

22.1

K64

8

Л. А. КОНДРАТЬЕВА
В. С. СОЛОМОНИК

**СБОРНИК
ВОПРОСОВ
И ЗАДАЧ
ПО
МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ
В ТЕХНИКУМЫ**

221
К84
Л. А. КОНДРАТЬЕВА, В. С. СОЛОМОНИК

СБОРНИК
ВОПРОСОВ
И ЗАДАЧ
ПО
МАТЕМАТИКЕ
для поступающих
— в техникумы

01
Допущено
Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебного пособия
для поступающих в средние
специальные учебные заведения



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.10

К 64

УДК 51

Рецензенты:

старший научный сотрудник НИИ содержания и методов обучения АПН СССР канд. пед. наук Н. К. Беденко; преподаватель математики Московского жилищно-коммунального техникума В. Т. Лисичкин

481507

Кондратьева Л. А., Соломоник В. С.

К 64 Сборник вопросов и задач по математике для поступающих в техникумы: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1983. — 223 с., ил.
40 к.

Пособие составлено в соответствии с действующей программой по математике для поступающих в средние специальные учебные заведения. Оно содержит около 900 вопросов, примеров и задач по курсу математики восьмилетней общеобразовательной школы. На большую часть из них даны подробные решения или указания, некоторые задачи решены несколькими способами.

Для поступающих в техникумы на базе 8 классов,

К $\frac{4306020400-405}{001(01)-83}$ 60-83



ББК 22.10
51

© Издательство «Высшая школа», 1983

ПРЕДИСЛОВИЕ

В век научно-технической революции математика проникает во многие отрасли народного хозяйства нашей страны. На XXVI съезде КПСС выдвинута программа дальнейшего повышения эффективности работы всех звеньев и форм образования, улучшения качества подготовки специалистов среднего звена.

Это пособие предназначено тем, кто готовится к поступлению в техникумы после окончания восьмилетней общеобразовательной школы.

Цель настоящего пособия — оказать помощь учащимся в подборе материала для повторения, в решении примеров и задач и в нахождении ответов на вопросы программы вступительных экзаменов.

В отличие от некоторых ранее вышедших пособий для поступающих в техникумы, здесь не приводятся доказательства теорем по геометрии. Доказательства этих теорем удобнее повторить по учебнику, которым учащиеся пользовались при подготовке к экзаменам по геометрии в восьмом классе.

Материал программы вступительных экзаменов по математике мы стремились изложить доходчиво с учетом того, что этим пособием будут пользоваться не только те, кто учится в школе сейчас, но и лица, окончившие школу давно.

Эта книга может оказаться полезной при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам, а также слушателям курсов по подготовке в техникумы. Надеемся, что наша книга принесет пользу и учителям средней школы — здесь они могут ознакомиться с требованиями, которые предъявляются к их учащимся на вступительных экзаменах.

На все вопросы по теории даны краткие ответы, к задачам — подробные решения или указания. Однако

к ответам и решениям советуем обращаться лишь в том случае, когда после долгих раздумий они окажутся непосильными.

В пособии сохранена привычная для учащихся терминология, принятая в учебниках (по алгебре — изд. 1981 г. по геометрии — 1980 г.).

В книге использованы накопившиеся у авторов вопросы и задачи, которые предлагались на вступительных экзаменах, а также во время многолетней работы в техникумах, на курсах по подготовке в техникумы и в средней школе. В ней приведены образцы экзаменационных билетов, в которых отражена практически вся программа вступительных экзаменов: знание ответов на вопросы билетов принесет несомненную пользу.

Выражаем искреннюю признательность Н. Н. Хлебниковой и рецензентам Н. К. Беденко и В. Т. Лисичкину за большую помощь, оказанную в работе над этой книгой.

Мы будем весьма благодарны за замечания и предложения по улучшению этого пособия. Просим направлять их по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная, ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $M = \{a; b; c\}$ — множество M состоит из элементов a, b, c
 $x \in A$ — x есть элемент множества A , или x принадлежит множеству A
 $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел
 $\mathbb{Z}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел
 $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел
 $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел
 $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел (числовая прямая)
 $\emptyset$ — пустое множество
 $A \subset B$ — множество A содержится в множестве B , или A есть подмножество множества B
 $A \supset B$ — множество A содержит множество B
 $A \cap B$ — пересечение множеств A и B
 $A \cup B$ — объединение множеств A и B
 $n \in \mathbb{N}$ — число n принадлежит множеству натуральных чисел
 $[x]$ — целая часть числа
 $\{x\}$ — дробная часть числа
 $a \geq b$ — число a больше или равно числу b , или число a не меньше числа b
 $a \leq b$ — число a меньше или равно числу b , или число a не больше числа b
 $a \geq 0$ — число a неотрицательное
 $a \leq 0$ — число a неположительное
 $[a; b]$ — числовой промежуток от a до b , или множество решений неравенства $a \leq x \leq b$
 $]a; b[$ — числовой промежуток от a до b , исключая числа a и b , или множество решений неравенства $a < x < b$
 $[a; b[$ — числовой промежуток от a до b , исключая число a , или множество решений неравенства $a < x \leq b$
 $] -\infty; a]$ — числовой промежуток от минус бесконечности до a , или множество решений неравенства $x \leq a$
 $[a, +\infty[$ — числовой промежуток от a до плюс бесконечности, или множество решений неравенства $x \geq a$
 $] -\infty; +\infty[$ — множество всех чисел (числовая прямая)
 $|x|$ — модуль числа x
 f — обозначение функции
 $f(x)$ — значение функции в точке x
 X — область определения функции
 Y — область значений функции

- (a_n) — числовая последовательность
 $\lg a$ — десятичный логарифм числа a
 $[AB]$ — отрезок прямой с концами A и B
 (AB) — прямая, проходящая через точки A и B
 $\overrightarrow{AB}$ — луч AB с началом в точке A
 $X \in [AB]$ — точка X лежит на отрезке AB
 $X \notin (AB)$ — точка X не лежит на прямой AB , или прямая AB не проходит через точку X
 $\angle ABC$ — угол ABC
 $\widehat{ABC}$ — величина угла ABC
 $\frown AC$ — дуга AC
 $\overline{AC}$ — величина дуги AC
 Окр. $(O; r)$ — окружность с центром O и радиусом r
 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}$ — вектор
 $\overrightarrow{0}, \overrightarrow{AA}$ — нулевой вектор
 $|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора $\overrightarrow{AB}$
 $F_1 = F_2$ — фигуры F_1 и F_2 совпадают
 $F_1 \cong F_2$ — фигуры F_1 и F_2 конгруэнтны
 $A_1 = S_l(A)$ — точка A_1 симметрична точке A относительно оси l
 Z_0 — центральная симметрия с центром O
 $T(X) = X_1$ — при параллельном переносе точка X переходит в точку X_1
 R_O^α — поворот плоскости (луча, вектора) на угол α вокруг точки O . Если O — начало координат, то пишут просто R^α
 $R_O^\alpha \cdot R_O^\beta$ — последовательное выполнение поворота плоскости (луча, вектора) около одного и того же центра вначале на угол α , а затем на угол β ($\circ$ — знак композиции)
 $F_1 \stackrel{k}{\sim} F_2$ — фигура F_1 подобна фигуре F_2 — коэффициент подобия равен k , иногда пишут $F_1 \sim$
 H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом гомотетии k , иногда пишут H^k

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ АРИФМЕТИКИ И АЛГЕБРЫ

§ 1. МНОЖЕСТВА

Множество — одно из основных математических понятий; оно является первичным и, подобно понятиям «точка», «прямая», «число», не может быть сведено к более простым понятиям.

В повседневной жизни вместо слова «множество» часто говорят «совокупность», «собрание», «команда», «стадо» и др. Множества обозначают заглавными латинскими буквами; элементы множества записывают в фигурных скобках. Порядок записи элементов безразличен. Два одинаковых элемента считаются как один элемент. Например, множество букв, составляющих слово «колос», равно множеству букв, составляющих слово «сокол»; это множество состоит из четырех элементов: $A = \{к; л; о; с\}$, прочесть его можно так: A — множество букв к, л, о, с.

Вместо слов «часть множества» говорят «подмножество»; более точно: *множество B называется подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A* . Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$, что можно прочесть так: B содержится в A или A содержит B . Пустое множество считается подмножеством любого множества, т. е. $\emptyset \subset A$. Каждое множество является подмножеством самого себя, или $A \subset A$.

Примеры: $\{a; b; c\} \subset \{a; b; c\}$, $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Множество всех квадратов является подмножеством всех прямоугольников. Множество N всех натуральных чисел есть подмножество множества Z всех целых чисел $N \subset Z$. Отрезок AB есть подмножество прямой AB , или $[AB] \subset (AB)$.

1. Что называется а) пересечением множеств A и B , пересечением двух фигур; б) объединением множеств A и B , объединением двух фигур?

2. Пусть E — множество делителей числа 12, F — множество делителей числа 18. Запишите с помощью фигурных скобок $E \cap F$; $E \cup F$.

3. Найдите объединение множества A — всех целых решений неравенства $-1 < x \leq 4$ — и множества B — всех целых решений неравенства $-2 < x < 3$.

4. а) Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением были точка; отрезок; треугольник; четырехугольник; трапеция.

б) Начертите два треугольника так, чтобы их объединением были параллелограмм; трапеция; треугольник.

§ 2. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Под *целыми числами* понимают числа, принадлежащие объединению множеств: натуральных чисел, противоположных натуральным, и множества, состоящего из одного числа ноль. Множество целых чисел обозначается буквой Z , $Z = \{ \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots \}$.

Действия с нулем

При любом a справедливы следующие равенства:

$$a + 0 = a; 0 + a = a; a - 0 = a; 0 - a = -a;$$

$$a - a = 0; 0 \cdot a = 0; a \cdot 0 = 0; 0 : a = 0.$$

Делить на ноль нельзя.

5. Какие числа называют натуральными?

6. Как называются числа, над которыми производят действия сложения, вычитания, умножения, деления, и как называются результаты этих действий?

7. Как найти а) неизвестное слагаемое; б) неизвестное уменьшаемое; в) неизвестное вычитаемое; г) неизвестный множитель; д) неизвестное делимое; е) неизвестный делитель?

8. На основании свойств арифметических действий вычислите x : а) $((2x - 18) 15 + 120) : 45 = -4$; б) $-208 : (112 - (96 - 3x) 4) = 2$.

9. Произведите указанные действия:

а) $123 \cdot 26 + (-12\,924) : 36 - (-34\,248) : 24$;

б) $(21\,344 : 16 - (978 - 1540) - (-32) 74) : 52$;

в) $(125972 - 409 \cdot 308) : (-92)$;

г) $25 : (2035 : 5 - 11 \cdot 37) + 21$.

Действия над числами подчиняются следующим законам.

Законы сложения

Переместительный закон: от перестановки слагаемых значение суммы не изменится, т. е. $a + b = b + a$.

Сочетательный закон: чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего, т. е. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Законы умножения

Переместительный закон: от перестановки множителей значение произведения не меняется, т. е. $a \cdot b = b \cdot a$.

Сочетательный закон: чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего, т. е. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Распределительный закон: чтобы умножить сумму на число, можно умножить на это число каждое слагаемое и сложить полученные произведения, т. е. $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

10. Применяя законы сложения и умножения, вычислите:

- а) $1282 + 247 + 1318 + 353 + 800$; б) $25 \cdot 52 \cdot 8 \cdot 125$;
в) $75 \cdot 25 \cdot 16$; г) $161 \cdot 27 + 139 \cdot 27$.

11. Вычислите устно:

- а) $248 \cdot 5$; б) $244 \cdot 25$; в) $72 \cdot 250$; г) $35 \cdot 9$; д) $34 \cdot 11$;
е) $17 \cdot 101$.

Делители и кратные

Делителем числа a называется число, на которое a делится без остатка. Так, числа 1; 2; 3; 6; 9; 18 являются делителями числа 18.

З а м е ч а н и е. Слово «делитель» имеет и другое значение — компонент действия деления.

Кратным числом a называется число, которое делится без остатка на a . Множество чисел, кратных, например, 12, бесконечно: $A = \{0; 12; 24; \dots\}$.

12. Какое число называется простым; составным?

13. Какие числа называются взаимно простыми?

14. Какие из чисел 678, 1980, 65 425, 719 820 делятся на 2; на 3; на 5; на 9?

15. Что называется наименьшим общим кратным двух или нескольких натуральных чисел?

16. Чему равен наименьший общий делитель нескольких натуральных чисел; существует ли наибольшее общее кратное нескольких натуральных чисел?

§ 3. ДРОБИ

Обыкновенные дроби

Числа вида $\frac{a}{b}$ (пишут также a/b), где a и b — целые числа, а $b \neq 0$, называются **обыкновенными дробями** (или просто дробями). Приведем формулы, выражающие правила действий над дробями:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{1} = \frac{an}{b};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}; \quad \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} : \frac{n}{1} = \frac{a}{bn}, \quad n : \frac{a}{b} = \frac{n}{1} : \frac{a}{b} = \frac{bn}{a}.$$

Примечание. При умножении (делении) смешанного числа на смешанное их предварительно обращают в неправильные дроби. Такое же обращение необходимо делать при делении целого числа на смешанное число.

17. В каком случае дроби a/b и c/d считаются равными?
18. В каком случае дробь a/b называется правильной?
19. Что называется смешанным числом?
20. В чем заключается основное свойство дроби? Какие преобразования дробей основаны на этом свойстве?
21. Какие два числа называются взаимно обратными?
22. Сформулируйте правила сложения дробей с одинаковыми знаменателями; с разными знаменателями. Приведите числовые примеры.

23. Как найти произведение двух или нескольких дробей?

24. Как разделить дробь на дробь?

25. Выполните действия:

а) $5 \cdot \frac{5}{9} + \left(14 \frac{5}{6} - 11 \frac{1}{2}\right) : 11 \frac{1}{4}$;

б) $\left(25 \frac{1}{3} - 135 : 13 \frac{1}{2}\right) : 5 \frac{1}{3}$;

в) $\frac{4 - \left(\frac{9}{10} - \frac{4}{15}\right) : 3 \frac{1}{6}}{8 - 1 \frac{22}{23} \cdot \left(\frac{14}{15} - \frac{1}{6}\right)}$;

г) $\left(2 \frac{3}{5} \cdot 5 + 3 \frac{2}{5} : \frac{1}{5} - 15 \frac{4}{15}\right) \cdot 15 - \left(1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}\right) : 8$.

Десятичные дроби

Десятичная дробь — дробь, знаменатель которой 10, 100, 1000, ... — натуральная степень числа 10.

26. Сформулируйте правила сложения (вычитания) десятичных дробей. Приведите примеры.

27. Сформулируйте правило умножения десятичных дробей. Приведите примеры.

28. Как умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, ..., 10^n ?

29. Как разделить десятичную дробь на натуральное число?

30. Как разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000, ..., 10^n ?

31. Сформулируйте правило деления числа на десятичную дробь.

32. Обратите в десятичные следующие обыкновенные дроби:

$$\frac{3}{4}; \frac{5}{8}; 1\frac{4}{25}; \frac{6}{125}.$$

33. Укажите, не производя вычислений, какие из следующих дробей обращаются в конечные десятичные и какие — в бесконечные:

$$\frac{3}{50}; \frac{9}{18}; \frac{12}{15}; \frac{5}{48}; 1\frac{3}{25}; \frac{15}{45}; \frac{7}{16}.$$

Числовые выражения

34. Найдите значения выражений:

а) $\frac{5}{32} : 0,25$; б) $14,56 : \frac{7}{50}$; в) $\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}} + \frac{3,9}{4,2}$;

г) $\frac{\frac{4}{25} + 2,59}{(\frac{3}{4} - 0,15) : 4}$; д) $\frac{\frac{7}{24} : 0,125 + 3,5}{\frac{2}{3} - 0,25}$; е) $\frac{1,05 + \frac{4}{25}}{(7,5 - 3\frac{1}{3}) \cdot 0,6}$;

ж) $\frac{(4,5 \cdot 1\frac{2}{3} - 6,75) \cdot \frac{2}{3}}{(\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 0,3) : 2\frac{2}{3}}$;

з) $\frac{1\frac{1}{12} - 5,3 : 2,4}{0,415 - 0,702 : 1,3} + \frac{3,4 : 1,8 - 1\frac{2}{3} + \frac{7}{9}}{0,45 + 0,918 : 0,51}$;

и) $\frac{0,8 - 1,2 \cdot \frac{2}{3}}{10 - 5,4 \cdot \frac{6}{9}} + \frac{20,48 - 51,2 \cdot \frac{2}{5}}{12 - 6,3 \cdot \frac{7}{9}}$;

к) $\frac{(3,2 - 1,7) : 0,003}{(1 - 6,3 \cdot \frac{7}{9}) \cdot (\frac{5}{16} : 0,125 - 0,8 \cdot 3,125)}$.

Целая и дробная части числа

Целой частью числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a ; ее обозначают $[a]$, например $[6,8] = 6$.

Дробной частью числа a называется разность между числом a и его целой частью; ее обозначают $\{a\}$. По определению, $\{a\} = a - [a]$, например $\{6,2\} = 6,2 - [6,2] = 0,2$.

35. Найдите целую и дробную части числа а) 25,3; б) 0,25; в) -6,3; г) -10,5; д) -5/6.

36. Вычислите $y = [x] - \{x\}$, если $x = -0,1; -1,1; -2,1$.

§ 4. ПРОЦЕНТЫ

Процентом числа называется одна сотая его часть. Проценты используются в хозяйственных, финансовых и других расчетах для числовой характеристики и сравнения изучаемых фактов и явлений.

Процентная запись числа применяется наряду с записями чисел в виде десятичных или обыкновенных дробей. Например,

$$1\% = 0,01 = \frac{1}{100}; \quad 75\% = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

37. Сколько процентов числа составляет его половина и его четверть?

38. 1. Какую часть числа составляют его 10%; 75%; 0,1%; 0,5%; $33\frac{1}{3}\%$; $16\frac{2}{3}\%$; $p\%$? 2. Как выразить $n\%$ сколько процентов в виде дроби?

39. Как проще от данного числа найти а) 1%; б) 50%; в) 25%; г) 12,5%; д) 75%; е) $33\frac{1}{3}\%$?

40. Докажите, что а) для увеличения данного числа на 40% достаточно умножить его на 1,4; б) для уменьшения данного числа a на 10% достаточно умножить его на 0,9.

Задачи на проценты

При решении задач на проценты могут встретиться задачи, где надо найти 1) несколько процентов от данного числа, которое принимается за 100%; 2) неизвестное число x , если известно, чему равно несколько процентов от x ; тогда это неизвестное число принимается за 100%; 3) сколько процентов от данного числа составляет другое число; в этом случае первое число принимается за 100%. Задачи второго и третьего типов удобнее решать составлением уравнения или пропорции.

41. Завод выпустил в 1980 г. продукции на 90 млн. руб. а в 1982 г. выпуск продукции увеличился на 28%. На сколько рублей продукции выпущено в 1982 г.?

42. Найти число, если 42% его равны 12,6.

43. Перевыполнив сменное задание на 6%, токарь выточил 159 деталей. Сколько деталей должен выточить токарь за смену?

44. Найти число, зная, что 10% его составляют 40% от 33.

45. Устно. Сколько процентов составляет а) 1 см от 1 м б) 1 ц от 1 т; в) 10 от 5; г) 37 руб. от 50 руб.

46. В цехе работают 60 рабочих, из них 42 комсомольца. Сколько процентов от всего числа рабочих составляют комсомольцы?

47. За 1 ч станок-автомат изготавливал 240 деталей. После реконструкции этого станка он стал изготавливать в час 288 таких же деталей. На сколько процентов повысилась производительность станка?

48. Чему равно а) 10 % от 50 %; б) 25 % от 25 %?

49. Предприятие за второй год пятилетнего плана увеличило выпуск продукции на 6 % по сравнению с первым годом, а в третьем году — на 10 % по сравнению со вторым годом. На сколько процентов увеличился выпуск продукции в третьем году пятилетки по сравнению с первым годом?

50. В цистерну налили 38 л бензина, после чего осталось незаполненным 5 % емкости цистерны. Сколько бензина надо долить в цистерну для ее заполнения?

51. К 10 л 30 %-ной серной кислоты добавили 5 л воды. Определите процентную концентрацию получившегося раствора.

52. 1. Первое число составляет 50 % второго. На сколько процентов второе число больше первого?

2. Цену на овощи уменьшили на 10 %, а потом еще на 10 %. Стал бы товар дешевле, если бы цену сразу снизили на 20 %?

§ 5. ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

Отношением двух чисел называется частное от деления первого из них на второе. Так, отношение 2 к 5 равно $\frac{2}{5}$, отношение —0,6 к 0,2 равно —3.

Равенство двух отношений называется пропорцией. С помощью букв пропорцию можно записать так:

$$a:b=c:d, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ или } a/b = c/d.$$

Здесь a и d — крайние члены, b и c — средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции

Во всякой пропорции произведение ее крайних членов равно произведению средних членов, т. е. если $a:b=c:d$, то $ad=bc$.

53. 1. Докажите основное свойство пропорции.

2. Какой вывод можно сделать из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$?

3. Из двух пропорций $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ составьте новую пропорцию.

54. Из двух равных произведений а) $25 \cdot 3 = 15 \cdot 5$; б) $2a = 3b$; в) $ab = mn$; г) $x^2 = ab$ составьте пропорции.

55. Найдите x из следующих пропорций:

а) $13 : x = 19 : 9,5$; б) $7,5 : 20,8 = 3 \frac{11}{13} : x$, в) $\frac{x+1}{8} = \frac{3,75}{1}$

г) $(2,3 + 1 : 3 \frac{1}{3}) : (1,17 \cdot 1 \frac{1}{9}) = x : (3,2 + 0,8(5,5 - 3,25))$

д) $\frac{(1,2 : (\frac{17}{40} - 0,005 + 0,6)) \cdot 1,7}{1 \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1 \frac{23}{20}} = \frac{x}{0,1(4,75 + 5 \frac{1}{4})}$.

§ 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рациональными числами называются все целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные, и число ноль.

Всякое рациональное число можно представить в виде p/q , где $q \neq 0$, а целые p и q — взаимно простые. Так, числа $3 = \frac{3}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$, $-7 = -\frac{7}{1}$, $0,7 = \frac{7}{10}$; $\frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,(\overline{3})$ — рациональные.

56. 1. Что такое координатная прямая?

2. Что называется координатой точки на прямой?

3. Где на координатной прямой располагаются отрицательные числа и где — положительные?

4. Какие два числа называются противоположными?

57. Какая десятичная дробь называется периодической?

Модуль числа

Модулем числа x называется неотрицательное число, удовлетворяющее условию

$$|x| = x, \quad \text{если } x \geq 0,$$

$$|x| = -x, \quad \text{если } x < 0.$$

Геометрически модуль числа выражает расстояние от изображения числа на координатной прямой до начала оси. Например, число 5 удалено от начала координат O на 5 единиц, поэтому $|5| = 5$. На таком же расстоянии от точки O находится на оси число -5 , поэтому $|-5| = 5$.

58. Чему равен модуль положительного числа; отрицательного числа; нуля?

59. Решите уравнения:

а) $|x| = 6$; б) $|y| = 8,5$; в) $|a| = 0$; г) $|m| = -2$

д) $|x - 3| = 2$; е) $|x + 3| = 2$.

60. Запишите множество целых решений неравенств:

а) $|x| < 2,5$; б) $|a| \leq 3$.

61. Дано $m = -23$; $n = 23,5$. Найдите значение выражения а) $|m| - |n|$; б) $|m - n|$; в) $|m| + |n|$; г) $|m + n|$

§ 7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Значение величины a , отличное от ее точного (истинного) значения x на некоторое число, называется *приближенным значением величины*.

Если приближенное значение величины a больше x , то число a называется приближенным значением числа x с избытком, если a меньше x , то число a — приближенное значение числа x с недостатком.

62. Сформулируйте правила округления десятичных дробей. Приведите примеры.

63. 1. Что называется погрешностью приближения?

2. Что называется абсолютной погрешностью приближения?

3. Что называется относительной погрешностью приближения?

64. Округлите число до десятых долей и найдите абсолютную и относительную погрешности округления: а) 4,36; б) 0,825.

65. Найдите границы, в которых заключено число x , если а) $x = 16,8 \pm 0,5$; б) $x = 0,4 \pm 0,15$.

66. Пусть x — точное значение некоторой величины, a — ее приближенное значение. В каком случае число a называют приближенным значением числа x с точностью до h ?

67. Докажите, что число а) 0,27 является приближенным значением дроби $\frac{3}{11}$ с точностью до 0,01; б) 0,6 является приближенным значением дроби $\frac{2}{3}$ с точностью до 0,1.

68. Как записывают приближенные значения чисел?

69. В записи приближенного числа все цифры верные. Укажите границу абсолютной погрешности данного приближения, если а) $x \approx 1,65$; б) $y \approx 2,864$; в) $z \approx 8,4$; г) $m \approx 3,20$; д) $n \approx 165$.

70. Каково различие между результатами трех измерений: 21 мм; 21,0 мм; 21,00 мм?

71. Найдите приближенные значения периметра и площади прямоугольника, длина которого x см, а ширина y см, если $x = 6,4 \pm 0,1$; $y = 2,4 \pm 0,1$.

72. Сколько десятичных знаков и значащих цифр в числах 2,6; 26; 0,26; 0,206; 2,060; 0,0026?

73. Пользуясь правилами подсчета верхних цифр, вычислите а) $x + y + z$, где $x \approx 1,3$, $y \approx 12,341$, $z \approx 0,4764$; б) ab , если $a \approx 12,26$, $b \approx 0,64$; в) a/b , если $a \approx 3,6$, $b \approx 1,386$.

§ 8. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

Выражение с переменными состоит из чисел, букв и знаков действий, указывающих, какие действия и в каком порядке следует выполнять над этими числами и буквами. Отдельная буква (число) также считается выражением. Примеры: $9a^2 - 8$ есть выражение с одной переменной a ; $\frac{9a}{b-5}$ есть выражение с переменными a и b .

74. 1. Что называется областью определения выражения с одной переменной?

2. Найдите область определения выражения

а) $\frac{x}{5-x}$; б) $\frac{2a-4}{2a+4}$; в) $\frac{20}{x-y}$.

Степень с натуральным и целым показателем

Выражение a^n при натуральном $n > 1$ — это произведение сомножителей, каждый из которых равен a , т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (n \text{ сомножителей}).$$

При $n=1$ это определение не имеет смысла, так как не существует произведения из одного сомножителя; в этом случае определение надо дополнить так: $a^1 = a$.

В записи a^n число a называется основанием степени, число n — показателем степени, число a^n — степенью.

75. 1. Что означает выражение a^0 , если $a \neq 0$?

2. Что означает выражение с целым отрицательным показателем a^{-n} ?

Основное свойство степени. Произведение двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей этих степеней, т. е.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

где $a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

76. 1. Докажите основное свойство степени для показателей $m=3$, $n=2$.

2. Сформулируйте правила преобразований степеней, выражаемые формулами а) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; б) $a^m : a^n = a^{m-n}$; в) $(a^m)^n = a^{mn}$; г) $(ab)^n = a^n b^n$; д) $(a/b)^n = a^n / b^n$.

77. Вычислите значение выражения а) $4a - b^3 c^2$; б) $(4a - b^3 c)^2$; в) $(4a - b^3) c^2$; г) $4(a - b)^3 c^2$; д) $4(a - b^3 c^2)$; е) $4(a - b^3 c)^2$; ж) $4(a - b^3) c^2$ при $a=3$, $b=-1$, $c=2$.

78. Найдите числовое значение выражения

а) $\frac{0,5a^2 + (0,5a)^2}{5(a+b)^2 - (2a+b)^2}$ при $a=4$, $b=-1$;

б) $\frac{mn^2 + (mn)^2 + m^2 n}{(m/2 - 2n)^2 : (m + 4n^2)}$ при $m=2$, $n=-0,25$;

в) $\frac{3(x-y)^2 + 3(x-y^2)}{xy^2 - (xy)^2}$ при $x = -0,5$, $y = -\frac{2}{3}$;

г) $|x - 2,5| + |3,5 - x| - |x + 2|$ при $x = -3$;

д) $10a^2 - 5|a| + 1$ при $a = -0,4$.

Стандартный вид числа

Любое положительное число может быть представлено в виде произведения $a \cdot 10^n$ (это *стандартный вид числа*), где $1 \leq a < 10$ и $n \in \mathbb{Z}$. Показатель n называют *порядком числа*.

79. 1. Представьте в стандартном виде число а) 0,00764;

б) 0,02; в) 17 000; г) $\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$.

2. Представьте в стандартном виде произведение

а) $(4,8 \cdot 10^{-4}) \cdot (1,5 \cdot 10^8)$; б) $(2,4 \cdot 10^5) \cdot (12,5 \cdot 10^{-9})$.

Понятие тождества

Два выражения называются *тождественно равными* на данном множестве, если на этом множестве они имеют смысл и все их соответствующие значения равны. Равенства, в которых левые и правые части — тождественно равные выражения, называются *тождествами*.

Например, тождество $2(a+3) = 2a+6$ справедливо на множестве всех действительных чисел, а тождество $\sqrt{x^2} = x$ справедливо на множестве всех неотрицательных чисел.

Верные числовые равенства также называются *тождествами*.

80. Являются ли тождественно равными следующие выражения на области их определения: а) $\frac{5}{x}$ и $\frac{5x}{x^2}$;

б) $\frac{2(x^2 - y^2)}{x + y}$ и $2(x - y)$.

81. Докажите, что следующие выражения не являются тождествами на множестве всех чисел: а) $x^2 + x = x^3$;

б) $(a+5)^2 = a^2 + 25$; в) $|-x|^3 = -x^3$.

§ 9. ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

Одночленами называются выражения, представляющие собой произведение чисел, переменных, степеней переменных, например $0,5x^2$; $6x^3y^2$; $-7c^2$.

Отдельные числа, переменные, степени переменных также называют одночленами, например -7 ; a ; x^3 .

Многочленами называют сумму нескольких одночленов, например $5x^4 + 3x^3 - 0,1x^2 + 8x + 1$.

82. 1. Что называют степенью одночлена; многочлена?

2. Какой вид одночлена называют стандартным; какой многочлен называют многочленом стандартного вида?



Амарилда №17

83. Приведите к стандартному виду многочлен

а) $-(2a^2 - 3b) + (4b + 6a^2 - 1)$; б) $-\left(\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x\right) + \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right) - \left(4 - \frac{5}{8}x^2\right)$.

84. Найдите значение выражения а) $(6,3x^2y - 2,4xy + 2y^3) - (-3,7x^2y + 6,6xy + 2y^3)$ при $x=1, y=5$;
б) $5a^2 - (3ab - a^2) + (5ab - 6a^2)$ при $a=0,4, b=-0,5$;
в) $9x^3 - (8x^3 - (1 - 2x^3))$ при $x=-0,5$.

85. Произведите указанные действия:

а) $5^{x+2} \cdot 5^{x-1} : 5^{2x-1}$; б) $2 \cdot 3^{x-3} \cdot 4^{x-1} : 10 \cdot 3^{x-5} \cdot 4^{x-2}$;
в) $12 \cdot 5^6 : 0,1 \cdot 5^4$.

Умножение одночлена на многочлен. Умножение многочленов

Чтобы умножить одночлен на многочлен, достаточно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить (приписать с их знаками).

Пример: $-0,4xy(-2x^2 - 4xy + 5y^2) = 0,8x^3y + 1,6x^2y^2 - 2xy^3$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Пример: $(a-b)(c+d) = ac - bc + ad - bd$.

86. Найдите значение выражения а) $5x(x-4y) - 10y \times (y-2x)$ при $x=-0,2, y=-0,5$; б) $a(a-b+2) - b(b-a+1)$ при $a=-1/3, b=-2/3$; в) $(m-2n) \times (2m+n) - m(2m-4n)$ при $m=0,4, n=-0,6$.

87. Докажите, что при любых значениях a и b выражение $(2a-3b)(4a+0,5b) - a(8a-11b)$ принимает неположительные значения.

§ 10. ТОЖДЕСТВА СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. Произведение разности двух выражений на их сумму равно разности квадратов этих выражений:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

2. Квадрат двучлена равен сумме трех выражений — квадрата первого члена, удвоенного произведения первого и второго членов и квадрата второго члена:

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

3. Куб двучлена равен сумме четырех выражений — куба первого члена, утроенного произведения квадрата первого члена на второе, утроенного произведения первого члена на квадрат второго члена и куба второго члена:

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b)^2(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

4. $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$.

5. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.

88. К многочлену стандартного вида преобразуйте выражение а) $(a-0,1)(a+0,1)$; б) $(1,5x^2-3y^3)(1,5x^2+3y^3)$; в) $\left(\frac{1}{2}a-3b\right)\left(3b+\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{4}a^2+9b^2\right)$; г) $(a^x+a^{-x})^2$; д) $(3^m-3^{m-1})^2$; е) $(a+b)^2(a-b)^2$; ж) $(2a+1)^3+(2a-1)^3$; з) $(x-1)(x^2+x+1)$.

89. С помощью тождеств сокращенного умножения найдите значение выражения а) $99 \cdot 101$; б) $20,1 \cdot 19,9$; в) $29,5 \cdot 30,5$; г) 31^2 ; д) 98^2 ; е) $9,9^2$.

90. Найдите значение выражения а) $(2a-3)^2-2a(2a+3)$ при $a=2,5$; б) $(3x-1)^2-(2x+1)(4,5x-1)$ при $x=0,2$.

91. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ значение выражения $(2n+3)^2-(2n-3)^2$ делится на 24 (кратно 24).

§ 11. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Для упрощения вычислений, сокращения дробей и приведения их к общему знаменателю при решении уравнений бывает полезно представить многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов, среди которых могут быть и одночлены. Для разложения многочленов на множители применяют следующие приемы: 1) вынесение общего множителя за скобку, 2) способ группировки, 3) применение тождеств сокращенного умножения.

92. Вынесите за скобки общий множитель в выражении а) $12a^3b-18a^2b^2+6a^2b$; б) $15x^6-10x^5+5x^4$; в) $3a(x-2y)+5b(x-2y)+x-2y$; г) $5x(2a-3)-3y(2a-3)-2a+3$.

93. 1. В трехчлене $5a+3b-2c$ вынесите за скобку 5.

2. В трехчлене ax^2+bx+c вынесите за скобку a .

3. В трехчлене $9x-3y+2$ вынесите за скобку $\frac{1}{3}$.

94. Способом группировки разложите на множители многочлен а) $ax+ay+bx+by$; б) $ac+bc+a+b$; в) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$.

Тождества 1, 2, 4 и 5 (см. с. 18) можно представить в виде

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2;$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

В таком виде эти тождества удобно применять для разложения на множители.

95. Разложите на множители выражение а) $0,04a^2-9$; б) $\frac{1}{9}x^2-2\frac{1}{4}$; в) $(a+4)^2-25$; г) $x^2(3x-1)+9(1-3x)$; д) $4a^2-(a-1)^2$; е) $(a^2+2ab+b^2)-(a^2+2ac+c^2)$; ж) x^3+27 ; з) $a^3-0,125$.

96. Упростите выражение, а затем найдите его значение:
 а) $16a^2 + 24a + 9$ при $a = -3/4$; б) $(x+6)^2 + 2(x-1)(x+6) + (x-1)^2$ при $x = -0,5$.

97. Найдите значение выражения а) $113^2 - 112^2$;
 б) $0,727^2 - 0,273^2$; в) $(3\frac{2}{3})^2 - (3\frac{1}{3})^2$; г) $26^2 + 2 \cdot 26 \cdot 14 + 14^2$;
 д) $81,1^2 - 2 \cdot 81,1 \cdot 61,1 + 61,1^2$.

§ 12. ДРОБНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — выражения, содержащие переменные, $b \neq 0$, называется *дробным выражением (дробью)*.

Преобразования дробных выражений производится по тем же правилам, что и действия над обыкновенными дробями (см. § 3).

98. При каких значениях переменной не имеет смысла дробь а) $\frac{x+5}{x(x+3)}$; б) $\frac{a^2-1}{4a^2-1}$?

Предостережение. Иногда учащиеся неправильно сокращают дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены: сокращают не на общий множитель, а на общее слагаемое. Например, нельзя сократить дробь $\frac{2a+c}{2a+d}$, так как здесь нет общего множителя; если

же разделить числитель и знаменатель на $2a$, то получим $\frac{1+c:2a}{1+d:2a}$.

По той же причине нельзя сократить, например, дроби $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ и

$$\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)}.$$

99. Сократите дробь а) $\frac{a-2}{2-a}$; б) $\frac{(a-b)^2}{b^2-a^2}$; в) $\frac{x+1}{1-x^2}$;
 г) $\frac{m^3-m}{m^2-2m+1}$; д) $\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a^2+b^2-2ab-c^2}$; е) $\frac{ab+1-a-b}{b+c-1-bc}$.

100. Найдите значение выражения, предварительно упростив его: а) $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy-y^2}$ при $x = -0,5$; $y = -1,5$;
 б) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a+b+c}$ при $a = 0,25$; $b = 0,5$; $c = -0,5$.

101. Найдите значение выражения а) $\frac{1}{x^2-3x} + \frac{1}{9-3x}$
 при $x = -1\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{4a-a^3} + \frac{a}{2a^2-8}$ при $a = -0,1$;
 в) $\frac{x-x^3}{x^2-1} - \frac{x^2}{0,2} - \frac{x+x:0,1}{x}$ при $x = -0,2$.

Предостережение. Некоторые учащиеся при вычитании дробей с многочленными числителями знак минус, стоящий перед дробью,

относят не ко всему числителю, а лишь к первому ее члену, упуская из виду, что дробная черта заменяет собой скобки. Для предупреждения подобных ошибок рекомендуется при умножении на дополнительный множитель писать числители дробей сперва в скобках.

102. Упростите выражение а) $\frac{5a}{a+b} - \frac{2a-3b}{a-b} - \frac{2a^2-6ab+2b^2}{a^2-b^2}$;
 б) $\left(\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{y}{2x-2y}\right) : \frac{2y}{x^2-y^2} - \frac{x-5y}{4}$; в) $\left(\frac{a}{(b-a)^2} - \frac{a}{b^2-a^2}\right) \times$
 $\times \frac{(a-b)^3}{a} + \frac{2b}{a+b}$; г) $\left(\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{4x}{1-x^2}\right) : \left(\frac{x-3}{x+1} + 1\right)$;
 д) $\left(\frac{x}{6x+6y} + \frac{y}{6x}\right) \cdot \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{6y^2} + \frac{y}{6x^3}$; е) $\left(\frac{a-1}{a^2+a+1} - \frac{1}{a-1}\right) \times$
 $\times \left(a+1 + \frac{1}{a}\right)$; ж) $\frac{20x}{1-5x} - \left(\frac{10x+2}{3-5x}\right)^2 \cdot \left(\frac{5x+9}{(5x+1)^2} - \frac{10x}{25x^2-1}\right)$;
 з) $\frac{|x-1|+x}{2x-1} - \frac{|x-1|}{x-1}$; и) $\frac{a|a-3|}{|a|}$.

§ 13. КОРНИ

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a ; обозначается $\sqrt{a}$, где $\sqrt{}$ —знак арифметического корня, a —подкоренное число.

103. 1. При каких значениях переменной a выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?

2. Приведите примеры таких значений a , чтобы $\sqrt{a}$ было число рациональное; иррациональное.

104. Почему $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$?

105. Всегда ли $\sqrt{a^2} = a$?

106. При каких значениях переменной имеет смысл выражение а) $\sqrt{-a}$; б) $\sqrt{-x^2}$; в) $\sqrt{2a-3}$; г) $\sqrt{-x-3}$.

107. Сократите дробь $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}$.

Корень n -й степени

Корнем n -степени из числа a называется число, n -я степень которого равна a ; обозначается $\sqrt[n]{a}$, где n —натуральное число, большее единицы.

108. В каких случаях имеет смысл выражение $\sqrt[n]{a}$?

109. Почему $(\sqrt[n]{a})^n = a$? Всегда ли это равенство справедливо?

110. При каких значениях x верно равенство а) $\sqrt{x^2} = -x$; б) $\sqrt[3]{x^3} = x$; в) $\sqrt[4]{x^4} = -x$; г) $\sqrt[6]{x^6} = |x|$.

111. Упростите выражение а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$; б) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; в) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$.

112. Найдите значение выражения $\sqrt{4a^2-4a+1}+3a$ при $a=0,2$.

Свойства арифметического корня n -й степени ($n>1$)

1°. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.

2°. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3°. Если $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

4°. Если $a \geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (основное свойство корня).

113. Сформулируйте формулы, выражающие свойства арифметического корня.

114. Найдите значение произведения а) $\sqrt[3]{\sqrt{30}+\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{30}-\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-\sqrt{17}} \sqrt[5]{3\sqrt{2}+\sqrt{17}}$; в) $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-1)^2} \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$.

115. Найдите значение выражения а) $\sqrt{21 \cdot 28 \cdot 12}$; б) $\sqrt[3]{16 \cdot 36 \cdot 81}$; в) $\sqrt[3]{313^2-312^2} \sqrt[3]{13^2-12^2}$; г) $\sqrt[3]{27a} - \sqrt[4]{a} \sqrt[3]{a}$ при $a=8$; д) $\sqrt[5]{a} \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{16a}$ при $a=81$.

116. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении а) $\sqrt{-5y^3}$, где $y < 0$; б) $\sqrt[3]{27a}$, где $a \geq 0$; в) $\sqrt[4]{81x^6}$, где $x < 0$.

117. Внесите множитель под знак корня в выражении а) $x\sqrt{2}$, где $x < 0$; б) $a\sqrt{-3/a}$.

118. Найдите значение выражения а) $\sqrt[4]{16a^4b}$ при $a = -0,5$; $b = 1$; б) $\sqrt[9]{10a^9b^9}$ при $a = 2$; $b = -2$.

119. Сравните числа а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt{2}$; в) $2\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{7\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{14}$ и $\sqrt{3}+2$.

120. Сократите дробь а) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{x-\sqrt{xy}}{y-\sqrt{xy}}$.

121. Приведя знаменатель к рациональному числу, упростите выражения а) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

г) $\frac{14}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$; д) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}$.

122. Выполните следующие действия:

- а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{1}{9-4\sqrt{5}} - \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$; в) $(4-\sqrt{3})^2 \times$
 $\times (19+8\sqrt{3}) - (9+4\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})^2$;
 г) $\frac{(\sqrt{2}-3)^2(11+6\sqrt{2})}{2(9+4\sqrt{2})(\sqrt{2}-4)^2}$.

§ 14. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Если $a > 0$, m — целое, а n — натуральное, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Если m и n — натуральные числа, то

$$0^{\frac{m}{n}} = 0.$$

Свойства степеней с рациональными показателями

Свойства степеней с целыми показателями справедливы также для степеней с любыми рациональными показателями и положительными основаниями.

Нижеследующие равенства справедливы, если $a > 0$, $b > 0$, $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — рациональные числа.

$$1^0. a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

$$2^0. a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

$$3^0. \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

$$4^0. (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}.$$

$$5^0. \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

$$123. \text{Вычислите а) } 1000^{1/3} \cdot 0,0001^{1/4} + (0,027)^{1/3} \cdot 5^0 - \left(\frac{10}{13}\right)^{-1};$$

$$\text{б) } \left(2\frac{10}{27}\right)^{-2/3} : \left(11\frac{1}{9}\right)^{-0,5} + (6,25)^{0,5} : (-4)^{-1}.$$

124. В виде степени с основанием a представьте выражение а) $a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{6}}$; б) $\left(a^{\frac{4}{9}}\right)^{-3} \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^{-2}$.

125. Найдите значение выражения а) $\left(2a^{\frac{1}{2}} - 5\right)^2 + 20a^2$ при $a = 1,2$; б) $\left(6 - 1,5x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 18x^{\frac{1}{2}}$ при $x = 4$.

126. Сократите дробь а) $\frac{a - 9a^{1/2}}{a^{3/4} - 3a^{1/2}}$; б) $\frac{x - 36x^{1/3}}{x^{2/3} - 6x^{1/3}}$.

127. Упростите выражение

$$а) \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{b - a}{2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}};$$

$$б) \left(\frac{a - b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{4}} \right)^{-1};$$

$$в) \frac{a - b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}; \quad г) \frac{x - y}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} - \frac{x + y}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}.$$

§ 15. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Соответствие между двумя множествами X и Y , при котором каждому элементу множества X соответствует не более одного элемента множества Y , называется *функцией*.

З а м е ч а н и е. Выражение «не более одного элемента» означает один элемент или ни одного элемента.

Множество X называется *областью определения функции*, множество Y — *множеством значений функции*.

Функцию с областью определения X и множеством значений Y называют также *отображением множества X на множество Y* .

Термины «функция» и «отображение» считаются синонимами — они выражают одно и то же понятие, но в алгебре больше говорят о функциях, а в геометрии — об отображениях.

Если x — произвольный элемент области определения функции f , а y — соответствующий ему элемент области значений функции, то пишут $f(x) = y$, что читается так: «эф от x равно y ». Употребляют и такую запись: $x \xrightarrow{f} y$, читается: «соответствие f переводит x в y ».

В курсе алгебры рассматриваются главным образом числовые функции, т. е. функции, область определения и область значений которых — числовые множества.

128. Какими способами может быть задана функция?

129. 1. Имея график функции, как найти ее область определения и множество ее значений?

2. Всякое ли соответствие, заданное графиком, есть функция?

130. Что называется корнем (нулем) функции? Как на графике функции найти ее корни?

131. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на данном числовом множестве? Опишите движение точки по графикам таких функций.

132. Докажите, что а) функция $f(x) = 2x - 3$ возрастает на всей числовой оси; б) функция $g(x) = x^2$ убывает, если $x < 0$.

133. 1. Какая функция называется обратимой? Какие две функции f и g называются взаимно обратными?

2. В чем особенность расположения графиков двух взаимно обратных функций?

134. Функция f задана формулой $y = 2x - 3$ на множестве $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Найдите множество B значений функции f . Запишите с помощью пар обратное соответствие. Является ли функция f обратимой?

135. Какие надо произвести преобразования, чтобы для функции $y = f(x)$ задать функцию, обратную данной?

136. Функция задана формулой а) $y = \frac{1}{2}x - 3$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Задайте формулой функцию, обратную данной.

Прямая пропорциональность

Функция, которую можно задать формулой $y = kx$, где x и y — переменные, а $k \neq 0$, называется *прямой пропорциональностью*. Число k называется *коэффициентом пропорциональности*; о переменной y говорят, что она пропорциональна переменной x .

График функции, заданной формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, есть прямая, проходящая через начало координат (рис. 1).

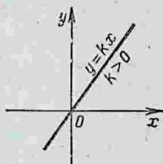


Рис. 1

Свойство прямой пропорциональности

Если функция $y = kx$ — прямая пропорциональность и (x_1, y_1) , (x_2, y_2) — пары соответственных значений переменных x и y , причем $x_2 \neq 0$, $k \neq 0$, а значит, и $y_2 \neq 0$, то $x_1/x_2 = y_1/y_2$, т. е. частные от деления соответственных значений x и y равны между собой.

Если $x > 0$ и $y > 0$, то это свойство можно сформулировать так: с увеличением значения x в несколько раз соответствующее значение y увеличивается во столько же раз.

137. 1. Длина окружности выражается формулой $C = \pi D$, где C — длина окружности, $\pi \approx 3,14$ — постоянное число, D — диаметр. В какой зависимости находятся C и D ? Чему равен коэффициент пропорциональности?

2. Выразите длину диаметра D как функцию длины окружности C . Укажите в полученной формуле коэффициент пропорциональности.

3. Напишите известные вам формулы из физики, содержащие прямо пропорциональные величины.

138. 1. Как удобнее всего построить график функции $y = kx$?

2. Покажите схематически, как расположен график функции $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$.

139. Какие углы с положительным направлением оси x образуют график функции а) $y = x$; б) $y = -x$?

Обратная пропорциональность

Функция, которую можно задать формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется *обратной пропорциональностью*. О переменной y говорят, что она *обратно пропорциональна* x .

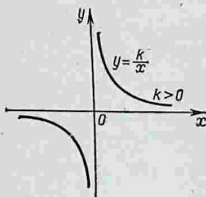


Рис. 2

График функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, есть кривая, состоящая из двух ветвей. Кривую такого вида называют *гиперболой* (рис. 2).

Свойство обратной пропорциональности

Если функция $x \xrightarrow{f} y$ — обратная пропорциональность и $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — пары соответственных значений переменных x и y , то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ ($x_2 \neq 0, y_1 \neq 0$).

Если $x > 0$ и $y > 0$, то это свойство можно сформулировать так: с увеличением x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается во столько же раз.

140. 1. Какова область определения функции $y = k/x$?

2. В каких координатных четвертях находится график функции $y = k/x$, если $k > 0$, и в каких четвертях, если $k < 0$?

141. Площадь прямоугольника выражается формулой $S = ah$, где a — основание, h — высота. В прямой или обратной зависимости находятся а) S и h ; б) S и a ; в) a и h , считая третью величину постоянной?

142. Найдите координаты точек пересечения графика функции а) $y = \frac{12}{x}$ и $y = 3x$; б) $y = -\frac{6}{x}$ и $y = -\frac{2}{3}x$.

Линейная функция

Функция, которую можно задать формулой вида $y=kx+l$, где k и l — некоторые числа, называется *линейной*.

График функции, заданной формулой вида $y=kx+l$, есть прямая линия (рис. 3).

143. График функции, заданной формулой $y=kx+3$, проходит через точку $A(-1; 5)$. Найдите коэффициент k . Является эта функция возрастающей или убывающей? Найдите корень этой функции.

144. Найдите координаты точек пересечения с осями координат и постройте график функции а) $y=x-2$; б) $y=0,5x-3$; в) $y=-2x-5$.

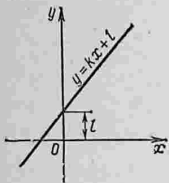


Рис. 3

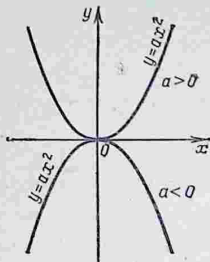


Рис. 4

145. Как влияют значения k и l на расположение графика функции $y=kx+l$?

146. Изобразите схематически график функции, заданной формулой $y=kx+l$, если а) $k>0$, $l>0$; б) $k<0$, $l>0$; в) $k<0$, $l<0$; г) $k=0$, $l>0$; д) $k<0$, $l=0$.

Функция $y=ax^2$

Графиком функции, заданной формулой $y=ax^2$ ($a \neq 0$), служит кривая, называемая *параболой*.

Область определения X функции $y=ax^2$ есть множество всех чисел, т. е. $X]=-\infty; +\infty[$. При $a>0$ график этой функции расположен в верхней полуплоскости, при $a<0$ — в нижней полуплоскости (рис. 4).

147. В чем сходство и в чем отличие графиков функций, задаваемых формулами а) $y=x^2$ и $y=x^2/2$; б) $y=x^2$ и $y=2x^2$; в) $y=2x^2$ и $y=-2x^2$.

148. Для каких значений x функция $y=ax^2$ возрастает при $a>0$ и для каких значений — при $a<0$?

149. График функции $y = ax^2$ проходит через точку а) $A(3; -9)$; б) $B(-1; 3)$. Найдите a и начертите схематически графики этих функций.

Степенная функция $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Если у степенной функции $n=1$, то $y=x$ и графиком этой функции служит прямая (рис. 5); если $n=2$, то $y=x^2$ и графиком этой

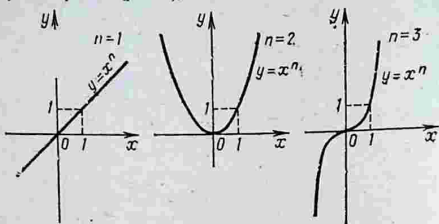


Рис. 5

функции является парабола (рис. 5); если $n=3$, то $y=x^3$ и графиком этой функции является кубическая парабола (рис. 5).

Свойства функции $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

1°. График функции проходит через начало координат и точку $(1; 1)$; это следует из того, что $0=0^n$; $1=1^n$.

2°. Если n — четное число, то ось y служит осью симметрии графика (см. рис. 5 при $n=2$).

3°. Если n — нечетное число, то начало координат служит центром симметрии графика (см. на рис. 5 графики функций при $n=1$ и $n=3$).

Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Областью определения и областью значения функции $y = \sqrt{x}$ служит числовой луч $[0; +\infty[$. Поэтому этот график функции расположен в первой координатной четверти и начало координат принадлежит графику (рис. 6). Функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей.

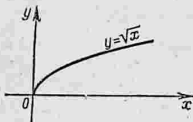


Рис. 6

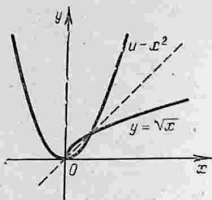


Рис. 7

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной для функции $y = x^n$. Графики этих функций для $n=2$ симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 7).

150. Сравните значения выражений а) $\sqrt[3]{0,6}$ и $\sqrt[3]{2/3}$; б) $\sqrt[3]{5/7}$ и $\sqrt[3]{0,7}$; в) $\sqrt[3]{0,88}$ и 1; г) $\sqrt[10]{6,2^2 - 6,1^2}$ и $\sqrt[10]{1,22}$.

§ 16. УРАВНЕНИЯ

Уравнение есть равенство, содержащее одну или несколько переменных (неизвестных).

151. 1. Что называют корнем уравнения?

2. Что значит решить уравнение?

3. Из скольких элементов может состоять множество корней уравнения с одной переменной?

152. Каким может быть множество корней линейного уравнения $ax = b$?

153. Решите уравнение а) $(x - 13)^2 - (x + 5)^2 = (x - 12)^2$; б) $\frac{5x-1}{2} - \frac{x+5}{6} = 1$; в) $\frac{x-3}{8} - 2 = \frac{3x+27}{20} - \frac{x+9}{12}$; г) $\frac{x-9}{2} - \frac{x-1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{7}{8}$; д) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-3}{7} - \frac{x-2}{35} = 4$; е) $\frac{6(2-3x)}{0,03} - \frac{0,01-x}{0,01} = 22$; ж) $(2x - 1 - \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3}) = 0$.

154. Решите уравнение, содержащее переменную в знаменателе дроби: а) $\frac{6x-37}{2(x-8)} - \frac{2(5x-39)}{3(x-8)} = \frac{7}{8}$; б) $\frac{x}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} = 1$; в) $\frac{30}{x^2-49} + \frac{x-1}{x-7} = 1$; г) $\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{12}{x^2-4}$; д) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{12x-15}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} = 0$.

Решение задач

Решение задач составлением уравнений сводится к следующему. 1. Выбирают одну из неизвестных величин, входящих в условие задачи, обозначают ее какой-либо буквой и все неизвестные, входящие в условие, выражают через нее. 2. Составляют уравнение и решают его. 3. Проверяют, удовлетворяет ли найденный корень условию задачи, и указывают ответ.

155. Расстояние между станциями А и В пассажирский поезд проходит на 36 мин быстрее, чем товарный. Определить это расстояние, если средняя скорость пассажирского поезда 60 км/ч, а средняя скорость товарного поезда 48 км/ч.

156. Между двумя городами проходят две различные дороги. Длина первой из них на 10 км больше второй. По первой дороге движется автомобиль и проходит путь между городами за 3,5 ч, вторая автомашина движется по второй дороге и проходит путь за 2,5 ч. Чему равна

скорость каждой машины, если скорость первой на 20 км/ч меньше скорости второй?

157. После улучшения технологии производства на обработку одной детали тратится времени на 1 ч меньше, чем прежде. Теперь 30 деталей обрабатываются за то время, за которое ранее обрабатывались 24 детали. За сколько времени теперь обрабатывается одна деталь?

158. За три дня продали 1400 кг картофеля. В первый день продали на 100 кг меньше, чем во второй, а в третий — $\frac{3}{5}$ того, что продали в первый. Сколько килограммов картофеля продали в каждый из трех дней?

159. Один раствор содержит 30 % (по объему) азотной кислоты, а второй — 55 % азотной кислоты. Сколько нужно взять первого и второго растворов, чтобы получить 100 л 50 %-ного раствора азотной кислоты?

160. Имеется 5 л 70 %-ного раствора серной кислоты. Сколько литров 80 %-ного раствора серной кислоты нужно долить в этот раствор, чтобы получить 72 %-ный раствор серной кислоты?

161. Два экскаватора вырыли котлован для колхозной электростанции за 18 дней. Первый экскаватор мог бы выполнить эту работу в два раза быстрее, чем второй. За сколько дней каждый из экскаваторов мог бы выполнить один всю работу?

§ 17. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратным*.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен единице, называется *приведенным*.

162. 1. Почему первый коэффициент квадратного уравнения не может быть равен нулю?

2. Какими способами решаются неполные квадратные уравнения вида $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$; $ax^2 = 0$?

163. Решите устно уравнение а) $x^2 = x$; б) $0,5x^2 = 4,5$; в) $0,5x^2 = 0$.

164. Решите графически уравнение а) $x^2 - 2x = 0$; б) $0,5x^2 = 2$.

165. 1. Из формулы $S = \pi R^2$ выразите R ; из формулы $s = \frac{gt^2}{2}$ выразите t .

2. Решите уравнение $\frac{1}{2}gt^2 - vt = 0$ относительно t ($t > 0$).

Формулы корней квадратного уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad (1) \quad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}. \quad (2)$$

Формулой (2) удобнее пользоваться, если b — четное число, и, значит, $b/2$ — целое число.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

Если $D > 0$, то $x = \left\{ \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right\}$ — квадратное уравнение имеет два корня.

Если $D = 0$, то $x = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ — квадратное уравнение имеет один корень (иногда говорят, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных корня).

Если $D < 0$, то $x = \emptyset$ — квадратное уравнение не имеет корней.

166. При каких значениях m имеет один корень уравнение а) $mx^2 + 2x + m = 0$; б) $25x^2 + mx + 9 = 0$; в) $x^2 - 6x + m = 0$?

167. Решите уравнение а) $x^2 + x - 6 = 0$; б) $(x-4)^2 + (x+2)^2 + (x-3)(x+3) = 1 - 15x$; в) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = 0$; г) $2x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} = 0$; д) $\frac{5}{x^2+3x} = \frac{6}{x^2-9} + \frac{1}{3-x}$; е) $\frac{6}{4x^2-1} + \frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = 1$.

168. Введением новой переменной решите уравнение а) $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$; б) $\sqrt{x} + x = 12$; в) $\frac{2}{x^2+2} + \frac{3}{x^2+3} = 2$; г) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2,9$; д) $2(x-2)^2 - 3(x-2) + 1 = 0$; е) $x^2 - \frac{50}{2x^2+7} = 7$; ж) $\frac{21}{x^2-4x+10} = x^2 - 4x + 6$.

169. Решите графически уравнение а) $x^2 - x - 2 = 0$; б) $2x^2 + x - 3 = 0$; в) $x^2 + 4x + 4 = 0$; г) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Теорема Виета

Сумма корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-b/a$, а произведение корней равно c/a . Если квадратное уравнение — приведенное ($a=1$), то $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 x_2 = c$.

170. Справедлива ли теорема, обратная теореме Виета?

171. Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней (если они существуют): а) $2,25x^2 + 4x - 1 = 0$; б) $3x^2 - 20 = 0$; в) $x^2 - 48x = 0$.

172. В уравнении $x^2 + bx - 9 = 0$ один из корней равен единице. Найдите другой корень и коэффициент b .

173. Составьте квадратное уравнение, зная его корни:

а) $x_1 = -0,6$ и $x_2 = 1,6$; б) $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$;

в) $x_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ и $x_2 = 5 + 2\sqrt{6}$; г) $x_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ и $x_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

174. Не пользуясь формулой корней квадратного уравнения, решите уравнение а) $x^2 - (m+n)x + mn = 0$; б) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Выражение $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа, причем $a \neq 0$, а x — переменная, называется *квадратным трехчленом*.

Корнем квадратного трехчлена называется значение переменной, при которой значение квадратного трехчлена равно нулю.

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Эта формула называется *разложением квадратного трехчлена на множители*.

175. 1. Как найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$?

2. Сколько корней может иметь квадратный трехчлен?

176. 1. Напишите формулу разложения на множители приведенного квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.

2. Напишите формулу разложения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, если его дискриминант равен нулю.

177. Разложите на линейные множители трехчлен а) $5x^2 - 3x - 2$; б) $12x^2 - 11x + 2$.

178. Сократите дробь а) $\frac{a^2 + a - 12}{9 - a^2}$; б) $\frac{a^3 + 6a + 9}{6 - a - a^2}$;

в) $\frac{6a^2 - 7a - 3}{2a^2 - a - 3}$; г) $\frac{5x^{n+2} + 4x^{n+1} - 9x^n}{x^{n+2} - x^n}$.

179. Произведите указанные действия:

а) $\left(\frac{a-3}{a^2-2a-3} - \frac{a+3}{a^2+4a+3} \right) (a^2-1)$;

б) $\left(\frac{a^2-6a+5}{a^2-7a+10} - \frac{a^2-6a+8}{a^2-5a+4} \right) (a^2-3a+2)$. При каких значениях a данное выражение не имеет смысла?

180. Решите уравнение а) $\frac{x}{x+2} - \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x^2+5x+6} = 0$;

б) $\frac{2}{2y+1} - \frac{1}{1-3y} + \frac{1}{6y^2+y-1} = 0$.

181. Постройте график функции

а) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$; б) $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

График квадратного трехчлена

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b, c — данные числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*.

Путем выделения полного квадрата квадратный трехчлен можно задать в виде $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ — *парабола*, конгруэнтная параболе $y = ax^2$, а осью симметрии является прямая $x = -\frac{b}{2a}$. Координаты вершины этой параболы $O_1 \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right)$ (рис. 8).

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

182. Выделив полный квадрат, начертите схематически графики функций а) $y = x^2 - 8x + 10$; б) $y = -x^2 - 5x + 4$.

183. Постройте график функции а) $y = x^2 + 3x - 4$; б) $y = 5 + 4x - x^2$; в) $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Пользуясь графиком, найдите множество значений аргумента, на котором функция 1) убывает, возрастает; 2) положительна, отрицательна.

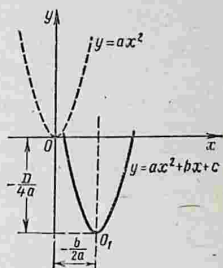


Рис. 8

Задачи, приводящие к решению квадратных уравнений

Общие указания к составлению уравнений даны в § 16.

184. В зале клуба столько рядов, сколько мест в каждом ряду. Если увеличить в два раза число рядов и уменьшить на 10 количество мест в каждом ряду, то число мест в зале увеличится на 300. Сколько рядов в зале?

185. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике длину одного катета увеличить в два раза, а другого уменьшить на 2 см, то площадь треугольника увеличится на 6 см². Найдите длину катетов данного треугольника.

186. Поезд был задержан на станции на 6 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 36 км, увеличив скорость на 4 км/ч. Определите первоначальную скорость поезда.

187. Теплоход должен был пройти 72 км с определенной скоростью. Фактически первую половину пути он шел со скоростью на 3 км/ч меньшей и вторую половину — со скоростью на 3 км/ч большей, чем ему полагалось. На весь путь теплоход затратил 5 ч. На сколько минут опоздал теплоход?

188. В колхозе было собрано 8400 ц озимой пшеницы. Тот же урожай можно было собрать с поля площадью на 20 га меньшей, если увеличить урожай на 1 ц с 1 га. Сколько гектаров земли было засеяно и каков был урожай с 1 га?

189. Два крана, работая вместе, разгрузили баржу за 6 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно, если один из них может ее разгрузить на 5 ч быстрее, чем другой?

190. Сумма площадей двух кругов, касающихся внешним образом, равна 130π см². Найти радиусы кругов, если расстояние между их центрами равно 14 см.

191. Население поселка за два года утроилось. Каков среднегодовой процент прироста населения этого поселка?

§ 18. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Уравнение вида $ax + by = c$, где a , b , c — некоторые числа, а x и y — переменные, называется *линейным уравнением с двумя переменными*.

Система двух уравнений с двумя переменными — это множество из двух уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 — данные числа, а x и y — переменные. Предполагается, что в обоих уравнениях системы одна и та же буква обозначает одно и то же число.

192. 1. Что представляет собой график линейного уравнения с двумя переменными?

2. Что называется решением уравнения с двумя переменными?

193. 1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

2. Что значит решить систему уравнений?

