Д. И. ПЕРЕПЕЛКИН

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

I

ОГИЗ
ГОСТЕХИЗДАТ
1948

18

Д. И. ПЕРЕПЁЛКИН

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ I

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Допущено Министерством Высшего образования СССР в качестве учебника для педагогических институтов

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

11—5—2

Книга представляет собой курс элементарной геометрии, рассчитанный на студентов педагогических институтов, а также на преподавателей средней школы. От обычных учебников отличается большей строгостью изложения (курс строится на основе идей современной аксиоматики) и более широким содержанием (геометрические преобразования, задачи на построение).

Редактор *И. Н. Бронштейн.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов*

Подписано к печати 24/III 1948 г. 21,5 печ. л. 20,53 уч.-изд. л. 38 560 тип. зн. в печ. л. Тираж 50 000 экз. А01757. Цена книги 7 р. 20 к. Переплёт 1 р.
Заказ № 7724.

1-я Образцовая тип. треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР.
Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга представляет собой первую часть систематического курса элементарной геометрии, рассчитанного на студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. Эта первая часть содержит планиметрию; вторая часть книги будет посвящена стереометрии. От обычных учебников элементарной геометрии настоящая книга отличается как своим содержанием, так и большей строгостью изложения.

Школьный курс геометрии предполагается известным и не повторяется в настоящей книге. Тем не менее, исходя из педагогических соображений, мы построили изложение так, что почти все предложения школьного курса нашли своё место в книге. Некоторые из них просто приводятся без доказательства, как известные читателю. Там, где это нам казалось уместным, приведены доказательства знакомых читателю теорем, отличные от принятых в школьных учебниках. Наконец, многие вопросы школьного курса изложены здесь в значительно более общей форме. Книга содержит также и значительный по объёму новый для учащегося материал.

Задача отбора этого материала представлялась достаточно сложной. Программу и самый характер преподавания элементарной геометрии в педагогических институтах нельзя считать окончательно установившимися. В силу этого настоящая книга по необходимости содержит больший материал, чем тот, который может быть фактически пройден. Дополнительные вопросы могут быть использованы в курсовых работах, в факультативных курсах и на специальных семинарах. Мы выбирали в первую очередь те теории, которые имеют принципиальное значение. Так, много места уделено теории различного рода геометрических преобразований и фактическому рассмотрению групп преобразований (хотя самым понятием группы в целях большей доступности мы не пользуемся).

Стремясь избежать параллелизма с курсом проективной геометрии, мы совершенно не касались элементарных вопросов проективной геометрии и теории конических сечений. В противоположность этому сравнительно подробно рассмотрена геометрия окружностей, совсем не затрагиваемая программами других дисциплин для педагогических институтов.

Далее, мы стремились дать представление о разнообразии задач и методов элементарной геометрии, отведя некоторое место и вопросам, не имеющим прицпипиального значения (см. например, §§ 27, 29, 71 — 73). Несомненно, что на определении содержания книги могли сказаться и личные вкусы автора; мы стремились свести их влияние к минимуму.

Значительно бóльшая строгость изложения, по сравнению с обычными учебниками, достигается в настоящей книге в первую очередь введением полной системы аксиом. При доказательстве теорем мы стремились строго обосновывать каждое положение, не доводя, однако, этой строгости до педантизма. В тех случаях, когда мы сознательно заменяли утомительные формальные умозаключения обращением к интуиции (например, в вопросе о направленных отрезках и направленных углах), мы это отчётливо оговаривали. Система аксиом, которой мы пользуемся [1]), является заведомо избыточной. При выборе самих аксиом мы, с одной стороны, держались ближе к аксиоматике Гильберта; с другой стороны, мы принимали, по возможности, за аксиомы такие предложения, которые являются «скрытыми аксиомами» в обычном школьном изложении и которые доказываются как теоремы в курсах оснований геометрии. Например, мы вводим «аксиому деления плоскости», а также аксиомы о пересечении окружности с прямой и о пересечении двух окружностей. Такой выбор аксиом будет содействовать, как нам кажется, лучшему пониманию, при изучении курса оснований геометрии, связи между традиционной элементарной геометрией и её аксиоматикой.

Вряд ли стоит говорить о том, что мы ограничиваемся всюду евклидовой геометрией. Историко-критический анализ основных понятий, а также проблемы собственно аксиоматики (например, вопрос о независимости аксиом) остаются вне рамок настоящей книги.

---

[1]) Эти аксиомы приведены на стр. 12, 14, 16, 36, 37, 42, 61, 64, 80, 154, 160.

Предлагаемый курс геометрии не содержит упражнений и задач. Мы считаем, что будущий преподаватель должен не пользоваться сборником специально для него подобранных задач, а изучать имеющуюся задачную литературу по геометрии. Однако в самом тексте книги рассмотрены те задачи на построение (свыше 60), которые можно в известном смысле рассматривать как основные или типические. В ряде случаев рассмотрено по нескольку способов решения одной задачи.

Автор выражает свою признательность проф. Н. Ф. Четверухину и А. М. Лопшицу, просмотревшим книгу в рукописи, и редактору издательства доц. И. Н. Бронштейну. Их ценные замечания оказались весьма полезными при окончательном оформлении книги.

Сентябрь 1947 г. *Д. Перепёлкин.*

ВВЕДЕНИЕ.

Из курса средней школы читатель имеет достаточное представление о содержании элементарной геометрии [1]). Возможно также, что читатель знаком и с другими разделами геометрии (например, с аналитической геометрией). В таком случае он более отчётливо представляет себе, какую именно часть наших геометрических знаний мы относим к области элементарной геометрии. Тем не менее мы не будем пытаться определить содержание элементарной геометрии, так как оно устанавливается не какими-либо общими соображениями, а просто традицией, основанной на потребностях практики. Определение содержания элементарной геометрии нисколько не отразилось бы на её изучении.

В отличие от этого существенное значение для углублённого изучения элементарной геометрии имеет отчётливое представление об её методе. Этим методом является аксиоматический метод, суть которого состоит в следующем.

Некоторые простейшие геометрические понятия, хорошо знакомые нам по нашему опыту, принимаются за основные понятия. В настоящей книге мы будем считать основными понятия точки, прямой и плоскости, а также понятия «точка лежит на прямой», «точка лежит на плоскости», «точка находится между двумя другими точками», «два

---

[1]) Мы предполагаем, что читатель знаком с элементарной геометрией, например, в объёме учебника Киселёва [13]. Укажем ещё на более новый учебник Глаголева [9]. Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещённому в конце книги.

отрезка равны», «два угла равны». Все остальные понятия, которые мы рассматриваем, мы должны точно определить. Вот почему мы не встретим в этой книге (как и в школьных учебниках) определений точки или прямой, но встретим определения отрезка, угла, треугольника; не встретим определения равных отрезков и равных углов, но встретим определение равных треугольников, и т. д.

Из большого числа геометрических фактов, известных нам на основании многовековой практики человечества, мы принимаем некоторое число без доказательства. Те предложения, которые мы принимаем без доказательства и полагаем в основу изложения какой-либо науки, мы называем аксиомами. Все остальные предложения геометрии мы должны вывести из аксиом уже с помощью строгих логических умозаключений — мы должны их доказать. Отдельные аксиомы элементарной геометрии знакомы читателю из школьного курса геометрии. Примерами могут служить хотя бы известные аксиомы: «*Существует одна и только одна прямая, проходящая через две данные точки*», «*Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной*».

Список аксиом, достаточных для построения элементарной геометрии, далеко не исчерпывается тем их перечнем, который приводится в школьных учебниках. Такое предложение, например, как «точка делит прямую на две части» и многие другие, принимаются в школе за очевидные, т. е. считаются аксиомами, хотя никогда аксиомами не называются. В отличие от этого в первой части настоящей книги даётся (в §§ 1, 2, 3, 9, 11, 15, 16, 21, 44, 45) список аксиом, достаточных для построения планиметрии (а во второй части книги будет дан аналогичный список и для стереометрии).

Весьма существенным является то обстоятельство, что этот перечень аксиом не является единственно возможным. Так, в наших школьных учебниках геометрии указывается, что при построении теории параллельных прямых можно принять за аксиому то предложение, которое было приведено выше, а можно считать аксиомой и предложение: «*если сумма внутренних односторонних углов, образованных двумя прямыми и некоторой секущей, не равна* $2d$, *то эти прямые пересекаются*». Естественно, что если одно из этих двух предложений принять за аксиому, то другое может быть доказано, т. е. становится теоремой. С некоторыми другими аналогичными примерами читатель встретится при чтении настоящей книги (§ 5 и § 11).

Более подробное рассмотрение вопросов, касающихся геометрических аксиом, выходит за рамки элементарной геометрии и относится к области «оснований геометрии». Некоторые сведения об аксиомах геометрии будут даны также в конце второй части книги.

ГЛАВА I.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

§ 1. Взаимное расположение точки и прямой.

Основными понятиями геометрии на плоскости являются понятия точки и прямой. Мы будем обозначать точки большими латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$, прямые — малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$

Точка и прямая могут занимать одна относительно другой различные положения. Точка может лежать на прямой, может не лежать. Вместо того, чтобы сказать «точка лежит на прямой», говорят также «прямая проходит через точку».

Изложение свойств точек и прямых мы начнём со следующих трёх аксиом («аксиомы соединения»):

Аксиома 1a. *Существует одна и только одна прямая, проходящая через две данные точки.*

Аксиома 1b. *Каждая прямая проходит через бесчисленное множество точек.*

Аксиома 1c. *Существуют точки, не лежащие на одной прямой.*

Прямая, проходящая через точки A и B, обозначается через AB или BA.

О прямой, проходящей через точки A и B, говорят также, что она соединяет точки A и B.

Если две прямые проходят через одну и ту же точку, то говорят, что они пересекаются в этой точке.

Мы видим, таким образом, что одна и та же особенность взаимного расположения точки и прямой, одно и то же «отношение» между точкой и прямой, выражается двумя различными терминами «лежит на ...» и «проходит через ...». Чтобы избежать этой двойственности в терминологии, в геометрии пользуются иногда термином «инцидентный». Вместо того чтобы сказать, что «точка лежит на прямой» или «прямая проходит через точку», говорят, что «точка и прямая инцидентны», «точка инцидентна прямой», «прямая инцидентна точке». При этом только что введённые аксиомы 1a—1c, которые называют иногда «аксиомами инцидентности», принимают следующую форму:

Существует одна и только одна прямая, инцидентная двум данным точкам.

Каждая прямая инцидентна бесконечному множеству точек.

Существуют точки, не инцидентные одной прямой.

Термин «инцидентный» применяется, главным образом, в высшей геометрии, а также в специальной литературе. В настоящей книге мы будем пользоваться обычной терминологией.

Из аксиом 1a — 1c без труда вытекают следующие две теоремы:

Теорема 1. *Две прямые не могут иметь более одной общей точки.*

Теорема 2. *Через каждую точку проходит бесчисленное множество прямых.*

Для дальнейшего построения геометрии введённых нами понятий и аксиом оказывается недостаточно, и мы должны обратиться к другим понятиям.

§ 2. Порядок точек на прямой.

Мы уже приняли за аксиому, что на каждой прямой лежит бесчисленное множество точек. Наше наглядное представление говорит нам, что эти «точки располагаются на прямой в некотором определённом порядке». Попытаемся выяснить более точно, чтó эти слова обозначают.

Если на прямой линии даны две точки, то мы часто характеризуем их расположение на прямой с помощью выражений «левее, правее», «выше, ниже» и т. п. Однако такого рода понятия не являются геометрическими, поскольку они определяют расположение точек по отношению к наблюдателю (левее, правее) или по отношению к поверхности земного шара (выше, ниже).

Пусть теперь даны три точки, лежащие на одной прямой. В таком случае одна из них лежит между двумя другими, и это понятие «между» уже не зависит от расположения точек по отношению к каким-либо другим предметам (по отношению к наблюдателю, к земле). Понятие «между» является, таким образом, геометрическим понятием. Чтобы иметь возможность использовать понятие «точка лежит между двумя другими точками» в геометрических рассуждениях, мы принимаем за аксиомы следующие предложения («аксиомы порядка»).

Аксиома 2a. *Из трёх точек одной прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими.*

Аксиома 2b. *Если A и B — две данные точки, то на прямой AB существует как бесчисленное множество точек, лежащих между A и B, так и бесчисленное множество таких точек, что точка B лежит между точкой A и каждой из этих точек.*

Аксиома 2c. *Всякая точка O, лежащая на прямой, разделяет остальные точки этой прямой на два класса так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных классов, но не лежит между двумя точками одного класса.*

(Аксиому 2c можно было бы назвать «аксиомой деления прямой».)

Аксиомы порядка 2a—2c позволяют ввести несколько новых понятий.

Между любыми двумя точками прямой лежит бесконечное множество других точек. Это множество точек называется отрезком. Отрезок, состоящий из всех точек, которые лежат между точками A и B, обозначается через AB или BA. Точки A и B называются концами отрезка. Об отрезке, имеющем точки A и B своими концами, говорят, что он соединяет точки A и B. Отрезок AB называется также расстоянием между точками A и B.

Замечание. Понятие «расстояние» имеет в геометрии двоякий смысл. А именно, под расстоянием понимается как самый отрезок, так и число, выражающее длину этого отрезка в некоторых единицах измерения. Мы будем пока что употреблять термин «расстояние» только в первом смысле слова. К вопросу об измерении длины отрезка мы обратимся много позднее (§§ 43—45).

Каждый из двух классов точек, на которые точка O делит прямую, называется лучом (или полупрямой), выходящим из точки O. Любой из двух лучей, выходящих из точки O и образующих (вместе с точкой O) в совокупности прямую линию, называется продолжением другого за точку O.

Для обозначения лучей мы будем пользоваться большей частью буквами h, k, l, ... Луч, выходящий из точки O и проходящий через точку A, обозначается иногда как «луч OA».

В качестве тех теорем о порядке точек на прямой, которые вытекают из введённых до сих пор аксиом, приведём следующие два предложения.

1) *Если C — одна из точек отрезка AB, а D — одна из точек отрезка AC, то точка D есть точка отрезка AB.* Иначе говоря, отрезок AC есть в этом случае часть отрезка AB.

2) *Две точки A и B прямой линии разделяют остальные точки прямой на три класса — отрезок AB и два луча, выходящих соответственно из точек A и B.* Эти два луча называются продолжениями отрезка AB за точку A и за точку B.

На доказательствах этих двух предложений мы останавливаться не будем, предоставляя их читателю.

§ 3. Деление плоскости прямыми линиями.

Свойства взаимного расположения точек и прямых, которые мы рассматривали до сих пор, в одинаковой мере имеют место как на плоскости, так и в пространстве. Мы должны теперь перейти к рассмотрению свойств точек и прямых, характерных для геометрии на плоскости. Одним из таких свойств прямой линии является деление плоскости на две полуплоскости. Чтобы точно сформулировать это свойство, мы введём несколько новых понятий.

Ломаной $ABC \ldots KL$ называется совокупность конечного числа данных точек A, B, C, ..., K и L и отрезков AB, BC, ..., KL; все данные точки и точки перечисленных отрезков называются точками ломаной. Точки A и L называются концами ломаной; точки B, C, ..., K — её вершинами; отрезки AB, BC, ..., KL — звеньями (или сторонами) ломаной[1]. Если ломаная имеет точки A и L своими концами, то говорят, что она соединяет точки A и L. Отрезок вместе с его концами можно рассматривать как частный случай ломаной (с одним звеном).

---

[1] Ради общности мы не исключаем из рассмотрения случай, когда несколько последовательных звеньев ломаной принадлежит одной прямой.

Мы будем далее говорить, что некоторая фигура **F** (т. е некоторое множество точек плоскости) делит плоскость на две области D_1 и D_2, если эта фигура позволяет разделить все не принадлежащие ей точки на два класса, обладающих следующими свойствами: 1) любые две точки одного класса можно соединить ломаной, не имеющей с **F** общих точек; 2) никакие две точки различных классов нельзя соединить такой ломаной. Мы будем при этом называть область D_1 (или D_2) выпуклой, если любые две её точки можно соединить отрезком, не имеющим с **F** общих точек. Аналогично определяется деление плоскости на любое (конечное) число областей.

Мы можем теперь сформулировать следующее предложение, которое примем за аксиому («аксиома деления плоскости»).

Аксиома 3. *Всякая прямая, лежащая в некоторой плоскости, делит эту плоскость на две выпуклые области* [1]).

Каждая из двух областей, на которые прямая делит плоскость, называется полуплоскостью, ограниченной прямой a, или полуплоскостью, выходящей из прямой a.

О двух точках, лежащих в одной и той же полуплоскости, выходящей из прямой a, говорят, что они лежат по одну сторону от прямой a; о двух точках, лежащих в различных полуплоскостях, — что они лежат по разные стороны от прямой a.

Пусть дан некоторый луч h. Этот луч принадлежит некоторой прямой a. Две полуплоскости, на которые прямая a делит остальные точки, будем называть полуплоскостями, выходящими из луча h.

Пользуясь аксиомой 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Две пересекающиеся прямые делят плоскость на четыре выпуклые области.*

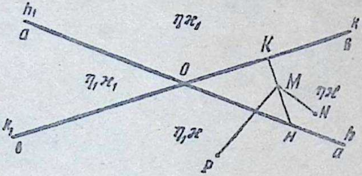
Доказательство. Пусть a и b (черт. 1) — данные прямые, O — их общая точка. Обозначим через h и h_1 те лучи, на которые точка O делит прямую a, и через k и k_1 —

---

[1]) Мы даём здесь эту аксиому в такой формулировке, которая сохраняет силу и в геометрии в пространстве. Ограничиваясь только геометрией на плоскости, мы могли бы сформулировать эту аксиому короче:

Всякая прямая делит плоскость на две области.

те лучи, на которые точка O делит прямую b. Прямая a определяет две полуплоскости. Лучи k и k_1 лежат при этом в различных полуплоскостях, так как отрезок, соединяющий произвольную точку луча k с произвольной точкой луча k_1 имеет с прямой a общую точку O (по аксиоме 2с). Ту из двух полуплоскостей, в которой лежит луч k, обозначим через η, а ту, в которой лежит луч k_1 — через η_1. Аналогично, обозначаем через $\varkappa$ и $\varkappa_1$ две полуплоскости, выходящие из прямой b и содержащие соответственно луч h и луч h_1. Точки, не лежащие ни на одной из прямых a и b, разделим на четыре класса следующим образом.



Черт. 1.

Отнесём к первому классу те точки, которые принадлежат к полуплоскости η и в то же время — к полуплоскости $\varkappa$; обозначим этот класс точек через $\eta\varkappa$[1]. Такие точки существуют; мы получим одну из них, беря произвольную точку M отрезка HK, концы которого H и K лежат соответственно на лучах h и k. Аналогичным образом определим классы точек $\eta\varkappa_1$, $\eta_1\varkappa$ и $\eta_1\varkappa_1$.

Четыре определённые нами класса точек представляют собой четыре выпуклые области. Действительно, две точки M и N одного класса лежат по одну сторону от прямой a и в то же время по одну сторону от b. Поэтому отрезок MN не имеет общих точек ни с прямой a, ни с прямой b. Две точки M и P различных классов лежат, по самому определению этих классов, в различных полуплоскостях относительно прямой a или относительно прямой b и потому отрезок и всякая ломаная, соединяющие точки M и P, имеют общую точку хотя бы с одной из данных прямых. Теорема доказана.

---

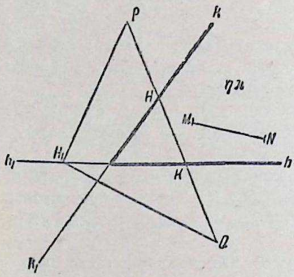
[1] Читатель, знакомый с элементами теории множеств, заметит, что умножение η на $\varkappa$ имеет здесь теоретико-множественный смысл.

§ 4. Угол.

Переходим к рассмотрению понятия угла.

Углом называется совокупность некоторой точки и двух лучей, выходящих из этой точки; точка называется **вершиной** угла, лучи — его **сторонами**. Под точками угла мы понимаем его вершину и все точки его сторон.

Угол, образованный лучами h и k, будем обозначать через $\angle hk$ или $\angle kh$; угол, образованный двумя лучами, выходящими из точки A и проходящими соответственно через точки B и C, называется иногда углом между двумя отрезками[1]) и обозначается через $\angle BAC$ или $\angle CAB$. Если рассматривается только один угол с вершиной A, то его можно обозначить через $\angle A$. Угол называется **развёрнутым**, если его стороны образуют (вместе с вершиной) одну прямую.



Черт. 2.

Основное свойство угла выражается следующей теоремой.

Теорема 4. *Угол, отличный от развёрнутого, делит плоскость на две области, из которых одна выпукла, а другая — нет.*

Доказательство. Обозначим через h_1 и k_1 лучи, представляющие собой продолжения сторон h и k данного угла за его вершину (черт. 2). Обозначим, далее, через η и η_1 полуплоскости, выходящие из луча h, через $\varkappa$ и $\varkappa_1$ — полуплоскости, выходящие из луча k. Выберем эти обозначения так, чтобы луч k лежал в полуплоскости η, а луч h — в полуплоскости $\varkappa$.

Разобьём теперь все точки, не принадлежащие углу, на два класса.

К первому классу $\eta\varkappa$ отнесём все точки, лежащие одновременно как в полуплоскости η, так и в полуплоскости $\varkappa$.

---

[1]) В таких выражениях как угол «между двумя радиусами», «между двумя хордами», «между двумя сторонами».

Все остальные точки, не принадлежащие углу, отнесём ко второму классу. Всякая точка второго класса лежит по крайней мере в одной из полуплоскостей η_1 и $\varkappa_1$. Обозначим второй класс точек через $\eta_1 + \varkappa_1$ [1]).

Всякие две точки M и N первого класса $\eta\varkappa$ можно соединить отрезком, не имеющим с углом общих точек; действительно, точки M и N лежат по одну сторону от той прямой, которой принадлежит луч h, и по одну сторону от той прямой, которой принадлежит луч k.

Если, далее, M — точка первого класса и отрезок MN не имеет с углом общих точек, то и N будет точкой первого класса по той же причине. Повторяя это рассуждение несколько раз, приходим к следующему выводу. Если M — точка первого класса и ломаная $MAB\ldots N$ не имеет с углом общих точек, то и точка N принадлежит также к первому классу. Следовательно, две точки различных классов нельзя соединить ломаной, не имеющей с углом общих точек.

Наконец, любую точку P второго класса $\eta_1 + \varkappa_1$ можно соединить с любой точкой H_1 луча h_1 отрезком, не имеющим с углом общих точек. Это вытекает из того, что точка P лежит в одной из полуплоскостей η_1 и $\varkappa_1$. Отсюда следует, что любые две точки P и Q второго класса можно соединить ломаной PH_1Q, не имеющей с углом общих точек.

Таким образом, доказано, что угол делит плоскость на две области $\eta\varkappa$ и $\eta_1 + \varkappa_1$, из которых первая выпукла.

Покажем, что вторая область невыпукла. Если H и K — произвольные точки, лежащие на лучах h и k, P и Q — точки, лежащие на продолжениях отрезка HK соответственно за точку H и за точку K, то P и Q — точки второй области. В то же время отрезок PQ имеет с углом две общие точки. Это и показывает, что область $\eta_1 + \varkappa_1$ невыпукла.

Одну из двух областей, на которые угол делит плоскость, называют внутренней относительно угла, а другую область — внешней относительно угла.

Внутренней обычно называют выпуклую область, а внешней — невыпуклую. Этой терминологии мы будем придерживаться

---

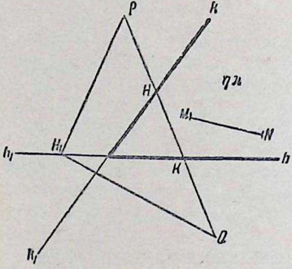
[1]) Читатель, знакомый с элементами теорий множеств, заметит, что сложение η_1 и $\varkappa_1$ имеет здесь теоретико-множественный смысл.

§ 4. Угол.

Переходим к рассмотрению понятия угла.

Углом называется совокупность некоторой точки и двух лучей, выходящих из этой точки; точка называется **вершиной** угла, лучи — его **сторонами**. Под точками угла мы понимаем его вершину и все точки его сторон.

Угол, образованный лучами h и k, будем обозначать через $\angle hk$ или $\angle kh$; угол, образованный двумя лучами, выходящими из точки A и проходящими соответственно через точки B и C, называется иногда углом между двумя отрезками[1]) и обозначается через $\angle BAC$ или $\angle CAB$. Если рассматривается только один угол с вершиной A, то его можно обозначить через $\angle A$. Угол называется **развёрнутым**, если его стороны образуют (вместе с вершиной) одну прямую.



Черт. 2.

Основное свойство угла выражается следующей теоремой.

Теорема 4. *Угол, отличный от развёрнутого, делит плоскость на две области, из которых одна выпукла, а другая — нет.*

Доказательство. Обозначим через h_1 и k_1 лучи, представляющие собой продолжения сторон h и k данного угла за его вершину (черт. 2). Обозначим, далее, через η и η_1 полуплоскости, выходящие из луча h, через $\varkappa$ и $\varkappa_1$ — полуплоскости, выходящие из луча k. Выберем эти обозначения так, чтобы луч k лежал в полуплоскости η, а луч h — в полуплоскости $\varkappa$.

Разобьём теперь все точки, не принадлежащие углу, на два класса.

К первому классу $\eta\varkappa$ отнесём все точки, лежащие одновременно как в полуплоскости η, так и в полуплоскости $\varkappa$.

---

[1]) В таких выражениях как угол «между двумя радиусами», «между двумя хордами», «между двумя сторонами».

Все остальные точки, не принадлежащие углу, отнесём ко второму классу. Всякая точка второго класса лежит по крайней мере в одной из полуплоскостей η_1 и $\varkappa_1$. Обозначим второй класс точек через $\eta_1 + \varkappa_1$ [1]).

Всякие две точки M и N первого класса $\eta\varkappa$ можно соединить отрезком, не имеющим с углом общих точек; действительно, точки M и N лежат по одну сторону от той прямой, которой принадлежит луч h, и по одну сторону от той прямой, которой принадлежит луч k.

Если, далее, M — точка первого класса и отрезок MN не имеет с углом общих точек, то и N будет точкой первого класса по той же причине. Повторяя это рассуждение несколько раз, приходим к следующему выводу. Если M — точка первого класса и ломаная $MAB\ldots N$ не имеет с углом общих точек, то и точка N принадлежит также к первому классу. Следовательно, две точки различных классов нельзя соединить ломаной, не имеющей с углом общих точек.

Наконец, любую точку P второго класса $\eta_1 + \varkappa_1$ можно соединить с любой точкой H_1 луча h_1 отрезком, не имеющим с углом общих точек. Это вытекает из того, что точка P лежит в одной из полуплоскостей η_1 и $\varkappa_1$. Отсюда следует, что любые две точки P и Q второго класса можно соединить ломаной PH_1Q, не имеющей с углом общих точек.

Таким образом, доказано, что угол делит плоскость на две области $\eta\varkappa$ и $\eta_1 + \varkappa_1$, из которых первая выпукла.

Покажем, что вторая область невыпукла. Если H и K — произвольные точки, лежащие на лучах h и k, P и Q — точки, лежащие на продолжениях отрезка HK соответственно за точку H и за точку K, то P и Q — точки второй области. В то же время отрезок PQ имеет с углом две общие точки. Это и показывает, что область $\eta_1 + \varkappa_1$ невыпукла.

Одну из двух областей, на которые угол делит плоскость, называют внутренней относительно угла, а другую область — внешней относительно угла.

Внутренней обычно называют выпуклую область, а внешней — невыпуклую. Этой терминологии мы будем придерживаться

---

[1]) Читатель, знакомый с элементами теорий множеств, заметит, что сложение η_1 и $\varkappa_1$ имеет здесь теоретико-множественный смысл.

в дальнейшем, если не будет оговорено противное. Принимая выпуклую область за внутреннюю, говорят, что рассматривается угол, меньший развёрнутого.

Впрочем, иногда имеется основание считать внутренней невыпуклую область. В этом случае говорят, что рассматривается угол, больший развёрнутого, или входящий угол.

Точки, принадлежащие внутренней области, называются внутренними, а принадлежащие внешней области — внешними относительно угла.

§ 5. Треугольник.

Треугольником называется совокупность трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, имеющих своими концами эти три точки, взятые попарно. Данные три точки называются вершинами треугольника, три отрезка — его сторонами.

Если по каким-либо соображениям мы выделяем одну из сторон треугольника, то мы называем её основанием, а другие две — боковыми сторонами треугольника.

Углами треугольника (или, точнее, внутренними углами треугольника) называются три угла, каждый из которых образован двумя лучами, выходящими из одной из вершин и проходящими соответственно через две другие вершины.

Треугольник, имеющий своими вершинами точки A, B и C, обозначается так: $\triangle ABC$ или $\triangle BAC$ и т. д.

Простейшие свойства треугольника находят своё выражение в следующих теоремах.

Теорема 5. *Треугольник делит плоскость на две области, из которых одна выпукла, а другая — нет.*

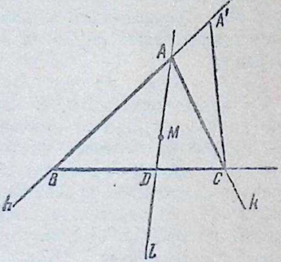
Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ (черт. 3) — данный треугольник. Обозначим через η и η_1 полуплоскости, выходящие из прямой BC, через $\varkappa$ и $\varkappa_1$ — полуплоскости, выходящие из прямой CA, через λ и λ_1 — полуплоскости, выходящие из прямой AB; обозначения выберем так, чтобы точка A лежала в полуплоскости η, точка B — в полуплоскости $\varkappa$, точка C — в полуплоскости λ. Разобьём все точки, не принадлежащие треугольнику, на два класса.

К первому классу отнесём все точки, лежащие одновременно как в полуплоскости η, так и в полуплоскостях $\varkappa$ и λ. Мы получим такие точки, соединяя, например, вершину A с какой-либо точкой D стороны BC и беря точки отрезка AD.

Все остальные точки, не принадлежащие треугольнику, отнесём ко второму классу. Всякая точка второго класса лежит по крайней мере в одной из полуплоскостей η_1, $\varkappa_1$ и λ_1.

Дальнейший ход доказательства весьма близок к доказательству теоремы 4.

Всякие две точки M и N первого класса можно соединить отрезком, не имеющим с треугольником общих точек, так как точки M и N лежат по одну сторону от каждой из прямых BC, CA и AB.



Черт. 3.

Если, далее, M — точка первого класса и отрезок MN не имеет с треугольником общих точек, то и N — точка первого класса по тем же основаниям. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 4, следует, что две точки различных классов нельзя соединить ломаной, не имеющей с треугольником общих точек.

Пусть теперь P и Q — две точки второго класса. Если каждая из точек P и Q лежит в полуплоскости η_1 или $\varkappa_1$, то обе эти точки будут внешними относительно угла ACB. Следовательно, их можно соединить ломаной, не имеющей с этим углом общих точек и лежащей вне угла. Эта ломаная не имеет общих точек и с отрезком AB, так как последний лежит внутри угла ACB. Итак, две точки второго класса можно соединить ломаной, не имеющей с треугольником общих точек, если каждая из этих точек лежит в одной из полуплоскостей η_1 или $\varkappa_1$; аналогичные рассуждения применимы и во всех других случаях.

Наконец, как и при доказательстве теоремы 4, покажем, что второй класс представляет собой невыпуклую область.

Точки одной из двух областей, на которые треугольник делит плоскость, а именно — выпуклой, называются внутренними по отношению к треугольнику, точки другой области — внешними.

Предоставляем читателю самому доказать, что если точки A, B и C являются вершинами некоторого треугольника, то прямые BC, CA и AB делят плоскость на семь выпуклых областей (аналогично доказательству теоремы 3).

Теорема 6[1]). *Прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника и пересекающая одну из его сторон, пересекает ещё одну и только одну из двух других его сторон.*

Доказательство. Пусть прямая a пересекает сторону BC треугольника ABC. В таком случае точки B и C лежат по разные стороны от прямой a. Так как точка A не лежит на прямой a, то имеет место одно из двух: либо точка A лежит с точкой B по одну сторону от прямой a, либо — по разные стороны. В первом случае прямая a не пересекает стороны AB, но пересекает сторону AC, так как точки A и C лежат по разные стороны от прямой a. Во втором случае прямая a пересекает сторону AB, но не пересекает стороны AC, так как точки A и C лежат по одну сторону от прямой a.

Теорема 7. *Луч l, выходящий из вершины A треугольника ABC и проходящий через внутреннюю точку M, пересекает сторону BC.*

Доказательство. Выберем на продолжении стороны AB за точку A некоторую точку A' (черт. 3) и применим теорему 6 к треугольнику $A'BC$ и прямой AM, не проходящей ни через одну из точек A', B и C. Прямая AM пересекает сторону BA' этого треугольника. Следовательно, эта прямая пересекает либо сторону $A'C$, либо сторону BC.

Так как точка M лежит внутри треугольника ABC, то она лежит как в полуплоскости $\varkappa$, так и в полуплоскости λ (обозначения те же, что и в доказательстве теоремы 5). Поэтому и все точки луча l лежат одновременно в этих двух полуплоскостях, а все точки продолжения луча l за точку A — одновременно в полуплоскостях $\varkappa_1$ и λ_1. В то же время каждая точка отрезка $A'C$ лежит и в полуплоскости λ и в полуплоскости $\varkappa_1$.

---

[1]) При построении геометрии содержание теоремы 6 очень часто принимается за аксиому вместо нашей аксиомы 3. Эта аксиома называется аксиомой Паша по имени геометра Паша (Moritz Pasch), впервые её сформулировавшего.

Таким образом, прямая AM не может иметь общих точек с отрезком $A'C$ и должна пересекать отрезок BC в некоторой точке D.

Так как и точка M и все точки отрезка BC лежат в полуплоскости λ, то точка D лежит на самом луче l (а не на его продолжении за точку A).

Следствие. *Если луч* l (черт. 3), *выходящий из вершины* A *угла* $\angle hk$, *проходит через точку* M, *лежащую внутри угла* (при этом и весь луч l лежит внутри этого угла), *то лучи* h *и* k *лежат по разные стороны от прямой, которой принадлежит луч* l.

Действительно, выберем на лучах h и k по точке B и C и рассмотрим треугольник ABC. Точка M может лежать внутри треугольника. В этом случае луч l имеет, по доказанному, общую точку D с отрезком BC. Значит точки B и C, а следовательно, и лучи h и k лежат по разные стороны от прямой, которой принадлежит луч l.

Но точка M может оказаться и вне треугольника ABC. Так как она лежит внутри угла BAC, то она будет при этом лежать с точкой A по разные стороны от прямой BC. Следовательно, отрезок AM будет иметь общую точку с прямой BC. Эта общая точка будет, как легко видеть, лежать на самом отрезке BC, и мы приходим к предыдущему случаю.

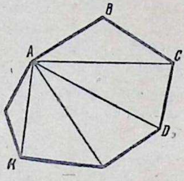
К тому же заключению мы пришли бы, предположив, что точка M лежит на самой прямой BC.

О луче l, выходящем из вершины угла $\angle hk$ и расположенном внутри угла, мы будем говорить, что он лежит «между» сторонами h и k угла.

§ 6. Выпуклый многоугольник.

Многоугольником вообще называется всякая замкнутая ломаная линия, т. е. ломаная, у которой концы совпадают. Иначе можно сказать, что многоугольником $ABCD\ldots KL$ (черт. 4) называется совокупность конечного числа (не менее трёх) точек $A, B, C, D, \ldots, K, L$ и точек всех отрезков AB, $BC, CD, \ldots, KL$ и LA; точки $A, B, C, \ldots, K$ и L называются вершинами многоугольника, а отрезки $AB, BC, \ldots$ $\ldots, KL, LA$ — его сторонами; углы $LAB, ABC, \ldots, KLA$ называются углами многоугольника.

Многоугольники классифицируются по числу вершин или, что то же, по числу сторон. Простейшим многоугольником является рассмотренный уже нами треугольник, далее идут: четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник и т. д.



Черт. 4.

В элементарной геометрии, говоря о многоугольнике, мы имеем в виду по большей части выпуклый многоугольник.

Многоугольник называется **выпуклым**, если по отношению к каждой из прямых, частями которых служат его стороны, все вершины многоугольника расположены в одной полуплоскости.

Аналогично определяется и выпуклая ломаная линия.

Рассмотренная в предыдущем параграфе теорема 5 обобщается и на выпуклые многоугольники.

Теорема 8. *Выпуклый многоугольник делит плоскость на две области, из которых одна выпукла, а другая — нет.*

Доказательство. Пусть $ABCD\ldots KL$ — данный многоугольник. К первому классу мы относим все точки, которые лежат от прямой AB по ту же сторону, что и вершины $C, D, \ldots$ $\ldots, K$ и L и в то же время от прямой BC — по ту же сторону, что и вершины $D, \ldots, L$ и $A, \ldots$ и, наконец, от прямой LA — по ту же сторону, что и вершины $B, C, \ldots$ и K. Все остальные точки, не принадлежащие многоугольнику, относим ко второму классу.

Доказательство того, что первый класс точек представляет собой выпуклую область и что две точки различных классов нельзя соединить ломаной, не имеющей с многоугольником общих точек, повторяет дословно соответствующую часть доказательства теоремы 5. Несколько сложнее проводится доказательство того, что всякие две точки второго класса можно соединить ломаной, не имеющей с многоугольником общих точек.

Точки одной из двух областей, на которые выпуклый многоугольник делит плоскость, а именно выпуклой области, называются **внутренними**, точки другой области — **внешними** по отношению к выпуклому многоугольнику.

Предоставляем читателю сформулировать и доказать для выпуклого многоугольника теоремы, аналогичные теоремам 6 и 7.

Отрезок, соединяющий две вершины многоугольника и не являющийся его стороной, называется диагональю многоугольника. Все точки каждой диагонали выпуклого многоугольника являются внутренними точками многоугольника. Действительно, все точки, скажем, диагонали AC многоугольника $ABC\ldots KL$ (черт. 4) лежат от прямых AB, AL и т. д. по ту же сторону, что и точка C, а от прямых BC и CD — по ту же сторону, что и точка A. Из каждой вершины многоугольника выходит $n-3$ диагоналей; эти диагонали разбивают внутреннюю область многоугольника на внутренние области $n-2$ треугольников (если не считать, конечно, точек, лежащих на самих диагоналях).

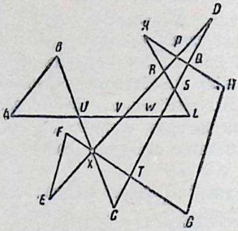
Так как из каждой вершины выходит $n-3$ диагонали, то общее число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Так, четырёхугольник имеет $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$ диагонали, пятиугольник — $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5$ диагоналей, шестиугольник — $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$ диагоналей и т. д.

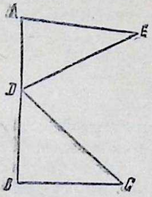
§ 7. Многоугольники общего вида.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели наиболее простой вид многоугольников — выпуклые многоугольники. Строгие доказательства свойств многоугольников более общего вида выходят из рамок настоящей книги. Поэтому мы ограничимся в этом параграфе лишь кратким изложением относящихся сюда результатов, не останавливаясь на их доказательствах.

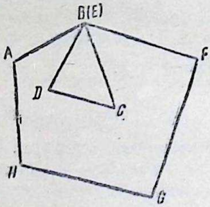
Общее определение многоугольника было дано в начале § 6. Под это общее определение подходят геометрические фигуры весьма сложного вида. Так, например, многоугольник может иметь двойные, тройные и т. д. точки, т. е. точки, в которых пересекаются две, три и т. д. стороны многоугольника. Многоугольник $ABCDEFGHKL$ (черт. 5) имеет восемь двойных точек P, Q, R, S, T, U, V и W и одну тройную точку X. Далее, вершина многоугольника может лежать на одной из его сторон, не будучи её концом: на черт. 6 вершина D лежит на стороне AB. Наконец, возможно, что из одной и той же вершины многоугольника выходит не две, а большее число сторон: на черт. 7 из вершины B (она же E) многоугольника $ABCDEFGH$ выходят четыре его стороны. Аналогичными особенностями могут, конечно, обладать и незамкнутые ломаные линии.



Черт. 5.



Черт. 6.

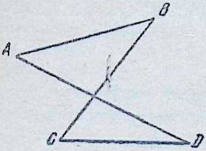


Черт. 7.

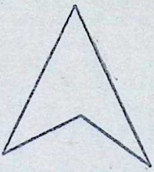
В очень многих случаях, например, при рассмотрении суммы углов (§ 22) и в теории площадей (§ 53 и след.), оказывается нецелесообразным рассматривать ломаные и многоугольники, обладающие только что перечисленными особенностями. В таких случаях мы сужаем общее понятие многоугольника, вводя следующее определение.

Многоугольник (или ломаная) называется простым, если никакие две его стороны не пересекаются, ни одна его вершина не лежит на его стороне и каждая вершина служит концом только двух сторон [1]). Непростые многоугольники называются иногда **звездчатыми**.

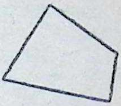
Всякий выпуклый многоугольник — простой, но не всякий простой многоугольник — выпуклый. Таким образом мы получаем три понятия, каждое из которых является частным случаем предыдущего: многоугольник вообще — простой многоугольник — выпуклый многоугольник.



Черт. 8.

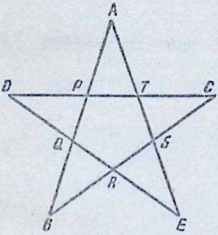


Черт. 9.

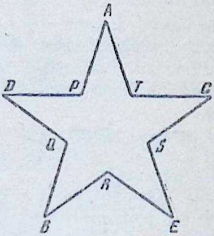


Черт. 10.

Простейшим примером могут служить три типа четырёхугольников — непростой или звездчатый (черт. 8), простой невыпуклый (черт. 9) и выпуклый (черт. 10). Дальнейшим примером непростого многоугольника может служить пятиугольная звезда (черт. 11), представляющая собой пятиугольник *ABCDE*



Черт. 11.

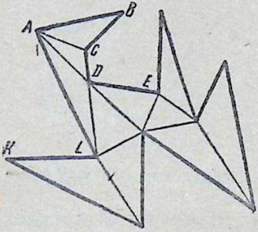


Черт. 12.

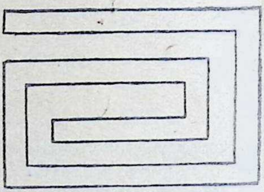
---

[1] Чтобы правильно понять это определение, припомним, что сторона многоугольника есть отрезок, а отрезком мы назвали совокупность точек, лежащих между двумя точками. Поэтому вершины не относятся к числу точек сторон.

с пятью двойными точками P, Q, R, S и T. Контур этой звезды есть простой невыпуклый десятиугольник $APDQBRESCT$ (черт. 12). Примерами непростых многоугольников являются также рассмотренные выше многоугольники, изображённые на чертежах 5, 6 и 7. Под понятие простого многоугольника подходят также достаточно сложные фигуры, как видно хотя бы из чертежей 13 и 14.



Черт. 13.



Черт. 14.

Важнейшее свойство простого многоугольника выражается следующим предложением, известным под именем **теоремы Жордана** для многоугольника:

Всякий простой многоугольник делит плоскость на две области.

Если многоугольник — выпуклый, то одна из этих областей выпукла, другая — нет. Если многоугольник невыпуклый, то обе области невыпуклы.

Однако две области, о которых идёт речь, обладают во всех случаях неодинаковыми свойствами. Одна и только одна из этих областей содержит целиком некоторую прямую линию; точки этой области называются **внешними** по отношению к простому многоугольнику. Точки другого класса называются **внутренними** по отношению к многоугольнику.

В настоящей книге всюду, где не сделано особых оговорок, под словом многоугольник понимается простой многоугольник.

Замечание. Всякий непростой многоугольник делит плоскость на несколько областей, причём число этих областей более двух (черт. 5, 6, 7, 8 и 11).

В отличие от выпуклого многоугольника, диагонали невыпуклого многоугольника не все лежат внутри многоугольника. Однако можно доказать, что во всяком простом многоугольнике можно найти три последовательные вершины — обозначим их через A, B и C (черт. 13), — обладающие тем свойством, что диагональ AC целиком проходит внутри многоугольника. Такая диагональ разлагает внутреннюю область простого n-угольника на внутреннюю область треугольника ABC и внутреннюю область простого $(n-1)$-угольника (если не считать точек самой диагонали AC). Продолжая это рассуждение, мы придём к выводу, что *внутреннюю область всякого простого n-угольника можно разложить его диагоналями на $n-2$ треугольников.*

При рассмотрении звездчатых многоугольников также иногда применяется термин «выпуклый», однако, в смысле, отличном от принятого в § 6. Чтобы не употреблять один и тот же термин в двух различных смыслах, мы введём термин «локально-выпуклый многоугольник», приняв следующее определение.

Многоугольник $ABCDE\ldots$ называется локально-выпуклым, если из каждых трёх его последовательных сторон первая и третья лежат по одну сторону от прямой, частью которой служит вторая сторона.

Всякий выпуклый многоугольник будет и локально-выпуклым, но не обратно. Примером невыпуклых, но локально-выпуклых многоугольников могут служить многоугольники, изображённые на черт. 11, 26 и 28.

§ 8. Направленные отрезки и углы; ориентация плоскости.

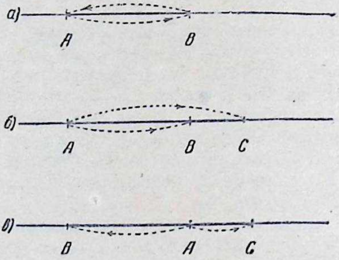
До сих пор, рассматривая отрезок, мы не обращали внимания на последовательность, в которой заданы его концы, т. е. не делали различия между отрезком AB и отрезком BA. В тех случаях, когда приходится обращать внимание на порядок, в котором задаются концы отрезка, т. е. отличать «начало» A отрезка AB от его «конца» B, мы называем отрезок направленным отрезком или вектором[1]).

---

[1]) Читателю, уже знакомому с векторным исчислением, мы укажем, что в настоящей книге рассматривается только алгебра коллинеарных векторов, т. е. действия сложения, вычитания, умножения и деления для векторов, лежащих на одной прямой. Желая подчеркнуть это обстоятельство, мы и сохраняем термин «направленный отрезок» наряду с термином «вектор».

Направленные отрезки мы будем обозначать чёрточкой над буквами: $\overline{AB}$ (употребляется также обозначение $\overrightarrow{AB}$). При этом на первом месте мы пишем начало, на втором — конец направленного отрезка.

Рассмотрим совокупность всех направленных отрезков, лежащих на одной прямой или, как говорят, совокупность всех коллинеарных векторов. Наше наглядное представление говорит нам, что направленные отрезки, лежащие на одной прямой, можно разбить на два класса (для описания этих двух классов мы обычно употребляем выражения «вправо» и «влево», «вверх» и «вниз» и т. д.).



Черт. 15.

Два класса направленных отрезков одной прямой обладают, очевидно, следующими свойствами (черт. 15):

а) *Два направленных отрезка* $\overline{AB}$ *и* $\overline{BA}$, *отличающиеся друг от друга только порядком конечных точек* (черт. 15,*а*), *принадлежат к различным классам.*

b) *Два направленных отрезка* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$ *с общим началом принадлежат к одному и тому же классу или к различным классам в зависимости от того, лежат ли их концы на одном луче, выходящем из точки* A (черт. 15,*б*), *или на различных лучах* (черт. 15,*в*).

Замечание. Говоря о двух классах направленных отрезков одной прямой, мы опирались исключительно на наши наглядные представления. Мы сделали это лишь для сокращения и упрощения изложения. Чтобы сделать изложение вполне строгим, достаточно доказать следующую теорему о направленных отрезках:

Все направленные отрезки, лежащие на одной прямой, можно, и притом единственным образом, разбить на два класса, обладающих свойствами a) *и* b).

Доказательство этой теоремы, основанное на введённых нами аксиомах, довольно громоздко и носит весьма формальный характер. Поэтому мы его опускаем.

Каждый из двух классов направленных отрезков, о которых мы говорили, определяет некоторое направление на прямой. О двух отрезках, принадлежащих одному классу, мы говорим, что они имеют одинаковое направление или что они направлены в одну сторону; о двух отрезках, принадлежащих различным классам, — что они имеют противоположные направления или что они направлены в противоположные стороны.

Выберем теперь произвольно одно из двух направлений на данной прямой и назовём его положительным направлением (противоположное направление придётся назвать отрицательным). Для этого достаточно, очевидно, задать какой-либо один направленный отрезок $\overline{AB}$ (в этом смысле и говорят «направление от A к B»). Отрезок $\overline{AB}$ и все отрезки, направленные с ним в одну сторону, называются при этом положительными, а отрезки, направленные в противоположную сторону, — отрицательными. Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется направленной (или, иначе, ориентированной) прямой или осью[1]).

Переходим к рассмотрению направленных углов. Угол $\angle hk$ или $\angle BAC$, отличный от развёрнутого, мы будем называть направленным и обозначать через $\angle \overline{hk}$ или $\angle \overline{BAC}$, если мы отличаем «начальную» сторону угла h или AB от его «конечной» стороны k или AC.

Если на плоскости даны несколько направленных углов, то мы можем сравнивать эти углы между собой по направлению.

---

[1]) В отношении употребления термина «ось» в геометрии нет должной последовательности. Так, в выражениях «ось проекций» и «координатная ось» (принятых в аналитической геометрии) слово ось обозначает обычно направленную прямую. В то же время в выражениях «ось симметрии» (см. § 36), «ось подобия» (см. § 63), «радикальная ось» (см. § 81) слово ось обозначает просто прямую линию.

Проще всего осуществить это с помощью следующих весьма наглядных, но не строгих соображений. Представим себе некоторого неподвижного «наблюдателя», расположенного вне плоскости и обращённого к ней лицом. Для такого наблюдателя все направленные углы на плоскости разбиваются на два класса: одни из них будут казаться ему направленными «против часовой стрелки», другие — «по часовой стрелке». Это и даёт возможность сравнения углов по направлению.

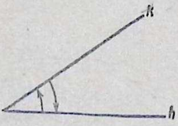
Углы одного из этих двух классов считаются имеющими положительное направление; углы другого класса — имеющими отрицательное направление. За положительное обычно принимается направление тех углов, которые представляются нашему наблюдателю направленными «против часовой стрелки». Этого условия мы будем придерживаться в настоящей книге.

Плоскость, на которой выбрано положительное направление углов, называется ориентированной.

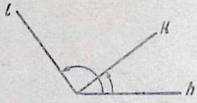
Два класса направленных углов обладают следующими свойствами:

а) *Два угла* $\angle \overline{hk}$ *и* $\angle \overline{kh}$ (черт. 16), *меньшие развёрнутого и отличающиеся друг от друга только порядком сторон, принадлежат к различным классам* (имеют противоположные направления).

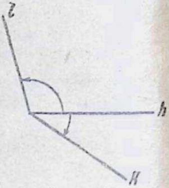
b) *Два угла* $\angle \overline{hk}$ и $\angle \overline{hl}$ (черт. 17 и 18) *с общей вершиной и общей начальной стороной* h, *оба меньшие развёрнутого, принадлежат одному и тому же классу или различным классам* (имеют одно и то же направление или противоположные направления) *в зависимости от того, лежат ли другие их стороны* k *и* l *в одной полуплоскости, выходящей из луча* h (черт. 17), *или в различных полуплоскостях* (черт. 18).



Черт. 16.



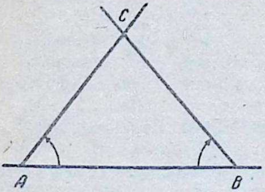
Черт. 17.



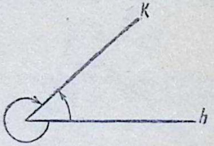
Черт. 18.

c) *Два угла* $\angle \overline{BAC}$ *и* $\angle \overline{ABC}$ (черт. 19), *оба меньшие развёрнутого, у которых первые стороны AB и BA имеют общий отрезок, а вторые — общую точку, принадлежат различным классам (имеют различные направления).*

d) *Два угла с общей вершиной и общими сторонами, заданными в одном и том же порядке, принадлежат различным классам, если один из них меньше (а следовательно, другой больше) развёрнутого* (черт. 20).



Черт. 19.



Черт. 20.

Пользуясь этими свойствами, можно сравнивать по направлению любые направленные углы на плоскости. А именно, свойства a) и b) дают возможность сравнивать всякие два угла с общей вершиной (хотя бы и не имеющих общей стороны). Присоединяя свойство c), мы получаем возможность сравнения всех углов, меньших развёрнутого. Наконец, свойство d) позволяет распространить сравнение углов по направлению и на углы, бо́льшие развёрнутого.

Замечание. Для сравнения углов по направлению, мы обратились к «наблюдателю», находящемуся вне плоскости, лишь для сокращения и упрощения изложения. Чтобы сделать наше изложение вполне строгим, достаточно было бы, не выходя из плоскости и не прибегая к «наблюдателю» и «часовой стрелке», а опираясь только на введённые нами аксиомы и ранее доказанные предложения, доказать следующую теорему о направленных углах:

Множество всех направленных углов на плоскости, как меньших, так и бо́льших развёрнутого, можно единственным образом разбить на два класса, обладающих свойствами a) — d).

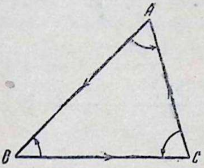
Углам одного из этих классов — безразлично какого — можно приписать положительное направление[1]).

---

[1]) По поводу свойств направленных углов см. [6], стр. 76—83.

Наконец, треугольник ABC будем называть ориентированным и обозначать его через $\overline{ABC}$, если его вершины заданы в определённом порядке A, B, C. Из свойств а) и с) направленных углов следует, что во всяком треугольнике $\overline{ABC}$ три угла $\angle \overline{BAC}$, $\angle \overline{CBA}$ и $\angle \overline{ACB}$ имеют одинаковое направление (черт. 21).

Пользуясь этим свойством углов ориентированного треугольника, можно разбить все ориентированные треугольники на два класса. Если все три угла $\angle \overline{BAC}$, $\angle \overline{CBA}$ и $\angle \overline{ACB}$ ориентированного треугольника $\overline{ABC}$ имеют положительное направление, то говорят, что треугольник имеет положительную ориентацию; обходя вершины треугольника в порядке A, B, C и опять A, мы обходим треугольник положительной ориентации против часовой стрелки (черт. 21). Если те же углы имеют отрицательное направление, то говорят, что треугольник имеет отрицательную ориентацию; обходя вершины треугольника в порядке A, B, C и опять A, мы обходим треугольник отрицательной ориентации по часовой стрелке.



Черт. 21.

Два класса ориентированных треугольников обладают следующими свойствами:

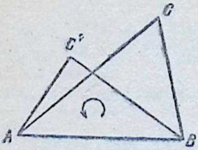
а) Три треугольника $\overline{ABC}$, $\overline{BCA}$ и $\overline{CAB}$ (вершины переставляются в круговом порядке) принадлежат одному классу.

b) Два треугольника $\overline{ABC}$ и $\overline{BAC}$ (переставлены две вершины) принадлежат различным классам.

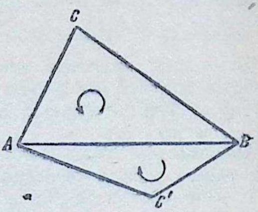
с) Если две вершины A и B треугольника ABC совпадают с двумя вершинами треугольника ABC', то треугольники принадлежат одному классу или различным классам в зависимости от того, лежат ли точки C и C' по одну сторону (черт. 22), или по разные стороны (черт. 23) от прямой AB.

Замечание. С помощью теоремы о направленных углах можно совершенно строго доказать следующую теорему, лежащую в основе учения об ориентированных треугольниках.

Множество всех ориентированных треугольников на плоскости можно единственным образом разбить на два класса, обладающих свойствами а) — с).



Черт. 22.



Черт. 23.

Можно было бы рассматривать также ориентированные многоугольники — выпуклые или вообще простые. На звездчатые многоугольники произвольного вида понятие ориентации не распространяется.

§ 9. Равенство отрезков и углов.

К числу общих понятий математики принадлежит понятие **равенства**. Важно заметить, что этот термин имеет в применении к различным объектам различное содержание. Так, понятия «равенство рациональных чисел», «равенство комплексных чисел» и «равенство отрезков» имеют неодинаковый смысл. В тех случаях, когда речь идёт о геометрическом равенстве отрезков, углов, треугольников или других фигур, вместо выражений «равный» и «равенство» часто применяются термины «конгруэнтный» и «конгруэнтность». Тем самым подчёркивается отличие геометрического равенства от равенства в других смыслах слова. Мы будем, однако, следуя обычному словоупотреблению, пользоваться безразлично и выражением «равный» и выражением «конгруэнтный». Для обозначения конгруэнтности иногда предлагались знаки, отличные от обычного знака равенства (например $\cong$ или $\equiv$). Мы будем обозначать конгруэнтность обычным знаком $=$.

Откладывая изучение конгруэнтности треугольников и других более сложных фигур до следующей главы, ограничимся рассмотрением здесь равенства отрезков и углов.

Так как отрезок AB можно безразлично обозначать через AB или BA, то равенство отрезков AB и $A'B'$ можно записать безразлично в одной из следующих четырёх форм:

$$AB=A'B';\ BA=A'B';\ AB=B'A';\ BA=B'A'.$$

Аналогичное замечание имеет место и для углов.

Основные свойства равных отрезков и равных углов мы выразим в виде следующих пяти аксиом («аксиомы конгруэнтности»).

Аксиома 4a. *Равенство отрезков и углов обладает следующими тремя свойствами:*

1) рефлективностью: *всякий отрезок (угол) конгруэнтен самому себе;*

2) симметричностью: *если первый отрезок (угол) конгруэнтен второму, то и второй конгруэнтен первому;*

3) транзитивностью: *если первый отрезок (угол) конгруэнтен второму, а второй конгруэнтен третьему, то и первый отрезок (угол) конгруэнтен третьему.*

Основываясь на этой аксиоме, мы имеем возможность (и обычно так и делаем) не только говорить о том, что один отрезок (угол) конгруэнтен другому, но и пользоваться понятием двух, трёх и вообще нескольких равных между собой отрезков (углов).

Аксиома 4b. *Пусть точка C лежит на прямой AB между точками A и B, а точка C' — на прямой $A'B'$ между точками A' и B'. Если при этом $AC=A'C'$ и $BC=B'C'$, то и $AB=A'B'$. Если при том же условии $AB=A'B'$ и $AC=A'C'$, то и $CB=C'B'$.*

Аксиома 4c. *Пусть луч l лежит между сторонами h и k угла $\angle hk$*[1]*, а луч l' — между сторонами h' и k' угла $\angle h'k'$. Если при этом $\angle hl=\angle h'l'$ и $\angle lk=\angle l'k'$, то и $\angle hk=\angle h'k'$; если при том же условии $\angle hk=\angle h'k'$ и $\angle hl=\angle h'l'$, то и $\angle kl=\angle k'l'$.*

Аксиома 4d. *Пусть AB — некоторый отрезок, и h' — луч, выходящий из точки A'; на луче h' существует одна и только одна такая точка B', что отрезок AB конгруэнтен $A'B'$.*

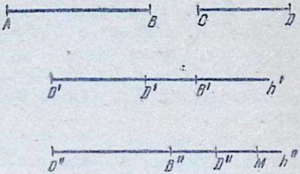
---

[1] Понятие «луч лежит между двумя другими» было введено в конце § 5.

Аксиома 4e. *Пусть* $\angle hk$ *— некоторый угол,* h' *— луч, выходящий из точки* O', *и* η' *— полуплоскость, выходящая из луча* h'; *в полуплоскости* η' *существует один и только один такой луч* k', *выходящий из точки* O', *что* $\angle hk$ *конгруэнтен* $\angle h'k'$.

Замечание. Из этих пяти аксиом первая (аксиома 4a) имеет наиболее общий характер и выражает общие свойства всякого равенства. Следующие две аксиомы (аксиомы 4b и 4c) также достаточно широки: аналогичная аксиома имеет место во всех тех случаях, когда в данном множестве объектов наряду с понятием равенства применимо (в каком-либо смысле) понятие «сложения». Наконец, последние две аксиомы (аксиомы 4d и 4e) выражают уже специфические свойства отрезков и углов.

При изложении элементарной геометрии мы очень часто употребляем выражения такого типа: «отложим от точки A' на луче h' отрезок, равный AB» или «построим в полуплоскости η' при луче h' угол $\angle h'k'$, равный $\angle hk$». В тех случаях, когда речь не идёт о построении с помощью тех или иных инструментов, эти выражения обозначают как раз ссылку на аксиому 4d или 4e.



Черт. 24.

Аксиомы 4b и 4d дают возможность установить понятия «больше» и «меньше» для отрезков, аксиомы 4c и 4e — установить те же понятия для углов. Пусть даны два отрезка AB и CD (черт. 24). На произвольном луче h', выходящем из какой-либо точки O', существуют такие точки B' и D', что $AB = O'B'$ и $CD = O'D'$. Если при этом точка D' лежит между O' и B', то мы скажем, что отрезок AB больше CD, а отрезок CD меньше AB, и запишем это так: $AB > CD$ или $CD < AB$. Если при том же условии точка B' будет лежать между O' и D', то мы скажем аналогично, что CD больше AB, а отрезок AB меньше CD. При этом возникнет, однако, следующее существенное затруднение. Вместо луча h', выходящего из точки O', можно воспользоваться любым другим лучом h'', выходящим из какой-либо точки O'', и рассмотреть такие точки B'' и D'', что $AB = O''B''$ и $CD = O''D''$. Не может ли случиться, что точка D' будет лежать между O' и B', а точка B'' — между O'' и D''? Если бы это случилось, то к отрезкам AB и CD понятия «больше» и «меньше» были бы неприложимы. Невозможность такого положения вещей мы докажем теперь в виде особой теоремы.

Теорема 9. *Из двух неравных отрезков всегда один и только один больше другого.*

Доказательство. Пусть для отрезков AB и CD теорема неверна. В таком случае существуют два луча h' и h'', выходящих из точек O' и O'' (черт. 24), и на них такие точки B', D' и B'', D'', что точка D' лежит между O' и B', и точка B'' — между O'' и D'', причём $AB = O'B' = O''B''$ и $CD = O'D' = O''D''$.

В силу аксиомы 4d на луче h'' найдётся такая точка M, что $D'B' = D''M$ и точка D'' лежит между O'' и M. При этом будет иметь место следующее: точка D' лежит между O' и B', точка D'' — между O'' и M; $O'D' = CD = O''D''$; $D'B' = D''M$. В силу аксиомы 4b отсюда вытекает, что и $O'B' = O''M$. Равенства $O'B' = O''M$ и $O'B' = AB = O''B''$ показывают, что на луче h'' существуют две различные точки B'' и M, для которых $O'B' = O''B'' = O''M$, что противоречит аксиоме 4d. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из определения понятий «больше» и «меньше» можно вывести следующее основное свойство этих понятий.

Теорема 10. *Если первый отрезок больше второго, а второй больше третьего, то и первый отрезок больше третьего.*

Аналогичные свойства имеют место и для углов.

Аксиомы конгруэнтности дают далее возможность определить понятия сложения и вычитания для отрезков и для углов и показать, что эти действия над отрезками обладают обычными свойствами арифметического сложения и вычитания. Из понятия сложения отрезков (углов) вытекает также понятие об умножении отрезка (угла) на произвольное натуральное число.

Чтобы сложение двух углов (и умножение угла на натуральное число) было всегда выполнимо, понятие угла, которым мы пользовались, должно быть расширено.

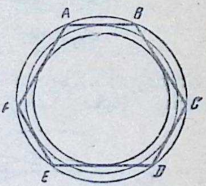
Отметим в заключение, что для направленных отрезков одной прямой $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ равенство $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ обозначает равенство $AB=A'B'$ и совпадение направлений обоих отрезков.

Аналогичный смысл имеет равенство направленных углов.

§ 10. Треугольники и многоугольники частного вида.

Введение понятия равных отрезков и равных углов позволяет выделить некоторые специальные типы треугольников и многоугольников.

Треугольник, имеющий две равные стороны, называется *равнобедренным*; равные стороны называются *боковыми сторонами*, третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника. Существование равнобедренных треугольников вытекает из аксиомы 4d.



Черт. 25.

Треугольник, имеющий три равные стороны, называется *равносторонним*. Существование равносторонних треугольников не вытекает из предыдущего и будет доказано далее (§ 16).

Выпуклый многоугольник называется *правильным многоугольником*, если все его стороны равны и все углы равны.

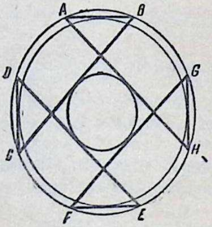
Аналогично, локально-выпуклый (§ 7) звездчатый многоугольник называется *звездчатым правильным многоугольником*, если все его стороны равны и все его углы равны. Примером может служить звездчатый правильный пятиугольник, изображённый на черт. 11 (стр. 27).

К вопросу о существовании правильных многоугольников с произвольным числом сторон мы вернёмся далее (§ 50).

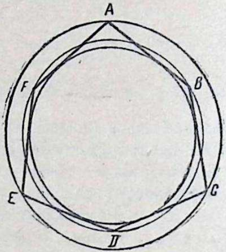
Понятие правильного многоугольника допускает следующие обобщения.

Выпуклый многоугольник с чётным числом сторон называется *равноугольно-полуправильным*, если его стороны, взятые через одну, равны и все его углы равны (примером может служить шестиугольник, изображённый на черт. 25).

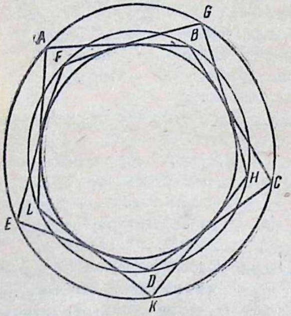
Локально-выпуклый звездчатый многоугольник с чётным числом сторон называется звездчатым равноугольно-полуправильным многоугольником, если его стороны, взятые через одну, равны и все его углы равны (пример: восьмиугольник на черт. 26).



Черт. 26.



Черт. 27.



Черт. 28.

Аналогично определяется равносторонне-полуправильный многоугольник, выпуклый или звездчатый: число вершин должно быть чётным, все стороны равны, углы равны через один; звездчатый многоугольник предполагается при этом локально-выпуклым (примеры: шестиугольник черт. 27, десятиугольник черт. 28).

Понятия равноугольно- и равносторонне-полуправильных многоугольников находят применение, главным образом, в стереометрии.

ГЛАВА II.

РАВЕНСТВО ФИГУР. ОКРУЖНОСТЬ.

§ 11. Основные признаки равенства треугольников.

От рассмотрения равенства отрезков и углов (§ 9) переходим теперь к рассмотрению равенства треугольников. Два треугольника называются конгруэнтными или равными, если стороны и углы обоих треугольников соответственно равны[1]). Равенство треугольников ABC и $A'B'C'$ можно записать безразлично в одной из следующих форм:

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'; \quad \triangle BAC = B'A'C'; \ldots$$

Мы будем записывать равенство треугольников таким образом, чтобы вершины равных углов занимали в этой записи одинаковые места. Таким образом, запись $\triangle ABC = \triangle LMN$ обозначает не только равенство треугольников ABC и LMN, но и показывает, что угол при A первого треугольника равен углу при L во втором треугольнике, что угол при B равен углу при M, а угол при C — углу при N, что сторона AB равна стороне LM и т. д. Записи $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ и $\triangle ABC = \triangle B'A'C'$ обозначают при этом различные факты. Такой способ записи обладает известными преимуществами.

Равенство двух треугольников предполагает выполнение шести условий — равенства трёх пар сторон и равенства трёх пар углов. Однако оказывается, что выполнение трёх из этих шести условий, определённым образом выбранных, влечёт за собой выполнение трёх остальных. Соответствующие теоремы, в которых это обстоятельство находит своё выражение, из-

---

[1]) При этом предполагается, что равные углы лежат против равных сторон.

вестны под общим названием признаков равенства треугольников. К рассмотрению этих теорем мы и переходим.

Обычный путь доказательства признаков равенства треугольников заключается в использовании возможности перемещения треугольников. Требование строгости изложения заставило бы нас предварительно проанализировать понятие перемещения, рассмотреть свойства перемещений и т. д. Чтобы не удлинять изложения, мы изберём здесь другой путь.

Мы выберем в качестве аксиомы следующее предложение («аксиома конгруэнтности треугольников»).

Аксиома 4f. *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и углы обоих треугольников, заключённые между этими сторонами, равны, то и остальные углы этих треугольников соответственно равны.*

Заметим, что в этой аксиоме мы не предполагаем, что вершины двух треугольников различны. Так, применяя эту аксиому к равнобедренному треугольнику ABC, в котором $AB=AC$, и к треугольнику ACB (совпадающему с первым), мы получим следующий результат: $AB=AC$; $AC=AB$; $\angle A=\angle A$; поэтому и $\angle ABC=\angle ACB$. Таким образом, доказана следующая теорема.

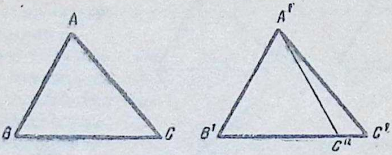
Теорема 11. *В равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны.*

Основываясь на аксиоме конгруэнтности треугольников (аксиома 4f), а также на ранее рассмотренных аксиомах и теоремах, можно доказать все признаки равенства треугольников, не прибегая к понятию перемещения фигур.

Теорема 12 («первый признак равенства треугольников»). *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и углы обоих треугольников, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 29) имеют место равенства $AB=A'B'$; $AC=A'C'$; $\angle A=\angle A'$. В силу аксиомы 4f будут равны и остальные углы: $\angle B=\angle B'$; $\angle C=\angle C'$, так что остаётся только доказать, что и $BC=B'C'$.

Это доказательство мы проведём от противного. Предположим, что BC не равно $B'C'$. В таком случае выберем на луче, выходящем из точки B' и проходящем через точку C', такую точку C'', что $BC=B'C''$. (Точка C'' может лежать на самой стороне $B'C'$ или на продолжении стороны $B'C'$ за точку C'.) Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C''$. Две стороны одного из них и заключённый между ними угол равны со-



Черт. 29.

