирамиз. Бундан:

$$\begin{cases} a + 3 - 2x = 0, \\ x - 2 \neq 0. \end{cases}$$

$a + 3 - 2x = 0$ тенгламадан $x = \dfrac{a + 3}{2}$. Энди a нинг қандай қийматида $x - 2 \neq 0$ ёки x ўрнига $\dfrac{a + 3}{2}$ қийматини қўйсак,

$\frac{a+3}{2}-2\neq 0$ мулоҳазанинг тўғрилигини аниқлаймиз. $\frac{a+3}{2}-2=0$ тенгламани ечсак, $a=1$. Демак, юқоридаги мулоҳаза $a\neq 1$ бўлганда бажарилади, яъни $a\neq 1$ ёки $a\in\ ]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ бўлса, тенглама $\frac{a+3}{2}$ дан иборат битта ечимга эга бўлади. $a=1$ бўлса, ечимга эга бўлмайди.

Жавоб. Ечимлар тўплами $a\in\ ]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ бўлса, $\left\{\frac{a+3}{2}\right\}$; $a=1$ бўлса, $\varnothing$.

Машқлар

Параметрли тенгламани ечинг:

47. 1) $x-a=b$; 2) $\frac{x}{a}+n=m$ 3) $ax-bx=c$; 4) $y=m+by$.

48. 1) $ax+b=x+d$; 2) $mx-q=nx+p$; 3) $\frac{mx}{n}+x=q$;

4) $\frac{x}{b^2}+\frac{x}{a^2}+\frac{x}{ab}=a^3-b^3$, 5) $\frac{c-x}{d-c}-\frac{c+x}{d+c}=\frac{2cx}{c^2-d^2}$.

49. 1) $\frac{b+3}{x-2}=\frac{3}{2}$; 2) $\frac{c-2}{2x+3}=2{,}5$; 3) $\frac{3}{1-x}=\frac{4}{b-1}$.

VII БОБ

БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШГА ТАТБИҚИ

1-§. Тенгсизликнинг асосий хоссалари

Теорема. *$a-b>0$ бўлса, $a>b$ бўлади, $a-b<0$ бўлса, $a<b$ бўлади ($a-b=0$ бўлса, $a=b$ бўлади).*

Тенгсизликнинг асосий хоссалари:

1. Агар $a>b$ бўлса, $b<a$ ва, аксинча, агар $b<a$ бўлса, $a>b$ бўлади, яъни $a>b\Longleftrightarrow b<a$.

2. Агар $a>b$ ва $b>c$ бўлса, $a>c$ бўлади.

3. Агар $a>b$ бўлиб, c — ихтиёрий сон бўлса, $a+c>b+c$ бўлади. Тўғри тенгсизликнинг иккала қисмига бир хил сон қўшилса, тенгсизлик ўзгармайди, яъни:

$$(a>b,\ c \text{ — ихтиёрий сон}) \Longleftrightarrow (a+c)>(b+c).$$

4. $a>b$ ва $n>0$ бўлса, $an>bn$ ва $a:n>b:n$ бўлади.

Тўғри тенгсизликнинг иккала қисми биргина мусбат сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, тенгсизлик ўзгармайди, яъни

$$(a > b,\ n > 0) \Longleftrightarrow (an > bn),$$
$$(a > b,\ n > 0) \Longleftrightarrow (a : n > b : n).$$

5. Тўғри тенгсизликнинг иккала қисми биргина манфий сонга кўпайтирилса ёки бўлинса ҳамда тенгсизлик белгиси қарама-қаршисига алмаштирилса, яна тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади, яъни:

$$(a > b, n < 0) \Longleftrightarrow (an < bn),\ (a > b,\ n < 0) \Longleftrightarrow (a : n < b : n).$$

Таъриф. *Иккала тенгсизликда ҳам бир хил* ($>$), ($\geqslant$) ёки ($<$), ($\leqslant$) *белги турган бўлса, улар бир хил маъноли, агар тенгсизликлардан бирида* $>$ ($\geqslant$) *белги, иккинчисида* $<$($\leqslant$) *белги турса, улар қарама-қарши маъноли тенгсизликлар деб аталади.*

6. $a > b$ ва $c > d$ бўлса, $a + c > b + d$ бўлади, яъни бир хил маъноли тўғри тенгсизликларнинг чап қисмини чап қисмига, ўнг қисмини ўнг қисмига қўшиш мумкин.

Мисол. 1) $\begin{array}{r} 13{,}1 > 7 \\ +\ \ 8{,}4 > 6 \\ \hline 21{,}5 > 13 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 0{,}38 < 1{,}4 \\ +\ \ -2 \ \ < -1 \\ \hline -1{,}62 < 0{,}4 \end{array}$

$71{,}2 > 13{,}4$ дан $18{,}1 > 11{,}2$ тенгсизликни айириш учун ё биринчисини $13{,}4 < 71{,}2$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра айириш ёки иккинчисини $11{,}2 < 18{,}1$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра айириш керак.

7. $a > b$ ва $c < d$ бўлса, $a - c > b - d$ бўлади, яъни қарама-қарши маъноли тўғри тенгсизликларнинг чап қисмидан чап қисмини, ўнг қисмидан ўнг қисмини айириб, биринчи тенгсизликнинг белгисини қўйиш керак.

Мисол. 1) $\begin{array}{r} 8 > 3 \\ -\ \ 7 < 6 \\ \hline 1 > -3 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 13 < 18 \\ -\ \ 7 > \ 6 \\ \hline 6 < 12 \end{array}$

8. $a > b > 0$ ва $c > d > 0$ бўлса, $ac > bd$ бўлади, яъни қисмлари мусбат бўлган бир хил маъноли тўғри тенгсизликларнинг мос қисмларини кўпайтириш мумкин.

9. a ва b мусбат сонлар бўлиб, $a < b$ ва $n \in N$ бўлса, $a^n < b^n$ бўлади, яъни қисмлари мусбат бўлган тўғри тенгсизликнинг ҳар икки қисмини бир хил натурал кўрсаткичли даража шаклида ёзиш мумкин.

10. a, b мусбат сонлар бўлиб, $a < b$ бўлса, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ бўлади.

Машқ

1. Ушбу амалларни бажаринг:

1) $-\begin{array}{r} 81{,}9 > -2{,}7 \\ 3{,}4 < 10{,}8 \\ \hline \end{array}$ 2) $+\begin{array}{r} 13{,}91 < 18{,}4 \\ 0 < 7{,}1 \\ \hline \end{array}$ 3) $+\begin{array}{r} 7{,}83 < 8{,}4 \\ 10{,}8 > 7{,}4 \\ \hline \end{array}$

2-§. Тенг кучли тенгсизликлар

Таъриф. *Икки тенгсизликдан ҳар бирининг ечими иккинчисининг ҳам ечими бўлса, бундай тенгсизликларга тенг кучли (эквивалент) тенгсизликлар дейилади.*

Масалан, $x + 1 > 3$ ва $3x > 6$ тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлардир (чунки уларни ҳам x нинг 2 дан катта барча қийматлари қаноатлантиради). Бу тенг кучли тенгсизликлар $(x + 1 > 3) \Longleftrightarrow (3x > 6)$ каби ёзилади.

Ечимга эга бўлмаган тенгсизликлар ҳам тенг кучли тенгсизликлар деб аталади. Масалан, $x^2 + 1 < 0$ ва $-x^2 > 3$ тенг кучли тенгсизликлардир.

Тенг кучли тенгсизликларнинг хоссаларини ифода қилувчи теоремаларни (исботсиз) келтирамиз.

1-теорема. *Тенгсизликнинг иккала қисмига сон ёки ўзгарувчининг барча қийматлари учун аниқланган ифода қўшилса ёки иккала қисмидан айирилса, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.*

Масалан, $x - 1 > 3$ тенгсизликнинг иккала қисмига 1 ни қўшсак, $x > 3 + 1$ тенгсизлик берилган тенгсизликка тенг кучли бўлади, яъни $x - 1 > 3 \Longleftrightarrow x > 3 + 1$. $x + 3 < 1$ тенгсизликнинг ҳар икки қисмига $x^2 + 2$ ни қўшсак, берилганига тенг кучли бўлган $x + 3 + x^2 + 2 < 1 + x^2 + 2$ тенгсизлик ҳосил бўлади, яъни $x + 3 < 1 \Longleftrightarrow x + x^2 + 5 < x^2 + 3$.

Натижа. Сонни ёки ўзгарувчили ифоданинг ишорасини қарама-қаршисига алмаштириб, тенгсизликнинг бир қисмидан иккинчи қисмига ўтказиш мумкин. $5x-5>7+x$ тенгсизликнинг чап қисмидаги -5 ни ўнг қисмига $+5$ қилиб, ўнг қисмидаги $+x$ ни чап қисмига $-x$ қилиб ўтказсак: $5x-x>7+5$ ёки $(5x-5>7+x \Longleftrightarrow 4x>12$.

2-теорема. *Агар тенгсизликнинг иккала қисми мусбат сонга ёки ўзгарувчининг барча қийматларида фақат мусбат қийматларни қабул қиладиган ифодага кўпайтирилса (ёки бўлинса), берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.*

Масалан, 1) $(2x>6-x) \Longleftrightarrow (10x>5(6-x))$; 2) $(x-1<5) \Longleftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+3)<5(x^2+3)$.

$x>3$ тенгсизликни $\frac{1}{(x-4)^2}$ га кўпайтирсак, ҳосил бўлган $\frac{x}{(x-4)^2}>\frac{3}{(x-4)^2}$ тенгсизлик $x>3$ тенгсизликка тенг кучли бўла олмайди, чунки $\frac{1}{(x-4)^2}$ ифода ўзгарувчи $x=4$ бўлганда мусбат эмас $\left(\frac{1}{(x-4)^2}\right.$ ифода $x=4$ бўлганда маънога эга эмас). Ҳақиқатан ҳам, $x=4$ берилган тенгсизликни қаноатлантиради, аммо ҳосил бўлган тенгсизлик $x=4$ бўлганда маънога эга бўлмайди.

3-теорема. *Агар тенгсизликнинг иккала қисми манфий сонга ёки ўзгарувчининг барча қийматларида фақат манфий қийматлар қабул қиладиган ифодага кўпайтирилиб (ёки бўлиниб), тенгсизликнинг белгисини қарама-қаршисига алмаштирилса, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.*

1-натижа. Тенгсизлик барча ҳадларининг ишораларини қарама-қаршисига алмаштирилса, тенгсизлик белгиси қарама-қаршисига алмаштирилади.

2-натижа. Тенгсизликнинг иккала қисмини ишораси номаълум бўлган ўзгарувчили ифодага кўпайтириш ёки бўлиш мумкин эмас.

Машқлар

2. Тенгсизликлар тенг кучли бўлса, орасига $\Longleftrightarrow$ белги қўйинг:

1) $3x-6<0$ ва $3x<6$;
2) $9x-1,8>0$ ва $x-0,2>0$;
3) $7x-3>4$ ва $7x>7$;
4) $2(x-1)<x$ ва $x-1<0,5x$;
5) $x^2+3>0$ ва $-x^2-1<0$;
6) $x^2>-1$ ва $x^2+3>0$.

3. Берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган тенгсизлик тузинг

1) $x > 1,5$; 2) $x < -2$; 3) $5x - 10 < 0$; 4) $7x > 0,7$.

4. Тенг кучли тенгсизликларга мисоллар келтиринг.

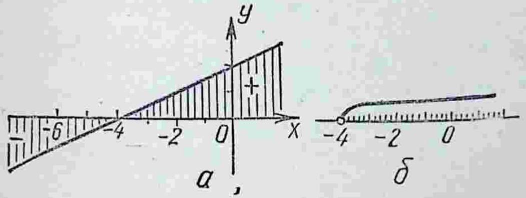
3-§. Бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизлик

Таъриф. *Бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизлик деб* $ax + b > 0$ $(ax + b \geqslant 0)$ (1) ёки $(ax + b < 0)$ $(ax + b \leqslant 0)$ (1′) *кўринишдаги тенгсизликларга ёки соддалаштирилгандан сўнг (1) ёки (1′) кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгсизликларга айтилади* (бунга x — ўзгарувчи, $a \neq 0$ ва b — ўзгармас сонлар).

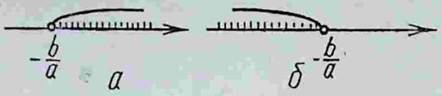
Масалан, $5x - 0,8 > 0$; $4 - 3,7x \leqslant 0$ бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлардир.

1. $0,5x + 2 > 0$ тенгсизликни график усулда ечиш учун $y = 0,5x + 2$ функциянинг графигини чизамиз (51-*а* расм). График $]-4; +\infty[$ оралиқда x ўқнинг юқорисига жойлашади. Бу эса $]-4; +\infty[$ тўпламида $0,5x + 2$ функция мусбат эканини билдиради. Шу сабабли берилган тенгсизликнинг ечими $]-4; +\infty[$ тўпламдан иборат бўлади. Ечим координата тўғри чизиғида $]-4; +\infty[$ сонли оралиқ билан тасвирланади (51-*б* расм).

2. Бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликни тенгсизликларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб ечамиз. $ax + b < 0$ тенгсизликнинг ҳар икки қисмини (-1) га кўпайтириб, $ax + b > 0$ кўринишдаги тенгсизликка келтириш мумкин бўлгани учун $ax + b > 0$ тенгсизликни ечиш билан чекланамиз. $ax + b > 0$ тенгсизликнинг ҳар икки қисмига $-b$ ни қў-



51-расм.



52- расм.

сак, берилганига тенг кучли $ax > -b$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бунда $a > 0$ бўлса, тенгсизликнинг ҳар икки қисмини a га бўлиб, унга тенг кучли $x > -\frac{b}{a}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ва унга тенг кучли бўлган берилган тенгсизликнинг ечими $\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$ тўпламдан иборат бўлади (52-*а* расм).

$ax > -b$ да $a < 0$ бўлса, тенгсизликнинг ҳар икки қисмини a га бўлиб, унга тенг кучли $x < -\frac{b}{a}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. У ҳолда ечим $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$ тўпламдан иборат бўлади (52-*б* расм).

1-мисол. Тенгсизликни ечинг: $7(x-3)+2 > x - (1-2x)$.

Ечиш. Қавсларни очамиз: $7x - 21 + 2 > x - 1 + 2x$ ёки $7x - 19 > -1 + 3x$. Ўзгарувчи бўлган ҳадларни тенгсизликнинг чап қисмига, ўзгармас сонларни эса тенгсизликнинг ўнг қисмига ўтказиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз: $4x > 18$. Бундан $x > 4,5$. *Жавоб.* $]4,5; +\infty[$.

2-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\frac{7}{2x-1} < 0$.

Ечиш. Каср манфий бўлиши учун унинг махражи манфий бўлиши керак, яъни $2x - 1 < 0$. $\frac{7}{2x-1} < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0$ тенгсизликни ечсак: $x < 0,5$. *Жавоб.* $]-\infty; 0,5[$.

Агар бир ўзгарувчили тенгсизлик каср кўринишда бўлиб, каср махражида номаълум иштирок этмаса, уни нормал кўринишга[1] келтириш учун қуйидаги ишлар қилинади:

1) тенгсизлик бутун кўринишга келтирилади; 2) қавслар очилади; 3) номаълумлар тенгсизликнинг бир қис-

[1] $ax > b$ (ёки $ax < b$) тенгсизликни бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликнинг нормал кўриниши дейилади.

мига, маълумлар эса иккинчи қисмига ўтказилади; 4) ўхшаш ҳадлар ихчамланади; 5) тенгсизликнинг ҳар икки қисми ўзгарувчининг коэффициентига бўлинади (бўлувчи мусбат сон бўлса, тенгсизлик белгиси сақланади, бўлувчи манфий сон бўлса, тенгсизлик белгиси қарама-қаршисига алмаштирилади).

3-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\frac{x-1}{2}+\frac{3-2x}{3}-2<$ $<x+\frac{4-3x}{4}$.

Ечиш. Тенгсизликнинг барча ҳадларини 12 га кўпайтириб ечамиз:

$$6(x-1)+4(3-2x)-24<12x+3(4-3x),$$
$$6x-6+12-8x-24<12x+12-9x$$

ёки $-2x-18<3x+12$. Бундан $-2x-3x<18+12$ ёки $-5x<30$, яъни $x>-6$.

Жавоб. $]-6;\ +\infty[$.

Машқлар

Тенгсизликларни ечинг:

5. 1) $5x-0{,}2>2x-33{,}1$;
   2) $4(x-1)>x+2(x-5)$;
   3) $3(x+4)-1>2(x-1)+x$;
   4) $5-4(x-1)>(x+3)\cdot 2$.

6. 1) $\frac{5x-3}{4}>0$; 2) $\frac{17}{3x-1}<0$; 3) $\frac{2x-9}{7}>\frac{1}{2}$; 4) $\frac{13-4x}{3}>$ $>\frac{3}{4}$.

7. 1) $(x-2)(x+1)-3>x^2+x+5$; 2) $4x^2-7x+3>(3-2x)^2$;
   3) $\frac{2x-3}{3}-\frac{3x-5}{4}<0$; 4) $x-3>\frac{2x+1}{4}$.

4-§. Қўш тенгсизликларнинг хоссалари ва улар устида амаллар

Таъриф. *Қўш тенгсизликлар деб $a<b<c$ ёки $a>b>c$ кўринишдаги*[1] *тенгсизликларга айтилади.*

Қўш тенгсизликларнинг баъзи асосий хоссалари билан танишайлик:

---

[1] $>$, $<$ белгилар ўрнида $\geqslant$, $\leqslant$ белгилар ҳам туриши мумкин.

1. Агар $a < b < c$ бўлса, $c > b > a$ бўлади, яъни

$$(a < b < c) \Leftrightarrow (c > b > a).$$

2. Агар $a < b < c$ бўлиб, d — ихтиёрий сон бўлса, $a + d < b + d < c + d$ бўлади, яъни ($a < b < c$, d—ихтиёрий сон) $\Leftrightarrow (a + d < b + d < c + d)$.

3. Агар $a < b < c$ бўлиб, $n > 0$ бўлса, $an < bn < cn$ ёки $a:n < b:n < c:n$ бўлади, яъни

$$(a < b < c,\quad n > 0) \Leftrightarrow (an < bn < cn);$$

$$(a < b < c,\ n > 0) \Leftrightarrow (a:n < b:n < c:n).$$

4. Агар $a < b < c$ бўлиб, $n < 0$ бўлса, $an > bn > cn$ ёки $a:n > b:n > c:n$ бўлади, яъни $(a<b<c,\ n<0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (an > bn > cn)$ ёки

$$(a < b < c,\ n < 0) \Leftrightarrow (a:n > b:n > c:n).$$

Хусусий ҳолда $(a > b > c) \Leftrightarrow (-a < -b < -c)$.

5. Таъриф. *$a < b < c$ ва $a' < b' < c'$ ёки $a > b > c$ ва $a' > b' > c'$ тенгсизликларига бир хил маъноли $a < b < c$ ва $a' > b' > c'$ ёки $a > b > c$ ва $a' < b' < c'$ тенгсизликларига эса қарама-қарши маъноли қўш тенгсизликлар дейилади.*

Агар $a < b < c$ ва $a' < b' < c'$ бўлса, $a + a' < b + b' < c + c'$ бўлади.

Масалан,

$$1)\ +\begin{array}{r} 5 < 7 < 15 \\ -1 < 0 < \ 3 \\ \hline 4 < 7 < 18 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} -0{,}9 < -0{,}3 < 0 \\ 13 < 14 < 15 \\ \hline 12{,}1 < 13{,}7 < 15 \end{array}$$

$5 < 7 < 11$ тенгсизлик билан $8 > 0 > -10$ тенгсизликларни қўшиш учун уларни бир хил маъноли қўш тенгсизликларга келтириш керак, яъни

$$+\begin{array}{r} 5 < 7 < 11 \\ 8 > 0 > -10 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 5 < 7 < 11 \\ -8 < 0 < -10 \\ \hline -3 < 7 < 21 \end{array} \quad \text{ёки} \quad \begin{array}{r} -5 > -7 > -11 \\ 8 > 0 > -10 \\ \hline 3 > -7 > -21 \end{array}$$

6. Агар $a < b < c$ ва $a' > b' > c'$ — бўлса, $a - a' < b - b' < c - c'$ бўлади.

$a > b > c$ ва $a' < b' < c'$ бўлса, $a - a' > b - b' > c - c'$ бўлади.

Масалан, 1) $\begin{array}{r} -\ -1<10<11 \\ -9>-10>-13 \\ \hline 8<20<24 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -\ 40>28>7 \\ -4<0<1 \\ \hline 44>28>6 \end{array}$

Бир хил маъноли тенгсизликларни айириш учун аввал уларни қарама-қарши маъноли тенгсизлик кўринишида ёзиб олиб, сўнгра айириш керак.

7. Агар $0<a<b<c$ ва $0<a'<b'<c'$ бўлса, $aa'<bb'<cc'$ бўлади. Масалан, $2<3<5$ ва $0{,}2<1<3$ бўлса, $2\cdot 0{,}2<3\cdot 1<5\cdot 3$ ёки $0{,}4<3<15$ бўлади.

8. Агар $0<a<b<c$ ва $n\in N$ бўлса, $a^n<b^n<c^n$ бўлади, яъни $(0<a<b<c,\ n\in N)\Longleftrightarrow a^n<b^n<c^n$.

9. Агар $0<a<b<c$ бўлса, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$ бўлади,

яъни $(0<a<b<c)\Longleftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$.

Машқлар

Амалларни бажаринг:

8. 1) $\begin{array}{r} +\ -0{,}8<1<1{,}7 \\ 2{,}1<4<5{,}3 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\ 10{,}1<12{,}9<13{,}2 \\ -5{,}4<-4<-3{,}8 \\ \hline \end{array}$

3) $\begin{array}{r} -\ 4<7<21{,}3 \\ -9>8>6{,}1 \\ \hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -\ -4{,}8<0<2{,}3 \\ 5{,}2>4>3{,}7 \\ \hline \end{array}$

9. 1) $\begin{array}{r} +\ 7<8<9 \\ 10>5>3 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\ -10{,}1<-9{,}2<-8{,}3 \\ 1>0>-1 \\ \hline \end{array}$

3) $\begin{array}{r} -\ 20<30<37 \\ 19<21<23 \\ \hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -\ 7{,}8<10{,}4<13 \\ -4{,}5<-3{,}9<-2{,}6 \\ \hline \end{array}$

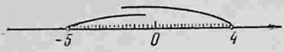
5) $\begin{array}{r} \times\ 13{,}4<15{,}7<20{,}9 \\ 2<5<10 \\ \hline \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} \times\ 2<7<11, \\ -5>-6>-10. \\ \hline \end{array}$

5-§. Бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлар системаси

1-таъриф. *Бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлар системаси деб*

$$\begin{cases} ax+b\vee 0; \\ cx+d\vee 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+b\vee 0, \\ cx+d\vee 0, \\ lx+k\vee 0 \end{cases} \qquad (2)$$

кўринишдаги ёки шундай кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгсизликлар системасига айтилади.



53- расм.

(V белги $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ белгиларидан бирини билдиради.)

2-таъриф. *Бир ўзгарувчили тенгсизликлар системасининг ечими деб ўзгарувчининг системани ташкил этувчи барча тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматлар тўпламига айтилади.*

1-мисол. Тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x+23>3-x, \\ x-4>3(x-4). \end{cases}$$

Ечиш. Қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x+x>3-23 \\ x-4>3x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x>-20 \\ -2x>-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x<4. \end{cases}$$

Системанинг ечими ҳар икки тенгсизлик ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат бўлади: $]-5;+\infty[\cap]-\infty,4[$. *Жавоб.* $]-5;\ 4[$. Ечимлар тўпламининг координата тўғри чизиғидаги тасвири 53-расмда кўрсатилган.

2-мисол. Тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} \leqslant \dfrac{x}{2}-2x, \\ \dfrac{12+x}{2} \leqslant \dfrac{x}{4}+3x. \end{cases}$$

Ечиш. $\begin{cases} x+4 \leqslant x-4x \\ 24+2x \leqslant x+12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leqslant -4 \\ -11x \leqslant -24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 2\dfrac{2}{11}. \end{cases}$$

Ечим ҳар икки тенгсизлик ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат, яъни $]-\infty;\ -1\,[\cap]\ 2\frac{2}{11};+\infty[=\varnothing$. *Жавоб.* $\varnothing$.

3-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\frac{7-2x}{x+1}<1$.

Ечиш. Тенгсизликнинг ҳар икки қисмини ишораси (мусбат ёки манфийлиги) маълум бўлмаган $x+1$ ифодага кўпайтириш мумкин эмас. Шунинг учун берилган тенгсизликни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{7-2x}{x+1}<1 \Leftrightarrow \frac{7-2x}{x+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{7-3x-1}{x+1}<0 \Leftrightarrow \frac{6-3x}{x+1}<0.$$

Каср манфий бўлиши учун унинг сурат ва махражидаги ифодалар ҳар хил ишорали бўлиши керак, яъни:

а) $\begin{cases} 6-3x>0 \\ x+1<0 \end{cases}$ ёки б) $\begin{cases} 6-3x<0 \\ x+1>0. \end{cases}$

а) $\begin{cases} 6-3x>0 \\ x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x>-6, \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<-1. \end{cases}$

Бу системанинг ечими: $]-\infty;\ -1[$.

б) $\begin{cases} 6-3x<0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x<-6 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-1. \end{cases}$

Бу системанинг ечими: $]2;\ +\infty[$.

Ҳар икки система ечимлари тўпламларининг бирлашмаси $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$ берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

4-мисол. Қўш тенгсизликни ечинг: $x-1\leqslant \frac{x+1}{7} \leqslant x-\frac{4}{7}$.

Ечиш. 1-усул (тенгсизликлар системасига келтириб ечиш).

$$\begin{cases} x-1\leqslant \frac{x+1}{7} \\ \frac{x+1}{7}\leqslant x-\frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-7\leqslant x+1 \\ x+1\leqslant 7x-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x\leqslant 8 \\ 5\leqslant 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant \frac{4}{3} \\ x\geqslant \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{6}\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}.$$

2-усул. (Қўш тенгсизликларнинг хоссалари ва тенг кучлилигидан фойдаланиб ечиш[1]). $x-1\leqslant \frac{x+1}{7} \leqslant x-\frac{4}{7}\leqslant$ $\leqslant 7x-\leqslant 7x+1\leqslant 7x-4 \Leftrightarrow 7x-7-7x-1\leqslant x+1-7x-1\leqslant$ $\leqslant 7x-4-7x-1 \Leftrightarrow -8\leqslant -6x\leqslant -5 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\geqslant x\geqslant \frac{5}{6}.$

Жавоб. $\left[\frac{5}{6};\ \frac{4}{3}\right]$.

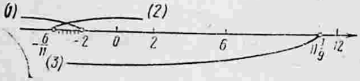
5-мисол. Тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x+15\leqslant 3-4x\leqslant 7x+9, \\ 0,1x+10\geqslant x. \end{cases}$$

Ечиш. $\begin{cases} 2x+15\leqslant 3-4x\leqslant 7x+9 \\ 0,1x+10\geqslant x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+15\leqslant 3-4x \\ 3-4x\leqslant 7x+9 \\ 0,1x+10\geqslant x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x\leqslant -12 \\ -11x<-6 \\ -0,9x\geqslant -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -2 \\ x\geqslant -\frac{6}{11} \\ x\leqslant 11\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Демак, $]-\infty; -2] \cap]-\frac{6}{11}; +\infty[\cap \left]-\infty; 11\frac{1}{9}\right] = \left]-\frac{6}{11}; -2\right]$.



Жавоб. $\left]-\frac{6}{11}; -2\right]$ (54-расм).

54-расм.

Машқлар

Тенгсизликлар системасини ечинг:

10. 1) $\begin{cases} \frac{3x}{2}-2x+3<0,5 \\ 7-2x<2x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2,4-x<3x+\frac{2}{5} \\ 3,1x\leqslant 3x+0,8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,3-3x>0,1x-1 \\ 2x-1<0,3-x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{3x}{2}-1\geqslant x+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-2x\geqslant \frac{1}{3}+x. \end{cases}$

---

[1] Қўш тенгсизликнинг ечими, қўш тенгсизликни ечиш, қўш тенгсизликларнинг тенг кучлилиги тенгсизликнинг ечими, тенгсизликни ечиш тенгсизликларнинг тенг кучлилиги (2-§) га ўхшаш таърифланиб, қўш тенгсизликларнинг тенг кучлилигига доир теоремаларни ҳам тенгсизликларни тенг кучлилигига доир теоремаларга ўхшаш баён қилиш мумкин.

11. 1) $\frac{2x-1}{4x+1} > 0$; 2) $\frac{3x-5}{2x+4} < 0$; 3) $\frac{3x+1}{1-2x} \geq 3$; 4) $\frac{3-2x}{x+1} < 4$.

12. Тенгсизликни бутун сонларда ечинг:

1) $\frac{5x-4}{7-3x} > 0$; 2) $\frac{3x-1}{7-2x} \geq 0$, 3) $\frac{3}{x-1} > 1$.

Тенгсизликлар системасини ечинг:

13. 1) $\begin{cases} 4x < 4 \\ 2x+8 \geq 0 \\ 3x+3 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,5x+1 > 0 \\ x \geq 1 \\ x+1 \leq 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-0,5 \leq 3,5-x \\ 5-2x > x+0,5 \\ 7x-3 \geq x+3. \end{cases}$

14*. 1) $\begin{cases} |x| < 2, \\ |x| > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| < 3, \\ |x| > 2, \\ |x| > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| > 2, \\ |x| < 3, \\ |x| < 1. \end{cases}$

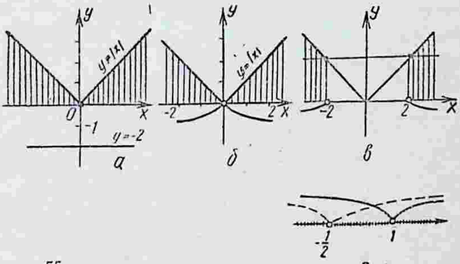
15*. 1) $\begin{cases} x-1 \leq 3x+3 \leq x+21, \\ 9x-1 < 7-x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{2}-5 \leq x+1 \leq 5x-3, \\ 5-x > 0,5x. \end{cases}$

6-§. $|ax+b| \vee c$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш

1. 1) x нинг ихтиёрий қийматида $|x|$ манфий бўлмагани учун -2 дан катта. Демак, $|x| > -2$ тенгсизликнинг ечими барча сонлар тўпламидан иборат (55-*а* расм);

2) x нинг нолдан бошқа барча қийматларида $|x| > 0$ бўлгани учун $|x| > 0$ тенгсизликнинг ечими $]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[$ тўпламдан иборат (55-*б* расм);

3) $|x| > 2$ тенгсизлик x нинг -2 дан кичик ҳамда 2 дан катта барча қийматларида ўринли, $|x| > 2$ тенгсиз-



55- расм.

лик $x<-2$ ва $x>2$ тенгсизликлар тўпламига тенг кучли, яъни:

$$|x|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2. \end{array}\right.$$

$x<-2$ тенгсизликнинг ечими $]-\infty; -2[$, $x>2$ тенгсизликнинг ечими эса $]2; +\infty[$. Бу икки тенгсизликлар тўпламининг ечими улар ечимлари тўпламларининг бирлашмасидан иборат бўлади, яъни $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. $|x|>2$ тенгсизликни график ечиш 55-*в* расмда кўрсатилган.

Демак, $|x|>c$ тенгсизликнинг ечими: 1) $c<0$ бўлганда ихтиёрий сон; 2) $c=0$ бўлганда $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ тўпламдан иборат; 3) $c>0$ бўлганда $\left[\begin{array}{l} x<-c \\ x>c \end{array}\right.$ тенгсизликлар тўпламининг ечими $]-\infty;-c[\cup]c; +\infty[$ дан иборат.

Уқтириш. Тенгсизликлар системасининг ҳар бир ечими системани ташкил қилган ҳар бир тенгсизликни қаноатлантириши керак. Шунинг учун тенгсизликлар системасининг ечими системани ташкил этган тенгсизликлар ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат бўлади. Тенгсизликлар тўпламининг ечими эса уни ташкил этган тенгсизликлардан камида биттасини қаноатлантириши керак. Бошқача айтганда, тенгсизликлар ечими тўпламни ташкил этувчи тенгсизликлар ечимлари тўпламларининг бирлашмасидан иборат бўлади.

Масалан, 1) $\left\{\begin{array}{l} x>1, \\ x>2 \end{array}\right.$ системанинг ечими: $]1; \infty[\cap]2; \infty[=]2; \infty[$. $\left|\begin{array}{l} x>1 \\ x>3 \end{array}\right.$ тенгсизликлар тўпламининг ечими: $]1;\infty[\cup]2; \infty[=]1; \infty[$. $\left\{\begin{array}{l} x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$ тенгсизликлар системасининг ечими $\varnothing$ бўлгани ҳолда $\left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$ тенгсизликлар тўпламининг ечими $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ дан иборат.

1-мисол. Тенгсизликни ечинг: $|2x-5|>4$.

Ечиш. Берилган тенгсизлик $2x-5<-4$ ва $2x-5>4$ тенгсизликлар тўпламига тенг кучли, яъни:

$$|2x-5|>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-5<-4, \\ 2x-5>4. \end{array}\right.$$

Тенгсизликлар тўпламини ечамиз:

$$\left[\begin{array}{l} 2x-5<-4, \\ 2x-5>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x<1, \\ 2x>9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0,5, \\ x>4,5. \end{array}\right.$$

Жавоб. Ҳар икки тенгсизлик ечимлари тўпламининг бирлашмаси $]-\infty;\ 0,5[\cup]4,5;\ +\infty[$ дан иборат.

2-мисол. Тенгсизликни ечинг: $2x-7\neq 1$.

Ечиш. 1-усул $2x-7\neq 1 \Leftrightarrow 2x\neq 8 \Leftrightarrow x\neq 4$. *Жавоб.* $]-\infty;\ 4]\cup[4;\ +\infty[$.

2-усул. $2x-7\neq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-7<1, \\ 2x-7>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x<8, \\ 2x>8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<4. \\ x>4. \end{array}\right.$$

2-усул мураккаброқ бўлгани учун мисолларни 1-усулда ечган маъқул.

3-мисол. Тенгсизликни ечинг: $|4x-3|>0$.

Ечиш. Берилган тенгсизлик $4x-3\neq 0$ тенгсизликка тенг кучли:

$$|4x-3|>0 \Leftrightarrow 4x-3\neq 0 \Leftrightarrow 4x\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{4}.$$

$$\left]-\infty;\ \frac{3}{4}\right[\cup\left]\frac{3}{4};\ \infty\right[.$$

Демак,

$$|ax+b|>c$$

кўринишдаги тенгсизликнинг ечими $c<0$ бўлганда ихтиёрий сон, $c=0$ бўлганда $ax+b\neq 0$ тенгсизликнинг ечимидан, $c>0$ бўлганда

$$\left[\begin{array}{l} ax+b<-c, \\ ax+b>c \end{array}\right.$$

тенгсизликлар тўпламининг ечимидан иборат экан:

$$(|ax+b|>c;\ c>0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax+b<-c, \\ ax+b>c. \end{array}\right.$$

2. 1) $|x|<-5$ ёки 2) $|x|<0$ тенгсизликлар ечимга эга эмас.

3. $|y|<3$ тенгсизликни эса -3 дан катта ва 3 дан кичик сонлар, яъни

$$\left\{\begin{array}{l} y<3, \\ y>-3 \end{array}\right.$$

тенгсизликлар системасининг ечими ёки $-3<y<3$ қўш тенгсизликнинг ечими қаноатлантиради. Демак,

$|y|<3 \Leftrightarrow -3<y<3$. *Жавоб.* $]-3;\ 3[$.

Шундай қилиб, $|x|<c$ тенгсизлик $c\leqslant 0$ бўлганда ечимга эга эмас, $c>0$ бўлганда эса $-c<x<c$ қўш тенгсизликнинг ечими $]-c;\ c[$ тўпламдан иборат бўлади.

$$|ax+b|<c \tag{4}$$

тенгсизлик ҳам $c\leqslant 0$ бўлганда ечимга эга эмас, $c>0$ бўлганда эса $-c<ax+b<c$ қўш тенгсизликнинг ечимидан иборат ечимга эга бўлади, яъни:

$$(|ax+b|<c;\ c>0) \Leftrightarrow -c<ax+b<c.$$

Уқтириш. $-c<ax+b<c$ қўш тенгсизликнинг ечими ҳам $ax+b>-c$ тенгсизликнинг, ҳам $ax+b<c$ тенгсизликнинг ечими бўлади ва аксинча, $ax+b>-c$ ва $ax+b<c$ тенгсизликлар ечимларининг кесишмаси — $-c<ax+b<c$ қўш тенгсизликнинг ечими бўлади, яъни:

$$|ax+b|<c \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b<-c, \\ ax+b>c. \end{cases}$$

Шундай қилиб, (4) тенгсизликни тенгсизликлар системасига келтириб ечса бўлар экан.

4-мисол. Тенгсизликни ечинг: $|3x-2|\leqslant 8$.

Ечиш. $|3x-2|\leqslant 8 \Leftrightarrow -8\leqslant 3x-2\leqslant 8 \Leftrightarrow -6\leqslant \leqslant 3x\leqslant 10 \Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 3\frac{1}{3}$. *Жавоб.* $\left[-2;\ 3\frac{1}{3}\right]$.

3. 1) $|x|\neq -3$ тенгсизликнинг ечими $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан; 2) $|x|\neq 0$ тенгсизликнинг ечими нолдан бошқа барча сонлар тўплами $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ \infty[$ дан иборат; 3) $|x|\neq 2$ тенгсизликнинг ечими эса $\left[\begin{array}{l} x\neq -2 \\ x\neq 2 \end{array}\right.$ тенгсизликлар тўпламининг ечимидан иборат.

Демак, $|x|\neq a$ кўринишдаги тенгсизликнинг ечими:

1) $a<0$ бўлса, $]-\infty;\ +\infty[$ тўпламдан, 2) $a=0$ бўлса, $]-\infty;\ 0\ [\cup]\ 0;\ \infty[$ тўпламдан, 3) $a>0$ бўлса, $\left[\begin{array}{l} x\neq -a \\ x\neq a \end{array}\right.$ тенгсизликлар тўпламининг ечимидан иборат.

5-мисол. Тенгсизликни ечинг: $|4x-1|\neq 3$.

Ечиш. $|4x-1|\neq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-1\neq -3, \\ 4x-1\neq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x \neq -2, \\ 4x \neq 4\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1.\end{array}\right.$ *Жавоб.* $]-\infty;$ $-\frac{1}{2}$ [U] $-\frac{1}{2}$; 1 [U]1; $+\infty$ [. (55-г расм).

6-м и с о л. Тенгсизликни ечинг: $|5x-2| \neq 0$.

Е ч и ш. $|5x-2| \neq 0 \Longleftrightarrow 5x-2 \neq 0 \Longleftrightarrow 5x \neq 2 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \neq 0,4$. *Жавоб.*$]-\infty$; 0,4 [U] 0,4; ∞[.

Машқлар

16. Тенгсизликлар системасини, тенгсизликлар тўпламини ечинг:

1) $\begin{cases} x > -1, \\ x > 1;\end{cases}$ 2) $\left[\begin{array}{l} x > -1, \\ x > 1;\end{array}\right.$ 3) $\begin{cases} x < -2, \\ x < 3;\end{cases}$ 4) $\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x < 3;\end{array}\right.$

5) $\begin{cases} x < -3, \\ x > 2;\end{cases}$ 6) $\left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 2;\end{array}\right.$ 7) $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3.\end{cases}$ 8) $\left[\begin{array}{l} x > -2 \\ x < 3.\end{array}\right.$

17. Нима учун тенгсизликнинг ечими барча сонлар тўпламидан иборат:

1) $|8x-7| > -10$; 2) $-|0,2x| \leqslant 0$; 3) $|4x-1| > -x^2$?

Тенгсизликни ечинг:

18. 1) $|0,2x| < 1$; 2) $|3x| > 0$ 3) $|7x| \geqslant 3$; 4) $|0,1x| \geqslant 1$.

19. 1) $|x-0,3| < 0$; 2) $|2x-5| > 0$; 3) $|3x-4| \leqslant -1$; 4) $|5x-1| \geqslant 6$; 5) $|4x-1| < 3$; 6) $|5x+4| \geqslant 9$.

20. 1) $\frac{|2x+3|}{7} \leqslant 0$; 2) $\frac{7}{|4x+3|} > 1$; 3) $\frac{3}{|3x-1|} > 1$; 4) $|10x-7| \neq 3$; 5) $|3-5x| \neq 0$, 6) $|2x-1| \neq a$.

7-§. Айний тенгсизлик. Тенгсизликни исботлаш

1-т а ъ р и ф. *Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси деб ўзгарувчининг шу тенгсизликни ташкил этувчи ифодалар маънога эга бўладиган қийматлар тўпламига айтилади.*

Масалан, $\frac{1}{a} > 0$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси нолдан бошқа барча сонлар тўпламидан иборат, $\frac{c+1}{c+2} < \frac{5}{c}$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $\frac{c+1}{c+2}$ ва $\frac{5}{c}$ ифодаларнинг аниқланиш соҳаларининг бирлашмасидан иборат: $]-\infty$; -2 [U]-2; 0[U]0; $+\infty$[.

2-т а ъ р и ф. *Айний тенгсизлик деб ўзгарувчининг шу тенгсизлик аниқланиш соҳасидаги ҳар бир қийматида ўринли бўлган (тўғри тенгсизликка айланадиган) тенгсизликка айтилади.*

Масалан, $a+2>a$ ва $a^2>-1$ айний тенгсизликлардир, чунки бу тенгсизликларнинг аниқланиш соҳаси барча сонлар тўпламидан иборат бўлиб, a нинг ихтиёрий қийматида бу тенгсизликлар ўринли бўлади (тўғри тенгсизликка айланади).

3-таъриф. *Тенгсизликни исбот қилиш учун ўзгарувчининг тенгсизлик аниқланиш соҳасидаги барча қийматларида шу тенгсизликнинг тўғри тенгсизликка айланишини кўрсатиш керак.*

1-мисол. Тенгсизлик исбот қилинсин:

$$(a+2)^2>4a-1.$$

Исбот. $a^2+4a+4>4a-1$.

Тенгсизликнинг ҳар икки қисмига ўзгарувчининг барча қийматларида аниқланган $-4a-4$ ифодани қўшсак, берилганига тенг кучли бўлган тенгсизлик ҳосил бўлади:

$$a^2+4a+4-4a-4>4a-1-4a-4. \qquad (*)$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамласак, $a^2>-5$ айний тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизлик a нинг барча қийматларида ўринли бўлади.

Энди тескари тартибда мулоҳаза юритиб, берилган тенгсизликни исбот қиламиз.

$a^2>-5$ айний тенгсизликнинг ҳар икки қисмига a нинг барча қийматларида аниқланган $4a+4$ ифодани қўшсак, $a^2>-5$ га тенг кучли бўлган $a^2+4a+4>$ $>-5+4a+4$ ёки $(a+2)^2>4a-1$ тенгсизлик ҳам айний тенгсизлик бўлади, яъни a нинг барча қийматларида ўринли бўлади.

2-мисол. $a^2+b^2+c^2+2>2\ (ab+c)$ тенгсизлик исбот қилинсин.

Исбот. Берилган тенгсизлик $(a^2+b^2-2ab)+$ $+(c^2+1-2c)+1>0$ ёки $(a-b)^2+(c-1)^2+1>0$ тенгсизликка тенг кучлидир. Шу сабабли берилган тенгсизликни исбот қилиш ўрнига охирги тенгсизликни исбот қиламиз. $(a-b)^2\geqslant 0$ ва $(c-1)^2\geqslant 0$ бўлганидан $(a-b)^2+$ $+(c-1)^2\geqslant 0$ бўлади.

Бундан: $(a-b)^2+(c-1)^2+1>0$.

3-мисол. $a>0$ бўлса, $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ экани (яъни ўзаро тескари мусбат сонлар йиғиндиси 2 дан кичик эмаслиги исбот қилинсин.

Ечиш. $a>0$ бўлгани учун берилган тенгсизликнинг ҳар икки қисмини a га кўпайтирамиз: $a^2+1\geqslant 2a$ ёки $a^2-2a+1\geqslant 0$. Бундан: $(a-1)^2\geqslant 0$. Бу тенгсизлик берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган айний тенгсизликдир. Энди тескари тартибда мулоҳаза юритамиз.

$(a-1)^2\geqslant 0$ айний тенгсизликдан $a^2-2a+1\geqslant 0$ ёки $a^2+1\geqslant 2a$. Бу тенгсизликнинг ҳар икки қисмини $a>0$ га бўлсак, $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ бўлади. $(a-1)^2\geqslant 0$ айний тенгсизликка тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам ($a>0$ бўлганда) ўринли.

Машқлар

21. (Оғзаки.) Тенгсизликлардан қайсилари айний тенгсизлик: 1) $a<1$; 2) $a^2-1>5$ 3) $3b+2>5$, 4) $\frac{5}{x^2+1}>0$, 5) $x^2+y^2>x+y$; 6) $a^2+b^2\geqslant 0$?

22. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳасини топинг: 1) $\frac{a}{a-1}>1$; 2) $\frac{n}{2m+4}<5$; 3) $\frac{5}{a^2-4}>0$; 4) $\frac{5}{c^2}<\frac{7}{b^2+c^2}$.

Тенгсизликни исбот қилинг:

23. 1) $a^2+3>2a$; 2) $a^2-5a+25\geqslant 5a$; 3) $x^2+y^2+2\geqslant 2(x+y)$; 4) $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 2(a+b+c+d)-4$.

24. 1) $a^4+b^2+2\geqslant (a^2-a^2b+b)$; 2) $x^2+y^2+1\geqslant 2(xy+x-y)$.

25. $\frac{n^2}{1+n^4}\leqslant\frac{1}{2}$; 2) $ab>0$ бўлса, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$; 3) $(a^2+b^2)\times$ $\times(a^2b^2+1)\geqslant 4a^2b^2$.

8-§. Миқдорларнинг тақрибий қийматлари. Яқинлашиш хатосининг модули

Миқдорнинг ҳақиқий қийматини камдан-кам ҳоллардагина аниқлаш мумкин. Масалан, оилангизда неча киши борлигини, учиб кетаётган самолётда нечта пассажир кетаётганини аниқ айтиш мумкин. Аммо кесманинг узунлигини, уйнинг ҳажмини, космик кеманинг тезлигини аниқ ўлчаб бўлмайди.

Кишилар ўзларининг кундалик ҳаётида турли миқдор (узунлик, юз, ҳажм, масса, температура ва ҳ. к.) ларни ўлчаш натижасида уларнинг тақрибий қийматлари билан иш кўрадилар, яъни тақрибий қийматлар асосан ўлчаш натижасида ҳосил бўлади. Бундан ташқари сонларни яхлитлаш натижасида ҳам, буюмларни санаш натижасида (буюмлар жуда кўп бўлиб, уларни санаб чиқиш қийин ёки санаб чиқиш мумкин бўлмаган ҳолларда) ҳам тақрибий сонлар ҳосил бўлади.

Масалан, шаҳар аҳолиси рўйхат бўйича 1350584 киши экани аниқланган бўлса, бу сон шаҳар аҳолиси сонини тақрибий ифода қилади, чунки бу шаҳар аҳолисини рўйхатга олиб ҳисоблаб чиққунча шаҳардан бир неча киши чиқиб кетса, бир неча киши бу шаҳарга келади. Шунингдек, шаҳарда бир неча бола туғилса, бир неча киши ўлади. Шунинг учун шаҳар аҳолисини тахминан 1 350 000 киши дейиш мумкин.

Таъриф. *Миқдорнинг тақрибий қийматининг хатоси деб унинг ҳақиқий қиймати билан тақрибий қиймати орасидаги айирмага айтилади*, яъни:

$$\Delta = x - a.$$

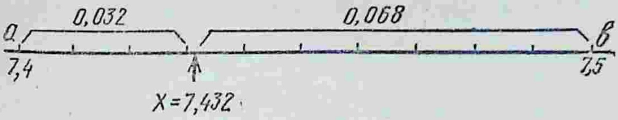
Мисол. Комсомол мажлисига $x=147$ ўқувчи қатнашди. Мажлисда тахминан $a=140$ ўқувчи қатнашди десак, бу тақрибий қийматнинг хатоси $x-a=7$ га тенг бўлади.

Агар мажлисда тахминан $b=150$ комсомол қатнашди десак, бу тақрибий қийматнинг хатоси $x-b=147-150=$ $=-3$ бўлади.

Бу мисолда ками билан олинган тақрибий қиймат хатоси бошқача айтганда ками билан олинган яқинлашишнинг хатоси 7 мусбат сон бўлиб, ортиғи билан олинган яқинлашишнинг хатоси -3 эса манфий сондир. Ҳар икки яқинлашишда қайси бирида хато оз эканини билиш учун ками билан олинган яқинлашиш хатосининг модули $|x-a|=|7|=7$ билан ортиғи билан олинган яқинлашиш хатосининг модули $|x-b|=|-3|=3$ ни таққослаймиз. Демак, бу мисолда ортиғи билан олинган тақрибий қиймат хатоси кам экан.

Шундай қилиб, иккита тақрибий қийматнинг қайси бири ҳақиқий қийматга яқинлигини билиш учун ками билан олинган ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлар хатолари таққосланар экан.

$x=7{,}432$ сонининг ўрнига унинг ками билан (0,1 аниқликдаги) тақрибий қиймати $a=7{,}4$ олинса, ками билан олинган яқинлашиш хатосининг модули $|x-a|=$ $=|7{,}432-7{,}4|=0{,}032$ га тенг бўлади. Агар берилган сон



56- расм.

ўрнига унинг ортиғи билан (0,1 аниқликдаги) тақрибий қиймати $b=7{,}5$ олинса, ортиғи билан олинган яқинлашиш хатосининг модули $|x-b|=|7{,}432-7{,}5|=|-0{,}068|=$ $=0{,}068$ га тенг бўлади. $0{,}032<0{,}068$ бўлгани учун 7,4 берилган соннинг ҳақиқий қийматига яқиндир (56- расм).