194. Решите графически систему уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2y - x = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 5x + 2y = 3. \end{cases}$$

195. Покажите графически, что не имеет решений система уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ x + 1,5y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 0,5y = 2. \end{cases}$$

196. Покажите графически, что имеет бесконечно много решений система уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 6y = 3, \\ x - 3y = 1,5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ -x + \frac{2}{3}y = -2. \end{cases}$$

197. Подберите такие значения a и c , при которых система

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ ax - y = c \end{cases}$$

имеет единственное решение; не имеет решений; имеет бесконечно много решений.

198. Решите следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 16x - 27y = 20, \\ 5x + 18y = 41,5; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} x : y = 5 : 8, \\ 4x + 0,25y = 11; \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} \frac{15x + 7y}{16} - \frac{3x - y}{4} = -1, \\ 3x - \frac{10 - y}{6} = 2 - y; \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} x - 10y = 10^{10}, \\ x + 10y = 10^{11}. \end{cases} \end{aligned}$$

199. При каких значениях k и l прямая, заданная уравнением $y = kx + l$, проходит через точки $A(2; -3)$ и $B(-1; 4,5)$? Напишите уравнение прямой.

Уравнение окружности

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ служит *окружность* радиуса r , имеющая центр в начале координат.

200. Решите графически систему уравнений

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 3x + 4y = 0; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} xy = 12, \\ x + y = 8; \end{cases} & \text{в) } & \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x + y = 6; \end{cases} \\ \text{г) } & \begin{cases} x^2 + y = 3, \\ x + y = 1; \end{cases} & \text{д) } & \begin{cases} xy = 6, \\ y = x^2 + 5. \end{cases} \end{aligned}$$

201. Решите систему двух уравнений с двумя переменными, из которых одно первой, а другое второй степени:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - 2y^2 - xy + 5x + 15 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xy = 5, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{7}, \\ xy + 2y = -14. \end{cases}$$

202. Решите систему уравнений

$$а) \begin{cases} x^2 + x = 0, \\ x^3 + y = 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} y^2 + 2y - 3 = 0, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{3x-1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = \frac{y+2}{(y-1)(x+1)}, \\ 4y - x = 7. \end{cases}$$

Задачи, приводящие к решению системы уравнений

При решении задач составлением системы уравнений пользуются в основном тем же методом, что и при составлении уравнения с одной переменной (см. § 16).

203. Если числитель дроби уменьшить на единицу, то дробь становится равной $\frac{1}{5}$, а если знаменатель ее уменьшить на единицу, то дробь становится равной $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

204. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Отношение этого числа к числу, у которого переставлены цифры, равно $\frac{4}{7}$. Найдите эти числа.

205. На устройство канализации на протяжении 160 м употребили 150 керамических труб длиной 800 и 1200 мм. Определите количество труб каждого из этих размеров.

206. Два завода должны были за месяц выпустить 360 станков. Однако первый завод выполнил план на 110 %, а второй — на 112 %, поэтому оба завода выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод?

207. Разность двух чисел равна 2, а разность их квадратов равна 16. Найдите эти числа.

208. Периметр прямоугольника 20 см, а его площадь 24 см². Найдите длины сторон прямоугольника.

209. Периметр прямоугольного треугольника 30 см, длина гипотенузы 13 см. Найдите длины катетов треугольника.

210. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника 14 см, а площадь треугольника 24 см². Найдите длины катетов.

211. Прямоугольный участок земли площадью 6 га обнесен изгородью, длина которой равна 100 м. Найдите длину и ширину этого участка.

212. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же

это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найдите это число.

§ 19. НЕРАВЕНСТВА

Неравенством называют два выражения, соединенные знаками $>$ или $<$; $\geq$ или $\leq$.

Если $a > b$, то разность $a - b$ — положительное число;

если $a < b$, то разность $a - b$ отрицательна. И наоборот:

если разность $a - b$ положительна, то $a > b$;

если разность $a - b$ отрицательна, то $a < b$.

Неравенства вида $a > b$, $c < d$ называются *строгими*,

неравенства вида $a \geq b$, $c \leq d$ — *нестрогими* неравенствами.

213. Докажите, что при любом значении переменной истинно неравенство а) $a^2 + 2 \geq 2(2a - 1)$; б) $2(p+1)^2 + 3p > p(p+5)$; в) $2xy \leq x^2 + y^2$.

214. 1. Докажите, что при $a > 0$ истинно неравенство $a + 1/a \geq 2$. Сформулируйте полученное соотношение.

2. Докажите, что при $b < 0$ $b + 1/b \leq -2$.

3. Докажите, что $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$. Сформулируйте полученное соотношение.

Основные свойства числовых неравенств

1°. Если $a > b$, то $b < a$.

2°. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).

3°. Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$.

Следствие. Если $a + b > c$, то $a > c - b$.

4°. Если $a > b$ и $c > 0$ (c — положительное число), то $ac > bc$.

Если $a > b$ и $c < 0$ (c — отрицательное число), то $ac < bc$.

5°. Если числа a и b оба положительны или оба отрицательны и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Действия над неравенствами

1. Сложение: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

2. Умножение: если $a > b$, $c > d$ и a , b , c , d — положительные числа, то $ac > bd$.

3. Возвышение в степень: если $a > b$, где числа a и b положительны, то $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$; вообще при любом натуральном n $a^n > b^n$.

215. Докажите, что если $a > 3$ и $b > 4$, то а) $3a + 2,5b > 19$; б) $2ab > 24$; в) $a^2 + b^2 > 25$.

216. Найдите границы значения $5a + 0,2b$, если $1,4 < a < 1,6$, $5 < b < 6$.

217. Найдите границы значения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, если $3 < a < 4$, $5 < b < 6$.

218. Известны границы длины a и ширины b (см) прямоугольника $8,5 \leq a \leq 8,6$ и $2,5 \leq b \leq 2,6$. Оцените S — площадь прямоугольника.

Линейные неравенства с одной переменной

Неравенства вида $ax > b$ или $ax < b$ (соответственно $ax \geq b$ или $ax \leq b$), где a и b — некоторые числа, называются *линейными*.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, при котором неравенство истинно.

219. Что значит решить неравенство?

220. Решить неравенство а) $\frac{7x+5}{6} - \frac{3x-9}{2} > 8$; б) $\frac{2a-1}{4} - \frac{2a-2}{3} < 1$; в) $\frac{5x-3}{10} > \frac{3x+1}{6}$.

221. Найдите множество натуральных значений x , удовлетворяющих неравенству а) $(2x+3)(2x-3) - (2x-1)^2 \leq 2$; б) $(x-1)(x^2+x+1) - x(x^2-1) \leq 4$.

Системы линейных неравенств с одной переменной

Система неравенств первой степени с одной переменной — это множество неравенств, содержащих одну и ту же переменную, для которых требуется найти такие значения переменной, при которых каждое из этих неравенств обращается в верное числовое неравенство.

222. Решите систему неравенств

а) $\begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x-6 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+1 > 6, \\ 3x-1 > 3,5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-4 > 6, \\ -5x+6 > -8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x > 5, \\ x > 2,5, \\ x < 7. \end{cases}$

223. Решите двойное неравенство а) $-1 < 2x-3 < 7$; б) $-10 \leq 3-x \leq 10$.

224. Решите неравенство а) $(2x-3)(5-x) > 0$; б) $\frac{-3}{2x+6} > 0$; в) $\frac{2x-3}{3x+6} < 0$; г) $\frac{4x+2}{2-5x} < 1$; д) $\frac{3x-1}{2x+5} > 2$.

225. Решите неравенство а) $x^2 \geq 9$; б) $x^2 < 1$; в) $x^2 > x$; г) $x^3 > 1$; д) $x^3 < 8$; е) $x^4 > 1$; ж) $x^2 - x - 6 < 0$; з) $2x^2 + x - 3 > 0$.

226. Найдите область определения функции а) $y = \sqrt{5-x}$; б) $y = \frac{\sqrt{-x}}{x+1}$; в) $y = \sqrt{\frac{x-3}{2x-7}}$; г) $y = \sqrt{\frac{4-x}{2x-5}}$; д) $y = \sqrt{\frac{5-x}{x^2+4}}$.

Неравенства с двумя переменными

227. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой неравенств с двумя переменными, затем найдите два каких-либо решения этой системы:

а) $\begin{cases} y \geq x + 3, \\ y \leq -x + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 1; \end{cases}$
г) $\begin{cases} y \leq -x^2, \\ y \geq -2. \end{cases}$

§ 20. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Бесконечной последовательностью называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Если функция задана на множестве n первых натуральных чисел, то ее называют *конечной последовательностью*.

228. Найдите пять первых членов последовательности, заданной формулой а) $a_n = \frac{2}{n}$; б) $b_n = 2^{n-1}$; в) $c_n = 1 + (-1)^{n+1}$; г) $x_n = \sqrt{n}$; д) $x_n = 180^\circ (n-1) + 30^\circ$.

229. Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - 2n$. Найдите а) x_{k-1} ; б) x_{k+1} .

230. Является ли членом последовательности $y_n = n^2 - 15n + 30$ а) число -20 , б) число 16 ? В случае утвердительного ответа укажите порядковый номер этого члена.

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой начиная со второго равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Разность между любым членом прогрессии начиная со второго и ему предшествующим есть *разность арифметической прогрессии* d :

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}.$$

231. 1. Что нужно знать, чтобы задать арифметическую прогрессию?

2. Какова должна быть разность арифметической прогрессии, чтобы она была возрастающей последовательностью; убывающей последовательностью?

3. Как выражается любой член арифметической прогрессии через его предшествующий и последующий члены?

232. 1. Найдите a_1 и a_3 , если известны второй член арифметической прогрессии a_2 и ее разность d .

2. При каком условии три числа a , b , c составляют три последовательных члена арифметической прогрессии?

3. Для каких значений x числа 1, x и $14 - x$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

Формула n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

233. Найдите 31-й член арифметической прогрессии, если $a_1 = -8,5$, $d = -0,4$.

234. Является ли число 146 членом арифметической прогрессии $-6, -2, \dots$? Если это член арифметической прогрессии, укажите, на каком месте он расположен.

235. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n): $a_3 = 8,2$; $a_{13} = 10,2$. Найдите первый член прогрессии, ее разность и число членов этой прогрессии, каждый из которых меньше 20.

236. Между числами 8 и 0 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2} \quad (1)$$

или

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n. \quad (2)$$

237. Число членов арифметической прогрессии (a_n) равно 16, причем $a_1 + a_{16} = 40$. Укажите еще несколько пар членов этой прогрессии таких, что сумма их также равна 40. Чему равна сумма всех членов этой прогрессии?

238. Найдите сумму а) первых 100 натуральных чисел; б) всех нечетных чисел, меньших 100.

239. 1. Сколько надо взять членов прогрессии 21, 18, 15, ..., чтобы их сумма была равна нулю?

2. Сколько надо взять членов прогрессии 0, 4, 8, ..., чтобы их сумма была больше 112?

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член начиная со второго равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю.

Знаменатель геометрической прогрессии — это отношение любого ее члена к предшествующему: его обозначают буквой q :

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \dots$$

240. 1. Что нужно знать, чтобы задать геометрическую прогрессию?

2. Как выражается любой член геометрической прогрессии, все члены которой положительны, через предшествующий и последующий члены?

3. Какова будет геометрическая прогрессия, если $q > 0$; $q = 1$; $q < 0$?

241. 1. Найдите b_1 и b_3 , если известны b_2 и q .

2. Найдите b_2 и b_1 , если $b_3 = 3\sqrt{2}$, $b_4 = 3$.

3. В геометрической прогрессии 2, b_2 , 8, b_4 , b_5 найдите неизвестные члены b_2 , b_4 и b_5 .

4. Докажите, что при любом $|a| \neq 1$ значения выражений $(a+1)^2$, $a^2 - 1$ и $(a-1)^2$ составляют три последовательных члена геометрической прогрессии.

Формула n -го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

242. 1. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = -0,001$ и $q = 10$.

2. Докажите, что если последовательность (c_n) — геометрическая прогрессия, то $c_2 c_{11} = c_5 c_8$.

3. Найдите неизвестные члены в конечной геометрической прогрессии a_1 , 0,36, a_3 , a_4 , 360.

Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \quad q \neq 1, \quad (1)$$

или

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1. \quad (2)$$

243. Известны 7-й член, $b_7 = 1,28$, и знаменатель q геометрической прогрессии $q = 2$. Найдите первый член прогрессии и сумму семи первых ее членов.

244. Сумму n первых членов геометрической прогрессии (a_n) можно вычислить по формуле $S_n = 5(2^n - 1)$. Найдите S_6 , a_1 , q .

§ 21. ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

Понятие логарифма

Десятичным логарифмом числа a называется показатель степени, в которую надо возвести число 10, чтобы получить a . Десятичный логарифм обозначается так: $\lg a$.

По определению, равенство $\lg a = x$ означает, что $10^x = a$; заменив x на $\lg a$, получим

$$10^{\lg a} = a.$$

Это равенство называют *основным логарифмическим тождеством*, оно кратко выражает определение десятичного логарифма ($\lg a$ — показатель степени, в которую надо возвести основание 10, чтобы получить число a).

245. 1. Какое действие называется логарифмированием?

2. Для каких чисел существуют логарифмы?

3. При каком a справедливо тождество $10^{\lg a} = a$?

246. Используя определение логарифма, проверьте справедливость равенства а) $\lg 100 = 2$; б) $\lg 0,1 = -1$;

в) $\lg \sqrt{10} = 1/2$; г) $\lg \sqrt[5]{0,1} = -\frac{1}{5}$; д) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = -\frac{1}{3}$.

247. Используя знак логарифма, замените следующие равенства логарифмическими: а) $10^3 = 1000$; б) $10^0 = 1$; в) $10^{-3} = 0,001$; г) $10^t = a$; д) $10^{x+1} = b$.

248. Докажите, что если $10^a = 10^b$, то $a = b$.

249. Решите уравнение а) $10^x = 10$; б) $10^x = 1$; в) $10^x = 0,01$; г) $10^x : 4 = 0,025$; д) $10^x = \sqrt[3]{10}$; е) $10^x = \frac{1}{\sqrt[5]{100}}$.

250. Найдите значение выражения а) $\lg 10$; б) $\lg 10\,000$; в) $\lg 0,01$; г) $\lg 10\sqrt{10}$; д) $\lg \sin^2 90^\circ$; е) $\lg (\cos 0^\circ + \cos 90^\circ)$.

251. Вычислите а) $\lg \lg 10$; б) $\lg \sqrt{10} + \sqrt{\lg 10}$; в) $(\lg 0,1)^2 + \lg 10 \lg 100$; г) $\frac{1 - (\lg 0,01)^2}{1 + (\lg 0,01)^2}$.

252. Какие выражения не имеют смысла: $\lg 5^{-1}$; $\lg 0$; $\lg(-5)$; $\lg 3^{-2}$; $\lg\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right)$; $-\lg 0,3$; $\lg(\sqrt{3} - 2)^2$?

253. Вычислите следующие выражения:

а) $10^{\lg 2}$; б) $10^{\lg 2 + \lg 5}$; в) $10^{2 + \lg 5}$; г) $10^{\lg 7 - 1}$; д) $10^{1 - \lg 5}$; е) $10^{-2 \lg 3}$; ж) $0,1 - \lg 4$; з) $5 \cdot 10^{-\lg 5}$; и) $10^{\lg \lg 100}$; к) $5^{\lg 100}$; л) $0,25^{\lg \sqrt{10}}$.

254. Решите уравнение а) $10^{\lg x} = 1$; б) $10^{\lg |x|} = 2$; в) $100^{\lg x} = 4$.

255. Решите уравнение а) $\lg x = 2$; б) $\lg x = 0$; в) $\lg(-x) = -1$; г) $\lg x = 0,1$; д) $\lg(x - 2) = 1$; е) $\lg(-x - 3) = -2$; ж) $\lg(3 - x) = 0$; з) $\lg(x^2 - 6) = 1$; и) $\lg(x^2 - 3x) = 1$; к) $\lg(x^2 + 5x + 6,1) = -1$.

256. Решите уравнение а) $(\lg x)^2 + \lg x = 0$; б) $(\lg x)^2 - 3 \lg x + 2 = 0$; в) $2(\lg x)^2 - \lg x - 3 = 0$.

Формулы логарифмирования

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b, \text{ где } a > 0, b > 0.$$

2. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b, \text{ где } a > 0, b > 0.$$

3. Логарифм степени с положительным основанием равен показателю степени, умноженному на логарифм основания:

$$\lg a^p = p \cdot \lg a, \text{ где } a > 0;$$

в частности, $\lg 10^p = p$.

257. Выразите а) $\lg 18$ через $\lg 2$ и $\lg 3$; б) $\lg 75$ через $\lg 5$ и $\lg 3$; в) $\lg \frac{\sqrt[3]{25}}{8}$ через $\lg 5$ и $\lg 2$.

258. Зная, что $\lg 2 \approx 0,30$; $\lg 3 \approx 0,48$, найдите приближенное значение а) $\lg 60$; б) $\lg \frac{10}{3}$; в) $\lg \frac{1}{6}$; г) $\lg \sqrt[4]{12}$; д) $\lg 0,03$; е) $\lg (200 + 100)$; ж) $\lg 200 + \lg 100$; з) $\frac{\lg 10 + \lg 90}{\lg (10 + 90)}$.

259. Вычислите а) $\lg(100a) - \lg \frac{a}{10}$, где $a > 0$; б) $\lg x \times \frac{x}{100} - \lg(1000x)$, где $x > 0$.

260. Вычислите а) $\lg \sqrt{0,1}$; б) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10^3}}$; в) $2 \lg \sqrt[4]{10^3}$; г) $\lg 0,1 \sqrt{1000}$.

261. Найдите значение выражения а) $\frac{\lg 8}{\lg 2}$; б) $\frac{\lg 3}{\lg 27}$; в) $\frac{\lg 25}{\lg \sqrt[3]{5}}$; г) $\frac{2 \lg 49}{\lg 7}$; д) $\frac{\lg 5 - 1}{\lg 50}$; е) $\frac{\lg^2 49}{\lg \sqrt{7}}$.

262. Зная, что $\lg 2 \approx 0,30$, найдите приближенное значение а) $\lg \sqrt[3]{0,8}$; б) $\lg \sqrt[4]{3,2}$.

263. Прологарифмируйте выражение (буквами обозначены положительные числа) а) $x = \frac{a^2 b^3}{c \sqrt{d}}$; б) $x = 10a^4 \sqrt[3]{\frac{b^2}{c}}$; в) $x = \frac{(a+3)^2 b^3}{(a^2+2)^2 c^4}$; г) $x = \sqrt{\frac{(a+b)^5 c^3}{\sqrt{d}}}$.

264. Зная, что $\lg 2 \approx 0,30$; $\lg 3 \approx 0,48$; $\lg 5 \approx 0,70$, найдите приближенно значение корней уравнения а) $2^x = 5$; б) $3^x = 25$; в) $2^x = 100$; г) $0,1^x = 20$.

Потенцирование

Действие нахождения числа по заданному его логарифму называется *потенцированием*; это действие является обратным логарифмированию.

Формулы потенцирования

При $a > 0$, $b > 0$ имеем:

$$\lg a + \lg b = \lg(ab); \lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}; k \lg a = \lg a^k.$$

Эти формулы представляют собой формулы логарифмирования, записанные в обратном порядке.

265. Вычислите значение выражения а) $\lg 2 + \lg 5$; б) $\lg 360 - \lg 0,36$; в) $\lg 0,15 - \lg 15$; г) $\frac{1}{2} \lg 25 + \frac{1}{3} \lg 64 - \frac{1}{5} \lg 32$.

266. Докажите, что если логарифмы двух положительных чисел равны, то сами числа равны.

267. Найдите x , если а) $\lg x = \lg 2 + 3 \lg 5$; б) $\lg x = 3 \lg 2 + 2 \lg 3$; в) $\lg x = \frac{1}{4}(\lg 8 + \lg 32)$; г) $\lg x = 3(\lg 8 - \lg 2)$; д) $\lg x = 2 \lg(a-b) - \lg(a^2 - b^2)$.

268. Решите уравнение а) $\lg(2x-5) = 2 \lg 3 + \lg 5$; б) $\lg(9-0,1x) = \lg 6 - \lg 2$; в) $\lg(20-5x) = \lg x + 1$; г) $\lg x = 2 - \lg 4$; д) $\lg(x+6) = \lg x + \lg 2,5$; е) $\lg(x-4) + \lg(x+5) = 1$.

269. Постройте график функции а) $y = 10^{\lg(2x)}$; б) $y = 10^{2 \lg x}$; в) $y = 10^{\lg(x-2)}$; г) $y = 10^{\lg x - 2}$; д) $y = 10^{\lg x - \lg 2}$.

Вычисления с помощью логарифмической линейки

270. Следующие выражения вычислите с помощью логарифмической линейки; ответ проверьте, выполнив действия в столбик и округлив результат, оставив в нем три значащие цифры:

а) $\frac{13,4 \cdot 3,78}{1,24}$; б) $\frac{34,4 \cdot 0,336}{4,64}$; в) $\frac{4,15 \cdot 3,64}{16,7}$; г) $\frac{1,9 \cdot 0,93}{0,15}$; д) $\frac{64,5 \cdot 0,432}{19,5}$.

271. С помощью логарифмической линейки найдите а) 2,5 % от 358; б) 43,5 % от 192; в) сколько процентов составляет 18,6 от 72,5?

272. С помощью логарифмической линейки найдите неизвестный член пропорции а) $\frac{x}{27,3} = \frac{4,25}{0,85}$; б) $\frac{168}{x} = \frac{374}{0,735}$.

273. Длина окружности вычисляется по формуле $C = \pi d$. Найдите с помощью логарифмической линейки диаметр d , если длина окружности C равна а) 4,21; б) 14,2; в) 260.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

§ 22. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

К основным геометрическим понятиям, которые не определяются, относятся точка, прямая, плоскость, расстояние от одной точки до другой, отображение фигур.

274. Дайте определение как множества точек а) окружности; б) круга.

275. Что называется а) отрезком; б) открытым лучом; лучом?

276. Что называется а) ломаной; б) многоугольником?

277. Какое предложение называется а) аксиомой; б) теоремой?

Свойства расстояний на прямой

1^о. Расстояние между точками A и B положительно, если эти точки различны, и равно нулю, если эти точки совпадают, т. е.

$$|AB| > 0, \text{ если } A \neq B; \quad |AB| = 0, \text{ если } A = B.$$

2^о. Для любых точек A и B расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A : $|AB| = |BA|$.

3^о. Точка X лежит между точками A и B , если эти три точки различны и $|AX| + |XB| = |AB|$.

4^о. Если три точки A , B и C не принадлежат одной прямой, то $|AC| < |AB| + |BC|$.

278. На плоскости даны две различные точки A и B . Найдите на плоскости множество таких точек X , для которых выполняется условие а) $|AX| \leq 2$ см; б) $|BX| = 2$ см.

279. Принадлежат ли точки A , B и C одной прямой, если $|AC| = 4$ см, $|CB| = 10$ см, $|AB| = 6$ см?

Теорема о длине ломаной

Длина ломаной больше расстояния между ее концами.

Если $A_1A_2A_3A_4$ — ломаная, то $|A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_3A_4| > |A_1A_4|$ (рис. 9).

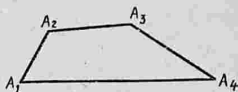


Рис. 9

280. 1. Докажите, что длина ломаной ADC меньше длины ломаной ABC (рис. 10).

2. Докажите, что длина ломаной AMC меньше длины ломаной ABC (рис. 11).

281. Докажите, что для треугольника ABC выполняются неравенства (сформулируйте их)

$$|AC| > |AB| - |BC|; \quad |AB| > |AC| - |BC|;$$

$$|BC| > |AC| - |AB|.$$

282. 1. Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны 3 и 6 см. Чему равна длина третьей стороны?

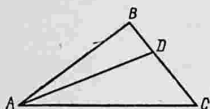


Рис. 10

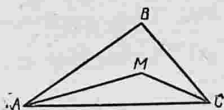


Рис. 11

2. Каким может быть расстояние $|AC|$, если длины звеньев ломаной ABC равны соответственно 3 и 5 см?

Пересечение и объединение фигур

Пересечением двух или нескольких фигур называют фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек, которые принадлежат каждой из этих фигур. Пересечение фигур, как и пересечение множеств, обозначают знаком $\cap$.

Объединением двух или нескольких фигур называют фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур. Объединение фигур, так же как и объединение множеств, обозначают знаком $\cup$.

На рис. 12 пересечение фигур показано двойной штриховкой и обведено жирной линией.

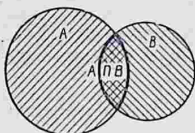


Рис. 12

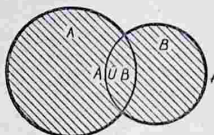


Рис. 13

На рис. 13 объединение фигур — фигура, граница которой выделена жирной линией.

283. 1. Покажите, что пересечением двух кругов может быть пустое множество, точка, круг.

2. Покажите, что пересечением двух треугольников может быть пустое множество, множество из одной точки, отрезок, треугольник.

3. Покажите, что равнобедренный треугольник есть объединение двух прямоугольных треугольников.

Углы

Углом называется фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости. Эти лучи называют *сторонами угла*, а их общее начало — *вершиной*.

284. 1. Какой угол называется развернутым; прямым?

2. Какие два угла называются смежными; чему равна сумма их величин?

3. Какие два угла называются вертикальными?

4. Что называется биссектрисой угла?

5. Какие две прямые называются взаимно перпендикулярными?

285. 1. Какой фигурой может быть пересечение двух острых углов с общей вершиной? Покажите всевозможные случаи на рисунке.

2. Какой фигурой может быть объединение двух углов в 30° и 60° , имеющих общую вершину и сторону? (Для каждого случая сделайте рисунок.)

286. Развернутый угол разделен на три конгруэнтные части. Докажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

287. 1. Могут ли оба смежных угла быть острыми; тупыми; прямыми?

2. Величина одного из смежных углов равна α . Запишите формулой величину другого смежного угла β .

3. Величина одного из смежных углов на 90° больше другого. Вычислите величину каждого угла.

4. Вычислите величину каждого смежного угла, если один из них на 50 % больше другого.

288. Чему равна величина угла между биссектрисами а) двух смежных углов; б) двух вертикальных углов?

§ 23. КОНГРУЭНТНОСТЬ ФИГУР* И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Отображение фигур

289. На рис. 14 каждой точке дуги CD поставлены в соответствие точки (лежат на одном луче) дуги AB .
а) Отображение какой фигуры на какую здесь задано?
б) Как построить точку, соответствующую точке Z дуги CD ?

* В ряде учебных пособий вместо термина «конгруэнтность фигур» использован термин «равенство фигур».

в) Является ли это отображение обратимым? Назовите образы точек C, X, Y, D .

290. Окружность находится внутри треугольника (рис. 15). а) Задайте отображение окружности на контур

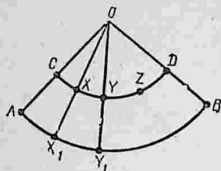


Рис. 14

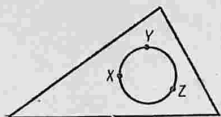


Рис. 15

треугольника. б) Постройте образы точек X, Y, Z . в) Обратимо ли заданное отображение?

Конгруэнтные фигуры

Если фигуру F можно отобразить на фигуру F_1 так, что расстояние между любыми двумя точками M и N фигуры F равно расстоянию между соответствующими точками M_1 и N_1 фигуры F_1 , то говорят, что фигура F конгруэнтна фигуре F_1 .

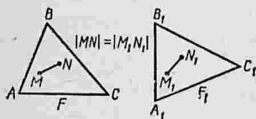


Рис. 16

На рис. 16 представлены конгруэнтные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, что записывается так: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

291. 1. Постройте два конгруэнтных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$. Возьмите произвольную точку M на стороне AB и постройте точку M_1 , в которую перейдет точка M , если треугольники совместить. 2. Решите предыдущую задачу, если точка M находится внутри треугольника ABC .

Перемещения. Поворот

Отображение плоскости на себя (это значит, что при отображении любая точка плоскости имеет прообраз на этой же плоскости), сохраняющее расстояния, называется *перемещением*. При перемещении каждая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру.

Поворот плоскости вокруг точки

Поворот плоскости вокруг центра O — такое перемещение плоскости, при котором 1) точка O отображается сама на себя; 2) угол

между лучом OX и соответствующим ему лучом OX_1 (рис. 17) имеет одну и ту же величину α . Величина α называется *углом поворота*.

Угол поворота заключен в пределах $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Если же ввести направление поворота (положительное — против часовой стрелки, отрицательное — по часовой стрелке), то $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Поворот вокруг центра O на угол α обозначается R_O^α или просто R^α .

292. Дан треугольник ABC . Постройте образ треугольника ABC при повороте на 45° с центром A .

293. Постройте образ ромба $ABCD$ при повороте, отображающем отрезок AB на отрезок AD .

294. Укажите центр и угол поворота, при которых квадрат переходит сам в себя.

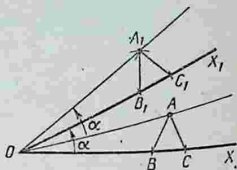


Рис. 17

Композиция поворотов

Результат последовательного выполнения двух поворотов с общим центром R_O^α и R_O^β называется *композицией поворотов* и обозначается $R_O^\beta \cdot R_O^\alpha$ или $R^\beta \cdot R^\alpha$. При любых углах поворота α и β справедливо равенство $R^\beta \cdot R^\alpha = R^\alpha \cdot R^\beta = R^{\alpha+\beta}$.

295. Найдите все значения угла α , для которых выполняется равенство а) $R^{60^\circ} = R^\alpha$; б) $R^\alpha \cdot R^{120^\circ} = R^{-\alpha}$.

Центральная симметрия

Поворот вокруг центра O на 180° называется *симметрией с центром O* . Центр поворота при этом называется *центром симметрии*.

Центральная симметрия обозначается Z_O ; по определению $Z_O = R_O^{180^\circ}$.

На рис. 18 точки A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 симметричны друг другу относительно центра O . Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен треугольнику ABC относительно центра O .

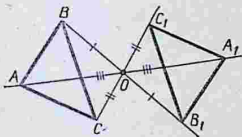


Рис. 18

296. На какую фигуру при центральной симметрии отображается а) прямая относительно

любой своей точки; б) луч относительно своего начала; в) угол с вершиной в центре симметрии; г) прямая относительно центра, не принадлежащего ей?

297. Постройте фигуру, центрально симметричную данной окружности, приняв за центр симметрии а) точку,

лежащую на окружности; б) точку, лежащую внутри этой окружности.

Осевая симметрия

Осевой симметрией с осью l называется такое перемещение плоскости, при котором точки прямой l отображаются на себя и каждая точка X одной полуплоскости с границей l отображается на точку X_1 другой полуплоскости так, что отрезок $XX_1 \perp l$ и делится прямой l пополам (рис. 19).

Если симметрия относительно оси l точку X отображает на X_1 , то это записывают так: $S_l(X) = X_1$.

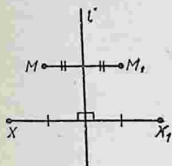


Рис. 19

298. Как построить точку M_1 , если $M_1 = S_l(M)$?

299. Сколько осей симметрии имеет а) отрезок; б) луч; в) прямая; г) окружность и круг; д) угол; е) равносторонний треугольник; ж) квадрат?

300. 1. Постройте фигуру, симметричную треугольнику ACB , в котором $\widehat{ACB} = 90^\circ$, относительно (AC) . Какую фигуру образует объединение данной и построенной фигур?

2. Внутри прямого угла AOB взята точка M и построены точки $M_1 = S_{BO}(M)$ и $M_2 = S_{AO}(M)$. Докажите, что точки M_1 , O и M_2 лежат на одной прямой.

§ 24. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки A до основания перпендикуляра, проведенного через нее к прямой l , меньше, чем расстояние от A до любой другой точки прямой l . Или короче: отрезок перпендикуляра AO короче, чем отрезок AB любой наклонной.

Если $(AO) \perp l$, (AB) — наклонная к l (рис. 20), то $|AO| < |AB|$.

301. Что принимается за расстояние от точки до прямой?

302. Внутри прямого угла дана точка A . Рассмотрев различные случаи расположения точки A , найдите кратчайшее расстояние от точки A до сторон угла.

Теорема о двух наклонных и перпендикуляре

1. Если из одной точки к данной прямой проведено несколько наклонных, то наклонным равной длины соответствуют проекции равной длины.

2. Наклонной большей длины соответствует проекция большей длины.

Так, если $(OM) \perp a$ и $|OA| = |OB|$, то $|AM| = |MB|$ (рис. 21, а).

Если $|OM| \perp a$ и $|OA| > |OB|$, то $|MA| > |MB|$ (рис. 21, б).

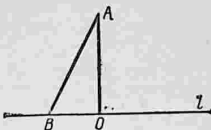


Рис. 20

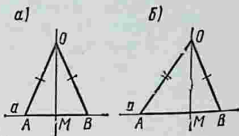


Рис. 21

303. Что называют а) проекцией точки на прямую б) проекцией отрезка на прямую?

304. В прямоугольном треугольнике проведена высота к гипотенузе. Укажите а) проекции катетов на гипотенузу; б) проекции катетов на указанную высоту.

Параллельные прямые

Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют общих точек или совпадают.

305. 1. Верно ли утверждение, что две прямые называются параллельными, если они не пересекаются?

2. Как измерить расстояние между двумя параллельными прямыми?

306. 1. Сформулируйте аксиому параллельных.

2. Докажите, что если к одной и той же прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то они пересекаются.

Направления

Направление на плоскости — это множество лучей, сонаправленных с одним и тем же лучом этой плоскости.

Углом между двумя направлениями называют величину угла между любыми двумя лучами этих направлений, имеющими общее начало.

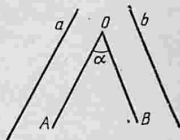


Рис. 22

Угол между направлениями a и b — угол AOB (рис. 22). Величина угла зависит от начальной точки лучей, которые определяют этот угол.

307. 1. Какие два луча, лежащие на одной прямой, считаются одинаково направленными (сонаправленными) и какие — противоположно направленными?

2. Какие два параллельных луча считаются сонаправленными и какие — противоположно направленными?

3. Даны угол и точка, принадлежащая ему. Постройте угол с вершиной в данной точке, стороны которого 1) сонаправлены сторонам данного угла; 2) противоположно направлены сторонам данного угла.

308. Две прямые пересечены третьей. Назовите а) соответственные углы; б) внутренние накрест лежащие углы.

309. Две параллельные прямые пересечены третьей.
а) Выпишите пары углов, стороны которых сонаправлены.
б) Почему соответственные углы конгруэнтны?

310. Величина угла $\angle ABC$ равна α . Внутри угла взята точка и через нее проведены две прямые — одна параллельно $[BA]$, другая параллельно $[BC]$. Определить углы между проведенными прямыми.

Признаки параллельности прямых

1. Если две прямые симметричны относительно некоторого центра, то они параллельны.

Если $b = Z_B(a)$, то $a \parallel b$ (рис. 23).

2. Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то эти прямые параллельны.

Если $a \perp p$ и $b \perp p$, то $a \parallel b$ (рис. 24).

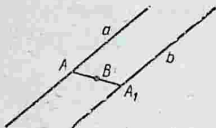


Рис. 23

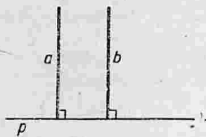


Рис. 24

3. Если два каких-либо соответственных угла при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.

Если $\angle 1 \cong \angle 2$, то $a \parallel b$ (рис. 25).

4. Если два каких-либо внутренних накрест лежащих углов при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны, то прямые параллельны.

Если $\angle 3 \cong \angle 2$, то $a \parallel b$ (см. рис. 25).

311. 1. Применяя свойства центральной симметрии, через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

2. Все углы четырехугольника прямые. Как расположены его противоположные стороны?

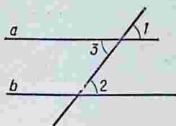


Рис. 25

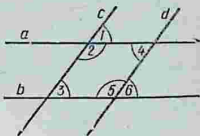


Рис. 26

312. Даны углы: $\hat{2} = 132^\circ$, $\hat{3} = 49^\circ$, $\hat{4} = 48^\circ$, $\hat{5} = 131^\circ$ (рис. 26). Назовите параллельные прямые.

§ 25. ТРЕУГОЛЬНИКИ

313. В треугольнике ABC укажите а) стороны, противолежащие углам A , B и C ; б) углы, противолежащие сторонам AB , BC и AC ; в) углы, прилежащие к сторонам AB , BC и AC .

314. Что называется биссектрисой треугольника; медианой треугольника; высотой треугольника?

Замечание. Вместо терминов «длина биссектрисы», «длина стороны», «величина угла» часто говорят «биссектриса», «сторона», «угол» и т. д.

Свойства равнобедренного треугольника

Теорема. 1. Прямая, содержащая биссектрису угла при вершине равнобедренного треугольника, является осью симметрии этого треугольника.

2. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является также его медианой и высотой.

3. Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.

Если в треугольнике ABC (рис. 27) $|AB| = |BC|$ и прямая l содержит биссектрису BM , то l — ось симметрии треугольника;

$|BM| \perp |AC|$, $|AM| = |MC|$;

$\angle A \cong \angle C$

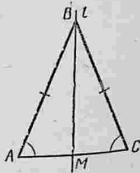


Рис. 27

315. 1. В какой точке пересекаются высоты прямоугольного треугольника?

2. Проведите три высоты в тупоугольном треугольнике.

316. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$, а основание его равно a . Боковая сторона этого треуголь-

ника является одновременно стороной равностороннего треугольника. Определите периметр второго треугольника.

Признаки конгруэнтности треугольников

I. Если три стороны одного треугольника конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Этот признак мы будем коротко называть «признак ССС» (сторона, сторона, сторона).

II. Если две стороны и угол между ними одного треугольника конгруэнтны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Этот признак мы будем называть «признак СУС» (сторона, угол, сторона).

III. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника конгруэнтны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Этот признак мы будем называть «признак УСУ» (угол, сторона, угол).

Замечание. Следует заметить, что в этом признаке конгруэнтности треугольников идет речь об углах, прилежащих к данной стороне.

Можно построить два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 28), у которых $[AC] \cong [A_1C_1]$ и два угла одного конгруэнтны двум углам другого, а сами треугольники не конгруэнтны.

Напомним, что во всяком треугольнике шесть основных элементов: три стороны и три угла. При решении задач надо помнить, что в конгруэнтных треугольниках против конгруэнтных сторон лежат конгруэнтные углы и, наоборот, против конгруэнтных углов лежат конгруэнтные стороны.

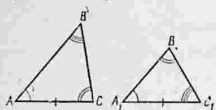


Рис. 28

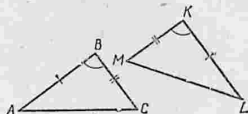


Рис. 29

317. В треугольниках ABC и KLM (рис. 29) дано $[AB] \cong [KL]$, $[BC] \cong [KM]$ и $B \cong \angle K$. Какие из остальных элементов этих треугольников конгруэнтны друг другу?

318. Сколько надо иметь основных элементов и каких именно для построения а) разностороннего треугольника; б) равнобедренного треугольника; в) равностороннего треугольника?

319. Докажите, что если концы конгруэнтных хорд соединить с центром, то получатся конгруэнтные треугольники.

320. Внутри равнобедренного треугольника ABC взята точка D на одинаковом расстоянии от концов основания AC . Точка D соединена с вершинами треугольника. Докажите, что $\triangle ABD \cong \triangle BDC$.

321. Докажите, что отрезки, соединяющие середину основания равнобедренного треугольника с серединами боковых сторон, конгруэнтны.

322. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E делят основание AC на три конгруэнтных отрезка и вершина B соединена с этими точками. Докажите, что $\angle ADB \cong \angle BEC$.

323. Докажите, что в равнобедренном треугольнике а) медианы, проведенные к боковым сторонам, конгруэнтны; б) биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, конгруэнтны.

324. В равнобедренном неравностороннем треугольнике проведена биссектриса угла при основании. Перпендикулярна ли она боковой стороне?

325. В разностороннем треугольнике ABC к биссектрисе BD проведен перпендикуляр, пересекающий стороны BA и BC в точках M и N . Докажите, что треугольник MBN будет равнобедренным.

Признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников

У двух прямоугольных треугольников имеется по конгруэнтному прямому углу, поэтому признаки конгруэнтности треугольников CUC и UCU можно сформулировать следующим образом.

1. Если катеты одного треугольника конгруэнтны катетам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

2. Если катет и острый угол одного треугольника конгруэнтны катету и острому углу другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Следующий признак конгруэнтности прямоугольных треугольников требует доказательства.

3. Если гипотенуза и катет одного треугольника конгруэнтны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано, что $\hat{C} = \hat{C}_1 = 90^\circ$, $[AB] \cong [A_1B_1]$, $[BC] \cong [B_1C_1]$, то $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 30).

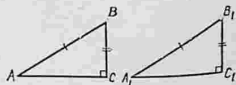


Рис. 30

326. В треугольнике ABC высота BD делит сторону AC пополам. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

327. Докажите, что в треугольнике ABC медиана AD ($D \in [BC]$) отстоит на равном расстоянии от вершин B и C .

328. Сколько надо иметь основных элементов и каких именно для построения прямоугольного треугольника?

Свойство серединного перпендикуляра к отрезку

Теорема. Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от его концов.

Если (XO) — серединный перпендикуляр к отрезку AB , то $|XA| = |XB|$ (рис. 31). И обратно: если $|XA| = |XB|$, то X лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

329. Как найти центр окружности, описанной около треугольника?

330. Как построить центр данной окружности, если он на чертеже не отмечен?

331. Две точки A и B расположены вне прямой l на неодинаковом расстоянии от нее. Постройте на прямой l точку, равноудаленную от A и B , если A и B расположены по разные стороны от l .

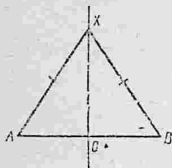


Рис. 31

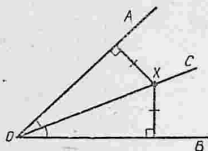


Рис. 32

Свойство биссектрисы угла

Теорема. Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон угла.

Если (OC) — биссектриса угла AOB , $X \in (OC)$, то X равноудалена от (OA) и (OB) (рис. 32).

И обратно: если точка X равноудалена от (OA) и (OB) — сторон угла AOB , то (OX) — биссектриса угла AOB .

332. Как найти центр окружности, вписанной в треугольник?

333. Одинаково ли удалена каждая точка диагонали AC прямоугольника $ABCD$ (отличного от квадрата) от сторон его AB и AD ?

334. Точки M и N расположены вне угла AOB . Постройте точку, равноудаленную от лучей OA и OB и находящуюся на одинаковом расстоянии от M и N .

Сумма углов треугольника

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180° .

Следствие. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.

В треугольнике ABC (рис. 33) $\widehat{BCD} = \hat{A} + \hat{B}$.

335. 1. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

2. Чему равен каждый острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника?

3. Чему равен каждый угол равностороннего треугольника?

336. 1. В треугольнике ABC $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$. Выразите формулой величину третьего угла γ .

2. Острый угол прямоугольного треугольника равен α . Выразите формулой величину другого острого угла β .

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен β . Выразите формулой величину угла α при основании.

337. В треугольнике ABC , где $|AB| = |BC|$ и $\hat{B} = 36^\circ$, проведена биссектриса AE угла A при основании ($E \in [BC]$). Докажите, что $|BE| = |AE| = |AC|$.

338. Чему равен тупой угол между биссектрисами углов любого прямоугольного треугольника?

339. 1. Почему треугольник не может иметь двух острых внешних углов?

2. Может ли внешний угол треугольника быть меньше его внутреннего угла?

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен α . Чему равен внешний угол при основании этого треугольника?

340. 1. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α . Чему равен внешний угол при вершине этого треугольника?

2. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

341. 1. Каким свойством обладает катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° ?

2. В прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы. Вычислите углы треугольника.

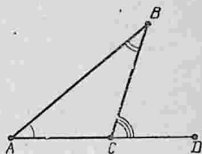


Рис. 33

3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M , из которой проведены перпендикуляры на две другие стороны. Вычислите расстояния от оснований этих перпендикуляров до вершины A , если $|BM| = 3$ см, $|MC| = 4$ см.

Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника

Теорема. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ (n-2)$ или $2d(n-2)$. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° ($4d$).

342. Чему равна сумма углов а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника?

343. Чему равен внутренний угол а) шестиугольника; б) n -угольника, у которого все углы равны между собой?

344. Внутри острого угла AOB взята точка M и из этой точки проведены перпендикуляры к сторонам угла. Найдите величины тупого и острого углов между этими перпендикулярами, если $\widehat{AOB} = \alpha$.

345. Сумма внутренних углов многоугольника равна 1260° . Сколько сторон у этого многоугольника? На сколько треугольников можно разбить этот многоугольник диагоналями, проведенными из одной вершины?

346. Возможен ли выпуклый шестиугольник с четырьмя прямыми углами?

347. Внешний угол многоугольника, у которого все углы равны между собой, равен 72° . Сколько сторон у этого многоугольника?

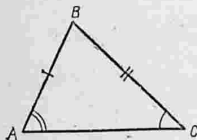


Рис. 34

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема 1. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

Если в треугольнике ABC (рис. 34) $|BC| > |AB|$, то $\hat{A} > \hat{C}$.

Теорема 2. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

Если в треугольнике ABC $\hat{A} > \hat{C}$, то $|BC| > |AB|$ (рис. 34).

348. 1. Укажите наибольшую сторону треугольника ABC , если $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 72^\circ$.

2. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 126° . Какая сторона в этом треугольнике наибольшая?

Теорема Фалеса

Если на одной стороне угла отложить последовательно несколько конгруэнтных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то они отсекут на второй стороне угла отрезки, конгруэнтные между собой.

Если на стороне OX угла XOY (рис. 35) отложены отрезки $[AB] \cong [BC] \cong [CD]$ и $(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$, то $[A_1B_1] \cong [B_1C_1] \cong [C_1D_1]$.

349. В треугольнике ABC высота BD делит основание AC на отрезки длиной 7 и 5 см. Какую длину имеет проекция медианы AM ($M \in [BC]$) на прямую AC ?

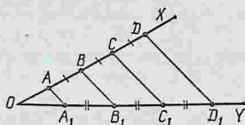


Рис. 35

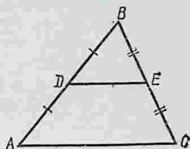


Рис. 36

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне, а длина ее равна половине длины этой стороны.

Если в треугольнике ABC (рис. 36) $|AD| = |DB|$, $|BE| = |EC|$, то $[DE] \parallel [AC]$; $|DE| = \frac{1}{2} |AC|$.

350. В треугольнике, периметр которого $2p$, проведена средняя линия. Определите периметр треугольника, отсекаемого этой линией.

351. В равнобедренном треугольнике, периметр которого равен 30 см, между боковыми сторонами проведена средняя линия, длина которой равна 8 см. Определите боковую сторону треугольника.

352. Можно ли утверждать, что длина средней линии треугольника равна расстоянию от середины одной стороны треугольника до другой его стороны?

§ 26. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Параллелограмм

Четырехугольник, у которого имеются две пары параллельных сторон, называется параллелограммом.

Теорема. Середина диагонали параллелограмма является его центром симметрии.

353. Каким свойством в параллелограмме обладают а) противоположные стороны; б) противоположные углы; в) точка пересечения диагоналей?

354. Чему равна сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма?

355. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы четырехугольник был параллелограммом?

356. 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника.

2. Докажите, что вершины B и D параллелограмма $ABCD$ равноудалены от диагонали AC .

3. Докажите, что отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя другими параллельными прямыми, конгруэнтны.

357. Как измерить расстояние между а) большими сторонами параллелограмма; б) меньшими сторонами параллелограмма?

358. Параллелограмм делится диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Длина большей стороны параллелограмма равна 8 см. Чему равна высота, проведенная на данную сторону?

359. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла, равного 150° , проведены высоты длиной 6 и 8 см. Определите периметр параллелограмма.

360. 1. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки, длины которых a и b . Выразите через a и b периметр параллелограмма.

2. Биссектриса угла параллелограмма, равного 120° , делит его сторону пополам, длина биссектрисы равна 5 см. Найдите периметр параллелограмма.

361. Докажите, что диагонали параллелограмма (отличного от ромба) не делят его углов пополам.

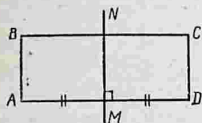


Рис. 37

Прямоугольник

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником*.

Теорема. Серединный перпендикуляр к стороне прямоугольника является его осью симметрии.

Если в прямоугольнике $ABCD$ $[AM] \cong [MD]$, $(MN) \perp [AD]$ (рис. 37), то (MN) — ось симметрии прямоугольника $ABCD$.

362. Докажите, что а) если один из углов параллелограмма прямой, то и три остальных угла прямые; б) че-

тырехугольничк, у которого три угла прямые, есть прямо-
угольничк.

363. 1. Сколькo осей симметрии имеет прямоугольничк?

2. Каким особым свойством обладают диагонали прямо-
угольничка (в отличие от диагоналей параллелограмма)?

3. Докажете, что если в параллелограмме диагонали
конгруэнтны, то этот параллелограмм является прямо-
угольничком.

4. Докажете, что медиана прямоугольного треуголь-
ничка, проведенная к гипотенузе, равна половине гипоте-
нузы.

364. Меньшая сторона прямоугольничка равна 2,5 см,
биссектриса его угла делит большую сторону прямоуголь-
ничка на два отрезка, один из которых вдвое длиннее дру-
гого. Найдите периметр прямоугольничка.

Ромб

Параллелограмм, все стороны которого конгруэнтны, называется
ромбом.

*Теорема. Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью
симметрии.*

365. Какими особыми свойствами обладают диагонали
ромба (в отличие от диагоналей параллелограмма)?

366. Дан ромб $ABCD$; O — точка пересечения его диа-
гоналей. На какие точки отобразятся вершины ромба при
а) симметрии относительно прямой AC ; б) симметрии отно-
сительно прямой BD ; в) симметрии относительно точки O ?

367. Докажете, что если в параллелограмме диагонали
взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.

368. Существует ли четырехугольничк (кроме ромба и
квадрата), у которого диагонали были бы взаимно перпен-
дикулярны?

369. Может ли диагональ ромба быть перпендикуляр-
ной его стороне?

370. Угол между диагональю ромба и его стороной
равен α . Выразите через α углы ромба.

371. Вычислите углы ромба, если высота, проведенная
из вершины тупого угла, делит противоположную сторону
на конгруэнтные отрезки.

372. Одинаково ли удалена точка пересечения диаго-
налей ромба от а) его вершин; б) его сторон?

Квадрат

Квадратом называется прямоугольничк, у которого все стороны
конгруэнтны.

373. 1. Дайте определение квадрата с помощью понятия «ромб».

2. Какими особыми свойствами обладают диагонали квадрата по сравнению с диагоналями прямоугольника и ромба (не являющихся квадратами)?

374. Как, не измеряя углов четырехугольного участка земли, убедиться в том, что он имеет форму квадрата?

375. На диагонали BD квадрата $ABCD$ отложен отрезок BE , конгруэнтный стороне квадрата, и точка E соединена с точкой C . Определите величину углов треугольника CED .

376. Диагональ квадрата со стороной 3 см служит стороной другого квадрата. Вычислите диагонали второго квадрата.

377. Диагональ BD квадрата $ABCD$ разделена точками E и F на три конгруэнтных отрезка, и вершины C и A соединены с точками деления. Докажите, что четырехугольник $AECF$ — ромб.

Трапеция

Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией*. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

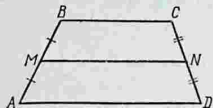


Рис. 38

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме оснований.

Если в трапеции $ABCD$ (рис. 38) $[AD] \parallel [BC]$, $|AM| = |MB|$, $|CN| = |ND|$, то $[MN] \parallel [AD]$, $|MN| = \frac{|AD| + |BC|}{2}$.

378. 1. Какую трапецию называют равнобедренной; прямоугольной?

2. Какой отрезок называется средней линией трапеции; высотой?

379. Докажите, что в равнобедренной трапеции а) углы при основании конгруэнтны; б) диагонали конгруэнтны; в) диагонали точкой их пересечения не делятся пополам.

380. 1. Длина одного из оснований трапеции равна a , средняя линия ее — m . Выразите формулой длину другого основания b .

2. Длина средней линии равнобедренной трапеции равна m , длина боковой стороны — c . Выразите формулой периметр трапеции P .

381. 1. Средняя линия трапеции длиной 12 см делится ее диагональю на два отрезка, из которых один составляет 50% другого. Вычислите основания трапеции.

2. Длины оснований трапеции равны 8 и 12 см. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

382. Основания трапеции имеют длину a и b . Найдите расстояние между серединами диагоналей.

383. В прямоугольной трапеции длина меньшего основания равна a , большей боковой стороны — b . Величина острого угла равна 60° . Найдите длину средней линии трапеции.

384. В равнобедренной трапеции середины ее сторон последовательно соединены отрезками. Определите вид полученного четырехугольника.

§ 27. ВЕКТОРЫ

Параллельный перенос

Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка X отображается на такую точку X_1 (рис. 39), что

- 1) луч XX_1 имеет заданное направление;
- 2) отрезок XX_1 имеет заданную длину, т. е. все точки плоскости перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние:

$$[XX_1] \parallel [YY_1]; |XX_1| = |YY_1|.$$

Обозначения: если точка X при параллельном переносе переходит в точку X_1 , то пишут $T(X) = X_1$.

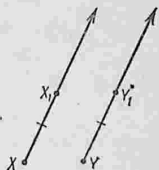


Рис. 39

385. 1. Как можно задать параллельный перенос?

2. Сформулируйте свойства параллельного переноса.

386. Что является при параллельном переносе а) образом прямой; б) образом луча; в) образом фигуры?

387. 1. Какой параллельный перенос отображает окружность на конгруэнтную ей окружность?

2. Постройте образ данного ромба $ABCD$ при параллельном переносе $T(A) = D$.

388. Как найти величину угла, если его вершина недоступна?

Векторы и способы их задания

Параллельные переносы называют *векторами*. Вектор отображающий точку A на точку B , обозначают $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ и изображают в виде направленного отрезка (рис. 40).

389. 1. Что называют нулевым вектором?

2. Что называют длиной и направлением вектора $\overrightarrow{AB}$?

390. Какие векторы называются а) сонаправленными; б) противоположно направленными; в) коллинеарными?

391. 1. Как задается вектор?

2. Какой вектор противоположен вектору $\overrightarrow{AB}$?



Рис. 40

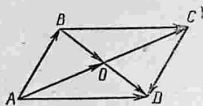


Рис. 41

392. Дан параллелограмм ABCD (рис. 41). Какие из векторов а) равны; б) противоположны; в) коллинеарны?

— 393. В трапеции ABCD ($\{BC\} \parallel \{AD\}$) проведена средняя линия MN. Выпишите векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{MN}$ и определяемые парами точек, составленных из вершин трапеции.

394. Точки E и F — середины сторон AB и BC параллелограмма ABCD. Докажите, что вектор $\overrightarrow{EF}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{CA}$.

Сумма векторов

Композицию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято называть *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При этом применяют запись $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (вместо $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{c}$).

395. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Как построить вектор, изображающий сумму этих векторов?

396. Докажите, что в произвольном четырехугольнике ABCD верно равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

397. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$.

Разность векторов

Вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ называется *разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

398. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Как построить вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$?

399. В параллелограмме $ABCD$ AC и BD — диагонали. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

400. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) на число x ($x \neq 0$) называется вектор, длина которого равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на $|x|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $x > 0$, и противоположно направлению $\vec{a}$ при $x < 0$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число x обозначается $x\vec{a}$.

401. При каком условии ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

402. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB . Выразите $\overrightarrow{MC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

403. Дан ромб ABC . Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Основные законы векторной алгебры

Законы сложения векторов

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — сочетательный.
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переместительный.
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ — закон поглощения нулевого вектора.

Законы умножения вектора на число

1. $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$ — сочетательный.
2. $x\vec{a} + y\vec{a} = (x+y)\vec{a}$ — первый распределительный закон.
3. $x\vec{a} + x\vec{b} = x(\vec{a} + \vec{b})$ — второй распределительный закон.
4. $0\vec{a} + x\vec{0} = \vec{0}$ — закон поглощения нуля и нулевого вектора.

404. В треугольнике ABC AM — медиана ($M \in [BC]$). Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

405. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 42) даны $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OB}|$, $|\overrightarrow{ON}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OC}|$. Выразите вектор $\overrightarrow{NM}$ через вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$.

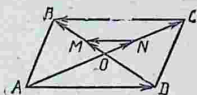


Рис. 42

Координаты вектора

Произвольный вектор $\vec{c}$ (рис. 43) может быть представлен в виде $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j}$,

где $\vec{i}$ — единичный вектор, отложенный от начала координат O на оси x , а $\vec{j}$ — на оси y ; c_x — проекция $|\vec{c}|$ на ось x , c_y — проекция $|\vec{c}|$ на ось y . Коэффициенты c_x и c_y разложения вектора $\vec{c}$ по единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются *координатами вектора $\vec{c}$* .

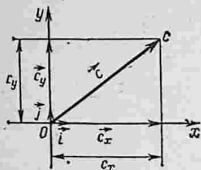


Рис. 43

406. На координатной плоскости даны точки $O(0; 0)$, $A(3; 2)$, $B(4; 5)$. Разложите по единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OA} + \vec{OB}$.

§ 28. ПОДОБИЕ И ГОМОТЕТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Подобные фигуры

Фигура F_1 подобна фигуре F , если существует отображение F на F_1 , при котором расстояния изменяются в одном и том же отношении $k > 0$.

Если фигура F_1 подобна фигуре F , то пишут $F_1 \sim F$; если хотят указать коэффициент подобия, то пишут $F_1 \overset{k}{\sim} F$.

Если коэффициент подобия трапеций $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ (рис. 44) равен 2, то трапецию $ABCD$ можно отобразить на трапецию $A_1B_1C_1D_1$ так, что любые две точки X и Y первой трапеции отображаются на такие точки X_1 и Y_1 :

$$|X_1Y_1| = 2|XY|.$$

407. 1. Подобны ли две конгруэнтные фигуры?

2. Конгруэнтны ли любые две подобные фигуры?

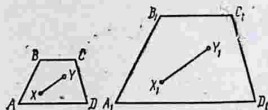


Рис. 44

408. План одного и того же земельного участка начерчен в двух видах: первый план имеет масштаб 1:100, а второй — 1:1000. Чему равны коэффициенты подобия этих планов?

Гомотетия

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной точки X является такая точка X_1 , что $\vec{OX}_1 = k\vec{OX}$. Например, а) $\vec{OX}_1 = 2\vec{OX}$, $k=2$; б) $\vec{OA}_1 = \frac{1}{2}\vec{OA}$, $k=1/2$; в) $\vec{OC}_1 = -2\vec{OC}$, $k=-2$ (рис. 45).

Гомотетию с центром O и коэффициентом k обозначают H_O^k или просто H^k .

409. На что отображается каждая точка X при гомотетии с центром O , если коэффициент гомотетии а) $k=1$; б) $k=-1$.

410. Как расположены относительно центра гомотетии точки: X_1 и X , если а) $k>0$; б) $k<0$?

411. 1. Почему гомотетичные фигуры подобны?

2. Всегда ли подобные фигуры гомотетичны?

412. Постройте фигуру, гомотетичную данному равнобедренному треугольнику ABC относительно центра O с коэффициентом гомотетии $k=-1,5$.

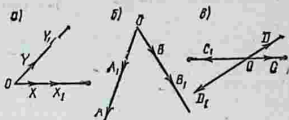


Рис. 45

Пропорциональные отрезки

Отрезки AB и CD называются *пропорциональными* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 , если пропорциональны их длины, т. е.

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

Теорема. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

Если $(AA_1) \parallel (BB_1)$ (рис. 46), то $|OA| : |OA_1| = |AB| : |A_1B_1| = |OB| : |OB_1|$.

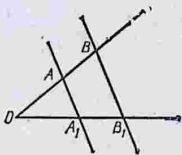


Рис. 46

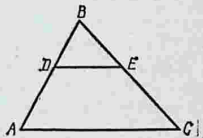


Рис. 47

Следствие. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает треугольник, стороны которого пропорциональны сторонам данного треугольника.

Если в треугольнике ABC (рис. 47) $[DE] \parallel [AC]$, то

$$\frac{|BA|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|DE|}.$$

413. В треугольнике ABC (рис. 47) $[DE] \parallel [AC]$, $|BD|=2$ см, $|AD|=3$ см, $|BC|=6,5$ см. Вычислите $|BE|$ и $|CE|$.

414. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB точкой M разделена на отрезки $|AM|=6,8$ см, $|MB|=6$ см. Через эту точку проведена прямая MN , параллельная основаниям ($N \in [CD]$). Найдите $|CD|$, если $|CN|=9$ см.

Признаки подобия треугольников

I. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

II. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами конгруэнтны, то такие треугольники подобны.

III. Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

415. Можно ли утверждать, что подобны а) два любых равносторонних треугольника; б) два любых прямоугольных равнобедренных треугольника; в) равнобедренные треугольники, имеющие по конгруэнтному острому углу?

416. 1. Треугольник рассматривают через линзу, дающую увеличение в три раза. Увеличатся ли при этом углы треугольника?

2. Земельный участок имеет форму треугольника со сторонами длиной 60, 70 и 78 м, а соответствующие стороны на плане имеют длину 6, 7 и 7,5 см. Верно ли начерчен план?

417. В треугольнике ABC проведены медианы AE ($E \in [BC]$) и BD ($D \in [AC]$), пересекающиеся в точке O . Докажите, что треугольники AOB и DOE подобны. Чему равен коэффициент подобия этих треугольников?

418. Через точку D , взятую на стороне BC треугольника ABC , проведите внутри треугольника четыре различных луча, отсекающих от данного треугольника подобные ему треугольники.

419. В треугольнике ABC $|AB|=9$ см, $|BC|=15$ см, $|AC|=18$ см. Из точки D , взятой на стороне AC , проведена прямая DE ($E \in [BC]$) так, что $\angle DEC \cong \angle A$. Вычислите $|DC|$ и $|EC|$, если $|ED|=6$ см.

420. В двух подобных равнобедренных треугольниках длина общей стороны равна 12 см. Длина основания меньшего треугольника равна 9 см. Вычислите периметры данных треугольников.

421. Сформулируйте признаки подобия прямоугольных треугольников.

422. 1. Длины катетов одного треугольника равны 1,8 и 0,8 см, а катетов другого — 2,7 и 1,2 см. Подобны ли эти треугольники?

2. Стороны параллелограмма имеют длину 18 и 12 см. Длина меньшей высоты параллелограмма равна 9 см. Найдите большую высоту параллелограмма.

423. Докажите, что точка пересечения двух медиан отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

424. Докажите, что в подобных треугольниках отношение двух соответственных а) высот; б) биссектрис; в) медиан равно отношению двух соответственных сторон.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Отрезок x называется *средним пропорциональным* (средним геометрическим) между отрезками a и b , если выполняется равенство $a : x = x : b$.

425. Прочитайте следующие пропорции: а) $m : x = x : n$; б) $a : p = q : a$. Чему равен повторяющийся член в этих пропорциях, если два других известны?

Теоремы. 1. Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Если в треугольнике ABC (рис. 48) CD — высота, $|CD| = h$, a_c и b_c — проекции катетов на гипотенузу, то

$$c : a = a : a_c \text{ или } a^2 = c \cdot a_c;$$

$$c : b = b : b_c \text{ или } b^2 = c \cdot b_c.$$

2. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу:

$$a_c : h = h : b_c \text{ или } h^2 = a_c \cdot b_c.$$

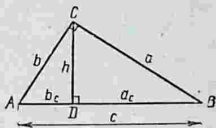


Рис. 48

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 48) $c^2 = a^2 + b^2$.

426. 1. Катет прямоугольного треугольника равен 3 см, а его проекция на гипотенузу равна 1,8 см. Вычислите длину гипотенузы и длину второго катета.

2. Проекции катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу равны 2 и 6 см. Вычислите длины катетов и длину высоты, проведенной к гипотенузе.

427. На основании какой теоремы можно утверждать, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 см — прямоугольный?

428. Точка, лежащая внутри прямого угла, удалена от его сторон на расстояния, равные 6 и 8 см. Найдите расстояние этой точки от вершины.

429. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12 см. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

430. Железный прут длиной 2 м согнут посередине под прямым углом. Определите расстояние между его концами.

431. Диагонали ромба равны 4,8 и 14 см. Найдите периметр ромба.

432. 1. Сторона квадрата равна a . Найдите диагональ.