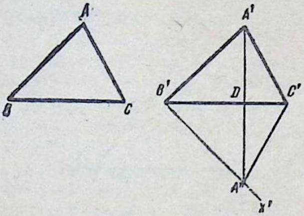
ответствующим элементам другого, а именно: $BA=B'A'$; $BC=B'C''$; $\angle B=\angle B'$. На основании аксиомы 4f мы должны иметь и равенство углов $\angle A=\angle B'A'C''$. Но по условию $\angle A=\angle B'A'C'$. Так как точки C' и C'' лежат на одном луче, выходящем из B', то лучи $A'C'$ и $A'C''$ лежат в одной полуплоскости, выходящей из прямой $B'A'$. Но в таком случае равенства $\angle A=\angle B'A'C'=\angle B'A'C''$ противоречат аксиоме 4e, по которой в данной полуплоскости существует только один луч $A'C'$, для которого выполняется равенство $\angle A=\angle A'B'C'$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 13 («второй признак равенства треугольников»). *Если одна из сторон одного треугольника равна одной из сторон второго и прилежащие к этим сторонам углы обоих треугольников соответственно равны, то треугольники равны.*

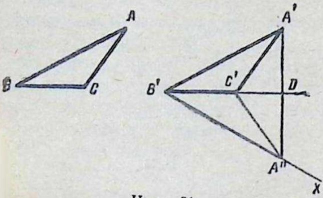
Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 29) имеют место равенства $AB=A'B'$; $\angle A=\angle A'$; $\angle B=\angle B'$. Если мы покажем, что и $BC=B'C'$, то равенство треугольников будет вытекать из теоремы 12.

Равенство $BC=B'C'$ мы опять докажем от противного. Предположим, что $BC\neq B'C'$. В таком случае пусть C'' — такая точка луча $B'C'$, что $BC=B'C''$. Как и при доказательстве теоремы 12, получим противоречивые равенства $\angle A=\angle B'A'C'=\angle B'A'C''$. Это противоречие и доказывает теорему.

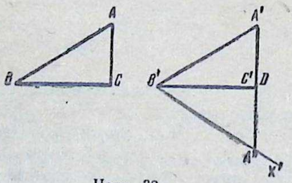
Применяя второй признак равенства треугольников к треугольнику ABC, в котором $\angle B = \angle C$, и к треугольнику ACB (совпадающему с первым), мы непосредственно получим обратную теорему о равнобедренном треугольнике:



Черт. 30.



Черт. 31.



Черт. 32.

Теорема 14. *Если два угла треугольника равны между собой, то треугольник — равнобедренный.*

Теорема 15 («третий признак равенства треугольников»). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, то треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 30, 31 и 32) имеют место равенства $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $BC = B'C'$. Прямая $B'C'$ ограничивает две полуплоскости, в одной из которых лежит точка A'. В другой полуплоскости выберем такой луч $B'X'$, чтобы $\angle C'B'X'$ был равен $\angle CBA$, и на луче $B'X'$ такую точку A'', чтобы отрезок $A''B'$ был равен каждому из отрезков AB и $A'B'$. К треугольникам ABC и $A''B'C'$ можно применить первый признак равенства (теорема 12), из которого следует, что $AC = A''C' = A'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A''C'$.

Точки A' и A'' лежат по разные стороны от прямой $B'C'$. Следовательно, отрезок $A'A''$ имеет с прямой $B'C'$ общую точку D. Точка D может лежать на самой стороне $B'C'$ (черт. 30), может лежать на продолжении стороны $B'C'$, скажем за точку C' (черт. 31); наконец, точка D может совпадать с одним из концов стороны $B'C'$, скажем с точкой C' (черт. 32)[1]).

Начнём с последнего случая. В этом случае точка C' лежит на прямой $A'A''$. В равнобедренном треугольнике $B'A'A''$ углы, лежащие против равных сторон $B'A'$ и $B'A''$, равны, т. е. $\angle B'A''C' = \angle B'A'C'$. Так как $\angle BAC = \angle B'A''C'$, то и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Следовательно, треугольники ABC и $A'B'C'$ равны по первому признаку.

В двух других случаях (черт. 30 и 31) мы имеем два равнобедренных треугольника $B'A'A''$ и $C'A'A''$; из этих треугольников находим, что $\angle B'A''A' = \angle B'A'A''$ и $\angle C'A''A' = \angle C'A'A''$. Из этих двух равенств вытекает в обоих случаях (с помощью аксиомы 4c), что и $\angle B'A''C' = \angle B'A'C'$. Так как, кроме того, $\angle BAC = \angle B'A''C'$, то и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, и треугольники ABC и $A'B'C'$ равны по первому признаку.

§ 12. Дальнейшие теоремы о равенстве углов и треугольников.

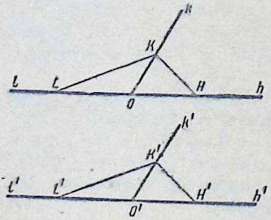
Два угла $\angle hk$ и $\angle kl$ называются смежными, если они имеют общую сторону k и другие их стороны составляют продолжение одна другой. Два угла $\angle hk$ и $\angle h_1k_1$ называются вертикальными, если стороны h_1 и k_1 одного из них представляют продолжения сторон h и k другого. Основные свойства смежных и вертикальных углов можно сформулировать следующим образом.

Теорема 16. *Если угол $\angle hk$ равен углу $\angle h'k'$, то и угол $\angle kl$, смежный с $\angle hk$, равен углу $\angle k'l'$, смежному с $\angle h'k'$.*

---

[1]) Когда мы в школьном изложении ограничиваемся одним первым случаем (черт. 30), мы молчаливо принимаем за очевидное следующее обстоятельство: если BC — наибольшая из сторон первого треугольника, то точка D лежит на самой стороне $B'C'$. Однако доказательство этого положения очень не просто.

Доказательство. Выберем на лучах h, k, l, h', k' и l' по точке H, K, L, H', K' и L', так, чтобы имели место равенства $OH = O'H'$; $OK = O'K'$; $OL = O'L'$, где O и O' — вершины углов $\angle hk$ и $\angle h'k'$ (черт. 33). При этом на основании аксиомы 4b будем иметь и $HL = H'L'$. Треугольники OHK и $O'H'K'$ равны по первому признаку равенства, откуда $\angle OHK = \angle O'H'K'$; $HK = H'K'$. Треугольники HKL и $H'K'L'$ равны также по первому признаку равенства, откуда $\angle OLK = \angle O'L'K'$; $KL = K'L'$. Треугольники OKL и $O'K'L'$ будут равны по первому признаку равенства, откуда и вытекает искомое равенство $\angle KOL = \angle K'O'L'$.



Черт. 33.

Следствия. 1. *Вертикальные углы между собою равны.*

Действительно, так как угол $\angle k_1h$ (черт. 1 на стр. 17) равен углу $\angle hk_1$ (по аксиоме 4a), то и угол $\angle hk$, смежный $\angle k_1h$, равен углу $\angle h_1k_1$, смежному с $\angle hk_1$.

2. *Все развёрнутые углы равны между собой.*

Действительно, пусть $\angle hl$ и $\angle h'l'$ — развёрнутые углы черт. 33). Рассмотрим произвольный луч k, выходящий из вершины $\angle hl$, и такой луч k', выходящий из вершины $\angle h'l'$, что $\angle hk = \angle h'k'$. По доказанной теореме будем иметь $\angle kl = \angle k'l'$, а по аксиоме 4c и $\angle hl = \angle h'l'$.

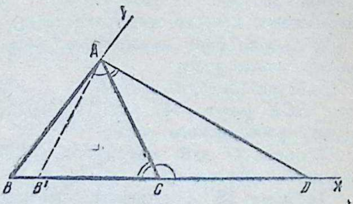
Внешним углом треугольника называется угол, смежный с одним из углов треугольника. Доказанное свойство смежных углов позволяет следующим образом доказать теорему о внешнем угле треугольника.

Теорема 17. *Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного.*

Доказательство. Покажем, что внешний угол $\angle ACX$ треугольника ABC больше не смежного с ним угла $\angle BAC$ того же треугольника (черт. 34).

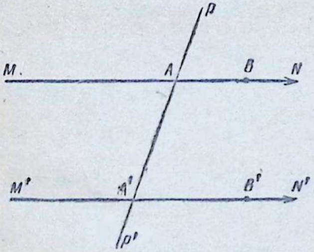
Доказательство будем вести от противного. Предположим сначала, что внешний угол $\angle ACX$ равен $\angle BAC$. На луче

CX существует такая точка D, что $AB = CD$. К треугольникам ABC и CDA применима аксиома 4f равенства треугольников. Из этой аксиомы вытекает, что $\angle ACB = \angle CAD$. В то же время по теореме 16 из равенства $\angle BAC = \angle ACX$ следует, что и $\angle ACB = \angle CAY$, где AY — продолжение AB за точку A. Так как лучи AD и AY различны и лежат в одной и той же полуплоскости, выходящей из прямой AC (а именно, в той полуплоскости, в которой не лежит точка B), то равенства $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle ACB = \angle CAY$ противоречат аксиоме 4e. Таким образом, внешний угол не может быть равен внутреннему, с ним не смежному.



Черт. 34.

Предположим теперь, что внешний угол $\angle ACX$ меньше $\angle BAC$. Тогда существует такой луч AB', выходящий из точки A и лежащий с лучом AB по одну сторону от прямой AC, что $\angle ACX = \angle CAB'$. Этот луч проходит внутри $\angle CAB$ и потому пересекает (по теореме 7, стр. 22) сторону BC данного треугольника ABC в некоторой точке B'. При этом в треугольнике $AB'C$ внешний угол $\angle ACX$ оказывается равным $\angle B'AC$, что невозможно. Итак, внешний угол треугольника не может быть равен внутреннему, с ним не смежному, не может быть меньше его и потому необходимо больше его.



Черт. 35.

Следствия. 1. *Если две прямые MN и $M'N'$* (черт. 35) *образуют с некоторой секущей AA' равные углы $\angle MAA'$ и $\angle N'A'A$, то эти прямые не пересекаются.*

Так как существование двух прямых MN и $M'N'$, образующих с данной прямой AA' такие равные углы, непосредственно вытекает из аксиомы 4е, то тем самым доказано существование непересекающихся прямых.

2. *Сумма двух внутренних углов треугольника меньше развёрнутого угла.*

Действительно, из $\angle BAC < \angle ACX$ и $\angle BCA + \angle ACX = \angle BCX$ (черт. 34) следует, что сумма $\angle BAC + \angle BCA$ меньше развёрнутого угла.

Теорема 17 даёт возможность доказать следующий признак равенства треугольников.

Теорема 18 («четвёртый признак равенства треугольников»). *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого и сторона первого треугольника, противолежащая одному из этих углов, равна соответственной стороне второго, то треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 29, стр. 43) имеют место равенства $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ и $AB = A'B'$. Если мы докажем, что и $BC = B'C'$, то треугольники будут равны по первому признаку равенства.

Доказательство равенства $BC = B'C'$ проведём от противого. Предположим, что BC не равно $B'C'$, и допустим, для пределённости, что $BC < B'C'$ (это допущение, очевидно, е нарушает общности).

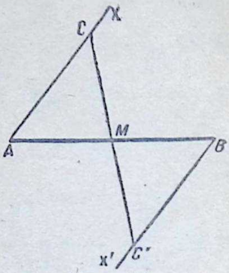
В таком случае выберем на отрезке $B'C'$ такую точку C'', что $BC = B'C''$. В треугольниках ABC и $A'B'C''$ имеют место равенства $AB = A'B'$; $BC = B'C''$; $\angle B = \angle B'$. Отсюда в силу аксиомы 4f вытекает, что и $\angle C = \angle A'C''B'$. Но по условию $\angle C = \angle A'C'B'$. Из этих двух равенств следует, что внешний угол $\angle A'C''B'$ треугольника $A'C'C''$ равен внутреннему углу $\angle A'C'B'$, с ним не смежному. Это противоречит теореме 17. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 19. *На всяком отрезке существует точка, делящая этот отрезок пополам.*

Доказательство. Пусть AB — данный отрезок. Покажем, что на этом отрезке существует такая точка M, что $AM = BM$ (черт. 36).

С этой целью рассмотрим произвольный луч AX, выходящий из точки A, и такой луч BX', выходящий из точки B, что $\angle BAX = \angle ABX'$ и лучи AX и BX' лежат по разные стороны от прямой AB. Пусть C — произвольная точка луча AX, и C' — такая точка луча BX', что $AC = BC'$. Так как точки C и C' лежат по разные стороны от AB, то отрезок CC' имеет с прямой AB общую точку M.

Прямые AX и BX' не пересекаются (теорема 17, следствие 1). Поэтому точки B и C', а следовательно, и точка M, лежащая между C и C', лежат по одну сторону от прямой AX. Отсюда вытекает, что точка A не лежит между M и B. По аналогичной причине и точка B не лежит между M и A. Следовательно, точка M есть одна из точек отрезка AB.



Черт. 36.

При этом углы $\angle AMC$ и $\angle BMC'$ равны как вертикальные, и треугольники AMC и BMC' равны по четвёртому признаку равенства (теорема 18). Из равенства этих треугольников и вытекает, что $AM = BM$.

Легко видеть, что точка M — середина отрезка AB — единственная.

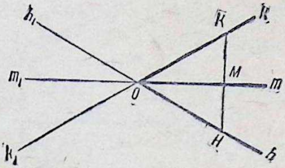
Теорема 20. *Внутри всякого угла, отличного от развёрнутого, существует луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам.*

Доказательство. Пусть $\angle hk$ — данный угол. Покажем, что существует такой луч m, что $\angle hm = \angle km$ (черт. 37).

С этой целью обозначим через H произвольную точку луча h и через K такую точку луча k, что $OH = OK$, где O — вершина угла. Если M — середина отрезка HK (теорема 19), то луч OM и будет искомым лучом m. Действительно, равенство $\angle hm = \angle km$ или $\angle HOM = \angle KOM$ вытекает из равенства треугольников HOM и KOM, имеющих три пары соответственно равных сторон.

Обратно, если m — некоторый луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам, и M — точка пересечения этого луча с отрезком HK, то треугольники OHM и OKM равны по первому признаку равенства (сторона OM — общая;

$OH = OK$; $\angle HOM = \angle KOM$), и потому $HM = KM$. Таким образом, существует единственный луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам.



Черт. 37.

Луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам, называется биссектрисой угла.

Отметим следующее свойство биссектрис вертикальных углов.

Теорема 21. *Биссектрисы двух вертикальных углов образуют одну прямую.*

Доказательство. Пусть m — биссектриса угла $\angle hk$ (черт. 37); h_1, k_1 и m_1 — продолжения лучей h, k и m за вершину угла. Так как $\angle hm = \angle mk$ и $\angle hm = \angle h_1m_1$; $\angle mk = \angle m_1k_1$ (как вертикальные), то и $\angle h_1m_1 = \angle m_1k_1$. Таким образом, m_1 есть биссектриса угла $\angle h_1k_1$.

§ 13. Неравенства, связывающие стороны и углы треугольника.

В предыдущих параграфах мы рассмотрели ряд теорем, в которых говорилось (за исключением теоремы 17 о внешнем угле треугольника) о равенстве углов или треугольников. Переходим к теоремам, содержащим те или иные утверждения о неравенстве отрезков или углов.

Теорема 22. *Во всяком треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.*

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC имеет место неравенство $AB > AC$. Покажем, что при этом и $\angle C > \angle B$ (черт. 38).

Так как отрезок AB больше AC, то на отрезке AB существует такая точка D, что $AC = AD$. При этом треугольник ACD будет равнобедренным, так что

$$\angle ACD = \angle ADC. \qquad (1)$$

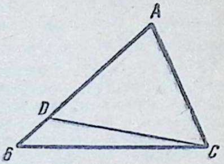
Далее, так как точка D лежит на отрезке AB, то луч CD лежит внутри $\angle ACB$, и значит

$$\angle ACB > \angle ACD. \qquad (2)$$

В силу того обстоятельства, что точка D лежит на отрезке AB, угол $\angle ADC$ будет внешним углом треугольника BCD и потому

$$\angle ADC > \angle CBD. \qquad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) и показывают, что $\angle ACB > \angle ABC$.

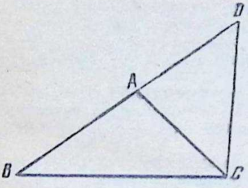


Черт. 38.

Следствие. *Во всяком треугольнике против большего угла лежит и большая сторона.*

Действительно, пусть в треугольнике ABC имеет место неравенство $\angle C > \angle B$. Если бы было $AB = AC$, то мы имели бы и $\angle C = \angle B$ (теорема 11); если бы было $AB < AC$, то мы имели бы и $\angle C < \angle B$ (теорема 22). Следовательно, $AB > AC$.

Теорема 23. *Во всяком треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон* 1).



Черт. 39.

Доказательство. Покажем, что в треугольнике ABC сумма отрезков $AB + AC$ больше BC (черт. 39). Для этого рассмотрим на продолжении отрезка AB за точку A такую точку D, что $AC = AD$. При этом в равнобедренном треугольнике ACD будем иметь $\angle ADC = \angle ACD$. Но так как точка A лежит между B и D, то луч CA лежит внутри угла $\angle BCD$ и потому $\angle ACD < \angle BCD$. Таким образом, в треугольнике BCD имеет место неравенство $\angle BDC < \angle BCD$ и, следовательно, $BC < BD$ или $BC < AB + AC$.

---

1) Напомним, что о сумме и разности отрезков мы говорили в § 9.

Следствия. 1. *Во всяком треугольнике каждая сторона меньше разности двух других сторон.*

Действительно, пусть для определённости $AB > AC$. В таком случае из неравенства $AB < BC + AC$ следует, что $BC > AB - AC$.

2. *Для любых трёх точек A, B и C имеют место неравенства* $|AC - BC| \leqslant AB < AC + BC$, *где через* $|AC - BC|$ *обозначена разность отрезков AC и BC независимо от того, который из них больше другого.*

Замечание. Теорема 23 и следствие 1 из неё устанавливают шесть неравенств, связывающих стороны треугольника. Если не делать никаких предположений о том, какая из сторон a, b и c треугольника больше и какая меньше другой, и обозначать через $|b - c|$ разность отрезков b и c независимо от того, который из них больше другого, то эти шесть неравенств можно представить так:

$$a < b + c; \quad b < c + a; \quad c < a + b;$$
$$a > |b - c|; \quad b > |c - a|; \quad c > |a - b|.$$

Существенно, что не все эти неравенства независимы. Так, следствие 1 из теоремы 23 показывает, что три неравенства, помещённых во второй строке, вытекают из неравенств, помещённых в первой строке. В то же время три неравенства первой строки, очевидно, независимы одно от другого.

Далее, два неравенства, записанных в одном столбце, независимы друг от друга и влекут за собой остальные четыре. Действительно, пусть известно, что $a < b + c$ и что $a > |b - c|$.

Если $b > c$, то из последнего неравенства следует, что $a > b - c$ или $b < c + a$; из $b > c$ следует также, что $c < a + b$.

Если же $c > b$, то из неравенства $a > |b - c|$ следует $a > c - b$, или, иначе, $c < a + b$, а непосредственно из $c > b$ — неравенство $b < a + c$.

Наконец, все шесть неравенств, о которых идёт речь, вытекают из системы неравенств $a \geqslant b \geqslant c$ и $a < b + c$. Действительно, из $a \geqslant b \geqslant c$ прямо вытекают неравенства $b < a + c$ и $c < a + b$, а из этих трёх — и остальные три.

Итак, независимые неравенства, связывающие стороны треугольника, могут быть выражены следующим образом:

a) *каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон;*

b) *какая-либо одна из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности;*

c) *наибольшая из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон*[1].

---

[1] Вопрос о независимых неравенствах имеет значение при отыскании достаточных условий существования треугольника с заданными сторонами.

Теорема 24. *Прямолинейный отрезок короче всякой ломаной, имеющей с ним общие концы.*

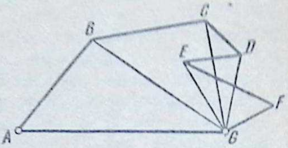
(Точнее говоря, прямолинейный отрезок меньше, чем сумма звеньев всякой ломаной, имеющей с ним общие концы.)

Доказательство. Пусть ломаная $ABCDEFG$ (черт. 40) имеет общие концы с отрезком AG. Рассмотрим отрезки BG, CG, DG и EG. На основании теоремы 23 будем иметь:

$$AG < AB + BG;$$
$$BG < BC + CG;$$
$$CG < CD + DG;$$
$$DG < DE + EG;$$
$$EG < EF + FG,$$

откуда

$$AG < ABG < ABCG < ABCDG < ABCDEG < ABCDEFG.$$



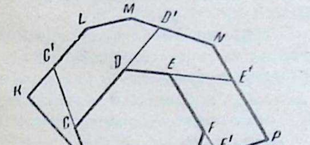
Черт. 40.

Доказательство остаётся тем же при любом числе звеньев ломаной.

Пусть теперь даны две простые ломаные линии с общими концами A и B. Одну из этих ломаных линий называют **объемлющей**, а другую — **объемлемой**, если вторая из них лежит (за исключением, конечно, её концов) внутри многоугольника, образованного первой ломаной и отрезком AB.

Теорема 25. *Из двух непересекающихся выпуклых ломаных с общими концами, расположенных по одну сторону от прямой, соединяющей их концы, объемлемая короче объемлющей* (точнее говоря, сумма звеньев объемлемой меньше суммы звеньев объемлющей).

Доказательство. Пусть $ACDEFB$ — объемлемая, $AKLMNPB$ — объемлющая ломаная (черт. 41). Обозначим через C', D', E' и F' точки пересечения продолжения звена AC за точку C, звена CD за точку D, звена DE за точку E



Черт. 41.

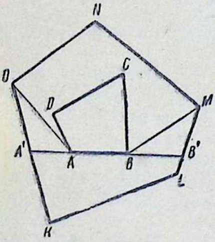
и звена EF за точку F с объемлющей ломаной. В таком случае, по теореме 24 имеем: $FB < FF' + F'B$; $EF' < EE'PF'$; $DE' < DD'NE'$; $CD' < CC'LMD'$; $AC' < AKC'$. Следовательно,

$$ACDEFB < ACDEF'B < ACDE'PB < ACD'NPB <$$
$$< AC'LMNPB < AKLMNPB.$$

Назовём периметром многоугольника (и, в частности, треугольника) отрезок, равный сумме всех его сторон. Доказанная теорема позволяет установить следующее свойство периметров выпуклых многоугольников.

Теорема 26. *Если каждая вершина одного из двух выпуклых многоугольников лежит внутри другого, то периметр первого многоугольника меньше периметра второго.*

Доказательство. Пусть выпуклый многоугольник $ABCD$ лежит внутри многоугольника $KLMNO$ (черт. 42). Обозначим через A' и B' точки пересечения прямой AB с внешним многоугольником. На основании теорем 24 и 25 имеем: $ADCB < AONMB < AA'ONMB'B$, откуда $AB + ADCB < A'B' + + A'ONMB'$. Но $A'B' < A'KLB'$, и потому $AB + ADCB < A'KLB' + + A'ONMB'$. Теорема доказана.



Черт. 42.

Пользуясь теоремой 22, можно доказать ещё один признак равенства треугольников.

Теорема 27 («пятый признак равенства треугольников»). *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и угол первого треугольника, лежащий против большей из этих сторон, равен соответствующему углу второго, то треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 29 на стр. 43) имеют место равенства $AB = = A'B'$; $AC = A'C'$; $\angle B = \angle B'$ и неравенство $AB < AC$ или, что то же, $A'B' < A'C'$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $BC = B'C'$.

Это доказательство мы проведём от противного. Предположим, что BC не равно $B'C'$, и допустим для определённости, что $BC < B'C'$. В таком случае выберем на отрезке $B'C'$ такую точку C'', что $BC = B'C''$. К треугольникам ABC и $A'B'C''$ применим первый признак равенства, из которого следует, что $AC = A'C''$ и потому $A'C' = A'C''$. В равнобедренном треугольнике $A'C'C''$ углы $\angle A'C'C''$ и $\angle A'C''C'$ равны. Далее, $\angle A'C''B' > \angle A'C'C''$, так как угол $\angle A'C''B'$ есть внешний угол треугольника $A'C'C''$, и $\angle A'C''C' > \angle A'B'C''$ как внешний угол треугольника $A'B'C''$. Итак $\angle A'C''B' > \angle A'C'C'' = \angle A'C''C' > \angle A'B'C''$. Отсюда следует (по теореме 22, следствие), что $A'B' > A'C''$ или (в силу $A'C' = A'C''$), что $A'B' > A'C'$.

Но это неравенство противоречит условию $A'B' < A'C'$. Теорема доказана.

§ 14. Перпендикулярные прямые; прямоугольные треугольники.

Угол называется прямым, если он равен своему смежному. Из этого определения вытекает, что угол, смежный с прямым, а также угол, вертикальный прямому, — также прямые. Таким образом, если один из четырёх углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, — прямой, то и остальные три угла также прямые. Прямые, образующие при пересечении четыре прямых угла, называются взаимно перпендикулярными (употребляется также выражение «прямая, перпендикулярная к отрезку»). Прямой угол обозначается буквой d[1].

Угол, меньший прямого, называется острым; угол, больший прямого, но меньший развёрнутого — тупым.

Существование прямого угла можно доказать. Оно вытекает, например, из тех рассуждений, которые были проведены при доказательстве теоремы 20 (черт. 37 на стр. 50). В самом деле, из равенства треугольников OHM и OKM следует, что каждый из равных смежных углов $\angle OMH$ и $\angle OMK$ — прямой.

Примером взаимно перпендикулярных прямых могут служить биссектрисы углов, образованных двумя пересекающимися пря-

---

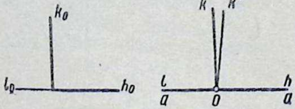
[1] d — начальная буква французского слова *droit* — прямой.

мыми. Доказательство их взаимной перпендикулярности предоставляем читателю.

Свойства прямых углов находят своё выражение в следующих теоремах.

Теорема 28. *Через данную точку, лежащую на данной прямой, проходит прямая, перпендикулярная к этой прямой, и притом единственная.*

Доказательство. Пусть O — точка, лежащая на данной прямой a (черт. 43), h и l — лучи прямой a, выходящие из точки O. Пусть $\angle h_0k_0$ — какой-либо прямой угол. Рассмотрим такой луч k, выходящий из O, что $\angle h_0k_0 = \angle hk$ (этот луч существует в силу аксиомы 4е). Покажем, что и $\angle hk$ — также прямой.



Черт. 43.

Мы будем иметь равенства $\angle h_0k_0 = \angle hk$ (по определению луча k); $\angle k_0l_0 = \angle kl$, где l_0 — продолжение луча h_0 за вершину угла (по теореме 16); $\angle h_0k_0 = \angle k_0l_0$ (так как $\angle h_0k_0$ — прямой). Из этих равенств вытекает, что $\angle hk = \angle kl$, так что $\angle hk$ — прямой.

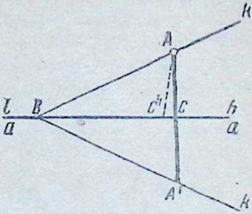
Допустим теперь, что и $\angle hk'$, где луч k' выходит из точки O и лежит по ту же сторону от прямой a, что и луч k, — также прямой. Предположим для определённости, что луч k' лежит внутри $\angle hk$. В таком случае мы имели бы, с одной стороны, $\angle hk' < \angle hk = \angle kl < \angle k'l$, а, с другой стороны, $\angle hk' = \angle k'l$. Полученное противоречие и доказывает единственность перпендикулярной прямой.

Следствие. *Все прямые углы равны между собой.*

Действительно, если бы прямые углы $\angle h_0k_0$ и $\angle hk$ (черт. 43) были бы не равны, то мы построили бы $\angle hk'$, равный $\angle h_0k_0$, и показали бы, как мы это только что делали, что $\angle hk'$ прямой. Мы получили бы два перпендикуляра к прямой a в точке O, что невозможно.

Теорема 29. *Через данную точку, лежащую вне данной прямой, проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом единственная.*

Доказательство. Пусть A — точка, лежащая вне данной прямой a (черт. 44). Обозначим через B произвольную точку прямой a, через h и l — лучи этой прямой, выходящие из точки B, через k — луч BA, через k' — такой луч, выходящий из точки B и лежащий с лучом k по разные стороны от прямой a, что $\angle hk = \angle hk'$ (и следовательно, $\angle kl = \angle k'l$ в силу теоремы 16); наконец, через A' обозначим такую точку луча k', что $AB = A'B$.



Черт. 44.

Так как лучи k и k' лежат по разные стороны от прямой a, то и точки A и A' лежат от этой прямой по разные стороны. Следовательно, отрезок AA' имеет с прямой a общую точку C. Если эта точка C совпадает с B, то $\angle hk$ будет прямым. Если же точка C лежит на одном из лучей h или l, то $\angle ABC = \angle A'BC$ (так как $\angle hk = \angle hk'$ и $\angle kl = \angle k'l$). К треугольникам ABC и $A'BC$ применима аксиома 4f, из которой следует, что $\angle ACB = \angle A'CB$. Это равенство показывает, что $\angle ACB$ — прямой.

Через точку A не может проходить другой прямой, перпендикулярной к a, так как все прямые углы между собою равны (теорема 28, следствие) и существование двух перпендикулярных прямых AC и AC' противоречило бы теореме 17.

Переходим к рассмотрению прямоугольных треугольников, т. е. треугольников, один из углов которых — прямой. Остальные два угла прямоугольного треугольника — острые (теорема 17). Стороны прямого угла называются катетами, сторона, лежащая против прямого угла, — гипотенузой. Применяя к прямоугольному треугольнику общие теоремы о треугольниках, мы получим ряд свойств прямоугольных треугольников. Перечислим эти свойства. Вместо их доказательств достаточно будет указать те общие теоремы, из которых данная теорема вытекает.

Теорема 30. *Если два катета одного прямоугольного треугольника равны двум катетам другого, то треугольники равны.* (Теорема 12.)

Теорема 31. *Если один из катетов первого прямоугольного треугольника равен одному из катетов второго и прилежащие к этим катетам острые углы обоих треугольников равны, то треугольники равны.* (Теорема 13.)

Теорема 32. *Если один из острых углов первого прямоугольного треугольника равен одному из острых углов второго и гипотенузы обоих треугольников равны, то треугольники равны.* (Теорема 18.)

Теорема 33. *Если один из острых углов первого прямоугольного треугольника равен одному из острых углов другого и катеты обоих треугольников, противолежащие этим углам, равны, то треугольники равны.* (Теорема 18.)

Теорема 34. *Во всяком прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы.* (Теорема 22, следствие.)

Теорема 35. *Если гипотенуза и один из катетов первого прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и одному из катетов второго, то треугольники равны.* (Теорема 27.)

Введя теперь понятие о наклонной и её проекции, мы непосредственно убеждаемся, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче наклонной, проведённой из той же точки к той же прямой (это лишь другая формулировка теоремы 34). Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, называется расстоянием от точки до прямой. Далее, две равные наклонные, проведённые из одной точки к одной и той же прямой, имеют равные проекции (теорема 35), и обратно (теорема 30). Наконец, как это делается в школьном курсе, можно доказать теоремы о неравных наклонных — прямую и обратную.

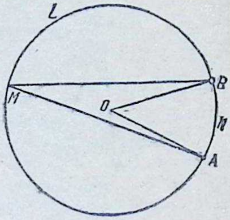
§ 15. Окружность; пересечение с прямой.

Окружностью называется совокупность всех таких точек, что отрезки, соединяющие их с некоторой точкой O, равны одному и тому же отрезку.

Точка O называется центром окружности; отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, называется радиусом окружности. Окружность с центром O и радиусом r обозначается часто через $O(r)$; если рассматривается только одна окружность с центром O, то её часто называют «окружностью O».

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**; прямая, проходящая через две точки окружности, — **секущей**. Хорда, проходящая через центр окружности (а иногда и секущая, проходящая через центр), называется её **диаметром**.

Угол между двумя радиусами окружности называется **центральным** углом; угол, образованный двумя хордами с общим концом, называется углом, вписанным в окружность, или короче, **вписанным** углом.



Черт. 45.

Две точки A и B окружности (черт. 45) делят все остальные точки окружности на два класса. Действительно, эти две точки A и B определяют центральный угол AOB; этот угол делит плоскость на две области (теорема 4). Точки окружности, лежащие в одной области, и образуют один класс.

Каждая из двух частей, на которые точки A и B делят окружность, называется дугой окружности или просто **дугой**; на черт. 45 имеем две дуги: ALB и ANB.

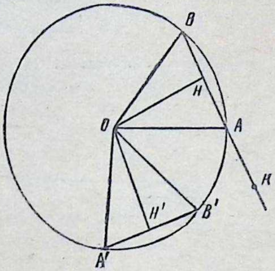
Если вершина M вписанного угла AMB лежит на одной из двух дуг ALB или ANB, на которые точки A и B делят окружность (на черт. 45 — на ALB), то говорят, что этот угол **опирается** на другую дугу (на черт. 45 — на ANB).

Точки, расстояние которых от центра окружности меньше радиуса (включая сюда и самый центр), называют **внутренними**, а точки, расстояние которых больше радиуса, — **внешними** относительно окружности.

Ряд свойств окружности вытекает более или менее непосредственно из теорем, рассмотренных в предыдущих параграфах. Перечислим некоторые из них, не останавливаясь на доказательствах там, где они известны из школьного курса.

Теорема 36. *Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит её пополам; обратно, прямая, соединяющая центр* *окружности с серединой хорды, перпендикулярна к последней* (черт. 46).

Теорема 37. *Две хорды окружности, равноудалённые от центра, равны; обратно, две равные хорды окружности равноудалены от центра* (черт. 46).



Черт. 46.

Теорема 38. *Если две хорды* AB *и* $A'B'$ *равны, то и соответствующие им центральные углы* AOB *и* $A'OB'$ *равны, и обратно* (черт. 46).

Перейдём теперь к вопросу о пересечении прямой с окружностью. Из предыдущего вытекают следующие теоремы.

Теорема 39. *Прямая, расстояние которой от центра окружности больше радиуса, не имеет с окружностью общих точек.*

Следует из теоремы 34.

Теорема 40. *Прямая, расстояние которой от центра окружности равно радиусу* (или, иначе говоря, прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку), *имеет с окружностью только одну общую точку.*

Также следует из теоремы 34.

Теорема 41. *Прямая, проходящая через точку окружности и не перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку, имеет с окружностью и вторую общую точку.*

Доказательство. Пусть A — общая точка окружности и прямой (черт. 46) и H — основание перпендикуляра из центра O на данную прямую. Точка H отлична от A. На продолжении отрезка AH за точку H существует такая точка B, что $HA = HB$. Эта точка B есть общая точка прямой и окружности, так как $OA = OB$ в силу равенства прямоугольных треугольников OAH и OBH.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности. Из теорем

40 и 41 следует, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания, и, обратно, что прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная к радиусу, является касательной.

Теорема 42. *Прямая не может иметь с окружностью более двух общих точек.*

Доказательство. Пусть прямая имеет с окружностью три общие точки A, B и C, и H — основание перпендикуляра из центра O окружности на эту прямую. Из равенств $OA = OB = OC$ следует (по теореме 35), что $HA = HB = HC$. Но на каждом из двух лучей данной прямой, выходящих из точки H, лежит только по одной точке, расстояние которой от точки O равно данному отрезку. Полученное противоречие доказывает теорему.

Чтобы закончить рассмотрение вопроса о пересечении прямой с окружностью, нам понадобится новая аксиома.

Аксиома 5. *Если один конец отрезка лежит внутри окружности, а другой — вне окружности, то отрезок имеет с окружностью общую точку* («первая аксиома окружности»).

С помощью этой аксиомы легко доказать теперь следующую теорему.

Теорема 43. *Прямая, расстояние которой от центра окружности меньше радиуса, имеет с окружностью две и только две общие точки.*

Доказательство. Если расстояние прямой от центра окружности меньше радиуса, то основание H перпендикуляра, опущенного из центра окружности на эту прямую (черт. 46), лежит внутри окружности. Отложив на данной прямой от точки H (в ту или другую сторону) отрезок HK, равный радиусу, получим точку K, лежащую вне окружности, так как $OK > HK$. В силу аксиомы 5 отрезок HK имеет с окружностью общую точку A. Существование второй общей точки следует из теоремы 41, а отсутствие других общих точек — из теоремы 42.

Итак, *прямая имеет с окружностью две общие точки, одну общую точку или не имеет с ней общих точек в зависимости от того, будет ли расстояние прямой от центра окружности меньше радиуса, равно радиусу или больше радиуса.*

Аксиома 5 позволяет также доказать, что окружность делит плоскость на две области. Одна из них состоит из всех внутренних точек и является выпуклой, другая состоит из всех внешних точек и невыпукла.

Область, внутренняя относительно окружности, называется иногда кругом[1]).

§ 16. Взаимное расположение двух окружностей.

Пусть $O(r)$ и $O'(r')$ — две данные окружности. Прямая, проходящая через центры обеих окружностей, называется линией центров.

Из свойств треугольников, рассмотренных в предыдущих параграфах, вытекают следующие теоремы.

Теорема 44. *Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы радиусов или меньше разности радиусов* (в частности, если две окружности имеют общий центр), *то окружности не имеют общих точек. В первом случае все точки каждой из двух окружностей лежат вне другой окружности; во втором — все точки окружности, имеющей больший радиус, лежат вне другой окружности, а все точки последней — внутри первой окружности.*

Доказательство. Пусть $OO' = d > r + r'$. Если M — какая-либо точка первой окружности, то в силу теоремы 23, следствие 2, имеем $MO' \geqslant OO' - OM$, т. е. $MO' > r'$. Аналогично для точек второй окружности.

Пусть теперь $r > r'$ и $d < r - r'$. Если M — какая-либо точка первой окружности $O(r)$, то $MO' > MO - OO'$, т. е. $MO' > r'$. Для точек M' второй окружности имеем $M'O < OO' + O'M'$, т. е. $M'O < r$.

Отсюда и следует, что обе окружности не имеют общих точек.

Теорема 45. *Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности радиусов, то окружности имеют одну и только одну общую точку, лежащую на одной прямой с их центрами. В первом случае все осталь-*

---

[1]) Впрочем, термин «круг» очень часто является синонимом окружности (сравнить хотя бы выражения «большой круг» и «малый круг» на шаре).

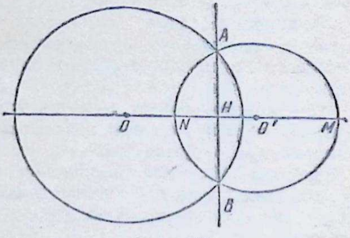
ные точки любой из двух окружностей лежат вне другой окружности; во втором — все остальные точки одной из окружностей лежат вне другой, а все остальные точки второй — внутри первой.

Доказательство. Пусть $d=r+r'$. На отрезке OO' существует такая точка A, что $OA=r$ и $O'A=r'$. Точка A будет общей точкой обеих окружностей. Для всех остальных точек справедливы те же рассуждения, что и при $d>r+r'$ (теорема 44).

Пусть теперь $r>r'$ и $d=r-r'$. На продолжении отрезка OO' за точку O' найдётся такая точка A, что $OA=r$ и $O'A=r'$. Точка A будет общей точкой обеих окружностей. Для всех остальных точек справедливы те же рассуждения, что и при $d<r-r'$ (теорема 44).

Отсюда и вытекает, что обе окружности не имеют других общих точек, кроме A.

Рассматриваемые здесь окружности имеют в единственной общей точке и общую касательную, перпендикулярную к линии центров. Поэтому говорят, что обе окружности касаются друг друга в общей точке. Касание обеих окружностей называется внешним в первом случае (когда $d=r+r'$), и внутренним — во втором (когда $d=|r-r'|$).



Черт. 47.

Теорема 46. *Если две окружности имеют общую точку, не лежащую на одной прямой с их центрами, то они имеют и ещё одну общую точку.*

Доказательство. Пусть прямая, проходящая через общую точку A обеих окружностей и перпендикулярная к OO', пересекает OO' в точке H (черт. 47). Возьмём на продолжении отрезка AH за точку H такую точку B, что $AH=HB$. В силу равенства прямоугольных треугольников OAH и OBH будем иметь $OA=OB$, а в силу равенства треугольников $O'AH$ и $O'BH$ будем иметь $O'A=O'B$. Точка B есть также общая точка обеих окружностей.

Теорема 47. *Две окружности не могут иметь более двух общих точек.*

Доказательство. Предположим, что две различные окружности с центрами O и O' имеют три общие точки A, B и C. Обозначим через H и K середины отрезков AB и AC. Из равенства треугольников OAH и OBH следует, что точка O лежит на прямой a, проходящей через точку H и перпендикулярной к AB. По аналогичной причине и точка O' лежит на той же прямой.

Таким же образом покажем, что точки O и O' лежат и на прямой b, проходящей через точку K и перпендикулярной к AC.

Прямые a и b не могут совпадать, так как иначе совпадали бы и точки H и K, а значит, и точки B и C. Поэтому прямые a и b не могут иметь более одной общей точки. Центры O и O' обеих окружностей совпадают, а значит, совпадают и самые окружности, что противоречит предположению.

Следствие. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, не может проходить более одной окружности.*

Чтобы закончить рассмотрение вопроса о пересечении двух окружностей, а именно, исследовать случай $|r-r'|<d<r+r'$, нам понадобится новая аксиома.

Аксиома 6. *Если один конец некоторой дуги лежит внутри окружности, а другой вне окружности, то дуга имеет с окружностью общую точку* («вторая аксиома окружности»).

С помощью этой аксиомы нетрудно доказать теперь следующую теорему, окончательно разрешающую вопрос о пересечении двух окружностей.

Теорема 48. *Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов, но больше их разности, то обе окружности имеют две и только две общие точки.*

Доказательство. Пусть M (черт. 47) — точка окружности O', лежащая на продолжении отрезка OO' за точку O'. Так как $OM=d+r'$ и $d>|r-r'|$, то $OM>r$, и точка M лежит вне окружности O. Пусть, далее, N — точка окружности O', лежащая на прямой OO' по ту же сторону от точки O', что и точка O. Так как $ON=|d-r'|$ и $d<r+r'$, то $ON<r$, и точка N лежит внутри окружности O. Одна из дуг, на которые точки M и N делят окружность O', имеет в силу

аксиомы 6 общую точку с окружностью O. Обе окружности имеют и ещё одну общую точку на основании теоремы 46, но не имеют дальнейших общих точек в силу теоремы 47.

Следствие. *Если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то существует треугольник, стороны которого соответственно конгруэнтны трём данным отрезкам.*

(Сравнить сказанное в § 13 о неравенствах, связывающих стороны треугольника.)

Действительно, если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то каждый из них и больше разности двух других. Пусть AB — один из трёх данных отрезков. Окружности с центрами в точках A и B и радиусами, равными соответственно двум другим данным отрезкам, имеют, по только что доказанной теореме, две общие точки C' и C''. Треугольник ABC' (а также и ABC'') обладает требуемым свойством.

Отсюда, в частности, вытекает и существование равностороннего треугольника.

§ 17. Построения с помощью циркуля и линейки.

Рассмотренные в предыдущих параграфах теоремы 39 — 48 о пересечении окружности с прямой и с окружностью являются основой для построений с помощью циркуля и линейки.

Во всякой геометрической задаче на построение требуется по каким-либо данным найти некоторые геометрические элементы (точку, прямую, окружность, треугольник и т. д.), удовлетворяющие тем или иным условиям. Однако содержание геометрической задачи на построение не исчерпывается указанием данных и формулировкой того, что требуется найти. Столь же важное значение имеет и указание (формулируемое явно или большей частью только подразумеваемое) на те средства, с помощью которых задача должна быть решена, на те инструменты, при помощи которых построение должно быть выполнено. В зависимости от того, какие инструменты имеются в виду, смысл одной и той же задачи коренным образом меняется. Так, задача «разделить на три равные части угол $\frac{2}{3}d$» решается непосредственно, если допускается пользование транспортиром.

Но та же задача становится вовсе неразрешимой, если допускается только пользование циркулем и линейкой.

В настоящей книге, всюду, где не оговорено противное, предполагается, что все построения должны быть выполнены с помощью циркуля и линейки. Это требование является общепринятым в элементарной геометрии.

Чтобы правильно осуществлять это требование, надо установить, что́ именно понимается под решением задачи с помощью циркуля и линейки.

Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки — значит свести её к выполнению точно определённого числа следующих построений:

a) проведение прямой линии через две известные точки;

b) определение точки пересечения двух известных прямых;

c) проведение окружности с известным центром и известным радиусом;

d) определение точек пересечения известной прямой и известной окружности (частным случаем этой задачи является откладывание отрезка, равного данному);

e) определение точек пересечения двух известных окружностей.

В этой формулировке под «известными» понимаются те точки, прямые и окружности, которые либо даны в самом условии задачи, либо уже определены на предыдущих этапах решения задачи, либо, наконец, выбраны произвольно (в соответствии с аксиомами 1b и 1c). В построениях b), d) и e) предполагается оговорка «если эти точки существуют». Вопрос о существовании общих точек у окружности и прямой полностью разрешён теоремами 39 — 43, у двух окружностей — теоремами 44 — 48. Вопрос о существовании или отсутствии общей точки у двух прямых лишь отчасти разрешается теоремой 17, следствие 1; полностью этот вопрос получит своё решение лишь в дальнейшем изложении (в теории параллельных прямых).

Отметим ещё, что наше определение решения задачи на построение с помощью циркуля и линейки существенно предполагает конечность числа выполняемых построений.

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что читатель умеет выполнять с помощью циркуля и линейки следующие «основные построения»; способы решения некоторых из этих задач приводятся в школьных учебниках геометрии; решение остальных мы предоставляем читателю.

Построение 1. Построить треугольник по трём сторонам.

Чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно (в силу теорем 23 и 48), чтобы одна из данных сторон была меньше суммы двух других, но больше их разности. Необходимость этого условия вытекает из теоремы 23 и следствия 1 из неё. Достаточность вытекает из теоремы 48.

Это условие существования треугольника можно высказать ещё и в других формах, а именно, необходимо и достаточно, чтобы каждая из трёх данных сторон была меньше суммы двух других, или же, чтобы наибольшая из трёх данных сторон была меньше суммы двух других (сравнить § 13).

Построение 2. Построить угол, равный данному углу и имеющий своей вершиной данную точку O, а одной из своих сторон — данный луч, выходящий из точки O.

Построение 3. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Построение 4. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

Построение 5. Построить прямую, перпендикулярную к данной прямой и проходящую через данную точку.

При этом данная точка может лежать как на данной прямой («восставить перпендикуляр»), так и вне данной прямой («опустить перпендикуляр»).

Практически построение 5 всегда выполняется с помощью особого инструмента — угольника (или чертёжного треугольника). Возможность выполнить то же построение с помощью циркуля и линейки показывает, что всякую задачу на построение, которую можно решить, пользуясь циркулем, линейкой и угольником, можно также решить, пользуясь только циркулем и линейкой.

Таким образом угольник—инструмент весьма полезный на практике—не является принципиально необходимым.

Построение 6. Построить прямую, перпендикулярную к данному отрезку и проходящую через его середину.

Тем самым мы построим в частности и середину данного отрезка, т. е. разделим отрезок пополам.

Построение 7. Построить биссектрису данного угла, иначе говоря, разделить данный угол пополам.

К этому же построению сводится деление пополам данной дуги окружности (если известен центр окружности), и, в частности, «удвоение числа сторон» правильного многоугольника.

Построение 8. Построить касательную к данной окружности в данной её точке.

Построение 9. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

Построение 10. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Заметим, что построение прямоугольного треугольника по двум катетам или по катету и острому углу является лишь частным случаем построений 3 и 4.

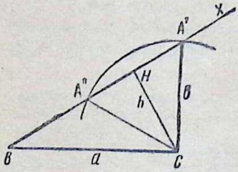
Построение 11. Построить касательную к окружности, проходящую через данную точку.

Приведём теперь пример более сложной задачи на построение.

Построение 12. Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Пусть требуется построить треугольник ABC, в котором известны стороны $a = BC$ и $b = AC$ и угол при вершине B.

Построив угол CBX, равный данному углу, отложим на одной из его сторон отрезок BC, равный данной стороне a треугольника (черт. 48). Из точки C как из центра описываем окружность радиусом, равным другой данной стороне b треугольника. Точка (или одна из точек) пересечения этой окружности с лучом BX и будет третьей вершиной искомого треугольника.



Черт. 48.

При решении этой задачи может встретиться несколько различных случаев. Рассмотрим их по порядку.

a) Расстояние $CH = h$ точки C от прямой BX больше данной стороны b треугольника. Построенная окружность не имеет с прямой BX общих точек (теорема 39).

b) Расстояние h точки C от прямой BX равно данной стороне b треугольника. Построенная окружность имеет с прямой BX одну общую точку, она касается прямой BX (теорема 40) в некоторой точке A. При этом угол CAB будет прямым, а угол CBA — острым. Следовательно, в этом случае поставленная задача имеет одно решение, если данный угол — острый (точка A лежит на луче BX), и не имеет решения, если этот угол — прямой или тупой.

c) Расстояние h точки C от прямой BX меньше данной стороны b треугольника. Построенная окружность имеет с прямой BX **две общие точки.** Задача будет иметь два решения, одно решение или вовсе не будет иметь решений в зависимости от того, сколько из этих точек будет лежать на луче BX.

Пусть данный угол B — острый. В таком случае точка H лежит на луче BX. На том же луче будет всегда лежать и одна из точек пересечения A' прямой с окружностью, а именно та, которая лежит по другую сторону от точки H, чем точка B. Вторая точка пересечения A'' лежит на луче BX только в том случае, если $a > b$ (по теореме о неравных наклонных). Итак, если $h < b$ и угол B — острый, то задача имеет два решения при $a > b$ и одно решение при $a \leqslant b$.

Пусть данный угол B — тупой. В таком случае точка H будет лежать на продолжении луча BX за точку B (так как угол ABH — острый). Задача будет иметь одно решение, если $a < b$ и не иметь решений при $a \geqslant b$.

Наконец, случай, когда угол B прямой, приводит к построению 10.

Результаты исследования можно представить в виде следующей таблицы:

Соотношения между a, b и h	Число решений	
	$\angle B < d$	$\angle B \geqslant d$
$h > b$	0	0
$h = b$	1	0
$h < b$: $a > b$	2	0
$h < b$: $a = b$	1	0
$h < b$: $a < b$	1	1

Заметим, наконец, что при $a < b$ (дан угол, лежащий против большей из данных сторон) задача никогда не имеет больше одного решения; это прямо вытекает из теоремы 27.

§ 18. Равенство фигур произвольного вида.

Учение о равенстве треугольников, изложенное в §§ 11 — 12, допускает значительное обобщение. Его можно распространить на фигуры произвольного вида. При этом под **фигурой** (в самом общем смысле слова) понимается любое множество точек[1]). Мы будем обозначать фигуры прямыми жирными буквами, например, **F**.

Фигура **F** называется **равной** фигуре **F**′, если между их точками можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждый из отрезков, соединяющих какие-либо две точки первой фигуры **F**, равен отрезку, соединяющему соответствующие им точки второй фигуры **F**′.

Из этого определения вытекает несколько свойств равных фигур.

1°. *Каждая фигура равна самой себе; если фигура* **F** *равна фигуре* **F**′, *то и* **F**′ *равна* **F**: *две фигуры, равные третьей, равны между собой* (сравнить аксиому 4а для отрезков и углов).

Короче говоря, равенство фигур обладает свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности.

2°. *Точкам фигуры* **F**, *лежащим на одной прямой, соответствуют в равной фигуре* **F**′ *точки, также лежащие на одной прямой; точкам некоторого отрезка — также точки некоторого отрезка.*

Действительно, пусть A, B и C — три точки фигуры **F**, лежащие на одной прямой, и A', B' и C' — соответствующие им точки фигуры **F**′. Так как из трёх точек одной прямой всегда одна лежит между двумя другими, то мы можем предположить, что B лежит между A и C. При этом будем иметь $AB + BC = AC$; $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $AC = A'C'$, и следовательно, $A'B' + B'C' = A'C'$. Но это равенство выполняется только при условии, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой, и точка B' лежит между A' и C'.

Отсюда следует, что каждому лучу фигуры **F** соответствует в фигуре **F**′ также луч, каждому углу — также угол.

3°. *Соответственные углы равных фигур равны.*

Действительно, пусть $\angle BAC$ — какой-либо угол фигуры **F**, и A', B' и C' — точки фигуры **F**′, соответствующие точкам

---

[1] В этом параграфе, как и во всей первой части книги, мы рассматриваем лишь фигуры, лежащие в одной и той же плоскости. Впрочем, всё сказанное в этом параграфе и, в частности, основная теорема 49 (при соответствующем уточнении формулировки) приложимо и к плоским фигурам, лежащим в различных плоскостях. Это же замечание относится и к ряду других разделов нашего курса и в дальнейшем повторяться не будет.

A, B и C. Треугольники ABC и $A'B'C'$ будут равны по третьему признаку равенства, откуда $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

4°. *Если в первой фигуре* $\mathbf{F}$ *точки* C *и* D *лежат по разные стороны (по одну сторону) от прямой* AB *и точкам* A, B, C *и* D *соответствуют в фигуре* $\mathbf{F}'$, *равной фигуре* $\mathbf{F}$, *точки* A', B', C' *и* D', *то и точки* C' *и* D' *лежат по разные стороны (соответственно по одну сторону) от прямой* $A'B'$.

В самом деле, в силу свойства 3° имеем $\angle BAC = \angle B'A'C'$; $\angle BAD = \angle B'A'D'$; $\angle CAD = \angle C'A'D'$. Пусть точки C и D лежат по разные стороны от AB. В таком случае угол CAD (внутренней областью считаем ту, в которой лежит луч AB) есть сумма углов BAC и BAD. Следовательно, и угол $C'A'D'$, равный углу CAD, есть сумма (а не разность) углов $B'A'C'$ и $B'A'D'$. Поэтому точки C' и D' лежат по разные стороны от прямой $A'B'$. Аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда точки C и D лежат по одну сторону от AB.

Из доказанного свойства следует, что полуплоскости соответствует полуплоскость, внутренней области угла или треугольника — внутренняя область угла или треугольника и т. д.

Равные треугольники представляют собой пример равных фигур. Существование фигур, равных произвольной данной фигуре, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 49. *Пусть* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{F}'$ *— две равные фигуры, и* X *— некоторая точка. Существует точка* X', *обладающая тем свойством, что фигура* $\mathbf{F}X$, *состоящая из всех точек фигуры* $\mathbf{F}$ *и точки* X, *равна фигуре* $\mathbf{F}'X'$. *Точка* X', *обладающая этим свойством, — единственная, если среди точек фигуры* $\mathbf{F}$ *имеются три точки, не лежащие на одной прямой.*

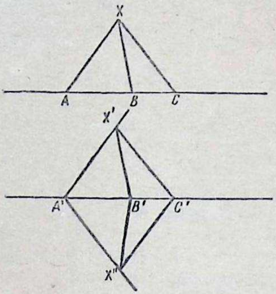
Доказательство. Будем обозначать через $A', B', C', D', \ldots$ точки фигуры $\mathbf{F}'$, соответствующие точкам $A, B, C, D, \ldots$ фигуры $\mathbf{F}$. Рассмотрим последовательно три возможных случая:

1) Все точки фигуры $\mathbf{F}$ (а следовательно, и фигуры $\mathbf{F}'$) лежат на одной прямой, и точка X лежит на той же прямой.

Примем за точку X' такую точку прямой $A'B'$, что $AX = A'X'$; при этом если точка X лежит на луче AB, то и точку X' выберем на луче $A'B'$, а если точка X лежит на продолжении луча AB за точку A, то и точку X' выберем на продолжении луча $A'B'$ за точку A'. При этом и $BX = B'X'$

в силу аксиомы 4b. Заметим, что положение точки X' на прямой $A'B'$ вполне определено.

Пусть теперь C — произвольная точка фигуры $\mathbf{F}$, и C' — соответствующая точка фигуры $\mathbf{F}'$. Точки A, B, C, X и точки A', B', C', X' будут расположены на соответствующих прямых, в силу свойства 2° равных фигур $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ и в силу выбора точек X и X', в одном и том же порядке. Отрезки CX и $C'X'$ будут равны как суммы или разности соответственно равных отрезков AX, CX и $A'X'$, $C'X'$.



Черт. 49.

2) Все точки фигуры $\mathbf{F}$ (а следовательно, и все точки фигуры $\mathbf{F}'$) лежат на одной прямой, но точка X не лежит на этой прямой (черт. 49). При этом и точка X' не будет лежать на одной прямой с точками фигуры $\mathbf{F}'$.

Пусть A и B — две произвольные точки фигуры $\mathbf{F}$. Существует два и только два таких луча $A'X'$ и $A'X''$ и на каждом из этих лучей по одной и только по одной такой точке X' и X'', что $\angle BAX = \angle B'A'X' = \angle B'A'X''$ и $AX = A'X' = A'X''$. При этом и $BX = B'X' = B'X''$ в силу равенства треугольников ABX, $A'B'X'$ и $A'B'X''$.

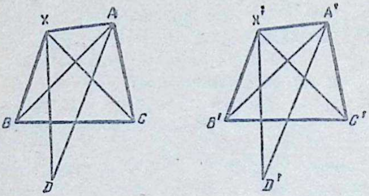
Обозначим через C произвольную точку фигуры $\mathbf{F}$. При этом и $\angle CAX = \angle C'A'X' = \angle C'A'X''$. Отрезки CX, $C'X'$ и $C'X''$ будут равны в силу равенства треугольников CAX, $C'A'X'$ и $C'A'X''$.

Итак, в данном случае существует не одна, а две точки, удовлетворяющие условиям теоремы.

3) Среди точек фигуры $\mathbf{F}$ существуют три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (черт. 50). Точки A', B' и C' также не лежат на одной прямой.

Если точка X лежит на прямой AB, то соответствующая ей точка X' определится как указано в пункте 1) доказательства. Пусть точка X не лежит на прямой AB.

Искомая точка X' должна удовлетворять условиям $\angle BAX = \angle B'A'X'$ и $AX = A'X'$; при этом если точки C и X лежат по разные стороны (по одну сторону) от прямой AB, то и луч $A'X'$ должен лежать с точкой C' по разные стороны (по одну сторону) от прямой $A'B'$. Эти требования вполне определяют положение точки X'. При этом будем иметь и $BX = B'X'$ в силу равенства треугольников ABX и $A'B'X'$.



Черт. 50.

Если точки C и X лежат по разные стороны от AB, то угол CAX будет равен сумме углов BAC и BAX, и то же будет иметь для углов $C'A'X'$, $B'A'C'$ и $B'A'X'$. Углы CAX и $C'A'X'$ будут равны как суммы соответственно равных углов. Если точки C и X лежат по одну сторону от AB, то вместо сумм углов придётся рассматривать их разности. Отрезки CX и $C'X'$ будут равны в силу равенства треугольников ACX и $A'C'X'$.

Пусть теперь D — произвольная точка фигуры F. Если точка D лежит на прямой AB, то отрезки DX и $D'X'$ будут равны в силу равенства треугольников ADX и $A'D'X'$. Если точки X и D лежат по разные стороны (по одну сторону) от прямой AB, то, как легко видеть, и точки X' и D' будут лежать по разные стороны (соответственно по одну сторону) от прямой $A'B'$. При этом углы DAX и $D'A'X'$ будут равны как суммы (разности) соответственно равных углов BAD, BAX и $B'A'D'$, $B'A'X'$. Отрезки DX и $D'X'$ будут равны в силу равенства треугольников ADX и $A'D'X'$.

Итак, расстояние от любой точки фигуры F до точки X равно расстоянию от соответствующей точки фигуры F' до точки X'. Это и показывает, что фигура $\mathrm{F}X$ равна фигуре $\mathrm{F}'X'$.

Следствия. 1. *Какова бы ни была данная фигура* F, *существует бесчисленное множество фигур* F', *равных данной фигуре* F.

Если все точки фигуры F лежат на одной прямой, то каждая такая фигура F' вполне определяется заданием двух точек A' и B', которые соответствуют данным точкам A и B фигуры F; эти точки должны быть выбраны так, что $AB = A'B'$ (а в остальном произвольны).

Если среди точек фигуры F имеются три точки, не лежащие на одной прямой, то каждая такая фигура F' вполне определяется заданием трёх точек A', B' и C', которые соответствуют данным точкам A, B и C фигуры F, не лежащим на одной прямой; эти точки должны быть выбраны так, чтобы $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (а в остальном произвольны).

2. *Если три не лежащие на одной прямой точки* A, B *и* C *фигуры* F *совпадают с соответствующими им точками* A', B' *и* C' *фигуры* F', *равной* F, *то и всякая точка фигуры* F *совпадает с соответствующей ей точкой фигуры* F'.

3. *Пусть среди точек фигуры* F *имеются три точки, не лежащие на одной прямой; если* A *и* B — *две точки фигуры* F, *и* A' *и* B' — *какие-либо две точки, для которых* $AB = A'B'$, *то существуют две и только две фигуры, равные* F, *в которых точкам* A *и* B *фигуры* F *соответствуют заданные точки* A' *и* B'.

Действительно, пусть C — какая-либо точка фигуры F, не лежащая на прямой AB. Соответствующая ей точка второй фигуры может занимать два положения C' и C'', которые определяются, как указано в доказательстве теоремы для второго случая. Если выбрать одну из двух точек C' или C'', то дальнейшие точки фигуры F' определяются однозначно.

Введённое выше общее определение равных фигур и основная теорема 49 фактически широко используются нами, когда мы говорим о соответственных точках на сторонах равных треугольников, о равенстве соответствующих высот, медиан, биссектрис в равных треугольниках, о равенстве многоугольников и т. д.

Особое же значение эта общая точка зрения приобретает при рассмотрении криволинейных фигур. Так, мы могли бы теперь установить точный смысл и строго доказать следующую элементарную теорему.

Теорема 50. *В двух окружностях, имеющих равные радиусы, дуги, соответствующие равным центральным углам, равны. Две окружности, имеющие равные радиусы, равны.*

§ 19. Два вида равенства фигур.

Пусть даны две равные фигуры F и F'[1]. Рассмотрим треугольник ABC, имеющий своими вершинами какие-либо три точки первой фигуры, и соответствующий ему треугольник $A'B'C'$. Эти два треугольника равны. При этом два ориентированных треугольника $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ (§ 8) могут быть как одинаково ориентированными, так и противоположно ориентированными. Имеет место следующая теорема.

Теорема 51. *Если какие-либо два соответственных треугольника $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ равных фигур ориентированы одинаково, то и любые два соответственных треугольника этих фигур ориентированы одинаково; если же треугольники $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ противоположно ориентированы, то и любые два соответственных треугольника противоположно ориентированы.*

Доказательство. Ограничимся первым случаем, когда треугольники $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ одинаково ориентированы; аналогичное доказательство для второго случая предоставляем читателю.

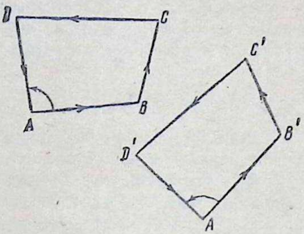
Пусть $\overline{XYZ}$ — произвольный треугольник первой фигуры, и $\overline{X'Y'Z'}$ — соответственный треугольник второй фигуры.

Если точки C и Z лежат по одну сторону от прямой AB, то и точки C' и Z' лежат по одну сторону от прямой $A'B'$ (§ 18,4°). В этом случае мы будем иметь три пары одинаково ориентированных треугольников, а именно, пару $\overline{ABC}$, $\overline{A'B'C'}$, пару $\overline{ABC}$, $\overline{ABZ}$ и пару $\overline{A'B'C'}$, $\overline{A'B'Z'}$. Следовательно, треугольники $\overline{ABZ}$ и $\overline{A'B'Z'}$ ориентированы одинаково.

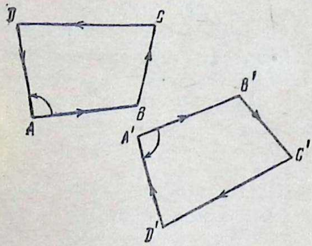
---

[1] В этом параграфе мы ограничиваемся только такими фигурами, в которых не все точки лежат на одной прямой.

Если точки C и Z лежат по разные стороны от прямой AB, то и точки C' и Z' лежат по разные стороны от $A'B'$ (§ 18,4°). В этом случае будем иметь пару одинаково ориентированных треугольников $\overline{ABC}$, $\overline{A'B'C'}$ и две пары противоположно ориентированных треугольников $\overline{ABC}$, $\overline{ABZ}$ и $\overline{A'B'C'}$, $\overline{A'B'Z'}$. Следовательно, треугольники $\overline{ABZ}$ и $\overline{A'B'Z'}$ опять ориентированы одинаково.



Черт. 51.



Черт. 52.

Так как треугольники $\overline{ABZ}$ и $\overline{A'B'Z'}$ ориентированы одинаково, то и треугольники $\overline{ZAB}$ и $\overline{Z'A'B'}$ ориентированы одинаково. Повторяя для треугольников $\overline{ZAB}$ и $\overline{Z'A'B'}$ и точек Y и Y' рассуждения, только что проведённые для треугольников $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ и точек Z и Z', придём к заключению, что треугольники $\overline{ZAY}$ и $\overline{Z'A'Y'}$ ориентированы одинаково, а значит и треугольники $\overline{YZA}$ и $\overline{Y'Z'A'}$ ориентированы одинаково. Наконец, повторяя в третий раз то же рассуждение, придём к заключению, что треугольники $\overline{YZX}$ и $\overline{Y'Z'X'}$, а значит и треугольники $\overline{XYZ}$ и $\overline{X'Y'Z'}$ ориентированы одинаково.

Эти рассуждения теряют силу, если три точки A, B, Z или три точки A, Y, Z лежат на одной прямой. Чтобы избежать этих случаев, вершины треугольника XYZ можно всегда обозначить так, чтобы точка Z не лежала на прямой AB, и прямая YZ не проходила через A.

Из доказанной теоремы вытекает существование двух различных видов равенства фигур.

Теорема 52. *Существует два вида равенства фигур. В одном случае каждые два соответственных треугольника равных фигур ориентированы одинаково, и каждые два соответственных угла одинаково направлены; в другом случае соответственные треугольники ориентированы противоположно, и соответственные углы имеют противоположные направления.*

Будем называть две равные фигуры в первом случае (черт. 51) собственно-равными, во втором случае (черт. 52) — зеркально-равными.

Две фигуры, собственно-равные третьей, а также две фигуры, зеркально-равные третьей, очевидно, собственно-равны; две фигуры, из которых одна собственно-равна третьей, а другая ей зеркально-равна, зеркально-равны между собой.

ГЛАВА III.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

§ 20. Понятие параллельных прямых.

Как мы видели ранее (см. теорема 17, следствие 1), существуют непересекающиеся прямые. Прямые, не пересекающиеся между собой, называются параллельными[1]. Лучи или отрезки, принадлежащие параллельным прямым, мы также называем параллельными («углы с соответственно параллельными сторонами», «стороны одного треугольника параллельны сторонам другого»)[2]. Для обозначения параллельности употребляется особый знак $\|$.

Две параллельные прямые делят плоскость на три области. Точки одной из них называются лежащими между параллельными прямыми: это будут точки, лежащие от каждой из двух прямых по ту же сторону, что и другая прямая. Предоставляем читателю (по аналогии с теоремой 3) сформулировать и доказать теорему о делении плоскости двумя параллельными прямыми.

Выбор определённого направления на одной из параллельных прямых однозначно определяет и выбор направления на другой прямой [на черт. 35 (стр. 47) соответствующие друг другу направления обозначены стрелками]. Это даёт возможность говорить о параллельных отрезках, направленных в одну сторону

---

[1] Подчеркнём, что такое определение параллельных пригодно, поскольку мы рассматриваем только геометрию на плоскости. Если бы мы рассматривали геометрию в пространстве, то мы должны были бы сказать: прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными.

[2] Два отрезка, лежащих на одной прямой, также считаются параллельными.

(например, AB и $A'B'$ на черт. 35) или в противоположные стороны (например, AB и $B'A'$ на том же чертеже). При этом отрезки AB и $A'B'$ будут направлены в одну сторону или в противоположные стороны в зависимости от того, лежат ли точки B и B' по одну сторону от прямой AA' или по разные.

Две прямые MN и $M'N'$ (параллельные или нет — безразлично) образуют при пересечении в точках A и A' с некоторой «секущей» PP' (черт. 35) восемь углов.

Две пары этих углов, а именно пара углов $\angle MAP'$ и $\angle N'A'P$ и пара $\angle NAP'$ и $\angle M'A'P$, характеризуются тем, что стороны углов каждой пары, лежащие на секущей, имеют общий отрезок и противоположные направления, а остальные их стороны лежат от секущей по разные стороны. Такие углы обычно называются внутренними накрест лежащими; мы могли бы их назвать и просто накрест лежащими, так как в рассмотрении «внешних накрест лежащих» углов нет фактически никакой надобности.

Аналогично можно охарактеризовать и две пары внутренних односторонних или просто односторонних углов, а именно, пару $\angle MAP'$ и $\angle M'A'P$ и пару $\angle NAP'$ и $\angle N'A'P$.

Наконец, имеется четыре пары таких углов, что стороны углов каждой пары, лежащие на секущей, имеют одно и то же направление, а остальные их стороны лежат от секущей по одну сторону: это будут пара $\angle MAP'$ и $\angle M'A'P'$, пара $\angle NAP'$ и $\angle N'A'P'$ и т. д. Углы каждой пары называются соответственными.

Основной признак параллельности прямых мы фактически уже доказали (теорема 17, следствие 1):

1. *Если две прямые образуют с некоторой секущей два равных* (внутренних) *накрест лежащих угла, то прямые параллельны.*

Отсюда вытекают и другие признаки параллельности:

2. *Если две прямые образуют с некоторой секущей два равных соответственных угла, то прямые параллельны.*

3. *Если две прямые образуют с некоторой секущей два* (внутренних) *односторонних угла, сумма которых равна двум прямым, то прямые параллельны.*

В частности,

4. *Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны.*

Из этих признаков параллельности вытекает следующее свойство параллельных прямых.

Теорема 53. *Через всякую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, ей параллельная.*

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой $M'N'$ (черт. 35). Соединим точку A прямой линией с какой-либо точкой A' прямой $M'N'$. Существует такой луч AM, лежащий от прямой AA' по ту же сторону, что и $A'M'$, что $\angle AA'N' = \angle A'AM$. Этот луч AM и принадлежит прямой MN, которая будет параллельна $M'N'$ в силу равенства (внутренних) накрест лежащих углов.

§ 21. Аксиома параллельности.

Доказательство теоремы 53 даёт повод к следующим замечаниям. Точку A' мы выбирали на прямой $M'N'$ совершенно произвольно. Не будет ли прямая MN зависеть от выбора точки A' на прямой $M'N'$? Другими словами, сколько прямых, параллельных $M'N'$, проходит через данную точку — одна или несколько? Для ответа на этот вопрос нам понадобится новая аксиома, которую обычно называют «аксиомой параллельности» или, не совсем точно, «аксиомой Евклида»[1]).