Мисол. $x=77{,}8$ сонининг қандай тақрибий қийматининг хатоси: 1) 0,05 га; 2) $-0{,}02$ га тенг бўлади?

Ечиш. 1) $77{,}8-a=0{,}05$; $a=77{,}8-0{,}05=77{,}75$;
2) $77{,}8-b=0{,}02$; $b=77{,}8+0{,}02=77{,}82$.

Демак, $x=77{,}8$ сонининг $a=77{,}75$ тақрибий қийматининг хатоси 0,05 га, $b=77{,}82$ тақрибий қийматининг хатоси эса $-0{,}02$ га тенг экан.

2- мисол. $\frac{1}{7}$ сонининг иккита яқинлашиши 0,14 ва 0,15 дан қайси бири яхши?

Ечиш. $\left|\frac{1}{7}-0{,}14\right|=\left|\frac{1}{7}-\frac{7}{50}\right|=\frac{1}{350}$;

$\left|\frac{1}{7}-0{,}15\right|=\left|\frac{1}{7}-\frac{3}{20}\right|=\left|-\frac{1}{140}\right|=\frac{1}{140}$; $\frac{1}{350}<\frac{1}{140}$ бўлгани учун $\frac{1}{7}$ сонининг 0,14 яқинлашиши яхши.

Машқлар

26. x берилган сон, a унинг тақрибий қиймати. Агар: 1) $x=2{,}8$ ва $a=3$; 2) $x=0{,}7$ ва $a=0{,}5$; 3) $x=5{,}41$ ва $a=5{,}4$; 4) $x=0{,}73$ ва $a=0{,}7$ бўлса, тақрибий қиймат хатосининг модулини топинг.

27. $\frac{5}{7}$ сонинг 0,71 ва 0,72 яқинлашишларидан қайси бири яхши?

28 $x=7{,}25$ сонининг қандай тақрибий қийматининг хатоси: 1) 0,15 га, 2) $-0{,}05$ га тенг?

29. n нинг нолга яқин қийматларида $(1+n)^2$ ифоданинг қийматларини ҳисоблаш учун $(1+n)^2\approx 1+2n$ тақрибий формуладан фойдаланилади. Агар: 1) $n=0{,}01$; 2) $n=0{,}002$; 3) $n=-0{,}03$; 4) $n=0{,}05$ бўлса, $(1+n)^2$ ифоданинг яқинлашиш хатосининг модулини топинг.

9-§. Сон тақрибий қийматининг яқинлашиш аниқлиги

Дафтарнинг бўйи (x) ни чизғич билан ўлчаб, 20 см дан қисқа эмаслиги, 21 см дан эса ортиқ эмаслиги аниқланди, яъни $20 \leqslant x \leqslant 21$. x нинг тақрибий қиймати учун 21 олинса, x нинг аниқ қиймати маълум бўлмагани сабабли яқинлашиш хатосининг модулини била олмаймиз. Аммо у 1 дан катта бўлмайди, чунки x 57-*а* расмдаги кўринишда бўлганда ҳам $|x-21| \leqslant 1$ бўлади.

Агар x нинг тақрибий қиймати учун 20,3 ни олиб, $|x-20{,}3|$ ифодани баҳоласак, $|x-20{,}3| \leqslant 0{,}7$ бўлади (57-*б* расм). Бу ҳолда x нинг тақрибий қиймати 0,7 аниқликда 20,3 га тенг ёки x нинг тақрибий қиймати 20,3 нинг яқинлашиш аниқлиги 0,7 га тенг дейилади,

Агар x нинг тақрибий қиймати учун 20,5 ни олсак, $|x-20{,}5| \leqslant 0{,}5$ (57-*в* расм) бўлади, яъни x нинг тақрибий қиймати 0,5 аниқликда 20,5 га тенг. 20,5 сони 20 ва 21 сонларининг ўрта арифметик қийматидир. Бу ҳолда яқинлашиш хатосининг модули олдингиларидан кичик бўлгани учун бу қиймат ҳақиқий қийматга яқиндир.

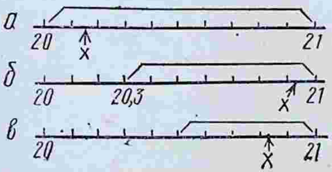
Агар x сонининг тақрибий қиймати учун a сони олинган бўлиб, бунда яқинлашиш хатосининг модули h сонидан ортиқ бўлмаса, яъни

$$|x-a| \leqslant h$$

бўлса, a сони x сонининг h гача аниқликдаги тақрибий қиймати дейилади. Бундан

$$x = a \pm h,$$

бу ерда h—яқинлашиш аниқлиги ёки тақрибий қиймат хатосининг чегараси, h ни $|\Delta| \leqslant h$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ва имкони борича $|\Delta|$ га яқин қилиб



57- расм.

олишга ҳаракат қилиш керак. h нинг қиймати маълум бўлса, x нинг аниқ қийматини ўз ичига олувчи чегараларни кўрсатиш мумкин, яъни:

$$a-h\leqslant x\leqslant a+h$$

(чунки $x=a\pm h \Longleftrightarrow a-h\leqslant x\leqslant a+h$).

Мисоллар. 1. $5{,}7\leqslant x\leqslant 6{,}3$. x нинг чегаралари ўрта арифметигига тенг бўлган тақрибий қийматини ҳисобланг ва яқинлашишнинг аниқлигини топинг.

$\frac{6{,}3+5{,}7}{2}=\frac{12}{2}=6$. x нинг тақрибий қиймати 6 га тенг дейилса, яқинлашиш хатосининг модули $\frac{6{,}3-5.7}{2}=\frac{0{,}6}{2}=$ $=0{,}3$ дан ошмайди. Яқинлашиш аниқлиги 0,3 га тенг. Демак, $x=6\pm 0{,}3$.

2. 1,4 сони 1,361 сонининг 0,05 гача аниқликдаги тақрибий қиймати эканини исботланг.

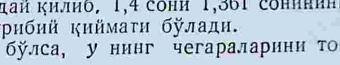
1,361 сонининг 1,4 сони билан яқинлашиш хатосининг модули $|\Delta|=|1{,}361-1{,}4|=|-0{,}039|=0{,}039$ га тенг. 0,039 сони 0,05 дан кичик бўлгани учун $|1{,}361-1{,}4|\leqslant$ $\leqslant 0{,}05$ тенгсизлик тўғри. (Бу ерда $h=0{,}05$ бўлиб, 0,39 дан катта, яъни $|\Delta|\leqslant h$ шартини қаноатлантирадиган қилиб олинди.) Шундай қилиб, 1,4 сони 1,361 сонининг 0,05 аниқликдаги тақрибий қиймати бўлади.

3. $y=5{,}01\pm 0{,}03$ бўлса, y нинг чегараларини топинг.

5,01 сони y нинг 0,03 гача аниқликдаги тақрибий қиймати бўлганидан y нинг қиймати $5{,}01-0{,}03\leqslant y\leqslant$ $\leqslant 5{,}01+0{,}03$ ёки $4{,}98\leqslant y\leqslant 5{,}04$ тенгсизлиги билан ёзилади.

4. 1,7 сонниг 0,3 гача аниқликдаги тақрибий қийматларини топинг ва бу тақрибий қийматлар тўпламига мос нуқталарни координата тўғри чизиғида тасвирланг.

1,7 сонининг 0,3 гача аниқликдаги тақрибий қиймати a бўлса, $|1{,}7-a|\leqslant 0{,}3$ бўлиши керак. Бу тенгсизликни ечамиз: $|1{,}7-a|\leqslant 0{,}3 \Longleftrightarrow |a-1{,}7|\leqslant 0{,}3 \Longleftrightarrow -0{,}3\leqslant$ $\leqslant a-1{,}7\leqslant 0{,}3 \Longleftrightarrow 1{,}4\leqslant a\leqslant 2$. [1,4; 2] оралиғидаги ихтиёрий сон 1,7 сонининг 0,3 аниқликдаги тақрибий қиймати бўла олади (58-расм).



58- расм.

Машқлар

30. Агар 1) $x=10\pm1$; 2) $x=4{,}7\pm0{,}2$; 3) $x=0{,}7\pm0{,}05$ бўлса, x сони қандай чегаралар орасида бўлади?

31. x сонининг тақрибий қиймати a, яқинлашиш хатосининг модули $|x-a|$ берилган: 1) $a=17$ $|x-a|=1$; 2) $a=5$ ва $|x-a|=0{,}2$; 3) $a=11{,}7$ $|x-a|=0{,}1$, x нинг аниқ қийматини ўз ичига олувчи чегарани кўрсатинг.

32. 1) 0,14 сони $\frac{1}{7}$ сонининг 0,01 гача аниқликдаги тақрибий қиймати; 2) 1,4 сони $\frac{10}{7}$ сонининг 0,01 гача аниқликдаги тақрибий қиймати бўла оладими?

33. 7,1 сони 7,1847 сонининг 0,5; 0,1; 0,05; 0,001 аниқлик билан олинган яқинлашиши бўладими?

34. 3,82; 3,83; 3,832; 3,834 сонларининг қайсилари $3\frac{5}{6}$ сонининг 0,01 гача аниқликдаги тақрибий қийматлари бўлади?

35. 1) 5,3 сонининг 0,5 гача; 2) 0,4 сонининг 0,5 гача; 3) $-7{,}3$ сонининг 1 гача; 4) $-4{,}8$ сонининг 0,4 гача; аниқликдаги тақрибий қийматларини топинг ва бу тақрибий қийматларга мос нуқталарни координата тўғри чизиғида тасвирланг.

10-§. Йиғинди, айирма, кўпайтма ва бўлинмани баҳолашда чегаралар методини қўлланиш

1. Агар $2{,}4<a<2{,}5$ ва $1{,}3<b<1{,}7$ бўлса, $a\pm b$, ab, $\frac{a}{b}$ ифодаларнинг қийматини баҳолайлик. Берилган қўш тенгсизликлар бир хил маъноли бўлгани учун уларни қўшамиз:

$$\begin{array}{c} 2{,}4<a<2{,}5 \\ 1{,}3<b<1{,}7 \\ \hline 3{,}7<a+b<4{,}2 \end{array}$$

Йиғиндининг ками ва ортиғи билан яқинлашишларини аниқладик. Айирмани баҳолашда $a-b=a+(-b)$ экани эътиборга олинади. Иккинчи қўш тенгсизликни -1 га кўпайтириб, тенгсизликнинг ишоралари қарама-қаршисига ўзгартирилади, яъни $-1{,}3>-b>-1{,}7$ ёки $-1{,}7<-b<-1{,}3$. Сўнгра қўшилади:

$$+\begin{array}{c} 2{,}4<\ a<\ 2{,}5 \\ -1{,}7<-b<-1{,}3 \\ \hline 0{,}7<a-b<1{,}2 \end{array}$$

2. Квадратнинг томони 4,5 см дан узун, 4,6 см дан қисқа бўлсин, яъни: $4{,}5<b<4{,}6$.

Квадрат периметри қийматининг чегараларини аниқлаймиз. $p = 4b$ бўлгани учун юқоридаги қўш тенгсизликни 4 га кўпайтирамиз:

$$4{,}5 \cdot 4 < b < 4{,}6 \cdot 4 \text{ ёки } 18 < p < 18{,}4.$$

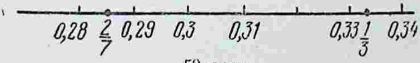
Бу ерда квадрат томони узунлигининг чегараларини билган ҳолда унга боғлиқ бўлган квадрат периметрини баҳоладик.

3. Бирор c сонининг чегаралари маълум бўлсин. Масалан:

$$3 < c < 3{,}5.$$

$\frac{1}{c}$ ифоданинг чегараларини баҳолайлик. $\frac{1}{3{,}5} < \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$ ёки $\frac{2}{7} < \frac{1}{c} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}333\ \ldots$, $\frac{2}{7} \approx 0{,}285$ қийматларни ўнли каср билан алмаштирамиз. Бунда қуйи чегара $\frac{2}{7} \approx 0{,}285\ \ldots$ ни ками билан олинган яқинлашиш, масалан, 0,28 билан, юқори чегара $\frac{1}{3} \approx 0{,}333\ldots$ ни эса ортиғи билан олинган яқинлашиш, масалан, 0,34 билан алмаштириш мумкин. Бунда фақат $\frac{1}{c}$ нинг қийматига тегишли бўлган $\left]\frac{2}{7};\ \frac{1}{3}\right[$ оралиқ кенгайтирилиши мумкин (59- расм).

Бу ерда қуйи ва юқори чегараларни танлашда 0,285... ва 0,333... чексиз ўнли касрларни яхлитлаш қоидасидан фойдаланиб бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, $0{,}285\ldots \approx 0{,}29$; $0{,}333\ldots \approx 0{,}33$ деб яхлитлаганда $0{,}29 < \frac{1}{c} < 0{,}33$ ни ҳосил қилиб, $\frac{1}{c}$ нинг қийматига тегишли оралиқ торайтирилган бўлади ва шу сабабли $\frac{1}{x}$ ифоданинг номаълум бўлган ҳақиқий қийматлар тўпламининг бир қисми берилган чегарадан ташқарида бўлиб қолади.



59- расм.

4. $2{,}4 < a < 2{,}5$ ва $1{,}3 < b < 1{,}7$ қўш тенгсизликлар бир хил маъноли ва барча ҳадлари мусбат сонлар бўлгани учун мос қисмларини кўпайтирамиз. Яъни:

$$\frac{\begin{array}{c}2{,}4 < a < 2{,}5\\ 1{,}3 < b < 1{,}7\end{array}}{2{,}4 \cdot 1{,}3 < ab < 2{,}5 \cdot 1{,}7} \text{ ёки } 3{,}12 < ab < 4{,}25.$$

Бўлинманинг чегараларини топиш мақсадида $\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$ эканини эътиборга олиб, $\frac{1}{b}$ нинг чегараларини аниқлаймиз: $\frac{1}{1{,}7} < \frac{1}{b} < \frac{1}{1{,}3}$. Бу тенгсизликни $2{,}4 < a < 2{,}5$ тенгсизлик билан ҳадма-ҳад кўпайтирамиз:

$$\begin{array}{c}2{,}4 < a < 2{,}5\\ \frac{1}{1{,}7} < \frac{1}{b} < \frac{1}{1{,}3}\\ \hline 2{,}4 \cdot \frac{1}{1{,}7} < \frac{a}{b} < 2{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}3}\end{array} \text{ ёки } \frac{24}{17} < \frac{a}{b} < \frac{25}{13}.$$

Ками билан олинган қуйи чегарани 1,4; ортиғи билан олинган юқори чегарани 2 десак, $1{,}4 < \frac{a}{b} < 2$ бўлади.

Ифоданинг қийматини боҳолашда юқорида фойдаланилган методга **чегаралар методи** дейилади. Бу методда ифоданинг ками билан ҳамда ортиғи билан олинган қийматларидан фойдаланилади.

Машқлар

36. Сонннинг 0,01 гача яхлитлаб ҳосил қилинган яқинлашишини характерланг (тақрибий сон берилган соннинг ками билан ёки ортиғи билан олинган яқинлашиши бўладими?): 1) 7,724; 2) 0,9172; 3) 10,906; 4) 71,001.

37. $\frac{10}{13}$ сонни 1) 0,01; 2) 0,001; 3) 0,0001 гача яхлитланг. Ҳар қайси ҳолда яхлитлаш характерини кўрсатинг.

38. 1) Томони $8{,}4 < a < 8{,}5$ бўлган тенг томонли учбурчак периметрининг чегараларини топинг; 2) периметри $13{,}2 \leqslant p < 13{,}5$ бўлган тенг томонли учбурчак томони узунлигининг чегараларини топинг.

39. $7 < x < 8$ бўлса, ифоданинг қийматини баҳоланг: 1) $9x$; 2) $2x - 3$; 3) $5x - 0{,}5$; 4) $-0{,}2x + 4$.

40. $3{,}7 < y < 3{,}8$ бўлса, ифоданинг қийматини баҳоланг: 1) $4y$; 2) $3y + 1$; 3) $10y - 5{,}4$; 4) $-2y + 0{,}4$.

41. Агар: 1) $7,6 < 2a < 0,2$; 2) $-18 < -6a < 0,36$; 3) $10 > 4 - a > 4$; 4) $6,7 < 3a - 1 < 8,9$ бўлса, a сони қандай чегаралар орасида ётади?

42. $11 < a < 12$ бўлса, $\frac{1}{3a}$ ифоданинг қийматини баҳоланг. Топилган чегараларни вергулдан кейин учта рақамли ўнли каср билан алмаштиринг.

43. 1) $13 < a < 14$ ва $21 < x < 23$; 2) $7 < a < 8$ ва $11 < x < 12$ бўлса, ифода қийматининг чегараларини топинг: а) $a+x$; б) $a-x$; в) ax; г) $a : x$.

44. 1) $9 \leqslant b \leqslant 10$ ва $13 < c < 15$, 2) $0,9 \leqslant b \leqslant 1$ ва $7 < c < 8$ бўлса, ифоданинг қийматини баҳоланг:

а) $b + c$; б) $b - c$; в) bc; г) $b : c$.

45. 1) $2,4 < a < 2,6$ ва $0,7 < b < 0,9$ бўлса, $2a + 5$ ифода қийматининг;

2) $-13 < x < -12$ ва $0,7 < y \leqslant 1,1$ бўлса, $3x - 0,5y$ ифода қийматининг;

3) $2 < c < 3$ ва $7 < d < 8$ бўлса, $cd - c^2$ ифода қийматининг;

4) $0,4 < a < 0,5$ ва $0,7 < x < 0,8$ бўлса, $ax + 5x$ ифода қийматининг чегараларини топинг.

46. Тўғри тўртбурчакнинг бўйи a мм, эни b мм. $7 \leqslant a \leqslant 8$ ва $19 \leqslant b \leqslant 20$ бўлса, унинг периметрини ва юзини баҳоланг.

47. 1) $1,4 < a < 1,5$; $2,9 < b < 3$ ва $4,1 < c < 4,2$ бўлса; 2) $0,8 < a < 0,9$, $5 < b < 5,1$ ва $0,9 < c < 1$ бўлса, а) $a + b + c$, б) $ab - c$, в) $10a - bc$, г) abc ифодаларнинг қийматини баҳоланг.

VIII БОБ

КВАДРАТ ИЛДИЗЛАР

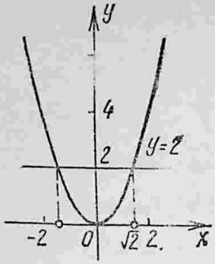
1-§. Квадрат илдиз. Иррационал сон

I. 1-таъриф. *a сонининг квадрат илдизи деб квадрати a га тенг бўлган сонга айтилади.*

Масалан, 4 сонининг квадрат илдизи $+2$ ва -2 га тенг, чунки $(\pm 2)^2 = 4$; $\frac{9}{25}$ сонининг квадрат илдизи $\pm\frac{3}{5}$, чунки $\left(\pm\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

2-таъриф. *Квадрат илдизни топиш учун бажариладиган амал квадрат илдиз чиқариш амали деб аталади.*

Квадрат илдиз чиқариш амали квадратга кўтариш амалига тескари амалдир. Квадратга кўтариш амалида сон маълум бўлиб, унинг квадратини топиш талаб қилинса, квадрат илдиз чиқаришда соннинг квадрати маълум бўлиб, соннинг ўзини топиш талаб қилинади.



60- расм.

Мусбат соннинг квадрат илдизи иккита қарама-қарши сонлар бўлади. Масалан, 36 нинг квадрат илдизи 6 ва —6. Бунда $+6$ га 36 нинг арифметик квадрат илдизи дейилади. 169 нинг квадрат илдизи 13 ва -13, арифметик квадрат илдизи эса 13. Нолнинг арифметик квадрат илдизи ноль.

3-таъриф. *a соннинг ($a \geqslant 0$) манфий бўлмаган квадрат илдизига a нинг арифметик квадрат илдизи деб аталади.*

a нинг ($a \geqslant 0$) арифметик квадрат илдизи $\sqrt{a}$ каби белгиланади. Бунда $\sqrt{\ }$ белгига илдиз ишораси, a га квадрат илдиз остидаги сон дейилади.

Масалан, $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{64}{121}}=\frac{8}{11}$. $\sqrt{-9}$ маънога эга эмас, чунки ҳеч қандай соннинг квадрати -9 га тенг эмас.

II. Иррационал сон. Томони 1 м бўлган квадратнинг диагоналини аниқлайлик. Квадратнинг диагоналини x десак, $x^2=1^2+1^2$ ёки $x^2=2$.

$x^2=2$ тенгламани график усулда ечиш учун координаталар текислигида $y=x^2$ ва $y=2$ функциялар графикларини чизамиз (60- расм). Парабола билан тўғри чизиқ икки нуқтада кесишади. Кесишув нуқталарининг абсциссалари берилган тенгламанинг ечими бўлади.

1-теорема. *Квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмас.*

Исбот. а) $1^2=1$, $2^2=4$ бўлгани учун 1 билан 2 орасида квадрати 2 га тенг бўлган бутун сон мавжуд эмас;

б) квадрати 2 га тенг бўлган қисқармайдиган каср сон ҳам мавжуд эмас.

Фараз қилайлик, яъни квадрати 2 га тенг бўлган қисқармайдиган каср сон $\frac{p}{q}$ мавжуд бўлсин:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$$

бунда p ва q — ўзаро туб сонлар. Бундан: $p^2 = 2q^2$. $2q^2$ жуфт сон бўлгани учун p^2 ҳам жуфт бўлади; у ҳолда p ҳам жуфт сон, яъни $p = 2n\ (n \in N)$ бўлиши керак. p нинг қийматини $p^2 = 2q^2$ тенгликка қўйсак:

$$(2n)^2 = 2q^2 \text{ ёки } q^2 = 2n^2.$$

Бу ҳолда ҳам юқоридагидек q ҳам жуфт, яъни $q = 2m (m \in N)$ бўлиши керак. Шундай қилиб, $p = -2n$, $q = 2m$ лар жуфт сонлар яъни умумий бўлувчига эга бўлиб қолди. Бу эса фаразимизга зиддир. Демак, квадрати 2 га тенг бўлган қисқармайдиган каср сон ҳам мавжуд эмас экан.

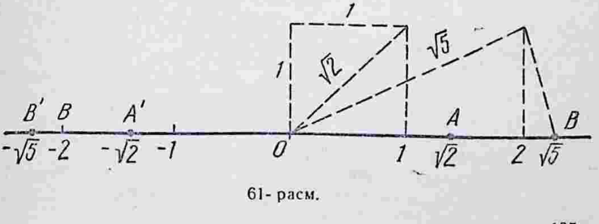
Шундай қилиб, (1) тенгламанинг илдизи рационал сон эмас экан. $x^2 = 2$ тенглама иккита илдизга эга бўлиб, у илдизлар рационал сонлар тўпламига тегишли эмас. У сонларни *иррационал сонлар* дейилади ҳамда $\sqrt{2}$ ва $-\sqrt{2}$ каби ёзилади. Чизмадан $\sqrt{2} \approx 1,4$; $-\sqrt{2} \approx -1,4$ эканини аниқлаш мумкин.

$x^2 = 3$; $x^2 = 5$; $x^2 = 6,5$ каби тенгламаларнинг илдизлари ҳам рационал сон бўла олмаслигини исботлаш мумкин. Бу тенгламаларнинг илдизлари ҳам иррационал сонлар бўлиб, мос ҳолда $\sqrt{3}$ ва $-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ ва $-\sqrt{5}$; $\sqrt{6,5}$ ва $-\sqrt{6,5}$ каби ёзилади.

Таъриф. *Рационал сонлар тўплами билан иррационал сонлар тўплами бирлашмасига ҳақиқий сонлар тўплами дейилади.*

Ҳақиқий сонлар тўпламини R билан белгилаймиз.

Координата тўғри чизиғида ҳар бир рационал сонга битта нуқта мос келиши ҳақида гапирилган эди. Ҳар бир иррационал сонга ҳам координата тўғри чизиғида битта нуқта мос келади. Масалан, $\sqrt{2}$ га A нуқта, $\sqrt{5}$ сонига эса B нуқта, $-\sqrt{2}$ сонига A'; $-\sqrt{5}$ сонига B' нуқта мос келади (61-расм).



61-расм.

Ҳар бир ҳақиқий сонга координата тўғри чизиғида битта нуқта мос келганидек, координата тўғри чизиғидаги ҳар бир нуқтага ҳам битта ҳақиқий сон мос келади (буни исбот қилиш мумкин).

Машқлар

1. (Оғзаки.) 16; 36; 81; 121; 196; 625 сонларининг: а) квадрат илдизи, б) арифметик квадрат илдизи нимага тенг?

2. (Оғзаки.) Арифметик квадрат илдизни топинг:

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{169}$; 3) $\sqrt{1,44}$; 4) $\sqrt{2,25}$; 5) $\sqrt{0,09}$; 6) $\sqrt{3600}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{100}+\sqrt{0,04}$.

3. Қуйидаги жадвални тўлдиринг:

x	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
$\sqrt{x}$										

Шу жадвалдан фойдаланиб, ушбуларни топинг:

1) $\sqrt{100}+\sqrt{256}$; 2) $\sqrt{169}+\sqrt{289}$; 3) $\sqrt{256}+\sqrt{324}$;

2) $\sqrt{81}+\sqrt{144}+\sqrt{361}$; 5) $\sqrt{64}+\sqrt{121}+\sqrt{196}$.

4. Тенгламани ечинг: 1) $\sqrt{x}=9$; 2) $\sqrt{y}=0,4$; 3) $3\sqrt{a}=6$; 4) $5\sqrt{b}=2$; 5) $\sqrt{2x+1}=0$; 6) $\sqrt{\frac{9x-4}{x}}=0$; 7) $\frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=0$; 8) $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=0$.

5. Нима учун тенглама илдизга эга эмас:

1) $\sqrt{x}=-2$; 2) $-5\sqrt{x}=1$; 3) $\sqrt{x}+4=0$?

Ёзувларнинг қайси бири тўғри:

6. 1) $3\sqrt{2}\in R$; 2) $-5\in R$; 3) $Q\in R$; 4) $Z\not\subset R$.

7. $\{\sqrt{3};\ -7;\ 2\sqrt{5}\}\subset Q$; 2) $\{-4;\ 3,5\sqrt{2}\}\subset R$; 3) $\{-2;\ 0;\ 3;\ 1\}\not\subset R$.

8. Мулоҳазалар тўғри бўладиган ўзгарувчининг бир неча қийматини айтинг:

1) $x\in Z_0$; 2) $y\in Z$; 3) $a\in Q$; 4) $b\in R$.

9. Тўғрими: 1) $(x\in Z_0)\Rightarrow(x\in Q)$; 2) $(x\in R)\Rightarrow(x\in Q)$?

10. Топинг: 1) $Z_0\cup R$; 2) $Z_0\cap R$; 3) $Z_0\cup Z\cup R$; 4) $Z\cap Q\cap R$.

11. Ёзувлар тўғрими: 1) $(Q\cap R)\subset Q$; 2) $(Z\cup Q)\subset R$?

12. $x\in N$ ва $y\in N$ бўлсин. Қуйидагилар тўғри бўладими:

1) $x+y\in N$; 2) $x-y\in N$; 3) $xy\in N$; 4) $x:y\in N$?

13. $a \in Z$ ва $b \in Q$ бўлсин. Қуйидагилар тўғри бўладими:
1) $a+b \in Z$; 2) $a-b \in R$; 3) $ab \in Z_0$; 4) $a:b \in R$?

14. Ифода маънога эгами: 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{91}$; 3) $\sqrt{-7}$; 4) $-\sqrt{-4}$? Ифода маънога эга бўладиган ўзгарувчининг қийматлар тўпламини топинг:

15. 1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{-4b}$; 3) $\sqrt{c^2}$; 4) $\sqrt{-|x|}$; 5) $\sqrt{a-9}$; 6) $\sqrt{4+c}$; 7) $\sqrt{\frac{1}{2x-1}}$; 8) $\sqrt{-\frac{10}{8+x}}$.

16.* 1) $\sqrt{\frac{x}{2x-5}}$; 2) $\sqrt{\frac{y-1}{3-y}}$; 3) $\sqrt{\frac{2a+5}{3-a}}$.

17. Ифода ўзгарувчиларнинг қандай қийматларида маънога эга:
1) $\sqrt{xy}$; 2) $\sqrt{-xy}$; 3) $\sqrt{x^2y^2}$; 4) $\sqrt{-x^2y^2}$; 5) $\sqrt{x^2y}$?

18. Тенглама илдизларини $\sqrt{}$ белгиси ёрдамида ёзинг: 1) $x^2=3$; 2) $x^2=5$; 3) $x^2=7$; 4) $x^2-5{,}5=0$.

19. Тенгламани ечинг: 1) $x^2=25$; 2) $x^2-0{,}36=0$; 3) $3x^2=\frac{1}{12}$; 4) $4x^2-0{,}25=0$.

20. $y=x^2$, $y=4$ ва $y=9$ функцияларнинг графигини битта координаталар системасида чизиш билан тенгсизликларнинг ечимлар тўпламини топинг:
1) $x^2 \geqslant 4$; 2) $x^2<4$; 3) $x^2-9>0$; 4) $x^2-9 \leqslant 0$.

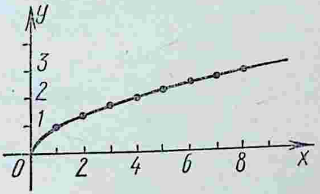
Тенгламаларни ечинг:

21. $\sqrt{x+4}=3$. 22. $\sqrt{1+2x}-2=0$. 23. $\sqrt{x^2-2x}=x+1$.
24. $\sqrt{5-4x}=x-2$. 25. $\sqrt{x+7}=x+7$.

2-§. $y=\sqrt{x}$ функциянинг графиги. Квадрат илдизлар жадвали

I. $y=\sqrt{x}$ (2)

функция $[0; +\infty[$ тўпламда аниқланган. Қуйидаги жадвални тузиб, координаталар текислигида координаталари жадвалдаги қийматлар бўлган нуқталарни белгилаймиз[1] (62-расм):



62- расм.

[1] Жадвалда y нинг қийматлари 0,01 аниқликда тақрибан олинган.

x	0	0,25	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y=\sqrt{x}$	0	0,5	0,58	0,71	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

$x \geqslant 0$ бўлганда $y=\sqrt{x} \geqslant 0$ бўлгани учун графикка тегишли нуқталар I координаталар бурчагида жойлашган бўлиб, O (0, 0) нуқта ҳам графикка тегишли.

Жадвалда x нинг катта қийматига y нинг ҳам катта қиймати тўғри келади. Демак, функция ўсувчи функциядир[1]. Шунинг учун ҳам унинг графигига тегишли нуқталар чапдан ўнгга томон пастдан юқорига кўтарила боради.

Функциянинг ўсувчи эканини исбот қилайлик. Бунинг учун x нинг катта қийматига $y=\sqrt{x}$ нинг катта қиймати мос келишини исбот қилиш керак.

x_1 ва x_2 аргумент x нинг $[0; +\infty[$ оралиқдан олинган ихтиёрий иккита қиймати бўлиб, $x_1 < x_2$ бўлсин.

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

$0 < x_1 < x_2$ бўлгани учун $x_2-x_1>0$; $\sqrt{x_1} \geqslant 0$ ва $\sqrt{x_2}>0$ бўлгани учун $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_2}>0$. Демак, $\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}>0$. У ҳолда $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}>0$ ёки $\sqrt{x_2}>\sqrt{x_1}$. Демак, (2) ўсувчи функция экан.

Аниқланган нуқталар орқали силлиқ эгри чизиқ ўтказамиз.

Демак, $y=\sqrt{x}$ функция $[0; +\infty[$ тўпламда берилган ўсувчи функция бўлиб, $]0; +\infty[$ оралиғида мусбат, қийматлар соҳаси $[0; +\infty[$ дан иборат.

II. Соннинг арифметик квадрат илдизини юқорида биз баён қилган усулда топиш анчагина вақт талаб этади. Сонларнинг арифметик квадрат илдизини топиш учун В. М. Брадиснинг „Тўрт хонали математик жадваллар" китобида сонларнинг арифметик квадрат илдизлар жадвали берилган (IV жадвал). Бу жадвал устида тўхталиб ўтамиз.

---

[1] $y=f(x)$ функцияда x нинг катта қийматига унинг катта (кичик) қиймати тўғри келса, бу функция ўсувчи (камаювчи) деб ҳам таърифланади.

Жадвалда 1 дан 100 гача сонларнинг квадрат илдизи 0,0001 аниқликда тақрибан берилган. 1 дан 10 гача сонлар 0,001 қадам билан 10 дан 100 гача сонлар эса 0,01 қадам билан аниқланган.

Мисоллар

1. $\sqrt{7,2}$ соннинг тақрибий қийматини топайлик. Бунинг учун биринчи устундан 7,2 сонини топиб, унинг ёнидаги устуннинг ўша сатридан $\sqrt{7,2}$ нинг тақрибий қийматини ёзамиз, яъни:

$$\sqrt{7,2}\approx 2,683.$$

2. $\sqrt{39,8}$ соннинг тақрибий қийматини топайлик. Бунинг учун жадвалнинг биринчи устунидан 39 сонини топиб, шу сатрни 8 номерли устун билан кесишган ерида ёзилган 6,309 сонни ёзамиз, яъни:

$$\sqrt{39,8}\approx 6,309.$$

3. $\sqrt{21,43}$ соннинг тақрибий қийматини топайлик. Бунинг учун жадвалнинг 1-устунидан 21 сонини топиб, шу сатр билан 4 номерли устун кесишган жойдаги $\sqrt{21,4}$ нинг тақрибий қийматини топамиз:

$$\sqrt{21,4}\approx 4,626.$$

3 номерли тузатмалар устунининг ўша сатрида 3 сонига тегишли тузатма 3 ни топиб, уни 4,626 сонининг охирги рақамига қўшамиз, яъни:

$$\sqrt{21,43}\approx 4,629.$$

4. $\sqrt{41,7}$ соннинг тақрибий қийматини топайлик:
$\sqrt{417}=\sqrt{4,17\cdot 10^2}=\sqrt{4,17}\cdot 10=2,042\cdot 10=20,42$[1] ($\sqrt{4,17}=2,042$ бўлгани учун).

5. $\sqrt{0,871}$ соннинг тақрибий қийматини топайлик:
$\sqrt{0,871}=\sqrt{87,1\cdot 10^{-2}}=\sqrt{87,1}\cdot 10^{-1}\approx 9,333\cdot 10^{-1}=$
$=0,9333$ (чунки $\sqrt{87,1}\approx 9,333$).

Умуман сон $]0;\ 1[\cup]100;\ +\infty[$ тўпламга тегишли бўлса, уни $a\cdot 10^{2k}(a\in]1;\ 100[,\ k\in Z)$ кўринишда ёзиш

[1] Топилган жавобни текшириб кўрамиз: $(20,42)^2=416,9764\approx$ ≈ 417.

мумкин. Бундай ёзув эса ҳар қандай соннинг арифметик илдизини жадвалдан топишга ёрдам беради. Масалан, $245 = 2{,}45 \cdot 10^2$; $0{,}002 = 20 \cdot 10^{-4}$ ва ҳ. к.

Машқлар

26. $y = \sqrt{x}$ функциянинг графигидан фойдаланиб (62-расм): сонларни 0,1 аниқликда тахминан топинг:

1) $\sqrt{1{,}5}$; 2) $\sqrt{2{,}5}$; 3) $\sqrt{3{,}5}$; 4) $\sqrt{5{,}5}$; 5) $\sqrt{7{,}5}$; 6) $\sqrt{9{,}5}$.

27. $y = \sqrt{x}$ функция графигидан: 1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt{x} + 1$; 4) $y = |\sqrt{x}|$ функцияларнинг графигини қандай қилиб ҳосил қилиш мумкин?

28. 1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = 2 + \sqrt{x}$; 3) $y = -\sqrt{x}$ функцияларнинг: а) графигини ясанг; б) қийматлар соҳасини топинг.

29. Функциянинг графигини чизинг, қийматлар соҳасини топинг: 1) $y = \sqrt{x}$; $x \in [0;\ 4]$; 2) $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0;\ 1]$; 3) $y = -\sqrt{x}$, $x \in [1;\ +\infty[$; 4) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$, $x \in [4;\ 9]$.

30. Тенгсизликни ечинг: 1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{3x} < 3$; 3) $2 < \sqrt{x} < 5$.

31. Битта координата системасида $y = \sqrt{x}$ ва $y = x - 2$ функциялар графигини чизинг. График ёрдамида: 1) $\sqrt{x} = x - 2$ тенглама, 2) $x \geqslant x - 2$ ва 3) $\sqrt{x} < x - 2$ тенгсизликларнинг ечимлар тўпламини топинг.

32*. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг: 1) $y = \frac{5}{\sqrt{-x}}$; 2) $y = \sqrt{2x+3}$; 3) $y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$; 4) $y = \sqrt{1 - \frac{x}{2x+1}}$; 5) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-3}$; 6) $y = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}-1}$.

33. Сонларни $a \cdot 10^{2k}$ ($a \in]1;\ 100[$ ва $k \in Z$) кўринишда ифодаланг: 1) 791; 2) 2340; 3) 0,321; 4) 0,0006; 5) 271000; 6) 900100; 7) 0,00541.

3 . Қуйидаги сонларнинг арифметик квадрат илдизлари тақрибий қийматларини жадвал ёрдамида топинг: 1) 6,2; 27; 40; 70; 2) 2,02, 27,9; 58,4. 3) 1,792; 5,001; 73,81; 4) 3,4127; 7 00341; 30,057.

35. Илдиз белгиси остидаги сонларни дастлаб $a \cdot 10^{2k}$ ($a \in]1{,}100[$ ва $k \in Z$) кўринишда ифодаланг, сўнгра илдизнинг тақрибий қийматини жадвал ёрдамида топинг: 1) $\sqrt{301}$; 2) $\sqrt{691}$; 3) $\sqrt{7893}$; 4) $\sqrt{813000}$; 5) $\sqrt{0{,}00423}$; 6) $\sqrt{0{,}7002}$.

36. Жадвалдан фойдаланиб, тенгламанинг тақрибий илдизлар тўпламини аниқланг:

1) $x^2 - 11 = 0$; 2) $3x^2 = 40$; 3) $0{,}7x^2 - 23 = 0$.

3-§. $\sqrt{x^2}=|x|$ айният

I. $a \geqslant 0$ сонининг арифметик квадрат илдизи $\sqrt{a}$ бўлгани учун таърифга кўра:

$$(\sqrt{a})^2=a. \qquad (3)$$

Бу тенглик айниятдир.

Мисоллар. 1) $(3\sqrt{2})^2=3^2(\sqrt{2})^2=9\cdot 2=18$; 2) $\left(\frac{21}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{21^2}{(\sqrt{7})^2}=\frac{441}{7}=63$; 3) $(\sqrt{3}-1)\ (\sqrt{3}+1)=$ $=(\sqrt{3})^2-1=3-1=2$. 4) $\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=$ $=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{5}=\sqrt{5}+1$; 5) $\frac{a^2-2}{a-\sqrt{2}}=\frac{a^2-(\sqrt{2})^2}{a-\sqrt{2}}=$

$$=\frac{(a-\sqrt{2})\,(a+\sqrt{2})}{a-\sqrt{2}}=a+\sqrt{2}.$$

II. *Теорема.* $\sqrt{x^2}=|x|$ *айниятдир.*

Исбот. $x \geqslant 0$ бўлганда $|x|=x$ бўлиб, $\sqrt{x^2}$ ва x ифодаларнинг мос қийматлари тенг. $x<0$ бўлганда $|x|=-x$ бўлиб, $\sqrt{x^2}$ ва x ифодаларнинг мос қийматлари қарама-қарши сонлар ва $\sqrt{x^2}$ билан $|x|=-x(>0)$ ифодаларнинг мос қийматлари ҳам тенг. Демак, x нинг ҳар қандай қийматида $\sqrt{x^2}$ ва $|x|$ ифодаларнинг мос қийматлари тенг, яъни қуйидаги тенглик айниятдир:

$$\sqrt{x^2}=|x|. \qquad (4)$$

Мисоллар. 1) $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$; 2) $4\sqrt{a^2}=4|a|$; 3) $b<0$ бўлса, $\sqrt{b^2}=|b|=-b$; 4) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=$ $=|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$; 5) $c \geqslant 0$ бўлса, $\sqrt{49c^2}=\sqrt{(7c)^2}=|7c|=7c$; 6) $\sqrt{n^4}=\sqrt{(n^2)^2}=|n^2|=n^2$ (чунки n нинг ҳар қандай қийматида $n^2 \geqslant 0$).

$\sqrt{a^2}=|a|$ айниятнинг ўнг қисмида $a \geqslant 0$ бўлса, $|a|=a$, $a<0$ бўлганда $|a|=-a$ бўлгани учун қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, \text{ агар } a\in[0;+\infty[\text{ бўлса,} \\ -a, \text{ агар } a\in]-\infty;0[\text{ бўлса.}\end{cases}$$

$(2x-4)$ ифода $x-2\geqslant 0$ ёки $x\geqslant 2$ бўлганда $x-2$ га, $x-2<0$ ёки $x<2$ бўлганда $-(x-2)=2-x$ га тенг бўлгани учун:

$$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ агар } x\in[2;+\infty[\text{ бўлса,}\\ 2-x, \text{ агар } x\in]-\infty;2[\text{ бўлса.}\end{cases}$$

Машқлар

37. Сонннг квадратини топинг:

$$\sqrt{4};\ \sqrt{49};\ -\sqrt{5};\ \sqrt{\frac{1}{3}};\ -\sqrt{10};\ \frac{3}{\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{4}}{6};\ \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

38. Ифоданинг қийматини топинг: 1) $(-\sqrt{5})^2$; 2) $(5\sqrt{3})^2$; 3) $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$; 5) $9\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$.

39. Касрни қисқартиринг: 1) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; 2) $-\frac{3}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{n}{2\sqrt{n}}$; 4) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{22}{\sqrt{11}}$; 16) $-\frac{39}{\sqrt{13}}$.

40. Ифоданинг рационал сон эканини исботланг: 1) $(\sqrt{5}-2)\times\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$; 3) $(2\sqrt{11}-1)\times+(2\sqrt{11}-1)$; 4) $(\sqrt{31}-3\sqrt{7})(\sqrt{31}-3\sqrt{7})$.

41. Кўпайтувчиларга ажратинг:
1) $5-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{7}-7$; 3) $6-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}-14$. 5) a^4-3; 6) $4b^2-7$; 7) n^2-9.

42. Касрни қисқартиринг:

1) $\frac{a^2-5}{a+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{a-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$; 5) $\frac{m-2n}{\sqrt{m}+\sqrt{2n}}$.

43. Ҳисобланг: 1) $\sqrt{(0{,}96)^2}$; 2) $\sqrt{(-3{,}7)^2}$; 3) $\sqrt{9^2}$; 4) $\sqrt{(-21{,}7)^2}$.

44. 1) $x\geqslant 5$ бўлса: а) $\sqrt{(x-5)^2}$; б) $\sqrt{4(x^2-10x+5)}$; в) $0{,}1\cdot\sqrt{(5-x)^2}$ ларни;

2) $x<2$ бўлса: а) $\sqrt{(x-2)^2}$; б) $\sqrt{(x-2)^4}$; в) $\sqrt{0{,}09(x-2)^6}$ ларни соддалаштиринг.

45. Ифодани айнан тенг ифодага алмаштиринг:
1) $\sqrt{m^2}$; 2) $\sqrt{64n^2}$; 3) $\sqrt{0{,}04p^4}$; 4) $\sqrt{121q^6}$.

46. k ўзгарувчининг $\{-1;\ 0\ 2;\ 25;\ -14\}$ тўпламдаги қандай қийматларида: 1) $\sqrt{k^2}=k$; 2) $\sqrt{k^2}=-k$ тенглик тўғри бўлади?

47. Агар 1) $a\geqslant 0$ бўлса, $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{a^6}$; $\sqrt{a^8}$ ифодаларни, 2) $b<0$ бўлса, $\sqrt{4b^2}$ $\sqrt{b^4}$; $\sqrt{64b^6}$; $\sqrt{b^8}$ ифодаларни соддалаштиринг.

48. Ҳисобланг: 1) $\sqrt{(-3)^4}$ 2) $\sqrt{(-5)^6}$; 3) $7\sqrt{(-2)^8}$; 4) $0{,}05\times\times\sqrt{(-10)^{10}}$.

49. 1) $a \geqslant 5$ бўлса, $\sqrt{a^2}$ ифодани; 2) $b < -10$ бўлса, $\sqrt{4b^2}$ ифодани; 3) $x \geqslant 3$ бўлса, $\sqrt{(x+1)^2}$ ифодани; 4) $x < -2$ бўлса, $\sqrt{(x+1)^2}$ ифодани айнан тенг ифодага алмаштиринг.

Ўзгарувчининг қандай қийматлар тўпламида тенглик тўғри:

50. 1) $\sqrt{a^2}=-a$; 2) $\sqrt{b^4}=b^2$; 3) $\sqrt{c^6}=-c^3$; 4) $\sqrt{d^4}=-d^2$.

51. 1) $\sqrt{(x-1)^2}$; 2) $\sqrt{(3-y)^2}=3-y$; 3) $\sqrt{a^4+2a^2+1}=a^2+1$; 4) $\sqrt{b^2-6b+9}=3-b$.

52. Ифодани соддалаштиринг: 1) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$; 3) $\sqrt{(\sqrt{3}-4\sqrt{3})^2}$.

53. Тенгламани ечинг: 1) $\sqrt{(x+1)^2}=9$; 2) $4\sqrt{(x-3)^2}-0{,}01=0$; 3) $\sqrt{(x-2)^2}+1=5$.

54*. Кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $\sqrt{a^4}+\sqrt{a^8}+\sqrt{a^{12}}$; 2) $\sqrt{a^2}+\sqrt{a^6}+\sqrt{a^{10}}$.

55*. Функциянинг графигини ясанг: 1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=\sqrt{(x-2)^2}$; 3) $y=2\sqrt{(x+1)^2}$; 4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$; 5) $y=x\sqrt{x^2}$; 6) $y=\sqrt{x^2+x}$; 7) $y=-x\sqrt{x^2}$.

4-§. Кўпайтманинг ва касрнинг квадрат илдизи

1-теорема. *Кўпайтувчилар манфий бўлмаса, кўпайтманинг арифметик квадрат илдизи шу кўпайтувчилар арифметик илдизларининг кўпайтмасига тенг, яъни $a \geqslant 0$ ва $b \geqslant 0$ бўлса, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ бўлади.*

Исбот. Биринчидан, $a \geqslant 0$ ва $\sqrt{a}$ — арифметик квадрат илдиз бўлгани учун $\sqrt{a} \geqslant 0$; $b \geqslant 0$ ва $\sqrt{b}$ арифметик квадрат илдиз бўлгани учун $\sqrt{b} \geqslant 0$, у ҳолда $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \geqslant 0$, иккинчидан, $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$. Демак, манфий бўлмаган $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ нинг квадрати ab га тенг бўлганидан квадрат илдизнинг таърифига кўра теорема ўринлидир.

Манфий бўлмаган кўпайтувчилар ҳар қанча бўлганда ҳам теорема ўринли бўлади, яъни $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, . . . , $d \geqslant 0$ бўлса, $\sqrt{abc\ldots d}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\ldots\sqrt{d}$ бўлади.

Мисоллар. 1) $\sqrt{49\cdot 0{,}25}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{0{,}25}=7\cdot 0{,}5=3{,}5$;

2) $\sqrt{9\cdot 64a^2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{64}\cdot\sqrt{a^2}=3\cdot 8\,|a|=24\,|a|$;

3) $\sqrt{14400}=\sqrt{144\cdot 100}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{100}=12\cdot 10=120$;

4) $a>0$, $b<0$, $c>0$ бўлганда $\sqrt{16a^2b^2c^2}$

ифодани соддалаштирайлик:

$\sqrt{16a^2b^2c^2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{c^2}=4|a|\cdot|b|\cdot|c|=4a(-b)c=$
$=-4abc.$

б) $\frac{\sqrt{22}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$ касрни қисқартирайлик; $\frac{\sqrt{22}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=$
$=\frac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{11}}=\sqrt{2}+1.$

Баъзан илдизлар кўпайтмасини топишда $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=$ $=\sqrt{ab}$ ёзувдан фойдаланишга тўғри келади. Масалан, 1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{144}=\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}=\sqrt{a^4}=a^2$.

2-теорема. (Касрнинг илдизи ҳақида.) *Махражи мусбат, сурати эса манфий бўлмаган касрнинг арифметик квадрат илдизи сурати ва махражи арифметик квадрат илдизларининг нисбатига тенг,* яъни $a\geqslant 0$ *ва* $b>0$ *бўлса,* $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *бўлади.*

Исбот. Агар $a\geqslant 0$ ва $b>0$ ҳамда $\sqrt{a}$ ва $\sqrt{b}$ арифметик квадрат илдизлар бўлса, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ маънога эга ва манфий эмас. У ҳолда $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$. $\frac{a}{b}\geqslant 0$ ва $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$ бўлгани учун арифметик квадрат илдизнинг таърифига асосан $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ўринлидир.

Мисоллар. 1) $\sqrt{\frac{64}{289}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{289}}=\frac{8}{17}$; 2) $a>0$ ва $b<0$ бўлганда $\sqrt{\frac{4a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}}{|b|}=\frac{2|a|}{-b}=\frac{2a}{-b}=-\frac{2a}{b}$.

Айрим ҳолларда квадрат илдизни ўз ичига олган ифодаларни айнан алмаштиришда $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ўрнига $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ни ёзиш қулайлик туғдиради. Масалан, $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{27}}$ ифодани соддалаштирайлик:

$$\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{300}{27}}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}.$$

Баъзан касрнинг махражида иррационал сон бўлса, масалан, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, бундай касрни $a\sqrt{b}$ кўринишга келтириш мумкин (бунда $a \in Q$; $b \in N$). Масалан, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{2}$ га кўпайтирамиз. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Касрни бундай ҳолга келтиришга „каср махражидаги иррационалликни йўқотиш“ дейилади.