2. Диагональ квадрата равна d . Найдите сторону квадрата.

433. 1. Сторона равностороннего треугольника равна a . Найдите высоту.

2. Высоты равностороннего треугольника пересекаются в точке O . Длина его сторон равна 2 см. Найдите расстояния от точки O до сторон и вершин треугольника.

434. 1. В равнобедренной трапеции основания равны 1 и 4 см. Боковая сторона равна 2,5 см. Вычислите высоту трапеции.

2. В равнобедренной трапеции основания равны 25 и 7 см. Диагональ равна 20 см. Вычислите периметр трапеции.

435. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, один из катетов составляет 75% другого. Вычислите длину катетов.

Подобные многоугольники

436. Можно ли утверждать, что: а) из пропорциональности сторон двух многоугольников (с числом сторон больше трех) следует подобие этих многоугольников; б) из конгруэнтности соответственных углов этих многоугольников следует их подобие?

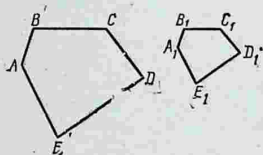


Рис. 49

437. Каково достаточное условие подобия двух многоугольников?

Отношение периметров подобных многоугольников

Теорема. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия этих многоугольников.

Если многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim$ многоугольнику $ABCDE$ (рис. 49), P и P_1 — их периметры, k — коэффициент подобия, то $P = kP_1$ или $P : P_1 = k$.

438. 1. Наибольшие стороны двух подобных многоугольников относятся как 4 : 3. Периметр меньшего многоугольника равен 36 см. Найдите периметр большего многоугольника.

2. Меньшие стороны двух подобных многоугольников имеют длины 3 и 7 см. Периметр одного многоугольника на 20 см меньше периметра другого. Найдите периметр каждого многоугольника.

§ 29. ОКРУЖНОСТЬ

Свойство центральных углов

Теорема. Два центральных угла окружности конгруэнтны тогда и только тогда, когда конгруэнтны соответствующие им дуги.

Если в окружности $(O; r)$ $\angle AOB \cong \angle A_1OB_1$ ($\widehat{AOB} = \widehat{A_1OB_1}$) (рис. 50), то $\cup AB \cong \cup A_1B_1$ ($\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$).

И обратно: если в окружности (O, r) $\cup AB \cong \cup A_1B_1$ ($\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$), то $\angle AOB \cong \angle A_1OB_1$ ($\widehat{AOB} = \widehat{A_1OB_1}$).

439. Сколько градусов содержат центральные углы, если соответствующие им дуги составляют а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{1}{16}$ окружности?

440. Окружность разделена двумя точками на две дуги.

Какова угловая величина каждой из этих дуг, если угловая величина одной из них на 90° больше угловой величины другой?

441. Как разделить дугу окружности пополам?

442. Диаметр окружности равен 12 см. Хорда, проведенная в этой окружности, стягивает дугу в 120° . Определите расстояние от центра до хорды.

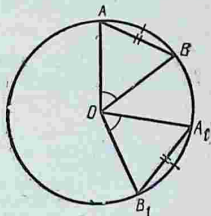


Рис. 50

Свойство касательной к окружности

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к этой окружности.

Теорема. Если прямая перпендикулярна радиусу и проходит через его конец, лежащий на окружности, то она является касательной к этой окружности.

Если $[OC]$ — радиус окружности (рис. 51) (C — точка окружности) и прямая $(ACB) \perp [OC]$, то (ACB) — касательная.

Теорема обратная. Если прямая является касательной к окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Если прямая (ACB) (рис. 51) — касательная (C — точка касания) и $[OC]$ — радиус, то $[OC] \perp (ACB)$.

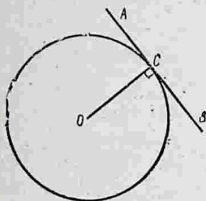


Рис. 51

443. Точка A расположена на окружности. Как через эту точку провести касательную к окружности?

444. Как расположены касательные к окружности, проведенные через концы диаметра?

445. Расстояния от концов диаметра до касательной к окружности равны 8 и 12 см. Вычислите длину радиуса.

446. Из точки, взятой вне окружности, проведены к ней две касательные. Докажите, что длины этих касательных равны

между собой (под длиной касательной понимают длину отрезка ее от данной точки до точки касания).

Вписанный угол

Выпуклый угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают ее, называется *вписанным углом*.

Теорема. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

Если $\angle ABC$ — вписанный (рис. 52), то

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}, \text{ т. е. } \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC.$$

447. 1. Докажите, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

2. Сформулируйте два предложения, обратные предыдущему. Справедливы ли они?

448. При каком условии вписанный угол будет а) острым; б) тупым?

449. Вписанный угол на 30° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Вычислите величину каждого из этих углов.

450. Два угла вписаны в одну и ту же окружность и опираются на одну и ту же дугу. Что можно сказать о величинах этих углов?

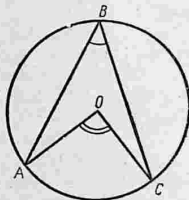


Рис. 52

451. Используя свойство вписанных углов, докажите, что дуги, заключенные между параллельными хордами, конгруэнтны.

452. Из точки, взятой на окружности, проведены касательная и хорда. Докажите, что величина угла между этой касательной и хордой равна половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.

§ 30. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольник, все вершины которого принадлежат окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около этого треугольника.

Теорема. Около любого треугольника можно описать окружность, притом только одну. Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Если O — точка пересечения серединных перпендикуляров (рис. 53), то она является центром описанной окружности с радиусами OA , OB и OC .

Треугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным* около этой окружности, а окружность — *вписанной* в этот треугольник.

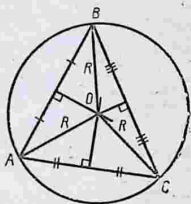


Рис. 53

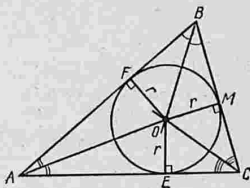


Рис. 54

Теорема. Во всякий треугольник можно вписать окружность, притом только одну. Центр этой окружности — точка пересечения биссектрис треугольника.

Если O — точка пересечения биссектрис треугольника (рис. 54), то она является центром вписанной окружности с радиусами OM , ON и OP .

453. В каком случае центр окружности, описанной около треугольника, лежит а) внутри него; б) вне его; в) на стороне треугольника?

454. Как в данную окружность вписать равнобедренный треугольник?

455. Можно ли утверждать, что центр окружности, описанной около равностороннего треугольника, лежит в точке пересечения его биссектрис?

456. Высота равностороннего треугольника равна h . Определите радиус описанного круга.

457. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см. Вычислите а) диаметр окружности, описанной около этого треугольника; б) медиану, проведенную из вершины прямого угла.

458. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 35° . Вычислите острый угол между медианой, проведенной из вершины прямого угла, и гипотенузой.

459. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a . Угол при основании равен 30° . Определите диаметр описанного круга.

460. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а высота — 8 см. Вычислите радиус описанной окружности.

461. Совпадают ли и почему центры вписанной и описанной окружностей а) в равнобедренном треугольнике; б) в равностороннем треугольнике?

462. Радиус круга, вписанного в равносторонний треугольник, равен r . Определите радиус описанного круга и высоту.

463. В прямоугольном треугольнике катеты равны 9 и 12 см. Вычислите радиус вписанной окружности.

§ 31. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Синус, косинус и тангенс угла

Отметим на единичной окружности точку $P_0(1; 0)$ (рис. 55). При повороте RO^α точка P_0 отображается на точку P_α . Каждому углу α соответствует определенная абсцисса x_α и ордината y_α точки P_α . Ординату y_α называют *синусом угла α* , абсциссу x_α называют *косинусом угла α* ; отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$ называется *тангенсом угла α* :

$$y_\alpha = \sin \alpha, \quad x_\alpha = \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

464. Почему синус, косинус и тангенс угла являются его функциями?

465. 1. Что является областью определения и областью значений функций синус и косинус?

2. Может ли синус и косинус какого-либо угла быть равным $\sqrt{2}$; 10^{10} ?

466. Как изменяются значения функции $\sin \alpha$ и функции $\cos \alpha$ при увеличении угла α от 0 до 90° ?

467. С помощью единичной окружности найдите значения синуса и косинуса следующих углов: а) 90° ; б) 180° ; в) 270° ; г) 360° ; д) -90° .

468. Начертите графики функций синуса и косинуса для углов, принадлежащих промежутку $[-180^\circ; 180^\circ]$.

Некоторые тождества для функций синус и косинус

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha.$$

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha.$$

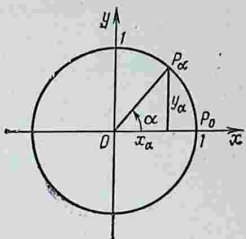


Рис. 55

469. Вычислите значение а) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; б) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 1/2$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

470. Выразите через значение тригонометрической функции положительного угла, меньшего 90° , функции а) $\sin 150^\circ$; б) $\cos 150^\circ$; в) $\sin 170^\circ$; г) $\cos 170^\circ$.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Синус острого угла прямоугольного треугольника (рис. 56) равен отношению противолежащего катета к гипотенузе;

косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе;

тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему:

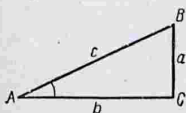


Рис. 56

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{c}; \quad \cos \hat{A} = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b}.$$

471. Из написанных выше формул выразите а) катет через гипотенузу и тригонометрическую функцию острого угла; б) гипотенузу через катет и тригонометрическую функцию острого угла.

472. Пользуясь обозначениями, данными на рис. 56, напишите, чему равны значения $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{B}$, $\operatorname{tg} \hat{B}$.

473. 1. Напишите значения тригонометрических функций углов α , β , x и y , пользуясь обозначениями, данными на рис. 57.

2. Какие тригонометрические функции углов α , β , x и y выражают отношения m/a , h/b , m/h , h/m ?

474. Зная катеты прямоугольного треугольника $a=8$ см и $b=15$ см (см. рис. 56), вычислите гипотенузу c , сумму синусов острых углов A и B , произведение их косинусов.

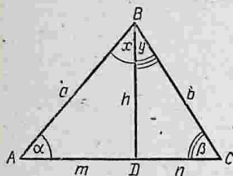


Рис. 57

475. 1. С помощью прямоугольного треугольника с углом в 30° найдите значения синуса, косинуса и тангенса углов 30 и 60° .

2. С помощью прямоугольного треугольника с углом в 45° найдите значения синуса, косинуса и тангенса угла 45° .

476. Вычислите $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, если а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 60^\circ$.

477. Сравните следующие значения выражений: а) $\sin 2\alpha$ и $2 \sin \alpha$ при $\alpha = 30^\circ$; б) $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin \alpha + \sin \beta$ при $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$.

478. С помощью значений тригонометрических функций углов 30 , 45 и 60° найдите а) высоту равностороннего треугольника по его стороне a , а также радиус вписанного круга; б) сторону квадрата по его диагонали d .

479. Железнодорожная насыпь имеет сверху ширину 6 м, а снизу — 12 м. Боковые стороны ее наклонены к горизонту под углом 35° . Вычислите высоту насыпи.

§ 32. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

480. 1. Какие основные свойства площадей используются для нахождения площадей многоугольников?

2. Что принимают за единицу площадей?

3. Какие две фигуры называются равновеликими?

4. Всегда ли конгруэнтны равновеликие фигуры?

481. Участок земли имеет площадь 10 га. Сколько это составляет квадратных метров; квадратных километров?

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.

Если в прямоугольнике a — основание, h — высота, S — площадь, то $S = ah$.

482. Чему равна площадь квадрата, у которого а) сторона равна a ; б) диагональ равна d ?

483. Имеются две веревки длиной по 100 м. Одной из них отгорожен прямоугольник со стороной 30 м, а другой — квадрат. Какая площадь больше: прямоугольника или квадрата?

484. В круг радиуса R вписан квадрат и около того же круга описан квадрат. Найдите площадь каждого квадрата и отношение их площадей.

485. Диагональ одного из данных квадратов равна 3 см, а другого — 4 см. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна сумме площадей данных квадратов.

486. Длину основания a прямоугольника увеличили на 50 %, а его высоту h уменьшили на 50 %. Изменится ли площадь прямоугольника?

Площадь параллелограмма

1. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту (рис. 58), т. е.

$$S = ah_1, \text{ или } S = bh_2.$$

2. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними (рис. 58), т. е.

$$S = ab \sin \alpha.$$

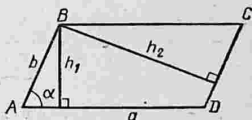


Рис. 58

487. Стороны параллелограмма равны 14 и 18 см, а площадь 126 см². Вычислите высоты и острый угол параллелограмма между его смежными сторонами.

488. Стороны параллелограмма равны 12 и 15 см, одна из высот равна 9 см. Вычислите другую высоту. Рассмотрите два случая.

489. Имеется множество параллелограммов, причем стороны каждого параллелограмма равны a и b . Площадь какого из этих параллелограммов будет наибольшей?

490. Выведите формулу, выражающую площадь S ромба через его диагонали d_1 и d_2 .

491. Вычислите площадь ромба, если а) его диагонали имеют длину 5 и 8 см; б) сторона его равна 2,8 дм, а острый угол равен 30°; в) периметр ромба равен P (выразите его площадь через P и функцию угла α между его смежными сторонами).

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

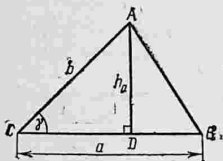


Рис. 59

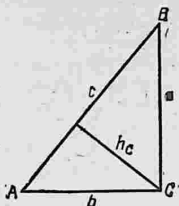


Рис. 60

Если a — основание треугольника, h_a — высота, проведенная на сторону a (рис. 59), то

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Площадь прямоугольного треугольника (рис. 60) равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2} ab, \text{ или } S = \frac{1}{2} ch_c.$$

492. Напишите формулы, выражающие а) площадь треугольника через его стороны b и c и высоты, проведенные к этим сторонам; б) высоты треугольника через его стороны и площадь.

493. 1. В треугольнике проведена медиана. Почему два треугольника, на которые медиана делит данный треугольник, равновелики?

2. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан. Докажите, что площадь треугольника AMD ($D \in [AC]$) равна $\frac{1}{6}$ площади данного треугольника.

3. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN . Найдите площадь треугольника ABC , если $|AM| = 6$ см, а $|BN| = 8$ см.

494. Площадь треугольника равна $12,5 \text{ см}^2$. Высота его конгруэнтна основанию. Вычислите основание.

495. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см. Боковая сторона больше высоты на 2 см. Вычислите площадь.

496. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 4 см, а угол при вершине равен а) 30° ; б) 135° .

497. Найдите площадь равностороннего треугольника, если а) сторона его равна a ; б) высота его равна h .

498. Найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника по его гипотенузе, равной c .

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Если в трапеции $ABCD$ a и b — ее основания, h — высота (рис. 61), то

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

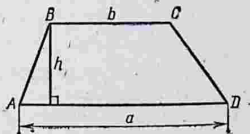


Рис. 61

499. Как выражается площадь трапеции через ее среднюю линию и высоту?

500. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее меньшее основание равно 12 см, высота равна 10 см, а боковая сторона составляет с основанием угол 45° .

501. Меньшее основание трапеции равно 3 см, боковая сторона равна 4 см и составляет с большим основанием угол 30° ; другой угол при этом основании равен 45° . Вычислите площадь трапеции.

502. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13 см, а ее площадь равна 40 см^2 . Вычислите периметр трапеции.

503. 1. Найдите площадь трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны и равны соответственно m и n .

2. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, высота ее равна h . Найдите площадь этой трапеции.

Отношение площадей подобных многоугольников

Теорема. *Отношение площадей подобных многоугольников (рис. 62) равно квадрату коэффициента подобия.*

Если многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 62) и $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = k$, где k — коэффициент подобия, то

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = k^2.$$

504. Как изменится площадь многоугольника, если каждая из его сторон увеличится в три раза, а величины углов не изменятся?

505. План участка выполнен в масштабе 1:100. Во сколько раз площадь участка в действительности больше, чем его площадь на плане?

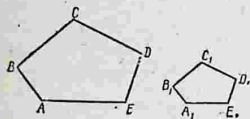


Рис. 62

506. Средняя линия треугольника делит его на две части. Во сколько раз а) площадь данного треугольника больше площади отсеченного; б) площадь полученной трапеции больше площади отсеченного треугольника?

507. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 2:3. Площадь большего из них равна 90 см². Вычислите площадь меньшего многоугольника.

§ 33. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника (рис. 63) равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Если a, b, c — стороны треугольника ABC (рис. 63), то

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

508. Какие элементы треугольника можно вычислять, пользуясь теоремой косинусов?

509. Стороны треугольника равны a и b . Найти третью сторону c , если угол между известными сторонами равен а) 60°; б) 45°; в) 120°.

510. При каких значениях $\hat{A}$ стороны треугольника a, b и c связаны соотношениями а) $a^2 < b^2 + c^2$; б) $a^2 = b^2 + c^2$; в) $a^2 > b^2 + c^2$?

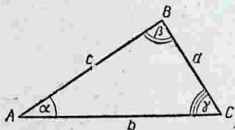


Рис. 63

511. Вершина A равностороннего треугольника ABC соединена с точкой D , делящей сторону BC на отрезки $|BD|=4$ см и $|DC|=6$ см. Вычислите длину отрезка AD .

512. В треугольнике ABC $a=7$ см, $b=8$ см, $c=5$ см. Вычислите $\hat{A}$.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

В треугольнике ABC со сторонами a, b, c и углами α, β, γ (рис. 63)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

513. Какие элементы треугольника можно вычислить, пользуясь теоремой синусов?

514. В треугольнике ABC известны стороны a , $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$. Найдите b и c .

515. Диагональ параллелограмма длиной d образует со сторонами этого параллелограмма углы 30° и 45° . Найдите стороны параллелограмма.

516. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна 6 см и пересекает противоположную сторону под углом 135° (угол обращен к основанию). Вычислите основание треугольника.

§ 34. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник, у которого все стороны конгруэнтны и все углы конгруэнтны, называется *правильным*.

Теорема 1. *Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.*

Теорема 2. *Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.*

517. Как можно с помощью окружности построить правильный n -угольник?

518. 1. Можно ли считать правильными следующие многоугольники: любой прямоугольник, ромб, равнобедренный треугольник?

2. Может ли вписанный многоугольник иметь а) конгруэнтные углы, но не конгруэнтные стороны; б) конгруэнтные стороны, но не конгруэнтные углы?

519. 1. Какая точка называется центром правильного многоугольника?

2. Что называется апофемой правильного многоугольника?

520. 1. Чему равен каждый внутренний угол правильного а) пятиугольника; б) n -угольника?

2. Чему равен центральный угол а) правильного шестиугольника; б) правильного n -угольника?

3. К одной из сторон правильного n -угольника проведены апофема и радиус описанной окружности. Найдите величину угла между ними.

521. Шаблоны для углов гаек имеют угол а) 120° ; б) 135° . Сколько сторон у этих гаек?

522. Можно ли составить паркет из плиток, имеющих форму а) правильных шестиугольников; б) правильных пятиугольников?

Формулы для вычисления стороны и площади правильного многоугольника

Если a_n — сторона правильного вписанного n -угольника, R — радиус окружности, описанной около этого n -угольника, $\frac{180^\circ}{n}$ — величина половины центрального угла (рис. 64), то

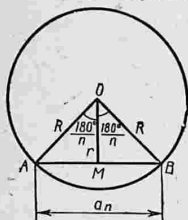


Рис. 64

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}. \quad (1)$$

Пусть S — площадь правильного многоугольника, P — его периметр, r — радиус вписанной окружности, тогда

$$S = \frac{1}{2} Pr. \quad (2)$$

Если S_n — площадь правильного n -угольника, R — радиус описанной окружности, $\frac{360^\circ}{n}$ — величина центрального угла, то

$$S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}. \quad (3)$$

523. 1. С помощью формулы (1) докажите, что

$$a_6 = R, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_3 = R\sqrt{3}.$$

2. Считая радиус описанной окружности $R = 1$ м, вычислите стороны следующих правильных многоугольников: a_8 , a_{10} , a_{12} .

524. Из бревна требуется выпилить брус, имеющий в сечении квадрат со стороной 18 см. Какого диаметра надо взять бревно?

525. Вычислите площадь правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $R = 1$ дм, если а) $n = 3$; б) $n = 4$.

526. Стороны двух правильных многоугольников с одинаковым числом сторон равны a и b . Как относятся периметры этих многоугольников и площади многоугольников?

§ 35. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

Пусть C — длина окружности, $S_{\text{кр}}$ — площадь круга, R — радиус, D — диаметр; имеем:

$$C = 2\pi R \quad \text{или} \quad C = \pi D;$$

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2 \quad \text{или} \quad S_{\text{кр}} = \frac{\pi D^2}{4}.$$

527. Как изменятся длина окружности и площадь круга, если радиус увеличится в два раза?

528. Сторона квадрата имеет длину 6 см. Найдите длину окружности, описанной около квадрата.

529. Сторона правильного шестиугольника равна 5 см. Найдите длину окружности, описанной около шестиугольника.

530. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна 10 см. Около этого треугольника описана окружность, найдите ее длину.

531. На сколько сантиметров длина окружности, радиус которой равен 1 дм, длиннее периметра правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность?

532. На сколько сантиметров увеличится длина окружности, если радиус ее увеличить на 5 см?

533. Сторона квадрата имеет длину 4 см. Найдите площадь круга, вписанного в этот квадрат.

534. Сторона правильного шестиугольника равна 3 см. Найдите площадь круга, вписанного в шестиугольник.

535. Что больше: площадь круга, построенного на отрезке длиной 1 дм как на диаметре, или площадь полукруга, построенного на отрезке длиной 2 дм как на диаметре?

536. Из круга вырезан квадрат наибольшей площади. Какая часть круга (в процентах) ушла в обрезки?

537. Докажите, что площадь круга S можно вычислить по формулам (C — длина окружности, d — ее диаметр):

а) $S = \pi \frac{d^2}{4}$; б) $S = \frac{C}{2} r$; в) $S = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi}$.

538. Найдите радиус круга, у которого площадь (в кв. ед.) и длина окружности (в соответствующих линейных единицах) имеют одно и то же числовое значение.

539. Вычислите скорость автомобиля, если ведущее колесо его диаметром 0,7 м делает 500 оборотов в минуту ($\pi \approx 22/7$).

540. Две водопроводные трубы одинаковых диаметров d надо заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Найдите диаметр D новой трубы.

541. Площадь квадрата равна 1 м^2 . Имеется круг с такой же площадью. Докажите, что периметр квадрата больше длины окружности этого круга.

§ 36. ПРОСТЕЙШИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Следующие задачи выполните с помощью циркуля и линейки без применения чертежного треугольника и транспортира.

542. Постройте угол, конгруэнтный данному углу.

543. Разделите данный угол пополам.

544. Разделите данный отрезок пополам.

545. Постройте точку, симметричную данной точке X относительно оси l .

546. Постройте треугольник ABC по трем сторонам a , b , c .

547. Постройте треугольник по двум сторонам b и c и углу α между ними.

548. Постройте треугольник по стороне a и двум прилежащим к ней углам β и γ .

549. Постройте серединный перпендикуляр данного отрезка AB .

550. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

551. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку.

552. Разделите данный отрезок на несколько конгруэнтных отрезков.

553. Постройте прямоугольник, равновеликий данному треугольнику и имеющий с ним общее основание.

554. Длины трех отрезков a , b , c . Постройте четвертый отрезок, пропорциональный трем данным, т. е. отрезок длиной x такой, чтобы выполнялась пропорция $a : b = c : x$.

555. Постройте треугольник ABC по углам α и β и биссектрисе l_c .

556. Постройте отрезок x , если $x = \sqrt{ab}$, где a , b — данные отрезки.

557. Постройте отрезок x , если а) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; б) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$); в) $x = a^2/b$; здесь a и b — длины данных отрезков.

ГЛАВА III

ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Билет 1

1. Квадратное уравнение (определение). Выведите формулу корней квадратного уравнения.

2. Вычислите наиболее простым способом выражение

$$(0,56^3 - 0,56 \cdot 0,44^2) \cdot 8 \frac{1}{3}.$$

3. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна 12 дм, а острый угол равен 30° .

Билет 2

1. Сформулируйте и доказите теорему Виета.

2. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{8x-4}$?

3. Сторона равностороннего треугольника равна 2 дм. Вычислите высоту этого треугольника.

Билет 3

1. Выведите формулу разложения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, на множители.

2. Вычислите наиболее простым способом выражение $2,02^2 - 2 \cdot 2,02 \cdot 0,52 + 0,52^2$.

3. В прямоугольном равнобедренном треугольнике гипотенуза равна 6 см. Найдите катеты и высоту, опущенную на гипотенузу.

Билет 4

1. Функция $y = kx$ и ее график.

2. Вычислите выражение $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 8 \frac{1}{3} + (-3)^0$.

3. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Билет 5

1. Функция $y = k/x$ и ее график.

2. Решите неравенство $\frac{x}{x-1} > 0$.

3. Вычислите сумму $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ$.

Билет 6

1. Постройте треугольник по двум сторонам. Сформулируйте соответствующий признак конгруэнтности треугольников.

2. Сократите дробь $\frac{5a^2 - 7a - 6}{3a - 6}$.

3. Сторона квадрата равна 8 см. Вычислите длину окружности и площадь круга, вписанных в этот квадрат.

Билет 7

1. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними. Сформулируйте соответствующий признак конгруэнтности треугольников.

2. Найдите число, если 10 % его составляют $1,3 \cdot 12,8 + 13 \cdot 1,72$.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 0,6 и 0,8 дм. Найдите синусы острых углов треугольника.

Билет 8

1. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам. Сформулируйте соответствующий признак конгруэнтности треугольников.

2. Докажите, что выражение $x(x-2a)+a^2$ равно 4 при $x=a+2$, а также при $x=a-2$.

3. Вычислите тупой угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника.

Билет 9

1. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах равнобедренного треугольника.

2. Решите уравнение $10x : 3,5 = 0,4 : 7$.

3. Найдите площадь S_p ромба, если его сторона равна 5 см, а острый угол равен 60° .

Билет 10

1. Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре и наклонной, проведенных из одной точки на одну прямую.

2. Упростите выражение $5x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{0,2} \cdot x^{1,2}$ и вычислите его значение при $x=1,2$.

3. В окружности радиуса $r=10$ см проведена хорда длиной $a=16$ см. Найдите ее расстояние h от центра окружности.

Билет 11

1. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.

2. Найдите значения функции $y=x^2-6|x|+5$ при $x=-1; -0,5; 0; 0,5; 1$.

3. Найдите множество решений неравенства $\frac{1}{x} > 1$.

Билет 12

1. Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
2. Решите уравнение $5(x-2)+9=(1+2x)(2x-1)$.
3. Постройте окружность, касающуюся всех сторон данного треугольника.

Билет 13

1. Сформулируйте и докажите теорему о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
2. Напишите какую-нибудь арифметическую прогрессию с разностью $d=1,5$ и найдите сумму 15 первых ее членов.
3. Диагональ квадрата $d=10$ см. Найдите сторону квадрата a и его площадь S .

Билет 14

1. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве катета, лежащего против угла в 30° .
2. Докажите, что при любом n справедливо неравенство $n^2 \geq 8(n-2)$.
3. Начертите график функции $y=6-2x$. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, составленного осями координат и графиком этой функции.

Билет 15

1. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
2. Решите уравнение $2^{|x|}=8$.
3. Начертите график функции $y=\frac{1}{2}x^2$. Найдите по графику а) значения y , если $x=2,5$; б) значения x , если $y=6$.

Билет 16

1. Трапеция (определение). Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.
2. Решите уравнение $\lg(x-3)=2$. Сделайте проверку.
3. Не выполняя построения графика, выясните, принадлежат ли точки $A(-0,1; -0,005)$ и $B(-2; -50)$ графику функции, заданной формулой $y=5x^3$.

Билет 17

1. Параллелограмм (определение). Сформулируйте и докажите теорему о свойствах сторон и углов параллелограмма.
2. Найдите множество решений уравнения $\lg|2x|=1$.
3. Решите уравнение $\left(3\frac{1}{3}-1,5\right):a=11$.

Билет 18

1. Сформулируйте и докажите теорему о диагоналях параллелограмма.
2. Решите уравнение $(x+2)\sqrt{x-1}=0$.
3. Постройте график функции $y=|x|+1$.

Билет 19

1. Прямоугольник (определение). Сформулируйте и докажите теорему о диагоналях прямоугольника.
2. Решите уравнение $|x-2|=5$.
3. Вычислите: $\frac{4^{-6} \cdot 8^{-4}}{2^{-22}}$.

Билет 20

1. Ромб (определение). Сформулируйте и докажите теорему о диагоналях ромба.
2. Упростите выражение $\frac{a-b}{a^{1/2}-b^{1/2}} + \frac{b-a}{a^{1/2}+b^{1/2}}$.
3. Чему равен внутренний угол правильного пятиугольника?

Билет 21

1. Значения синуса и косинуса для угла 30° .
2. Упростите выражение $2 \lg 5 - \left(\lg 3 \frac{1}{8} + \lg 8 \right)$.
3. Постройте график степенной функции $y=x^n$ при $n=1$ и $n=2$.

Билет 22

1. Значения синуса и косинуса для угла 60° .
2. Найдите множество решений неравенства $x^2 > 100$.
3. Докажите конгруэнтность биссектрис равнобедренного треугольника, проведенных к его боковым сторонам.

Билет 23

1. Значения синуса, косинуса и тангенса для угла 45° .
2. Найдите область определения функции $y = \lg |x|$.
3. Докажите конгруэнтность медиан равнобедренного треугольника, проведенных к его боковым сторонам.

Билет 24

1. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
2. Разложите на множители выражение $(a-8)^2 - 16$.
3. Решите неравенство $x^2 < 9$.

Билет 25

1. Выведите формулу площади параллелограмма.
2. Вычислите выражение $\left(9^{0,25} - (2^{1,5})^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(9^{0,25} + (2^{1,5})^{\frac{2}{3}} \right)$.
3. Острый угол одного прямоугольного треугольника равен 52° , а другого — 38° . Подобны ли эти треугольники?

Билет 26

1. Выведите формулу площади треугольника: $S_{\text{тр}} = \frac{ah}{2}$.

2. Постройте схематически графики функции $y=kx$, где $k > 0$ и $k < 0$.
3. Решите уравнение $\lg(2x+10) = 4 \lg 2 + \lg 3$.

Билет 27

1. Выведите формулу площади треугольника $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$.
2. Решите неравенство $x^2(x+1) > 0$.
3. Постройте схематически графики функции $y=k/x$, где $k > 0$ и $k < 0$.

Билет 28

1. Выведите формулу площади трапеции.
2. Постройте график функции $y=2x-1$ и ответьте на вопросы: при каких значениях x $y=0$; $y > 0$; $y < 0$?
3. Найдите первый и третий члены геометрической прогрессии (b_n) , если $b_2 = -16$ и знаменатель $q = 1/2$.

Билет 29

1. Выведите формулу для вычисления стороны правильного n -угольника $a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.
2. Сократите дробь $\frac{\sqrt{x-4}}{x-16}$.
3. Найдите множество решений двойного неравенства $5,4 \leq 5x-2 \leq 7,6$.

Билет 30

1. С помощью формулы $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ выведите формулы для вычисления a_6 , a_4 , a_3 .
2. Решите уравнение $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.
3. Покажите на координатной плоскости примерное расположение графиков функции $y=kx+l$, если а) $k > 0$ и $l > 0$; б) $k < 0$ и $l < 0$.

ГЛАВА IV

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ УСТНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

§ 37. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА.

Выражения

Вычислите наиболее простым способом (1—14):

1. а) $16 \cdot 125 \cdot 250$; б) $64 \cdot 2,5 \cdot 12,5$.
2. а) $4,85 - 2 \frac{4}{9} + 15 \frac{9}{20} : 3$; б) $215^2 - 214^2$.
3. а) $3,7^2 + 2 \cdot 3,7 \cdot 6,3 + 6,3^2$; б) $317^2 + 217^2 - 634 \cdot 217$.

$$4. 2,78 \cdot 36,1 + 36,1 \cdot 7,22 - 26,1 \cdot 5,64 - 26,1 \cdot 4,36.$$

$$5. 12,8^3 - 12,8 \cdot 7,2^2 - 448 \cdot 3,2.$$

$$6. \left(-2 \frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-1 \frac{4}{11}\right) (-5) + (1 - 7,52(-8,47)) \times \\ \times \left(0,4 - \frac{2}{5}\right).$$

$$7. 3 \frac{11}{13} \cdot 0,26 + \frac{2,4 \cdot 2,73}{24 \cdot 0,273} + \frac{7,83 : 31,6}{78,3 : 316}.$$

$$8. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

$$9. a) \sqrt{3,13^2 - 3,12^2}; \text{ б) } \sqrt{52^2 + 39^2}.$$

$$10. \sqrt{(12,1^2 - 8,1^2) : (0,25^2 + 0,25 \cdot 19,95)}.$$

$$11. 2a^3b^2(5a+7b)(4a-8b) \text{ при } a=2,5, b=1,25.$$

$$12. \frac{(a^3+2a)^2}{a^4+4a+4} \text{ при } a=1 \frac{1}{3}.$$

$$13. \sqrt{a^3 - a^2b - ab^2 + b^2} \text{ при } a=0,78, b=0,22.$$

$$14. \sqrt{25a^2 + 16b^2 + 20ab} \text{ при } a=0,4, b=-0,5.$$

15. При делении числа a на некоторое число в частном получено b , а в остатке — число r . Найдите делитель.

16. Найдите два числа, если их сумма равна a , а разность равна b .

17. Найдите два числа, если их сумма равна c , а отношение равно $p:q$.

18. Множество значений x есть $\{-28, -27, -26, \dots, 5, 6\}$. Множество значений y есть $\{-1, -2, -3, \dots, -15, -16\}$. Найдите наименьшее и наибольшее значения $x+y$.

19. Укажите какое-нибудь число, заключенное между числами а) 1,7 и 1,8; б) $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{2}$; в) $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{8}$; г) $-0,76$ и $-0,7$.

20. Один рабочий может выполнить некоторую работу за 2 ч, а другой рабочий может выполнить ту же работу за 3 ч. За сколько часов выполнят эту работу оба рабочих, работая вместе?

21. Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, что он проехал, смотря в окно. Какую часть пути пассажиру осталось проехать?

22. Докажите, что сумма двухзначного числа $\overline{ab}$, т. е. $10a+b$, с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, делится на 11.

23. Пользуясь правилом подсчета верных цифр, вычислите площадь S прямоугольника со сторонами $a \approx 5,75$ дм и $h \approx 0,28$ дм.

Проценты

24. Найдите а) 50 % от 17; б) 25 % от 36; в) 12,5 % от 24; г) 75 % от 48; д) 50 % от 40.

25. Что больше: 27 % от 39 или 39 % от 27?

26. 25 % некоторого числа составляют 0,25. Найдите это число.

27. Магазином продано в первый день 50 % поступившего товара, во второй день — 25 % остатка. Сколько процентов поступившего товара осталось непроданным?

28. Длину стороны квадрата увеличили на 50 %. На сколько процентов увеличили площадь полученного квадрата?

29. Длину прямоугольника увеличили на 20 %, а ширину уменьшили на 20 %. Как изменится площадь прямоугольника?

30. В сберкассу в начале года положено a руб. Через год эта сумма увеличилась на 3 %. Вновь полученная сумма через год увеличилась еще на 3 %. Сколько рублей будет в сберкассе через два года?

Степени и корни

31. Найдите значение выражения а) $0,2^5 \cdot 5^6$; б) $0,25^4 \cdot 8^3$; в) $2,5^5 \cdot 8^4 \cdot 0,4^6 \cdot 0,125^4$; г) $(-1)^{2n-1} (-1)^{1-n} (-1)^{n+2}$; д) $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$; е) $2^{-1} + (-2)^{-1}$.

32. Что больше: а) -3^2 или $(-3)^2$; б) $0,5^{3+3}$ или $0,5^3 \cdot 3$; в) 118^2 или $119 \cdot 117$; г) 117^2 или $115 \cdot 119$?

33. Представьте числа 2 и 5 в виде а) квадратных корней; б) кубических корней.

34. Найдите два натуральных числа, между которыми заключается число а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{10}$; в) $\sqrt[4]{20}$; г) $\sqrt[3]{130}$.

35. Чему равно а) $\sqrt{a^2}$, если $a < 0$; б) $\sqrt{(a-3)^2}$, если $a < 3$; в) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2}$, если $2 < x < 4$?

36. Вынесите множитель из-под знака корня а) $\sqrt{25x^2}$; б) $\sqrt{-36x^3}$.

37. Внесите множитель под знак корня: а) $b\sqrt{7}$, если $b > 0$; б) $a\sqrt{6}$, если $a < 0$.

38. Что больше: а) $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt{2}$; б) $2\sqrt[3]{4}$ или $3\sqrt[3]{1,5}$?

39. Воспользовавшись формулой квадрата двучлена, извлеките квадратный корень из двучлена а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

40. Вычислите а) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \times \sqrt{5-2\sqrt{6}}$; в) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

41. Сократите дроби а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{a^2-5}{\sqrt{5}-a}$; в) $\frac{x-a}{\frac{1}{x^2}-a^2}$;

г) $\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}$; д) $\frac{x+y+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x-y}$.

42. Вычислите а) $y = 3x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{0,6} \cdot x^{1,2}$ при $x = 10$;
б) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot \sqrt[4]{4}$.

Уравнения и неравенства

43. Найдите значения x , если а) $|x|=3$; б) $|x|<3$;
в) $|x|>3$; г) $|x-3|=2$; д) $|x-1|<3$; е) $|x+2|\leq 5$;
ж) $|x-2|\geq 4$.

44. Решите уравнение а) $\frac{x-1}{x-1}=1$; б) $\frac{2x+3}{2x+3}=1$; в) $\sqrt{x^2}=$
 $=3$; г) $\sqrt{y^2}=-4$; д) $\sqrt{(x-2)^2}=5$; е) $\sqrt{x^2}=x$; ж) $\sqrt{y^2}=$
 $=-y$; з) $\frac{x^2}{x}=0$; и) $\frac{(x-5)(x-1)^2}{x-1}=0$; к) $\frac{(x-3)(x+2)}{x+2}=1$;
л) $[x]=2$; м) $\{x\}=0,2$.

45. Решите уравнение а) $(x+2)\sqrt{x}=0$; б) $(x+1)\times$
 $\times \sqrt{x-1}=0$; в) $(x-2)(x+4)\sqrt{x}=0$; г) $4x^2+(x-1)^0-5=0$;
д) $(x^2+7)|x-3|=0$; е) $|x|=x^2$; ж) $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$; з) $\sqrt{x}+$
 $+\frac{1}{\sqrt{x}}=3\frac{1}{3}$; и) $1921x^2-3902x+1981=0$; к) $1917x^2+$
 $+3896x+1979=0$.

46. Решите уравнение а) $x^2+y^2=0$; б) $(x-3)^2+$
 $+(y-4)^2=0$; в) $(x-5)^2+(2x+5y)^2+|2x+y-z|=0$;
г) $x^3+x^2+x+1=0$; д) $x^3-x=0$.

47. В каких точках парабола $y=x^2+x-6$ пересекает ось x ; ось y ?

48. В каких точках график функции $y=(x-5)(x-1)\times$
 $(2x+1)(x+2)$ пересекает ось x ; ось y ?

49. Решите уравнение а) $S = \frac{1}{2} ah$ относительно a ;
 б) $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$ относительно $\sin \alpha$; в) $S = a^2 h$ относительно a ($a > 0$); г) $S = (a_1 + a_n) n/2$ относительно a_n ; д) $S = \pi R^2$ относительно R ($R > 0$); е) $V = \pi R^2 h/3$ относительно R ($R > 0$); и) $S = v_0 + gt$ относительно v_0 и t ; з) $\dot{n} = mc(T - t)$ относительно каждой из переменных m , c , T и t .

50. Решите неравенство а) $x^2 > 0$; б) $x^2 < 0$; в) $x^2 \geq 0$;
 г) $x^2 > 16$; д) $x^2 < 4$; е) $(x - 2)^2(x + 1) > 0$; ж) $\frac{x-2}{-3} > 0$;
 з) $\frac{2x-1}{\lg 0,1} < 0$; и) $\sqrt{x} > -1$; к) $\sqrt{-x} > x$.

Функции и графики

51. Для следующих функций найдите обратные и постройте в одной системе координат их графики:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = 4 - 2x$.

52. Постройте графики следующих функций:

а) $y = x^0$; б) $y = (x - 2)^0$; в) $y = 2x + (x + 1)^0$; г) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; д) $y = |x| + 1$; е) $y = x/|x|$; ж) $y = x|x|$;
 з) $|y| = x + 1$.

53. Начертите четырехугольник, вершинами которого являются точки пересечения прямых $y = x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x + 2$ и $y = -x - 2$. Определите вид четырехугольника.

54. Известно, что график функции $y = ax + 4$ проходит через точку $(-2; 5)$. Найдите a и постройте график.

55. График функции $y = x^2$ перенесли а) на 3 единицы вниз; б) на 4 единицы вправо; в) на 3 единицы вниз и на 4 единицы вправо. Каким станет уравнение каждого из этих графиков?

56. Начертите графики следующих функций и найдите их наибольшее или наименьшее значение:

а) $y = (x + 3)^2$; б) $y = 7 - x^2$; в) $y = x^2 + 2x - 3$.

57. Решите графически уравнения а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 = |x|$;
 в) $\sqrt{x} = 6 - x$.

58. Решите графически систему уравнений

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ 0,5x - y = 0. \end{cases}$

59. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} |x|=2, \\ x+2y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-3xy=8, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y(x-2)=0, \\ 2x+3y=13; \end{cases}$
г) $\begin{cases} (x-y+2)^2+y=8, \\ (x-y+2)^2+x=7. \end{cases}$

60. На координатной плоскости найдите множества точек, координаты которых удовлетворяли бы условиям
а) $(x-y)(y+x^2)=0$; б) $(x-2)(x^2+y^2)=0$; в) $(x+y-1) \times ((x+y)^2+y^2)=0$.

Прогрессии

61. 1. Арифметическая прогрессия начинается так: $a, b, \dots$. Найдите следующие ее два члена.

2. Геометрическая прогрессия начинается так: $b, b^3, \dots$. Найдите следующие ее два члена.

3. В арифметической прогрессии даны второй член $a_2=m$ и третий член $a_3=n$; найдите a_1 .

62. 1. В геометрической прогрессии второй член $b_2=m$, третий $b_3=n$. Найдите первый член b_1 .

2. Известно, что $28+26+\dots+x=0$. Сколько слагаемых в левой части равенства; чему равен последний член x ?

63. Найдите 15-й член арифметической прогрессии

а) $1+\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}, 1+5\sqrt{3}, \dots$; б) $\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-4, \sqrt{2}-7, \dots$

64. Между числами $\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$ вставьте такое положительное число, чтобы эти три полученных числа были последовательными членами геометрической прогрессии.

65. Геометрическая прогрессия задана формулой n -го члена: а) $b_n=5 \cdot 2^{n-1}$; б) $b_n=5 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$. Найдите b_{n-1} и b_{n+1} .

Логарифмы

66. Дано: $10^x=3$. Найдите а) 10^{x+1} ; б) 10^{-x} ; в) 10^{x-1} ; г) 10^{2x} .

67. При каких значениях x имеет смысл выражение

а) $\lg(-x)$; б) $\sqrt{-x}$; в) $\lg(1-x)$; г) $\sqrt{1-x}$; д) $\lg \sqrt{x^2}$;
е) $\sqrt{x^2}$; ж) $\frac{1}{\lg x}$; з) $\frac{1}{\sqrt{x}}$?

68. Имеет ли смысл выражение а) $\sqrt{\lg 0,1}$; б) $\lg \sqrt{0,1}$; в) $\lg \cos 0^\circ$?

69. Вычислите а) $10^{\lg 8}$; б) $10^{\lg^2 + 10^{\lg 3}}$; в) $10^{\lg^2 + \lg 3}$; г) $10^{\lg^2 + 2}$; д) $10^{\lg^2 + 10^2}$; е) $10^{\lg^3 - 1}$; ж) $10^{\lg^3 + 10^{-1}}$; з) $10^{-\lg^2}$.

70. Образуют ли арифметическую прогрессию числа $\lg 0,01$; $\lg 1$; $\lg 100$; $\lg 10\,000$?

71. Решите уравнения: а) $\lg^2 x = 1$; б) $\lg x^2 = 1$; в) $\lg^2 x^2 = 1$; г) $10^{\lg x^2} + x^2 = 8$.

72. Постройте графики функции а) $y = 10^{\lg x}$; б) $y = 10^{\lg x^2}$.

73. Зная, что $\lg a = 0,1$, вычислите а) $\lg(10a)$; б) $\lg \frac{a}{10}$; в) $\lg \frac{10}{a}$; г) $\lg a^2$; д) $\lg^2 a$.

§ 38. ГЕОМЕТРИЯ

74. Расстояние от пункта A до пункта B равно 10 км, а от пункта B до пункта C — 6 км. Какими могут быть наибольшее и наименьшее расстояния от пункта A до пункта C ?

75. Проведите два луча AB и CD , пересечением которых станет а) отрезок AC ; б) луч CD .

76. Даны три точки A , B и C такие, что $|AB| + |BC| = |AC|$; $|AC| = a$. Чему равно расстояние между серединами отрезков AB и BC ?

77. Сколько различных отрезков определяется четырьмя точками, взятыми попарно?

78. Дана окружность (O ; r). Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, для которых а) $|OX| \leq r$; б) $|OX| < r$; в) $0 < |OX| \leq r$?

79. Диаметр окружности на 5 см больше радиуса. Чему равен диаметр?

80. Развернутый угол разделен на три равные части. Докажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

81. Может ли разность двух смежных углов быть равна 90° ?

82. Может ли сумма двух вертикальных углов быть равна 180° ?

83. Вычислите величину выпуклого угла ABC , если $\widehat{ABD} = 72^\circ$, $\widehat{CBD} = 40^\circ$. Рассмотрите все случаи.

84. На окружности дана точка A . Постройте хорду, концы которой находятся на одинаковом расстоянии от этой точки.

85. Координаты точек A и B прямой равны соответственно -2 и 5 . Какие координаты может иметь точка C прямой AB , если известно, что точка C лежит между точками A и B ; точка C не лежит между точками A и B ? Чему равна длина отрезка AB ?

86. Докажите, что в треугольнике отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с любой точкой его основания, меньше половины периметра треугольника.

87. Начертите две фигуры, объединение которых — круг, а пересечение — треугольник и объединение — треугольник, а пересечение — круг.

88. Сколько осей симметрии может иметь а) угол; б) равнобедренный треугольник; в) равносторонний треугольник?

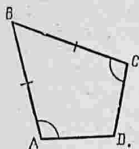


Рис. 65

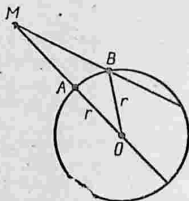


Рис. 66

89. Дан прямоугольный треугольник. Постройте треугольник, ему симметричный относительно прямой, содержащей гипотенузу.

90. Дан равнобедренный треугольник. Постройте треугольник, ему симметричный относительно середины боковой стороны. Как расположены стороны полученного четырехугольника?

91. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 65) $|AB| = |BC|$ и $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Докажите, что $|AD| = |DC|$.

92. 1. Почему гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета?

2. Может ли боковая сторона равнобедренного треугольника быть равной половине основания?

93. Внутри треугольника ABC взята точка X . Докажите, что сумма расстояний от этой точки до вершины треугольника больше суммы расстояний от этой точки до сторон треугольника.

94. Дан тупоугольный треугольник ABC . Постройте проекции его вершин и сторон на прямые AB , BC и AC .

95. Дана окружность $(O; r)$ (рис.66). Точки A и B расположены на окружности, точка M — вне ее, причем точки M , A и O лежат на одной прямой. Докажите, что $|MA| < |MB|$.

96. Точка A расположена на окружности $(O; r)$. Как через эту точку провести касательную и почему эта касательная единственная?

97. Даны конгруэнтные треугольники ABC и DEF . Известно, что $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$. Докажите, что биссектриса BK конгруэнтна биссектрисе EL ($K \in [AC]$, $L \in [DF]$).

98. Верно ли высказывание: «В двух треугольниках против конгруэнтных углов лежат конгруэнтные стороны»?

99. Почему в разностороннем треугольнике по крайней мере один из углов не больше 60° ?

100. 1. Почему внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла треугольника, не смежного с этим внешним?

2. Может ли внешний угол треугольника быть меньше его внутреннего угла?

3. Внутри треугольника ABC взята точка M и соединена с вершинами A и C . Докажите, что $\widehat{AMC} > \widehat{ABC}$.

101. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными?

102. Докажите, что если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° .

103. В прямоугольном треугольнике угол равен 30° , а гипотенуза равна 8 см. Найдите отрезки, на которые высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу.

104. Почему против наименьшей стороны в треугольнике всегда лежит острый угол?

105. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен α . Длина боковой стороны больше длины основания. В каких границах может изменяться угол α ?

106. Против большей стороны треугольника лежит больший угол. Имеется ли здесь прямая пропорциональность?

107. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Из середины гипотенузы проведены перпендикуляры на

катеты. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника.

108. В равностороннем треугольнике проведены две высоты длиной 6 см. Найдите проекцию одной из высот на другую.

109. Может ли сумма углов выпуклого многоугольника быть равна ста прямым углам?

110. Почему в параллелограмме, отличном от прямоугольника, диагонали не конгруэнтны?

111. Угол параллелограмма равен 30° . Чему равен угол между его высотами?

112. Меньшая сторона прямоугольника равна a . Чему равен его периметр, если биссектриса одного из его углов делит большую сторону пополам?

113. Имеется ли прямоугольник, который разбивается диагоналями на четыре равносторонних треугольника?

114. Является ли прямая, содержащая диагональ прямоугольника, его осью симметрии?

115. Существует ли ромб, в котором а) диагональ конгруэнтна стороне; б) высота конгруэнтна стороне; в) диагональ равна удвоенной его стороне?

116. Может ли диагональ равнобедренной трапеции быть конгруэнтной ее боковой стороне?

117. Может ли одна из диагоналей трапеции быть а) биссектрисой угла при меньшем основании; б) биссектрисой угла при большем основании?

118. Назовите общие свойства для трапеции и параллелограмма.

119. Есть ли у трапеции а) ось симметрии; б) центр симметрии?

120. Может ли средняя линия трапеции проходить через точку пересечения ее диагоналей?

121. Даны два параллельных отрезка. Можно ли их считать гомотетичными? Сколько у них центров гомотетии?

122. Диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника. Найдите среди них пары гомотетичных треугольников. Чему равен коэффициент гомотетии?

123. Около равностороннего треугольника описана окружность и в этот же треугольник вписана окружность. Где расположен центр гомотетии этих окружностей? Чему равен коэффициент гомотетии?

124. Дано: $[AB] \perp [BC]$, $[BD] \perp [AC]$ (рис. 67). Найдите подбные треугольники и докажите их подобие.

125. В треугольнике ABC (рис. 68) проведен отрезок BD так, что $\widehat{ABD} = \widehat{BCA}$. Найдите пару подобных треугольников и запишите пропорциональность их сходственных сторон.

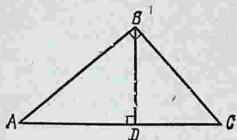


Рис. 67

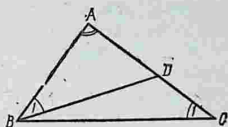


Рис. 68

126. Около треугольника ABC описана окружность (рис. 69). Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D , а окружность — в точке E . Докажите, что треугольник ABE подобен треугольнику ADC .

127. При каком условии ромбы подобны?

128. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

129. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведена высота длиной 4 см. Один из полученных отрезков гипотенузы равен 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.

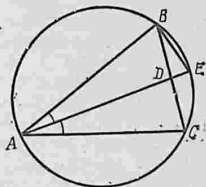


Рис. 69

130. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанной окружности равен 3 см, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 2 см.

131. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а его боковая сторона — 15 см. Ученик ошибочно нашел площадь этого треугольника как половину произведения основания на боковую сторону. На сколько процентов полученная площадь больше истинной?

132. Как проще всего разбить любой треугольник на любое число равновеликих треугольников?

133. В треугольнике ABC проведена высота BD ($D \in [AC]$). Точка M делит эту высоту пополам. Найдите

площадь треугольника AMC , если площадь данного треугольника равна 1 дм^2 .

134. В треугольнике ABC проведена медиана BD ($D \in [AC]$). Точка M делит эту медиану пополам. Найдите площадь треугольника AMD , если площадь данного треугольника равна S .

135. Боковая сторона треугольника разделена в отношении $1:3$ (считая от вершины) и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Найдите отношение площади отсеченного треугольника к площади данного треугольника, а также площади отсеченной трапеции к площади отсеченного треугольника.

136. Имеется ли правильный многоугольник, у которого конгруэнтны между собой внутренний и центральные углы?

137. Дан правильный шестиугольник; каждая его вершина соединена отрезком прямой с центром. Укажите пары треугольников, симметричных относительно большей диагонали, а также пары треугольников, симметричных относительно центра треугольника.

138. Дана окружность радиуса 1 дм . Три точки на ней разделены в отношении $1:2:3$. Вычислите длины хорд, соединяющих последовательно эти точки.

139. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см . Найдите длины окружностей и площади кругов, построенных на гипотенузе и катетах (гипотенуза и катеты служат диаметрами).

140. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12 см . Найдите синус и косинус большего острого угла.

141. В остроугольном треугольнике ABC $\hat{A} = 45^\circ$. Высота CD делит сторону AB на отрезки $|AD| = m$ и $|DB| = n$. Найдите 1) $\operatorname{tg} \hat{B}$; 2) $\sin \hat{B}$.

142. В остроугольном треугольнике ABC высота CD ($D \in [AB]$) образует со сторонами CA и CB углы α и β . Вычислите $|AD|$, $|BD|$, $|AC|$ и $|CB|$, если $|CD| = 1$.

143. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD на гипотенузу AB . Докажите, что 1) коэффициент подобия треугольников ACD и BCD равен $\operatorname{tg} \hat{B}$; 2) коэффициент подобия треугольников ACD и ABC равен $\sin \hat{B}$.

ГЛАВА V

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1. Докажите, что квадрат нечетного числа при делении на 8 даёт в остатке единицу.

2. Докажите, что а) $m^3 + 11m$ делится на 6, где $m \in \mathbb{N}$;
б) $n^3 + 3n^2 + 8n$ делится на 6, где $n \in \mathbb{N}$.

3. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, то $a = b = c$.

4. На какое наименьшее число нужно умножить 2100, чтобы полученное произведение было точным кубом какого-то числа?

5. Вычислите выражение $x^4 + y^4 - x^3y^2 - x^2y^3 + 16xy$, если $x + y = 2$.

6. Упростите выражения:

а) $(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[5]{2+\sqrt{3}}) \cdot \sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+14x+49}$;

в) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ при $1 \leq a \leq 2$;

г) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2$.

7. Решите уравнения:

а) $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$;

б) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 5040$;

в) $(x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1$; г) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \frac{1}{x^2}$.

8. Найдите x , y и z из уравнения

$$x^2 + y^2 + 0,25z^2 - 2x + 2y - z + 3 = 0.$$

9. Найдите x и y из уравнения

$$x^2 + y^2 + 10 = 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y.$$

10. 1. Решите в целых числах уравнение $xy = x + y$.

2. Найдите несколько пар положительных чисел, сумма которых равна их произведению.

11. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 1983$ не имеет решений в целых числах.

12. Решите уравнение $|x-2| + |x-4| = 3$.

13. Найдите область а) определения функции $y = \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 4x}$; б) изменения функции $y = \frac{x-3}{x-2}$.

14. 1. Автомобиль прошел путь от A до B со скоростью $v_1 = 60$ км/ч и обратно со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

2. Найдите скорость поезда, зная, что он проходит мимо неподвижного наблюдателя за 5 с, а мимо платформы длиной 420 м — за 20 с. Какова длина поезда?

15. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} |x| + 3y = 7, \\ 2x + |y - 1| = 3. \end{cases}$$

16. Докажите неравенство а) $3^{34} > 2^{61}$; б) $38^{303} > 57^{202}$.

17. Докажите неравенства:

а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$; б) $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$;

г) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}$.

18. Докажите, что если $a > b > c > 0$ и a, b, c — три последовательных числа арифметической прогрессии, то а) $a^2 + c^2 > 2b^2$; б) $a^3 + c^3 > 2b^3$.

19. Докажите, что если величины углов выпуклого пятиугольника составляют арифметическую прогрессию, то величина каждого из углов больше 36° .

20. Найдите область определения функции

$$y = x + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-4x}.$$

21. Решите неравенство $x^2(2x-3)(x^2-2x+5) > 0$.

22. Решите неравенство а) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$; б) $|x+2| >$

$> |x|$; в) $\left| \frac{x-2}{x+1} \right| > 1$.

23. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

24. Постройте график функции, заданной формулой

а) $y = x^2 - 2|x|$, затем решите графически неравенства $x^2 - 2|x| > 0$ и $x^2 - 2|x| < 0$;

б) $y = x^2 - 3|x| + 2$, а затем с его помощью решите неравенство 22 а.

25. Постройте график функции а) $y = \sin^2 \lg x + \cos^2 \lg x$;

б) $y = \frac{x \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} + 1}{x^2 + 1}$;

в) $y = \sqrt{x+2} \sqrt{x-1} +$

$+ \sqrt{x-2} \sqrt{x-1}$, где $x \in [1; 2]$.

26. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению а) $|x| + |y| = 2$; б) $x^2 + y^2 = 0,25^{|x|/x}$; в) $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$.

27. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} |x| - y \geq 1, \\ 3x + y < 3. \end{cases}$

28. Решите уравнения:

а) $\lg^2 x^2 = \lg 1000$; б) $\lg x^2 + \lg(-x) = 3$.

29. Найдите, при каких значениях x справедливы равенства

а) $\sqrt{x} = x$, $\sqrt{x} > x$, $\sqrt{x} < x$; б) $\lg \sqrt{x} = \sqrt{\lg x}$, $\lg \sqrt{x} > \sqrt{\lg x}$, $\lg \sqrt{x} < \sqrt{\lg x}$?

30. В треугольнике ABC , где $|AC| = 2$ м, опущена высота BD ($D \in [AC]$), $|BD| = \sqrt{2}$ м, причем $|AD| = |BC|$. Найдите длину стороны AB .

31. В треугольнике ABC $|AB| = 6$ м, $|AD| = 4$ м, $|BC| = 4$ м. Найдите высоту $|CD|$ ($D \in [AB]$) и площадь треугольника.

32. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к $[AB]$ пересекает катет AC в точке M , а продолжение катета BC — в точке N . Найдите $|AB|$; если $|DM| = a$, $|MN| = b$.

33. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 2 м, а длины основания BC и каждой из боковых сторон AB и CD равны по 1 м. Найдите длину диагонали трапеции.

34. В прямоугольнике $ABCD$ $|AD| = a$, $|AB| = b$ ($a > b$). На стороне AD взята точка M так, что $\angle BMA \cong \angle CMB$. Найдите $|MD|$.

35. На хорде AB окружности с центром O взята точка M ($|AM| \neq |MB|$). Через точки A , M и O проведена окружность, пересекающая первую окружность в точках A и C . Докажите, что $|MB| = |MC|$.

36. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BD большей окружности касается меньшей окружности в точке C . Докажите, что AC является биссектрисой угла BAD .

37. К двум окружностям O и O_1 , касающимся внешне в точке A , проведена общая внешняя касательная BC (B и C — точки касания). Докажите, что $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

38. В трапеции $ABCD$ длины боковых сторон AB и CD равны соответственно 8 и 10 см, а длина основания BC равна 2 см. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

39. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD перпендикулярны. Докажите, что сумма квадратов диагоналей такой трапеции равна сумме квадратов ее оснований.

40. Биссектриса CD треугольника ABC ($D \in [AB]$) пересекает описанную окружность в точке E . Докажите, что $|AC| \cdot |BC| = |CD| \cdot |CE|$.

41. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне равностороннего треугольника, до двух других его сторон есть величина постоянная.

42. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 6 см. Найдите высоту трапеции и ее периметр.

43. Длины основания AD , диагонали AC и боковой стороны AB трапеции $ABCD$ равны между собой и равны 2 см. Длина боковой стороны CD равна 1 см. Найдите длину диагонали BD .

44. 1. В треугольнике ABC , у которого $\hat{B} = 60^\circ$, проведены биссектрисы AD и CE ($D \in [BC]$, $E \in [AB]$), пересекающиеся в точке O . Докажите, что $|OD| = |OE|$.

2. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Точки B , D , O , E лежат на одной окружности. Докажите, что $\hat{B} = 60^\circ$.

45. В трапеции $ABCD$ AC и BD — диагонали. Из вершины B на диагональ AC опущен перпендикуляр BE ($E \in [AC]$), $|BE| = 1$ м, $|AC| = 2$ м. Найдите площадь треугольника BCD .

46. В треугольнике ABC проведены высоты AF и BK , пересекающиеся в точке O . Докажите, что вершина C лежит на окружности, проходящей через точки F , O , K .

47. 1. Докажите, что в треугольнике ABC , где a и b — стороны треугольника, выполняются соотношения

$$\text{а) } S \leq \frac{a^2 + b^2}{4} \text{ и б) } S \leq \frac{(a+b)^2}{8}.$$

48. Докажите, что если площади равностороннего треугольника и квадрата равны, то периметр этого треугольника больше периметра квадрата.

49. Длины сторон треугольника ABC равны a , b и c . Известно, что $c^3 = a^3 + b^3$. Каков угол C : острый, прямой или тупой?

50. Найдите углы треугольника, если его площадь S выражается через длины его сторон a и b формулой $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

51. Вершины правильного треугольника со стороной a лежат на трех параллельных прямых. Расстояния между параллелями равны соответственно p и q ($p \neq q$). Докажите, что $a > 2\sqrt{pq}$.

52. Докажите, что во всяком треугольнике радиус описанного круга R вычисляется по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где a , b и c — стороны треугольника, S — его площадь.

53. Докажите, что из всех треугольников, у которых две стороны имеют длину a и b , наибольшую площадь имеет тот, у которого данные стороны перпендикулярны.

54. Докажите, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая высота.

55. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD равна a , расстояние от середины AB до CD равно b . Найдите площадь трапеции.

56. Докажите, что перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка, соединяющего основания двух высот треугольника, делит третью сторону этого треугольника пополам.

57. 1. Найдите площадь треугольника ABC , у которого $\hat{C} = 90^\circ$, $|AB| = c$, $\hat{A} = 15^\circ$.

2. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 15° . Докажите, что произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы.

58. В прямоугольнике $ABCD$ $|AB| : |BC| = 1 : 2$. Из точки M , взятой на стороне BC , стороны AB и AD видны под одинаковыми углами. Найдите эти углы.

59. Трапеция разбивается диагоналями на четыре треугольника. Определите площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащие к основаниям трапеции, равны S_1 и S_2 .

60. В треугольнике ABC проведены высоты BD и AE ($D \in [AC]$; $E \in [BC]$). Зная, что $\hat{A} = \alpha$ и $\hat{B} = \beta$, найдите углы треугольника DEC .

61. Даны квадрат и прямоугольник, причем диагонали квадрата равны диагоналям прямоугольника. Площадь какой из фигур — квадрата или прямоугольника — больше?

62. Вычислите углы равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании отсекает от него треугольник, подобный данному.

63. В треугольнике ABC , где $|AB| = c$, из вершины проведена медиана m_c . Установите зависимость между m_c и c , если треугольник ABC — прямоугольный; остроугольный; тупоугольный.

64. В окружности радиуса r проведены две параллельные хорды, причем расстояния их от центра окружности равны d и $2d$. 1. Выразите длины этих хорд a и b в зависимости от d и r .

2. При каком соотношении между d и r длины хорд обратно пропорциональны их расстояниям от центра?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1. а) *Пересечением множеств A и B* называют новое множество, содержащее те и только те элементы, которые одновременно входят как в множество A , так и в множество B . Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Примеры:

$$\{a; b; c; d\} \cap \{c; d; e; f\} = \{c; d\}; \{1; 2\} \cap \{3; 4\} = \emptyset; \\ \{5; 6; 7\} \cap \{5; 6; 7\} = \{5; 6; 7\}.$$

Пересечением двух фигур называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат каждой из этих фигур. б) *Объединением двух множеств A и B* называется множество, состоящее из всех элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств. Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$. Например, $A = \{a; b; в; г; д; е\}$; $B = \{a; ж; в; е\}$; $A \cup B = \{a; б; в; г; д; е; ж; з\}$. *Объединением двух фигур* называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур. Например, объединением двух смежных углов является развернутый угол.