Аксиома 7. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.*

Следствия. 1. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной.*

---

[1]) Евклид — александрийский математик, живший около 300 г. до н. э. Одним из сохранившихся его сочинений являются «Начала». Это — первое по времени написания из дошедших до нас полностью сочинений, посвящённое систематическому изложению геометрии. «Начала» можно рассматривать как свод известного в то время материала, относящегося к элементарной геометрии. «Начала» Евклида сыграли большую роль в истории науки. Подробно о «Началах» Евклида говорится, например, в книге Цейтена [20]. Формулировка аксиомы параллельности, принадлежащая самому Евклиду, будет приведена ниже (см. сноску на стр. 81).

Получается путём объединения содержания теоремы 53 и аксиомы 7.

2. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Действительно, если бы они пересекались, то через точку их пересечения проходили бы две прямые, параллельные одной и той же прямой.

3. *Если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Действительно, если бы некоторая прямая PP' пересекала в точке A одну из двух параллельных прямых MN, но не пересекала бы другой параллельной прямой $M'N'$, то через точку A проходили бы две прямые, параллельные $M'N'$, а именно: MN и PP'.

4. *Если две прямые параллельны, то они образуют с любой секущей равные* (*внутренние*) *накрест лежащие углы, равные соответственные углы, и* (*внутренние*) *односторонние углы, в сумме равные двум прямым. В частности, если некоторая секущая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.*

Доказательство мы можем считать известным из школьного курса геометрии.

5. *Если две прямые образуют при пересечении с некоторой секущей* (внутренние) *односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются с той стороны от секущей, где сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых*[1]). *В частности, перпендикуляр и наклонная к одной прямой всегда пересекаются.*

---

[1]) Это предложение широко известно в истории геометрии под названием «пятого постулата» (или «одиннадцатой аксиомы») Евклида. В такой именно форме Евклид ввёл в своих «Началах» аксиому параллельности. Действительно, из этого предложения следующим образом вытекает аксиома 7.

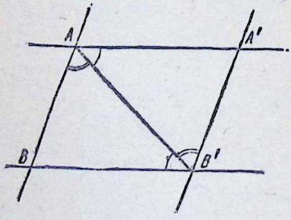
Если две прямые, образующие с секущей внутренние односторонние углы в сумме меньшие двух прямых, всегда пересекаются, то через точку A (черт. 35) проходит только одна прямая, параллельная $M'N'$, а именно та прямая, которая образует с секущей AA' угол $A'AN$, дополняющий угол $AA'N'$ до двух прямых.

Действительно, через точку A, не лежащую на прямой $M'N'$ (черт. 35), проходит только одна прямая MN, параллельная $M'N'$, и эти две параллельные прямые образуют с секущей AA' внутренние односторонние углы, в сумме равные двум прямым. Следовательно, если прямая $M'N'$ и какая-либо прямая, проходящая через точку A, образуют с секущей AA' внутренние односторонние углы, в сумме меньше двух прямых, то эти прямые уже не будут параллельными. Они будут пересекаться с той стороны от секущей, где сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых, так как сумма двух углов треугольника меньше двух прямых (теорема 17, следствие 2).

Рассмотрим теперь следующую теорему о параллельных прямых.

Теорема 54. *Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя данными параллельными прямыми, равны между собой и направлены в одну сторону.*

Доказательство. Пусть прямые AA' и BB' (черт. 53), а также прямые AB и $A'B'$ параллельны между собой. Треугольники ABB' и $B'A'A$ будут равны (сторона AB' общая, $\angle AB'B = \angle B'AA'$ и $\angle BAB' = \angle A'B'A$ как накрест лежащие). Из равенства этих треугольников и следует равенство отрезков AB и $A'B'$. Отрезки AB и $A'B'$ направлены в одну сторону, так как отрезок BB' не имеет с AA' общих точек и, следовательно, точки B и B' лежат по одну сторону от прямой AA' (ср. стр. 78—79).



Черт. 53.

Следствие. *Расстояния всех точек одной из двух параллельных прямых до другой прямой равны.*

Нетрудно видеть, что и обратно, *если расстояния каких-либо двух точек одной из двух прямых до другой прямой равны между собой, то прямые параллельны.*

Расстояние от какой-либо точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между параллельными прямыми.

Построение 13. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Способы решения этой задачи с помощью циркуля и линейки и с помощью линейки и угольника известны из школьного курса.

§ 22. Сумма углов треугольника и многоугольника.

Одним из важнейших следствий теории параллельных прямых являются теоремы о сумме углов треугольника и многоугольника.

Теорема 55. *Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам.*

Доказательство известно из школьного курса.

Следствие. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных.*

Теорема 56. *Сумма внутренних углов всякого простого многоугольника равна $2d\cdot(n-2)$, где n — число вершин* (или сторон) *многоугольника.*

Доказательство. Если данный многоугольник $ABC\dots KL$ (черт. 4, стр. 24) — выпуклый, то диагоналями AC, AD, ..., AK, выходящими из какой-либо его вершины A, он разбивается на $n-2$ треугольников (§ 6) ABC, ACD, ..., AKL. Сумма внутренних углов данного многоугольника получается путём сложения углов всех треугольников. Отсюда и следует, что она равна $2d\cdot(n-2)$.

Если данный многоугольник — простой, но невыпуклый, то его также можно разложить (§ 7) на $n-2$ треугольников с помощью диагоналей, расположенных внутри многоугольника (черт. 13, стр. 28). Сумма углов n-угольника получается и в этом случае путём сложения углов всех этих треугольников.

Отличие от случая выпуклого многоугольника состоит в том, что для разложения многоугольника на треугольники нельзя, вообще говоря, воспользоваться диагоналями, выходящими из одной и той же вершины.

Замечание. На звездчатые многоугольники теорема 56 непосредственно не распространяется, хотя бы уже потому, что в этом случае не определено понятие внутреннего угла.

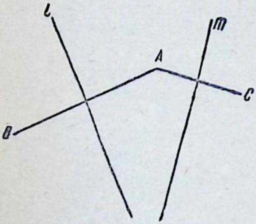
Мы не будем останавливаться на вопросе о сумме углов звездчатого многоугольника.

§ 23. Свойства окружности, основанные на аксиоме о параллельных.

Аксиома о параллельных прямых и её следствия позволяют дополнить рассмотренные в § 15 свойства окружности несколькими дальнейшими теоремами.

Теорема 57. *Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность и притом единственная.*

Доказательство. Пусть A, B и C — три данные точки, не лежащие на одной прямой (черт. 54). Так как перпендикуляры, опущенные из центра искомой окружности на каждую из хорд AB и AC, делят эти хорды пополам, то искомый центр O может лежать только на пересечении перпендикуляров l и m к отрезкам AB и AC, проходящих через их середины. Существование окружности, проходящей через данные точки, будет доказано, если мы покажем, что эти перпендикуляры пересекаются.



Черт. 54.

Будем доказывать это предложение от противного. Если бы прямые l и m были параллельны, то прямая AB, перпендикулярная к l, была бы перпендикулярна и к прямой m (аксиома 7, следствие 4). Так как через точку A проходит только одна прямая, перпендикулярная к m, и этой прямой является прямая AC, прямые AB и AC должны были бы совпасть. Иначе говоря, точки A, B и C лежали бы на одной прямой, что противоречит условию.

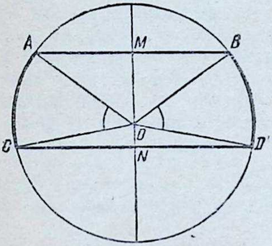
Единственность окружности, проходящей через три данные точки, вытекает из теоремы 47, следствие.

Окружность, определяемую точками A, B, C, обозначают иногда «окружность ABC».

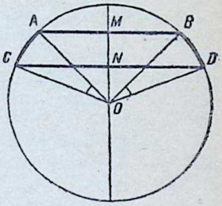
Следствия. 1. *Прямые, проходящие через середины сторон треугольника и к ним перпендикулярные, проходят через одну точку.*

2. *Две прямые, соответственно перпендикулярные к двум пересекающимся прямым, пересекаются.*

Теорема 58. *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*



Черт. 55.



Черт. 56.

Доказательство этой теоремы будем считать известным из школьного курса геометрии. Подчеркнём только, что при доказательстве мы пользуемся тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных (теорема 55, следствие), а это свойство треугольника вытекает из учения о параллельных прямых.

16

Из теоремы 58 вытекают несколько следствий, относящихся к углам, образованным хордами, секущими и касательными окружности. На формулировках этих предложений, известных из школьного курса геометрии, мы не останавливаемся.

Теорема 59. *Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.*

Доказательство. Пусть AB и CD — две параллельные хорды одной окружности O (черт. 55 и 56). Диаметр, перпендикулярный к одной из этих хорд, будет перпендикулярен и к другой и разделит обе хорды в точках M и N

пополам. Мы будем иметь две пары равных треугольников OAM, OBM и OCN, ODN. Углы AOC и BOD будут равны в силу равенств углов $\angle AOM = \angle BOM$; $\angle CON = \angle DON$. Равным центральным углам соответствуют и равные дуги AC и BD (теорема 50).

§ 24. Простейшие геометрические места.

Термин геометрическое место **точек** представляет собой один из синонимов понятия множества. Так мы можем безразлично сказать «геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек ...» или «множество всех точек, равноудалённых от двух данных точек...». Мы пользуемся в элементарной геометрии термином «геометрическое место» исключительно ввиду его большей образности — слово «место» отвечает на вопрос о том, где «помещаются» точки, обладающие тем или иным свойством[1]).

Рассмотренные до сих пор вопросы элементарной геометрии дают нам возможность сформулировать следующие предложения.

Геометрическое место I. *Геометрическое место точек, расстояния которых от данной точки O равны одному и тому же отрезку r, есть окружность с центром O и радиусом r.*

Вытекает из определения окружности (§ 15).

Геометрическое место II. *Геометрическое место точек, расстояния которых от данной прямой равны одному и тому же отрезку a, есть пара прямых, параллельных данной.*

Вытекает из теоремы 54, следствие.

Геометрическое место III. *Геометрическое место точек, равноудалённых от двух точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.*

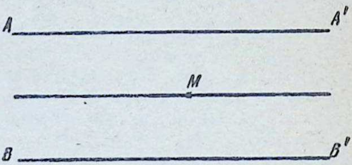
Вытекает из того, что равные наклонные, проведённые из одной точки к одной и той же прямой, имеют равные проекции, и обратно (§ 14).

---

[1]) Подробнее см. книгу автора [17].

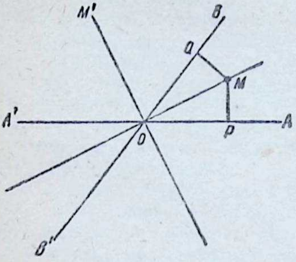
Геометрическое место IVa. *Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых, есть прямая, параллельная двум данным.*

Действительно, точка M (черт. 57), равноудалённая от параллельных прямых AA' и BB', лежит от прямой AA' по ту же сторону, что и прямая BB', и расстояние точки M от прямой AA' равно половине расстояния между прямыми AA' и BB'. Таким образом, мы приходим к геометрическому месту II (однако вместо двух прямых геометрического места II мы имеем в данном случае только одну).



Черт. 57.

Геометрическое место IVb. *Геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых, состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых — биссектрис углов между этими прямыми.*



Черт. 58.

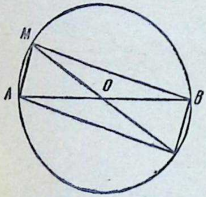
Действительно, пусть AA' и BB' — две прямые, пересекающиеся в точке O (черт. 58). Если расстояния MP и MQ некоторой точки M, лежащей, скажем, внутри угла AOB, от прямых AA' и BB' равны, то углы AOM и MOB равны в силу равенства прямоугольных треугольников MOP и MOQ (гипотенуза OM общая, катеты MP и MQ равны). Поэтому точка M лежит на биссектрисе угла AOB.

Обратно, если точка M лежит на биссектрисе угла AOB, то прямоугольные треугольники MOP и MOQ равны (гипотенуза OM общая; $\angle MOP = \angle MOQ$), и $MP = MQ$.

Итак, рассматриваемое геометрическое место состоит из биссектрис четырёх углов $\angle AOB$, $\angle BOA'$, $\angle A'OB'$ и $\angle B'OA$. Но биссектрисы этих углов образуют две прямые линии OM и OM' (теорема 21, следствие). Эти две прямые взаимно перпендикулярны, так как $\angle MOM' = MOQ + {} + \angle QOM' = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOA')$.

Прежде чем перейти к дальнейшим геометрическим местам, сформулируем следующее определение: **углом, под которым отрезок AB виден из точки M,** называется угол с вершиной M, стороны которого проходят соответственно через точки A и B.

Геометрическое место Va. *Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, имеющая этот отрезок своим диаметром*[1]).



Черт. 59.

Действительно, пусть AB — данный отрезок (черт. 59), O — его середина, M — какая-либо точка, из которой отрезок AB виден под прямым углом.

Как известно, прямоугольный треугольник можно дополнить до прямоугольника и диагонали прямоугольника равны; поэтому медиана OM прямоугольного треугольника ABM равна половине его гипотенузы, т. е. $OM = OA = OB$. Следовательно, точка M лежит на окружности, имеющей отрезок AB своим диаметром.

Обратно, если точка M лежит на этой окружности, то угол AMB равен половине угла между радиусами OA и OB (теорема 58); иначе говоря, угол AMB — прямой.

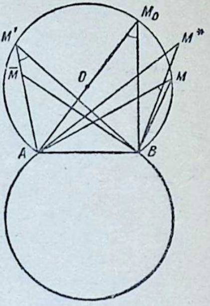
Геометрическое место Vb. *Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (отличным от нуля и от развёрнутого угла), состоит из двух дуг окружностей; эти дуги имеют с данным отрезком общие концы.*

---

[1]) Несмотря на то, что геометрическое место Va является лишь частным случаем геометрического места Vb, представляется целесообразным особо рассмотреть этот наиболее простой случай.

Если данный угол отличен от прямого, то эти две дуги принадлежат различным окружностям; если данный угол — прямой, то эти две дуги образуют одну окружность (ср. геометрическое место Va).

Действительно, пусть AB — данный отрезок и M_0 — какая-либо точка, из которой данный отрезок виден под данным углом α (черт. 60). Такую точку можно получить, скажем, следующим образом. Построим при точке A угол BAM_0, равный $d-\alpha$. Точка пересечения M_0 второй стороны этого угла с перпендикуляром, восставленным к прямой AB в точке B, и будет одной из точек, о которых идёт речь.



Черт. 60.

Через точки A, B и M_0 проходит единственная окружность (теорема 57). Если точка M_0 определена, как только что указано, то центром O окружности будет середина отрезка AM_0.

Если теперь M — какая-либо точка дуги AM_0B, то $\angle AMB=\angle AM_0B=\alpha$. Если $\overline{M}$ — какая-либо точка, лежащая между отрезком AB и дугой AM_0B, то прямая $A\overline{M}$ пересекает дугу AM_0B в некоторой точке M', и $\angle A\overline{M}B>$ $>\angle AM'B$ как внешний угол треугольника $B\overline{M}M'$. Так как $\angle AM'B=\alpha$, то $\angle A\overline{M}B>\alpha$. Аналогично покажем, что если точка M^* лежит по ту же сторону от прямой AB, что и M_0, но вне окружности AM_0B, то $\angle AM^*B<\alpha$. Итак, точки искомого геометрического места, лежащие от прямой AB по ту же сторону, что и точка M_0, все располагаются на дуге AM_0B. Вторую дугу получим, рассматривая точки, лежащие по другую сторону от AB.

Замечание. Углы AMB и ANB, вершины M и N которых лежат соответственно на двух дугах, составляющих рассматриваемое геометрическое место, имеют противоположные направления. Это вытекает из того, что точки M и N лежат по разные стороны от прямой AB.

Следовательно, *геометрическое место точек M, из которых данный отрезок AB виден под данным по величине и по направлению углом AMB, есть дуга окружности, имеющая с данным отрезком общие концы.*

§ 25. Метод геометрических мест.

Метод геометрических мест решения геометрических задач на построение состоит в следующем. Решение задачи сводим к определению положения некоторой точки. Эту точку определяем как точку пересечения двух геометрических мест, которые мы умеем построить (или же как точку пересечения такого геометрического места с данной прямой или окружностью).

Приводим несколько примеров применения этого метода[1]).

Построение 14. Построить окружность, проходящую через три данные точки (не лежащие на одной прямой).

Та же задача допускает и другую формулировку: построить окружность, описанную около данного треугольника.

Задача непосредственно сводится к следующей: найти точку, равноудалённую от трёх данных точек.

Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек, есть прямая линия (геометрическое место III). Искомая точка есть точка пересечения двух таких прямых. Задача всегда имеет одно решение (если данные точки не лежат на одной прямой).

Построение 15. Найти точку, равноудалённую от трёх данных прямых.

Предположим сначала, что три данные прямые a, b и c образуют треугольник ABC (черт. 61). Геометрическое место точек, равноудалённых от прямых b и c, представляет собой пару прямых l и l', делящих пополам углы, образованные прямыми b и c; обозначим через l ту из двух биссектрис, которая делит пополам внутренний угол BAC треугольника. Аналогично, геометрическое место точек, равноудалённых от прямых c и a, есть пара прямых m и m'.

Каждая из прямых l и l' пересекает каждую из прямых m и m'. Действительно, прямая l пересекает сторону BC в некоторой точке D (в силу теоремы 7), а прямая m пересекает отрезок AD (в силу той же теоремы, применённой к треугольнику ABD). Та-

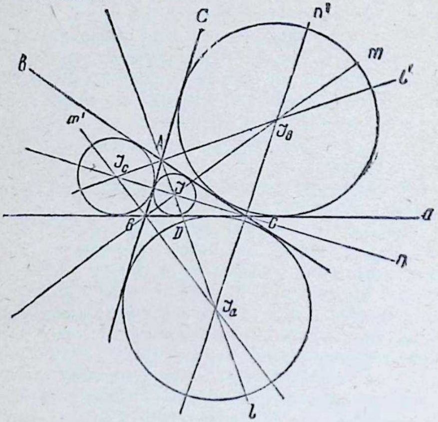
---

[1]) За подробностями отсылаем читателя к литературе по геометрическим построениям, в частности к книгам Александрова [2], Четверухина [21] и автора [17].

ким образом, прямые l и m пересекаются в некоторой точке I, лежащей внутри треугольника.

Так как внешний угол треугольника при вершине B больше угла BAC, то прямые l и m' образуют с прямой AB неравные соответственные углы и потому пересекаются в некоторой точке I_a. Аналогично прямые l' и m пересекаются в некоторой точке I_b.

Наконец, прямые l' и m' пересекаются в некоторой точке I_c как перпендикуляры к двум пересекающимся прямым l и m (теорема 57, следствие 2).



Черт. 61.

Итак, если данные прямые образуют треугольник, то задача имеет четыре решения — точки I, I_a, I_b и I_c.

Нетрудно видеть, что если две из данных прямых параллельны, а третья их пересекает, то задача имеет два решения (геометрические места IVa и IVb). Если три данные прямые проходят через одну точку, то эта точка и будет единственным решением задачи. Наконец, в том случае, когда три данные прямые параллельны, задача вовсе не имеет решений.

В том случае, когда три данные прямые образуют треугольник, из решения поставленной задачи легко выводится следующее предложение.

Теорема 60. *Шесть биссектрис внутренних и внешних углов треугольника пересекаются по три в четырёх точках: в одной из этих четырёх точек пересекаются биссектрисы трёх внутренних углов, в каждой из трёх других — биссектрисы внешних углов при двух вершинах и биссектриса внутреннего угла при третьей вершине.*

Действительно, пусть l, m и n — биссектрисы внутренних углов при вершинах A, B и C треугольника; l', m' и n' — биссектрисы внешних углов при тех же вершинах (черт. 61). Точка пересечения I биссектрис l и m равноудалена от всех трёх прямых BC, CA и AB и потому должна лежать на прямой n или на прямой n'; так как точка I лежит внутри треугольника, то она лежит на прямой n. Аналогично, точка пересечения I_c прямых l' и m' лежит на прямой n, и т. д.

Построение 15а. Построить окружность, касающуюся трёх данных прямых.

Так как центрами искомых окружностей служат точки, равноудалённые от трёх данных прямых, то эта задача не отличается существенно от предыдущей (построение 15).

Если данные прямые образуют треугольник, то задача имеет четыре решения. Одна из четырёх окружностей касается самих сторон треугольника (а не их продолжений) и называется окружностью, вписанной в треугольник. Каждая из трёх других окружностей касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон; эти окружности называются вневписанными окружностями треугольника.

Если две из данных прямых параллельны, а третья их пересекает, то задача имеет два решения. В остальных случаях она не имеет решений.

Построение 16. Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей, две из которых концентрические.

Пусть $O(r')$ и $O(r'')$ $(r' > r'')$ — две данные концентрические окружности (черт. 62); $O'''(r''')$ — третья окружность.

Найдём сначала геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных концентрических окружностей. Если C — центр одной из искомых окружностей, r — её радиус, то мы имеем $OC = |r \pm r'|$ и $OC = |r \pm r''|$. Равенство $|r \pm r'| = |r \pm r''|$ выполняется в силу $r' > r''$ в следующих двух случаях:

1) $r' - r = r + r''; r = \frac{1}{2}(r' - r'')$ и $OC = r' - r = \frac{1}{2}(r' + r'')$;

2) $r' - r = r - r''; r = \frac{1}{2}(r' + r'')$ и $OC = r' - r = \frac{1}{2}(r' - r'')$.

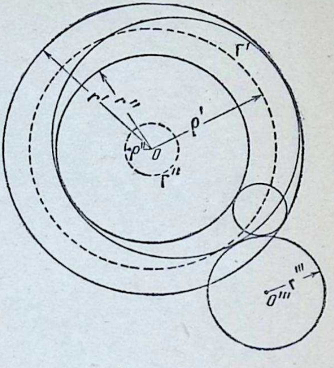
Итак, *геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных концентрических окружностей, состоит из двух окружностей Γ' и Γ'', концентрических с данными; радиус одной из этих окружностей Γ' равен полусумме*

$$\rho' = \frac{1}{2}(r' + r'')$$

радиусов данных окружностей, радиус же другой окружности Γ'' равен полуразности

$$\rho'' = \frac{1}{2}(r' - r'')$$

радиусов данных окружностей. Если центр окружности, касающейся двух данных, лежит на окружности Γ' радиуса ρ', то её радиус равен ρ'', а если её центр лежит на окружности Γ'' радиуса ρ'', то её радиус равен ρ'.



Черт. 62.

Рассмотрим, далее, геометрическое место центров окружностей данного радиуса ρ' (или ρ''), касающихся данной окружности O'''. Геометрическое место центров окружностей радиуса ρ', касающихся данной окружности O''' (r'''), состоит из двух окружностей γ_1' и γ_2', концентрических с O''' и имеющих радиусы, соответственно равные $r''' + \rho'$ и $|r''' - \rho'|$. Аналогично, геометрическое место центров окружностей радиуса ρ'', касающихся данной окружности O''', состоит из двух окружностей γ_1'' и γ_2'' с центром O''' и радиусами $r''' + \rho''$ и $|r''' - \rho''|$.

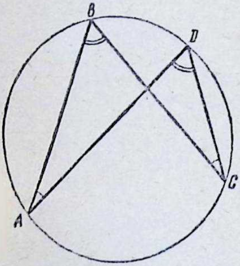
Итак, искомая окружность имеет своим радиусом ρ', а своим центром точку пересечения одной из окружностей γ_1' и γ_2' с окружностью Γ'', или же — своим радиусом ρ'', а своим центром точку пересечения одной из окружностей γ_1'' и γ_2'' с окружностью Γ'.

Наибольшее возможное число решений задачи — восемь; однако в зависимости от расположения данных окружностей задача может иметь и меньшее число решений. В частности, задача, очевидно, вовсе не имеет решений, если окружность O''' лежит вне большей из данных концентрических окружностей.

§ 26. Вписанные и описанные многоугольники.

Как известно, многоугольник называется вписанным в окружность, а окружность — описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на окружности.

Многоугольник называется описанным около окружности, а окружность — вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности. В более широком смысле слова многоугольник называется описанным около окружности, а окружность — вписанной в многоугольник, если каждая его сторона или её продолжение касается окружности. При этом окружность называется иногда вневписанной, если она касается некоторых сторон многоугольника и продолжений остальных его сторон.



Черт. 63.

Мы видели, что всякий треугольник имеет описанную окружность (§ 25, построение 14), вписанную окружность и три вневписанные окружности (§ 25, построение 15а).

В случае четырёхугольника вопрос о существовании описанной и вписанной окружностей решается следующими теоремами:

Теорема 61. *Во всяком выпуклом вписанном четырёхугольнике противоположные углы дополняют друг друга до двух прямых; обратно, если последнее условие выполнено, то четырёхугольник — вписанный.*

Во всяком звездчатом вписанном четырёхугольнике (черт. 63) *противоположные углы равны; обратно, если последнее условие выполнено, то четырёхугольник — вписанный.*

Доказательство первой половины теоремы, относящейся к выпуклому четырёхугольнику, даётся в школьном курсе.

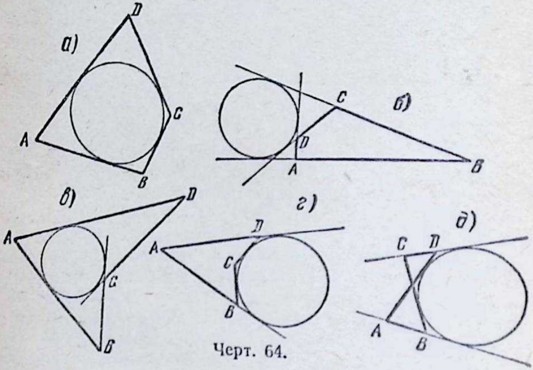
Вторая половина, относящаяся к звездчатому четырёхугольнику (черт. 63), вытекает из сказанного при отыскании геометрического места Vb (§ 24).

Замечание. Оба случая — выпуклого и звездчатого четырёхугольника — можно объединить в одной формулировке, если принять следующее определение.

Две секущие AB и CD называются антипараллельными относительно двух прямых AD и BC, если первая секущая AB образует с первой прямой AD углы, соответственно равные тем, которые вторая секущая CD образует со второй прямой BC, а вторая секущая CD образует с первой прямой AD углы, равные тем, которые первая секущая AB образует со второй прямой BC.

При этом определении теорему 61 можно сформулировать так: *во всяком вписанном четырёхугольнике две противоположные стороны антипараллельны относительно двух других сторон*, и обратно, *если это условие выполнено, то четырёхугольник — вписанный.*

Теорема 62. *Во всяком выпуклом описанном четырёхугольнике, стороны которого* (а не их продолжения) *касаются окружности, сумма двух противоположных сторон равна сумме двух других сторон; обратно, если это условие выполнено, то четырёхугольник — описанный и имеет вписанную окружность.*

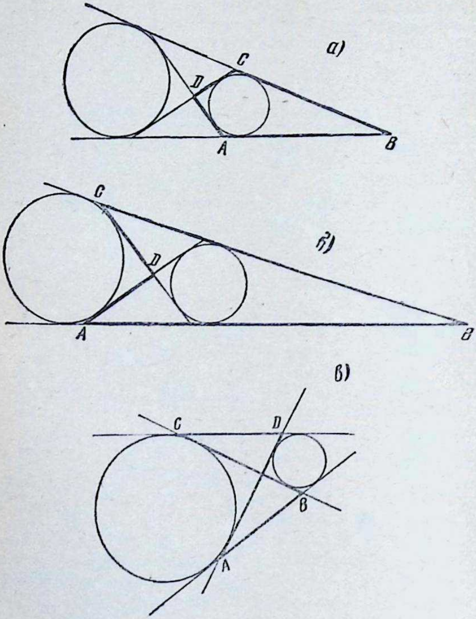


Черт. 64.

Доказательство известно из школьного курса (черт. 64,*а*).

Замечание. Если рассматривать произвольный, а не только выпуклый описанный четырёхугольник, то возможны различные случаи (черт. 64, *а*—*г*).

Четырёхугольник (выпуклый, простой невыпуклый или звездчатый) может быть описанным около двух окружностей одновременно (черт. 65).



Черт. 65.

Предоставляем читателю доказать следующую теорему:

Теорема 63. *Во всяком описанном четырёхугольнике сумма двух его сторон равна сумме двух других сторон. В четырёхугольнике, описанном около двух окружностей одновременно, стороны попарно равны.*

Так на черт 64, *б*, имеем $AB + AD = CB + CD$; на черт. 65, *а* и 65, *б* имеем $AB = BC$; $CD = DA$; на черт. 65, *в* имеем $AB = CD$; $BC = AD$, и т. д.

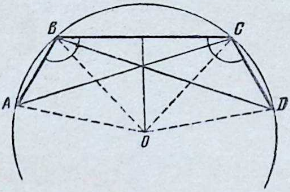
§ 27. Правильные и полуправильные многоугольники.

Из школьного курса известно, что около всякого выпуклого правильного многоугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность.

Приводимое в школьных учебниках доказательство непосредственно применимо и к звездчатым правильным многоугольникам (§ 10).

Мы рассмотрим здесь более общие предложения.

Теорема 64. *Около всякого* (выпуклого или звездчатого) *правильного или равноугольно-полуправильного многоугольника можно описать окружность.*



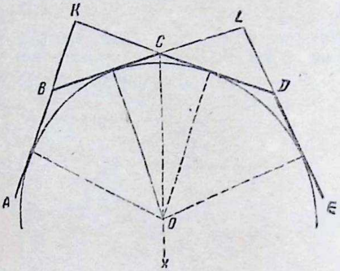
Черт. 66.

Доказательство. Пусть A, B, C и D — четыре последовательные вершины рассматриваемого многоугольника (черт. 66), O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Треугольники ABC и DCB равны ($AB = DC$; $BC = CB$; $\angle ABC = \angle DCB$). Следовательно, радиус $OA = OB = OC$ окружности, описанной около треугольника ABC, равен радиусу окружности, описанной около треугольника DCB. Далее, центры обеих описанных окружностей лежат на перпендикуляре к отрезку BC, восставленном в его середине. Наконец, оба центра лежат по одну сторону от прямой BC, так как точки A и D лежат по одну сторону от этой прямой (в силу выпуклости или локальной выпуклости многоугольника; сравнить § 10). Отсюда следует, что центры окружностей ABC и BCD совпадают.

Итак, окружность, проходящая через вершины A, B и C многоугольника, проходит и через вершину D. По тем же соображениям она будет проходить и через остальные вершины.

Теорема 65. *Во всякий* (выпуклый или звездчатый) *правильный или равносторонне-полуправильный многоугольник можно вписать окружность.*



Черт. 67.

Доказательство. Пусть AB, BC, CD и DE (черт. 67) — четыре последовательные стороны правильного или равносторонне-полуправильного многоугольника, K — точка пересечения прямых AB и CD, L — точка пересечения прямых BC и DE[1]).

Треугольники BCK и DCL равны ($BC = DC$; $\angle KBC = \angle LDC$; $\angle KCB = \angle LCD$). Следовательно, радиус вневписанной окружности треугольника KBC, которая касается стороны BC и продолжений двух других сторон, равен радиусу соответствующей вневписанной окружности треугольника LDC. Так как центры обеих окружностей лежат на биссек-

---

[1]) Если две стороны, взятые через одну, например, AB и CD параллельны, то и стороны BC и DE будут параллельны (так как углы многоугольника, взятые через один, должны быть равны). Точка E совпадает с A, и мы будем иметь ромб, для которого теорема верна.

трисе CX угла BCD, то эти центры, а следовательно, и самые окружности совпадают.

Таким образом, получается окружность, которая касается лучей BA и DE и сторон BC и CD. Повторяя это рассуждение для сторон BC, CD, DE и следующей стороны EF, мы убедимся, что та же окружность касается стороны DE и луча EF, и т. д.

Следствия из теорем 64 и 65. 1. *В случае правильного многоугольника центры описанной и вписанной окружностей совпадают.*

Действительно, в этом случае треугольники OAB, OBC и OCD равны, так что центр описанной окружности равноудалён от всех сторон.

2. *Стороны равноугольно-полуправильного многоугольника, взятые через одну, касаются одной и той же окружности. Таким образом, получаются две окружности, центры которых совпадают с центром описанной окружности.*

Действительно, на черт. 66 треугольники OAB и OCD равны, так что стороны, взятые через одну, равноудалены от центра описанной окружности.

3. *Вершины равносторонне-полуправильного многоугольника, взятые через одну, лежат на одной и той же окружности. Таким образом получаются две окружности, центры которых совпадают с центром вписанной окружности.*

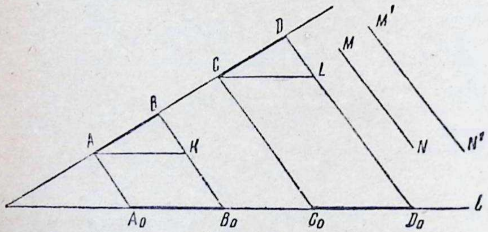
Действительно, на черт. 67 имеем $OA=OC=OE$ и $OB=OD$.

§ 28. Параллельная проекция.

Как известно, проекцией точки A на прямую l обычно называется основание A_0 перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l; точно так же проекцией отрезка AB на прямую l называется отрезок A_0B_0, соединяющий проекции точек A и B на эту прямую. Этим понятием проекции мы пользовались выше (§ 14). Так как понятие проекции употребляется и в более широком смысле слова, то определённые таким образом проекции называются прямоугольными (ортогональной) проекциями точки и отрезка.

Это понятие обобщается следующим образом.

Пусть дана некоторая прямая l, которая называется *осью проекций* (черт. 68), и некоторая прямая MN, не параллельная l. Так как прямую MN можно во всём последующем заменить любой другой прямой $M'N'$, ей параллельной, то мы будем говорить, что дано некоторое направление MN и называть его *направлением проектирования*. Точку пересечения A_0 прямой, проходящей через данную точку A и параллельной MN, с прямой l мы будем называть *параллельной* проекцией точки A на прямую l по направлению MN; *параллельной* проекцией отрезка AB на прямую l назовём отрезок A_0B_0, соединяющий проекции точек A_0 и B_0 на эту прямую.



Черт. 68.

Прямоугольные проекции, очевидно, представляют собой частный случай параллельных; в этом случае направление MN перпендикулярно к l. Если MN не перпендикулярно к l, то проекции называются *косоугольными*.

Следуя установившемуся обычаю, мы будем под «проекцией» (просто) понимать только прямоугольную проекцию, а под словами «параллельная проекция» — любую прямоугольную или косоугольную проекцию.

Отрезок AA_0, соединяющий точку A с её проекцией A_0, мы будем называть *проектирующим перпендикуляром* в случае прямоугольной проекции и *проектирующим отрезком* в случае любой параллельной проекции.

Одно из важнейших свойств параллельных проекций выражается следующей теоремой:

Теорема 66. *Параллельные проекции двух данных равных отрезков одной прямой на одну и ту же прямую l равны между собою; если каждый из данных отрезков лежит по одну сторону от прямой l, то разность отрезков, проектирующих концы одного из данных отрезков, равна разности отрезков, проектирующих концы другого.*

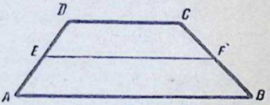
Доказательство. Пусть AB и CD (черт. 68) — два равных отрезка одной прямой; A_0, B_0, C_0 и D_0 — проекции точек A, B, C и D на прямую l. Мы должны доказать, что $A_0B_0 = C_0D_0$ и что $BB_0 - AA_0 = DD_0 - CC_0$.

Для доказательства обозначим через K и L точки пересечения прямых BB_0 и DD_0 с прямыми, проходящими соответственно через A и C и параллельными l. Треугольники ABK и CDL равны по второму признаку равенства, откуда $AK = CL$ и $BK = DL$. По теореме 54 имеем: $AK = A_0B_0$; $CL = C_0D_0$; $AA_0 = KB_0$; $CC_0 = LD_0$. Из этих равенств легко вытекают оба утверждения теоремы.

Покажем теперь, что известную теорему о средней линии трапеции (т. е. выпуклого многоугольника с параллельными противоположными сторонами) можно рассматривать как частный случай только что доказанной теоремы.

Теорема 67. *Средняя линия трапеции, т. е. отрезок, соединяющий середины двух её боковых сторон, параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.*

Доказательство. Пусть E — середина стороны AD, F — середина стороны BC трапеции $ABCD$ (черт. 69). Параллельность прямых AB и EF мы докажем от противного.



Черт. 69.

Предположим, что EF не параллельна AB. В таком случае проведём через точку E прямую, параллельную AB, и обозначим (не показанную на чертеже) точку её пересечения с BC через F'. Точка F' есть параллельная проекция точки E на сторону BC по направлению AB. Так как отрезки AE и ED равны, то, в силу теоремы 66, будут равны и их параллельные проекции, т. е. $BF' = F'C$. Точка F' есть середина стороны BC и поэтому совпадает с F. Следовательно, прямая EF параллельна AB.

Далее, из общей теоремы 66 имеем $AB-EF=EF-DC$, откуда

$$EF=\frac{1}{2}(AB+DC).$$

На теореме 66 основано также выполнение следующего построения.

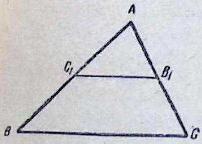
Построение 17. Разделить отрезок на данное число равных частей.

Способ решения этой задачи известен из школьного курса геометрии.

Заметим только, что решение этой задачи непосредственно доказывает существование точек, делящих отрезок на любое данное число равных частей.

§ 29. Некоторые свойства треугольников и четырёхугольников.

Свойства параллельных прямых, рассмотренные в предыдущих параграфах, дают возможность доказать ряд свойств треугольника и четырёхугольника, которые мы сейчас и рассмотрим.



Черт. 70.

Теорема 68. *Средняя линия треугольника, т. е. отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллельна третьей стороне и равна её половине* (черт. 70).

Теорема 69. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка отсекает от каждой медианы одну треть, считая от середины соответствующей стороны.*

Доказательство этих двух теорем имеется в школьных учебниках.

Точка пересечения медиан треугольника называется его центром тяжести[1] (или иногда центроидом).

---

[1] Это название обязано своим происхождением той роли, которую точка пересечения медиан играет в механике.

Теорема 70. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство этой теоремы, основанное на теореме 57, следствие 1, также имеется в школьных учебниках.

Точка пересечения высот треугольника называется его ортоцентром.

Итак, *во всяком треугольнике перпендикуляры, восставленные к сторонам в их серединах, пересекаются в одной точке* (теорема 57, следствие 1), и эта точка служит центром описанной окружности; *биссектрисы трёх углов пересекаются в одной точке* (теорема 60), и эта точка служит центром окружности, вписанной в треугольник (§ 25, построение 15а); *три медианы пересекаются в одной точке* — центре тяжести треугольника (теорема 69); *три высоты пересекаются в одной точке* — ортоцентре треугольника (теорема 70).

Четыре точки — центр описанной окружности, центр вписанной окружности, центр тяжести и ортоцентр — называют иногда замечательными точками треугольника; к их числу можно было бы с полным правом отнести и три центра вневписанных окружностей (§ 25, построение 15а).

В дальнейшем (§ 73) мы познакомимся и с другими точками, которые также заслуживают названия замечательных точек треугольника.

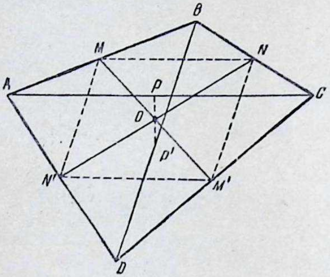
Переходя теперь к четырёхугольникам, мы будем предполагать известными понятия трапеции, параллелограма, прямоугольника, ромба и квадрата, а также простейшие свойства этих фигур.

Ограничимся поэтому доказательством одного свойства четырёхугольников произвольного вида.

Теорема 71. *Во всяком четырёхугольнике середины сторон служат вершинами параллелограма; отрезки, соединяющие середины двух пар противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходят через одну точку и делятся в этой точке пополам.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ (черт. 71) — данный четырёхугольник. Обозначим через M и M' середины сторон AB и CD, через N и N' — середины сторон BC и DA, через P и P' — середины диагоналей AC и BD.

Каждый из отрезков MN и $M'N'$ параллелен отрезку AC и равен его половине; следовательно, четырёхугольник $MNM'N'$ — параллелограм. Применяя то же рассуждение к (непростому) четырёхугольнику $ABDC$, мы убедимся, что и четырёхугольник $MPM'P'$ будет параллелограмом. Так как диагонали параллелограма делятся в точке пересечения пополам, то оба отрезка NN' и PP' проходят через середину O отрезка MM' и делятся в точке O пополам.



Черт. 71.

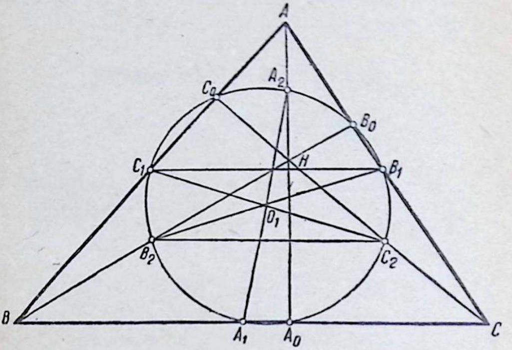
В заключение докажем ещё, пользуясь только что доказанными свойствами четырёхугольника, следующую теорему о треугольнике.

Теорема 72. *Во всяком треугольнике середины трёх сторон, основания трёх высот и середины трёх отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.*

Эта окружность называется окружностью девяти точек треугольника.

Доказательство. Пусть ABC (черт. 72) — данный треугольник. Обозначим через A_0, B_0 и C_0 — основания его высот; через A_1, B_1 и C_1 — середины сторон; через H — ортоцентр; через A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков AH, BH и CH.

Применим только что доказанную теорему 71 к четырёхугольнику $ABHC$: серединами противоположных сторон будут точки B_1, B_2 и C_1, C_2, а серединами диагоналей — точки A_1, A_2. Следовательно, отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 проходят через одну точку O_1 и делятся в этой точке пополам. Те параллелограмы, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы 71, а именно, параллелограмы $B_1C_1B_2C_2$ и $A_1B_1A_2B_2$ обращаются в данном случае в прямоугольники,



Черт. 72.

так как $B_1C_1 \parallel BC$; $C_1B_2 \parallel AA_0$ и $A_1B_1 \parallel AB$; $B_1A_2 \parallel CC_0$. В силу того, что диагонали прямоугольников равны, имеем $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$.

Отсюда следует, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной окружности; эта окружность пройдёт также через точки A_0, B_0 и C_0, так как углы $\angle A_1A_0A_2$, $\angle B_1B_0B_2$ и $\angle C_1C_0C_2$ — прямые.

ГЛАВА IV.

ДВИЖЕНИЯ И СИММЕТРИЯ.

§ 30. Понятие о движении.

В одной из предыдущих глав настоящего курса (гл. II) мы рассматривали равные фигуры. При этом мы касались лишь свойств самих равных фигур и вовсе не затрагивали вопроса о взаимном расположении равных фигур на плоскости. Переходя теперь к этому вопросу, мы введём понятие о движении фигуры.

Под «фигурой» мы будем понимать в настоящей главе всегда такую фигуру, в которой не все точки лежат на одной прямой.

Под движением (или перемещением), которое переводит данную фигуру **F** в данную равную ей фигуру **F**′, в геометрии понимают просто то соответствие, которое существует между каждой точкой фигуры **F** и точкой фигуры **F**′.

Можно также сказать, что движение есть преобразование данной фигуры в фигуру, ей равную. Таким образом, в отличие от понимания движения, скажем, в механике, в геометрии мы рассматриваем лишь исходное и конечное положения точек данной фигуры, вовсе не принимая во внимание «промежуточных» положений точек фигуры.

Понимаемое таким образом движение обладает следующими свойствами:

1°. *Движение представляет собой взаимно однозначное соответствие между точками обеих равных фигур, или даже между точками всей плоскости.*

Это свойство вытекает из основной теоремы 49.

Если каждой точке A фигуры **F** взаимно однозначно соответствует точка A' фигуры **F**′, то и каждой точке A' соответствует точка A; это второе соответствие называется обратным по отношению к данному.

2°. *Соответствие, обратное движению, есть также движение.*

Если данное соответствие есть движение, то фигура $\mathbf{F}'$ равна фигуре $\mathbf{F}$. При этом и фигура $\mathbf{F}$ равна фигуре $\mathbf{F}'$, и потому обратное соответствие есть также движение.

3°. *Результат последовательного выполнения двух движений есть также движение.*

Действительно, если фигура $\mathbf{F}'$ получается из $\mathbf{F}$ с помощью первого движения, а фигура $\mathbf{F}''$ из $\mathbf{F}'$ — с помощью второго движения, то как фигура $\mathbf{F}$, так и $\mathbf{F}''$ равны фигуре $\mathbf{F}'$. Но две фигуры, равные третьей, равны между собой. Поэтому фигуры $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}''$ равны, и переход от фигуры $\mathbf{F}$ к $\mathbf{F}''$ есть движение.

Последовательное выполнение двух движений обычно называется в геометрии умножением движений, а движение, получающееся в результате последовательного выполнения двух движений, — произведением двух движений[1]).

Заметим, что в результате выполнения данного движения, а затем движения, ему обратного, каждая точка фигуры остаётся на месте. Такое соответствие, в котором каждой точке фигуры соответствует та же самая точка, мы рассматриваем как частный случай движения — тождественное движение.

4°. *Точки, лежащие на одной прямой, переходят при движении в точки, также лежащие на одной прямой; точки некоторого отрезка — также в точки некоторого отрезка.*

Это свойство движения вытекает из соответствующего свойства равных фигур.

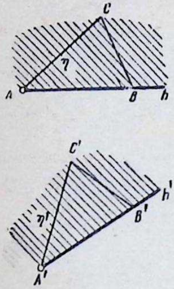
Отсюда следует, что при движении луч переходит в луч, полуплоскость — в полуплоскость, внутренняя область угла, треугольника или многоугольника — также во внутреннюю область.

5°. *Существует движение и притом единственное, в котором данной точке A соответствует наперёд задан-*

---

[1]) В механике вместо «умножение движений» говорят «сложение движений», а вместо «произведение движений» — «результирующее движение». Эти выражения применяют иногда и в геометрии.

ная точка A', данному лучу h, выходящему из A — наперёд заданный луч h', выходящий из A', и данной полуплоскости η, выходящей из луча h, — наперёд заданная полуплоскость η', выходящая из луча h' (черт. 73).



Черт. 73.

Действительно, какой-либо точке B луча h соответствует в искомом движении вполне определённая точка B' луча h', для которой $AB = A'B'$; далее какой-либо точке C полуплоскости η соответствует точка C', определяемая условием $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Два равных треугольника ABC и $A'B'C'$ определяют две равные фигуры $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$, а значит, и то движение, о котором идёт речь.

Мы доказали свойства 1—5, опираясь на свойства равных фигур. Заметим, что в школьном курсе геометрии мы поступаем как раз наоборот. Например, при доказательстве первого признака равенства треугольников мы опираемся на существование такого движения, в котором точка A переходит в A', луч AB — в луч $A'B'$, и т. д. Таким образом, свойство 5 (как и другие свойства движения) мы принимаем в школе за аксиому.

Соответственно двум видам равенства фигур (§ 19) мы различаем и два вида движений: если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ — собственно-равны, то движение, переводящее $\mathbf{F}$ в $\mathbf{F}'$, называется движением первого рода, а если они зеркально-равны, то — движением второго рода. *Произведение двух движений одного и того же рода есть движение первого рода, произведение двух движений различного рода есть движение второго рода.*

Ограничиваясь перечисленными общими свойствами движений, мы перейдём теперь к изучению отдельных типов движений и к их классификации.

§ 31. Отражение от прямой.

Как известно, две точки A и A' называются симметричными относительно некоторой прямой s, если отрезок AA' перпендикулярен к прямой s и делится этой прямой пополам.

Аналогично, две фигуры, состоящие из точек, попарно симметричных относительно данной прямой, называются симметричными относительно этой прямой.

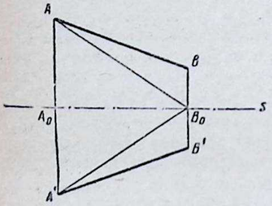
Прямая s называется при этом осью отражения (или осью симметрии).

Точки, лежащие на оси отражения, совпадают с точками, им симметричными.

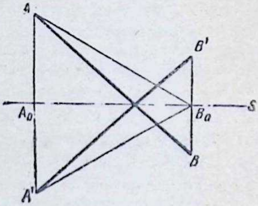
Основное свойство симметричных точек находит своё выражение в следующей теореме.

Теорема 73. *Если концы двух отрезков соответственно симметричны относительно некоторой прямой, то эти отрезки равны.*

Доказательство. Пусть точки A' и B' (черт. 74 и 75) соответственно симметричны точкам A и B относительно прямой s. Обозначим через A_0 и B_0 точки пересечения прямой s с прямыми AA' и BB'.



Черт. 74.



Черт. 75.

Треугольники AA_0B_0 и $A'A_0B_0$ равны (по равенству катетов), откуда $AB_0 = A'B_0$ и $\angle AB_0A_0 = \angle A'B_0A_0$. Следовательно, и углы $\angle AB_0B$ и $\angle A'B_0B'$ равны как разности (черт. 74) или суммы (черт. 75) соответственно равных углов $\angle BB_0A_0$, $\angle AB_0A_0$ и $\angle B'B_0A_0$, $\angle A'B_0A_0$. Треугольники AB_0B и $A'B_0B'$ будут равны по первому признаку, откуда и следует, что $AB = A'B'$.

При доказательстве мы неявно предполагали, что ни одна из точек A и B не лежит на прямой s и что прямая AB не перпендикулярна к s; в этих частных случаях доказательство упрощается.

Следствия. 1. *Две фигуры, симметричные относительно прямой, равны.*

Действительно, если точки A', B', C', ... фигуры F' симметричны относительно данной прямой точкам A, B, C, ... фигуры F, то мы имеем по доказанной теореме $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, ... Эти равенства и показывают, что фигуры F и F' равны.

2. *Фигура, симметричная отрезку, есть отрезок; фигура симметричная прямой, — прямая; и т. д.*

3. *Соответствие между точками некоторой фигуры* F *и точками фигуры* F'*, симметричной ей относительно прямой, есть движение.*

Этот частный вид движения называется отражением от прямой или просто отражением [употребляются также выражения: «зеркальное отражение», «симметрия относительно прямой», «осевая симметрия» [1])].

4. *Любые две фигуры, симметричные относительно прямой, зеркально-равны* (а не собственно-равны) *друг другу.*

Действительно, пусть A_0 и B_0 — две точки оси отражения, C — какая-либо точка данной фигуры, C' — точка, ей симметричная. Треугольнику A_0B_0C соответствует в данном отражении треугольник A_0B_0C'.

Эти два треугольника противоположно ориентированы, так как точки C и C' лежат по разные стороны от прямой A_0B_0. Следовательно (по теореме 51), и любые два соответственных треугольника симметричных фигур будут противоположно ориентированы.

Таким образом, *отражение от прямой есть движение второго рода.*

Как мы уже отмечали, всякая точка, лежащая на оси отражения, совпадает с точкой, ей симметричной.

Точка, совпадающая с той точкой, которая соответствует ей в некотором движении, называется двойной (или неподвижной или инвариантной) точкой этого движения. Аналогично определяется двойная (или инвариантная)

---

[1] Мы предпочитаем употреблять здесь термин отражение, а не термин симметрия, так как в противном случае выражение «симметрия» приобретает двоякий смысл — оно обозначает и некоторое движение и некоторое свойство фигуры (см. ниже, § 36).

прямая: двойной прямой называется прямая, совпадающая с той прямой, которая соответствует ей в некотором движении. Точки двойной прямой не будут, вообще говоря, двойными точками (при движении они переходят одна в другую).

Мы можем теперь сказать, что *точки, лежащие на оси отражения, будут двойными точками.*

Двойными прямыми отражения будут, очевидно, *ось отражения и все прямые, к ней перпендикулярные.*

Заметим, что понятие двойных (или инвариантных) точек и прямых мы будем применять не только в случае движения, но и в случае других преобразований, которые мы будем далее рассматривать.

§ 32. Перенос; поворот.

Рассмотрим теперь произведение двух отражений.

Так как отражение есть движение второго рода (две фигуры, симметричные относительно прямой, зеркально-равны), то произведение двух отражений есть движение первого рода. Мы рассмотрим отдельно два случая — когда оси обоих отражений параллельны и когда они пересекаются.

Теорема 74. *Произведение двух отражений от параллельных осей представляет собой движение, обладающее следующим свойством: все отрезки, каждый из которых соединяет две соответственные точки, равны, параллельны и направлены в одну сторону. Каждый из них равен удвоенному расстоянию между двумя осями.*

Движение, обладающее указанным свойством, называется переносом (употребляются и другие термины — поступательное перемещение, параллельное перемещение, параллельное перенесение и т. д.).

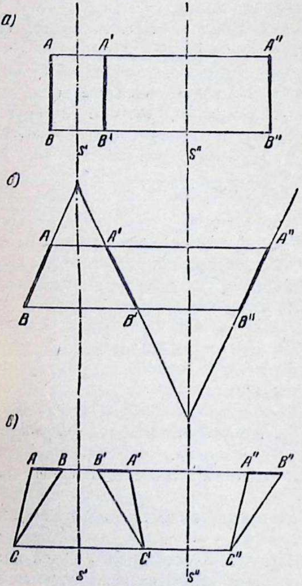
Доказательство. Пусть s' — ось первого отражения, s'' — ось второго отражения (черт. 76). Обозначим через A, B, C, ... точки данной фигуры; через A', B', C', ... — точки, симметричные им относительно прямой s'; наконец, через A'', B'', C'', ... — точки, симметричные точкам A', B', C', ... относительно прямой s''.

Если прямая AB параллельна обеим осям (черт. 76, a), то и прямые $A'B'$ и $A''B''$ будут параллельны обеим осям. В этом случае отрезки AA'' и BB'' будут равны, параллельны и направлены в одну сторону, как отрезки параллельных прямых AA'' и BB'', заключённые между параллельными прямыми.

Если прямая AB пересекает обе оси (черт. 76, *б*), но не перпендикулярна к ним, то прямые AB и $A''B''$ будут параллельны, как образующие равные накрест лежащие углы с секущей $A'B'$. Отрезки AA'' и BB'' будут опять равны, параллельны и направлены в одну сторону по той же причине, что и выше.

Наконец, если прямая AB перпендикулярна к обеим осям, рассмотрим какую-либо точку C данной фигуры, не лежащую на прямой AB (черт. 76, *в*). Отрезки AA'' и CC'' будут, по доказанному, равны, параллельны и направлены в одну сторону, и то же будет иметь место для отрезков CC'' и BB''. Отсюда следует, что отрезки AA'' и BB'' равны и параллельны. То обстоятельство, что они и в этом случае направлены в одну сторону, мы будем считать очевидным.

Итак, любые два отрезка AA'' и BB'', каждый из которых соединяет две соответственные точки, равны, параллельны и направлены в одну сторону.



Черт. 76.

Чтобы показать, что каждый из них равен удвоенному расстоянию между осями, достаточно выбрать за точку A какую-либо точку оси s'. Точка A' будет совпадать с A, а расстояние от точки A до точки A'' будет равно удвоенному расстоянию от точки A до оси s'', т. е. удвоенному расстоянию между осями.

Следствия. 1. *Всякий перенос можно рассматривать как произведение двух отражений; оси s' и s'' обоих отражений перпендикулярны к направлению переноса, а расстояние между ними равно половине отрезка, соединяющего соответственные точки; направление от оси s' к оси s'' совпадает с направлением переноса.*

2. *Перенос не имеет двойных точек, но имеет бесчисленное множество двойных прямых: этими прямыми будут все прямые, параллельные направлению переноса.*

Понятие переноса естественным образом приводит к понятию равенства векторов, так как любой из равных отрезков AA'', BB'', CC'', ... , параллельных между собой и направленных в одну сторону, можно использовать для характеристики рассматриваемого переноса.

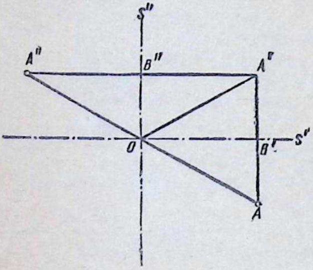
Перейдём теперь к тому случаю, когда оси обоих отражений пересекаются, и начнём со взаимно перпендикулярных осей.

Теорема 75. *Произведение двух отражений от взаимно перпендикулярных осей представляет собой движение, обладающее следующим свойством: все отрезки, каждый из которых имеет своими концами две соответственные точки обеих фигур, имеют общую середину.*

Движение, обладающее этим свойством, называется иногда отражением от точки (употребляются также выражения «симметрия относительно точки» или «центральная симметрия»).

Точка O — общая середина всех отрезков AA', BB', ..., соединяющих попарно соответственные точки обеих фигур,— называется центром отражения (или центром симметрии). Две точки A и A' называются симметричными относительно точки O, если точка O есть середина отрезка AA'; две фигуры, состоящие из точек, попарно симметричных относительно данной точки O, называются симметричными относительно этой точки.

Доказательство. Пусть s' и s'' — оси обоих отражений. O — точка их пересечения (черт. 77). Обозначим через A произвольную точку данной фигуры, через A' — точку, симметричную точке A относительно s', через A'' — точку, симметричную точке A' относительно s'', через B' и B'' — точки пересечения прямых AA' и $A'A''$ соответственно с s' и s''. Четыре прямоугольных треугольника — OAB', $OA'B'$, $A'OB''$ и $A''OB''$, очевидно, равны. Из равенства этих треугольников вытекает, что $\angle AOB'+\angle B'OB''+\angle B''OA''=2d$, так что точки A, O и A'' лежат на одной прямой, и что $AO=OA''$, так что отрезок AA'' делится в точке O пополам.



Черт. 77.

Следствие. *Отражение от точки имеет одну двойную точку — центр отражения — и бесчисленное множество двойных прямых: этими прямыми будут все прямые, проходящие через центр отражения.*

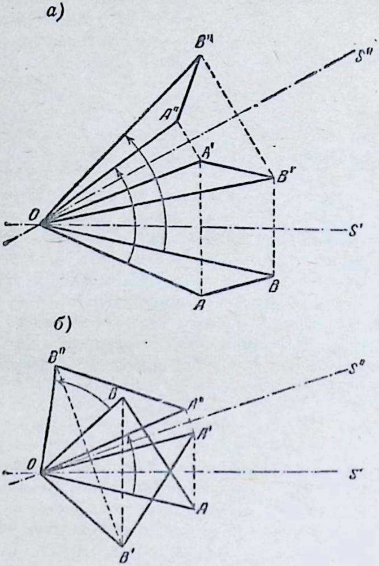
Рассмотрим, наконец, случай осей, пересекающихся под произвольным углом, отличным от прямого.

Теорема 76. *Произведение двух отражений от осей, пересекающихся под углом, отличным от прямого, представляет собой движение, обладающее следующими свойствами: каждые две соответственные точки равноудалены от некоторой точки O; все отрезки, каждый из которых имеет своими концами две соответственные точки, видны из этой точки O под равными и одинаково направленными углами.*

Точка O есть точка пересечения обеих осей; угол φ, под которым из точки O видны отрезки, соединяющие попарно соответственные точки, равен удвоенному острому углу между осями s' и s'' и имеет с ним одинаковое направление.

Движение, обладающее указанными свойствами, называется **поворотом** (или вращением); точка O называется **центром поворота**; угол φ — **углом** поворота.

Доказательство. Пусть s' — ось первого отражения, s'' — ось второго отражения, O — точка пересечения обеих осей (черт. 78). Обозначим через A и B какие-либо две точки данной фигуры, не лежащие с точкой O на одной прямой; через A' и B' — точки, им симметричные относительно



Черт. 78.

оси s'; через A'' и B'' — точки, симметричные точкам A' и B' относительно оси s''. В силу свойств отражения от прямой, треугольники OAB, $OA'B'$ и $OA''B''$ будут равны. Далее, треугольники $\overline{OAB}$ и $\overline{OA'B'}$, а также $\overline{OA'B'}$ и $\overline{OA''B''}$ будут иметь противоположные ориентации (теорема 73, следствие 4). Следовательно, треугольники $\overline{OAB}$ и $\overline{OA''B''}$ будут ориентированы одинаково. Поэтому углы $\angle\overline{AOB}$ и $\angle\overline{A''OB''}$ будут равны и одинаково направлены.

Если лучи OB и OA'' совпадают, то это и означает, что углы $\angle AOA''$ и $\angle BOB''$ равны и одинаково направлены.

Если же лучи OB и OA'' различны, то, прибавляя к углам $\angle AOB$ и $\angle A''OB''$ один и тот же угол BOA'' (черт. 78,*а*), или, при другом расположении точек, вычитая его (черт. 78,*б*), мы получим равные и одинаково направленные углы $\angle AOA''$ и $\angle BOB''$.

Чтобы показать, что каждый из этих углов равен удвоенному острому углу между осями s' и s'' и имеет с ним одинаковое направление, достаточно выбрать точку A так, чтобы она лежала на оси s'. Точка A' будет совпадать с A, а угол AOA'' будет, очевидно, иметь указанную величину.

Следствия. 1. *Всякий поворот можно рассматривать как произведение двух отражений. Оси s' и s'' обоих отражений проходят через центр поворота. Угол между ними (в направлении от s' к s'') равен половине угла поворота и имеет с ним одинаковое направление.*

2. *Отражение от точки можно рассматривать как частный случай поворота, когда угол поворота — развёрнутый.* При этом оси s' и s'' взаимно перпендикулярны.

3. *Поворот имеет только одну двойную точку — центр поворота.*

4. *Поворот, не являющийся отражением от точки, не имеет двойных прямых.*

Действительно, если прямая AB была бы двойной прямой, то она совпадала бы с прямой $A''B''$ и, следовательно, была бы симметрична с $A'B'$ как относительно прямой s', так и относительно прямой s''. Прямые s' и s'' совпадали бы с биссектрисами углов между прямыми AB и $A'B'$ и потому были бы взаимно перпендикулярными. Но это невозможно, так как данный поворот не есть отражение от точки.

Обратим ещё внимание на следующее весьма существенное обстоятельство. Из теорем 74 и 76 вытекает, что результат последовательного выполнения отражений от двух осей, вообще говоря, зависит от порядка, в котором выполнены оба отражения. Так, если бы в теоремах 74 и 76 выполнить сначала отражение от оси s'', а затем отражение от оси s', то направление переноса или направление угла поворота изменилось бы на противоположное. Исключением является произведение отражений от двух перпендикулярных осей (теорема 75). Здесь результат не зависит от порядка, в котором выполнены оба отражения.

Два отражения, и вообще два преобразования, называются перестановочными, если результат последовательного выполнения этих преобразований (произведение двух преобразований) не зависит от порядка, в котором выполняются оба преобразования.

Пользуясь этим термином, можем сформулировать отмеченное нами свойство отражений следующим образом:

Теорема 77. *Два отражения не перестановочны, за исключением того случая, когда их оси взаимно перпендикулярны.*

§ 33. Классификация движений.

От рассмотрения отдельных частных видов движений (отражение, перенос, поворот) мы обратимся теперь к рассмотрению движений произвольного вида и к их классификации. В основе этого изучения движений будет лежать следующая теорема.

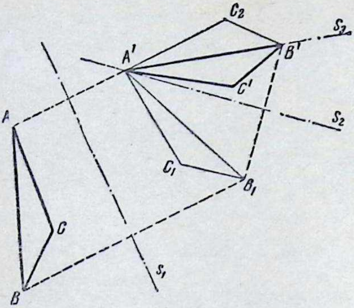
Теорема 78. *Всякое движение можно рассматривать как произведение самое большее трёх отражений.*

Доказательство. Пусть некоторое движение переводит три не лежащие на одной прямой точки A, B и C фигуры F в точки A', B' и C' фигуры F' (черт. 79).

Обозначим через s_1 прямую, перпендикулярную к отрезку AA' и проходящую через его середину. Отражение от прямой s_1 переводит точки A, B и C фигуры F в точки A', B_1 и C_1 некоторой новой фигуры F_1. (Если точка A случайно совпадает с A', отражение от прямой s_1 рассматривать нет надобности, а за фигуру F_1 можно принять данную фигуру F).

Обозначим, далее, через s_2 прямую, перпендикулярную к отрезку B_1B' и проходящую через его середину; так как $A'B_1 = AB = A'B'$, то точка A' лежит на прямой s_2. Отражение от прямой s_2 переводит точки A', B_1 и C_1 фигуры F_1 в точки A', B' и C_2 некоторой новой фигуры F_2. (Если точка B_1 случайно совпадает с B', отражение от прямой s_2 рассматривать нет надобности, и за фигуру F_2 можно принять F_1.)

Обозначим, наконец, через s_3 прямую, перпендикулярную к отрезку C_2C' и проходящую через его середину; так как $A'C_2 = A'C_1 = AC = A'C'$ и $B'C_2 = B_1C_1 = BC = B'C'$, то точки A' и B' лежат на прямой s_3. Отражение от прямой s_3



Черт. 79.

переводит точки A', B' и C_2 фигуры $\mathbb{F}_2$ в точки A', B' и C' фигуры $\mathbb{F}_3$. (Если точки C_2 и C' совпадают, то отражение от прямой s_3 рассматривать нет надобности, и за фигуру $\mathbb{F}_3$ можно принять $\mathbb{F}_2$.)

Из сказанного следует, что произведение трёх отражений от прямых s_1, s_2 и s_3 (или в отмеченных выше частных случаях — некоторых из этих отражений) преобразует точки A, B, C данной фигуры $\mathbb{F}$ в точки A', B', C' некоторой фигуры $\mathbb{F}_3$, равной фигуре $\mathbb{F}$, а следовательно, и фигуре $\mathbb{F}'$. Эта фигура $\mathbb{F}_3$ совпадает с $\mathbb{F}'$ (теорема 49, следствие 2), так как три её точки A', B' и C' совпадают с соответствующими им точками фигуры $\mathbb{F}'$.

Итак, данное движение есть произведение трёх отражений от прямых s_1, s_2 и s_3 (или, в частных случаях, некоторых из этих отражений).

Следствие. *Всякое движение первого рода, отличное от тождества, можно рассматривать как произведение двух отражений.*

Действительно, так как отражение от прямой есть движение второго рода, то движение первого рода может быть произведением только чётного числа отражений. В силу доказанной теоремы, это число отражений равно двум.

В § 32 было показано, что произведение двух отражений есть поворот или перенос. Поэтому сформулированное выше следствие из теоремы 78 можно высказать теперь в виде следующей теоремы.

Теорема 79. *Всякое движение первого рода есть перенос или поворот.*

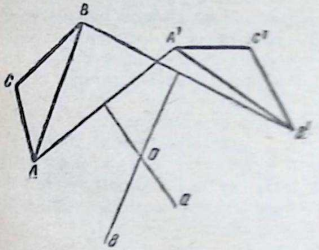
Иначе говоря, всякие две собственно-равные фигуры получаются одна из другой с помощью переноса или поворота.

Случай переноса легко отличается от случая поворота. В случае переноса любые два соответственных отрезка обеих фигур параллельны и направлены в одну и ту же сторону; в случае поворота это свойство не имеет места.

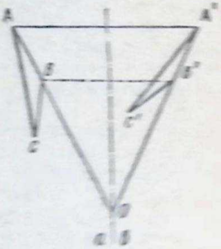
Если две собственно равные фигуры получаются одна из другой с помощью поворота, то возникает вопрос об отыскании центра поворота.

Построение 18. Построить центр поворота двух собственно-равных фигур.

Центр поворота O равноудалён от любых двух соответственных точек A и A' (или B и B') обеих фигур. Поэтому он лежит на прямой a, перпендикулярной к отрезку AA' и проходящей через его середину. Точка пересечения двух таких перпендикуляров a и b и будет искомым центром поворота O (черт. 80).



Черт. 80.



Черт. 81.

Центр поворота O не определяется этим построением, если перпендикуляры a и b совпадают (черт. 81). Но в этом случае искомым центром поворота будет, очевидно, точка пересечения прямых AB и $A'B'$.

Если перпендикуляры a и b параллельны, то данное движение будет, как легко видеть, переносом, и центра поворота не существует.

Переходим теперь к движениям второго рода.

В силу теоремы 78, всякое движение второго рода представляет собой отражение или может быть представлено в виде произведения трёх отражений. Рассмотрим вторую возможность более подробно и докажем для этого случая следующую теорему.

Теорема 80. *Всякое движение второго рода, отличное от отражения, представляет собой произведение переноса на отражение, ось которого параллельна направлению переноса.*

Такого рода движение называют иногда скользящим отражением[1]; ось отражения, о котором говорится в теореме, называется осью скользящего отражения.

Доказательство. Пусть некоторое движение второго рода переводит точки A и B фигуры $\mathbf{F}$ в точки A' и B' фигуры $\mathbf{F}'$ (черт. 82). Обозначим через A_1 середину отрезка AA'. Проведём через точку A_1 прямую s_1, параллельную биссектрисе MN угла между направленными прямыми AB и $A'B'$[2]. Если отрезки AB и $A'B'$ параллельны и направлены в одну сторону, то за s_1 принимаем параллельную им прямую, а если — в противоположные стороны, то перпендикулярную к ним прямую.)

Отражение от прямой s_1 переводит точки $A', B', \ldots$ фигуры $\mathbf{F}'$ в точки $A_0, B_0, \ldots$ некоторой новой фигуры $\mathbf{F}_0$, собственно-равной фигуре $\mathbf{F}$. При этом отрезки A_0B_0 и AB фигур $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{F}$ будут (в силу выбора направления оси s_1) параллельны и одинаково направлены. Следовательно, фигура $\mathbf{F}_0$ получается из $\mathbf{F}$ с помощью переноса. Так как $AA_1 = A_1A'$, то точки A и A' равноудалены от прямой s_1. Следовательно,

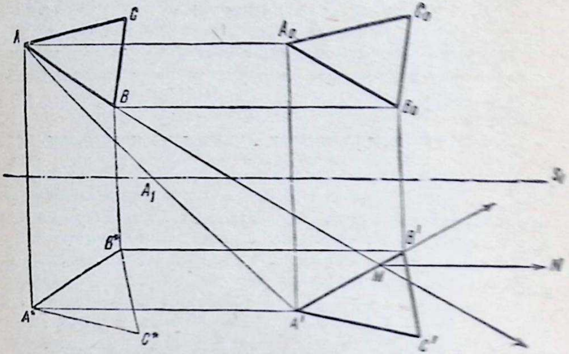
---

[1] Это название принято, например, в геометрической кристаллографии.

[2] В то время как две прямые линии образуют при своём пересечении четыре угла и имеют две биссектрисы (теорема 21), две направленные прямые определяют, очевидно, одну биссектрису.

и точки A и A_0 равноудалены от прямой s_1. Поэтому направление переноса AA_0 параллельно прямой s_1.

Таким образом, фигура F_0 получается из F с помощью переноса, а фигура F' — из F_0 с помощью отражения от прямой s_1, параллельной направлению переноса.