Машқлар

Ифоданинг қийматини топинг:

56. 1) $\sqrt{81 \cdot 100}$; 2) $\sqrt{0{,}0064 \cdot 900}$; 3) $\sqrt{2{,}56 \cdot 900}$; 4) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12}$; 5) $\sqrt{4{,}9} \cdot \sqrt{40}$. 6) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{160}$.

57. 1) $\sqrt{2^4 \cdot 5^6}$; 2) $\sqrt{3^4 \cdot 4^{-4}}$, 3) $\sqrt{5^6 \cdot 10^{-6}}$; 4) $\sqrt{4^{-4} \cdot 5^{-8}}$;

58. Кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{12} + \sqrt{33}$; 3) $5 - \sqrt{10}$. 4) $\sqrt{26} + 13$.

59. Илдиз остидаги сонни аввал кўпайтувчиларга ажратинг, сўнгра кўпайтмани ҳисобланг: 1) $\sqrt{1296}$; 2) $\sqrt{14400}$; 3) $\sqrt{44100}$; 4) $\sqrt{2890000}$.

60 Илдиздан чиқаринг: 1) $\sqrt{25a^4}$; 2) $\sqrt{0{,}64b^4c^8}$; 3) $x < 0$ бўлганда $\sqrt{9x^2}$ ни 4) $y > 0$; $z < 0$ бўлганда $\sqrt{4y^2z^2}$ ни; 5) $a < 0$ бўлганда $\sqrt{0{,}01a^2b^4}$ ни; 6) a, $c > 0$ бўлганда $\sqrt{a^2c^6}$ ни; 7) $bd < 0$ бўлганда $\sqrt{b^6d^6}$ ни ; 8) $n < 0$ бўлганда $\sqrt{16(-n)^2}$ ни илдиздан чиқаринг.

61. Ўзгарувчининг қандай қийматларида тенглик айният бўлади: 1) $x\sqrt{x^2} = x^2$; 2) $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y^3} = y^2$; 3) $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^6} = \sqrt{x^8}$; 4) $\sqrt{y(y-1)} = \sqrt{y} \cdot \sqrt{y-1}$; 5) $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$?

62. Илдизнинг қийматини топинг:

$$1)\ \sqrt{\frac{81}{169}};\quad 2)\ \sqrt{\frac{441}{100}};\quad 3)\ \sqrt{\frac{400}{289}};\quad 4)\ \sqrt{2\frac{158}{121}}.\quad 5)\ \sqrt{2\frac{226}{225}}.$$

63. Ифодани соддалаштиринг:

$$1)\ \sqrt{\frac{a^4}{b^8}};\quad 2)\ \frac{m}{n}\sqrt{\frac{n^4}{m^4}}\quad 3)\ \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c^5}};\quad 4)\ \frac{\sqrt{d^{10}}}{\sqrt{-d}};\quad 5)\ \frac{\sqrt{-m^3}}{\sqrt{m^2}}.$$

$$\textbf{64.}\ 1)\ \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{172}}.\quad 2)\ \sqrt{\frac{470000}{\sqrt{47}}};\quad 3)\ \frac{\sqrt{615}}{\sqrt{110}};\quad 4)\ \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{68}};\quad 5)\ \frac{\sqrt{136}}{\sqrt{102}}.$$

65. 1) $m > 0$ ва $n < 0$ бўлганда $\sqrt{\frac{m^2}{4n^2}}$, 2) $p < 0$ ва $q < 0$ бўлганда $\sqrt{\frac{25p^2}{16q^6}}$; 3) $xy > 0$ бўлганда $\sqrt{\frac{x^2y^6}{a^4}}$; 4) $ab < 0$ бўлганда $\sqrt{\frac{a^2b^2}{100c^2}}$ ифодани $a\sqrt{b}$ $(a \in Q,\ b \in N)$ кўринишда тасвирланг.

66. Тенглик ўзгарувчининг қандай қийматларида айниятдан иборат бўлади: 1) $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}} = \frac{a}{b^2}$; 2) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{x}{y}$; 3) $\sqrt{\frac{n^4}{m^4}} = \frac{n^2}{m^2}$

4) $\sqrt{\frac{b^2}{c^6}} = \frac{b}{c^3}$.

67*. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{\frac{c^2}{d^8}}$; 2) $x^2\sqrt{\frac{y^6}{x^4}}$; 3) $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^4}}$; 4) $\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{x^2}{2}}$.

5-§. Кўпайтувчини илдиз остидан чиқариш ва илдиз остига киритиш

I. $\sqrt{200}$ бирор рационал сон эмас, аммо 4-§ даги 1-теоремадан фойдаланиб, уни қуйидагича айнан алмаштириш мумкин:
$\sqrt{200} = \sqrt{2\cdot 100} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{100} = \sqrt{2}\cdot 10$. Бунда $\sqrt{200}$ ни $10\sqrt{2}$ кўпайтмага алмаштирдик. Бунга „кўпайтувчини илдиз остидан чиқариш“ дейилади.

Мисоллар. 1) $\sqrt{25a^3}$ ифодада кўпайтувчини илдиз остидан чиқариш учун дастлаб илдиз остидаги ифодани $25a^3 = 25a^2\cdot a = (5a)^2\cdot a$ кўринишда ёзиб, айний алмаштиришларни бажарамиз, яъни: $\sqrt{25a^3} = \sqrt{(5a)^2\cdot a} = \sqrt{(5a)^2}\cdot\sqrt{a} = |5a|\cdot\sqrt{a}$. Берилган ифодада $a \geqslant 0$ бўлиши керак. У ҳолда $|5a| = 5a$ бўлгани учун $\sqrt{25a^3} = 5a\sqrt{a}$ бўлади. Демак, $\sqrt{25a^3} = 5a\sqrt{a}$, 2) $b < 0$ бўлганда $\sqrt{4b^6} = \sqrt{(2b^3)^2} = |2b^3| = 2|b^3| = -2b^3$; 3) $5\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + \sqrt{75}$ ифодани соддалаштириш учун қўшилувчиларда кўпайтувчи илдиз остидан чиқарилиб, ўхшаш илдизлар ихчамланади: $5\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + \sqrt{75} = 5\cdot\sqrt{9\cdot 3} - 4\sqrt{4\cdot 3} + \sqrt{3\cdot 25} = 15\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3}(15 - 8 + 5) = 12\sqrt{3}$.

Изоҳ. Коэффициенти билангина фарқ қилган икки илдиз ўхшаш илдизлар дейилади. Масалан, $2\sqrt{3}$ билан $-5\sqrt{3}$; $\sqrt{a}$ билан $-2\sqrt{a}$ ўхшаш илдизлардир.

II. Баъзан илдиз олдидаги кўпайтувчини илдиз остига киритиш лозим бўлади. Масалан, $3\sqrt{15}$ ифодада 9 нинг арифметик квадрат илдизи 3 бўлгани учун 3 ўрнига $\sqrt{9}$ ёзилса, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{135}$ ҳосил бўлади. Бунда кўпайтувчи илдиз остига киритилди дейилади.

$-2\sqrt{5}$ ифодада манфий кўпайтувчи бирор соннинг арифметик квадрат илдизи бўлмайди, шунинг учун уни илдиз остига киритиб бўлмайди. Лекин бу ифодани қуйидагича айнан алмаштириш мумкин:

$$-2\sqrt{5}=-\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{4\cdot5}=-\sqrt{20}.$$

Агар кўпайтувчи ўзгарувчи бўлиб, унинг қиймати мусбат ёки манфий экани берилмаган бўлса, ўзгарувчи кўпайтувчини илдиз остига киритиш манфий бўлмаган ҳол учун алоҳида, манфий бўлган ҳол учун алоҳида бажарилади. Масалан, $a\sqrt{3}$ ифодада a ни илдиз остига киритиш лозим бўлсин. $a\geqslant0$ бўлса, $a\sqrt{3}=$ $=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3a^2}$ (чунки $a\geqslant0$ бўлганда $a=\sqrt{a^2}$); $a<0$ бўлса, $a\sqrt{3}=-\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{3}=-\sqrt{3a^2}$ (чунки $a<0$ бўлганда $a=-\sqrt{a^2}$).

1-мисол. $3\sqrt{15}$ ва $8\sqrt{2}$ сонлардан қайси бири катта?

Ечиш. $3\sqrt{15}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{135}$; $8\sqrt{2}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{2}=$ $=\sqrt{128}$; $\sqrt{135}>\sqrt{128}$ бўлгани учун $3\sqrt{15}>8\sqrt{2}$.

2-мисол. $-n\sqrt{5}$ ифодада $n<0$ бўлса, кўпайтувчини илдиз остига киритинг.

Ечиш. $n<0$ бўлганда $n=-\sqrt{n^2}$ эканини эътиборга олсак:

$$-n\sqrt{5}=-(-\sqrt{n^2})\cdot\sqrt{5}=\sqrt{n^2\cdot5}=\sqrt{5n^2}.$$

Машқлар

68. Кўпайтувчини илдиздан чиқаринг:

1) $\sqrt{125}$, 2) $\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{363}$; 4) $3\sqrt{162}$, 5) $2\sqrt{1800}$.

69. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{8}+\sqrt{98}+\sqrt{50}$, 2) $\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}$; 3) $\sqrt{275}-7\sqrt{11}+$

$+2\sqrt{99}+\sqrt{306}$, 4) $\sqrt{0,4}+3\sqrt{0,9}+5\sqrt{1,6}$; 5) $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\sqrt{32}-$ $-\frac{5}{6}\sqrt{125}+\frac{5}{3}\sqrt{50}$, 6) $3\sqrt{24}-\frac{1}{2}\sqrt{44}+\frac{1}{3}\sqrt{54}+\frac{3}{2}\sqrt{99}$.

70. Ифодани соддалаштиринг ва жадвалдан фойдаланиб, тақрибий қийматини топинг:

1) $7\sqrt{18}+10\sqrt{128}+10\sqrt{72}$; 2) $0,5\cdot\sqrt{300}+2\sqrt{12}-16\sqrt{0,75}$.

71. $x<0$ бўлганда $\sqrt{5x^2}$ ни; 2) $y\geqslant 0$ бўлганда $\sqrt{16y^3}$ ни; 3) $a<0$ бўлганда $\sqrt{8a^6}$ ни; 4) $b>0$ ва $c<0$ бўлганда $\sqrt{bc^2}$ ни; 5) $ax>0$ бўлганда $\sqrt{0,01a^3x^3}$ ни, 6) $by>0$ бўлганда $\sqrt{9b^7y^{11}}$ ни илдиздан чиқаринг.

Кўпайтувчини илдиз остидан чиқаринг:

72. 1) $\sqrt{8x^3}$; 2) $\sqrt{-27b^3}$, 3) $\sqrt{18a^5}$; 4) $\sqrt{-45y^7}$, 5) $\sqrt{7c^4}$.

73. Ифодани $a\sqrt{b}$ кўринишда тасвирланг (бунда $a\in Q$, $b\in N$):

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}$; 2) $3,5\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{56}$, 3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{80}$.

74. Ифодани соддалаштиринг: 1) $(\sqrt{10}-3\sqrt{15})\cdot\sqrt{10}$; 2) $(7\sqrt{14}-\sqrt{7})\cdot 3\sqrt{7}$, 3) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}-\sqrt{135}$; 4) $(\sqrt{6}-$ $-\sqrt{18})\cdot 3\sqrt{2}-3\sqrt{12}$.

75. Ифоданинг шаклини алмаштиринг: 1) $(1+\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{2}-1)^2$; 3) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$; 4) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; 5) $(\sqrt{7}-2\sqrt{14})^2$; 6) $(3\sqrt{6}+$ $+2\sqrt{24})^2$.

76. Тенгламани ечинг: 1) $\sqrt{4x}+\sqrt{\frac{x}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{x}=6$; 2) $\sqrt{12y}+$ $+\sqrt{27y}=3$; 3) $\sqrt{0,01y}+\sqrt{1,44y}-26=0$; 4) $\sqrt{\frac{4}{x}}+\sqrt{\frac{9}{x}}=10$.

77 Кўпайтувчини илдиз остига киритинг: 1) $3\sqrt{5}$; 2) $5\sqrt{8}$; 3) $4\sqrt{\frac{3}{4}}$ 4) $10\sqrt{\frac{4}{5}}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt{4}$; 6) $\frac{2}{5}\cdot\sqrt{5}$, 7) $\frac{10}{11}\sqrt{\frac{11a}{2}}$; 8) $\frac{5}{6}\sqrt{\frac{5b}{2}}$.

78. Сонларни таққосланг: 1) $9\sqrt{10}$ ва $10\sqrt{9}$. 2) $\frac{10}{11}\sqrt{\frac{11}{10}}$ ва $\frac{11}{10}\sqrt{\frac{10}{11}}$; 3) $0,2\sqrt{0,1}$ ва $0,1\cdot\sqrt{0,4}$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}$ ва $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{27}{64}}$.

79. Ўзгарувчининг қандай қийматларида тенглик тўғри: 1) $a\sqrt{10}=\sqrt{10a^2}$; 2) $-b\sqrt{5}=\sqrt{5b^2}$, 3) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2}{3b^2}}$; 4) $-\frac{c}{d}\sqrt{\frac{5}{6}}=\sqrt{\frac{5c^2}{6d^2}}$.

80. Кўпайтувчини илдиз остига киритинг: 1) $x > 0$ бўлганда $x\sqrt{6}$; 2) $y < 0$ бўлганда $y\sqrt{7}$; 3) $z > 0$ бўлганда $z\sqrt{10}$, 4) $n < 0$ бўлганда $-n\sqrt{11}$; 5) $c\sqrt{\frac{c}{2}}$; 6) $-d\sqrt{\frac{2d}{3}}$; 7) $x\sqrt{-x}$, 8) $-y\sqrt{-3y}$;

81*. 1) $(a-1)\sqrt{\frac{3}{a-1}}$; 2) $(3+b)\sqrt{\frac{7}{b+3}}$; 3) $(2b-1)\sqrt{\frac{c^2+1}{2b-1}}$; 4) $(3x+2)\sqrt{\frac{(x-1)^2+2}{3x+2}}$.

82. Тенгламани ечинг: 1) $(x+3)\sqrt{1-x}=0$; 2) $(3x-2)\times\times\sqrt{2x+5}=0$; 3) $\frac{2x-4}{x^2-1}\sqrt{x+1}=0$, 4) $\frac{5x+4}{3-2x}\sqrt{2x-3}=0$.

IX БОБ

КВАДРАТ ФУНКЦИЯ. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Квадрат тенглама. Квадрат тенгламани график усулда ечиш

Мисол. Шундай сон топингки, у сонни 1 бирлик орттириб, ҳосил бўлган йиғиндини шу соннинг ўзига кўпайтирилса, кўпайтма $\frac{3}{4}$ га тенг бўлсин.

Ечиш. Изланувчи сон x бўлсин. Уни 1 бирлик орттирсак, $(x+1)$ ҳосил бўлади. Бу сонни изланувчи сон (x) га кўпайтирсак, кўпайтма $\frac{3}{4}$ га тенг бўлади, яъни:

$(x+1)x=\frac{3}{4}$ ёки $4x^2+4x=3$ ёки $4x^2+4x-3=0$.

Ҳосил бўлган тенгламада ўзгарувчининг юқори даражаси 2 бўлгани учун бу тенглама иккинчи даражали тенглама ёки *квадрат тенглама* деб аталади. Демак, квадрат тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

(бунда $a\neq 0$).

1-таъриф. *ax^2+bx+c ифодага квадрат учҳад дейилади* $(a\neq 0, b, c \in R)$.

(1) тенгламада x^2 нинг коэффициенти 1 га тенг бўлса, *келтирилган квадрат тенглама* дейилади*.

---

*(1) тенгламанинг ҳар икки қисмини $a\neq 0$ га бўлиб, келтирилган квадрат тенглама ҳосил қилиш мумкин.

Юқоридаги $4x^2+4x-3=0$ тенгламани график усулда ечиш учун уни $x^2=-x+0{,}75$ кўринишга келтириб, $y=x^2$ ва $y=-x+0{,}75$ функцияларнинг графикларини битта координаталар системасида чизамиз (63- *а* расм). Парабола билан тўғри чизиқ M ва N нуқталарда кесишади. $x=-\frac{3}{4}$ ва $x=\frac{1}{2}$ бўлганда x^2 ва $-x+0{,}75$ ифодаларнинг мос қийматлари тенг бўлади, яъни $-\frac{3}{4}$ ва $\frac{1}{2}$ сонлар $x^2=-x+0{,}75$ тенгламанинг илдизларидир. У ҳолда бу сонлар $(x+1)x=\frac{3}{4}$ тенгламанинг ҳам илдизлари бўлади.

Демак, (1) тенгламани график усулда ечиш учун уни $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ кўринишига келтириб, $y=x^2$ нинг графиги (парабола) ва $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ нинг графиги (тўғри чизиқ) чизилади*. Агар графиклар умумий нуқтага эга бўлса, умумий нуқталарнинг абсциссалари (1) тенгламанинг илдизлари бўлади. Графиклар умумий нуқтага эга бўлмаса, тенглама илдизга эга бўлмайди. Масалан, $x^2-x+1=0$ тенгламани $x^2=x-1$ кўринишга келтириб, $y=x^2$ ва $y=x-1$ нинг графикларини чизсак, $x^2-x+1=0$ тенгламанинг илдизга эга эмаслигини кўрамиз (63- *б* расм).

Машқлар

Квадрат тенгламаларни график усулда ечинг:

1. 1) $x^2-x-2=0$; 2) $x^2+2x-3=0$; 3) $x^2+x+2=0$.

2. 1) $2x^2+x=1$; 2) $2x^2=x+3$; 3) $4x^2-4x+1=0$.

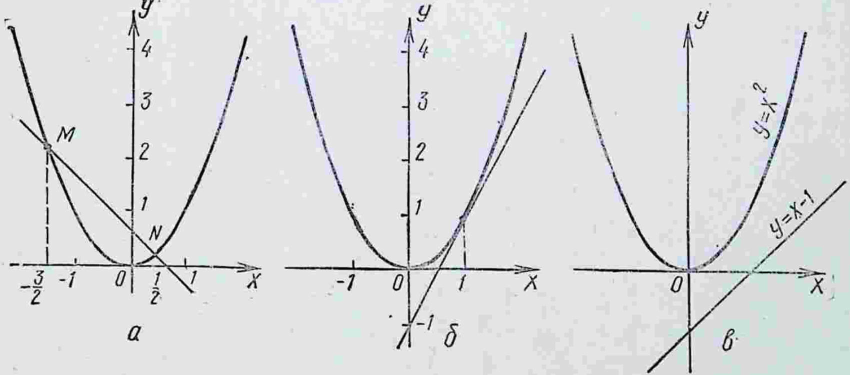
3. 0 1; 2, 3, 4 5 сонларидан қайси бири тенгламанинг илдизи бўлади: 1) $x^2-2x=0$ 2) $x^2-x-12=0$; 3) $x^2-7x+12=0$?

4. 1) $x^2+nx+32=0$ тенгламанинг битта илдизи 8 га тенг; 2) $x^2+11x+n=0$ тенгламанинг битта илдизи -4 га тенг. Шу тенгламаларда n ни топинг.

5. 1) $ax^2+bx-8=0$ тенгламанинг илдизлари -4 ва 2; 2) $2x^2+ax+b=0$ тенгламанинг илдизлари -2 ва $\frac{1}{2}$ га тенг, a ва b нинг қийматларини топинг.

---

* (1) тенгламани $ax^2=-bx-c$ кўринишда ёзиб, $y=ax^2$ ва $y=-bx-c$ ларнинг графигини чизиш билан график усулда ечса ҳам бўлади.



63- расм.

2-§. Квадрат тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш билан ечиш

I. Мисоллар. 1. $x^2-4x-5=0$ тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратиш учун уни иккиҳаднинг квадрати кўринишига келтирамиз, яъни квадрат учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз. Бунинг учун берилган тенгламанинг чап қисмига $+4$, -4 ни қўшамиз:

$x^2-4x-5=(x^2-4x+4)-4-5=(x-2)^2-9$ ёки

$$(x-2)^2-9=0.$$

Тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратсак:

$$(x-2-3)(x-2+3)=0 \text{ ёки } (x-5)(x+1)=0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари 5 ва -1. Демак, 5 ва -1 сонлари берилган тенгламанинг ҳам илдизлари бўлади.

Берилган тенгламани ечишни қуйидагича расмийлаштириш мумкин: $x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow (x^2-4x+4)-9=$ $=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1. \end{array}\right.$ *Жавоб.* $\{-1;\ 5\}$.

2. $x^2-3x+2=0$ тенгламанинг чап қисмидан иккиҳаднинг квадратини ажратиш учун $3x$ ҳади x билан $\frac{3}{2}$ нинг иккиланган кўпайтмаси эканини эътиборга олиб, учҳадга $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ва $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ сонларни қўшамиз ва айнан алмаштиришларни бажариб, сўнгра кўпайтувчиларга ажратамиз, яъни

$$x^2-3x+2=x^2-2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-$$
$$-\frac{9}{4}+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=$$
$=(x-2)(x-1)$. Демак, $(x-2)(x-1)=0$.

Жавоб. $\{1;\ 2\}$.

II. (1) тенгламада b ва c лардан камида биттаси нолга тенг бўлса, чала (тўлиқсиз) квадрат тенглама дейилади, яъни чала квадрат тенгламалар

$$ax^2+c=0 \ \text{(A)},\quad ax^2+bx=0 \ \text{(B)},\quad ax^2=0 \ \text{(C)}$$

кўринишида бўлади.

1. (A) тенгликнинг ҳар икки қисмини $a \neq 0$ га бўлсак: $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ (A′). Агар $\frac{c}{a} < 0$ ёки $ac < 0$ (яъни a билан c ҳар хил ишорали сонлар) бўлса, (A′) тенгламанинг чап қисмидаги айирма кўпайтувчиларга ажратилади ва ечилади. $ac > 0$ бўлганда эса ечимга эга бўлмайди. Масалан, $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $(x+2)\times$ $\times(x-2) = 0$, $x = -2$ ёки $x = 2$. *Жавоб.* $\{-2;\ 2\}$.

2. (B) тенгламанинг чап қисмидаги ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз: $x(ax+b) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax+b=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{array}\right. \qquad \text{Жавоб. } \left\{0;\ -\frac{b}{a}\right\}.$$

Масалан, $2x^2 + 3x = 0$, $x(2x+3) = 0$, $x = 0$ ёки $x = -1{,}5$. *Жавоб.* $\{0;\ -1{,}5\}$.

3. (C) тенгламада $a \neq 0$ бўлгани учун $x = 0$. *Жавоб.* $\{0\}$. Масалан, $2x^2 + 5 = 0$ тенглама илдизга эга эмас.

Эслатма. $x^2 - 4 = 0$ тенгламани $(x-2)(x+2) = 0$ кўринишдаги кўпайтувчиларга ажратмасдан, аввал $x^2 = 4$ кўринишда, сўнгра $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ $(4 > 0$ бўлгани учун) ҳолда ёзамиз. Бундан, $|x| = 2$. Бу тенглама илдизлари -2 ва 2. Масалан, $2x^2 - 10 = 0$ тенгламани ечсак: $x^2 = 5$ ёки $\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$. Бундан $|x| = \sqrt{5}$. *Жавоб.* $\{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$.

Машқлар

Тенгламани кўпайтувчиларга ажратиб ечинг:

6. 1) $x^2 - 2x + 3 = 0$; 2) $y^2 - 4y + 3 = 0$; 3) $x^2 + 10x - 39 = 0$.

7. 1) $4y^2 + 4y = 15$; 2) $8x^2 + 10x - 3 = 0$; 3) $2y^2 - 3y + 2 = 0$.

8. 1) $3y^2 + 6y + 4 = 0$; 2) $5x^2 + 23 = 20x$; 3) $9y^2 + 49 = 42y$.

Чала квадрат тенгламани ечинг:

9. 1) $3x^2 - \frac{1}{3} = 0$; 2) $3x^2 - \frac{1}{3}x = 0$; 3) $(2x+3)^2 - (x-1)^2 = 8$.

10. 1) $\frac{3x^2}{7} - \frac{28}{75} = 0$; 2) $\frac{8x^2}{9} - \frac{9}{50} = 0$.

3-§. Квадрат тенглама илдизларининг формуласи

1. (1) квадрат тенгламани график усулда ечганда ҳамма вақт унинг илдизларини исталган аниқликда топиб бўлмайди, кўпайтувчиларга ажратиш эса кўп ҳолларда анчагина мураккаб бўлган айнан алмаштиришлар бажаришни талаб этади. Шунинг учун (1) тенгламанинг илдизлар формуласини топиб, ундан квадрат тенглама ечишда фойдаланамиз.

(1) да $a \neq 0$ бўлгани учун тенгламанинг ҳар икки қисмини a га бўлиб, (1) тенгламага тенг кучли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$b^2-4ac=D$* деб белгиласак: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0.$ (2)

1- ҳол. $D<0$ бўлса, $4a^2>0$ бўлгани учун $-\frac{D}{4a^2}>$ >0 бўлади. Бунда x нинг ҳар қандай қийматида $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$ ифода мусбат бўлади (нолга тенг бўла олмайди), яъни $D<0$ бўлганда (2) тенглама илдизга эга бўлмайди.

2- ҳол. $D=0$ бўлса, (2) тенглама $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ кўринишни олади ва у $x=-\frac{b}{2a}$ илдизга эга бўлади.

3- ҳол. $D>0$ бўлса, $\frac{D}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$ бўлгани учун (2) тенглама $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=0$ ёки $\left(x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)\times$ $\times\left(x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)=0$ кўринишни олади. Бу тенглама илдизларини топамиз: $x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ ва $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Ҳар икки илдизни биргаликда қуйидагича ёзамиз: $x=$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \quad (3) \qquad \text{ёки } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (3')$$

---

* D — дискриминант латинча сўзнинг бош ҳарфи бўлиб, фарқловчи демакдир.

$D = b^2 - 4ac = 0$ бўлган ҳолда ҳам (3′) формуладан фойдаланиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $D = 0$ бўлганда $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a}$, яъни $x = -\frac{b}{2a}$ бўлади.

1-мисол. $9x^2 - 15x + 4 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $a = 9$, $b = -15$, $c = 4$, $D = (-15)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 225 - 144 = 81$; $D = 81 > 0$ бўлгани учун тенглама иккита илдизга эга. (3′) формулага асосан: $x = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 9} = \frac{15 \pm 9}{18}$. Тенгламанинг илдизлари: $\frac{4}{3}$ ва $\frac{1}{3}$.

Жавоб. $\left\{\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.

2-мисол. $4x^2 + 28x + 49 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $a = 4$, $b = 28$, $c = 49$; $D = (28)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 49 = 784 - 784 = 0$. Тенглама битта илдизга эга; $x = \frac{-28 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 4} = \frac{-28}{8} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$.

3-мисол. $3x^2 + 2x + 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $D = (2)^2 - 4 \times 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8$; $D = -8 < 0$. Демак, тенглама илдизга эга эмас*.

II. (1) тенгламада $b = 2k$ $(k \in N)$ жуфт сон бўлса, тенглама

$$ax^2 + 2kx + c = 0 \qquad (1')$$

кўринишни олади. Бу тенглама учун (3′) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a}.$$

Демак, $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$. (3″)

4-мисол. $4x^2 - 4x - 3 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $a = 4$, $b = -4$, $c = -3$ қийматларни (3″) формулага қўйсак: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4}$, $x = \frac{3}{2}$ ёки $x = -\frac{1}{2}$. *Жавоб.* $\left\{\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

---

* Чала квадрат тенгламаларни ечганда ҳам (3′) формуладан фойдаланиш мумкин. Аммо уларни кўпайтувчиларга ажратиб ечиш қулайдир.

Демак, (1) тенгламада 2- коэффициент жуфт сон бўлганда (3″) формуладан фойдаланиб, тенгламанинг илдизи (ечими) ни осон топиш мумкин экан.

5-мисол. $9x^2 - bx + 1 = 0$ тенглама b параметрнинг қандай қийматларида: а) ечимга эга бўлмайди; б) битта ечимга; в) иккита ечимга эга бўлади?

Ечиш. $D = b^2 - 4ac$ формулага асосан: $D = (-b)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = b^2 - 36$. а) $b^2 - 36 < 0$ тенгсизликни ечсак: $b \in]-6; 6[$. $b \in]-6; 6[$ бўлса, тенглама илдизга эга бўлмайди; б) $b^2 - 36 = 0$, $b = \pm 6$, яъни $b = -6$ ёки $b = 6$ бўлса, тенглама битта илдизга эга бўлади; в) $b^2 - 36 > 0$ тенгсизликни ечсак, $b \in]-\infty; -6[\cup]6; +\infty[$. Демак, $b \in]-\infty; -6[\cup]6; +\infty[$ бўлса, тенглама иккита илдизга эга бўлади.

III. Махражида ўзгарувчи қатнашган квадрат тенгламаларни ечганда тенгламанинг ҳар икки қисмини ўзгарувчини ўз ичига олган ифодага кўпайтириш мумкин эмаслигини ёдда сақлаш керак.

6-мисол. $\frac{2x+1}{2-x} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{5x-2}{4-x^2} + 1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани айнан алмаштирамиз:

$$\frac{2x+1}{2-x} - \frac{x+1}{2-x} - \frac{5x-2}{4-x^2} - 1 = 0 \text{ ёки}$$

$$\frac{(2x+1)(2+x) - (x+1)(2+x) - (5x-2) - (4-x^2)}{4-x^2} = 0.$$

Бундан қуйидаги системани ҳосил қиламиз ва ечамиз:

$$\begin{cases} (2x+1)(2+x) - (x+1)(2+x) - (5x-2) - (4-x^2) = 0, \\ 4 - x^2 \neq 0. \end{cases}$$

Квадрат тенгламани нормал ҳолга келтирамиз: $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Бу тенгламанинг илдизлари: 2 ва $-\frac{1}{2}$. $x = 2$ бўлса, $4 - 2^2 \neq 0$ мулоҳаза нотўғри. $x = -\frac{1}{2}$ бўлса, $4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$ мулоҳаза тўғри. Демак, берилган тенглама $-\frac{1}{2}$ дан иборат битта илдизга эга.

Жавоб. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Машқлар

11. Тенгламанинг дискриминантини ҳисоблаб, нечта илдизи бор эканини аниқланг: 1) $3x^2-5x-1=0$; 2) $2x^2+5x-4=0$; 3) $4x^2=12x-9$; 4) $4x^2-3x+1=0$.

Тенгламани (3) ёки (3′) формуладан фойдаланиб ечинг:

12. 1) $x^2+3x-4=0$; 2) $x^2+x-12=0$, 3) $x^2+7x=18$.

13. 1) $x^2+12x+20=0$; 2) $x^2+6x-27=0$ 3) $x^2+6x-27=0$.

14 1) $9x^2-5=12x$; 2) $4x^2=3-x$; 3) $2x+3=7x^2$; 4) $21x=10+9x^2$.

15. 1) $4x^2-4x=15$; 2) $9x^2-20=24x$. 3) $5x^2=8x-3$.

Квадрат тенгламани ечинг:

16. 1) $(3x+2)^2=3(x+2)$; 2) $(3x-1)^2=12(3-x)$; 3) $2x^2-32x+25=3x^2-30x+1$.

17. 1) $(x-4)(x-3)+20x=2x^2+48$; 2) $100+(3x-2)^2=$ $=8(x+1)^2$.

Тенгламани (3″) формуладан фойдаланиб ечинг:

18. 1) $x^2-2x-3=0$; 2) $x^2+12x+36=0$; 3) $x^2+8x-20=0$.

19. 1) $4x^2-4x-15=0$; 2) $5x^2=8x-3$ 3) $x^2-2=2x$

20. Параметрнинг қандай қийматлари тўпламида тенглама битта илдизга эга бўлади: 1) $x^2-8x+9=0$; 2) $ax^2+8x+1=0$; 3) $(c-7)x^2+(c+8)x+c=0$?

21. Параметрнинг қандай қийматлари тўпламида тенглама: а) илдизга эга бўлмайди, б) иккита илдизга эга бўлади: 1) ax^2+ $+6x-4=0$, 2) $3x^2-6x+c=0$, 3) $2x^2-ax=2-a$?

22*. a нинг қандай қийматлари тўпламида: 1) $x^2+x+a=0$; 2) $ax^2+4x-1=0$ тенглама илдизлари иккита бир хил ишорали сонлар бўлади?

23. Тенгламани ечинг:

1) $$\frac{2}{5x-10}-\frac{x-1}{2x^2+4x}=\frac{5}{3(x^2-4)};$$

2) $$\frac{2x-5}{x^2-3x}-\frac{x+2}{x^2+3x}+\frac{x-5}{x^2-9}=0.$$

4-§. Квадрат тенглама тузиш билан масалалар ечиш

Масала. Икки автомобиль ораларидаги масофа 560 км бўлган бир шаҳардан иккинчисига қараб жўнади. Биринчисининг тезлиги иккинчисиникидан соатига 10 км ортиқ бўлгани учун у тайинланган жойга 1 соат олдин етиб келди. Ҳар қайси автомобилнинг тезлигини топинг.

Ечиш. Иккинчи автомобилнинг тезлиги x км/соат, биринчисининг тезлиги эса $(x+10)$ км/соат. 560 км ни биринчи автомобиль $\frac{560}{x+10}$ соатда, иккинчиси эса $\frac{560}{x}$ соатда ўтади. Масала шартига кўра биринчи автомобиль сарф қилган вақт $\left(\frac{560}{x+10}\text{ соат}\right)$ иккинчисиники $\left(\frac{560}{x}\text{ соат}\right)$дан 1 соат кам бўлгани учун

$$\frac{560}{x+10}+1=\frac{560}{x}$$

тенгламани тузамиз*.

Масала шартига кўра $x>10$ бўлиши керак. Ҳосил бўлган тенглама қуйидаги системага тенг кучли бўлади:

$$\begin{cases} x^2+10x-5600=0, \\ x(x+10)\neq 0. \end{cases}$$

$x^2+10x-5600=0$ тенгламанинг илдизлари: $x=70$ ва $x=-80$. $x=-80$ манфий сон бўлгани учун ҳам $x=-80$ масалага жавоб бўла олмайди (чунки автомобилнинг тезлиги манфий сон бўлиши мумкин эмас).

$x=70$ бўлганда $70(70+10)\neq 0$ мулоҳаза ўринли.

Жавоб. Биринчи автомобилнинг тезлиги 80 км/соат, иккинчисиники 70 км/соат.

Жавобни текшириш. 560 км ни юришга биринчи автомобиль $\frac{560}{80}=7$ соат, иккинчиси $\frac{560}{70}=8$ соат сарф қилган. Биринчи автомобиль иккинчисидан 8 соат $-$ $-$ 7 соат $=1$ соат ортиқ вақт сарф қилган.

Машқлар

24. Кетма-кет учта тоқ сонлар квадратларининг йиғиндиси 371 га тенг. Шу сонларни топинг.

25. Кубларининг айирмаси 296 га тенг бўлган иккита кетма-кет мусбат жуфт сонларни топинг.

26. Тўғри тўрт бурчакли ер участкасининг бўйи энидан 3 м узун, юзи эса 208 м². Участканинг бўйи ва энини топинг.

---

* Тенглама $\frac{560}{x+10}=\frac{560}{x}-1$ ёки $\frac{560}{x}-\frac{560}{x+10}=1$ кўринишда тузилган бўлиши ҳам мумкин эди.

27. Ўқувчи 480 бетли китобни ҳар куни баравардан ўқиб тамомлади. Агар у ҳар куни 16 бетдан ортиқ ўқиганда шу китобни 5 кун илгари ўқиб тамомлар эди. Ўқувчи китобни неча кунда ўқиб тугатган?

28. 1976 йилги футбол чемпионатида олий лигадаги командаларнинг ҳар бири қолган командалар билан бир мартадан ўйнаганда ҳаммаси бўлиб 120 та ўйин ўйналгани маълум бўлса, олий лигада нечта команда мамлакат чемпиони номини олиш учун курашган?

29. Ҳовузни икки қувур 6 соатда тўлдиради. Биринчи қувурнинг бир ўзи иккинчисига қараганда ҳовузни 5 соат тезроқ тўлдиради. Ҳар қайси қувур ҳовузни қанча вақтда тўлдиради?

30. Ҳовузга иккита қувур ўтказилган бўлиб, биринчи қувур уни иккинчисига қараганда 4 соат тезроқ тўлдиради. Ҳовузга биринчи қувур очилгандан 6 соат ўтгач, иккинчи қувур ҳам очилди ва иккаласи бирга 6 соат ишлагандан кейин ҳовузнинг 80% игина тўлди. Ҳар қайси қувурнинг ёлғиз ўзи шу ҳовузни неча соатда тўлдиради?

31. 100, 50, 40 сонлари берилган. Биринчи сондан қандай сонни айириб, иккинчи сонга қўшилса, янги ҳосил бўлган сонларнинг иккинчиси биринчиси билан учинчисининг ўрта пропорционали бўлади?

32. Пионерлар маёвкага бориш учун баравардан пул йиғиб, 80 сўм тўплашди. Агар 8 та пионер маёвкага бормай қолса, борган пионерларнинг ҳар бири 50 тийиндан ортиқ тўлаши керак бўлади. Нечта пионер маёвкага бормоқчи?

33. Соатнинг нархи 25 сўм. Бир хил процент билан кетма-кет икки марта арзонлаштирилгандан сўнг унинг нархи 20 сўм 25 тийинга тушди. Ҳар сафар соатнинг нархи неча процент арзонлаштирилган?

34. *A* қишлоғидан дарё оқими бўйича сол оқизилди. 5 соат 20 минут ўтгач, шу қишлоқдан моторли қайиқ йўлга чиқди ва 20 км сузгач, солни қувиб етди. Агар моторли қайиқнинг тезлиги 12 км/соат экани маълум бўлса, солнинг тезлигини топинг.

35. Ораларидаги масофа 28 км бўлган *A* ва *B* қишлоқлардан бир вақтда икки велосипедчи бир-бирига қараб жўнади. Улар 1 соатдан кейин учрашишди. Улар учрашгандан кейин биринчи велосипедчи *B* қишлоққа иккинчи велосипедчи *A* қишлоққа етиб боришидан 35 минут олдин етиб келди. Ҳар икки велосипедчининг тезлигини топинг.

36. Колхознинг машиналарда пахта терувчилар бригадаси бир неча кунда 216 т пахта териши керак эди. Бригада биринчи уч кун ичида кунлик нормани бажарди. Ундан кейин эса ҳар куни пландан ташқари 8 т пахта терди. Шу сабабли план мўлжаллангандан 1 кун олдин орттириб бажарилди ва 232 т пахта терилди. Бригада план бўйича кунига қанча пахта териши керак эди?

37. Тўғри бурчакли учбурчак томонларининг узунликлари: а) кетма-кет бутун сонлар билан; б) кетма-кет жуфт сонлар билан; в) кетма-кет тоқ сонлар билан ифода қилиниши мумкинми?

38*. Ҳар бирининг сиғими 30 л дан бўлган икки идишда биргаликда 30 л спирт бор. Биринчи идишга тўлгунича сув қуйилиб, бу аралашмадан иккинчи идишга тўлгунча қуйилди. Кейин 2-идишдан 1- идишга 12 л аралашма қуйилди. Шундан сўнг иккинчи идишдаги аралашма биринчи идишдагига қараганда 2 л кам бўлди Дастлаб ҳар қайси идишда қанчадан спирт бўлган?

5-§. Квадрат тенгламага келтириладиган тенгламалар

1-мисол. $36x^4-13x^2+1=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^2=y$ деб белгиласак, $x^4=y^2$ бўлиб, берилган тенглама $36y^2-13y+1=0$ кўринишга келади. Бу квадрат тенгламанинг илдизлари $y=\frac{1}{4}$ ёки $y=\frac{1}{9}$, y нинг қийматини ўрнига қўямиз. 1) $x^2=\frac{1}{4}$ тенгламадан: $x=\frac{1}{2}$ ёки $x=-\frac{1}{2}$; 2) $x^2=\frac{1}{9}$ тенгламадан: $x=$ $=\frac{1}{3}$ ёки $x=-\frac{1}{3}$. *Жавоб.* $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$.

Таъриф. *Ўзгарувчи фақат жуфт кўрсаткичли даражада қатнашган тўртинчи даражали бир ўзгарувчили*

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (4)$$

тенглама биквадрат тенглама дейилади (бунда $a\neq 0$, b, $c\in R$).

2-мисол. $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^2+6x=z$ деб белгиласак, $(x^2+6x)^2=z^2$ бўлиб, берилган тенглама $z^2+8z-9=0$ кўринишни олади. Бу тенгламанинг илдизлари $z=1$ ёки $z=-9$. z нинг қийматларини ўрнига қўямиз. У ҳолда:
а) $x^2+6x=1$ тенгламадан: $x=-3\pm\sqrt{10}$; б) x^2+ $+6x=-9$ тенгламадан: $x=-3$. *Жавоб.* $\{-3;$ $-3-\sqrt{10};\ -3+\sqrt{10}\}$.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

39. 1) $x^4-13x^2+36=0$; 2) $x^4-20x^2+64=0$; 3) $x^4-26x^2+25=0$.

40. 1) $x^4-25x^2+144=0$. 2) $x^4-41x^2+400=0$.

41. 1) $4x^4-37x^2+9=0$; 2) $2x^4-9x^2+9=0$, 3) $36x^4-37x^2+1=0$.

42. 1) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$; 2) $(x^2-8)^2=$ $=5-4(x^2-8)$.

43. 1) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)=9$; 2) $2(x^2-3x)+8=$ $=(x^2-3x)^2$.

44. 1) $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=0{,}5625$; 2) $x^4-4x^3+4x^2=1$.

6-§. Параметрли квадрат тенгламалар

1-мисол $6x^2+5ax+a^2=0$ тенгламани x га нисбатан ечинг. Тенгламанинг дискриминанти $D=(5a)^2-24a^2=a^2$, яъни $D=a^2$. $D=a^2\geqslant 0$ бўлгани учун тенглама a параметрнинг исталган қийматида илдизга эга.

Агар $a=0$ бўлса, $D=0$ бўлиб, берилган тенглама битта илдизга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $a=0$ бўлганда берилган тенглама $6x^2=0$ кўринишни олади Бундан $x=0$.

Агар $a\neq 0$ бўлса, $D>0$ бўлгани учун берилган тенгламанинг илдизлари (3′) формулага асосан $x=\dfrac{-5a\pm|a|}{12}$ формуладан топилади. $a>0$ бўлганда $|a|=a$ бўлиб, тенглама илдизлари $x=$ $=\dfrac{-5a\pm a}{12}$ формуладан, $a<0$ бўлганда $|a|=-a$ бўлиб, тенглама илдизлари $x=\dfrac{-5a\pm a}{12}$ формуладан аниқланади. Демак, $a\neq 0$ бўлса, илдизлар $x=\dfrac{-5a\pm a}{12}$ формуладан ҳисобланар экан Бунда $x=\dfrac{-5a-a}{12}=-\dfrac{a}{2}$ ёки $x=\dfrac{-5a+a}{12}=-\dfrac{a}{3}$ га тенг. *Жавоб.* $a\neq 0$ бўлса, $\left\{-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{3}\right\}$, $a=0$ бўлганда эса $\{0\}$.

2-мисол. $1+2x+x^2=a^2\left(1+\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{x^2}{a^4}\right)$ тенгламани x га нисбатан ечинг.

Берилган тенгламада $a\neq 0$ (акс ҳолда тенглама маънога эга бўлмайди).

Тенгламанинг ҳар икки қисмини a^2 га кўпайтирамиз: $a^2+2a^2x+a^2x^2=a^4+2a^2x+x^2$. Соддалаштирсак: $x^2(a^2-1)=$ $=a^2(a^2-1)$.

Агар $a^2-1\neq 0$ ёки $a\neq\pm 1$ бўлса, $x^2=a^2$ дан $x=\pm a$.

Агар $a^2-1=0$ ёки $a=\pm 1$ бўлса, берилган тенглама $1+2x+x^2=1+2x+x^2$ айниятга айланиб, x—ихтиёрий сон бўла олади. *Жавоб.* $a\neq\pm 1$ бўлса, $\{-a;a\}$, $a=\pm 1$ бўлса, ихтёрий сон ечим бўлади.

Машқлар

Тенгламани x га нисбатан ечинг:

45. 1) $2x^2-3cx-2c^2=0$; 2) $(3-a)x^2+(a-1)x=2$.

46*. 1) $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$; 2) $(a^2-b^2)x^2-ab=$ $=(a^2+b^2)x$.

7-§. Квадрат тенглама илдизларининг хоссаси

Теорема. (Виет* теоремаси.) *Келтирилган квадрат тенглама*

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (5)$$

илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан олинган иккинчи коэффициент $(-p)$ *га, илдизларининг кўпайтмаси эса озод ҳад* (q) *га тенг*, яъни x_1 ва x_2 (5) тенгламанинг илдизлари бўлса,

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{ва} \quad x_1 \cdot x_2 = q. \qquad (6)$$

Исбот. 1. $D > 0$ бўлса, (5) тенгламанинг илдизлари:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

У ҳолда: $x_1 + x_2 = \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} +$

$$+ \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} =$$

$$= \frac{(-p)^2 - (\sqrt{p^2 - 4q})^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

2. $D = 0$ бўлса, $x = \dfrac{-p \pm 0}{2}$. Бу ҳолда тенглама битта эмас, иккита бир-бирига тенг илдизларга эга деб шартлашсак, теорема ўринли бўлаверади. Ҳақиқатан ҳам, $x_1 + x_2 = -\dfrac{p}{2} - \dfrac{p}{2} = -p$, $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{p}{2} \cdot \left(-\dfrac{p}{2}\right) = \dfrac{p^2}{4} = \dfrac{4q}{4} = q$ (бу ерда p^2 ўрнига $4q$ қўйилди, чунки $D = p^2 - 4q = 0$ дан $p^2 = 4q$ бўлади).

Натижа. Тўлиқ квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан иккинчи ва биринчи коэффициентлар нисбатига тенг, кўпайтмаси эса озод ҳаднинг биринчи коэффициентга нисбатига тенг, яъни

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{ва} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

---

* Франсуа Виет (1540—1603)—француз математиги.

Тескари теорема. Ихтиёрий иккита ҳақиқий соннинг йиғиндиси $-p$ га, кўпайтмаси эса q га тенг бўлса, бу икки сон келтирилган квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади.

Исбот. $x_1 = -p - x_2$ қийматни $x_1 \cdot x_2 = q$ га қўйсак, $(-p - x_2)\, x_2 = q$ ёки $x_2^2 + px_2 + q = 0$, яъни x_2 (5) тенгламанинг илдизи экан. Шунга ўхшаш $x_2 = -p - x_1$ ни $x_1 \cdot x_2 = q$ га қўйсак, $x_1^2 + px_1 + q = 0$, яъни x_1 ҳам (5) тенгламанинг илдизи бўлади.

Натижа. Ихтиёрий иккита ҳақиқий сон (x_1 ва x_2) нинг йиғиндиси $-\frac{b}{a}$ га, кўпайтмаси эса $\frac{c}{a}$ га тенг бўлса, бу икки сон (1) квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади.

Тескари теоремадан фойдаланиб, илдизлари берилган квадрат тенгламани тузиш мумкин.

1-мисол. Илдизлари -4 ва 3 бўлган квадрат тенглама тузинг.

Ечиш. $x_1 + x_2 = (-4) + 3 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = (-4) \cdot 3 = -12$. Демак, (5) тенгламада $p = 1$, $q = -12$ экани аниқланди. *Жавоб.* $x^2 + x - 12 = 0$.

Виет теоремасидан ва тескари теоремадан фойдаланиб, маълум шартларни қаноатлантирувчи квадрат тенглама тузиш ёки квадрат тенгламанинг илдизлари ва коэффициентлари ҳамда озод ҳад орасидаги муносабатларни аниқлаш мумкин.

2-мисол. Илдизлари $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенглама илдизларига тескари сонлардан иборат бўлган квадрат тенглама тузинг.

Ечиш. Берилган тенглама илдизлари x_1 ва x_2 бўлса, Виет теоремасига кўра $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ва $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. У ҳолда изланувчи тенглама илдизлари $\frac{1}{x_1}$ ва $\frac{1}{x_2}$ бўлади. Бу илдизларнинг йиғиндисини ва кўпайтмасини топамиз:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{a}{c}.$$

Демак, $p = \frac{b}{c}$ ва $q = \frac{a}{c}$ бўлгани учун изланувчи тенглама $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$ ёки $cx^2 + bx + a = 0$ бўлади.

Машқлар

47. Тенгламани ечмасдан, унинг илдизлари (агар илдизларга эга бўлса) йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг: 1) $3x^2-2x+1=0$; 2) $5x^2+2x-2=0$; 3) $4x^2-4x+3=0$; 4) $7x^2-2x-14=0$.

48. 1) Илдизларининг йиғиндиси 7 га, кўпайтмаси -8 га; 2) илдизларининг йиғиндиси 1 га, кўпайтмаси $\frac{2}{9}$ га тенг бўлган квадрат тенглама тузинг.

49. Квадрат тенгламани ечмасдан, илдизлари қандай ишорали сонлар эканини аниқланг: 1) $4x^2+4x+3=0$; 2) $16x^2-16x+3=0$; 3) $4x^2-4x-15=0$; 4) $16x^2-16x-5=0$.

50. 1) Иккита мусбат илдизга; 2) иккита манфий илдизга; 3) бири мусбат, иккинчиси манфий бўлган илдизларга; 4) қарама-қарши сонлардан иборат илдизларга эга бўлган квадрат тенглама тузинг.

51. Илдизлар тўплами берилган квадрат тенглама тузинг: 1) $\{2; 6\}$; 2) $\{4; -5\}$; 3) $\{5; 0\}$; 4) $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$; 5) $\{\sqrt{3}; \sqrt{12}\}$; 6) $\{5-\sqrt{4}; 5+\sqrt{4}\}$; 7) $\{-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\}$.