2. $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $F = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$; $E \cap F = \{1; 2; 3; 6\}$, $E \cup F = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$. 3. $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{-1; 0; 1; 2\}$, $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

§ 2

5. Числа, употребляемые при счете предметов, называют *натуральными*. Множество $N = \{1; 2; 3; \dots\}$ всех натуральных чисел бесконечно, оно называется *натуральным рядом*. 6. Если $a + b = c$, то a и b — *слагаемые*, c , а также $a + b$ — *сумма*.

Если $a - b = c$, то a — *уменьшаемое*, b — *вычитаемое*, c , а также $a - b$ — *разность*.

Если $a \cdot b = c$, то a — *множитель*, b — *множитель*, c , а также $a \cdot b$ — *произведение*. Множители a и b называют *сомножителями*.

Если $a : b = c$, то a — *делимое*, b — *делитель*, c , а также $a : b$ — *частное*.

7. а) Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое: если $x + a = b$, то $x = b - a$; б) чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое: если $y - c = b$, то $y = b + c$; в) чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо

из уменьшаемого вычесть разность: если $a - z = b$, то $z = a - b$; г) чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель: если $ax = b$, то $x = b : a$; д) чтобы найти неизвестное делимое, надо частное умножить на делитель: если $y : a = b$, то $y = ab$; е) чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное: если $a : z = b$, то $z = a : b$. 8. а) Последнее действие в левой части данного выражения — деление. Неизвестное входит в состав делимого, оно равно делителю, умноженному на частное: $(2x - 18) \cdot 15 + 120 = -4 \cdot 45$. Теперь имеем: $(2x - 18) \cdot 15 = -180 - 120$; $(2x - 18) \cdot 15 = -300$; $2x - 18 = (-300) : 15$; $2x = -20 + 18$; $x = -1$; б) $112 - (96 - 3x) \cdot 4 = -208 : 2$; $(96 - 3x) \cdot 4 = 112 + 104$; $96 - 3x = 216 : 4$; $3x = 96 - 54$; $3x = 42$; $x = 14$. 9. а) 4266; б) 82; в) 0; г) выражение не имеет смысла. 10. а) $(1282 + 1318) + (247 + 353) + 800 = 2600 + 600 + 800 = 4000$; б) $(25 \cdot 4) \cdot (8 \cdot 125) \cdot 13 = 1\,300\,000$; в) $25 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (25 \cdot 4) \cdot 3 = 30\,000$; г) $(161 + 139) \cdot 27 = 8100$. 11. а) $(200 + 40 + 8) \cdot 5 = 200 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 1240$, или $248 : 2 \cdot 10 = 1240$; б) $244 : 4 \cdot 100 = 6100$; в) $72 : 4 \cdot 1000 = 18\,000$; г) $35 \cdot (10 - 1) = 350 - 35 = 315$; д) $34 \cdot (10 + 1) = 374$; е) $17 \cdot (100 + 1) = 1717$. 12. *Простым числом* называется такое число, которое имеет только два делителя — единицу и само это число. Так, множество простых чисел первого десятка $\{2; 3; 5; 7\}$. *Составным числом* называется такое число, которое имеет более двух делителей. 13. Числа, не имеющие других общих натуральных делителей, кроме единицы, называются *взаимно простыми*. Например, 3 и 8, 9 и 25 — взаимно простые числа. 14. На 2 делятся числа 678, 1980 и 719 820; на 3 делятся числа 678 ($6 + 7 + 8 = 21$), 1980 и 719 820; на 5 делятся 1980, 65 425 и 719 820; на 9 делятся 1980 ($1 + 9 + 8 + 0 = 18$) и 719 820. 15. *Наименьшим общим кратным* двух или нескольких чисел называется наименьшее из натуральных чисел, которое делится на все данные числа. Например, наименьшее общее кратное чисел 9 и 12 есть 36. Это число можно получить, если большее из этих чисел 12 последовательно умножать на 1, 2, 3, пока полученное произведение (36) не разделится на 9. 16. Наименьший общий делитель нескольких натуральных чисел равен единице; наибольшее общее кратное натуральных чисел не существует. Действительно, какое бы большое общее кратное мы ни взяли, помножив, например, его на 2, получим новое общее кратное, большее предыдущего.

§ 3

17. Две дроби a/b и c/d считаются равными, если $ad = bc$. Например, $2/4 = 3/6$ (так как $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$); $-1/2 = -5/10$ (здесь $(-1) \times (-10) = 2 \cdot 5$); 18. Если $|a| < |b|$. 19. *Смешанным числом* называется сумма целого числа и правильной дроби; оно записывается без знака сложения, например $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$; $4\frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$. 20. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится дробь, равная первоначальной, или $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, если $m \neq 0$. На этом основано свойство сокращения дробей: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $\frac{-10}{100} = \frac{-1}{10}$ и приведения дробей к общему знаменателю: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. 21. Два числа, произведение

которых равно единице, называются *взаимно обратными*. Например, числа 5 и $1/5$, a/b и b/a взаимно обратные. 22. Для сложения дробей с разными знаменателями надо их сначала привести к общему знаменателю (лучше к наименьшему общему знаменателю), а затем сложить получившиеся дроби с одинаковыми знаменателями. Например, $\frac{7}{10} + \frac{2}{15} = \frac{21}{30} + \frac{4}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. 23. Произведение дробей равно дроби, числитель которой равен произведению их числителей, а знаменатель равен произведению их знаменателей.

З а м е ч а н и я: 1. Сначала, если это возможно, надо сделать сокращение, а только потом выполнить умножение. Например: $\frac{4}{9} \cdot \frac{18}{5} = \frac{4 \cdot 18}{9 \cdot 5} = \frac{8}{5} = 1 \frac{3}{5}$.

2. При умножении целого числа на дробь достаточно целое число представить в виде дроби со знаменателем, равным единице. Например, $\frac{7}{9} \cdot (-6) = \frac{7}{9} \cdot \frac{-6}{1} = \frac{7 \cdot (-6)}{9 \cdot 1} = \frac{-14}{3} = -4 \frac{2}{3}$. 24. Чтобы разделить дробь на дробь, надо делимое умножить на число, обратное делителю. Например, $\frac{9}{5} : \frac{8}{15} = \frac{9}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{9 \cdot 15}{5 \cdot 8} = \frac{27}{8} = 3 \frac{3}{8}$; $\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{60}$; $(-3) : \frac{2}{3} = \frac{-3}{1} \cdot \frac{3}{2} = -4,5$. 25. а) $\frac{25}{9} + \left(14 \frac{5}{6} - 11 \frac{3}{6}\right) \cdot \frac{4}{45} = \frac{25}{9} + 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{45} = \frac{25}{9} + \frac{10 \cdot 4}{3 \cdot 45} = \frac{25}{9} + \frac{8}{27} = \frac{83}{27} = 3 \frac{2}{27}$; б) $\left(25 \frac{1}{3} - \frac{135 \cdot 2}{27}\right) \cdot \frac{3}{16} = \left(25 \frac{1}{3} - 10\right) \cdot \frac{3}{16} = 15 \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{46 \cdot 3}{3 \cdot 16} = \frac{23}{8} = 2 \frac{7}{8}$; в) числитель дроби $3 \frac{4}{5}$, знаменатель $6 \frac{1}{2}$; $3 \frac{4}{5} : 6 \frac{1}{2} = \frac{38}{65}$; г) 1) $2 \frac{3}{5} \cdot 5 = 2 \cdot 5 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 13$; 2) $3 \frac{2}{5} \cdot 5 = 3 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 17$; а) $13 + 17 = 30$; 4) $30 - 15 \frac{4}{15} = 14 \frac{11}{15}$; 5) $14 \frac{11}{15} \cdot 15 = 14 \cdot 15 + \frac{11}{15} \cdot 15 = 221$; 6) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$; 7) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; 8) $\frac{2}{3} : 8 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 8} = \frac{1}{12}$; 9) $221 - \frac{1}{12} = 220 \frac{11}{12}$. 26. Чтобы сложить десятичные дроби, надо 1) урав-

нять число знаков после запятой в слагаемых, 2) записать слагаемые друг под другом так, чтобы запятая оказалась под запятой, 3) сложить получившиеся числа, как складываются натуральные числа, 4) поставить в полученной сумме запятую под запятыми в слагаемых. Например, запись действий $12,05 + 0,708 + 3,2$ и $7,6 - 4,99$ имеет вид

$$\begin{array}{r} 12,050 \\ + 0,708 \\ \hline 3,200 \\ \hline 15,958 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7,60 \\ - 4,99 \\ \hline 2,61 \end{array}$$

27. Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо, не обращая внимания на запятые, выполнить умножение, а затем в полученном произведении отделить справа запятой столько цифр,

сколько их после запятой в обоих множителях вместе. Например,

$$\begin{array}{r} \times 3,48 \\ 0,5 \\ \hline 1,740 = 1,74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 0,265 \\ 0,04 \\ \hline 0,01060 = 0,0106. \end{array}$$

З а м е ч а н и е. До постановки запятой отбрасывать нули в произведении нельзя. Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут несколько нулей. 28. Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, ..., 10^n , надо в этой дроби перенести запятую вправо на 1, 2, 3, ..., n цифр. Например; $0,136 \cdot 10 = 1,36$; $2,75 \cdot 1000 = 2,750 \cdot 1000 = 2750$. 29. При делении десятичной дроби на натуральное число, надо, не обращая внимания на запятую, поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части. Например, имеем

$$\begin{array}{r} 243,2 \overline{) 8} \\ \underline{24} \\ 3 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

30. Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n , надо в этой дроби перенести запятую влево на 1, 2, 3, ..., n цифр. Пример: $9,46 : 100 = 009,46 : 100 = 0,0946$. 31. Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число. Пример:

$$\begin{array}{r} 4,879 : 8,5 = 48,79 \overline{) 85} \\ \underline{487} \\ 629 \\ \underline{595} \\ 340 \\ \underline{340} \\ 0 \end{array}$$

Предостережение. Некоторые учащиеся, вместо того чтобы перенести запятую вправо в делителе, переносят запятую вправо в делимом, что усложняет вычисления,

32. Это можно сделать двумя способами: делением числителя на знаменатель или умножением знаменателя и числителя дроби на такое число, чтобы знаменатель обратился в 10, 100, 1000 и т. д. Имеем:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{0} \overline{) 4} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 0,75 \end{array} \right., \text{ или } \frac{3}{4} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)} = \frac{75}{100} = 0,75;$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4} = \frac{3}{0} \overline{) 4} \\ \underline{30} \\ 28 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625 \text{ или } \frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)} = \frac{625}{1000} = 0,625;$$

$$1 \frac{4}{25} = 1 \frac{4}{5 \cdot 5} = 1 \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{(5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2)} = 1 \frac{16}{100} = 1,16;$$

$$\frac{6}{125} = \frac{6}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{(5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2)} = \frac{48}{1000} = 0,048.$$

33. Дроби $\frac{3}{50}$; $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$; $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; $1 \frac{3}{25}$; $\frac{7}{16}$ можно записать в виде конечной десятичной дроби, так как в разложении знаменателя дроби на простые множители содержатся только 2 и 5. Дроби $\frac{5}{48}$; $\frac{15}{54} = \frac{1}{3}$

нельзя записать в виде конечной десятичной, так как в разложении знаменателя кроме 2 и 5 входят другие простые множители, которые нельзя привести ни к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д.

34. а) Здесь удобнее вести вычисления в обыкновенных дробях: $\frac{5}{32} : 0,25 = \frac{5}{32} : \frac{1}{4} = \frac{5}{32} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5}{8}$; б) удобнее вести вычисления в десятичных дробях: $14,56 : 0,14 = 1456 : 14 = 104$; в) умножим числитель и знаменатель первой дроби на 6, а второй — на 10:

$$\frac{1 \frac{1}{3} \cdot 6}{3 \frac{1}{2} \cdot 6} + \frac{3,9 \cdot 10}{4,2 \cdot 10} = \frac{8}{21} + \frac{39}{42} = \frac{16}{42} + \frac{39}{42} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42};$$

г) это выражение проще вычислить с помощью десятичных дробей:

1) $4 \frac{4}{25} + 2,59 = 4,16 + 2,59 = 6,75$; 2) $\frac{3}{4} - 0,15 = 0,75 - 0,15 = 0,6$;

3) $0,6 : 4 = 0,15$; 4) $6,75 : 0,15 = 675 : 15 = 45$; д) вычисления производим в обыкновенных дробях: 1) $\frac{7}{24} : 0,125 = \frac{7}{24} : \frac{1}{8} = 2 \frac{1}{3}$;

2) $2 \frac{1}{3} + 3,5 = 2 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{2} = 5 \frac{5}{6}$; 3) $\frac{2}{3} - 0,25 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$;

4) $5 \frac{5}{6} : \frac{5}{12} = \frac{35}{6} \cdot \frac{12}{5} = 14$; е) числитель вычислим с помощью десятичных дробей, а знаменатель — с помощью обыкновенных дробей;

$$\frac{1,05 + 0,16}{\left(7 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1,21}{4 \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1,21}{\frac{25}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1,21}{2,5} = \frac{1,21 \cdot 4}{2,5 \cdot 4} = 0,484;$$

ж) кроме обычного решения «по действиям» этот пример можно решить и так: пользуясь распределительным законом, каждое выражение, стоящее в скобках числителя, умножить на $\frac{2}{3}$, а знаменатель — разделить на $2 \frac{2}{3}$, или умножить на $\frac{3}{8}$:

$$\frac{4,5 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} - 6,75 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{5 - 4,5}{\frac{1}{4} + \frac{3}{8}} = 0,8;$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{12} - \frac{53}{24} + \frac{34}{18} - 1 \frac{2}{3} + \frac{7}{9} = -\frac{27}{24} + \left(\frac{17}{9} - 1 \frac{6}{9} + \frac{7}{9} \right) \cdot 4 = \\
 & \text{з) } \frac{0,415 - 0,54}{0,45 + 1,8} = \frac{-0,125}{2,25 \cdot 4} = \\
 & = \frac{9}{8} : \frac{1}{8} + \frac{4}{9} = 9 + \frac{4}{9} = 9 \frac{4}{9}; \text{ и) } 0; \text{ к) выражение не имеет смысла.}
 \end{aligned}$$

35. а) $[25,3] = 25$; $\{25,3\} = 25,3 - 25 = 0,3$; б) $[0,25] = 0$; $\{0,25\} = 0,25$; в) $[-5,3] = -7$; $\{-5,3\} = 0,7$.

Предостережение. Иногда ошибочно считают, что целой частью этого числа является -6 , а дробной $0,3$. Это неверно, так как $-6 > -6,3$, а по определению это должно быть наибольшее число, т.е. превосходящее $-6,3$. Во избежание таких ошибок удобно число $-6,3$ записать так: $-6,3 = -6 - 0,3 = -6 - 1 + 1 - 0,3 = -7 + 0,7$;

$$\begin{aligned}
 & \text{г) } [-10,5] = -11; \quad \{-10,5\} = 0,5; \quad \left[-\frac{5}{6} \right] = -1; \quad \left\{ -\frac{5}{6} \right\} = \frac{1}{6}. \\
 & 36. \quad y(-0,1) = -1 - 0,9 = -1,9; \quad y(-1,1) = -2 - 0,9 = -2,9; \\
 & y(-2,1) = -3 - 0,9 = -3,9.
 \end{aligned}$$

§ 4

37. 50 %; 25 %. 38. 1. $\frac{10}{100} = 0,1$; $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $\frac{0,1}{100} = 0,001$; 0,005;

33 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; $\frac{16}{100} = \frac{2}{6}$; $\frac{1}{100} = \frac{1}{6}$; $\frac{p}{100}$. 2. Чтобы выразить несколько процентов в виде дроби, надо данное число процентов разделить на 100.

Например, 12,5 % составляют $\frac{12,5}{100} = \frac{1}{8}$. 39. а) Чтобы найти 1 %

числа, достаточно разделить его на 100. Например, 1 % от 287 равен 2,87; б) чтобы найти 50 % числа, достаточно разделить данное число на 2. Например, 50 % от 1268 равно 634; в) разделить данное число на 4; г) разделить данное число на 8; д) умножить данное число на $\frac{3}{4}$; е) разделить данное число на 3. 40. а) Нужно к числу a прибавить 40 % от a , или $0,4a$, т. е. $a + 0,4a = 1,4a$; б) $a - 0,1a = 0,9a$. 41. Если выпуск продукции в 1980 г. принять за 100 %, то в 1982 г. выпущено ее 128 %, что от 90 млн. руб. составляет 115 млн.

200 тыс. руб., так как $\frac{90}{100} \cdot 128 = 90 \cdot 1,28 = 115,2$. 42. 1-й способ.

Пусть x — неизвестное число, 42 % этого числа равны 12,6; 1 % от x в 42 раза меньше, или $12,6 : 42$, а все неизвестное число, принимаемое за 100 %, в 100 раз больше, т. е. $x = (12,6 : 42) \cdot 100 = 30$.

2-й способ. По условию составим уравнение. Так как 1 % от x составляет $\frac{x}{100}$, то 42 % составят $\frac{x}{100} \cdot 42$, т. е. $0,42x$, поэтому $0,42x = 12,6$; $x = 12,6 : 0,42 = 30$. 3-й способ. Составим пропорцию:

$$12,6 - 42 \%$$

$$x - 100 \%, \text{ откуда } x \cdot 42 = 12,6 \cdot 100; x = 30.$$

43. По условию, 106 % сменного задания x равно 159, т. е. $1,06x = 159$, откуда $x = 150$. 44. Сперва находим 40 % от 33, получаем 13,2. Затем составляем уравнение, учитывая, что 10 % от неизвестного числа x равно 13,2; имеем $0,1x = 13,2$, откуда $x = 132$. 45. а) 1 %; б) 10 %; в) 200 %; г) 74 %. 46. 1-й способ. Пусть число комсомольцев составляет x %. По условию, x % от 60 составляет 42,

т. е. $60 \cdot \frac{x}{100} = 42$; $0,6x = 42$, откуда $x = 42 : 0,6 = 70$. Таким образом, комсомольцы составляют 70 % от числа рабочих.

2-й способ:

$$60 - 100 \%$$

$$42 - x \%, \quad 60x = 42 \cdot 100; \quad x = \frac{42 \cdot 100}{60} = 70.$$

47. 1-й способ. Так как x % от 240 составляют 288, или $\frac{240 \cdot x}{100} = 288$, то $x = \frac{288 \cdot 100}{240} = 120$. Производительность повысилась на 20 %, так как $120 - 100 = 20$.

2-способ:

$$240 - 100 \%$$

$$288 - x \%; \quad 240x = 288 \cdot 100; \quad x = 120.$$

48. а) 10 % от 50 % — это $\frac{1}{10}$ от 50 %, т. е. 5 %; б) 6,25 %.

49. На 16,6 %. Указание. Если в первом году выпущено 100 %, то во втором — 106 %, а в третьем — 110 % от 106 % = 106 % + 10 % от 106 % = 106 % + $\frac{1}{10}$ от 106 % = 116,6 %.

50. 1-й способ. Если емкость цистерны принять за 100 %, то 95 % — заполненная бензином емкость. Обозначим эту емкость через x , тогда

$$0,95x = 38; \quad x = 40.$$

Значит, для заполнения цистерны нужно долить 2 т бензина.

2-й способ. Можно эту задачу решить с помощью пропорции:

$$38 - 95 \%$$

$$x - 5 \%, \quad 95x = 38 \cdot 5; \quad x = 2.$$

51. В 10 л 30 %-ного раствора содержится $\frac{10 \cdot 30}{100} = 3$ л чистой

безводной кислоты; если прибавить 5 л воды, то получится 15 л раствора; следовательно, процентная концентрация полученного раствора будет 20 %, так как $3 \cdot 100 : 15 = 20$. 52. 1. На 100 %, ибо второе число больше первого в два раза. 2. Да. Пусть первоначальная цена товара a руб., тогда после первого снижения цен товар стал стоить 0,9а руб., а после второго снижения — 0,9 от 0,9а руб., т. е. 0,81а руб., или 81 % прежней цены. Если же снизить цену товара сразу на 20 %, то он стал бы стоить 80 % ($100\% - 20\% = 80\%$) прежней цены. Следовательно, он стал бы дешевле на 1 %.

§ 5

53. 1. Пусть истинна пропорция $a : b = c : d$. Обозначим левую часть этой пропорции через k , т. е. $a : b = k$ и $c : d = k$, откуда $a = bk$ и $c = dk$; найдем произведение крайних членов a и d : $ad = (bk)d = bdk$ и произведение средних членов b и c : $bc = b(dk) = bdk$. Отсюда видно, что $ad = bc$, так как оба эти произведения равны одному и тому же значению bdk . 2. $b = c$. 3. $c/d = m/n$. 54. Таких пропорций можно составить несколько: а) если 25 и 3 — крайние члены, 15 и 5 — средние, то $25 : 15 = 5 : 3$; б) $2 : 3 = b : a$;

- в) $a : m = n : b$; г) $x : a = b : x$. 55. а) Решаем устно: 19 больше 9,5 в два раза; следовательно, и 13 больше x в два раза; отсюда $x = 6,5$;
 б) $7,5x = 20,8 \cdot \frac{50}{13}$; $x = \frac{20,8 \cdot 50}{7,5 \cdot 13} = \frac{208 \cdot 50}{75 \cdot 13} = \frac{16 \cdot 2}{3 \cdot 1} = 10 \frac{2}{3}$;
 в) $7(x+1) = 8 \cdot 3,75$; $x+1 = \frac{30}{7}$; $x = 4 \frac{2}{7} - 1 = 3 \frac{2}{7}$; г) $2,6 : 1,3 = x : 5$; $x = 5 \cdot 2 = 10$; д) $2 : \frac{2}{5} = x : 0,1$; $0,4x = 0,2$; $x = 0,5$.

§ 6

56. 1. Прямая, на которой выбраны начало отсчета, единичный отрезок и направление, называется *координатной прямой*. 2. Число, показывающее положение точки на прямой, называется *координатой этой точки*. 4. Два числа, сумма которых равна нулю, называются *противоположными*. Так, числа 3 и -3 ; $-7,2$ и $7,2$; 0 и 0 — противоположные. Два противоположных числа изображаются на координатной прямой точками, симметричными относительно начала отсчета O . 57. *Периодической дробью* называется такая бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого места бесконечно повторяется одна и та же цифра или группа цифр, например $0,666\dots$; сокращенно эту дробь можно записать так: $0,(6)$ (читается «ноль целых и шесть в периоде») или $3,51313\dots$ сокращенно можно записать $3,5(13)$ (читается «три целых пять десятых и тринадцать в периоде»).

Последовательно повторяющаяся цифра или группа цифр в десятичной записи числа называется *периодом*. Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется *чисто периодической*, например $5,(23) = 5,2323\dots$. Если между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называется *смешанно-периодической*, например $2,5(18) = 2,51818\dots$. 58. Модуль положительного числа равен самому этому числу, модуль нуля равен нулю, модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

59. а) $x = 6$ и $x = -6$, множество решений этого уравнения можно записать так: $\{-6; 6\}$; б) $\{-8,5; 8,5\}$; в) $\{0\}$; г) $\emptyset$; д) 1-й способ. Расстояние точки с координатой x до точки с координатой 3 равно 2; откладываем от второй точки по обе стороны от координатной оси две единицы, получим $x = 5$, $x = 1$. 2-й способ. Так как $x - 3 = 2$ и $x - 3 = -2$, то $x = 5$, $x = 1$; $\{1; 5\}$; е) $\{-5; -1\}$. Указание. Расстояние от точки с координатой -3 равно 2, т. е. $|x - (-3)| = 2$. 60. а) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; б) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. 61. а) $-0,5$; б) $46,5$; в) $46,5$; г) $0,5$.

§ 7

62. При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда отбрасывают все цифры, следующие за этим разрядом.

Если первая отбрасываемая цифра 5 или более 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу. Если первая отбрасываемая цифра менее 5, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют. Например, если $6,419$ округлить до единицы, то получим $6,419 \approx 6$.

(с недостатком). Если 36,824 округлить до десятых, получим $36,824 \approx 36,9$ (с избытком). Если 5675 округлить с точностью, не превосходящей 10, то получим $5675 \approx 5680$. 63. 1. *Погрешностью приближения* называется разность точного и приближенного значений величины. Если, например, известно, что точное значение некоторой величины $x=6,34$, приближенное значение числа x с недостатком $a=6,3$, приближенное значение числа x с избытком $b=6,4$, то погрешность приближения с недостатком $x-a=6,34-6,3=0,04$; погрешность приближения с избытком $x-b=6,34-6,4=-0,06$. Погрешность приближения с недостатком положительна, погрешность приближения с избытком отрицательна. 2. *Абсолютной погрешностью приближения* называется модуль разности точного и приближенного значений величины. В приведенном примере абсолютная погрешность $|x-a|=|6,34-6,3|=0,04$ (с недостатком), $|x-b|=|6,34-6,4|=0,06$ (с избытком). Лучшим из этих двух приближений является приближение с недостатком, оно меньше отличается от x ($0,04 < 0,06$). 3. *Относительной погрешностью приближения* называется отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины. Например, в приведенном примере относительная погрешность $\frac{|x-a|}{|a|} = \frac{|6,34-6,3|}{6,3} = \frac{0,04}{6,3} \approx 0,006$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах, в нашем примере она равна 0,6 %. 64. а) $4,36 \approx 4,4$; $x=4,36$; $a=4,4$. Абсолютная погрешность $|x-a|=|4,36-4,4|=0,04$; относительная погрешность $\frac{|x-a|}{|a|} = \frac{0,04}{4,4} = \frac{1}{110} \approx 1\%$; б) $0,825 \approx 0,8$; $|x-a|=0,025$; $a=0,8$; $\frac{|x-a|}{|a|} = \frac{0,025}{0,8} = \frac{1}{32} \approx 3\%$. 65. а) $16,8-0,5 \leq x \leq 16,8+0,5$; $16,3 \leq x \leq 17,3$; б) $0,25 \leq x \leq 0,55$. 66. Если абсолютная погрешность приближения не превышает h , т. е. если $|x-a| \leq h$. 67. а) Найдем абсолютную погрешность приближения:

$$\left| \frac{3}{11} - \frac{27}{100} \right| = \left| \frac{300-297}{1100} \right| = \frac{3}{1100};$$

$\frac{3}{1100} < \frac{1}{100}$, так как $\frac{3}{1100} < \frac{11}{1100}$, поэтому неравенство $\left| \frac{3}{11} - 0,27 \right| \leq 0,01$ истинно; б) $\left| \frac{2}{3} - \frac{6}{10} \right| = \left| \frac{1}{15} \right| < 0,1$. 68. Приближенные значения чисел записывают так, чтобы все цифры в записи были верными, т. е. чтобы абсолютная погрешность приближения не превосходила единицы последнего оставляемого разряда. Например, запись $x \approx 7,6$ означает, что абсолютная погрешность не превышает 0,1, или $x=7,6 \pm 0,1$. Запись $x \approx 7,63$ означает, что абсолютная погрешность не превышает 0,01. 69. а) 0,01; б) 0,001; в) 0,1; г) 0,01; д) 1. 70. В первом случае измерение выполнено с точностью до 1 мм, во втором — до 0,1 мм, а в третьем — до 0,01 мм. 71. Пусть P — периметр прямоугольника, S — площадь, $S=xy$; имеем:

$$6,3 \leq x \leq 6,5$$

$$2,3 \leq y \leq 2,5$$

$$8,6 \leq x+y \leq 9$$

$$17,2 \leq 2(x+y) \leq 18$$

$$P=17,6 \pm 0,4;$$

$$6,3 \cdot 2,3 \leq xy \leq 6,5 \cdot 2,5$$

$$14,49 \leq xy \leq 16,25$$

$$14 \leq xy \leq 16$$

$$S=15 \pm 1$$

(при нахождении S нижняя граница заменена на 14, а верхняя — на 16). 72. В числе 2,6 один десятичный знак, две значащие цифры; 26 — ни одного десятичного знака, две значащие цифры; 0,26 — два десятичных знака, две значащие цифры; 0,206 — три десятичных знака, три значащие цифры; 2,060 — три десятичных знака, четыре значащие цифры; 0,0026 — четыре десятичных знака, две значащие цифры. 73. а) Выделяем наименее точное слагаемое — это 1,3. Оно имеет наименьшее число верных десятичных знаков. Округляем второе и третье слагаемые до сотых (на один десятичный знак больше, чем в выделенном слагаемом): $12,341 \approx 12,34$; $0,4764 \approx 0,48$. Находим сумму $1,3 + 12,34 + 0,48 = 14,12$, результат округлим до десятых, т. е. оставляем столько десятичных знаков, сколько их было в наименее точном слагаемом, тогда $x + y + z \approx 14,1$; б) выделим множитель с наименьшим числом значащих цифр — 0,64, округлим 12,26 так, чтобы в нем осталось на одну значащую цифру больше (одна цифра запасная); $12,26 \approx 12,3$, тогда $12,3 \cdot 0,64 = 7,872$. Округлим результат до двух значащих цифр (оставляем столько значащих цифр, сколько их было в множителе (0,64)): $7,872 \approx 7,9$; окончательно $ab \approx 7,9$; в) $a : b \approx 3,6$; $1,39 \approx 2,59 \approx 2,6$.

§ 8

74. 1. Областью определения выражения называется множество значений переменных, при которых это выражение имеет смысл. Например, выражение $x^2 + 1$ имеет смысл при любом значении x .

Выражение $\frac{3a}{a-3}$ имеет смысл лишь тогда, когда знаменатель отличен от нуля, поэтому область определения этого выражения есть множество всех чисел, кроме 3. Область определения выражения

$\frac{x}{2x-y}$ — множество пар $(x; y)$, в которых $y \neq 2x$. 2. а) $x \neq 5$;

б) $a \neq -2$; в) $x \neq y$. 75. а) $a^0 = 1$, если $a \neq 0$ или всякое число (кроме

нуля) в нулевой степени равно единице. Например, $5^0 = 1$; $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$.

Выражение 0^0 не имеет смысла; б) $a^{-n} = 1/a^n$, где $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 0$. Например, $10^{-3} = 1/10^3 = 0,001$; $(-2)^{-2} = 1/(-2)^2 = 1/4$;

$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = 1/\left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{4}{3}$. Запись 0^{-n} не имеет смысла. 76. 1. До-

кажем, что $a^3 a^2 = a^{3+2} = a^5$. Действительно, $a^3 a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) =$

$aaaaa = a^5$. 2. а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание степени оставляют прежним, а показатели складывают;

б) при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя делимого вычитают показатель степени

делителя; в) при возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают; г) n -я степень произведения

равна произведению n -х степеней множителей; д) n -я степень дроби равна n -й степени числителя, деленной на n -ю степень знаменателя.

77. а) $4 \cdot 3 - (-1)^3 \cdot 2^2 = 16$; б) $(4 \cdot 3 - (-1)^3 \cdot 2)^2 = 196$; в) $(4 \cdot 3 - (-1)^3) \times$

$\times 2^2 = 52$; г) 1024; д) $4(3 - (-1)^3 \cdot 4) = 28$; е) $4(3 - (-1)^3 \cdot 2)^2 = 100$;

ж) $4(3 - (-1)^3)^2 \cdot 2^2 = 64$. 78. а) $\frac{0,5 \cdot 4^2 + (0,5 \cdot 4)^2}{5(4 + (-1))^2 - (2 \cdot 4 + (-1))^2} =$

$= \frac{0,5 \cdot 16 + 2^2}{5 \cdot 3^2 - 7^2} = \frac{12}{-4} = -3$; б) здесь удобнее заменить $-0,25$ на

$-1/4$, тогда

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + 2^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{5}{8} = -0,625;$$

$$\frac{\left(1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 : \left(2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)}{\frac{9}{4} : \frac{9}{4}} = \frac{5}{8} = -0,625;$$

$$в) \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{17}{18}\right)^2}{-\frac{2}{9} - \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{12} - \frac{17}{6} - \frac{33}{12}}{-\frac{2}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{-\frac{33}{4}}{-\frac{3}{9}} = \frac{33}{4} = 8,25; г) |-3 - 2,5| + |3,5 - (-3)| - |-3 + 2| =$$

$$= 5,5 + 6,5 - 1 = 11; д) 10 \cdot (-0,4)^2 - 5 \cdot |-0,4| + 1 = 1,6 - 2 + 1 = 0,6.$$

79. 1. а) Для того чтобы получить число $1 \leq a < 10$, в записи 0,00764 ставим запятую между цифрами 7 и 6 и отбрасываем нули левее цифры 7. Получим десятичную дробь 7,64 — этим самым данное число увеличено в 10^3 раз. Чтобы исходное число не изменилось, нужно его разделить на 10^3 , получим $0,00764 = 7,64 : 10^3 = 7,64 \cdot 10^{-3}$; порядок числа $n = -3$; б) $0,02 = 2 : 100 = 2 \cdot 10^{-2}$; в) $17\,000 = 1,7 \cdot 10^4$; г) $\approx 0,333 \cdot 10^{-3} = 3,33 \cdot 10^{-4}$. 2. а) $(4,8 \cdot 1,5) \cdot 10^{-4+8} = 7,2 \cdot 10^4$; б) $(2,4 \cdot 12,5) \cdot 10^2 = 30 \cdot 10^2 = 3 \cdot 10^3$. 80. а) Эти выражения тождественно равны на множестве всех чисел, кроме нуля; б) выражения тождественно равны при $x \neq -y$. 81. а) Достаточно привести одно значение x , при котором значения выражений не равны, например при $x = 1$ получаем $1^2 + 1 \neq 1^3$; б) при $a = 1$ имеем $(1 + 5)^2 \neq 1^2 + 25$; в) при $x = 1$ находим $-x^3 = -1^3 = -1$, а $-x^3 = -1^3 = -1$.

§ 9

82. 1. *Степенью одночлена*, содержащего несколько переменных (букв), называется сумма показателей степеней этих переменных. Например, одночлен $6a^2b^3$ имеет пятую степень, так как сумма показателей при переменных равна пяти. Степень одночлена $3ab$ равна двум. Всякое число является одночленом. Степень такого одночлена равна нулю. Например, число 5 можно представить как $5a^0$ или $5a^0b^0$ — степень каждого такого одночлена равна нулю.

Степенью многочлена называется степень его старшего члена. Например, степень многочлена $5a^3 - 2a^2 + 4a - 1$ равна трем. 2. *Стандартным* называется такой одночлен, если его числовой множитель (коэффициент) расположен на первом месте, а произведение одинаковых переменных представлено степенью. Например, $6x^3y^2$, $-7c^2$ — одночлены стандартного вида.

Многочлен имеет стандартный вид, если все его одночлены записаны в стандартном виде и нет подобных членов. Например, многочлен $6a^3 + 4a^3 - 0,2a^2 + 9a - 2$ имеет стандартный вид. 83. а) Применяем правило раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак минус, то скобки можно опустить, изменив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки; если перед скобками стоит знак плюс, то скобки можно опустить, сохранив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки, получим $-2a^2 + 3b + 4b + 6a^2 - 1 = 4a^2 + 7b - 1$; б) $0,25x^2 + 1,75x - 3$. 84. а) $6,3x^2y - 2,4xy + 2y^3 + 3,7x^2y - 6,6xy - 2y^3 = 10x^2y - 9xy$; при $x = 1$, $y = 5$ это выражение равно $10 \cdot 1^2 \cdot 5 - 9 \cdot 1 \cdot 5 =$

$=50-45=5$; б) $5a^2-3ab+a^2-5ab-6a^2=2ab$; при $a=0,4$, $b=-0,5$ это выражение равно $-0,4$; в) $9x^3-8x^3+1-2x^3=-x^3+1$; $-(-0,5)^3+1=0,125+1=1,125$. 85. а) $5^{(x+2)+(x-1)-(2x-1)}=5^2=25$; б) $0,2 \cdot 3^{(x-2)-(x-5)} \cdot 4^{(x-1)-(x-2)}=0,2 \cdot 3^2 \cdot 4=7,2$; в) $120 \cdot 5^2=3000$. 86. а) $5x^2-20xy-10y^2+20xy=5x^2-10y^2$; б) $5 \cdot (-0,2)^2-10 \cdot (-0,5)^2=-0,2-2,5=-2,3$; в) a^2+2a-b^2-b ; $\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}$; г) $mn-2n^2$; 0,4 $\cdot (-0,6)-2 \cdot (-0,6)^2=-0,24-0,72=-0,96$. 87. $(2a-3b)(4a+0,5b)-a(8a-11b)=8a^2+ab-12ab-1,5b^2-8a^2+11ab=-1,5b^2$; при любом b $b^2 \geq 0$ и $-1,5b^2 \leq 0$.

§ 10

88. а) $a^2-0,01$; б) $2,25x^4-9y^6$; в) $(a^2/4-9b^2)(a^2/4+9b^2)=a^2/16-81b^2$; г) $a^{2x}+2+a^{-2x}$; д) $(3^m-3^{m-1})^2=(3^m+(-3^{m-1}))^2=(3^m)^2+2 \cdot 3^m \cdot (-3^{m-1})+(-3^{m-1})^2=3^{2m}-2 \cdot 3^{m+m-1}+3^{2m-2}=3^{2m}-2 \cdot 3^{2m-1}+3^{2m-2}$; е) $((a+b)(a-b))^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$; ж) $(2a+1)^3+(2a-1)^3=((2a)^3+3(2a)^2 \cdot 1+3(2a) \cdot 1^2+1^3)+((2a)^3+3(2a)^2(-1)+3(2a)(-1)^2+(-1)^3)=16a^3+12a$; з) x^3-1 . 89. а) $99 \cdot 101=(100-1) \cdot (100+1)=100^2-1^2=9999$; б) $20,1 \cdot 19,9=(20+0,1) \cdot (20-0,1)=399,99$; в) $899,75$; г) $(30+1)^2=30^2+2 \cdot 30 \cdot 1+1^2=961$; д) $(100-2)^2=9604$; е) $(10-0,1)^2=98,01$. 90. а) $(4a^2-12a+9)-(4a^2+6a)=-18a+9=9(-2a+1)$; б) $9(-2 \cdot 2,5+1)=-36$; в) $(9x^2-6x+1)-(9x^2+4,5x-2x-1)=9x^2-6x+1-9x^2-4,5x+2x+1=-8,5x+2$; г) $-8,5 \cdot 0,2+2=0,3$. 91. Данное выражение равно $24n$, оно делится на 24 при любом натуральном n .

§ 11

92. а) Выносим за скобку общий множитель $6a^2b$. Чтобы узнать, что следует записать в скобках, надо каждый член данного многочлена разделить на $6a^2b$, т. е. $12a^3b:6a^2b=2a$; $18a^2b^2:6a^2b=3b$; $6a^2b:6a^2b=1$; итак, $12a^3b-18a^2b^2+6a^2b=6a^2b(2a-3b+1)$. Предостережение. При решении подобных примеров невнимательные учащиеся иногда забывают записать в скобке последнее слагаемое — единицу; б) $5x^4(3x^2-2x+1)$; в) предварительно заключим последние два члена в скобки, тогда общим множителем будет двучлен $(x-2y)$, при вынесении за скобки этот общий множитель также заключают в скобки и делят каждый член данного многочлена на $(x-2y)$, тогда $3a(x-2y)+5b(x-2y)+(x-2y)=(x-2y)(3a+5b+1)$; г) $5x \times (2a-3)-3y(2a-3)-(2a-3)=(2a-3)(5x-3y-1)$. 93. 1. Разделим каждый член данного многочлена на 5, получим $5\left(a+\frac{3}{5}b-\frac{2}{5}c\right)$. 2. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. 3. $9x-3y+2=\frac{1}{2}(18x-6y+4)$. 94. а) Представим данный многочлен в виде суммы двух двучленов: $(ax+ay)+(bx+by)$, вынесем в первом двучлене за скобки a , а во втором b , получим $a(x+y)+b(x+y)$. Теперь вынесем за скобки общий множитель $(x+y)$, тогда $ax+ay+bx+by=(x+y)(a+b)$. Тот же многочлен можно было разложить на множители, группируя его члены иначе: $(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(a+b) \times (x+y)$; б) $ac+bc+a+b=c(a+b)+1 \cdot (a+b)=(a+b)(c+1)$; в) $a^3+a^2b-ab^2-b^3=a^2(a+b)-b^2(a+b)=(a+b)(a^2-b^2)=(a+b)^2 \times (a-b)$. 95. а) $(0,2a)^2-3^2=(0,2a-3)(0,2a+3)$; б) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}\right) \times$

$\times \left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)$; в) $(a+4-5)(a+4+5) = (a-1)(a+9)$; г) $x^2(3x-1) - 9(3x-1) = (3x-1)(x^2-9) = (3x-1)(x-3)(x+3)$; д) $(2a-a+1) \times (2a+a-1) = (a+1)(3a-1)$; е) $(a+b)^2 - (a+c)^2 = (a+b-a-c) \times (a+b+a+c) = (b-c)(2a+b+c)$; ж) $x^3+3^3 = (x+3)(x^2-3x+9)$; з) $a^3-0,5^3 = (a-0,5)(a^2+0,5a+0,25)$. 96. а) Значение выражения $(4a+3)^2$ при $a = -\frac{3}{4}$ равно нулю; б) $((x+6)+(x-1))^2 = (2x+5)^2$, при $x = -0,5$ это выражение равно 16. 97. а) $(113-112) \cdot (113+112) = 225$; б) 0,454; в) $2\frac{1}{3}$; г) $(26+14)^2 = 1600$; д) 400.

§ 12

98. а) При $x=0$ и при $x=-3$; б) при $a=1/2$ и при $a=-1/2$.
 99. а) $\frac{a-2}{2-a} = -\frac{a-2}{a-2} = -1$; б) $\frac{(a-b)^2}{b^2-a^2} = \frac{(b-a)^2}{(b-a)(a+b)} = \frac{b-a}{a+b}$;
 в) $\frac{1}{1-x}$; г) $\frac{m(m^2-1)}{(m-1)^2} = \frac{m(m+1)}{m-1}$; д) $\frac{a^2-(b^2+c^2+2bc)}{(a^2+b^2-2ab)-c^2} = \frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} =$
 $= \frac{(a-b-c)(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} = \frac{a-b-c}{a+b-c}$; е) $\frac{(ab-a)-(b-1)}{(b-bc)-(1-c)} = \frac{(a-1)(b-1)}{(1-c)(b-1)} =$
 $= \frac{a-1}{1-c}$. 100. а) $\frac{(x-y)^2}{y(x-y)} = \frac{x-y}{y}$, при $x = -0,5$ и $y = -1,5$ получаем
 $-2/3$; б) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = a+b-c$; $0,25+0,5-$
 $-(-0,5) = 1,25$. 101. а) $\frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{3(3-x)} = \frac{1}{x(x-3)} - \frac{1}{3(x-3)} =$
 $= \frac{3-x}{3x(x-3)} = -\frac{x-3}{3x(x-3)} = -\frac{1}{3x}$; $-\frac{1}{3\left(-1\frac{1}{3}\right)} = 0,25$; б) $\frac{2^{12}}{a(4-a^2)} +$
 $+\frac{-a^{12}}{2(4-a^2)} = \frac{4-a^2}{2a(4-a^2)} = \frac{1}{2a}$; при $a = -0,1$ это выражение равно
 -5 ; в) -11 . Указание. $\frac{x-x^3}{x^2-1} = -x$, $\frac{x^2}{0,2} = 5x^2$, $\frac{x+x:0,1}{x} =$
 $= \frac{x(1+1:0,1)}{x} = 11$. 102. а) $\frac{5a^{12-b}}{a+b} - \frac{2a-3b^{12+b}}{a-b} - \frac{2a^2-6ab+2b^{12}}{a^2-b^2} =$
 $= \frac{5a(a-b)-(2a-3b)(a+b)-1 \cdot (2a^2-6ab+2b^2)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} =$
 $= \frac{a+b}{a-b}$; б) 1) $\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{y}{2x-2y} = \frac{xy^{12}}{(x-y)(x+y)} - \frac{y^{12+y}}{2(x-y)} =$
 $= \frac{2xy-y(x+y)}{2(x-y)(x+y)} = \frac{xy-y^2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{y}{2(x+y)}$, 2) $\frac{y}{2(x+y)} : \frac{2y}{x^2-y^2} =$
 $= \frac{y(x^2-y^2)}{2(x+y)2y} = \frac{x-y}{4}$; 3) $\frac{x-y}{4} - \frac{x-5y}{4} = y$; в) здесь удобнее восполь-

зываться распределительным законом умножения; учитывая, что $(b-a)^2 = (a-b)^2$, получаем $\frac{a}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)^2}{a} - \frac{a}{b^2-a^2} \cdot \frac{(b-a)^2}{a} + \frac{2b}{a+b} =$
 $= 1 - \frac{b-a}{a+b} + \frac{2b}{a+b} = 1 + \frac{a-b+2b}{a+b} = 2$; г) $\left(\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1} \right) : \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2x(x-1) + 2(x+1) - 4x}{(x-1)(x+1)} : \frac{2(x-1)}{x+1} =$
 $= \frac{(2x^2-4x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1) \cdot 2(x-1)} = \frac{2(x-1)^2(x+1)}{2(x-1)^2(x+1)} = 1$; д) 0 ; $\left(\frac{x}{6(x+y)} + \frac{y}{6x} \right) \times$
 $\times \frac{x^2-y^2}{x^2y^2} - \frac{1}{6y^2} + \frac{y}{6x^3} = \frac{(x^2+xy+y^2)(x^2-y^2)}{6x(x+y) \cdot x^2y^2} - \frac{1}{6y^2} + \frac{y}{6x^3} =$
 $= \frac{(x^2+xy+y^2)(x-y)}{6x^3y^2} - \frac{1}{6y^2} + \frac{y}{6x^3} = \frac{x^3-y^3}{6x^3y^2} - \frac{1}{6y^2} + \frac{y}{6x^3} = \frac{x^3}{6x^3y^2} -$
 $- \frac{y^3}{6x^3y^2} - \frac{1}{6y^2} + \frac{y}{6x^3} = 0$; е) $\frac{(a-1)^2 - (a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{a^2+a+1}{a} = \frac{-3a}{a(a-1)} =$
 $= \frac{3}{1-a}$; ж) 1) $\frac{5x+9}{(5x+1)^2} - \frac{10x}{25x^2-1} = \frac{(5x+9)(5x-1) - 10x(5x+1)}{(5x+1)^2(5x-1)} =$
 $= \frac{-(5x-3)^2}{(5x+1)^2(5x-1)}$; 2) $\frac{20x}{1-5x} + \frac{(10x+2)^2}{(5x-3)^2} \cdot \frac{(5x-3)^2}{(5x+1)^2(5x-1)} = \frac{20x}{1-5x} +$
 $+ \frac{(2(5x+1))^2(5x-3)^2}{(5x-3)^2(5x+1)^2(5x-1)} = \frac{20x}{1-5x} + \frac{4}{5x-1} = \frac{20x-4}{1-5x} = \frac{4(5x-1)}{1-5x} =$
 $= -4$; з) если $x > 1$, то $|x-1| = x-1$, и данное выражение равно $\frac{x-1+x}{2x-1} - \frac{x-1}{x-1} = 1-1=0$. Если $x < 1$, но $x \neq 1/2$ (при $x=1/2$ знаменатель первой дроби обращается в ноль), то $|x-1| = 1-x$, и тогда $\frac{1-x+x}{2x-1} - \frac{1-x}{x-1} = \frac{1}{2x-1} + 1 = \frac{1+2x-1}{2x-1} = \frac{2x}{2x-1}$; и) если $a > 3$, то $|a-3| = a-3$, $|a| = a$ и тогда $\frac{a(a-3)}{a} = a-3$; если $0 < a < 3$, то $|a-3| = 3-a$, $|a| = a$ и тогда $\frac{a(3-a)}{a} = 3-a$; если $a < 0$, то $|a-3| = 3-a$, $|a| = -a$ и тогда $\frac{a(3-a)}{-a} = a-3$.

§ 13

103. 1. При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла, ибо не существует числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу. При $a=0$ $\sqrt{a}$ имеет смысл: $\sqrt{0}=0$. При $a > 0$ $\sqrt{a}$ имеет смысл. Таким образом, выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geq 0$. 2. При $a=1, 4, 9, \dots, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{16}{25}$ выражение $\sqrt{a}$ — рациональное число, оно выражается бесконечной десятичной периодической дробью; при $a=2, 3, 5$ и т. д. $\sqrt{a}$ — иррациональное число, оно выражается бесконечной десятичной непериодической дробью, приближенные значения этих дробей находят с помощью графика функции $y=\sqrt{x}$ или с помощью таблиц (Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы. Таблица IV).

К иррациональным числам относят и число $\pi = 3,14159\dots$. Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел, которое обозначают буквой R . 104. По определению арифметического квадратного корня, $\sqrt{a}$ при $a \geq 0$ — число, квадрат которого равен a , значит на множестве неотрицательных чисел $(\sqrt{a})^2 = a$. 105. Нет. Это равенство справедливо лишь при $a \geq 0$. При любом $a < 0$ справедливо равенство $\sqrt{a^2} = -a$.

Предостережение. Некоторые ошибочно считают, что $-a$ — отрицательное число, в то время как $-a$ при $a < 0$ — положительное. Например, если $a = -3$, то $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3$. Если знак числа a неизвестен, то пишут $\sqrt{a^2} = |a|$. 106. а) При $a \in]-\infty; 0]$; б) при $x = 0$; в) при $a \in [1,5; \infty[$; г) при $x \in]-\infty; -3]$. 107. $\frac{a^2 - 5}{a - \sqrt{5}} = \frac{(a - \sqrt{5})(a + \sqrt{5})}{a - \sqrt{5}} = a + \sqrt{5}$. 108. Если n — нечетное число, то

$\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a . Например $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$. Если n — четное число, то $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$. Например, $\sqrt[4]{16}$ имеет смысл — это выражение равно как 2 (арифметический корень), так и -2 , $\sqrt[4]{0} = 0$; $\sqrt[4]{-16}$ не имеет смысла. 109.

$(\sqrt[n]{a})^n = a$ по определению корня n -й степени из числа a . Это равенство справедливо лишь тогда, когда $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл. Например, $(\sqrt[3]{-27})^3 = -27$. Равенство $(\sqrt[4]{-81})^4 = -81$ ложно, ибо $\sqrt[4]{-81}$ не имеет смысла. 110. а) $x \leq 0$; б) при любых значениях x ; в) $x \leq 0$; г) при любых значениях x . 111. а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$, так как $\sqrt{5} > 2$;

б) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$, так как $1 < \sqrt{2}$; в) $\sqrt{7}-\sqrt{6}$. 112. $\sqrt{(2a-1)^2+3a} = |2a-1|+3a = |2 \cdot 0,2-1|+3 \cdot 0,2 = |-0,6|+0,6 = 1,2$. 113. См.: Алгебра 8, с. 111. 114. а) $\sqrt[3]{\sqrt{30}+\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{30}-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{30})^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{27} = 3$; б) $\sqrt[5]{(3\sqrt{2})^3-(\sqrt{17})^2} =$

$= \sqrt[5]{1} = 1$; в) $\sqrt[4]{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5} \cdot 1+1^2} \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5-2\sqrt{5}+1} \times \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}} = \sqrt[4]{6^2-(2\sqrt{5})^2} = 2$. 115. а) $\sqrt{(3 \cdot 7)(4 \cdot 7)(3 \cdot 4)} =$

$= \sqrt{3^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$; б) $\sqrt[3]{(2^4)(2^2 \cdot 3^2)(3^4)} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$;

в) $\sqrt[3]{(313-312) \cdot (313+312)} \cdot \sqrt[3]{(13-12) \cdot (13+12)} = \sqrt[3]{1 \cdot 625} \cdot \sqrt[3]{1 \cdot 25} = \sqrt[3]{5^4 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^6} = 25$; г) $\sqrt[3]{27 \cdot 8} - \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} =$

$= 6 - 2 = 4$; д) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{81} - \sqrt[5]{16 \cdot 81} = \sqrt[5]{3^4 \cdot 3} - \sqrt[5]{2^4 \cdot 3^4} = 3 - 6 = -3$. 116. а) $\sqrt{-5y^3} = \sqrt{-5y^2y} = |y| \sqrt{-5y} = -y \sqrt{-5y}$, так как при $y < 0$ $|y| = -y$; б) $3\sqrt[3]{a}$; в) $\sqrt[4]{3^4x^4x^2} = 3|x| \sqrt[4]{x^2} = -3x \sqrt{-x}$.

117. а) $x\sqrt{2} = -(-x)\sqrt{2} = -\sqrt{2(-x)^2} = -\sqrt{2x^2}$; б) выражение имеет смысл, если $a < 0$, поэтому $a\sqrt{-3/a} = -\sqrt{a^2(-3/a)} = -\sqrt{-3a}$.

118. а) $\sqrt[6]{16} \sqrt[6]{a^4} \sqrt[6]{b} = 2|a| \sqrt[6]{b}$, при $a = -0,5$, $b = 1$ это выражение равно 1; б) $\sqrt[6]{10a^6a^3b^6} = |ab| \sqrt[6]{10a^3}$, при $a = 2$ и $b = -2$ это выражение равно $4\sqrt[6]{80}$. 119. а) $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, поэтому $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$; в) $2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2}} =$

$=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{16^3}=\sqrt[3]{256}$; $\sqrt[3]{7\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{49}\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{147}}=\sqrt[3]{147}$,
 $\sqrt[3]{256}>\sqrt[3]{147}$, поэтому $2\sqrt{2}>\sqrt[3]{7\sqrt{3}}$; г) предположим, что $\sqrt{14}>$
 $>\sqrt{3}+2$, обе части этого положительного неравенства возведем
в квадрат, тогда $14>3+4\sqrt{3}+4$ или $7>4\sqrt{3}$; снова возведем
обе части этого неравенства в квадрат, получим истинное неравенство
 $49>48$; следовательно, $\sqrt{14}>\sqrt{3}+2$. 120. а) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

б) $\frac{x-\sqrt{xy}}{y-\sqrt{xy}}=\frac{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}\sqrt{y}}{(\sqrt{y})^2-\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}=-\sqrt{\frac{x}{y}}=$
 $=-\frac{1}{y}\sqrt{xy}$. 121. а) $\frac{15}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$; б) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}}=$

$=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{2}$; в) умножим числитель и знаменатель этой дроби
на $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, тогда в знаменателе получится рациональное число:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=2(\sqrt{3}+\\ +\sqrt{2})\approx 2(1,73+1,41)\approx 6,28; \text{ г) } 2(\sqrt{10}+\sqrt{3}); \text{ д) } (3\sqrt{2}+4)/2.$$

122. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\cdot(\sqrt{2}+1)-1\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1^2}=2$; б) $8\sqrt{5}$;

в) $(16-8\sqrt{3}+3)(19+8\sqrt{3})-(9+4\sqrt{2})(1-4\sqrt{2}+8)=(19^2-\\ -(8\sqrt{3})^2)-(9^2-(4\sqrt{2})^2)=(361-192)-(81-32)=169-49=120;$

г) $\frac{(2-6\sqrt{2}+9)\cdot(11+6\sqrt{2})}{2(9+4\sqrt{2})\cdot(2-8\sqrt{2}+16)}=\frac{11^2-(6\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(9^2-(4\sqrt{2})^2)}=\frac{121-72}{4\cdot(81-32)}=\\ =\frac{49}{4\cdot 49}=0,25.$

§ 14

123. а) $(10^3)^{\frac{1}{3}}\cdot((0,1)^4)^{\frac{1}{4}}+((0,3)^3)^{\frac{1}{3}}\cdot 1-\left(\frac{13}{10}\right)^1=10\cdot 0,1+0,3-\\ -1,3=0$; б) $\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\left(\frac{100}{9}\right)^{-0,5}+(2,5^2)^{0,5}:\frac{1}{(-4)^1}=\left(\left(\frac{4}{3}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}}:\left(\left(\frac{10}{3}\right)^2\right)^{-0,5}+\\ +2,5\cdot(-4)=\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{10}{3}\right)^{-1}+2,5\cdot(-4)=\frac{9}{16}:\frac{3}{10}-10=1\frac{7}{8}-10=\\ =-8\frac{1}{8}=-8,125$. 124. а) $a^{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}}$; б) $a^{\frac{4}{9}\cdot(-3)+\frac{1}{6}\cdot(-2)}=$
 $=a^{-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{5}{3}}$. 125. а) $\left(2a^{\frac{1}{2}}-5\right)^2+20a^{\frac{1}{2}}=4a+25$, при $a=1,2$

получаем 29,8; б) 45. 126. а) $\frac{a-9a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}-3a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-9\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}-3\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^2-3^2}{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}-3} =$

$$= a^{\frac{1}{4}}+3; \quad \text{б)} \quad \frac{x-36x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-36\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-6\right)} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-6^2}{x^{\frac{1}{3}}-6} = x^{\frac{1}{3}}+6.$$

$$127. \text{ а)} \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}\right)} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)} \right) \frac{b-a}{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)-b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{b-a}{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2b(b-a)}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a} =$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{a}; \quad \text{б)} \left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}+b^{\frac{1}{4}}\right)} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}-b^{\frac{1}{4}}\right)} =$$

$$= \frac{(a-b)-a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}+b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}-b^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a-b-a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-b^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}; \quad \text{в)} \quad \frac{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^3-\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^3}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^3+\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^3}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}} = \frac{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{b^{\frac{2}{3}}}\right)}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{b^{\frac{2}{3}}}\right)}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}} = 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}; \quad \text{г)} \quad \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{y^{\frac{2}{3}}}} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{y^{\frac{2}{3}}}} = \left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)-\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right) = -2y^{\frac{1}{3}}.$$

§ 15

128. Функцию можно задать следующими тремя способами.
1-й способ. Путем перечисления всех пар чисел для функций, область определения которых есть конечное множество, например $\{(0; 0)\}$.

(1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16), (5; 25)). Это же множество пар можно записать в таблице, где один столбец образует область определения функции $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, а другой — область значений функции $\{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$. Табличными значениями функций часто пользуются на практике (таблицы квадратов, квадратных корней, кубов и др.). 2-й способ. Числовые функции удобно задавать в виде формул с двумя переменными. Например, сумма (S) углов выпуклого многоугольника в зависимости от числа n его сторон выражается формулой $S = 180^\circ(n-2)$ ($n \in N$ и $n \geq 3$). Такой способ задания функции называется *аналитическим способом*. 3-й способ. От задания функции путем перечисления пар (таблицей) или формулой часто переходят к заданию функции *графиком*, например график температуры больного или график роста ребенка в зависимости от его возраста.

129. 1. Для нахождения области определения функции надо ее график спроецировать на ось Ox ; если же этот график спроецировать на ось Oy , то получится множество значений функции. На рис. 70, а изображена функция, область определения которой — отрезок $[-2; 5]$ и множество значений — отрезок $[3; 9]$. 2. Не всякое. Если каждой абсциссе соответствует единственная ордината, то соответствие, заданное графиком, есть функция. На рис. 70, а соответствие f , график которого — кривая AB , — функция. На рис. 70, б — соответствие g , график которого — кривая CD , не является функцией, ибо на графике имеются точки, у которых одна и та же абсцисса имеет различные ординаты. Например, точки с абсциссой $x=4$ имеют три различные ординаты: $y_1=3$, $y_2=6$, $y_3=9$, а точки с абсциссой $x=6$ — две раз-

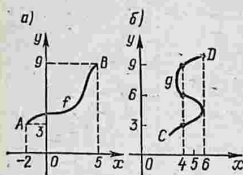


Рис. 70

личные ординаты: $y_1=4$, $y_2=5$ и $y_3=10$. 130. Число a называется *корнем* (нулем) функции $f(x)$, если значение этой функции при $x=a$ равно нулю, т. е. если $f(a)=0$. Чтобы найти корни функции $f(x)$, нужно решить уравнение $f(x)=0$. Например, корень функции $f(x)=3x-6$ есть корень уравнения $3x-6=0$; $x=2$. Корни уравнения $f(x)=x^2-1$ есть $x_1=1$ и $x_2=-1$. *Корень функции* на графике — точка пересечения (или касания) оси абсцисс с графиком функции (в этой точке $y=0$). 131. Функция f называется *возрастающей* на числом множестве X , если любому большему значению аргумента, принадлежащему множеству X , соответствует большее значение функции, т. е. если из условия $x_2 > x_1$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, следует $f(x_2) > f(x_1)$. Например, функция $f(x)=x^2$ возрастает на отрезке $[0; 5]$. *Убывающая функция* — это такая функция на множестве X , что из условия $x_2 > x_1$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, следует $f(x_2) < f(x_1)$. Например, функция $f(x)=x^2$ убывает на отрезке $[-3; 0]$. Функция, возрастающая на данном множестве или убывающая на нем, называется *монотонной функцией* на этом множестве. Точка, движущаяся по графику *возрастающей* функции слева направо, поднимается при этом *вверх*, а точка, движущаяся по графику *убывающей* функции слева направо, спускается *сверху вниз*. 132. а) Пусть $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 - 3) - (2x_1 - 3) = 2(x_2 - x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$. Отсюда следует, что данная функция возрастает; б) пусть $x_2 > x_1$, или $x_2 - x_1 > 0$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$, но

$x_2 + x_1 < 0$ ($x_2 < 0$ и $x_1 < 0$ по условию), $x_2 - x_1 > 0$, поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и $f(x_2) < f(x_1)$. 133. 1. Функция f с областью определения X и множеством значений Y называется *обратимой*, если обратное ей соответствие g между множеством Y и множеством X — функция, т. е. каждому элементу из множества Y соответствует не более одного элемента из множества X . Функцию g называют в этом случае *обратной* по отношению к функции f . Например, функция $y = 2x$ на множестве $X = \{-1; 0; 1; 2\}$ обратима, ибо множество значений этой функции $Y = \{-2; 0; 2; 4\}$ и каждому значению множества Y соответствует только один элемент множества X , что видно из пар обратного соответствия: $(-2; -1)$, $(0; 0)$, $(2; 1)$, $(4; 2)$. Однако функция $y = x^2$ на этом множестве не обратима, так как множество ее значений $Y = \{1; 0; 1; 4\}$; пары обратного соответствия $(1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 2)$ показывают, что одному и тому же элементу множества Y ($y = 1$) соответствуют два различных элемента множества X ($x = -1$ и $x = 1$). На тех же промежутках, где эта функция монотонна, она обратима. Обратимая функция и функция, обратная ей, называются *взаимно обратными функциями*. 2. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ — биссектрисы I и III координатных углов. 134. $B = \{-7; -5; -3; -1; 1\}$. Обратное соответствие: $(-7; -2)$, $(-5; -1)$, $(-3; 0)$, $(-1; 1)$, $(1; 2)$; функция f обратима. 135. Если функция $y = f(x)$ обратима, то для нахождения формулы, задающей обратную ей функцию, надо из этой формулы выразить переменную x через y и поменять обозначения x на y и y на x . Например, чтобы задать формулой функцию, обратную функции $y = 3x$, выразим x через y , получим $x = y/3$, поменяем в полученном уравнении x на y и y на x . Итак, функция, обратная данной, задается формулой $y = x/3$. Графики двух взаимно обратных функций $y = 3x$ и $y = x/3$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 71). 136. а) Выразим x через y , получим $x = 2y + 6$. Функция, обратная данной, $y = 2x + 6$; б) $y = -3x + 3$. 137. $D = \frac{C}{\pi} = \frac{1}{\pi} C$.