Черт. 82.

Следствия. 1. *Скользящее отражение не имеет двойных точек и имеет одну двойную прямую — ось скользящего отражения.*

2. *Перенос и отражение от оси, параллельной направлению переноса, составляющие данное скользящее отражение, перестановочны.*

Действительно, выполняя сначала отражение получим фигуру $\mathrm{F}^*(A^*, B^*, \ldots)$ (черт. 82), а из неё с помощью переноса — фигуру F'.

Замечание. Так как всякий перенос можно представить в виде произведения двух отражений (теорема 74, следствие 1), то полученное нами разложение движения второго рода на перенос и отражение равносильно представлению его в виде произведения трёх отражений (теорема 78). При этом оси первых двух отражений обе перпендикулярны к оси третьего отражения.

Окончательно получаем следующую классификацию движений:

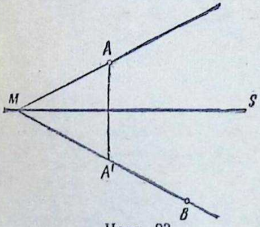
I. Движение первого рода:
   a) поворот (2),
   b) перенос (2),
   c) тождественное движение (0);

II. Движение второго рода:
   a) скользящее отражение (3),
   b) отражение (1).

Цифра в скобках указывает наименьшее число отражений, с помощью перемножения которых можно получить движение данного типа.

§ 34. Применение к задачам на построение.

Все рассмотренные в предыдущих параграфах виды движений — отражение, перенос, поворот и скользящее отражение — находят, в частности, применение при решении задач на построение. В соответствии с тем, какого вида движение применяется при построении, говорят о различных «методах» решения — о методе симметрии, если применяется отражение (симметрия относительно прямой), о методе параллельного перенесения, если применяется перенос (параллельное перенесение), о методе вращения, если применяется поворот (вращение).



Черт. 83.

Приводим примеры применения всех названных выше видов движения к отдельным задачам [1]). В каждом примере мы указываем в скобках вид применяемого движения.

Пример 1 (отражение). Даны прямая s и две точки A и B по разные стороны от неё. Найти на прямой s такую точку M, чтобы угол AMB имел прямую s своей биссектрисой.

Если прямая s служит биссектрисой угла AMB, то точка A', симметричная A относительно s, лежит, очевидно, на прямой MB (черт. 83).

---

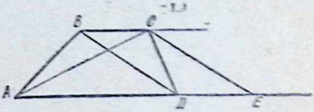
[1]) За подробностями отсылаем к книге Александрова [2].

Отсюда вытекает такое построение: строим точку A', симметричную A относительно данной прямой s; точка пересечения прямой $A'B$ с прямой s и будет искомой точкой M.

Задача не имеет решения, если точки A и B равноудалены от s, не будучи симметричными относительно s; она имеет бесчисленное множество решений, если точки A и B симметричны относительно s. Во всех остальных случаях задача имеет единственное решение.

Пример 2 (перенос). Построить трапецию, зная её основания и диагонали.

Пусть $ABCD$ (черт. 84) — искомая трапеция. Переносим её диагональ BD (параллельно самой себе) в положение CE; величина и направление переноса определяются отрезком BC. Стороны треугольника ACE соответственно равны сумме оснований и двум диагоналям трапеции.

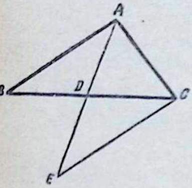


Черт. 84.

Отсюда вытекает такое построение: строим треугольник ACE, имеющий своими сторонами сумму оснований и обе диагонали трапеции. На основании этого треугольника откладываем (для определённости от вершины E) отрезок ED, равный меньшему основанию трапеции. Затем строим отрезок CB, равный и параллельный отрезку ED и направленный в ту же сторону. Трапеция $ABCD$ и будет искомой.

Задача имеет решение и притом единственное, если возможно построить треугольник, имеющий своими сторонами обе диагонали и сумму оснований искомой трапеции.

Аналогично решается и более простая задача: построить трапецию по четырём её сторонам. Решение предоставляем читателю.



Черт. 85.

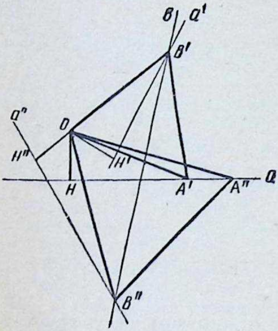
Пример 3 (отражение от точки). Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

Пусть ABC (черт. 85) — искомый треугольник, в котором известны стороны AB и AC и медиана AD, проведённая к третьей стороне BC. Построим треугольник ECD, симметричный ABD относительно точки D. Для этого достаточно построить точку E, симметричную A относительно точки D. Так как $EC = AB$, то все три стороны треугольника ACE известны.

Отсюда вытекает такое построение. Строим треугольник ACE, стороны которого соответственно равны двум данным сторонам и удвоенной медиане искомого треугольника. Делим сторону AE в точке D пополам и строим точку B, симметричную C относительно точки D. Треугольник ABC — искомый.

Задача имеет решение и притом единственное, если возможно построить треугольник, стороны которого равны двум данным сторонам и удвоенной данной медиане искомого треугольника.

Пример 4 (поворот). Построить равносторонний треугольник, одной вершиной которого служит данная точка O, а две другие лежат соответственно на двух данных прямых a и b.



Черт. 86.

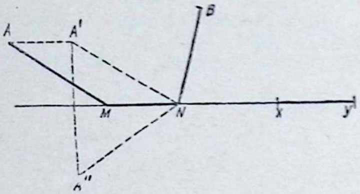
Пусть $OA'B'$ (или $OA''B''$) — искомый треугольник (черт. 86). Если повернуть отрезок OA' и вместе с ним прямую a на $\frac{2}{3}d$ около точки O, то точка A' совпадёт с точкой B', а прямая a займёт некоторое новое положение a'. Точку B' можно будет построить, если удастся построить прямую a' (не зная точек A' и B'). Но прямая a' получается из a при помощи поворота на $\frac{2}{3}d$ около точки O.

Отсюда вытекает такое построение: из точки O опускаем перпендикуляр OH на прямую a. Далее, строим точку H' так, что $OH=OH'$ и $\angle HOH'=\frac{2}{3}d$, и прямую a', проходящую через точку H' и перпендикулярную к OH'. Точка пересечения прямых a' и b и определяет положение вершины B'.

Так как угол в $\frac{2}{3}d$ можно отложить от отрезка OH в двух противоположных направлениях (прямую a можно повернуть на $\frac{2}{3}d$ около точки O в двух противоположных направлениях), то кроме отрезка OH' и прямой a' получим ещё второй аналогичный отрезок OH'' и прямую a''.

Задача имеет два решения, если обе прямые a' и a'' пересекают b (треугольники $OA'B'$ и $OA''B''$ на черт. 86), одно решение, если одна из этих прямых параллельна b, и бесчисленное множество решений, если одна из этих прямых совпадает с b.

Пример 5 (скользящее отражение). Даны отрезок XY (черт. 87) и две точки A и B, расположенные по одну сторону от прямой XY. Найти на прямой XY две такие точки M и N, чтобы отрезок MN был равен отрезку XY и направлен с ним в одну сторону и чтобы ломаная $AMNB$ имела наименьшую возможную длину.



Черт. 87.

Рассмотрим какую-либо ломаную $AMNB$, у которой точки M и N лежат на прямой XY, а отрезок MN равен XY и направлен в ту же сторону.

Выполним над точкой A перенос, определяемый по величине и направлению отрезком MN (или XY); получим точку A'. Далее построим точку A'', симметричную с A' относительно XY. Точка A'', очевидно, получается из A с помощью скользящего отражения. При этом

$$AMNB = AM + MN + NB = AM + NB + MN =$$
$$= A'N + NB + XY = A''N + NB + XY = A''NB + XY.$$

Ломаная $AMNB$ будет наименьшей, если $A''NB$ обратится в прямолинейный отрезок.

Отсюда вытекает такое построение. Найдя точку A'' с помощью скользящего отражения, как было указано, соединяем её с точкой B. Точка пересечения $A''B$ с данной прямой XY и определит положение искомой точки N.

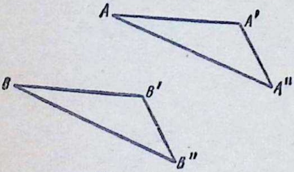
Задача всегда имеет решение и притом единственное.

§ 35. Умножение движений.

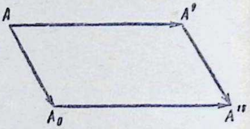
В предыдущем изложении мы уже рассматривали некоторые случаи умножения движений. Так, в § 32 мы рассматривали произведение двух произвольных отражений, в § 33 — произведение отражения от прямой на перенос вдоль этой прямой (скользящее отражение). В этом параграфе мы рассмотрим некоторые другие важные случаи умножения движений

Теорема 81. *Произведение двух переносов есть перенос и этот перенос не зависит от порядка сомножителей.*

Доказательство. Пусть A и B — две произвольные точки данной фигуры (черт. 88). Пусть далее A' и B' — те точки, в которые A и B переходят при первом переносе, а A'' и B'' — те точки, в которые A' и B' переходят при втором переносе.



Черт. 88.



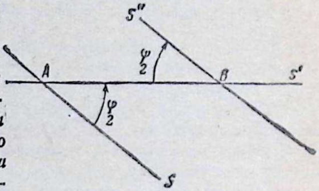
Черт. 89.

Так как отрезки AA' и BB' равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону, и теми же свойствами обладают и отрезки $A'A''$ и $B'B''$, то в силу равенства треугольников $AA'A''$ и $BB'B''$ и отрезки AA'' и BB'' равны и параллельны. Так как отрезки AA' и BB', а также $A'A''$ и $B'B''$ равны, параллельны и направлены в одну сторону, то прямые AB, $A'B'$ и $A''B''$ (не показанные на чертеже) параллельны. Следовательно, точки A'' и B'' лежат по одну сторону от прямой AB. Это показывает, что отрезки AA'' и BB'' направлены в одну сторону.

Итак, отрезки AA'' и BB'' равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону. Это и показывает, что произведение двух переносов есть перенос.

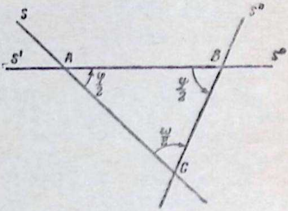
Независимость результирующего переноса от порядка, в котором выполняются данные переносы, вытекает очевидным образом из свойств параллелограма: если отрезки AA_0 и $A'A''$ (черт. 89) равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону, то и отрезки AA' и A_0A'' обладают теми же свойствами. Если поэтому над точкой A выполнить перенос, определяемый отрезком AA' или A_0A'', а также перенос, определяемый отрезком AA_0 или $A'A''$, то независимо от порядка, в котором выполняются эти переносы, мы получим одну и ту же точку A''.

Заметим, что операция умножения переносов (или, в других терминах, операция «сложения поступательных перемещений») приводит естественным путём к понятию сложения векторов.



Черт. 90.

Теорема 82. *Произведение двух поворотов около различных центров есть перенос, если углы поворота равны по абсолютной величине и противоположно направлены, и поворот — во всех остальных случаях.*



Черт. 91.

Доказательство. Пусть A и B (черт. 90 и 91) — центры обоих данных поворотов; φ и ψ — углы этих поворотов. Представим первый поворот в виде произведения отражений от двух осей s и s', вторая из которых совпадает с прямой AB (теорема 76, следствие 1). Точно так же представим второй поворот в виде произведения отражений от осей s' и s'', первая из которых совпадает с AB. При этом углы между s и s' и между s' и s'' будут равны соответственно $\frac{1}{2}\varphi$ и $\frac{1}{2}\psi$.

Произведение данных поворотов будет представлено в виде произведения четырёх отражений от осей s, s', s' и s'':

иначе говоря, — в виде произведения двух отражений от осей s и s'', так как произведение двух отражений от одной и той же оси даёт тождество.

Если углы φ и ψ равны по абсолютной величине и противоположно направлены (черт. 90), то оси s и s'' будут параллельны, и мы получим перенос.

В других случаях оси s и s'' будут пересекаться, и мы будем иметь поворот относительно точки их пересечения C. Угол между осями s и s'' будет равен половине угла результирующего поворота, $\frac{1}{2}\omega$ (черт. 91).

Заметим, что проведённое доказательство даёт непосредственно решение следующей задачи.

Построение 18а. Даны центры A и B двух поворотов и соответствующие углы поворота φ и ψ. Построить центр C и угол ω результирующего поворота.

Подчеркнём ещё, что положение точки C зависит от последовательности, в которой выполняются данные повороты. Построение центра поворота C' для того случая, когда выполняется сначала поворот около B, а затем около A, предоставляем читателю.

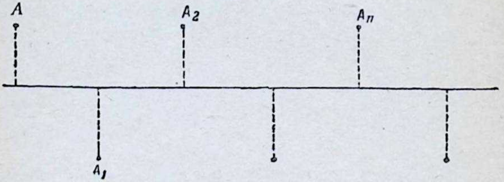
§ 36. Симметрия.

До сих пор мы рассматривали движения, преобразующие одну фигуру в другую. В приложениях же, да и в самой геометрии, существенную роль играют те движения, которые преобразуют данную фигуру в самоё себя.

Любая фигура допускает одно такое движение, а именно, тождественное движение, однако его рассмотрение не представляет интереса. Если же какая-либо фигура переходит в себя при некоторых движениях, отличных от тождественного, то говорят, что эта фигура обладает симметрией. Движения, преобразующие такую фигуру самоё в себя, называются преобразованиями симметрии.

Если данная фигура расположена в ограниченной части плоскости, например внутри некоторой окружности (если не оговорено противное, мы будем рассматривать только такие фигуры), то в таком случае эта фигура не может иметь своим преобразованием симметрии переноса или скользящего отражения. Действительно, выполняя такое преобразование под ряд несколько раз, мы получим последовательность точек $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ (черт. 92 и 93). Наше наглядное представление показывает, что при этом отрезок AA_n неограниченно возрастает[1]). Но это противоречит предположению об ограниченности фигуры.

Черт. 92.



Черт. 93.

Итак, ограниченная фигура может допускать лишь следующие преобразования симметрии: отражение от прямой, отражение от точки, поворот. Рассмотрим некоторые из возможных здесь случаев.

a) Фигура может допускать отражение от некоторой прямой s. Такая прямая называется осью симметрии фигуры, а фигура — симметричной относительно оси. В этом случае говорят, что фигура обладает осевой симметрией. Примеры фигур, обладающих такого рода симметрией, хорошо известны (черт. 94).

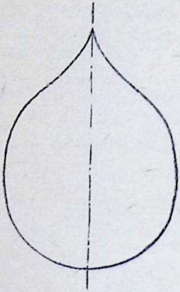
b) Фигура может допускать отражение от некоторой точки O. Такая точка называется центром симметрии фигуры, а фигура — симметричной относительно

---

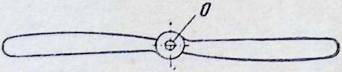
[1]) Строгое доказательство этого последнего утверждения потребовало бы введения новой аксиомы — аксиомы Архимеда [см. § 44, аксиома 8 (стр. 154)].

точки. В этом случае говорят, что фигура обладает центральной симметрией. Примером может служить хотя бы фигура, изображённая на черт. 95.

с) Фигура может допускать поворот около некоторой точки O. Рассмотрим только случай, когда наименьший возможный угол поворота равен $\varphi = \frac{4d}{n}$, где $n \geqslant 2$—натуральное число[1]). В этом случае фигура будет допускать и повороты (в том и другом направлении) на углы $\varphi_k = \frac{4dk}{n}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.



Черт. 94.



Черт. 95.

Точку O можно назвать в этом случае центром вращения порядка n. При этом можно сказать, что фигура обладает симметрией вращения порядка n.

Центр вращения чётного порядка будет в то же время и центром симметрии. Центр вращения нечётного порядка не будет центром симметрии.

Примерами фигур, обладающих симметрией вращения, могут служить фигуры, изображённые на черт. 96 ($n=5$) и черт. 97 ($n=6$).

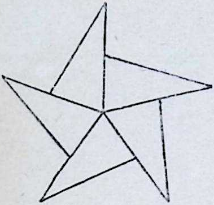
Симметрию вращения порядка $n \geqslant 2$ обозначим символом C_n. При этом под C_1 («центр вращения первого порядка», наименьший «угол поворота» равен $4d$) естественно понимать отсутствие симметрии у данной фигуры.

Оси симметрии, центр симметрии и центры вращения объединяются под общим названием элементов симметрии. До сих пор мы рассматривали случаи, когда фигура имеет один элемент симметрии. Рассмотрим теперь один из случаев, когда фигура имеет несколько элементов симметрии.

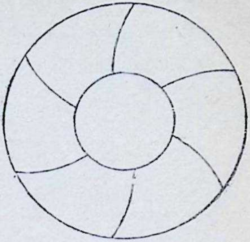
---

[1]) Существование угла, имеющего эту величину при произвольном n, мы считаем очевидным.

d) Пусть фигура имеет конечное число осей симметрии, проходящих через одну точку O. Ограничимся рассмотрением случая, когда наименьший острый угол между двумя осями

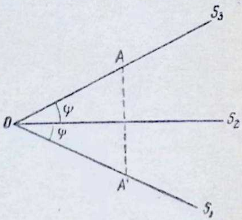


Черт. 96.



Черт. 97.

симметрии равен $\varphi = \frac{2d}{n}$, где n — натуральное число. Пусть s_1 и s_2 — две оси симметрии, образующие между собою угол φ. Обозначим через s_3 прямую, симметричную с s_1 относительно оси s_2 (черт. 98).

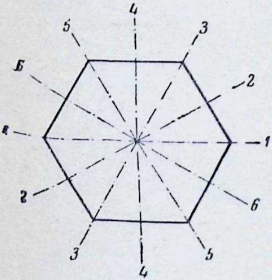


Черт. 98.

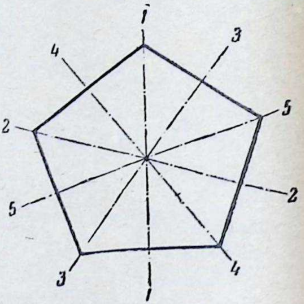
Произведение трёх отражений — от оси s_2, от оси s_1 и снова от оси s_2 будет также преобразованием симметрии данной фигуры. Это произведение может быть либо отражением, либо скользящим отражением. Но каждая точка A прямой s_3 переходит в результате этих трёх отражений в самоё себя (отражение от оси s_2 переводит точку A в точку A' оси s_1, отражение от оси s_1 оставляет точку A' на месте, и последнее отражение от оси s_2 переводит точку A' обратно в A). Следовательно, рассматриваемое произведение есть отражение от прямой s_3.

Итак, если прямые s_1 и s_2 представляют собой оси симметрии фигуры, то и прямая s_3 будет осью симметрии фигуры. Следовательно, рассматриваемая фигура обладает n осями симметрии, проходящими через одну точку O и образующими между собой углы $\frac{2d}{n}$. Так как произведение отражений от осей s_1 и s_2 есть поворот на угол $\frac{4d}{n}$, то точка O будет центром вращения порядка n.

Симметрию фигуры, обладающей центром вращения O порядка $n \geqslant 2$ и n осями симметрии, проходящими через O, будем обозначать символом C'_n. При этом под C'_1 («центр вращения первого порядка» и одна ось симметрии) естественно обозначить симметрию фигуры, имеющей только одну ось симметрии.



Черт. 99.



Черт. 100.

Примером фигуры, обладающей симметрией C'_n, может служить выпуклый или звездчатый правильный n-угольник.

При этом имеется существенное различие между случаями чётного и нечётного n. При чётном n половина осей симметрии представляют собой диагонали многоугольника, проходящие через его центр, другая половина осей симметрии — прямые, соединяющие середины противоположных сторон (черт. 99; $n = 6$). При n нечётном каждая ось симметрии соединяет вершину с серединой противолежащей ей стороны (черт. 100; $n = 5$).

Остановимся ещё на симметрии окружности. Каждый диаметр окружности служит её осью симметрии. Окружность переходит сама в себя при повороте около центра на произвольный угол. С этой точки зрения симметрию окружности естественно обозначать символом C'_∞.

Замечание. Можно было бы доказать, что симметрия всякой фигуры, состоящей из конечного числа точек, характеризуется одним из символов C_n или C'_n. Таким образом, под рубриками a — d настоящего параграфа фактически описаны все вообще возможные виды симметрии таких фигур.

Фигуры, состоящие из бесчисленного множества точек, хотя бы и ограниченные, а также неограниченные (т. е. простирающиеся в бесконечность), могут обладать и другими видами симметрии[1]).

§ 37. Симметрия треугольников и четырёхугольников.

Применим рассмотренные в предыдущем параграфе понятия к треугольнику и к четырёхугольнику.

Так как стороны треугольника, вообще говоря, не равны друг другу, то произвольный треугольник не имеет никаких элементов симметрии (иначе говоря, обладает симметрией C_1).

Чтобы треугольник имел элементы симметрии, надо чтобы он имел по крайней мере две равные стороны. И действительно, *равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, проходящую через вершину*. Это предложение представляет собой лишь иную формулировку хорошо известной теоремы:

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть одновременно и медиана и высота.

Если основание равнобедренного треугольника не равно его боковой стороне, то других элементов симметрии треугольник не имеет (симметрия C'_1).

Если же треугольник равносторонний, то он, очевидно, имеет три оси симметрии и центр вращения третьего порядка (симметрия C'_3).

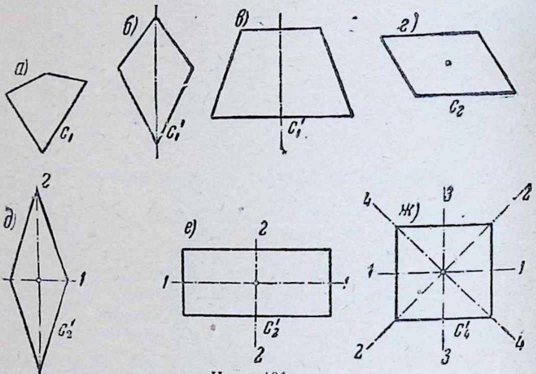
Переходим к симметрии выпуклого четырёхугольника.

---

[1]) Подробно вопрос о симметрии и её приложениях рассмотрен (хотя и без необходимых доказательств) в книге Шубникова [27].

Как и в случае треугольника, убедимся, что произвольный четырёхугольник (черт. 101, *а*) вовсе не имеет элементов симметрии (иначе говоря, обладает симметрией C_1).

Пусть теперь некоторый четырёхугольник имеет ось симметрии. Так как не лежащие на оси симметрии вершины должны быть попарно симметричны относительно этой оси, то возможны два случая. Ось симметрии может совпадать с одной из диагоналей четырёхугольника (черт. 101, *б*); такой четырёхугольник называется иногда ромбоидом (сравнить черт. 65, *а* на стр. 96). Если ось симметрии не проходит ни через одну из вершин, то она проходит через середины двух сторон, и получается равнобедренная (равнобочная) трапеция (черт. 101, *в*). Если, далее, четырёхугольник обладает центром симметрии, то его вершины попарно симметричны относительно этого центра, и получается параллелограм (черт. 101, *г*).

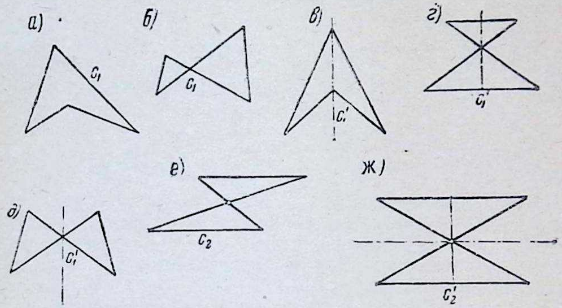


Черт. 101.

Рассмотрим теперь случай, когда четырёхугольник имеет кроме центра симметрии ещё две оси симметрии. Эти оси симметрии совпадают с диагоналями или проходят через середины противоположных сторон. Получается ромб (черт. 101, *д*) или прямоугольник (черт. 101, *е*).

Наконец четырёхугольник может иметь центр вращения четвёртого порядка и четыре оси симметрии. При этом четырёхугольник будет квадратом (черт. 101, *ж*).

Можно было бы показать, что никакие другие случаи вообще невозможны.



Черт. 102.

Итак, получаем следующую классификацию четырёхугольников по их симметрии:

1) Симметрия C_1 (отсутствуют элементы симметрии):
   а) четырёхугольник общего вида.
2) Симметрия C_1' (одна ось симметрии):
   б) ромбоид;
   в) равнобедренная трапеция.
3) Симметрия C_2 (центр симметрии):
   г) параллелограм.
4) Симметрия C_2' (центр симметрии, две оси симметрии):
   д) ромб;
   е) прямоугольник.
5) Симметрия C_4' (центр вращения четвёртого порядка; четыре оси симметрии):
   ж) квадрат.

Предоставляем читателю рассмотреть аналогичным образом симметрию невыпуклых четырёхугольников (результаты приведены на черт. 102). Из относящихся сюда четырёхугольников частного вида существенное значение имеет четырёхугольник с одной осью симметрии, изображённый на черт. 102, *д*. Его можно получить, рассматривая боковые стороны и диагонали равнобедренной трапеции. Так как противоположные стороны этого четырёхугольника попарно равны (как это имеет место в параллелограме), то его называют антипараллелограмом.

Название антипараллелограм объясняется ещё тем, что в этом четырёхугольнике каждые две противоположные стороны антипараллельны (§ 26) относительно двух других сторон.

ГЛАВА V.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УЧЕНИЕ О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ОТРЕЗКОВ.

§ 38. Предварительные замечания.

Рассмотрев в первых четырёх главах этой книги вопросы, связанные с равенством отрезков, мы должны теперь обратиться к учению об их пропорциональности. Учение о пропорциональности отрезков, как оно излагается в наших школьных учебниках, следуя идеям Лежандра [1]), носит арифметический характер; пропорциональность отрезков сводится к пропорциональности чисел, которыми выражаются их длины. Это традиционное изложение предполагает, таким образом, известной теорию иррационального и вообще действительного числа и понятие длины отрезка.

Однако читатель настоящей книги несомненно знаком с теми трудностями, с которыми связано сколько-нибудь строгое построение теории действительного числа [2]). Как выяснится из дальнейшего изложения (стр. 150—159), теория измерения отрезков и понятие о длине отрезка оказываются, по существу дела, более сложными, чем учение о пропорциональности отрезков.

---

[1]) Лежандр (Adrien Marie Legendre, 1752—1833) — видный французский математик, автор многочисленных работ по анализу и теории чисел. В 1794 г. вышел в свет его учебник элементарной геометрии («Éléments de géométrie»). Учебник выдержал ряд изданий, был переведён на другие языки (есть и русский перевод) и оказал весьма значительное влияние на позднейшие учебники геометрии.

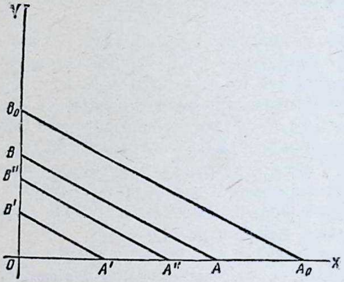
[2]) По поводу различных способов построения теории действительного числа см. книгу И. В. Арнольда [3].

При таком положении вещей естественно изложить учение о пропорциональности отрезков независимо от понятия длины отрезка и от теории действительного числа. Такого рода чисто геометрическая теория пропорциональности отрезков и излагается в настоящей главе¹).

§ 39. Определение и свойства пропорциональных отрезков.

Пропорциональность отрезков мы определим чисто геометрически следующим образом.

Пусть заданы (в определённой последовательности) четыре отрезка: a, a'. b, b'; отложим первые два отрезка a и a' на стороне OX прямого угла XOY от его вершины, а вторые два отрезка b и b' — на второй стороне OY того же угла также от вершины: $OA = a$; $OA' = a'$; $OB = b$; $OB' = b'$ (черт. 103); если при этом прямые AB и $A'B'$ окажутся параллельными (или будут совпадать между собой), то мы будем говорить, что «отрезок a относится к a' как отрезок b — к отрезку b'» или что «отрезки a, a', b, b' про-



Черт. 103.

---

¹) Излагаемая здесь теория принадлежит Шуру (F. Schur). С другими способами изложения геометрического учения о пропорциональности можно познакомиться у Гильберта [7] и Швана [25].

пропорциональны» и обозначать это обычным образом[1]) с помощью «пропорции»

$$a:a' = b:b'.$$

Из этого определения вытекает ряд следствий, которые мы и сформулируем в виде особой теоремы.

Теорема 83. *Пропорциональные отрезки обладают следующими свойствами:*

a) *Если* $a:a' = b:b'$, *то и* $a':a = b':b$; $b:b' = a:a'$; $b':b = a':a$.

b) *Если* $a = b$ *и* $a' = b'$, *то* $a:a' = b:b'$.

c) *Если* $a:a' = b:b'$ *и* $a':a'' = b':b''$, *то и* $a:a'' = b:b''$.

d) *Если* $a:a' = b:b'$, *то и* $(a+a'):a' = (b+b'):b'$.

e) *Если* $a:b = a':b'$ и $a:b = a':b''$, *то отрезки* b' *и* b'' *равны*.

Доказательство. Свойства a) и b) прямо вытекают из определения.

c) Пусть $OA = a$, $OA' = a'$, $OA'' = a''$, $OB = b$, $OB' = b'$, $OB'' = b''$. Если $a:a' = b:b'$ и $a':a'' = b':b''$, то $AB \parallel A'B'$ и $A'B' \parallel A''B''$. Следовательно, и $AB \parallel A''B''$, т. е. $a:a'' = b:b''$.

d) Пусть опять $OA = a$, $OA' = a'$, $OB = b$, $OB' = b'$. Выберем точку A_0 так, чтобы $AA_0 = a'$, $OA_0 = a + a'$, и проведём через неё прямую A_0B_0, параллельную AB. При этом так как $OA' = AA_0$, то и $BB_0 = OB' = b'$ (по теореме 66), и из параллельности прямых A_0B_0 и $A'B'$ следует, что $(a+a'):a = (b+b'):b$.

e) Свойство вытекает из того, что через точку A' проходит единственная прямая, параллельная AB.

Теорема доказана.

Заметим, что свойство (c) позволяет писать равенства вида

$$a:a':a'':\ldots = b:b':b'':\ldots$$

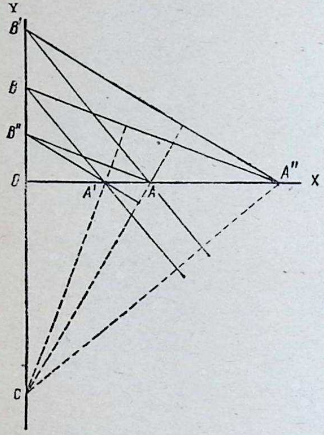
вместо $a:a' = b:b'$, $a':a'' = b':b''$, ...

---

[1] Обратим внимание читателя на следующее обстоятельство. Знаки «:» и «=» в этой записи не являются знаками деления и равенства при нашем определении пропорциональности. С этой точки зрения было бы, быть может, предпочтительнее ввести для пропорциональности специальное обозначение вроде $\{a, a', b, b'\}$. Мы будем, однако, пользоваться привычным для читателя обозначением.

Для вывода дальнейших свойств пропорциональных отрезков мы воспользуемся следующей теоремой, которую иногда называют теоремой Паскаля[1]).

Теорема 84. *Если на одной стороне прямого угла лежат точки* A, A' *и* A'', *а на другой его стороне — точки* B, B' *и* B'' *и при этом* $AB' \parallel A'B$, $AB'' \parallel A''B$, *то и* $A'B'' \parallel A''B'$ (черт. 104).



Черт. 104.

Доказательство. Пусть прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой $A'B''$, пересекает продолжение второй стороны OY прямого угла XOY в точке C. Так как прямые OA и $A'B''$ будут высотами треугольника $AB''C$, то и прямая CA' будет высотой того же треугольника (теорема 70). Следовательно, прямая CA' будет высотой и треугольника $A''BC$, потому что $AB'' \parallel A''B$. Так как прямые OA'' и CA' будут высотами треугольника $A''BC$, то и прямая $A'B$ будет высотой того же треугольника. Следовательно, прямая AB', ей параллельная, будет высотой треугольника $A''B'C$. Так как прямые OA'' и AB' будут высотами треугольника $A''B'C$, то и прямая AC будет высотой треугольника $A''B'C$.

---

[1]) Читатель, знакомый с общей теоремой Паскаля о шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, легко усмотрит, что теорема 84 является частным случаем этой общей теоремы; при этом кривая второго порядка распадается на пару прямых (сторон угла), а паскалева прямая лежит в бесконечности.

Итак, прямая AC перпендикулярна к $A''B'$. Так как по построению эта прямая перпендикулярна и к $A'B''$, то прямые $A'B''$ и $A''B'$ параллельны.

Из доказанной теоремы вытекают следующие два свойства пропорциональных отрезков.

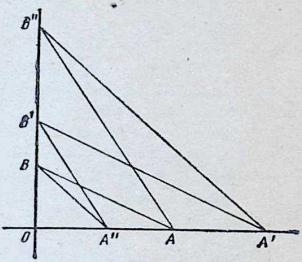
Теорема 85. *Пропорциональные отрезки обладают следующими свойствами:*

f) *Если* $a:a'=b:b'$, *то и* $a:b=a':b'$.

g) *Если* $a:a'=b:b'$ и $b:b'=c:c'$, *то и* $a:a'=c:c'$.

Доказательство. f) Пусть $OA=a$, $OA'=OB''=a'$, $OB=OA''=b$, $OB'=b'$ (черт. 105). Так как по условию $a:a'=b:b'$, то AB параллельно $A'B'$; так как, по построению, $OA'=OB''$ и $OA''=OB$, то и $A'B''\parallel A''B$. Следовательно, в силу теоремы 84 и $AB''\parallel A''B'$. Это и значит, что $OA:OA''=OB'':OB'$ или $a:b=a':b'$.

g) Так как $a:a'=b:b'$ и $b:b'=c:c'$, то по только что доказанному и $a:b=a':b'$, $b:c=b':c'$. Следовательно (по теореме 83 c), и $a:c=a':c'$ или, применяя опять только что доказанное свойство, $a:a'=c:c'$.



Черт. 105.

Теорема доказана.

Заметим, что свойство g) позволяет писать равенства вида $a:a'=b:b'=c:c'=\ldots$

Сформулированные в теоремах 83 и 85 свойства пропорциональных отрезков будем обозначать в дальнейшем просто как свойства a, b, . . . , g.

§ 40. Подобные треугольники; признаки подобия.

Как известно, два треугольника называются **подобными**, если углы этих треугольников соответственно равны и соответственные стороны[1]) обоих треугольников пропорциональны.

---

[1]) При этом соответственными сторонами считаются стороны, лежащие против равных углов.

Так, если треугольник ABC подобен треугольнику $A'B$
то мы имеем (при надлежащем выборе обозначений верши
$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'; AB:A'B'=AC:A'C$
$AB:A'B'=BC:B'C', AC:A'C'=BC:B'C'$.

В силу свойства f пропорциональность сторон можно за
писать и так: $AB:AC=A'B':A'C'$, и т. д.

Подобие треугольников ABC и $A'B'C'$ обозначается так:
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Из данного выше определения вытекает, что два равных
реугольника можно рассматривать как частный случай подобных
еугольников, так как равенство соответственных сторон
ь частный случай их пропорциональности. В частности, ка-
ый треугольник подобен самому себе. Если один тре-
ьник подобен другому, то и второй подобен первому. Два
ольника, подобных третьему, подобны между собой. Короче
я, *подобие треугольников обладает свойствами ре-*
ивности, симметричности и транзитивности.

еделение подобия двух треугольников включает
шесть соотношений между их углами и сторонами,
: три равенства углов и три соотношения, выражаю-
порциональность сторон. Эти шесть соотношений
нако, свести к четырём. Действительно, из равенств
A' и $\angle B=\angle B'$ вытекает, в силу $\angle A+\angle B+$
$\angle A'+\angle B'+\angle C'=2d$, что
отношений $AB:A'B'=AC:A'C$
вытекает (свойства a и g), чт

подобия двух треугольников
ы выполнялись четыре требов

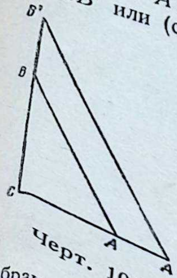
$A=\angle A'; \angle B=\angle B'$,
$=AC:A'C'$, $B'=BC:$

х из эт
что вып влечёт
длежащ торых эт
ьных. Т звание
ыражен знаков

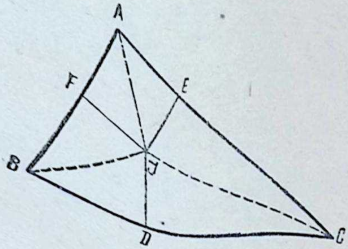
расс
ующу

Теорема 86. *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого, то катеты первого треугольника относятся как катеты второго.*

Доказательство. Пусть острый угол CAB одного прямоугольного треугольника равен острому углу $C'A'B'$ другого. Не нарушая общности, можем предполагать, что вершина C прямого угла первого треугольника совпадает с вершиной C' второго и что точки A' и B' лежат соответственно на лучах CA и CB (черт. 106). В силу равенства $\angle CAB = \angle C'A'B'$, прямые AB и $A'B'$ будут параллельны, откуда $CA:CA' = CB:CB'$ или (свойство f) $CA:CB = CA':CB'$.



Черт. 106.



Черт. 107.

Обращаемся теперь к рассмотрению признаков подобия треугольников.

Теорема 87 («первый признак подобия треугольников»). *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ [illegible] $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, а следовательно, и [illegible] Обозначим через J — центр окружности, вписан[illegible] ABC, через D, E и F — проекции точки J [illegible] (черт. 107), через J', D', E' и F' — [illegible] во втором треугольнике (второй треуголь[illegible] доказан). [illegible] $\angle JAE$, то $\angle FAJ = \angle F'A'J'$ и (по [illegible] $A':F'J'$. Аналогично имеем $FJ:FB =$ [illegible] последних соотношений вытекает (свой[illegible] $F'A':F'B'$, а отсюда (свойство d)

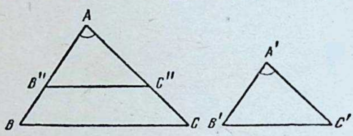
$AB:FB=A'B':F'B'$. Далее, из условий $FJ:FB=F'J':F'B'$ и $AB:FB=A'B':F'B'$ следует (свойства a и f), что $FB:F'B'=$ $=FJ:F'J'$ и $AB:A'B'=FB:F'B$, а отсюда (по свойству g), что $AB:A'B'=FJ:F'J'$.

Таким же путём покажем, что и $AC:A'C'=EJ:E'J'$. Так как $FJ=EJ$ и $F'J'=E'J'$, то отсюда и получается $AB:A'B'=AC:A'C'$.

Так же доказывается и пропорциональность других сторон.

Теорема 88 («второй признак подобия треугольников»). *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ имеем $AB:A'B'=AC:A'C'$ и $\angle A=\angle A'$ (черт. 108).



Черт. 108.

Выберем на луче AB такую точку B'', что $A'B'=AB''$, и проведём через неё прямую $B''C''$, параллельную BC; обозначим через C'' точку пересечения этой прямой с лучом AC.

Треугольники ABC и $AB''C''$ подобны по первому признаку подобия, откуда $AB:AB''=AC:AC''$. Из сравнения этой пропорции с условием $AB:A'B'=AC:A'C'$ вытекает в силу $A'B'=AB''$ (по свойству e), что и $A'C'=AC''$. Треугольники $AB''C''$ и $A'B'C'$ будут равны (по первому признаку равенства).

Так как треугольники ABC и $AB''C''$ подобны, а треугольники $AB''C''$ и $A'B'C'$ равны, то и треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Теорема 89 («третий признак подобия треугольников»). *Если стороны двух треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ имеет место пропорциональность сторон $AB:A'B'=AC:A'C'=$ $=BC:B'C'$ (черт. 108). Выберем опять на луче AB такую точку B'', что $A'B' = AB''$, и проведём прямую $B''C''$, параллельную BC. Треугольники ABC и $AB''C''$ будут подобны по первому признаку подобия, откуда $AB:AB'' = AC:AC''$ и $BC:B''C'' = AB:AB''$.

Из сравнения этих пропорций с условием теоремы вытекает (свойство е), что $AC'' = A'C'$; $B''C'' = B'C'$. Треугольники $AB''C''$ и $A'B'C'$ будут равны (по третьему признаку равенства).

Так как треугольники ABC и $AB''C''$ подобны, а треугольники $AB''C''$ и $A'B'C'$ равны, то и треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Теорема 90 («четвёртый признак подобия треугольников»). *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и угол первого треугольника, лежащий против большей из этих двух сторон, равен соответствующему углу второго, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ имеем $AB:A'B' = AC:A'C'$, $AB < AC$, $\angle B = \angle Б'$. При этом в силу $AB:AC = A'B':A'C'$ и $A'B' < A'C'$.

Подобие треугольников ABC и $A'B'C'$ доказывается так же, как и в случае второго признака (теорема 88). Отличие состоит только в том, что треугольники $AB''C''$ и $A'B'C'$ будут равны не по первому, а по пятому признаку равенства (теорема 27).

Применение рассмотренных признаков подобия к прямоугольным треугольникам приводит к следующим теоремам. Вместо доказательства достаточно будет каждый раз сослаться на тот общий признак подобия, частным случаем которого является данная теорема.

Теорема 91. *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого, то треугольники подобны.* (Теорема 87.)

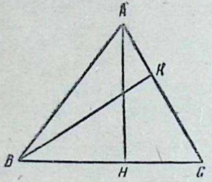
Теорема 92. *Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого, то треугольники подобны.* (Теорема 88.)

Теорема 93. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то треугольники подобны.* (Теорема 90.)

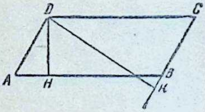
Рассмотрим ещё две теоремы, вытекающие из признаков подобия треугольников.

Теорема 94. *Высоты треугольника или параллелограма обратно пропорциональны соответствующим сторонам.*

(Точнее говоря, одна сторона треугольника или параллелограма так относится к другой его стороне, как высота, опущенная на вторую сторону, — к высоте, опущенной на первую.)



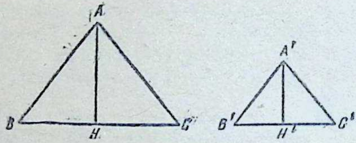
Черт. 109.



Черт. 110.

Доказательство. Если AH и BK — высоты треугольника ABC (черт. 109), то треугольники CAH и CBK подобны, откуда $AH:BK=AC:BC$.

Точно так же, если DH и DK — высоты параллелограма $ABCD$ (черт. 110), то треугольники DAH и DCK подобны, откуда $DH:DK=AD:CD$.



Черт. 111.

Теорема 95. *Соответственные высоты двух подобных треугольников пропорциональны соответственным сторонам.*

Доказательство. Если AH и $A'H'$ — соответственные высоты двух подобных треугольников ABC и $A'B'C'$ (черт. 111), то треугольники ABH и $A'B'H'$ подобны, откуда $AH:A'H'=$ $=AB:A'B'$.

§ 41. Основное свойство параллельной проекции.

Пользуясь рассмотренными в предыдущем параграфе свойствами подобных треугольников, мы можем теперь легко доказать основную теорему о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными секущими на сторонах некоторого угла или, в более общей форме, на каких-либо двух прямых. Эту теорему мы сформулируем следующим образом[1]:

Теорема 96. *Два отрезка одной прямой относятся как их параллельные проекции на одну и ту же прямую.*

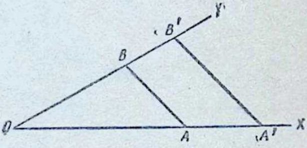
Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 66 (черт. 68 на стр. 100). Надо только отказаться от равенства отрезков AB и CD. При этом равенство треугольников ABK и CDL заменяется их подобием (по первому признаку подобия).

§ 42. Построения.

Рассмотренные в настоящей главе теоремы дают возможность выполнить следующие построения, несомненно известные читателю.

Построение 19. Построить отрезок «четвёртый пропорциональный» к трём данным отрезкам.

Пусть даны три отрезка a, a', b и требуется построить такой отрезок b', что $a:a'=b:b'$. На стороне OX произвольного угла XOY



Черт. 112.

(черт. 112) откладываем от вершины отрезки $OA=a$ и $OA'=a'$, а на другой стороне OY того же угла отрезок $OB=b$. Прямая, проходящая через точку A' и параллельная AB, пересекает OY в такой точке B', что отрезок $OB'=b'$.

---

[1] Сравнить теорему 66.

Заметим, что первоначальное определение пропорциональных отрезков (§ 39) заставило бы нас принять за $\angle XOY$ прямой угол. Однако в силу первого признака подобия треугольников (или, если угодно, в силу теоремы 96) этот угол можно выбрать произвольно.

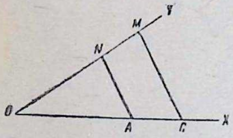
Построение 20. Построить отрезок, «третий пропорциональный» к двум данным.

Под этой формулировкой иногда понимается частный случай предыдущего построения, когда $a' = b$: даны два отрезка a и b и требуется построить такой отрезок c, что $a:b = b:c$.

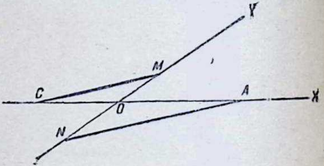
Если точка C лежит на отрезке AB, то она делит этот отрезок на два отрезка AC и CB. Это выражение распространяется и на тот случай, когда точка C лежит на продолжении отрезка AB: говорят, что точка C, лежащая на продолжении отрезка AB, делит его внешним образом на два отрезка AC и CB. При этом о точке, лежащей на самом отрезке, говорят, что она делит его внутренним образом.

Построение 21. Разделить данный отрезок внутренним или внешним образом «в данном отношении», т. е. на два отрезка, пропорциональных двум данным отрезкам.

Пусть отрезок a требуется разделить внутренним или внешним образом на два отрезка, пропорциональных двум данным отрезкам m и n.



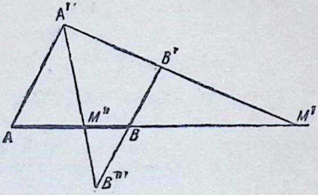
Черт. 113.



Черт. 114.

Первый способ. Ограничимся внешним делением; для внутреннего деления задача решается аналогичным образом. На стороне OX произвольного угла XOY откладываем от вершины O отрезок $OA = a$, а на другой стороне OY того же угла — отрезок $OM = m$; далее, откладываем на прямой OY от точки M в сторону точки O отрезок MN, равный n (черт. 113 при $m > n$ и черт. 114 при $m < n$). Прямая, проходящая через точку M и параллельная NA, пересекает прямую OX в искомой точке C. Действительно, $OC:CA = OM:MN$, т. е. $OC:CA = m:n$.

Второй способ. Пусть AB (черт. 115)—данный отрезок. На произвольной прямой, проходящей через точку A, откладываем отрезок $AA' = m$, а на прямой, проходящей через B и параллельной AA', отрезки $BB' = BB'' = n$. Точки пересечения M' и M'' прямых $A'B'$ и $A'B''$ с прямой AB и будут точками деления.



Черт. 115.

Правильность построения легко вытекает из подобия двух пар треугольников: $\triangle AA'M' \sim \triangle BB'M'$ и $\triangle AA'M'' \sim \triangle BB''M''$.

Построение 22. Построить треугольник $A'B'C'$, подобный ABC, в котором стороной $B'C'$ служит данный отрезок.

Способ построения будем считать известным.

ГЛАВА VI

ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН И УГЛОВ.

§ 43. Понятие длины отрезка; случай отрезка, соизмеримого с единицей измерения.

До сих пор мы совершенно не пользовались при изложении геометрии понятием длины отрезка. Напомним, что аксиомы равенства (§ 9, аксиомы 4a, 4b, 4d) вводят в качестве основного понятие «равных» отрезков и позволяют установить для отрезков понятия «больше» и «меньше» без введения понятия длины отрезка и без использования понятия числа (кроме, конечно, понятия натурального числа для указания «два отрезка», «три отрезка»).

Сформулируем теперь задачу измерения отрезков в самой общей форме:

Установить систему измерения отрезков значит поставить каждому отрезку AB в соответствие положительное число, называемое длиной отрезка и обладающее следующими двумя свойствами:

a) *Равным отрезкам соответствует одна и та же длина*; иначе говоря, длина отрезка не изменяется при его перемещении («свойство инвариантности по отношению к движениям», или просто «свойство инвариантности»).

b) *Если точка B лежит между A* и *C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB* и *BC* («свойство аддитивности»).

Заметим теперь же, что свойство аддитивности легко обобщается на случай любого конечного числа слагаемых отрезков и что из него непосредственно вытекает такое следствие:

b′) *большему отрезку соответствует и бо́льшая длина* («свойство монотонности»).

Для обозначения длины отрезка в элементарной геометрии принято пользоваться теми же знаками, что и для самого отрезка. Так, когда мы пишем AB или a, мы понимаем под этими записями и самые отрезки и те числа, которыми выражаются их длины. В дальнейшем и мы будем поступать таким же образом. Однако в настоящей главе, когда для нас будет очень существенным различие между отрезком и его длиной, мы введём для длины отрезка особое обозначение.

Длину отрезка AB мы будем обозначать через $\rho(AB)$. При этом основные свойства длины запишутся так:

a) из $AB = A'B'$ следует $\rho(AB) = \rho(A'B')$;

b) из $AB + BC = AC$ следует $\rho(AB) + \rho(BC) = \rho(AC)$.

Легко видеть, что свойствами инвариантности (a) и аддитивности (b) соответствие между отрезками и их длинами ещё не вполне определяется. Действительно, пусть каждому отрезку AB поставлено в соответствие число $\rho(AB)$, и эти числа обладают свойствами (a) и (b). Выберем некоторое положительное число k и поставим каждому отрезку в соответствие число $\rho_1(AB) = k \cdot \rho(AB)$. Эти новые числа опять будут обладать свойствами (a) и (b).

Примем теперь за единицу длины некоторый определённый отрезок PQ и в соответствии с этим добавим к (a) и (b) ещё следующее требование:

c) *Некоторому произвольно выбранному нами отрезку PQ соответствует длина, равная единице.*

Задача теории измерения состоит в том, чтобы доказать, что между отрезками и положительными числами можно установить, и притом единственным образом, соответствие, обладающее свойствами (a), (b) и (c).

Начнём с рассмотрения частного случая, когда каждый измеряемый отрезок и отрезок, принятый за единицу длины, имеют общую меру (в следующем параграфе мы рассмотрим и общий случай). При этом общей мерой двух отрезков называется, как известно, такой отрезок, который «укладывается» в обоих данных отрезках без остатка.

При этом мы будем пользоваться теорией положительного рационального числа (т. е. свойствами натуральных и дробных чисел и действий над ними).

Итак, пусть дана единица измерения — отрезок PQ — и некоторый соизмеримый с ней отрезок AB. Пусть общая мера

$AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{p-1}B = PP_1 = P_1P_2 = \ldots = P_{q-1}Q$ этих отрезков (черт. 116) укладывается p раз в измеряемом отрезке и q раз в единице длины.

В силу свойств (a), (b) и (c) будем иметь:

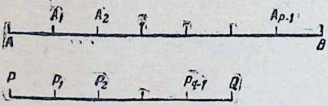
$$\rho(AB) = \rho(AA_1) + \rho(A_1A_2) + \ldots + \rho(A_{p-1}B) = p \cdot \rho(AA_1);$$

$$\rho(PQ) = \rho(PP_1) + \rho(P_1P_2) + \ldots + \rho(P_{q-1}Q) = q \cdot \rho(PP_1) = 1;$$

$$\rho(AA_1) = \rho(PP_1).$$

Отсюда $\rho(AB) = \frac{p}{q}$.

Заметим, что в этом рассуждении мы предполагали с самого начала существование длины отрезка и вывели лишь её выражение в виде некоторой дроби.



Черт. 116.

Поэтому полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 97. *Если измерение отрезков возможно и данный отрезок AB имеет с единицей измерения общую меру, которая укладывается p раз в отрезке AB и q раз в единице измерения, то длиной отрезка AB ожет быть только число* $\frac{p}{q}$.

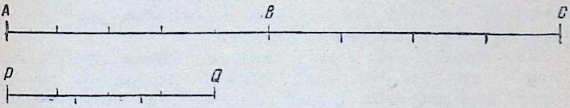
Эта теорема ставит перед нами следующий вопрос. Как из-стно, два соизмеримых отрезка имеют не одну, а бесчис-енное множество общих мер: действительно, если, например, e_1 — какая-либо общая мера двух отрезков, то и каждый из отрезков $e_2 = \frac{1}{2} e_1$, $e_3 = \frac{1}{3} e_1, \ldots$ также будет, очевидно, их общей мерой. Не будет ли при этом дробь $\frac{p}{q}$ зависеть от выбора общей меры? Ответ даётся следующей теоремой.

Теорема 98. *Величина дроби* $\frac{p}{q}$, *о которой говорится в теореме 97, не зависит от выбора общей меры отрезков AB и PQ.*

Доказательство. Если e и e' — две общие меры отрезков AB и PQ, то мы имеем $AB = pe = p'e'$ и $PQ = qe = q'e'$.

Отсюда $q(pe) = p'qe'$ и $p(qe) = pq'e'$, так что $p'qe' = pq'e'$, т. е. $p'q = pq'$ или $p:q = p':q'$.

Мы совершенно сознательно употребили в формулировке теоремы 97 выражение «длиной отрезка может быть», а не «длиной отрезка будет...», так как надо ещё доказать, что найденные числа $\frac{p}{q}$ действительно обладают свойствами (a), (b) и (c). В отношении свойств (a) и (c) это очевидно: равным отрезкам AB и $A'B'$ соответствуют одни и те же значения p и q, а отрезку, равному единице, соответствуют значения $p = q = 1$. Покажем, что найденные числа $\frac{p}{q}$ обладают свойством аддитивности (b).



Черт. 117.

Пусть отрезку AB (черт. 117) соответствует число $\frac{p'}{q'}$, а отрезку BC — число $\frac{p''}{q''}$. Это значит, что некоторая общая мера e' отрезков AB и PQ укладывается p' раз в AB и q' раз в PQ; точно так же, некоторая общая мера e'' отрезков BC и PQ укладывается p'' раз в BC и q'' раз в PQ. В силу сделанного выше замечания, отрезок $e = \frac{PQ}{q'q''} = \frac{e'}{q''} = \frac{e''}{q'}$ будет общей мерой всех трёх отрезков AB, BC и PQ. Этот отрезок e будет укладываться $p'q''$ раз в отрезке AB, $p''q'$ раз в отрезке BC, и следовательно, — $p = p'q'' + p''q'$ раз в отрезке AC, и, наконец, $q = q'q''$ раз в отрезке PQ. Поэтому отрезку AC соответствует число

$$\frac{p}{q} = \frac{p'q'' + p''q'}{q'q''} = \frac{p'}{q'} + \frac{p''}{q''}.$$

Свойство аддитивности доказано.

Полученные в настоящем параграфе результаты можно сформулировать так.

Теорема 99. *Между отрезками, соизмеримыми с некоторым отрезком PQ, принятым за единицу длины, и положительными рациональными числами можно установить, и притом единственным образом, соответствие, обладающее свойствами инвариантности* (a) *и аддитивности* (b).

Задача измерения отрезков решена, таким образом, для всех отрезков, соизмеримых с единицей длины.

§ 44. Общая теория измерения отрезков.

Изложенная в предыдущем параграфе теория измерения отрезков заведомо непригодна в случае отрезка, несоизмеримого с единицей длины; в этом случае измерение отрезка существенно связано с тем или иным бесконечным процессом, а следовательно, и с понятием предела.

Рассматривая этот более сложный процесс определения длины отрезка, мы не будем, однако, предполагать данный отрезок несоизмеримым с единицей длины, а рассмотрим общий случай произвольного отрезка; иначе мы не получили бы общей теории измерения, пригодной для всех отрезков.

При построении общей теории измерения отрезков мы будем пользоваться теорией положительного числа (т. е. свойствами рациональных и иррациональных положительных чисел и действий над ними), а также определением и основными свойствами предела последовательности.

При этом нам понадобится новая геометрическая аксиома, которую обычно называют «аксиомой Архимеда»[1].

Аксиома 8. *Каковы бы ни были два данных отрезка, всегда найдётся такое кратное меньшего отрезка, которое превосходит больший отрезок.*

Иначе говоря, если AB и CD — два данных отрезка и $AB > CD$, то всегда существует такое натуральное число n, что $n \cdot CD > AB$.

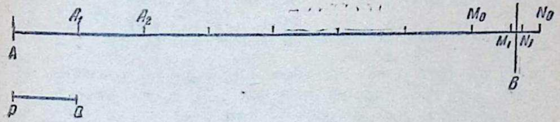
Следствие. *Если AB и CD, где* $AB > CD$, *— два данных отрезка, то всегда найдётся такое n, что* $\frac{AB}{n} < CD$.

---

[1] По имени греческого геометра Архимеда (III в. до н. э.), который приводит её в своём сочинении «О шаре и цилиндре». С неменьшим основанием эту аксиому называют иногда аксиомой Эвдокса (IV в. до н. э.).

Действительно, из $n \cdot CD > AB$ вытекает, что $\frac{AB}{n} < CD$.

Итак, пусть AB — произвольный отрезок, и PQ — единица измерения (черт. 118). Будем «откладывать» отрезок PQ на луче AB, т. е. рассмотрим такие точки $A_1, A_2 \ldots$ луча AB, что $PQ = AA_1 = A_1A_2 = \ldots$ Среди этих точек найдутся, в силу аксиомы Архимеда, точки, лежащие за точкой B. Обозначим первую такую точку через N_0, а точку, ей непосредственно предшествующую, — через M_0. При этом точка B будет лежать между M_0 и N_0 или совпадать с M_0; далее, согласно § 43, будем иметь $\rho(AM_0) = x_0 = p_0$ и $\rho(AN_0) = \xi_0 = p_0 + 1$, где p_0 может принимать одно из значений 0, 1, 2, 3, ...



Черт. 118

Выберем теперь произвольное натуральное число n и разделим отрезок $M_0N_0 = PQ$ на n равных частей (§ 28, построение 17). Обозначим через N_1 первую из точек деления, лежащих за точкой B, а если таких точек деления нет, то точку N_0. Точку деления, непосредственно предшествующую N_1, обозначим через M_1; точка M_1 может совпадать с M_0. При этом точка B будет лежать между M_1 и N_1 или совпадать с M_1, и мы будем иметь $\rho(AM_1) = x_1 = p_0 + \frac{p_1}{n}$; $\rho(AN_1) = \xi_1 = p_0 + \frac{p_1 + 1}{n}$, где p_1 может принимать только одно из значений $= 0, 1, \ldots, n - 1$.

Отрезок $M_1N_1 = \frac{1}{n} \cdot PQ$ снова делим на то же самое число n равных частей и вводим, как и выше, обозначения M_2 и N_2. При этом точка B будет лежать между M_2 и N_2 или совпадать с M_2 и $\rho(AM_2) = x_2 = p_0 + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n^2}$; $\rho(AN_2) = \xi_2 = p_0 + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2 + 1}{n^2}$, где p_2 принимает опять одно из значений $0, 1, \ldots, n - 1$.

Продолжая этот процесс, мы получим две последовательности точек:

$$M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots \text{ и } N_0, N_1, \ldots, N_k, \ldots,$$

обладающих следующими свойствами: каждая точка M_k лежит (при $k \geqslant 1$) между M_{k-1} и N_{k-1} или совпадает с M_{k-1}; каждая точка N_k лежит (при $k \geqslant 1$) между M_{k-1} и N_{k-1} или совпадает с N_{k-1}; точка B лежит (при всяком k) между M_k и N_k или совпадает с M_k. Длины соответствующих отрезков AM_k и AN_k будут выражаться числами

$$\rho(AM_k) = x_k = p_0 + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n^2} + \ldots + \frac{p_k}{n^k};$$

$$\rho(AN_k) = \xi_k = p_0 + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n^2} + \ldots + \frac{p_k + 1}{n^k},$$

где p_0 принимает одно из значений $0, 1, 2, \ldots$, а каждое из чисел p_k $(k \geqslant 1)$ — одно из значений $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Следовательно, последовательности чисел $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ и $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ удовлетворяют условиям:

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant \ldots < p_0 + 1;$$

$$\xi_0 \geqslant \xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \ldots \geqslant \xi_k \geqslant \ldots > p_0; \; \xi_k - x_k = \frac{1}{n^k}.$$

Из этих неравенств вытекает, что последовательности чисел x_k и ξ_k сходятся и имеют общий предел, который мы обозначим через x:

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \xi_k \, ^{1)}.$$

Так как точка B отлична от A, то найдётся (в силу следствия из аксиомы Архимеда) такое значение k, при котором точка M_k будет отлична от A; это значение k определяется неравенством $\frac{PQ}{n^k} < AB$. Для соответствующего значения x_k будем иметь $\rho(AM_k) = x_k > 0$, так что (в силу неравенства $x_k \leqslant x$) и x будет положительным числом.

До сих пор мы ничего не предполагали о существовании длины отрезка AB. Если длина отрезка AB существует и равна

---

¹) Так как мы будем рассматривать только пределы при $k \to \infty$, то вместо $\lim\limits_{k \to \infty}$ будем далее просто писать $\lim$.

$l=\rho(AB)$, то мы должны иметь в силу свойства монотонности (b′) $x_k \leqslant l < \xi_k$, откуда

$$l-x_k < \xi_k - x_k = \frac{1}{n^k}; \ \xi_k - l \leqslant \xi_k - x_k = \frac{1}{n^k}$$

и следовательно:

$$l=\lim x_k = \lim \xi_k = x.$$

Числа x_k и ξ_k естественно называть теперь приближёнными значениями длины отрезка AB с точностью до $\frac{1}{n^k}$, взятыми с недостатком и с избытком (при этом не исключается возможность, что все числа x_k, начиная с некоторого значения k, совпадают с x).

В дальнейшем мы будем рассматривать только приближённые значения длины отрезка с недостатком и называть их просто приближёнными значениями длины отрезка.

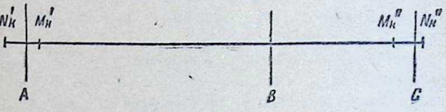
При этом приближённое значение x_k длины отрезка с точностью до $\frac{1}{n^k}$ можно, очевидно, определить как наибольшее из рациональных чисел вида $\frac{p}{n^k}$, для которых отрезок, имеющий длину $\frac{p}{n^k}$, не превосходит AB.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 100. *Если измерение отрезков возможно, то длиной произвольного отрезка может быть только предел последовательности приближённых значений длины отрезка с точностью до* $\frac{1}{n^k}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Чтобы показать, что измерение отрезков действительно возможно, остаётся ещё показать, что этот предел обладает свойствами (a), (b) и (c) § 43. В отношении свойств (a) и (c) это очевидно. В самом деле, двум равным отрезкам соответствуют при одном и том же n одни и те же значения чисел p_k, а отрезку, равному единице, соответствуют значения $p_0=1$; $p_k=0$ $(k>0)$. Покажем, что найденный нами предел действительно обладает свойством аддитивности (b).

Пусть AB и BC — два отрезка, и $\rho(AB)=x'$; $\rho(BC)=x''$. Определим приближённые значения x'_k и x''_k длин этих отрезков с точностью до $\frac{1}{n^k}$. Для этого построим, как и выше, для отрезка AB точки M'_k и N'_k, начиная, однако, измерение от точки B (черт. 119); для отрезка BC построим аналогично точки M''_k и N''_k. При этом будем иметь $\rho(BM'_k)=x'_k$; $\rho(BM''_k)=x''_k$; $\rho(BN'_k)=x'_k+\frac{1}{n^k}$; $\rho(BN''_k)=x''_k+\frac{1}{n^k}$. Найдём, далее, приближённое значение x_k длины отрезка AC с той же точностью. Так как отрезок $M'_kM''_k$, имеющий своей длиной $x'_k+x''_k$, меньше AC, а отрезок $N'_kN''_k$, имеющий своей длиной $x'_k+x''_k+\frac{2}{n^k}$, больше AC, и сумма $x'_k+x''_k$ имеет вид $\frac{p}{n^k}$,



Черт. 119.

где p — некоторое натуральное число, то приближённое значение длины отрезка AC с точностью до $\frac{1}{n^k}$ будет равно либо $x'_k+x''_k$, либо $x'_k+x''_k+\frac{1}{n^k}$. Поэтому мы можем положить

$$x_k=x'_k+x''_k+\frac{\alpha}{n^k},$$

где α может иметь только одно из двух значений: 0 или 1. Переходя теперь к пределу, будем иметь:

$$\lim x_k=\lim x'_k+\lim x''_k$$

или

$$\rho(AC)=\rho(AB)+\rho(BC).$$

Свойство аддитивности доказано.

Итак, мы пришли к следующему результату.

Теорема 101. *Если выбрана единица длины, то каждому отрезку AB можно поставить в соответствие и притом единственным образом положительное число* $\rho(AB)$, *обладающее свойствами инвариантности относительно движений* (a) *и аддитивности* (b).

При нашем способе изложения длина отрезка AB непосредственно получается в виде бесконечной (или, в частных случаях, конечной) дроби, записанной в системе счисления с основанием n:

$$\rho(AB) = p_0 + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n^2} + \ldots + \frac{p_k}{n^k} + \ldots;$$

$$p_0 = 0, 1, 2, \ldots; \quad p_k = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ при } k \geqslant 1.$$

Полагая, например, $n = 10$, получим длину отрезка в виде десятичной дроби; выбрав $n = 2$ (или $n = 3$), получим двоичную (или троичную) дробь и т. д.

На первый взгляд может возникнуть сомнение, не может ли полученная длина отрезка зависеть от выбора n, т. е. от выбора системы счисления. Это сомнение разрешается теми рассуждениями, которые были проведены при доказательстве теоремы 100. Из этих рассуждений следует, что каким бы путём ни была определена длина $\rho(AB)$ отрезка AB, она всегда будет равна пределу последовательности x_k, описанной выше.

Из тех же рассуждений следует, что для отрезков, соизмеримых с единицей, длины отрезка, вычисленные по методу § 43 и по методу § 44, необходимо совпадают.

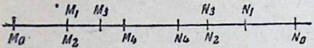
Таким образом, задача измерения отрезков полностью разрешена.

§ 45. Обратная задача теории измерения; основной принцип аналитической геометрии.

Поставим теперь вопрос, обратный по отношению к задаче измерения отрезков: для всякого ли положительного числа x найдётся отрезок, имеющий это число своей длиной (конечно, предполагается, что единица длины выбрана)? Утвердительный ответ на этот вопрос для рационального числа x получается без труда: отрезок длины $x = \frac{p}{q}$ (p и q — натуральные числа) можно получить, разделив единицу длины на q частей и взяв p таких частей.

В случае иррационального числа x ответ не получается столь просто. Оказывается, что для положительного решения поставленного вопроса при произвольном x нужна ещё одна геометрическая аксиома — последняя в нашем построении геометрии на плоскости. К рассмотрению этой аксиомы мы и переходим.

Пусть дана такая последовательность отрезков M_0N_0, M_1N_1, ..., M_kN_k, ..., что все точки отрезка M_kN_k $(k \geqslant 1)$ будут вместе с тем и точками отрезка $M_{k-1}N_{k-1}$. Отсюда следует, что каждая из точек M_k и N_k $(k \geqslant 1)$ либо принадлежит отрезку $M_{k-1}N_{k-1}$, либо служит его концом (черт. 120). Такую последовательность будем называть «последовательностью вложенных отрезков».



Черт. 120.

Пусть, далее, отрезки, образующие последовательность, безгранично убывают. Это значит, что каков бы ни был данный отрезок XY, в последовательности найдётся отрезок M_nN_n, удовлетворяющий условию $M_nN_n < XY$. Последовательность вложенных отрезков, удовлетворяющую этому условию, назовём, для краткости, «безгранично убывающей».

Сформулируем теперь следующую аксиому Кантора:

Аксиома 9. *Если дана безгранично убывающая последовательность вложенных отрезков, то существует такая точка, которая будет внутренней или конечной точкой каждого из этих отрезков.*

Следствие. *Точка, существование которой утверждает эта аксиома, — единственная.*

Действительно, предположив, что рассматриваемые отрезки имеют две общие точки, мы получим противоречие: с одной стороны, все эти отрезки будут больше расстояния между этими точками, с другой стороны, они, по предположению, безгранично убывают.

Пользуясь этой аксиомой, легко доказать теперь следующую теорему.

Теорема 102. *Каждому положительному числу соответствует отрезок, имеющий это число своей длиной.*

Доказательство. Пусть x — данное число. Выберем, что всегда возможно, две последовательности рациональных чисел $x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x$ и $\xi_0 > \xi_1 > \ldots > \xi_k > \ldots > x$, для которых $\lim x_k = \lim \xi_k = x$. На произвольном луче AB

строим две последовательности точек M_k и N_k $(k=0, 1, \ldots)$, для которых $\rho(AM_k)=x_k$; $\rho(AN_k)=\xi_k$. Отрезки M_kN_k образуют, как легко видеть, безгранично убывающую последовательность вложенных отрезков. По аксиоме Кантора существует единственная точка P, которая является внутренней или конечной точкой каждого из отрезков M_kN_k. Для этой точки P мы должны иметь $\rho(AP)-x_k<\xi_k-x_k$, и потому $\rho(AP)=\lim x_k=\lim \xi_k=x$. Теорема доказана.

Этой теоремой заканчивается построение теории измерения отрезков. В дальнейшем мы больше не будем пользоваться специальным обозначением $\rho(AB)$ для длины отрезков. Мы будем, как это обычно делается, понимать под AB как самый отрезок, так и его длину.

Теорема 102 лежит в основе установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой.

Чтобы установить такое соответствие, выбираем на данной прямой линии две точки O (начало координат) и E (единичная точка) и принимаем отрезок OE за единицу длины. Точке O ставим в соответствие число 0 (нуль); точке X луча OE ставим в соответствие положительное число x, равное длине отрезка OX. Точно так же, всякой точке X' прямой OE, лежащей на продолжении луча OE за точку O, ставим в соответствие отрицательное число x', по абсолютной величине равное длине отрезка OX'. При этом каждой точке прямой OE будет отвечать определённое действительное число.

Обратно, каждому действительному числу x будет соответствовать по теореме 102 некоторая точка прямой OE. Эта точка будет, как легко видеть, единственной (в силу того, что большему отрезку соответствует и бо́льшая длина).

Описанное соответствие находит, как это известно читателю, самое широкое применение в алгебре и анализе (числовая прямая) при геометрическом истолковании тех или иных числовых соотношений.

То же самое соответствие позволяет использовать числовые методы для решения геометрических вопросов (аналитическая геометрия).