52. 1) $2x^2-9x+c=0$ тенглама илдизларининг айирмаси 1,5 га тенг; 2) $cx^2-2x+1=0$ тенглама илдизларининг нисбати 3 га тенг, c ни топинг.

53. Илдизлари $x^2+px+q=0$ тенглама илдизларидан: 1) n марта катта; 2) m марта кичик бўлган квадрат тенглама тузинг.

54. $x^2+mx+n=0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 га тенг. Илдизлари $x_1^2+x_2^2$ ва $5x_1 \cdot x_2$ бўлган квадрат тенглама тузинг.

55*. $ax^2+bx+c=0$ тенглама илдизлари x_1 ва x_2. Бу тенгламани ечмасдан илдизлари: 1) x_1+2x_2 ва x_2+2x_1, 2) x_1^2 ва x_2^2 бўлган квадрат тенглама тузинг.

8-§. Квадрат учҳаднинг графиги

Квадрат учҳад x нинг функцияси бўлгани учун квадрат функция дейилади. Уни y билан белгиласак, қуйидаги кўринишни олади:

$$y=ax^2+bx+c. \tag{7}$$

$y=ax^2$ нинг графиги учи координата бошида бўлиб, ордината ўқига нисбатан симметрик бўлган $a>0$ бўлганда тармоқлари юқорига, $a<0$ бўлганда эса пастга йўналган параболадир (III боб, 2-§).

$y=ax^2+c$ функциянинг қийматлари $y=ax^2$ функциянинг мос қийматларидан c та ортиқ ($c>0$) ёки c та кам ($c<0$) бўлгани учун $y=ax^2$ параболани координаталар системасида ординаталар ўқига параллел равишда c бирлик ($c>0$ бўлганда юқорига, $c<0$ бўлганда эса пастга) параллел кўчириш билан ҳосил қилиш мумкин.

$y=ax^2$ функциянинг $x=x_0$ бўлгандаги қиймати билан $y=a(x+n)^2$ нинг $x=x_0-n$ бўлгандаги қиймати бир-бирига тенг бўлгани учун координаталар системасида $y=ax^2$ функция графигини абсциссалар ўқига параллел равишда n бирлик чапга ($n>0$) ёки ўнгга ($n<0$) параллел кўчирилса, $y=a(x+n)^2$ функция графигини ҳосил қилиш мумкин.

$y=ax^2$ функция графигини (параболани) аввал n бирлик ўнгга ($n<0$) ёки чапга ($n>0$), сўнгра m бирлик юқорига ($m>0$) ёки пастга* ($m<0$) параллел кўчириш билан $y=a(x+n)^2+m$ функция графигини ҳосил қилиш мумкин.

ax^2+bx+c квадрат учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=$
$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,
яъни

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \tag{8}$$

ёки

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}. \tag{9}$$

(9) тенгликдан кўринадики, (7) квадрат учҳаднинг графиги $y=ax^2$ параболани координаталар системасида дастлаб $-\frac{b}{2a}$ бирлик чапга $\left(-\frac{b}{2a}>0 \text{ бўлса}\right)$ ёки ўнгга $\left(-\frac{b}{2a}<0 \text{ бўлса}\right)$, сўнгра $-\frac{D}{4a}$ бирлик юқорига $\left(\text{агар } \frac{D}{4a}>0 \text{ бўлса}\right)$ ёки пастга $\left(\text{агар} -\frac{D}{4a}<\right.$ <0 бўлса) параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлади.

Натижа. Квадрат учҳад (1) нинг графиги, учи $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$ нуқтада бўлиб, тармоқлари $a>0$ бўлганда юқорига, $a<0$ бўлганда эса пастга йўналган параболадир.

Квадрат учҳаднинг графиги параболани унинг „характерли" нуқталари ёрдамида чизган маъқул.

Параболанинг характерли нуқталари деганда унинг учи ва координата ўқлари билан кесишган нуқталари ҳамда парабола ўқига нисбатан парабола билан y ўқининг кесишув нуқтасига симметрик жойлашган нуқтани** назарда тутиш мумкин.

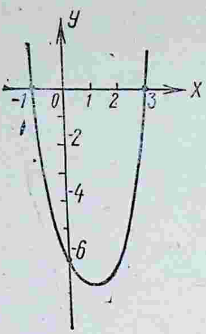
Характерли нуқталарни қуйидагича топиш мумкин:

1. $x=0$ бўлса, $y=c$. $A(0; c)$ — параболанинг y ўқи билан кесишган нуқтаси.

---

* Ўнгга (чапга) параллел кўчириш деганда абсциссалар ўқига параллел кўчириш; юқорига (пастга) параллел кўчириш деганда ординаталар ўқига параллел кўчириш назарда тутилади.

** Парабола абсцисса ўқи билан кесишмаган ҳолларда бу нуқтадан фойдаланиш жуда ҳам зарурдир.



64- расм.

2. Парабола ўқига нисбатан A га симметрик бўлган A' нуқтанинг ординатаси ҳам c га (A нинг ординатасига) тенг бўлгани учун A' нуқтанинг абсциссасини топиш мақсадида (7) да y ўрнига c ни қўямиз. У ҳолда: $c = ax^2 + bx + c$ ёки $ax^2 + bx = 0$. Бундан: $x = 0$ (A нуқтанинг абсциссаси) ёки $x = -\frac{b}{a}$ (A' нуқтанинг абсциссаси). Демак, $A'\left(-\frac{b}{a};\ c\right)$.

3. Параболанинг учи C нуқта параболанинг ўқида ётгани учун унинг абсциссаси (C_x) A' нуқта абсциссасининг ярмига $\left(-\frac{b}{2a}\text{ га}\right)$, ординатаси (C_y) эса $C_y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \ldots = \frac{4ac - b^2}{4a}$ га тенг.

Демак, $C\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$ параболанинг учи.

4. $D > 0$ бўлган ҳолда параболанинг x ўқи билан кесишган нуқталарининг ординаталари нолга тенг бўлиб, абсциссалари $0 = ax^2 + bx + c$ тенглама илдизларидан (x_1 ва x_2 дан) иборат бўлади, яъни $B(x_1,\ 0)$, $B'(x_2,\ 0)$. (Агар $b = 0$ бўлса, B, B' ва C нуқталар устма-уст тушади.) Ниҳоят, топилган нуқталар орқали ўтувчи парабола чизилади.

1-мисол. $y = 2x^2 - 4x - 6$ функциянинг графигини чизинг.

1. $x = 0$ бўлса, $y = -6$. $A(0;\ -6)$ — параболанинг y ўқи билан кесишган нуқтаси.

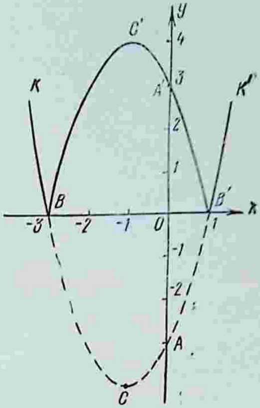
2. $-6 = 2x^2 - 4x - 6$ дан $x^2 - 2x = 0$. Бундан $x = 0$ ёки $x = 2$. $A'(2;\ -6)$ парабола ўқига нисбатан A га симметрик нуқта.

3. $C_x = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$; $C_y = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6 = -8$. $C(1;\ -8)$ — параболанинг учи.

4. $D = 16 + 48 > 0$; $2x^2 - 4x - 6 = 0$ ёки $x^2 - 2x - 3 = 0$ дан $x_1 = -1$ ёки $x_2 = 3$. Демак, $B(-1;\ 0)$, $B'(3;\ 0)$. B, A, C, A', B' нуқталардан ўтувчи парабола чизамиз (64-расм)

2-мисол. $y=|x^2+2x-3|$ функциянинг графигини чизинг.

$y=x^2+2x-3$ функциянинг графиги — параболанинг x ўқнинг юқорисидаги қисмини (BK ва $B'K'$ ни) чизамиз. x ўқининг остидаги қисмини ($BCAB'$) ни пунктирда чизиб, x ўқига нисбатан симметрик қилиб юқорига кўчирамиз. Бунинг учун A га симметрик A' ни C га симметрик C' ни топиб, $BC'A'B'$ эгри чизиқ чизилади (65-расм). $KBC'A'B'K'$ изланувчи график бўлади*.



65-расм.

Машқлар

56. (Оғзаки.) $y=ax^2$ функция графигини: а) 2 бирлик юқорига б) 3 бирлик пастга; в) 4 бирлик ўнгга, г) 1 бирлик чапга параллел кўчирсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

57. $y=(x+2)^2$ функция графигини: а) 1 бирлик юқорига; б) 5 бирлик ўнгга, в) 2 бирлик пастга; г) 4 бирлик чапга параллел кўчирсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

58. (Оғзаки.) 1) $y=ax^2$ ва $y=-x^2$; 2) $y=-(x+2)^2$ ва $y=(x+2)^2$ функцияларнинг графиги x ўқига нисбатан қандай жойлашган?

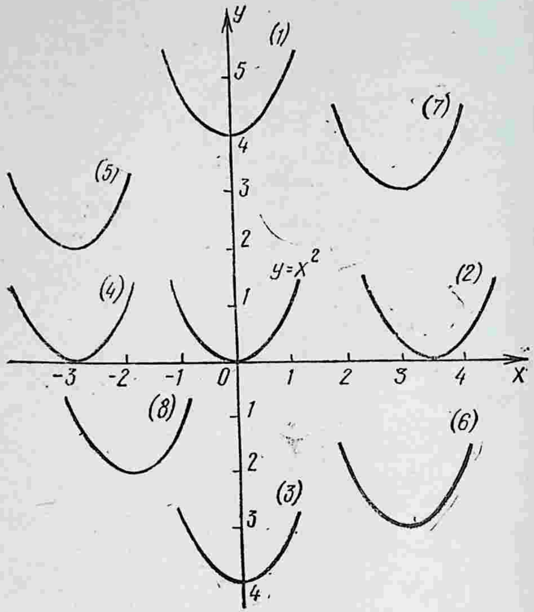
59. 66-расмда $y=x^2$ функция графигини параллел кўчириш билан параболалар чизилган. Шу параболалар қандай функцияларнинг графиги бўлади?

60. $y=ax^2$ функция графигини: 1) 3 бирлик ўнгга, сўнгра 4 бирлик юқорига параллел кўчирсак, 2) 4 бирлик ўнгга, сўнгра 3 бирлик пастга параллел кўчирсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

61. (Оғзаки.) 1) $y=2x^2+3x$; 2) $y=-3x^2+1$; 3) $y=-ax^2+bx+c$ параболанинг: а) тармоқлари юқорига йўналганми, пастга йўналганми? б) y ўқини қайси нуқтада кесиб ўтади?

---

* Берилган функцияни $y=|x^2+2x-3|=$
$$=\begin{cases} x^2+2x-3, & x\in\,]-\infty;\,-3]\cup[1;\,+\infty[, \\ -x^2-2x+3, & x\in\,]-3;\,1[\end{cases}$$ кўринишда ёзиб, $]-3;\,1[$ оралигида $y=-x^2-2x+3$ функция графигини, $]-\infty;\,-3]$ ва $[1;\,+\infty[$ оралиқларида эса $y=x^2+2x-3$ функция графигини чизса ҳам бўлади.



66- расм.

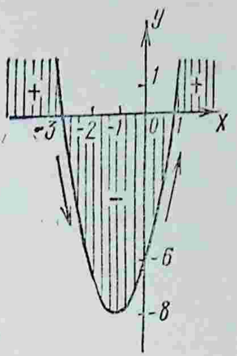
62. (Оғзаки.) 1) а) $y = x^2 + 3$; б) $y = -x^2 - 2$ в) $y = 2(x-1)^2$; г) $y = x^2 - 4$ функцияларнинг графиги x ўқи билан нечта умумий нуқтага эга? 2) Графиги абсцисса ўқи билан: а) умумий нуқтага эга бўлмаган; б) биттагина $A(2,\ 0)$ умумий нуқтага эга бўлган квадрат учҳадга мисол келтиринг.

63. (Оғзаки.) 1) $y = 2x^2$; 2) $y = x^2 + 4$; 3) $y = 3(x-2)^2 + 1$; 4) $y = x^2 - 4x - 4$ параболалар учларининг координаталарини аниқланг.

64. График ясамасдан, функция графигининг y ўқи билан ва x ўқи билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг: 1) $y = x^2 - 2x - 3$; 2) $y = x^2 + 6x + 8$; 3) $y = 2x^2 + x - 1$; 4) $y = 4x^2 - 4x - 3$; 5) $y = -x^2 + 4x - 4$; 6) $y = 2x^2 + 4x + 2$; 7) $y = x^2 - 5x + 7$; 8) $y = 2x^2 - 4x + 6$.

65. Функция графигини чизинг: 1) $y = |x^2 - 4|$; 2) $y = |x^2 - 4x|$; 3) $y = |x^2 - 5x + 4|$.

9- §. Квадрат учҳад хоссаларини текшириш



67- расм.

Таъриф. $[p; q]$ *оралиғида берилган функция* $[p; r]$ *оралиғида ўсиб (камайиб),* $[r; q]$ *оралиғида камайса (ўсса),* $x = r$ *нуқта функциянинг максимум (минимум) нуқтаси дейилади.*

Функциянинг максимум (минимум) нуқтасидаги қиймати бу функциянинг максимуми (минимуми) дейилади.

Квадрат учҳаднинг графигини (параболани) чизиб, графикдан квадрат учҳаднинг хоссаларини аниқлаш мумкин.

Мисол. $y = 2x^2 + 4x - 6$ квадрат учҳаднинг графигини чизинг. Унинг: 1) илдизларини; 2) минимумини; 3) ўсиш ва камайиш оралиқларини; 4) қийматлар соҳасини аниқланг; 5) ишорасини текширинг.

Ечиш. Берилган квадрат учҳад графигининг характерли нуқталари:

$A(0; -6)$; $A'(-2; -6)$, $C(-1; -8)$, $B(-3; 0)$.

$B'(1; 0)$ ни аниқлаб парабола чизамиз (67-расм).

Берилган учҳаднинг илдизлари -3 ва 1. $x = -1$ бўлганда квадрат учҳад минимуми -8 га тенг бўлиб, $]-\infty; -1[$ оралиғида ($+\infty$ дан -8 гача) камаяди. $]-1; +\infty[$ оралиғида (-8 дан $+\infty$ гача) ўсади. Функциянинг қийматлар тўплами $[-8; +\infty[$ дан иборат бўлиб, $]-3; 1[$ оралиғида манфий, $]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$ оралиғида эса мусбатдир.

Квадрат учҳаднинг хоссаларини (графигидан фойдаланмасдан) текширайлик.

1-теорема. (7) квадрат учҳад $a > 0$ $(a < 0)$ *бўлганда* $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right[$ *оралиғида камаяди (ўсади),* $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$ *оралиғида эса ўсади (камаяди).*

Исбот. Квадрат учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}. \qquad (9)$$

$a > 0$ бўлсин.

а) агар $x \left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right[$ оралиғида ортса, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ манфий миқдор ортади, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ мусбат миқдор эса камайгани учун $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$ йиғинди, яъни квадрат учҳад камаяди;

б) агар $x \left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$ оралиғида ортса, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ мусбат миқдор ортгани учун $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$ йиғинди, яъни квадрат учҳад ҳам ортади.

Худди шунингдек, $a<0$ бўлганда квадрат учҳад $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right[$ оралиғида ўсувчи, $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right|$ оралиғида эса камаювчи экани исбот қилинади.

2-теорема. $a>0$ $(a<0)$ бўлганда $x_0=-\frac{b}{2a}$ (7) квадрат учҳаднинг минимум (максимум) нуқтаси бўлади.

Бу теорема 1-теореманинг исботидан фойдаланиб исботланади.

Мисол. $f(x)=3x^2-6x-2$ функциянинг минимумини топинг.

Ечиш. 1-усул. Квадрат учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз: $y=3x^2-6x-2=3(x-1)^2-5$ Демак, $x=1$ бўлганда $y_{\min}=-5$

2-усул. $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ формулага асосан:

$$y_{\min}=\frac{4\cdot 3(-2)-36}{4\cdot 3}=\frac{-60}{12}=-5.$$

$a>0$ бўлганда (7) квадрат учҳаднинг қийматлар тўплами ўзининг минимумига $\left(-\frac{D}{4a}\text{ га}\right)$ тенг ёки ундан катта, яъни $\left[\frac{-D}{4a}; +\infty\right[$ тўпламдан, $a<0$ бўлганда эса ўзининг максимумига $\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ га тенг ёки ундан кичик, яъни $\left]-\infty; \frac{-D}{4a}\right]$ тўпламдан иборат бўлади.

3-теорема. (7) квадрат учҳаднинг ишораси: 1) $D<0$ бўлганда x нинг ҳар қандай қийматида ҳам a нинг ишораси билан бир хил; 2) $D=0$ бўлганда x нинг $-\frac{b}{2a}$ дан бошқа барча қийматларида a нинг ишораси билан бир хил; 3) $D>0$ бўлганда $]-\infty; x_1[$ ва $]x_2; +\infty[$ оралиқларида a нинг ишораси билан бир хил бўлиб, $]x_1, x_2[$ оралиғида эса a нинг ишорасига қарама-қарши ишорали сон бўлади (бунда x_1 ва x_2 квадрат учҳаднинг илдизлари бўлиб, $x_1<x_2$).

Исбот. $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$. (9)

1) $D = b^2 - 4ac < 0$ бўлсин, $a > 0$ бўлса, $\frac{-D}{4a} > 0$ ва $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ бўлганидан $y > 0$, $a < 0$ бўлганда эса $-\frac{D}{4a} < 0$ ва $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$ бўлганидан $y < 0$ бўлади;

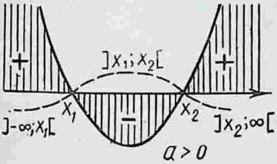
2) $D = b^2 - 4ac = 0$ бўлса, (9) дан $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ бўлиб, $x \neq -\frac{b}{2a}$ бўлганда $a > 0$ бўлса, $y > 0$; $a < 0$ бўлганда эса $y < 0$ бўлади.

3) $D > 0$ бўлганда $a > 0$ бўлса, квадрат учҳаднинг минимуми $\left(-\frac{D}{4a}\right)$ манфий бўлиб, иккита x_1 ва x_2 илдизларга эга бўлади.

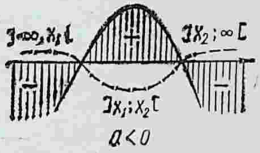
(7) квадрат учҳад $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ оралиғида $x = x_1$ бўлганда нолга тенг бўлиб, манфий минимуми ∞ дан $-\frac{D}{4a}$ гача камайгани учун $]-\infty; x_1[$ оралиғида мусбат, $\left]x_1; -\frac{b}{2a}\right[$ оралиғида эса манфий, $\left[-\frac{b}{2a}; \infty\right|$ оралиғида эса (7) квадрат учҳад $x = x_2$ бўлганда нолга тенг бўлиб, манфий минимуми $-\frac{D}{4a}$ дан ∞ гача ўсгани учун $\left[-\frac{b}{2a}; x_2\right[$ оралиқда манфий, $]x_2; \infty[$ оралиқда эса мусбат бўлади.

Шундай қилиб, квадрат учҳад $]x_1; x_2[$ оралиқда манфий, $]-\infty; x_1[$ ва $]x_2; \infty[$ оралиқларда эса мусбат бўлади.

$D > 0$ бўлганда $a < 0$ бўлса, юқоридагича муҳокама юритиб, (7) квадрат учҳадни $]x_1; x_2[$ оралиқда мусбат, $]-\infty; x_1[$ ва $]x_2; \infty[$ оралиқларда эса манфий бўлишини кўрсатиш мумкин (68- ва 69- расмлар).



68- расм.



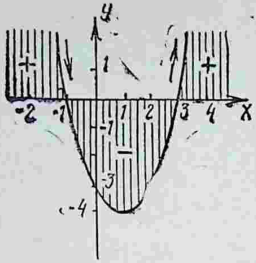
69- расм.

Мисол $y = x^2 - 2x - 3$ функциянинг: 1) аниқланиш соҳасини; 2) илдизларини; 3) ўсиш ва камайишини; 4) максимум ёки минимумини; 5) қийматлар соҳасини; 6) ишорасини текширинг.

Ечиш. 1) аниқланиш соҳаси R.

2) $D = 4 + 12 > 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$ дан $x_1 = -1$ ва $x_2 = 3$. -1 ва 3 функциянинг илдизлари;

3) $y = (x-1)^2 - 4$. Агар x $]-\infty; 1[$ оралиқда ортса, $(x-1)$ манфий миқдор ортади, $(x-1)^2$ мусбат миқдор эса камаяди. У ҳолда $(x-1)^2 - 4$, яъни учҳад камаяди. Агар x $]1; +\infty[$ оралиғида ортса, $(x-1)$ мусбат миқдор ортади, $(x-1)^2$ мусбат миқдор ҳам ортади. У ҳолда $(x-1)^2 - 4$, яъни квадрат учҳад ортади. Демак, берилган учҳад $]-\infty; 1[$ оралиқда камаяди, $]1; +\infty[$ оралиқда ортади;



70- расм.

4) $x = 1$ бўлганда учҳаднинг минимуми $y_{\min} = -4$ га тенг;

5) функциянинг қийматлари ўзининг минимуми -4 ва ундан катта сонларга тенг бўла олади. Демак, учҳаднинг қийматлар соҳаси $[-4; \infty[$ дан иборат;

6) берилган функция $x = -1$ бўлганда нолга тенг бўлиб, $]-\infty; 1[$ оралиғида ∞ дан -4 гача камайгани учун $]-\infty; -1[$ оралиғида мусбат; $]-1; 1[$ оралиғида эса манфий. Шунингдек, функция $x = 3$ бўлганда нолга тенг бўлиб, $[1; \infty[$ оралиғида -4 дан ∞ гача ортгани учун $]1; 3[$ оралиғида манфий, $[3; \infty[$ оралиғида эса мусбат. Демак, функция $]-1; 3[$ оралиғида манфий, $]-\infty; -1[$ ва $]3; \infty[$ оралиқларида эса мусбат. Бу хоссаларни функциянинг графигидан кўриш мумкин (70- расм).

Машқлар

66. Графиги 71- расмда берилган квадрат учҳадларнинг: 1) илдизларини; 2) максимум ёки минимумини; 3) ўсиш ва камайиш оралиқларини; 4) қийматлар тўпламини аниқланг. 5) ишорасини текширинг.

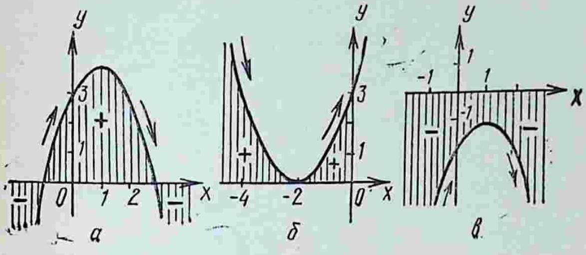
67. Қуйидаги квадрат учҳаднинг графигини чизинг ва: 1) илдизларини; 2) максимум ёки минимумини; 3) ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқланг; 4) қийматлар тўпламини ва 5) ишорасини текширинг:

$$1)\ y = -x^2 + 3x;\ 2)\ y = x^2 + 1;\ 3)\ y = -(x+1)^2.$$

68. Шундай квадрат учҳаднинг графигини чизингки, унинг: 1) илдизлари -4 ва 0, минимуми -3 га тенг; 2) илдизлари 2 ва 4, максимуми 6 га тенг; 3) максимуми 2 га тенг бўлиб, $]0, 2[$ оралиғида мусбат бўлсин

69. Функцияни текширинг:

1) $y = x^3 - x$; 2) $y = x^2 - 2x - 8$; 3) $y = -x^2 + 2x$.



71- расм.

70*. 1) $]-\infty;\ 1[\ \mathrm{U}\ ]2;\ \infty[$; 2) $]-4;\ 0[$ тўпламда мусбат; 3) $]-\infty;\ -1\ [\mathrm{U}]\ -1;\ \infty\ [$. 4) $\varnothing$ тўпламда манфий бўлган квадрат учҳадга мисол келтиринг.

10- §. Кўпҳад (функция) нинг илдизи. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш

I. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ (10)

функция (кўпҳад) нинг илдизи деб ўзгарувчи (аргумент) x нинг шу функция (кўпҳад) ни нолга айлантирадиган қиймати (ҳақиқий сон) га айтилади (IV боб, 1- § га қаранг).

Демак, (10) кўпҳаднинг илдизлари

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

тенгламанинг илдизлари тўпламидан иборат. Масалан, $f(x)=x^2-4x+3$ квадрат учҳаднинг илдизлари $x^2-4x+3=0$ тенгламанинг илдизларидан иборат.

II. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратайлик: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Қавс ичидаги $\frac{b}{a}$ ўрнига $-(x_1+x_2)$ ни, $\frac{c}{a}$ ўрнига $x_1\cdot x_2$ ни (Виет теоремасининг натижасига кўра) қўямиз (x_1 ва x_2 квадрат учҳаднинг илдизлари). У ҳолда
$ax^2+bx+c=a\,(x^2-(x_1+x_2)\,x+x_1\cdot x_2)=$
$=a\,((x^2-x_1x)+(-x_2x+x_1x_2))=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$.
Демак, $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$.

1-мисол. $4x^2-4x-3$ учҳадни кўпайтувчиларга ажратайлик. Бу учҳаднинг илдизлари $-\frac{1}{2}$ ва $\frac{3}{2}$ га тенг, демак, $4x^2-4x+3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right.$. Умуман, $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ кўпҳад x_1, $x_2, \ldots, x_n$ дан иборат n та илдизга эга бўлса, уни $a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ кўпайтма кўринишида ёзиш мумкин.

2-мисол. $9x^4-40x^2+1$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратайлик.

Кўпҳаднинг илдизлари $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, 1 бўлгани учун: $9(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$ кўпайтмага тенг, яъни

$$9x^4-10x^2+1=9(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1).$$

3-мисол. $2x^4-7x^2-4$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратайлик. Бу кўпҳад 4 та эмас, балки -2 ва 2 дан иборат иккита илдизга эга. Шу сабабли уни юқорида баён қилинган усул билан кўпайтувчиларга ажрата олмаймиз. Бироқ кўпайтмада $(x+2)(x-2)$ ёки x^2-4 қатнашади. Шу сабабдан бу кўпҳадни группалаб кўпайтувчиларга ажратишда қавс ичида x^2-4 қолишини ҳисобга олсак, дастлаб уни $(2x^4-8x^2)+(x^2-4)$ кўринишда ёзиб оламиз, сўнгра кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$2x^4-7x^2+4=(2x^4-8x^2)+(x^2-4)=2x^2(x^2-4)+x^2-4=$$
$$=(x^2-4)(2x^2+1)=(x-2)(x+2)(2x^2+1).$$

4-мисол. $\frac{2x^2+4x}{x^3+5x^2+6x}$ касрни қисқартиринг.

Ечиш. Касрнинг сурати ҳамда махражидаги кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратамиз: $2x^2+4x=$ $=2x(x+2)$;

$$x^3+5x^2+6x=x(x+2)(x+3).$$

Энди касрни қисқартирамиз:

$$\frac{2x^2+4x}{x^3+5x^2+6x}=\frac{2x(x+2)}{x(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+3}.$$

Машқлар

Кўпҳаднинг илдизлари тўпламини топинг:

71. 1) x^2+3x; 2) x^3-x; 3) y^4-9; 4) $6x^2-13x+6$.

72. 1) $36x^4+5x^2-1$; 2) $16x^4-17x^2-1$; 3) x^3+2x^2-10x.

73. 2; 3; -3; 0 сонлари $x^4-3x^3+2x^2+30x-90$ кўпҳаднинг илдизи бўладими?

74. Кўпҳад илдизга эга эмаслигини исботланг: 1) x^2+3; 2) $-x^4-1$; 3) $-x^2+2x-2$. 4) x^4+4x^2+5.

75. Илдизлар тўплами берилган кўпҳадни топинг*: 1) $\{3\}$ 2) $\{2;\ 3\}$; 3) $\{3;\ -3\}$; 4) $\{1;\ 2;\ 3\}$; 5) $\varnothing$.

Кўпҳаднинг илдизлари тўпламини топинг:

76. 1) x^3-4x; 2) x^3-3x^2+2x. 3) a^3+5a^2+4a.

77. 1) x^4-13x^2+36; 2) y^4-29y^2+100; 3) b^5-10b^3+9b.

78. Учҳадни мумкин бўлган ҳолда кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $5x^2-7x+8$; 2) $4y^2+4y+3$; 3) $4a^2+7a+3$.

79. Касрни қисқартиринг: 1) $\frac{3x+3}{3x^2+2x-1}$; 2) $\frac{2y^2-y-1}{4y^2+4y+1}$; 3) $\frac{x^3-9x}{x^2+3x}$; 4) $\frac{3x^4-13x^2+4}{2x^4-9x^2+4}$.

80. Тенгламани ечинг: 1) $\frac{3}{4x^2-7x+10}+\frac{x+1}{x^2-3x-10}-\frac{x-1}{x^2-4}=0$; 2) $\frac{x+4}{x^2-6x+5}+\frac{x}{x^2+3x-4}=\frac{2x+0{,}8}{x^2-x-20}$.

11-§. Рационал тенгсизликларни оралиқлар методи билан ечиш

$f(x)=x^2-2x-3$ функция $x=-1$ ёки $x=3$ бўлганда нолга тенг (70-расм). Функция x нинг $]-\infty;-1]$ ва $]3;\ \infty[$ оралиқларидаги қийматларида мусбат бўлгани учун график x ўқининг юқорисига, x нинг $]-1;\ -3[$ оралиқдаги қийматларида эса манфий бўлгани учун график x ўқининг остига жойлашган.

Шундай қилиб, $f(x)=x^2-2x-3$ функциянинг илдизлари (-1 ва 3) унинг аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ \infty[$ ни учга $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 3[$ ва $]3;\ \infty[$ оралиқларга ажратади. Бу оралиқлардан биринчисида функциянинг ишораси мусбат, иккинчисида манфий, учинчисида эса мусбатдир.

Берилган функциянинг ишораси ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун координаталар системасида унинг гра-

* Бу машқнинг жавоби бир қийматли эмас. Масалан, илдизлари 2 ва 3 бўлган кўпҳад $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$ дан, $2x^2-10x+12$ дан, $3x^2-15x+18$ дан, x^2-5x+6 кўпҳадни ихтиёрий нолдан фарқли сонга кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган кўпҳаддан иборат деб қараш мумкин.

фигини чизиш шарт эмас. Бунинг учун координата тўғри чизиғида функциянинг илдизлари $x=-1$ ва $x=3$ ни белгилаб, *функциянинг ишора чизиғи* чизилади. Функциянинг ишора чизиғи функция мусбат бўлган оралиқда координата тўғри чизиғининг юқорисига, функция манфий бўлган оралиқда эса координата тўғри чизиғининг остига чизилади (72- *а* расм).

$x^2-2x-3>0$ тенгсизликнинг чап қисми $f(x)=x^2-2x-3$ функциядан иборат бўлганидан уни ечими функция мусбат бўладиган x нинг қийматлар тўпламини топишдан, $x^2-2x+3<0$ тенгсизликни ечиш эса $f(x)=x^2-$ $-2x-3$ функция манфий бўладиган x нинг қийматлар тўпламини топишдан иборат.

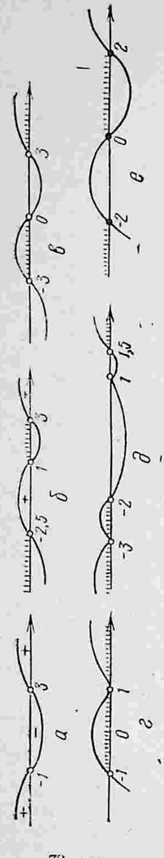
Демак, $f(x)>0$ $(f(x)\geqslant 0)$ ёки $f(x)<0$ $(f(x)\leqslant 0)$ тенгсизликни ечиш $y=f(x)$ функция ишорасини текширишдан иборат бўлгани сабабли $f(x)$ функциянинг ишора чизиғини чизиш билан бундай тенгсизликларни осонгина ечиш мумкин.

1-мисол. Тенгсизликни ечинг: $(x-3)(x+1)>0$.

Ечиш. $f(x)=(x-3)(x+1)$ функциянинг ишора чизиғи (72- *а* расм) чизилади. Ечим функция мусбат бўлган $]-\infty;\ -1[$ ва $]3;\ \infty[$ оралиқлар бирлашмасидан иборат бўлади. Ҳосил бўлган чизмага тенгсизликнинг *ечим чизмаси* дейилади.

2-мисол. Тенгсизликни ечинг: $(x-1)(x-3)(x+2{,}5)<0$.

Ечиш. Берилган тенгсизликнинг ечим чизмасини чизамиз. Бунинг учун: 1) $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2{,}5)$ функция ёки $(x-1)(x-3)(x+$ $+2{,}5)=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=-2{,}5$ топилади;



72- расм.

2) илдизлар координата тўғри чизиғида белгиланади (72- *б* расм);

3) функциянинг ишора чизиғи чизилади. Бу чизиқ координата тўғри чизиғида ҳосил бўлган $]-\infty; -2{,}5[$, $]-2{,}5; 1[$, $]1; 3[$, $]3; \infty[$ оралиқлардан ўнгдан биринчисида координата тўғри чизиғининг юқорисига, иккинчисида остига, учинчисида юқорисига, тўртинчисида остига чизилади;

4) тенгсизликнинг ҳосил бўлган ечим чизмасидан берилган тенгсизликнинг ечими $]-\infty; -2{,}5[\ \cup\ ]1; 3[$ аниқланади (72- *б* расмда ечим оралиқлари штрихланган).

Жавоб. $]-\infty; -2{,}5[\ \cup\ ]1; 3[$.

Берилган тенгсизликни $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2{,}5)$ функциянинг $]-\infty; -2{,}5[$, $]-2{,}5; 1[$, $]1; 3[$ ва $]3; \infty[$ оралиқлардаги ишорасини қуйидаги жадвални тўлдириб текшириш билан ҳам ечиш мумкин:

x	$]-\infty; -2{,}5[$	$]-2{,}5; 1[$	$]1, 3[$	$]3, \infty[$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2{,}5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x-3)(x+2{,}5)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Жадвалдан $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2{,}5)$ функция $]-\infty; -2{,}5[$ ва $]1; 3[$ оралиқларда манфий. Шунинг учун берилган тенгсизликнинг ечими $]-\infty; -2{,}5[\cup]1; 3[$ тўпламдан иборат.

Агар берилган тенгсизлик $f(x)>0$ ёки $f(x)<0$ кўринишида бўлса, ечим чизмасини чизишдан олдин:

1) $f(x)$ нинг юқори кўрсаткичли ҳадининг коэффициенти манфий сон бўлса, унинг ҳар икки қисмини -1 га кўпайтириб, мусбат ҳолга келтирилади. Масалан, $-x^2+6x-8>0$ ни $x^2-6x+8<0$ кўринишга, $4x-x^3<0$ ни эса $x^3-4x>0$ кўринишга келтирилади;

2) $f(x)$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиб, берилган тенгсизликни $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\lesseqgtr 0$ кўринишга келтирилади;

3) агар чизиқли кўпайтувчилар ичида $a_i - x$ кўринишдагилари бўлса, уларни $x - a_i$ кўринишда ёзиб олиш керак. Масалан, $(x-5)(3-x)x>0$ тенгсизлик $(x-5)(x-3)x<0$ кўринишда, $(1-x)(2-x)(x+10)<0$ тенгсизлик эса $(x-1)(x-2)(x+10)<0$ кўринишда ёзиб олинади.

3-мисол. Тенгсизликни ечинг: $-x^3+9x<0$.

Ечиш. 1) $-x^3+9x<0$ тенгсизликнинг ҳар икки қисмини -1 га кўпайтирсак: $x^3-9x>0$;

2) x^3-9x кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз: $x^3-9x=x(x-3)(x+3)$. Демак,

$$-x^3+9x<0 \Longleftrightarrow x^3-9x>0 \Longleftrightarrow x(x-3)(x+3)>0.$$

Тенгсизликнинг ечим чизмасини чизамиз (72-*в* расм). Расмдан охирги тенгсизликнинг, яъни унга тенг кучли бўлган берилган тенгсизликнинг ечими $]-3;0[\cup]3;\infty[$ аниқланади.

4-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\frac{x^2-9}{x^2-4}<0$.

Ечиш. $\frac{x^2-9}{x^2-4}<0 \Longleftrightarrow (x^2-9)(x^2-4)<0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)<0$.

Тенгсизликнинг ечим чизмасини чизамиз. *Жавоб.* $]-3;-2[\cup]2;3[$.

5 мисол. Тенгсизликни ечинг: $(x+1)(x-1)^2>0$.

Ечиш. $x\neq 1$ бўлса, $(x-1)^2>0$ бўлгани сабабли

$$(x+1)(x-1)^2>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+1>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

$x>-1$ тенгсизликнинг ечимлар тўплами $]-1;\infty[$ ни аниқлаб, $x=1$ бу тўпламга тегишли бўлмагани учун у чиқариб ташланади. Функциянинг ишора чизиғи координата тўғри чизиғини $]-1;\infty[$ оралиғида эмас, балки $]-1;1[$ ва $]1;\infty[$ оралиқларида унинг юқорисига чизилади (72-*г* расм). *Жавоб.* $]-1;1[\cup]1;\infty[$.

6-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\frac{(x-1{,}5)(x+3)^2}{(x+2)(x-1)^2}>0$.

Ечиш. $\frac{(x-1{,}5)(x+3)^2}{(x+2)(x-1)^2}>0 \Longleftrightarrow (x-1{,}5)(x+3)^2$

$$(x+2)(x-1)^2>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1{,}5)(x+2)>0 \\ x\neq -3,\ x\neq 1. \end{cases}$$

Тенгсизликнинг ечим чизмасини чизамиз (72-*д* расм). *Жавоб.* $]-\infty;-3[\cup]-3;-2[\cup]1{,}5;\infty[$.

Эслатма. Ушбу

$$(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)\geqslant 0$$

ёки
$$(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)\leqslant 0$$

ноқатъий тенгсизликларнинг ечими мос ҳолда

$$(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)>0$$

ёки
$$(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)<0$$

тенгсизликларнинг ечимлари тўплами билан $\{x_1; x_2; \dots ; x_n\}$ тўплам бирлашмасидан иборат бўлади. Масалан,

$$x(x+2)(x-2)\leqslant 0$$

тенгсизликнинг ечими $]-\infty; -2] \cup [0; 2]$ тўпламдан иборат. Бу ҳолда тенгсизликнинг ечим чизмасида оралиқларнинг чегара нуқталари „қора" қилиб чизилади (72-*е* расм).

Машқлар

Тенгсизликни ечинг:

81. 1) $(1-x)(4x+3)<0$; 2) $x(2x-1)(3x+1)>0$; 3) $(x+2{,}5)(x^2-9)<0$.

82. 1) $\dfrac{x+1}{x-1}<0$; 2) $\dfrac{3}{x^2-x-6}>0$; 3) $\dfrac{5}{x^2-2x-8}<0$, 4) $\dfrac{x^2-3}{x+1{,}5}>0$.

83. 1) $x^3-2x\geqslant 0$; 2) $x^3+x^2-6x\leqslant 0$; 3) $-4x^2-4x+3>0$.

84. 1) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x}<0$; 2) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}>0$; 3) $\dfrac{x^2-3x+6}{x}<0$.

85. 1) $x^4-x^2<0$; 2) $(4x^2+4x+1)(x-1)(x+3)>0$, 3) $(x^2-1)(x+1)x>0$; 4) $\dfrac{(x^2-2{,}25)(x^2+2x+1)}{5(x+2)^2}>0$.

X БОБ

ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

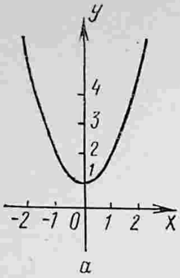
1-§. Икки ўзгарувчили тенгламани график усулда ечиш

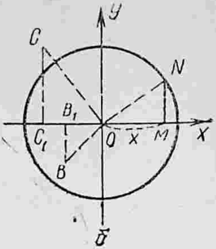
$$x^2-y+1=0, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2-9=0, \qquad (2)$$

$$x^3y-2y^2+3x=0 \qquad (3)$$

икки ўзгарувчили тенгламалардан (1) ва (2) иккинчи даражали, (3) тўртинчи даражалидир.





73- расм.

Икки ўзгарувчили тенгламанинг ечими деб ўзгарувчиларнинг шу тенгламани тўғри тенгликка айлантирадиган қийматлар жуфтига айтилар эди (V боб, 1-§). Масалан, (0,1), (—5; 26); (3,10) каби сонлар жуфти $x^2 - y + 1 = 0$ тенгламанинг ечимларидир. $x^2 - y + 1 = 0$ ёки $y = x^2 + 1$ тенгламанинг графиги парабола (73-*а* расм).

$x^2 + y^2 - 9 = 0$ ёки $x^2 + y^2 = 3^2$ тенгламанинг графиги маркази координата бошида бўлиб, радиуси $r = 3$ га тенг бўлган айланадан иборат. Ҳақиқатан ҳам, айлана устида ихтиёрий $N(x;\ y)$ нуқта олсак (73-*б* расм), $\triangle OMN$ дан $x^2 + y^2 = 3^2$ бўлади, яъни айлана устида ётган ихтиёрий нуқтанинг координаталари $x^2 + y^2 = 9$ тенгламани қаноатлантиради. Айлана ичида ётган ихтиёрий $B(x_1,\ y_1)$ нуқтанинг ёки айлана ташқарисида ётган ихтиёрий $C(x_2, y_2)$нуқтанинг координаталари эса берилган тенгламани қаноатлантирмайди. Ҳақиқатан ҳам, $\triangle OBB_1$ дан: $x_1^2 + y_1^2 = |OB|^2 < 9$, $\triangle OCC_1$ дан: $x_2^2 + y_2^2 = |OC|^2 > 9$.

Маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси r га тенг бўлган айлана $x^2 + y^2 = r^2$ тенгламанинг графиги бўлади.

Машқлар

1. Ўзгарувчининг қийматлар жуфти $x^2 - y - 3 = 0$ тенгламанинг ечими бўладими: 1) (0; — 3); 2) (2; 1); 3) (0; 0); 4) (1 — 2)?

2. Ушбу нуқталар $x^2 + y^2 = 25$ айланага тегишлими: 1) $A(3;\ 5)$; 2) $B(4;\ 3)$; 3) $C\ (5;\ 0)$; 4) $D\ (-3;\ -4)$?

3. Тенгламанинг ихтиёрий учта ечимини топинг: 1) $x+2y=5$; 2) $(x-1)(y+3)=0$; 3) $x^2+y^2=100$.

4. Маркази координата бошида ва радиуси: 1) 2, 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 0,03 бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

5. Маркази координата бошида бўлган айлана: 1) $A(-5; 12)$; 2) $B(12; 35)$ нуқтадан ўтса, айлананинг радиусини топинг.

6. Тенгламанинг графигини чизинг: 1) $y=-2$; 2) $y=|x|$; 3) $xy=-4$; 4) $y=-2x^2$; 5) $x^2+y^2=1$; 6) $x^2+y^2=6{,}25$. Тенгламанинг ечимлари тўпламини топинг.

7. 1) $x^2+y^2=0$ 2) $(x-1)^2+y^2=0$; 3) $(x+2)^2+(y-1)^2=0$; 4) $x^2+y^2+2x-2y+2=0$.

8*. 1) $(2x-y)(1+y)=0$; 2) $x^2-y^2=0$; 3) $(y-x^2)(8-y)=0$.

2-§. Бири биринчи даражали, иккинчиси иккинчи даражали бўлган икки ўзгарувчили икки тенглама системаси

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y-x=1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини график усулда ечиш учун системани ташкил этувчи ҳар икки тенгламанинг графиги — айлана ва тўғри чизиқ чизилади ҳамда кесишув нуқталарининг координаталари ($(-4; -3)$ ва $(3; 4)$ сонлар жуфти) топилади.

Юқоридаги системани ўрнига қўйиш усули билан ечайлик*. Иккинчи тенгламадан $y=x+1$ ни аниқлаб, биринчи тенгламага қўйсак: $x^2+(x+1)^2=25$. Бу тенгламани ечсак: $x=-4$ ёки $x=3$.

Булардан $y=-3$ ёки $y=4$. *Жавоб.* $\{(-4; -3); (3; 4)\}$.

Баъзан системада берилган тенгламаларни айнан алмаштиришлар ёрдамида соддароқ система ҳосил бўлади ва ечилади. Масалан,

$$1)\ \begin{cases} (2x-y\,(x+y)=0, \\ x+2y=1. \end{cases}$$

Бунда $(2x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.$ бўлгани

* Система иккинчи ва биринчи даражали тенгламалардан тузилган бўлса, ўрнига қўйиш усули билан ечиш осондир.

учун берилган системани ечиш ўрнига $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ системалар ечилиб, уларнинг ечимлар тўпламини топилади. *Жавоб.* $\{(0,2;\ 0,4),\ (-1;\ 1)\}$.

2) $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 9x^2 - 16y^2 - 7y = 13 \end{cases}$

системадаги иккинчи тенгламани $(3x - 4y)(3x + 4y) - 7y = 13$ кўринишда ёзиб, биринчи қавс ўрнига унинг қиймати 2 ни қўйсак: $2(3x + 4y) - 7y = 13$ ёки соддалаштирсак: $6x + y = 13$. Натижада

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва ечамиз. *Жавоб.* $\{(2;\ 1)\}$.

Машқлар

9. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 3xy - y^2 = 8, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 5, \\ 3x + y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y = 5. \\ x - 3y = 1. \end{cases}$

10. 1) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ 3x - y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y(x - 3) = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 200. \end{cases}$

11. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

1) $\begin{cases} xy = -6. \\ y - x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25. \\ xy = 12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 13. \end{cases}$

12. Тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усули билан ечинг:

1) $\begin{cases} x - 3y = 8, \\ xy = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 2x^2 - y^2 - 3x = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 3, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

13. Айирмаси 4, квадратларининг айирмаси эса 72 бўлган иккита сон топинг.

14. 1) Периметри 40 см, юзи 96 см^2 бўлган тўғри тўртбурчак томонларининг узунлигини топинг; 2) периметри 94 дм, диагонали эса 37 дм бўлган тўғри тўртбурчак томонларининг узунлигини топинг.

15. 1) Айирмаси 8 га тенг бўлган икки мусбат соннинг бирига иккинчисининг квадрати қўшилса, 14 ҳосил бўлади. Шу сонларни топинг; 2) айирмаси 3 га тенг бўлган иккита мусбат соннинг йиғиндиси кўпайтмасидан 27 та кам. Шу сонларни топинг.

3-§. Икки ўзгарувчили иккинчи даражали иккита тенглама системаси

Баъзан икки ўзгарувчили иккинчи даражали иккита тенглама системасини ўрнига қўйиш ёки алгебраик қўшиш усули билан ечиш мумкин.

1-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6, \\ 3x^2 - y^2 = 23. \end{cases}$$

Ечиш. Иккинчи тенгламанинг ҳар икки қисмини 3 га кўпайтириб, ундан биринчи тенгламани айирсак: $7x^2 = 63$ ёки $x^2 = 9$.

Бундан $x = 3$ ёки $x = -3$.

$x = 3$ ни иккинчи тенгламага қўйсак: $3 \cdot 9 - y^2 = 23$, $y^2 = 4$, $y = \pm 2$.

$x = -3$ ни қўйсак: $3 \cdot 9 - y^2 = 23$, $y^2 = 4$, $y = \pm 2$.

Жавоб. $\{(3;\ 2),\ (3;\ -2),\ (-3;\ 2),\ (-3;\ -2)\}$.

2-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} xy + x + y = 17, \\ xy - 2x - 2y = -4. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламада x ни y орқали ифодалайлик: $x = \frac{17 - y}{y + 1}$ (*), x нинг қийматини иккинчи тенгламага қўямиз:

$\frac{17 - y}{y + 1} \cdot y - 2\frac{17 - y}{y + 1} - 2y = -4$ ёки соддалаштирсак:

$$\frac{y^2 - 7y + 10}{y + 1} = 0.$$

Бундан $\begin{cases} y^2 - 7y + 10 = 0. \\ y + 1 \neq 0. \end{cases}$

$y^2 - 7y + 10 = 0$ тенгламанинг илдизлари $y = 2$ ёки $y = 5$. $y = 2$ бўлса, $2 + 1 \neq 0$ мулоҳаза тўғри. $y = 5$ бўлса ҳам $5 + 1 = 0$ мулоҳаза тўғри. y нинг қийматини (*) тенгликка қўйсак: $x = 5$ ёки $x = 2$. *Жавоб.* $\{(2;\ 5),\ (5,\ 2)\}$.

I. Баъзан системалар ёрдамчи номаълум киритиш билан ечилади.

3-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{x}+\dfrac{x}{2x-y}=3\dfrac{5}{44}, \\ x^2-y^2-x=3. \end{cases}$$

Ечиш: $\dfrac{2x-y}{x}=z$ деб белгиласак, биринчи тенгламадан: $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{137}{44}$ ёки $44z^2-137z+44=0$. Бу тенгламани ечамиз: $z_1=\dfrac{11}{4}$, $z_2=\dfrac{4}{11}$.

z нинг ўрнига қийматини қўйсак: а) $\dfrac{2x-y}{x}=\dfrac{11}{4}$ ёки $3x+4y=0$; б) $\dfrac{2x-y}{x}=\dfrac{4}{11}$ ёки $18x-11y=0$.

Бу тенгламаларнинг ҳар бирини берилган системанинг иккинчи тенгламаси билан биргаликда олиб,

$$\begin{cases} 3x+4y=0, \\ x^2-y^2-x=3 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 18x-11y=0. \\ x^2-y^2-x=3 \end{cases}$$

системаларни ҳосил қиламиз ва ечамиз. *Жавоб.* $\left\{(4; -3), \left(-\dfrac{12}{7}; +\dfrac{9}{7}\right)\right\}$.