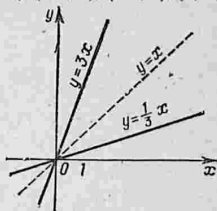


Рис. 71

D и C прямо пропорциональны, коэффициент пропорциональности равен $1/\pi$. 138. 1. Для построения прямой достаточно знать положение двух ее точек, поэтому график прямой пропорциональности можно строить по любым двум его точкам; за одну из них удобно брать начало координат, а за другую — точку $(1, k)$. 139. а) 45° ; б) 135° . 140. 1. Множество всех чисел, отличных от нуля: $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. 2. Если $k > 0$, то ветви гиперболы располагаются в I и III координатных четвертях, а если $k < 0$ — во II и IV координатных четвертях. 141. а) S и h прямо пропорциональны; б) S и a прямо пропорциональны; в) $a = S/h$, a и h обратно пропорциональны. 142. а) Гипербола и прямая, проходящая через начало координат, пересекаются в точках $(2; 6)$ и $(-2; -6)$; б) $(3; -2)$, $(-3; 2)$. 143. Подставляя вместо x и y координаты данной точки, получим $5 = k(-1) + 3$, $k = -2$, $y = -2x + 3$; так как $k < 0$, то функция убывающая. Корнем этой функции является число, при котором $y = 0$, или $-2x + 3 = 0$, отсюда корень функции $x = 1,5$. 144. а) Для нахождения точки пересечения

графика функции с осью Oy надо принять $x=0$, тогда $y=-2$. Точку пересечения с осью Ox получим, найдя корень функции, т. е. приняв $y=0$; тогда $x-2=0$, откуда $x=2$. Таким образом, график этой функции пересекает оси координат в точках $A(0; -2)$, $B(2; 0)$; б) $(0; -3)$, $(6; 0)$; в) $(0; -5)$, $(-2,5; 0)$. 145. При одном и том же значении k и различных l графики функции параллельны графику прямой пропорциональности $y=kx$ (рис. 72). Если $k > 0$, угол наклона графика — острый, если $k < 0$, то этот угол тупой (рис. 73). 146. а) График дан на рис. 74; б) см. рис. 73; в) см. рис. 75; г) см. рис. 76; д) см. рис. 77.

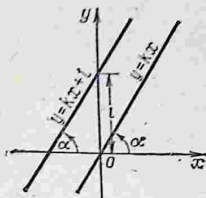


Рис. 72

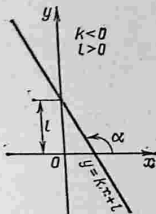


Рис. 73

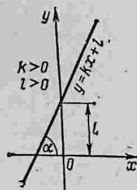


Рис. 74

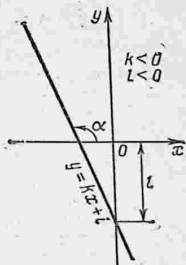


Рис. 75

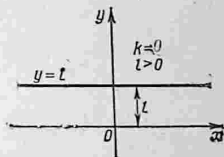


Рис. 76

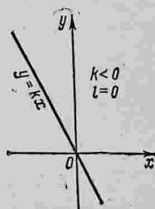


Рис. 77

147. а) Каждый из этих графиков расположен в верхней полуплоскости, проходит через начало координат и симметричен относительно оси y . График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ является более пологой кривой по сравнению с кривой $y=x^2$, ибо точки с одинаковыми абсциссами имеют ординаты в два раза меньшие; например, при $x=3$ $y_1=9$ для первого графика, $y_2=4,5$ для второго графика (рис. 78); б) график функции $y=2x^2$ — более «крутая» кривая по сравнению с кривой $y=x^2$ (рис. 79); в) каждой точке первого графика соответствует точка второго графика, симметричная относительно оси Ox ; например, при $x=1$ $y_1=2$ для первого графика, $y_2=-2$ для второго графика (рис. 80).

Значит, второй график симметричен первому относительно оси Ox , причем первый расположен в верхней полуплоскости, а второй — в нижней полуплоскости, оба графика симметричны относительно оси Oy и проходят через начало координат. 148. При $a > 0$ функция

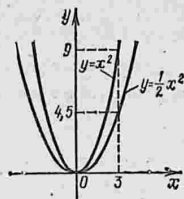


Рис. 78

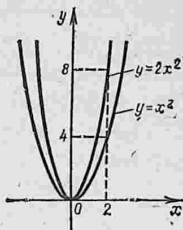


Рис. 79

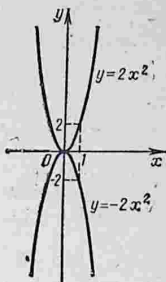


Рис. 80

$y = ax^2$ возрастает, если $X = [0; +\infty[$; при $a < 0$ эта функция возрастает, если $X =]-\infty; 0]$. 149. а) $-9 = a \cdot 3^2$, $a = -1$, $y = -x^2$; б) $3 = a(-1)^2$, $a = 3$, $y = 3x^2$. 150. а) Числа $\sqrt{0,6}$ и $\sqrt{2/3}$ можно рассматривать как значения возрастающей функции $y = \sqrt{x}$. Неравенство $0,6 < 2/3$ ($\frac{2}{3} = 0,666 \dots$) верно, следовательно, верно и неравенство

$$\sqrt{0,6} < \sqrt{2/3}; \quad б) \quad \sqrt[3]{\frac{5}{7}} > \sqrt[3]{0,7}; \quad в) \quad \sqrt[8]{0,88} < \sqrt[8]{1};$$

$$г) \quad \sqrt[10]{(6,2-6,1)(6,2+6,1)} = \sqrt[10]{1,23} > \sqrt[10]{1,22}.$$

§ 16

151. б) Корнем уравнения с одной переменной называют то значение переменной, которое обращает уравнение в истинное равенство. 2. Решить уравнение — значит найти множество его корней. 3. Множество корней уравнения с одной переменной может состоять: а) из одного элемента (например, множество корней уравнения $\frac{1}{2}x = -1$ состоит из одного элемента — 2); б) из нескольких элементов (например, множество корней уравнения $x^2 = 1$ состоит из двух элементов: 1 и -1); в) из бесконечного множества элементов (например, в уравнении $\sqrt{x^2} = -x$ здесь любое неположительное число $x \in]-\infty, 0]$ является его корнем; г) множество корней может быть пустым (например, уравнение $x^2 = -4$ имеет пустое множество корней). 152. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $x = b/a$. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. Множество корней такого уравнения — множество всех действительных чисел. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение принимает вид $0x = b$. Это уравнение не имеет

корней, ибо левая его часть равна нулю, а правая отлична от нуля.
 153. а) Уравнение приводится к следующему: $x^2 + 12x = 0$. Вынесем x за скобку: $x(x + 12) = 0$; произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, т. е. $x = 0$ или $x + 12 = 0$. Поэтому множество корней данного уравнения: $\{-12; 0\}$. б) Умножив обе части уравнения на 6 — наименьшее общее кратное чисел 2 и 6, получим:

$$(5x - 1) \cdot 3 - (x + 5) = 6; \quad 15x - 3 - x - 5 = 6;$$

отсюда найдем, что корень уравнения равен 1. в) $\{51\}$, г) $\{17\}$. д) $\emptyset$.
 У к а з а н и е. Уравнение приводится к следующему $0x = 109$. е) $\{0,754\}$.
 У к а з а н и е. Числитель и знаменатель каждой дроби умножить на 100. ж) $\left\{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} - 1\right\}$. 154. а) Чтобы воспользоваться условием равенства дроби нулю ($a/b = 0$ лишь тогда, если $a = 0$ и $b \neq 0$), перенесем $\frac{7}{8}$ в левую часть уравнения:

$$\frac{6x - 37}{2(x - 8)} - \frac{2(5x - 39)}{3(x - 8)} - \frac{7}{8} = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения в дробь:

$$\frac{12(6x - 37) - 2 \cdot 8(5x - 39) - 7 \cdot 3(x - 8)}{24(x - 8)} = 0; \quad \frac{-29x + 348}{24(x - 8)} = 0.$$

Эта дробь обращается в ноль при тех и только тех значениях x , при которых $-29x + 348 = 0$ и $24(x - 8) \neq 0$, т. е. данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -29x + 348 = 0, \\ 24(x - 8) \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $-29x + 348 = 0$ имеет корень 12, при этом значении x имеем $24(x - 8) \neq 0$, значит число 12 является корнем данного уравнения. Ответ: $\{12\}$; б) $\frac{x(x - 4) - 5 - 1(x - 4)^2}{(x - 1)^2} = 0; \quad \frac{x^2 - 4x - 5 - x^2 + 8x - 16}{(x - 1)^2} =$

$$= 0; \quad \frac{4x - 21}{(x - 4)^2} = 0; \quad \begin{cases} 4x - 21 = 0, \\ (x - 4)^2 \neq 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{5, 25\};$$

$$\text{в) } \frac{30 + (x - 1)(x + 7) - (x^2 - 49)}{x^2 - 49} = 0; \quad \begin{cases} 6x + 72 = 0, \\ x^2 - 49 \neq 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{-12\};$$

г) это уравнение можно решить, воспользовавшись условием равенства дроби нулю, но его можно решить также, воспользовавшись условием равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$, откуда $a = c$ и $b \neq 0$. Приведя дроби к общему знаменателю, получаем

$$\frac{4(x + 2)}{x^2 - 4} - \frac{5(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{12}{x^2 - 4}.$$

Представим левую часть уравнения в виде дроби:

$$\frac{-4(x + 2) - 5(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{12}{x^2 - 4};$$

так как знаменатели дробей одинаковы, то значения дробей будут равны лишь при тех значениях x , при которых равны их числители и знаменатель отличен от нуля. Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} 4(x+2) - 5(x-2) = 12, \\ x^2 - 4 \neq 0, \end{cases}$$

решая которую получаем *ответ*: $\{6\}$; д) $\frac{(x+3)^2 - (12x-15) - (x-3)^2}{x^2-9} =$

$= 0$; $\frac{15}{x^2-9} = 0$. Так как числитель не равен нулю, то уравнение не имеет корней. *Ответ*: $\emptyset$. 155. Обозначим искомое расстояние че-

рез x км. Пассажирский поезд проходит это расстояние за $\frac{x}{60}$ ч,

а пригородный — за $\frac{x}{48}$ ч. По условию задачи время, затраченное пас-

сажирским поездом, меньше времени, затраченного пригородным поез- дом, на 36 мин $= \frac{36}{60}$ ч $= \frac{3}{5}$ ч, поэтому имеем уравнение $\frac{x}{48} - \frac{x}{60} =$

$\frac{3}{5}$, из которого находим $x = 144$ км. *Проверка*. Пассажирский поезд пройдет 144 км за 2,4 ч ($144 : 60 = 2,4$), пригородный поезд — за 3 ч ($144 : 48 = 3$). Значит, пассажирский поезд проходит 144 км на 0,6 ч быстрее ($3 - 2,4 = 0,6$). *Ответ*. Расстояние между станциями А и В равно 144 км.

Иногда перед составлением уравнения зависимости между неизвестными и данными удобно записывать в виде таблицы. Например, решение данной задачи можно оформить так:

	Путь, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Пассажирский поезд	x	60	$\frac{x}{60}$
Товарный поезд	x	48	$\frac{x}{48}$

156. 60 км/ч; 80 км/ч. *Указание*. Если скорость первой машины x км/ч, то получаем уравнение $3,5x - 2,5(x+20) = 10$. 157. 4 ч. *Указание*. Если на изготовление одной детали теперь затрачивается x ч, то приходим к уравнению $30x = 24(x+1)$. 158. 500 кг; 600 кг; 300 кг. *Указание*. Если в первый день продали x кг, то

имеем уравнение $x + (x+100) + \frac{3}{5}x = 1400$. 159. Пусть первого рас-

твора нужно взять x л, тогда второго понадобится $(100-x)$ л. В первом растворе азотной кислоты будет 30 % от x , т. е. $0,3x$ л, а во втором — 55 % от $(100-x)$, т. е. $0,55(100-x)$ л. По условию задачи, в полученном растворе должно содержаться 50 л азотной кислоты (50 % от 100 л составляет 50 л). Получаем:

$$0,3x + 0,55(100-x) = 50; \quad x = 20 \text{ л.}$$

Проверка. В 20 л первого раствора содержится $20 \cdot 0,3 = 6$ л азотной кислоты, а в 80 л второго раствора $(100 - 20 = 80) \cdot 0,55 \cdot 80 = 44$ л азотной кислоты. Всего в обоих растворах будет $6 \text{ л} + 44 \text{ л} = 50$ л азотной кислоты, что соответствует условию задачи. **Ответ:** 20 л, 80 л. 160. 1,25 л. **Указание.** Пусть надо долить x л 80 %-ного раствора, тогда $3,5 + 0,8x = 0,72(5 + x)$. 161. Задачи подобного рода называют задачами на совместную работу. Примем время, необходимое первому экскаватору, чтобы одному выполнить всю работу, за x ч, тогда второму для этого потребуется $2x$ ч.

Предостережение. Некоторые ошибочно считают, что время, необходимое второму экскаватору, равно x , а первому — $2x$, забывая, что «быстрее» — значит затрачено меньше времени. Составим следующую таблицу:

	Время, необходимое для выполнения всей работы, ч	Работа, выполненная за 1 ч	Проработанное время, ч	Работа, выполненная за 12 ч
I экскаватор	x	$\frac{1}{x}$	12	$\frac{12}{x}$
II экскаватор	$2x$	$\frac{1}{2x}$	12	$\frac{12}{2x}$

Так как в результате совместной работы была выполнена вся работа, принятая за единицу, то $\frac{12}{x} + \frac{12}{2x} = 1$, откуда $x = 18$. **Ответ:** 18 ч и

36 ч. 162. 1. Если $a = 0$, то уравнение будет не квадратным, а первой степени. 2. Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решается разложением левой части на множители: $x(ax + b) = 0$; его корни $x_1 = 0$ и $x_2 = -b/a$. Это уравнение можно решить графически, записав его в виде $ax^2 = -bx$, абсциссы точек пересечения графиков $y = ax^2$ и $y = -bx$ будут корнями уравнения. Уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет два противоположных корня, если a и c противоположных знаков: $x_1 = \sqrt{-c/a}$; $x_2 = -\sqrt{-c/a}$. Уравнение $ax^2 = 0$ имеет два равных корня $x_1 = x_2 = 0$. 163. а) $\{0; 1\}$; б) $\{-3; 3\}$; в) $\{0\}$. 164. а) Парабола $y = x^2$ и прямая $y = 2x$ пересекаются в двух точках, абсциссы которых $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$; они и будут корнями этого уравнения; б) $\{-2; 2\}$. 165. 1. $R = \sqrt{S/\pi}$; $t = \sqrt{2S/g}$. 2. $t = 2\sqrt{V/g}$. 166. а) $D = 2^2 - 4m^2$; уравнение имеет один корень, если $D = 0$; $4 - 4m^2 = 0$, отсюда $m = -1$ или $m = 1$; б) $m = -30$ или $m = 30$; в) $m = 9$.

167. а) $a = 1$; $b = 1$; $c = -6$; $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; б) Уравнение приводится к виду $3x^2 + 11x + 10 = 0$; $D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 1$; $x_1 = -2$, $x_2 = -5/3$; в) $b = -4\sqrt{3}$ — число четное; применяем формулу (2): так как $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac =$

$= (-2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 9 = 3$, то $x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{1}$; $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 3\sqrt{3}$;

г) $\left\{-\frac{3}{2}; \sqrt{2}\right\}$. **Указание:** $D = (3 - 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3\sqrt{2}) =$

$= 9 - 12\sqrt{2} + 8 + 24\sqrt{2} = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = (3 + 2\sqrt{2})^2$; д) $\{-5\}$.
Указание. Уравнение можно привести к системе

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= 0, \\ x(x-3)(x+3) &\neq 0. \end{aligned}$$

Решив уравнение, получим $x_1 = -5$, $x_2 = 3$. Второй корень отбрасываем, ибо условию $x(x-3)(x+3) \neq 0$ удовлетворяет лишь число -5 ; е) $\{1\}$. Указание. Второй корень полученного уравнения $x = -1/2$ отбрасываем. 168. а) Это уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Такие уравнения называются *биквадратными*. Обозначим x^2 через z , тогда получим:

$$4z^2 - 13z + 9 = 0; \quad z = 1 \text{ или } z = 9/4.$$

Множеством корней данного уравнения является объединение корней уравнений $x^2 = 1$ и $x^2 = 9/4$; корни первого уравнения -1 и 1 , корни второго $-3/2$ и $3/2$. Итак, множество корней данного уравнения: $\{-3/2; -1; 1; 3/2\}$; б) обозначим $\sqrt{x}$ через z , тогда $x = z^2$ и $z^2 + z = 12$, $z^2 + z - 12 = 0$; $z = 3$ или $z = -4$, т. е. $\sqrt{x} = 3$ или $\sqrt{x} = -4$. Последнее уравнение корней не имеет ($\sqrt{x} \geq 0$); решая первое уравнение, получаем $x = 9$. Ответ: $\{9\}$; в) введем обозначение $x^2 + 2 = z$, тогда $x^2 + 3 = z + 1$, данное уравнение приводится к уравнению

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{z+1} = 2; \quad \frac{2(z+1) + 3z - 2z(z+1)}{z(z+1)} = 0,$$

корни которого $z = 2$ или $z = -1/2$, откуда

$$x^2 + 2 = 2 \text{ или } x^2 + 2 = -1/2.$$

Последнее уравнение корней не имеет. Уравнение $x^2 + 2 = 2$ имеет единственный корень $x = 0$. Ответ: $\{0\}$; г) если обозначить $\frac{x^2 + 1}{x}$

через z , то $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{z}$, тогда данное уравнение примет вид $z + \frac{1}{z} = 2,9$. Решением этого уравнения служат числа $2,5$ и $0,4$, значит,

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 2,5 \text{ или } \frac{x^2 + 1}{x} = 0,4.$$

Второе уравнение корней не имеет, множество корней первого уравнения, а значит, и данного уравнения есть $\{1/2; 2\}$; д) пусть $x - 2 = a$, тогда имеем:

$$2a^2 - 3a + 1 = 0, \quad a_1 = 1/2, \quad a_2 = 1,$$

откуда $x - 2 = 1/2$ или $x - 2 = 1$. Множество решений данного уравнения есть объединение множества решений последних двух уравнений: $\{2,5; 3\}$; е) пусть $x^2 = a$, тогда $2x^2 + 7 = 2a + 7$; $a - \frac{50}{2a+7} = 7$.

Отсюда получаем:

$$2a^2 - 7a - 99 = 0; \quad a = 9 \text{ или } a = -\frac{11}{2}.$$

Решив уравнение $x^2 = 9$, найдем множество корней данного уравнения $\{-3; 3\}$. Уравнение $x^2 = -11/2$ не имеет корней; ж) обозначим $x^2 - 4x + 10$ через a , тогда $x^2 - 4x + 6 = a - 4$ и

$$\frac{21}{a} = a - 4, \quad a^2 - 4a - 21 = 0; \quad a = -3 \text{ или } a = 7.$$

Множество корней данного уравнения есть объединение множеств корней уравнений $x^2 - 4x + 10 = -3$ и $x^2 - 4x + 10 = 7$. Первое уравнение корней не имеет, ибо его дискриминант $D = 16 - 52 < 0$. Множество корней данного уравнения найдем, решив уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$; оно равно $\{1; 3\}$.

169. а) Запишем данное уравнение в виде $x^2 = x + 2$. Вычертим параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 2$. Их точки пересечения имеют абсциссы -1 и 2 . Следовательно, корни данного уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

Замечание. Чтобы не вычерчивать по точкам каждый раз параболу $y = x^2$, полезно использовать ее шаблон; б) преобразуем данное квадратное уравнение в приведенное: $x^2 + 0,5x - 1,5 = 0$. Вычертим графики функций $y = x^2$ и $y = -0,5x + 1,5$. Их точки пересечения имеют абсциссы $-1,5$ и 1 . Следовательно, корни данного уравнения $x_1 = -1,5$ и $x_2 = 1$; в) параболу $y = x^2$ и прямая $y = -4x - 4$ имеют лишь одну общую точку $(-2; 4)$. Уравнение имеет единственный корень $x = -2$; г) параболу $y = x^2$ и прямая $y = 2x - 5$ не имеют общих точек. Уравнение корней не имеет. 170. Справедлива; ее можно сформулировать так: числа m и n являются корнями квадратного уравнения $x^2 - (m+n)x + mn = 0$. 171. а) $D/4 = 4 + 2,25 = 6,25 > 0$; $x_1 + x_2 = -16/9$, $x_1x_2 = -4/9$; б) $x_1 + x_2 = 0$, $x_1x_2 = -20/3$; в) $x_1 + x_2 = 48$, $x_1x_2 = 0$. 172. $x_1 = 1$; $x_1x_2 = -9$, отсюда $x_2 = -9$; $b = -(x_1 + x_2) = -(1 - 9) = 8$. 173. а) По теореме, обратной теореме Виета, имеем уравнение $x^2 - (-0,6 + 1,6)x + (-0,6) \cdot 1,6 = 0$, отсюда $x^2 - x - 0,96 = 0$;

б) $x^2 - (-\sqrt{3} + \sqrt{3})x + (-\sqrt{3})\sqrt{3} = 0$; $x^2 - 3 = 0$; в) $x^2 - (5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6})x + (5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6}) = 0$; $x^2 - 10x + 1 = 0$; г) $ax^2 - 2kx + c = 0$. 174. а) $x_1 = m$, $x_2 = n$; б) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{5}$. 175. 1. Надо этот трехчлен приравнять нулю и решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. 2. Квадратный трехчлен, как и квадратное уравнение, может иметь два различных корня, один корень (два совпадающих корня), а может и не иметь их. Это зависит от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена, который будет также и дискриминантом соответствующего квадратного уравнения. 176. а) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена; б) в этом случае трехчлен имеет два равных корня и тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$. 177. а) $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49$; $49 > 0$. Трехчлен имеет два различных корня: $x_1 = -0,4$; $x_2 = 1$. Следовательно, $5x^2 - 3x - 2 = 5(x - (-0,4))(x - 1) = 5(x + 0,4)(x - 1) =$

$$= (5x + 2)(x - 1); \text{ б) } 12x^2 - 11x + 2 = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right) \times$$

$$\times 3\left(x - \frac{2}{3}\right) = (4x - 1)(3x - 2).$$

178. а) Корни трехчлена, стоящего в числителе, $a_1 = -4$; $a_2 = 3$, поэтому $\frac{a^2 + a - 12}{9 - a^2} = \frac{(a + 4)(a - 3)}{(3 - a)(3 + a)} =$

$$= -\frac{(a + 4)(a - 3)}{(a - 3)(a + 3)} = -\frac{a + 4}{a + 3}; \text{ б) } \frac{(a + 3)^2}{-(a^2 + a - 6)} = \frac{(a + 3)^2}{-(a - 2)(a + 3)} =$$

$$= \frac{a + 3}{2 - a}; \quad \text{в) } \frac{6a^2 - 7a - 3}{2a^2 - a - 3} = \frac{6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right)}{2\left(a - \frac{3}{2}\right)(a + 1)} = \frac{3a + 1}{a + 1};$$

$$г) \frac{5x^{n+2} + 4x^{n+1} - 9x^n}{x^{n+2} - x^n} = \frac{x^n(5x^2 + 4x - 9)}{x^n(x^2 - 1)} = \frac{5(x-1)\left(x + \frac{9}{5}\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x+9}{x+1}.$$

179. а) 0. У к а з а н и е. Предварительно разложите знаменатели дробей на множители и произведите сокращения; б) $\left(\frac{a^2-6a+5}{a^2-7a+10} - \frac{a^2-6a+8}{a^2-5a+4}\right)(a^2-3a+2) = \left(\frac{(a-5)(a-1)}{(a-5)(a-2)} - \frac{(a-2)(a-4)}{(a-1)(a-4)}\right)(a-2) \times \times (a-1) = \frac{a-1}{a-2}(a-2)(a-1) - \frac{a-2}{a-1}(a-2)(a-1) = (a-1)^2 - (a-2)^2 = 2a-3$. Данное выражение теряет смысл при $a=1$, $a=2$, $a=4$, $a=5$. 180. а) $\frac{x}{x+2} - \frac{3}{x+3} - \frac{5}{(x+2)(x+3)} = 0$; $\frac{x(x+3)-3(x+2)+5}{(x+2)(x+3)} = 0$; отсюда

$$\begin{cases} x^2+3x-3x-6+5=0, \\ (x+2)(x+3) \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-1=0, \\ (x+2)(x+3) \neq 0; \end{cases}$$

$x_1=-1$, $x_2=1$. Ответ: $\{-1; 1\}$. б) $\{0\}$. 181. а) Здесь $x \neq 1$; сокращая дробь, получаем $y=x+2$. График — прямая, из которой «выколота» точка, абсцисса которой $x=1$ (рис. 81); б) см. рис. 82.

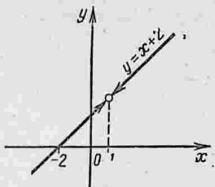


Рис. 81

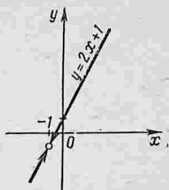


Рис. 82

182. а) $y = x^2 - 8x + 10 = (x^2 - 2 \cdot 4x + 16) - 16 + 10 = (x-4)^2 - 6$. Ветви параболы направлены вверх ($a > 0$), вершина параболы находится в точке $O_1(4; -6)$, ось симметрии — прямая $x=4$. При $x=0$ $y=10$. Следовательно, парабола пересекает ось y в точке $(0; 10)$. Для нахождения точек пересечения параболы с осью x положим $y=0$, тогда $x_1 = 4 - \sqrt{6} \approx 1,5$; $x_2 \approx 4 + 2,5 \approx 6,25$ (рис. 83).

З а м е ч а н и е. Координаты вершины параболы можно было найти иначе — по формулам $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{D}{4a}$; тогда $x = -\frac{-8}{2} = 4$; $y = \frac{64 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4} = -6$, или $y_{x=4} = 4^2 - 8 \cdot 4 + 10 = -6$;

б) $y = x^2 - 5x + 4 = -(x^2 + 5x - 4) = -\left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\right) = -\left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 10\frac{1}{4}\right) = -(x+2,5)^2 + 10,25$. Ветви параболы

направлены вниз, координаты вершины $(-2,5; 10,25)$, ось y парабола пересекает в точке $(0; 4)$. Для нахождения точек пересечения с осью x

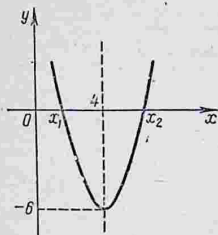


Рис. 83

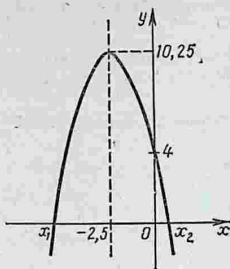


Рис. 84

положим $y=0$; решаем уравнение $-x^2-5x+4=0$, или $x^2+5x-4=0$; $x_1=\frac{-5-\sqrt{41}}{2}\approx-5,7$; $x_2=\frac{-5+\sqrt{41}}{2}\approx 0,7$ (рис. 84). 183. а) $y=(x+1,5)^2-6,25$ (рис. 85). Функция убывает, если $x < -1,5$, и возрастает, если $x > -1,5$. Значения этой квадратной функции положительны для всех x из объединения промежутков $]-\infty, -4[\cup]1, \infty[$, отрицательны для всех x , принадлежащих промежутку $]-4; 1[$;

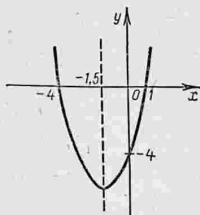


Рис. 85

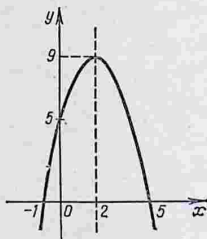


Рис. 86

б) $y=-(x-2)^2+9$. Функция убывает, если $x \in]2; \infty[$, и возрастает, если $x \in]-\infty; 2[$. Значения функции положительны, если $x \in]-1, 5[$, $y < 0$, если $x \in]-\infty; -1[\cup]5, \infty[$ (рис. 86); в) $2(x^2+2x)-6=2(x^2+2x+1-1)-6=2(x+1)^2-8$. Парабола конгруэнтна параболе $y=2x^2$, осью симметрии является прямая $x=-1$. Координаты вершины $(-1; -8)$, корни $x_1=-3$, $x_2=1$. Функция убывает, если $x \in]-\infty; -1[$, и возрастает, если $x \in]-1; \infty[$. Значения функции: $y > 0$, если $x \in]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$; $y < 0$, если $x \in]-3; 1[$.

184. Пусть в зале x рядов, значит в каждом ряду x мест, а всех мест в зале будет x^2 . Если число рядов увеличить вдвое, а количество мест в ряду уменьшить на 10, то число мест в зале станет $2x(x-10)$ и получим уравнение $2x(x-10)=x^2+300$, корни которого: -10 и 30 . По смыслу задачи $x > 0$; следовательно, задача имеет единственное решение. *Ответ:* 30 рядов. 185. 6 см. *Указание.* Если длину каждого из катетов обозначить через x , то получим уравнение $0,5 \cdot 2x(x-2)=0,5x^2+6$. 186. Обозначив через x первоначальную скорость поезда, получим уравнение $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+4} = \frac{1}{10}$ ($6 \text{ мин} = \frac{1}{10} \text{ часа}$), из которого находим $x_1 = -40$, $x_2 = 36$. По смыслу задачи $x > 0$; следовательно, первоначальная скорость поезда 36 км/ч. 187. На 12 мин. *Указание.* Пусть нормальная скорость теплохода x км/ч, тогда приходим к уравнению $\frac{36}{x-3} - \frac{36}{x+3} = 5$. Решив это уравнение, найдем, что средняя скорость, с которой теплоход должен пройти все расстояние, составляет 15 км/ч, а весь путь он должен пройти за $\frac{72}{15}$ ч, т. е. за 4 ч 48 мин. Фактически он затратил 5 ч. 188. 20 ц; 420 га. *Указание.* Если урожай с 1 га был x ц, то приходим к уравнению $\frac{8400}{x} - \frac{8400}{x+1} = 20$, или $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+1} = 1$. 189. 10 ч, 15 ч. *Указание.* Приняв за x время в часах, необходимое второму краю, чтобы одному выполнить всю работу, получим уравнение $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$ (см. пояснения к решению задачи 161). 190. 11 см и 3 см. *Указание.* Если радиус одного круга принять за r см, то радиус другого будет $(14-r)$ см, а площади соответственно равны πr^2 и $\pi(14-r)^2$. Отсюда получаем уравнение $\pi r^2 + \pi(14-r)^2 = 130\pi$. 191. Пусть первоначально в поселке проживало a человек, а среднегодовой процент прироста населения составлял $x\%$, тогда через год население поселка составит $a + a \frac{x}{100} = a \left(1 + \frac{x}{100}\right)$, через два года — $a \left(1 + \frac{x}{100}\right) + a \left(1 + \frac{x}{100}\right) \frac{x}{100} = a \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 + \frac{x}{100}\right) = a \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$. По условию задачи, через два года население поселка составит $3a$, отсюда получаем уравнение $a \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 3a$, или $1 + \frac{x}{100} = \sqrt{3}$, откуда $x = 100 \sqrt{3} - 100 \approx 73\%$, т. е. среднегодовой процент прироста населения составляет приблизительно 73% .

§ 18

192. 1. График линейного уравнения вида $ax + by = c$, где хотя бы один из коэффициентов a и b не равен нулю, есть прямая. Это следует из того, что при $b \neq 0$ это уравнение можно привести к виду $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (здесь $k = -a/b$, $l = c/b$). Если $a = 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то $y = c/b$ — графиком будет прямая, параллельная оси x . Если $c = 0$ и $b \neq 0$, то линейное уравнение принимает вид $y = -\frac{a}{b}x$ и графиком

служит прямая, проходящая через начало координат. Если $b=0$, а коэффициент $a \neq 0$, то линейное уравнение принимает вид $ax+0y=c$, отсюда $x=\frac{c}{a}$ и графиком служит прямая, параллельная оси y .

Если $a=0$, $b \neq 0$ и $c=0$, то получим уравнение $0x+0y=0$, решением которого будет любая пара чисел, а графиком — вся плоскость.

2. *Решением уравнения с двумя переменными* называется упорядоченная пара чисел, которая обращает уравнение с двумя переменными в верное равенство. Например, пара чисел $(-1; 2)$ есть решение уравнения $2x+3y=4$; задав переменной x произвольное значение, например $x=0$, найдем соответствующее значение y : $y=4/3$, поэтому линейное уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений. 193. 1. *Решением системы уравнений с двумя переменными* называется пара значений переменных, обращающая в истинное равенство каждое уравнение системы. Например, пара значений переменных $x=2$, $y=-1$ является решением системы, состоящей из уравнений $3x-2y=8$ и $5x+y=9$. 2. *Решить систему уравнений* — значит найти множество ее решений.

194. а) Выразим из каждого уравнения y через x :

$$y = -2x + 1,$$

$$y = 0,5x + 3,5.$$

Угловые коэффициенты прямых — графиков уравнений системы — различны: у первого — 2, у второго — 0,5, поэтому прямые пересекаются, Координаты точки их пересечения $(-1; 3)$ (рис. 87) являются решением этой системы, причем это решение единственное, так как две

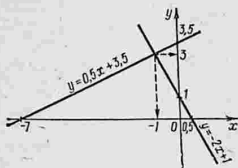


Рис. 87

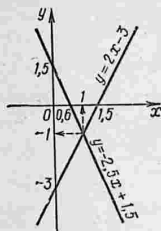


Рис. 88

прямые пересекаются в одной точке; б) прямые $y=2x-3$ и $y=-2,5x+1,5$ пересекаются в точке $(1; -1)$, это и есть решение системы (рис. 88). 195. а) Прямые $y=-\frac{2}{3}x+2$ и $y=-\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$ имеют равные угловые коэффициенты (рис. 89); значит, прямые параллельны; кроме того, они пересекают ось y в разных точках: $(0; 2)$ и $(0; \frac{10}{3})$; значит, они не имеют общих точек, т. е. система не имеет решений. В этом можно также убедиться, если умножить

все члены данного уравнения на 2:

$$\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 2x+3y=10. \end{cases}$$

Левые части полученных уравнений одинаковы, а правые различны, что при одних и тех же значениях x и y невозможно. Ответ: ①.

196. а) Графики этих уравнений совпадают, ибо, умножив второе уравнение на 2, получим систему

$$2x-6y=3,$$

$$2x-6y=3,$$

состоящую из одинаковых уравнений, а, как известно, одно уравнение с двумя переменными имеет бесконечно много решений 197. Приведем каждое уравнение системы к виду $y=kx+l$, тогда

$$y=2x-4,$$

$$y=ax-c.$$

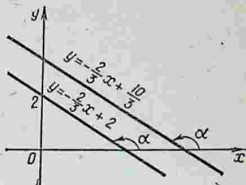


Рис. 89

Система имеет единственное решение, если угловые коэффициенты различны, т. е. если $a \neq 2$; система не имеет решений, если угловые коэффициенты равны, а свободные члены различны, т. е. если $a=2$, $c \neq 4$; в этом случае графики уравнений параллельны; система имеет бесконечно много решений, если графики уравнений совпадают, т. е. если $a=2$ и $c=4$. 198. а) Для того чтобы коэффициенты при y стали противоположными числами, найдем наименьшее общее кратное чисел 27 и 18 (это будет 54) и умножим обе части каждого уравнения на соответствующий дополнительный множитель:

$$\begin{cases} 16x-27y=20, & | 2 \\ 5x+18y=41,5, & | 3 \end{cases} \text{ тогда } \begin{cases} 32x-54y=40, \\ 15x+54y=124,5. \end{cases}$$

Почленное сложение приводит к уравнению $47x=164,5$. Заменяя первое уравнение данной системы уравнением $47x=164,5$, получим $x=164,5:47=3,5$. Подставив во второе уравнение значение $x=3,5$, получим $5 \cdot 3,5+18y=41,5$; $y=1 \frac{1}{3}$. Ответ: $(3,5; 1 \frac{1}{3})$; б) выразим из первого уравнения переменную x через y , получим систему

$$x=5y/8,$$

$$4(5y/8)+0,25y=11.$$

Решая второе уравнение, найдем, что $y=4$, и из первого получим $x=2,5$. Ответ $\{(2,5; 4)\}$.

З а м е ч а н и е. Такой способ решения называется *способом подстановки*. Этот способ удобен, когда коэффициент при одном из переменных системы линейных уравнений равен 1 или -1 , а также в тех случаях, когда одно из уравнений системы дано в виде пропорции. Кроме того, этот способ применяют всегда при решении системы двух уравнений, в которой одно уравнение — второй степени, а другое — первой; в) $\{(2; -2)\}$; г) $\{(5,5 \cdot 10^{10}; 4,5 \cdot 10^9)\}$. У к а з а н и е. Для нахождения переменной x произведите почленное сложение, для нахождения переменной y — почленное вычитание. 199. Подставив

последовательно координаты каждой точки в уравнение прямой, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -3 = 2k + l, \\ 4,5 = -k + l. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $k = -2,5$; $l = 2$. Уравнение прямой имеет вид $y = -2,5x + 2$. 200. а) Окружность с центром в начале координат и прямая $y = -\frac{3}{4}x$ (рис. 90), проходящая через начало координат, пересекаются в двух точках: $(-4; 3)$ и $(4; -3)$. Ответ:

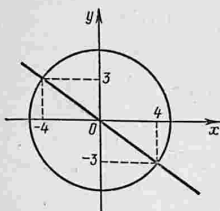


Рис. 90

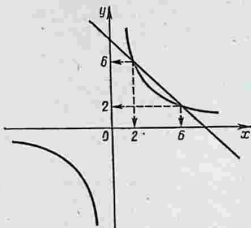


Рис. 91

$\{(-4; 3); (4; -3)\}$; б) гипербола $y = \frac{12}{x}$ (рис. 91) и прямая $x + y = 8$ пересекаются в двух точках: $(2; 6)$ и $(6; 2)$; в) $\{(-3; 9), (2; 4)\}$; г) $\{(2; -1), (-1; 2)\}$; д) $\{(1; 6)\}$. 201. а) Выразив из первого уравнения переменную x через y , получим $x = 4 - y$. Заменим во втором уравнении системы переменную x выражением $4 - y$:

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ (4 - y)^2 - 2y^2 - (4 - y)y + 5(4 - y) + 15 = 0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение, найдем $y_1 = -7,5$, $y_2 = 3$. Подставляя эти значения y в уравнение $x = 4 - y$, получим значения x : $x_1 = 11,5$; $x_2 = 1$. Ответ: $\{(11,5; -7,5), (1; 3)\}$; б) $\{(-2; -2,5), (5; 1)\}$; в) $\{(5; -2), (-7; 2,8)\}$. 202. а) $\{(-1; 6), (0; 5)\}$. У к а з а н и е. Данная система сводится к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^3 + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x^3 + y = 5; \end{cases}$$

б) $\{(1; 1), (3; -3)\}$; в) данная система сводится к следующей:

$$\begin{cases} (3x - 1)(y - 1) + (x + 1) = y + 2, \\ x = 4y - 7, \\ (x + 1)(y - 1) \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3xy - 2y - 2x = 0, \\ x = 4y - 7, \\ (x + 1)(y - 1) \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1; 2); (-4 \frac{2}{3}; \frac{7}{12})\}$. 203. $6/25$. У к а з а н и е. Если обозначить через x числитель дроби, а через y — ее знаменатель, то при-

ходим к системе, состоящей из уравнений первой степени $(x-1)/y=1/5$ и $x/(y-1)=1/4$. 204. 24; 42. У к а з а н и я: 1. Если x —цифра десятков, а y —цифра единиц, то получим систему из двух уравнений: $x+y=6$ и $\frac{10x+y}{10y+x}=\frac{4}{7}$. 2. Эту задачу можно решить и с помощью одного уравнения с одной переменной. Если цифру десятков обозначить через x , то цифра единиц будет $6-x$, тогда приходим к уравнению $\frac{10x+(6-x)}{10(6-x)+x}=\frac{4}{7}$.

Сравнивая оба способа решения задачи, мы видим, что при введении только одной переменной выражение искомым величин через эту переменную и составление уравнения более сложно. 205. 50; 100. Указание. Если x —количество 800-мм труб, а y —количество 1200-мм труб, то имеем систему (учитывая, что 800 мм=0,8 м, а 1200 мм=1,2 м) из двух уравнений: $x+y=150$ и $0,8x+1,2y=160$. 206. 16; 24. У к а з а н и е. Если через x и y обозначим число станков, которые должен был выпускать соответственно первый и второй заводы, то получим

$$\begin{cases} x+y=360, \\ 1,1x+1,12y=400; \end{cases} \quad x=160, \quad y=200.$$

207. 5 и 3. 208. 6 и 4 см. 209. 5 и 12 см. У к а з а н и е. Сумма длин катетов равна 17 см ($30-13=17$). Составьте систему уравнений, используя теорему Пифагора. 210. 6 и 8 см. Если длины катетов x и y , то приходим к системе, состоящей из уравнений $x+y=14$ и $\frac{1}{2}xy=24$.

З а м е ч а н и е. Некоторые ошибочно считают, что уравнение $\frac{1}{2}xy=24$ является уравнением первой степени. Это неверно, ибо сумма показателей переменных в этом уравнении равна двум. 211. Пусть длина участка равна x м, а его ширина y м, причем $x>y$, тогда, учитывая, что 6 га=600 м², имеем систему из двух уравнений: $xy=600$ и $x+y=50$. Решив эту систему, найдем, что $x=30$ м, а $y=20$ м. 212. Пусть x —цифра десятков, а y —цифра единиц искомого числа, тогда двузначное число имеет вид $10x+y$, сумма его цифр $x+y$, а их произведение xy . Учитывая, что делимое равно произведению делителя на частное плюс остаток, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10x+y=6(x+y)+2, \\ 10x+y=5xy+2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x-5y=2, \\ 10x+y-5xy=2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x=3$, $y=2$. Ответ: 32.

§ 19

213. а) Составим разность между левой и правой частями неравенства и преобразуем ее: $a^2+2-2(2a-1)=a^2+2-4a+2=(a-2)^2$. Это выражение при $a=2$ равно нулю, при $a \neq 2$ имеем $(a-2)^2>0$, отсюда истинно неравенство $a^2+2 \geq 2(2a-1)$ при любом a ; б) имеем $2(p+1)^2+3p-p(p+5)=2p^2+4p+2+3p-p^2-5p=p^2+2p+2=(p+1)^2+1>0$, т. е. неравенство истинно при любом p ; в) у к а з а н и е. Неравенство $-(x-y)^2 \leq 0$ истинно при любых x и y .

214. 1. $\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}$. Так как $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$ при $a > 0$ (причем знак равенства имеет место лишь при $a=1$), то $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$. Это можно сформулировать так: *сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух*. 2. Имеем $\left(b + \frac{1}{b}\right) - (-2) = b + \frac{1}{b} + 2 = \frac{(b+1)^2}{b}$. Так как $(b+1)^2 \geq 0$ при любом b , а $b < 0$ по условию, то $\frac{(b+1)^2}{b} < 0$; значит, $b + \frac{1}{b} \leq -2$ при $b < 0$ (равенство имеет место при $b=-1$). Таким образом, *сумма двух взаимно обратных отрицательных чисел не больше минуса двух*. 3. Преобразуем неравенство:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Так как $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ (равенство имеет место лишь при $a=b$), то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Это можно сформулировать так: *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел больше или равно их среднего геометрического*. 215. а) Складывая почленно неравенства $3a > 9$ и $2,5b > 10$, получаем $3a + 2,5b > 19$; б) перемножая почленно данные неравенства, получаем $ab > 12$, откуда $2ab > 24$; в) так как $a^2 > 3^2$, $b^2 > 4^2$, то $a^2 + b^2 > 3^2 + 4^2$; $a^2 + b^2 > 25$. 216. а) $7 < 5a < 8$

$$\frac{1 < 0,2b < 1,2}{8 < 5a + 0,2b < 9,2}.$$

217. $\frac{1}{3} > \frac{1}{a} > \frac{1}{4}$ или $\frac{1}{4} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$, откуда $\frac{5}{12} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{8}{15}$.

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

218. Имеем $8,5 \cdot 2,5 \leq ab \leq 8,6 \cdot 2,6$, или $21,25 \leq ab \leq 22,36$, или, округляя до двух значащих цифр (столько их в каждом сомножителе), получаем $21 \leq ab \leq 22$, т. е. $21 \text{ см}^2 \leq S \leq 22 \text{ см}^2$. 219. Решать неравенство — значит найти множество его решений. 220. а) Умножим обе части данного неравенства на положительное число 6:

$$7x + 5 - 3(3x - 9) > 8 \cdot 6; 7x + 5 - 9x + 27 > 48.$$

Перенесем известное слагаемое 32 из левой части в правую с противоположным знаком (см. следствие из свойства 3 на с. 37), тогда

$$7x - 9x > 48 - 32; -2x > 16.$$

Разделив обе части неравенства на -2 и переименовав при этом знак неравенства на противоположный, получим неравенство $x < -8$, равносильное данному. Ответ: $]-\infty; -8[$; б) множество решений — открытый числовой луч от $-5,5$ до плюс бесконечности: $]-3,5; +\infty[$;

в) $\emptyset$. Указание. Неравенство сводится к следующему: $15x - 9 > 15x + 5$, или $0 \cdot x > 14$. Множество решений полученного неравенства, а значит и данного, пусто. К этому выводу можно прийти иначе. Разделив каждый член числителя первой дроби на 10, а второй — на 6, получим $\frac{x}{2} - \frac{3}{10} > \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$. 221. а) {1; 2; 3}; б) {1; 2; 3; 4; 5}. 222. а) Заменяя каждое неравенство системы простейшим, ему равносильным неравенством, получим систему, равносильную данной: $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$ Множество решений первого неравенства — числовой промежуток $] -2, +\infty[$, второго неравенства — числовой промежуток $] -\infty, 3[$.

Пересечение множеств решений найдем с помощью координатной прямой (рис. 92): $] -2, +\infty[\cap] -\infty, 3[=] -2, 3[$. Множество решений данной системы есть числовой промежуток $] -2, 3[$ (этот промежуток на рис. 92 помечен двойной штриховкой); б) $] 2,5, +\infty[$ (рис. 93);



Рис. 92

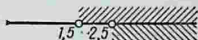


Рис. 93

в) $\emptyset$ (рис. 94); г) $] 5, 7[$. 223. а) 1-й способ. Данное двойное неравенство можно записать в виде системы неравенств: $\begin{cases} 2x - 3 > -1, \\ 2x - 3 < 7. \end{cases}$

Множеством решений этой системы служит числовой промежуток $] 1, 5[$. 2-й способ. Прибавим к каждой части неравенства по 3:

$$\begin{aligned} -1 + 3 < 2x - 3 + 3 < 7 + 3; \\ 2 < 2x < 10; 1 < x < 5; \end{aligned}$$

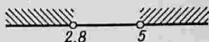


Рис. 94

б) $] -7, 13[$. 224. а) Произведение двух сомножителей положительно лишь тогда, когда оба сомножителя или положительны, или отрицательны, т. е. когда сомножители имеют один и тот же знак. Значит, данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 5 - x > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ 5 - x < 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы — промежуток $] 1,5, 5[$, множество решений второй системы — пустое множество. Ответ: $] 1,5, 5[\cup \emptyset =] 1,5, 5[$; б) $] -\infty, -3[$. Указание. Так как числитель меньше нуля ($-3 < 0$); то данное неравенство равносильно неравенству $2x + 6 < 0$; в) значение дроби только тогда отрицательно, когда числитель и знаменатель имеют значения разных знаков, поэтому

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 3x + 6 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ 3x + 6 > 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы — пустое множество, множество решений второй системы — числовой промежуток $] -2, 1,5[$. Множество решений данного неравенства есть $\emptyset \cup] -2, 1,5[=] -2, 1,5[$;

г) заменим данное неравенство равносильным, правая часть которого есть ноль; для этого перенесем 1 в левую часть неравенства с противоположным знаком, получим последовательно

$$\frac{4x+2}{2-5x}-1 < 0; \quad \frac{4x+2-2+5x}{2-5x} < 0; \quad \frac{9x}{2-5x} < 0;$$

отсюда имеем:

$$\begin{cases} 9x < 0, \\ 2-5x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 9x > 0, \\ 2-5x < 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы есть $]-\infty; 0[$, второй — $]0,4; +\infty[$. *Ответ:* $]-\infty; 0[\cup]0,4; +\infty[$.

Предостережение. Некоторые учащиеся «решают» это неравенство, отбрасывая знаменатель, и получают в ответе лишь один открытый числовой луч $]-\infty; 0[$. Это ошибка, ибо этим самым обе части неравенства умножаются на выражение $2-5x$, которое может быть как положительным, так и отрицательным. В последнем случае знак неравенства следует изменить на противоположный;

д) $\frac{3x-1}{2x+5}-2 > 0; \quad \frac{x-11}{2x+5} > 0$. *Ответ:* $]-\infty; -2,5[\cup]1; +\infty[$.

225. а) 1-й способ: $x^2-9 \geq 0; (x-3)(x+3) \geq 0$. Значение произведения двух множителей тогда и только тогда неотрицательно, когда множители неотрицательны или неположительны. Значит, данное неравенство истинно при тех значениях x , когда

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-3 \leq 0, \\ x+3 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$. 2-й способ. Так как обе части неравенства неотрицательны, то данное неравенство равносильно следующему: $|x| \geq 3$. Эту задачу можно сформулировать так: на координатной прямой найти множество точек, расстояние которых от точки с нулевой координатой равно трем или больше трех. Получим тот же ответ (рис. 95).

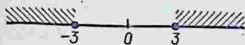


Рис. 95

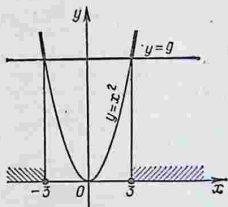


Рис. 96

Решим это неравенство графически. Построим в одной системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=9$; неравенство $x^2 \geq 9$ будет выполнено для тех значений x , при которых график функции $y=x^2$ расположен не ниже графика функции $y=9$ (рис. 96). Для ясности указанную часть графика функции $y=x^2$ спроецируем на ось x ; б) $]-1; 1[$; в) $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; г) $]1; +\infty[$. **Указание.**

$x^3-1 > 0; (x-1)(x^2+x+1) > 0$, но $x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 =$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ при любом } x. \text{ Можно это установить и другим}$$

способом. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 1$ меньше нуля: $D = 1 - 4 = -3 < 0$. Коэффициент a больше нуля: $a = 1 > 0$. Следовательно, $x^2 + x + 1 > 0$ при любом x (график этого трехчлена — параболa, расположенная выше оси x). Графическое решение неравенства дано на рис. 97; д) $]-\infty;$
2[; е) $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

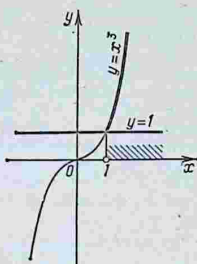


Рис. 97

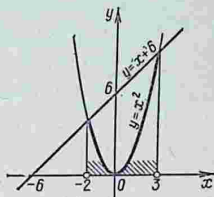


Рис. 98

У к а з а н и е. $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, но $x^2 + 1 > 0$ при любом значении x ; ж) $]-2; 3[$. У к а з а н и е. Квадратный трехчлен разложите на множители, тогда $(x + 2)(x - 3) < 0$ или, записав данное неравенство в виде $x^2 < x + 6$, спроецируйте на ось x ту часть параболы $y = x^2$, которая ниже прямой $y = x + 6$ (рис. 98); з) $]-\infty;$
 $-1,5[\cup]1; +\infty[$. 226. а) Область определения функции $y = \sqrt{x} - 1$ — $[0; +\infty[$, поэтому для данной функции $5 - x \geq 0$, откуда $x \leq 5$. Итак, область определения данной функции — числовой луч $]-\infty; 5[$; б) имеем систему $-x \geq 0, x + 1 \neq 0$. Ответ: $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$;

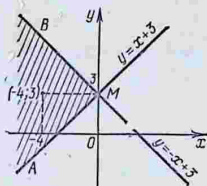


Рис. 99

в) $]-\infty; 3[\cup]3,5; +\infty[$; г) 2,5; 4[; д) $]-\infty; 5[$. 227. а) Искомое множество — угол AMB (рис. 99), образованный при пересечении

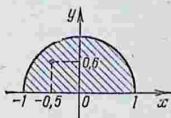


Рис. 100

прямых $y = x + 3$ и $y = -x + 3$. Одно из решений $x = -4; y = 3$; б) искомое множество — полукруг, ограниченный окружностью с центром в начале координат и радиусом, равным единице, и осью абсцисс. Одно из решений $x = -0,5; y = 0,6$ (рис. 100); в) часть плоскости, ограниченная параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (включая границы).

228. а) 2, 1, $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \dots$; б) 1, 2, 4, 8, 16; в) 2, 0, 2, 0, 2, ...;

г) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, ...; д) 30° , 210° , 390° , 570° , 750° . 229. а) $x_{k-1} = (k-1)^2 - 2(k-1) = k^2 - 4k + 3$; б) $x_{k+1} = (k+1)^2 - 2(k+1) = k^2 - 1$.

230. а) Нужно найти такие натуральные значения переменной n , при которых выражение $n^2 - 15n + 30$ равно -20 . Решив уравнение $n^2 - 15n + 30 = -20$, получим корни 5 и 10. Значит, число -20 содержится среди членов последовательности дважды: 5-й и 10-й члены равны -20 ; б) 1-й и 14-й члены равны 14. 231. 1. Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно знать ее первый член a_1 и разность d . 2. Если $d > 0$, арифметическая прогрессия является *возрастающей последовательностью*, если $d < 0$ — *убывающей*.

3. Любой член арифметической прогрессии начиная со второго является средним арифметическим предшествующего и последующего членов, т. е. $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2$. И обратно: если некоторая последовательность такова, что любой член ее начиная со второго является средним арифметическим предшествующего и последующего членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия. 232. 1. $a_1 =$

$= a_2 - d$; $a_3 = a_2 + d$. 2. Если $b - a = c - b$, то $b = \frac{a+c}{2}$. 3. Должно

выполняться равенство $x = \frac{1 + (14 - x)}{2}$, откуда $x = 5$. Арифметическая

прогрессия: 1, 5, 9. 233. $a_{31} = -8,5 + (-0,4)(31 - 1) = -8,5 - 12 = -20,5$.

234. По формуле любого члена арифметической прогрессии, $a_n = -6 + (+4)(n - 1) = -6 + 4n - 4 = 4n - 10$. Решив уравнение $4n - 10 = 146$, получим, что его корень — число 39, поэтому число 146 — 39-й член прогрессии. 235. Так как $a_3 = a_1 + 2d$, $a_{13} = a_1 + 12d$, то имеем систему, состоящую из уравнений $a_1 + 2d = 8,2$ и $a_1 + 12d =$

$= 10,2$. Из системы находим $a_1 = 7,8$; $d = 0,2$. Решив неравенство $7,8 + 0,2(n - 1) < 20$, найдем, что $n < 62$. Таким образом, в этой прогрессии каждый из первых 61 членов меньше 20. 236. Арифмети-

ческая прогрессия будет содержать пять членов (два данных и три вставляемых); $a_1 = 8$, $a_5 = 0$, $n = 5$. Найдем разность d этой прогрессии, воспользовавшись формулой n -го члена: $0 = 8 + 4d$; $d = -2$. Получим арифметическую прогрессию 8, 6, 4, 2, 0. 237. Например, $a_2 + a_{15} =$

$= (a_1 + d) + (a_{16} - d) = 40$; $S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2}$, или 320. 238. а) Имеем

арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$, $n = 100$;

$S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$; б) первое нечетное число 1, последнее 99, число нечетных чисел, меньших 100, равно 50; значит, $S_{50} =$

$= \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2500$. 239. 1. 15. У к а з а н и е. $a_1 = 21$, $d = -3$, $S_n = 0$.

Составим уравнение $0 = \frac{(2 \cdot 21 + (-3)(n - 1)) \cdot n}{2}$ (см. формулу (2)).

Теперь имеем:

$$\frac{(42 - 3n + 3)n}{2} = 0, (45 - 3n)n = 0; n_1 = 0, n_2 = 15.$$

Первый корень надо отбросить. 2. Так как $a_1 = 0$, $d = 4$, $S_n > 112$,

то задача сводится к решению неравенства $\frac{(0 + 4(n - 1)) \cdot n}{2} > 112$,

из которого находим $n^2 - n - 56 > 0$ или $(n - 8)(n + 7) > 0$, откуда $n > 8$ или $n < -7$. Так как $n \in \mathbb{N}$, то условию задачи удовлетворяют

значения $n=9, 10, 11, \dots, 240$. 1. Для того чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q . 2. Любой член геометрической прогрессии начиная со второго равен арифметическому квадратному корню из произведения предшествующего и последующего членов, т. е. $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. Справедливо и обратное: если некоторая последовательность такова, что любой член ее начиная со второго равен арифметическому квадратному корню из произведения предшествующего и последующего членов, то эта последовательность — геометрическая прогрессия. 3. Если $q > 0$ и $q \neq 1$, то прогрессия является либо возрастающей, либо убывающей, например если $b_1=1, q=2$, то прогрессия $1, 2, 4, \dots$ — возрастающая; если $b_1=-5, q=2$, то прогрессия $-10, -20, -40, \dots$ — убывающая. Если $q=1$, то все члены прогрессии равны между собой. Если $q < 0$, то прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью, например если $b_1=2, q=-3$, то прогрессия будет такая: $2, -6, 18, -54, 162, \dots$. 241. 1. $b_1=b_2:q; b_3=b_2q$. 2. Так как $q = b_4:b_3, b_2=b_3:q$, или $q=1/\sqrt{2}, b_2=6, b_1=6/\sqrt{2}$. 3. $b_2=4, b_4=16, b_5=32$. 4. Указание. Нужно доказать, что $\frac{a^2-1}{(a+1)^2} = \frac{(a-1)^2}{a^2-1}$ при любом $|a| \neq 1$. 242. 1. $b_5 = (-0,001) \cdot 10^4 = -10$. 2. Указание. $c_1q \cdot c_4q^{10} = c_1q^4 \cdot c_4q^7$. 3. Из условия $a_2=0,36, a_5=360$ составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_1q = 0,36, \\ a_1q^4 = 360. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $q^3=1000, q=10; a_1=0,036; a_3=3,6; a_4=36$.

243. Имеем: $b_7=b_1q^6; b_1=\frac{b_7}{q^6}$, или $b_1=0,02; S_7=\frac{b_7q-b_1}{q-1}$, или $S_7 = \frac{1,28 \cdot 2 - 0,02}{2-1} = 2,54$. 244. $S_8=315, a_1=S_1=5, S_2=5 \cdot (2^2-1)=15, a_2=10, q=2$.

§ 21

245. 1. Действие нахождения логарифма называется логарифмированием. 2. Логарифмы существуют только для положительных чисел; отрицательные числа и ноль логарифмов не имеют; например, выражения $\lg(-3), \lg 0, \lg(1-\sqrt{2})$ не имеют смысла, ибо если допустить, что $\lg(-3)$ равно действительному числу x , тогда число 10^x должно быть равно числу -3 , а это невозможно, так как $10^x > 0$ при любом x . 3. Справедливо при $a > 0$. 246. а) $10^2=100$; б) $10^{-1}=0,1$; в) $10^{1/2}=\sqrt{10}$; г) $10^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{10^{1/5}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{1/5} = \sqrt[5]{0,1}$, или $10^{-1/5} = (10^{-1})^{1/5} = \sqrt[5]{0,1}$; д) $10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{10^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$. 247. а) $\lg 1000 = 3$; б) $\lg 1 = 0$; в) $\lg 0,001 = -3$; г) $\lg a = t$; д) $\lg b = x+1$. 248. Разделив обе части данного равенства на $10^b \neq 0$, получим $10^a:10^b = 10^b:10^b$ или $10^{a-b}=1$, откуда $a-b=0$, т. е. $a=b$. 249. а) $10^x = 10^1, x=1$; б) $10^x=10^0, x=0$; в) $10^x=10^{-2}, x=-2$; г) $10^x = 4 \cdot 0,025, 10^x=0,1, 10^x=10^{-1}, x=-1$; д) $10^x=10^{1/3}, x=1/3$;

е) $10^x = \frac{1}{\sqrt[5]{10^2}}$; $10^x = 10^{-\frac{2}{5}}$; $x = -0,4$. 250. а) 1; б) 4; в) -2;

г) $\lg(10 \cdot 10^{1/2}) = \lg 10^{3/2} = 3/2$; д) $\lg 1^2 = \lg 1 = 0$; е) $\lg(1+0) = \lg 1 = 0$. 251. а) $\lg \lg 10 = \lg 1 = 0$; б) $\lg \sqrt{10} + \sqrt{\lg 10} = \lg 10^{1/2} + \sqrt{1} = 1/2 + 1 = 1,5$; в) $(\lg 0,1)^2 + \lg 10 \lg 100 = (-1)^2 + 1 \cdot 2 = 3$;

г) $\frac{1 - (\lg 0,01)^2}{1 + (\lg 0,01)^2} = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -0,6$. 252. Не имеют смысла

следующие выражения: $\lg 0$; $\lg(-5)$; $\lg\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right)$; $\lg(\sqrt{3}-2)$.

253. а) По основному логарифмическому тождеству ($10^{\lg a} = a$, $a > 0$) имеем $10^{\lg 3} = 3$; б) $10^{\lg 2} + 10^{\lg 5} = 2 + 5 = 7$; в) $10^2 + \lg 5 = 10^2 \times$

$\times 10^{\lg 5} = 100 \cdot 5 = 500$; г) $10^{\lg 7-1} = 10^{\lg 7} \cdot 10^{-1} = 7 \cdot 10^{-1} = 0,7$; д) $10^1 \cdot 10^{-\lg 5} = 10 : 10^{\lg 5} = 10 : 5 = 2$; е) применяя тождество $a^{mn} = (a^m)^n$, имеем $10^{-2 \lg 3} = (10^{\lg 3})^{-2} = 3^{-2} = 1/9$; ж) $0,1^{-\lg 4} =$

$= (10^{-1})^{-\lg 4} = 10^{\lg 4} = 4$; з) $5 \cdot (10^{\lg 5})^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$; и) $10^{\lg \lg 100} =$

$= 10^{\lg 2} = 2$; к) $5^{\lg 100} = 5^2 = 25$; л) $0,25^{\lg \sqrt{10}} = 0,25^{\lg 10^{1/2}} = 0,25^{1/2} =$

$= \sqrt{0,25} = 0,5$. 254. а) $x = 1$; б) $|x| = 2$, откуда $x = 2$ или $x = -2$;

в) $(10^2)^{\lg x} = 4$; $(10^{\lg x})^2 = 4$; $x^2 = 4$, откуда $x = 2$; значение $x = -2$

не годится, ибо $\lg(-2)$ не имеет смысла. 255. а) По определению логарифма, $x = 10^2 = 100$; б) $x = 10^0 = 1$; в) $-x = 10^{-1}$; откуда $x =$

$= -0,1$; г) $x = 10^{0,1} = \sqrt[10]{10}$; д) $x - 2 = 10$; $x = 12$; е) $-x - 3 = 0,01$;

$x = -3,01$; ж) $3 - x = 1$; $x = 2$; з) $x^2 - 6 = 10$; $x_1 = -4$, $x_2 = 4$; и) $x^2 -$

$-3x = 10$; $x_1 = -2$, $x_2 = 5$; к) $x^2 + 5x + 6,1 = 0,1$; $x_1 = -3$, $x_2 = -2$.

256. а) Обозначим $\lg x$ через a , тогда $(\lg x)^2 = a^2$ и данное уравнение

можно записать так: $a^2 + a = 0$, или $a(a+1) = 0$, откуда $a = -1$ или

$a = 0$, т. е. $\lg x = -1$ или $\lg x = 0$; следовательно, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 1$;

б) $\lg x = 1$ или $\lg x = 2$; $x_1 = 10$, $x_2 = 100$; в) $\lg x = -1$ или $\lg x = 3/2$;

$x_1 = 0,1$, $x_2 = 10^{3/2} = \sqrt{10^3} = 10 \sqrt{10}$. 257. а) $\lg 18 = \lg(9 \cdot 2) = \lg 3^2 +$

$+ \lg 2 = 2 \lg 3 + \lg 2$; б) $\lg 75 = \lg(5^2 \cdot 3) = 2 \lg 5 + \lg 3$; в) $\lg \sqrt[3]{\frac{25}{8}} =$

$= \lg 5^{\frac{2}{3}} - \lg 2^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3} \lg 5 - 3 \lg 2$. 258. а) $\lg 60 = \lg(2 \cdot 3 \cdot 10) = \lg 2 +$

$+ \lg 3 + \lg 10 \approx 0,30 + 0,48 + 1 \approx 1,78$; б) $\lg \frac{10}{3} = \lg 10 - \lg 3 \approx 1 -$

$- 0,48 \approx 0,52$; в) $\lg \frac{1}{6} = \lg 1 - \lg 6 = 0 - (\lg 2 + \lg 3) \approx - (0,30 +$

$+ 0,48) \approx -0,78$; г) $\lg \sqrt[3]{12} = \lg 12^{\frac{1}{3}} = \lg(2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (2 \lg 2 + \lg 3) \approx$

$\approx \frac{1}{3} (2 \cdot 0,30 + 0,48) \approx 0,36$; д) $\lg 0,03 = \lg 3 - \lg 100 \approx 0,48 - 2 \approx$

$\approx -1,52$; е) $\lg(200 + 100) = \lg 300 = \lg 3 + \lg 100 \approx 0,48 + 2 \approx 2,48$;

ж) $\lg 200 + \lg 100 = \lg(2 \cdot 100) + 2 = \lg 2 + 4 \approx 0,30 + 4 \approx 4,30$;

з) $\frac{\lg 10 + \lg 90}{\lg(10 + 90)} = \frac{1 + 2 \lg 3 + 1}{2} = \frac{2 + 2 \lg 3}{2} = 1 + \lg 3 \approx 1,48$. 259.