Переход от построенной нами системы координат на прямой к координатам на плоскости уже не представляет принципиального интереса и подробно описан на первых страницах любого учебника аналитической геометрии.

Использование положительных и отрицательных чисел для выражения направления и длины отрезка находит применение не только в анализе и аналитической геометрии. Мы будем, как это и принято, пользоваться этим вспомогательным средством и в элементарной геометрии.

Пусть на некоторой прямой принято за положительное одно из её направлений. В таком случае будем считать длины всех отрезков, имеющих положительное (отрицательное) направление, положительными (соответственно отрицательными). Длины направленных отрезков, взятые с надлежащим знаком, будем обозначать чёрточкой над буквами (§ 8): $\overline{AB}$, $\overline{BC}, \ldots$

При этом для любых трёх точек направленной прямой имеют место, как известно из аналитической геометрии, следующие равенства: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$; $\overline{AB}=\overline{CB}-\overline{CA}$.

Заметим ещё, что произведение длин двух направленных отрезков одной прямой, взятых с надлежащими знаками, будет иметь определённый знак независимо от выбора положительного направления на этой прямой: произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ будет положительным (отрицательным), если точки B и C лежат по одну сторону (соответственно по разные стороны) от точки A.

Аналогично отношение двух направленных отрезков одной прямой имеет определённый знак вне зависимости от выбора положительного направления на прямой: отношение $\overline{AB} : \overline{BC}$ будет положительным (отрицательным), если точка B делит отрезок AC внутренним (соответственно внешним) образом.

§ 46. Зависимость длины отрезка от выбора единицы измерения.

Длина $\rho(AB)$ данного отрезка зависит, очевидно, не только от выбора самого отрезка, но и от выбора отрезка, принятого за единицу измерения. Исследуем ближе эту последнюю зависимость.

Обозначим через x и x' длины одного и того же отрезка при условии, что за единицу измерения принят первый раз отрезок e, а второй раз — отрезок e'.

Число x' будет, очевидно, функцией от x. Эта функция определена при всех положительных значениях x и сама принимает только положительные значения; далее, так как длина суммы двух отрезков равна сумме их длин, то из равенств $x'=f(x)$ и $y'=f(y)$ следует, что и $x'+y'=f(x+y)$ или, короче, что $f(x)+f(y)=f(x+y)$. Наша задача состоит в том, чтобы найти вид соответствующей функции.

Эта задача легко решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 103. *Всякая функция $f(x)$, определённая при всех положительных значениях x, принимающая только положительные значения и удовлетворяющая при любых значениях $x>0$, $y>0$ условию*

$$f(x)+f(y)=f(x+y),$$

имеет вид:

$$f(x)=ax;\ a=\text{const}.$$

Доказательство. По условию теоремы, имеем

$$f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x);$$

$$f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$$

и т. д. и вообще

$$f(nx)=nf(x)\ \ (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Полагая здесь один раз $n=q$; $x=\frac{1}{q}$, другой раз $n=p$; $x=\frac{1}{q}$, получим:

$$f(1)=qf\left(\frac{1}{q}\right) \quad \text{и} \quad f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right),$$

откуда

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1).$$

Если $y>x>0$, то $f(y)=f(x)+f(y-x)>f(x)$, так что $f(x)$ — возрастающая функция.

Пусть теперь $x>0$ — иррациональное число. Выберем две последовательности рациональных чисел $x_0<x_1<\ldots<x_k<\ldots<x$ и $\xi_0>\xi_1>\ldots>\xi_k>\ldots>x$, удовлетворяющих условию $\lim x_k=\lim \xi_k=x$. Так как $f(x)$ — возрастающая функция, то

$$f(x_k)<f(x)<f(\xi_k)\ \ (k=0,\ 1,\ \ldots)$$

или, так как $f(x_k)=x_kf(1)$ и $f(\xi_k)=\xi_kf(1)$,

$$x_k<\frac{f(x)}{f(1)}<\xi_k,$$

откуда следует, что $\frac{f(x)}{f(1)} = x$ или

$$f(x) = xf(1).$$

Полагая $f(1) = a$, будем иметь окончательно: $f(x) = ax$.

Доказанная теорема имеет широкое применение в геометрии[1]; будет поэтому целесообразно дать ей иную, более наглядную формулировку.

С этой целью будем рассматривать множество всех положительных чисел как множество значений «переменной величины» x, а множество значений функции $f(x)$ как множество значений другой «переменной величины» $x' = f(x)$. Равенство $x' = ax$ является выражением пропорциональной зависимости между величинами x и x'. Доказанная теорема принимает при этом следующий вид.

Теорема 103а. *Если любому положительному значению одной переменной x отвечает положительное значение другой переменной x' так, что сумме любых двух значений переменной x отвечает сумма соответствующих значений переменной x, то величины x и x' пропорциональны*[2].

Применяя теперь доказанную теорему 103 или 103а к вопросу, поставленному в начале этого параграфа, мы приходим к выводу, что между длинами x и x' одного и того же отрезка имеет место зависимость вида $x' = ax$. Чтобы установить геометрический смысл коэффициента a, заметим, что $x' = a$ при $x = 1$. Это значит, что a есть новая длина старой единицы измерения.

Таким образом мы приходим к следующему результату.

Теорема 104. *При переходе от одной единицы измерения к другой длины всех отрезков умножаются на одно и то же число, равное длине старой единицы измерения, измеряемой при помощи новой единицы.*

---

[1] См. далее, §§ 48, 52, 58,; в отношении приложения уравнения $f(x) + f(y) = f(x+y)$ к вопросам, выходящим из рамок настоящей книги, см. например Дубнов [11], стр. 162.

[2] См. Таннери [18], стр. 597; Адамар [1], ч. I, стр. 27, 105, 216—217.

§ 47. Об однородности формул.

Установленная нами зависимость длины отрезка от выбора единицы измерения позволяет сделать некоторые общие замечания относительно вида тех формул, с которыми приходится иметь дело в элементарной геометрии.

Напомним предварительно некоторые общие определения.

Будем рассматривать целые рациональные функции, т. е. многочлены, от нескольких переменных x, y, $z, \ldots, u$, v с произвольными (действительными) числовыми коэффициентами. Такой многочлен называется однородным степени n, если все его члены имеют одно и то же измерение n. При этом под измерением одночлена

$$Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots u^{\eta}v^{\vartheta},$$

где A — числовой коэффициент, понимается сумма

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\eta+\vartheta$$

показателей степеней всех переменных.

Для однородного многочлена

$$F(x, y, z, \ldots, u, v)$$

степени n имеет, очевидно, место следующее тождество:

$$F(tx, ty, tz, \ldots, tu, tv) = t^n \cdot F(x, y, z, \ldots, u, v). \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь некоторую дробную рациональную функцию

$$F(x, y, z, \ldots, u, v) = \frac{f(x, y, z, \ldots, u, v)}{\varphi(x, y, z, \ldots, u, v)},$$

где f и φ — взаимно простые однородные многочлены степеней соответственно n_1 и n_2. Функция такого вида удовлетворяет условию (1), если положить $n = n_1 - n_2$. Такого рода (дробную) рациональную функцию мы будем называть однородной рациональной функцией степени $n = n_1 - n_2$.

Эти свойства однородных многочленов и однородных рациональных функций позволяют, как известно, распространить понятие однородности на более широкий класс функций.

Функцию

$$F(x, y, z, \ldots, u, v),$$

определённую в некоторой области значений аргументов $x, y, z, \ldots, u, v$, будем называть **однородной функцией степени** n, если она удовлетворяет условию (1) при всех значениях $x, y, z, \ldots, u, v$ и t, при которых обе части этого равенства определены. (Значения $x, y, z, \ldots, u, v$ должны принадлежать области определения функций; t должно быть выбрано так, чтобы и система значений $tx, ty, tz, \ldots \ldots, tu, tv$ принадлежала к той же области.)

Можно было бы показать, что если некоторый многочлен или рациональная функция являются однородными в смысле этого последнего определения, то они будут необходимо однородными в том смысле, как это указано выше.

Этими общими понятиями мы сейчас и воспользуемся.

Пусть между длинами $a, b, c, \ldots, k, l$ некоторых отрезков (по отношению к выбранной единице длины) имеет место зависимость вида

$$F(a, b, c, \ldots, k, l) = 0, \tag{2}$$

где левая часть есть однородный многочлен от своих аргументов. Покажем, что та же самая зависимость между длинами отрезков будет иметь место при любом выборе единицы измерения.

Действительно, если перейти к другой единице длины, то новые длины отрезков будут связаны с первоначальными соотношениями:

$$a' = ta, \ b' = tb, \ \ldots, \ l' = tl, \tag{3}$$

и из равенства (2) будет следовать в силу тождества (1), что имеет место равенство

$$F(a', b', c', \ldots, k', l') = 0.$$

В этом случае соотношение (2) между длинами отрезков естественно называть соотношением между самыми отрезками.

Замечание. Из того обстоятельства, что соотношение (2) между длинами отрезков имеет место независимо от выбора единицы длины, не следует обратно, что многочлен F—однородный. Это видно хотя бы из следующего примера. Соотношение

$$F(a, b, c, d) = (a - b)^2 + (c - d)^4 = 0$$

между длинами четырёх отрезков имеет место независимо от выбора единицы длины (так как оно равносильно условиям $a = b$; $c = d$). Однако многочлен F — неоднородный.

Пусть теперь функция $f(a, b, c, \ldots, k, l)$ определена в некоторой области положительных значений своих аргументов и принимает там только положительные значения. Будем рассматривать значения аргументов $a, b, c, \ldots, k, l$ и значение

$$x = f(a, b, c, \ldots, k, l) \tag{4}$$

самой функции как длины некоторых отрезков. Спросим себя, при каких условиях значения этой функции будут независимо от выбора единицы измерения представлять длину одного и того же отрезка, если рассматривать аргументы как длины одних и тех же данных отрезков. Короче говоря, как надо выбрать функцию f, чтобы равенство (4) определяло один и тот же отрезок x при произвольном выборе единицы измерения?

Если перейти к другой единице длины, то новые длины a' $b', \ldots$ данных отрезков будут выражаться через старые формулами вида (3). Новое значение функции будет

$$x' = f(a', b', c', \ldots, k', l') = f(ta, tb, tc, \ldots, tk, tl).$$

Если мы хотим, чтобы числа x и x' выражали длину одного и того же отрезка, выраженную в старых и в новых единицах, то мы должны иметь

$$x' = tx$$

или

$$f(ta, tb, tc, \ldots, tk, tl) = t \cdot f(a, b, c, \ldots, k, l).$$

Обратно, если это соотношение выполнено, то x и x' будут длинами одного и того же отрезка.

Но последнее равенство показывает, что f есть однородная функция первой степени от своих аргументов.

В этом случае равенство (4) можно опять понимать не только как зависимость между длинами отрезков, но и как зависимость между самыми отрезками.

Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 105. *Если соотношение* (4), *где* $a, b, c, \ldots, k, l$ — *длины данных отрезков, определяет независимо от выбора единицы измерения длину одного и того же отрезка, то* f *есть однородная функция первой степени от своих аргументов, и обратно.*

Примерами таких соотношений между отрезками могут служить следующие равенства:

$$x=a+b;\quad x=a-b\quad (a>b);$$

$$x=\frac{ab}{c};\quad x=\frac{abc}{de};\quad x=\frac{ab}{a-b}\quad (a>b);$$

$$x=\sqrt{ab};\quad x=\sqrt{a^2-b^2}\quad (a>b);$$

$$x=\sqrt{a(b-c)}+\sqrt{b(c-a)}\quad (a<c<b);$$

$$x=\sqrt[4]{a^4+b^4};\quad x=\sqrt[4]{a^2bc};\ \text{и т. д.}$$

Неравенства в скобках указывают там, где в этом есть надобность, область определения соответствующей функции.

В элементарной геометрии мы пользуемся, как правило, только такими соотношениями, которые не зависят от выбора единицы измерения.

В отличие от этого, в алгебре и в анализе мы широко применяем геометрическое истолкование таких соотношений, как

$$y=x^2;\quad y=\frac{1}{z};\ z=x+y^2\ \text{и т. д.};$$

все соотношения такого типа выражают вполне определённую зависимость между отрезками только до тех пор, пока не изменяется выбранная единица длины.

§ 48. Отношение двух отрезков.

После того как введено понятие длины отрезка, отношение двух отрезков можно определить просто как частное от деления длин обоих отрезков; в силу теоремы 104 это частное не зависит от выбора единицы длины.

Одно из существенных свойств отношения двух отрезков выражается следующей теоремой:

Теорема 106. *Отношение двух отрезков одной прямой равно отношению их параллельных проекций на одну и ту же прямую.*

Доказательство. Равным отрезкам одной прямой соответствуют равные проекции (теорема 66); проекция отрезка, представляющего собой сумму двух данных отрезков, очевидно, равна сумме проекций обоих отрезков. Поэтому к длине отрезка x и длине его проекции x' применима теорема 103 (или, что то же, теорема 103а). Отсюда следует, что $x'=ax$. Если x и y — два данных отрезка, x' и y' — их проекции, то $x:y=x':y'$. Теорема доказана.

В случаях, аналогичных только что подробно рассмотренному, можем в дальнейшем говорить коротко так: «величины x и x' удовлетворяют условиям теоремы 103 и потому пропорциональны».

Следствие. *Отношение отрезков, отсекаемых на одной стороне угла двумя параллельными секущими, считая от вершины, равно отношению аналогичных отрезков, отсекаемых теми же секущими на другой стороне угла.*

Мы видим, таким образом, что геометрическое определение пропорциональности отрезков (§ 39) равносильно следующему арифметическому определению: четыре отрезка называются пропорциональными, если отношение двух из них равно отношению двух других.

Обратим внимание ещё на следующее обстоятельство. Между длиной отрезка x и длиной его параллельной проекции x имеет место зависимость $x'=ax$. Коэффициент a не зависит от выбора единицы длины (в силу теоремы 104). Отсюда следует, что значение коэффициента a вполне определяется заданием углов между осью проекций, данной прямой и направлением проектирования.

Ограничиваясь простейшим случаем прямоугольной проекции, мы видим, что коэффициент a (отношение прямоугольной проекции отрезка к длине самого отрезка) зависит только от величины угла между отрезком и осью проекций. Это даёт возможность ввести следующее определение:

Отношение прямоугольной проекции отрезка к длине самого отрезка называется косинусом острого угла между отрезком и осью проекций.

Приписывая, далее, косинусу надлежащие знаки, нетрудно распространить это определение на углы любой величины.

Введя ещё вторую ось проекций, перпендикулярную к первой, мы можем аналогичным образом определить понятие синуса. Таким образом, открывается общий и естественный путь для вывода основных формул тригонометрии.

Изложение плоской тригонометрии выходит из рамок настоящей книги. Поэтому мы будем считать основные факты тригонометрии известными и пользоваться ими в дальнейших главах книги.

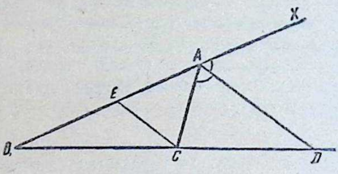
§ 49. Теорема о биссектрисе.

Теорема 107. *Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону (внутренним образом) на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.*

Аналогично, биссектриса внешнего угла треугольника делит противоположную сторону внешним образом на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам[1]).

Доказательство. Ограничимся доказательством второй половины теоремы. Первая половина доказывается аналогично.

Пусть биссектриса внешнего угла CAX треугольника ABC (предположим для определённости, что $AB > AC$) пересекает



Черт. 121.

прямую BC в точке D (черт. 121). Обозначим через E такую точку стороны AB, что $AC = AE$. При этом $\angle ACE = \angle AEC$, и следовательно $\angle CAX = \angle ACE + \angle AEC = 2\angle ACE$. Поэтому $\angle CAD = \angle ACE$ и $AD \parallel CE$. В силу теоремы 106 имеем $BD:DC = BA:AE$ или $BD:DC = AB:AC$.

Применим теорему о биссектрисе угла треугольника к отысканию одного геометрического места.

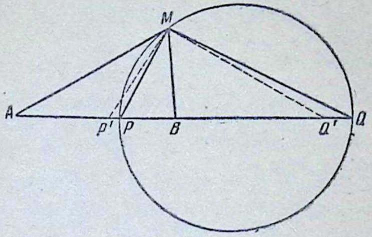
Геометрическое место VI. *Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек равно отношению двух данных неравных отрезков, есть окружность*[2]).

---

[1]) Вторая половина теоремы теряет смысл для биссектрисы внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника: эта биссектриса параллельна основанию.

[2]) Другие способы отыскания этого геометрического места будут приведены ниже (§ 75 и § 90).

Пусть требуется найти геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию $MA:MB=a:b$, где A и B — данные точки, a и b — данные отрезки, $a \neq b$.



Черт. 122.

Обозначим через P и Q (черт. 122) точки, делящие отрезок AB внутренним и внешним образом в данном отношении (§ 42, построение 21):

$$AP:PB=AQ:QB=a:b.$$

Если какая-либо точка M удовлетворяет поставленному условию, то $AP:PB=AQ:QB=AM:MB$. Отсюда легко вывести (пользуясь теоремой 107), что MP и MQ будут внутренней и внешней биссектрисами треугольника MAB. Следовательно, эти прямые MP и MQ взаимно перпендикулярны.

Так как угол PMQ — прямой, то точка M, обладающая требуемым свойством, лежит на окружности, диаметром которой служит отрезок PQ (§ 24, геометрическое место Va).

Покажем теперь, что любая точка M этой окружности обладает требуемым свойством. Для этого достаточно доказать, что для любой точки M этой окружности прямая MP служит биссектрисой угла AMB.

Доказательство проведём от противного. Допустим, что прямая MP не является биссектрисой угла AMB и что биссектриса этого угла пересекает прямую AB в точке P'. Обозначим ещё через Q' точку пересечения с AB прямой, проходящей через M и перпендикулярной к MP'. Для определённости будем считать, что точка Q лежит за точкой B (а не за точкой A), т. е. что через a обозначен больший из двух данных отрезков.

Точка P' может лежать либо между A и P, либо между P и B. В первом случае точка Q' будет лежать между B и Q, так как $\angle P'MQ' = \angle PMQ = d$. При этом $AP' < AP$; $BP' > BP$; $BQ' < BQ$, и потому $\frac{AP'}{P'B} < \frac{AP}{PB}$; $\frac{AQ'}{Q'B} = \frac{AB + BQ'}{Q'B} = \frac{AB}{Q'B} + 1 > \frac{AB}{QB} + 1 = \frac{AQ}{QB}$. По определению точек P и Q имеем $AP:PB = AQ:QB$. Отсюда следует, что $\frac{AP'}{P'B} < \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} < \frac{AQ'}{Q'B}$ или $\frac{AP'}{P'B} < \frac{AQ'}{Q'B}$. Но так как MP', по предположению, есть биссектриса угла AMB и $MQ' \perp MP'$, то мы должны в то же время иметь $\frac{AP'}{P'B} = \frac{AQ'}{Q'B} = \frac{AM}{MB}$.

Получившееся противоречие показывает, что точка P' не может лежать между A и P. Аналогичное противоречие мы получили бы, предположив, что точка P' лежит между P и B.

Таким образом, доказано, что искомым геометрическим местом служит окружность, имеющая отрезок PQ своим диаметром.

§ 50. Измерение углов.

Теория измерения углов может быть построена вполне аналогично теории измерения отрезков. Поэтому мы ограничимся несколькими замечаниями.

В основе теории измерения отрезков, изложенной в §§ 43—45, лежали:

a) свойства равных отрезков;

b) аксиома Архимеда (§ 44);

c) аксиома Кантора (§ 45);

d) возможность разделить отрезок на произвольное число равных частей, вытекавшая из построения 17 (§ 28).

Равные углы обладают теми же свойствами, что и равные отрезки (§ 9). Предложения, соответствующие аксиомам Архимеда и Кантора, в случае углов могут быть доказаны. А именно, можно доказать следующие предложения:

Каковы бы ни были два данных угла, всегда найдётся такое кратное меньшего угла, которое превосходит больший.

Если дана безгранично убывающая последовательность вложенных углов (с общей вершиной), *то существует такой луч* (выходящий из общей вершины), *который будет внутренним лучом или стороной для каждого из этих углов.*

С помощью этих двух предложений можно далее доказать, что

каков бы ни был данный угол, всегда существуют лучи, делящие его на заданное число равных частей [1]).

Так как центральный угол, соответствующий стороне вписанного выпуклого правильного n-угольника, равен $\frac{4}{n}d$, то отсюда вытекает, в частности, существование правильных многоугольников с любым числом сторон.

Итак, теория измерения углов не нуждается для своего построения в новых аксиомах.

Отметим теперь два пункта, в которых теория измерения углов несколько отличается от теории измерения отрезков.

Первое наше замечание будет касаться выбора единицы измерения. В то время как все отрезки обладают одними и теми же геометрическими свойствами, среди углов есть такие, которые выделяются по своим геометрическим свойствам, например прямой или развёрнутый. Вследствие этого при выборе единицы длины приходится неизбежно ссылаться на тот или другой конкретный отрезок («одну десятимиллионную часть четверти Парижского меридиана», «расстояние между штрихами некоторого эталона при определённых условиях» и т. д.). В отличие от этого единицу измерения углов можно определить чисто логическим путём без ссылок на конкретные физические тела. Так мы и поступаем. За единицу измерения углов принимается, как известно, или прямой угол или градус т. е. $\frac{1}{90}$ часть прямого угла (и подразделения градуса — минуты и секунды). Заметим ещё, что в связи с введением метрической системы мер было предложено делить прямой угол не на 90,

---

[1]) Однако, в отличие от того, что имеет место для отрезков, произвольно данный угол нельзя разделить на заданное число равных частей (например, на три) с помощью циркуля и линейки. См. по этому поводу, например, Шапиро [23], стр. 315, или Окунев [16], стр. 200.

а на 100 частей (одна сотая часть прямого угла получила название «град»); однако это предложение не получило распространения.

Далее, при выбранной единице длины существуют отрезки, длины которых выражаются любыми положительными числами. Если понимать угол так, как мы его понимали до сих пор в этой книге, то для углов дело будет обстоять иначе: величины углов будут ограничены сверху (числом $4d$ или $360°$). Однако практические потребности (теория вращательного движения) заставляют рассматривать углы «произвольной величины». При этом, однако, исчезает однозначность соответствия между углом и его величиной: одному и тому же углу как геометрическому образу соответствует бесконечное множество числовых значений величины угла (отличающихся одно от другого на кратное $4d$)[1].

§ 51. Длина окружности.

От рассмотрения длины прямолинейного отрезка и величины угла обратимся к понятию длины окружности. При этом мы будем рассматривать выпуклые вписанные и описанные многоугольники, называя их просто вписанными и описанными. Два многоугольника — вписанный в некоторую окружность и описанный около неё — будем считать соответствующими друг другу, если стороны описанного многоугольника касаются окружности в вершинах вписанного.

Из теоремы 26 следует, что периметр любого многоугольника, вписанного в некоторую окружность, меньше периметра всякого многоугольника, описанного около той же окружности. Наш повседневный опыт подсказывает нам, что каждой окружности можно приписать некоторое число (её «длину»), аналогичное длине прямолинейного отрезка; это число (как показывает опыт) больше периметра любого вписанного многоугольника и меньше периметра любого описанного. Чтобы строго обосновать существование такого числа, мы докажем в настоящем параграфе существование единственного отрезка, который больше периметров всех многоугольников, вписанных в данную

---

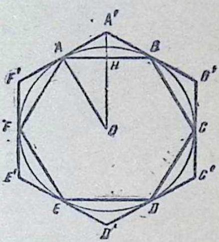
[1] Теория измерения углов произвольной величины подробно разобрана в книге Швана [25], стр. 210—219.

окружность, но меньше периметров всех многоугольников, описанных около неё. Длину этого отрезка мы и назовём в дальнейшем длиной окружности.

Начнём с доказательства следующей теоремы.

Теорема 108. *Разность между периметрами описанного и вписанного соответственных правильных многоугольников меньше восьмикратной стороны вписанного многоугольника.*

Доказательство. Пусть $ABC\ldots$ (черт. 123) — правильный вписанный многоугольник, $A'B'C'\ldots$ — соответствующий описанный. Отрезок OA' перпендикулярен к стороне AB вписанного многоугольника и делит её в точке H пополам. Из подобия прямоугольных треугольников OAA' и OHA имеем $AA':AH = OA:OH$. Обозначая через P и p периметры описанного и вписанного многоугольников, получим отсюда $P:p = OA:OH$ или $P - p = \frac{p}{OH}(OA - OH)$. Отрезок p, как периметр вписанного многоугольника, меньше периметра описанного квадрата, так что $p < 8 \cdot OA$. Далее, из треугольника OAH имеем $OA - OH < AH$. Наконец, непосредственно очевидно (и может быть строго доказано), что $OH \geqslant \frac{1}{2} OA$. Предыдущее равенство и обращается теперь в неравенство $P - p < 16 \cdot AH$, т. е. $P - p < 8 \cdot AB$.



Черт. 123.

Если мы будем теперь считать очевидным (это положение также можно строго доказать), что сторона вписанного правильного многоугольника безгранично убывает при неограниченном удвоении числа сторон (§ 17, построение 7, замечание), то мы придём к следующему заключению.

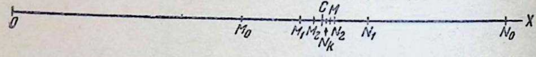
Следствие. *Разность между периметрами описанного и вписанного правильных многоугольников неограниченно убывает при безграничном удвоении числа сторон.*

Переходим теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 109. *Существует единственный отрезок, больший периметров всех многоугольников, вписанных в данную* *окружность, и в то же время меньший периметров всех многоугольников, описанных около неё.*

Длина этого отрезка и называется **длиной окружности.**

Доказательство. Пусть p_0 — периметр некоторого правильного многоугольника (например квадрата или правильного шестиугольника), вписанного в данную окружность и P_0 — периметр соответствующего описанного многоугольника. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ и $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ периметры вписанных и описанных многоугольников, получаемых из данных путём последовательного удвоения числа сторон. При этом будем иметь $p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$; $P_0 > P_1 > P_2 > \ldots > P_k > \ldots$ и $P_k - p_k \longrightarrow 0$ при неограниченном возрастании k.



Черт. 124.

Отложим теперь на каком-либо луче OX отрезки $OM_0 = p_0$; $ON_0 = P_0$; $OM_1 = p_1$; $ON_1 = P_1$; $OM_2 = p_2$; $ON_2 = P_2$; ... (черт. 124). Получим последовательность вложенных отрезков M_0N_0, M_1N_1, ... Так как длины этих отрезков безгранично убывают, то эти отрезки будут иметь единственную общую точку C. Покажем, что отрезок OC обладает искомым свойством.

Действительно, допустим, что периметр $OM = p$ некоторого вписанного многоугольника больше OC. В таком случае найдётся (в силу безграничного убывания отрезков M_kN_k) точка N_k, лежащая между C и M. Но это значит, что периметр p вписанного многоугольника больше периметра P_k описанного. Так как это невозможно, то отрезок OC больше периметров всех вписанных многоугольников. Аналогично покажем, что отрезок OC меньше периметров всех описанных многоугольников.

Наконец, единственность отрезка OC следует из того, что все отрезки M_kN_k не могут иметь двух различных общих точек.

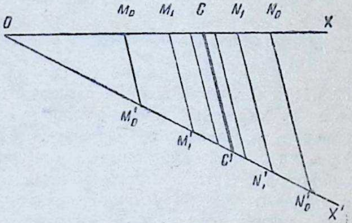
Замечание. В предыдущем изложении мы не пользовались понятием предела при определении длины окружности. Если ввести теперь это понятие, то из доказательства теоремы 109 будет вытекать, что длина окружности есть общий предел периметров соответственных правильных вписанных и описанных многоугольников при безграничном удвоении числа сторон.

Далее, из наших рассуждений следует, что этот предел не зависит от числа сторон первоначального многоугольника: мы придём к одному и тому же отрезку OC, начиная, например, с вписанного квадрата, правильного шестиугольника или правильного семиугольника.

Наконец, теория пределов даёт общеизвестное доказательство следующей теоремы. Мы предпочтём, однако, чтобы не нарушать стиля нашего изложения, дать более геометрическое доказательство той же теоремы.

Теорема 110. *Длины окружностей относятся как их радиусы.*

Доказательство. Пусть r и r' — радиусы двух окружностей. Обозначим опять через p_k и P_k периметры тех многоугольников для первой окружности, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы 109. Далее, обозначим через p'_k и P'_k периметры аналогичных многоугольников (соответственно с тем же числом сторон) для второй окружности. При этом будем иметь



Черт. 125.

$$p_k : p'_k = P_k : P'_k = r : r' \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Если мы, как и при доказательстве теоремы 109, построим на лучах OX и OX' отрезки $OM_k = p_k$, $ON_k = P_k$, $OM'_k = p'_k$, $ON'_k = P'_k$ (черт. 125), то все прямые $M_kM'_k$ и $N_kN'_k$ будут параллельны. Если теперь C и C' — общие точки соответственно всех отрезков M_kN_k и $M'_kN'_k$, то и прямая CC' будет, как легко видеть, параллельна тем же прямым. Это и значит, что $OC:OC' = p_k:p'_k = r:r'$. Теорема доказана.

Следствие. *Отношение длины окружности к диаметру имеет для всех окружностей одно и то же числовое значение.*

Это числовое значение оказывается равным

$$\pi = 3{,}1415926535897\ldots$$

Замечание. Для вычисления числового значения π было предложено много способов, как элементарных [1], так и не элементарных; последние основаны в большинстве случаев на теории рядов [2].

Ламбертом (в 1770 г.) было доказано, что π есть число иррациональное. Впоследствии (в 1882 г.) Линдеман показал, что π есть число трансцендентное, т. е. оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами [3].

§ 52. Длина дуги окружности.

Рассуждения, вполне аналогичные тем, которыми мы пользовались в § 51, дают возможность определить не только длину окружности, но и длину произвольной дуги окружности. При этом вместо вписанных и описанных многоугольников приходится рассматривать вписанные и описанные ломаные.

Длина s некоторой дуги окружности зависит (при выбранных единице длины и единице угла) от радиуса r окружности и от величины центрального угла α. Аналогично теореме 110 можно было бы доказать, что отношение $s:r$ не зависит от радиуса и, таким образом, зависит только от угла α. Величины $s:r$ и α, очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 103а (сравнить более подробные рассуждения в § 48); поэтому мы будем иметь $s:r = k\alpha$ или

$$s = kr\alpha,$$

---

[1] Один из самых практичных таких способов описан в книге Адамара [1], ч. I, стр. 162—165.

[2] См., например, Бари [4], стр. 111—112.

[3] Доказательство трансцендентности π можно найти, например, у Клейна [15], т. I, стр. 361—370.

где k — некоторый множитель пропорциональности. Числовое значение этого коэффициента не зависит от выбора единицы длины (сравнить § 46), так как значения s и r изменяются при перемене единицы длины в одном отношении, но зависит от выбора единицы измерения углов. Так, при измерении углов в градусах мы должны иметь $s = 2\pi r$ при $\alpha = 360°$, так что $k = \frac{2\pi}{360°}$. Таким образом, при измерении углов в градусах мы будем иметь:

$$s = \frac{2\pi}{360} \cdot r \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ — в градусах}).$$

Вместо того чтобы определять коэффициент k по заданной единице измерения углов, мы можем поставить вопрос иначе. Выберем единицу измерения углов так, чтобы было $k = 1$, т. е. чтобы иметь

$$s = r\alpha.$$

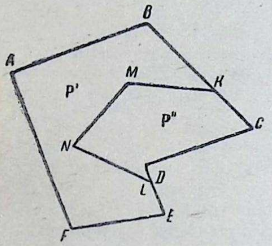
Мы имеем при этом $\alpha = 1$, если $s = r$. Итак, за единицу измерения углов мы принимаем здесь центральный угол, которому соответствует дуга окружности, по величине равная радиусу. Такой угол называется, как известно, радианом.

ГЛАВА VII.

ПЛОЩАДИ.

§ 53. Равносоставленные многоугольники.

В этой главе мы будем рассматривать только простые ломаные и простые многоугольники (§ 7), называя их для краткости просто ломаными и многоугольниками. Во многих случаях мы будем даже ограничиваться для простоты доказательств только выпуклыми многоугольниками: хотя рассматриваемые свойства сохраняют силу и для невыпуклых простых многоугольников, но доказываются они в этом случае значительно сложнее.



Черт. 126.

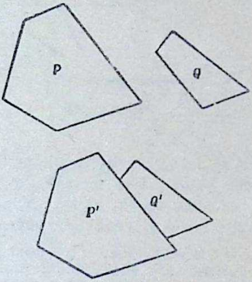
Пусть дан некоторый многоугольник *ABCDEF* (черт. 126) или, короче, многоугольник P. Соединим две точки *K* и *L* этого многоугольника какой-либо ломаной (или, в частном случае, отрезком), целиком лежащей внутри многоугольника, скажем, ломаной *KMNL*. Мы получим два новых многоугольника *ABKMNLEF* и *KCDLNM* или, короче, P′ и P″. При этом говорят, что ломаная делит многоугольник P на части P′ и P″, что многоугольник P разложен на многоугольники P′ и P″, что он состоит из P′ и P″ или, наконец, что многоугольник P представляет собой сумму многоугольников P′ и P″:

$$P = P' + P''.$$

Можно также сказать, что многоугольник **P** получен из **P′** путём добавления **P″** или из **P″** путём добавления **P′**.

Эти понятия легко обобщаются на случай суммы любого конечного числа многоугольников путём дальнейшего разложения одного из многоугольников **P′** и **P″** или обоих.

Пусть теперь даны два выпуклых многоугольника **P** и **Q** (черт. 127). В таком случае всегда существует третий многоугольник, вообще говоря, невыпуклый, который можно представить как сумму двух многоугольников **P′** и **Q′**, соответственно равных **P** и **Q**. Это вытекает просто из того, что каждый из данных выпуклых многоугольников целиком расположен по одну сторону от любой своей стороны. Строгое доказательство того же свойства для произвольных невыпуклых многоугольников далеко не просто.



Черт. 127.

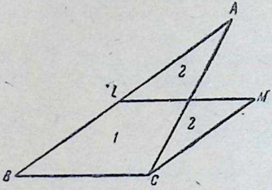
Введём теперь следующее определение: два многоугольника называются равносоставленными, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников. Выражаясь более наглядно, можно сказать, что многоугольники **P** и **Q** равносоставлены, если многоугольник **P** можно разрезать на такие части, которые, будучи сложены иначе, дают многоугольник **Q**.

Следовательно, если к равносоставленным многоугольникам добавить равные или равносоставленные, то получившиеся многоугольники будут опять равносоставлены.

В качестве примера применения понятия равносоставленности приведём следующие теоремы.

Теорема 111. *Всякий треугольник равносоставлен с некоторым параллелограмом, у которого основание совпадает с одной из сторон треугольника, а высота равна половине соответствующей высоты треугольника.*

Доказательство. Пусть L — середина стороны AB треугольника ABC (черт. 128), и M — точка пересечения прямой, проходящей через L и параллельной BC, с прямой, проходящей через C и параллельной AB. Треугольник ABC равносоставлен с параллелограмом $LBCM$: соответственно равные части обоих многоугольников обозначены на чертеже одними и теми же цифрами.

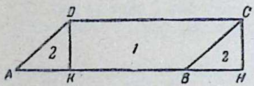


Черт. 128.

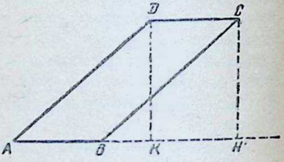
Теорема 112. *Всякий параллелограм равносоставлен с прямоугольником, основанием которого служит бо́льшая сторона параллелограма, а высотой — соответствующая высота параллелограма.*

Доказательство. Опустим из вершин C и D данного параллелограма $ABCD$ (черт. 129) перпендикуляры CH и DK на прямую AB. Если угол A — острый, то в силу $AK < AD \leqslant AB$ точка K будет лежать на самой стороне AB. Справедливость теоремы следует из равенства треугольников ADK и BCH.

Замечание. Это доказательство может оказаться неприменимым к меньшей стороне параллелограма. Действительно, при этом обе точки H и K могут лежать на продолжении стороны AB (черт. 130).



Черт. 129.

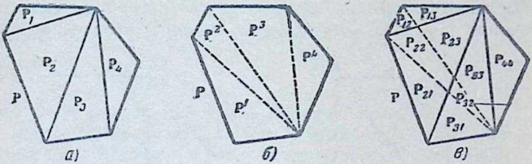


Черт. 130.

Одно из самых общих свойств равносоставленных многоугольников выражается следующей теоремой.

Теорема 113. *Два многоугольника, равносоставленных с третьим, равносоставлены между собой.*

Доказательство. Пусть каждый из многоугольников $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ равносоставлен с одним и тем же многоугольником $\mathbf{P}$. Это значит, что многоугольник $\mathbf{P}$ можно разложить на некоторое число k многоугольников P_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, а многоугольник Q — на такое же число многоугольников Q_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, соответственно равных P_i (на черт. 131, *а* показано для примера разложение многоугольника P на четыре части P_1, P_2, P_3 и P_4). Точно так же многоугольник P можно разложить на l многоугольников P^j $(j=1, 2, \ldots, l)$, а многоугольник R—на такое же число многоугольников R^j, соответственно равных P^j (на черт. 131, *б* показано разложение того же многоугольника P на другие части P^1, P^2, P^3 и P^4).



а) б) в)

Черт. 131.

Рассмотрим теперь в многоугольнике P совокупность всех отрезков, которые делят его на многоугольники P_i, и в то же время совокупность всех отрезков, которые делят его на многоугольники P^j. С помощью тех и других отрезков, вместе взятых, многоугольник P будет разложен на многоугольники P_{ij}; внутренняя область каждого такого многоугольника есть общая часть (в терминах теории множеств — пересечение) внутренних областей многоугольников P_i и P^j. Некоторым сочетаниям индексов i, j может и не соответствовать многоугольник P_{ij} (так, на черт. 131, *в* имеем многоугольники P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32}, P_{33} и P_{44}; не существует многоугольников P_{11}, P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{41}, P_{42} и P_{43}).

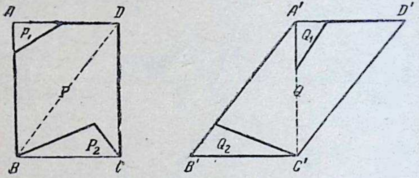
Каждый многоугольник P_i есть сумма всех многоугольников P_{ij} с общим первым индексом i; следовательно, и многоугольник Q_i, равный P_i, можно разложить на части, соответственно равные всем P_{ij} с общим первым индексом i. Поэтому весь многоугольник Q можно разложить на части, соответственно равные всем вообще многоугольникам P_{ij}. Аналогично, многоугольник R^j можно разложить на части, соответственно равные всем $\mathbf{P}_{ij}$ с общим вторым индексом j, а весь многоугольник $\mathbf{R}$ — на части, соответственно равные всем вообще $\mathbf{P}_{ij}$.

Следовательно, как многоугольник $\mathbf{Q}$, так и $\mathbf{R}$, можно разложить на части, соответственно равные всем $\mathbf{P}_{ij}$. Это и значит, что многоугольники $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ равносоставлены.

§ 54. Равновеликие многоугольники.

Обобщением понятия равносоставленности является понятие равновеликости.

Два многоугольника называются равновеликими, если к каждому из них можно добавить по одинаковому числу соответственно равных многоугольников так, что получатся равносоставленные многоугольники [1]).



Черт. 132.

Так, на черт. 132 многоугольники $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ равновелики, так как к каждому из них можно добавить по два соответственно равных многоугольника $\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2$ так, что получатся равносоставленные многоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

Равносоставленные многоугольники представляют собой, очевидно, частный случай равновеликих.

Примером применения понятия равновеликости могут служить следующие теоремы.

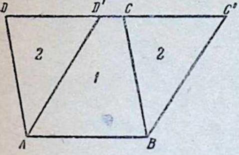
---

[1]) Многоугольники, обладающие указанным свойством, было бы последовательно называть равнодополнимыми. (Гильберт [7] называет их ergänzungsgleich, что на русский язык обычно переводится как «равновеликие по дополнению».)

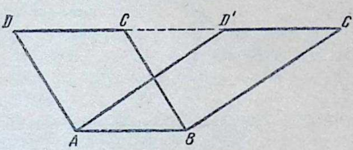
Однако, как мы увидим далее, многоугольники, обладающие этим свойством, имеют равные площади, и обратно. Поэтому мы предпочтём сохранить привычный термин «равновеликие».

Теорема 114. *Параллелограмы с равными основаниями и равными высотами равновелики.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда сравниваемые параллелограмы $ABCD$ и $ABC'D'$ (черт. 133 и 134) имеют общее основание AB и расположены от прямой AB по одну сторону. При этом их стороны CD и $C'D'$ лежат (в силу равенства высот) на одной прямой, параллельной AB. Отрезки CD и $C'D'$ могут иметь общие точки (черт. 133), могут их не иметь (черт. 134). В обоих случаях данные параллелограмы равновелики, так как, добавляя к ним равные треугольники BCC' и ADD', получим один и тот же многоугольник $ABC'D$.



Черт. 133.

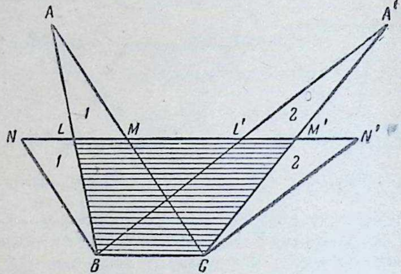


Черт. 134.

Заметим, что в первом случае (черт. 133) данные параллелограмы не только равновелики, но, очевидно, и равносоставлены, так как их можно разложить на соответственно равные части (отмеченные на черт. 133 одной и той же цифрой).

Теорема 115. *Два треугольника с равными основаниями и равными высотами, соответствующими этим основаниям, равновелики.*

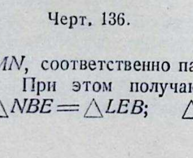
Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда сравниваемые треугольники ABC и $A'BC$ (черт. 135) имеют общее основание BC и расположены от прямой BC по одну сторону. Середины L, M, L' и M' сторон AB, AC, $A'B$ и $A'C$ этих треугольников лежат (в силу равенства высот) на одной прямой. Средние линии LM и $L'M'$ обоих треугольников могут иметь общие точки или их не иметь; на ходе доказательства это не отразится. Пятиугольник $ABCN'M$, который получается от добавления к треугольнику ABC треугольника CMN', есть сумма треугольников ALM и $CN'M'$ и четырёхугольника $LBCM'$. Точно так же, пятиугольник $A'CBNL'$, который получается от добавления к треугольнику $A'BC$ треугольника BNL', есть сумма треугольников BLN и $A'L'M'$ и того же самого четырёхугольника $LBCM'$. Но $\triangle ALM = \triangle BLN$, $\triangle CN'M' = \triangle A'L'M'$, и потому пятиугольники



Черт. 135.

$ABCN'M$ и $A'CBNL'$ равно составлены. Таким образом, путём добавления к треугольникам ABC и $A'BC$ равных треугольников CMN' и BNL' получаются два равносоставленных многоугольника.

Теорема 116. *Если через какую-либо точку, лежащую на диагонали параллелограма, провести прямые, параллельные его сторонам, то два из получившихся четырёх параллелограмов, а именно те, через которые не проходит рассматриваемая диагональ, равновелики между собой.*



Черт. 136.

Доказательство. Пусть через точку E, которая лежит на диагонали BD параллелограма $ABCD$ (черт. 136), проведены прямые KL и MN, соответственно параллельные его сторонам.

При этом получаются три пары равных треугольников: $\triangle NBE = \triangle LEB$; $\triangle KED = \triangle MDE$; $\triangle ABD = \triangle CDB$.

Параллелограмы $ANEK$ и $ELCM$ будут равновелики, так как если к первому добавить треугольники NBE и KED, а ко второму — соответственно равные им треугольники LEB и MDE, то получим равные треугольники ABD и CDB.

Следствия. 1. *Если стороны двух параллелограмов с соответственно равными углами обратно пропорциональны, то параллелограмы равновелики.*

(Выражение «обратно пропорциональны» обозначает, что одна сторона первого параллелограма так относится к одной стороне второго, как другая сторона второго относится к другой стороне первого.)

Действительно, пусть стороны a, b и a', b' двух параллелограмов обратно пропорциональны, т. е. $a:a' = b':b$, и их углы соответственно равны. Такие параллелограмы можно расположить как параллелограмы $ANEK$ и $ELCM$. При этом точки B, E и D будут лежать на одной прямой, так как треугольники NBE и KED будут подобны (по второму признаку подобия).

2. *Всякий параллелограм равновелик некоторому параллелограму с теми же углами, у которого одной из сторон служит заданный отрезок.*

Действительно, если a, b — стороны данного параллелограма, a' — данный отрезок, то вторую сторону b' искомого параллелограма можно построить, пользуясь пропорцией $a:a' = b':b$.

§ 55. Основные теоремы о равновеликости.

Переходя к рассмотрению общих свойств равновеликих многоугольников, начнём с доказательства следующей теоремы.

Теорема 117. *Два многоугольника, равновеликих третьему, равновелики между собой.*

Доказательство. Пусть каждый из многоугольников $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ равновелик одному и тому же многоугольнику $\mathbf{P}$. Это значит, что существует k многоугольников $\mathbf{Q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и l многоугольников $\mathbf{R}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, обладающих следующими свойствами. К каждому из многоугольников $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ можно добавить по k многоугольников, соответственно равных многоугольникам $\mathbf{Q}_i$, так что получившиеся многоугольники $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{Q}^*$ будут равносоставлены; многоугольники $\mathbf{R}_j$ обладают аналогичными свойствами по отношению к $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$.

Добавим теперь к многоугольникам $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{Q}^*$ ещё по l многоугольников, соответственно равных друг другу и многоугольникам $\mathbf{R}_j$. Многоугольники $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{Q}^*$ обратятся при этом в новые многоугольники $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{Q}'$, также равносоставленные, так как равносоставленные многоугольники не теряют этого свойства от добавления к ним равных многоугольников.

Аналогично к многоугольникам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ можно добавить по $k+l$ таких многоугольников, соответственно равных друг другу и многоугольникам $\mathbf{R}_j$ и $\mathbf{Q}_i$, что получатся равносоставленные многоугольники $\mathbf{P}''$ и $\mathbf{R}''$. При этом многоугольники $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}''$ не будут, вообще говоря, равны между собой, так как во второй раз к многоугольникам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ придётся добавлять сначала многоугольники, равные $\mathbf{R}_j$ (чтобы получить равносоставленные многоугольники), а затем уже многоугольники, равные $\mathbf{Q}_i$.

Однако многоугольники $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}''$ будут равносоставлены, так как каждый из них состоит из многоугольника $\mathbf{P}$ и $k+l$ многоугольников, соответственно равных $\mathbf{Q}_i$ и $\mathbf{R}_j$. Следовательно, и многоугольники $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{R}''$, равносоставленные с $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}''$, будут (по теореме 113) равносоставлены.

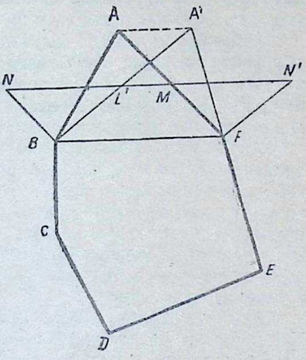
Итак, из многоугольников $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ можно получить равносоставленные многоугольники $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{R}''$ путём добавления к ним оответственно равных многоугольников. Это и значит, что и $\mathbf{R}$ равновелики.

С помощью доказанной, таким образом, транзитивности войства равновеликости можно доказать теперь следующие две теоремы 118 и 119. Несмотря на то, что эти теоремы справедливы для всех простых многоугольников, мы будем формулировать и доказывать их только для выпуклых многоугольников, так как в случае невыпуклых многоугольников доказательства представляют большие трудности.

Теорема 118. *Всякий выпуклый многоугольник с числом сторон, большим трёх, равновелик некоторому треугольнику.*

Доказательство. Пусть дан выпуклый многоугольник $ABCDEF$ (черт. 137). Рассмотрим какие-либо три его последовательные вершины F, A и B. Диагональ BF делит данный многоугольник на треугольник ABF и многоугольник $BCDEF$.

Обозначим через A' точку пересечения прямой EF с прямой, проходящей через A и параллельной BF (прямая EF пересекает BF и потому пересекает всякую прямую, параллельную BF). Треугольники ABF и $A'BF$ равновелики в силу теоремы 115. Более того, из доказательства этой последней теоремы следует, что добавление к двум треугольникам ABF и $A'BF$ равных треугольников FMN' и BNL' приводит к равносоставленным пятиугольникам $ABFN'M$ и $A'FBNL'$ (сравнить черт. 137 и 135). Добавление к каждому из этих двух равносоставленных пятиугольников одного и того же многоугольника $BCDEF$ приводит снова к равносоставленным многоугольникам $ABCDEFN'M$ и $A'L'NBCDE$. Но эти два многоугольника получаются путём добавления равных треугольников FMN' и BNL' соответственно к многоугольникам $ABCDEF$ и $A'BCDE$. Следовательно, последние два многоугольника равновелики.



Черт. 137.

Итак, данный n-угольник $ABCDEF$ равновелик выпуклому $(n-1)$-угольнику $A'BCDE$. Повторяя это рассуждение несколько раз, мы придём к некоторому треугольнику. При этом получающиеся последовательно n-угольник, $(n-1)$-угольник, . . ., четырёхугольник и треугольник будут все равновелики между собой на основании теоремы 117.

Замечание. Приведённое доказательство неприменимо к невыпуклому многоугольнику, как это видно на примере десятиугольника, изображённого на черт. 12 (стр. 27). Тем не менее, как теорема 118, так и следующая теорема 119, завершающая в известной мере наши рассуждения, справедливы для всех (простых) многоугольников.

Теорема 119. *Всякий выпуклый многоугольник равновелик некоторому прямоугольнику, имеющему одной из своих сторон данный отрезок.*

Доказательство. По теореме 118 данный многоугольник равновелик некоторому треугольнику. Этот треугольник равновелик в силу теоремы 111 некоторому параллелограму. Последний равновелик по теореме 112 прямоугольнику с тем же основанием и той же высотой. Наконец, этот прямоугольник равновелик по теореме 116, следствие 2, другому прямоугольнику, имеющему своей стороной данный отрезок. Из теоремы 117 вытекает, что и данный выпуклый многоугольник равновелик этому последнему прямоугольнику. Наше предложение доказано.

Резюмируем теперь полученные результаты. Равновеликость обладает, очевидно, свойствами рефлективности и симметричности; в силу теоремы 117 равновеликость является и транзитивной. Поэтому *все многоугольники распадаются на классы равновеликих многоугольников.*

Какой-либо многоугольник, а следовательно, и все равновеликие ему многоугольники равновелики некоторому прямоугольнику с наперёд заданным основанием a. Таким образом, каждый прямоугольник с этим основанием a оказывается «представителем» некоторого класса равновеликих многоугольников. В этом смысле мы получаем «представление» различных классов равновеликих многоугольников с помощью прямоугольников с общим основанием.

Здесь возникает, однако, новое и существенное затруднение. Не могут ли два прямоугольника с общим основанием и неравными высотами оказаться равновеликими? Если бы это было возможным, то мы не получили бы ясной картины распределения многоугольников по классам, пользуясь прямоугольниками с общим основанием.

Итак, чтобы закончить учение о равновеликости, мы должны были бы доказать следующее предложение («принцип де-Цольта»): *если два прямоугольника с равными основаниями равновелики, то их высоты равны.*

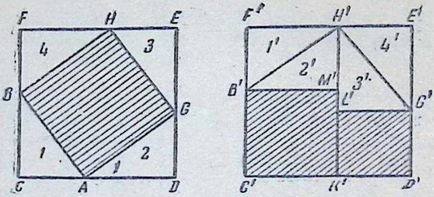
Это предложение мы в дальнейшем (§ 59) строго докажем, опираясь на теорию измерения площадей.

§ 56. Теорема Пифагора.

Выведенных свойств равновеликих многоугольников достаточно, чтобы доказать теорему Пифагора и теоремы, к ней примыкающие.

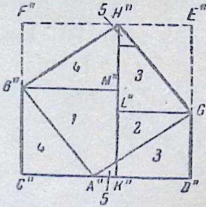
Теорема 120 (Пифагора). *Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.*

Доказательство. Пусть $ABHG$ (черт. 138) — квадрат, построенный на гипотенузе данного прямоугольного треугольника ABC; пусть далее $B'C'D'G'L'M'$ — многоугольник,



Черт. 138.

представляющий сумму квадратов, построенных на катетах ($B'C' = C'K' = BC$; $K'D' = D'G' = AC$). Если добавить к квадрату $ABHG$ четыре треугольника 1, 2, 3 и 4, каждый из которых равен данному, то получится квадрат $CDEF$; если добавить к многоугольнику $B'C'D'G'L'M'$ четыре треугольника 1′, 2′, 3′ и 4′, каждый из которых также равен данному, то получится квадрат $C'D'E'F'$, равный $CDEF$. Многоугольники $ABHG$ и $B'C'D'G'L'M'$ равновелики (по определению равновеликих многоугольников).



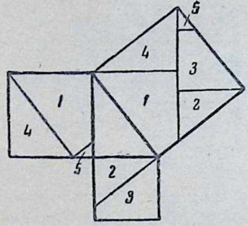
Черт. 139.

Замечание. Можно доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе, не только равновелик, но и равносоставлен с суммой квадратов, построенных на катетах. Для этого достаточно совместить квадраты $CDEF$ и $C'D'E'F'$ (черт. 138); получится фигура, изображённая на черт. 139. Отсюда прямо видно, что сумма квадратов, построенных на катетах, будет состоять из пяти частей 1, 2, 3, 4 и 5; из тех же пяти частей можно составить и квадрат, построенный на гипотенузе. То же разложение показано и на черт. 140.

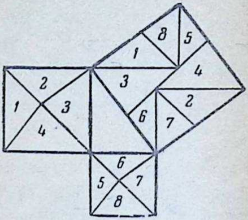
Существуют и другие способы разрезать квадрат, построенный на гипотенузе, на части, из которых можно сложить оба квадрата, построенных на катетах; один из них приведён на черт. 141.

Теорема 121. *Квадрат, построенный на катете прямоугольного треугольника, равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат гипотенуза и проекция на неё данного катета.*

Доказательство. Пусть CH — высота данного прямоугольного треугольника ABC (черт. 142); $ACDE$ — квадрат,



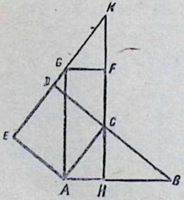
Черт. 140.



Черт. 141.

построенный на его катете. Обозначим через K точку пересечения прямых CH и DE. Прямая, проходящая через A и параллельная CH, пересечёт DE в такой точке G, что $AG = CK = AB$. Мы должны доказать, что квадрат $ACDE$ равновелик прямоугольнику $AHFG$.

Если к квадрату $ACDE$ добавить треугольники ACH и DKC, а к прямоугольнику $AHFG$ — треугольники GKF и EGA, соответственно равные ACH и DKC, то получится один и тот же четырёхугольник $AHKE$. Равновеликость доказана.



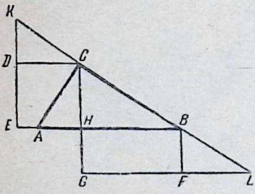
Черт. 142.

Замечание. То же построение (черт. 142) можно и иначе использовать для доказательства равновеликости. Квадрат $ACDE$ и параллелограм $ACKG$ равновелики по теореме 114 (общая сторона AC); точно так же равновелики прямоугольник $AHFG$ и параллелограм $ACKG$ (общая сторона AG). Следовательно, квадрат $ACDE$ и прямоугольник $AHFG$ равновелики в силу теоремы 117.

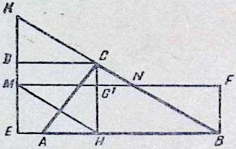
Теорема 122. *Квадрат, построенный на высоте прямоугольного треугольника (выходящей из вершины прямого угла), равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат проекции обоих катетов на гипотенузу.*

Доказательство. Пусть CH — высота данного прямоугольного треугольника ABC (черт. 143). Мы должны доказать, что квадрат $CDEH$ равновелик прямоугольнику $BFGH$, где $AH = GH$.

Обозначим через K и L точки пересечения прямой BC соответственно с DE и FG. Если к квадрату $CDEH$ добавить треугольники BCH и CKD, а к прямоугольнику $BFGH$ — тот же треугольник BCH и треугольник LBF, равный CKD то получатся равные треугольники BKE и LCG. Равновеликость доказана.



Черт. 143.



Черт. 144.

Замечание. Если вместо прямоугольника $BFGH$ (черт. 143) построить равный ему прямоугольник $BF'G'H$ (черт. 144), то та же теорема вытекает из равновеликости рассматриваемых последовательно параллелограмов $CDEH$, $CKMH$, $BNMH$ и $BF'G'H$.

§ 57. Задачи на превращение многоугольников.

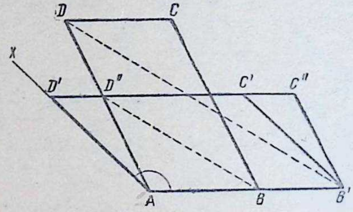
Рассмотренные в предыдущих параграфах теоремы о равновеликости дают возможность решить ряд задач, в которых требуется построить многоугольник, равновеликий данному и удовлетворяющий некоторым добавочным условиям.

Вместо того чтобы сказать «построить многоугольник, равновеликий данному и удовлетворяющий таким-то условиям», часто говорят: «превратить данный многоугольник в равновеликий ему многоугольник, удовлетворяющий таким-то условиям». Поэтому и задачи этого типа называют задачами на превращение многоугольников.

Перечислим здесь наиболее типичные из этих задач.

Построение 23. Построить параллелограм, равновеликий данному, зная основание и один из углов искомого параллелограма.

Пусть $ABCD$ (черт. 145) — данный параллелограм; AB' и $\angle B'AX$ — основание и угол искомого параллелограма.



Черт. 145.

Проводим через точку B прямую, параллельную $B'D$, и обозначим через D'' точку её пересечения с прямой AD. Далее проводим через D'' прямую, параллельную AB, и обозначаем через D' точку её пересечения с прямой AX.

Предоставляем читателю доказать, что точка D' есть одна из вершин искомого параллелограма $AB'C'D'$.

Построение 24. Построить треугольник, равновеликий данному, зная основание искомого треугольника и один из его углов, прилежащих к основанию.

Выполняется вполне аналогично предыдущему (черт. 145). Только вместо параллелограмов $ABCD$ и $AB'C'D'$ рассматриваем треугольники ABD и $AB'D'$.

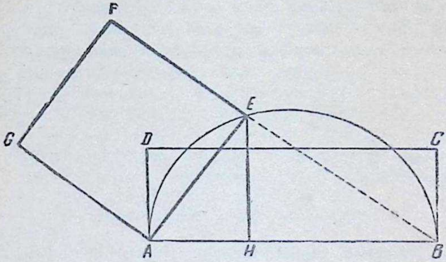
Построение 25. Построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику или данному параллелограму или данному треугольнику.

Пусть $ABCD$ (черт. 146) — данный прямоугольник. На его большей стороне строим как на диаметре окружность. Далее откладываем $AH = AD$ и проводим прямую HE, перпендикулярную к AB. Эта прямая пересекает окружность в некоторой точке E. Отрезок AE и будет стороной искомого квадрата $AEFG$.

Правильность построения вытекает из теоремы 121, если принять во внимание, что угол AEB — прямой.

Если дан параллелограм, то предварительно строим равновеликий ему прямоугольник.

Если дан треугольник, то сначала строим равновеликий ему параллелограм (хотя бы по теореме 111), а затем — прямоугольник, равновеликий этому параллелограму.



Черт. 146.

Построение 26. Построить квадрат (или треугольник) равновеликий данному выпуклому многоугольнику.

Пользуясь построением, использованным при доказательстве теоремы 118, строим выпуклый $(n-1)$-угольник, равновеликий данному n-угольнику. Далее тем же путём строим равновеликие ему $(n-2)$-угольник, . . ., четырёхугольник и, наконец, треугольник. Построенный треугольник превращаем в равновеликий ему квадрат (построение 25).

Построение 27. Построить квадрат, равновеликий сумме (или разности) двух данных квадратов.

Вытекает непосредственно из теоремы Пифагора.

§ 58. Измерение площадей многоугольников.

Понятие измерения площадей устанавливается вполне аналогично измерению отрезков, если воспользоваться понятием суммы многоугольников (§ 53).

Установить систему измерения площадей многоугольников — значить поставить в соответствие каждому (простому) *многоугольнику положительное число, называемое его площадью и обладающее следующими двумя свойствами:*

a) *Равным многоугольникам соответствует одна и та же площадь;* иначе говоря, площадь многоугольника не изменяется при его перемещении («свойство инвариантности по отношению к движениям»).

b) *Площадь суммы двух многоугольников равна сумме площадей обоих многоугольников* («свойство аддитивности»).

Свойство аддитивности непосредственно обобщается на случай любого конечного числа слагаемых многоугольников.

Из свойств инвариантности и аддитивности следует, что равносоставленные многоугольники (§ 53) имеют одну и ту же площадь.

Площадь треугольника ABC, четырёхугольника $ABCD$, многоугольника P обычно обозначается так:

$$\text{пл. } ABC, \text{ пл. } ABCD, \text{ пл. } \mathsf{P}.$$

Как и в случае длины, можно произвольно выбирать единицу площади; этот выбор мы сделаем далее.

Теорию измерения площадей мы будем строить, опираясь на понятие длины отрезка. Начнём со следующего предложения.

Теорема 123. *Если измерение площадей многоугольников возможно, то площадь S прямоугольника, стороны которого имеют длины x и y, может выражаться только формулой*

$$S = kxy,$$

где k — некоторый постоянный коэффициент.

Доказательство. Площадь S есть функция от x и y, определённая по смыслу задачи для всех положительных значений аргументов и принимающая только положительные значения:

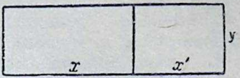
$$S = f(x, y).$$

Эта функция обладает, очевидно, двумя свойствами:

$$f(x, y) = f(y, x); \qquad (\alpha)$$

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y); \qquad (\beta)$$

второе свойство вытекает из аддитивности площади (черт. 147). Наша задача заключается в том, чтобы определить вид этой функции.



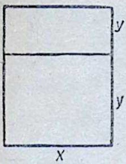
Черт. 147.

По теореме 103 из свойства (β) вытекает, что

$$f(x, y) = x \cdot \varphi(y),$$

так как коэффициент пропорциональности может зависеть от y. Полагая здесь $x = 1$, находим $f(1, y) = \varphi(y)$ и потому

$$f(x, y) = x \cdot f(1, y). \qquad (\gamma)$$



Черт. 148.

Далее, на основании свойств (α) и (γ),

$$f(1, y) = f(y, 1) = y \cdot f(1, 1).$$

Подставляя это значение $f(1, y)$ в (γ), имеем:

$$f(x, y) = xy \cdot f(1, 1).$$

Наконец, обозначив $f(1, 1)$ через k, получаем искомое выражение.

Это несколько формальное определение вида функции $f(x, y)$ можно было бы пояснить следующим рассуждением.

При заданной высоте прямоугольника y каждому положительному значению его основания x соответствует определённая площадь S. При этом сумме любых двух значений основания отвечает сумма соответствующих значений площади. Следовательно, при заданной высоте y (по общей теореме 103а) площадь S пропорциональна основанию x. Другими словами, отношение $S:x$ не зависит от x (но зависит, естественно, от y).

Далее, каждому значению y отвечает определённое значение $S:x$, и сумме любых двух значений y отвечает сумма двух соответствующих значений $S:x$ (черт. 148). Следовательно, $S:x$ пропорционально y, т. е. $S:x = ky$.

Вернёмся теперь к выбору единицы площади. Формула

$$S = kxy$$

принимает особенно простой вид, а именно: $S = xy$, если считать, что при $x = y = 1$ мы должны иметь и $S = 1$. Это значит, что мы выбираем единицу площади следующим образом:

c) *За единицу площади принимается площадь квадрата, сторона которого есть единица длины.*

Мы можем теперь сформулировать следующую теорему.

Теорема 124. *Если измерение площадей возможно и единица площади выбрана в соответствии с условием* (c), *то*

a) *площадь прямоугольника может равняться только произведению основания на высоту;*

b) *площадь параллелограма — только произведению любой из его сторон на соответствующую высоту;*

c) *площадь треугольника — только половине произведения любой из его сторон на соответствующую высоту;*

d) *площадь трапеции — только произведению её средней линии на высоту.*

В этой теореме и во всём дальнейшем мы, как это обычно принято, говорим: «произведение основания на высоту», вместо «произведение длины основания на длину высоты», и т. д.

Доказательство. Для прямоугольника теорема нами уже доказана.

Для параллелограма теорема вытекает из теоремы 112 (черт. 129 на стр. 182) и теоремы 94.

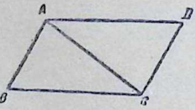
Для треугольника она вытекает из возможности дополнить любой треугольник ABC (черт. 149) до параллелограма $ABCD$ и из свойств аддитивности и инвариантности:

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } CDA = 2 \text{ пл. } ABC,$$

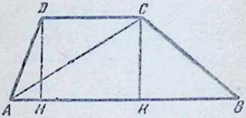
откуда

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Произведение стороны треугольника на соответствующую ей высоту не зависит от выбора стороны в силу теоремы 94.



Черт. 149.



Черт. 150.

Пусть, наконец, дана трапеция $ABCD$ (черт. 150). Диагональ AC делит её на два треугольника ABC и ACD. По свойству аддитивности:

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ACD.$$

Далее, по только что доказанному, имеем:

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CK = \frac{1}{2} AB \cdot DH; \quad \text{пл. } ACD = \frac{1}{2} CD \cdot DH,$$

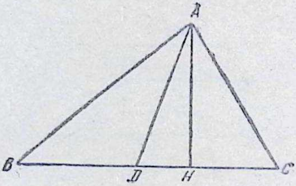
и, следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot DH.$$

Но $\frac{1}{2}(AB + CD)$ равняется средней линии, и теорема доказана.

В формулировке теоремы 124 мы говорим: «может равняться...», а не «равняется...», так как самая возможность измерения площадей нами ещё не доказана. Ввиду этого мы будем временно называть для ясности половину произведения основания треугольника на соответствующую высоту не площадью, а **характеристикой** (хар. ABC); точно так же, половину произведения суммы оснований трапеции на её высоту назовём **характеристикой** трапеции.

Чтобы иметь возможность перейти к произвольным многоугольникам, нам понадобятся теперь следующие две теоремы, играющие основную роль в теории измерения площадей.



Черт. 151.

Теорема 125. *Каким бы способом ни разложить данный треугольник на конечное число треугольников, характеристика всего треугольника будет равна сумме характеристик составляющих треугольников.*

Доказательство теоремы мы разобьём на отдельные пункты.

1) Если D — какая-либо точка стороны BC треугольника ABC (черт. 151), то

$$\text{хар. } ABC = \text{хар. } ABD + \text{хар. } ADC.$$

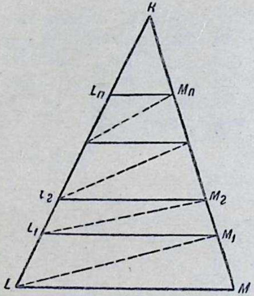
Действительно,

$$\text{хар. } ABC = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot (BD + DC) =$$

$$= \frac{1}{2} AH \cdot BD + \frac{1}{2} AH \cdot DC = \text{хар. } ABD + \text{хар. } ADC.$$

2) Если треугольник KLM (черт. 152) разложить прямыми L_1M_1, $L_2M_2, \ldots, L_nM_n$, параллельными стороне LM, на n трапеций и треугольник, то характеристика данного треугольника будет равна сумме характеристик составляющих его многоугольников.

Если, далее, в каждой из получившихся трапеций провести диагонали LM_1, $L_1M_2, \ldots$, то характеристика треугольника KLM будет равна сумме характеристик всех получившихся треугольников.



Черт. 152.

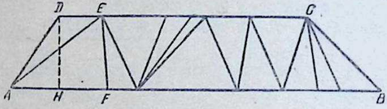
Действительно, на основании п. 1) имеем:

$$\text{хар. } KLM = \text{хар. } M_1LM + \text{хар. } KLM_1 = \text{хар. } M_1LM + \text{хар. } LM_1L_1 + \text{хар. } KL_1M_1 = \text{хар. } M_1LM + \text{хар. } LM_1L_1 + \text{хар. } L_1M_1M_2 + \text{хар. } KL_1M_2 = \ldots;$$

откуда

$$\text{хар. } KLM = \text{хар. } LMM_1L_1 + \text{хар. } L_1M_1M_2L_2 + \ldots$$

3) Если трапецию $ABCD$ (черт. 153) разложить на конечное число треугольников, вершины которых все лежат на основаниях трапеции или совпадают с её вершинами, то характеристика трапеции будет равна сумме характеристик состаляющих её треугольников.



Черт. 153.

Действительно,

$$\text{хар. } ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD)\cdot DH =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + CE + DE)\cdot DH =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + CE)\cdot DH + \frac{1}{2}DE\cdot DH =$$
$$= \text{хар. } ABCE + \text{хар. } ADE;$$

аналогично,

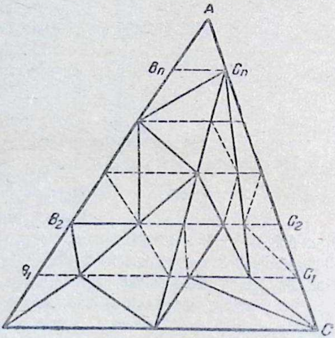
$$\text{хар. } ABCE = \text{хар. } FBCE + \text{хар. } AEF$$

и т. д.

4) Рассмотрим, наконец, общий случай.

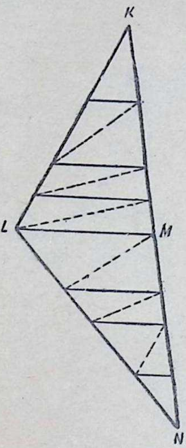
Пусть треугольник ABC (черт. 154) разложен каким-либо образом на треугольники Δ (стороны этих треугольников показаны на этом чертеже сплошными линиями). Вершины треугольников Δ могут лежать как в вершинах данного треугольника, на его сторонах, так и внутри него.

Проведём через все вершины треугольников Δ, лежащие как на сторонах AB и AC, так и внутри треугольника ABC, прямые, параллельные стороне BC. Получим ряд параллельных прямых B_1C_1, $B_2C_2, \ldots$, B_nC_n, которые разделят данный треугольник на трапеции BCC_1B_1, $B_1C_1C_2B_2, \ldots$ и треугольник AB_nC_n.



Черт. 154.