II. Чап қисми номаълум (x ва y) ларга нисбатан бир жинсли бўлган (ёки бир жинсли системага келтириладиган) тенгламалар системасини қараймиз.

1-таъриф. *Чап қисми x ва y га нисбатан бир жинсли бўлган икки ўзгарувчили иккинчи даражали тенгламалар* системаси деб*

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=m. \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=n \end{cases}$$

кўринишдаги системага айтилади, бунда a, b, c, a', b', c' — ҳақиқий сонлар.

4-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ 3x^2-2xy+y^2-9. \end{cases}$$

Ечиш. $y=ux$ деб белгиласак:

$$\begin{cases} x^2+ux^2+u^2x^2=19, \\ 3x^2-2ux^2+u^2x^2=9. \end{cases}$$

* Чап қисми ax^2, bxy, cy^2 кўринишдаги ҳадлардангина тузилади.

Тенгламаларнинг чап қисмини чап қисмига, ўнг қисмини ўнг қисмига бўламиз. У ҳолда $\frac{1+u+u^2}{3-2u+u^2}=\frac{19}{9}$. Бу ерда u^2-2u+3 ифода u нинг ҳеч қандай (ҳақиқий) қийматида нолга айланмайди. Ҳосил бўлган тенгламани ечсак:

$u_1=1{,}5$ ва $u_2=3{,}2$. u_1 ва u_2 нинг қиймати ўрнига қўйилса: $y_1=1{,}5x$ ва $y_1=3{,}2x$. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини берилган системадаги биринчи тенглама билан биргаликда олиб, қуйидаги

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ y=1{,}5x \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ y=3{,}2x \end{cases}$$

системаларни тузиб, уларни ечсак:

$$\left\{(2;\ 3),\ (-2;\ -3),\ \left(\frac{5}{19}\sqrt{19};\ \frac{16}{19}\sqrt{19}\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{5}{19}\sqrt{19};\ -\frac{16}{19}\sqrt{19}\right)\right\}.$$

III. Иккинчи даражали циклик-симметрик тенгламалар системаси.

2-таъриф. *Икки тенгламанинг бирида x ни y га, y ни эса x га алмаштириш натижасида иккинчиси ҳосил бўлса, бундай система циклик-симметрик тенгламалар системаси деб аталади.*

Икки ўзгарувчили иккинчи даражали циклик-симметрик тенгламалар системаси умумий ҳолда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+by=m, \\ ay^2+bxy+cx^2+dy+lx=m \end{cases} \tag{5}$$

(a, b, c, d, l, m—ҳақиқий сонлар).

5-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2-xy+4y=16, \\ y^2-xy+4x=16. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламадан иккинчисини айириб, кўпайтувчиларга ажратамиз: $(x^2-y^2)+4(y-x)=0$ ёки $(x-y)(x+y-4)=0$. Бундан: $x-y=0$, $x+y-4=0$. Энди

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x^2-xy+4y=16 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x+y=4, \\ x^2-xy+4y=16 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз. *Жавоб.* $\{(4;\ 4),\ (4;\ 0),\ (0;\ 4)\}$.

Машқлар

Тенгламалар системасини ечинг:

16. 1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=68, \\ x^2-y^2+x-y=44, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-2y^2=1, \\ xy=6. \end{cases}$

17.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2-xy=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{5}+\dfrac{25}{x^2+y^2}=5\dfrac{1}{4}, \\ x^2+y^2+xy=28. \end{cases}$

18.

1) $\begin{cases} x^2+2xy+4y^2=19, \\ 3x^2+5y^2=32; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2+3xy=14, \\ 3x^2-4xy+y^2=5. \end{cases}$

19. 1) $\begin{cases} y^2-2xy+6x=9, \\ x^2-2xy+6y=9, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+10y=20, \\ 2y^2-3xy+10x=20. \end{cases}$

20. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=53, \\ xy=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=3\dfrac{1}{3}, \\ x^2+y^2=40. \end{cases}$

21. 1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}}+\sqrt{\dfrac{5x}{x+y}}=\dfrac{34}{15}, \\ x+y+xy=29. \end{cases}$

22. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ x^2+y^2=104; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2+3xy-5x+4y=18, \\ 2y^2+3xy-5y+4x=18. \end{cases}$

23. 1) $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=18, \\ x^2+2xy+3y^2=34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-5xy+4y^2=4, \\ 3x^2+xy-7y^2=5. \end{cases}$

24. 1) икки сон квадратларининг айирмаси 1519, квадратларининг йиғиндиси эса 1681. Шу сонларни топинг;

2) тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 25 дм. Катетлари квадратларининг айирмаси эса 527 дм². Шу учбурчакнинг катетларини аниқланг.

25. 1) Икки мусбат сон йиғиндисининг квадрати 784. Шу сонлар квадратларининг йиғиндиси эса 490. Шу сонларни топинг;

2) икки мусбат сон айирмасининг квадрати 36. Шу сонлар квадратларининг айирмаси 192. Шу сонларни топинг.

26. 1) Икки хонали сон рақамлари квадратларининг йиғиндиси 65. У сон билан шу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган соннинг кўпайтмаси 3478. Икки хонали сонни топинг;

2) икки хонали сон рақамларининг кўпайтмаси 24. Шу сонни унинг рақамлари айирмасига кўпайтмаси 128. Икки хонали сонни топинг.

27. Икки шаҳар орасидаги масофа 450 км. Бу масофани пассажир поезди юк поездидан 5 соат тезроқ ўтади. Агар пассажир поездининг тезлиги соатига 5 км, юк поездининг тезлиги соатига 6 км орттирилса, бутун масофани пассажир поезди юк поездига қараганда 3,5 соат тезроқ ўтади. Ҳар қайси поезднинг тезлигини топинг.

28. A ва B шаҳарлар орасидаги масофа 150 км. Ҳар икки шаҳардан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди ва 2 соатдан кейин учрашди. Учрашгандан сўнг A дан чиққан поезд B га етиб келиш учун B дан чиққан поезд A га етиб боришига сарф қилган вақтига қараганда 1 соат 40 минут кам вақт сарф қилган. Ҳар қайси поезднинг тезлигини топинг.

4-§. Икки ўзгарувчили тенгсизликни график усулда ечиш

Таъриф. *Икки ўзгарувчили тенгсизликнинг ечими деб ўзгарувчиларнинг шу тенгсизликни тўғри тенгсизликка айлантирадиган қийматлар жуфтига айтилади.*

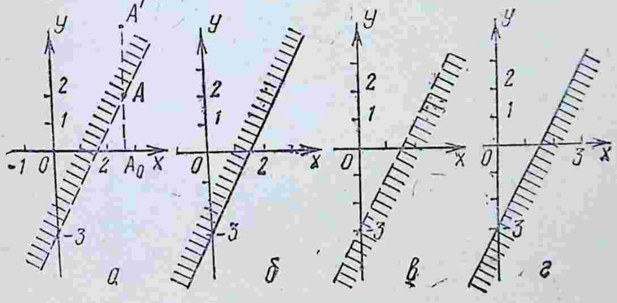
Масалан, (5; 6), (0; -5) (1; -4) сонлар жуфти $2x-y-3>0$ (6) тенгсизликнинг ечимлари бўлади.

Текисликда координаталари (6) тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини олайлик.

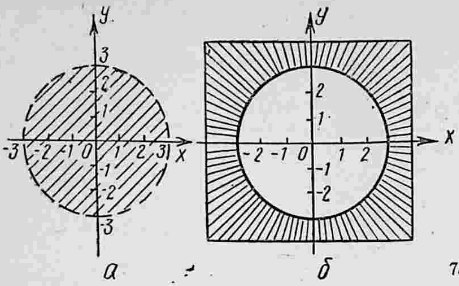
$2x-y-3>0$ тенгсизликдан $y<2x-3$. Координаталари $y=2x-3$ тенгламанинг ечимлари бўлган нуқталар тўплами (AB тўғри чизиқ) $y=2x-3$ нинг графиги бўлади (74-*а* расм).

Текисликда $y=2x-3$ тўғри чизиқнинг юқорисига жойлашган ихтиёрий $A(x, y)$ нуқтанинг координаталари (6) тенгсизликни қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, $|A'A_0|=y>|AA_0|$ ёки $y>2x-3$.

$2x-y-3\leqslant 0$ тенгсизликни AB тўғри чизиқдаги ва унинг юқорисидаги ярим текисликнинг барча нуқталарининг координаталари қаноатлантиради (74-*б* расм). $2x-y-3>0$ тенгсизликни эса AB тўғри чизиқ остидаги (74-*в* расм), $2x-y-3\geqslant 0$ тенгсизликни эса AB тўғри чизиқдаги ва унинг остидаги ярим текисликнинг барча нуқталарининг координаталари қаноатлантиради (74-*г* расм).



74- расм.



75- расм.

$x^2 + y^2 < 9$ тенгсизликнинг ечимлари маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси 3 га тенг бўлган айлана ичидаги нуқталарнинг координаталаридан (75 *а* расм), $x^2 + y^2 \geqslant 9$ тенгсизликнинг ечимлари эса шу айланадаги ва унинг ташқарисидаги нуқталарнинг координаталаридан иборатдир (75-*б* расм).

Машқлар

29. Ўзгарувчиларнинг қийматлар жуфти $2x - y + 4 \geqslant 0$ тенгсизликнинг ечими бўладими: 1) $(-2, 0)$ 2) $(5;12)$, 3) $(0, 5)$, 4) $(-2; 0)$?

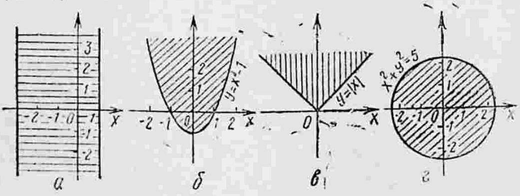
30. Тенгсизликнинг ихтиёрий учта ечимини топинг: 1) $y < 2x + 1$; 2) $y \geqslant x^2 - 2$; 3) $x^2 - 3y \leqslant 5$.

31. $A(1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(0; -1)$ нуқталар $y \geqslant 5x - 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами N га тегишлими?

Координаталар системасида координаталари ушбу тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини штрихланг:

32. 1) $x \leqslant -1$; 2) $y > 0{,}5$; 3) $-2 < x < 1$; 4) $0 < y < 2$

33. 1) $y \geqslant -2x$; 2) $y > -x^2$; 3) $y < \frac{4}{x}$, 4) $y \leqslant |x|$ 5) $y \geqslant |x - 1|$.



76- расм.

34. 1) $x^2 + y^2 \geqslant 1$; 2) $x^2 + y^2 < 2{,}25$.

35. 76-расмда штрихланган нуқталарнинг координаталари ечими бўладиган тенгсизликларни ёзинг.

5-§. Икки ўзгарувчили тенгсизликлар системаси

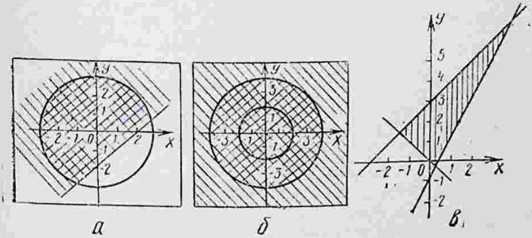
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 0, \\ y \geqslant x - 2; \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases} \quad (8) \quad \begin{cases} 2x - y \leqslant 1, \\ y \geqslant -x, \\ y - 3 \leqslant x \end{cases} \quad (9)$$

икки ўзгарувчили тенгсизликлар системасига мисол бўлади.

Таъриф. *Икки ўзгарувчили тенгсизликлар системасининг ечими деб ўзгарувчиларнинг шу системадаги ҳар бир тенгсизликни тўғри тенгсизликка айлантирадиган қийматлар жуфтларининг тўпламига айтилади.*

Системанинг ечимлар тўплами уни ташкил этувчи тенгсизликлар ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат бўлади.

Координаталари $x^2 + y^2 \leqslant 9$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами маркази координата бошида бўлиб, радиуси 3 га тенг бўлган айлана ва шу айлана ичидаги барча нуқталардан, $y \geqslant x - 2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами эса $y = x - 2$ тўғри чизиқ устида ва шу тўғри чизиқнинг юқорисидаги ярим текисликда жойлашган нуқталар тўпламидан иборат бўлгани учун (7) системани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами 77-*а* расмдаги доиранинг катта сегментини ташкил этади.



а *б* *в*

77-расм.

Координаталари (8) системани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами 77-*б* расмда икки концентрик айланалар орасидаги ҳалқани ташкил этади. (9) системани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами эса 77-*в* расмда тасвирланган (штрихланган).

Машқлар

36. x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлар жуфти: 1) (0; 0) 2) (—2; —1); 3) (1; 4) (7) тенгсизликлар системасининг ечими бўла оладими?

37. а) $A(-3; 2)$; $B(-2; 1)$, $C(3; -3)$, $D(3; 3)$ нуқталар (9) системани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами N га тегишлими?

Координаталар текислигида координаталари ушбу системани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини штрихланг:

38. 1) $\begin{cases} x<0, \\ y<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<1, \\ y>-2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -1<x\leqslant 2, \\ 0<y<4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -3<x<1, \\ -3<y<1 \end{cases}$

39. 1) $\begin{cases} y>x-2, \\ y>-x-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y<4, \\ 2x+y<4; \\ y\leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-x\leqslant 0, \\ x^2+y^2<9, \\ x>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y\geqslant x^2-4, \\ y\leqslant x+2, \\ y\leqslant -x+2. \end{cases}$

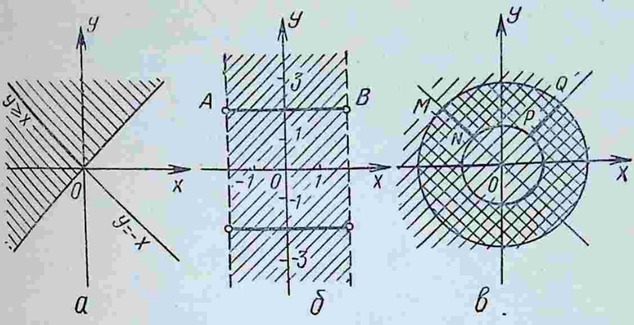
40. 1) $\begin{cases} |x|<3, \\ |y|<2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x|\geqslant 2, \\ |y|\leqslant 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x|>2, \\ y>x, \\ y>-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2<9, \\ x^2+y^2>4, \\ |y|>1. \end{cases}$

6-§. Икки ўзгарувчили аралаш система

Тенглама ва тенгсизликлардан тузилган системаларга *аралаш система* дейилади. Масалан,

$$\begin{cases} y\geqslant x, \\ y+x=0; \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} |x|<2, \\ |y|=1; \end{cases} \quad (11) \qquad \begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ x^2+y^2\geqslant 4, \\ y=|x|. \end{cases} \quad (12)$$

Координаталари берилган аралаш системани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини координаталар текислигида кўрсатиш мумкин. Масалан, координаталари (10) системани қаноатлантирадиган нуқталар $[OA)$ нурдаги нуқталар тўпламини (78-*а* расм), координаталари (11) системани қаноатлантирадиган нуқталар $]AB[$ ва $]CD[$ га тегишли нуқталарнинг $]AB[\cup]CD[$ тўпламини (78-*б* расм), координаталари (12) системани қаноатлантирадиган нуқталар $[MN]$ ва $[PQ]$ кесмаларга тегишли нуқталарнинг $[MN]\cup[PQ]$ тўпламини ташкил этади (78-*в* расм).



78- расм.

Машқлар

Координаталар текислигида системани қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини кўрсатинг:

41. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y\geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2>1, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy>0, \\ x-y=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y<3, \\ y-2x=0. \end{cases}$

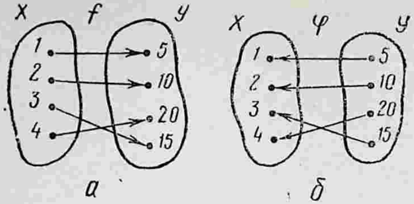
42*. 1) $\begin{cases} 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 16, \\ |y|=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2<9, \\ y^2-x^2=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2<9, \\ |y|<2, \\ |x|=1. \end{cases}$

XI БОБ

РАЦИОНАЛ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖА

1-§. Ўзаро тескари функциялар

79-*а* расмда X тўплам билан Y тўплам орасидаги f мослик функция бўлса, Y тўплам билан X тўплам орасидаги φ мослик (79-*б* расм) f мосликка тескари мослик бўлиб, у ҳам функциядир, чунки Y тўпламнинг ҳар бир элементига X тўпламнинг битта элементи мос келади. Бундай ҳолда φ (функция) f (функция)га тескари функция дейилади. Ўз навбатида f ҳам φ функцияга тескари функция бўлади, яъни f ва φ ўзаро тескари функциялар бўлади.



79- расм.

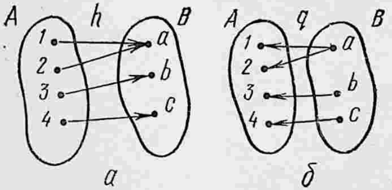
80-a расмдаги A ва B тўпламлар орасидаги h мослик функция, аммо 80-$б$ расмдаги B ва A тўпламлар орасидаги q мослик эса функция эмас, чунки B тўпламнинг a элементига A тўпламнинг иккита 1 ва 2 элементи мос келади. Демак, h функция тескари функцияга эга эмас.

Таъриф. *Агар X тўпламнинг ҳар бир элементига Y тўпламнинг фақат битта элементи мос келса ва, аксинча, Y тўпламнинг ҳам ҳар бир элементига X тўпламнинг фақат битта элементи мос келса, X ва Y тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд дейилади.*

Юқоридаги мисолда, X ва Y тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлса, A ва B тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас.

Теорема. *Агар функция ўсувчи ёки камаювчи бўлса, унинг аниқланиш соҳаси билан қийматлар соҳаси орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлади.*

Исбот. f ўсувчи функция бўлиб, аниқланиш соҳаси X, қийматлар соҳаси Y бўлсин.



80- расм.

Функциянинг таърифига кўра ихтиёрий $x \in X$ га фақат битта $y \in Y$ мос келади. Энди ихтиёрий $y (\in Y)$ га X нинг ҳам фақат битта қиймати мос келишини кўрсатиш керак. Аксинча фараз қилайлик, яъни $y_0 (y_0 \in Y)$ га X нинг иккита x_0' ва x_0'' қийматлари мос келсин $(x_0' \neq x_0'')$. У ҳолда $y_0 = f(x_0') = f(x_0'')$ бўлиши керак. Бу эса f функция ўсувчи деб берилган шартга зид, чунки f ўсувчи бўлгани учун $x_0' < x_0''$ бўлса, $f(x_0') < f x_0'')$; $x_0' > x_0''$ бўлса, $f(x_0') > f(x_0'')$ бўлиши керак эди.

f камаювчи функция бўлганда ҳам юқоридагидек исбот қилинади.

Натижа. Ҳар қандай ўсувчи ёки камаювчи функция тескари функцияга эга*.

1-мисол. $y = 2x - 1$ (1)
функциянинг аниқланиш соҳаси R, қийматлар соҳаси ҳам R. Агар x нинг қийматини $2x-1$ ифодага қўйсак, функциянинг мос қиймати топилади. Масалан, $x = 3$ бўлса, $y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ бўлади.

(1) функция ўсувчи бўлгани учун унга тескари бўлган φ функция мавжуд бўлиб, φ функциянинг аргументи y берилганда унинг қиймати x ни топиш учун (1) тенгликни x га нисбатан ечамиз, яъни

$$x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2}. \qquad (1')$$

(1′) формула тескари функция φ ни ифода қилади. (1′) тенгликда одатдагидек, аргументни x, функцияни y билан белгиласак (x ни y га, y ни x га алмаштирсак):

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) ўзаро тескари функцияларни ифода қилади.

2-мисол. $y = x^2$, $x \in]-\infty; 0]$, (3)
функция камаювчи бўлгани учун тескари функцияга эга. Тескари функцияни топиш учун (3) тенгликни x га нисбатан ечамиз: $x = \pm\sqrt{y}$. Бундан $x = \sqrt{y}$ ёки $x = -\sqrt{y}$. Берилган функциядаги $x \in]-\infty, 0]$ муносабат $x = -\sqrt{y}$ тенглик учун ўринлидир. $x = -\sqrt{y}$

---

* Агар f функция тескари функцияга эга бўлса, уни тескариланувчи функция дейилади.

тенгликда x ни y билан, y ни x билан алмаштирсак, (3) га тескари бўлган

$$y = -\sqrt{x} \tag{4}$$

функция ҳосил бўлади.

Демак, берилган функцияга тескари функция мавжуд бўлса, берилган функциянинг аналитик ифодаси аргумент (x) га нисбатан ечилади ҳамда x ни y га, y ни эса x га алмаштирилади. Тескари функциянинг аниқланиш соҳаси берилган функциянинг қийматлар соҳасидан иборат бўлади.

3-мисол. $y = \sqrt{x}$, $x \in [1; 4]$. (5)

(5) да $x = 1$ бўлса, $y = 1$, $x = 4$ бўлса, $y = \sqrt{4} = 2$, яъни (5) функциянинг қийматлари соҳаси $[1; 2]$ дан иборат.

(5) тенгликни x га нисбатан ечсак, $y^2 = x$ ёки $x = y^2$. x ни y га, y ни x га алмаштирсак, $y = x^2$ бўлади. Тескари функциянинг аниқланиш соҳаси $[1; 2]$ тўпламдан (берилган функцияни қийматлар соҳасидан) иборат бўлади. Демак,

$$y = x^2, \ x \in [1; 2], \tag{5'}$$

функция (5) функцияга тескари функция бўлади.

Машқлар

1. Функция жуфтликлар ёрдамида берилган: 1) (1; 1), $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(3; \frac{1}{3}\right)$, $\left(4, \frac{1}{4}\right)$, $\left(5; \frac{1}{5}\right)$; 2) (– 2; 4), (– 1; 1); (0; 0), (1; 1), (2, 4). Шу жуфтликлар ёрдамида тескари мослик тузинг. Тескари мосликлар берилган функцияга тескари функция бўладими?

2. $y = 2x - 1$, $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$ функциянинг қийматлар соҳасини топинг. y нинг қийматлар соҳаси билан $\{-1; 0, 1, 2\}$ тўплам орасидаги мослик функцияни ифода қиладими?

3 1) $y = -0{,}3x + 1$, 2) $y = 2x^2$; $x \in]-\infty; 0]$, 3) $y = x^3$ функция тескари функцияга эгами?

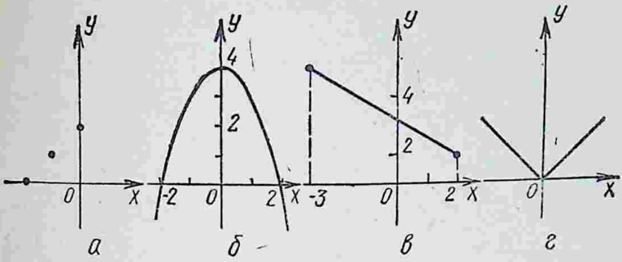
4. 1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = -x^2$ функциялар нима учун тескари функцияга эга эмас?

5. Графиги 81-расмда берилган функция тескари функцияга эгами? Нима учун?

Ушбу функцияга тескари функцияни формула билан ёзинг:

6. 1) $y = -4x + 1$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \frac{5}{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x}$; 5) $y = x^5$.

7. 1) $y = 0{,}5x + 3, x \in]-1; 2[$. 2) $y = -\frac{4}{x}, x \in]0, +\infty[$; 3) $y = x^2$, $x \in]-2; 0]$.



81- расм.

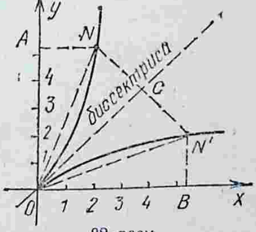
8. 1) $y = 0{,}2x$ ва $y = 5x$; 2) $y = 10x - 4$ ва $y = 0{,}1x + 0{,}4$; 3) $y = \dfrac{1}{x-1}$ ва $y = \dfrac{1}{x} + 1$ формулалар билан берилган функциялар ўзаро тескари функциялар бўладими? Нима учун?

2-§. Ўзаро тескари функцияларнинг графиклари орасидаги муносабат

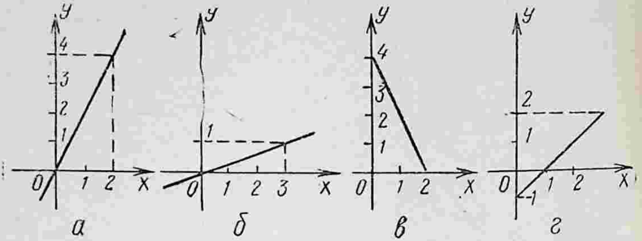
Теорема. *Ўзаро тескари f ва φ функцияларнинг графиклари биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан симметрикдир.*

Исбот. f функцияда аргумент ва функциянинг бир жуфт мос қийматлари $(a;\ b)$ бўлсин. У ҳолда $N(a;\ b)$ нуқта f функция графигига тегишли бўлади. $N'(b;\ a)$ нуқта эса φ функциянинг графигига тегишли бўлади.

82- расмда $|OA| = |OB| = b$, $|AN| = |BN'| = a$, $\triangle AON = \triangle BON'$ (икки катетига кўра). Демак, $|ON| = |ON'|$, $\triangle ONC = \triangle ON'C$ (OC катети умумий, гипотенузалари тенг). Бундан $|NC| = |N'C|$ ва $\widehat{OCN} = \widehat{OCN'}$; $\widehat{OCN} + \widehat{OCN'} = 180^\circ$ (қўшни бурчаклар йиғиндиси) ва $\widehat{OCN} = \widehat{OCN'}$ бўлгани учун $\widehat{OCN} = \widehat{OCN'} = 90^\circ$. Демак, $OC \perp NN'$.



82- расм.



83- расм.

Шундай қилиб, f функция графигида олинган ихтиёрий N нуқтага тескари бўлган φ функция графигидаги N' нуқта мос келади ва аксинча (буни исбот қилиш мумкин). N ва N' нуқталар I ва III координата бурчакларининг биссектрисаси $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик. Демак, ўзаро тескари f ва φ функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Теорема. *Агар функция ўсувчи (камаювчи) бўлса, унга тескари функция ҳам ўсувчи (камаювчи) бўлади.*

Машқлар

9. Графиги 83- расмда берилган функцияга тескари функциянинг графигини шу координаталар системасида чизинг.

10. 1) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 2) $y = x^2$, $x \in [0 + \infty]$; 3) $y = -\frac{1}{x}$, $x \in]-\infty; 0[$ функциянинг ва бу функцияга тескари функциянинг графигини битта координата системасида чизинг.

11. Ўз-ўзига тескари бўлган функцияга мисол келтиринг.

3-§. n- даражали илдиз

1-таъриф. *a сонининг n-даражали илдизи деб n-даражаси a га тенг бўлган сонга айтилади.*

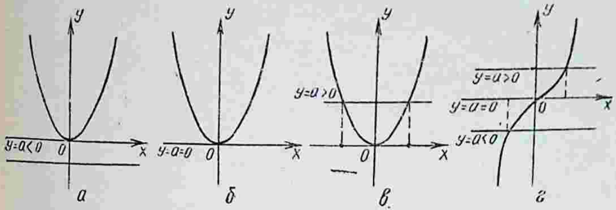
a сонининг n-даражали илдизини x деб белгиласак, x

$$x^n = a \tag{6}$$

тенгламанинг илдизидан иборат бўлади.

n жуфт сон, яъни $n = 2k$ ($k \in N$) бўлса, (6) тенглама

$$x^{2k} = a \tag{6'}$$



84- расм.

кўринишни олади. $y=x^{2k}$ ва $y=a$ нинг графигини чизамиз (84- расм). $a<0$ бўлганда (6) тенглама илдизга эга бўлмайди (84- a расм), $a=0$ бўлганда нолдан иборат битта илдизга эга (84- б расм), $a>0$ бўлганда эса қарама-қарши сонлардан иборат иккита илдизга эга (84- в расм).

n тоқ сон, яъни $n=2m+1$ бўлса, (6) тенглама

$$x^{2m+1}=a \qquad (6'')$$

кўринишни олади. Бу ҳолда (6) тенглама биргина илдизга эга бўлиб, $a>0$ бўлса, илдиз мусбат, $a=0$ бўлса, илдиз нолга тенг, $a<0$ бўлса, илдиз манфий сон бўлади (84- г расм). $a\geqslant 0$ бўлганда n жуфт сон бўлса ҳам, тоқ сон бўлса ҳам (6) тенглама номанфий (ноль ёки мусбат) илдизга эга бўлади. Шу номанфий илдизга a сонининг n-даражали *арифметик илдизи* дейилади.

2- таъриф. *Номанфий a сонининг n-даражали арифметик илдизи деб n даражаси a га тенг бўлган номанфий сонга айтилади ва $\sqrt[n]{a}$ каби белгиланади* (бунда $n>1$ ва $n\in N$).

Демак, номанфий сонларнинггина арифметик илдизи мавжуд бўлади. Масалан, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[4]{81}=3$, $\sqrt[3]{-64}$ мавжуд эмас (чунки $-64<0$), аммо -64 нинг 3-даражали илдизи -4 га тенг бўлиб, 64 нинг 3- даражали арифметик илдизи $\sqrt[3]{64}=4$ га қарама-қарши сон $-\sqrt[3]{64}=-4$ га тенг.

$x^3=125$ тенгламанинг илдизи $x=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$, $x^4=16$ тенгламанинг илдизи $x=\sqrt[4]{16}=2$, $x^3=-8$, тенгламанинг илдизи $x=-\sqrt[3]{8}=-2$ га тенг. $x^4=-81$ тенглама илдизга эга эмас.

Демак, (6) да. 1) $a\geqslant 0$ бўлса, $x=\sqrt[n]{a}$ бўлади; 2) $a<0$ бўлганда $n=2k$ жуфт сон бўлса, x мавжуд бўлмайди, $n=2k+1$ тоқ сон бўлса, $x=-\sqrt[2k+1]{a}$ бўлади.

$a\geqslant 0$ бўлганда (6) тенгламадан: $x=\sqrt[n]{a}$, x нинг қийматини (6) тенгликка қўйсак:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

Илдиздан чиқаришда қуйидагиларга амал қилиш керак:

$$\sqrt[2n]{b^{2n}}=|b|=\begin{cases} b, & \text{агар } b\geqslant 0 \text{ бўлса},\\ -b, & \text{агар } b<0 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Масалан, 1) $a\geqslant 0$ бўлса, $\sqrt[3]{a^3}=a$; 2) $\sqrt[6]{(-3)^6}=|-3|=-(-3)=3$.

Машқлар

12. Илдизнинг қийматини топинг:

1) $\sqrt[3]{125}$; 2) $\sqrt[5]{0{,}00001}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 4) $\sqrt[6]{4\frac{17}{27}}$.

13. Ифоданинг қийматини топинг: 1) $\sqrt[4]{625}+\sqrt{64}$; 2) $\sqrt[5]{0{,}0032}+\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}-\sqrt[3]{1\frac{61}{27}}$.

14. 1) -27 нинг 3- даражали; 2) 128- нинг 7- даражали; 3) 3 нинг 5- даражали; 4) -1 нинг 9- даражали; 5) $a<0$ нинг 3- даражали илдизини ёзинг.

15. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг: 1) $\sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt[4]{-y}$; 3) $\sqrt[6]{x-3}$; 4) $\sqrt[7]{4y-3}$.

16. a нинг қандай қийматлари тўпламида қуйидаги тенглик тўғри: 1) $\sqrt{a^2}=a$; 2) $\sqrt[3]{-a^3}=-a$; 3) $\sqrt[5]{a^5}=a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$?

17. Ифодани соддалаштиринг: 1) $\sqrt[6]{a^6}$, бунда $a<0$, 2) $\sqrt[4]{b^4}$, бунда $b<0$; 3) $\sqrt[3]{c^3}$, бунда $c>0$; 4) $\sqrt[6]{b^4}$, бунда $b<0$.

18. Ифодани соддалаштиринг: 1) $\sqrt[4]{a^4}$; 2) $\sqrt[6]{(b-1)^6}$, 3) $\sqrt[8]{(4-c)^8}$ 4) $\sqrt[4]{a^4b^4}$.

19. Тенгламани ечинг: 1) $x^3=0{,}027$; 2) $x^4=16$; 3) $x^5=-1$; 4) $x^2=-9$; 5) $\sqrt{x}=4$; 6) $\sqrt[3]{x}=3$; 7) $\sqrt[5]{x}=0$; 8) $\sqrt[4]{x}=1$.

20. Тенгсизликни ечинг: 1) $\sqrt[3]{x}>2$ ва $\sqrt{x}<2$, 2) $\sqrt[3]{x}\geqslant 3$ ва $\sqrt{x}<3$.

4-§. $y = \sqrt[n]{x}$ функция

Теорема.

$$y = x^n \tag{7}$$

функция ўсувчи функциядир, бунда $x \in [0; +\infty[$, $n \in N$.

Исбот. x_1 ва x_2 лар аргументнинг ихтиёрий икки қиймати бўлиб, $x_1 < x_2$ ҳамда x_1 ва x_2 $[0, +\infty[$ тўпламга тегишли бўлса, мусбат ҳадли тўғри тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириш натижасида яна тўғри тенгсизлик ҳосил бўлгани учун $x_1 < x_2$ дан $x_1^n < x_2^n$ келиб чиқади. Ҳақиқатан:

$$(x_1 < x_2) \Longrightarrow (x_1^2 < x_2^2) \Longrightarrow (x_1^3 < x_2^3) \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow (x_1^n < x_2^n).$$

Демак, (7) ўсувчи функциядир (85-*а* расм).

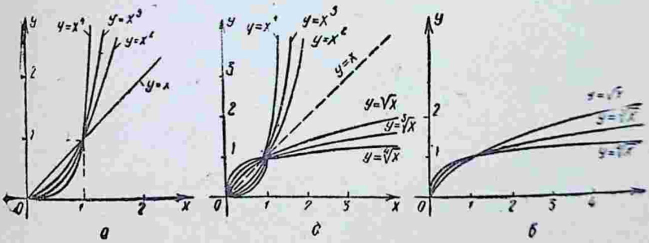
(7) функция ўсувчи функция бўлгани учун тескари функцияга эга бўлиши керак. $y = x^n$ да x ни y орқали белгиласак, $x = \sqrt[n]{y}$ ҳосил бўлади. x ни y га, y ни x га алмаштирсак:

$$y = \sqrt[n]{x}. \tag{8}$$

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси (7) функциянинг қийматлар соҳаси $[0; +\infty[$ дан, қийматлар соҳаси эса (7) функциянинг аниқланиш соҳаси $[0; +\infty[$ дан иборат.

(7) функция ўсувчи бўлгани учун (8) функция ҳам ўсувчи бўлади (85-*в* расм). Уларнинг графиклари эса $y = x$ биссектрисага нисбатан симметрикдир (85-*б* расм).

Мисол. $y = x^4$, $x \in]-\infty; 0]$ функцияга тескари функция мавжудми? Агар мавжуд бўлса, тескари функцияни формула билан беринг.



85- расм.

Ечиш. $x_1 < x_2$ ҳамда x_1 ва x_2 $]-\infty; 0]$ тўпламга тегишли бўлсин. $y_1 = x_1^4$, $y_2 = x_2^4$. У ҳолда $y_2 - y_1 = x_2^4 - x_1^4 = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)$ бўлиб, $x_1 < x_2$ бўлгани учун $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$, $x_1^2 + x_2^2 > 0$ бўлади. У ҳолда $y_2 - y_1 < 0$ ёки $y_2 < y_1$ бўлиши керак, яъни функция камаювчи. Демак, берилган функцияга тескари функция мавжуд. $y = x^4$ дан: $x = \pm\sqrt[4]{y}$. Бу тенгликда x ни y га, y ни x га алмаштирсак: $y = \pm\sqrt[4]{x}$. Берилган функцияда $x \leqslant 0$ бўлгани учун тескари функцияда $y \leqslant 0$, яъни $y = -\sqrt[4]{x}$ тескари функция бўлиши керак. *Жавоб.* $y = -\sqrt[4]{x}$.

Машқлар

21. Берилган функцияга тескари бўлган функцияни формула билан беринг: 1) $y = x^2$; $x \in [0; +\infty[$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt[5]{x}$; 4) $y = x^6$, $x \in]-\infty; 0]$.

22. $f(x) = \sqrt{-x}$ функция берилган. $f(-9)$; $f(-1)$; $f(-0{,}04)$; $f(-0{,}01)$; $f(0)$ ларни топинг.

2) $\varphi(x) = \sqrt[4]{x-1}$ функция берилган. $\varphi(17)$; $\varphi(82)$; $\varphi(1001)$; $\varphi\left(1\frac{16}{81}\right)$ ларни топинг.

23. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг: 1) $y = \sqrt[4]{-x}$; $y = \sqrt[5]{1-x}$; 3) $y = \sqrt{2x-3}$; 4) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$; 5) $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$; 6) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$.

24. $f(x) = \sqrt{x}$; $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$; $\psi(x) = \sqrt[4]{x}$ бўлса, 85-*в* расмдан фойдаланиб: 1) $f(0{,}5)$; $\varphi(0{,}5)$, $\psi(0{,}5)$; 2) $f(1)$, $\varphi(1)$, $\psi(1)$; 3) $f(3)$, $\varphi(3)$, $\psi(3)$ сонлардан қайси бири катта эканини аниқланг.

25. 1) $y = x^4$, $x \in]-\infty; 0]$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$ функцияга тескари функция мавжудми? Агар мавжуд бўлса, тескари функцияни формула билан беринг.

5-§. n-даражали арифметик илдизнинг хоссалари

Квадрат илдизлар темасида $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(a \geqslant 0, b > 0)$ ва $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geqslant 0, b > 0)$ муносабатлар исбот қилинган эди.

1-теорема. *Номанфий кўпайтувчилар кўпайтмасининг арифметик илдизи шу кўпайтувчилар арифметик илдизларининг кўпайтмасига тенг,* яъни

$a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$, $n\geqslant 2$ ва $n\in N$ бўлса,

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}. \qquad (9)$$

Исбот. $a\geqslant 0$ ва $b\geqslant 0$ бўлгани учун $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$ ва $\sqrt[n]{b}\geqslant 0$ бўлганидан $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geqslant 0$ бўлади. Иккинчидан, $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$. Бу тенгликдан n-даражали арифметик илдизнинг таърифига кўра (9) муносабат ўринли экани келиб чиқади.

Натижа. $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, ..., $c\geqslant 0$ бўлса, $\sqrt[n]{a,b,\ldots,c}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{c}$.

2-теорема. *Сурати номанфий, махражи эса мусбат бўлган касрнинг арифметик илдизи сурати арифметик илдизининг махражи арифметик илдизига бўлинганига тенг*, яъни $a\geqslant 0$ ва $b>0$ ($n\geqslant 2$ ва $n\in N$) бўлса,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (12) \qquad \text{ёки} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \quad (10)$$

Бу теорема ҳам 1-теоремага ўхшаш исбот қилинади.
Мисоллар.

1) $\sqrt[3]{27\cdot 125}=\sqrt[8]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot 5=15$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{2^4}=2$; 3) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=3$.

3-теорема. *Соннинг арифметик илдизини даражага кўтариш учун илдиз кўрсаткичини ўзгаришсиз қолдириб, илдиз остидаги соннинг шу кўрсаткичли даражасини ёзиш керак*, яъни

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}. \qquad (11)$$

Исбот. Даражанинг таърифи ҳамда (9) формуладан фойдалансак:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m\ \text{та}}=\sqrt[n]{\underbrace{aa\ldots a}_{m\ \text{та}}}=\sqrt{a^m}, \text{ яъни}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Мисоллар

1) $(\sqrt[3]{b})^4=\sqrt[3]{b^4}=\sqrt[3]{b^3\cdot b}=b\sqrt[3]{b}$; 2) $(\sqrt[5]{c})^8=\sqrt[5]{c^8}=$ $=c\sqrt[5]{c^3}$.

4-теорема. *Агар* $a\geqslant 0$ *бўлса,*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}. \tag{12}$$

Исбот. Биринчидан, $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$ бўлганда $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\geqslant 0$.

Иккинчидан, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k=(\sqrt[k]{a})^k=a$.

Натижа. Агар илдиз кўрсаткичи ва илдиз остидаги ифоданинг кўрсаткичи натурал сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, илдизнинг қиймати ўзгармайди, яъни $a\geqslant 0$, n, k, $m\in N$ бўлса,

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \text{ ёки } \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Исбот. 3- ва 4- теоремага кўра: $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}}=$ $=\sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Мисоллар. 1) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[8]{16}=$ $\sqrt[8]{2^4}=\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{108}$.

Машқлар

Ифоданинг қийматини топинг:

26. 1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\sqrt[5]{243}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{7^3}{3^6}}$; 4) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

27. 1) $\sqrt[3]{27\cdot 125}$; 2) $\sqrt[3]{64\cdot\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[4]{0{,}0016\cdot 16}$; 4) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}$; 5) $\sqrt[4]{(0{,}2)^8\cdot 3^4}$; 6) $\sqrt[5]{81\cdot 96}$.

28. 1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{75}$; 2) $\sqrt[4]{250\cdot 8}\cdot\sqrt[4]{20}$; 3) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{24}}$; 5) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{162}}$; 6) $\frac{\sqrt[5]{300000}}{\sqrt{96}}$.

29. Даражани топинг: 1) $(\sqrt[3]{2})^6$; 2) $(\sqrt[4]{3})^2$; 3) $(\sqrt[5]{a^2})^{10}$; 4) $(\sqrt[3]{m^2})^6$.

30. Ифодани соддалаштиринг: 1) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\sqrt[4]{7^2}$; 3) $\sqrt[24]{64}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$.

31. Кўрсаткичлари бир хил бўлган илдизлар шаклида ёзинг: 1) $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt[5]{2^3}$ ва $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[7]{5^2}$ ва $\sqrt[3]{3^2}$; 4) $\sqrt{a}$ ва $\sqrt[3]{a}$.

Кўпайтувчиларга ажратинг:

32. 1) $\sqrt{a}-\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{b}+b$; 3) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$; 4) $n^2+3 \ (n>0)$; 5) $n+1 \ (n>0)$; 6) $m-2 \ (m>0)$.

33. 1) a^2+a+1, $a>0$. 2) b^4+4c^4; 3) x^4+4, 4) $x+y \ (x>0,$ $y>0)$.

34. Касрларни қисқартиринг: 1) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{b}{\sqrt[3]{b}}$; 3) $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$; 4) $\frac{c-1}{\sqrt{c}-1}$; 5) $\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$; 6) $\frac{x+y^3}{\sqrt[3]{x}+y}$.

Кўпайтувчини илдиз ишораси остидан чиқаринг:

35. 1) $\sqrt{25m}$; 2) $\sqrt[3]{16x^3}$; 3) $\sqrt{12n^2} \ (n>0)$, 4) $\sqrt[3]{-125a}$; 5) $\sqrt[4]{-81b^5}$.

36. 1) $\sqrt[4]{16ab^4} \ (b<0)$; 2) $\sqrt[3]{64a^3b}$; 3) $\sqrt[3]{m^3n^7}$.

37. 1) $\sqrt[4]{2c^4}$; 2) $\sqrt[8]{(x-1)^8}$; 3) $\sqrt{a^2}+\sqrt[4]{a^4}$; 4) $\sqrt{9x^2y^2}$; 5) $\sqrt[3]{a^3b^3}$.

Кўпайтувчини илдиз ишораси остига киритинг:

38. 1) $2\sqrt{a}$; 2) $-3\sqrt{b}$; 3) $m\sqrt{2m}$; 4) $4\sqrt{-c}$; 5) $x\sqrt[6]{8} \ (x>0)$.

39. 1) $a\sqrt[4]{a}$; 2) $-b\sqrt[4]{b^3}$; 3) $-n\sqrt[4]{-n}$; 4) $n\sqrt[3]{-n}$; 5) $(a+2)\sqrt{a}$.

Соддалаштиринг:

40. 1) $\sqrt[4]{3\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}$; 3) $\sqrt{b\sqrt[3]{b}}$; 4) $\sqrt[3]{-c\sqrt{-c}}$.

41. 1) $\sqrt{a\sqrt[n]{2a}}$; 2) $\sqrt{b\sqrt[n]{b^{2n}}}$; 3) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; 4) $\sqrt[8]{b\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}}$.

42. Тенглама ёки тенгсизликни ечинг: 1) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}=0$; 2) $x-2\sqrt{x}+1=0$; 3) $x-\sqrt{x}\geqslant 0$; 4) $\sqrt[3]{y}-5\sqrt[6]{y}<0$.

Даражага кўтаринг ва соддалаштиринг:

43. 1) $(\sqrt[5]{a})^{12}$; 2) $(\sqrt[3]{m^2})^5$; 3) $(\sqrt{1-\sqrt{2}})^3$.

44. 1) $\left(\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^3}\right)^2$; 2) $(\sqrt{2-b})^2$; 3) $(\sqrt[3]{(a-1)^2})^4$.

6-§. Рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари

Арифметик илдизнинг таърифига кўра: 1) $\sqrt[3]{a^6}=a^2$ (чунки $(a^2)^3=a^6$. Буни $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$ ёки $a^{\frac{6}{3}}=\sqrt[3]{a^6}=a^2$ деб қараш мумкин);

2) $\sqrt{b^8}=b^4$ (чунки $(b^4)^2=b^8$. Буни $b^{\frac{8}{2}}=\sqrt{b^8}=b^4$ деб ёзиш мумкин);

3) $c^{\frac{9}{4}}=\sqrt[4]{c^9}=\sqrt[4]{c^8\cdot c}=\sqrt[4]{c^8}\cdot\sqrt[4]{c}=c^2\sqrt[4]{c} \quad (c>0)$;

4) $n^{\frac{5}{2}}=\sqrt{n^5}=\sqrt{n^4}\cdot\sqrt{n}=n^2\sqrt{n} \ (n>0)$.

Таъриф. *Агар $a=0$ бўлиб, $q>0$ ва $q\in Q$ бўлса, $a^q=0$ бўлади.*

Бутун кўрсаткичли даражалар учун ўринли бўлган $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $a^m:a^n=a^{m-n}$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $(a^m)^n=a^{mn}$; $(ab)^n=$ $=a^nb^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ муносабатлар асоси мусбат бўлган каср кўрсаткичли даражалар учун ҳам ўринлидир, яъни $a>0$, $b>0$ бўлса, 1) $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2) $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=$ $=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3) $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$; 4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}$; 5) $(ab)^{\frac{m}{n}}=$ $=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}$; 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

Мисоллар. 1) $5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}}$; 2) $2^3:2^{\frac{3}{4}}=$ $=2^{3-\frac{3}{4}}=2^{2\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $7^{\frac{5}{2}}:7^{\frac{2}{3}}=7^{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}}=$ $=7^{\frac{15-4}{6}}=7^{\frac{11}{6}}=7^{1\frac{5}{6}}$.

Машқлар

45. Каср кўрсаткичли даражани илдиз ёрдамида ёзинг:
1) $10^{\frac{1}{2}}$; 2) $5^{\frac{3}{4}}$; 3) $(-3)^{\frac{1}{3}}$; 4) $(ab)^{\frac{3}{5}}$; 5) $(ab)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3c)^{\frac{1}{2}}$.

46. Илдизларни каср кўрсаткичли даража шаклида ёзинг:
1) $\sqrt[5]{2^3}$; 2) $\sqrt[7]{3^5}$; 3) $-\sqrt[4]{c}$; 4) $\sqrt[6]{n^5}$; 5) $\sqrt[3]{a^2b^4}$; 6) $\sqrt[5]{m^{-2}n^3}$.

Ифодани соддалаштиринг:

47. 1) $25^{\frac{1}{2}}+64^{\frac{1}{3}}$; 2) $81^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{3}}$; 3) $32^{\frac{3}{5}}+125^{\frac{2}{3}}$; 4) $1+(\sqrt{2})^4$; 5) $(\sqrt[4]{a^3})^4+(\sqrt[3]{a})^9$; 6) $(\sqrt[5]{6^2})^5-(\sqrt[3]{6})^6$.

48. 1) $\left(\sqrt[n]{b^2}\right)^n+\left(\sqrt[m]{c^3}\right)^{2m}$ $(m, n\in N)$; 2) $\left(\sqrt[p]{a^3}\right)^{2p}+\left(\sqrt[q]{b^2}\right)^{3q}$ $(p, q\in N)$.

Амалларни бажаринг ва мумкин бўлса соддалаштиринг:

49. 1) $8^{\frac{3}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{4}}$; 2) $3^{\frac{7}{8}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}$; 3) $\left(5^{\frac{7}{9}}\right)^{\frac{3}{7}}$; 4) $4^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}$; 5) $5^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}$; 6) $6^{\frac{3}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}$.

50. 1) $4^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}$, 2) $\frac{9^{\frac{3}{2}}}{25^{\frac{7}{2}}}$; 3) $(63-7^{-1})^{\frac{3}{2}}$; 4) $\left(\frac{49}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

51. 1) $(125\cdot 27)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$; 3) $(0{,}001\cdot 27)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{125}\cdot 0{,}008\right)^{-\frac{2}{3}}$.

52. 1) $(32\,a^{-5})^{\frac{2}{5}}$; 2) $(0{,}027a^{-8})^{-\frac{1}{3}}$; 3) $a^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}})^{-\frac{1}{2}}$, $a>0$.

53. Ҳисобланг: 1) $(0{,}125)^{-\frac{3}{2}}+8^{-\frac{2}{3}}$; 2) $5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{3}{2}}-7^{-1}\cdot(0{,}49)^{\frac{1}{2}}$.

7-§. Рационал кўрсаткичли даражалар қатнашган ифодаларни айнан алмаштириш

$|x|$ ва x ифодалар R тўпламда аниқланган бўлиб, уларнинг мос қийматлари $]\infty;0[$ тўпламда бир-бирига тенг эмас (қарама-қарши сонлар), аммо $[0,+\infty[$ тўпламда уларнинг қийматлари бир-бирига тенг бўлганидан $|x|$ ва x ифодалар $[0,\infty[$ тўпламда айнан тенг дейилади. Худди шунингдек, $\sqrt{a^2}$ ва $|a|$ ифодалар R тўпламда $\frac{1}{\sqrt{a^2}}$ ва $\frac{1}{|a|}$ ифодалар $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ тўпламда айнан тенг дейилади.