а) $\lg(100a) - \lg \frac{a}{10} = \lg 100 + \lg a - (\lg a - \lg 10) = 2 + \lg a - \lg a + 1 =$

$$= 3; \text{ б) } \lg \frac{x}{100} - \lg(1000x) = \lg x - \lg 100 - (\lg 1000 + \lg x) = \lg x - 2 - 3 - \lg x = -5. \text{ 260. а) } \lg \sqrt[3]{0,1} = \lg 0,1^{1/3} = \frac{1}{3} \lg 0,1 = \frac{1}{3} \cdot (-1) = -0,33; \text{ б) } \lg \frac{1}{\sqrt[3]{10^3}} = \lg 10^{-1} = -\frac{1}{3} \lg 10 = -\frac{1}{3}; \text{ в) } 2 \lg \sqrt[3]{10^3} = 2 \lg 10 = 2; \text{ г) } \lg(0,1 \sqrt[3]{1000}) = \lg 0,1 + \lg 10 = -1 + 1 = 0. \text{ 261. а) } \frac{\lg 8}{\lg 2} = \frac{\lg 2^3}{\lg 2} = \frac{3 \lg 2}{\lg 2} = 3.$$

Предостережение. Некоторые учащиеся ошибочно заменяют $\frac{\lg 8}{\lg 2}$ на $\lg \frac{8}{2}$ и получают $\lg 8 - \lg 2 = 2 \lg 2$. Надо помнить, что в общем случае

$$\frac{\lg a}{\lg b} \neq \lg a - \lg b, \quad a > 0; \quad b > 0; \quad b \neq 1.$$

$$\text{262. а) } \lg \sqrt[3]{0,8} = \lg \left(\frac{8}{10}\right)^{1/3} = \lg \left(\frac{2^3}{10}\right)^{1/3} = \lg \frac{2}{10^{1/3}} = \lg 2 - \frac{1}{3} \lg 10 \approx 0,30 - 0,33 \approx -0,03; \text{ б) } \lg \sqrt[3]{3,2} = \lg \left(\frac{2^5}{10}\right)^{1/3} = \lg \frac{2^5}{10^{1/3}} = 1,25 \lg 2 - 0,25 \lg 10 = 1,25 \cdot 0,30 - 0,25 \approx 0,375 - 0,25 \approx 0,13. \text{ 263. а) } x = \frac{a^2 b^3}{c d^2} = a^2 b^3 c^{-1} d^{-2}; \lg x = \lg a^2 + \lg b^3 + \lg c^{-1} + \lg d^{-2} =$$

$$= 2 \lg a + 3 \lg b - \lg c - \frac{1}{2} \lg d; \text{ б) } x = 10 a^4 b^{2/3} c^{-1/3}; \lg x = \lg 10 + 4 \lg a + \frac{2}{3} \lg b - \frac{1}{3} \lg c; \text{ в) } \lg x = \lg(a+3)^2 + \lg b^3 - \lg(a^2+2)^2 - \lg c^4 = 2 \lg(a+3) + 3 \lg b - 2 \lg(a^2+2) - 4 \lg c.$$

Предостережение. Некоторые учащиеся ошибочно заменяют $\lg(a+3)$ на $\lg a + \lg 3$. Надо помнить, что в общем случае логарифм суммы не равен сумме логарифмов, т. е. $\lg(a+b) \neq \lg a + \lg b$;

$$\text{г) } \lg x = 2,5 \lg(a+b) + 1,5 \lg c - 0,25 \lg d. \text{ 264. а) Если } a > 0, b > 0 \text{ и } a=b, \text{ то } \lg a = \lg b. \text{ Используя это свойство логарифмов, прологарифмируем обе части данного уравнения: } \lg 2^x = \lg 5; \lg 2 = \lg 5, \text{ откуда } x = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx \frac{0,70}{0,30} \approx 2,3; \text{ б) } x \lg 3 = 2 \lg 5; x = \frac{2 \lg 5}{\lg 3} \approx \frac{2 \cdot 0,70}{0,48} \approx 2,9; \text{ в) } x = \frac{\lg 100}{\lg 2} \approx \frac{2}{0,30} \approx 6,7; \text{ г) } x = \frac{\lg 20}{\lg 0,1} = \frac{\lg 2 + \lg 10}{-1} \approx -(0,30 + 1) \approx -1,30. \text{ 265. а) По формулам потенцирования } \lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = 1; \text{ б) } \lg 360 - \lg 0,36 = \lg(360 : 0,36) = \lg 1000 = 3; \text{ в) } \lg 0,15 - \lg 15 = \lg 0,01 = -2; \text{ г) } \frac{1}{2} \lg 25 + \frac{1}{3} \lg 64 =$$

$-\frac{1}{5} \lg 32 = \lg (5^2)^{1/2} + \lg (2^5)^{1/3} - \lg (2^5)^{1/5} = \lg 5 + \lg 4 - \lg 2 =$
 $= \lg (5 \cdot 4 : 2) = \lg 10 = 1.$ 266. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $\lg a = \lg b$. Дока-
 жем, что $a = b$. По условию, $\lg a - \lg b = 0$, или потенцируя $\lg \frac{a}{b} =$
 $= 0$, откуда по определению логарифма $10^0 = \frac{a}{b}$, или $\frac{a}{b} = 1$ и
 $a = b$. Справедливо и обратное утверждение: если $a = b$, то $\lg a =$
 $= \lg b$. 267. а) $\lg x = \lg 2 + \lg 5^3 = \lg (2 \cdot 5^3) = \lg 250$; $x = 250$; б) $\lg x =$
 $= \lg 2^3 + \lg 3^2 = \lg (2^3 \cdot 3^2) = \lg 72$; $x = 72$; в) $\lg x = \frac{1}{4} \lg (8 \cdot 32) =$
 $= \lg (2^3 \cdot 2^5)^{1/4} = \lg (2^8)^{1/4} = \lg 2^2 = \lg 4$; $x = 4$; г) $\lg x = \lg \left(\frac{8}{2}\right)^3 = \lg 64$;
 $x = 64$; д) если $a > b > 0$, то $\lg x = \lg \frac{(a-b)^2}{a^2 - b^2} = \lg \frac{a-b}{a+b}$; $x = \frac{a-b}{a+b}$.
 268. а) $\lg (2x-5) = \lg (3^2 \cdot 5)$; $2x-5=45$; $x=25$; б) $9-0,1x=3$;
 $0,1x=6$; $x=60$; в) заменим 1 на $\lg 10$, тогда $\lg (20-5x) = \lg x +$
 $+ \lg 10$; $\lg (20-5x) = \lg 10x$; $20-5x=10x$; $x=1\frac{1}{3}$; г) заменим 2
 на $2 \lg 10 = \lg 100$, тогда $\lg x = \lg 100 - \lg 4$; $x=25$; д) $\lg (x+6) =$
 $= \lg 2,5x$; $x=4$; е) $\lg (x-4)(x+5) = \lg 10$; $x^2+x-30=0$, отсюда
 $x_1=-6$, $x_2=5$; первый корень надо отбросить, ибо при $x=-6$ вы-
 ражения $\lg (x-4)$ и $\lg (x+5)$ не имеют смысла. 269. а) Прямая $y =$
 $= 2x$, где $x > 0$ (рис. 101); б) $y = 10^{2 \lg x} = 10^{\lg x^2}$. График — парабол-
 а, где $x > 0$ (рис. 102); в) график — прямая $y = x - 2$, где $x > 2$

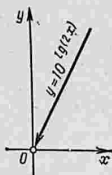


Рис. 101

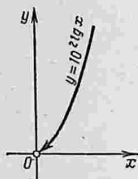


Рис. 102

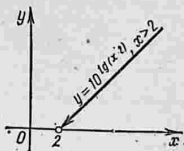


Рис. 103

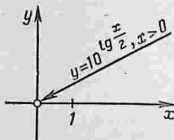


Рис. 104

(рис. 103); г) прямая $y = x - 2$, где $x > 0$; д) прямая $y = \frac{1}{2}x$, где
 $x > 0$ (рис. 104). 270. а) 40,8; б) 2,49; в) 0,905; г) 11,8; д) 1,43.

271. а) $3,58 \cdot 2,5 \approx 8,96$; б) $43,5 \cdot 1,92 \approx 83,7$; в) $(18,6 : 72,5) \cdot 110 \% \approx 25,7 \%$. 272. а) $x = \frac{27,3 \cdot 4,25}{0,85} \approx 135$; б) $x = \frac{168 \cdot 0,735}{374} \approx 0,339$. 273. а) $d = \frac{C}{\pi}$, поэтому $\frac{4,21}{\pi} \approx 1,34$; б) $d \approx 4,52$; в) $d \approx 82,8$.

ГЛАВА II

§ 22

274. *Геометрической фигурой* называется любое множество точек. Например, отрезок, угол, треугольник, окружность, круг — плоские фигуры; шар, куб, прямоугольный параллелепипед — неплоские фигуры.

а) *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки; б) *кругом* называется множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых от данной точки этой плоскости не больше (равно или меньше) данного. 275. а) *Отрезком* называют множество, состоящее из двух различных точек и всех точек, лежащих между ними. Обозначается отрезок так: $[AB]$, точки A и B называются концами отрезка. *Длиной отрезка* называется расстояние между его концами и обозначается так: $|AB|$; б) если на прямой AB взять произвольную точку O , то она разбивает эту прямую на три подмножества. Подмножества A и B называются открытыми лучами, подмножество C состоит из одной точки O . Объединение открытого луча с его началом — точкой O — называется *лучом*. Луч с началом в точке O , содержащий точку A , обозначается $[OA)$. 276. а) *Ломаной* называется объединение отрезков A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , ... (рис. 105) таких, что конец каждого отрезка (кроме последнего) является началом следующего и смежные отрезки не лежат на одной прямой. Каждый из отрезков, составляющих ломаную, называется ее *звеном*. Сумма длин всех звеньев ломаной называется *длиной ломаной*; б) *многоугольником* называется объединение замкнутой ломаной и ее внутренней области. Элементы многоугольника — стороны, вершины и углы (внутренние углы). *Диагональю многоугольника* называется отрезок, соединяющий две его несоседние вершины. 277. а) *Аксиомой* называется предложение, принимаемое без доказательства. Например, через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая (аксиома прямой). Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат этой плоскости; б) *теоремой* называется предложение, истинность которого доказывается. 278. а) Круг с центром в точке A и радиусом 2 см; б) окружность с центром в точке B и радиусом 2 см. 279. Точки A , B и C принадлежат одной прямой, так как выполняется равенство $|CA| + |AB| = |CB|$. 280. 1. По свойству расстояний для трех точек, не лежащих на одной прямой, имеем неравенство $|AD| < |AB| + |BD|$. Прибавим к обеим частям этого неравенства по $|DC|$, получим

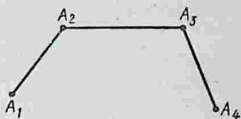


Рис. 105

$$|AD| + |DC| < |AB| + |BD| + |DC|$$

или

$$|AD| + |DC| < |AB| + |BC|.$$

2. Имеем $|AM| + |MD| + |DC| < |AB| + |BC|$ — см. предыдущую задачу. Заменяя сумму $|MD| + |DC|$ меньшей величиной $|MC|$, получим $|AM| + |MC| < |AB| + |BC|$. 281. На основании свойства прямой имеем (рис. 106):

$$|AB| < |BC| + |AC|, |BC| < |AC| + |AB|, |AC| < |AB| + |BC|.$$

Если вычесть из обеих частей первого неравенства по $|BC|$, второго — по $|AC|$ и третьего — по $|AB|$, то получим

$$|AB| - |BC| < |AC|, \quad |BC| - |BC| < < |AB|, \quad |AC| - |AB| < |BC|.$$

Объединяем эти неравенства с первоначальными, тогда

$$\begin{aligned} |AB| - |BC| < |AC| < |AB| + |BC|, \\ |BC| - |AC| < |AB| < |BC| + |AC|, \\ |AC| - |AB| < |BC| < |AC| + |AB|. \end{aligned}$$

Это можно сформулировать так: длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон, но не больше их разности. 282. 1. Здесь могут встретиться две возможности: длина третьей стороны равна или 3 см, или 6 см, но треугольник со сторонами 3, 3 и 6 см невозможен. Возможен только треугольник, длины сторон которого 3, 6 и 6 см, так как $6 < 6 + 3$. Итак, основанием треугольника служит сторона длиной 3 см, а длина каждой боковой стороны равна 6 см. 2. Имеем: $|AB| - |BC| < |AC| < |AB| + |BC|$ (см. 281); отсюда получаем, что $2 \text{ см} < |AC| < 8 \text{ см}$. 284. 1. Развернутым углом называют угол, стороны которого являются противоположными лучами. Прямым углом называется половина развернутого угла. 2. Смежными углами называют два угла, объединение которых — развернутый угол, а пересечение — луч. На рис. 107 углы ABC и ABD — смежные. Сумма величин смежных углов равна 180° .

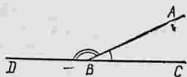


Рис. 107

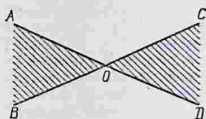


Рис. 108

3. Вертикальными углами называются два угла, меньшие развернутого, если стороны одного из них являются лучами, противоположными сторонами другого угла. На рис. 108 углы AOB и COD вертикальные, луч OC противоположен лучу OB , а луч OD — лучу OA . Вертикальные углы конгруэнтны, а поэтому их величины равны: $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. 4. Биссектрисой угла называется луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам. 5. Две прямые называются взаимно перпендикулярными, если при пересечении они образуют прямые углы. Если прямая AB перпенди-

кулярна прямой CD , то пишут $(AB) \perp (CD)$. 285. 1. Точка, луч, угол. 2. Прямой угол или угол в 60° . 287. 2. $\beta = 180^\circ - \alpha$. 3. Если величину меньшего угла обозначить через x , то величина большего угла будет $x + 90^\circ$; тогда имеем уравнение $x + (x + 90) = 180$. Решив это уравнение, получим, что величина меньшего угла равна 45° , а большего — 135° . 4. 108° и 72° . Указание. Если обозначить величину меньшего угла через x , тогда величина большего будет $1,5x$ (150% от $x = 1,5x$). 288. а) Если величина одного смежного угла α , а другого — β , то $\alpha + \beta = 180^\circ$. Величина угла между биссектрисами углов равна $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$; б) 180° .

§ 23

289. а) Задано отображение дуги CD на дугу AB ; б) постройте луч $[OZ]$, тогда $\{Z_1\} = \{OZ\} \cap \smile AB$; в) отображение обратимо, так как при данном отображении любые две различные точки дуги CD имеют разные образы.

Точки C, X, Y, D имеют следующие образы: $X \rightarrow X_1; Y \rightarrow Y_1; D \rightarrow B$. 290. а) Чтобы задать отображение окружности на контур треугольника, можно взять внутри окружности любую точку O и провести лучи с началом в этой точке. Они будут пересекать окружность и контур треугольника; б) точки X, Y, Z окружности отображаются соответственно в точки пересечения лучей OX, OY, OZ с контуром треугольника; в) отображение обратимо. 291. а) на стороне A_1B_1 отложите $|A_1M_1| = |AM|$; б) из вершин A_1 и C_1 проведите две окружности радиусами AM и CM . Эти окружности пересекутся в двух точках; та из них, которая лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$, и будет искомой (рис. 109).

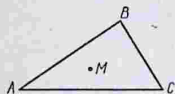


Рис. 109

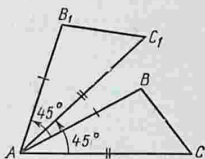


Рис. 110

292. Строим луч $[AB_1]$ так, что $\widehat{BAB_1} = 45^\circ$. На $[AB_1]$ отложим $[AB_1] \cong [AB]$, тогда $B_1 = R_A^{45^\circ}(B)$. Аналогично строится $C_1 = R_A^{45^\circ}(C)$. Треугольник AB_1C_1 — искомый (рис. 110). 293. Указание. Центр поворота — точка A . Угол поворота есть $\widehat{BAD}$. 294. Квадрат отображается на себя при поворотах вокруг точки пересечения диагоналей на $90, 180, 270^\circ$ как по часовой, так и против часовой стрелки. 295. а) $\alpha = 60^\circ + 360^\circ n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\alpha + 120^\circ = -\alpha + 360^\circ n$, отсюда $\alpha = -60^\circ + 180^\circ n$, где $n \in \mathbb{Z}$. 296. а) Эта прямая отображается на

себя; б) на противоположный луч с тем же началом; в) на угол, вертикальный данному; г) на параллельную прямую. 297. а) Строим точку, симметричную центру данной окружности, из полученной точки проводим окружность того же радиуса; б) возможны два случая: 1) центр симметрии совпадает с центром данной окружности, тогда получаем ту же окружность; 2) если центр симметрии не совпадает с центром окружности, то получаем окружность, пересекающую первую и ей конгруэнтную. 298. Надо через точку M провести прямую, перпендикулярную оси l , и на луче MO ($O \in l$) отметить точку M_1 так, чтобы $|OM_1| = |OM|$ (рис. 111). 299. а) Две: прямая, на которой расположен отрезок, а также прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину; б) одну — прямую, на которой лежит луч; в) бесчисленное множество: самая прямая и любая прямая, перпендикулярная данной прямой; г) бесчисленное

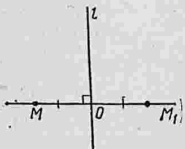


Рис. 111

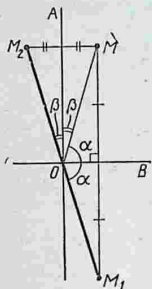


Рис. 112

множество: прямые, проходящие через центр окружности; д) одну биссектрису угла; е) три: биссектриса каждого угла; ж) четыре: две содержат диагонали и две — серединные перпендикуляры к смежным сторонам. 300. 1. Равнобедренный треугольник. 2. Указание. $\widehat{M_1OM_2} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, поэтому угол M_1OM_2 — развернутый (рис. 112).

§ 24

301. Это наименьшее из всех расстояний от точки до всевозможных точек прямой, или это расстояние от точки до основания перпендикуляра, проведенного через точку к прямой. 302. 1) Если точка A лежит внутри угла, например MON (рис. 113), то за расстояние от этой точки до сторон угла принимаем $|AB|$ и $|AC|$ ($[AB] \perp [ON]$, $[AC] \perp [OM]$); 2) если точка A_1 расположена внутри угла MOA_2 , то расстояние от A_1 до $[OM]$ — это $|A_1C_1|$ ($[A_1C_1] \perp [OM]$), а от A_1 до $[ON]$ — это $|A_1O|$; если точка A_3 расположена внутри угла A_2OP , то $|A_3O|$ — это расстояние от точки A_3 до $[ON]$ и до $[OM]$; 4) если точка A_4 расположена внутри угла NOP , то $|A_4B_1|$ ($[A_4B_1] \perp [ON]$) — расстояние от

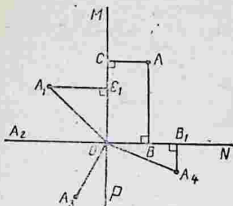


Рис. 113

точки A_1 до $[ON)$ и $|A_1O|$ — расстояние от точки A_1 до $[OM)$.
 303. а) Проекцией точки A на прямую MN называют основание A_1 перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой MN (рис. 114); б) проекция отрезка AB на прямую MN — отрезок A_1B_1 ; концы этого отрезка — проекции концов данного отрезка (рис. 115).

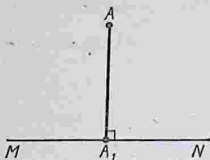


Рис. 114

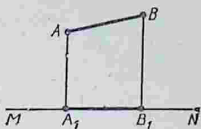


Рис. 115

304. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC (рис. 116). Проекция катета BC на гипотенузу AB — отрезок BD ; проекция катета AC на гипотенузу — отрезок AD ; проекция катетов BC и AC на CD — отрезок CD . 305. Нет. Например, семафор, стоящий у железнодорожного полотна, и рельс, расположенный на этом полотне, хотя и

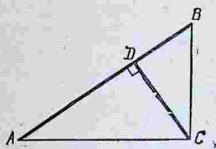


Рис. 116

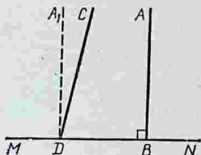


Рис. 117

не пересекаются, однако их нельзя назвать параллельными, так как они, кроме того, расположены в разных плоскостях. 306. 1. Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной прямой. 2. Пусть $(AB) \perp MN$ и (CD) — наклонная (рис. 117). Допустим, что (AB) не пересекает (CD) , т. е. $(AB) \parallel (CD)$. Проведем через точку D перпендикуляр к MN , т. е. $(DA_1) \perp MN$, тогда $(DA_1) \parallel BA$, т. е. через точку D проведены две прямые DA_1 и DC , параллельные (AB) , что противоречит аксиоме параллельных. 307. 1. На рис. 118 изображены два сонаправленных луча OB и O_1B , лежащих на одной прямой AB ; один из них содержится в другом. Лучи O_1B и OA противоположно направлены, $[O_1B)$ не содержится в $[OA)$.



Рис. 118

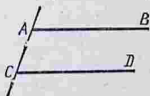


Рис. 119

2. На рис. 119 лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены. Прямая AC делит плоскость на две полуплоскости; $[AB)$ и $[CD)$ лежат в одной полу-

плоскости. На рис. 120 $[AB]$ и $[CD]$ противоположно направлены; они лежат в разных полуплоскостях. 308. Углы 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7—соответственные (рис. 121). Углы 3 и 5, 2 и 8—внутренние накрест лежащие.

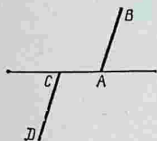


Рис. 120

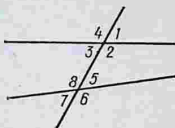


Рис. 121

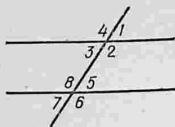


Рис. 122

309. а) Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 сонаправлены (рис. 122); б) соответственные углы при параллельных прямых конгруэнтны, так как они сонаправлены. 310. α и $180^\circ - \alpha$. 311. 2. Противоположные стороны попарно параллельны (по признаку параллельности прямых). 312. $\hat{1} = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$; $\hat{1} \neq \hat{3}$, поэтому $a \neq b$; $\hat{3} = \hat{6} = 49^\circ$, поэтому $c \parallel d$.

§ 25

313. а) Для угла A противолежащей стороной является BC ; б) стороне AB противолежит угол C ; в) углы A и B прилежат к стороне AB . 314. Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до противолежащей стороны. Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины треугольника к противолежащей стороне. 315. 1. В вершине прямого угла. 2. См. рис. 123. 316. $3(p - a/2)$. 317. Имеем

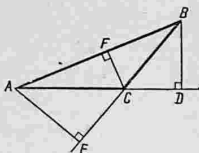


Рис. 123

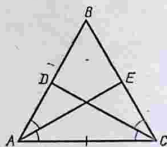


Рис. 124

$\triangle ABC \cong \triangle KLM$, поэтому $[AC] \cong [ML]$, $\angle A \cong \angle L$, $\angle C \cong \angle M$. 318. а) Три основных элемента, из которых по крайней мере один должен быть линейным; б) два основных элемента, из которых по крайней мере один линейный; в) надо иметь только сторону треугольника. 319. Построенные треугольники будут конгруэнтны по признаку ССС. 321. Эти отрезки лежат против конгруэнтных углов в конгруэнтных треугольниках. 322. Эти углы лежат в конгруэнтных треугольниках ABD и BEC против конгруэнтных сторон AB и BC . 323. б) Указание $\triangle ADC \cong \triangle AEC$ по признаку УСУ (рис. 124).

324. Нет, не перпендикулярна. Если допустить, что $[AD] \perp [BC]$ (рис. 125), то $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ (по признаку УСУ) и тогда $|AB| = |AC|$, что ложно, так как треугольник ABC неравнобедренный.

325. Имеем $[BD] \cap [MN] = O$. $\triangle MBO \cong \triangle ONO$ (УСУ), отсюда

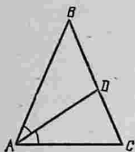


Рис. 125

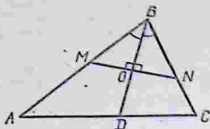


Рис. 126

$|MB| = |BN|$ (рис. 126). 326. Это следует из того, что $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (по двум катетам). 327. У к а з а н и е. Равенство расстояний BF и CE следует из конгруэнтности треугольников BFD и CDE (рис. 127).

328. Кроме прямого угла надо иметь два элемента, из которых по крайней мере один линейный.

329. Центр такой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. 330. Надо на этой окружности выбрать три произвольные точки A , B и C . Точка пересечения серединных перпендикуляров к хордам AB и BC будет центром этой окружности. 331. Искомая точка X — точка пересечения серединного перпендикуляра к $[AB]$ с прямой l (рис. 128).

332. Центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC , должен быть равноудален от сторон AB и AC , а также от сторон AC и BC ; значит, центр принадлежит биссектрисе угла A , а также биссектрисе угла C ; точка пересечения этих

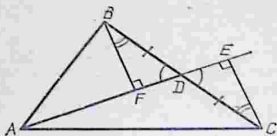


Рис. 127

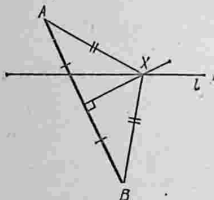


Рис. 128

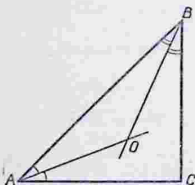


Рис. 129

биссектрис является центром вписанной окружности. 333. Нет, так как диагональ такого прямоугольника не является биссектрисой его угла.

334. Решением будет точка пересечения биссектрисы угла AOB с се-

единым перпендикуляром к отрезку MN . 335. 1. 90° . 2. 45° . 3. 60° . 336. 1. $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. 2. $\beta = 90^\circ - \alpha$. 3. $\alpha = 90^\circ - \beta/2$. 337. Указание. Вычислите величину углов треугольников ABE и AEC . 338. Пусть O — точка пересечения биссектрис BO и AO (рис. 129). Имеем: $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 90^\circ$; $\frac{1}{2} \widehat{BAC} + \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \widehat{BAO} +$

$+ \widehat{ABO} = 45^\circ$, откуда $\widehat{AOB} = 135^\circ$. 339. 2. Может, если этот внешний угол — смежный с внутренним тупым углом треугольника. 3. $90^\circ + \alpha/2$. 340. 1. 2α . 2. Это следует из того, что угол при основании треугольника конгруэнтен углу между биссектрисой этого внешнего угла и боковой стороной треугольника. 341. 1. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы. 2. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. 3. 5 см; 5,5 см. Указание. Воспользоваться свойством катета, лежащего против угла в 30° , тогда одна из сторон треугольника делится перпендикуляром на отрезки длиной 1,5 и 5,5 см, а другая — на 2 и 5 см. 342. а) $180^\circ \times (4-2) = 360^\circ$; б) $180^\circ (5-2) = 540^\circ$; в) $180^\circ (6-2) = 720^\circ$. 343. а) $\frac{180^\circ (6-2)}{6} = 120^\circ$; б) $\frac{180^\circ (n-2)}{n}$. 344. $180^\circ - \alpha$; α . 345. Ре-

шая уравнение $180^\circ (n-2) = 1260^\circ$, найдем, что число сторон этого многоугольника $n = 9$. Число треугольников будет на два меньше, т. е. 7. 346. Нет. Так как тогда сумма внешних углов этого шестиугольника была бы больше 360° , что невозможно. 347. Сумма всех внешних углов многоугольника равна 360° . Углов, а значит, и сторон будет $360 : 72 = 5$. 348. а) AB ; б) Основание, ибо оно лежит против большего угла, равного 72° . 349. Имеем $|BM| = |MC|$ (рис. 130), поэтому $|M_1C| = |DM_1|$ (по теореме Фалеса). Проекция

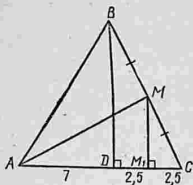


Рис. 130

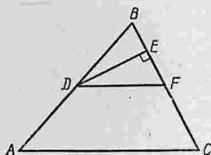


Рис. 131

медианы AM : $|AM_1| = |AD| + |DM_1|$; $|AM_1| = 7 \text{ см} + 2,5 \text{ см} = 9,5 \text{ см}$. 350. p (длина каждой стороны отсеченного треугольника вдвое меньше соответствующей стороны данного треугольника). 351. 7 см. 352. Нет. Для определения этого расстояния надо, например, из середины $[AB]$ (рис. 131) провести перпендикуляр DE на $[BC]$; длина DE меньше длины средней линии DF .

§ 26.

353. а) Противоположные стороны параллелограмма попарно конгруэнтны; б) противоположные углы параллелограмма попарно конгруэнтны; в) диагонали параллелограмма делятся точкой их пере-

сечения пополам. 354. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180° (2d). 355. 1. Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы противоположные его стороны были попарно конгруэнтны. Это надо понимать так: если данный четырехугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны попарно конгруэнтны, и обратно: если в четырехугольнике противоположные стороны попарно конгруэнтны, то этот четырехугольник является параллелограммом. 2. Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы две его противоположные стороны были конгруэнтны и параллельны. 356. 2. Это следует из конгруэнтности прямоугольных треугольников ABE и CDF (рис. 132). 3. Это следует из того, что эти отрезки являются противоположными сторонами

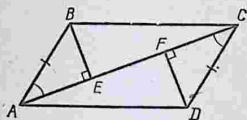


Рис. 132

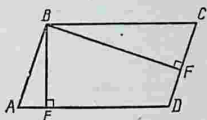


Рис. 133

параллелограмма. 357. а) Надо из произвольной точки большей стороны (лучше из вершины параллелограмма) провести перпендикуляр на параллельную ей сторону; б) надо из произвольной точки меньшей стороны параллелограмма (лучше из вершины параллелограмма) провести перпендикуляр на параллельную ей сторону (или на ее продолжение). На рис. 133 $|BE|$ — расстояние между большими сторонами параллелограмма; $|BF|$ — расстояние между его меньшими сторонами. 358. 4 см. 359. 56 см. У к а з а н и е. Докажите, что острый угол данного параллелограмма равен 30° , а затем воспользуйтесь свойством катета, лежащего против угла в 30° (рис. 134). 360. 1. $2(2a + b)$ или $2(2b + a)$. У к а з а н и е. Докажите, что у треугольника, отсеченного биссектрисой, два угла конгруэнтны. 2. 30 см. У к а з а н и е. Докажите, что указанная биссектриса отсекает равно-

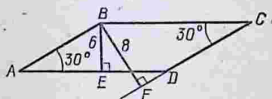


Рис. 134

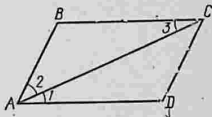


Рис. 135

сторонний треугольник. 361. Если допустить, что в параллелограмме (рис. 135) $\angle 1 \cong \angle 2$, то $\angle 1 \cong \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных (сонаправленные) и, следовательно, $\angle 2 \cong \angle 3$. Тогда $|BC| \cong |AB|$, и, значит, $ABCD$ — ромб, что противоречит условию. 362. а) Это следует из того, что противоположные углы параллелограмма конгруэнтны, а сумма его углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ; б) У к а з а н и е. Два перпендикуляра к одной прямой параллельны, 363. 1. Две. Серединные

перпендикуляры к двум его смежным сторонам. 2. Диагонали прямоугольника конгруэнтны. 3. Треугольники ABD и ACD (рис. 136) конгруэнтны по трем сторонам, поэтому $\angle BAD \cong \angle ADC$, но сумма этих углов равна 180° , поэтому каждый из них прямой. 4. Указание. Считая середину гипотенузы за центр симметрии, достройте; данный прямоугольный треугольник до прямоугольника. 364. 20 см;

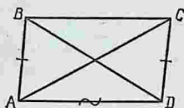


Рис. 136

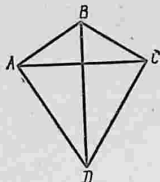


Рис. 137

12,5 см. 365. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. 367. Это следует из конгруэнтности всех четырех прямоугольных треугольников, на которые разбивается диагоналями этот параллелограмм. 368. Существует. У такого четырехугольника диагонали в точке их пересечения не делятся пополам (рис. 137). 369. Нет. Если допустить, что диагональ ромба перпендикулярна его стороне, тогда длина катета (диагональ) была бы равна длине гипотенузы (сторона ромба). 370. 2α ; $180^\circ - 2\alpha$. 371. 60° и 120° . Указание. Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° . 372. а) Нет, так как диагонали непрямоугольного ромба не конгруэнтны; б) да, это следует из свойств точек, лежащих на биссектрисе угла. 373. 1. Квадрат является ромбом, у которого углы прямые. 2. В отличие от диагоналей прямоугольника диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. В отличие от диагоналей ромба диагонали квадрата конгруэнтны. 374. Надо измерить диагонали и стороны этого четырехугольника, и если диагонали окажутся конгруэнтными, а также будут конгруэнтны все его стороны, то земельный участок имеет форму квадрата. 375. $22^\circ 30'$, 45° и $112^\circ 30'$. Указание. Вычислите сперва величину углов равнобедренного треугольника BCE . 376. 6 см (рис. 138).

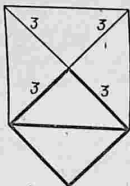


Рис. 138

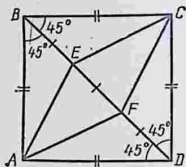


Рис. 139

377. Указание. Треугольники ABE , BEC , CFD и AFD (рис. 139) конгруэнтны по признаку СУС, отсюда $|EC| = |EA| = |CF| = |AF|$.

378. *Равнобедренной* называется такая трапеция, у которой боковые стороны конгруэнтны. *Прямоугольной* называется трапеция, у которой один из углов прямой. 379. а) Это следует из того, что перпендикуляр, проведенный через середину основания равнобедренной трапеции, является ее осью симметрии; б) это следует из конгруэнтности треугольников ABD и ACD (рис. 140); в) если допустить, что $|AO| = |OC|$ и $|BO| = |OD|$, то треугольники AOD и BOC будут конгруэнтны и $BC \cong AD$, что для трапеции невозможно. 380. 1. $\frac{a+b}{2} = m$, отсюда $b = 2m - a$. 2. $P = 2m + 2c = 2(m + c)$. 381. 1. 8 и 16 см. У к а з а н и е. Если обозначить длину меньшего отрезка средней линии через x , тогда длина большего будет $2x$; решив уравнение

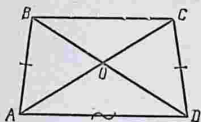


Рис. 140

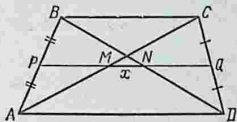


Рис. 141

$x + 2x = 12$, найдем длины отрезков 4 и 8 см. Длины оснований найдем по свойству средней линии треугольника. 2, 4 и 6 см. 382. Продолжим искомое расстояние MN до пересечения в точках P и Q (рис. 141) с боковыми сторонами трапеции. Тогда MQ — средняя линия треугольника ACD , NQ — средняя линия треугольника BCD и $|MN| = |MQ| - |NQ|$; $|MN| = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

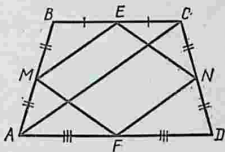


Рис. 142

383. $a + b/4$. У к а з а н и е.

Проведите из вершины тупого угла высоту трапеции. 384. У к а з а н и е. Имеем $[ME] \parallel [FN]$ (рис. 142), ибо каждый из этих отрезков параллелен диагонали AC ; $|ME| =$

$= \frac{1}{2} |AC|$ и $|FN| = \frac{1}{2} |AC|$; следовательно, $[ME] \cong [FN]$ и четырехугольник $MENC$ — параллелограмм. Кроме того, так как $\triangle AMF \cong \triangle FND$, то $[MF] \cong [FN]$, поэтому четырехугольник $MENF$ — ромб.

§ 27

385. 1. Чтобы задать параллельный перенос, достаточно задать какую-либо точку плоскости и ее образ. 2. Параллельный перенос является перемещением. При параллельном переносе каждая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру.

386. а) Образом прямой при параллельном переносе является параллельная ей прямая (рис. 143); б) образом луча — сонаправленный луч (рис. 144); в) образом фигуры — конгруэнтная ей фигура (рис. 145).

387. 1. Параллельный перенос, заданный центрами этих окружностей.
388. Через любую точку, взятую внутри угла, проводим прямые, параллельные сторонам данного угла. Угол между этими прямыми

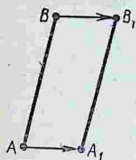


Рис. 143

конгруэнтен данному углу. 389. 1. Нулевым вектором называют параллельный перенос на нулевое расстояние (тождественное отображение плоскости); $\vec{0}$, $\vec{AA}$, $\vec{BB}$ — разные обозначения нулевого вектора. 2. Расстояние $|AB|$ называют длиной вектора $\vec{AB} = \vec{a}$ и обозначают $|\vec{AB}|$. Направление, заданное лучом AB , называется направлением вектора $\vec{AB}$. Нулевой вектор не имеет направления. 390. а) Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются сонаправленными, если сонаправлены лучи AB и CD ; б) векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются противоположно направленными, если противоположно направлены лучи AB и CD ; в) ненулевые векторы называются коллинеарными, если их направления

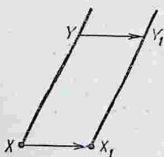


Рис. 144

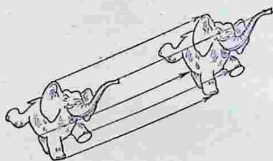


Рис. 145

совпадают или противоположны. 391. 1. Для того чтобы задать ненулевой вектор, достаточно указать его длину и направление. 2. Вектор, противоположный вектору $\vec{AB}$, есть $\vec{BA}$; вектор $\vec{BA}$ «перемещает» все точки плоскости в одном и том же направлении, противоположном направлению вектора $\vec{AB}$, причем $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$. 392. а) $\vec{AD} = \vec{BC}$, $\vec{BO} = \vec{OD}$, $\vec{AO} = \vec{OC}$; б) $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$; в) $\vec{BD}$ и $\vec{OD}$, $\vec{BO}$ и $\vec{OD}$, $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$, $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$. 393. $\vec{AD}$, $\vec{DA}$, $\vec{BC}$, $\vec{CB}$. 394. Так как $[EF]$ — средняя линия треугольника ABC (рис. 146), то $[EF] \parallel [AC]$. Следовательно, вектор $\vec{EF}$ коллинеарен вектору $\vec{CA}$.

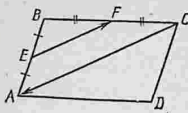


Рис. 146

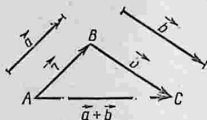


Рис. 147

395. Отложим от произвольной точки A вектор $\vec{AB} = \vec{a}$ (рис. 147), затем от точки B — вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. Композиция векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ото-

бражает точку A на C . Следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$. Заменяв $\vec{a}$ на $\vec{AB}$ и $\vec{b}$ на $\vec{BC}$, получим правило, по которому находится сумма векторов $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Это правило называется *правилом треугольника*.

Для сложения этих двух векторов по «правилу параллелограмма» векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают от одной точки A и строят параллелограмм со сторонами AB и AD , тогда $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 148).

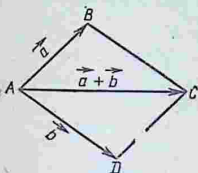


Рис. 148

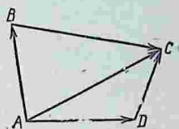


Рис. 149

396. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$; $\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$, поэтому $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$ (рис. 149). 397. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$; $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$, $\vec{OC} + \vec{OA} = \vec{0}$, $\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OC} + \vec{OA} = \vec{0}$. 398. 1-й способ. Сначала надо построить вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. От производной точки O (рис. 150, а) отложим вектор $\vec{a}$ ($\vec{OA} = \vec{a}$), от точки A отложим вектор $-\vec{b}$ ($\vec{AB} = -\vec{b}$), тогда $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.

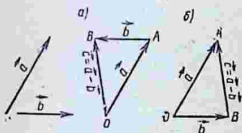


Рис. 150

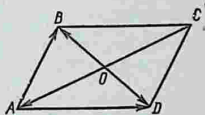


Рис. 151

2-й способ. Откладываем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O (рис. 150, б), тогда имеем $\vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$. 399. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. 400. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = -\vec{OB} - \vec{OA}$ (рис. 151). 401. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число x , что $\vec{b} = x\vec{a}$. 402. $\vec{MC} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{BC}$. 403. $\vec{AB} = \frac{1}{2} \vec{DB} - \frac{1}{2} \vec{CA}$; $\vec{BC} = -\frac{1}{2} \vec{CA} - \frac{1}{2} \vec{DB}$ (рис. 152). 404. 1-й способ. Построим треугольник ABC до параллелограмма (рис. 153). Согласно «правилу параллелограмма», $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AC}$; так как $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AE}$, то $\vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$. 2-й способ. Согласно «правилу треугольника», $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$ и $\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$. Сложив почленно эти равенства, получим $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{AC} +$

$\vec{CM}$, по $\vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$ как два противоположных вектора, отсюда $\vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$. 405. $\vec{NM} = \vec{OM} - \vec{ON} = \frac{1}{3} \vec{OB} - \frac{1}{3} \vec{OC} = \frac{1}{3} \times \times (\vec{OB} - \vec{OC}) = \frac{1}{3} \vec{CB} = -\frac{1}{3} \vec{AD} = -\frac{1}{3} \vec{a}$. 406. $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{OB} =$

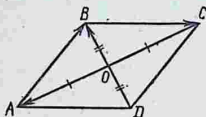


Рис. 152

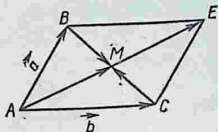


Рис. 153

$= 4\vec{i} + 5\vec{j}$; каждая координата суммы векторов равна сумме соответствующих координат: $\vec{OA} + \vec{OB} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) + (4\vec{i} + 5\vec{j}) = 7\vec{i} + 7\vec{j}$.

§ 28

407. 1. Да. Коэффициент подобия их равен единице. 2. Нет. Фигуры будут конгруэнтными лишь при коэффициенте подобия, равном единице. 408. План первого участка подобен плану второго; $k=10$. 409. а) При такой гомотетии каждая точка отображается на себя; б) по определению гомотетии, в этом случае $\vec{OX}_1 = -\vec{OX}$, т. е. точка X отображается на точку X_1 , центрально симметричную точке X . 410. а) При $k > 0$ точки X_1 и X лежат на прямой по одну сторону от центра гомотетии (векторы $\vec{OX}_1$ и $\vec{OX}$ сонаправлены); б) при $k < 0$ точки X_1 и X лежат по разные стороны от центра гомотетии. 411. 1. Указание. При гомотетии, например, с коэффициентом k расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении $|k|$. 2. Нет. Подобные фигуры лишь тогда гомотетичны, если они расположены таким образом, что точки O (центр гомотетии), X и соответствующая ей точка X_1 расположены на одном луче. 412. Строим

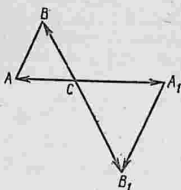


Рис. 154

$\vec{CA}_1 = -1,5 \vec{CA}$, $\vec{CB}_1 = -1,5 \vec{CB}$ (рис. 154). Вершину B_1 можно получить и по-другому, проводя $[A_1B_1] \parallel [AB]$ до пересечения с лучом BC .

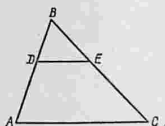


Рис. 155

413. По теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{|BE|}{|EC|}$ (рис. 155). Обозначим $|BE|$ через x , тогда $|EC| = 6,5 - x$. Решив

пропорцию $\frac{2}{3} = \frac{x}{6,5-x}$, получим $x = 2,6$ см; $|BE| = 2,6$ см и $|EC| =$

$= 3,9$ см. 414. 10,2 см. 415. а) Можно. Эти треугольники подобны, так как их стороны пропорциональны или вследствие конгруэнтности углов этих треугольников (каждый из них равен по 60°); б) можно. Углы этих треугольников равны $90, 45, 45^\circ$; в) подобны лишь в тех случаях, если конгруэнтны углы при вершинах или при основаниях. 416. 1. Нет. При увеличении каждой стороны треугольника в три раза получается треугольник, подобный данному, поэтому углы увеличенного треугольника будут соответственно конгруэнтны углам данного треугольника. 2. Нет. Длина третьей стороны на плане должна быть равна 7,8 см.

417. В треугольнике ABC (рис. 156) $[DE]$ — средняя линия, поэтому $[DE] \parallel [AB]$. Треугольники AOB и DOE подобны по двум углам. По свойству средней линии треугольника, $|AB| : |DE| = 2$, поэтому коэффициент подобия $k = 2$.

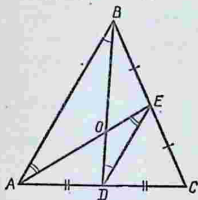


Рис. 156

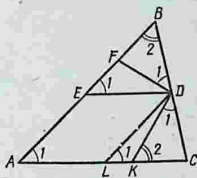


Рис. 157

418. Лучи $[DE]$, $[DK]$, $[DL]$ и $[DF]$ отсекают треугольники DBE , DCK , DLC и DBF , подобные треугольнику ABC , по двум конгруэнтным углам (рис. 157); конгруэнтные углы отмечены одинаковыми цифрами. 419. Имеем $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (рис. 158), так как $\angle DEC \cong \angle A$ ($\angle C$ — общий). Отсюда следует пропорциональность сходственных сторон. (Стороны, лежащие против равных углов в подобных треугольниках, называют *сходственными сторонами*.) Для того чтобы безошибочно указать сходственные стороны, обозначим одинаковыми цифрами конгруэнтные углы треугольников:

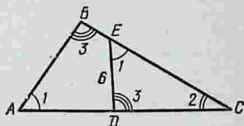


Рис. 158

Углы	$\triangle ABC$	$\triangle DEC$
Против $\angle 1$	BC	DC
Против $\angle 2$	AB	ED
Против $\angle 3$	AC	EC

Запишем сперва стороны одного треугольника, например

$$|AB| = |BC| = |AC|.$$

Под каждой из этих сторон запишем сходственные стороны треугольника DEC :

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|EC|}.$$

Возьмем пропорцию из первых отношений $\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|}$. (Если бы мы взяли два последних отношения, то в пропорции оказались бы два неизвестных члена.) Подставив данные числа, получим $\frac{9}{6} = \frac{15}{|DC|}$, откуда $|DC| = 10$ см. Составим пропорцию из первого и третьего отношения $\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|EC|}$, найдем $|EC| = 12$ см. 420. 44 и 33 см.

У к а з а н и е. Основание одного треугольника должно совпадать с боковой стороной другого треугольника (рис. 159). В противном случае эти треугольники были бы конгруэнтны. 421. Так как прямые углы всегда конгруэнтны, то прямоугольные треугольники подобны, если

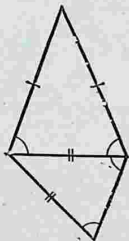


Рис. 159

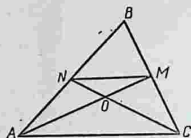


Рис. 160

1) катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого или 2) острый угол одного треугольника конгруэнтен острому углу другого треугольника. 422. 1. Да. 2. 13,5 см. 423. Пусть в треугольнике ABC (рис. 160) AM и CN — медианы, пересекающиеся в точке O , тогда $[NM]$ — средняя линия треугольника ABC , поэтому $|MN| \parallel |AC|$. Треугольники ONM и AOC подобны (по двум углам), отсюда $\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|ON|}{|OC|} = \frac{|NM|}{|AC|}$, но $\frac{|NM|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ (по свойству средней линии треугольника), поэтому $\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{1}{2}$ и $\frac{|ON|}{|OC|} = \frac{1}{2}$; следовательно, $\frac{|OM|}{|AM|} = \frac{1}{3}$ и $\frac{|ON|}{|CN|} = \frac{1}{3}$, т. е. $|OM| = |AM|/3$ и $|ON| = |CN|/3$. 424. а) Это следует из подобия прямоугольных треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ (рис. 161); $\angle A \cong \angle A_1$, ибо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $\widehat{ADB} = \widehat{A_1D_1B_1} = 90^\circ$;

в) у к а з а н и е. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 162) следует, что

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{\frac{1}{2}|A_1C_1|} = \frac{|AD|}{|A_1D_1|} \text{ и } \angle A \cong \angle A_1;$$

следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ (две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а углы между ними конгруэнтны).

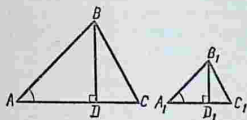


Рис. 161

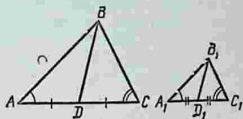


Рис. 162

425. а) Кроме обычного (m относится к x , как x относится к n), эту пропорцию можно прочесть так: x — среднее пропорциональное (геометрическое) чисел m и n , т. е. $x = \sqrt{mn}$; б) a — среднее пропорциональное (геометрическое) чисел p и q , т. е. $a = \sqrt{pq}$.

426. 1. По условию, $a = 3$ см, $a_c = 1,8$ см. Из равенства $a^2 = ca_c$ найдем, что $c = a^2 : a_c = 9 : 1,8 = 5$. Катет находим по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, откуда $b^2 = c^2 - a^2$; $b^2 = 25 - 9 = 16$, $b = 4$ см. 2. $a^2 = 8 \cdot 2 = 16$, $a = 4$;

$b^2 = 8 \cdot 6 = 48$, $b = 4\sqrt{3}$; $h^2 = 6 \cdot 2 = 12$, $h = 2\sqrt{3}$.

427. По теореме, обратной теореме Пифагора: если в треугольнике квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других, то этот треугольник прямоугольный. 428. 10 см. 429. 6,5 см. У к а з а н и е. Продолжить медиану, отложить отрезок, равный ее длине, а затем достроить данный треугольник до прямоугольника. Длина медианы будет равна половине длины гипотенузы.

430. $\sqrt{2}$ м $\approx 1,4$ м. 431. 29,6 см. У к а з а н и е. Не забудьте, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой их пересечения делятся пополам. 432. 1. $a\sqrt{2} \approx 1,4a$.

2. Если сторону квадрата обозначим через x , то получим уравнение $2x^2 = d^2$, откуда $x = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$.

433. 1. $a\sqrt{3}/2$. 2. Расстояния до сторон

$\sqrt{3}/3 \approx 0,58$ см; расстояние до вершин $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ см $\approx 1,2$ см. 434. 1. 2 см.

У к а з а н и е. Проведите две высоты из вершин тупых углов. 2. 62 см.

435. Обозначим больший катет через x , тогда меньший катет будет равен $0,75x$. По теореме Пифагора имеем уравнение $x^2 + (0,75x)^2 = 20^2$, откуда $x = 16$; 75% от 16 составляют 12; значит, меньший катет равен 12 см. 436. а) Нет. Например, квадрат не подобен ромбу, хотя стороны их пропорциональны; б) нет. Например, квадрат не подобен прямоугольнику, хотя углы их конгруэнтны.

437. Если стороны одного многоугольника соответственно пропорциональны сторонам другого многоугольника и соответственные углы этих многоугольников конгруэнтны, то такие многоугольники подобны.

438. 1. $k = 4/3$; $P =$

$= kP_1 = 36 \cdot (4/3) \text{ см} = 48 \text{ см}$. 2. $k = 3/7$; $P : (P + 20) = 3/7$; отсюда находим, что периметр меньшего многоугольника равен 15 см, а большего — 35 см.

§ 29

439. а) 120° ; б) $22^\circ 30'$. 440. Пусть угловая величина меньшей дуги равна x° , тогда большей — $(x + 90)^\circ$. Решив уравнение $x + (x + 90) = 360$, получим, что угловая величина меньшей дуги равна 135° , а большей — 225° . 441. Соедините концы дуги хордой, а затем из центра окружности проведите перпендикуляр к хорде. Точка пересечения этого перпендикуляра с дугой делит ее пополам. 442. 3 см. Указание. Соедините центр с концами хорды, а затем воспользуйтесь свойством катета, лежащего против угла в 30° . 443. Надо провести через точку A перпендикуляр к радиусу OA . 444. Они

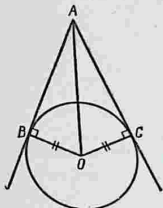


Рис. 163

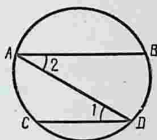


Рис. 164

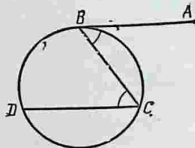


Рис. 165

параллельны. 445. 1 дм. Указание. Искомый радиус является средней линией в прямоугольной трапеции. 446. Равенство длин касательных AB и AC (рис. 163) следует из конгруэнтности прямоугольных треугольников AOB и AOC . 447. 1. Это следует из того, что он опирается на дугу, угловая величина которой равна 180° . 2. Справедливы обратные предложения: если вписанный угол прямой, то он опирается на диаметр. Если прямой угол опирается на диаметр, то он вписан в эту окружность. 448. Если он опирается на дугу, угловая величина которой а) меньше 180° ; б) больше 180° . 449. Если обозначить вписанный угол через x , то центральный угол будет равен $(x + 30)^\circ$. По свойству вписанного угла имеем $2x = x + 30$. Отсюда получим, что вписанный угол равен 30° , а центральный — 60° . 450. Если вершины вписанных углов расположены по одну сторону от хорды, соединяющей концы дуги, то эти углы конгруэнтны, а если по разные стороны, то сумма величин этих углов равна 180° . 451. Пусть хорды AB и CD параллельны (рис. 164). Проведем хорду AD , тогда $\hat{1} = \hat{2}$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных), но $\hat{1} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$, $\hat{2} = \frac{1}{2} \widehat{BD}$; следовательно, $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$.

452. Указание. Проведите хорду CD параллельно касательной BA (рис. 165).

§ 30

453. Если этот треугольник а) остроугольный; б) тупоугольный; в) прямоугольный; центр описанной окружности является серединой

его гипотенузы. 454. Можно, например, провести диаметр AB (рис. 166), затем к радиусу OA провести серединный перпендикуляр до пересечения с окружностью в точках C и D . Тогда треугольник BCD будет равносторонним ($\widehat{MCO} = 30^\circ$, $\widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{COD} = 120^\circ$, $\widehat{CBD} = 60^\circ$). 455. Можно, так как в равностороннем треугольнике каждая биссектриса является одновременно серединным перпендикуляром к его стороне. 456. $\frac{2}{3}h$. 457. а) 5 см; б) 2,5 см. Указание. Гипотенуза этого треугольника совпадает с диаметром описанной окружности, а медиана — с ее радиусом. 458. 70° . Указание. Опишите около этого треугольника окружность. 459. 2а. Указание. Проведите диаметр BD и хорду AD (рис. 167).

Рис. 166

Рис. 167

Рис. 168

Рис. 169

окружности через r , тогда $|AN| = |AP| = 9 - r$, $|BM| = |BP| = 12 - r$ (длины касательных равны между собой, см. 446). Длина гипотенузы AB равна 15 см. Но $|AB| = |AP| + |PB|$ — получаем уравнение $15 = (9 - r) + (12 - r)$, откуда $r = 3$ см.

§ 31

464. Синус — функция, потому что каждому углу поворота α соответствует одна и только одна точка P_α , а следовательно, одно определенное число y_α ; по этой же причине косинус и тангенс являются функциями. 465. 1. Областью определения функций $\sin$ и $\cos$ является все множество угловых величин, а областью значений этих функций — промежутки $[-1; 1]$, так как ординаты точек P_α могут принимать значения от -1 до 1 . 2. Нет, так как $\sqrt{2} > 1$ и $10^{\lg 2} = 2 > 1$. 466. Значения функции $\sin \alpha$ увеличиваются от 0 до 1, а значения функции $\cos \alpha$ уменьшаются от 1 до 0. 467. а) $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$; б) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$; в) $\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$; г) $\sin 360^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = 1$; д) $\sin(-90^\circ) = -1$, $\cos(-90^\circ) = 0$. 469. а) Так как $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, или $\cos^2 \alpha = 1 - 0,8^2 = 0,36$, $\cos \alpha = 0,6$; б) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha = 1 - (1/2)^2 = 3/4$, $\sin \alpha = \sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2$. 470. а) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$ (применили формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$); б) $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$ (применили формулу $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$); в) $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$; г) $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$. 471. а) $a = c \cdot \sin \hat{A}$, $b = c \cdot \cos \hat{A}$; б) $c = \frac{a}{\sin \hat{A}}$, $c = \frac{b}{\cos \hat{A}}$. 472. $\sin \hat{B} = b/c$; $\cos \hat{B} = a/c$; $\operatorname{tg} \hat{B} = b/a$. 473. 1. $\sin \alpha = h/a$, $\cos \alpha = m/a$, $\sin x = m/a$ и т. д. 2. $m/a = \cos \alpha$, $h/b = \sin \beta$, $m/h = \operatorname{tg} x$, $h/n = \operatorname{tg} \beta$. 474. $c = 17$ см; $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, или $1 \frac{6}{17}$; $\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{c^2}$, или $\frac{120}{289}$. 475. 1. Заметим, что если $\hat{A} = 30^\circ$, то $\hat{B} = 60^\circ$ (рис. 170). Обозначим $|BC|$ через a , тогда $|AB| = 2a$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Теперь имеем $|AC| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a^2 = a\sqrt{3}$, поэтому $\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

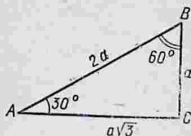


Рис. 170

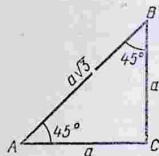


Рис. 171

2. Если $\hat{A} = 45^\circ$, то $\hat{B} = 45^\circ$ (рис. 171). Обозначим $|BC|$ и $|AC|$ через a , тогда $|AB| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$; $\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. 476. а) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; б) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$. 477. а) $\sin(2 \cdot 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1,73}{2} \approx 0,865$, а $2 \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, т. е. $2 \sin 30^\circ > \sin(2 \cdot 30^\circ)$; б) $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ и $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx \frac{1 + 1,73}{2} \approx 1,365$, т. е. $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ > \sin(30^\circ + 60^\circ)$. 478. а) В равностороннем треугольнике ABC проведем высоту BD . Имеем $\frac{|BD|}{|AB|} = \sin 60^\circ$, или $\frac{|BD|}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, отсюда $|BD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{|OD|}{|DC|} = \operatorname{tg} 30^\circ$ (из прямоугольного треугольника ODC), отсюда $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. 479. 2,1 м. Указание. Сечение насыпи — равнобедренная трапеция; высота насыпи — катет прямоугольного треугольника, где другой катет равен 3 м, а прилежащий к нему острый угол равен 35° .

§ 32

480. 1. Конгруэнтные многоугольники имеют равные площади; если многоугольник составлен из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников. 2. За единицу площадей принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице длины. Например, квадратный метр — это площадь квадрата, длина стороны которого 1 м. 3. Это фигуры, имеющие равные площади. Например, прямоугольник со сторонами 4 и 9 см и квадрат со стороной 6 см; г) нет. Например, квадрат со стороной 4 см и прямоугольник со сторонами 2 и 8 см имеют равные площади (равновелики), но не конгруэнтны. 481. $10 \text{ га} = 10 \cdot 10\,000 \text{ м}^2 = 100\,000 \text{ м}^2 = 0,1 \text{ км}^2$. 482. а) $S = a^2$; б) по теореме Пифагора, $a^2 + a^2 = d^2$, или $2a^2 = d^2$, откуда $a^2 = d^2/2$, т. е. $S = d^2/2$. К этому же результату можно прийти, рассматривая квадрат как ромб с равными диагоналями (см. 490). 483. Площадь прямоугольника равна $20 \cdot 30 = 600 \text{ (м}^2\text{)}$, площадь квадрата равна $25^2 = 625 \text{ (м}^2\text{)}$. 484. Если сторону вписанного квадрата обозначить через a (рис. 172), то $a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ (по теореме Пифагора), а это есть площадь вписанного квадрата, т. е. $S_{\text{вп}} = 2R^2$. Найдем площадь описанного квадрата: $S_{\text{оп}} = (2R)^2 = 4R^2$. Отношение площадей этих квадратов равно двум. 485. Обозначим диагональ искомого квадрата через d . Пользуясь фор-

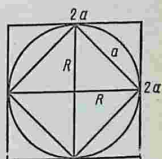


Рис. 172

мулой $S = \frac{1}{2} d^2$ (см. 482), приходим к уравнению $\frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} 3^2 + \frac{1}{2} 4^2$,

откуда $d = 5$ см. 486. Да, изменится. Площадь данного прямоугольника равна ah . Увеличенное основание равно $1,5a$, уменьшенная высота $-0,5h$, новая площадь прямоугольника будет $1,5a \cdot 0,5h = 0,75ah$. Значит, площадь полученного прямоугольника уменьшится на 25 %.

487. Пусть a и b — стороны параллелограмма, а S — его площадь, тогда одну из высот найдем по формуле $h_1 = \frac{S}{a}$, а другую — по фор-

муле $h_2 = \frac{S}{b} = \frac{126}{14} = 9$ (см), $\frac{126}{18} = 7$ (см). Угол равен 30° . 488. 1-й слу-

чай. Пусть высота проведена на большую сторону, тогда площадь параллелограмма будет равна 135 см^2 ($9 \cdot 15 = 135$), а другая высота будет равна $11,75$ см ($135 : 12$). 2-й случай. Если высота проведена на меньшую сторону, то площадь параллелограмма 108 см^2 , а другая высота $7,2$ см. 489. Наибольшей будет площадь того параллелограмма, у которого угол между смежными сторонами прямой, так как выражение $ab \sin \alpha$ будет наибольшим, если $\sin \alpha = 1$, а значит, $\alpha = 90^\circ$.

490. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, т. е. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$. 491. а) $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 = 20 \text{ см}^2$; б) $S = 2,8^2 \sin 30^\circ \approx$

$\approx 3,9 \text{ дм}^2$; в) $S = \frac{1}{16} P^2 \sin \alpha$. 492. а) $S = \frac{1}{2} b h_b$, $S = \frac{1}{2} c h_c$; б) $h_a =$

$= \frac{S}{\frac{1}{2} a} = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$. 493. 1. Треугольники ABD и DBC

(рис. 173) равновелики, так как имеют конгруэнтные основания AD и DC и общую высоту BE . 2. Площадь треугольника ADM (рис. 173)

составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABD , так как $|DM| = \frac{1}{3} |BD|$

(по свойству медиан треугольника), а высота AF у них общая. Сле-

довательно, $S_{AMD} = \frac{1}{3} S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{6} S_{ABC}$.

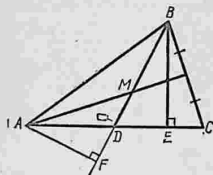


Рис. 173

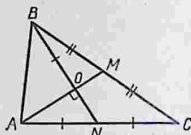


Рис. 174

3. Медианы AM и BN (рис. 174) пересекаются в точке O ; $|OM| = \frac{1}{3} |AM|$, поэтому $|AO| = 4$ см. Медиана AM перпендикулярна медиане BN ; приняв в треугольнике ABN BN за основание, а AO за высоту, получим, что площадь треугольника ABN равна 16 см^2 , так

как $S_{ABN} = \frac{1}{2} |BN| \cdot |AO| = \frac{1}{2} 8 \cdot 4$. Площадь треугольника ABC

равна удвоенной площади треугольника ABN (см. 493.1), т. е. 32 см^2 .

494. 5 см. Указание. Если обозначить основание треугольника через x , то и высота его будет x , откуда $0,5x^2 = 12,5$. 495. 48 см^2 .

Указание. Если обозначить высоту треугольника через x , то боковая сторона его будет $(x+2)$. 496. а) По формуле $S =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ \text{ найдем, что } S = 4 \text{ см}^2; \text{ б) } S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 135^\circ;$$

$$\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } S = 4\sqrt{2} \text{ см}^2 \approx 5,7 \text{ см}^2.$$

$$497. \text{ а) По формуле } S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \text{ имеем } S = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}; \text{ б) } a =$$

$$= \frac{h}{\sin 60^\circ}, S = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\sin 60^\circ} = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3}. 498. \text{ Обозначим катет этого тре-}$$

$$\text{угольника через } a, \text{ тогда } a = c \cdot \sin 45^\circ; S = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} c^2 \sin^2 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} c^2, \text{ или по-другому: } 2a^2 = c^2, a^2 = \frac{c^2}{2}, S = \frac{1}{2} a^2 =$$

$$= \frac{1}{4} c^2. 499. \text{ Площадь трапеции равна произведению ее средней ли-}$$

нии на высоту. 500. $2,2 \text{ дм}^2$. Указание. Проекция боковой сто-

роны на большее основание равна 10 см . 501. $(8+2\sqrt{3}) \text{ см}^2 \approx 11,5 \text{ см}^2$.