Какой-либо из треугольников Δ разделится этими параллельными прямыми на несколько трапеций и один или два треугольника подобно тому, как на черт. 152 или 155 треугольник KLM или KLN делится прямыми LM, $L_1M_1, \ldots$; впрочем, могут остаться и треугольники Δ, не разделённые на части. В каждой из получившихся трапеций проведём одну из двух диагоналей. При этом каждый треугольник Δ, а значит, и весь треугольник ABC будет разложен на более мелкие треугольники Δ'. Особенность этих новых треугольников будет состоять в том, что их вершины не могут лежать между параллельными BC, $B_1C_1, \ldots$, а будут лежать на самых этих параллельных.



Черт. 155.

Характеристика каждого треугольника Δ будет равна сумме характеристик составляющих его треугольников Δ'. Действительно, для треугольника KLM (черт. 152) это прямо вытекает из п. 2), а для треугольника KLN (черт. 155) получается из применения п. 2) к каждому из треугольников KLM и LMN. Отсюда следует, что сумма характеристик всех треугольников Δ будет равна сумме характеристик всех треугольников Δ'.

С другой стороны, характеристика треугольника ABC будет равна, согласно п. 2),

$$\text{хар. } BCC_1B_1 + \text{хар. } B_1C_1C_2B_2 + \ldots + \text{хар. } AB_nC_n.$$

Характеристика каждой из трапеций $BCC_1B_1, \ldots$ и треугольника AB_nC_n будет равна, в силу п. 3) и п. 1), сумме характеристик составляющих треугольников Δ'. Поэтому и характеристика треугольника ABC будет равна сумме характеристик всех треугольников Δ'. Следовательно, как сумма характеристик всех треугольников Δ, так и характеристика самого треугольника ABC равна сумме характеристик всех треугольников Δ', откуда и вытекает справедливость теоремы.

Теорема 126. *Каким бы способом ни разложить данный многоугольник на конечное число треугольников, сумма характеристик составляющих треугольников будет всегда иметь одно и то же значение.*

Доказательство. Пусть данный многоугольник $\mathbf{P}$ разложен один раз каким-либо способом на k треугольников $\mathbf{P}_i$ ($i=1, 2, \ldots, k$), а другой раз — на l треугольников $\mathbf{P}^j$ ($j=1, 2, \ldots, l$). Мы должны доказать, что сумма характеристик всех треугольников P_i равна сумме характеристик всех треугольников P^j.

Для этого рассмотрим в многоугольнике P совокупность всех отрезков, которые делят его на треугольники P_i, и в то же время совокупность всех отрезков, которые делят его на треугольники P^j (сравнить доказательство теоремы 113 и черт. 131). Посредством тех и других отрезков, вместе взятых, многоугольник P будет разложен на многоугольники P_{ij} (каждый из которых есть общая часть треугольников P_i и P^j).

Многоугольник P_{ij}, как общая часть двух треугольников, может иметь три, четыре, пять или шесть сторон, но не более (его сторонами служат стороны или части сторон двух треугольников). Если он имеет более трёх сторон, то мы разложим его на треугольники P'_{ij}, P''_{ij}, P'''_{ij}, P''''_{ij} (их будет не более четырёх); если же многоугольник P_{ij} есть треугольник, то обозначим его через P'_{ij}. Итак, многоугольник P будет разложен на треугольники P'_{ij}, P''_{ij}, ..., причём сумма всех этих треугольников с общим индексом i составляет треугольник P_i, а сумма всех треугольников с общим индексом j — треугольник P^j.

Следовательно, по теореме 125, характеристика треугольника P_i будет равна сумме характеристик треугольников P'_{ij}, P''_{ij}, ... с общим индексом i, а характеристика треугольника P^j — сумме характеристик треугольников P'_{ij}, P''_{ij}, ... с общим индексом j.

Отсюда и вытекает, что как сумма характеристик треугольников P_i, так и сумма характеристик треугольников P^j имеют одно и то же значение: каждая из этих сумм равна сумме характеристик всех треугольников P'_{ij}, P''_{ij}, ... Теорема доказана.

Пользуясь доказанным предложением, мы можем теперь закончить теорию измерения площадей.

Теорема 127. *Если единица площади выбрана в соответствии с условием* (c) (стр. 197), *то каждому* (*простому*) *многоугольнику можно поставить в соответствие, и притом единственным образом, положительное число — его площадь — так, что площади многоугольников будут обладать свойствами* a) *инвариантности и* b) *аддитивности.*

Доказательство. При указанном в формулировке теоремы условии (с) площадь треугольника может равняться только его характеристике, т. е. половине произведения основания на высоту (теорема 124). Площадь многоугольника может, в силу аддитивности, равняться только сумме характеристик составляющих его треугольников; эта сумма не зависит от способа разложения (теорема 126).

Итак примем эти величины за площади треугольников и многоугольников.

Определённые так площади будут обладать свойством инвариантности, так как равные многоугольники можно разложить на соответственно равные треугольники.

Далее, определённые таким образом площади обладают свойством аддитивности. В самом деле, пусть многоугольник P есть сумма многоугольников P' и P''. Разложим многоугольник P' на треугольники Δ', а многоугольник P'' — на треугольники Δ''. При этом многоугольник P будет состоять из всех треугольников Δ' и Δ''. Так как площади многоугольников P', P'' и P будут соответственно равны сумме площадей треугольников Δ', сумме площадей треугольников Δ'' и сумме площадей всех треугольников Δ' и Δ'', то пл. $P'+$ пл. $P''=$ пл. P.

Наконец, квадрат, сторона которого есть единица длины, имеет площадь, равную единице, так как диагональ делит го на два треугольника, и площадь каждого из них равна

$$\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, задача измерения площадей полностью разрешена.

§ 59. Измерение площадей и равновеликость.

Построенную в предыдущем параграфе теорию измерения площадей мы можем теперь связать с понятием о равновеликости (сравнить § 55, конец), доказав следующие три теоремы.

Теорема 128. *Равновеликие многоугольники имеют одну и ту же площадь.*

Доказательство. Пусть многоугольники P и Q равновелики. Это значит, что от добавления к ним соответственно равных многоугольников P_i и Q_i ($i=1, 2, \ldots, k$) получаются равносоставленные многоугольники P' и Q'. При этом пл. $P'=$

$=$ пл. $\mathrm{P}+\sum$ пл. P_i; пл. $\mathrm{Q}'=$ пл. $\mathrm{Q}+\sum$ пл. Q_i (в силу аддитивности). Так как равные или равносоставленные многоугольники имеют одну и ту же площадь, то пл. $\mathrm{P}'=$ пл. Q'; пл. $\mathrm{P}_i=$ $=$ пл. Q_i. Из равенства пл. $\mathrm{P}+\sum$ пл. $\mathrm{P}_i=$ пл. $\mathrm{Q}+\sum$ пл. Q_i вытекает, что пл. $\mathrm{P}=$ пл. Q.

Теорема 129 («принцип де-Цольта»). *Если два прямоугольника с равными основаниями равновелики, то их высоты равны.*

Доказательство. Обозначим через x длину оснований обоих прямоугольников, через y' и y'' — длины их высот. Так как прямоугольники равновелики, то их площади равны; следовательно, $xy'=xy''$. Отсюда и следует, что $y'=y''$.

Теорема 130. *Если два выпуклых многоугольника имеют одну и ту же площадь, то они равновелики.*

Доказательство. Пусть площади двух выпуклых многоугольников P' и P'' равны: пл. $\mathrm{P}'=$ пл. P''. Многоугольники P' и P'' соответственно равновелики по теореме 119 некоторым прямоугольникам Q' и Q'' с общим основанием x и высотами y' и y''. Следовательно, по теореме 128 имеем пл. $\mathrm{P}'=$ пл. Q'; пл. $\mathrm{P}''=$ пл. Q'', откуда пл. $\mathrm{Q}'=$ пл. Q'', или $xy'=xy''$, так что $y'=y''$. Многоугольники P' и P'' равновелики, так как оба они оказались равновеликими одному и тому же прямоугольнику с основанием x и высотой $y'=y''$.

Заключительные замечания. Теорема 130 сохраняет силу и для невыпуклых многоугольников. Нам пришлось, однако, сформулировать её только для выпуклых многоугольников, так как теорема 119, на которую мы ссылались при доказательстве, была доказана только для выпуклых многоугольников.

Теоремой 130 завершена теория площадей для случая выпуклых многоугольников. Теория площадей строится совершенно аналогично и для любых простых многоугольников: надо лишь изменить доказательство теоремы 119 и показать, что для любых двух простых многоугольников P и Q всегда существует многоугольник, который можно представить как сумму многоугольников P' и Q', соответственно равных P и Q (сравнить § 53, черт. 127).

Укажем, наконец, что теория измерения площадей распространяется и на любые звездчатые многоугольники. Однако для этого требуются соображения, значительно отличающиеся от тех, которыми мы пользовались в настоящей главе[1].

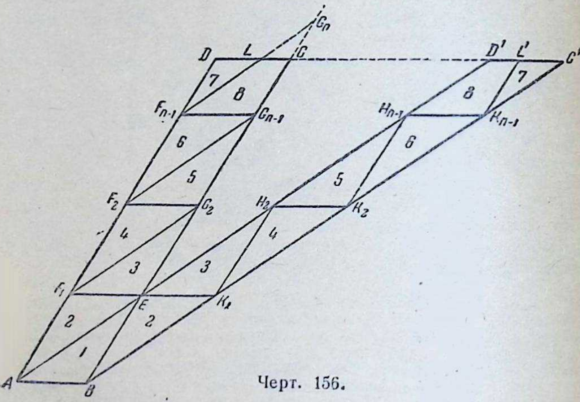
---

[1] Элементарное представление об измерении площадей звездчатых многоугольников даётся, например, в книге Боичковского [5], стр. 23—43.

§ 60. Задачи на «разрезание многоугольников».

В § 57 мы уже рассматривали задачи на построение многоугольников, равновеликих данному. Рассмотрим теперь другой тип задач на построение, также связанный с понятием равновеликости, или, точнее, равносоставленности (§ 53) многоугольников.

В задачах этого типа даются два равновеликих многоугольника. Требуется «разрезать» один из них на такие части, чтобы из них можно было «сложить» другой. Иначе говоря, требуется доказать, что данные многоугольники равносоставлены. Задачи такого типа являются, в отличие от большинства рассмотренных до сих пор задач, неопределёнными. Это видно хотя бы из рассмотрения связанных с теоремой Пифагора чертежей 140 и 141 (стр. 192).



Черт. 156.

Рассмотрим две основные задачи этого типа.

Построение 28. Даны два равновеликих параллелограма с общим основанием. Разрезать один из них на такие части, из которых можно сложить другой.

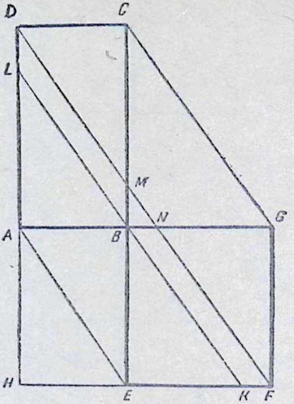
Пусть $ABCD$ и $ABC'D'$ (черт. 133 на стр. 185 и черт. 156) — данные параллелограмы. Если стороны CD и $C'D'$ имеют общие точки, то решение очевидно (черт. 133).

Если стороны CD и $C'D'$ не имеют общих точек (черт. 156), то через точку пересечения E сторон AD' и BC проводим прямую F_1K_1, параллельную AB. Далее проводим $F_1G_2 \parallel AE$; $G_2F_2 \parallel AB$ и т. д.; аналогичные построения выполняем во втором параллелограме, проводя $K_1H_2 \parallel BE$; $H_2K_2 \parallel AB$ и т. д.

В силу аксиомы Архимеда существует такое значение n, что $n \cdot BE > BC$. Поэтому один из отрезков $F_{n-1}G_n$ пересечёт сторону CD в некоторой точке L.

Соответственно равные части обоих параллелограмов обозначены на черт. 156 одинаковыми цифрами.

Построение 29. Даны два равновеликих прямоугольника. Разрезать один из них на такие части, из которых можно сложить другой.



Черт. 157.

Расположим данные равновеликие прямоугольники $ABCD$ и $BEFG$ так, чтобы они имели общую вершину B и чтобы их стороны, прилежащие к этой вершине, составляли продолжение друг друга (черт. 157). В силу равновеликости прямоугольников будем иметь $AB \cdot BC = BE \cdot BG$, откуда $AB : BE = BG : BC$, так что прямые AE и CG параллельны. Далее, из последней пропорции следует, что

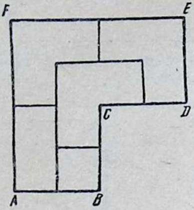
$$(AB + BG) : (BE + BC) = AB : BE$$

или, обозначая через H точку пересечения прямых AD и EF, что

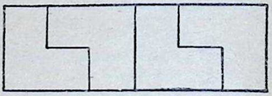
$$HF : HD = HE : HA.$$

Поэтому и прямые AE и DF также параллельны. Проведём, наконец, через точку B прямую KL, параллельную прямым AE, CG и DF.

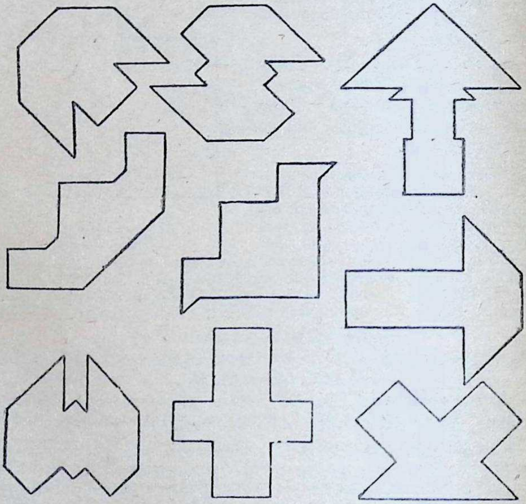
Каждый из данных прямоугольников будет теперь разложен на два треугольника и параллелограм. Треугольник ABL будет равен треугольнику EKB, треугольник CDM — треугольнику GNF. Параллелограмы $BLDM$ и $BKFN$ имеют равные основания $BL = BK$ и потому их можно разрезать (построение 28) на соответственно равные части. Тем самым и данные прямоугольники будут разрезаны на соответственно равные части.



Черт. 158.

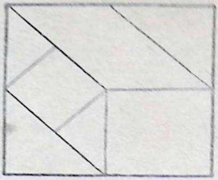


Черт. 159.



Черт. 160.

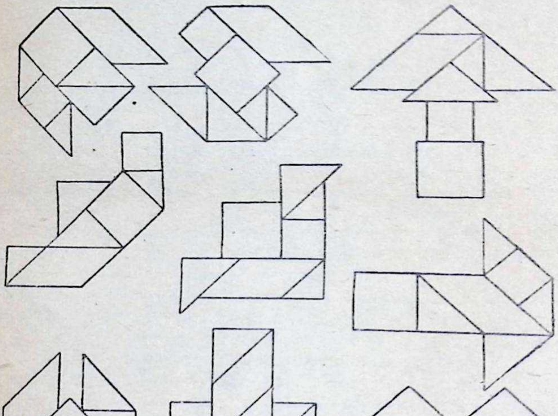
Замечание. Укажем на то, что «разрезание» многоугольников служит темой многих занимательных задач, помещаемых в хрестоматиях, научно-популярных журналах и т. д., а также лежит в основе некоторых игр. Приведём два примера.



Черт. 161.

В качестве первого рассмотрим задачу: разрезать шестиугольник *ABCDEF* (черт. 158) на четыре равные части, из которых можно сложить прямоугольник. Решение показано на чертежах 158 и 159.

В качестве второго примера приведём описание известной игры —«головоломки». Каждую из фигур, изображённых на черт. 160, требуется сложить из всех семи пластинок, сделанных из дерева или другого материала и имеющих форму и размеры, приведённые на черт. 161. (Решения приведены на черт. 162.) Число таких фигур можно произвольно увеличивать.



Черт. 162.

Однако рассматриваемые задачи имеют не только занимательное, но и большое принципиальное значение, как мы сейчас и покажем (см. теорему 131).

Решение каждой задачи на «разрезание» доказывает равносоставленность некоторой пары многоугольников. Так, построения 28 и 29 доказывают следующие два предложения:

(1) *Всякие два равновеликих параллелограма с равными основаниями равносоставлены.*

(2) *Всякие два равновеликих прямоугольника равносоставлены.*

В силу свойства транзитивности (теорема 113) отсюда легко заключить, что

(3) *всякие два равновеликих параллелограма равносоставлены.*

Если принять ещё во внимание теорему 111, то отсюда далее вытекает, что

(4) *всякие два равновеликих треугольника равносоставлены.*

Наконец, с помощью предложения (4) и рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 118, получаем следующий результат:

(5) *всякий выпуклый многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником.*

Пусть теперь даны два равновеликих выпуклых многоугольника. Каждый из них равносоставлен с некоторым треугольником в силу (5). Эти два треугольника будут равновелики и потому на основании (4) равносоставлены. Следовательно, в силу транзитивности и данные многоугольники равносоставлены.

Этими рассуждениями доказана следующая теорема.

Теорема 131. *Всякие два равновеликих выпуклых многоугольника равносоставлены.*

Замечания. 1. Теорема 131 сохраняет силу и для невыпуклых (простых) многоугольников; сравнить заключительные замечания в § 59.

2. Теорема 131 показывает, что мы могли бы с самого начала отказаться от определения равновеликости (§ 54) и ограничиться только понятием равносоставленности (§ 53). Однако это повело бы к некоторому усложнению доказательств, как это видно из сопоставления доказательства теорем 114 и 116, следствие 1, с построениями 28 и 29.

§ 61. Площадь круга.

Как и в § 51, мы будем рассматривать в настоящем параграфе только выпуклые многоугольники, вписанные в данную окружность и описанные около неё, называя их для краткости просто вписанными и описанными многоугольниками. Термин «соответственные» описанный и вписанный многоугольники будем употреблять в том же смысле, как и в § 51.

Наш повседневный опыт говорит нам, что каждому кругу соответствует некоторое число (его «площадь»), аналогичное площади многоугольника; это число (как показывает опыт) больше площади любого вписанного многоугольника и меньше площади любого описанного.

В основу строгого определения понятия площади круга можно положить следующие две теоремы.

Теорема 132. *Разность между площадью правильного описанного многоугольника и площадью соответствующего ему вписанного меньше произведения периметра описанного многоугольника на половину стороны вписанного.*

Доказательство. Обозначим через S и s площади соответственных правильных описанного и вписанного n-угольников, через P и p — их периметры, через a — сторону вписанного многоугольника. Мы должны доказать неравенство

$$S-s<\frac{1}{2}P\cdot a.$$

Как видно из черт. 123 (стр. 175), разность $S-s$ представляется в виде суммы площадей n треугольников, каждый из которых равен $\triangle ABA'$. Таким образом имеем:

$$S-s=\frac{1}{2}n\cdot AB\cdot HA'.$$

Но $n\cdot AB=p<P$. Далее, как легко убедиться из подсчёта углов в треугольнике HAA', имеем при любом числе сторон $HA'<AB=a$. Отсюда вытекает доказываемое неравенство.

Следствие. *Разность между площадью правильного описанного многоугольника и площадью соответствующего ему вписанного неограниченно убывает при безграничном удвоении числа сторон многоугольников.*

Это вытекает из того, что периметр P описанного многоугольника убывает, а сторона a стремится к нулю при безграничном удвоении числа сторон (§ 51).

Теорема 133. *Все многоугольники, площадь каждого из которых больше площади любого многоугольника, вписанного в данную окружность, и в то же время меньше площади любого многоугольника, описанного около неё, равновелики друг другу.*

Площадь любого из этих многоугольников называется площадью того круга, который ограничен данной окружностью.

Доказательство. Пусть s и p — площадь и периметр некоторого вписанного многоугольника; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его стороны; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — расстояния этих сторон от центра. Мы имеем, очевидно,

$$s=\frac{1}{2}(a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n)<$$

$$<\frac{1}{2}r(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\frac{1}{2}pr.$$

Так как $p<2\pi r$ (§ 51), то

$$s<\pi r^2.$$

Пусть, аналогично, S и P — площадь и периметр некоторого описанного многоугольника; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — его стороны. Мы имеем, очевидно,

$$S=\frac{1}{2}(A_1r+A_2r+\ldots+A_nr)=\frac{1}{2}Pr.$$

Так как $2\pi r<P$ (§ 51), то

$$\pi r^2<S.$$

Таким образом, многоугольники с площадью, равной πr^2 (равновеликие между собой по теореме 130), обладают требуемыми свойствами.

Пользуясь теоремой 132 (следствие), легко показать, что многоугольники с площадью, отличной от πr^2, не обладают требуемыми свойствами.

Следствие. *Площадь круга радиуса r равна* πr^2.

Замечания. 1. Из теоремы 132 (следствие) и теоремы 133 вытекает, что

площадь круга есть предел, к которому стремится площадь правильного вписанного (или описанного) многоугольника при безграничном удвоении числа его сторон; этот предел не зависит от числа сторон первоначально взятого многоугольника.

2. Применяя рассуждения, аналогичные использованным в настоящем параграфе, можно было бы показать, что *площадь сектора круга равна* $\frac{1}{2} lr$, где l — длина дуги и r — радиус окружности.

ГЛАВА VIII.

ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ.

§ 62. Определение и свойства гомотетии.

В § 40 мы уже рассмотрели подобие треугольников. В настоящей главе мы должны обобщить понятие подобия на произвольные фигуры и, кроме того, выяснить вопрос о взаимном расположении двух подобных фигур на плоскости. Начнём с рассмотрения одного частного случая подобия двух фигур.

Фигура **F′** называется гомотетичной или перспективно-подобной (или «подобной и подобно расположенной») фигуре **F**, если между точками обеих фигур установлено соответствие, обладающее следующими свойствами:

a) прямые, соединяющие попарно соответственные точки, все проходят через одну точку S;

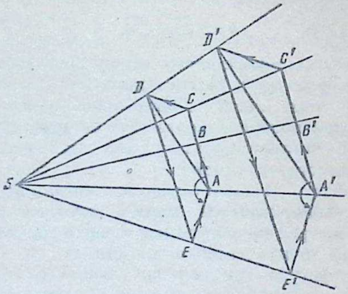
b) либо каждые две соответственные точки лежат по одну сторону от S, либо каждые две соответственные точки лежат по разные стороны от S;

c) если A и B — какие-либо две точки первой фигуры и A' и B' — соответствующие им точки второй фигуры, то $SA' : SA = SB' : SB$ (черт. 163 и 164).

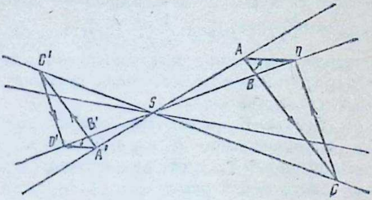
Точка S, о которой говорится в этом определении, называется центром подобия (или центром гомотетии); постоянное отношение $k = SA' : SA = SB' : SB = \ldots$ — коэффициентом подобия (или коэффициентом гомотетии) фигуры **F′** относительно фигуры **F**. Соответствие между точками обеих фигур или, другими словами, преобразование, посредством которого из точек первой фигуры **F** получаются точки фигуры **F′**, называется гомотетией.

Гомотетию с центром подобия S можно наглядно представлять себе как растяжение относительно точки (точнее говоря, как растяжение при $k > 1$ и как сжатие при $k < 1$; это растяжение или сжатие может сопровождаться отражением от точки S).

Если каждые две соответственные точки лежат по одну сторону от точки S, то фигуры называются прямо-гомотетичными (черт. 163), а если по разные стороны, то — обратно-гомотетичными (черт. 164); самый центр подобия называется в первом случае внешним, во втором случае — внутренним центром подобия.



Черт. 163.



Черт. 164.

Так как в случае двух прямо-гомотетичных фигур отрезки SA и SA', SB и SB', ... направлены в одну сторону, а в случае обратно-гомотетичных фигур — в противоположные стороны, то коэффициент подобия $k = SA' : SA = \ldots$ мы будем в дальнейшем считать в первом случае положительным, а во втором — отрицательным.

Отмечая направленные отрезки чёрточкой над буквами (§ 8 и § 45), мы можем написать:

$$k = \overline{SA'} : \overline{SA}.$$

Из определения гомотетичных фигур вытекает ряд свойств гомотетии, которые мы и рассмотрим.

1° Каждой точке одной из двух гомотетичных фигур, отличной от центра подобия, соответствует единственная точка другой. Будем считать ещё (это вполне естественно), что центр подобия соответствует самому себе, т. е. является двойной точкой обеих фигур. В таком случае *гомотетия будет взаимно однозначным соответствием между точками двух фигур*. Её можно также рассматривать как взаимно однозначное соответствие между точками всей плоскости.

2° Каждая фигура гомотетична самой себе (коэффициент подобия равен единице). Если фигура **F′** гомотетична **F**, то и **F** гомотетична **F′** (если коэффициент подобия фигуры **F′** относительно **F** обозначить через k, то коэффициент подобия фигуры **F** относительно **F′** будет равен $\frac{1}{k}$). Другими словами, соответствие, обратное гомотетии, есть также гомотетия.

Короче говоря, *гомотетия обладает свойствами рефлективности и симметричности*[1]).

3° *Точкам фигуры* **F**, *лежащим на одной прямой, соответствуют в гомотетичной фигуре* **F′** *точки, также лежащие на одной прямой; точкам некоторого отрезка — также точки некоторого отрезка.*

Это свойство очевидно для прямых, проходящих через S: каждая такая прямая переходит сама в себя. Пусть теперь точки A, B и C лежат на одной прямой, не проходящей через S (черт. 163 и 164). Обозначим через A' и C' точки, соответствующие точкам A и C, и через B' — точку пересечения прямых SB и $A'C'$. В силу условия $SA' : SA = SC' : SC$

---

[1]) В § 63 будет показано, что гомотетия обладает (при некотором обобщении этого понятия) и свойством транзитивности.

треугольники SAC и $SA'C'$ подобны (второй признак подобия); следовательно, $\angle SAC = \angle SA'C'$, и будут подобны и треугольники SAB и $SA'B'$. Отсюда $SA' : SA = SB' : SB$, так что точке B соответствует точка B'.

Из доказанного свойства вытекает, далее, что фигура, гомотетичная лучу, есть луч; фигура, гомотетичная полуплоскости, — полуплоскость и т. д.

4° *Соответственные прямые двух гомотетичных фигур, не проходящие через центр подобия, параллельны.*

Действительно, параллельность прямых AB и $A'B'$ вытекает из пропорции $SA' : SA = SB' : SB$.

5° *Двум параллельным прямым одной фигуры соответствуют в гомотетичной фигуре также параллельные прямые.*

Вытекает из свойства 4°.

6° *Отношение любых двух соответственных отрезков равно абсолютной величине коэффициента подобия.*

В самом деле, из подобия треугольников SAB и $SA'B'$ следует, что $A'B' : AB = SA' : SA = |k|$.

7° *Любые два гомотетичных треугольника подобны.*

Действительно, если треугольнику ACD соответствует треугольник $A'C'D'$ (черт. 163 и 164), то по свойству 6 имеем $A'C' : AC = A'D' : AD = C'D' : CD$, и треугольники подобны (по третьему признаку подобия).

8° *Любые два соответственных угла равны.*

Вытекает из свойства 7°.

Наконец, непосредственно из чертежа можно усмотреть и последние два свойства гомотетичных фигур.

9° *Любые два гомотетичных треугольника ориентированы одинаково; любые два соответственных угла в гомотетичных фигурах имеют одинаковое направление.*

10° *Любые два соответственных отрезка направлены в двух прямо-гомотетичных фигурах в одну и ту же сторону, в двух обратно-гомотетичных фигурах — в противоположные стороны.*

В силу свойств 6° и 10°, для любых соответственных отрезков AB и $A'B'$ двух гомотетичных фигур имеет место по величине и по знаку следующее равенство:

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{SA'} : \overline{SA} = k.$$

Легко видеть, что отражение от точки S (§ 32) есть частный случай гомотетии ($k = -1$) и что любая обратная гомотетия (с коэффициентом подобия $k < 0$) есть произведение прямой гомотетии (с коэффициентом подобия $|k|$) на отражение от центра подобия.

§ 63. Три попарно гомотетичные фигуры; ось подобия.

В предыдущем параграфе мы определили гомотетию свойствами a), b) и c) и из этого определения вывели ряд её свойств (свойства 1°—10°). Мы покажем теперь, что гомотетию можно вполне охарактеризовать и некоторыми из этих последних свойств, в частности, свойствами 1, 3, 4, 6 и 10. Другими словами, мы докажем следующую теорему, на которую нам скоро придётся сослаться.

Теорема 134. *Всякое взаимно однозначное соответствие, между точками двух фигур, обладающее следующими свойствами:*

a) *точкам одного отрезка соответствуют также точки некоторого отрезка;*

b) *каждые два соответственных отрезка параллельны и имеют одно и то же отношение;*

c) *каждые два соответственных отрезка направлены в одну и ту же сторону, или же каждые два соответственных отрезка направлены в противоположные стороны, — представляет собой гомотетию или перенос.*

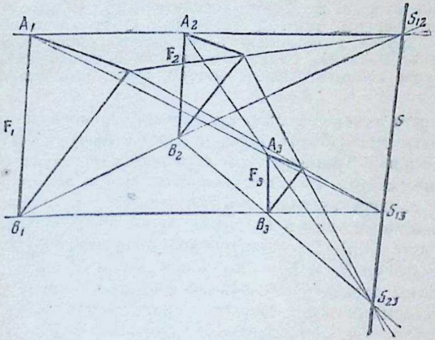
Доказательство. Пусть между точками двух фигур установлено соответствие, обладающее тремя перечисленными свойствами. Обозначим через AB и $A'B'$ какие-либо два соответственных отрезка, через D и D' — какие-либо две соответственные точки. Если каждые два соответственных отрезка равны и направлены в одну и ту же сторону, то данные фигуры получаются одна из другой с помощью переноса, так как при этом и отрезки AA' и BB' равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону.

Если этот случай исключить из рассмотрения, то прямые AA' и BB' пересекаются в некоторой точке S (черт. 163 и 164). Примем точку S за центр некоторой гомотетии, а точки A и A' (или, если угодно, B и B' — это безразлично) за пару соответственных точек. Построим точку D'' (на чертеже не показана), соответствующую в этой гомотетии какой-либо точке D первой фигуры. При этом отрезки AD и $A'D''$ будут параллельны, причём $A'D'':AD=SA':SA=$ $=A'B':AB$; далее, отрезки AD и $A'D''$ будут направлены в одну и ту же сторону или в противоположные стороны в зависимости от того, направлены ли отрезки AB и $A'B'$ в одну и ту же сторону или в противоположные стороны. Отсюда следует, что точка D'' совпадает с D'. Иначе говоря, любая точка D' второй фигуры получается из соответствующей точки D первой фигуры с помощью указанной выше гомотетии.

Опираясь на эту теорему, мы докажем теперь следующую теорему о гомотетических фигурах.

Теорема 135. *Если каждая из фигур F_2 и F_3 получается из фигуры F_1 с помощью гомотетии или переноса, то и фигуры F_2 и F_3 получаются одна из другой с помощью гомотетии или переноса.*

Доказательство. Пусть A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 — какие-либо три соответственных отрезка данных фигур (черт. 165).



Черт. 165.

Так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ и $A_1B_1 \parallel A_3B_3$, то и $A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Так как $A_2B_2:A_1B_1=k'=\text{const}.$ и $A_3B_3:A_1B_1=k''=\text{const}.$, то и $A_2B_2:A_3B_3=k':k''=\text{const}.$ Наконец, если любые два соответственных отрезка A_1B_1 и A_2B_2 фигур F_1 и F_2, а также любые два соответственных отрезка A_1B_1 и A_3B_3 направлены в одну и ту же сторону, то и отрезки A_2B_2 и A_3B_3 направлены в одну и ту же сторону; если любые два отрезка A_1B_1 и A_2B_2 направлены в одну и ту же сторону, а любые два отрезка A_1B_1 и A_3B_3 — в противоположные стороны, то любые два отрезка A_2B_2 и A_3B_3 направлены в противоположные стороны, и т. д. Таким образом, фигуры F_2 и F_3 удовлетворяют условиям теоремы 134, откуда и вытекает наше утверждение.

Следствие. *Две фигуры, прямо-гомотетичные третьей, а также две фигуры, обратно-гомотетичные третьей, прямо-гомотетичны (или получаются одна из другой с помощью переноса); если одна из двух фигур прямо-гомотетична третьей, а другая ей обратно-гомотетична, то эти две фигуры обратно-гомотетичны друг другу.*

Вытекает из рассмотрения направлений соответственных отрезков.

Замечание. Если под «гомотетичными» (в кавычках) понимать две фигуры, гомотетичные друг другу или получающиеся одна из другой с помощью переноса, то определённая таким образом «гомотетия» будет обладать свойством транзитивности: две фигуры, «гомотетичные» третьей, будут «гомотетичны» друг другу[1]).

Оставим теперь в стороне случай переноса и будем рассматривать три фигуры, попарно гомотетичные (в собственном смысле слова). Такие фигуры обладают следующим свойством.

Теорема 136. *Центры подобия трёх попарно гомотетичных фигур, взятых по две, лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть S_{23} — центр подобия фигур F_2 и F_3 (черт. 165), S_{13}—центр подобия фигур F_1 и F_3, S_{12} —центр подобия фигур F_1 и F_2. Обозначим через s прямую $S_{23}S_{13}$. Мы должны показать, что прямая s проходит через точку S_{12}. Будем рассматривать прямую s, как принадлежащую первой фигуре F_1; так как прямая s проходит через S_{13}, то ей в третьей фигуре F_3 будет соответствовать та же самая прямая s. Если теперь рассматривать s как прямую третьей фигуры F_3, то ей во второй фигуре F_2 будет соответствовать

---

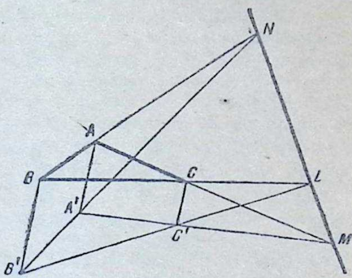
[1]) Сравнить сноску [1]) на стр. 216.

та же самая прямая s, так как прямая s проходит через точку S_{23}.

Отсюда следует, что прямой s, как прямой фигуры $\mathbb{F}_1$, соответствует в фигуре $\mathbb{F}_2$ та же самая прямая s. Но это возможно только в том случае, если прямая s проходит через точку S_{12} (§ 62, свойства 3° и 4°).

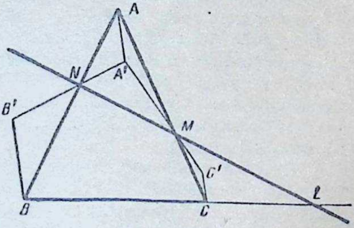
Прямая s, на которой лежат три центра подобия трёх попарно гомотетичных фигур, называется осью подобия этих фигур.

Заметим, что из трёх центров подобия, лежащих на оси подобия, внешних центров подобия будет три или один, а внутренних соответственно ни одного или два (в силу следствия из теоремы 135).



Черт. 166.

§ 64. Теорема Менелая.



Черт. 167.

Воспользуемся свойством центров подобия трёх попарно гомотетичных фигур для вывода одного общего свойства произвольного треугольника.

Теорема 137 (Менелая). *Если какая-либо прямая пересекает стороны или продолжения сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно в точках L, M и N* (черт. 166 и 167), *то имеет место* (по величине и по знаку!) *равенство*

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=-1. \tag{1}$$

Доказательство. Примем точки A, B и C за соответственные точки трёх попарно гомотетичных фигур $\mathfrak{F}_a$, $\mathfrak{F}_b$ и $\mathfrak{F}_c$. Коэффициенты подобия подберём так, чтобы точка M была центром подобия фигур $\mathfrak{F}_a$ и $\mathfrak{F}_c$, а точка N — центром подобия фигур $\mathfrak{F}_a$ и $\mathfrak{F}_b$. В таком случае прямая MN будет осью подобия трёх фигур. Следовательно, центр подобия фигур $\mathfrak{F}_b$ и $\mathfrak{F}_c$ также будет лежать на прямой MN. Кроме того, этот центр подобия должен лежать на прямой BC, соединяющей две соответственные точки B и C фигур $\mathfrak{F}_b$ и $\mathfrak{F}_c$. Поэтому центром подобия фигур $\mathfrak{F}_b$ и $\mathfrak{F}_c$ будет точка L. Итак, точки L, M и N будут центрами подобия трёх рассматриваемых фигур, взятых попарно.

Обозначим теперь через A' какую-либо точку фигуры $\mathfrak{F}_a$, отличную от A, и через B' и C' — соответствующие ей точки двух других фигур. По основному свойству гомотетичных фигур имеем $\overline{LB}:\overline{LC}=\overline{BB'}:\overline{CC'}$ или $\overline{BL}:\overline{LC}=-\overline{BB'}:\overline{CC'}$ и аналогично $\overline{CM}:\overline{MA}=-\overline{CC'}:\overline{AA'}$; $\overline{AN}:\overline{NB}=-\overline{AA'}:\overline{BB'}$. Из этих трёх равенств и вытекает соотношение (1).

Докажем обратную теорему.

Теорема 138 (Менелая). *Если точки L, M и N, лежащие на сторонах или на продолжениях сторон BC, CA и AB треугольника ABC, удовлетворяют соотношению* (1), *то эти три точки лежат на одной прямой.*

Доказательство. Примем точки A, B и C опять за соответственные точки трёх попарно гомотетичных фигур $\mathfrak{F}_a$, $\mathfrak{F}_b$, и $\mathfrak{F}_c$. Коэффициенты подобия подберём, как и при доказательстве теоремы 137, т. е. так, чтобы точка M была центром подобия фигур $\mathfrak{F}_a$ и $\mathfrak{F}_c$, а точка N — центром подобия фигур $\mathfrak{F}_a$ и $\mathfrak{F}_b$.

Если A' — какая-либо точка фигуры $\mathfrak{F}_a$, отличная от A, B' и C' — соответствующие ей точки двух других фигур, то мы будем иметь $\overline{MC}:\overline{MA}=\overline{CC'}:\overline{AA'}$ или $\overline{CM}:\overline{MA}=-\overline{CC'}:\overline{AA'}$ и аналогично $\overline{AN}:\overline{NB}=-\overline{AA'}:\overline{BB'}$. Из этих двух равенств вместе с равенством (1) следует, что $\overline{BL}:\overline{LC}=-\overline{BB'}:\overline{CC'}$ или $\overline{LB}:\overline{LC}=\overline{BB'}:\overline{CC'}$. Так как точка L лежит на прямой BC, то последнее равенство показывает, что точка L есть центр подобия фигур $\mathfrak{F}_b$ и $\mathfrak{F}_c$.

Точки L, M и N лежат на одной прямой как центры подобия трёх попарно гомотетичных фигур.

В качестве приложения теоремы Менелая (теоремы 138) укажем на следующие предложения:

1) *Точки пересечения биссектрис внешних углов при вершинах неравнобедренного треугольника с продолжениями его сторон лежат на одной прямой.*

Действительно, если AL, BM и CN — биссектрисы внешних углов и L, M и N — точки их пересечения с продолжением сторон треугольника, то $\overline{BL}:\overline{LC}=-AB:AC$; $\overline{CM}:\overline{MA}=-BC:AB$ и $\overline{AN}:\overline{NB}=-AC:BC$. Условие (1) выполнено.

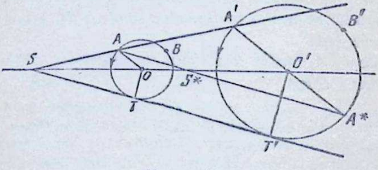
2) Аналогичное предложение для биссектрис внутренних углов при двух вершинах и биссектрисы внешнего угла при третьей вершине.

Если BM и CN — биссектрисы внутренних углов, AL — биссектриса внешнего угла, то $\overline{BL}:\overline{LC}=-AB:AC$; $\overline{CM}:\overline{MA}=+BC:AB$ и $\overline{AN}:\overline{NB}=+AC:BC$. Условие (1) выполнено.

§ 65. Центры и оси подобия окружностей.

Применим результаты, полученные в §§ 62 и 63, к тому случаю, когда данными фигурами будут окружности. Мы получим теоремы, не только иллюстрирующие общую теорию, но и имеющие самостоятельное значение.

Теорема 139. *Фигура, гомотетичная окружности, есть также окружность, и центры обеих окружностей представляют собой соответственные точки.*



Черт. 168.

Доказательство. Пусть O — центр данной окружности (черт. 168); A, B, ... — какие-либо её точки; S — центр подобия: O', A', B', ... — точки, соответствующие точкам

$O, A, B, \ldots$ Мы не исключаем из рассмотрения случая, когда точка S, а следовательно и O', совпадает с O.

Так как $OA = OB = \ldots$ и $O'A' : OA = OB' : OB = \ldots$, то и $O'A' = O'B' = \ldots$; точки A', B', ... лежат на одной окружности, и центр O' этой окружности соответствует центру O данной окружности.

Теорема 140. *Всякие две неравные окружности можно рассматривать как гомотетичные фигуры, и притом двумя способами.*

Доказательство. Пусть O и O' — центры данных окружностей (черт. 168). Если вторая окружность гомотетична первой, то центру O первой окружности должен соответствовать, как мы только что видели, центр O' второй. Произвольному радиусу OA первой окружности должен соответствовать параллельный ему радиус $O'A'$ или $O'A^*$ второй. Две пары соответственных точек O, O' и A, A' или O, O' и A, A^* определяют две гомотетии с центрами S и S^* в точках пересечения прямых OO', AA' и OO', AA^*. Каждая из этих гомотетий преобразует, очевидно, первую из данных окружностей во вторую.

Центры этих двух гомотетий называются центрами подобия обеих окружностей. Если центры обеих окружностей совпадают, то оба центра подобия совпадают с общим центром обеих окружностей. Если центры окружностей не совпадают, то центры подобия делят отрезок, имеющий своими концами центры обеих окружностей, внешним и внутренним образом в отношении их радиусов и называются соответственно внешним и внутренним центрами подобия обеих окружностей.

Построение 30. Построить центры подобия двух данных окружностей.

Способ решения этой задачи легко вытекает из чертежа 168 (сравнить § 42, построение 21, второй способ). Выбрав произвольную точку A окружности O, строим диаметр $A'A^*$ окружности O', параллельный радиусу OA. Прямые AA' и AA^* пересекают линию центров в искомых центрах подобия.

Если две данные окружности равны, то одна из двух гомотетий, о которых идёт речь, заменяется переносом (так как отрезки, соединяющие попарно концы параллельных и одинаково направленных радиусов, все равны и параллельны), а другая обращается в центральное отражение. Поэтому две равные окружности имеют только один центр подобия, а именно внутренний, и этот центр подобия делит расстояние между центрами окружностей пополам.

Если обозначить через r и r' (пусть, для определённости, $r<r'$) радиусы двух неравных окружностей, центры O и O' которых не совпадают, через S и S^* — внешний и внутренний центры подобия, то мы должны иметь $O'S-OS=OS^*+S^*O'=OO'$; $OS:O'S=OS^*:S^*O'=r:r'$, откуда

$$OS=OO'\cdot\frac{r}{r'-r};\quad O'S=OO'\cdot\frac{r'}{r'-r};$$

$$OS^*=OO'\cdot\frac{r}{r+r'};\quad S^*O'=OO'\cdot\frac{r'}{r+r'}.$$

Пользуясь этими равенствами и теоремами § 16 о взаимном расположении двух окружностей, можно показать, что внешний центр подобия двух окружностей лежит внутри обеих окружностей, если одна окружность расположена внутри другой, совпадает с точкой касания обеих окружностей, если они касаются друг друга внутренним образом, и лежит вне обеих окружностей во всех остальных случаях. Внутренний центр подобия двух окружностей лежит вне обеих окружностей, если одна окружность расположена вне другой, совпадает с точкой касания обеих окружностей, если они касаются друг друга внешним образом, и лежит внутри обеих окружностей во всех остальных случаях.

Действительно, если одна окружность расположена вне другой, то $r'-r<r+r'<OO'$, и потому $OS>r$; $O'S>r'$; $OS^*>r$; $S^*O'>r'$ и т. д.

Пусть один из центров подобия окружностей O и O', скажем, внешний центр подобия S лежит вне окружности O. Проведём из точки S касательную ST к этой окружности. Прямая ST будет касаться и второй окружности O' в точке T', соответствующей точке касания T прямой ST и окружности O. Это вытекает из взаимной однозначности соответствия между точками при гомотетии (§ 62, свойство 1°). Таким образом, *касательная к одной из двух окружностей, проходящая через их центр подобия* — внутренний или внешний — *касается и другой окружности* и будет общей касательной к обеим окружностям. Если она проходит через внешний центр подобия, то оба радиуса OT и $O'T'$, проведённые в точки касания, будут направлены в одну сторону, а если через внутренний центр подобия, то — в противоположные стороны. В первом случае мы будем иметь внешнюю общую касательную, во втором — внутреннюю.

Обратно, пусть некоторая общая касательная к двум окружностям O и O' касается их в точках T и T'. Так как радиусы OT и $O'T'$ параллельны, то общая касательная TT' пересекает линию центров OO' в одном из центров подобия или ей параллельна.

Из сказанного вытекает способ решения следующей задачи.

Построение 31. Построить общие касательные к двум окружностям.

Один способ построения общих касательных к двум окружностям известен из школьного курса. В дальнейшем (§ 93) мы вернёмся к нему с более общей точки зрения.

Другой способ вытекает из только что сказанного. Строим центры подобия данных окружностей и проводим из центров подобия касательные к одной из двух окружностей. Эти касательные и будут общими касательными.

Центру подобия, лежащему вне каждой из данных окружностей, соответствует пара общих касательных; центру подобия, лежащему на обеих данных окружностях, — одна общая касательная. Через центр подобия, лежащий внутри обеих окружностей, не проходит, конечно, ни одной общей касательной.

Принимая во внимание сказанное выше о расположении центров подобия относительно данных окружностей, получаем следующее предложение:

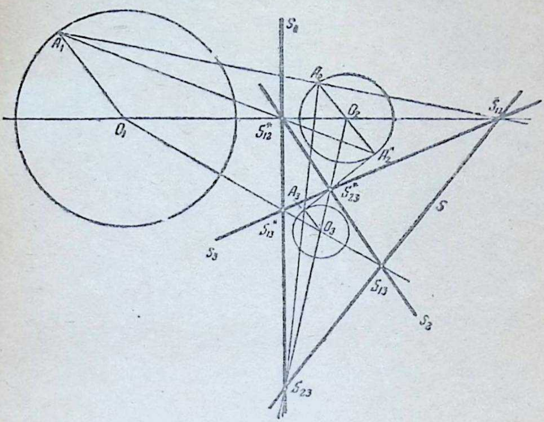
Теорема 141. *Две окружности, расположенные одна вне другой, имеют четыре общие касательные — две внешние и две внутренние; две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, имеют три общие касательные — две внешние и одну внутреннюю; две окружности, пересекающиеся в двух точках, имеют только две общие касательные — обе внешние; две окружности, касающиеся одна другой внутренним образом, имеют только одну общую касательную, и притом внешнюю. Наконец, две окружности, расположенные одна внутри другой, вовсе не имеют общих касательных.*

Переходим к случаю трёх окружностей.

Теорема 142. *Если центры трёх попарно не равных окружностей не лежат на одной прямой, то шесть цен-*

тров подобия этих окружностей, взятых попарно, лежат по три на четырёх прямых.

Доказательство. Пусть O_1, O_2 и O_3 (черт. 169) — центры трёх данных окружностей. Обозначим через S_{23} — внешний, а через S_{23}^* — внутренний центр подобия окружностей O_2 и O_3; аналогично обозначим остальные центры подобия через S_{13}, S_{13}^*, S_{12} и S_{12}^*.



Черт. 169.

Окружности O_1 и O_2, а также O_1 и O_3 можно рассматривать как прямо-гомотетичные фигуры; в таком случае и окружности O_2 и O_3 придётся рассматривать как прямо-гомотетичные. Соответственными точками будут при этом, например, точки A_1, A_2 и A_3. По теореме 136 три центра подобия S_{23}, S_{13} и S_{12} будут лежать на одной прямой s.

Мы могли бы рассматривать окружности O_1 и O_2, а также окружности O_1 и O_3 как обратно-гомотетичные; окружности O_2 и O_3 были бы при этом прямо-гомотетичными. Примером соответственных точек будут при этом точки A_1, A_2^*

и A_3^* (последняя на чертеже 169 не изображена). Соответствующие центры подобия S_{23}, S_{13}^* и S_{12}^* будут также лежать на одной прямой s_1.

Наконец, рассматривая окружности O_1 и O_2 как прямо-гомотетичные, а окружности O_1 и O_3 как обратно-гомотетичные (соответственные точки A_1, A_2 и A_3^*) или окружности O_1 и O_2 как обратно-гомотетичные, а окружности O_1 и O_3 как прямо-гомотетичные (соответственные точки A_1, A_2^* и A_3), мы получим ещё две тройки центров подобия: центры подобия S_{23}^*, S_{13}^* и S_{12} лежат на одной прямой s_3, а центры подобия S_{23}^*, S_{13} и S_{12}^* — на одной прямой s_2.

Четыре прямые, на которых по три лежат центры подобия трёх попарно не равных окружностей, называются осями подобия трёх окружностей.

Центры подобия трёх окружностей располагаются на осях подобия следующим образом:

ось s : центры S_{23}, S_{13}, S_{12};
ось s_1 : центры S_{23}, S_{13}^* S_{12}^*;
ось s_2 : центры S_{23}^*, S_{13}, S_{12}^*;
ось s_3 : центры S_{23}^*, S_{13}^*, S_{12}.

Нетрудно видеть, что́ произойдёт, если две из данных окружностей или все три будут равны между собой.

Построение 32. Построить оси подобия трёх данных окружностей.

Решение непосредственно вытекает из построения центров подобия (построение 30).

Заметим, наконец, что доказательства теорем 140 и 142 существенно используют центральную симметрию окружности: точки A' и A^* (или A_2 и A_2^*) симметричны относительно O' (или O_2).

Учитывая это обстоятельство, можно доказать следующие два предложения:

Две не равные между собой гомотетичные фигуры, имеющие каждая центр симметрии, можно рассматривать как гомотетичные двумя различными способами.

Если три попарно неравные гомотетичные фигуры имеют каждая центр симметрии и эти центры симме-

три не лежат на одной прямой, то шесть центров подобия этих трёх фигур, взятых попарно, лежат по три на четырёх прямых.

Доказательства предоставляем читателю.

§ 66. Применение гомотетии к задачам на построение.

Рассмотренные в предыдущих параграфах свойства гомотетии находят, в частности, применение при решении задач на построение («метод подобия»). В основе этого применения лежит решение следующих двух задач.

Построение 33. Построить многоугольник, гомотетичный данному, зная центр подобия и точку, гомотетичную одной из вершин многоугольника (или зная центр подобия и коэффициент подобия, заданный в виде отношения двух отрезков).

Пусть даны многоугольник $ABC\ldots$, центр подобия S и вершина A', соответствующая вершине A данного многоугольника (точка A' должна, конечно, лежать на прямой SA).

Проводим через точку A' прямую, параллельную AB; точка пересечения B' этой прямой с SB будет вершиной искомого многоугольника, соответствующей B; затем через точку B' проводим прямую, параллельную BC, и т. д.

Легко видеть, ка́к следует видоизменить это построение, если вместо точки A' задан коэффициент подобия.

Построение 34. Построить окружность, гомотетичную данной окружности, зная центр подобия и точку, гомотетичную заданной точке данной окружности (или зная центр подобия и коэффициент подобия, заданный в виде отношения двух отрезков).

Пусть дана окружность O (черт. 168 на стр. 223), центр подобия S и точка A', соответствующая данной точке A окружности O (точка A' должна лежать, конечно, на прямой SA).

Проводим через точку A' прямую, параллельную OA; точка пересечения O' этой прямой с SO и будет центром O' искомой окружности (если точка A не лежит на прямой SO).

Легко видеть, ка́к следует видоизменить это построение, если точки A и A' лежат на прямой SO или если вместо точки A' задан коэффициент подобия.

Покажем теперь на примерах, ка́к построение фигуры, гомотетичной данной, используется при решении более сложных задач[1]).

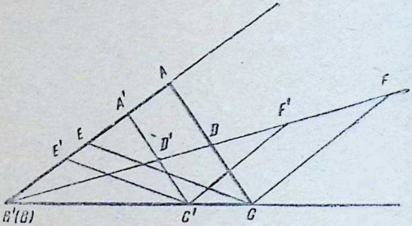
---

[1]) За подробностями отсылаем читателя к книгам Александрова [2] и автора [17].

Построение 35. Построить треугольник, зная два его угла и один его «линейный элемент», т. е. один из следующих отрезков: медиану, биссектрису, высоту, радиус описанной или вписанной окружности, периметр, сумму высот или медиан и т. д.

Пусть, например, требуется построить треугольник, зная углы B и C и сумму s медиан, выходящих из вершин B и C.

Построим какой-либо треугольник $A'B'C'$ (черт. 170), в котором углы при вершинах B' и C' соответственно равны углам B и C искомого треугольника. В треугольнике $A'B'C'$ построим медианы $B'D'$ и $C'E'$ и отрезок $B'F' = B'D' + D'F'$, равный сумме двух его медиан $B'D' + C'E'$.



Черт. 170.

Искомый треугольник ABC подобен $A'B'C'$, и мы можем считать его гомотетичным $A'B'C'$; примем вершину B' за вершину B, а лучи $B'A'$ и $B'C'$ — за лучи BA и BC. Остаётся только определить положение, скажем, вершины C на луче $B'C'$.

Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что в гомотетичных треугольниках любые два соответственных отрезка пропорциональны (§ 62, свойство 6°). Если поэтому BD и CE — медианы искомого треугольника, то мы имеем $B'D':BD = C'E':CE = B'C':BC$, откуда $(B'D' + C'E'):(BD + CE) = B'C':BC$ или $B'F':s = B'C':BC$. Так как отрезок s известен, а отрезки $B'F'$ и $B'C'$ построены, то отрезок BC также можно построить.

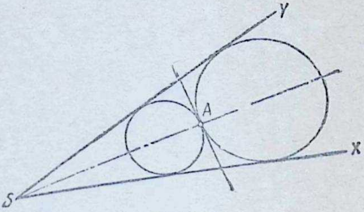
Из сказанного вытекает такое решение: построив треугольник $A'B'C'$, два угла которого равны углам искомого треугольника, отложим на продолжении его медианы $B'D'$ за точку D' отрезок $D'F'$, равный другой его медиане. Далее отложим на луче $B'D'$ отрезок $B'F$, равный s. Если вершину B' принять за вершину B искомого треугольника, то вершиной C будет точка пересечения прямой $B'C'$ с прямой, проходящей через точку F и параллельной $F'C'$.

В самой общей форме решение поставленной задачи можно сформулировать так: строим какой-либо треугольник $A'B'C'$, подобный искомому треугольнику ABC. Далее строим в треугольнике $A'B'C'$ «линейный элемент» s', соответственный данному элементу s треугольника ABC. Сторона BC искомого треугольника определяется как четвёртый пропорциональный к трём известным отрезкам из пропорции $s':s=B'C':BC$. Для упрощения построения располагаем треугольники ABC и $A'B'C'$ так, чтобы они были гомотетичными, выбрав надлежащим образом центр гомотетии.

Если сумма двух данных углов меньше развёрнутого, то задача рассмотренного типа всегда имеет решение и притом единственное.

Построение 36. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых и проходящую через данную точку.

Если данные прямые параллельны, то задача легко решается (как?) методом геометрических мест; точно так же легко (как именно?) решается задача и в том случае, когда данная точка лежит на одной из данных прямых. Если данная точка A лежит на одной из биссектрис углов между данными прямыми SX и SY, то касательная к искомой окружности в точке A перпендикулярна к SA, и задача сводится к построению окружности, касающейся трёх данных прямых (черт. 171).



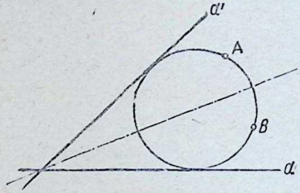
Черт. 171.

Итак, предположим, что данные прямые пересекаются и что данная точка не лежит ни на одной из данных прямых и ни на одной из биссектрис углов между ними.

Способ решения предложенной задачи приведён в школьном учебнике. Этот способ основан, как легко видеть, на следующих двух соображениях: 1) Точка пересечения двух внешних или двух внутренних общих касательных к двум окружностям является их центром подобия (§ 65). 2) Зная некоторую окружность, гомотетичную данной, центр подобия S и точку A, соответствующую одной из точек этой вспомогательной окружности, можно построить искомую окружность (построение 34).

Построение 37. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

Задача решается очень просто (как?), если одна из данных точек лежит на данной прямой или если прямая, соединяющая две данные точки, параллельна данной прямой. Рассмотрим общий случай, когда ни то, ни другое из этих обстоятельств не имеет места.



Черт. 172.

Черт. 173.

Первый способ. Пусть требуется построить окружность, проходящую через точки A и B (черт. 172 и 173) и касающуюся прямой a.

Так как искомая окружность проходит через точки A и B, то её центр лежит на прямой l, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину. Так как искомая окружность касается прямой a, то она касается и прямой a', симметричной с a относительно l. Таким образом, мы приходим к построению 36: построить окружность, проходящую через одну из данных точек, скажем через A, и касающуюся двух прямых a и a'. Однако здесь присоединяется добавочное условие: центр искомой окружности должен лежать на вполне определённой биссектрисе l углов, образованных данными прямыми.

Задача имеет два решения, если точки A и B лежат по одну сторону от прямой a (черт. 172), и не имеет решений, если точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой (черт. 173).

Второй способ решения той же задачи будет рассмотрен позже (§ 84).

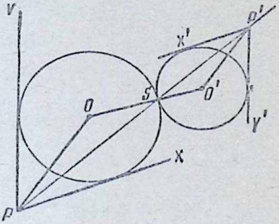
Построение 38. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых и данной окружности.

Задача решается просто (как?), если данные прямые параллельны, или если центр данной окружности лежит на одной из биссектрис углов между обеими прямыми.

В общем случае задачу можно решить различными способами. Приведём здесь два из них, основанных оба на понятии гомотетии.

Первый способ. Пусть PX и PY (черт. 174) — данные прямые, O' — центр данной окружности, которую мы будем называть окружностью O'.

Если O — искомая окружность, то точка касания S окружностей O и O' будет их центром подобия (в случае, изображённом на черт. 174 — внутренним). В той гомотетии с центром S, которая преобразует окружность O в окружность O', касательным PX и PY к первой окружности должны соответствовать параллельные им касательные $P'X'$ и $P'Y'$ ко второй, а точке пересечения P прямых PX и PY — точка пересечения P' прямых $P'X'$ и $P'Y'$. Так как точки P и P' соответствуют одна другой в гомотетии с центром S, то прямая PP' проходит через точку S.



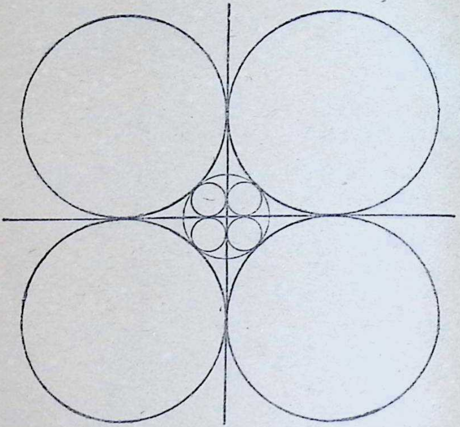
Черт. 174.

Отсюда вытекает такое построение точки касания S: проводим к данной окружности касательные, параллельные данным прямым; прямая, соединяющая точку их пересечения с данной точкой P, пересекает данную окружность в искомой точке касания.

После того как точка касания S определена, не представляет труда найти центр O искомой окружности. Для этого строим ту из биссектрис углов между данными прямыми, которая параллельна прямой $P'O'$. Точка пересечения O этой биссектрисы с прямой $O'S$ будет центром искомой окружности, отрезок OS — её радиусом.

Можно было бы показать (предоставляем это читателю!), что построенная таким образом окружность действительно касается обеих данных прямых и данной окружности.

Так как существуют две касательные к окружности O', параллельные PX, и две касательные, параллельные PY, то точка P' может занимать четыре различных положения на плоскости. Каждая из прямых PP', а таких прямых будет четыре, может пересекать окружность O' в двух точках. Следовательно, наибольшее возможное число искомых окружностей будет восемь. Наглядные соображения (черт. 175) показывают, что задача действительно может иметь восемь решений.

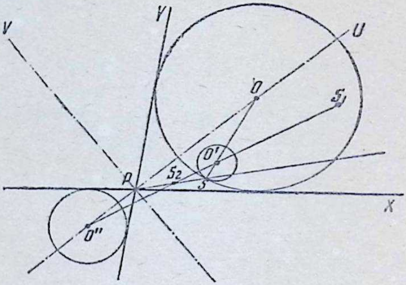


Черт. 175.

Второй способ. Пусть PX и PY (черт. 176) — данные прямые, O' — данная окружность. Ограничимся построением тех из искомых окружностей, центры которых лежат на одной из биссектрис PU углов между данными прямыми. (Окружности с центрами на другой биссектрисе строятся аналогично.)

Построим какую-либо окружность O'' с центром на прямой PU, касающуюся обеих прямых PX и PY, и центры подобия S_1 и S_2 данной окружности O' и вспомогательной окружности O''. Точка касания S искомой окружности O и данной окружности O' будет одним из их центров подобия; точка P — одним из центров подобия окружностей O и O''. Следовательно, прямая PS будет одной из осей подобия окружностей O, O' и O'' (теорема 142) и поэтому будет проходить через S_1 или S_2.

Отсюда вытекает такое решение задачи. Построив, как было указано, окружность O'', строим центры подобия S_1 и S_2 окружностей O' и O''. Прямые PS_1 и PS_2 пересекают окружность O' в искомых точках касания S. После того, как точка S построена, центр O искомой окружности определяется как точка пересечения прямых PU и $O'S$.



Черт. 176.

Каждая из прямых PS_1 и PS_2 может пересекать окружность O' в двух точках, и мы получаем самое большее четыре решения с центрами на биссектрисе PU (и столько же на биссектрисе PV).

Ни тот ни другой из описанных способов не дают возможности сколько-нибудь просто провести исследование задачи. В дальнейшем (§ 94) будет приведён ещё третий способ решения, основанный на совершенно иных соображениях и дающий возможность сравнительно просто провести полное исследование задачи.

§ 67. Прямая Эйлера.

Применим теперь учение о гомотетии к выводу некоторых свойств замечательных точек треугольника (§ 29).

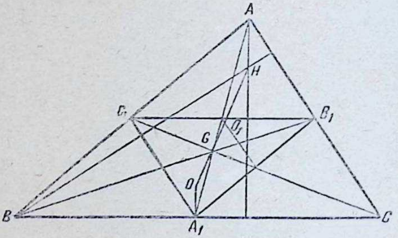
Теорема 143. *Во всяком треугольнике центр описанной окружности O, центр тяжести G, центр окружности девяти точек O_1 и ортоцентр H лежат на одной прямой в указанном здесь порядке, и расстояния между ними от-*

носятся как

$$OG:GO_1:O_1H=2:1:3.$$

Прямая, на которой лежат точки O, G, O_1 и H, называется прямой Эйлера.

Доказательство. Прямые, соединяющие вершины треугольника ABC (черт. 177) с серединами A_1, B_1 и C_1 противолежащих сторон, пересекаются в одной точке — центре тяжести



Черт. 177.

G — и делятся в ней в отношении $2:1$, считая от вершин (теорема 69). Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ обратно-гомотетичны относительно точки G и коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$.

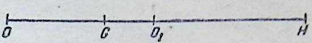
Отсюда вытекает, что любые две соответственные точки этих треугольников лежат на одной прямой с точкой G, которая делит расстояние между ними в отношении $2:1$ (считая от точки, отнесённой к треугольнику ABC).

Перпендикуляры к сторонам треугольника ABC, восставленные в их серединах, служат высотами треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому точка O есть ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Значит, точки H и O, как соответственные точки треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, лежат с точкой G на одной прямой, и $HG:GO=2:1$.

Точке O треугольника ABC соответствует точка O_1 треугольника $A_1B_1C_1$; поэтому точки O, G и O_1 лежат на одной прямой и $OG:GO_1=2:1$.

Отсюда и следует, что все четыре точки лежат на одной прямой, и $OG:GO_1:O_1H=2:1:3$ (черт. 178).

Следствие. Из того обстоятельства, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны и коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$, вытекает, что и окружности, описанные около этих двух треугольников, гомотетичны. Поэтому *радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной окружности.*



Черт. 178.

§ 68. Общий случай подобия двух фигур.

Читатель, знакомый с общим понятием о подобии, несомненно заметил, что гомотетичные фигуры представляют собой лишь частный случай подобных фигур вообще. Однако общим понятием подобия мы до сих пор не пользовались. Теперь мы должны дать определение подобных фигур в такой форме, чтобы оно было пригодно для любых фигур (а не только, скажем, для многоугольников).

Фигура $\mathbf{F}'$ называется подобной фигуре $\mathbf{F}$, если между их точками можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором отношение отрезка, соединяющего какие-либо две точки фигуры $\mathbf{F}'$, к отрезку, соединяющему соответствующие им точки фигуры $\mathbf{F}$, имеет для всех точек обеих фигур одно и то же значение.

Итак, для соответственных точек $A, B, C, D, \ldots$ и $A', B', C', D', \ldots$ имеем $k=A'B':AB=A'C':AC=B'C':BC=$ $=A'D':AD\ldots=\text{const}$. Это постоянное отношение k называется коэффициентом подобия фигуры $\mathbf{F}'$ относительно $\mathbf{F}$. Соответствие между точками обеих фигур или, другими словами, преобразование, посредством которого из точек первой фигуры $\mathbf{F}$ получаются точки фигуры $\mathbf{F}'$, называется преобразованием подобия или просто подобием.

Из этого определения вытекает ряд свойств подобия.

1° Каждая фигура подобна самой себе. Если фигура $\mathbf{F}'$ подобна $\mathbf{F}$, то и $\mathbf{F}$ подобна $\mathbf{F}'$; другими словами, преобразование, обратное подобию, есть также подобие. Две фигуры, подобные третьей, подобны между собой; другими словами, произведение двух подобий есть также подобие.

Короче говоря, *подобие обладает свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности.*

2° *Точкам фигуры* $\mathbb{F}$, *лежащим на одной прямой, соответствуют в подобной ей фигуре* $\mathbb{F}'$ *точки, также лежащие на одной прямой; точкам некоторого отрезка — также точки некоторого отрезка.*

Действительно, пусть точка B лежит между A и C, и точкам A, B, C пусть соответствуют точки A', B', C'. Так как, по определению подобия, $A'B':AB=B'C':BC=A'C':AC$, то $(A'B'+B'C'):(AB+BC)=A'C':AC$; поэтому из равенства $AB+BC=AC$ следует, что $A'B'+B'C'=A'C'$. Но это равенство выполняется только при условии, что точка B' лежит между A' и C'.

Отсюда вытекает, далее, что фигура, подобная лучу, есть также луч; фигура, подобная полуплоскости, — полуплоскость; фигура, подобная углу, — угол, и т. д.

3° *Соответственные углы двух подобных фигур равны.*

Действительно, если точкам A, B и C фигуры $\mathbb{F}$ соответствуют точки A', B' и C' фигуры $\mathbb{F}'$, то треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, откуда и следует, что $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

4° *Отношение площадей двух подобных многоугольников равно отношению квадратов их соответственных сторон, т. е. квадрату коэффициента подобия.*

Доказательство известно из школьного курса.

Равные, а также гомотетичные фигуры представляют собою стные случаи подобных фигур.

Иначе говоря, движение и гомотетия представляют собой астные случаи подобия.

Следующая теорема даёт общий способ получения фигур, подобных данной фигуре.

Теорема 144. *Всякая фигура* $\mathbb{F}'$, *подобная фигуре* $\mathbb{F}$, *равна некоторой фигуре* $\mathbb{F}_0$, *прямо-гомотетичной фигуре* $\mathbb{F}$; *обратно, всякая фигура* $\mathbb{F}'$, *равная какой-либо фигуре,* (прямо- или обратно-) *гомотетичной фигуре* $\mathbb{F}$, *подобна фигуре* $\mathbb{F}$[1]).

Другими словами, всякое подобие есть произведение прямой гомотетии на движение; обратно, всякое произведение гомотетии (прямой или обратной) на движение есть подобие.

---

[1]) Это свойство подобных фигур можно принять за общее определение подобия; ср., например, Адамар [1], ч. 1, стр. 129.

Доказательство. Примем произвольную точку S за центр подобия и построим фигуру $\mathbf{F}_0$, прямо-гомотетичную $\mathbf{F}$ относительно точки S, выбрав коэффициент гомотетии k равным коэффициенту подобия фигуры $\mathbf{F}'$ относительно $\mathbf{F}$. Если A и B — какие-либо две точки фигуры $\mathbf{F}$; A_0 и B_0 и A' и B' — соответствующие им точки фигур $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{F}'$, то мы имеем $k = A_0B_0 : AB = A'B' : AB$. Отсюда $A_0B_0 = AB$. Так как это равенство имеет место для любых двух соответственных отрезков, то фигуры $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ равны.

Обратное предложение очевидно.

Следствия. 1. *Фигура $\mathbf{F}'$, подобная фигуре $\mathbf{F}$, вполне определяется заданием трёх точек A', B' и C', которые соответствуют трём точкам A, B и C фигуры $\mathbf{F}$, не лежащим на одной прямой.* (При этом точки A', B' и C' должны быть выбраны так, чтобы треугольник ABC был подобен $A'B'C'$.)

Действительно, при этих условиях можно построить фигуру $\mathbf{F}_0$, о которой говорится в теореме 144. Фигура $\mathbf{F}'$, равная фигуре $\mathbf{F}_0$, будет вполне определяться заданием точек A', B' и C' (теорема 49, следствие 1).

2. *Пусть среди точек фигуры $\mathbf{F}$ имеются три точки, не лежащие на одной прямой; в таком случае существуют две и только две фигуры, подобные $\mathbf{F}$, в которых данным точкам A и B фигуры $\mathbf{F}$ соответствуют произвольно заданные точки A' и B'.*

Действительно, при этих условиях можно построить ту фигуру $\mathbf{F}_0$, равную $\mathbf{F}$, о которой говорится в теореме 144. При этом будут существовать две и только две фигуры $\mathbf{F}'$, равные фигуре $\mathbf{F}_0$, в которых точкам A_0 и B_0 фигуры $\mathbf{F}_0$ соответствуют данные точки A' и B' (теорема 49, следствие 3).