Таъриф. *Агар икки ифода бирор тўпламда маънога эга бўлиб, шу тўпламда уларнинг барча мос қийматлари ўзаро тенг бўлса, бу икки ифода шу тўпламда айнан тенг дейилади.*

Мисоллар. 1) $3a^2-a$ ва $2a$ ифодалар $[0;1]$ тўпламда; 2) $\frac{a^2}{\sqrt{a-1}}$ ва $\frac{|a|}{\sqrt{a-1}}$ ифодалар $]1;+\infty[$ тўпламда; 3) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$ ва b ифодалар $[0;+\infty[$ тўпламда айнан тенг ифодалардир.

Агар икки ифода бирор тўпламда айнан тенг бўлса, унинг ихтиёрий қисм-тўпламида ҳам айнан тенг бўлади. Масалан, $\sqrt{a^2}$ ва a ифодалар $[0;+\infty[$ тўпламда айнан тенг бўлганидан бу тўпламнинг ихтиёрий қисм-тўплами, масалан, $[0;1]$, $[5;7]$; $[100;+\infty[$ каби тўпламларда ҳам айнан тенгдир.

Агар бирор тўпламда бир ифода иккинчисига, иккинчиси эса учинчисига айнан тенг бўлса, шу тўпламда биринчи ифода учинчи ифодага айнан тенг бўлади. Масалан, $[0; \infty[$ тўпламда $(\sqrt{a})^2$ ифода $\sqrt{a^2}$ га, $\sqrt{a^2}$ эса a га айнан тенг. Шунинг учун $[0; +\infty[$ тўпламда $(\sqrt{a})^2$ ифода a га айнан тенг.

Берилган тўпламда ифодани айнан тенг бўлган ифодага алмаштиришга доир мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$ ифодани соддалаштиринг.

Бу ифода $[0; +\infty[$ тўпламда маънога эга бўлганидан уни шу тўпламда айнан тенг ифодага алмаштирамиз: $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = a^2$.

2-мисол. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a-1}$ касрни қисқартиринг.

Бу ифода $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ тўпламда маънога эга бўлганидан шу тўпламда $a - 1 = (a^{\frac{1}{2}} - 1)(a^{\frac{1}{2}}+1)$ тенгликни ёзиш мумкин. У ҳолда

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a-1} = \frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{(a^{\frac{1}{2}}-1)(a^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-1}.$$

3-мисол. $x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} = 16$ тенгламани ечинг.

$x \geqslant 0$ бўлганда $x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} = x^4$ айниятдир. У ҳолда берилган тенглама $\begin{cases} x^4 = 16, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ системага тенг кучли бўлади. $x^4 = 16$ дан $x = 2$ ва $x = -2$. Булардан $x = 2$ $x \geqslant 0$ шартни қаноатлантиради. *Жавоб.* $\{2\}$.

Машқлар

Қандай тўпламда ифодалар айнан тенг бўлади:

54. 1) b^3 ва $b^{\frac{9}{3}}$; 2) $-x$ ва $|x|$; 3) $y^{\frac{3}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$ ва y; 4) $\sqrt{a^2}$ ва $-a$; 5) $\sqrt{(b-2)^2}$ ва $b-2$; 6) $\sqrt{(c-1)^2}$ ва $(1-c)$.

55. 1) $\sqrt[5]{x^5}$ ифоданинг: *а*) $x \geqslant 0$, б) $x < 0$; в) $1 \leqslant x < 3$ бўлганда қийматлар тўпламини топинг.

2) $(y^4)^{\frac{1}{4}}$ ифоданинг: а) $y < 0$, б) $1 < y < 2$; в) $-3 \leq y < 2$ бўлганда қийматлар тўпламини топинг.

Ифодани йиғинди шаклида тасвирланг:

56. 1) $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}})$; 2) $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2$; 3) $(b^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{2}{3}})^3$.

57. Ифодани соддалаштиринг: 1) $(x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})$; 2) $(b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}} + 1)(b^{\frac{1}{3}} + 1)$; 3) $(c^{\frac{1}{4}} + 1)(c^{\frac{1}{4}} - 1)(c^{\frac{1}{2}} + 1)(c + 1)$.

Кўпайтувчиларга ажратинг:

58. 1) $5^{\frac{1}{2}} - 5$; 2) $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}$; 3) $(xy)^{\frac{1}{2}} + (ay)^{\frac{1}{2}}$; 4) $x + y$ $(x > 0,$ $y > 0)$.

59. 1) $a + 1$; 2) $x + 2y^2$; 3) $a^2 + 4$.

60. Тенгламани ечинг: 1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{1}{4}} = -1$; 3) $x^{1,9} \cdot x^{1,1} = 27$.

61. Ифодани соддалаштиринг: 1) $(3a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}})(3a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{4}})$; 2) $(c^{\frac{1}{3}} - d^{\frac{2}{3}}) \cdot (c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}} + d^{\frac{4}{3}})$; 3) $\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}} - y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-4}$;

4) $(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{4}})(x^{-1} + y^{-\frac{1}{2}})(x^{-2} + y^{-1})(x^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{4}})$.

XII БОБ

ПРОГРЕССИЯЛАР

1-§. Кетма-кетликлар

1) Барча жуфт сонлар

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots;2n;\ \ldots \tag{1}$$

натурал сонлар тўпламида берилган $f(n) = 2n$ функциянинг қийматларидир, яъни $f(1) = 2$; $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$; $f(3) = 3 \cdot 2 = 6$; . . .

2) Барча яхлит ўнликлар

$$10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50;\ 60;\ 70;\ 80;\ 90 \tag{2}$$

$\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ тўпламда берилган g функциянинг қийматларидир, яъни $g(1)=10$, $g(2)=20$, $g(3)=30, \ldots$.

1-таъриф. *Натурал сонлар тўпламида (ёки унинг қисмида) берилган функцияга кетма-кетлик дейилади, функциянинг қийматлари эса кетма-кетликнинг ҳадлари дейилади.*

(1) чексиз кетма-кетлик бўлиб, (2) чекли кетма-кетликдир.

Кетма-кетликнинг 1-ҳадини a_1, 2-ҳадини a_2, 3-ҳадини a_3, n ҳадини a_n, ... каби белгиласак, у қуйидагича ёзилади:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots \tag{3}$$

ва (a_n) каби белгиланади.

Иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдингисидан катта бўлган кетма-кетлик *ўсувчи* кетма-кетлик дейилади. Масалан, (1) ва (2) кетма-кетликлар ўсувчи.

Иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдингисидан кичик бўлган кетма-кетлик *камаювчи* кетма-кетлик дейилади. Масалан,

$$1,\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{25};\ \ldots$$

кетма-кетлик камаювчи.

Ўсувчи кетма-кетликда катта номерли ҳад катта, яъни $a_n < a_{n+1}$, камаювчи кетма-кетликда эса катта номерли ҳад кичик, яъни $a_n > a_{n+1}$ бўлади.

Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар *монотон* кетма-кетликлар деб аталади. Кетма-кетликнинг монотон бўлиши шарт эмас. Масалан,

$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots$ ёки $1;\ 0;\ 5;\ 1;\ 0;\ 5;\ 1;\ 0;\ 5;\ \ldots$

кетма-кетликлар монотон бўлмаган кетма-кетликлар.

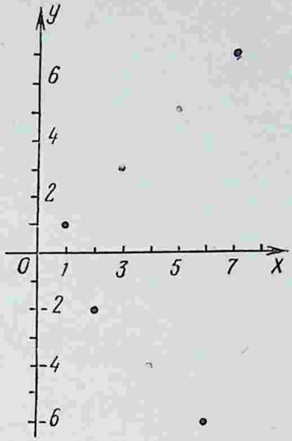
Кетма-кетлик натурал аргументли функция бўлгани учун қуйидагича берилиши мумкин:

I. Чекли кетма-кетликни ҳадларининг номерини ортиб бориш тартибида ёзиш билан бериш мумкин. Бунга юқоридаги (2) кетма-кетлик мисол бўла олади. (2) кетма-кетликни қуйидаги жадвал билан тасвирлаш мумкин:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	10	20	30	40	50	60	70	80	90

II. Кетма-кетлик формула билан берилади. Масалан, (I) кетма-кетлик $a_n = 2n$ ёки $c_n = 2n$ ва ҳоказо формулалар билан берилиши мумкин.

Барча мусбат тоқ сонлар кетма-кетлиги $a_n = 2n - 1$ формула билан, 1; 4; 9; 16; 25; 36; . . . кетма-кетлик $b_n = n^2$ формула билан, -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; . . кетма-кетлик эса $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ формула билан* берилади. Формулага кетма-кетликнинг n-ҳади формуласи дейилади. Бу формула ҳам унинг истаган ҳадини топишга ёрдам беради.



86- расм.

Масалан, (c_n) кетма-кетликнинг 60-ҳади $c_{60} = \frac{(-1)^{60}}{60} = \frac{1}{60}$ га, 101- ҳади эса $c_{101} = \frac{(-1)^{101}}{101} = \frac{-1}{101}$ га тенг.

III. Чекли кетма-кетлик график усулда ҳам берилиши мумкин. Масалан, 86-расмда

$$1;\ -2;\ 3;\ -4;\ 5;\ -6;\ 7$$

кетма-кетлик график усулда берилган.

$$f(1);\ f(2);\ f(3);\ f(4),\ \ldots,\ f(n)$$

кетма-кетликнинг графиги координаталари $(n,\ f(n))$ бўлган нуқталар тўпламидан иборат.

IV. Кетма-кетлик жумла ёрдамида ҳам берилиши мумкин. Масалан, (a_n) кетма-кетликни ҳар бир ҳадининг 1-ва охирги рақами бирлардан, уларнинг ораси-

---

* Бу формулаларда $n \in N$.

даги рақамлари фақат ноллардан иборат бўлиб, ноллар сони ҳадининг номерига тенг, деган жумла билан

$$101; 1001;\ 10001;\ 100001;\ \ldots$$

кетма-кетлик берилган. Бу кетма-кетликнинг исталган ҳадини топиш мумкин. Масалан, унинг 8-ҳади 1000000001 дан иборат.

V. Кетма-кетлик баъзан рекуррент формула билан ҳам берилади.

2-таъриф. *Кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб ихтиёрий ҳадини шу ҳаддан олдинги бир ёки бир нечта ҳадлар ёрдамида ифода қиладиган формула рекуррент формула дейилади.*

Масалан, $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$ рекуррент формула билан берилган кетма-кетликда $a_2 = a_1 + 4 = 5 + 4 = 9$; $a_3 = a_2 + 4 = 9 + 4 = 13$; $a_4 = a_3 + 4 = 13 + 4 = 17, \ldots$ бўлиб, унинг дастлабки ҳадлари қуйидагича бўлади:

$$5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; \ldots$$

Машқлар

1. Кетма-кетлик монотонми: 1) 0,6 0,66; 0,666; 0,6666; 0,66666; 2) 0,1; —0,101; 0,10101; —0,1010101; . . ..

2. Кетма-кетликлардан қайсилари ўсувчи, камаювчи ва монотон:

1) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$, 2) $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \ldots$.

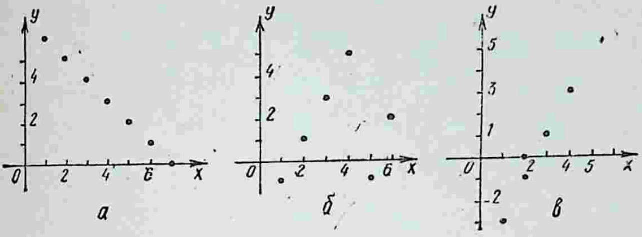
3) $2, 1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}; 1\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4}; \ldots$, 4) 0,89. 0,889; 0,8889; 0,88889; . . .

3. 0, (372) даврий ўнли касрни 0,1: 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 аниқликда яхлитлаш натижасида ҳосил бўладиган кетма-кетлик монотон кетма-кетлик бўладими?

4. Формула билан берилган кетма-кетликнинг дастлабки 6 та ҳадини ёзинг: 1) $a_n = 5n$; 2) $b_n = \frac{5}{2n}$; 3) $c_n = \frac{n}{n+1}$; 4) $d_n = 3n-2$; 5) $a_n = \frac{n^2}{n^2+8}$; 6) $b_n = (-1)^n \cdot n$; 7) $c_n = \frac{(-1)^n}{10}$; 8) $d_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

5. Кетма-кетликнинг барча ҳадларини ёзинг: 1) $a_n = n^3 - 1$, бунда $1 \leqslant n \leqslant 7$; 2) $b_n = n^2 + n - 1$, бунда $1 \leqslant n \leqslant 6$.

6. Чекли кетма-кетликнинг n-ҳади формуласини ёзинг: 1) 1; 3; 5; 7; 9; 11, 2) 4; 8; 12, 16, 20, 3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, 4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}$.



87- расм.

7. Графиги 87-*а* расмда берилган чекли кетма-кетликни ёзинг. Бу кетма-кетлик монотонми?

8. Кетма-кетлик формула билан берилган: 1) $a_n=2n-5$, бунда $1 < n < 5$, 2) $b_n=(-1)^n \cdot 4$, бунда $1 < n < 7$. Кетма-кетликни ёзинг ва график усулда тасвирланг.

9. Графиклари 86, 87 (*б*), 87 (*в*) расмда берилган кетма-кетликларни: а) жадвал билан; б) формула билан тасвирланг.

10. Ҳадлари фақат 2 рақамли сонлардан иборат бўлиб, рақамлар сони ҳад номерига тенг бўлган кетма-кетликнинг 5 та ҳадини ёзинг.

11. (b_n) кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади ҳад номерининг кубига тенг. Шу кетма-кетликнинг 8 та ҳадини ёзинг, уни формула билан беринг.

12. 1) $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n$; 2) $b_1=10$, $b_{n+1}=2b_n-1$;
3) $c_1=0$; $c_2=2$; $c_{n+2}=c_n+c_{n+1}$ рекуррент формула билан берилган кетма-кетликнинг дастлабки 7 та ҳадини ёзинг.

13. n- ҳади формуласи билан берилган кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини ёзинг: а) $a_n=\frac{5-2n}{n}$; б) $b_n=a^n+1$; в) $c_n=\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

14. Чекли кетма-кетликнинг n-ҳад формуласини ёзинг: 1) 2; 9; 28, 65; 126; 2) 1, 7, 13; 19, 25, 31; 3) -4, 1; 6; 11; 16; 21; 26;
4) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{17}$; $\frac{5}{26}$.

15. 1) ҳар бир ҳадини 2 га бўлганда 1 қолдиқ қоладиган;
2) ҳар бир ҳадини 3 га бўлганда 2 қолдиқ қоладиган;
3) ҳар бир тоқ номерли ҳади 7 га, ҳар бир жуфт номерли ҳади эса -7 га тенг бўлган (a_n) кетма-кетликнинг n-ҳад формуласини ёзинг.

16. 1) $a_1=3$; $a_{n+1}\cdot a_n=6$. 2) $a_1=5$; $a_{n+1}\cdot a_n=n$ рекуррент формула билан берилган кетма-кетликнинг бешта ҳадини ёзинг.

17. 1) $a_n = 20 - 3n$ формула билан берилган кетма-кетликнинг нечта ҳади мусбат? 2) $b_n = 2n - 11$ формула билан берилган кетма-кетликнинг нечта ҳади манфий?

18. 1) $b_n = \frac{n^2+8}{n}$ формула билан берилган кетма-кетликнинг қайси ҳади 9 га тенг; 2) $a_n = \frac{5n^2-7}{n}$ формула билан берилган кетма-кетликнинг қайси ҳади 34 га тенг?

19. 1) $a_n = \frac{16-3n}{n}$ (бунда $1 \leqslant n \leqslant 8$) ; 2) $b_n = \frac{5n-31}{n}$ (бунда $1 < n < 9$) формула билан берилган кетма-кетликнинг нечта ҳади мусбат, нечтаси манфий?

2-§. Арифметик прогрессия

Таъриф. *Ушбу*

$$a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n + d \tag{4}$$

рекуррент формула билан берилган кетма-кетлик арифметик прогрессия дейилади ёки иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир кейинги ҳади ўзидан олдингисига бирор ўзгармас d сонни қўшишдан ҳосил бўлган кетма-кетлик арифметик прогрессия дейилади бунда d прогрессиянинг *айирмаси* дейилади ва $d = a_{n+1} - a_n$.

$a_1 = -7$, $d = 3$ бўлса, арифметик прогрессия

$$-7; \ -4; \ -1; \ 2; \ 5; \ 8; \ \ldots$$

кетма-кетликдан, $a_1 = 14$, $d = -1{,}5$ бўлса, арифметик прогрессия

$$14; \ 12; \ 5; \ 11; \ 9{,}5; \ 8; \ 6{,}5; \ 5; \ \ldots$$

кетма-кетликдан иборат.

$d > 0$ бўлса, арифметик прогрессия ўсувчи, $d < 0$ бўлса, камаювчи бўлади,

Теорема. (Арифметик прогрессиянинг характеристик хоссаси.) *Арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади қўшни ҳадлар орасидаги ўрта арифметик миқдордир.*

Исбот. a_n, a_{n+1}, a_{n+2} (a_n) арифметик прогрессиянинг учта кетма-кет ҳади бўлсин. Арифметик прогрессиянинг таърифига кўра:

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{5}$$

$a_{n+1} + d = a_{n+2}$ тенгликдан

$$a_{n+1} = a_{n+2} - d. \tag{5'}$$

(5) ва (5′) тенгликларни қўшсак:

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2} \text{ ёки } a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}. \qquad \text{(I)}$$

Машқлар

20. Кетма-кетлик арифметик прогрессия ташкил этадими: 1) -6; -2; 2, 5, 8; 11; 14; 2) 19; 13; 7; 1, 5; -11?

21. Арифметик прогрессиянинг дастлабки учта ҳади берилган 1) 1; 5; 9; ... ; 2) 1; -4; -9; ... ; 3) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; ... ; 4) 0,2 2,1; 4; ...

Унинг 4–7 ҳадларини ёзинг.

22. 1) a_1; a_2; a_3; 2; 9; a_6; 2) 10, a_2; 4; 1; a_5; a_6; a_7 прогрессиянинг номаълум ҳадларини топинг.

23. Арифметик прогрессиянинг номаълум ҳадларини топинг: 1) 10; a_2; 16; a_4; 2) a_1; -2; a_3; 8, a_5; 3) $\sqrt{2}$; a_2; $5\sqrt{2}$; a_4; a_5.

24. (a_n) арифметик прогрессия бўлса: 1) a_1+5; a_2+5; a_3+5; ... ...; a_n+5; 2) $3a_1$; $3a_2$; $3a_3$; ... ;$3a_n$; ... арифметик прогрессия бўладими?

3-§. Арифметик прогрессиянинг исталган ҳади формуласи

Теорема. *Биринчи ҳади a_1, айирмаси d бўлган арифметик прогрессиянинг n-ҳади*

$$a_n=a_1+d(n-1) \qquad \text{(II)}$$

формула билан ҳисобланади.

Исбот. Арифметик прогрессиянинг таърифига асосан:

$$a_2=a_1+d;\ a_3=a_2+d;\ \ldots;\ a_{n-1}=a_{n-2}+d;\ a_n=a_{n-1}+d.$$

Ҳосил бўлган $(n-1)$ та тенгликларнинг чап қисмини чап қисмига, ўнг қисмини ўнг қисмига қўшсак:

$$a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=a_1+a_2+\ldots a_{n-2}+a_{n-1}+d(n-1).$$

Ихчамласак, (II) тенглик ҳосил бўлади.

1-мисол. 1-ҳади -6 га, айирмаси 2,5 га, охирги ҳади 14 га тенг бўлган арифметик прогрессиянинг нечга ҳади бор?

Ечиш. $a_1=-6$, $d=2{,}5$, $a_n=14$ қийматларни (II) формулага қўямиз: $14=-6+2{,}5(n-1)$. Бу тенгламани ечсак:

$$14=-6+2{,}5n-2{,}5;\ 2{,}5n=22{,}5;\ n=9.$$

2-мисол. 3 билан 27 сонлари орасида шундай 5 та сон топингки, улар берилган сонлар билан бирга арифметик прогрессия ташкил қилсин.

Ечиш. Ҳосил бўладиган 3; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; 27 прогрессияда: $a_1 = 3$, $a_7 = 27$. Бу қийматларни (II) формулага қўйсак: $27 = 3 + d$.

Бундан: $6d = 24$ ёки $d = 4$. Демак, $a_2 = 3 + 4 = 7$, $a_3 = 7 + 4 = 11$, $a_4 = 15$, $a_5 = 19$, $a_6 = 23$.

Жавоб. 7; 11; 15; 19; 23.

(II) формулани $a_n = dn + (a_1 - d)$ кўринишда ёзиб, $d = k$, $a_1 - d = b$ деб белгиласак:

$$a_n = kn + b \text{ ёки } f(n) = kn + b. \tag{6}$$

(6) чизиқли функцияни ифода қилади. Демак, арифметик прогрессия натурал сонлар тўпламида берилган чизиқли функция экан.

Машқлар

25. 1) 1; 6; 11; . . . прогрессиянинг 101-ҳадини; 2) 2, 12; 22; . . . прогрессиянинг 51-ҳадини топинг.

26. Дастлабки учта ҳади берилган арифметик прогрессиянинг 41-ҳадини топинг: 1) 3; a_2; 11; . . . ; 2) —10; a_2; 0; . . .

27. (a_n) арифметик прогрессиянинг 1-ҳадини топинг: 1) $d = 3$; $a_n = 29$; 2) $d = -2$; $a_9 = 27$; 3) $d = -7$; $a_3 = 0$.

28. (a_n) арифметик прогрессияда d ни топинг: 1) $a_1 = 7$; $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = 17$; $a_{13} = -19$; 3) $a_1 = -49$. $a_8 = 0$.

29. 1) $a_1 = -7$, $a_7 = 41$; 2) $a_1 = 0{,}5$; $a_9 = 30{,}1$ бўлса, a_{18} ни топинг.

30. (II) формуладан фойдаланиб, жадвални тўлдиринг:

№	a_1	d	n	a_n
1	6	3	11	
2	65	−4	16	
3	−0,4	2,1	18	
4		5	12	65
5		−3	58	13
6		−1,5	11	−10,5

№	a_1	d	n	a_n
7	3		16	63
8	−5		12	−32
9	−3,6		17	2,8
10	4	5		49
11	130	−9		40
12	13,4	−2,3		−14,2

31. 1) 141; 2) 170; 3) 218 сони 1, 8, 15, . . . арифметик прогрессиянинг ҳади бўла оладими?

32. 1) 13,5; 12,7; 11,9; . . . арифметик прогрессиянинг нечта мусбат ҳади бор?

2) $-40,4$, $-37,8$; $-35,2$; . . . арифметик прогрессиянинг нечта манфий ҳади бор?

33. -17 билан 19 сонлари орасида шундай 8 та сон топингки, улар берилган сонлар билан бирга арифметик прогрессия ташкил қилсин.

34. 96, a_2, 72 сонлар арифметик прогрессия ташкил этади. 1) a_2 ни топинг; 2) бу прогрессиянинг ҳар бир икки қўшни ҳади орасида шундай 3 тадан сон топингки, улар берилган сонлар билан арифметик прогрессия ташкил қилсин.

35. Арифметик прогрессия рекуррент формула билан берилган. Унинг n-ҳади формуласини ёзинг: 1) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = a_n + 3$; 2) $b_1 = 5$; $b_{n+1} = bn - 2$; 3) $c_1 = 0,25$, $c_{n+1} = 10 + c_n$.

36. Арифметик прогрессия n-ҳадининг формуласи билан берилган. Уни рекуррент формула билан беринг: 1) $a_n = 3n + 1$; 2) $b_n = 3 - 2n$, 3) $c_n = 0,5n - 10$

37. (a_n) арифметик прогрессияда: 1) $a_7 = 31$, $a_{12} = 56$; 2) $a_4 + a_{10} = 22$ ва $a_2 + a_{13} = 18$ бўлса, унинг 1-ҳадини ва айирмасини топинг

38. Арифметик прогрессияда a_{19} ни топинг:

1) $\begin{cases} a_{11} - a_5 = 24, \\ a_{15} + a_9 = 94. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_8 + a_{13} = 49, \\ a_6 + a_9 = 31; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a_{11} - a_7 = 12, \\ a_{11}^2 - a_7^2 = 744. \end{cases}$

39. Функция натурал сонлар тўпламида берилган: 1) $f(n) = 2n + 0,6$; 2) $f(n) = 1 + n^2$; 3) $f(x) = 0,5 - 3x$.
Бу функция арифметик прогрессиями? Арифметик прогрессия бўлса: а) айирмасини топинг; б) дастлабки бешта ҳадини ёзинг; в) ўсувчими ёки камаювчими?

40. 1) $y = kx + b$, $x \in N$, функция арифметик прогрессия эканини исбот қилинг; 2) k нинг қандай қийматларида бу функция ўсувчи (камаювчи) прогрессия бўлади?

4-§. Арифметик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси

Лемма. Чекли арифметик прогрессиянинг четларидан бир хил узоқликда турган ҳадлар йиғиндиси шу прогрессия четки ҳадлари йиғиндисига тенг.

Исбот. Арифметик прогрессиянинг k-ўринда турган ҳади $a_k = a_1 + d(k-1)$, охиридан k-ўринда турган ҳади $a_{n-k+1} = a_1 + d(n-k)$ бўлсин. Уларни қўшамиз:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(n-k) = a_1 - d + a_1 + d_n = \\ = a_1 + a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n,$$

яъни

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n. \qquad (7)$$

Теорема. 1-ҳади a, айирмаси d бўлган арифметик прогрессиянинг n та ҳади йиғиндиси унинг 1-

ва n-ҳадлари йиғиндисининг ярмини ҳадлар сони n га кўпайтмасига тенг, яъни

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n. \quad \text{(III)}$$

Исбот. $S'_n = a_1+a_2+a_3+ \ldots + a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$. (8)

Қўшилувчиларни охиридан бошлаб тескари тартибда ёзамиз:

$$S_n = a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+ \ldots + a_3+ a_2 + a_1. \quad (8')$$

(8) ва (8′) тенгликларни қўшамиз:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Тенгликнинг ўнг қисмидаги n та қавс ичидаги ифодалар юқоридаги леммага асосан бир-бирига тенг бўлгани учун:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{ёки} \quad S_n = \frac{a_1+ a_n}{2} \cdot n.$$

(III) формулада a_n ўрнига (II) формуладаги қийматини қўйсак:

$$S'_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad \text{(III′)}$$

1-мисол. 1-ҳади 9 га, дастлабки 16 та ҳади йиғиндиси —216 га тенг бўлган прогрессия айирмасини топинг.

Ечиш. $a_1 = 9$, $n = 16$, $S_{16} = -216$ қийматларни (III′) формулага қўйсак:

$-216 = \frac{2 \cdot 9 + d(16-1)}{2} \cdot 16$ ёки $-216 = (18 + 15d) \cdot 8$,

$-27 = 18 + 15d$, $d = -3$. *Жавоб.* $d = -3$.

2-мисол. 1-ҳади —18 га, охирги ҳади 45 га тенг бўлган прогрессиянинг барча ҳадлар йиғиндиси 297 га тенг бўлса, унинг 12 та ҳади йиғиндиси топилсин.

Ечиш. 1) $a_1 = -18$, $a_n = 45$, $S_n = 297$ қийматларни (III) формулага қўйсак: $297 = \frac{-18 + 45}{2} \cdot n$ ёки $27n = 594$.

Бундан $n=22$. 2) a_1, a_n ва n қийматларини (II) формулага қўйсак: $45=-18+d \cdot 21$ ёки $21d= 63$. Бундан $d=3$. 3) у ҳолда (II) дан: $a_{12}= -18+3 \cdot 11 = -18 + 33 = 15$.

4) (III) дан: $S_{12} = \frac{a_1+a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{-18 + 15}{2} \cdot 12 = -3 \cdot 6 = -18$.

Жавоб: $S_{12} = -18$.

Машқлар

41. 24 та ҳадга эга бўлган арифметик прогрессиянинг четки ҳадлари йиғиндиси 0. Шу прогрессиянинг барча ҳадлари йиғиндисини топинг.

42. 18 та ҳадга эга бўлган арифметик прогрессиянинг 4- ва 15- ҳадлари йиғиндиси $-33{,}5$ га тенг. Унинг барча ҳадлар йиғиндисини топинг.

43. Арифметик прогрессиянинг четки ҳадлари йиғиндиси 43 га барча ҳадлар йиғиндиси эса 301 га тенг. Унинг нечта ҳади бор?

44. Прогрессиянинг дастлабки 23 та ҳади йиғиндисини топинг: 1) 7; 13; 19; . . . ; 2) 31; 35; 39; . . . ; 3) 0,4; 0,37; 0,34, . . . ;

4) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; . . . ; 5) $\sqrt{2}$ $\sqrt{18}$; . . . .

45. 1) Барча икки хонали сонлар йиғиндисини; 2) 500 дан катта барча уч хонали жуфт сонлар йиғиндисини топинг.

46. 1) 2; 6; 10; . . . ; 2) 15; 11; 7; . . . прогрессиянинг *а*) 10-ҳадидан кейинги 12 та ҳади йиғиндисини, *б*) 22- ҳадидан кейинги 8 та ҳадининг йиғиндисини топинг.

47. 1) $a_n=2n-7$; 2) $a_n=43-7n$ бўлган арифметик прогрессиянинг; *а*) дастлабки 18 та ҳадининг йиғиндисини топинг; *б*) дастлабки $2n$ та ҳадининг йиғиндисини топинг.

48. 1) 10 га каррали барча 3 хонали сонлар; 2) барча икки хонали жуфт сонлар; 3) 3 га каррали бўлмаган ва 150 дан кичик бўлган натурал сонлар; 4) 4 га каррали бўлмаган барча икки хонали сонлар йиғиндисини топинг.

49. 1) $-1+2-4+5-7+8-10+11-\ldots$; 2) $3-11+8-7+13-3+$ $+18+1+23+5+\ldots$ йиғиндида $2n$ та қўшилувчи бор. Шу йиғиндини топинг

50. (II), (III) ва (III′) формулалардан фойдаланиб, жадвални тўлдиринг:

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2			87	801
2	10			−9	10
3			7	21	105
4			16	105	840
5	10		14		1050
6	−45		31		0

№	a_1	d	n	a_n	S_n
7		6	10		340
8		0,5	25		75
9	2	5			245
10	40	−4			180
11		3		29	155
12		4		88	1008

51. 1) n-ҳади $a_n=20-3n$ бўлган прогрессиянинг барча мусбат ҳадлар йиғиндисини; 2) n-ҳади $b_n=2n-15$ бўлган прогрессиянинг барча манфий ҳадлар йиғиндисини топинг.

52. Дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси

$$1)\ S'_n=(4-2n)n;\ 2)\ S_n=(3n-17)n;\ 3)\ S_n=(7n-3)\frac{n}{2}$$

формула билан аниқланган прогрессиянинг: *а*) 41-ҳадини ёзинг; *б*) n-ҳадини ёзинг.

53. Дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси:

$$1)\ S'_n=(3n-8)n;\ 2)\ S_n=3+8n;\ 3)\ S_n=0{,}5(n^2+n)$$

формула билан аниқланган (C_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими?

54. 1) $-43{,}4;\ -39{,}8;\ -36{,}2$ 2) $-25{,}1;\ -23{,}2;\ -21{,}3;\ \ldots$ прогрессиянинг барча манфий ҳадлар йиғиндисини топинг. 3) 1340; 1268; 1196; . . . ; 4) 34,4; 31,8; 29,2; . . . прогрессиянинг барча мусбат ҳадлар йиғиндисини топинг.

55. Биринчи ҳади -3, дастлабки бешта ҳадининг йиғиндиси кейинги бешта ҳадининг йиғиндисидан 5 марта кичик бўлган прогрессиянинг 17-ҳадини топинг.

56. Дастлабки учта ҳадининг йиғиндиси ноль, шу ҳадлар квадратларининг йиғиндиси 50 бўлган арифметик прогрессиянинг 13 та ҳади йиғиндисини топинг.

57. (a_n) арифметик прогрессияда $(n+1)$- ҳадидан $2n$ - ҳадигача бўлган барча ҳадлар йиғиндиси dn^2 га тенг эканини исбот қилинг.

5-§. Геометрик прогрессия

Таъриф. *Ушбу*

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_nq\ (a\neq 0,\ q\neq 0) \tag{9}$$

рекуррент формула билан берилган кетма-кетлик геометрик прогрессия дейилади ёки *иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир кейинги ҳади ўзидан олдингисини шу прогрессия учун нолдан фарқли бирор ўзгармас q сонига кўпайтиришдан ҳосил бўлган кетма-кетликка геометрик прогрессия дейилади, бунда q—прогрессиянинг махражидир.*

$a_1=2$, $q=3$ бўлган прогрессия 2, 6, 18, 54, 162, . . . кетма-кетликдан, $a_1=3$, $q=\frac{1}{2}$ бўлган прогрессия 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{16}$; . . . кетма-кетликдан иборат. $q>1$ бўлган геометрик прогрессия ўсувчи. $0<q<1$ бўлса, камаювчи бўлади. (9) дан: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Шунинг учун (3′) кетма-кетлик геометрик прогрессияни ташкил этса, $a_2 : a_1 = a_3 :$ $: a_2 = a_4 : a_3 = \ldots = a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n = q$ бўлади.

$a_1 > 0$ ва $q > 0$ бўлганда геометрик прогрессиянинг ҳадлари мусбат бўлади. Масалан, $a_1 = 0{,}25$, $q = 2$ бўлса, геометрик прогрессия

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 4;\ \ldots$$

мусбат сонлар кетма-кетлигини ташкил этади.

Теорема. *Геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади қўшни ҳадлар кўпайтмасининг арифметик квадрат илдизига тенг.*

Исбот. a_n, a_{n+1}, a_{n+2} лар (a_n) геометрик прогрессиянинг кетма-кет учта ҳади бўлсин. У ҳолда $a_{n+1} : a_n = a_{n+2} : a_{n+1}$.

Бундан:

$$a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} \qquad (10) \qquad \text{ёки} \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}. \qquad (10')$$

Машқлар

58. Кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этадими: 1) 81; 27 9; 1; 0,5; 0,25; 2) 0,001; 0,003; 0,009: 0,027; 0,081?

59. (a_n) геометрик прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳадини ёзинг: 1) $a_1 = 3$, $q = 2$; 2) $a_1 = -128$, $q = \frac{1}{2}$; 3) $a_1 = 5$, $q = \sqrt{3}$.

60. 1) 512; 256; 1,28; . . . ; 2) 1; −3; 9; . . . ; 3) 2; −0,2; 0,02; . . . ; 4) 2, $\sqrt{2}$; 1; . . . геометрик прогрессиянинг махражини топинг ҳамда 4—6-ҳадларини ёзинг.

61. Прогрессиянинг номаълум ҳадларини топинг: 1) a_1; a_2; 96; 48; a_5 a_6; 2) a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; $4\sqrt{2}$; −8.

62. Кетма-кетлик n- ҳадининг формуласи билан берилган; 1) $a_n = n^2 + 1$; $b_n = 2^{-n}$; 3) $c_n = \frac{n}{2}$; 4) $x_n = 2 \cdot 5^n$.

Шу кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этадими?

63. Рекуррент формула билан берилган (a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими ёки геометрик прогрессия бўладими: 1) $a_1 = 2$. $a_{n+1} = 3a_n$; 2) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n - 3$; 3) $a_1 = -81$, $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$; 4) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + n$?

64. a_1; a_2; a_3; . . . геометрик прогрессия бўлса, 1) a_1; a_3; a_5; . . . ; 2) a_2; a_4 a_6 . . . ; 3) $\frac{1}{a_1}$; $\frac{1}{a_2}$; $\frac{1}{a_3}$; . . . кетма-кетлик ҳам геометрик прогрессия бўладими?

6-§. Геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласи

***Теорема.** Биринчи ҳади a, махражи q бўлган геометрик прогрессиянинг n-ҳади*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{IV}$$

га тенг.

Исбот. Геометрик прогрессиянинг таърифига асосан:

$a_2 = a_1 q$; $a_3 = a_2 q$; $a_4 = a_3 q$; ... ; $a_{n-1} = a_{n-2} q$; $a_n = a_{n-1} q$.

Бу тенгликларнинг чап қисмини чап қисмига, ўнг қисмини ўнг қисмига кўпайтирсак:

$$a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} \; a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-2} \; a_{n-1} q^{n-1}.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки қисмини $a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} \neq 0$ га бўлсак:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

1-мисол. $a_1 = 5$, $q = 2$, $a_n = 320$. n ни топинг.

Ечиш. Берилган қийматларни (IV) формулага қўямиз:

$320 = 5 \cdot 2^{n-1}$, $64 = 2^{n-1}$, $2^{n-1} = 2^6$. Бундан: $n - 1 = 6$ ёки $n = 7$.

2-мисол. $\frac{1}{8}$ ва 4 сонлари орасида шундай тўртта сон топиб ёзингки, натижада геометрик прогрессия ҳосил бўлсин.

Ечиш. $\frac{1}{8}, a_2, a_3, a_4, a_5$, 4 кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этсин. Прогрессиянинг 6-ҳад формуласи $a_6 = a_1 q^5$ га $a_1 = \frac{1}{8}$, $a_6 = 4$ қийматларни қўйсак: $4 = \frac{1}{8} \cdot q^5$ ёки $q^5 = 32$, $q^5 = 2^5$. Бундан: $q = 2$. У ҳолда $a_2 = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $a_5 = 1 \cdot 2 = 2$ бўлади.

(IV) тенгликни $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$ каби ёзиб, $\frac{a_1}{q} = k$ деб белгиласак:

$$a_n = kq^n \quad \text{ёки} \quad f(n) = kq^n. \tag{11}$$

Демак, геометрик прогрессия натурал сонлар тўпламида берилган кўрсаткичли функциядир*. Масалан, $f(n)=3\cdot 5^n (n \in N)$ функция $a_1=15$, $q=5$ бўлган геометрик прогрессиядир.

Машқлар

65. Геометрик прогрессиянинг 8-ҳадини топинг: 1) 96, 48, 24; ..., 2) $-\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{3}; \ldots$; 3) $\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{2}; \ldots$.

66. Геометрик прогрессиянинг 10-ҳадини топинг: 1) -3; 30; -300; .... 2) a_1; 0,04; 0,2; ...; 3) a_1; a_2; $-0,5$; $-0,25$; ...

67. 1) -3; 6; -12; ...; 2) 2; -5; -10; ...; 3) $\frac{1}{4}; \frac{3}{4}$; 9; ...

кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этадими? Геометрик прогрессия ташкил этса, n-ҳад формуласини ёзинг.

68. (IV) формуладан фойдаланиб, жадвални тўлдиринг:

№	a_1	q	n	a_n
1	-2	3	6	
2	9	$\frac{2}{3}$	7	
3	128	0,5		2
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$		$2\frac{17}{32}$

№	a_1	q	n	a_n
5		$-\frac{1}{2}$	8	$-\frac{1}{64}$
6		$\frac{3}{2}$	5	$3\frac{3}{8}$
7	3		11	3072
8	729		10	$-\frac{1}{27}$

69. Қандай геометрик прогрессияда 1- ва 4- ҳадлар йиғиндисининг 2- ва 3- ҳадлар йиғиндисига нисбати $\frac{7}{3}$ га тенг бўлади?

70. (a_n) геометрик прогрессияда $k>p$ ҳамда $k, p \in N$ бўлса, $a_k^2=a_{k-p}\cdot a_{k+p}$ муносабат ўринли бўлишини исбот қилинг.

71. Геометрик прогрессияни n-ҳади формуласи билан беринг: 1) $a_1=24$, $a_{n+1}=0,5a_n$; 2) $a_1=-3$, $a_{n+1}=-2a_n$ 3) $a_1=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2}a_n$.

72. Геометрик прогрессияни рекуррент формула билан беринг: 1) $a_n=34\cdot 3^{n-1}$; 2) $b_n=-0,25\cdot(-4)^{n-1}$; 3) $C_n=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

---

* XIII боб 1-§ га қаранг.

73*. Чекли геометрик прогрессиянинг четларидан бир хил узоқликда турган ҳадлар кўпайтмаси четки ҳадлар кўпайтмасига тенглигини исбот қилинг.

74. Геометрик прогрессиянинг бешта ҳадини ёзинг: 1) $f(x)=-3\cdot 2^x$, 2) $g(n)=-81\cdot 3^{-n}$; 3) $h(n)=\frac{1}{4}(\sqrt{2})^n$.

75. Натурал сонлар тўпламида берилган: 1) $f(y)=0{,}5\cdot 3^y$; 2) $h(n)=2\cdot n^2$. 3) $g(x)=2^x+1$ функция геометрик прогрессиями?

76. 1) 7 ва 189 сонларининг орасига шундай 2 та сон; 2) 5 ва 1280 сонлар орасига шундай 3 та сон топиб ёзингки, натижада геометрик прогрессия ҳосил бўлсин.

77*. 1) n^3 ва m^3 сонларнинг орасига шундай 2 та сон; 2) $\frac{a^2}{b^2}$ ва $\frac{b}{a}$ сонлар орасига шундай бешта сон топиб ёзингки, натижада геометрик прогрессия ҳосил бўлсин.

7-§. Геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси

Теорема. *1- ҳади a_1, махражи $q\neq 1$ бўлган геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси қуйидаги формуладан топилади:*

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1} \quad \text{(V) ёки} \quad S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad \text{(VI)}$$

Исбот. $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n$ геометрик прогрессиянинг ҳадлар йиғиндиси:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n. \qquad (12)$$

Тенгликнинг ҳар икки қисмини q га кўпайтирсак:

$$q\cdot S_n=a_1q+a_2q+a_3q+\ldots+a_{n-2}q+a_{n-1}q+a_nq.$$

Бу тенгликда $a_1q=a_2$, $a_2q=a_3$, $a_3q=a_4$, $\ldots$, $a_{n-2}q=a_{n-1}$, $a_{n-1}q=a_n$ эканини эътиборга олсак, у қуйидаги кўринишни олади:

$$qS_n=a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_nq. \qquad (13)$$

(13) тенгликдан (12) тенгликни айирсак:

$$qS_n-S_n=a_nq-a_1 \qquad \text{ёки} \qquad S_n(q-1)=a_nq-a_1.$$

$q\neq 1$ бўлгани сабабли тенгламанинг ҳар икки қисмини $q-1\neq 0$ га бўлсак, (V) формула ҳосил бўлади. (V) тенгликда a_n ўрнига a_1q^{n-1} ни қўйсак, (VI) формула ҳосил бўлади.

Мисоллар. 1) $S_{10}=1+2+2^2+\ldots+2^9=\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=$
$=\frac{1023}{1}=1023$, 2) $S_8=5-\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\ldots-\frac{5}{3^7}=\frac{5\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^8\right)}{1+\frac{1}{3}}=$

$$=\frac{5\cdot\frac{3^8-1}{3^8}}{\frac{4}{3}}=\frac{5\cdot(3^8-1)}{4\cdot 3^7}=\frac{5\cdot 6560}{4\cdot 3^7}=\frac{8200}{2187}=3\frac{1639}{2187}.$$

Машқлар

78 1) 2, 10 50; . . . ; 2) -2; 1; $-0,5$; . . . ; 3) $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$; 1, . . . ;
4) 1 $\sqrt{2}$; a_3; . . . прогрессиянинг 9 та ҳади йиғиндисини топинг.

79. Геометрик прогрессия 10 та ҳадининг йиғиндисини топинг:
1) $f(n)=0{,}125\cdot 2^n (n\in N)$; 2) $g(n)=729\cdot 3^{-n} (n\in N)$; 3) $h(n)=$ $=3\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$ $(n\in N)$

80. (IV), (V) ва (VI) формулалардан фойдаланиб, жадвални тўлдиринг:

№	a_1	q	n	a_n	S_n
1	5	2	9		
2	-27	$\frac{2}{3}$	8		
3		3	10	243	
4		$-\frac{1}{5}$	7	5	

№	a_1	q	n	a_n	S_n
5	3		5	12288	
6	$\frac{1}{64}$		6	$-\frac{16}{243}$	
7	0,008	5		125	
8	-10	$\frac{1}{2}$		$-\frac{5}{16}$	

81. n-ҳадининг формуласи $a_n=2048\cdot 2^{-n}$ бўлган геометрик прогрессиянинг: 1) 5-ҳадидан кейинги бешта ҳади йиғиндисини; 2) 10-ҳадидан кейинги бешта ҳади йиғиндисини топинг.

82. 2; -6; 18; -54; . . . прогрессиянинг 20 та ҳади бор. Бу прогрессиянинг: 1) барча тоқ ўринда турган ҳадлар йиғиндисини; 2) барча жуфт ўринда турган ҳадлар йиғиндисини топинг.

83. -3072; 1536; -768, . . . прогрессиянинг 12 та ҳади бор. Бу прогрессиянинг: 1) барча мусбат ҳадлар йиғиндисини; 2) барча манфий ҳадлар йиғиндисини топинг.

84. 12 та қўшилувчининг йиғиндисини топинг: 1) $16+625+8-$ $-125+4+25+\ldots$; 2) $1+2-\frac{3}{4}+4-\frac{9}{16}+8-\frac{27}{64}+\ldots$

85. 1-ҳади 3, 3 ва 1- ҳадлар орасидаги айирма 9 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг 8 та ҳад йиғиндисини топинг.

86. Дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси: 1) $S_n=0{,}5(3^n-1)$ бўлган геометрик прогрессиянинг 8-ҳадини; 2) $S_n=(2^n-1)2^{3-n}$ бўлган геометрик прогрессиянинг 11-ҳадини топинг.

87. (IV) ва (V) ёки (VI) формулалардан фойдаланиб жадвални тўлдиринг:

№	a_1	q	n	a_n	S_n
1		5		250	312
2		−6		−216	−186
3		2	7		635
4		$-\frac{1}{2}$	8		$\frac{85}{16}$

№	a_1	q	n	a_n	S_n
5	64	$\frac{1}{4}$			85,25
6	−2	$-\frac{3}{2}$			$8\frac{5}{16}$
7	75		5	$\frac{3}{25}$	
8	$\sqrt{2}$		3	$3\sqrt{2}$	

88. 4 ва 1- ҳадлари орасидаги айирма 156, 3 ва 2- ҳадлари орасидаги айирма 36 бўлган мусбат ҳадли геометрик прогрессиянинг 6 та ҳади йиғиндисини топинг.

XIII БОБ

КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ

1-§. Кўрсаткичли функциянинг хоссалари ва графиги

$$y=a^x \quad (x\in Q,\ a>0) \qquad (1)$$

функциянинг хоссалари билан танишиш учун

$$f(x)=2^x \quad (2), \qquad h(x)=1^x \quad (3), \qquad g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \quad (4)$$

функцияларнинг (буларда $x\in Q$) қуйидаги жадвали тузилган ва графиклари чизилган (88-*а*, *б*, *в* расм):

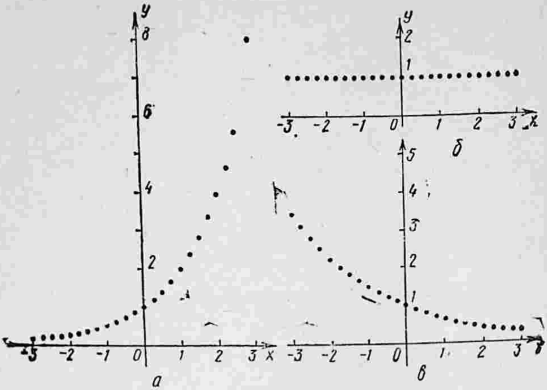
x	-3	$-2\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	-2	$-1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{8}$	0,15	0,18	0,2	$\frac{1}{4}$	0,3	0,36	0,42	$\frac{1}{2}$	0,6	0,7
$h(x)=1^x$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$	$3\frac{3}{8}$	3	2,75	2,5	$2\frac{1}{4}$	2,03	1 8	1,66	$\frac{3}{2}$	1,35	1,2

x	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3
$f(x)=2^x$	0,8	1	1,2	1,4	1,7	2	2,4	2,8	3,4	4	4,8	5 7	6,7	8
$h(x)=1^x$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$	1,1	1	0,9	0,8	0,7	$\frac{2}{3}$	0,6	0,54	0,49	$\frac{4}{9}$	0,4	0,36	0,33	$\frac{8}{27}$

Жадвалдан ва графикдан фойдаланиб, (1) функция тўғрисида қуйидагиларни айтиш мумкин:

1. (1) функция фақат мусбат қийматлар қабул қилади. Буни жадвалдан ҳам (унинг қийматлари мусбат сонлар), графикдан ҳам (нуқталарнинг ординаталари мусбат) кўриш мумкин.

2. $y=a^x$ $(a>0,\ x\in Q)$ функция $a\neq 1$ бўлганда монотон ўзгаради ($a>1$ бўлганда ўсади, $0<a<1$ бўлганда камаяди).



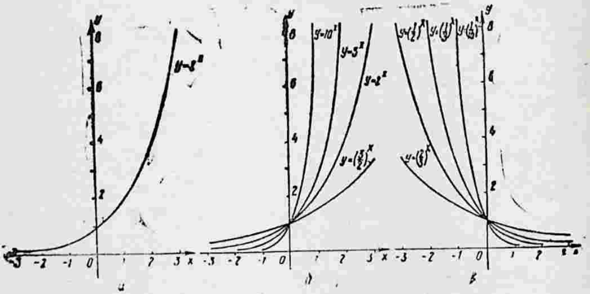
88- расм.

Умуман, ҳақиқий сонлар тўпламида берилган

$$y = a^x \quad (a > 0) \qquad (1)$$

функция кўрсаткичли функция дейилади.

$y = 2^x$ функциянинг графиги 88- a расмда аниқланган нуқталардан ўтувчи эгри чизиқдан иборат эканини исбот қилиш мумкин (89- a расм).