Указание. Высота трапеции равна 2 см , проекция одной боковой

стороны — $2\sqrt{3} \text{ см}$, а другой — 2 см .

502. 30 см . Указание. Средняя

линия этой трапеции равна 10 м , так

как $(7+13):2=10$; $h=4 \text{ м}$, так как

$40:10=4$. Проекция боковой сто-

роны на большее основание равна 3 см .

503. $1. mn/2$. Указание. Площадь

трапеции $ABCD$ (рис. 175) равна сум-

ме площадей треугольников ABD и

BCD , у которых общее основание BD ,

а высоты AO и OC , или $S = \frac{1}{2} |BD| \times$

$$\times |AO| + \frac{1}{2} |BD| \cdot |CO|. 2. h^2. \text{ Ука-}$$

зание. Средняя линия этой трапе-

ции равна $\frac{|AD| + |BC|}{2} = \frac{|AD|}{2} + \frac{|BC|}{2} = |AF| + |BE|$ (рис. 175).

Высота этой трапеции равна средней линии, так как $|OF| = |AF|$,

а $|OE| = |BE|$. 504. $k=3$, площадь многоугольника увеличится

в $3^2=9$ раз. 505. $k=100$, площадь участка на местности в $100^2=$

$=10\,000$ раз больше, чем на плане. 506. а) Площадь данного тре-

угольника в четыре раза больше площади отсеченного (коэффициент

подобия равен двум); б) площадь трапеции в три раза больше пло-

щади отсеченного треугольника. 507. Пусть P и P_1 , S и S_1 — соот-

ветственно периметры и площади подобных многоугольников. Тогда

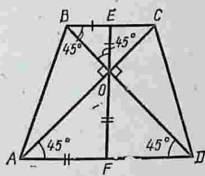


Рис. 175

$P : P_1 = k$ и $S : S_1 = k^2$, где k — коэффициент подобия; $k = \frac{P}{P_1} = \frac{2}{3}$, $k^2 = \frac{4}{9}$; $S : S_1 = 4 : 9$, $S : 90 = 4 : 9$, откуда $S = 40 \text{ см}^2$.

§ 33

508. Можно вычислить длину одной из сторон треугольника, если известны две другие стороны и величина угла между ними; зная величину каждой стороны треугольника, можно вычислить величины каждого из его углов по формулам

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

509. а) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab$, $c =$

$= \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$; б) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - ab \sqrt{2}}$; в) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ} =$
 $= \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ ($\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$). 510. а) Если $\hat{A} < 90^\circ$,

ибо тогда $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$; б) если

$\hat{A} = 90^\circ$, ибо тогда $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0$;

в) если $\hat{A} > 90^\circ$, ибо тогда $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} <$

< 0 . 511. Из треугольника ABD (рис. 176) по теореме косинусов имеем $|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB||BD| \cos 60^\circ$, т. е. $|AD|^2 =$
 $= 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 76$; $|AD| =$

$= \sqrt{76} \approx 8,8$ (см). 512. По формуле $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ находим, что

$\cos \hat{A} = 1/2$, $\hat{A} = 60^\circ$. 513. Зная сторону и два угла треугольника, мож-

но вычислить остальные его элементы. 514. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, отсюда

$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$, $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin (180^\circ - (\alpha + \beta))}$ и $c = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ ($\sin (180^\circ -$

$(\alpha + \beta)) = \sin (\alpha + \beta)$). 515. Диагональ параллелограмма разбивает его

на два конгруэнтных треугольника, величины углов которых $30^\circ, 45^\circ$ и

105° (рис. 177). Из треугольника ABC по теореме синусов имеем

$\frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{d}{\sin 105^\circ}$, откуда $|AB| = \frac{d \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}$; по $\sin 30^\circ = 1/2$, $\sin 105^\circ =$

$= \sin (90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$, поэтому $|AB| = d/(2 \cos 15^\circ)$. Из треуголь-

ника ABC найдем, что $|BC| = d/(\sqrt{2} \cos 15^\circ)$.

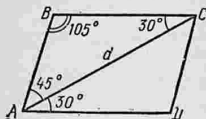


Рис. 177

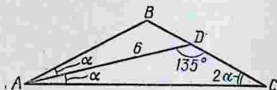


Рис. 178

516. $6\sqrt{2}$ см. Указание. Если обозначить угол между биссектрисой AD и основанием AC через α (рис. 178), то $\hat{C} = 2\alpha$. Затем из уравнения $3\alpha + 135^\circ = 180^\circ$ установите, что $\hat{C} = 30^\circ$, после этого из треугольника ADC вычислите $|AC|$ по теореме синусов.

§ 34

517. Надо сперва разделить окружность на n конгруэнтных дуг. Для этого с помощью транспортира надо построить центральный угол, величина которого равна $360^\circ/n$, а затем с помощью циркуля отложить на окружности полученную дугу $n-1$ раз и соединить последовательно точки деления хордами или через эти точки деления провести касательные до пересечения с соседними касательными.

518. 1. Нет. 2. а) Может. Этим условиям удовлетворяет, например, вписанный прямоугольник; б) нет; если у вписанного многоугольника стороны конгруэнтны, то конгруэнтны и дуги, стягиваемые этими сторонами, поэтому каждый из углов этого многоугольника опирается на одинаковое число конгруэнтных между собой дуг. 519. 1. Это общий центр вписанной и описанной около правильного многоугольника окружностей. Эта точка является центром поворотов, отображающих этот правильный многоугольник на себя. 2. Это отрезок перпендикуляра, проведенного из центра правильного многоугольника к его стороне. На рис. 64 $[OM]$ — апофема; она является радиусом

вписанной окружности. 520. 1. $\frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$, $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

2. а) $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$; б) $\frac{360^\circ}{n}$. 3. Этот угол равен половине центрального

угла, т. е. $\frac{360^\circ}{n} : 2 = \frac{180^\circ}{n}$. 521. а) По условию, $120^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$,

где n — число сторон гайки. Решив это уравнение относительно n , получим, что у гайки 6 сторон; б) 8 сторон. 522. а) Можно. Углы паркетных плиток, сходящихся в одной точке, должны в сумме составлять 360° . Три плитки, имеющие форму правильного шестиугольника, отвечают этому условию, так как каждый угол его, равный 120° ,

содержится целое число раз в 360° ; б) нет. 523. 2. $a_8 = 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{180^\circ}{8}$ м =

= $2 \sin 22^\circ 30'$ м $\approx 0,77$ м; $a_{10} \approx 0,62$ м; $a_{12} \approx 0,52$ м. 524. Из формулы

$a_1 = R\sqrt{2}$, или $R = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ находим $R = \frac{18}{\sqrt{2}} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \approx 12,7$ (см).

Диаметр бревна должен быть не меньше 25,4 см. 525. По формуле (3)

на с. 82 находим: а) $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1^2 \sin \frac{360^\circ}{3} = 0,5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ =$

= $0,5 \cdot 3 \cdot \sin (180^\circ - 60^\circ) = 0,5 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5\sqrt{3} \approx 1,3$ (дм²);

б) 2 дм². 526. Эти многоугольники подобны, ибо их стороны пропорциональны, а углы одного конгруэнтны углам другого (каждый из

них равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$), поэтому их периметры относятся как $a:b$,

а площади — как $a^2:b^2$.

§ 35

527. Длина окружности увеличится в два раза, площадь круга увеличится в четыре раза. 528. Из формулы $a_1 = R \sqrt{2}$, или $R = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$, находим $R = \frac{6}{\sqrt{2}} \text{ см} = 3\sqrt{2} \text{ см}$; $C = 2\pi R$, или $C = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} \text{ см} = 6\pi\sqrt{2} \text{ см} \approx 26,6 \text{ см}$. 529. $a_6 = R$; $R = 5 \text{ см}$, $C = 10\pi \text{ см} \approx 31,4 \text{ см}$. 530. Радиус описанной окружности является медианой данного треугольника, поэтому $C = 20\pi \text{ см} \approx 62,8 \text{ см}$. 531. Имеем: $C = 2\pi \text{ дм}$, $P_6 = 6 \text{ дм}$; $C - P = (2\pi - 6) \text{ дм} \approx 0,28 \text{ дм} = 2,8 \text{ см}$. 532. На $2\pi(R+5) - 2\pi R = 10\pi$, т. е. на $\approx 31,4 \text{ (см)}$. 533. Радиус круга равен 2 см, поэтому $S = 4\pi \text{ см}^2 \approx 12,6 \text{ см}^2$. 534. Пусть r — радиус вписанного круга, $r = 1,5 \text{ tg } 60^\circ \text{ см} = 1,5\sqrt{3} \text{ см}$; $S_{\text{кр}} = \pi(1,5\sqrt{3})^2 = 6,75\pi \approx 21 \text{ см}^2$. 535. $S_{\text{кр}} = \frac{\pi}{4} \text{ дм}^2$. $S_{\text{п.кр}} = \frac{\pi}{2} \text{ дм}^2$ ($S_{\text{п.кр}} > S_{\text{кр}}$). 536. $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $S_{\text{кв}} = 2R^2$, $\pi R^2 - 2R^2 \approx 1,14R^2$ — это площадь обрезков; $1,14R^2$ от πR^2 составляет $\frac{1,14R^2 \cdot 100\%}{\pi R^2} \approx 36\%$. Итак, обрезки составляют приблизительно 36 % площади круга. 537. а) $r = \frac{d}{2}$, $S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$; б) $C = 2\pi r$, $r = \frac{C}{2\pi}$, $\pi r = \frac{C}{2}$, $S = \pi r^2 = \pi r \cdot r = \frac{C}{2} \cdot r$; в) $S = \frac{C}{2} \cdot r = \frac{C}{2} \cdot \frac{C}{2\pi} = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi}$. 538. Решив уравнение $\pi r^2 = 2\pi r$, найдем, что $r = 2$ лин. ед. 539. За один оборот колесо пройдет путь, равный длине окружности колеса. По формуле $C = \pi d$ найдем, что этот путь равен $(22/7) \cdot 0,7 \approx 2,2 \text{ м}$. За 1 мин пройденный путь составит $2,2 \text{ м} \cdot 500 \approx 1,1 \text{ км}$; за 1 ч — $1,1 \text{ км} \cdot 60 \approx 66 \text{ км}$. Итак, скорость автомобиля 66 км/ч. 540. Пропускная способность большей трубы будет равна пропускной способности двух малых труб, т. е. площадь сечения большей трубы будет равна сумме площадей сечений двух малых труб. Решив уравнение $\pi \frac{D^2}{4} = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$, найдем, что $D = d\sqrt{2} \approx 1,4d$. 541. Пусть сторона квадрата равна a , а радиус круга r , тогда $S_{\text{кв}} = a^2$, $S_{\text{кр}} = \pi r^2$. По условию, $a^2 = 1$ и $\pi r^2 = 1$; отсюда $a = \sqrt{1} = 1 \text{ м}$, периметр квадрата (P) равен 4 м, $r = \sqrt{1/\pi}$, $C = 2\pi r = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 2\sqrt{\pi^2 \frac{1}{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \text{ м}$. Так как $\sqrt{\pi} < 2$, то $4 > 2\sqrt{\pi}$, отсюда $P > C$.

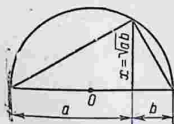


Рис. 179

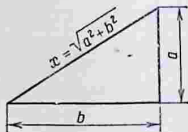


Рис. 180

Здесь приведены соответствующие ссылки на учебники. Например, Г. 6, п. 22 надо понимать так: это построение приведено в Геометрии 6—8 под редакцией А. Н. Колмогорова в пункте 22 (изучалось в 6-м классе).

542. Г. 6, п. 22. 543. М. 5, п. 48. 544. М. 5, п. 33. 545. М. 5, п. 22. 546. Г. 6, п. 22. 547. Г. 6, п. 22. 548. Г. 6, п. 22. 549. Г. 6, п. 24. 550. Г. 6, п. 30. 551. Г. 6, п. 30. 552. Г. 7, п. 47. 553. Г. 7, п. 51.

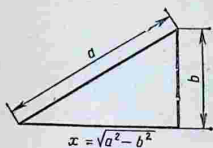


Рис. 181

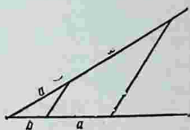


Рис. 182

554. Г. 7, п. 64. 555. Г. 8, п. 82. 556. См. рис. 179. 557. а) См. рис. 180; б) см. рис. 181; в) см. рис. 182.

ОТВЕТЫ К ЭКЗАМЕНАЦИОННЫМ БИЛЕТАМ

Б.1. 1. А.7. Гл. IV, пп. 40 и 41. *

$$2. 0,56 (0,56 + 0,44) (0,56 - 0,44) \cdot \frac{25}{3} = 0,56 \cdot 1 \cdot 0,12 \cdot \frac{25}{3} = 0,56.$$

3. Меньший катет равен 6 дм (по свойству катета, лежащего против угла в 30°), больший катет равен $12 \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$ дм; $S \approx 31$ дм².

Б.2. 1. А.7. IV, п. 43.

$$2. X \in [0,5 + \infty[.$$

$$3. h = 2 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; h \approx 1,7 \text{ дм.}$$

Б.3. 1. А.8. Гл. I, п. 3.

$$2. (2,02 - 0,52)^2 = 1,5^2 = 2,25.$$

3. Каждый катет равен $6 \cdot \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \approx 4,2$ (см). Высота равна 3 см.

Б.4. 1. А.6. Гл. II, п. 14.

$$2. \frac{3}{2} + (2^3)^{\frac{1}{3}} + 1 = 4,5.$$

$$3. (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}.$$

Б.5. 1. А.6. Гл. II, п. 17.

* Алгебра 7/Под ред. А. И. Маркушевича, глава IV, пункты 40 и 41.

2. Данное неравенство истинно только при тех значениях переменной x , которые удовлетворяют хотя бы одной из систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases}$$

Множество решений заданного неравенства есть $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

3. $(1/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1,5$.

Б.6. 1. Г. 6. Гл. II, п. 22. Задача 1.

2. $\frac{5(a-2)(a+0,6)}{3(a-2)} = \frac{5a+3}{3}$.

3. $r = 4$ см, $C \approx 25$ см; $S \approx 50$ см².

Б.7. 1. Г. 6. Гл. II, п. 22. Задача 3.

2. Если обозначим неизвестное число через x , то получим уравнение $0,1x = 1,3 \cdot 12,8 + 13 \cdot 1,72$, или $0,1x = 1,3(12,8 + 10 \cdot 1,72)$; $0,1x = 39$; $x = 390$.

3. Гипотенуза треугольника равна единице, поэтому $\sin \alpha = 0,6$; $1 = 0,6$, $\sin \beta = 0,8$.

Б.8. 1. Г. 6. Гл. II, п. 22. Задача 4.

2. При $x = a + 2$ имеем

$$(a+2)((a+2)-2a)+a^2=(a+2)(2-a)+a^2=4;$$

при $x = a - 2$ имеем

$$(a-2)((a-2)-2a)+a^2=(a-2)(-a-2)+a^2=, \\ = -(a-2)(a+2)+a^2=4.$$

3. Угол между биссектрисой и стороной треугольника равен 30° . Тупой угол между биссектрисами равен 120° .

Б.9. 1. Г. 6. Гл. II, п. 25.

2. По основному свойству пропорций имеем $10x \cdot 7 = 3,5 \cdot 0,4$,
отсюда $x = \frac{3,5 \cdot 0,4}{10 \cdot 7} = 0,02$.

3. Высота ромба h_p , $h_p = 5 \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $S_p = 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 22$ (см)².

Б.10. 1. Г. 6. Гл. II, п. 26.

2. $5 \cdot x^{0,6+0,2+1,2} = 5x^2 = 5 \cdot (1,2)^2 = 5 \cdot 1,44 = 7,2$.

3. 6 см (по формуле $h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$).

Б.11. 1. Г. 7. Гл. III, п. 38.

2. 0; 2,25; 5; 2,25; 0.

3. $\frac{1}{x} - 1 > 0$, или $\frac{1-x}{x} > 0$, отсюда $]0; 1[$ — множество реше-

ний данного неравенства.

Б.12. 1. Г. 7. Гл. III, п. 38.

2. После преобразований получаем уравнение $4x^2 - 5x = 0$ и решаем его:

$$x(4x-5)=0, \text{ откуда } x=0 \text{ или } x=1,25;$$

множество корней данного уравнения есть $\{0; 1,25\}$.

3. Центр окружности — точка пересечения биссектрис треугольника, радиус окружности — расстояние от центра до любой стороны треугольника.

Б.13. 1. Г. 7. Гл. III, п. 38.

2. Например, $-2, -0,5; 1; 2,5 \dots$. По формуле $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$ имеем $S_{15} = \frac{(2 \cdot (-2) + (15-1) \cdot 1,5) \cdot 15}{2} = 122,5$.

3. Имеем $a = d \cdot \sin 45^\circ = d \sqrt{2}/2$; далее, $a = 5 \sqrt{2} \approx 7,1$ см;
 $S = (5 \sqrt{2})^2 = 50$ см².

Б.14. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 40.

2. Составим разность левой и правой частей неравенства:

$$n^2 - 8(n-2) = n^2 - 8n + 16 = (n-4)^2.$$

Это выражение при $n \neq 4$ положительно, а при $n=4$ равно нулю, поэтому при любом n имеем $(n-4)^2 \geq 0$; значит, $n^2 \geq 8(n-2)$, причем при $n=4$ $n^2 = 8(n-2)$.

3. График функции — прямая, отсекающая на оси x отрезок длиной 3 ед., а на оси y — длиной 6 ед. Площадь треугольника 9 ед.².

Б.15. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 47.

2. $2^{|x|} = 2^3$; $|x| = 3$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

3. График функции — парабола, расположенная в верхней полу-
 плоскости; а) если $x=2,5$, то $y \approx 3,1$; б) если $y=6$, то $x \approx 3,5$.

Б.16. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 47.

2. По определению логарифма, $x-3=10^3$, откуда $x=103$.

3. $5 \cdot (-0,1)^3 = -0,005$ истинно, точка A принадлежит графику;
 $5 \cdot (-2)^3 = -50$ ложно, точка B не принадлежит графику.

Б.17. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 41.

2. $|2x| = 10$; $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

3. $a = \left(3 \frac{1}{3} - 1 \frac{1}{2}\right); 11 = \left(3 \frac{2}{6} - 1 \frac{3}{6}\right); 11 = \left(2 \frac{8}{6} - 1 \frac{3}{6}\right); 11 =$
 $= 1 \frac{5}{6}; 11 = \frac{11}{6}; 11 = \frac{1}{6}.$

Б.18. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 41. Следствие 4.

2. $\{1\}$. Значение $x=-2$ не подходит, ибо при этом значении x
 выражение $\sqrt{x-1}$ не имеет смысла.

3. См. рис. 187.

Б.19. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 44. Следствие 2.

2. $\{-3; 7\}$.

3. $\frac{(2^2)^{-6} \cdot (2^3)^{-4}}{2^{-22}} = \frac{2^{-12} \cdot 2^{-12}}{2^{-22}} = 2^{-24}; 2^{-22} = 2^{(-24)-(-22)} = 2^{-2} = 1/4.$

Б.20. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 45.

2. $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) =$
 $= 2b^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{b}.$

3. $180^\circ (5-2) : 5 = 108^\circ.$

Б.21. 1. См. 475.

2. $\lg 5^2 - \lg \left(3 \frac{1}{8} \cdot 8\right) = \lg 25 - \lg 25 = 0.$

3. График функции $y=x$ — биссектриса первого и третьего коор-
 динатных углов. График функции $y=x^2$ — парабола, расположенная
 в верхней полуплоскости.

Б.22. 1. См. 475.

2. $x^2 - 100 > 0$; $(x - 10)(x + 10) > 0$; $]-\infty; -10[\cup]10; +\infty[$ — множество решений неравенства.

3. Это следует из конгруэнтности треугольников, у которых общая сторона — основание равнобедренного треугольника (треугольники конгруэнтны по стороне и двум прилежащим к ней углам).

Б.23. 1. См. 475.

2. Так как значение $|x|$ положительно при всех x , кроме $x = 0$, то областью определения функции служит множество всех действительных чисел, кроме нуля.

3. Это следует из конгруэнтности треугольников, у которых общая сторона — основание равнобедренного треугольника (треугольники конгруэнтны по двум сторонам и углу между ними).

Б.24. 1. Г. 7. Гл. VI, п. 67.

2. $(a - 8)^2 - 4^2 = (a - 8 - 4)(a - 8 + 4) = (a - 12)(a - 4)$.

3. Данное неравенство равносильно следующему: $(x - 3)(x + 3) < 0$, отсюда $x \in]-3; 3[$.

Б.25. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 50.

2. $((3^2)^{0,25} - 2^1) \cdot ((3^2)^{0,25} + 2^1) = (3^{0,5})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$.

3. Да, ибо два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого.

Б.26. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 51.

3. $\lg(2x + 10) = \lg 2^4 + \lg 3$; $\lg(2x + 10) = \lg(2^4 \cdot 3)$; $2x + 10 = 48$; $x = 19$.

Б.27. 1. Г. 8. Гл. VIII, п. 80.

2. Так как x^2 положительно при всех x , кроме $x = 0$, то данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \text{отсюда } x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[.$$

3. См. 140.

Б.28. 1. Г. 7. Гл. IV, п. 52.

2. $y = 0$, если $x = 0,5$; $y > 0$, если $x \in]0,5; +\infty[$, $y < 0$, если $x \in]-\infty; 0,5[$.

3. $b_1 = b_2 : q = (-16) : \frac{1}{2} = -32$; $b_3 = b_2 \cdot q = (-16) \cdot \frac{1}{2} = -8$.

Б.29. 1. Г. 8. Гл. IX, п. 89.

2. $\frac{\sqrt{x-4}}{(\sqrt{x})^2 - 4^2} = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$.

3. Прибавим ко всем частям неравенства по 2:

$$5,4 + 2 \leq 5x \leq 7,6 + 2; \quad 7,4 \leq 5x \leq 9,6.$$

Разделив все части неравенства на 5, найдем, что

$$1,48 \leq x \leq 1,92, \quad \text{или } x \in [1,48; 1,92].$$

Б.30. 1. Г. 8. Гл. IX, п. 89. Следствия.

2. Введем обозначение $x^2 = a$, тогда $x^4 = a^2$. Сделав замену, получим квадратное уравнение относительно a :

$$a^2 - 29a + 100 = 0; \quad a = 4 \quad \text{и} \quad a = 25;$$

отсюда $x^2 = 4$ и $x^2 = 25$. Корни данного уравнения 2; -2; 5; -5.

ОТВЕТЫ К ВОПРОСАМ И ЗАДАЧАМ ДЛЯ УСТНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

1. а) $(8 \cdot 2) \cdot 125 \cdot 250 = (8 \cdot 125) \cdot (2 \cdot 250) = 1000 \cdot 500 = 500\,000$;
 б) $(8 \cdot 8) \cdot 2,5 \cdot 12,5 = (12,5 \cdot 8) \cdot (2,5 \cdot 4 \cdot 2) = 100 \cdot 20 = 2000$. 2. а) $4,85 - 2\frac{4}{9} + 5\frac{3}{20} = (4,85 + 5,15) - 2\frac{4}{9} = 7\frac{5}{9}$; б) $(215 + 214) \cdot (215 - 214) = 429 \cdot 1 = 429$. 3. а) $(3,7 + 6,3)^2 = 10^2 = 100$; б) $(317 - 217)^2 = 100^2 = 10\,000$.
 4. $36,1 \cdot (2,78 + 7,22) - 26,1 \cdot (5,64 + 4,36) = 36,1 \cdot 10 - 26,1 \cdot 10 = 10 \cdot (36,1 - 26,1) = 100$. 5. $12,8 (12,8^2 - 7,2^2) - 448 \cdot 3,2 = 12,8 (12,8 - 7,2) (12,8 + 7,2) - 448 \cdot 3,2 = (4 \cdot 3,2) \cdot 5,6 \cdot 20 - 448 \cdot 3,2 = 3,2 (4 \cdot 5,6 \times 20 - 448) = 3,2 (448 - 448) = 0$. 6. $\left(-2\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-1\frac{4}{11}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) + (1 - 7,52 \cdot (-8,47)) \cdot (0,4 - 0,4) = 3 + 0 = 3$. 7. $\frac{50}{13} \cdot \frac{26}{100} + \frac{24 \cdot 0,273}{24 \cdot 0,273} + \frac{78,3 : 316}{78,3 : 316} = 1 + 1 + 1 = 3$. 8. Представим каждую из данных дробей в виде разности двух дробей, тогда $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$. 9. а) $\sqrt{(3,13 + 3,12)(3,13 - 3,12)} = \sqrt{6,25 \cdot 0,01} = 2,5 \cdot 0,1 = 0,25$; б) $\sqrt{(13 \cdot 4)^2 + (13 \cdot 3)^2} = \sqrt{13^2 \cdot (4^2 + 3^2)} = 13 \cdot 5 = 65$. 10. $\sqrt{(12,1 + 8,1)(12,1 - 8,1) : (0,25 \cdot (0,25 + 19,95))} = 4$.
 11. 0. У к а з а н и е. Вычислите сперва значение выражения $4a - 8b$.
 12. $\frac{(a(a^2 + 2))^2}{(a^2 + 2)^2} = a^2 = \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1\frac{7}{9}$. 13. $\sqrt{a^2(a-b) - b^2(a-b)} = \sqrt{(a-b)^2(a+b)} = |a-b| \sqrt{a+b} = |0,78 - 0,22| \cdot \sqrt{0,78 + 0,22} = 0,56 \cdot 1 = 0,56$. 14. $\sqrt{(5a + 4b)^2} = |5a + 4b| = |5 \cdot 0,4 + 4 \cdot (-0,5)| = 0$.
 15. $x = \frac{a-r}{b}$. 16. $\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}$. 17. $\frac{cp}{p+q}; \frac{cq}{p+q}$. 18. Наименьшее значение $x + y$ равно -44 , а наибольшее 5 . 19. а) Например, $(1,7 + 1,8) : 2 = 1,75$; г) например, $((-0,76) + (-0,7)) : 2 = -0,73$. 20. Первый рабочий за 1 ч может выполнить $\frac{1}{2}$ работы, а второй $\frac{1}{3}$. Оба рабочих, работая вместе, за 1 ч выполняют $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$, или $\frac{5}{6}$ работы. Всю работу оба рабочих выполняют за $1 : \frac{5}{6} = 1,2$, т. е. за 1 ч 12 мин.
 21. Пусть пассажиру осталось проехать a км. Тогда, смотря в окно, он проехал вдвое больше, т. е. $2a$ км. Половина пути равна $2a + a = 3a$ км, а весь путь $6a$ км. Следовательно, оставшаяся часть пути составляет $a : 6a = 1/6$. 22. $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ — делится на 11. 23. $S = 5,75 \cdot 0,28 \approx 1,61$ дм², или $\approx 1,6$ дм².
 24. а) $17 : 2 = 8,5$; б) $36 : 4 = 9$; в) $24 : 8 = 3$; г) $48 \cdot \frac{3}{4} = 36$; д) $\frac{1}{2}$ от $40\% = 20\%$. 25. а) 27% от 39 равно 39% от 27, ибо $\frac{39 \cdot 27}{100} = \frac{27 \cdot 39}{100}$.
 26. $0,25x = 0,25$; $x = 1$. 27. В первый день продано 40% товара, во второй день -25% от 60% , т. е. 15% поступившего товара.

Осталось непроданным $100\% - (40\% + 15\%) = 45\%$ поступившего товара. 28. Если прежняя длина стороны квадрата равна a , то увеличенная сторона — $1,5a$. Прежняя площадь равна a^2 , увеличенная площадь — $(1,5a)^2 = 2,25a^2$, т. е. площадь увеличится в 2,25 раза или на 125% ($225\% - 100\% = 125\%$). 29. Пусть a и b — стороны прямоугольника. Прежняя площадь ab , новая $1,2a \cdot 0,8b = 0,96ab$. Площадь уменьшится на 4%. 30. Через год положенная сумма будет составлять 1,03а руб. Через два года — $1,03a + 0,3$ от $1,03a = 1,03(1 + 0,3)a = 1,03^2a$ руб. 31. а) $(0,2)^5 \cdot 5^5 \cdot 5 = (0,2 \cdot 5)^5 \cdot 5 = 1^5 \cdot 5 = 5$; б) $0,25^4 \cdot 8^3 = 0,25^3 \cdot 0,25 \cdot 8^3 = 0,25 \cdot 2^3 \cdot 0,25 = 2$; в) $2,5^5 \cdot 0,4^5 \cdot 0,4 \cdot 8^4 \cdot 0,125^4 = (2,5 \cdot 0,4)^5 \cdot 0,4 \cdot (8 \cdot 0,125)^4 = 1^5 \cdot 0,4 \cdot 1^4 = 0,4$; г) $(-1)^{(2n-1)+(1-n)+(n+2)} = (-1)^{2n+2} = 1$ ($2n+2$ — четное число); д) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$; е) $\frac{1}{2} + \frac{1}{(-2)^1} = 0$. 32. а) $-3^2 = -9$; $(-3)^2 = 9$; $(-3)^2 > -3^2$; б) $0,5^4 > 0,5^5$; в) $119 \cdot 117 = (118 + 1)(118 - 1) = 118^2 - 1^2 < 118^2$; г) $115 \cdot 119 = (117 - 2)(117 + 2) = 117^2 - 2^2 < 117^2$. 33. а) $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4}$; $5 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25}$; б) $2 = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}$; $5 = \sqrt[3]{125}$. 34. а) $9 < 10 < 16$; $3 < \sqrt{10} < 4$; б) $2 < \sqrt[3]{10} < 3$; в) $2^4 < 20 < 3^4$, $2 < \sqrt[4]{20} < 3$; г) $5^3 < 130 < 6^3$, $5 < \sqrt[3]{130} < 6$. 35. а) $-a$; б) $3-a$; в) $|x-2| + |x-4|$, при $2 < x < 4$ это выражение равно $(x-2) + (4-x) = 2$. 36. а) $5|x|$; б) здесь $x < 0$, поэтому $\sqrt{-36x^3} = \sqrt{36x^2(-x)} = -6x\sqrt{-x}$. 37. а) $\sqrt[3]{7b^2}$; б) $-\sqrt[3]{6a^2}$. 38. а) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{8}$, отсюда $\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{2}$, б) $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32}$; $3\sqrt[3]{1,5} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1,5} = \sqrt[3]{40,5}$, отсюда $3\sqrt[3]{1,5} > 2\sqrt[3]{4}$. 39. а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$. 40. а) $\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$; б) $\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = 1$; в) $4\sqrt{6} \approx 9,8$. 41. а) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; б) $\frac{a^2 - (\sqrt{5})^2}{\sqrt{5} - a} = \frac{(a - \sqrt{5})(a + \sqrt{5})}{-(a - \sqrt{5})} = -(a + \sqrt{5})$; в) $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2}\right)^2}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} = x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$; г) $\frac{\left(\frac{1}{a^4}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^4}\right)^2}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}} = a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$; д) $\frac{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{y^2}\right)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$. 42. а) $y = 3x^{\frac{1}{5} + 0,6 + 1,2} = 3x^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^2}} = 2^{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2$. 43. а) $\{-3; 3\}$; б) $]-3; 3[$; в) $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$; г) $\{1; 5\}$; д) $]-2; 4[$; е) $]-7; 3[$; ж) $]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[$. 44. а) $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. Иногда отвечают: x — любое число, забывая, что знаменатель не может быть равен нулю; б) $]-\infty; -1,5[\cup]-1,5; +\infty[$; в) $|x| = 3$, отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; г) $\emptyset$; д) $|x-2| = 5$, $x_1 = 7$, $x_2 = -3$; е) $|x| = x$. Если $x \geq 0$, то $x = x$, если $x < 0$, то $-x = x$; решением этих уравнений является множество всех чисел луча $[0; +\infty[$; ж) $|y| = -y$. Решением этого уравнения является луч $]-\infty; 0[$; з) $\emptyset$. Если сократить на x , получается посторонний

корень $x=0$; и) $x=5$. Если сократить на $x-1$, то второй полученный корень $x=1$ — посторонний; к) $x=4$. Сокращение на $x+2$ не дает постороннего корня; л) $2 \leq x < 3$; м) $p+0,2$, где $p \in \mathbb{Z}$. 45. а) $\{0\}$; б) $\{1\}$; в) $\{0; 2\}$; г) $\{-1\}$. Значение $x=1$ не подходит, ибо выражение $(1-1)^0$ не имеет смысла; д) $x^2+7 \neq 0$, $|x-3|=0$, $x=3$; е) $x=x^2$ или $-x=x^2$, решением этих уравнений $\{-1; 0; 1\}$;

ж) запишем уравнение в виде $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$; легко догадаться, что

$x=2$ или $x=1/2$; з) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 + \frac{1}{3}$; $\sqrt{x}=3$ или $\sqrt{x}=1/3$,

отсюда $x=9$ или $x=1/9$; и) здесь сумма первого, второго коэффициентов и свободного члена равна нулю ($1921-3902+1981=0$),

поэтому один из корней $x_1=1$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1981}{1921}$ (по теореме Виета),

$x_2 = \frac{1981}{1921}$; к) $x_1=-1$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1979}{1917}$; $x_2 = -\frac{1979}{1917}$. 46. а) $\{(0; 0)\}$.

Сумма двух неотрицательных чисел может быть равна нулю лишь в случае, когда каждое слагаемое равно нулю; б) $\{(3; 4)\}$; в) так как $(x-5)^2 \geq 0$, $(3x+5y)^2 \geq 0$, $|2x+y-z| \geq 0$, то данное уравнение имеет решение лишь при $x-5=0$, $2x+5y=0$ и $2x+y-z=0$; отсюда получаем: $x=5$, $y=-2$, $z=8$; г) разложим левую часть уравнения на множители: $x^2(x+1)+(x+1)=0$, $(x+1)(x^2+1)=0$, отсюда $x=-1$;

д) $x(x^2-1)=0$, $x(x-1)(x+1)=0$, отсюда $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$. 47. (2; 0), (-3; 0); (0; -6). У к а з а н и е. Ординаты точек пересечения параболы с осью x равны нулю; абсциссы точки пересечения параболы с осью y равна нулю. 48. (5; 0), (1; 0), (-0,5; 0), (-2; 0);

(0; 10). 49. а) $a = \frac{2S}{h}$; б) $\sin \alpha = \frac{2S}{a^2}$; в) $a = \sqrt{S/h}$; г) $a_1 + a_n = 2S : n$,

$a_n = 2S : n - a_1$; д) $R = \sqrt{S/\pi}$; е) $R = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$; ж) $v_0 = S - gt$; $t = \frac{S - v_0}{g}$;

з) $m = \frac{n}{c(T-t)}$; $c = \frac{n}{m(T-t)}$; $T = n : mc + t$; $t = T - n : mc$.

50. а) $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$; б) $\emptyset$; в) $]-\infty; \infty[$; г) $|x| > 4$; ответ: $]-\infty; -4[\cup]4; \infty[$; д) $]-2; 2[$; е) решение неравенства сводится

к решению системы $\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0, \\ x > -1. \end{cases}$ Ответ: $]-1; 2[\cup]2; \infty[$;

ж) $]-\infty; 2[$; з) $\lg 0,1 < 0$, поэтому $2x-1 > 0$, $x > 0,5$. Ответ: $]0,5; \infty[$; и) $[0; \infty[$; к) $]-\infty; 0[$. 51. а) $2x=y+3$. Заменяя x на y , а y на x , получим $2y=x+3$; отсюда обратная данной функции $y=0,5x+1,5$ (графики данной функции и обратной ей симметричны относительно биссектрисы первого и третьего углов); б) функция, обратная данной, $y=-0,5x+2$. 52. а) Прямая $y=1$, из которой исключена точка (0; 1), ибо выражение 0^0 не имеет смысла (рис. 183);

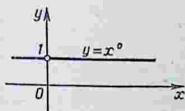


Рис. 183

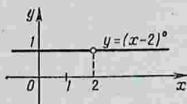


Рис. 184

б) см. рис. 184; в) см. рис. 185; г) рис. 186; д) рис. 187; е) если $x > 0$, то $y = 1$; если $x < 0$, то $y = -1$, (рис. 188); ж) если $x \geq 0$ то $y = x^2$; если $x < 0$, то $y = -x^2$ (рис. 189); з) так как $|y| \geq 0$, то $x + 1 \geq 0$, или $x \geq -1$. Давая значения $x \geq -1$, строим график функции $y = x + 1$, а затем строим луч $y = -x - 1$, симметричный построенному (рис. 190).

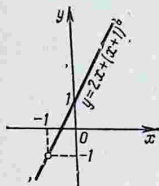


Рис. 185

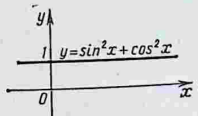


Рис. 186

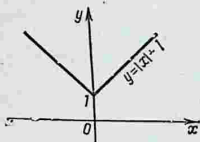


Рис. 187

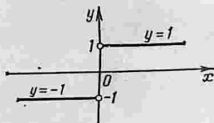


Рис. 188

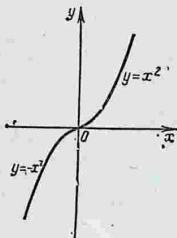


Рис. 189

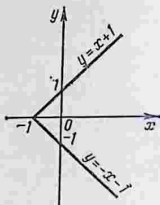


Рис. 190

53. Этот четырехугольник — квадрат (рис. 191). 54. $a = -0,5$; $y = -0,5x + 4$. 55. а) $y = x^2 - 3$; б) $y = (x - 4)^2$; в) $y = (x - 4)^2 - 3$. 56. а) Наименьшее значение y равно нулю (рис. 192); б) наибольшее значение y равно 7 (рис. 193); в) $y = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$. Наименьшее значение y равно -4 (рис. 194).

57. а) В одной системе координат строим параболу $y=x^2$ и прямую $y=x+2$, абсциссы точек их пересечения $x_1=-1$ и $x_2=2$ являются корнями данного уравнения; б) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ (рис. 195); в) $x=4$ (рис. 196).

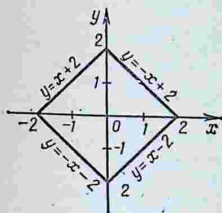


Рис. 191

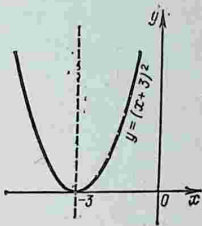


Рис. 192

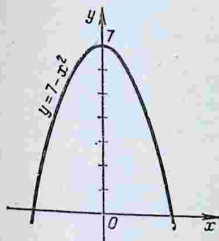


Рис. 193

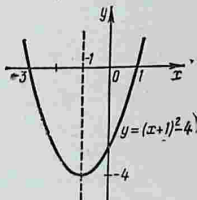


Рис. 194

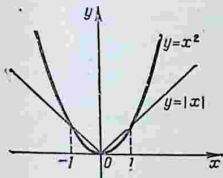


Рис. 195

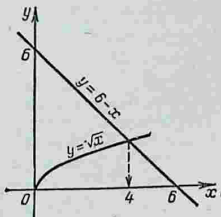


Рис. 196

58. а) Парабола $y=x^2$ и прямая $y=2x$ пересекаются в двух точках. Координаты этих точек $(0; 0)$ и $(2; 4)$ являются решением этой системы;

б) см. рис. 197; в) $\{(0; 0), (1; 0,5)\}$. 59. а) $\{(2; 1), (-2; 3)\}$. У к а з а н и е. Решение заданной системы сводится к решению совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} x=2, \\ x+2y=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-2, \\ x+2y=4; \end{cases}$$

б) $\{(8; 5)\}$. У к а з а н и е. Решение этой системы можно упростить, если в первом уравнении вынести за скобки x , а затем заменить $2x-3y$ числом 1; тогда находим,

что $x=8$; в) $\begin{cases} y=0, \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x=2, \\ 2x+3y=13, \end{cases} \text{ Ответ: } \{(6,5; 0), (2; 3)\};$$

г) вычитая почленно, получим $x-y=-1$. Подставим это значение в первое уравнение системы: $(-1+2)^2+y=8$, откуда $y=7$, $x=6$. Ответ: $\{(6; 7)\}$. 60. а) Это

множество точек графиков $y=x$ и $y=-x^2$; б) множество точек прямой $x=2$ и точка $(0; 0)$; в) множество точек прямой $y=-x+1$ и точка $(0, 0)$. 61. 1. Разность

прогрессии $d=b-a$, третий член $a_3=b+(b-a)=2b-a$, четвертый $a_4=3b-2a$. 2. Знаменатель про-

грессии $q=b^3:b=b^2$, третий член b^5 , четвертый b^7 . 3. $d=a_3-a_2=n-m$; $a_1=a_2-d=m-(n-m)=2m-n$. 62. 1. Знаменатель про-

грессии $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{n}{m}$; $b_1=b_2:q=m:\frac{n}{m}=\frac{m^2}{n}$. 2. Сумма членов этой

арифметической прогрессии S , где первый член $a_1=28$, $d=-2$, равна нулю. Применяя формулу $S=\frac{(2a_1+d(n-1))n}{2}$, найдем, что

$$\frac{(2 \cdot 28 - 2(n-1)) \cdot n}{2} = 0; \text{ откуда } (28 - (n-1))n = 0, n=29 \text{ или } n=0$$

(не подходит); $x=28+(-2) \cdot (29-1)=-28$. Можно решить эту задачу, не применяя формулы суммы. От 28 до 0 включительно — 15 членов, от -2 до -28 — 14 членов. Всего 29 членов. 63. а) Разность

$$d=(1+3\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})=2\sqrt{3}; a_{15}=1+\sqrt{3}+2\sqrt{3} \cdot (15-1)=1+\sqrt{3}+28\sqrt{3}=1+29\sqrt{3}.$$

З а м е ч а н и е. Некоторые учащиеся ошибочно заменяют последнее выражение на $30\sqrt{3}$. Надо помнить, что здесь надо сперва найти $\sqrt{3} \approx 1,73$, затем умножить это число

$$\text{на } 29 \text{ и лишь затем прибавить } 1; \text{ б) } d=-3; a_{15}=\sqrt{2}-1+(-3) \cdot 14=\sqrt{2}-43.$$

64. По свойству геометрической прогрессии, $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$,

$$\text{где } n > 1, \text{ поэтому } b_3^2=b_1b_5; b_3^2=\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}=6; \text{ откуда } b_3=\sqrt{6}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}. 65. \text{ а) } b_{n-1}=5 \cdot 2^{(n-1)-1}=5 \cdot 2^{n-2}; b_{n+1}=$$

$$=5 \cdot 2^n; \text{ б) } b_{n-1}=5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)-1}=5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}, b_{n+1}=5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)-1}=$$

$$=5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}. 66. \text{ а) } 10^{x+1}=10^x \cdot 10=3 \cdot 10=30; \text{ б) } 10^{-x}=1/10^x=1/3;$$

в) $10^x = 10^x \cdot 10^{-1} = 3 \cdot 10^{-1} = 0,3$; г) $10^{2x} = (10^x)^2 = 3^2 = 9$. 67. а) $-x > 0$, $x < 0$;] $-\infty$; 0[; б) $x \leq 0$;] $-\infty$; 0]; в)] $-\infty$; 1[; г)] $-\infty$; 1]; д)] $-\infty$; 0[$\cup$]0; $+\infty$ [; е)] $-\infty$; ∞ [; ж) $x > 0$ и $x \neq 1$, так как $\lg 1 = 0$, то отсюда ответ:]0; 1[$\cup$]1; $+\infty$ [; з)]0; $+\infty$ [. 68. а) $\lg 0,1 < 0$, поэтому данное выражение не имеет смысла; б) $\sqrt{0,1} > 0$, поэтому данное выражение имеет смысл; в) $\lg \cos 90^\circ = \lg 1 = 0$. 69. а) По формуле $10^{\lg a} = a$ имеем $10^{\lg 8} = 8$; б) 5; в) $10^{\lg 2 + \lg 3} = 10^{\lg (2 \cdot 3)} = 6$, или $10^{\lg 2 + \lg 3} = 10^{\lg 2} \cdot 10^{\lg 3} = 6$; г) $10^{\lg 2 + 2} = 10^{\lg 2} \cdot 10^2 = 200$; д) 102 ; е) $10^{\lg 3} \cdot 10^{-1} = 0,3$; ж) 3,1; з) $1 : 10^{\lg 2} = 0,5$. 70. $\lg 0,01 = -2$; $\lg 1 = 0$; $\lg 100 = 2$; $\lg 10\,000 = 4$. Числа $-2, 0, 2, 4$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$. 71. а) $\lg x = 1$ или $\lg x = -1$, отсюда $x_1 = 10$ или $x_2 = 0,1$; б) $x^2 = 10$; $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = -\sqrt{10}$; в) $(\lg x^2)^2 = 1$, отсюда $\lg x^2 = 1$ или $\lg x^2 = -1$; $x^2 = 10$ или $x^2 = 0,1$, отсюда $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = -\sqrt{10}$, $x_3 = \sqrt{0,1}$, $x_4 = -\sqrt{0,1}$; г) $10^{\lg x^2} = x^2$, отсюда $2x^2 = 8$, $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. 72. а) См. рис. 198; б) см. рис. 199.

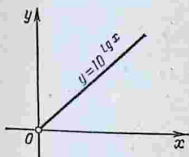


Рис. 198

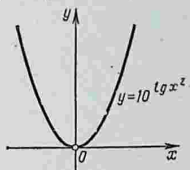


Рис. 199

73. а) $\lg(10a) = \lg 10 + \lg a = 1 + 0,1 = 1,1$; б) $0,1 - 1 = -0,9$; в) $1 - 0,1 = 0,9$; г) $2 \lg a = 2 \cdot 0,1 = 0,2$; д) $0,1^2 = 0,01$. 74. По свойству расстояний, $|AC| \leq |AB| + |BC|$ и $|AC| \geq |AB| - |BC|$; следовательно, $4 \text{ км} \leq |AC| \leq 16 \text{ км}$. 76. $0,5a$. 77. Четыре различные точки при любом расположении (если даже три из них и даже четыре лежат на одной прямой), взятые попарно, определяют 6 различных отрезков. 78. а) Все точки, принадлежащие кругу (O ; r); б) круг (O ; r) без точек окружности; в) круг (O ; r) без его центра. 79. 10 см. 81. Да. Если величина одного из смежных углов равна α , тогда величина другого равна $180^\circ - \alpha$. Решив относительно α уравнение $(180^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$, найдем, что один из смежных углов равен 45° , а другой 135° . 82. Да. Если вертикальные углы прямые. 83. 32° , если угол ABC является пересечением данных углов ABD и CBD ; 112° , если угол ABC является их объединением. 84. Взяв точку A за центр окружности, приведите окружность, пересекающую данную. Хорда, соединяющая точки пересечения этих окружностей, — искомая. 85. Если точка C лежит между A и B , то $-2 < x_C < 5$; если C не лежит между A и B , то $x_C \leq -2$ или $x_C \geq 5$; $|AB| = 7$. 86. По теореме о неравенстве треугольника (рис. 200) имеем $|BD| < |AB| + |AD|$ и $|BD| < |BC| + |DC|$.

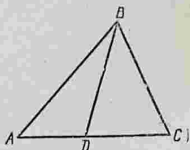


Рис. 200

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$|BD| + |BD| < |AB| + |AD| + |BC| + |DC|$$

или

$$2|BD| < |AB| + |BC| + |AC|; |BD| < \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |AC|).$$

88. а) Одну; б) одну; в) три. 90. Стороны полученного четырехугольника попарно параллельны. 91. Указание. Проведите диагональ AC и тогда $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$, а значит, $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$. 92. 1. Если перпендикуляр и наклонная проведены из одной точки на прямую, то перпендикуляр короче наклонной. 2. Нет. 93. Так как $|XA| > |XM|$, $|XB| > |XN|$, $|XC| > |XP|$, то $|XA| + |XB| + |XC| > |XM| + |XN| + |XP|$ (рис. 201).

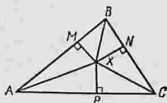


Рис. 201

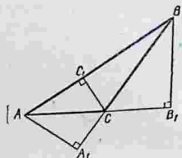


Рис. 202

94. Точка A_1 — проекция точки A на прямую BC , отрезок A_1C — проекция отрезка AC на эту прямую и т. д. (рис. 202). 95. $|MO| < |OB| + |MB|$ (неравенство треугольника) или $|MA| + r < r + |MB|$, поэтому $|MA| < |MB|$. 96. Надо через точку A провести прямую, перпендикулярную радиусу OA . Так как через точку A можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную радиусу OA , то эта касательная — единственная. 97. Указание. $\triangle ABK \cong \triangle DEL$ (по стороне и двум прилежащим углам); следовательно, $[BK] \cong [EL]$. 98. Нет. Оно справедливо лишь для двух конгруэнтных треугольников. 99. Если бы в треугольнике каждый из углов был больше чем 60° ,

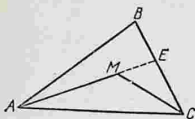


Рис. 203

то их сумма была бы больше 180° , а если бы они были равны по 60° , то этот треугольник не был бы разносторонним. 100. 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, а сумма двух положительных чисел больше каждого из слагаемых. 2. Да, если внешний угол — смежный с внутренним углом треугольника. 3. Продолжим AM (рис. 203), до пересечения со стороной BC

в точке E , тогда $\widehat{AMC} > \widehat{AEC}$, а $\widehat{AEC} > \widehat{ABC}$ (по свойству внешнего угла треугольника); отсюда $\widehat{AMC} > \widehat{ABC}$. 101. Нет; в этом случае сумма двух углов, из которых проведены биссектрисы, была бы равна 180° . 102. Указание. Постройте треугольник, симметричный данному, относительно прямой, проходящей через больший катет. Объединение этих двух треугольников — равнобедренный треугольник.

103. 2 и 6 см. Указание. Воспользуйтесь дважды следующим свойством: катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы. 104. Если бы против наименьшей стороны треугольника лежал бы прямой или тупой угол, тогда против больших сторон лежали бы тупые углы (против большей стороны треугольника лежал бы больший угол) и тогда сумма углов треугольника была бы больше 180° . 105. Угол при основании этого треугольника равен $(180^\circ - \alpha) : 2 = 90^\circ - \alpha/2$. Этот угол лежит против

большей стороны треугольника, поэтому имеем неравенство $90^\circ - \frac{\alpha}{2} >$

$> \alpha$; отсюда $90^\circ > \frac{3}{2} \alpha$, т. е. $\alpha < 60^\circ$; кроме того, $\alpha > 0^\circ$; итак,

$\alpha \in]0^\circ, 60^\circ[$. 106. Нет. Например, в прямоугольном треугольнике с углом в 30° катет, лежащий против этого угла, в два раза меньше гипотенузы, в то же время угол в 30° в три раза меньше угла в 90° .

107. $a + b$. Указание. В образовавшемся прямоугольнике смежные стороны равны $a/2$ и $b/2$ (по теореме Фалеса). 108. Точка E_1 — проекция точки E на высоту BD (рис. 204), D — проекция точки A на эту высоту. Проекция высоты AE на BD есть E_1D . По теореме Фалеса, $|E_1D| = 6 : 2 = 3$ (см). 109. Может. Сумма углов выпуклого

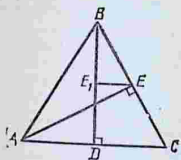


Рис. 204

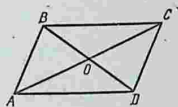


Рис. 205

n -угольника равна $2d(n-2)$. Решив уравнение $2d(n-2) = 100d$ относительно n , получим, что у такого многоугольника 52 стороны. 110. Если допустить, что в параллелограмме $ABCD$ (рис. 205) диагонали AC и BD конгруэнтны, то и треугольник ABD будет конгруэнтен треугольнику ADC (по трем сторонам); следовательно, $\angle BAD \cong \angle ADC$, что невозможно, ибо один из них — острый, а другой — тупой. 111. Этот угол равен 30° , если высоты проведены из вершины тупого угла, и 150° , если высоты проведены из вершины острого угла. 112. 6а. 113. Нет. 114. Нет. 115. а) Да; б) нет; в) нет. 116. Нет. 117. а) Может, если большее основание трапеции равно ее боковой стороне; б) может, если меньшее основание трапеции равно ее боковой стороне. 118. Две противоположные стороны параллельны. Сумма всех внутренних углов равна 360° . Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180° . 119. а) Ось симметрии имеется лишь у равнобедренной трапеции; б) нет. 120. Нет, так как тогда диагонали делились бы в точке пересечения пополам (по теореме Фалеса), а это справедливо лишь для параллелограмма. 121. Можно. Если отрезки не конгруэнтны, то они имеют два центра гомотетии: один — внешний, другой — внутренний; если они конгруэнтны, то только один внутренний. 122. Гомотетичны треугольники AOB и COD , COB и AOD (рис. 205), коэффициент гомотетии $k = -1$. 123. В точке

пересечения высот треугольника; $k=2$. 124. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$; $\triangle ABC \sim \triangle BDC$; $\triangle ABD \sim \triangle BDC$. Эти три пары треугольников подобны по двум углам. 125. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ (по двум углам); отсюда $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|BD|}$. 126. Указание. $\angle E \cong \angle C$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB). 127. Ромбы подобны, если имеют соответственно равные углы. 128. Гипотенуза равна 10 см. Если около треугольника описать окружность, то медиана будет равна радиусу описанной окружности; длина этой медианы 5 см. 129. Высота есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу; длина одной из проекций 8 см, другой 2 см; диаметр 10 см. 130. Диаметр описанной окружности совпадает с гипотенузой, она равна 6 см; $S=6 \text{ см}^2$. 131. Высота треугольника 9 см. Истинная площадь равна 108 см^2 ($S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 9$). Ошибочно вычис-

ленная площадь равна 180 см^2 ($S_1 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 15$), что больше истинной на 72 см^2 ; это составляет $\approx 67\%$. 132. Указание. Надо разделить основание треугольника на равные части и каждую точку деления соединить отрезком с вершиной треугольника. 133. $0,5 \text{ дм}^2$. 134. Площадь треугольника ABD равна $S/2$, площадь треугольника AMD равна $1/2$ площади треугольника ABD , т. е. $S/4$. 135. Отсеченный треугольник и данный подобны, коэффициент подобия $k=1:4$. Отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия, т. е. $k^2=1:16$, отношение площади трапеции к площади отсеченного треугольника равно $15:1$. 136. Имеется. У квадрата как внутренние, так и центральные углы равны по 90° . 138. Дуги этой окружности равны 60° , 120° , 180° . Первая хорда стягивает $1/6$ окружности и является стороной правильного вписанного шестиугольника; $a_0=R$, т. е. длина первой хорды равна 1 дм. Длина второй хорды $a_1=R\sqrt{3}$, она равна $\sqrt{3} \text{ дм} \approx 1,73 \text{ дм}$, третья хорда — диаметр окружности, она равна 2 дм. 139. Гипотенуза равна 5 см. Длина окружности, построенной на гипотенузе, равна 5π см, а на катетах — 3π см и 4π см. Площадь круга, построенного на гипотенузе, равна $\frac{25}{4}\pi \text{ см}^2$, а на ка-

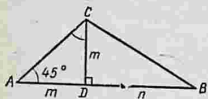


Рис. 206

татах — $\frac{9}{4}\pi \text{ см}^2$ и $4\pi \text{ см}^2$. 140. Гипотенуза равна 13 см. Синус большего острого угла равен $12/13$. Косинус этого угла равен $5/13$. 141. 1) В прямоугольном треугольнике ADC (рис. 206) $\widehat{ACD}=45^\circ$, поэтому $|DC|=|AD|=m$. Из треугольника BDC находим $\text{tg } \hat{B} =$

$$= \frac{|DC|}{|DB|} = \frac{m}{n}; \text{ 2) из треугольника } BDC, \text{ по теореме Пифагора, } |BC| = \sqrt{m^2 + n^2}, \sin \hat{B} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}. \text{ 142. Рис. 207. } |AD| = |CD| \times \text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha, |BD| = |CD| \text{tg } \beta = \text{tg } \beta. |AC| = \frac{|CD|}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}, |CB| = \frac{|CD|}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta}. \text{ 143. 1) Треугольники } ACD \text{ и } CDB \text{ (рис. 208) по-}$$

добны (по двум углам), отсюда пропорциональность сходственных сторон:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \operatorname{tg} \hat{B};$$

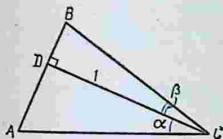


Рис. 207

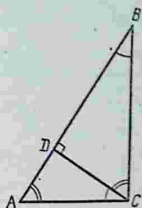


Рис. 208

2) из подобия треугольников ACD и ACB следует, что

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \sin \hat{B}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1. Всякое нечетное число можно записать в виде $2n+1$, где $n \in N$, тогда $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$. Но из двух последовательных натуральных чисел n и $n+1$ одно четное, поэтому первое слагаемое $4n(n+1)$ делится без остатка на 8, а при делении $4n(n+1)+1$ на 8 получается в остатке единица. 2. а) Прибавим к данному двучлену m и отнимем m , тогда

$$m^3 + 11m + m - m = m^3 - m + 12m = \\ = m(m^2 - 1) + 12m = m(m-1)(m+1) + 12m;$$

слагаемое $m(m-1)(m+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых хотя бы одно делится на 2 и одно — на 3; следовательно, $m(m-1)(m+1)$ делится на 6; второе слагаемое $12m$ при натуральном m также делится на 6. Отсюда следует, что $m^3 + 11m$ делится на 6; б) представим $8n$ в виде суммы двух слагаемых $2n$ и $6n$, тогда данное выражение можно представить в виде суммы:

$$(n^3 + 3n^2 + 2n) + 6n = n(n^2 + 3n + 2) + 6n.$$

Квадратный трехчлен $n^2 + 3n + 2$ имеет корни 1 и 2; значит, $n^3 + 3n^2 + 8n = n(n-1)(n-2) + 6n$; здесь первое слагаемое делится на 6 (см. 2а), второе слагаемое $6n$ также делится на 6, поэтому и вся сумма делится на 6. 3. Обозначим каждое из данных равных отношений через k , т. е. $a/b = k$, $b/c = k$, $c/a = k$, тогда $a = bk$, $b = ck$, $c = ak$. Перемножая почленно эти равенства, имеем

$$abc = abck^3; \quad k^3 = 1; \quad k = 1,$$

тогда $a=b$, $b=c$, $c=a$ и, следовательно, $a=b=c$. 4. При разложении точного куба на простые множители показатели степеней этих множителей делятся на 3, например $216=6^3=2^3 \cdot 3^3$. Так как $2100=2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, то для ответа на вопрос задачи это число надо умножить на $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2=4410$. Получаем искомое число: $4410=(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2)=2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3=(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^3=210^3$. 5. $x^4+y^4-x^2y^2-x^2y^3+16xy=x^4+y^4-x^2y^2(x+y)+16xy=x^4+y^4-x^2y^2 \cdot 2+16xy=$
 $= (x^2-y^2)^2+16xy=((x-y)(x+y))^2+16xy=((x-y) \cdot 2)^2+16xy=$
 $=4(x^2-2xy+y^2)+16xy=4(x^2-2xy+y^2+4xy)=4(x+y)^2=4 \cdot 2^2=16$.
 6. а) Преобразуем первый корень:

$$\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[6]{4+4\sqrt{3}+3}=\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}.$$

Данное выражение равно

$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=$$

$$=2\sqrt[3]{2^2-(\sqrt{3})^2}=2;$$

б) для упрощения данного выражения надо помнить, что $\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$, и твердо знать определение модуля. Из этого определения следует, что при любых значениях x имеем $|x| \geq 0$. В частности,

$$|x-a|=\begin{cases} x-a, & \text{если } x-a \geq 0, \text{ т. е. } x \geq a; \\ a-x, & \text{если } x-a < 0, \text{ т. е. } x < a; \end{cases}$$

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Обозначим данное выражение через y :

$$y=\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+7)^2}=|x+3|+|x-1|+|x+7|.$$

Каждое слагаемое полученного выражения «раскрывается» по-разному в зависимости от того, какой знак имеют $x+3$, $x-1$ и $x+7$; поэтому разобьем все множество значений x на четыре промежутка. Границами промежутков будут точки, в которых обращаются в ноль выражения под знаком модуля:

$$1) x \geq 1; 2) -3 \leq x < 1; 3) -7 \leq x < -3; 4) x < -7.$$

Рассмотрим эти четыре промежутка:

1) если $x \geq 1$, то $x+3 > 0$, $x-1 \geq 0$ и $x+7 > 0$, поэтому

$$y=x+3+x-1+x+7=3x+9;$$

2) если $-3 \leq x < 1$, то $x+3 \geq 0$, $x-1 < 0$ и $x+7 \geq 0$; значит,

$$y=x+3+1-x+x+7=2x+11;$$

3) если $-7 \leq x < -3$, то $x+3 < 0$, $x-1 < 0$ и $x+7 \geq 0$; следовательно,

$$y=-x-3+1-x+x+7=-x+5;$$

4) если $x < -7$, то $x+3 < 0$, $x-1 < 0$ и $x+7 < 0$; следовательно,
 $y=-x-3+1-x-x-7=-3x-9$.

Ответ: $3x+9$, если $x \geq 1$; $2x+11$, если $-3 \leq x < 1$; $-x+5$, если $-7 \leq x < -3$; $-3x-9$, если $x < -7$; в) после преобразований

$$a + 2\sqrt{a-1} = (1 + \sqrt{a-1})^2; \quad a - 2\sqrt{a-1} = (1 - \sqrt{a-1})^2 \quad \text{получим}$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{a-1})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{a-1})^2} = |1 + \sqrt{a-1}| + |1 - \sqrt{a-1}|.$$

Если $1 \leq a \leq 2$, то выражения, стоящие под знаком модуля, неотрицательны и $x = 1 + \sqrt{a-1} + 1 - \sqrt{a-1} = 2$; г) введем подстановки $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, тогда $a = x^2$, $b = y^2$, $\sqrt{ab} = xy$; данное выражение примет вид

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} - xy\right) \left(\frac{x + y}{x^2 - y^2}\right)^2 = \left(\frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} - xy\right) \left(\frac{x + y}{(x - y)(x + y)}\right)^2 =$$

$$= (x^2 - xy + y^2 - xy) \left(\frac{1}{x - y}\right)^2 = \frac{(x - y)^2}{(x - y)^2} = 1.$$

7. а) Обычное шаблонное решение затруднительно, ибо при приведении уравнения к общему знаменателю получается уравнение четвертой степени. Здесь полезно выбрать подстановку $x^2 + 2x = a$, тогда данное уравнение преобразуется к более простому: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{12}$. Решая его, получаем

$$a^2 + a - 12 = 0; \quad a_1 = -4, \quad a_2 = 3.$$

Заменяя в подстановке $x^2 + 2x = a$ a на -4 и 3 , получим два квадратных уравнения: $x^2 + 2x = -4$ и $x^2 + 2x = 3$. Первое уравнение не имеет корней ($D < 0$); корни второго уравнения, а значит и данного, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$. Можно непосредственной проверкой убедиться в пригодности каждого из них; б) удобнее сперва найти произведение множителей первого и четвертого, второго и третьего. Тогда получатся два многочлена, у которых коэффициенты при x^2 и x одинаковы: $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 5040$. Это уравнение упрощается подстановкой $x^2 + 3x = a$, тогда

$$a^2 + 2a - 5040 = 0; \quad a = -72 \text{ или } a = 70;$$

$$x^2 + 3x = -72 \text{ или } x^2 + 3x = 70.$$

Первое уравнение корней не имеет, корни второго уравнения и данного: -10 и 7 ; в) для того чтобы в правой части уравнения получить квадрат двучлена, прибавим к обеим частям уравнения по $4a^2x^2$:

$$(x^2 - a^2)^2 + 4a^2x^2 = 4a^2x^2 + 4ax + 1;$$

$$(x^2 + a^2)^2 = (2ax + 1)^2;$$

$$(x^2 + a^2)^2 - (2ax + 1)^2 = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x^2 + a^2 - 2ax - 1)(x^2 + a^2 + 2ax + 1) = 0,$$

тогда $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ или $x^2 + 2ax + 2a^2 + 1 = 0$, т. е. $(x - a)^2 = 1$ или $(x + a)^2 = -1$. Первое уравнение имеет корни $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 1$, второе уравнение решений не имеет. Итак, данное уравнение имеет корни $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 1$; г) данное уравнение имеет смысл, если $x - 1 \geq 0$ и $x > 0$, т. е. при $x \geq 1$; при $x > 1$ левая часть уравнения больше единицы, а правая часть меньше единицы ($x^2 > 1$, поэтому $1/x^2 < 1$); при $x = 1$ уравнение обращается в верное равенство, это и есть корень уравнения. 8. Данное уравнение перепишем в виде $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (0,5z^2 - z + 1) = 0$, или

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (0,5z-1)^2 = 0$. Квадрат любого действительного числа неотрицателен, т. е. $(x-1)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ и $(0,5z-1)^2 \geq 0$, поэтому данное уравнение будет истинным высказыванием, если каждое слагаемое равно нулю, или $(x-1)^2 = 0$, $(y+1)^2 = 0$ и $(0,5z-1)^2 = 0$, откуда $x=1$, $y=-1$, $z=2$. Ответ: $\{(1; -1; 2)\}$.