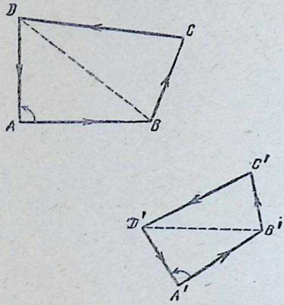
§ 69. Два вида подобия.

Мы только что видели, что всякая фигура $\mathbf{F}'$, подобная данной фигуре $\mathbf{F}$[1]), равна некоторой фигуре $\mathbf{F}_0$, прямо-гомотетичной $\mathbf{F}$ (теорема 144). При этом возможны два случая: фигура $\mathbf{F}'$ может быть либо собственно-равна, либо зеркально-равна фигуре $\mathbf{F}_0$.

---

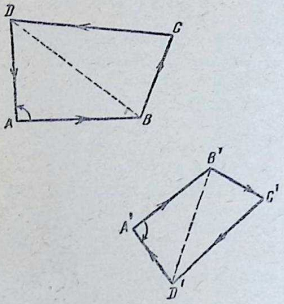
[1]) В настоящем параграфе мы ограничиваемся только такими фигурами, в которых не все точки лежат на одной прямой.

Рассмотрим первый случай: в этом случае любой ориентированный треугольник $\overline{ABD}$ фигуры $\mathbf{F}$ имеет ту же ориентацию, что и соответствующий ему треугольник $\overline{A_0B_0D_0}$ фигуры $\mathbf{F}_0$ (§ 62, свойство 9); в то же время и треугольники $\overline{A_0B_0D_0}$ и $\overline{A'B'D'}$ ориентированы одинаково, так как фигуры $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{F}'$ собственно-равны. Следовательно, любые два соответственных треугольника $\overline{ABD}$ и $\overline{A'B'D'}$ подобных фигур одинаково ориентированы, любые два соответственных угла имеют одинаковое направление (черт. 179).



Черт. 179.

Рассмотрим второй случай: треугольники $\overline{ABD}$ и $\overline{A_0B_0D_0}$ будут ориентированы одинаково, но треугольники $\overline{A_0B_0D_0}$ и $\overline{A'B'D'}$ будут ориентированы противоположно, так что и треугольники $\overline{ABD}$ и $\overline{A'B'D'}$ будут ориентированы противоположно. Следовательно, любые два соответственных треугольника будут ориентированы противоположно, любые два соответственных угла имеют противоположные направления (черт. 180).



Черт. 180.

Таким образом имеет место следующее предложение (сравнить теорему 52).

Теорема 145. *Существует два вида подобных фигур и соответственно два вида подобия. В одном случае каждые два соответственных треугольника подобных фигур ориентированы одинаково, и каждые два соответственных* *угла одинаково направлены; в другом случае соответственные треугольники ориентированы противоположно и соответственные углы имеют противоположные направления.*

Будем называть две подобные фигуры в первом случае (черт. 179) собственно-подобными, во втором случае (черт. 180) — зеркально-подобными. Соответственно будем различать подобия первого рода и второго рода (сравнить собственно-равные и зеркально-равные фигуры в § 19, движения первого рода и второго рода в § 30).

Очевидно, что две фигуры, собственно-подобные третьей, а также две фигуры, зеркально-подобные третьей, собственно подобны друг другу; две фигуры, из которых одна собственно-подобна третьей, а другая ей зеркально-подобна, зеркально-подобны друг другу.

Фигура F′, собственно-подобная данной фигуре F, вполне определяется заданием двух точек A' и B', соответствующих двум данным точкам A и B фигуры F, и то же свойство имеет место для зеркально-подобных фигур. Действительно, задание точек A' и B' определяет две фигуры, подобные данной (теорема 144, следствие 2); эти две фигуры будут симметричны относительно прямой $A'B'$. Следовательно, одна из них будет собственно-подобна данной, а другая ей зеркально-подобна.

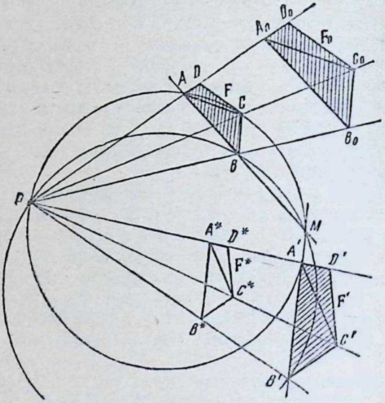
Составим теперь наглядное представление о взаимном расположении двух собственно-подобных или двух зеркально-подобных фигур на плоскости.

С этой целью докажем следующие две теоремы.

Теорема 146. *Подобие первого рода, отличное от гомотетии и движения, есть произведение гомотетии относительно некоторой точки на поворот около той же точки.*

Доказательство. Пусть подобие фигур F и F′ определяется двумя парами соответственных точек A, A' и B, B'. Если $AB \| A'B'$, то и любые два соответственных отрезка обеих фигур будут параллельны. В этом случае фигуры будут гомотетичны, и центром гомотетии будет точка пересечения S прямых AA' и BB' (черт. 163 и 164 на стр. 215); в частном случае фигуры получаются одна из другой с помощью переноса. Случай, когда прямые AA' и BB' совпадают, легко сводится к этому случаю путём построения третьей пары соответственных точек C и C', не лежащих с данными точками на одной прямой.

Рассмотрим теперь случай, когда прямые AB и $A'B'$ пересекаются в некоторой точке M (черт. 181). Попытаемся найти двойную точку фигур **F** и **F'**, то-есть точку, которая сама себе соответствует. Если P — такая точка, то $\angle PAB = \angle PA'B'$, и оба угла одинаково направлены, как соответственные углы двух собственно-подобных фигур. Точка M может лежать как на луче AB, так и на его продолжении за точку A; точно так же она может лежать как на луче $A'B'$, так и на его продолжении за точку A'. Из равенства и совпадения направлений углов $\angle PAB$ и $\angle PA'B'$ вытекает, что углы $\angle PAM$ и $\angle PA'M$ во всех случаях либо равны и имеют одинаковое направление, либо дополняют друг друга до двух прямых и имеют противоположные направления. Следовательно, точки P, M, A и A' лежат на одной окружности. По той же причине точки P, M, B и B' лежат на одной окружности. Итак,



Черт. 181.

если двойная точка существует, то она представляет собой точку пересечения окружностей MAA' и MBB'.

Повторяя эти рассуждения в обратной последовательности, придём к выводу, что для отличной от M точки пересечения P обеих окружностей имеют место равенства $\angle PAB = \angle PA'B'$ и $\angle PBA = \angle PB'A'$, причём каждые два равных угла имеют одинаковое направление. Отсюда и будет следовать, что P есть двойная точка[1]).

Построим теперь фигуру $\mathbb{F}_0$, прямо-гомотетичную $\mathbb{F}$, приняв за центр гомотетии точку P и за коэффициент подобия отношение $k = A'B' : AB$. Фигуры $\mathbb{F}_0$ и $\mathbb{F}'$ будут собственно-равны и будут иметь P своей двойной точкой. Следовательно, фигура $\mathbb{F}'$ получается из фигуры $\mathbb{F}_0$ с помощью поворота около точки P, а из фигуры $\mathbb{F}$ — с помощью прямой гомотетии относительно точки P и поворота около той же точки.

Следствия. 1. *Две неравные собственно-подобные фигуры имеют единственную двойную точку P.*

2. *Гомотетия с центром P и поворот около той же точки P перестановочны.*

Действительно, выполняя сначала поворот, получим фигуру $\mathbb{F}^*$ (черт. 181), а из неё с помощью гомотетии — ту же самую фигуру $\mathbb{F}'$.

Доказательство теоремы 146 даёт также решение следующей задачи.

Построение 39. Построить двойную точку двух собственно-подобных фигур.

Переходим к зеркально-подобным фигурам.

Теорема 147. *Подобие второго рода, отличное от движения, есть произведение гомотетии относительно некоторой точки на отражение от прямой, проходящей через ту же точку.*

Доказательство этой теоремы представляет собой обобщение доказательства теоремы 80.

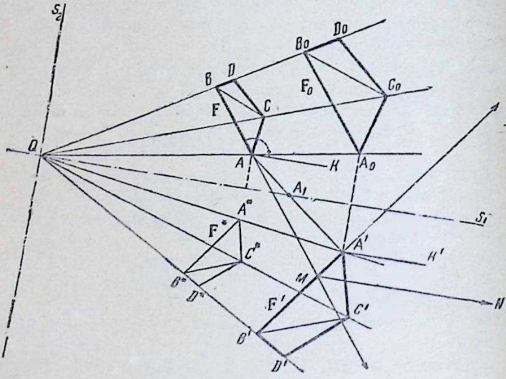
Пусть некоторое преобразование подобия второго рода переводит точки A и B фигуры $\mathbb{F}$ в точки A' и B' фигуры $\mathbb{F}'$

---

[1]) Для краткости мы опустили случай, когда сама точка M является двойной точкой. В этом случае $AA' \parallel BB'$ и окружности MAA' и MBB' касаются в точке M. Мы получили бы этот случай, взяв на черт. 181 вместо A, B и A', B' точки A, D и A', D'.

(черт. 182), не равной **F**. Обозначим через A_1 точку, делящую отрезок AA' внутренним образом в отношении $AA_1:A_1A' = AB:A'B'$. Проведём через точку A_1 прямую s_1, параллельную биссектрисе MN угла между направленными прямыми BA и $B'A'$.

Отражение от прямой s_1 переводит точки A', B', ... фигуры **F**$'$ в точки A_0, B_0, ... некоторой новой фигуры **F**$_0$, собственно-подобной (но не равной) **F**. При этом отрезки AB и A_0B_0 фигур **F** и **F**$_0$ будут (в силу выбора направления прямой s_1) параллельны и одинаково направлены. Следовательно, то же будет иметь место для любых двух соответственных отрезков, и фигуры **F** и **F**$_0$ будут прямо-гомотетичными. Так как $AA_1:A_1A' = AB:A'B'$, то расстояния точек A и A_0 от прямой s_1 будут относиться как соответственные отрезки фигур **F** и **F**$_0$. Отсюда легко заключить, что прямая s_1 проходит через центр подобия Q фигур **F** и **F**$_0$.



Черт. 182.

Итак, гомотетия с центром Q переводит фигуру **F** в **F**$_0$, а отражение от прямой s_1, проходящей через Q, — фигуру **F**$_0$ в **F**$'$.

Следствия. 1. *Две неравные зеркально-подобные фигуры имеют одну двойную точку и две взаимно перпендикулярные двойные прямые, проходящие через эту точку.*

Двойной точкой будет точка Q, двойными прямыми — прямая s_1 и перпендикулярная к ней прямая s_2, проходящая через точку Q.

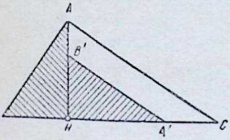
2. *Гомотетия с центром Q и отражение от оси, проходящей через точку Q, перестановочны.*

Действительно, выполняя сначала отражение, получим фигуру $\mathbb{F}^*$ (черт. 182), а из неё с помощью гомотетии — ту же самую фигуру $\mathbb{F}'$.

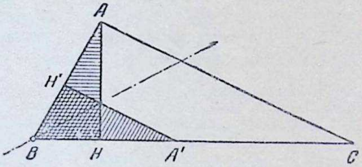
Из сказанного легко выводится решение следующей задачи:

Построение 40. Построить двойную точку и двойные прямые двух зеркально-подобных фигур.

Построение принимает особенно стройный вид, если воспользоваться следующим свойством прямых s_1 и s_2: прямые s_1 и s_2 делят отрезки, соединяющие каждые две соответственные точки обеих фигур, внутренним и внешним образом в отношении, равном коэффициенту подобия. (Доказательство этого свойства прямых s_1 и s_2 предоставляем читателю.)



Черт. 183.



Черт. 184.

Простейшим примером, иллюстрирующим наши общие теоремы, могут служить те два треугольника HBA и HAC, на которые прямоугольный треугольник ABC разбивается его высотой AH (черт. 183 и 184). Треугольники HBA и HAC собственно-подобны; треугольник HAC получается из HBA поворотом на прямой угол около двойной точки H и гомотетией (черт. 183). Треугольники HBA и ABC зеркально-подобны; треугольник ABC получается из HBA путём отражения от биссектрисы угла B и гомотетии с центром в двойной точке B (черт. 184).

ГЛАВА IX.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ.

§ 70. Общие понятия; обозначения.

Между длинами отрезков, входящих в какую-либо фигуру, могут существовать известные числовые зависимости; те из них, которые не зависят от выбора единицы длины (а только такие нас и могут интересовать), мы будем называть метрическими соотношениями. Выражая соответствующие зависимости словами, мы будем опускать слово «длина», рассматривая их как соотношения между самими отрезками.

Некоторые из таких метрических соотношений можно рассматривать как соотношения между площадями фигур; сравнить, например, теоремы 148—150, приводимые ниже, с теоремами 120—122.

Примерами метрических соотношений могут служить следующие хорошо известные соотношения в прямоугольном треугольнике.

Теорема 148. *Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.* Иначе говоря, *квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.*

Теорема 149. *Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу.* Иначе говоря, *квадрат катета прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу.*

Теорема 150. *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.*

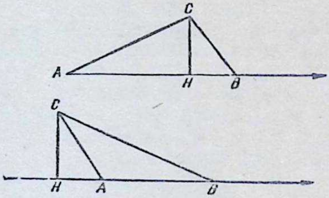
Если в прямоугольном треугольнике ABC обозначить через H проекцию вершины A прямого угла на гипотенузу (черт. 183 и 184 на стр. 245), то мы будем иметь:

$$AH^2 = BH\cdot HC; \quad AB^2 = BC\cdot BH; \quad BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Дальнейшими примерами могут служить также хорошо известные соотношения в косоугольном треугольнике.

Теорема 151. *Квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих двух сторон на проекцию на неё другой из этих сторон.*

Теорема 152. *Квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих двух сторон на проекцию на неё другой из этих сторон.*



Черт. 185.

Если обозначить через H проекцию вершины C треугольника ABC на прямую AB (черт. 185), то мы будем иметь:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AH$$

для острого угла A и

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB\cdot AH$$

для тупого угла A.

Заметим, что оба последних соотношения можно объединить в одно:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AH}, \tag{1}$$

если выбрать на прямой BC определённое положительное направление (безразлично какое) и рассматривать отрезки AB и AH как направленные. Действительно, если угол A — острый, то $AB \cdot AH = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$, а если угол A — тупой, то $AB \cdot AH = -\overline{AB} \cdot \overline{AH}$ (потому что $\overline{AB} \cdot \overline{AH} < 0$). Этим замечанием мы вскоре воспользуемся.

Наконец, приведём ещё следующие соотношения, доказываемые в школьных курсах с помощью теоремы о вписанном угле и свойств подобных треугольников:

Теорема 153. *Если через точку, лежащую внутри окружности, проведены несколько хорд, то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное (для данной точки).*

Теорема 154. *Если через точку, лежащую внутри окружности, проведены диаметр и перпендикулярная к нему хорда, то произведение отрезков диаметра равно квадрату половины хорды.*

Теорема 155. *Если через точку, лежащую вне окружности, проведены несколько секущих, то произведение каждой секущей на её внешнюю часть есть число постоянное (для данной точки).*

Теорема 156. *Если через точку, лежащую вне окружности, проведены к ней касательная и секущая, то произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.*

При этом под «секущей» понимается отрезок от данной точки до второй (более удалённой) точки её пересечения с окружностью, а под «касательной» — отрезок касательной от данной точки до точки касания.

В настоящей главе мы рассмотрим ряд других метрических соотношений между элементами треугольника и применение метрических соотношений к геометрическим построениям.

Чтобы сократить дальнейшее изложение, перечислим здесь те обозначения, которыми мы будем пользоваться в настоящей главе (не оговаривая их каждый раз особо):

$a = BC$; $b = AC$; $c = AB$ — стороны данного треугольника;

$2p = a + b + c$ — его периметр;

$p_a = p - a$; $p_b = p - b$; $p_c = p - c$;

m_a, w_a, w'_a, h_a — соответственно медиана, биссектриса внутреннего угла, биссектриса внешнего угла и высота треугольника, выходящие из вершины угла A; аналогичное значение имеют m_b, w_b, w_b', $h_b \dots$;

I и r — центр и радиус вписанной окружности;

I_a и r_a — центр и радиус вневписанной окружности, лежащей внутри угла A; аналогичное значение имеют I_b, r_b; I_c, r_c;

O и R — центр и радиус описанной окружности;

G — центр тяжести треугольника.

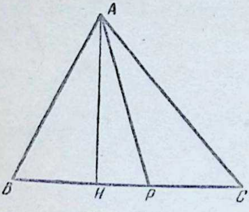
§ 71. Теорема Стюарта.

Начнём с доказательства следующего предложения.

Теорема 157 (Стюарта). *Расстояние AP между вершиной A треугольника и произвольной точкой P стороны BC определяется равенством*

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{CP}{CB} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BC^2 \cdot \frac{BP}{BC} \cdot \frac{CP}{CB} \,. \tag{2}$$

Обратим внимание на то, что квадрат каждой боковой стороны множится на отношение не примыкающего к нему отрезка основания ко всему основанию, а квадрат основания — на произведение обоих таких отношений.



Черт. 186.

Если ввести на прямой BC положительное направление (безразлично какое) и рассматривать отрезки BC, BP и CP как направленные, то формула

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} + AC^2 \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} - BC^2 \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} \tag{3}$$

оказывается справедливой как для точек P, лежащих на стороне BC, так и для точек P, лежащих на её продолжении.

Доказательство. Докажем сразу общую формулу (3), из которой теорема Стюарта (2) будет вытекать как частный случай. Обозначим через AH высоту треугольника ABC (черт. 186). Так как AH будет и высотой каждого из треугольников ABP и ACP, то мы будем иметь, в силу (1), при любом положеции точки P на прямой BC:

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2\overline{PB}\cdot\overline{PH},$$
$$AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2\overline{PC}\cdot\overline{PH}.$$

Умножим первое из этих равенств на $\overline{PC}$, второе на $\overline{BP}$ и сложим; получим:

$$\overline{PC}\cdot AB^2 + \overline{BP}\cdot AC^2 = AP^2\cdot(\overline{BP}+\overline{PC}) + \overline{BP}\cdot\overline{PC}\cdot(\overline{BP}+\overline{PC}),$$

так как

$$BP^2\cdot\overline{PC} + CP^2\cdot\overline{BP} = \overline{BP^2}\cdot\overline{PC} + \overline{PC^2}\cdot\overline{BP} = \\ = \overline{BP}\cdot\overline{PC}\cdot(\overline{BP}+\overline{PC}),$$

а последние члены уничтожаются в силу

$$\overline{PB}\cdot\overline{PH}\cdot\overline{PC} + \overline{PC}\cdot\overline{PH}\cdot\overline{BP} = \overline{PH}\cdot\overline{PC}\cdot(\overline{PB}+\overline{BP}) = 0.$$

Заменяя в полученном равенстве сумму $\overline{BP}+\overline{PC}$ равным ей отрезком $\overline{BC}$, получим (3).

Заметим ещё, что формула (3) сохраняет силу и для точки A, лежащей на самой прямой BC (так что её можно рассматривать как соотношение между четырьмя точками A, B, C и P, из которых три последние лежат на одной прямой).

Действительно, в этом случае формула (1) сохраняет силу: она вытекает просто из равенства $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$, так как точка H совпадает с A.

Применим теперь теорему Стюарта к вычислению медиан и биссектрис треугольника.

Вычисление медиан. Принимая за точку P середину стороны BC треугольника, будем иметь $AP = m_a$; $BP:BC = CP:CB = 1:2$, и формула (2) даст

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2. \tag{4}$$

Заметим, что из формулы (4) и аналогичных формул для двух других медиан вытекают следующие соотношения:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Вычисление биссектрис внутренних и внешних углов треугольника. Если AP совпадает с биссектрисой внутреннего угла треугольника, то мы будем иметь $AP = w_a$; $\overline{BP} : \overline{PC} = c : b$, откуда $\overline{BP} : \overline{PC} : \overline{BC} = c : b : (c + b)$, и формула (3) даёт после преобразований

$$w_a^2 = bc - \overline{BP} \cdot \overline{PC}$$

или, если принять во внимание направление отрезков:

$$w_a^2 = bc - BP \cdot PC.$$

Итак, *квадрат биссектрисы угла треугольника, выходящей из какой-либо вершины, равен произведению сторон, выходящих из той же вершины, без произведения отрезков, на которые эта биссектриса делит третью сторону.*

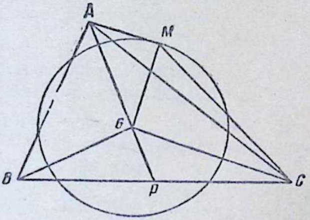
Для биссектрисы AP' внешнего угла треугольника $\overline{BP'} : \overline{P'C} = -c : b$, откуда $\overline{BP'} : \overline{P'C} : \overline{BC} = -c : b : (b - c)$, и формула (3) даёт после преобразований

$$w_a'^2 = bc - \overline{BP'} \cdot \overline{P'C}$$

или, если принять во внимание направление отрезков:

$$w_a'^2 = bc + BP' \cdot CP'.$$

Итак, *квадрат биссектрисы внешнего угла треугольника, выходящей из какой-либо вершины, равен произведению сторон, выходящих из той же вершины, сложенному с произведением тех отрезков, на которые эта биссектриса делит* (внешним образом) *третью сторону.*



Черт. 187.

Применим теперь формулы (2) и (4) к выводу одного свойства центра тяжести G треугольника. Пусть P — середина стороны BC треугольника ABC, M — произвольная точка (черт. 187). По формуле (2), применённой к треугольнику MPA и отрезку MG, будем иметь:

$$MG^2 = \frac{1}{3} MA^2 + \frac{2}{3} MP^2 - \frac{2}{9} m_a^2;$$

применяя, далее, формулу (4) к медиане MP треугольника

MBC, найдём:

$$MP^2 = \frac{1}{2}(MB^2 + MC^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

Подставляя в предыдущее равенство это значение MP^2 и определяемое формулой (4) значение m_a^2, получим:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (4a)$$

Так выражается расстояние произвольной точки от центра тяжести треугольника.

Перепишем последнее соотношение в виде

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3MG^2.$$

Сумма $MA^2 + MB^2 + MC^2$ принимает для различных точек плоскости различные значения; из последнего равенства видно, что эта сумма, вообще говоря, больше чем $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ и будет равна этой величине только при $MG = 0$, т. е. если точка M совпадает с G.

Итак, центр тяжести треугольника обладает следующим свойством.

Теорема 158. *Сумма квадратов расстояний от какой-либо точки до трёх вершин треугольника принимает наименьшее значение, если эта точка совпадает с центром тяжести треугольника.*

§ 72. Вычисление радиусов вписанной, вневписанных и описанной окружностей и высот треугольника.

Начнём с вычисления радиусов вписанной и вневписанных окружностей.

Обозначим через D, E и F (черт. 188) точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB треугольника, через D_a, E_a и F_a — точки касания вневписанной окружности I_a с прямыми BC, AC и AB; через D_b, E_b, F_b и D_c, E_c, F_c — соответствующие точки касания для окружностей I_b и I_c. В силу равенства прямоугольных треугольников AIE и AIF, AI_aE_a и AI_aF_a и т. д. имеем:

$$\left.\begin{array}{l} AE = AF;\ BF = BD;\ CD = CE; \\ AE_a = AF_a;\ BF_a = BD_a;\ CD_a = CE_a; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Отсюда находим:

$$2AE=2AF=AE+AF=(AC-CE)+(AB-BF)=$$
$$=AC+AB-(CE+BF)=AB+AC-(CD+DB)=$$
$$=AB+AC-BC=b+c-a=2p-2a=2(p-a)=2p_a;$$

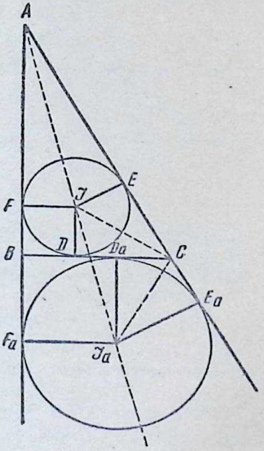
$$2AE_a=2AF_a=AE_a+AF_a=(AC+CE_a)+(AB+BF_a)=$$
$$=AC+AB+(CE_a+BF_a)=AC+AB+(CD_a+D_aB)=$$
$$=AC+AB+BC=2p;$$

$$BD_a=BF_a=AF_a-AB=p-c=p_c,$$

и аналогичные формулы для остальных отрезков (5).

Итак:

$$\left.\begin{aligned}
AE&=AF=p_a,\\
BF&=BD=p_b,\\
CD&=CE=p_c;\\
AE_a&=AF_a=p,\\
BF_a&=BD_a=p_c,\\
CD_a&=CE_a=p_b;\\
AE_b&=AF_b=p_c,\\
BF_b&=BD_b=p,\\
CD_b&=CE_b=p_a;\\
AE_c&=AF_c=p_b,\\
BF_c&=BD_c=p_a,\\
CD_c&=CE_c=p.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$



Черт. 188.

Из подобия прямоугольных треугольников AIE и AI_aE_a имеем:

$$IE:I_aE_a=AE:AE_a$$

или

$$r:r_a=p_a:p;$$

прямоугольные треугольники CIE и I_aCE_a также подобны, откуда

$$IE:CE_a=CE:I_aE_a \text{ или } r:p_b=p_c:r_a.$$

Таким образом, имеем вообще:

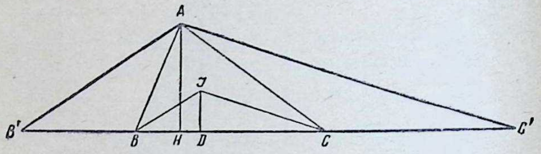
$$\left.\begin{aligned} r:r_a=p_a:p;\quad r:r_b=p_b:p;\quad r:r_c=p_c:p;\\ rr_a=p_bp_c;\quad rr_b=p_cp_a;\quad rr_c=p_ap_b.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Отсюда имеем:

$$r=\sqrt{\frac{p_ap_bp_c}{p}};\quad r_a=\sqrt{\frac{pp_bp_c}{p_a}}\qquad(8)$$

и аналогичные формулы для r_b и r_c.

Переходим к вычислению высот. Высоту $AH=h_a$ треугольника ABC (черт. 189) проще всего было бы вычислить из прямоугольного треугольника ABH. Однако это приводит, как известно из школьного курса, к длинным алгебраическим преобразованиям, если мы пожелаем получить для высоты достаточно простое по внешнему виду выражение, и потому мы изберём другой путь.



Черт. 189.

Отложим на продолжениях стороны BC отрезки $BB'=AB=c$ и $CC'=AC=b$ (черт. 189). Треугольник BAB' будет равнобедренным, откуда $\angle AB'B=\angle B'AB=\frac{1}{2}\angle ABC$, и аналогично $\angle AC'C=\frac{1}{2}\angle ACB$. Треугольники IBC и $AB'C'$ подобны, откуда $r:h_a=BC:B'C'$. Но $B'C'=B'B+BC+CC'=a+b+c=2p$, и потому $r:h_a=a:2p$. Отсюда с помощью формул (7) и (8) найдём:

$$h_a=\frac{2pr}{a}=\frac{2p_ar_a}{a}=\frac{2p_br_b}{a}=\frac{2p_cr_c}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{pp_ap_bp_c}.\qquad(9)$$

Аналогичные формулы получим, конечно, и для других высот.

Замечание. Формулы (9) непосредственно приводят к хорошо известной формуле Герона, выражающей площадь треугольника через его стороны

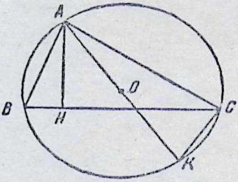
$$\text{пл. } ABC = \sqrt{pp_ap_bp_c},$$

а также и к следующим выражениям для площади треугольника:

$$\text{пл. } ABC = pr = p_ar_a = p_br_b = p_cr_c.$$

Обращаемся к вычислению радиуса описанной окружности. Пусть AH — высота треугольника ABC (черт. 190), K — точка описанной окружности, диаметрально противоположная вершине A. Прямоугольные треугольники ACK и AHB подобны, так как $\angle AKC = \angle ABH$. Из подобия этих треугольников следует, что $AK:AC = AB:AH$ или $2R:b = c:h_a$. Принимая во внимание формулы (9), будем иметь:

$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{abc}{4\sqrt{pp_ap_bp_c}}. \qquad (10)$$



Черт. 190.

Так как линейные элементы треугольника — его медианы, высоты, биссектрисы и т. д. — представляют собой функции от трёх независимых переменных a, b и c, то между ними имеется целый ряд соотношений[1]. В качестве примера укажем на следующие соотношения, которые легко получаются из выведенных формул:

$$r_ar_br_c = pr^2;$$

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r};$$

$$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_a};$$

$$\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r_a}.$$

В заключение заметим, что между радиусами вписанной, вневписанных и описанной окружностей имеет место зависимость:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R, \qquad (11)$$

---

[1] См., например, список таких соотношений, приведённый в статье Фурсенко [19] на стр. 18—26 первой части статьи.

представляющая собой интерес как пример нетривиального **линейного** метрического соотношения между элементами треугольника. Это равенство можно проверить, пользуясь выведенными формулами. Действительно, пользуясь формулами (8), мы имеем:

$$r_a+r_b+r_c-r=\frac{pp_bp_c+pp_cp_a+pp_ap_b-p_ap_bp_c}{\sqrt{pp_ap_bp_c}}=$$

$$=\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{\sqrt{pp_ap_bp_c}}.$$

Выполняя умножения, получим в числителе

$$2p^3-p^2(a+b+c)+abc=abc.$$

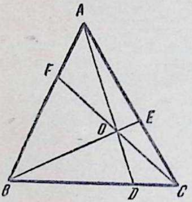
Отсюда с помощью формулы (10) и получается соотношение (11).

§ 73. Теорема Чевы.

Теоремы о пересечении в одной точке биссектрис, медиан и высот треугольника (теоремы 60, 69 и 70) допускают следующее обобщение:

Теорема 159 (Чевы). *Если прямые AD, BE и CF, которые соединяют вершины треугольника с точками D, E и F, лежащими на противолежащих сторонах или их продолжениях, проходят через одну точку O* (черт. 191), *то имеет место равенство*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1. \qquad (12)$$



Черт. 191

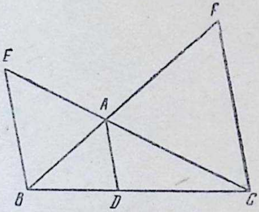
Доказательство. Применим теорему 137 (Менелая) к треугольнику ABD и секущей CF, а затем к треугольнику ADC и секущей BE. Будем иметь:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{DO}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-1;$$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}}=-1.$$

Перемножая почленно эти два равенства и принимая во внимание, что $\overline{BD} = -\overline{DB}$; $\overline{CD} = -\overline{DC}$; $\frac{\overline{DO}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = 1$, мы и получим искомое соотношение.

Замечание. Пользуясь теоремой 106 о пропорциональных отрезках, нетрудно доказать, что соотношение (12) остаётся в силе и в том случае, когда прямые AD, BE и CF, вместо того чтобы проходить через одну точку, будут параллельны между собой (черт. 192).



Черт. 192.

Теорема 160 (Чевы). *Если точки D, E и F, лежащие на сторонах или на продолжениях сторон BC, CA и AB треугольника ABC, удовлетворяют соотношению (12), то прямые AD, BE и CF проходят через одну точку или параллельны между собой.*

Доказательство. Пусть две из прямых AD, BE и CF, например BE и CF, пересекаются в некоторой точке O, и прямая AO пересекает BC в какой-либо точке D'. Тогда, в силу теоремы 159, будем иметь: $\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$. В то же время по условию теоремы имеет место и соотношение (12). Из этих двух равенств следует, что $\overline{BD}:\overline{DC} = \overline{BD'}:\overline{D'C}$. Следовательно, точка D' совпадает с D. Иначе говоря, прямая AD проходит через точку пересечения O прямых BE и CF.

Итак, если при условии (12) две из прямых AD, BE и CF проходят через одну точку, то и третья прямая проходит через ту же точку. Отсюда уже следует, что если при условии (12) две из этих трёх прямых параллельны, то и третья прямая им параллельна.

Покажем, что упомянутые в начале этого параграфа теоремы представляют собой частные случаи теоремы 160.

1) Если AD, BE и CF — медианы треугольника, то $\overline{BD}:\overline{DC} = \overline{CE}:\overline{EA} = \overline{AF}:\overline{FB} = 1$, и условие (12) выполнено.

Так как медианы треугольника, очевидно, не параллельны между собой, то они проходят через одну точку.

2) Если AD, BE и CF — биссектрисы внутренних углов треугольника, то $\overline{BD}:\overline{DC}=c:b$; $\overline{CE}:\overline{EA}=a:c$; $\overline{AF}:\overline{FB}=b:a$, и условие (12) опять выполнено. Биссектрисы треугольника, очевидно, не параллельны.

3) Если две из трёх прямых AD, BE и CF, скажем BE и CF, будут биссектрисами внешних углов треугольника, а третья прямая AD — биссектрисой внутреннего угла, то $\overline{BD}:\overline{DC}=c:b$; $\overline{CE}:\overline{EA}=-a:c$; $\overline{AF}:\overline{FB}=-b:a$, и условие (12) опять выполнено. Прямые BE и CF не параллельны, так как сумма двух внешних углов треугольника при вершинах B и C меньше $4d$.

4) Пусть AD, BE и CF — высоты треугольника. Будем предполагать, что этот треугольник — остроугольный. При этом $\overline{BD}:\overline{DC}=\operatorname{ctg} B:\operatorname{ctg} C$, так как $BD=AD\cdot\operatorname{ctg} B$ и $DC=AD\cdot\operatorname{ctg} C$. Аналогично $\overline{CE}:\overline{EA}=\operatorname{ctg} C:\operatorname{ctg} A$; $\overline{AF}:\overline{FB}=\operatorname{ctg} A:\operatorname{ctg} B$. Условие (12) выполнено.

Аналогичные соображения применимы и к тупоугольному треугольнику.

Как следствие из теоремы Чевы 160 можно получить не только уже знакомые нам предложения 1) — 4), но и ряд других аналогичных предложений. Приведём несколько из них.

5) Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника, проходят через одну точку. Эта точка называется точкой Жергонна.

Если, как и в § 72, обозначить точки касания через D, E и F, то $AF=EA$; $BD=FB$; $CE=DC$, и условие (12) опять выполнено.

6) Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанной окружности со сторонами треугольника (а не с их продолжениями), проходят через одну точку. Эта точка называется точкой Нагеля.

Если, как и в § 72, обозначить точки касания через D_a, E_b и F_c, то мы будем иметь по формулам (6) $BF_c=p_a=CE_b$; $CD_a=p_b=AF_c$; $AE_b=p_c=BD_a$. Условие (12) будет выполняться и в этом случае.

7) Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания одной из вневписанных окружностей со стороной и продолжениями сторон треугольника, проходят через одну точку.

Действительно, пользуясь равенствами (6), покажем, как и выше, что условие (12) выполняется для каждых трёх прямых AD_a, BE_a и CF_a; AD_b, BE_b и CF_b; AD_c, BE_c и CF_c.

8) Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие (внутренним образом) противолежащие стороны на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон, проходят через одну точку.

Эти прямые называются симедианами треугольника, а точка их пересечения — точкой Лемуана.

Для симедиан имеем $BD:DC=c^2:b^2$ и т. д. Условие (12) выполняется.

Замечание. В XIX веке метрические соотношения в треугольнике были предметом многочисленных исследований. При этом к замечательным точкам треугольника (§ 29) был присоединён ряд новых точек — точки Жергонна, Лемуана, Нагеля и др., к описанной, вписанной и вневписанным окружностям — ряд других окружностей, определённым образом связанных с треугольником.

Возникший, таким образом, раздел элементарной геометрии получил название геометрии треугольника[1]).

§ 74. Формула Эйлера.

Теорема 161. *Расстояние между центрами окружностей, описанной около треугольника и вписанной в него, выражается через радиусы этих окружностей следующим образом:*

$$OI^2=R^2-2Rr. \qquad (13)$$

Аналогично для описанной и вневписанной окружностей имеем:

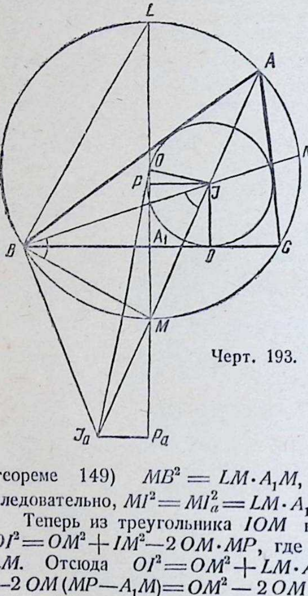
$$OI_a^2=R^2+2Rr_a. \qquad (14)$$

Соотношение (13) известно под именем формулы Эйлера.

---

[1]) См. книгу Зетеля [12].

Доказательство. Пусть M и N (черт. 193) — точки пересечения биссектрис AI и BI треугольника с описанной окружностью, иначе говоря — середины дуг BC и CA; L — точка, диаметрально противоположная M. При этом угол IBM измеряется половиной дуги MN, а угол BIM (как известно из школьного курса) — полусуммой дуг BM и AN, соответственно равных MC и CN, т. е. также половиной дуги MN. Следовательно, углы IBM и BIM равны. Так как угол IBI_a — прямой, то отсюда следует, что $\angle I_aBM = \angle BI_aM$. Из равенства этих двух пар углов следует, что $MI = MI_a = MB$. Для дальнейшего заметим, что эти равенства вполне определяют положение центров I и I_a на биссектрисе AM угла A.



Черт. 193.

Далее, из прямоугольного треугольника BLM имеем (по теореме 149) $MB^2 = LM \cdot A_1M$, где A_1 — середина BC; следовательно, $MI^2 = MI_a^2 = LM \cdot A_1M$.

Теперь из треугольника IOM находим (по теореме 151) $OI^2 = OM^2 + IM^2 - 2\,OM \cdot MP$, где P — проекция точки I на LM. Отсюда $OI^2 = OM^2 + LM \cdot A_1M - 2\,OM \cdot MP = OM^2 - 2\,OM\,(MP - A_1M) = OM^2 - 2\,OM \cdot PA_1$. Так как $OM = R$; $PA_1 = ID = r$, то мы и получили формулу (13).

Аналогично из треугольника I_aOM найдём (по теореме 152) $OI_a^2 = OM^2 + MI_a^2 + 2OM \cdot MP_a$, где P_a — проекция точки I_a на LM. Отсюда $OI_a^2 = OM^2 + LM \cdot A_1M + 2OM \cdot MP_a = OM^2 + 2OM \cdot (A_1M + MP_a) = R^2 + 2Rr_a$.

Теорему, обратную только что доказанной, сформулируем следующим образом.

Теорема 162. *Если между радиусами двух окружностей $O(R)$ и $I(r)$ и отрезком OI имеет место зависимость* (13), *то существует бесчисленное множество треугольников, для которых первая окружность будет описанной, а вторая — вписанной; за одну из вершин такого треугольника можно принять любую точку первой окружности.*

Если между радиусами двух окружностей $O(R)$ и $I_a(r_a)$ и отрезком OI имеет место зависимость (14) *и хотя бы одна точка первой окружности лежит вне второй окружности, то существует бесчисленное множество треугольников, для которых первая окружность будет описанной, а вторая вневписанной; за одну из вершин такого треугольника можно принять любую точку первой окружности, внешнюю по отношению ко второй* ¹).

Доказательство. Ограничимся первой половиной теоремы; вторая доказывается аналогично.

Пусть две окружности $O(R)$ и $I(r)$ (черт. 193) удовлетворяют условию (13). Из этого условия следует, что $R > 2r$ и $OI^2 < (R-r)^2$ или иначе $R > r$ и $OI < R - r$. Таким образом, окружность I лежит внутри окружности O (по теореме 44).

Выберем на окружности O произвольную точку A, проведём прямую AI и обозначим через M вторую точку её пересечения с окружностью O. Строим касательную BC к окружности I, перпендикулярную к OM и пересекающую прямую AM между точками I и M. Пусть B и C — точки пересечения этой касательной с окружностью O, и A_1 — точка её пересечения с OM. Из треугольника OIM имеем $OI^2 = OM^2 + IM^2 - 2OM \cdot PM$. Но по условию $OI^2 = R^2 - 2Rr = OM^2 - 2OM \cdot PA_1$. Из этих двух равенств следует, что $IM^2 = 2OM \cdot (PM - PA_1) = LM \cdot A_1M$. С другой стороны, из прямоугольного треугольника BLM опять имеем: $BM^2 = LM \cdot A_1M$, так что $IM = MB$. Отсюда вытекает, что точка I будет центром вписанной

---

¹) Различие между формулировками двух половин этой теоремы не случайно. В то время, как из соотношения (13) вытекает, что окружность I лежит внутри O, соотношение (14) может удовлетворяться и для окружности O, лежащей внутри I_a (например, при $r_a = 12R$; $OI_a = 5R$).

окружности. Наконец, окружность $I(r)$ будет вписанной окружностью, так как она имеет с вписанной окружностью общий центр I и касается стороны BC.

Итак, треугольник ABC с вершиной в произвольной точке A окружности $O(R)$ вписан в эту окружность и описан около окружности $I(r)$. Первая половина теоремы доказана.

Из теорем 161 и 162 вытекает следующее общее предложение, охватывающее как случай вписанной, так и случай вневписанной окружности благодаря использованию понятия описанного треугольника (§ 26), т. е. треугольника, у которого все стороны или продолжения сторон касаются окружности.

Если существует хотя бы один треугольник, вписанный в одну данную окружность $O(R)$ и в то же время описанный около другой данной окружности $O'(R')$, то существует бесчисленное множество таких треугольников. Между линией центров OO' обеих окружностей и их радиусами имеет место зависимость:

$$OO'^2 = R^2 \pm 2RR'.$$

Интерес этой теоремы заключается в тех обобщениях, которые она допускает.

Так, теорема сохраняет силу для четырёхугольника; в этом случае между отрезком $OO' = d$ и радиусами R и R' должно иметь место одно из двух соотношений[1]:

$$d = R \quad \text{или} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}.$$

В самой общей форме рассматриваемая теорема справедлива для любых двух кривых второго порядка и многоугольника с произвольным данным числом сторон n:

Если существует хотя бы один n-угольник, вписанный в одну данную кривую второго порядка и в то же время описанный около другой данной кривой второго порядка, то существует бесчисленное множество таких многоугольников.

Многоугольники, о которых идёт речь, называются **многоугольниками Понселе**[2].

§ 75. Геометрические места.

Выведенные в предыдущих параграфах метрические соотношения позволяют решить ряд задач на отыскание геометрических мест.

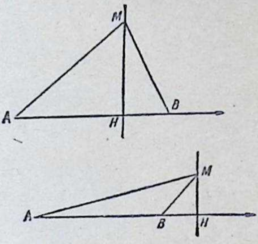
---

[1] См. Дарбу [10], стр. 191.

[2] См. Дарбу [10], стр. 187—199.

Геометрическое место VII. *Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая, перпендикулярная к прямой, соединяющей данные точки.*

Пусть A и B (черт. 194) — данные точки, и требуется найти геометрическое место точек M, для которых разность квадратов расстояний от точек A и B равна квадрату данного отрезка l 1):



Черт. 194.

$$MA^2 - MB^2 = l^2. \qquad (15)$$

Если обозначить через H проекцию точки M на прямую AB, то мы будем иметь

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2AB \cdot AH \qquad (16)$$

(так как $MA > MB$, то угол MAB — острый).

Отсюда следует в силу условия (15), что

$$AH = \frac{AB^2 + l^2}{2AB}. \qquad (17)$$

Так как угол MAB острый, то точка H лежит по ту же сторону от A, что и точка B. Таким образом, все точки искомого геометрического места имеют одну и ту же проекцию H на прямую AB.

Обратно, если проекция некоторой точки M совпадает с найденной точкой H, то имеют место равенства (16) и (17), а следовательно, и (15).

Отсюда и вытекает наше утверждение.

Геометрическое место VIII. *Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, представляет собой* (если оно существует и не обращается в одну точку) *окружность с центром в середине данного отрезка.*

Пусть требуется найти геометрическое место точек M, для которых сумма квадратов их расстояний от двух данных

---

1) Мы представляем постоянную разность квадратов в виде квадрата данного отрезка, чтобы это соотношение не зависело от выбора единицы длины (сравнить § 47).

точек A и B (черт. 195) равна квадрату данного отрезка l:

$$MA^2 + MB^2 = l^2. \tag{18}$$

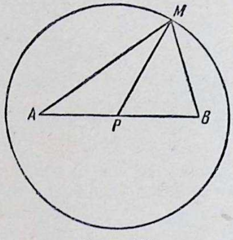
Если обозначить через P середину отрезка AB, то для любой точки M будем иметь в силу формулы (4):

$$MP^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2) - \frac{1}{4}AB^2. \tag{19}$$

Если точка M удовлетворяет условию (18), то это равенство принимает вид:

$$MP^2 = \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{4}AB^2. \tag{20}$$

Обратно, если расстояние некоторой точки M от точки P удовлетворяет условию (20), то в силу равенства (19) точка M будет обладать искомым свойством (18).



Черт. 195.

Отсюда следует, что искомое геометрическое место есть окружность, если $l^2 > \frac{1}{2}AB^2$, и обращается в точку, если $l^2 = \frac{1}{2}AB^2$; при $l^2 < \frac{1}{2}AB^2$ не существует вообще ни одной точки, удовлетворяющей условию (18).

Геометрическое место IX. *Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от трёх данных точек A, B и C постоянна, представляет собой* (если оно существует и не обращается в одну точку) *окружность с центром в центре тяжести треугольника ABC.*

Доказывается аналогично предыдущему; только вместо формулы (4) надо воспользоваться формулой (4а) (черт. 187 на стр. 251).

Геометрическое место VIII обобщается следующим образом.

Геометрическое место X. *Геометрическое место точек, для которых сумма умноженных на данные коэффициенты квадратов их расстояний от точек A и B постоянна, представляет собой* (если оно существует и не обращается в точку) *окружность или прямую.*

Пусть требуется найти геометрическое место точек M, удовлетворяющих соотношению

$$p \cdot MA^2 + q \cdot MB^2 = l^2, \tag{21}$$

где A и B — данные точки, p и q — данные коэффициенты (один из них может быть и отрицательным), l — данный отрезок.

Если $p + q = 0$, то условие (21) приводится к виду $MA^2 - MB^2 = \frac{l^2}{p} = \text{const.}$, и геометрическим местом точек M будет прямая (геометрическое место VII).

Рассмотрим теперь общий случай, когда $p + q \neq 0$.

Обозначим через P точку, которая делит отрезок AB внутренним или внешним образом в отношении, обратном отношению данных коэффициентов: $\overline{AP} : \overline{PB} = q : p$ и, следовательно,

$$\overline{AP} : \overline{PB} : \overline{AB} = q : p : (q + p).$$

При этом для любой точки M будем иметь в силу (3):

$$MP^2 = \frac{p}{p+q} \cdot MA^2 + \frac{q}{p+q} \cdot MB^2 - \frac{pq}{(p+q)^2} \cdot AB^2. \tag{22}$$

Если точка M удовлетворяет условию (21), то это равенство принимает вид

$$MP^2 = \frac{l^2}{p+q} - \frac{pq}{(p+q)^2} \cdot AB^2. \tag{23}$$

Обратно, если расстояние некоторой точки M от точки P удовлетворяет условию (23), то в силу равенства (22) точка M будет обладать искомым свойством (21).

Отсюда следует, что при $p + q \neq 0$ искомое геометрическое место есть окружность, если правая часть равенства (23) положительна, и обращается в точку, если она равна нулю; если правая часть равенства (23) отрицательна, то не существует ни одной точки M, удовлетворяющей условию (21).

Следствие. *Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек равно отношению двух данных неравных отрезков, есть окружность с центром на прямой, соединяющей две данные точки* (сравнить § 49, геометрическое место VI).

Действительно, равенство $MA : MB = m : n$ можно представить в виде $n^2 \cdot MA^2 - m^2 \cdot MB^2 = 0$. Это равенство есть частный случай соотношения (21) при $p = n^2$; $q = -m^2$; $l = 0$. Правая часть равенства (23) имеет при этом всегда положительное значение.

Укажем, наконец, что можно было бы и далее обобщить задачу и искать геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию

$$p \cdot MA^2 + q \cdot MB^2 + r \cdot MC^2 = l^2,$$

где A, B и C — данные точки; p, q и r — данные коэффициенты, l — данный отрезок. Равенство (22) позволяет свести эту задачу к тому случаю, когда даны две точки — точка P и точка C.

§ 76. Построение простейших алгебраических выражений; построение корней квадратных уравнений.

Мы знаем, что если некоторое алгебраическое соотношение

$$x = f(a, b, c, \ldots, k, l)$$

можно рассматривать как соотношение между отрезками (а не только между их длинами), то функция f должна быть однородной функцией первой степени своих аргументов, и обратно (§ 47). Рассмотрим теперь способы построения отрезков, определяемых такого рода соотношениями, для функций f некоторого определённого вида.

Начнём со следующих хорошо известных построений.

Построение 41. Построить отрезки, определяемые следующими формулами:

(a) $x = a \pm b \pm c \pm \ldots \pm k \pm l$;

(b) $x = \frac{ab}{c}$;

(c) $x = \frac{p}{q} \cdot a$,

где $a, b, c, \ldots, k, l$ — данные отрезки, p и q — данные натуральные числа.

Построение (a) понятно само собой.

Построение (b) есть построение четвёртой пропорциональной (§ 42, построение 19). Наконец, построение (c) сводится к делению отрезка на q равных частей (§ 28, построение 17).

Переходим к построению простейших иррациональных выражений.

Построение 42. Построить отрезки, определяемые формулами:

(d) $x=\sqrt{ab}$;

(e) $x=\sqrt{a^2+b^2}$;

(f) $x=\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$.

Построение (d) есть построение среднего пропорционального и выполняется проще всего с помощью теоремы о высоте или о катете прямоугольного треугольника (теоремы 148 и 149).

Построение (e) есть построение гипотенузы прямоугольного треугольника по двум катетам, построение (f) — построение катета по гипотенузе и другому катету.

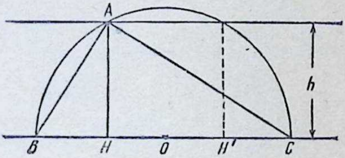
Рассмотрим теперь вопрос о построении двух отрезков, когда известны их сумма или разность и среднее пропорциональное (или, что сводится к тому же, их произведение).

Как нетрудно видеть, вопрос сводится к построению корней квадратного уравнения, коэффициенты которого известны.

Построение 43. Построить два отрезка, зная их сумму и среднее пропорциональное.

Пусть требуется построить отрезки x и y, удовлетворяющие условиям $x+y=s$; $\sqrt{xy}=h$, где s и h — данные отрезки.

Первый способ. Проще всего принять искомые отрезки x и y за проекции катетов некоторого прямоугольного треугольника на гипотенузу. Тогда гипотенуза должна равняться s, а высо опущенная на гипотенузу, — отрезку h. Отсюда и вытекает по строение искомых отрезков: на черт. 196 имеем $BC=s$; $AH=h$; $BH=x$; $HC=y$ (или $BH=y$; $HC=x$).



Черт. 196.

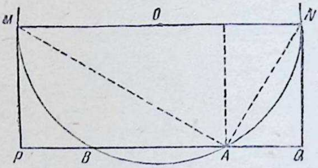
Задача имеет решение при $\frac{s}{2}\geqslant h$ и не имеет решения при $\frac{s}{2}<h$.

Второй способ. Вместо теоремы о высоте прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой 156 о касательной.

Примем искомые отрезки за секущую $PA=x$, проведённую к некоторой окружности, и за её внешнюю часть $PB=y$ (черт. 197), а данный отрезок h — за длину касательной PM к той же окружности; при этом будет удовлетворено условие $\sqrt{xy}=h$. Для простоты построения предположим, что секущая перпендикулярна к касательной. Если построить точку N, диаметрально противоположную M, и её проекцию Q на прямую PA, то мы будем иметь $PQ=PA+AQ=PA+PB=x+y=s$. Отсюда вытекает такое построение.

На перпендикулярах в концах отрезка $PQ=s$ отложим в одну и ту же сторону отрезки $PM=QN=h$. Окружность, построенная на отрезке MN как на диаметре, пересечёт отрезок PQ в таких точках A и B, что $PA=x$; $PB=y$ (или $PA=y$; $PB=x$).

Как видно из сопоставления черт. 196 и 197, второй способ не отличается существенно от первого; однако он допускает, как мы увидим далее, обобщение на другие задачи.



Черт. 197.

Замечание. Значения x и y, которые удовлетворяют условиям нашей задачи, будут очевидно, корнями квадратного уравнения

$$z^2-sz+h^2=0;\ s>0,\ \ h^2>0.$$

Из черт. 196 легко получается формула для решения такого уравнения. Если O — центр окружности, то $x, y=AO\pm OH$; но

$$AO=\frac{s}{2},\ OH=\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-h^2},\ \text{откуда}$$

$$x, y=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-h^2}.$$

Обратно, пользуясь этой формулой, можно, конечно, также построить отрезки x и y. Случаи других знаков у коэффициентов квадратного уравнения мы рассмотрим ниже.

Решение предложенной задачи связано также с некоторыми теоремами, относящимися к положительным числам.

Всякие два данных числа x и y можно принять за проекции катетов на гипотенузу. При этом $\frac{s}{2}=\frac{x+y}{2}$ будет их средним арифметическим, а $h=\sqrt{xy}$ — их средним пропорциональным. Если числа x и y даны, то рассматриваемая задача заведомо имеет решение, и потому $h \leqslant \frac{s}{2}$. Итак,

среднее пропорциональное двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического.

Пусть, далее, положительные числа x и y — переменные, имеющие постоянное произведение, а следовательно, и постоянное среднее пропорциональное $h=\sqrt{xy}$. Какие бы значения ни имели эти два переменных, мы всегда будем иметь $s=x+y \geqslant 2h$, причём если $s=2h$, то $x=y$. Итак,

сумма двух положительных чисел, имеющих постоянное произведение, будет наименьшей, когда оба числа между собой равны.

Считая заданным s и рассуждая аналогичным образом, придём к выводу, что

произведение двух положительных чисел, имеющих постоянную сумму, будет наибольшим, когда оба числа равны между собой.

Построение 44. Построить два отрезка, зная их разность и среднее пропорциональное.

Пусть x — больший, y — меньший из искомых отрезков, и $x-y=s$; $\sqrt{xy}=h$, где s и h — данные отрезки.

Первый способ. Используем опять теорему о высоте прямоугольного треугольника. Пусть в треугольнике ABC (черт. 196) проекции катетов на гипотенузу равны $HC=x$ и $BH=y$. Высота AH этого треугольника пусть равна h. Если H' — такая точка гипотенузы, что $BH=H'C$, то $HH'=s$, и центр окружности, описанной около треугольника ABC, будет серединой отрезка HH'. Отсюда вытекает такое построение.

Строим два взаимно перпендикулярных отрезка $AH=h$ и $HH'=s$. Из середины O отрезка HH' описываем окружность радиусом OA. Точки пересечения этой окружности с прямой HH определяют искомые отрезки HC и HB.

Задача всегда возможна и имеет одно решение.

Второй способ. Вместо теоремы о высоте прямоугольного треугольника можно воспользоваться тесно с ней связанной теоремой 154 о полухорде.

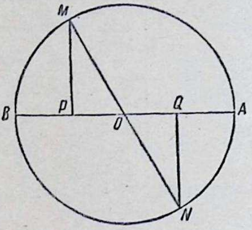
Примем искомые отрезки x и y за отрезки $PA=x$ и $PB=y$ (черт. 198), на которые диаметр некоторой окружности делится в точке P. При этом половина хорды той же окружности, проходящей через P и перпендикулярной к AB, будет равна $PM=h$. Если построить точку N, диаметрально противоположную точке M и её проекцию Q на диаметр AB, то мы будем иметь $PQ=PA-QA=$ $=PA-PB=x-y=s$. Отсюда вытекает такое построение.

На перпендикулярах в концах отрезка $PQ = s$ отложим в противоположные стороны отрезки $PM = QN = h$. Окружность, построенная на отрезке MN как на диаметре, пересечёт прямую PQ в таких точках A и B (A — точка, ближайшая к Q), что $PA = x$; $PB = y$.

Замечание. Значение x, удовлетворяющее условиям нашей задачи, будет положительным корнем уравнения

$$z^2 - sz - h^2 = 0; \quad s > 0; \quad h^2 > 0;$$

отрезок y будет равен взятому с обратным знаком отрицательному корню того же уравнения. Из черт. 196 видно, что



Черт. 198.

$$x = HC = HO + OC;$$
$$y = BH = BO - HO;$$

но

$$OB = OC = OA = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2}; HO = \frac{s}{2},$$

откуда

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2};$$
$$y = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{s}{2}.$$

Таким образом можно получить формулу для решения квадратного уравнения и в этом случае.

Случай квадратного уравнения

$$z^2 + sz \pm h^2 = 0; \quad s > 0$$

легко приводится к предыдущим подстановкой $z = -z'$.

Построение 45. Построить два отрезка, зная их сумму (или разность) и произведение.

Пусть сумма (или разность) искомых отрезков x и y равна данному отрезку s, а их произведение — произведению двух других данных отрезков a и b:

$$x + y = s; \quad xy = ab;$$

или

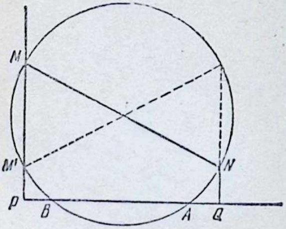
$$x - y = s; \quad xy = ab.$$

Мы задаём произведение xy в виде произведения двух данных отрезков, чтобы соотношение $xy = ab$ не зависело от выбора единицы измерения (сравнить § 47).

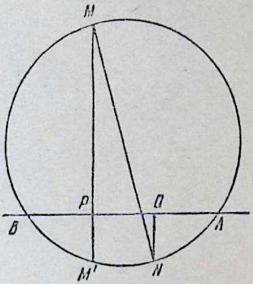
Ограничимся рассмотрением случая, когда дана сумма искомых отрезков. Обобщим на этот случай второй способ выполнения построения 42. Вместо теоремы о касательной применим теорему 155 о секущих.

Искомые отрезки $PA=x$ и $PB=y$ примем за секущую и её внешнюю часть, а данные отрезки $PM=a$ и $PM'=QN=b$ — за другую секущую и её внешнюю часть (черт. 199). При этом $PA \cdot PB = PM \cdot PM'$ или $xy=ab$ и $PQ=PA+AQ=PA+PB=$ $=x+y=s$. Отсюда вытекает такое построение.

На перпендикулярах в концах отрезка $PQ=s$ откладываем в одну и ту же сторону отрезки $PM=a$; $QN=b$. Окружность, построенная на отрезке MN как на диаметре, пересечёт отрезок PQ в таких точках A и B, что $PA=x$; $PB=y$ (или $PA=y$; $PB=x$).



Черт. 199.



Черт. 200.

В том случае, когда дана разность искомых отрезков $x-y=$ $=s$, воспользуемся вместо теоремы о секущих теоремой 153 о хордах. Мы придём к вполне аналогичному построению; только отрезки $PM=a$ и $QN=b$ придётся откладывать в противоположные стороны (черт. 200).

На исследовании решения этой задачи нет надобности останавливаться. Оно вытекает из сказанного при выполнении построений 43 и 44, если заменить там h^2 через ab. При этом h обозначает среднее пропорциональное отрезков a и b.

§ 77. Золотое сечение.

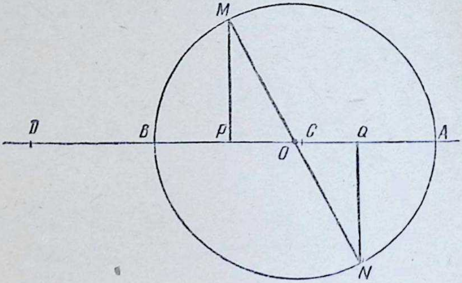
В качестве применения разобранного в предыдущем параграфе построения корней квадратного уравнения рассмотри следующие две задачи.

Построение 46. Разделить данный отрезок (внутренни образом) на две части так, чтобы одна из них была средним пропорциональным между данным отрезком и другой его частью.

Эта задача известна под именем задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении[1]) или задачи о «золотом сечении».

Пусть точка C делит данный отрезок $s=PQ$ (черт. 201) на две части так, что одна из них, а именно PC, есть среднее пропорциональное между всем отрезком PQ и другой частью CQ. В таком случае $PQ:PC=PC:CQ$.

Эта пропорция показывает, что PC будет большей частью отрезка, так как $PQ>PC$, и потому $PC>CQ$. Далее, из той же пропорции имеем $PQ:PC=(PQ+PC):(PC+CQ)$, откуда $(PQ+PC)\cdot PC=PQ\cdot(PC+CQ)=PQ^2$.



Черт. 201.

Таким образом, два отрезка $PQ+PC$ и PC обладают следующими свойствами: их разность равна $(PQ+PC)-PC=PQ$, т. е. данному отрезку, а их произведение равно $(PQ+PC)\cdot PC=PQ^2$, т. е. квадрату данного отрезка.

Итак, *бо́льшая часть данного отрезка s, разделённого в среднем и крайнем отношении, равна меньшему из двух отрезков, у которых и разность и среднее пропорциональное равны s.*

Таким путём мы непосредственно приходим к построению 44 (§ 76). Построение точки C можно, следовательно, осуществить следующим образом. На перпендикулярах в концах данного отрезка $s=PQ$ (черт. 201) отложим в противоположные стороны равные ему отрезки $PM=QN=PQ=s$.

---

[1]) Название это можно объяснить тем, что при решении этой задачи получается, очевидно, пропорция, в которой один из крайних членов равен данному отрезку, каждый из средних членов — одной из его частей, а другой крайний член — второй части данного отрезка.

Окружность, построенная на отрезке MN как на диаметре (её центром O служит середина отрезка PQ), пересечёт прямую PQ в таких точках A и B (A — точка, ближайшая к Q), что $QA = PB = PC$.

Замечание. Если обозначить через x и y отрезки $x = PQ + QC$ и $y = PC$, удовлетворяющие условию $x - y = s$; $xy = s^2$, то числа x и $-y$ будут корнями квадратного уравнения:

$$z^2 - sz - s^2 = 0.$$

Отсюда следует, что бо́льшая часть отрезка s, разделённого в среднем и крайнем отношении, выражается через s следующим образом:

$$y = s\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} = s\cdot 0{,}618\ldots$$

Построение отрезка y по этой формуле, которую мы представим так:

$$y = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2} - \frac{s}{2},$$

приводит по существу к тому же построению, что и выше (черт. 201): в прямоугольном треугольнике MOP имеем:

$$MP = s;\quad PO = \frac{s}{2};\quad OM = \sqrt{s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}.$$

Построение 47. Разделить данный отрезок внешним образом на два отрезка так, чтобы один из них был средним пропорциональным между данным отрезком и другим полученным отрезком.

Эта задача часто называется задачей о внешнем делении отрезка в среднем и крайнем отношении.

Пусть точка D (черт. 201), лежащая на продолжении данного отрезка $s = PQ$, делит его на два отрезка так, что один из них — пусть это будет PD — есть среднее пропорциональное между данным отрезком PQ и другим полученным отрезком DQ. В таком случае $PQ:PD = PD:DQ$. Эта пропорция показывает, что точка D может лежать только на продолжении данного отрезка за точку P, а не за точку Q, так как иначе мы имели бы $PQ < PD$ и в то же время $PD > DQ$, что противоречит нашей пропорции.

Далее, из той же пропорции следует, что $PD > PQ$ (так как очевидно $DQ > PD$) и что $PQ:PD = (PD - PQ):(DQ - PD)$, откуда $(PD - PQ)\cdot PD = PQ\cdot(DQ - PD) = PQ^2$. Таким образом, два отрезка PD и $PD - PQ$ обладают следующими свойствами: их разность равна $PD - (PD - PQ) = PQ$, т. е. данному отрезку s, а их произведение равно $PD\cdot(PD - DQ) = PQ^2$, т.е. квадрату данного отрезка.

Отсюда прямо следует, что искомый отрезок PD равен отрезку PA, построенному выше (черт. 201) при выполнении построения 46.

Замечание. Если точка D, лежащая на продолжении отрезка PQ за точку P, делит его внешним образом в среднем и крайнем отношении, то точка P делит отрезок DQ внутренним образом также в среднем и крайнем отношении. Действительно, это прямо вытекает из равенства $PQ:PD=PD:DQ$, которое можно переписать в виде $DQ:DP=DP:PQ$.

§ 78. Общие теоремы о построении отрезков, заданных формулами.

Комбинируя между собой построения 41 (a), (b) и (c) (§ 76), можно строить различные рациональные функции с рациональными коэффициентами от данных отрезков (конечно однородные первой степени). Следующая теорема показывает, какой степени общности мы при этом достигаем.

Теорема 163. *Любой отрезок x, который выражается через данные отрезки $a_1, a_2, \dots, a_p$ в виде однородной рациональной функции первой степени с рациональными коэффициентами, можно построить с помощью циркуля и линейки.*

Доказательство. Пусть

$$x=\frac{f(a_1, a_2, \dots, a_p)}{\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p)},$$

где f и φ — однородные многочлены степеней соответственно $m+1$ и m с рациональными коэффициентами. Преобразуем это выражение следующим образом:

$$x=\frac{a\cdot\frac{f}{a^m}}{\frac{\varphi}{a^{m-1}}},$$

где a — один из данных отрезков. Выражение $y=\frac{f}{a^m}$ представляет собой алгебраическую сумму членов вида

$$y'=\frac{p}{q}\cdot\frac{b_1 b_2 \dots b_{m+1}}{a^m},$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_{m+1}$ — данные отрезки, p и q — натуральные числа. Выражение такого вида легко построить, пользуясь построениями 41b и 41c (§ 76). Действительно, повторное применение построения четвёртой пропорциональной даёт возможность последовательно построить все отрезки

$$b_1 \cdot \frac{b_2}{a}; \quad \frac{b_1 b_2}{a} \cdot \frac{b_3}{a}; \quad \frac{b_1 b_2 b_3}{a^2} \cdot \frac{b_4}{a}; \ldots$$

Построив все отрезки y', мы можем построить и отрезок $y = \frac{f}{a^m}$ как алгебраическую сумму отрезков y'. Аналогично можно построить и отрезок $z = \frac{\varphi}{a^{m-1}}$. Искомый отрезок является четвёртым пропорциональным к отрезкам y, z и a и потому также может быть построен.

В этом параграфе мы и далее будем иметь дело с однородными рациональными функциями степени n с рациональными коэффициентами. Для краткости будем называть их просто «функциями степени n».

Пользуясь не только построениями 41, но и построениями 42, можно строить отрезки, определяемые и более сложными, а именно — иррациональными, формулами.

Так, можно построить отрезок y, определяемый формулой вида

$$y = \sqrt{F(a_1, a_2, \ldots, a_p)}, \tag{24}$$

где F — функция второй степени, а a_i — данные отрезки. При этом, конечно, предполагается, что в некоторой области положительных значений аргументов функция F принимает положительные значения.

Чтобы выполнить это построение, достаточно представить искомый отрезок в виде

$$y = \sqrt{\frac{F}{a} \cdot a},$$

где a — один из данных отрезков. Выражение $\frac{F}{a}$ будет функцией уже первой степени, и потому можно построить отрезок $y' = \frac{F}{a}$ (теорема 163). Отрезок y будет средним пропорциональным между a и y'.

Далее можно построить аналогичным образом всякое выражение вида

$$z=\varphi(a_1, \ldots, a_p;\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1q}),$$

а также всякое выражение вида

$$u=\sqrt{\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_p;\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1q})},$$

где φ и Φ — функции соответственно первой и второй степени; $a_i\ (i=1, 2, \ldots, p)$ — данные отрезки, а каждый из отрезков $a_{1j}\ (j=1, 2, \ldots, q)$ определяется формулой вида (24).

Продолжая эти рассуждения, мы будем строить всё более и более сложные выражения.

Таким путём мы получаем, очевидно, доказательство следующего предложения:

Теорема 164. *С помощью циркуля и линейки можно построить всякий отрезок, который выражается функцией первой степени от аргументов:*

$$\begin{array}{l} a_i \quad (i=1, 2, \ldots, p), \\ a_{1j}\ (j=1, 2, \ldots, q), \\ a_{2k}\ (h=1, 2, \ldots, r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mk}\ (k=1, 2, \ldots, s), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nl}\ (l=1, 2, \ldots, t). \end{array}$$

При этом a_i — *данные отрезки;* a_{1j} — *квадратные корни из функций второй степени от* a_i*;* a_{2h} — *квадратные корни из функций второй степени от* a_i *и* a_{1j}*; . . .; вообще* a_{mk} — *квадратные корни из функций второй степени от отрезков* $a_i, a_{1j}, a_{2h}, \ldots, a_{m-1,f}, \ldots$*; наконец,* a_{nl} — *квадратные корни из функций второй степени от отрезков* $a_i, a_{1j}, a_{2h}, \ldots, a_{n-1,g}$.

Под функцией первой или второй степени здесь понимается, как уже было сказано, однородная рациональная функция с рациональными коэффициентами. Предполагается также, что все упомянутые функции принимают положительные значения в некоторой области положительных значений независимых переменных a_i.

Примеры: 1) Отрезок

$$x=a\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

можно построить с помощью циркуля и линейки, так как его можно представить в виде

$$x=\sqrt{3a^2-a^2\sqrt{5}}=\sqrt{3a^2-a\sqrt{5a^2}},$$

или иначе

$$x=\sqrt{3a^2-aa_1};\ a_1=\sqrt{5a^2}.$$

2) Отрезок

$$x=\sqrt[8]{a^8+b^8}$$

также можно построить с помощью циркуля у линейки, так как его можно представить в виде

$$x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^8+b^8}}}=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^8}{a^6}}}}$$

или иначе

$$x=\sqrt{aa_2},$$

где

$$a_2=\sqrt{aa_1};\ a_1=\sqrt{a^2+\left(\frac{b^4}{a^3}\right)^2}.$$

Заметим, что отрезок a_1 проще всего было бы построить как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами a и $\frac{a^4}{b^3}$.

Замечание. Теорема 164 допускает следующую обратную теорему:

*Всякий отрезок, который можно построить с помощью циркуля и линейки, может быть выражен через данные отрезки так, как это указано в формулировке теоремы*¹).

§ 79. Задачи на деление площадей.

Рассмотрим теперь ряд задач, в которых данный треугольник или многоугольник требуется с помощью некоторой прямой разделить на две части, площади S_1 и S_2 которых относятся как два данных отрезка a и b:

$$S_1:S_2=a:b.$$

---

¹) Элементарное доказательство этой теоремы было дано Шатуновским [24].