89- расм.

x иррационал сон бўлганда 2^x нинг чегараларини кўрсатиш мумкин. Масалан, $x=\sqrt{2}$ бўлса, $1<\sqrt{2}<2$ бўлгани учун $2^1<2^{\sqrt{x}}<2^2=4$; $1,4<\sqrt{2}<1,5$ бўлгани учун $2^{1,4}<2^{\sqrt{x}}<2^{1,5}$; $1,41<\sqrt{2}<1,42$ бўлгани учун $2^{1,41}<2^{\sqrt{x}}<2^{1,42}$ бўлади ва ҳ. к.

89- *б* расмда $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $y=2^x$, $y=3^x$, $y=10^x$ функцияларнинг графиги, 89- *в* расмда эса $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ функцияларнинг графиги чизилган.

$y=a^x$ функциянинг асосий хоссалари

1. Функция ҳақиқий сонлар тўпламида берилган бўлиб, унинг қийматлар тўплами $a\neq 1$ да барча мусбат сонлар тўпламидан, $a=1$ да эса 1 дан иборат.

Бу хоссанинг геометрик маъноси: функция графиги x ўқидан юқорига жойлашган, x ўқига перпендикуляр бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ ҳам, координата бошидан юқорида y ўқига перпендикуляр қилиб ўтказилган ихтиёрий тўғри чизиқ ҳам ($a\neq 1$ да) графикни кесиб ўтади.

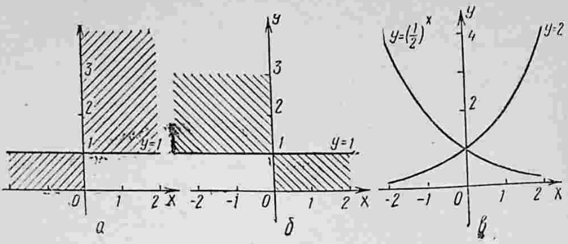
2. $a>1$ да (5) функция ўсувчи, $0<a<1$ да эса камаювчи. Геометрик маъноси: $a>1$ да абсциссаси катта бўлган нуқтанинг ординатаси ҳам катта (график нуқталари чапдан ўнгга томон юқорига кўтарила боради); $0<a<1$ да абсциссаси катта бўлган нуқтанинг ординатаси кичик (график нуқталари чапдан ўнгга томон пастга туша боради). $a=1$ бўлганда $y=1^x=1$ бўлиб, (1) функциянинг графиги y ўқини (0; 1) нуқтада кесиб ўтувчи x ўқига параллел бўлган тўғри чизиқдан иборат бўлади.

3. $x=0$ бўлса, функция 1 га тенг, яъни $a^0=1$.

(5) функциянинг графиги y ўқини (0; 1) нуқтада кесиб ўтади.

4. $a>1$ да $x>0$ бўлса, $a^x>1$, $x<0$ бўлса, $0<a^x<1$ бўлади (бу функциянинг $a>1$ да ўсувчи эканидан келиб чиқади).

$0<a<1$ да $x>0$ бўлса, $a^x<1$; $x<0$ да $a^x>1$ бўлади (бу функциянинг $0<a<1$ бўлганда камаювчи эканидан келиб чиқади).



90- расм.

Бу хоссанинг геометрик маъноси: $a > 1$ да $x < 0$ бўлса ёки $]-\infty;\ 0[$, оралиғида график нуқталари x ўқи билан $y = 1$ тўғри чизиқ орасидаги полосада, $[0;\ \infty[$ оралиғида эса $y = 1$ тўғри чизиқнинг юқорисига жойлашган бўлади (90-a расмда штрихланган соҳа). $0 < a < 1$ да $]-\infty;\ 0[$ оралиғида график нуқталари $y = 1$ тўғри чизиқ юқорисига, $]0;\ \infty[$ оралиғида эса x ўқи билан $y = 1$ тўғри чизиқ орасидаги полосага жойлашган бўлади (90-*б* расмда штрихланган соҳа).

(5) функция графигини тахминан чизиш учун $\left(-1;\ \frac{1}{a}\right)$ ва $(1;\ a)$ нуқталар ҳамда y ўқидаги $(0;\ 1)$ нуқта орқали эгри чизиқ чизиш кифоя. Масалан, $y = 2^x$ нинг графигини $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$, $(1;\ 2)$ ва $(0;\ 1)$ нуқталар ёрдамида, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ нинг графигини эса $(-1;\ 2)$, $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ ва $(0;\ 1)$ нуқталар ёрдамида чизамиз (90-расм). Графикни шу уч нуқта ёрдамида чизишга „схематик чизиш“ деб атаймиз.

$(x_0;\ y_0)$ ва $(-x_0;\ y_0)$ нуқталари y ўқига нисбатан симметрик нуқталар бўлгани учун $y = 2^x$ билан $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графиклари y ўқига нисбатан симметрик жойлашган (90-*в* расм) бўлади.

Машқлар

1. Ифодаларнинг қийматларини таққосланг: 1) $(0,5)^{0,7}$ ва $(0,5)^{0,8}$; 2) 3^{-2} ва 3^{-3} 3) 5^2 ва $(0,5)^{-5}$.

2. 1) $y=\left(\frac{4}{5}\right)^x$; 2) $y=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ функция графиги қандай нуқталар орқали „схематик“ чизилади?

3. Битта координата системасида $y=3^x$ билан $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ билан $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ функцияларнинг графигини „схематик“ чизинг

4. Қандай функциянинг графиги y ўқига нисбатан: 1) $y=4^x$; 2) $y=(0{,}2)^x$; 3) $y=5^{-x}$ функция графигига симметрик жойлашган бўлади?

2-§. Содда кўрсаткичли тенглама ва кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш

Таъриф. *Кўрсаткичли тенглама (тенгсизлик) деб номаълум даража кўрсаткичида қатнашган тенглама (тенгсизлик) га айтилади.* Масалан, $3^{x-1}=27$, $4^x+2=3\cdot 2^x$ кўрсаткичли тенгламага, $2^{x+3}<\frac{1}{2}$ ва $9^x+3<4\cdot 3^x$ кўрсаткичли тенгсизликка мисол бўла олади.

I. Содда кўрсаткичли тенгламаларни ечиш намуналарини келтирамиз.

1-мисол. $25^{2x-3}=125$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани ҳар икки қисмидаги ифодаларни бир хил асосли даражалар кўринишида ёзамиз, яъни $25^{2x-3}=5^{2(2x-3)}$ ва $125=5^3$ бўлгани учун берилган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$5^{2(2x-3)}=5^3.$$

Тенгликнинг ҳар икки қисмидаги даражаларнинг асослари тенг бўлгани учун кўрсаткичларини тенглаймиз:

$$2(2x-3)=3 \quad \text{ёки} \quad 4x-6=3.$$

Бундан: $4x=9$ ёки $x=2\frac{1}{4}$. *Жавоб**. $\left\{2\frac{1}{4}\right\}$.

---

* Ечимларни текширишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

2-мисол. $3^x+3^{x+2}=90$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $3^{x+2}=3^x\cdot 3^2=9\cdot 3^x$ бўлгани учун берилган тенгламани $3^x+9\cdot 3^x=90$ кўринишда ёзиб, ўхшаш ҳадларини ихчамласак, $10\cdot 3^x=90$ ёки $3^x=9$. Бундан: $3^x=3^2$ ёки $x=2$. *Жавоб.* $\{2\}$.

3-мисол. $9^x=3^x+6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $9^x=3^{2x}$ бўлгани учун берилган тенгламани $3^{2x}-3^x-6=0$ кўринишда ёзиб, $3^x=y$ деб белгиласак, $3^{2x}=y^2$ бўлади. У ҳолда $y^2-y-6=0$. Бу тенгламани ечсак: $y=3$ ва $y=-2$. y нинг қийматини ўрнига қўйсак: а) $3^x=3$ дан $x=1$, б) $3^x=-2$ тенглама ечимга эга эмас. *Жавоб.* $\{1\}$.

II. 4-мисол. $25^x<0{,}008$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг ҳар икки қисмидаги ифодаларни 5 асосли даража кўринишида ёзамиз. $25^x=5^{2x}$ ва $0{,}008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}=\frac{1}{5^3}=5^{-3}$ бўлгани учун берилган тенгсизлик $5^{2x}<5^{-3}$ кўринишни олади. $f(x)=5^x$ функция ўсувчи бўлганидан $2x<-3$ ёки $x<-1{,}5$. *Жавоб.* $]-\infty;\ -1{,}5[$.

5-мисол. $0{,}25<(0{,}0625)^x<1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Қўш тенгсизлик ҳадларини асоси 0,5 бўлган даража кўринишида ёзамиз. $0{,}25=(0{,}5)^2$, $(0{,}0625)^x=(0{,}5)^{4x}$, $1=(0{,}5)^0$ бўлгани учун берилган тенгсизлик $(0{,}5)^2<(0{,}5)^{4x}<(0{,}5)^0$ кўринишни олади. $\varphi(x)=(0{,}5)^x$ функция камаювчи бўлгани учун $2>4x>0$ бўлиши керак. Бундан: $0<x<\frac{1}{2}$. *Жавоб.* $\left]0;\ \frac{1}{2}\right[$.

Машқлар

Тенгламани ечинг: **5.** 1) $3^x=3^4$, 2) $5^{2x}=125$; 3) $6^{-4x}=36$; 4) $2^{-5x+4}=0{,}5$; 5) $3^{1-4x}=\frac{1}{27}$; 6) $4^x=0$.

6. 1) $5^x=-25$; 2) $2^x=\sqrt{2}$; 3) $2^{3x}=\sqrt[3]{16}$; 4) $(0{,}25)^{2x-8}=\sqrt{0{,}125}$.

7. 1) $\sqrt{a^{3-x}}=\sqrt[3]{a^{2x+1}}$ $(a>1)$; 2) $b^{x^2+x-6}=1$ $(b>1)$; 3) $\sqrt{c^{3x}}\cdot\sqrt[3]{c^{x+1}}=\sqrt[4]{c^{5x}}$ $(c>1)$.

8. 1) $3^{x+1}+3^x=108$; 2) $5^{x+2}-5^x=\frac{24}{5}$; 3) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=$ $=28$; 4) $4\cdot 3^{x+1}-2\cdot 3^x=\frac{10}{9}$.

9. 1) $5^{2x}+25=26\cdot 5^x$; 2) $7^{2x}\cdot 2\cdot 7^x-3$; 3) $3^{2x+1}+3=$ $=10\cdot 3^x$; 4) $4^x=3\cdot 2^{x+1}-8$.

10. Тенгламани график усулда ечинг: 1) $2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; 2) $2^x=$ $=2x$; 3) $3^x-3x=0$; 4) $3^x=2x+1$.

Тенгсизликни ечинг:

11. 1) $5^{-3x}>0{,}2$; 2) $4^{2x}<0$; 3) $100^x<0{,}001$; 4) $7^{-x}>-2$.

12. 1) $6^{-3x}>0$; 2) $9^x<\sqrt{3}$; 3) $0{,}25<8^{3x}$; 4) $2^x>\sqrt{0{,}125}$.

13. 1) $4^x>2\sqrt[5]{4}$; 2) $(0{,}2)^x>5\sqrt[3]{5}$; 3) $2^{x+2}+2^{x+1}<48$.

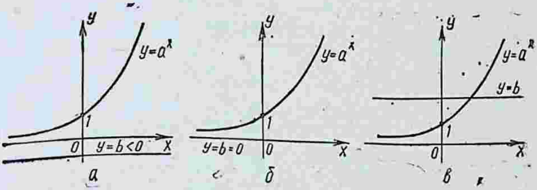
14*. 1) $\left(\frac{1}{n}\right)^x<\left(\frac{1}{n}\right)^5$; 2) $a^x>\frac{1}{a^4}$; 3) $c^{2x}<\frac{1}{\sqrt{c}}$.

15. Тенгсизликни график усулда ечинг: 1) $3^x<3x$; 2) $2^x-x<0$; 3) $(0{,}5)^x>2^x$; 4) $3^x\geq 2x+1$.

3-§. Логарифмлар. Ўнли логарифмлар

$$a^x=b\ (a\neq 1) \tag{6}$$

тенгламани график усулда ечиш учун $y=a^x$ ва $y=b$ нинг графигини чизамиз. $b<0$ бўлса (91-*а* расм) ёки $b=0$ бўлса (91-*б* расм), $y=a^x$ билан $y=b$ нинг графиклари кесишмайди, яъни (6) тенглама ечимга эга бўлмайди; $b>0$ бўлганда эса (91-*в* расм) графиклар биттагина нуқтада кесишади (чунки $y=a^x$ функция мусбат бўлиб, монотон ўзгаради), яъни битта ечимга эга бўлади. Бу ечим, b ни ҳосил қилиш учун a ни кў-



91- расм.

тариш керак бўлган даража кўрсаткичидан иборат бўлади ва бу ечим a асос бўйича b сонининг логарифми деб аталади ва $\log_a b$ каби белгиланади, яъни $x=\log_a b$.

Таъриф. *b сонининг a ($a>0$ ва $a\neq 1$) асосга кўра логарифми деб b ни ҳосил қилиш учун a ни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади:*

$$a^x = b \Longleftrightarrow x = \log_a b. \qquad (7)$$

1-мисол. 2 асосга кўра 128 нинг логарифмини топинг.

Ечиш. $\log_2 128 = x \Longleftrightarrow 2^x = 128 \Longleftrightarrow 2^x = 2^7 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x = 7$. *Жавоб.* $\{7\}$.

2-мисол. 5 асос бўйича логарифми -3 бўлган сонни топинг.

Ечиш. $\log_5 x = -3 \Longleftrightarrow x = 5^{-3}$. Демак $x = 5^{-3} = \frac{1}{125}$. *Жавоб.* $\left\{\frac{1}{125}\right\}$.

3-мисол. Асос қандай бўлганда 25 нинг логарифми -2 га тенг бўлади?

Ечиш. Шартга кўра $\log_a 25 = -2$.

$\log_a 25 = -2 \Longleftrightarrow a^{-2} = 25 \Longleftrightarrow a^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

$a^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ тенглик $a = \frac{1}{5}$ бўлгандагина ўринли бўлади. *Жавоб.* $\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Ҳисоблаш ишларида асоси 10 бўлган логарифм кўп қўлланилгани сабабли бундай логарифмларни ёзиш учун махсус белгилаш ишлатилади. $\log_{10} a$ ($a>0$) деб ёзиш ўрнига $\lg a$ деб ёзилади. Масалан, $\log_{10} 100 = 2$ ўрнига $\lg 100 = 2$ каби ёзилади. Демак,

$$y = 10^x \Longleftrightarrow x = \lg y. \qquad (7')$$

$b>0$ бўлганда $b = 10^a \Longleftrightarrow a = \lg b$ бўлгани учун $b = 10^a$ ифодада a нинг ўрнига $\lg b$ ни қўйсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$b = 10^{\lg b} \text{ ёки } 10^{\lg b} = b. \qquad (8)$$

Бу тенглик мусбат сонлар тўпламида айниятдир.

4-мисол. $10^{\lg 7} + 10^{\lg 0{,}01} + 10^{\lg 2{,}4}$ йиғиндини топинг.

Ечиш. (8) айниятга кўра $10^{\lg 7} = 7$, $10^{\lg 0{,}01} = 0{,}01$, $10^{\lg 2{,}4} = 2{,}4$ бўлгани учун изланувчи йиғинди $7 + 0{,}01 + 2{,}4 = 9{,}41$ га тенг.

$b=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a b$ бўлганидан $b=a^x$ да x ўрнига $\log_a b$ ни қўйсак, $b=a^{\log_a b}$ ҳосил бўлади. Демак, $a>0$, $a\neq 1$ бўлса, мусбат сонлар тўпламида

$$a^{\log_a b}=b \qquad (8')$$

айниятдир.

Машқлар

16. 3 асосга кўра: 1) 81 нинг, 2) 729 нинг, 3) $\frac{1}{27}$ нинг, 4) 1 нинг, 5) $9\sqrt{3}$ нинг, 6) -27 нинг логарифмини топинг.

17. $\frac{1}{2}$ асосга кўра: 1) 8 нинг, 2) 0,125 нинг, 3) 128 нинг, 4) $8\sqrt{2}$ нинг логарифмини топинг.

18. 1) $\log_3 243=x$; 2) $\log_{0,5} 0,0625=x$; 3) $\log_2\sqrt{2}=x$. x ни топинг.

19. 1) $\log_7 x=3$; 2) $\log_2 x=-8$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x=3$. x ни топинг.

20. 4 асос бўйича логарифми: 1) 2; 2) 0; 3) -3; 4) $1\frac{1}{2}$; 5) $-2\frac{1}{2}$ бўлган сонни топинг.

21. 1) $\log_a 100=2$; 2) $\log_a 125=3$; 3) $\log_a 4\sqrt{2}=5$. a ни топинг.

22. Асос қандай сон бўлганда 32 нинг логарифми: 1) 5; 2) 1; 3) -5; 4) 10 га тенг бўлади?

23. Соннинг ўнли логарифмини топинг: 1) 1000; 2) 0,001; 3) 10^{-5}; 4) $\sqrt[3]{0,0001}$; 5) $100\sqrt{0,1}$.

24. Тенгламани ечинг: 1) $\lg x+3=0$; 2) $\lg x-2\frac{1}{2}=0$; 3) $\lg 0,01-x=0$; 4) $\lg 0,01\sqrt{10}+y=0$.

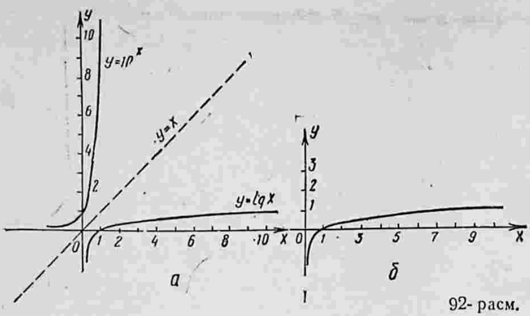
25. Ифоданинг қийматларини топинг: 1) $10^{\lg 100}+10^{\lg 0,1}$; 2) $10^{-\lg 5}-10^{-\lg 0,4}$; 3) $10^{1+\lg 3}-10^{-2+\lg 5}$; 4) $3-10^{\lg 5-\lg 3}$.

4-§. $y=\lg x$ функция

$$y=10^x \qquad (9)$$

функция ўсувчи бўлгани учун тескариланувчи функциядир. Тескари функцияни формула билан бериш учун (9) да x ни y орқали ифодаласак, $x=\lg y$ бўлади. Бунда x ни y га, y ни x га алмаштирсак:

$$y=\lg x. \qquad (10)$$



92- расм.

(10) функциянинг аниқланиш соҳаси (9) функциянинг қийматлар соҳаси $]0; \infty[$ дан, қийматлар соҳаси (9) функциянинг аниқланиш соҳаси $]-\infty; \infty[$ дан иборат.

(9) ва (10) ўзаро тескари функцияларнинг графиги координаталар системасининг I ва III чораклари биссектрисасига нисбатан симметрикдир (92-*а* расм).

$y = \lg x$ функциянинг хоссалари:

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси барча мусбат сонлар тўпламидан, қийматлари соҳаси эса барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

2. Функция ўсувчи (яъни катта сонга катта логарифм мос келади).

3. $x = 1$ функциянинг илдизи, яъни $\lg 1 = 0$ (1 нинг логарифми нолга тенг).

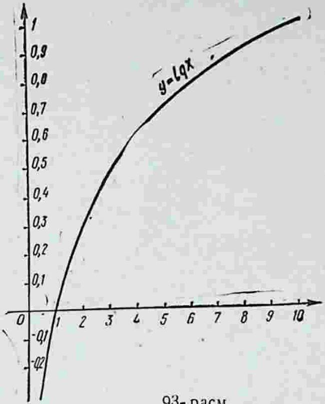
4. $0 < x < 1$ бўлса, $\lg x < 0$, $x > 1$ бўлса, $\lg x > 0$. Ноль билан 1 орасидаги сонларнинг логарифми манфий, 1 дан катта сонларнинг логарифми эса мусбатдир (92-*б* расм).

Машқлар

26. $y = \lg x$ нинг графигидан (93- расм) фойдаланиб, 1) 0,4; 3; 5; 6; 9 сонларининг логарифмини, 2) логарифми $-0{,}2$; $-0{,}1$; 0; 0,3 0,5 0,7 бўлган сонларни топинг.

27. Ифода маънога эгами: 1) $\lg 0{,}318$; 2) $\lg(-10)$; 3) $\lg(-1{,}9)^2$; 4) $\lg 5^{-3}$; 5) $\lg(1-\sqrt{2})$

28. Ифода мусбатми ёки манфийми: 1) $\lg 1{,}2$; 2) $\lg (1{,}6)^{-3}$; 3) $\lg 41{,}4 - \lg 1$; 4) $\lg(\sqrt{5} - 2)$



93-расм.

29. $y = \lg x$ функция графигидан (93-расм) фойдаланиб, тенглама ёки тенгсизликни ечинг: 1) $\lg x = 1$; 2) $\lg x = 1$; 3) $\lg x < 0$; 4) $\lg x > 1$.

30. Ифодаларнинг сон қийматини таққосланг: 1) $\lg 11$ ва $\lg 12$; 2) $\lg 0{,}11$ ва $\lg 0{,}12$; 3) $\lg \frac{11}{12}$ ва $\lg \frac{12}{13}$.

31. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг: 1) $y = \lg(-x)$; 2) $y = \lg(5x + 1)$; 3) $y = \lg x^2$; 4) $y = \frac{1}{\lg x - 2}$.

32. Тенгсизликни ечинг: 1) $\lg x < \lg \sqrt{5}$; 2) $\lg x < -3$; 3) $\lg(2x) < -2$, 4) $\lg(x - 3) < -2$.

33. Тенгламани график усулда ечинг: 1) $\lg x = 5 - 3x$; 2) $\lg x - |x| = 0$; 3) $\lg x = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}$

34. Функцияга тескари функцияни формула билан беринг:

1) $y = 10^{2x}$; 2) $y = 10^{\frac{x}{2}}$; 3) $y = 3\lg x$; 4) $y = \frac{1}{3}\lg x$.

5-§. Логарифмлаш ва потенцирлаш

I. ***1-теорема.*** *Икки мусбат сон кўпайтмасининг логарифми кўпайтувчилар логарифмларининг йиғиндисига тенг.*

Исбот. $x_1>0$, $x_2>0$ ва $\lg x_1=y_1$, $\lg x_2=y_2$ бўлсин.

$$\lg x_1=y_1 \Leftrightarrow x_1=10^{y_1},$$

$$\lg x_2=y_2 \Leftrightarrow x_2=10^{y_2}.$$

$x_1=10^{y_1}$ ва $x_2=10^{y_2}$ тенгликларни ҳадма-ҳад кўпайтирсак:

$$x_1x_2=10^{y_1+y_2} \Leftrightarrow \lg(x_1x_2)=y_1+y_2.$$

y_1 билан y_2 ўрнига мос ҳолда $\lg x_1$ ва $\lg x_2$ ни қўйсак:

$$\lg(x_1x_2)=\lg x_1+\lg x_2. \qquad (11)$$

Масалан, $\lg 20=\lg 10\cdot 2=\lg 10+\lg 2=1+\lg 2$.

Натижа. Агар $x_1>0$, $x_2>0$, ..., $x_n>0$ бўлса,

$$\lg(x_1x_2\ldots x_n)=\lg x_1+\lg x_2+\ldots+\lg x_n.$$

2-теорема. *Асоси мусбат бўлган даражанинг логарифми даража кўрсаткичи билан асос логарифмининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. $c>0$ ва $\lg c=y$ бўлсин. У ҳолда $c=10^y$ бўлади. Бундан: $c^k=10^{ky} \Leftrightarrow \lg c^k=ky$.
Охирги тенгликда y ўрнига $\lg c$ ни қўйсак:

$$\lg c^k=k\lg c. \qquad (12)$$

Мисоллар. 1) $\lg 8=\lg 2^3=3\lg 2$. 2) $\lg\sqrt{3}=\lg 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\lg 3$.

II. Агар ифода кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиздан чиқариш амалларини ўз ичига олса, бу ифодани логарифмлаш деб шу ифода логарифмини унинг ташкил этувчи сон, ҳарфларнинг логарифмлари ёрдамида ёзишга айтилади.

1-мисол. $x=\frac{a^2b^3\sqrt[4]{c}}{\sqrt[3]{2}\,d^5}$ ифодани логарифмланг.

Бу ифодани даражалар кўпайтмаси шаклида ёзамиз:

$x=a^2b^3c^{\frac{1}{4}}d^{-5}2^{-\frac{1}{3}}$ ва логарифмлаймиз:

$$\lg x=2\lg a+3\lg b+\frac{1}{4}\lg c-5\lg d-\frac{1}{3}\lg 2.$$

III. Бирор ифоданинг логарифмига кўра логарифмланган ифоданинг ўзини топишга потенцирлаш дейилади, яъни потенцирлаш логарифмлашга тескари амалдир.

2-мисол. $\lg x = 2\lg a - \frac{2}{3}\lg b + \frac{1}{2}\lg 3 - 5\lg c$. x ни топинг.

Ечиш. Мисолни ишлашда (11) ва (12) айниятлардан фойдаланамиз:

$$\lg x = 2\lg a - \frac{2}{3}\lg b + \frac{1}{2}\lg 3 - 5\lg c = \lg a^2 + \lg b^{-\frac{2}{3}} +$$

$$+ \lg 3^{\frac{1}{2}} + \lg c^{-5} = \lg a^2 b^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} c^{-5}. \quad \lg x = \lg a^2 b^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} c^{-5}.$$

Логарифмлари тенг бўлган ифодалар тенг бўлиши керак, яъни

$$x = a^2 b^{-\frac{2}{3}} \sqrt{3}\, c^{-5} = \frac{a^2\sqrt{3}}{c^5\sqrt[3]{b^2}}.$$

Жавоб. $x = \frac{a^2\sqrt{3}}{c^5\sqrt[3]{b^2}}$.

Машқлар

35. 1) $\lg 6$ ни $\lg 2$ ва $\lg 3$ орқали; 2) $\lg 35$ ни $\lg 5$ ва $\lg 7$ орқали; 3) $\lg 16$ ни $\lg 2$ орқали; 4) $\lg 45$ ни $\lg 3$ ва $\lg 5$ орқали ифодаланг.

36. $\lg 2 \approx 0{,}301$, $\lg 3 \approx 0{,}477$, $\lg 5 \approx 0{,}699$ экани маълум. Ифоданинг тақрибий қийматини топинг:

1) $\lg 8$; 2) $\lg\sqrt{5}$; 3) $\lg 2\frac{7}{9}$; 4) $\lg 360$.

37. Исбот қилинг: 1) $c > 0$ бўлса, $\lg\sqrt[n]{c} = \frac{1}{n}\lg c$;

2) $a > 0$, $b > 0$ бўлса, $\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b$.

38. Агар $m > 0$ ва $n > 0$ бўлса, муносабатни исбот қилинг:

1) $\lg(m+n) \neq \lg m + \lg n$; 2) $\lg\frac{m}{n} \neq \frac{\lg m}{\lg n}$.

Ифодани логарифмланг, бу ерда ҳарфлар мусбат.

39. 1) $x = c^2 d^3$; 2) $x = \frac{2a^2}{3b^3}$; 3) $x = \frac{3(b^2+2)}{5(c+1)}$; 4) $x = \frac{3b^2}{\sqrt{c}}$.

40. 1) $x = \left(\frac{5m^2 n}{b}\right)^2$; 2) $x = \frac{100a^3}{\sqrt[3]{b}}$; 3) $x = \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{ac^2}}\right)^2$;

4) $x = \frac{5\sqrt{p\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{q^3}}$.

Ифодани потенцирлаб, x ни топинг:

41. 1) $\lg x = \lg 3{,}8 + \lg 5$; 2) $\lg x = \lg 65 - \lg 13$; 3) $\lg x = 2(\lg 2 + \lg 5)$; 4) $\lg x = \lg 2 + \lg 15 - \lg 3$.

42. 1) $\lg x = \lg 2 + \lg 0{,}005$; 2) $\lg x = \lg 41 - \lg 0{,}41$; 3) $\lg x = \frac{\lg 125}{\lg 65 - \lg 13}$; 4) $\lg x = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 9 + \lg 25}$.

43. 1) $\lg x = 2\lg 3 + 4\lg 2$, 2) $\lg x = 5\lg 2 - 3\lg 7$; 3) $\lg x = 2\lg 5 - \frac{1}{2}\lg 7$; 4) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 7 + 3\lg 2$.

44. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:
1) $y = \lg x + \lg(x-1)$ 2) $y = \lg(x-2) - \lg x$; 3) $y = \lg(x-4) + \lg(x+4)$; 4) $y = \lg\frac{x-4}{x+4}$.

45. 1) $y = \lg\sqrt{x}$ билан $y = \frac{1}{2}\lg x$ функциянинг;

2) $y = \lg(x-4) - \lg(x+4)$ билан $y = \lg\frac{x-4}{x+4}$ функциянинг аниқланиш соҳаси бир хил тўплам ташкил этадими?

6-§. Содда логарифмик тенглама ва содда логарифмик тенгсизликларни ечиш

Таъриф. *Номаълум (ўзгарувчи) логарифм белгиси остида қатнашган тенглама (тенгсизлик) логарифмик тенглама (тенгсизлик) деб аталади.* Масалан, $\lg(x-1) = 1 - \lg x$, $4 - \lg^2 x = 0$,
$\lg\frac{x-1}{2} < 3$, $2 + \lg^2 x < 3\lg x$.

Содда логарифмик тенглама ва содда логарифмик тенгсизликларни ечишга доир мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Тенгламани ечинг: $\lg(2x-5) = 2$.

Ечиш. $\lg(2x-5)$ ифода $2x-5>0$ ёки $x>2{,}5$ да маънога эга бўлади, яъни берилган тенгламада (ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлар тўплами қисқача ЎҚҚТ) $]2{,}5; \infty[$ дан иборат. Шу сабабли тенгламанинг илдизи шу тўпламга тегишли бўлиши шарт.

Берилган тенгламадан: $2x - 5 = 100$. Бундан: $x = 52{,}5$. Бу қиймат тенгламада ЎҚҚТ га тегишли. *Жавоб.* $\{52{,}5\}$.

Берилган тенгламани ечишни қуйидагича ёзамиз:

$$\lg(2x-5) = 2 \Leftrightarrow \lg(2x-5) = \lg 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=100 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=52{,}5 \\ x>2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 52{,}5.$$

2-мисол. Тенгламани ечинг: $\lg|0{,}5x - 1| = 1 + 2\lg 3$.

Ечиш. Тенгламада $0{,}5x - 1 \neq 0$ ёки $x \neq 2$, яъни ЎҚҚТ $]-\infty; 2[\ \cup\ ]2; \infty[$ дан иборат. Тенгламанинг ўнг қисмини потенцирласак: $1+2\lg 3=\lg 10+\lg 3^2=\lg 90$. У ҳолда берилган тенглама $\lg(0{,}5x-1)=\lg 90$ кўринишни олади. Логарифмлари тенг бўлган ифодаларни тенгласак: $|0{,}5x-1|=90$. Ҳосил бўлган тенгламани ечамиз: $x=-178$ ёки $x=182$. -178 ҳам, 182 ҳам тенгламада ЎҚҚҚТга тегишли бўлгани учун ечим бўлади.

Берилган тенгламани ечишни қуйидагича ёзамиз:

$$\lg|0{,}5x-1|=1+2\lg 3 \Leftrightarrow \lg|0{,}5x-1|=\lg 10+\lg 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg|0{,}5x-1|=\lg 90 \Leftrightarrow |0{,}5x-1|=90 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0{,}5x-1=-90\\ 0{,}5x-1=90\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0{,}5x=-89\\ 0{,}5x=91\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-178\\ x=182.\end{array}\right.$$

Жавоб. $\{-178;\ 182\}$.

3-мисол. Тенгламани ечинг: $\lg^2 x-2\lg x-3=0$.

Ечиш. Тенгламада ЎҚҚҚТ $]0;\ \infty[$ дан иборат. $\lg x=y$ деб белгиласак, $\lg^2 x=y^2$ бўлади ва берилган тенглама $y^2-2y-3=0$ кўринишни олади. Бу тенгламани ечсак: $y=-1$ ёки $y=3$. y нинг қийматини ўрнига қўямиз: 1) $\lg x=-1$ ёки $x=10^{-1}=0{,}1$; 2) $\lg x=3$ ёки $x=1000$. Топилган қийматлар ЎҚҚҚТ га тегишли бўлгани учун ечим бўлади. *Жавоб.* $\{0{,}1;\ 1000\}$.

4-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\lg 2x>-1+\lg 2$.

Ечиш. $\lg 2x>-1+\lg 2 \Leftrightarrow \lg 2x>\lg 0{,}1+\lg 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lg 2x>\lg 0{,}2$. Биринчидан, берилган тенгсизликда ЎҚҚҚТ $2x>0$ шартидан аниқланади (фақат мусбат сонларгина логарифмга эга бўлгани учун), иккинчидан, логарифм асоси 10 (яъни 1 дан катта) бўлгани учун $\lg 2x>\lg 0{,}2$ дан $2x>0{,}2$ тенгсизлиги ўринли бўлиши керак. Шу сабабдан

$$\lg 2x>\lg 0{,}2 \Leftrightarrow \begin{cases}2x>0\\ 2x>0{,}2\end{cases} \Leftrightarrow 2x>0{,}2 \Leftrightarrow x>0{,}1.$$

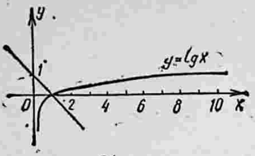
Жавоб. $]0{,}1;\ \infty[$.

5-мисол. Тенгсизликни ечинг: $\lg(x+3)<2\lg 3$

Ечиш. $\lg(x+3)<2\lg 3 \Leftrightarrow \lg(x+3)<\lg 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3>0\\ x+3<9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-3\\ x<6\end{cases} \Leftrightarrow -3<x<6.$$

Жавоб. $]-3;\ 6[$.



94- расм.

6-мисол. Тенгламани ва тенгсизликни график усулда ечинг:

$$\lg x = -x + 1 \text{ (А)},$$
$$\lg x > -x + 1 \text{ (Б)},$$
$$\lg x < -x + 1 \text{ (В)}.$$

Ечиш. $y = \lg x$ ва $y = -x + 1$ функцияларнинг графигини чизамиз. Чизмадан (А) тенгламанинг ечими $\{1\}$, (Б) тенгсизликнинг ечими $]1;\ \infty[$, (В) тенгсизликнинг ечими $]0;\ 1[$ аниқланади (94-расм).

Машқлар

Тенгламани ечинг:

46. 1) $\lg(1 - 3x) = 2$; 2) $\lg(2x + 3) = 0$; 3) $\lg(1 + x^2) = 1$. 4) $\lg|2x + 3| = -1$.

47. 1) $x + 10^{\lg(3-2x)} = 7$; 2) $10^{\lg|x-1|} - 2 = 0$; 3) $\lg|x + 2| = 10^{\lg 3} - 10^{\lg 2}$; 4) $10^{\lg(3x-5)} - 10^{\lg(5-x)} = x + 2$.

Тенгламани ечинг:

48. $\lg x^2 = 2\lg 2$; 2) $\lg(4x - 1) = 3\lg 3$; 3) $\lg(3x + 1) = 3\lg 5 + \lg 2$.

49. 1) $\lg(5x + 3) = 3\lg 3 + 2\lg 2$; 2) $\lg(x^2 + 8) = \lg x + 2\lg 3$; 3) $\lg(x^2 - 5x + 206) = 2\lg 5 + 3\lg 2$.

50. 1) $\lg(x^2 - 7) - \lg(x - 1) = 0$; 2) $\lg(x^2 + 19) - \lg(x + 3) = 1$; 3) $\lg|4 - 7x| - 2\lg 3 = \lg 5$.

51. Тенгламани ечинг: 1) $\lg^2 x - 4 = 0$; 2) $\lg^2 x - \lg x = 0$; 3) $\lg^2 x + \lg x = 2$; 4) $2\lg^2 x - \lg x - 1 = 0$.

52. Тенгсизликни ечинг: 1) $\lg x < 2$; 2) $\lg x < -\lg 2$; 3) $\lg(-x) < 0$; 4) $\lg(1 - x) < 1$.

Тенглама ва тенгсизликни ечинг:

53. 1) $\lg(2x - 1) = 2\lg 3 + 3\lg 2$; 2) $\lg(x + 3) = 2 - 2\lg 5$.

54*. 1) $\lg x - \lg(3 - x) > 1$; 2) $\lg(2x + 5) - \lg(4 - x) < 1$.

55*. 1) $\lg x + \lg(x - 1) < \lg 2 + \lg 3$; 2) $\lg x + \lg(x - 2) > \lg 3$.

56. Тенглама ва тенгсизликни график усулда ечинг: 1) $\lg x + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}x$; 2) $\lg x + \frac{1}{9} > \frac{1}{9}x$; 3) $\lg x + \frac{1}{9} < \frac{1}{9}x$.

7-§. $y = [x]$ ва $y = \{x\}$ функция

Ҳар бир x сонига y сондан катта бўлмаган энг катта бутун сон $[x]$ мос келади. Бу мослик аниқланиш соҳаси R, қийматлар тўплами Z бўлган функциядан иборатдир:

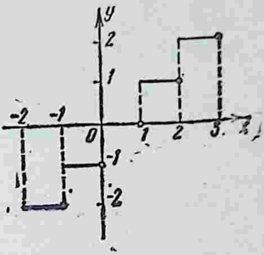
$$f(x) = [x]. \tag{13}$$

$f(1{,}8) = [1{,}8] = 1$; $f(5) = [5] = 5$; $f(-0{,}5) = [-0{,}5] = -1$.

Умуман $x \in Z$ бўлса, $[x] = x$, $x \notin Z$ бўлса, $[x] < x < [x] + 1$. Демак,

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \quad (13')$$

яъни x иккита кетма-кет бутун сонлар билан ифодаланган оралиқда бўлади.



95- расм.

$[x]$ функцияга x сонининг *бутун қисми* деб аталади, (13) функциянинг графиги 95-расмда тасвирланган.

Ҳар бир x сонига x сони билан унинг бутун қисми орасидаги айирма $x - [x]$ мос келади. Бу мослик аниқланиш соҳаси R, қийматлар соҳаси эса $[0; 1[$ бўлган

$$f(x) = \{x\} = x - [x] \quad (14)$$

функциядан иборатдир. Демак,

$$\{x\} = x - [x].$$

Масалан, $\{3,5\} = 3,5 - [3,5] = 3,5 - 3 = 0,5$; $\{5\} = 5 - [5] = 5 - 5 = 0$, $\{-2,4\} = -2,4 - [-2,4] = -2,4 - (-3) = 0,6$ ва ҳ.к.

(14) функция 0 ва 1 сонлари билан чегараланган бўлади, яъни:

$$0 \leqslant x - [x] < 1. \quad (14')$$

(14) функцияга x сонининг *каср қисми* деб аталади. Бу функциянинг қиймати номанфий сон бўлиб, графиги 96- расмда тасвирланган.

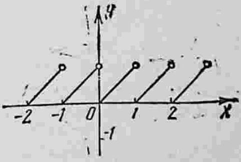
Ҳар қандай x учун

$$\{x + m\} = \{x\},\ m \in Z \ (15); \quad [x + m] = [x] + m,\ m \in Z \ (16)$$

ўринлидир.

1- мисол. Тенгламани ечинг: $[x + 1,8] = -7$.

Ечиш. (13′) муносабатга кўра: $-7 \leqslant x + 1,8 < -7 + 1$ ёки $-8,8 \leqslant x < -7,8$. *Жавоб.* $[-8,8; -7,8[$.



96- расм.

2- мисол. Тенгламани ечинг: $\{x - 1,4\} = \{-2,7\}$.

Ечиш. $\{-2,7\} = -2,7 - [-2,7] = -2,7 - (-3) = 0,3$ ва (15) га асосан $\{x-1,4\} = \{x-0,4-1\} = \{x-0,4\}$ бўлгани учун берилган тенглама

$$\{x-0,4\} = 0,3$$

кўринишни олади. Бундан: $x - 0,4 = m + 0,3$; $m \in Z$ ёки $x = m + 0,7$. *Жавоб.* $\{x \mid m + 0,7, m \in Z\}$*.

Машқлар

57. 1) 5,7; 2) 41; 3) $-7,9$; 4) $-0,71$; 5) $-10,01$ сонлар берилган. Бу сонларнинг бутун қисми, каср қисми топилсин.

Тенгламани ечинг:

58. 1) $\{x\} = 0,99$; 2) $\{x\} = 0$; 3) $\{x-0,4\} = 0,9$; 4) $\{x+5,7\} = 0,1$.

59. 1) $\{x + 0,8\} = \{1,1\}$; 2) $\{x - 0,8\} = \{0,9\}$; 3) $\{x + 5,7\} = \{-2,9\}$; 4) $\{0,5\} = [2x + 1,4]$.

60. 1) $\{2x\} = 1$; 2) $\{4x - 3\} = 0,4$; 3) $\{5x + 1,4\} = \{4,9\}$; 4) $\{10x - 0,3\} = \{7,1\}$.

61. 1) $[3x] = 7$; 2) $[6x + 1,4] = [2]$; 3) $[4x - 3,2] = [1,3]$; 4) $[5x + 4,8] = [-1,1]$.

62. Функциянинг графигини чизинг:
1) $y = 2[x]$; 2) $y = 3\{x\}$; 3) $y = \{x\} + 3$; 4) $y = |[x]|$.

8-§. Ўнли логарифмнинг характеристикаси ва мантиссаси

Координаталар текислигида x ўқида 1 см ни 1 бирлик қилиб, y ўқида 10 см ни 1 бирлик қилиб $y = \lg x$ функциянинг графиги чизилган бўлса (93-расм), бу графикдан фойдаланиб, $1 \leqslant x \leqslant 10$ бўлганда $\lg x$ қийматини топа оламиз. Масалан, $\lg 2,8 \approx 0,45$; $\lg 7,3 \approx 0,86$; $\lg 530$ ни топиш керак бўлсин. $\lg 530 = \lg 10^2 \cdot 5,3 = \lg 10^2 + \lg 5,3 = 2 + \lg 5,3$. Графикдан $\lg 5,3 \approx 0,72$ эканини топсак, $\lg 530 \approx 2 + 0,72 = 2,72$ бўлади.

x нинг берилган қийматига тегишли $\lg x$ нинг қийматини $y = \lg x$ графигидан фойдаланиб топиш анча қийин бўлгани учун В. М. Брадиснинг „Тўрт хонали математик жадваллар“ (XIII жадвал) идан фойдаланилади.

Ўнли логарифм жадвалларидан фойдаланишга ёрдам берадиган тушунчалар билан танишайлик.

Ҳар қандай мусбат x сонини $x = a \cdot 10^n$ (бундан $1 \leqslant a < 10$, $n \in Z$) кўринишда ёзиш мумкин, бунда n га

* $\{x \mid m + 0,7, m \in Z\}$ ёзув x нинг қийматлари (тенгламанинг ечими) $m \in Z$ бўлганда $m + 0,7$ кўринишдаги барча сонлар тўпламидан иборат эканини билдиради.

x сонининг тартиби дейилади. Масалан, $7440=7,44\times \times 10^3$ сонининг тартиби 3 га, $0,0978=9,78\cdot 10^{-2}$ сонининг тартиби -2 га тенг. $x=7440$ сонининг логарифмини топайлик.

$$\lg 7440 = \lg(7,44\cdot 10^3) = \lg 7,44 + \lg 10^3 = \lg 7,44 + 3,1 < 7,44 < 10$$

бўлганидан $\lg 1 < \lg 7,44 < \lg 10$ ёки $0 < \lg 7,44 < 1$. Демак, x сони логарифмининг бутун қисми шу соннинг тартибига тенг, яъни $[\lg x]=3$ га, каср қисми эса 7,44 нинг логарифмига тенг, яъни $\{\lg x\} = \lg 7,44$.

Таъриф. *Соннинг ўнли логарифмининг бутун қисми унинг характеристикаси, каср қисми эса мантиссаси дейилади.*

$7,44\cdot 10^3$ сони логарифмининг характеристикаси 3 га, мантиссаси $\lg 7,44$ га; $2,78\cdot 10^{-2}$ сони логарифмининг характеристикаси -2 га, мантиссаси $\lg 2,78$ га тенг.

Теорема. *$a\cdot 10^n$ сон* (бунда $1\leqslant a<10$ ва $n\in Z$) *логарифмининг характеристикаси шу соннинг тартиби n га, мантиссаси эса* $\lg a$ *га тенг.*

Исбот. $x=a\cdot 10^n$ ва $1\leqslant a<10$ ҳамда $n\in Z$ бўлса, $\lg x=\lg a+\lg 10^n$ ёки $\lg x = n+\lg a$ бўлади ($0\leqslant \lg a< < 1$). Бунда $n=[\lg x]$, $\lg a = \{\lg x\}$ бўлади, яъни $\lg a = =[\lg x]+\{\lg x\}$.

Натижа. Соннинг вергули n хона ўнгга (чапга) сурилса, унинг ўнли логарифмининг характеристикаси n бирлик ортади (камаяди), мантиссаси эса ўзгармайди.

351 нинг вергулини 2 хона ўнгга сурсак 35100, 3 хона чапга сурсак 0,351 ҳосил бўлади. Шу сабабдан: $\lg 351=\lg 3,51\cdot 10^2 = 2+\lg 3,51$, $\lg 35100 = \lg 3,51\cdot 10^4 = =4+\lg 3,51$, $\lg 0,351=\lg 3,51\cdot 10^{-1} = -1+\lg 3,51$.

Ўнли логарифм характеристикасини топишда унинг қуйидаги икки хоссасидан фойдаланиш мумкин:

1) 1 дан катта сон ўнли логарифмининг характеристикаси бу соннинг бутун қисмини ташкил этувчи рақамлар сонидан битта кам бўлган сонга тенг.

Масалан, $\lg 741,8$ нинг характеристикаси 2 га тенг, чунки бутун қисми учта рақамли сон. Ҳақиқатан ҳам

$$\lg 741,8 = \lg 7,418\cdot 10^2 = 2+\lg 7,418;$$

2) 1 дан кичик мусбат ўнли касрнинг ўнли логарифмининг характеристикаси берилган ўнли касрнинг

биринчи қийматли рақамигача бўлган ноллар сони (ноль бутун билан бирга) нечта бўлса, ўшанча манфий бутун сондир.

Масалан, $\lg 0,0047$ нинг характеристикаси -3 га, $\lg 0,784$ нинг характеристикаси эса -1 га тенг.

Машқлар

63. $y = \lg x$ нинг графигидан фойдаланиб топинг (93- расм):

1) $\lg 4,7$; 2) $\lg 8,5$; 3) $\lg 37$; 4) $\lg 6700$; 5) $\lg 0,028 = \lg 10^{-2} \cdot 2,8$.

64. Сонни $a \cdot 10^n$ (бунда $1 \leqslant a < 10$ ва $n \in Z$) шаклда ёзинг ва логарифмининг характеристикасини топинг:

1) 592, 2) 39480; 3) 2,41, 4) 0,0784; 5) 0,00024.

65. $\lg 3 \approx 0,477$ ва $\lg 5 \approx 0,699$. Қуйидагиларни топинг:

1) $\lg 30$; 2) $\lg 0,3$; 3) $\lg 500$; 4) $\lg 0,005$; 5) $\lg 27$; 6) $\lg 25$.

66. $\lg x$ нинг характеристикаси ва мантиссасини топинг:

1) $\lg x = 5,083$; 2) $\lg x = 1,554$; 3) $\lg x = -2,713$. 4) $\lg x = -7,081$.

67. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\lg 375 - \lg 37,5$ 2) $\lg 0,0037 - \lg 37$; 3) $\lg 3 + \lg 2 - \lg 7$.

68. Сон ўнли логарифмининг характеристикасини топинг:

1) 47,08; 2) 1088; 3) 0,719; 4) 0,0009; 5) 9,870.

9-§. Ўнли логарифм ва антилогарифм жадваллари

Мусбат сонларнинг ўнли логарифмларининг бутун қисми (характеристикаси) 8- § даги теоремадан фойдаланиб топилади, каср қисми (мантиссаси) эса (0,0001 аниқликда) Б. М. Брадиснинг „Тўрт хонали математик жадваллар" китобидан (XIII жадвалдан) топилади.

Масалан, $\lg 483$ нинг характеристикаси 2 га тенг. Мантиссаси эса 48- сатр билан 3-устун кесишган жойидаги 6839 сонни аниқлаб, 0,6839 экани топилади. Демак, $\lg 483 = 2 + 0,6839 = 2,6839$;

$\lg 4618$ нинг характеристикаси 3 га тенг. Мантиссасини топиш учун 46-сатр билан 1-устун кесишган жойдаги 6637 сонга шу сон турган сатрдаги 8 рақамга тўғри келган тузатма 7 ни қўшсак, 6644 ҳосил бўлади. Демак, $\lg 4618$ нинг мантиссаси 0,6644 га тенг. У ҳолда $\lg 4618 = 3,6644$;

$\lg 0{,}004629$ нинг характеристикаси — 3 га, мантиссаси $\lg 4629$ нинг мантиссаси 0,6654 га тенг, яъни $\lg 0{,}004629 = -3 + 0{,}6654 = -2{,}3346$.

Ўнли логарифм жадвали ёрдами билан логарифми маълум бўлган сонни топиш мумкин, масалан, $\lg y = 2{,}7102$ бўлса, y ни топиш (тескари масалани ечиш) мумкин. Аммо $\lg y = 2{,}7102 \Leftrightarrow y = 10^{2{,}7102}$ бўлганидан y ни 10^x функциянинг қийматлари (ўнли антилогарифмлар) жадвалидан (XIV жадвал) фойдаланиб топиш қулай.