9. У к а з а н и е. Данное уравнение можно переписать так: $(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (y^2 - 4\sqrt{2}y + 8) = 0$, или $(x - \sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 0$, затем $(x - \sqrt{2})^2 = 0$ и $(y - 2\sqrt{2})^2 = 0$, откуда $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\{(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})\}$. 10. а) 1-й способ. Перепишем данное уравнение так: $xy - x - y = 0$. Для того чтобы разложить левую часть уравнения на множители, прибавим к обеим его частям по 1: $xy - x - y + 1 = 1$, тогда $(x - 1)(y - 1) = 1$, $x(y - 1) - (y - 1) = 1$, откуда $(x - 1)(y - 1) = 1$. Но произведение двух целых чисел равно единице, если каждое из этих чисел равно 1 или -1. Поэтому получаем две системы уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1. \end{cases}$$

Из первой системы $x_1=2$, $y_1=2$; из второй $x_2=0$, $y_2=0$. Ответ: $\{(2; 2), (0; 0)\}$. 2-й способ. Выразим x через y , тогда $x = \frac{y}{y-1}$; по

условию $\frac{y}{y-1}$ должно быть целым. При y нечетном целых решений

нет; при y четном $\frac{y}{y-1}$ будет целым лишь тогда, когда $y-1=1$;

отсюда $y=2$, $x=2$. Решение $x=0$, $y=0$ очевидно; б) пусть одно из чисел равно x , а другое равно y , причем $x > 0$ и $y > 0$ (в отличие от предыдущей задачи, где x и y — целые). Решив уравнение $x + y = xy$ относительно x , получим $x = y/(y-1)$; x будет положительным числом в тех случаях, когда $y > 1$. Придавая различные значения y , большие единицы, получаем соответствующие значения x . Если, например, $y=1,5$, то $x=1,5 : 0,5 = 3$ ($3 + 1,5 = 3 \cdot 1,5$); если $y=2$, то $x=2$ ($2 + 2 = 2 \cdot 2$); если $y=5$, то $x=1,25$ ($1,25 + 5 = 1,25 \cdot 5$) и т. д.

11. Заметим, что сумма квадратов двух четных чисел $(2n)^2 + (2k)^2 = 4(n^2 + k^2)$ — число четное. Сумма квадратов двух нечетных чисел $(2n+1)^2 + (2k+1)^2 = 4n^2 + 4k^2 + 4n + 4k + 2$ также число четное. Допустим, что x — четное число, тогда y — нечетное число, и, наоборот, если y — четное, то x — нечетное. Если $x=2n$, а $y=2k+1$, то $(2n)^2 + (2k+1)^2 = 1983$ или $4n^2 + 4k^2 + 4k = 1982$; сократив на 2, имеем $2n^2 + 2k^2 + 2k = 991$. Полученное уравнение не имеет решений, ибо левая часть его — четное число, а правая — нечетное; значит, и исходное уравнение не имеет решений. 12. Разобьем все множество значений x на три промежутка (см. решение 66): 1) $x \geq 4$; 2) $2 \leq x < 4$; 3) $x < 2$. Для $x \geq 4$ имеем $x-4 \geq 0$, $x-2 > 0$; следовательно, уравнение принимает вид $x-2+x-4=3$, корень этого уравнения $x=4,5$ удовлетворяет условию $x \geq 4$ и, значит, является корнем данного уравнения. Для $2 \leq x < 4$ уравнение приобретает вид $x-2+4-x=3$, или $0 \cdot x=1$; это уравнение не имеет решений. Для $x < 2$ исходное уравнение имеет вид $2-x+4-x=3$, или $-2x=-3$, откуда $x=1,5 < 2$. Ответ: $\{1,5; 4,5\}$. 13. 1. Для того чтобы данная функция имела смысл, необходимо, чтобы $x^3 - 5x^2 + 4 \neq 0$, или $x(x^2 - 5x + 4) \neq 0$. Решая уравнение $x(x^2 - 5x + 4) = 0$, найдем, что знаменатель данной дроби обращается в ноль при $x_1=0$, $x_2=1$,

$x_3=4$. Поэтому областью определения данной функции будет объединение промежутков

$$]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 4[\cup]4; +\infty[.$$

2. Выразим x через y :

$$yx - 2y = x - 3; \quad yx - x = 2y - 3; \quad x(y - 1) = 2y - 3; \quad x = \frac{2y - 3}{y - 1}.$$

Эта дробь имеет смысл, если $y \neq 1$; отсюда область изменения данной функции — множество всех чисел, кроме 1. 14. 1. Обозначим расстояние AB через s (км), время движения от A до B — через x (ч), а время движения от B к A — через y (ч). Тогда $s=60x$ или $s=40y$,

отсюда $60x=40y$, $x=2y/3$. Средняя скорость рейса равна $\frac{2s}{x+y} =$

$$= \frac{2 \cdot 40y}{2y/3 + y} = \frac{3 \cdot 80y}{5y} = 48 \text{ (км/ч)}. \text{ Это есть ответ на вопрос задачи.}$$

Часто на этот вопрос ошибочно отвечают: средняя скорость рейса равна $(60+40):2=50$. Это неверно, ибо $\frac{2s}{x+y} \neq \left(\frac{s}{x} + \frac{s}{y}\right):2$.

2. Пусть l — длина поезда, м, а v — его скорость, м/с. Учитывая, что за 5 с поезд прошел l м, имеем первое уравнение $5v=l$. За 20 с поезд прошел 420 м, да еще свою длину l , поэтому имеем второе уравнение $20v=420+l$; решив систему уравнений $5v=l$ и $20v=420+l$, найдем, что $l=140$ м, а $v=28$ м/с. 15. Чтобы освободиться от модулей, рассмотрим четыре случая:

1) $x \geq 0, y \geq 1$; 2) $x < 0, y < 1$; 3) $x \geq 0, y < 1$; 4) $x < 0, y \geq 1$.

В первом случае данная система принимает вид $\begin{cases} x+3y=7, \\ 2x+y-1=3. \end{cases}$

Из этой системы получаем $x=1 \geq 0, y=2 \geq 1$. Во втором случае

система такова: $\begin{cases} -x+3y=7, \\ 2x-y+1=3. \end{cases}$ Решением этой системы являются

числа $x=2\frac{3}{5}, y=3\frac{1}{5}$. Так как $2\frac{3}{5} > 0$, а $3\frac{1}{5} > 1$, то в этом

случае система не имеет решений. В третьем случае имеем систему

$\begin{cases} x+3y=7, \\ 2x-y+1=3, \end{cases}$ откуда $x=\frac{13}{7}, y=\frac{12}{7}$. Так как $\frac{12}{7} > 1$, то и в этом

случае система не имеет решений. В четвертом случае получаем систему

$\begin{cases} -x+3y=7, \\ 2x+y-1=3, \end{cases}$ откуда $x=\frac{5}{7}, y=\frac{18}{7}$. Так как $\frac{5}{7} > 0$, то

и здесь система не имеет решений. Ответ: $x=1, y=2$. 16. а) $3^{31} = 3^{2 \cdot 17} = (3^2)^{17} = 9^{17}$; $2^{51} = 2^{3 \cdot 17} = (2^3)^{17} = 8^{17}$. Так как $9^{17} > 8^{17}$, то данное неравенство истинно; б) $38^{303} = (2 \cdot 19)^{3 \cdot 101} = (8 \cdot 19^3)^{101}$; $57^{202} = ((3 \cdot 19)^2)^{101} = (9 \cdot 19^2)^{101}$; так как $8 \cdot 19^3 > 9 \cdot 19^2$, то и $(8 \cdot 19^3)^{101} > (9 \cdot 19^2)^{101}$ или $38^{303} > 57^{202}$. 17. а) Возьмем очевидные неравенства $(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (a-c)^2 \geq 0$, или $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0, b^2 - 2bc + c^2 \geq 0, a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$, из которых имеем: $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, a^2 + c^2 \geq 2ac$. Сложим полученные неравенства почленно и сократим на 2: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. Равенство будет лишь при $a=b=c$; б) найдем разность между левой и правой частью до-

казываемого неравенства:

$$\frac{x^2}{1+x^4} - \frac{1}{2} = \frac{2x^2-1-x^4}{2(1+x^4)} = \frac{-(x^2-1)^2}{2(1+x^4)}.$$

Так как $(x^2-1)^2 \geq 0$, то $-(x^2-1)^2 \leq 0$; $2(1+x^4) > 0$, поэтому

$$\frac{x^2}{1+x^4} - \frac{1}{2} \leq 0; \text{ следовательно, } \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Равенство будет лишь при $x=1$; в) рассмотрим разность $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-(ab+ac+ad+ae) = \left(\frac{a}{2}-b\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-c\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-d\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-e\right)^2$. Каждое

слагаемое последней суммы неотрицательно; значит, и разность между левой и правой частью исходного неравенства неотрицательна. Равенство нулю достигается при $a/2=b=c=d=e$; следовательно,

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq ab+ac+ad+ae; \text{ г) очевидно, что } \frac{\sqrt{3}}{1} > 1;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1. \text{ Сложим почленно эти неравенства: } \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} > 3. \text{ Поделим обе части полученного неравенства на } \sqrt{3};$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}. \text{ 18. а) По условию, } a > b, b > c; \text{ складывая эти неравенства почленно, получим неравенство}$$

$$a+b > b+c. \quad (1)$$

Так как a, b и c — члены арифметической прогрессии, то

$$d=b-a=c-b \text{ или } a-b=b-c. \quad (2)$$

Перемножив (1) и (2), получим $(a+b)(a-b) > (b+c)(b-c)$ или $a^2-b^2 > b^2-c^2$, отсюда и доказываемое неравенство $a^2+c^2 > 2b^2$; б) по условию, $a > b, b > c, a > c$, поэтому $a^2 > b^2, ab > bc$ и $b^2 > c^2$. Сложим почленно эти неравенства:

$$a^2+ab+b^2 > b^2+bc+c^2$$

и умножим на $a-b=b-c$:

$$a^3-b^3 > b^3-c^3; \quad a^3+c^3 > 2b^3.$$

19. Пусть наименьший из этих углов a_1 , а разность прогрессии d . Тогда, поскольку сумма углов пятиугольника равна 540° ($180^\circ(5-2) = 540^\circ$), получаем:

$$a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) + (a_1+4d) = 540;$$

$$5a_1 + 10d = 540; \quad a_1 + 2d = 108,$$

но a_1+2d — это третий (средний) угол, тогда второй угол равен $108-d$, первый — $108-2d$, четвертый — $108+d$, пятый (наибольший) — $108+2d$. Так как внутренний угол выпуклого многоугольника имеет величину, меньшую 180° , то $108+2d < 180$, или $2d < 72$, отсюда $180-2d > 36^\circ$ — меньший угол. Остальные углы подавно больше 36° .

20. Области определения функции принадлежат только те значения x ,

которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ x(x-4) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $x(x-4) \geq 0$ выполняется при $x \geq 4$ или при $x \leq 0$, поэтому данное неравенство равносильно двум системам:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 3, \\ x \geq 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 3, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы пусто, множество решений второй системы состоит из одной точки $x=0$. Таким образом, область определения данной функции состоит из одного элемента 0. 21. Квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 5$ имеет отрицательный дискриминант, $D = -16$, поэтому этот трехчлен разложить на множители нельзя. Кроме того, у него коэффициент при x^2 больше нуля ($1 > 0$). Значит, этот трехчлен положителен при всех значениях x , поэтому его можно отбросить. Также можно отбросить и множитель x^2 , ибо $x^2 > 0$ при $x \neq 0$. Исходное неравенство сводится к следующему: $2x - 3 > 0$, отсюда $x > 1,5$. 22. а) 1-й способ. Учítывая, что $x^2 = |x|^2$, данное неравенство перепишем так: $|x|^2 - 3|x| + 2 > 0$. Обозначим $|x|$ через y , тогда получим $y^2 - 3y + 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $y > 2$ или при $y < 1$, т. е., если $|x| > 2$ или $|x| < 1$, решением первого неравенства будет $]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$, а второго $]-1; 1[$. Множество решений данного неравенства — объединение этих промежутков: $]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[\cup]-1; 1[$. 2-й способ. К такому же результату, но более сложно, можно прийти, если объединить решение двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0, \\ x < 0; \end{cases}$$

б) 1-й способ. Так как обе части этого неравенства неотрицательны при всех значениях x , то $|x+2|^2 > |x|^2$ или $(x+2)^2 > x^2$, отсюда $x > -1$, или $x \in]-1; +\infty[$. 2-й способ. Обозначим левую часть неравенства через y_1 , а правую — через y_2 . Строим графики функций $y_1 = |x+2|$ и $y_2 = |x|$ (рис. 209). Из рисунка видно, что при $x < -1$

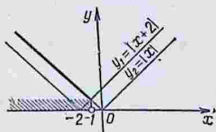


Рис. 209

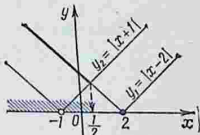


Рис. 210

ординаты графика y_1 больше соответствующих ординат графика y_2 (эта часть графика изображена утолщено); в) если $x \neq -1$, то $|x+1| > 0$, поэтому данное неравенство можно переписать так:

$|x-2| > |x+1|$. Возведя обе части полученного неравенства в квадрат и решая неравенство $(x-2)^2 < (x+1)^2$, получим, что $x < 1/2$. Учитывая, что $x \neq -1$, найдем решение этого неравенства $]-\infty; -1[\cup]-1; 1/2[$; графическое решение его показано на рис. 210.

23. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см. 214.3) имеем $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$, или $y \geq \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. Так как $x^2 \geq 0$, то $1-x^2 \leq 1$, $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, поэтому $y \geq \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \geq 2$. При $x=0$, $y=2$ это и является наименьшим значением функции. 24.

$$a) x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{если } x \in [0; +\infty[, \\ x^2 + 2x, & \text{если } x \in]-\infty; 0]. \end{cases}$$

График функции (рис. 211) симметричен относительно оси y ; как видно, решение неравенства $x^2 - 2|x| > 0$ есть объединение множеств $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, а неравенства $x^2 - 2|x| < 0$ — множество $] -2; 2[$;

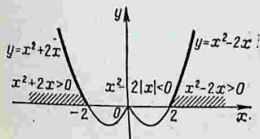


Рис. 211

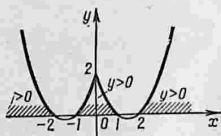


Рис. 212

б) график изображен на рис. 212. Решение неравенства показано штриховкой на оси x . 25. а) По условию существования логарифма, $x > 0$. При этих значениях x $y=1$ (так как $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) (рис. 213);

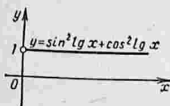


Рис. 213

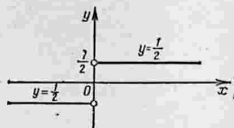


Рис. 214

б) область определения данной функции $x \neq 0$. Упрощая, имеем

$$y = \frac{x \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 4x^2 + 1}{4x^2}}}{x^2 + 1} = \frac{x \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{4x^2}}}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{2|x| \cdot (x^2 + 1)} = \frac{x}{2|x|}.$$

Отсюда получаем, что $y=1/2$, если $x>0$, и $y=-1/2$, если $x<0$ (рис. 214); в) после преобразований, приведенных в 6 в), получим $y=2$. Следовательно, графиком функции служит отрезок, параллельный оси x , концами которого служат точки $(1; 2)$ и $(2; 2)$. 26. а) Строим данное множество точек в каждом координатном углу (рис. 215):

в первом $x \geq 0, y \geq 0$, тогда $x+y=2$ или $y=-x+2$;
 во втором $x < 0, y \geq 0$, тогда $-x+y=2$ или $y=x+2$;
 в третьем $x < 0, y < 0$, тогда $-x-y=2$ или $y=-x-2$;
 в четвертом $x \geq 0, y < 0$, тогда $x-y=2$ или $y=x-2$.

Искомое множество есть контур квадрата, координаты вершин которого $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$.

З а м е ч а н и е. Так как $|-x|=|x|$ и $|-y|=|y|$, то искомое множество симметрично относительно обеих осей координат, поэтому достаточно было построить в первом координатном углу отрезок прямой $y=-x+2$, а затем построить симметричные ему отрезки относительно оси x и оси y ; б) данное уравнение равносильно системе

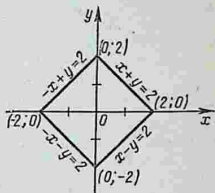


Рис. 215

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0,25, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x < 0. \end{cases}$$

Графиком первой системы служит полуокружность радиуса 0,5, расположенная в правой полуплоскости, без точек $(0; 0,5)$ и $(0; -0,5)$ на оси y . График второй системы — полуокружность радиуса 2, расположенная в левой полуплоскости, без точек $(0; 2)$ и $(0; -2)$ на оси y (рис. 216); в) преобразуем данное уравнение так: $x^2(y^2-1) - (y^2-1) = 0$; $(y^2-1)(x^2-1) = 0$; $(y-1)(y+1)(x-1)(x+1) = 0$. Отсюда $y=1$, $y=-1$, $x=1$, $x=-1$. Искомое множество состоит из двух прямых, параллельных оси x , и двух прямых, параллельных оси y (рис. 217).

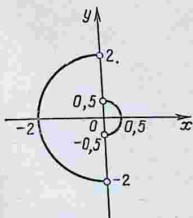


Рис. 216

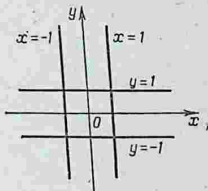


Рис. 217

27. Строим график функции $y=|x|-1$ (рис. 218). Координаты точек области, лежащих ниже этого графика, удовлетворяют неравенству $y \leq |x|-1$. Затем строим график функции $y=3-3x$. Координаты

точек области, лежащих ниже этой прямой, удовлетворяют неравенству $y < 3 - 3x$, причем сама прямая в эту область не входит. Область, обозначенная двойной штриховкой, дает искомое множество точек. 28. а) $(\lg x^2)^2 = 4$; $\lg x^2 = 2$ или $\lg x^2 = -2$; $x^2 = 100$ или $x^2 = 0,01$; x равен 10 и -10 ; 0,1 и $-0,1$.

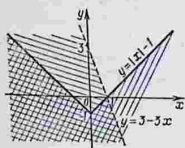


Рис. 218

Ответ: $\{-10; -0,1; 0,1; 10\}$; б) $\lg(-x)$ существует, если $-x > 0$ или $x < 0$, но в таком случае $\lg x^2 = 2 \lg |x| = 2 \lg(-x)$. Данное уравнение переписывается так: $2 \lg(-x) + \lg(-x) = 3$ или $3 \lg(-x) = 3$; $\lg(-x) = 1$, $-x = 10$, $x = -10$.
 Ответ: $\{-10\}$. 29. а)

$\sqrt{x} = x$, если $x = 0$ или $x = 1$;

$\sqrt{x} > x$, если $0 < x < 1$ (например, $\sqrt{0,1} \approx 0,32 > 0,1$);

$\sqrt{x} < x$, если $x > 1$;

б) отметим, что $x \geq 1$, ибо если $0 < x < 1$, то $\lg x < 0$ и тогда $\sqrt{\lg x}$ не имеет смысла. Преобразуем данное уравнение так: $\frac{1}{2} \lg x - \sqrt{\lg x} = 0$; $\frac{1}{2} (\sqrt{\lg x})^2 - \sqrt{\lg x} = 0$. Обозначим $\sqrt{\lg x}$ через a , тогда $\frac{1}{2} a^2 - a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 2$, т. е. $\sqrt{\lg x} = 0$ или $\sqrt{\lg x} = 2$; $\lg x = 0$ или $\lg x = 4$, поэтому $x = 1$ или $x = 10\,000$. Решив неравенство $\frac{1}{2} a^2 - a > 0$, получим, что $a > 2$ и $a < 0$, т. е. $\lg x > 4$ и $\lg x < 0$. Последнее следует отбросить, поэтому $x > 10\,000$; $\lg \sqrt{x} < \sqrt{\lg x}$, если $1 < x < 10\,000$. 30. Обозначим длину отрезка AD через x (рис. 219), тогда длина отрезка DC равна $2 - x$. Из прямоугольного треугольника BDC по теореме Пифагора имеем $|BC|^2 = |DC|^2 + |BD|^2$. По условию, $|AD| = |BC| = x$. Получаем

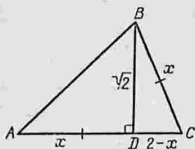


Рис. 219

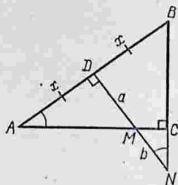


Рис. 220

уравнение $x^2 = (2 - x)^2 + (\sqrt{2})^2$, откуда $x = 1,5$, т. е. $|AD| = 1,5$ м. По теореме Пифагора из треугольника ABD находим: $|AB|^2 = 1,5^2 + (\sqrt{2})^2 = 4,25$, $|AB| = \sqrt{4,25} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{17}$ (м). 31. $|CD| = 2\sqrt{3}$ м, $S = 6\sqrt{3}$ м². 32. $\triangle ADM \sim \triangle BDN$ (по двум углам)

(рис. 220), отсюда $\frac{|DM|}{|DB|} = \frac{|AD|}{|DN|}$. Обозначим $|AD|$ через x , тогда $\frac{a}{x} = \frac{x}{a+b}$; $x^2 = a(a+b)$; $x = \sqrt{a(a+b)}$, $|AB| = 2\sqrt{a(a+b)}$.

33. $\sqrt{3}$ м. Указание. Проведите из вершин B и C высоты трапеции; длины этих высот равны по $0,5\sqrt{3}$ м. Длину диагонали можно найти из прямоугольного треугольника, в котором катеты имеют длину 1,5 и $0,5\sqrt{3}$ м. 34. $\angle AMB \cong \angle CBM$ (как сонаправленные) (рис. 221), поэтому $\angle BMC \cong \angle CBM$; значит, $|BC| = |CM| = a$. По теореме Пифагора из треугольника CMD найдем $|MD| = \sqrt{a^2 - b^2}$.

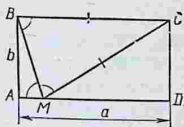


Рис. 221

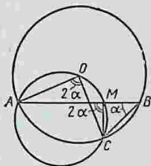


Рис. 222

35. Обозначим величину вписанного угла ABC через α (рис. 222). Тогда величина центрального угла AOC равна 2α (величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается); $\widehat{AOC} = \widehat{AMC} = 2\alpha$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC). По отношению к треугольнику CMB $\angle AMC$ — внешний; значит, $\widehat{AMC} = \widehat{MCB} + \hat{B}$. Отсюда получаем $\widehat{MCB} = \widehat{AMC} - \hat{B} = 2\alpha - \alpha = \alpha$; таким образом, $\widehat{MCB} = \hat{B} = \alpha$. Отсюда $|MB| = |MC|$. 36. Треугольник AOC — равнобедренный (рис. 223), ибо $|OA| = |OC|$, как радиусы одной меньшей окружности; следовательно,

$$\angle CAO \cong \angle ACO. \quad (1)$$

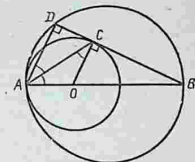


Рис. 223

Кроме того, $|OC| \perp |BD|$ (по свойству радиуса окружности, проведенного в точку касания) и $|AD| \perp |BD|$ (вписанный угол ADB опирается на диаметр), поэтому $|OC| \parallel |AD|$ и

$$\angle CAD \cong \angle ACO. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\angle DAC \cong \angle CAO$. Отсюда заключаем, что AC является биссектрисой угла BAD .

37. Проведем через точку A (рис. 224) общую касательную к обеим окружностям до пересечения с (BC) в точке D , тогда $|DB| = |DA| = |DC|$ (длины касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны). Введем обозначения $\widehat{DAB} = \alpha$, $\widehat{DAC} = \beta$, тогда

$\widehat{BAC} = \alpha + \beta$. В треугольнике ABC $\widehat{BAC} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Отсюда имеем: $(\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 180^\circ$, или $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$; $\alpha + \beta = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

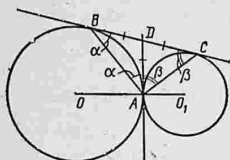


Рис. 224

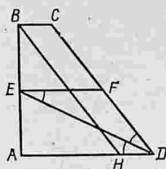


Рис. 225

38. Пусть E — середина стороны AB (рис. 225). Проведем среднюю линию EF трапеции $ABCD$. Так как $[EF] \parallel [AD]$, то $\widehat{ADE} = \widehat{DEF}$, $\widehat{ADF} = \widehat{EDF}$ (по условию). Отсюда заключаем, что $\widehat{DEF} = \widehat{EDF}$ и, значит, $|EF| = |FD| = \frac{1}{2} |CD| = 5$ см; $|EF| = \frac{|AD| + |BC|}{2}$, откуда $|AD| = 2|EF| - |BC|$ или $|AD| = 2 \cdot 5 - 2 = 8$ (см). Проведем $[BH] \parallel [CD]$, тогда четырехугольник $BCDH$ — параллелограмм, $|BH| = 10$ см, $|AH| = 8 - 2 = 6$ (см). Итак, в треугольнике ABH длины сторон 6, 8 и 10 см. По теореме, обратной теореме Пифагора, этот треугольник — прямоугольный, т. е. AB — высота данной трапеции, а площадь трапеции равна 40 см^2 ($5 \cdot 8 = 40$). 39. Продолжим боковые стороны трапеции AB и DC до пересечения в точке M (рис. 226). По условию, $\widehat{AMD} = 90^\circ$. Согласно теореме Пифагора, из треугольника AMC получаем $|AC|^2 = |AM|^2 + |MC|^2$. Из треугольника BMC имеем $|BD|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$. Сложим почленно полученные равенства: $|AC|^2 + |BD|^2 = (|AM|^2 + |DM|^2) + (|MC|^2 + |MB|^2)$; но $|AM|^2 + |DM|^2 = |AD|^2$ (из треугольника AMD) и $|MC|^2 + |MB|^2 = |BC|^2$ (из треугольника BMC), поэтому $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$. З а м е ч а н и е. Последнее равенство справедливо для любого четырехугольника $ABCD$, у которого стороны AB и CD перпендикулярны (параллельность сторон BC и AD не

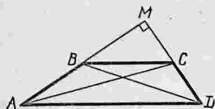


Рис. 226

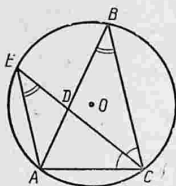


Рис. 227

использовалась). 40. Проведем отрезок EA (рис. 227), тогда $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AC), $\widehat{ACE} = \widehat{BCE}$

(по условию), поэтому $\triangle DBC \sim \triangle AEC$ (по двум углам). Следовательно, имеем пропорцию $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CE|}{|BC|}$, отсюда и получается доказываемое равенство $|AC| \cdot |BC| = |CD| \cdot |CE|$. 41. Возьмем на стороне AB равностороннего треугольника ABC (рис. 228) произвольную точку M и опустим перпендикуляры MD и ME на стороны AC и BC . Надо доказать, что $|MD| + |ME|$ — величина постоянная. Соединим отрезком точки M и C и обозначим длину стороны треугольника ABC через a , тогда площадь этого треугольника S равна сумме площадей треугольников AMC и MBC , или $S = \frac{1}{2}a|MD| + \frac{1}{2}a|ME| = \frac{1}{2}a(|MD| + |ME|)$. Отсюда получаем $|MD| + |ME| = \frac{2S}{a}$ — для данного треугольника это величина постоянная, равная высоте треугольника.

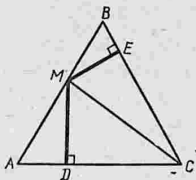


Рис. 228

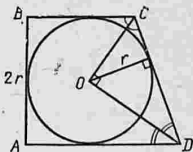


Рис. 229

42. Указание. $[OC]$ и $[OD]$ — биссектрисы углов BCD и ADC (рис. 229), треугольник COD — прямоугольный, $|CD| = 10$ см. По формуле $h_c = \frac{ab}{c}$ находим высоту треугольника COD , являющуюся и радиусом вписанной окружности, $h_c = r = 4,8$ см. Длина высоты трапеции $|AB| = 2r = 9,6$ см. По свойству сторон описанного четырехугольника, $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ (см. Г. 8, п. 87, теорема 89), поэтому $|AD| + |BC| = 10$ см $+ 9,6$ см $= 19,6$ см. Периметр трапеции равен 39,2 см. 43. Вершина A трапеции $ABCD$ (рис. 230) одинаково удалена от вершин B , C и D . Проведем окружность с центром в точке A и радиусом, равным 2 см. Вершину B соединим с концом диаметра F , тогда трапеция $FBCD$ — равнобедренная (дуги, заключенные между параллельными хордами, конгруэнтны). Найдем $|BD|$ из прямоугольного треугольника FBD : $|BD| = \sqrt{|FD|^2 - |FB|^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \approx 3,9$ см; $|BD| \approx 3,9$ см. 44. 1. $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (рис. 231), поэтому $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}) =$

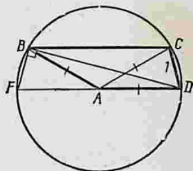


Рис. 230

$= 60^\circ$, откуда $\widehat{AOC} = \widehat{EOD} = 120^\circ$. Так как в четырехугольнике $BEOD$ сумма противоположных углов равна 180° , то около этого четырехугольника можно описать окружность (см. Г. 8, п. 87, теорема 88). Отрезок BO является биссектрисой угла B (три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке). Точка O делит дугу ED пополам (конгруэнтным вписанным углам соответствуют конгруэнтные дуги), т. е. $\widehat{EO} = \widehat{OD}$; откуда заключаем, что $|OE| = |OD|$ (если две дуги конгруэнтны, то длины хорд, стягивающих эти дуги, равны). 2. Обозначим $\widehat{ABC}$ через x (рис. 231), тогда $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180^\circ - x$. В треугольнике OAC имеем: $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} = (180^\circ - x) : 2 = 90^\circ - x/2$; $\widehat{AOC} = \widehat{EOD} = 180^\circ - (90^\circ - x/2) = 90^\circ + x/2$. Так как около четырехугольника $BDOE$ описана окружность, то $\widehat{EOD} + \widehat{DBE} = 180^\circ$, откуда

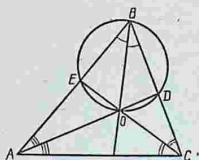


Рис. 231

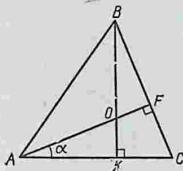


Рис. 232

$90^\circ + x/2 + x = 180^\circ$; $x = 60^\circ$, т. е. искомый угол равен 60° . 45. 1 м². Указание. Треугольники ABC и BCD имеют равные площади, ибо у них общее основание BC и равные высоты, опущенные на это основание. 46. Указание. Введем обозначение $\widehat{FAC} = \alpha$ (рис. 232), тогда $\widehat{C} = 90^\circ - \alpha$; $\widehat{FOK} = 90^\circ + \alpha$ (по свойству внешнего угла треугольника AOK); $\widehat{FOK} + \widehat{C} = 180^\circ$, поэтому около четырехугольника $FOKC$ можно описать окружность. 47. а) Возьмем очевидное неравенство $(a - b)^2 \geq 0$ или $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, откуда

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \quad (1)$$

В треугольнике ABC $0 < \widehat{C} < 180^\circ$, поэтому

$$0 < \sin \widehat{C} < 1. \quad (2)$$

Перемножив почленно неравенства (1) и (2), левые и правые части которых положительны, получим

$$ab \sin \widehat{C} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ или } \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} \leq \frac{a^2 + b^2}{4},$$

но площадь треугольника ABC $S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$, поэтому $S \leq \frac{a^2 + b^2}{4}$;

б) указание. Перемножьте почленно два неравенства $ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}$

и $\sin \hat{C} \leq 1$. 48. Обозначим сторону треугольника через a , а сторону квадрата через b , тогда $S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, а равная ему площадь квадрата равна b^2 , $S = b^2$; отсюда

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = b^2 \text{ или } a^2 \sqrt{3} = 4b^2.$$

Извлекая из обеих частей последнего равенства арифметический квадратный корень, получим $a \sqrt{\sqrt{3}} = 2b$, т. е. $a \sqrt[4]{3} = 2b$. Докажем, что $3a > 4b$. Имеем:

$$a = \frac{2b}{\sqrt[4]{3}}, 3a = \frac{2b \cdot 3}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2b \sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{3}} = 2b \sqrt[4]{27}.$$

Рассмотрим разность: $3a - 4b = 2b \sqrt[4]{27} - 4b = 2b (\sqrt[4]{27} - 2) = 2b (\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{16}) > 0$, откуда $3a > 4b$. Замечание. То, что $\sqrt[4]{27} > 2$, можно установить и с помощью таблиц В. М. Брадиса: $\sqrt[4]{27} = \sqrt{\sqrt{27}} \approx \sqrt{5,196} \approx 2,279 > 2$.

49. Так как сумма двух положительных чисел больше каждого из слагаемых, то $c^3 > a^3$ и $c^3 > b^3$, отсюда $c > a$ и $c > b$. По теореме косинусов, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, или $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на c , тогда $\cos C = \frac{a^2 c + b^2 c - c^3}{2abc}$; заменим c^3 равным ему выражением $a^3 + b^3$:

$$\cos C = \frac{a^2 c + b^2 c - (a^3 + b^3)}{2abc} = \frac{a^2(c-a) + b^2(c-b)}{2abc}.$$

Здесь $a^2 > 0$, $c-a > 0$, $b^2 > 0$, $c-b > 0$, $2ab > 0$; следовательно, $\cos C > 0$ и угол C — острый. 50. Площадь треугольника можно найти по формуле $S = \frac{1}{2} ab \sin C$, поэтому, учитывая условие, получаем равенство $\frac{1}{4} (a^2 + b^2) = \frac{1}{2} ab \sin C$. Умножим обе части равенства на 4:

$$a^2 + b^2 = 2ab \sin C; \quad a^2 + b^2 - 2ab \sin C = 0;$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 2ab - 2ab \sin C = 0; \quad (a-b)^2 + 2ab(1 - \sin C) = 0;$$

так как $(a-b)^2 \geq 0$, $0 < \sin C \leq 1$, то $1 - \sin C \geq 0$. Но сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, если каждое слагаемое равно нулю, поэтому последнее равенство возможно, если

$$\begin{cases} (a-b)^2 = 0, \\ 1 - \sin C = 0, \end{cases}$$

т. е. если $a = b$. Значит, $\hat{A} = \hat{B}$ и $\sin C = 1$, отсюда $\hat{C} = 90^\circ$, тогда $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$. 51. Проведем из вершины A треугольника ABC (рис. 233) перпендикуляр к данным параллельным. Пусть точки их пересечения M и N ; по условию, $|AM| = p$, $|MN| = q$. В прямоугольном треугольнике ABN $|AB| > |AN|$, т. е. $a > p+q$, но $p+q > 2\sqrt{pq}$ (среднее арифметическое двух неравных положительных чисел больше их сред-

него геометрического), поэтому и $a > 2\sqrt{pq}$. Если $p=q$ и сторона AB перпендикулярна данным прямым, то $a=p+q=2\sqrt{pq}$.

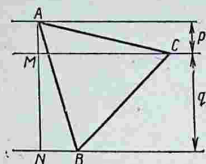


Рис. 233

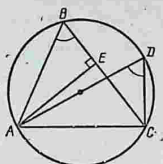


Рис. 234

52. Проведем диаметр AD (рис. 234), соединим точки D и C и проведем $[AE] \perp [BC]$, тогда треугольник ABE подобен треугольнику ADC ($\angle B \cong \angle D$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AC , $\widehat{BEA} = \widehat{ACD} = 90^\circ$), откуда

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AE|}; \quad \frac{2R}{c} = \frac{b}{h_a}; \quad 2R = bc : h_a;$$

по $\frac{1}{2} ah_a = S$, $h_a = \frac{2S}{a}$, поэтому $2R = bc : \frac{2S}{a} = \frac{abc}{2S}$; $R = \frac{abc}{4S}$.

53. Пусть угол между данными сторонами C , тогда $S = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Так как $\sin C$ принимает наибольшее значение, когда угол C прямой ($\sin 90^\circ = 1$), то и наибольшая площадь будет в том случае, если данные стороны взаимно перпендикулярны.

54. Пусть две стороны треугольника a и b , причем $a > b$, а h_a и h_b — соответствующие им высоты. Надо доказать, что $h_a < h_b$. Имеем: $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b$, $ah_a = bh_b$, откуда $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$; так как $a > b$, то $\frac{b}{a} < 1$, поэтому $\frac{h_a}{h_b} < 1$, откуда $h_a < h_b$.

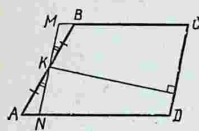


Рис. 235

Проведем через середину K сторону AB (рис. 235) прямую, параллельную боковой стороне CD , и пусть N и M — точки ее пересечения с AD и продолжением стороны BC . Треугольники AKN и KBM конгруэнтны (по стороне и двум прилежащим углам), поэтому и площади этих треугольников равны. Площадь трапеции $ABCD$ равна площади параллелограмма $NMCD$ (они состоят из одного и того же пятиугольника $NKBCD$ и равновеликих треугольников AKN и KMB). У этого параллело-

грамма основание CD равно a , высота KL равна b , площадь его S равна ab ; значит, и площадь трапеции равна ab .

56. Пусть в треугольнике ABC (рис. 236) BE и CD — высоты, F — середина отрезка DE ; по условию, $[FO] \perp [DE]$ ($O \in [BC]$). Нужно доказать, что $|BO| = |OC|$. Сторона BC является диаметром окруж-

ности, проведенной через точки D и E основания высот CD и BE (вершины прямоугольных треугольников с гипотенузой BC лежат на окружности с диаметром BC). Отрезок DE — хорда данной окружности, поэтому FO — перпендикуляр, восстановленный из середины DE , пройдет через центр окружности, т. е. через точку O — середину стороны BC . 57. 1. Проведем из вершины прямого угла медиану CO

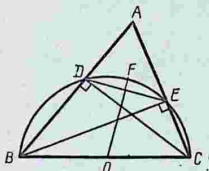


Рис. 236

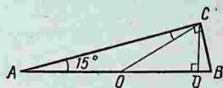


Рис. 237

(рис. 237), тогда $|CO| = |AO| = \frac{1}{2}c$ и $\widehat{ACO} = \widehat{A} = 15^\circ$. По свойству внешнего угла треугольника, $\widehat{COB} = 30^\circ$. Пусть CD — высота, проведенная из вершины прямого угла, тогда в треугольнике COD $|CD| = \frac{1}{2}|CO| = \frac{1}{4}c$; $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{4}c = \frac{1}{8}c^2$. 2. Это следует из того, что произведение катетов треугольника есть удвоенная площадь этого треугольника. С другой стороны, по доказанному, удвоенная площадь треугольника равна $2 \cdot \frac{1}{8}c^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2$ 58. По условию, $\angle AMB \cong \angle AMD$ (рис. 238), но $\angle AMB \cong \angle MAD$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных), поэтому $\angle MAD \cong \angle AMD$ и $|MD| = |AD| = 2|CD|$. Итак, в прямоугольном треугольнике MCD имеем $|CD| = \frac{1}{2}|MD|$, поэтому $\widehat{CMD} = 30^\circ$, $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$.

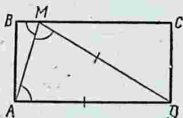


Рис. 238

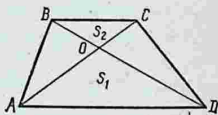


Рис. 239

59. Площади треугольников ABD и ACD равны, так как у них общее основание AD и высоты равны (рис. 239), т. е. $S_{ABD} = S_{ACD}$, отсюда имеем: $S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD}$ или $S_{AOB} = S_{COD}$; $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{|BO|}{|OD|}$, $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{|BO|}{|OD|}$ (у этих треугольников общая высота).

Отсюда $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}$; по доказанному, средние члены этой пропорции равны, поэтому

$$S_{AOB}^2 = S_{BOC} S_{AOD} \text{ или } S_{AOB}^2 = S_1 S_2, S_{AOB} = \sqrt{S_1 S_2};$$

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2S_{AOB} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = \\ = (\sqrt{S_1})^2 + (\sqrt{S_2})^2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

60. Прямоугольные треугольники AEC и BDC (рис. 240) подобны, так как имеют общий острый угол C , поэтому сходственные стороны этих треугольников пропорциональны, $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|DC|}{|CE|}$. В треугольниках ABC и DCE стороны, заключающие угол C , пропорциональны, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ (по второму признаку подобия треугольников). В подобных треугольниках против соответственных сторон лежат конгруэнтные углы, поэтому $\widehat{EDC} = \widehat{BAC} = \alpha$ и $\widehat{DEC} = \widehat{ABC} = \beta$.

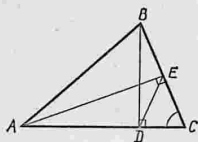


Рис. 240

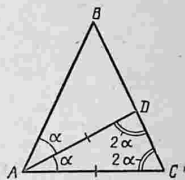


Рис. 241

61. Пусть длина диагонали равна d , тогда $S_{\text{кп}} = \frac{1}{2} d^2$. Прямоугольник разбивается диагоналями на четыре равновеликих треугольника. Если обозначить угол между диагоналями через α , то площадь одного из этих треугольников равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{8} d^2 \sin \alpha$. Выразим площадь всего прямоугольника так:

$$S_{\text{пр}} = \left(\frac{1}{8} d^2 \sin \alpha \right) \cdot 4 = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha.$$

Если данный прямоугольник не квадрат, то его площадь меньше площади квадрата, ибо тогда $0 < \sin \alpha < 1$ и $S_{\text{кп}} > S_{\text{пр}}$. 62. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 241), где $|AB| = |BC|$, биссектриса AD отсекает треугольник ACD , подобный треугольнику ABC . Этот треугольник также равнобедренный — у него $|AD| = |AC|$ (в противном случае сходственные стороны не были бы пропорциональны). Обозначим $\widehat{DAC}$ через α , тогда $\widehat{BAC} = \widehat{C} = \widehat{ADC} = 2\alpha$. Учитывая, что сумма углов треугольника ADC равна 180° , получаем уравнение $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = 36^\circ$; $\widehat{C} = \widehat{BAC} = 36^\circ \cdot 2 = 72^\circ$;

$\hat{B} = 36^\circ$. 63. Если $\hat{C} = 90^\circ$, то $m_C = \frac{1}{2}c$; если $\hat{C} < 90^\circ$, то $m_C > \frac{1}{2}c$; если $\hat{C} > 90^\circ$, то $m_C < \frac{1}{2}c$. Указание. В этом можно убедиться, если на стороне AB как на диаметре построить окружность. В первом случае вершина принадлежит окружности (рис. 242), во втором — расположена вне окружности, в третьем — внутри окружности. 64. 1.

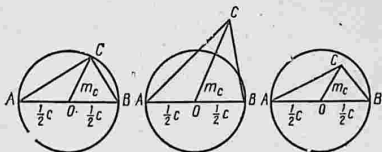


Рис. 242

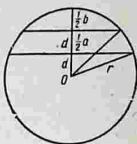


Рис. 243

$a = 2\sqrt{r^2 - d^2}$; $b = 2\sqrt{r^2 - 4d^2}$ (рис. 243). 2. Для обратной пропорциональности необходимо, чтобы отношение длин этих хорд равнялось обратному отношению их расстояний от центра, т. е. $a/b = 2$, или

$$\frac{2\sqrt{r^2 - d^2}}{2\sqrt{r^2 - 4d^2}} = 2; \quad \frac{r^2 - d^2}{r^2 - 4d^2} = 4; \quad \begin{cases} r^2 - d^2 = 4r^2 - 16d^2, \\ r \neq 2d; \end{cases}$$

$5d^2 = r^2$; $d^2 = r^2/5$; $d = r/\sqrt{5}$. Таким образом, если расстояние до большей хорды равно $r/\sqrt{5}$, а до меньшей — $2r/\sqrt{5}$, то длины этих хорд обратно пропорциональны их расстояниям от центра.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА И ФОРМУЛЫ

I. Законы арифметических действий

$a + b = b + a$ (переместительный закон сложения);
 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения);
 $ab = ba$ (переместительный закон умножения);
 $(ab)c = a(bc)$ (сочетательный закон умножения);
 $(a + b)c = ac + bc$ (распределительный закон умножения).

II. Особые случаи действий

$a + 0 = 0 + a = a$ (прибавление нуля);
 $a - 0 = a$ (вычитание нуля);
 $0 - a = -a$ (вычитание из нуля);
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (умножение на единицу);
 $a : 1 = a$ (деление на единицу);
 $a : a = 1$ (деление равных чисел);
 $1 : a = 1/a$ (деление единицы);
 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (умножение на ноль);
 $0 : a = 0$ ($a \neq 0$) (деление нуля).
На ноль делить нельзя.

III. Зависимость между данными числами и результатами действий над ними

1. Если $a + b = c$, то $a = c - b$; $b = c - a$ (нахождение неизвестного слагаемого).
2. Если $a - b = c$, то $a = b + c$; $b = a - c$ (нахождение неизвестного уменьшаемого и вычитаемого).
3. Если $ab = c$, то $a = c : b$; $b = c : a$ (нахождение неизвестного множителя).
4. Если $a : b = c$, то $a = bc$; $b = a : c$ (нахождение неизвестного делимого и делителя).

IV. Проценты

1. $p\%$ числа a равны $\frac{ap}{100}$ (нахождение процентов данного числа).
2. Если $p\%$ неизвестного числа x составляют a , то $x = \frac{a \cdot 100}{p}$ (нахождение числа по данной величине его процентов).

3. Процентное отношение a к b равно $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ (нахождение процентного отношения двух чисел).

V. Пропорции

1. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$ (основное свойство пропорции).

2. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ (перестановка членов пропорции).

VI. Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases} \quad |x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{если } x \geq a, \\ a-x, & \text{если } x < a \end{cases}$$

(определение модуля числа).

VII. Дроби

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$, $m \neq 0$ (основное свойство дроби);

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ (сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями);

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ (сложение и вычитание дробей с разными знаменателями);

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (умножение дробей);

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ (деление дробей);

$\frac{a}{b} = 0$, если $a = 0$, $b \neq 0$ (условие равенства дроби нулю).

VIII. Тождества сокращенного умножения

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (произведение разности двух выражений на их сумму);

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат двучлена);

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб двучлена);

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (разность квадратов);

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (разность и сумма кубов).

IX. Степень с рациональным показателем

$a^n = a \cdot a \dots a$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ (определение степени с натуральным показателем);

$a^1 = a$ (определение степени с показателем 1);

$a^0 = 1$, $a \neq 0$ (определение степени с нулевым показателем);

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n > 0$ (определение степени с отрицательным показателем);

$\frac{m}{n} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (определение степени с дробным показателем);

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (умножение степеней с равными основаниями);

$a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$ (деление степеней с равными основаниями);

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (степень произведения);

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, если $b \neq 0$ (степень дроби);

$(a^m)^n = a^{mn}$ (степень степени).

Х. Свойства арифметических квадратных корней

Если $\sqrt{a} = b$, то $a = b^2$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$ (определение арифметического квадратного корня);

$\sqrt{a^2} = |a|$ (квадратный корень из полного квадрата);

$(\sqrt{a})^2 = a$, если $a \geq 0$ (основное свойство квадратного корня);

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$ (извлечение корня из произведения);

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a \geq 0$, $b > 0$ (извлечение корня из дроби).

ХI. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

$\frac{a+b}{2}$ (определение среднего арифметического чисел a и b);

$\sqrt{ab}$, $a > 0$, $b > 0$ (определение среднего геометрического чисел a и b);

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, если $a > 0$, $b > 0$ (сравнение среднего арифметического и среднего геометрического).

ХII. Квадратные уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ (квадратное уравнение общего вида).

$D = b^2 - 4ac$ (дискриминант квадратного уравнения).

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (формула корней квадратного уравнения).

Если $D > 0$, то $X = \left\{ \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right\}$ (два корня).

Если $D = 0$, то $X = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ (один корень).

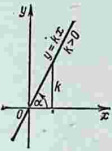
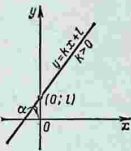
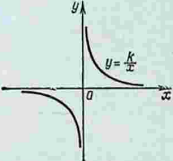
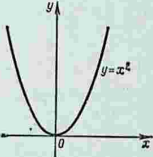
Если $D < 0$, то $X = \emptyset$ (уравнение не имеет корней).

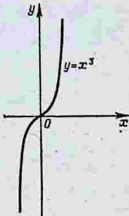
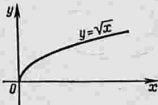
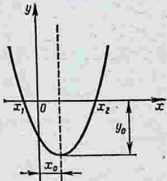
Если $D > 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (теорема Виета).

Если $D \geq 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (разложение квадратного трехчлена).

ХIII. Простейшие функции и их графики

(X — область определения функции, Y — область значений функции).

Функция, заданная формулой	График функции	Название графика
1. $y = kx$, $k \neq 0$ (прямая пропорциональность) $X =]-\infty; +\infty[$ $Y =]-\infty; +\infty[$		Прямая, проходящая через начало координат. Коэффициент пропорциональности $k = \operatorname{tg} \alpha$
2. $y = kx + l$ (линейная функция) $X =]-\infty; +\infty[$ $Y =]-\infty; +\infty[$		Прямая, проходящая через точку $(0; l)$, не параллельная оси y
3. $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ (обратная пропорциональность) $X =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ $Y =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$		Гипербола
4. $y = x^n$ (степенная функция) 1) При $n = 2$ $y = x^2$ $X =]-\infty; +\infty[$ $Y =]0; +\infty[$		Парабола с вершиной в начале координат

Функция, заданная формулой	График функции	Название графика
2) При $n=3$ $y=x^3$ $X =]-\infty; +\infty[$ $Y =]-\infty; +\infty[$		Кубическая парабола
3) При $n=\frac{1}{2}$ $y=\sqrt{x}$ $X = [0; +\infty[$ $Y = [0; +\infty[$		Половина параболы
$y=ax^2+bx+c$ $a \neq 0$ (квадратичная функция) $X =]-\infty; +\infty[$ $Y = \begin{cases} -\frac{D}{4a}; +\infty[\\ \text{если } a > 0 \end{cases}$		Парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$, x_1 и x_2 — корни функции

XIV. Арифметическая прогрессия

 $a_n = a_1 + d(n-1)$ (формула n -го члена);

 $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (формулы суммы n первых членов).

XV. Геометрическая прогрессия

 $b_n = b_1 q^{n-1}$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ (формула n -го члена);

 $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$; $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$ (формулы суммы n первых членов).

XVI. Логарифмы

Равенство $\lg a = x$ означает, что $10^x = a$ (определение логарифма).

$10^{\lg a} = a$ — основное логарифмическое тождество;

$\log_{10} b = \lg b$ (десятичный логарифм числа b);

$\lg(ab) = \lg a + \lg b$, $a > 0$, $b > 0$ (логарифм произведения);

$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$, $a > 0$, $b > 0$ (логарифм частного);

$\lg a^n = n \lg a$, $a > 0$ (логарифм степени).

СТЕПЕНИ ЧИСЕЛ 2, 3 И 5

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$5^0 = 1$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$5^5 = 3025$
$2^6 = 64$		
$2^7 = 128$		
$2^8 = 256$		
$2^9 = 512$		
$2^{10} = 1024$		

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕМЫ

И ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИИ

Определения и теоремы

1. *Отрезок* — множество, состоящее из двух различных точек и всех точек, лежащих между ними.

2. *Ломаная* — объединение отрезков таких, что конец каждого отрезка (кроме последнего) является началом следующего и смежные отрезки не лежат на одной прямой.

3. Длина ломаной больше расстояния между ее концами.

4. Ломаная называется *замкнутой*, если конец ее последнего звена совпадает с началом первого.

5. *Многоугольник* — объединение замкнутой ломаной и ее внутренней области.

6. *Угол* — фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.

7. *Биссектриса угла* — луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам.

8. *Смежные углы* — два угла, объединение которых — развернутый угол, а пересечение — луч. Сумма величин смежных углов равна 180° .

9. *Вертикальные углы* — два угла, симметричные относительно их общей вершины, иначе это два угла (меньше развернутого), стороны одного из которых являются лучами, противоположными сторонам другого. Вертикальные углы конгруэнтны.

10. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют общей точки или совпадают.

11. Через данную точку плоскости можно провести не более одной прямой параллельной данной прямой (аксиома параллельных).

12. Через данную точку плоскости можно провести не более одной прямой, перпендикулярной данной прямой.

13. Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

14. Централно-симметричные прямые параллельны.

15. Если какие-либо два соответственных угла (или два накрест лежащих угла) при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны, то эти прямые параллельны.

16. Отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными прямыми, конгруэнтны между собой.

17. Множество точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка, есть *серединный перпендикуляр* к этому отрезку.

18. Множество точек угла, равноудаленных от его сторон, есть *биссектриса* этого угла.

19. *Треугольник* — многоугольник с тремя сторонами.

20. *Биссектриса треугольника* — отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до противолежащей стороны.

21. *Медиана треугольника* — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

22. *Высота треугольника* — отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины до противоположной стороны.

23. В равнобедренном треугольнике 1) углы при основании конгруэнтны; 2) высота, проведенная из вершины, является также биссектрисой и медианой.

24. Если три стороны одного треугольника конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

25. Если две стороны и угол между ними одного треугольника конгруэнтны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

26. Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника конгруэнтны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

27. Сумма углов треугольника равна 180° .

28. Каждый угол равностороннего треугольника равен 60° .

29. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

30. Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется его *внешним углом*.

31. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

32. Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

33. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ (n-2)$.

34. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .

35. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

36. Против большего угла в треугольнике лежит большая сторона.

37. Против равных сторон в треугольнике лежат равные углы, и обратно: против равных углов в треугольнике лежат равные стороны.

38. Если на одной стороне угла отложить несколько конгруэнтных отрезков и через ~~них~~ провести параллельные прямые, пересека-

ющие вторую сторону угла, то они отсекут на ней отрезки, конгруэнтные между собой.

39. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

40. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне, и длина ее равна половине длины этой стороны.

41. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки.

42. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

43. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами конгруэнтны, то такие треугольники подобны.

44. Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

45. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

46. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

47. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

48. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки, лежащей в этой плоскости.

49. *Кругом* называется множество всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки этой плоскости не больше данного расстояния.

50. Если две хорды окружности конгруэнтны, то конгруэнтны и стягиваемые ими дуги.

51. В окружности хорды равной длины равноудалены от центра, и обратно: хорды, равноудаленные от центра, имеют равные длины.

52. Из двух неконгруэнтных хорд окружности хорда большей длины расположена ближе к центру.

53. Множество всех вершин прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой есть окружность, диаметром которой является эта гипотенуза.

54. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

55. Прямая, перпендикулярная диаметру окружности и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности.

56. Касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания.

57. Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

58. Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр этой окружности — точка пересечения биссектрис треугольника.

59. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

60. Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

61. *Параллелограмм* — четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

62. Середина диагонали параллелограмма является его центром симметрии.

63. Противоположные стороны параллелограмма попарно конгруэнтны.

64. Противоположные углы параллелограмма попарно конгруэнтны.

65. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180° .

66. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно конгруэнтны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

67. Если в четырехугольнике две противоположные стороны конгруэнтны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

68. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

69. Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.

70. Серединный перпендикуляр к стороне прямоугольника является его осью симметрии.

71. Диагонали прямоугольника конгруэнтны.

72. Ромб — параллелограмм, все стороны которого конгруэнтны.

73. Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.

74. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

75. Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны конгруэнтны.

76. Трапеция — четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

77. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

78. Средняя линия трапеции параллельна основаниям, и длина ее равна полусумме длин оснований.

79. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

80. Отношение параметров подобных многоугольников равно коэффициенту их подобия.

81. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

82. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180° .

83. Если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180° , то около этого четырехугольника можно описать окружность.

84. В описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой.

85. Если в четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

86. Правильный многоугольник — многоугольник, у которого все стороны конгруэнтны и все углы конгруэнтны.

87. Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.

88. Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Формулы геометрии
(всюду S обозначает площадь)

Название формул	Формула	Пояснения к формулам
Неравенство треугольника	$a < b + c$	a, b, c — длины сторон треугольника
Сумма углов треугольника	$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$	$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ — величины углов треугольника
Площадь треугольника	$S = \frac{1}{2} ah$ $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$	a — длина основания, h — высота, проведенная к этому основанию, a, b — длины сторон, γ — величина угла между сторонами a и b
Площадь прямоугольного треугольника	$S = \frac{1}{2} ab$ $S = \frac{1}{2} ch_c$	a, b — длины катетов, c — гипотенуза, h_c — высота, опущенная на гипотенузу
Теорема Пифагора	$c^2 = a^2 + b^2$	c — длина гипотенузы, a, b — длины катетов
Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника	$R = \frac{1}{2} c$	R — радиус описанной окружности, c — длина гипотенузы
Площадь равностороннего треугольника	$S = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$	a — длина стороны
Высота равностороннего треугольника	$h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$	h — высота, a — длина стороны
Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника	$R = 2r = \frac{a}{3} \sqrt{3}$	R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, a — длина стороны

Продолжение

Название формул	Формула	Пояснения к формулам
Радиус окружности, описанной около треугольника	$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$	R — радиус описанной окружности, a — длина стороны, α — величина угла, лежащего против a
Радиус окружности, вписанной в треугольник	$r = \frac{S}{p}$	S — площадь, p — полупериметр
Теорема косинусов	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$	a, b, c — длины сторон треугольника, γ — величина угла, лежащего против стороны c
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$	a, b, c — длины сторон треугольника, α, β, γ — величины противолежащих им углов
Площадь квадрата	$S = a^2$	a — длина стороны
Площадь прямоугольника	$S = ab$	a, b — длины сторон
Площадь параллелограмма	$S = ah$ $S = ab \sin \alpha$	a — длина стороны, h — высота, проведенная к этой стороне, a, b — длины сторон, α — величина угла между сторонами
Площадь ромба	$S = ah$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$	a — длина стороны, h — высота, d_1 и d_2 — длины диагоналей
Площадь трапеции	$S = \frac{1}{2} (a + b) h$ $S = ch$	a, b — длины оснований, h — высота, c — длина средней линии

Название формул	Формула	Пояснения к формулам
Сумма углов многоугольника	$S_n = 180^\circ (n - 2)$	S_n — сумма углов, n — число сторон многоугольника
Площадь правильного многоугольника	$S = \frac{1}{2} Pr$	P — периметр, r — радиус окружности, вписанной в многоугольник (апофема)
Стороны правильных многоугольников	$a_n = 2 R \sin \frac{180^\circ}{n}$ $a_3 = R \sqrt{3}$ $a_4 = R \sqrt{2}$ $a_6 = R$	a_n — длина стороны правильного вписанного n -угольника, R — радиус описанной окружности, a_3, a_4, a_6 — длины сторон правильного вписанного треугольника, четырехугольника, шестиугольника соответственно
Уравнение окружности с центром в начале координат	$x^2 + y^2 = R^2$	R — радиус окружности
Длина окружности	$C = 2\pi R$ $C = \pi D$	C — длина окружности, R — радиус, D — диаметр, $\pi \approx 3,14$
Длина дуги окружности	$l = \frac{\pi R \alpha}{180}$	l — длина дуги, R — радиус, α — величина дуги в градусах
Площадь круга	$S = \pi R^2$ $S = \frac{\pi D^2}{4}$	R — радиус, D — диаметр
Площадь сектора	$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$	R — радиус, α — величина дуги в градусах

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Зависимость между сторонами и углами
в прямоугольном треугольнике

(a, b — длина катетов, c — длина гипотенузы, $\hat{A}$ — величина угла, лежащего против a , $\hat{B}$ — величина угла, лежащего против b)

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{c}; \quad a = c \cdot \sin \hat{A}; \quad c = \frac{a}{\sin \hat{A}};$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c}; \quad b = c \cdot \cos \hat{A}; \quad c = \frac{b}{\cos \hat{A}};$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b}; \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \hat{A}; \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}}.$$

Тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

Таблица квадратных корней
(подкоренное число — полный квадрат)

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{289}=17$	$\sqrt{1156}=34$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{1225}=35$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{361}=19$	$\sqrt{1296}=36$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{400}=20$	$\sqrt{1369}=37$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{441}=21$	$\sqrt{1444}=38$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{484}=22$	$\sqrt{1521}=39$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{529}=23$	$\sqrt{1600}=40$
$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{576}=24$	$\sqrt{1681}=41$
$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{625}=25$	$\sqrt{1764}=42$
$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{676}=26$	$\sqrt{1849}=43$
$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{729}=27$	$\sqrt{1936}=44$
$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{784}=28$	$\sqrt{2025}=45$
$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{841}=29$	$\sqrt{2116}=46$
$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{900}=30$	$\sqrt{2209}=47$
$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{961}=31$	$\sqrt{2304}=48$
$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{1024}=32$	$\sqrt{2401}=49$
$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{1089}=33$	$\sqrt{2500}=50$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные обозначения	5
Г л а в а I. Элементы арифметики и алгебры	7
§ 1. Множества	7
§ 2. Целые числа	8
§ 3. Дроби	9
§ 4. Проценты	12
§ 5. Отношения и пропорции	13
§ 6. Рациональные числа	14
§ 7. Приближенные значения величин	15
§ 8. Выражения с переменными	16
§ 9. Одночлены и многочлены	17
§ 10. Тождества сокращенного умножения	18
§ 11. Разложение многочленов на множители	19
§ 12. Дробные выражения	20
§ 13. Корни	21
§ 14. Степень с рациональным показателем	23
§ 15. Элементарные функции	24
§ 16. Уравнения	29
§ 17. Квадратные уравнения	30
§ 18. Системы уравнений	34
§ 19. Неравенства	37
§ 20. Последовательности	39
§ 21. Десятичные логарифмы	41
Г л а в а II. Элементы геометрии	45
§ 22. Основные понятия геометрии	45
§ 23. Конгруэнтность фигур и перемещения	47
§ 24. Перпендикулярные и параллельные прямые	50
§ 25. Треугольники	53
§ 26. Четырехугольники	59
§ 27. Векторы	63

§ 28. Подобие и гомотетия геометрических фигур	66
§ 29. Окружность	71
§ 30. Вписанные и описанные треугольники	73
§ 31. Тригонометрические функции	74
§ 32. Площади многоугольников	76
§ 33. Метрические соотношения в треугольнике	80
§ 34. Правильные многоугольники	81
§ 35. Длина окружности и площадь круга	83
§ 36. Простейшие построения на плоскости	84
Глава III. Образцы экзаменационных билетов	85
Глава IV. Вопросы и задачи для устных экзаменов	89
§ 37. Арифметика и алгебра	89
§ 38. Геометрия	95
Глава V. Задачи повышенной трудности	101
Ответы, указания и решения	107
Ответы к экзаменационным билетам	175
Ответы к вопросам и задачам для устных экзаменов	179
Ответы к задачам повышенной трудности	189
Справочный материал	208

Людмила Александровна Кондратьева
Веннамин Соломонович Соломоник

СБОРНИК ВОПРОСОВ
И ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в техникумы

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор А. И. Селиверстова. Младшие редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор А. К. Нестерова. Корректоры В. В. Кожуткина, Г. И. Кострикова

ИБ № 4173

Изд. № ФМ 739. Сдано в набор 02.03.83. Подп. в печать 29.08.83. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 11,76 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 11,87. Уч.-изд. л. 13,26. Тираж 400 000 экз. Зак. № 826. Цена 40 коп.

Издательство «Высшая школа». 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14
Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15

40 коп.