Масалан, $x = 0{,}367$ бўлса, $y = 10^{0{,}367}$ нинг қийматини топиш учун 36-сатр ва 7-устуннинг кесишган жойидаги 2328 сон топилади. $10^0 < 10^{0{,}367} < 10^1$ ёки $1 < 10^{0{,}367} < 10$ бўлганидан изланувчи сон $\approx 2{,}328$ бўлади; агар $x = 0{,}3678$ бўлса, $y = 10^{0{,}3678}$ ни топиш учун топилган 2328 сонига 36-сатр ва 8-устуннинг кесишган жойида турган 4 тузатмани қўшиб, 2332 ни ҳосил қиламиз. Демак, $y = 10^{0{,}3678} \approx 2{,}332$.

Логарифми маълум бўлган сонларни топишда ҳам ўнли антилогарифмлар жадвалидан фойдаланилади.

1 - мисол. $\lg y = 2{,}7124$. y ни топинг.
$\lg y = 2{,}7124 = 2 + 0{,}7124$ бўлгани учун $y = 10^x$ функциянинг қийматлари (ўнли антилогарифмлар) жадвалидан $\lg y$ нинг мантиссаси 0,7124 га мос келувчи 5,157 сонини топамиз. $5{,}157 \cdot 10^n$ $(n \in z)$ кўринишидаги исталган сонниг мантиссаси 0,7124 га тенг. Изланувчи сонниг характеристикаси 2 га тенг бўлгани учун изланувчи сон $y \approx 5{,}157 \cdot 10^2 = 515{,}7$ бўлади. *Жавоб.* $y \approx 515{,}7$.

2 - мисол. $\lg y = -2{,}6247$. y ни топинг.
$\lg y = -2{,}6247 = -3 + 0{,}3757$. Мантиссаси 0,3757 бўлган сон $2375 \cdot 10^n$ $(n \in z)$ кўринишида бўлиб, характеристикаси -3 га тенг бўлгани учун $y \approx 2{,}375 \cdot 10^{-3} = 0{,}002375$. *Жавоб.* $y \approx 0{,}002375$.

Машқлар

69 В. М. Брадис жадвалидан фойдаланиб, сонниг ўнли логарифмини топинг: 83; 304 4071; 837108; 70007; 0,0003; 0,0447; 3,008.

70. Тенгламанинг ечимини ёзинг: 1) $[\lg x] = 0$; 2) $[\lg x] = 1$; 3) $[\lg x] = -2$; 4) $[\lg x] = [-3; 4]$.

71. Агар: 1) $\{\lg x\} = 0{,}3471$; 2) $\{\lg x\} = 0{,}074$; 3) $\{\lg x\} = \{4{,}6972\}$ бўлса, x сони қандай кўринишда бўлади?

72. Ўнли логарифми берилган сонни топинг: 1) 0,2015; 2) 3,5172 3) 2,5132; 4) 0.0347.

10-§. Ўнли логарифмнинг тўрт хонали жадваллари ёрдамида ҳисоблаш

Ҳисоблашда ўнли логарифмларнинг ҳамда ўнли антилогарифмларнинг тўрт хонали жадвалларидан фойдаланиш ишни осонлаштиради.

1-мисол. Ҳисобланг: $x = 2 \cdot \lg 31{,}83 + 4 \cdot \lg 113{,}8 - 3 \cdot \lg 0{,}08791$.

Ечиш. Ўнли логарифмлар жадвалларидан тегишли қийматларни қўйиб, ҳисоблаймиз:

$$x = \left| \begin{array}{l} 2 \cdot \lg 31{,}83 \\ 4 \cdot \lg 113{,}8 \\ -3 \cdot \lg 0{,}08791 \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{l} 2 \cdot 1{,}5028 \\ 4 \cdot 2{,}0561 \\ -3(-2+0{,}944) \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 3{,}0056 \\ 8{,}2242 \\ -3(-1{,}056) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 3{,}0056 \\ 8{,}2244 \\ 3{,}168 \end{array} \right|$$

$$x \approx 14{,}398$$

Ҳисоблашда $\lg 0{,}08791 = \lg 8{,}791 \cdot 10^{-2} = -2 + \lg 8{,}791 \approx \approx -2 + 0{,}944$ экани эътиборга олинди. *Жавоб* $x \approx \approx 14{,}398$.

2-мисол. Ҳисобланг: $x = 1{,}478^2 \cdot \sqrt[3]{73{,}64}$.

Ечиш. $x = 1{,}478^2 \cdot (73{,}64)^{\frac{1}{3}}$ тенгликни логарифмлаймиз:

$$\lg x = 2\lg 1{,}478 + \frac{1}{3} \lg 73{,}64.$$

Ўнли логарифм жадвалидан фойдаланиб, $\lg x$ ни топамиз:

$$\lg x = \left| \begin{array}{l} 2 \cdot \lg 1{,}478 \\ \frac{1}{3} \lg 73{,}64 \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{l} 2 \cdot 0{,}1697 \\ \frac{1}{3} \cdot 1{,}8671 \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{l} 0{,}3394 \\ 0{,}6224 \end{array} \right|$$

$$\lg x \approx 0{,}9618$$

Энди ўнли логарифмлар жадвалидан $x \approx 9{,}158$ эканини топамиз. *Жавоб.* $x \approx 9{,}158$.

3-мисол. Ҳисобланг: $x = \frac{4{,}673^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}8326}}{0{,}9174^2}$.

Ечиш. Тенгликнинг ўнг қисмини даражалар кўпайтмаси шаклида ёзиб оламиз:

$$x = 4{,}673^4 \cdot (0{,}8326)^{\frac{1}{3}} \cdot (0{,}9174)^{-2}.$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмини логарифмлаймиз:

$$\lg x = 4\lg 4{,}673 + \frac{1}{3}\lg 0{,}8326 - 2\lg 0{,}9174.$$

Ўнли логарифмлар жадвалларидан тегишли қийматларни топиб, ҳисоблашни қуйидагича бажарамиз:

$$\lg x = \left|\begin{array}{l} 4\lg 4{,}673 \\ \frac{1}{3}\lg 0{,}8326 \\ -2\lg 0{,}9174 \end{array}\right| \approx \left|\begin{array}{l} 4 \cdot 0{,}6696 \\ \frac{1}{3}\cdot(-1+0{,}9204) \\ -2(-1+0{,}9626) \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{l} 2{,}6784 \\ \frac{1}{3}(-0{,}0796) \\ -2(-0{,}0374) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} 2{,}6784 \\ -0{,}0265 \\ 0{,}0748 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} 2{,}6519 \\ \\ 0{,}0748 \end{array}\right|$$

$$\overline{\lg x = 2{,}7267.}$$

Энди x нинг қийматини ўнли антилогарифмлар жадвалидан топамиз. *Жавоб.* $x \approx 533$.

4-мисол. Тенгламани ечинг: $3^x = 200$.

Ечиш. Тенгликнинг ҳар икки қисмини логарифмлаймиз: $x\lg 3 = \lg 200$. Бунда $x = \frac{\lg 200}{\lg 3}$.. $\frac{\lg 200}{\lg 3}$ ифоданинг тақрибий қийматини ўнли логарифм жадвалидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$x = \frac{\lg 2 + \lg 100}{\lg 3} = \frac{2 + \lg 2}{\lg 3} \approx \frac{2 + 0{,}301}{0{,}4771} = \frac{2{,}301}{0{,}4771} = \frac{23010}{4771} \approx 4{,}8229.$$

$x \approx 4{,}8229$.

5-мисол. Тенгламани ечинг: $x^6 = 73$.

Ечиш. Дастлаб логарифмлаймиз, сўнгра ўнли логарифм ҳамда ўнли антилогарифм жадвалларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$6\lg x = \lg 73$ ёки $\lg x = \frac{1}{6}\lg 73 \approx \frac{1}{6}\cdot 1{,}8633 = 0{,}3106$. $\lg x \approx$ $\approx 0{,}3106$. У ҳолда $x \approx 2{,}045$.

Машқлар

x нинг тақрибий қийматини топинг:

73. 1) $x = 7\lg 1{,}389 + 2\lg 41{,}37 + 5\lg 107{,}8$; 2) $x = 3\lg 0{,}7891 + 2\lg 0{,}0903 + 1{,}4304$; 3) $x = 11\lg 102{,}4 - 21\lg 54{,}31 + 5\lg 0{,}7145$; 4) $x = 2\lg 0{,}07109 - 5\lg 0{,}4178 + 3\lg 10{,}71$.

Ўнли логарифмлар ва ўнли антилогарифмлар жадваллари ёрдамида ҳисобланг:

74. 1) $x = 3{,}897^4$; 2) $x = 2{,}708^{-3}$; 3) $x = \sqrt[3]{471{,}8}$; 4) $x = \sqrt[3]{0{,}007946}$.

75. 1) $57{,}81^2 \cdot 0{,}7849^3$, 2) $109{,}7^3 \cdot \sqrt[3]{71{,}83}$; 3) $\dfrac{14{,}8^3}{\sqrt{4977}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{97{,}81}}{3{,}7648^3}$;
5) $\dfrac{37{,}83^2 \cdot \sqrt[3]{69{,}81}}{80{,}93}$; 6) $\dfrac{\sqrt{7493}}{0{,}9107^2 \cdot \sqrt{41{,}78}}$.

ЖАВОБЛАР

I боб. **1.** 2) $\{0; a\}$; 4) $\{0; a\}$; 6) $\{0; a; m; n; p\}$. **2.** 2) $\{a; b; c\}$. **15.** 2) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$; 4) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. **17.** 2) 6. **19.** 2) 81; 4) 90. **21.** 2) 36; 4) 72, 6) 216, 8) 15660. **23.** 2) а) бўлинмайди, б) бўлинади. **25.** 2) мумкин. **27.** 2) тўғри, 4) тўғри. 6) нотўғри. **29.** 2) N, 4) $\{5; 7\}$. **30.** 2) тўғри бўлади. **31.** 2) $7k(k \in Z_0)$. **32.** 2) $70\ n$ $(n \in Z)$. **33.** 2) $11k+10$ $(k \in Z_0)$ **34.** 2) $10k+1(k \in Z_0)$. **37.** 2) 1. **41.** 2) $\frac{5}{8} > \frac{14}{32}$, 4) $\frac{3}{11} > \frac{13}{44}$. **43.** 2) 11. **44.** 2) 7 марта катта. **45.** 2) а) $2 < n < 5$; б) $50 < n < 100$. **60.** 2) 39, 57; 4) 14, 02. **61.** 2) 9, 85. **65.** 2) 0.56; 4) 311, 11. **66.** 2) 3, 21; 4) 3,75; 6) 4,235. **71.** 2) $11\frac{17}{24}$; 4) $\frac{2}{9}$. **80.** 2) $\frac{3}{4}$, 4) $\frac{49}{80}$. **81.** 1) 3. **82.** 245 кг. **83.** $76\frac{2}{3}$ кг. **84.** $\frac{13}{16}$ км. **87.** 2) $1\frac{31}{32}$; 4) 4; 6) $1\frac{2}{3}$. **89.** 1080 га. **92.** 148,5 сўм. **95.** 2) 400. **96.** 140. **97.** 104. **100.** 20%. **110.** 2) нотўғри, 4) нотўғри. **111.** 2) тўғри; **112.** 2) Q, 4) Q, 6) Z_0, 8) Q_0. **113.** 2) тўғри, 4) тўғри. **114.** 2) $x \geqslant y$ бўлган ҳолда тўғри, 4) $y \neq 0$ бўлган ҳолда тўғри. **115.** 2) $\{-2; -1\}$. **125.** 2) 28. **127.** 6) тўғри. **128.** 2) 35,7; 4) 7,5. **129.** 2) $-17{,}1$, 4) 12,3.

II боб. **7.** 2) $\{-6\}$; 4) $\{0, -0{,}7\}$; 6) $\left\{\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{3}\right\}$. **8.** 2) $\left\{\frac{6}{7}\right\}$. 4) $\left\{\frac{1}{14}\right\}$. **9.** 2) $\varnothing$; 4) барча сонлар тўплами. **10.** 2) $]-\infty; 3[$; 4) $]-\infty; -2[$. 6) $[0{,}9[$. **23.** 2) функция: қийматлар тўплами $\{0, -1, -2, -3; -4, -5\}$. **26.** 1) $[-2; 4]$, $[-1; 2]$, 2) $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2{,}5) = 1{,}25$; 3) $x = 3$, $x = 2$, $x = -2$ бўлганда; 4) $x = 0$ бўлса, $f(0) = 0$, $x \in [-2; 0[$ бўлса, $f(x) < 0$, $x \in]0; 4]$ бўлса, $f(x) > 0$. 42. 2) $y = -\frac{2}{3}x$. **47.** 1) $y = x$; 2) $y = -x$; 4) $y = -\frac{1}{2}x$; 6) $y = -3x$. **50.** 2) $y = -x$. **51.** 2) $[0; -7]$. **60.** 2) $[3; 12]$, функция графиги II ва IV координата чоракларига жойлашган бўлади (нуқталарнинг координаталари ҳар хил ишорали сонлар бўлгани учун).

III б о б. 8. 2) 1; 4) 0,008; 6) $(-5)^{4m}$. 10 2) $25 \cdot 10^{8}$, 4) 16; 14. 2) $a=-50$. 18. 2) $]-\infty; 0[$; 4) $\{0; 1; 4\}$. 20. 2) тегишли 4) тегишли эмас. 24. 2) $[-2,4; 2,4]$, 3) $[-5,6\ 44,8[$. 2?. а) $\{-1, 0; 1\}$; б) $]-1; 0[\cup]1; \infty[$; в) $]-\infty; -1[\cup]0; 1[$. 30. 2) $5bc^{4}$. 33. 2) $-13b^{2}$; 4) $4,52x$. 34. 2) $7ab^{3}-7ab+2c$; 4) $-2,25xy^{2}+0,3x^{2}y-5,5xy$. 39. 4) $-2\frac{4}{5}n$; 6) $5,9x^{2}y^{n}$. 42. 2) $5x^{2}y-6xy^{2}-3xy-11y^{3}+7y^{2}$; 4) $5x^{n-1}-7x^{2m}+2x^{2}+x^{m+1}$. 45. 2) $y^{n+2}-y^{n}+y^{n-2}$; 4) $2b^{2n-5}-6b^{2n}+8b^{2n+1}$. 50. $y^{5}-1$. 51. 2) $x^{n+3}+x^{n+1}-x^{n}+x^{n-1}+b^{n-3}$. 56. 6) $25x^{2}y^{4}-9z^{2}$. 57. 6) $a^{4}\left(\frac{9}{16}c^{6}-d^{6}\right)$. 58. 2) $x^{4n}-25y^{2n}$; 4) $81-b^{8}$. 59. 2) $a^{2}-b^{2}-c^{2}-2bc$; 4) $a^{4m-4}-\frac{1}{16}b^{4n}$. 60. 2) $3bc$. 66. 2) $4a^{2m+2}-2a^{m+1}b^{n-1}+\frac{1}{4}b^{2n-2}$. 67. 2) $m^{8}-9m^{4}n^{4}+16n^{8}$; 4) $m^{16}-32m^{8}+256$. 70. 4) $c^{6}-3c^{4}d^{3}+3c^{2}d^{6}-d^{9}$. 71. 4) $n^{6}-6mn^{6}+12m^{2}n^{3}-8m^{3}$. 72. 4) $x^{3n}-3x^{2n}+3x^{n}-1$. 75. 2) $8z^{3}-c^{3}$, 4) $m^{6}-27n^{2}$; 6) $x^{6n}y^{3}-z^{3n}$. 76. 2) $x^{6}-64$; 4) $x^{12}-729$. 82. 2) $-\frac{7}{5}x^{2m}y^{n-1}$; 4) c^{3n-9}; 6) z^{2n}. 85. 2) $-\frac{3}{2}x^{2}y^{2}+x^{3}-\frac{3}{2}xy^{6+n}+\frac{5}{2}x^{n+1}y$. 91. 2) $y^{n-2}(y^{2}-y-1)$; 4) $2c^{n-1}(2c^{2n}+6c^{n}-3)$, $n\in N$. 93, 2) $(m^{2}-n)(a-b-1)$; 6) $2y(x^{2}-y^{2})$. 94. 2) $\left\{\frac{3}{5}; \frac{1}{3}\right\}$; 4) $\left\{-\frac{3}{3}; 0; \frac{1}{5}\right\}$. 97. 2) $(b^{2}+1)(b^{2}+3)$, 4) $(1+z)(3-z)$. 98. 2) $(3a-c)(a-5ab+2b^{2})$; 4) $(y-c)(y-a)(y+b)$. 99. 2) $(2^{n-1}-1)(5^{n-1}-2^{n+1})$. 103. 2) $(2ab^{3}-5)(4a^{2}b^{6}+100b^{3}+25)$; 6) $2(12a^{2}+1)$. 104. 2) $(2^{m}-5)(2^{m}+5)$ 6) $(y^{n}-3x^{n+1})^{2}$. 105. 2) $(5+3^{n})(25-5\cdot 3^{n}+3^{2n})$, 4) $(4^{2n}-2^{n-1})(4^{4n}+2^{2n-2}+2^{5n-1})$. 107. 2) $\{-6; 2\}$. 111. 2) $8a(1-a)^{3}$; 4) $(c+1)(3c^{2}-2c+3)$. 112. 2) $(y+x-z)(y-x-z)$; 6) $(4m+2n-3p)(4m-2n+3p)$; 8) $2m^{4}(a-2b)(a^{2}+2ab+4b^{2})(3-2m)(3+2m)$. 114. 2) $(x-y+z)(x^{2}+y^{2}+xy)$; 4) $(5^{n}-2^{n}-10^{n})(5^{n}-2^{n}+10^{n})$. 115. 2) $(a^{4}-a^{2}+1)(a^{4}+a^{2}+1)$. 126. 2) $x+4y$; 4) $3a+2b$. 127. 2) $a^{m+1}-a^{m+2}$. 129. 2) $a^{4n}b^{2n}-2a^{2n}b^{4}+4$.

IV б о б. 7. 2) $a=4$. 8. 2) $b=8$, $k=4$. 10. $y=-3x+3$; 4) $y=-2x-4$. 11. д) $y=-\frac{1}{2}x+1$, $x\in[-2; 2]$; 3) $y=\frac{1}{2}x+2$, $x\in\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. 12. 2) $\frac{2}{3}$; 4) илдизга эга эмас; 6) 0.

13. 2) $\left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$; 4) (0, 0). 15. 2) функция $]-\infty;\ 0[$ оралиғида мусбат, $]0;\ \infty[$ оралиғида манфий, 4) $]-\infty;\ -2[$ оралиғида манфий, $]-2;\ \infty[$ оралиғида мусбат. 22. 44-*в* расм. Аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ \infty[$, илдизлар тўплами $\{-3;\ 0;\ 2;\ 6\}$; $]-\infty;\ -1{,}5[$ ва $]1;\ 4[$ оралиқларда ўсади, $]-1{,}5;\ 1[$ ва $]4\ \infty[$ оралиқларида камаяди; $]-3;\ 0[$ ва $]2;\ 6[$ оралиқларда мусбат. $]-\infty;\ -3[$, $]0;\ 2[$ ва $]6;\ \infty[$ оралиқларда манфий. 28. 2) $b=-2\Rightarrow|b|=2$; 4) $2x=0\Rightarrow x-$ $-x=0$; 6) $\frac{2y-1}{5}=0\Leftrightarrow 2y-1=0$. 32. 4) $x^2-x=0\Leftrightarrow x^2=x$.

37. 2) $\{2\}$; 4) $\{3\}$. 38. 2) барча сонлар тўплами. 4) $\{-2\}$. 39. 2) $\{-3\}$, 4) $\{316\}$. 40. 2) 9 ва 15. 41. 2) 36 ва 30. 42. 2) 36 ва 27. 43. 10 сўм 40 тийин. 44. 2) 750 сўм. 45. 2) соат 8у 15 минутда. 46. 150 литр ва 50 литр. 48. 350 км. 51. 2) $\{-1;\ 1{,}8\}$; 4) $\{-0{,}3;\ 0{,}45\}$. 52 2) $\{0{,}005,\ -0{,}015\}$.

V боб 9. 2) $\{(3;\ 2)\}$; 4) $\{(4;\ -3)\}$. 10. 2) $\{(10;\ 5)\}$, 4) $\{(4;\ 25)\}$. 11. 2) $\{(-4;\ 3)\}$. 12. 2) $\{(11;\ 11)\}$. 13. 2) 48 ва 36. 14. 2) $\frac{3}{5}$. 15. 2) 80 тийин ва 1 сўм 60 тийин. 16. 2) 168 ва 52. 17. 7 сўм ва 5 сўм. 19. 150 сўм ва 120 сўм. 22. 2) 15 соат ва 25 соат. 23. 18 км/соат ва 2 км/соат. 24. 2) $\{(3;\ -1;\ 2)\}$, 4) $\{(4;\ -1;\ 2)\}$. 25. 2) $\{(4,\ 2;\ 3;\ 2)\}$. 26. 2) $\{(1;\ 3;\ -2)\}$; 4) $\{(-1,\ 2.\ -3;\ 4)\}$. 27. 2) $\left\{\left(1;\ \frac{1}{3}\right)\right\}$, 4) $\{(2;\ 3)\}$. 28. 2) $\{(3;\ 2;\ 1)\}$. 31. 2) $]-\infty;\ -2[\cup]-2,\ 2[\cup]2;\ \infty[$. 32. 2) а) $\{-1;\ 1\}$; б) $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ \infty[$. 33. 2) а) $a\neq\frac{3}{2}\ b$, б) $a=6$ ва $b=4$, в) $a=\frac{3}{2}\ b$, бунда $b\in]-\infty;\ 4[\cup]4;\ \infty[$ ёки $b=\frac{2}{3}\ a$, бунда $a\in]-\infty;\ 6[\cup]6;\ \infty[$.

VI боб. 2. 2) $]-\infty;\ -1{,}5[\cup]-1{,}5;\ 0[\cup]0;\ \infty[$; 4) $[-\infty;\ \infty[$. 3. 2) $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ \infty[$; 4) $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 3[\cup]3;\ \infty[$. 4. 2) $c=d=0$ 4) $m=0$ ва n—ихтиёрий сон ёки $n=-1$ ва m—ихтиёрий сон. 5. 2) $\{-1\}$, 4) $\{-1;\ 1\}$, 6) $\{3\}$. 6. 2) $\{-2;\ 2\}$. 7. 2) $f(0)=7$. 10. 2) $-\frac{5m}{4n}$; 4) $\frac{y-2}{y+1}$; 6) $\frac{x+y+z}{x+y-z}$. 11. 2) $\frac{x^{10}}{x^n+x^2}$. 15. 2) $\frac{x+y}{y-6}$. 4) $\frac{-bz}{a(3x+2z)(a+b)}$. 16. 2) $\frac{1}{b^5c^2}$. 19 2) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{x+3}$; 4) $\frac{a^{2(n+1)}}{b^{n+11}}$.

24. 3) $\frac{x^2-4xy-y^2}{(x^2-y^2)^2}$. **25.** 2) {3}. **27.** 2) $\frac{x(x+y)}{b(y-b)}$. **28.** 2) $\frac{4m\cdot n}{m^2-n^2}$; 3) $-\frac{3}{4}$. **35.** 2) 1. **36.** 2) $-\frac{b^2-1}{b^2+1}$. **40.** 2) {−3}; 4) {6}. **41.** 2) {−23}, 4) ∅. **42.** 2){1}, 4) ∅. **43.** 2) $\frac{5}{3}$. **44.** 18 кун. **45.** 18 км/соат ва 45 км/соат. **47.** 2) $\{a(m-n)\}$; 3) ечимлар тўплами $a\neq b$ бўлса, $\left\{\frac{c}{a-b}\right\}$, $a=b$ бўлганда: $c=0$ бўлса, $]-\infty;\infty[$, $c\neq 0$, бўлса, ∅; 4) ечимлар тўплами: $b\neq 1$ бўлса, $\left\{\frac{m}{1-b}\right\}$, $b=1$ бўлганда, $m=0$ бўлса, $]-\infty;\infty[$, $m\neq 0$ бўлса, ∅.

VII б о б. **5.** 2) $]-6;\infty[$; 4) $]-\infty;-0{,}5[$. **6** 4) $]-\infty;2\frac{11}{16}[$. **7.** 2) $]1{,}2;\infty[$; 4) $]6{,}5;\infty[$. **8.** 2) $4{,}7<8{,}9<9{,}4$; 4) $-10<-5<-1{,}4$. **9.** 2) $-11{,}1<-9{,}2<-7{,}3$; 4) $3{,}3<6{,}5<10{,}6$; 6) $10<42<110$. **10.** 2) $\left]\frac{7}{10};8\right]$; 4) ∅. **11.** 2) $\left[-2;\frac{5}{3}\right]$; 4) $]-\infty;-1[\cup]-\frac{1}{6};\infty[$. **12.** 2) {1; 2; 3}. **13.** 2) {1}. **14.** 2) $]-3;-2[\cup]2;3[$. **15.** 2) $[1;8\frac{1}{3}[$. **16.** 3) $]-\infty;-2[$; 4) $]-\infty;3[$; 3) $]-2,3[$. **18.** 2) $]-\infty,0[\cup]0;\infty[$; 4) $]-\infty;\infty[$. **19.** 2) $]-\infty;2{,}5[\cup]2{,}5;\infty[$; 4) $]-\infty;-1{,}4[\cup]1;\infty[$; 5) $\left]-\frac{1}{2};1\right[$. **20.** 2) $]-2{,}5;1[$; 4) $]-\infty;0{,}4[\cup]0{,}4;1[\cup]1;\infty[$. **22.** 2) $]-\infty;-2[\cup]-2;\infty[$; 4) $c\in]-\infty;0[\cup]0;\infty[$ ва $b\in]-\infty;\infty[$. **26.** 2) 0,2; 4) 0,03. **28.** 2) 7,27. **29.** 2) 0,000004; 4) 0,0025. **30.** 2) $4{,}5<x<4{,}9$. **31.** 2) $4{,}8<x<5{,}2$; 4) $7{,}87<x<7{,}93$. **32.** 2) бўла олмайди. **34.** 3,83; 3,832; 3,834. **36.** 2) 0,92 ортиғи билан олинган яқинлашиш, 4) 71 ками билан олинган яқинлашиш. **37.** 2) 0,769 ками билан олинган яқинлашиш. **39.** 2) $11<2x-3<13$; 4) $2{,}4<4-0{,}2x<2{,}6$. **41.** 2) $-0{,}6<a<3$ **43.** 2) а) $17<a+x<20$; б) $-5<a-x<-2$; в) $70<ax<96$; г) $\frac{7}{12}<a:x<\frac{4}{5}$. **47.** 2) а) $6{,}7<a+b+c<7$; б) $3{,}1<ab<3{,}69$.

VIII б о б. **10.** 2) Z_0; 4) Z. **11.** 2) тўғри. **13.** 2) тўғри; 4) $b\neq 0$ бўлса тўғри. **14.** 2) маънога эга; 4) маънога эга эмас. **15.** 2) $]-\infty;0]$; 4) {0}; 6) $[-4;\infty[$; 8) $]-\infty;+\infty[$. **16.** 2) $]1;3[$. **17.** 2) x ва y қарама-қарши ишоралар сонлар бўлса ёки x ва y дан камида биттаси ноль бўлса, 4) $x=0$ ва $y\in R$ ёки $y=0$ ва $x\in R$ бўлса.

18, 2) $x=\sqrt{5}\approx 2{,}236$ ёки $x=-\sqrt{5}\approx 2{,}236$; 4) $x=\sqrt{5{,}5}\approx 2{,}345$ ёки $x=\sqrt{5{,}5}\approx -2{,}345$. 19. 2) $\{0{,}6;\ -0{,}6\}$; 4) $\left\{-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right\}$. 21. 2) $\left\{1\frac{1}{2}\right\}$; 4) $\varnothing$. 30. 2) $[0;\ 12[$; 31. 2) $[0;\ 4]$. 32. 2) $\left[-1\frac{1}{2};\ \infty\right[$; 4) $]-\infty;\ -1[\cup]-\frac{1}{2};\ \infty[$; 6) $\left[-\frac{1}{2};\ 1[\cup]-1;\ \infty\right[$. 33. 2) $23{,}4\cdot 10^2$; 4) $6\cdot 10^{-4}$; 6) $90{,}01\cdot 10^4$. 35. 2) 26, 29, 4) 901,7; 6) 0,8368. 36. 2) 3,651. 39. 2) $-\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{6}$, 6) $-3\sqrt{13}$. 41. 2) $\sqrt{7}(1-\sqrt{7})$, 4) $\sqrt{7}(1-2\sqrt{7})$, 6) $(2b-\sqrt{7})(2b+\sqrt{7})$. 42. 2) $\sqrt{3}+1$; 4) $\frac{\sqrt{a}-1}{2}$. 44. 2) *а*) $2-x$; в) $0{,}3(2-x)^3$. 45. 2) $8|n|$; 4) $11q^2|q|$. 49. 2) $-2b$; 4) $-(y+1)$. 51. 2) $]-\infty;\ 3]$; 4) $]-\infty;\ 3]$. 53. 2) $\{(2{,}9975;\ 3{,}0025)\}$. 54. 2) $|a|(1-a^2+a^4)$. 58. 2) $\sqrt{3}(2+\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{13}(\sqrt{2}+(\sqrt{13})$. 59. 2) 120; 4) 1700. 60. 4) $-2yz$; 6) ac^3; 8) $-4n$. 62. 2) 2,1; 4) $1\frac{9}{11}$. 63. 2) $\frac{n}{m}$; 4) $d\sqrt[3]{-d}$. 65. 2) $\frac{5p}{4q}$; 4) $-\frac{ab}{10|c|}$. 66. 1) $a>0$; 4) $bc>0$. 67. 2) $y^2|y|$; 4) агар $x>0$ бўлса, $x+1$, агар $x<0$ бўлса, $(-x+1)$. 69. 2) $11\sqrt{5}$; 4) $\frac{31}{\sqrt{10}}$; 6) $7\sqrt{6}+\frac{7}{2}\sqrt{11}$. 70. 2) $\sqrt{3}\approx 1{,}732$. 71. 4) $-c\sqrt{b}$; 6) $3b^3y^5\sqrt{by}$. 72. 2) $-3b\sqrt{-3b}$; 4) $-3y^2\sqrt{-5y}$. 74. 2) $21(7\sqrt{2}-1)$. 4) -18. 75. 4) $2(7-2\sqrt{6})$ 6) 294. 76. 2) $\left\{\frac{3}{25}\right\}$; 4) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. 79. 2) $b<0$; 4) $cd<0$ ёки $c=0$ ва $d\neq 0$. 80. 2) $-\sqrt{7y^2}$; 4) $\sqrt{11n^2}$; 6) $-\sqrt{\frac{2d^2}{3}}$; 8) $\sqrt{-3y^3}$. 81. 4) $\sqrt{(3x+2)(x^2+2x+3)}$. 82. 2) $\left\{-2\frac{1}{2};\ \frac{2}{5}\right\}$; 4) $\left\{-\frac{4}{5}\right\}$.

IX боб

1. 2) $\{-3;\ 1\}$; 3) $\varnothing$. 2. 2) $\{-1;\ 1{,}5\}$; 3) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. 4. 2) $n=28$. 5. 2) $a=3$; $b=-2$. 6. 2) $\{1;\ 3\}$; 3) $\{-13;\ 3\}$. 7. 2) $\{-1{,}5;\ 0{,}25\}$; 3) $\varnothing$. 8. 1) $\varnothing$; 3) $\left\{2\frac{1}{3}\right\}$. 9. 2) $\left\{0;\ \frac{1}{9}\right\}$; 3) $\left\{0;\ -4\frac{2}{3}\right\}$. 10. 2) $\left\{-\frac{9}{20}\ \frac{9}{20}\right\}$ 12. 2) $\{-4;\ 3\}$. 13. 2) $\{-5;\ -1\}$. 14. 2) $\left\{-1;\ \frac{3}{4}\right\}$;

4) $\left\{\frac{2}{3};\ \frac{5}{3}\right\}$. 15. 2) $\left\{-\frac{2}{3};\ 3\frac{1}{3}\right\}$; 16. 2) $\left\{-2\frac{1}{3};\ 1\frac{2}{3}\right\}$; 3) $\{-6;\ 4\}$. 17. 2) $\{4;\ 24\}$. 18. 2) $\{-6\}$. 19. 2) $\{0{,}6;\ 1\}$. 20. 2) $\{16\}$; 3) $\left\{-1\frac{1}{3};\ 16\right\}$. 21. 2) а) $]3;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ 3[$; 3) а) $\varnothing$; б) $]-\infty;\ 4[\cup]4;\ \infty[$. 22. 2) $]-4;\ 0[$. 23. 1) $\left\{3;\ 3\frac{1}{3}\right\}$; 2) $\left\{-1\frac{1}{2}\right\}$.
24. а) 9; 11 ва 13. 26. 13 м ва 16 м. 27. 15 кунда. 28. 16 команда. 29. 10 соат ва 15 соат. 30. 24 соат ва 20 соат. 33. 10 %. 36. 43,2 тонна. 37. а) мумкин (3, 4, 5); б) мумкин (6, 8, 10); в) мумкин эмас. 38. 20 л ва 10 л. 39. 1) $\{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$; 3) $\{-5;\ -1;\ 1;\ 5\}$. 40. 1) $\{-4;\ -3;\ 3;\ 4\}$; 2) $\{-5;\ -4;\ 4;\ 5\}$. 41. 2) $\left\{-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{2};\ \sqrt{3}\right\}$; 3) $\left\{-1;\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{6};\ 1\right\}$. 42. 2) $\{-3;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ 3\}$. 43. 2) $\{-1;\ 1;\ 2;\ 4\}$. 44. 2) $\{1-\sqrt{2};\ 1;\ 1+\sqrt{2}\}$. 45. 1) $\left\{2c;\ -\frac{c}{2}\right\}$; 2) $a\neq 3$ бўлса, $\left\{1;\ \frac{2}{a-3}\right\}$, $a=3$ бўлса, $\{1\}$.
46. 2) $|a|\neq|b|$ бўлса, $\left\{\frac{a}{a-b};\ -\frac{b}{a-b}\right\}$, $a=b\neq 0$ бўлса, $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. $a=-b$ бўлса, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $a=b=0$ бўлса $]-\infty;\ \infty[$. 48. 2) $9x^2-9x+2=0$. 52. 2) $e=\frac{3}{4}$. 53. 2) $m^2x^2+mpx+q=0$. 55. 2) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$. 60. 2) $y=a(x-4)^2-3$. 64. 2) $(0;\ 8)$, $(-2;\ 0)$, $(-4;\ 0)$; 6) $(0;\ 2)$, $(-1;\ 0)$. 69. 2) Аниқланиш соҳаси $]-\infty;\ \infty[$ тўплам, илдизлари -2 ва 4, $]-\infty;\ 1[$ оралиқда камаяди, $]1;\ \infty[$ оралиқда ўсади, $x=1$ бўлганда минимуми -9, $]-2;\ 4[$ оралиқда манфий, $]-\infty;\ -2[$ ва $]4;\ \infty[$ оралиқларда мусбат бўлиб, қийматлар соҳаси $]-9;\ \infty[$ дан иборат. 71. 3) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. 72. 2) $\{-1;\ -0{,}25;\ 0{,}25;\ 1\}$; 3) $\{-1-\sqrt{11};\ 0;\ -1+\sqrt{11}\}$. 76. 3) $a(a+1)(a+4)$. 77. 3) $b(b-3)(b-1)(b+1)(b+3)$. 78. 3) $4(a+1)\left(a+\frac{3}{4}\right)$.
79. 3) $x-3$; 4) $\frac{2(3x^2-1)}{3(2x^2-1)}$. 81. 2) $\varnothing$. 83. 2) $]-\infty;\ -3[\cup]0;\ 2]$.
84. 2) $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ 2[\cup]3;\ \infty[$. 85. 2) $]-\infty;\ -3[\cup]1;\ \infty[$; 3) $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ \infty[$; 4) $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ -1{,}5[\cup]1{,}5;\ \infty[$.

X боб. **1.** 2) бўлади; 4) бўлади. **2.** 2) тегишли; 4) тегишли. **4.** 2) $x^2+y^2=0{,}25$; 4) $x^2+y^2=0{,}0009$. **5.** 2) $r=37$. **8.** $\{(1; 0)\}$; 4) $\{(-1; 1)\}$. **9.** 2) $\{(1; 2)\}$. **10.** 2) $\{(-5; 0), (5; 0), (3; -4), (3; 4)\}$. **12.** 2) $\{(1; 3), (3; 1)\}$; 3) $\left\{(2;\ 1), \left(\frac{13}{3}; -8\right)\right\}$; 4) $\left\{(3;-1), \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$. **16.** 1) $\{(7; -4), (7; 1), (-8; -4), (-8; 3)\}$; 2) $\{(3; 2), (-3; -2)\}$. **17.** 2) $\{(4; 2), (-4; -2), (2; 4), (-2; -4)\}$. **18.** 1) $\left\{(3; 1), (-3; -1), \left(\frac{11}{\sqrt{109}}; -\frac{25}{\sqrt{109}}\right), \left(-\frac{11}{\sqrt{109}}; \frac{25}{\sqrt{109}}\right)\right\}$. **19.** 2) $\{(2; 3), (3; 2), (5+\sqrt{5}; 5+\sqrt{5}), (5-\sqrt{5}; 5-\sqrt{5})\}$. **20.** 1) $\{(6; 2), (-6; -2), (2; 6), (-2; -6)\}$. **21.** 1) $\{(3\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}; \sqrt{2}), (3\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$. **22.** 2) $\{(2; 2), (-1{,}8; -1{,}8), (0; 4{,}5), (4{,}5; 0)\}$. **23.** 1) $\left\{(1; 3), (-1; -3), \left(\frac{5}{\sqrt{3}}; -\frac{7}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}; \frac{7}{\sqrt{3}}\right)\right\}$. **24.** 2) 7 см ва 24 см. **25.** 2) 19 ва 13. **25.** 2) 64. **27.** 45 км/соат ва 30 км/соат. **28.** 45 км/соат ва 30 км/соат. **35.** б) $y \geqslant x^2-1$; г) $x^2+y^2<5$. **36.** 2) бўлади.

XI боб. **3.** 2) тескари функцияга эга. **4.** 2) монотон ўзгарувчи функция бўлмагани учун. **6.** 2) $y=x^2$, $x\in[0; \infty[$; 4) $y=x^3$. **7.** 2) $y=-\frac{4}{x}$, $x\in]-\infty; 0[$. **13.** 2) 3,2. **16.** 2) $]-\infty; \infty[$; 4) $\{0\}$. **17.** 2) $-b$; 4) $\sqrt[3]{b^2}$. **18.** 2) $|b-1|$; 4) $|ab|$. **19.** 2) $\{-2; 2\}$; 4) $\varnothing$; 6) $\{27\}$; 8) $\{1\}$. **20.** 2) $[27; \infty[$ ва $[0; 9]$. **21.** 2) $y=x^4$, $x\in[0; \infty[$; 4) $y=-\sqrt[6]{x}$. **25.** 2) тескари функция мавжуд, $y=x^4$, $x\in[0; \infty[$. **28.** 2) $10\sqrt{2}$; 4) 1,5; 6) 5. **30.** 4) $\sqrt{3}$. **31.** 4) $\sqrt[12]{a^6}$ ва $\sqrt[12]{a^4}$. **32.** 4) $(n+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12n^2})\cdot(n+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12n^2})$; **33.** 2) $(b^2+2c^2-2bc)(b^2+c^2+2bc)$; 4) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$ ёки $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{4xy})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{4xy})$. **34.** 4) $\sqrt{c}+1$; 6) $\sqrt[6]{x^2}-y\sqrt[3]{x}+y^2$. **35.** 4) $-5\sqrt[3]{a^2}$; 6) $-2n\sqrt[4]{n^2}=-2n\sqrt{-n}\,(n<0)$. **36.** 2) $4a\sqrt[3]{b}$. **37.** 2) $|x-1|$; 4) $3|xy|$. **38.** 2) $-\sqrt{9b}$. **39.** 2) $-\sqrt[4]{b^7}$; 4) $\sqrt[3]{-n^4}$. **40.** 4) $\sqrt[6]{-c^3}$. **41.** 4) $\sqrt[27]{b^{13}}$. **42.** 2) $\{1\}$; 4) $]0; 15625[$. **43.** 2) $m^3\sqrt[3]{m}$. **44.** 2) $(2-b)\sqrt{2-b}$. **45.** 4) $\sqrt[5]{a^3b^8}$. **47.** 2) 6; 6) $36-b^2$. **48.** 2) a^6+b^6. **51.** 4) 1. **52.** 2) $\frac{10}{3}a^2$. **53.** 2) 0,1.

54. 2) $]-\infty; 0[$; 4) $]-\infty; 0[$; 6) $]-\infty; 1]$. 55. 2) а) $[0; \infty[$; в) $[2; 3]$. 56. 2) $x+y+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. 57. 2) $b+1$. 58. 2) $a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+1)$; 4) $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$. 59. 2) $(x^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}})$. 60. 2) $\varnothing$. 61. 2) $c-d^2$; 4) $x^{-4}-y^{-2}$.

XII боб. 4. 8) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{17}, -\frac{1}{26}, \frac{1}{37}$. 6. 2) $a_n=2n$, бунда $1<n<5$, 4) $b_n=\frac{n}{n^2+1}$, $1<n\leqslant 6$. 12. 2) 10, 19; 37; 73; 145; 289 577. 14. 2) $a_n=6n-5$, бунда $1<n\leqslant 6$; 4) $b_n=\frac{n}{n^2+1}$, бунда $1\leqslant n<5$. 15. 2) $a_n=3n+2$. 16. 2) 5; $\frac{1}{5}$; 10 $\frac{3}{10}$; $\frac{40}{3}$. 17. 2) 5 та ҳади манфий. 18. 2) 7-ҳади. 19. 2) охирги 3 та ҳади мусбат, дастлабки 6 та ҳади эса манфий. 25. 2) $a_{51}=502$. 26. 2) $a_{41}=190$. 27. 2) $a_1=43$. 28. 2) $d=-3$. 29. 2) $a_{16}=56$. 32. 2) 16 та. 34. 1) $a_2=84$, 2) 96; 93; 90; 87; 84; 81: 78; 75; 72. 35. 2) $b_n=7-2n$. 36. 2) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-2$. 37. 2) $a_1=35$ $d=-4$. 38. 2) $a_{19}=50$. 39. 2) арифметик прогрессия эмас. 40. 2) $k>0$ бўлса, ўсувчи $k<0$ бўлса, камаювчи прогрессия бўлади. 42. $-301{,}5$. 43. 14 та ҳади бор. 44. 4) $S_{23}=36\frac{5}{12}$. 45. 2) 187500. 46. 2) а) -564, б) -696. 47. 2) а) -423; б) $S_{2n}=n(79-14n)$. 48. 2) 2430; 4) 3717. 49. 2) $\frac{n}{2}(9n-25)$. 51. 2) -49. 52. а) $a_{41}=226$; б) $a_n=6n-20$. 53 2) арифметик прогрессия бўлмайди. 54. 2) $-178, 5$; 4) 245. 55. $a_{17}=61$. 56. 325 ёки -325. 62. 2) геометрик прогрессия ташкил этади; 3) геометрик прогрессия ташкил этмайди. 63. 2) арифметик прогрессия; 3) геометрик прогрессия ташкил этади; 4) прогрессия ташкил этмайди. 64. 2) геометрик прогрессия бўлади. 65. 2) 81. 66. 2) 15625. 67. 2) кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этмайди. 69. $q=3$ ёки $q=\frac{1}{3}$ бўлган геометрик прогрессияда. 71. 2) $a_n=\frac{3}{2}(-2)^n$. 72. 1) $a_1=-0{,}25$. $a_{n+1}=-4a_n$. 75. 2) геометрик прогрессия эмас. 76. 2) 5; 20; 80; 320 1280 ёки 5; -20; 80; -320; 1280. 77. 2) $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{a}{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 1; $\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\frac{b}{a}$ ёки $\frac{a^2}{b^2}, -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{a}{b}, -\sqrt{\frac{a}{b}}, 1, -\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{a}$. 78. 2) $-1\frac{43}{128}$; 4) $(31+15\sqrt{2})$. 79.

2) $364\frac{40}{81}$. 81 2) $1\frac{15}{16}$. 83. 2) -4095. 84. 2) $126\frac{481}{1024}$. 85. 765 ёки -255. 86. 2) $\frac{1}{256}$. 88 2184.

XIII боб. 2. 2) $\left(-1;\ \frac{3}{5}\right)$, (0,1), $\left(1;\ \frac{5}{3}\right)$ 4. 2) $y=(0,2)^{-x}$; 3) $y=5^x$. 5. 2) $\{1,5\}$; 3) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; 5) $\{1\}$; 6) $\varnothing$. 6. 1) $\varnothing$; 3) $\left\{\frac{4}{9}\right\}$; 4) $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. 7. 2) $(-3;\ 2)$. 8. 1) $\{3\}$; 3) $\{2\}$. 9. 2) $\varnothing$; 4) $\{1;\ 2\}$. 11. 2) $\varnothing$; 3) $]-\infty;\ -1,5[$; 4) $]-\infty;\ \infty[$. 12. 2) $]-\infty;\ 4[$ 3) $]-\frac{2}{5};\ \infty[$; 4) $]-1\frac{1}{2};\ \infty[$. 13. 1) $]0,7;\ \infty[$; 3) $]-\infty\ \ 3[$. 14. 2) $a>1$ бўлса, $]-4;\ \infty[$; $0<a<1$ бўлса, $]-\infty;\ -4[$, $a=1$ бўлса, $\varnothing$. 16. 2) $\{6\}$; 4) $\{0\}$, 6) мавжуд эмас. 18. 2) $\{4\}$. 20. 2) 1; 4) 8. 22. 2) 32; 4) $\sqrt{2}$. 24. 1) $\{0,001\}$; 2) $\{100\sqrt{10}\}$, 3) $\{-2\}$; 4) $\left\{1\frac{1}{2}\right\}$. 25. 2) $-2,3$. 4) $1\frac{1}{3}$. 27. 2) маънога эга эмас; 4) маънога эга. 28. 2) манфий; 4) манфий. 30. 2) $\lg 0,11<\lg 0,12$; 4) $\lg\frac{11}{12}<\lg\frac{12}{13}$. 32. 1) $]0,\ \sqrt{5}[$; 2) $]0;\ 0,001[$; 3) $]0;\ 0,005[$; 4) $]3;\ 3,01[$. 34. 2) $y=2\lg x$; 4) $y=10^{x}$. 35. 4) $2\lg 3+\lg 5$. 36. 2) 0,3495; 4) 2,556. 40. 3) $\lg x=$ $=\frac{1}{2}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{3}(2\lg 2+4\lg c)$; 4) $\lg x=\lg 5+\frac{1}{2}\lg p+$ $+\frac{1}{6}\lg 3-\frac{3}{2}\lg q$. 42. 2) $\{2\}$; 4) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. 43. 2) $\left\{\frac{32}{343}\right\}$. 4) $\{8\sqrt[3]{49}\}$. 44. $]2;\ \infty[$; 4) $]-\infty;\ -4[\,\cup\,]4,\ \infty[$. 45. 2) йўқ. 46. 1) $\{-33\}$ 2) $\{-1\}$; 3) $\{-3;\ 3\}$; 4) $\{-1,45;\ -1,55\}$. 47. 2) $\{-1\ \ 3\}$, 4) $\{4\}$. 48 2) $\{7\}$, 3) $\{83\}$. 49. 2) $\{1;\ 8\}$. 50. 2) $\{-1\ \ 11\}$; 3) $\left\{7;\ -5\frac{6}{7}\right\}$. 51. 2) $\{1;\ 10\}$, 4) $\left\{10;\ \frac{1}{10}\right\}$. 52. 1) $]0;\ 100[$; 2) $\left]0;\ \frac{1}{2}\right[$; 3) $]-1;\ 0[$; 8) $]-9;\ 1[$. 53. 2) $\{1\}$. 54. 2) $\left]-2\frac{1}{2};\ 2\frac{11}{12}\right[$. 55. 2) $]3\ \ \infty[$. 58. 2) Z; 4) $\{n-0,6/n\in Z\}$. 59. 2) $\{n+0,5/n\in Z\}$; 4) $\varnothing$. 60. 2) $\{0,25n+$ $+0,1/n\in Z\}$; 4) $\{0,1n+0,12/n\in Z\}$. 61. 2) $\left[0,1;\ \frac{4}{15}\right[$; 4) $[-1,36;$ $-1,16[$. 65. 6) 1,398. 67. 2) -4. 68. 2) 3; 4) -4. 70. 2) $[10;\ 100[$; 4) $[0,0001;\ 0,001[$. 71. 2) $\{10^{n+0,07n}/n\in Z\}$. 72. 2) 3291; 4) 1,083. 73. 2) $-0,9598$; 4) 2,6885. 74. 4) 0,1995. 75. 6) 30,09.

МУНДАРИЖА

VII боб. Бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлар ва уларнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқи

VIII боб. Квадрат илдизлар

IX боб. Квадрат функция. Квадрат тенгламалар

X боб. Икки ўзгарувчили тенгламалар ва тенгсизликлар

XI боб. Рационал кўрсаткичли даража

XII боб. Прогрессиялар

XIII боб. Кўрсаткичли ва логарифмик функция

На узбекском языке

САХАЕВ БАХОДИР МУСАЕВИЧ

ПОСОБИЕ ПО АЛГЕБРЕ

VI — VIII классы

Пособие для учителей

Ташкент — „Ўқитувчи“ — 1979

Редактор *С. Бекбоева*
Бадиий редактор *Е. Соин*
Техредактор *Б. Гольштейн*
Корректор *М. Ҳошимова*

ИБ № 1224

Теришга берилди 8.02.79 й. Босишга рухсат этилди 19.07. 1979 й. Формат 84×108¹/₃₂. Тип. қоғози № 3. Литературная гарнитура. Кегли 10 ,8 шпон. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 16,38. Нашр. л. 14,3. Тиражи 30
Зак. № 990. Баҳоси 55 т.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 302-78.

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Область бошқармасининг Морозов номли босмахонаси. Самарқанд ш., У. Турсунов кўчаси, 82. 1979 й.

Типография имени Морозова областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

55 т.

«ЎҚИТУВЧИ»