Делящую прямую можно, очевидно, подчинить ещё добавочным условиям. Мы рассмотрим последовательно случаи, когда искомая прямая должна проходить через одну из вершин, через данную точку на одной из сторон или иметь данное направление.

При выполнении построения оказывается в большинстве случаев целесообразным вместо отношения обеих частей рассматривать отношение площади S_1 одной из частей к площади S всего многоугольника:

$$S_1:S=a:s \text{ (или } S_2:S=b:s\text{), где } s=a+b.$$

Мы будем говорить, что задание двух отрезков a и s указывает, какую часть площади требуется отсечь искомым отрезком.

К указанным задачам сводятся, в частности, задачи о делении площади треугольника или многоугольника на равные части прямыми линиями, удовлетворяющими одному из перечисленных выше условий. Действительно, разделить многоугольник на n равных частей — значит отсечь от него $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ... его площади.

Построение 48. Отсечь данную часть площади треугольника или выпуклого многоугольника прямой, проходящей через одну из вершин.

Построение 48а. Разделить площадь данного треугольника или выпуклого многоугольника на n равных частей прямыми, проходящими через одну из вершин.

Пусть искомая прямая AP (черт. 186 на стр. 249), проходящая через вершину A, отсекает данную часть площади треугольника ABC:

$$\text{пл. } ABP : \text{пл. } ABC=a:s.$$

Так как пл. ABP:пл. $ABC=BP:BC$, то и $BP:BC=a:s$. Отсюда и вытекает построение.

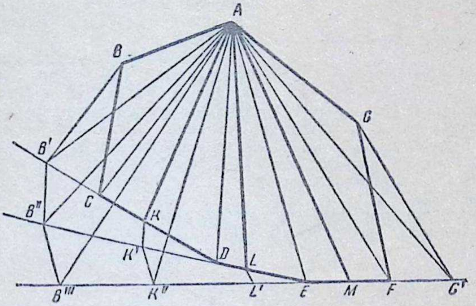
Пусть теперь прямая AK, проходящая через вершину выпуклого многоугольника $ABCDEFG$ (черт. 202), отсекает данную часть его площади. Предположим для определённости, что эта прямая пересекает сторону CD многоугольника.

Построим треугольник $AB'''G'$, равновеликий данному многоугольнику. Для этого проводим (§ 57, построение 26) $BB' \parallel AC$; $B'B'' \parallel AD$; $B''B''' \parallel AE$; $GG' \parallel AF$. Выполним над точкой K те же построения, что и над точкой B', т. е. проведём $KK' \parallel B'B''$; $K'K'' \parallel B''B'''$.

При этом наряду с равенством пл. $ABCDEFG =$ пл. $AB'''G'$ будем иметь ещё равенство пл. $ABCDE =$ пл. $AB'DE =$ пл. $AB''E =$ $=$ пл. $AB'''E$. Аналогично пл. $AKDE =$ пл. $AK'E =$ пл. $AK''E$. Отсюда пл. $ABCK =$ пл. $ABCDE -$ пл. $AKDE =$ пл. $AB'''E -$ пл. $AK''E =$ $=$ пл. $AB'''K''$.

Итак, прямая AK'' делит площадь треугольника $AB'''G'$ на те же части, на которые прямая AK делит площадь данного многоугольника.

Практически мы поступаем следующим образом. Разделим отрезок $B'''G'$ точкой K'' в данном отношении $B'''K'' : B'''G' =$ $=$ пл. $ABCK$: пл. $ABCDEFG$. Через точку K'' проводим прямую $K''K'$, параллельную AE; через точку пересечения этой последней прямой с DE проводим прямую, параллельную AD, и т. д., пока мы не получим точку K, лежащую на одной из сторон данного многоугольника (а не на её продолжении). В зависимости от положения точки K'' (или, например, L') на отрезке $B'''G'$ точка K будет лежать на той или другой стороне данного многоугольника.



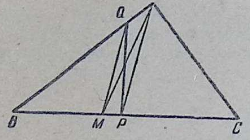
Черт. 202.

На том же чертеже 202 показано деление площади многоугольника $ABCDEFG$ на $n = 4$ равные части прямыми AK, AL и AM. При этом и отрезок $B'''G'$ приходится делить на четыре равные части $B'''K'' = K''L' = L'M = MG'$.

Построение 49. Отсечь данную часть площади треугольника или выпуклого многоугольника прямой, проходящей через заданную точку одной из сторон.

Построение 49а. Разделить площадь данного треугольника или выпуклого многоугольника на n равных частей прямыми, проходящими через заданную точку одной из сторон.

Пусть прямая PQ (черт. 203), проходящая через данную точку P стороны BC, отсекает данную часть площади треугольника ABC. Будем предполагать, что точка Q лежит на стороне AB (а не на AC). В таком случае пл. BPQ:пл. $ABC = a:s$. Построим ещё точку M, отсекающую ту же самую данную часть отрезка BC, так что $BM:BC = a:s$. Из двух последних равенств вытекает, что пл. BPQ:пл.$ABC = BM:BC$.

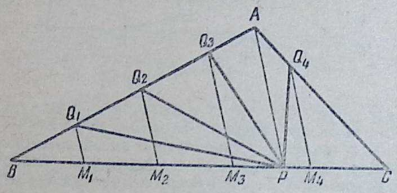


Черт. 203.

Прямая AP отсекает от треугольника ABC часть ABP, для которой пл. ABP:пл. $ABC = BP:BC$. Сравнение этой пропорции с предыдущей даёт пл. BPQ:пл. $ABP = BM:BP$.

Таким образом, задача свелась к предыдущей (построение 48): требуется отсечь данную часть площади треугольника ABP прямой, проходящей через его вершину P. Для этого надо только разделить сторону BA точкой Q в данном отношении $BQ:BA =$ пл. BPQ:пл. $ABP = BM:BP$. Из этих равенств следует, что прямая MQ параллельна AP. Поэтому точка M лежит на отрезке BP (а не на PC), если точка Q лежит на AB (а не на AC).

Такие же рассуждения применимы и в том случае, когда точка Q лежит на стороне AC. При этом вместо отношения пл. BPQ:пл. ABC будем рассматривать аналогичное отношение пл. CPQ:пл. ABC. Точка M будет лежать уже на отрезке PC.



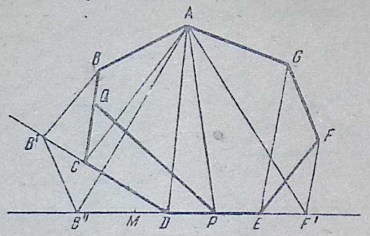
Черт. 204.

Таким образом, мы приходим к следующему построению, пригодному в обоих случаях. Строим точку M на стороне BC, удовлетворяющую условию $BM:BC = a:s$, и проводим через точку M прямую MQ, параллельную AP.

На черт. 204 показано решение по этому способу следующей задачи: разделить площадь треугольника на $n=5$ равных частей прямыми, проходящими через данную точку P одной из сторон. При этом $BM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4C$.

Пусть теперь требуется отсечь данную часть площади многоугольника $ABCDEFG$ (черт. 205) прямой PQ, проходящей через данную точку P стороны DE.

Превратим данный многоугольник в равновеликий ему треугольник $AB''F'$ и построим на стороне $B''F'$ точку M, для которой $B''M:B''F' =$ пл. $PQCD$:пл. $ABCDEFG = a:s$.

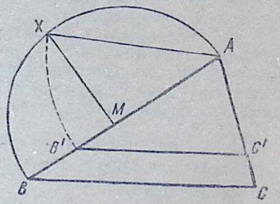


Черт. 205.

Мы будем, очевидно, иметь: пл. $ABCDP$:пл. $ABCDEFG =$ = пл. $AB''P$:пл. $AB''F' = B''P:B''F'$. Отсюда пл. $PQCD$:пл. $ABCDP = B''M:B''P$. Таким образом, мы опять пришли к построению 48: отсечь данную часть площади многоугольника $ABCDP$ (или многоугольника $AGFEP$) прямой PQ, проходящей через его вершину.

Построение 50. Отсечь данную часть площади треугольника прямой, параллельной основанию.

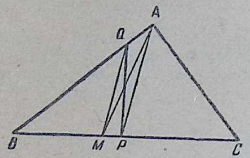
Построение 50а. Разделить площадь треугольника на n равных частей прямыми, параллельными основанию.



Черт. 206.

Пусть прямая $B'C'$, параллельная BC (черт. 206), отсекает данную часть площади треугольника ABC, так что пл. $AB'C'$: пл. $ABC = a:s$. Построим точку M, отсекающую ту же данную часть отрезка AB, так что $AM:AB = a:s$. Итак, пл. $AB'C'$: пл. $ABC = AM:AB$. Но, в силу подобия треугольников $AB'C'$ и ABC, имеем, как известно, пл. $AB'C'$: пл. $ABC = AB'^2:AB^2$. Из двух последних равенств имеем $AM:AB = AB'^2:AB^2$ или $AB' = \sqrt{AM \cdot AB}$. Таким образом, после того, как точка M построена, остаётся построить среднее пропорциональное $AX = AB'$ между AM и AB. Это построение показано на черт. 206.

Пусть прямая PQ (черт. 203), проходящая через данную точку P стороны BC, отсекает данную часть площади треугольника ABC. Будем предполагать, что точка Q лежит на стороне AB (а не на AC). В таком случае пл. BPQ:пл. $ABC = a:s$. Построим ещё точку M, отсекающую ту же самую данную часть отрезка BC, так что $BM:BC = a:s$. Из двух последних равенств вытекает, что пл. BPQ:пл. $ABC = BM:BC$.

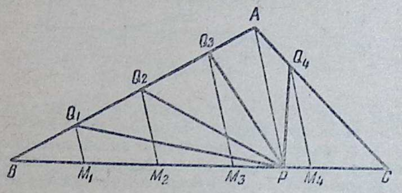


Черт. 203.

Прямая AP отсекает от треугольника ABC часть ABP, для которой пл. ABP:пл. $ABC = BP:BC$. Сравнение этой пропорции с предыдущей даёт пл. BPQ:пл. $ABP = BM:BP$.

Таким образом, задача свелась к предыдущей (построение 48): требуется отсечь данную часть площади треугольника ABP прямой, проходящей через его вершину P. Для этого надо только разделить сторону BA точкой Q в данном отношении $BQ:BA =$ пл. BPQ:пл. $ABP = BM:BP$. Из этих равенств следует, что прямая MQ параллельна AP. Поэтому точка M лежит на отрезке BP (а не на PC), если точка Q лежит на AB (а не на AC).

Такие же рассуждения применимы и в том случае, когда точка Q лежит на стороне AC. При этом вместо отношения пл. BPQ:пл. ABC будем рассматривать аналогичное отношение пл. CPQ:пл. ABC. Точка M будет лежать уже на отрезке PC.



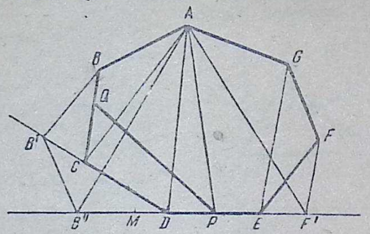
Черт. 204.

Таким образом, мы приходим к следующему построению, пригодному в обоих случаях. Строим точку M на стороне BC, удовлетворяющую условию $BM:BC = a:s$, и проводим через точку M прямую MQ, параллельную AP.

На черт. 204 показано решение по этому способу следующей задачи: разделить площадь треугольника на $n = 5$ равных частей прямыми, проходящими через данную точку P одной из сторон. При этом $BM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4C$.

Пусть теперь требуется отсечь данную часть площади многоугольника $ABCDEFG$ (черт. 205) прямой PQ, проходящей через данную точку P стороны DE.

Превратим данный многоугольник в равновеликий ему треугольник $AB''F'$ и построим на стороне $B''F'$ точку M, для которой $B''M:B''F' =$ пл. $PQCD$:пл. $ABCDEFG = a:s$.

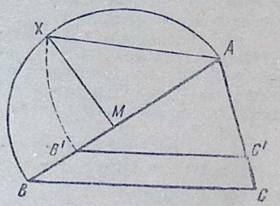


Черт. 205.

Мы будем, очевидно, иметь: пл. $ABCDP$:пл. $ABCDEFG =$ = пл. $AB''P$:пл. $AB''F' = B''P:B''F'$. Отсюда пл. $PQCD$:пл. $ABCDP =$ $= B''M:B''P$. Таким образом, мы опять пришли к построению 48: отсечь данную часть площади многоугольника $ABCDP$ (или многоугольника $AGFEP$) прямой PQ, проходящей через его вершину.

Построение 50. Отсечь данную часть площади треугольника прямой, параллельной основанию.

Построение 50а. Разделить площадь треугольника на n равных частей прямыми, параллельными основанию.



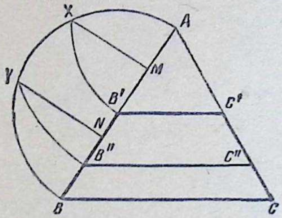
Черт. 206.

Пусть прямая $B'C'$, параллельная BC (черт. 206), отсекает данную часть площади треугольника ABC, так что пл. $AB'C'$: пл. $ABC =$ $= a:s$. Построим точку M, отсекающую ту же данную часть отрезка AB, так что $AM:AB = a:s$. Итак, пл. $AB'C'$: пл. $ABC =$ $= AM:AB$. Но, в силу подобия треугольников $AB'C'$ и ABC, имеем, как известно, пл. $AB'C'$: пл. $ABC = AB'^2:AB^2$. Из двух последних равенств имеем $AM:AB = AB'^2:AB^2$ или $AB' = \sqrt{AM \cdot AB}$. Таким образом, после того, как точка M построена, остаётся построить среднее пропорциональное $AX = AB'$ между AM и AB. Это построение показано на черт. 206.

Построение 51. Разделить площадь трапеции в данном отношении прямой, параллельной её основаниям.

Построение 51a. Разделить площадь трапеции на n равных частей прямыми, параллельными её основаниям.

Пусть прямая $B''C''$, параллельная BC (черт. 207), отсекает данную часть площади трапеции $BCC'B'$, так что отношение пл. $B''C''C'B'$: пл. $BCC'B'$ имеет данное значение.



Черт. 207.

Обозначим через A точку пересечения боковых сторон трапеции и построим на стороне AB треугольника точку M, так, что пл. $AB'C'$: пл. $ABC = AM : AB$ и, следовательно, пл. $AB'C'$: пл. $BCC'B' = AM : MB$.

Это построение (черт. 207) в известном смысле обратно второй части построения 49. Построим, далее, на отрезке MB точку N так, что пл. $B''C''C'B'$: пл. $BCC'B' = MN : MB$.

Теперь будем иметь пл. $AB'C'$: пл. $B''C''C'B'$: пл. $BCC''B'' = AM : MN : NB$ и, следовательно, пл. $AB''C''$: пл. $ABC = AN : AB$. Мы пришли к построению 49.

Из сказанного вытекает такое решение поставленной задачи. Строим на отрезке AB такую точку M, чтобы отрезок AB' был средним пропорциональным между AB и AM. Делим отрезок MB в данном отношении точкой N. Наконец, строим среднее пропорциональное $AY = AB''$ между AB и AN.

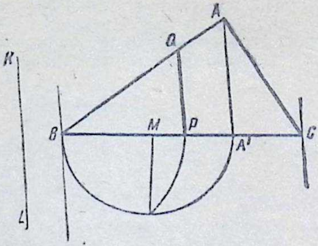
Построение 52. Отсечь данную часть площади треугольного или выпуклого многоугольника прямой, имеющей данное направление.

Построение 52a. Разделить площадь данного треугольника или выпуклого многоугольника на n равных частей прямыми, имеющими данное направление.

Пусть прямая PQ, параллельная данной прямой KL, отсекает данную часть площади треугольника ABC (черт. 208). Будем для определённости предполагать, что эта прямая пересечёт стороны AB и BC треугольника. В таком случае пл. BPQ : пл. $ABC = a:s$. Построим на стороне BC такую точку M, что $BM : BC = a:s$ и, следовательно,

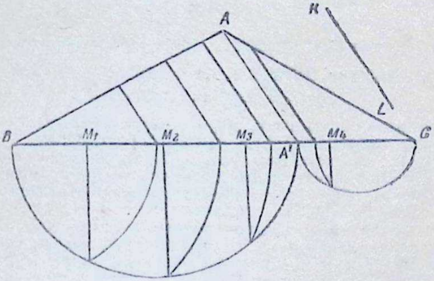
$$\text{пл. } BPQ : \text{пл. } ABC = BM : BC.$$

Проведём через все три вершины треугольника ABC прямые, параллельные KL. Из этих прямых одна и только одна пройдёт внутри треугольника; пусть это будет AA'. При этом



Черт. 208.

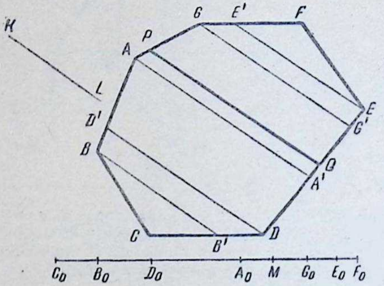
пл. ABA':пл. $ABC = BA':BC$. Из двух последних равенств имеем пл. BPQ:пл. $ABA' = BM:BA'$. Мы приходим к построению 50: отсечь данную часть площади треугольника ABA' прямой, параллельной AA'; построение прямой PQ показано на черт. 208.



Черт. 209.

На черт. 209 показано деление по этому способу площади треугольника ABC на $n = 5$ равных частей. При этом $BM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4C$.

Переходим к случаю многоугольника. Пусть прямая PQ, параллельная данной прямой KL, отсекает данную часть площади многоугольника $ABCDEFG$ (черт. 210). Проведём через все вершины данного многоугольника прямые AA', BB', ..., параллельные KL. Эти прямые разделят многоугольник на треугольники и трапеции BCB', $DD'BB'$, ... Пользуясь построением 26 (§ 57), превратим все эти треугольники и трапеции в треугольники с общим основанием. Высоты этих новых треугольников будут пропорциональны площадям исходных треугольников и трапеций. Таким путём мы



Черт. 210.

получим отрезки C_0B_0, B_0D_0, ..., E_0F_0, удовлетворяющие условиям:

$$\text{пл. } CBB' : \text{пл. } BB'DD' : \ldots : \text{пл. } EE'F : \text{пл. } ABCDEFG =$$
$$= C_0B_0 : B_0D_0 : \ldots : E_0F_0 : C_0F_0.$$

Построим теперь точку M, отсекающую данную часть отрезка C_0F_0, так что пл. $ABCDQP$:пл. $ABCDFFG = C_0M : MF_0$. Если точка M будет лежать, скажем, между A_0 и G_0, то прямая PQ будет проходить между соответствующими параллельными прямыми AA' и GG'. Далее, прямая PQ будет делить площадь трапеции $AA'G'G$ в отношении $A_0M : MG_0$.

Итак, после того, как построены точки C_0, B_0, ..., F_0 и точка M, отсекающая данную часть отрезка C_0F_0, задача сводится к построению 50 (или к построению 49, если точка M лежит на отрезке C_0B_0 или на отрезке E_0F_0).

ГЛАВА X.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ОКРУЖНОСТЕЙ.

§ 80. Степень точки относительно окружности.

Изучение различных свойств окружности занимает большое место во всех разделах элементарной геометрии. Когда говорят специально о «геометрии окружностей», то имеют в виду не теоремы об окружностях вообще, а определённую группу этих теорем, рассматривающую, главным образом, свойства семейств окружностей и различных преобразований, связанных с окружностями [1]). Мы начнём изложение этих вопросов с тех теорем о хордах и секущих, которые известны читателю из школьного курса и которые мы уже приводили в § 70 (теоремы 153—156). Эти теоремы можно объединить в одну более общую теорему.

Теорема 165. *Если через какую-либо точку M провести к окружности несколько секущих, то произведение расстояний от точки M до обеих точек пересечения каждой секущей с окружностью есть число постоянное (для данной точки); произведение сохраняет свою величину и в том случае, когда обе точки пересечения секущей с окружностью совпадают, т. е. если секущая обращается в касательную.*

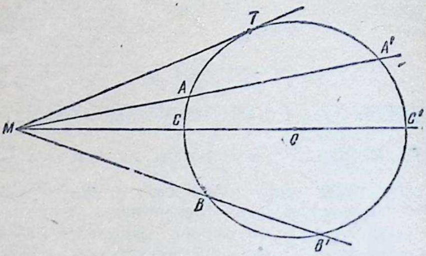
Мы имеем (черт. 211 и 212) $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC' = \ldots$ В случае внешней точки M (черт. 211) это произведение равно MT^2.

Постоянное произведение, о котором говорится в теореме 165, взятое с надлежащим знаком, называется степенью

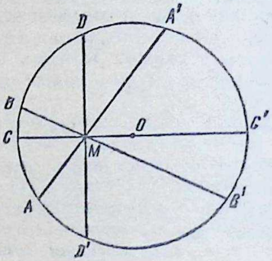
---

[1]) Более точное определение содержания понятия «геометрия окружностей» невозможно, если оставаться в рамках элементарной геометрии. См. Клейн [14].

точки M относительно окружности; степень точки относительно окружности считается положительной или отрицательной в зависимости от того, лежит ли данная точка вне или внутри окружности; степень точки, лежащей на самой окружности,



Черт. 211.



Черт. 212.

считается равной нулю (так как одна из точек пересечения секущей с окружностью совпадает с M).

Пользуясь обозначением направленных отрезков (§ 45), степень точки M относительно окружности можно представить в виде

$$\overline{MA}\cdot\overline{MA'}=\overline{MB}\cdot\overline{MB'}=\dots$$

Следствия. 1. *Степень точки M относительно окружности с центром O и радиусом r равняется во всех случаях* (по величине и по знаку) $MO^2 - r^2$.

Действительно, если прямая MO пересекает окружность в точках C и C', причём C ближе к M, чем C', то $MC = |MO - r|$; $MC' = MO + r$. Отсюда для внешней точки имеем (по абсолютной величине):

$$MA \cdot MB = (MO - r)(MO + r) = MO^2 - r^2.$$

Для внутренней точки имеем (также по абсолютной величине):

$$MA \cdot MB = (r - MO)(r + MO) = r^2 - MO^2;$$

принимая во внимание знак степени, мы и получим приведённое выше выражение для степени точки: $MO^2 - r^2$.

2. *Степень внешней точки M относительно окружности равна квадрату касательной к окружности, проведённой из точки M* (считая от точки M до точки касания).

Это вытекает из самого определения степени точки.

При рассмотрении вопросов, связанных со степенью точки относительно окружности, оказывается целесообразным рассматривать точку как окружность, радиус которой равен нулю, и называть её нулевой окружностью.

При этом *степень точки M относительно нулевой окружности* (точки) *O равна MO^2*.

§ 81. Радикальная ось.

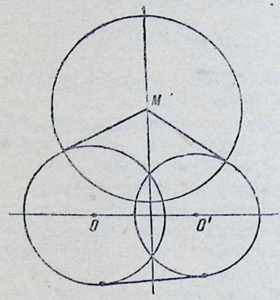
С введением понятия степени точки относительно окружности возникает вопрос об отыскании ряда геометрических мест, например, геометрического места точек, степень которых относительно данной окружности имеет данное значение (это будет окружность, концентрическая с данной), геометрических мест точек, сумма или разность степеней которых относительно двух данных окружностей имеет данное значение (эти геометрические места сводятся к геометрическим местам VII и VIII, § 75), и т. д. Из этих геометрических мест мы подробно рассмотрим одно.

Геометрическое место XI. *Геометрическое место точек, каждая из которых имеет равные степени отно-*

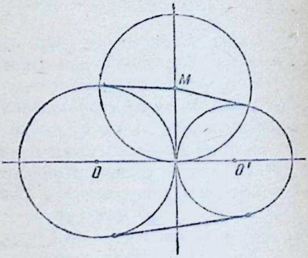
сительно двух данных неконцентрических окружностей, есть прямая линия, перпендикулярная к линии центров.

Эта прямая называется радикальной осью двух окружностей.

Пусть $O(r)$ и $O'(r')$ — данные окружности, центры O и O' которых различны. Если некоторая точка M имеет равные степени относительно обеих окружностей, то мы имеем (теорема 165, следствие 1) $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$ или $MO^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2$ и мы приходим к геометрическому месту VII (§ 75)[1].



Черт. 213.



Черт. 214.

Перечислим теперь несколько свойств радикальной оси.

1. *Если две окружности пересекаются в двух точках, то радикальная ось проходит через точки пересечения* (черт. 213).

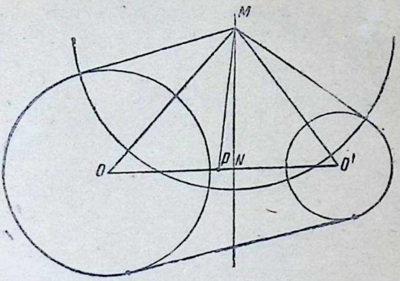
Вытекает из того, что для точки пересечения M двух окружностей условие $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$ выполняется. Отсюда же вытекает и свойство 2.

2. *Если две окружности касаются одна другой, то раикальной осью служит касательная в их общей точке* ерт. 214).

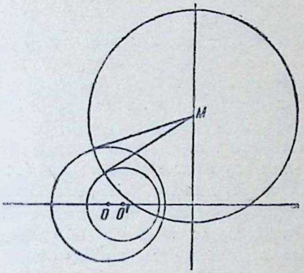
---

[1] Две концентрические окружности не имеют радикальной оси, так как равенство $MO^2 - r^2 = MO^2 - r'^2$ невозможно при $r \neq r'$.

3. *Если две окружности не имеют общих точек, то и радикальная ось не имеет с данными окружностями общих точек* (черт. 215 и 216).



Черт. 215.



Черт. 216.

Действительно, для общей точки M радикальной оси и окружности O должны иметь место равенства $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$ и $MO = r$. Отсюда $MO' = r'$, т. е. общая точка радикальной оси и одной из окружностей должна лежать и на другой окружности.

4. *Если две окружности расположены одна вне другой, то радикальная ось пересекает линию центров между обеими окружностями* (черт. 215).

Пусть P — середина отрезка OO', N — точка пересечения радикальной оси с линией центров, и обозначения выбраны так, что $r \geqslant r'$. В таком случае, в силу формулы (17) § 75, мы будем иметь

$$ON = \frac{OO'^2 + r^2 - r'^2}{2OO'} = OP + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'},$$

откуда

$$PN = \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}.$$

Так как

$$r - r' < r + r' < OO',$$

то

$$PN = \frac{(r + r')(r - r')}{2OO'} < \frac{1}{2} OO' = PO'.$$

Таким образом, точка N лежит между P и O'. В то же время радикальная ось не имеет с данными окружностями общих точек.

5. *Если две окружности с различными центрами расположены одна внутри другой, то радикальная ось проходит вне обеих окружностей* (черт. 216).

Вытекает из свойства 3.

6. *Радикальная ось двух окружностей* (если окружности не имеют общих точек) *или часть её, внешняя относительно обеих окружностей, представляет собой геометрическое место точек, из которых к двум окружностям можно провести равные касательные* (считая от данной точки до точек касания). (Черт. 213, 214, 215 и 216.)

Действительно, степень внешней точки равна квадрату касательной.

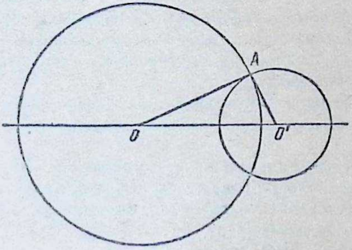
7. *Если две окружности имеют общую касательную, то их радикальная ось делит отрезок общей касательной, заключённый между точками касания, пополам* (черт. 213, 214 и 215).

Вытекает из свойства 6.

Введём теперь понятие ортогональных окружностей. Две окружности называются **ортогональными** между собой, если касательные к обеим окружностям в точке их пересечения (в какой именно — безразлично!) взаимно перпендикулярны (черт. 217).

Если две окружности ортогональны, то касательная к одной из них в точке пересечения окружностей проходит через центр другой.

Касательные к двум окружностям, проведённые из какой-либо точки, лежащей на их радикальной оси, между собой равны (свойство 6). Отсюда вытекает ещё одно свойство радикальной оси:



Черт. 217.

8. *Каждая точка радикальной оси, внешняя относительно обеих окружностей, служит центром окружности, ортогональной к обеим данным окружности* (черт. 213, 214, 215 и 216).

§ 82. Радикальный центр.

Теорема 166. *Если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, то радикальные оси этих трёх окружностей, взятых попарно, проходят через одну точку.*

Эта точка называется **радикальным центром** трёх данных окружностей.

Доказательство. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры данных окружностей; l_{23} — радикальная ось окружностей O_2 и O_3;

l_{31} — радикальная ось окружностей O_3 и O_1; l_{12} — радикальная ось окружностей O_1 и O_2 (черт. 218).

Радикальные оси l_{12} и l_{31} не могут быть параллельными, так как они перпендикулярны соответственно к сторонам O_1O_2 и O_3O_1 треугольника $O_1O_2O_3$ (сравнить теорему 57, следствие 2).

Точка пересечения I радикальных осей l_{12} и l_{31} имеет одну и ту же степень как относительно окружностей O_1 и O_2, так и относительно окружностей O_3 и O_1. Следовательно, она лежит и на радикальной оси l_{23}.

Следствия. 1. *Если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, то существует одна и только одна точка плоскости, имеющая относительно всех трёх окружностей одну и ту же степень, — радикальный центр трёх окружностей.*

Действительно, рассматриваемая точка должна лежать на всех радикальных осях данных окружностей, взятых попарно.

2. *Если радикальный центр лежит вне каждой из трёх окружностей, то он является единственной точкой плоскости, из которой к данным окружностям можно провести равные касательные* (черт. 218 и 219).

Вытекает из § 81, свойство 6.

3. *Если радикальный центр лежит вне каждой из трёх окружностей, то он является центром единственной окружности, ортогональной к трём данным* (черт. 218 и 219).

Вытекает из § 81, свойство 8.

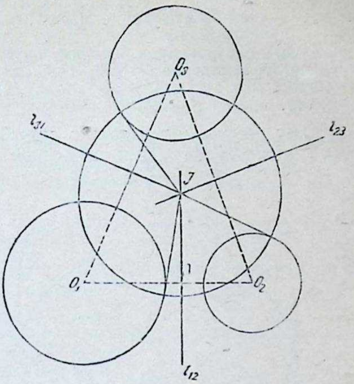
4. *Радикальный центр трёх данных окружностей лежит на каждой из этих окружностей в том и только в том случае, если окружности имеют общую точку.*

Наконец, радикальный центр трёх окружностей может лежать и внутри каждой из них (черт. 220).

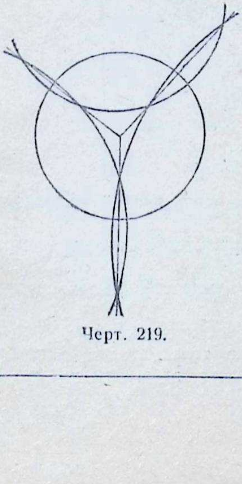
Свойства радикального центра приводят к очень простому построению радикальной оси, представляющему особый интерес в случае непересекающихся окружностей.

Построение 53. Построить радикальную ось двух данных окружностей.

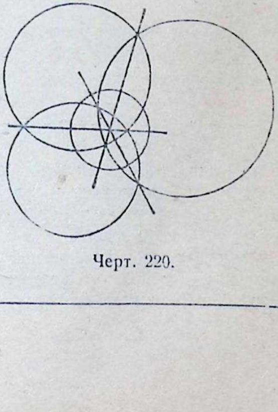
Пусть O и O' — данные окружности. Строим какую-либо окружность Γ, пересекающую в двух точках A и B окружность O и



Черт. 218.



Черт. 219.

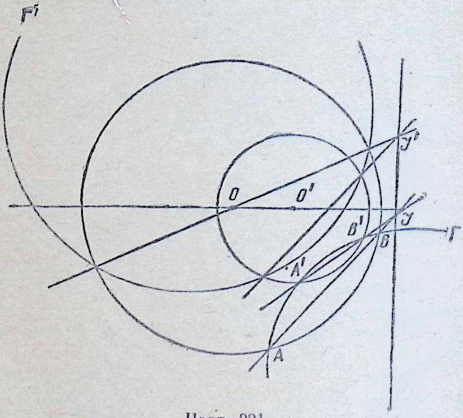


Черт. 220.

в двух точках A' и B' окружность O' (черт. 221). Точка пересечения I прямых AB и $A'B'$ будет, очевидно, радикальным центром окружностей O, O' и Γ и потому будет лежать на искомой радикальной оси.

Чтобы закончить построение, можно либо опустить из точки I перпендикуляр на линию центров OO', либо определить с помощью новой окружности Γ', пересекающей обе данные, ещё одну точку I' радикальной оси.

До сих пор мы рассматривали только случай трёх окружностей, центры которых не лежат на одной прямой. Если центры трёх окружностей лежат на одной прямой, то возможны ледующие два случая:



Черт. 221.

a) Радикальные оси трёх окружностей, взятых попарно, азличны и параллельны между собой.

b) Радикальные оси трёх окружностей, взятых попарно, совпадают между собой.

Действительно, если две из трёх радикальных осей совпадают между собой, то каждая из точек, лежащих на этих совпавших радикальных осях, имеет одну и ту же степень относительно всех трёх окружностей. Поэтому и третья радикальная ось совпадает с двумя первыми.

Последний случай, когда несколько окружностей, будучи взяты попарно, имеют общую радикальную ось, представляет особый интерес, и мы рассмотрим его сейчас подробнее.

§ 83. Пучок окружностей.

Пучком окружностей называется совокупность всех окружностей, имеющих попарно одну и ту же радикальную ось. Эту общую радикальную ось называют радикальной осью пучка.

Из этого определения пучка непосредственно вытекает ряд его свойств:

1. *Пучок окружностей вполне определяется заданием двух его окружностей или одной из его окружностей и радикальной оси.*

2. *Центры окружностей пучка лежат на одной прямой —* линии центров пучка.

3. *Если одна из окружностей пучка имеет с радикальной осью две общие точки, то пучок состоит из всех окружностей, проходящих через две общие точки.* Такой пучок называется эллиптическим.

4. *Если одна из окружностей пучка касается радикальной оси, то пучок состоит из всех окружностей, касающихся друг друга в общей точке.* Такой пучок называется параболическим.

5. *Если одна из окружностей пучка не имеет с радикальной осью общих точек, то окружности пучка не имеют ни между собою, ни с радикальной осью общих точек.* Такой пучок называется гиперболическим.

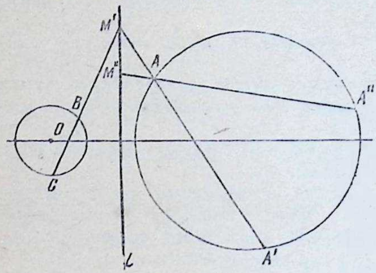
Свойства 3 и 4 вполне характеризуют эллиптические и параболические пучки. Более наглядное представление о гиперболических пучках получается из следующих двух общих теорем, справедливых для пучков всех трёх типов.

Теорема 167. *Через каждую точку, не лежащую на радикальной оси пучка, проходит одна и только одна окружность пучка.*

Доказательство. Пусть пучок окружностей задан одной из своих окружностей с центром O и радикальной осью l

(черт. 222). Найдём окружность пучка, проходящую через точку A. Соединим данную точку A с произвольной точкой M' радикальной оси и проведём через точку M' прямую, пересекающую окружность O в точках B и C. Вторая точка пересечения A' искомой окружности с прямой $M'A$ определяется вполне из равенства $\overline{M'A}\cdot\overline{M'A'}=\overline{M'B}\cdot\overline{M'C}$. Аналогично, пользуясь другой точкой M'' радикальной оси, определим и третью точку A'' искомой окружности.

Окружность, проходящая через точки A, A' и A'', принадлежит данному пучку. Действительно, радикальная ось этой окружности и окружности O проходит как через точку M', так и через точку M''.



Черт. 222.

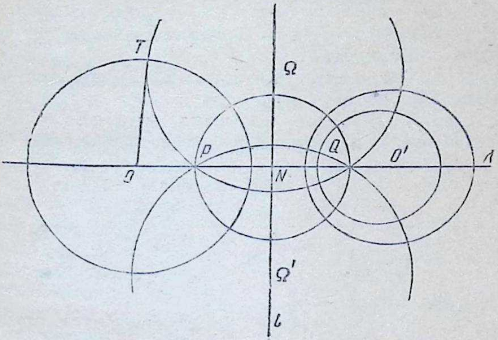
Теорема 168. *Существует бесчисленное множество окружностей, ортогональных ко всем окружностям данного пучка. Все эти окружности образуют новый пучок.*

Два таких пучка окружностей, в которых каждая окружность одного ортогональна ко всем окружностям другого, называются **сопряжёнными** пучками окружностей.

Доказательство. Пусть пучок определён окружностью и радикальной осью l. Обозначим через O' какую-либо ругую окружность пучка (черт. 223).

Каждая точка Ω радикальной оси, внешняя относительно окружности O, является, как мы видели (§ 81), центром окружности, ортогональной к O и O', а следовательно, и ко всем окружностям пучка.

Точка O имеет относительно окружности Ω степень, равную квадрату радиуса окружности O, и ту же степень относительно любой другой окружности Ω', ортогональной ко всем окружностям данного пучка. Аналогичными свойствами обладает и точка O'. Следовательно, линия центров OO' данного пучка служит радикальной осью для любых двух окружностей, ортогональных к окружностям данного пучка. Отсюда и следует, что все эти ортогональные окружности образуют пучок.



Черт. 223.

Следствия. 1. *Пучок окружностей можно определить как совокупность всех окружностей, ортогональных к двум данным (неконцентрическим) окружностям или к данной окружности и к данной прямой.*

2. *Если один из двух сопряжённых пучков — эллиптический, то другой — гиперболический, и обратно.*

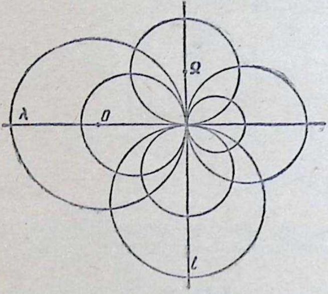
Действительно, если окружность O не пересекает радикальной оси l пучка, то точка пересечения N линии центров с радикальной осью служит центром одной из окружностей сопряжённого пучка. Эта окружность пересекает в точках P и Q радикальную ось OO' сопряжённого пучка, и поэтому этот второй пучок — эллиптический.

Обратно, если окружность Ω пересекает радикальную ось λ пучка в двух точках P и Q, и OT — радиус одной из окружностей сопряжённого пучка, то $OT^2 = OP \cdot OQ$. Так как среднее пропорциональное OT двух неравных отрезков OP и OQ меньше их среднего арифметического ON, то окружность O не пересекает радикальной оси l. Таким образом, второй пучок — гиперболический.

3. *Общие точки окружностей эллиптического пучка можно рассматривать как окружности нулевого радиуса гиперболического пучка.*

Эти точки называются предельными точками окружностей гиперболического пучка.

В соответствии с этим, предельными точками двух непересекающихся и неконцентрических окружностей называются общие точки всех ортогональных к ним окружностей.



Черт. 224.

Определение гиперболического пучка как совокупности окружностей, ортогональных к двум данным пересекающимся окружностям, даёт наглядное представление об этом типе пучков.

4. *Если один из двух сопряжённых пучков — параболический, то и другой — параболический.*

Непосредственно вытекает из черт. 224.

Замечание. Термины «гиперболический», «параболический» и «эллиптический» применяются очень часто в тех случаях, когда некоторая задача имеет соответственно два действительных решения, одно действительное решение и не имеет ни одного действительного решения [1]).

---

[1]) Как известно из курсов аналитической геометрии и проективной геометрии, гипербола имеет две действительные бесконечно удалённые точки, парабола — одну, эллипс — ни одной. Отсюда и произошли эти термины.

В данном случае гиперболический пучок окружностей содержит две окружности, радиусы которых равны нулю (предельные точки пучка); параболический пучок — одну такую окружность (общую точку касания окружностей пучка), эллиптический пучок не содержит ни одной такой окружности.

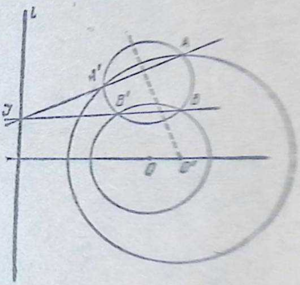
§ 84. Построения.

Рассмотрим теперь несколько основных задач на построение, связанных с понятием пучка окружностей.

Построение 54. Построить окружность, принадлежащую данному пучку и проходящую через данную точку.

Пусть A — данная точка, l — радикальная ось пучка, O — одна из его окружностей.

В случае эллиптического пучка окружностей задача сводится к построению окружности, проходящей через три данные точки (§ 83, свойство 3), в случае параболического — к построению окружности, касающейся данной прямой в данной точке и проходящей через другую данную точку A (§ 83, свойство 4).



Черт. 225.

В случае эллиптического пучка задача решается следующим образом (черт. 225). Проводим через точку A какую-либо окружность, пересекающую окружность O в точках B и B'. Через точку пересечения I прямой BB' с радикальной осью l пучка и точку A проводим прямую. Обозначим через A' вторую точку её пересечения с построенной окружностью ABB'. Окружность с центром O' на линии центров данного пучка, проходящая через точки A и A', будет искомой.

Действительно, точка I имеет относительно окружностей O и O' одну и ту же степень $IA \cdot IA' = IB \cdot IB'$, и потому прямая l, перпендикулярная к линии центров OO', будет радикальной осью окружностей O и O'.

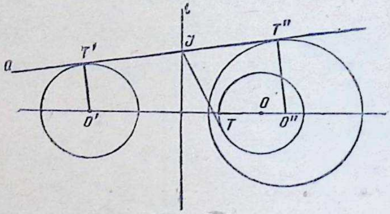
Задача всегда имеет одно решение, если точка A не лежит на радикальной оси.

Построение 55. Построить окружность, принадлежащую данному пучку и касающуюся данной прямой.

Пусть a — данная прямая, l — радикальная ось пучка, O — одна из его окружностей (черт. 226).

Если прямая a параллельна l, то точка касания T лежит на перпендикуляре, опущенном из точки O на прямую a, и задача сводится к построению 54.

Предположим поэтому, что прямая a пересекает радикальную ось l в некоторой точке I. Касательные из точки I ко всем окружностям пучка равны. Строим поэтому касательную IT из точки I к окружности O и откладываем на прямой a отрезки $IT' = IT''$, равные IT. Точки T' и T'' будут искомыми точками касания. Центрами искомых окружностей будут точки пересечения перпендикуляров, восставленных в точках T' и T'' к прямой a, с линией центров пучка.



Черт. 226.

Задача может иметь два решения, одно решение или вовсе не иметь решений.

Частным случаем только что рассмотренной является следующая задача.

Построение 37 1). Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

Первый способ решения задачи был уже рассмотрен в § 66.

Второй способ. Пусть a — данная прямая, A и B — данные точки (черт. 227).

Так как окружности, проходящие через A и B, образуют пучок, радикальной осью которого служит прямая AB, то построение 55 сводится в данном случае к следующему: на данной прямой a откладываем от точки её пересечения I с прямой AB отрезки $IT' = IT''$, равные среднему пропорциональному между IA и IB. Точки T' и T'' будут точками касания.

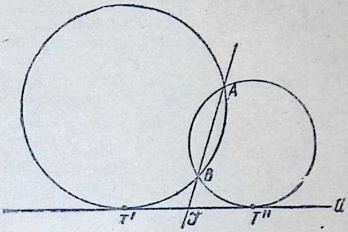
К тому же построению можно притти независимо от свойств пучка, замечая, что касательная IT' или IT'' к искомой окружно-

---

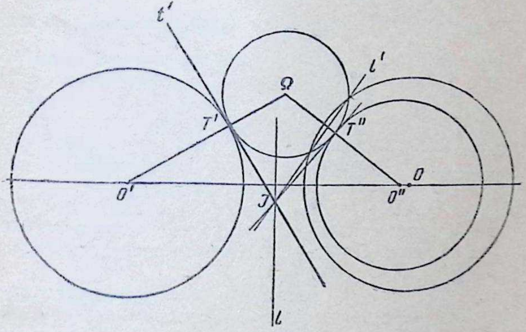
1) Рассматривая какую-либо задачу на построение вторично, ы сохраняем её прежний номер.

сти, выходящая из точки I, есть среднее пропорциональное между IA и IB (теорема 156).

Построение 56. Построить окружность, принадлежащую данному пучку и касающуюся данной окружности.



Черт. 227.



Черт. 228.

Пусть Ω — данная окружность, l — радикальная ось пучка, O — одна из его окружностей (черт. 228).

Обозначим через O' искомую окружность, через T' — точку её касания с окружностью Ω. Общая касательная t' к окружностям O' и Ω в точке T' служит радикальной осью этих окружностей, прямая l — радикальной осью окружностей O и O'. Следовательно, радикальная ось l' окружностей O и Ω проходит через точку пересечения I прямых l' и l.

Отсюда вытекает такое построение. Строим радикальную ось l' окружностей O и Ω. Из точки пересечения I прямых l и l' проводим касательные к окружности Ω. Точки прикосновения T' и T'' этих касательных и будут точками касания окружности Ω с искомыми окружностями O' и O''. Центры последних лежат на пересечении прямых $\Omega T'$ и $\Omega T''$ с линией центров пучка.

Задача может иметь два решения, одно решение или вовсе не иметь решений.

Частным случаем этой задачи является следующая.

Построение 57. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

Из сказанного вытекает такое построение. Через данные точки A и B проводим прямую l и какую-либо окружность O, пересекающую данную окружность Ω. Из точки пересечения I прямой l с радикальной осью l' окружностей O и Ω проводим к данной окружности касательные IT' и IT''.

Задача также может иметь два решения, одно решение или вовсе не иметь решений.

§ 85. Окружности, касающиеся двух данных окружностей.

При изучении окружностей, касающихся двух данных, существенную роль играет следующее понятие. Две точки A и A', лежащие соответственно на окружностях O и O', мы будем называть антигомотетическими[1]) точками этих окружностей относительно одного из их центров подобия S (§ 65), если прямая AA' проходит через этот центр подобия, но точки A и A' не будут гомотетическими относительно S.

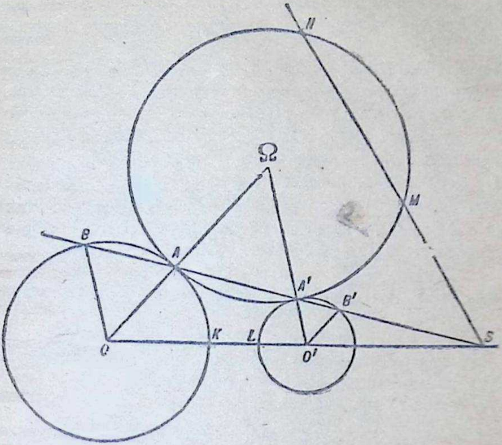
Так, на чертеже 229 точки A и A', а также B и B' будут антигомотетическими относительно внешнего центра подобия S (а на чертеже 230 — антигомотетическими относительно внутреннего центра подобия S^*).

Антигомотетические точки обладают следующим свойством.

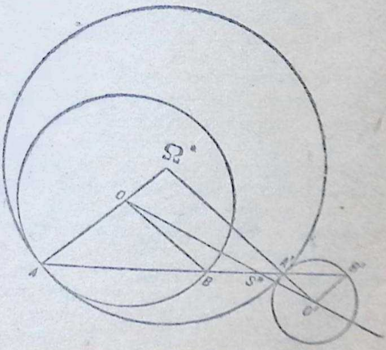
Теорема 169. *Произведение расстояний от внешнего центра подобия двух окружностей до любых двух точек,*

---

[1]) Более принятым является другое название этих точек — антигомологические. Это название, заимствованное с французского (points antihomologues), имеет смысл, когда гомотетические точки называются «гомологическими» (homologues)». В русском же языке, когда термин «гомологический» приобрёл другой смысл, сохранение названия «антигомологические» нецелесообразно.



Черт. 229.



Черт. 230.

антигомотетических относительно этого центра подобия, имеет одно и то же значение (по абсолютной величине и знаку).

Тем же свойством обладают точки, антигомотетические относительно внутреннего центра подобия.

Доказательство. Пусть A и A' — какие-либо две точки окружностей O и O', антигомотетические относительно их внешнего центра подобия S (черт. 229). Обозначим через B и B' вторые точки пересечения окружностей O и O' с прямой SA, через p и p' — степени точки S относительно окружностей O и O', через $k=\overline{SA'}:\overline{SB}=\overline{SB'}:\overline{SA}$ — коэффициент подобия этих окружностей (§ 62). Мы имеем:

$$\overline{SA}\cdot\overline{SA'}=\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\frac{\overline{SA'}}{\overline{SB}}=\overline{SA'}\cdot\overline{SB'}\cdot\frac{\overline{SA}}{\overline{SB'}}=pk=\frac{p'}{k},$$

независимо от выбора точек A и A'. Для точек, антигомотетических относительно внутреннего центра подобия (черт. 230), теорема доказывается таким же образом.

Постоянное произведение

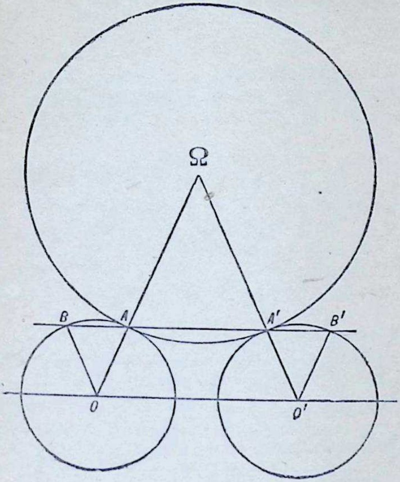
$$\overline{SA}\cdot\overline{SA'}=pk=\frac{p'}{k}=\pm\sqrt{pp'}$$

называется иногда общей степенью двух окружностей, а именно внешней или внутренней общей степенью, в зависимости от того, будет ли S внешним или внутренним центром подобия.

Теорема 170. *Всякая окружность, касающаяся двух данных, касается их в двух антигомотетических точках; если окружность касается обеих данных окружностей одинаковым образом* (т. е. обеих внешним образом или обеих внутренним образом), *то точки касания антигомотетичны относительно внешнего центра подобия, а если неодинаковым образом* (т. е. одной внешним образом, а другой внутренним), *то — относительно внутреннего центра подобия.*

Чтобы не делать особых оговорок в случае двух равных окружностей (черт. 231), когда отсутствует внешний центр подобия, будем называть две точки A и A', лежащие на равных окружностях, «антигомотетическими относительно внешнего центра подобия», если прямая AA' параллельна линии центров, а радиусы OA и $O'A'$ *не* параллельны друг другу.

Доказательство. Пусть окружность Ω (черт. 229 и 231) касается в точках A и A' двух данных окружностей O и O' одинаковым, для определённости — внешним образом. Обозначим через B и B' вторые точки пересечения прямой



Черт. 231.

AA' с окружностями O и O'. Так как $\Omega A = \Omega A'$, то $\angle OAB = \angle \Omega AA' = \angle \Omega A'A = \angle O'A'B' = \angle O'B'A'$. Следовательно, радиусы OA и $O'B'$ параллельны, т. е. точки A и B' гомотетичны, а точки A и A' — антигомотетичны относительно внешнего центра подобия.

Аналогично доказывается теорема и для окружности, касающейся обеих данных внутренним образом, а также для окружности Ω^* (черт. 230), касающейся их неодинаковым образом.

Следствие. *Внешний (внутренний) центр подобия имеет относительно всех окружностей, касающихся двух дан-*

ных одинаковым (соответственно — неодинаковым) образом, одну и ту же степень, равную внешней (соответственно — внутренней) общей степени данных окружностей.

Вытекает из сопоставления теорем 169 и 170.

Теорема 171. *Окружность, проходящая через две антигомотетические точки двух окружностей и касающаяся одной из них, касается и другой.*

Доказательство. Пусть окружность Ω (черт. 229 и 231) проходит через точки A и A' данных окружностей O и O', антигомотетические относительно внешнего центра подобия, и касается окружности O в точке A, для определённости — внешним образом.

Так как точки A и A' антигомотетичны относительно внешнего центра подобия, то $\angle OAB = \angle O'B'A' = \angle O'A'B'$. Так как окружность Ω касается окружности O в точке A, то $\angle OAB = \angle \Omega AA' = \angle \Omega A'A$. Следовательно, $\angle O'A'B' = \angle \Omega A'A$, и потому точки Ω, A' и O' лежат на одной прямой. Окружность Ω касается окружности O' в точке A'.

Таким же образом доказывается теорема и в других случаях.

Применим теперь рассмотренные свойства окружностей, касающихся двух данных, к решению следующей задачи.

Построение 58. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через данную точку.

Пусть требуется построить окружность Ω, касающуюся двух данных окружностей O и O' и проходящую через данную точку M. Рассмотрим случай, когда искомая окружность касается обеих данных одинаковым образом (черт. 229).

Обозначим через S внешний центр подобия обеих окружностей, через N — вторую точку пересечения прямой SM с искомой окружностью, через K и L — какие-либо две точки обеих окружностей, антигомотетические относительно S (например, лежащие на линии центров). Из свойств окружностей, касающихся двух данных, следует, что $\overline{SM} \cdot \overline{SN} = \overline{SK} \cdot \overline{SL}$. Это равенство позволяет построить отрезок $\overline{SN}$, а следовательно, и точку N.

После того как точка N построена, задача сводится к построению 57 (§ 84).

Окружность, касающаяся двух данных неодинаковым образом, строится таким же путём; только внешний центр подобия S заменяется внутренним.

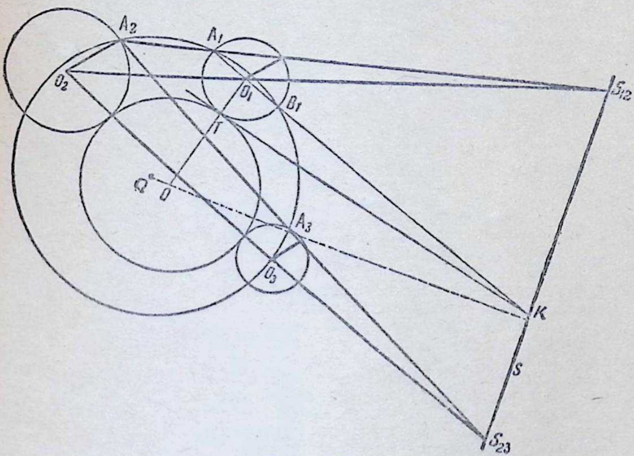
Наибольшее возможное число решений задачи равно четырём (два решения — для касания одинаковым образом и два — для касания неодинаковым образом).

§ 86. Задача Аполлония.

Рассмотренные в предыдущем параграфе свойства окружностей, касающихся двух данных, приводят к общему решению одной из классических задач элементарной геометрии, известной под именем задачи Аполлония [1]).

Построение 59. Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей (задача Аполлония).

Начнём с построения тех из искомых окружностей, которые касаются трёх данных окружностей O_1, O_2 и O_3 одинаковым образом. С этой целью рассмотрим произвольную точку A_1 окружности O_1 (черт. 232), точку A_2 окружности O_2, антигомотетическую точке A_1 относительно внешнего центра подобия S_{12}, и точку A_3 окружности O_3, антигомотетическую точке A_2 относительно внешнего центра подобия S_{23}. Степень точки S_{12} относительно искомой



Черт. 232.

---

[1]) Аполлоний (около 200 г. до н. э.) — греческий математик; задача о построении окружности, касающейся трёх данных, рассмотрена им в не дошедшем до нас сочинении «О касаниях».

окружности будет равна (по теореме 170, следствие) $\overline{S_{12}A_1}\cdot\overline{S_{12}A_2}$. Аналогично, степень точки S_{23} относительно искомой окружности будет равна $\overline{S_{23}A_2}\cdot\overline{S_{23}A_3}$. Следовательно, каждая из точек S_{12} и S_{23} будет иметь одну и ту же степень как относительно искомой окружности, так и относительно окружности $A_1A_2A_3$. Поэтому прямая $S_{12}S_{23}$ 1), т. е. ось подобия s данных окружностей, будет радикальной осью искомой окружности и окружности $A_1A_2A_3$. Иначе можно сказать, что искомая окружность принадлежит к пучку, определяемому радикальной осью s и окружностью $A_1A_2A_3$.

Из сказанного вытекает такое построение. Строим внешний центр подобия S_{12} окружностей O_1 и O_2 (черт. 232), внешний центр подобия S_{23} окружностей O_2 и O_3 и ось подобия s, на которой лежат эти центры подобия. Выбираем на окружности O_1 произвольную точку A_1 и строим точку A_2 окружности O_2, антигомотетическую точке A_1 относительно внешнего центра подобия S_{12}, а также точку A_3 окружности O_3, антигомотетическую точке A_2 относительно S_{23}. Наконец, в пучке, определяемом радикальной осью s и окружностью $A_1A_2A_3$, строим окружность, касающуюся окружности O_1 (§ 84, построение 56). С этой целью строим радикальную ось A_1B_1 окружностей O_1 и $A_1A_2A_3$ (B_1 — вторая точка пересечения этих окружностей). Из точки пересечения K прямых A_1B_1 и s проводим касательную к окружности O_1. Точка прикосновения T этой касательной и будет точкой касания окружности O_1 с искомой окружностью. Центр O последней будет лежать на прямой O_1T и на прямой, проходящей через центр Ω окружности $A_1A_2A_3$ и перпендикулярной к оси подобия s.

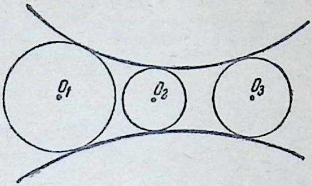
Окружность O будет проходить через точку окружности O_2, антигомотетическую точке T окружности O_1 относительно S_{12}, так как точка S_{12} имеет относительно окружностей $A_1A_2A_3$ и O одну и ту же степень. Следовательно, окружность O будет касаться (в силу теоремы 171) и окружности O_2.

Таким же путём докажем, далее, что построенная окружность O касается и третьей данной окружности O_3.

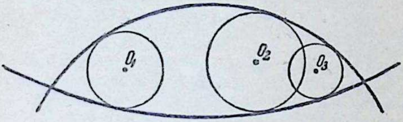
Если точка K лежит вне окружности O_1, то существует две
ок[illegible]асающиеся трёх данных одинаковым образом, если—
[illegible] — одна такая окружность, если — внутри
[illegible] кружностей не существует вовсе. В том
[illegible] две окружности, может случиться, что
[illegible] данных внешним образом (черт. 233) или,
[illegible] тся трёх данных внутренним образом (черт. 234)
[illegible] одна касается их внешним, а другая — внутрен-
[illegible] г. 235). Возможно также, что одна или обе
[illegible] сти обращаются в прямые линии: это будет
[illegible] да прямая KT будет касаться окружности O_2.

[illegible] случай, когда центры подобия S_{12} и S_{23} совпадают,
[illegible] пр[illegible] ет особого интереса, и мы его не рассматриваем.

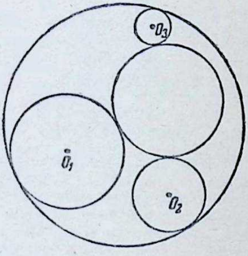
До сих пор мы рассматривали только окружности, касающиеся трёх данных одинаковым образом. Для построения окружностей, касающихся трёх данных неодинаковым образом (например, окружностей O_1 и O_2 одинаковым, а окружностей O_1 и O_3 — неодинаковым образом, и т. д.), мы должны обратиться к другим центрам подобия. Мы придём к тому же построению, что и выше, в котором один из внешних центров подобия S_{12} и S_{23} или они оба заменяются соответствующими внутренними центрами подобия S_{12}^* и S_{23}^*.



Черт. 233.



Черт. 234.



Черт. 235.

Итак, задача построения окружности, касающейся трёх данных окружностей, может иметь, самое большее, восемь решений (соответственно четырём комбинациям центров подобия S_{12} и S_{23}, S^*_{12} и S_{23}, S_{12} и S^*_{23}, S^*_{12} и S^*_{23}). Если каждые две из данных окружностей расположены одна вне другой, то все восемь решений действительно существуют, так как в этом случае оси подобия не пересекают данных окружностей. (Точки, аналогичные точке K, будут внешними для всех четырёх осей подобия.)

Если, скажем, окружность O_1 лежит внутри окружности O_3, а окружность O_2 — вне её, то задача, очевидно, не имеет ни одного решения. В других случаях взаимного расположения трёх окружностей задача Аполлония может иметь решения и в числе, меньшем восьми [1].

Другие способы решения задачи Аполлония мы рассмотрим ниже (§ 91 и § 94).

Замечание. В качестве предельных случаев разобранной в настоящем параграфе задачи Аполлония рассматриваются аналогичные задачи, в которых требование касания искомой окружности с данной окружностью заменяется требованием, чтобы искомая окружность касалась данной прямой или проходила через данную точку.

Заменяя все три данные окружности или часть из них прямыми линиями или точками, мы получим девять задач. Обозначая данные окружности буквой O с различными индексами и, аналогично, данные прямые — буквой a, а данные точки — буквой P, можно коротко записать эти задачи так:

1) $O_1O_2a_3$
2) $O_1O_2P_3$ (§ 85, построение 58);
3) $O_1a_2a_3$ (§ 66, построение 38);
4) $O_1a_2P_3$
5) $O_1P_2P_3$ (§ 84, построение 57);
6) $a_1a_2a_3$ (§ 25, построение 15а);
7) $a_1a_2P_3$ (§ 66, построение 36);
8) $a_1P_2P_3$ (§§ 66 и 84, построение 37);
9) $P_1P_2P_3$ (§ 25, построение 14).

Семь из этих девяти задач мы уже рассматривали (соответствующие ссылки даны в скобках). По поводу остальных двух задач — первой и четвёртой — ограничимся следующими замечаниями.

Подобно тому, как мы в § 85 рассмотрели свойства окружностей, касающихся двух данных окружностей, можно было бы рассмотреть окружности, касающиеся данной окружности и данной прямой. Мы получили бы аналогичные результаты. Роль

---

[1] Подробное исследование числа решений задачи Аполлония можно найти, например, в книге Адамара, [1], ч. 1, стр. 262—265. Читатель может составить себе наглядное представление о восьми решениях, если мысленно заменит на черт. 175 (на стр. 234) обе прямые линии дугами окружностей.

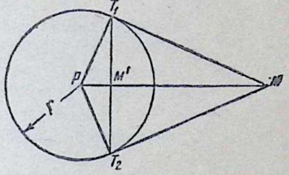
центров подобия двух окружностей будут играть при этом концы диаметра данной окружности, перпендикулярного к данной прямой.

При этом решение четвёртой задачи, т. е. построение окружности, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности и данной прямой, будет выполняться аналогично построению 53 (§ 85), а решение первой задачи, т. е. построение окружности, касающейся двух данных окружностей и данной прямой — аналогично построению 59.

§ 87. Понятие об инверсии.

Пусть дана окружность с центром P и радиусом r (черт. 236). Возьмём какую-либо точку M, для определённости — внешнюю по отношению к этой окружности. Из точки M проведём к данной окружности касательные MT_1 и MT_2 и построим точку пересечения M' хорды T_1T_2 с прямой OM. Из прямоугольного треугольника PMT_1 находим (теорема 149):

$$PM \cdot PM' = r^2. \qquad (1)$$



Черт. 236.

Если теперь, обратно, точка M', лежащая внутри окружности, дана, то можно без труда построить внешнюю точку M.

Две точки M и M', лежащие на одном луче, выходящем из центра P окружности радиуса r, называются взаимно обратными относительно этой окружности, если их расстояния от центра удовлетворяют соотношению (1). Очевидно, что точка, обратная точке окружности, с ней совпадает, и что центр окружности не имеет точки, ему обратной.

Соответствие между взаимно обратными точками или, иначе, преобразование, посредством которого из каждой точки M получается обратная ей точка M', называется инверсией относительно окружности или просто инверсией[1]. Самая окружность называется окружностью инверсии; её центр — полюсом инверсии (или цент-

---

[1] Употребляется также термин «гиперболическая инверсия». (Преобразования, которое называется «эллиптической инверсией», мы не рассматриваем.)

ром инверсии); квадрат её радиуса — степенью инверсии. Две фигуры, соответствующие друг другу в некоторой инверсии, называются взаимно обратными (или инверсными).

Из сказанного следует, что инверсия представляет собой взаимно однозначное (за исключением точки P) преобразование точек плоскости. Полюс инверсии не имеет обратной точки.

Соответствие между точками в инверсии взаимно: если точка M' соответствует точке M, то и точка M соответствует точке M'. Каждая точка окружности инверсии является двойной точкой.

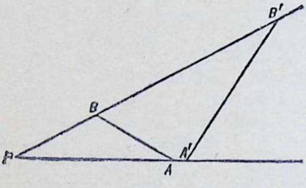
Рассмотрим теперь одно из свойств взаимно обратных точек.

Теорема 172. *Если P и h — полюс и степень инверсии; A, A' и B, B' — две пары взаимно обратных точек, и точки A и B не лежат на одной прямой с полюсом инверсии, то треугольники PAB и $PB'A'$ подобны* (соответственные вершины A и B', B и A' не обратны друг другу), *и отрезки AB и $A'B'$ связаны соотношением*

$$A'B' = \frac{h\cdot AB}{PA\cdot PB}. \qquad (4)$$

Для двух пар обратных точек A, A' и B, B', лежащих на одной прямой с полюсом инверсии, имеет место (по абсолютной величине и по знаку) *равенство*

$$\overline{A'B'} = \frac{h\cdot\overline{BA}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}. \qquad (4')$$



Черт. 237.

Доказательство. По определению инверсии имеем (черт. 237) $PA\cdot PA' = PB\cdot PB'$, откуда следует, что $PB:PA = PA':PB'$, и треугольники PAB и $PB'A'$ подобны по второму признаку подобия (теорема 88). Из подобия этих треугольников имеем $A'B':AB = PA':PB$. Заменяя здесь PA' через $\frac{h}{PA}$, мы и получим соотношение (4).

Если точки A, A', B и B' лежат с полюсом инверсии на одной прямой, то мы имеем

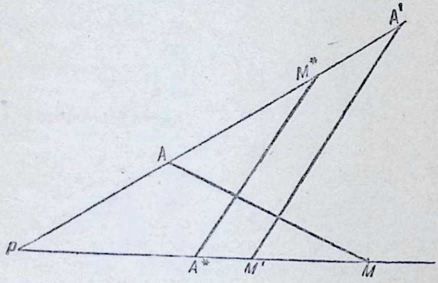
$$\overline{A'B'}=\overline{PB'}-\overline{PA'}=\frac{h}{\overline{PB}}-\frac{h}{\overline{PA}}=\frac{h\,(\overline{PA}-\overline{PB})}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}.$$

Так как $\overline{PA}-\overline{PB}=\overline{BA}$, то отсюда и следует соотношение (4′).

Доказанная теорема приводит к способу построения обратных точек, имеющему значительное преимущество перед тем, который вытекает из самого определения (черт. 236).

Построение 60. Построить точку, обратную данной точке, зная полюс инверсии и одну пару взаимно обратных точек.

Пусть P — полюс инверсии (черт. 238), A и A' — пара взаимно обратных точек, M — данная точка, M' — искомая точка, обратная M.



Черт. 238.

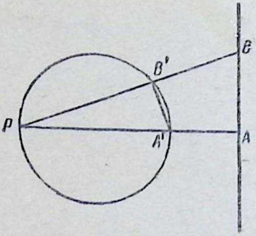
Треугольники PAM и $PM'A'$ должны быть подобны в силу только что доказанной теоремы 172. Если поэтому выбрать на луче PM такую точку A^*, что $PA=PA^*$, а на луче PA такую точку M^*, что $PM=PM^*$, то треугольники PA^*M^* и $PM'A'$ также будут подобны. Следовательно, прямая $A'M'$ должна быть параллельна M^*A^*.

Отсюда вытекает такое построение. Проведя лучи PA и PM, откладываем отрезки PA и PM соответственно на лучах PM и PA от точки P; получаем точки A^* и M^*. Если теперь через точку A' провести прямую, параллельную M^*A^*, то точка пересечения этой прямой с PM и будет искомой точкой M'.

Описанный способ построения обратных точек оказывается очень удобным с точки зрения чертёжной техники. Если при проведении прямой, параллельной M^*A^*, воспользоваться обычным образом линейкой и угольником, то нет надобности проводить на бумаге самые прямые M^*A^* и $A'M'$, а достаточно провести только прямые PA и PM и отметить на этих прямых сначала положение точек A^* и M^* (с помощью циркуля), а затем и точки M' (с помощью линейки и угольника).

§ 88. Преобразование прямых и окружностей при инверсии.

Точкам прямой линии, проходящей через полюс инверсии, соответствуют точки той же прямой. Это вытекает из самого определения инверсии. Рассмотрим теперь, как преобразуются при инверсии прямые, не проходящие через полюс, и окружности.



Черт. 239.

Теорема 173. *Прямой линии, не проходящей через полюс инверсии, соответствует окружность, проходящая через полюс инверсии.*

Доказательство. Пусть A — проекция полюса инверсии P на данную прямую (черт. 239), B — произвольная точка данной прямой, A' и B' — точки, обратные точкам A и B. Из самого определения инверсии следует, что $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ или $PA:PB = PB':PA'$. В силу этой пропорциональности треугольники PAB и $PB'A'$ подобны. Так как угол PAB — прямой, то и угол $PB'A'$ — прямой. Точка B' лежит на окружности, имеющей отрезок PA' своим диаметром.

Следствия. 1. *Окружности, проходящей через полюс инверсии, соответствует прямая, не проходящая через полюс инверсии.*

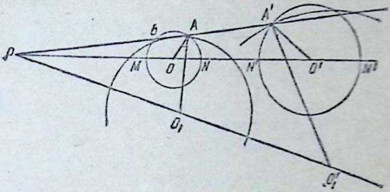
2. *Прямая линия, обратная данной окружности, проходящей через полюс, параллельна касательной к окружности в полюсе инверсии.*

Теорема 174. *Окружности, не проходящей через полюс инверсии, соответствует окружность, также не проходя-*

щая через полюс инверсии; полюс инверсии совпадает с одним из центров подобия обеих окружностей.

Доказательство. Пусть P — полюс инверсии, h — её степень; A — произвольная точка данной окружности O; A' — точка, ей обратная (черт. 240). Обозначим через B вторую точку пересечения прямой PA с данной окружностью и через p степень точки P относительно данной окружности $(p \neq 0)$.

Мы имеем, по определению инверсии, $PA \cdot PA' = h$, а по определению степени точки относительно окружности $PA \cdot PB = p$. Отсюда $PA' : PB = h : p$. При перемещении точки A по данной окружности, точка B описывает ту же окружность, а точка



Черт. 240.

A' — фигуру, гомотетическую этой окружности (с коэффициентом подобия $k = h : p$), т. е. также окружность.

Следствия. 1. *Некоторая окружность преобразуется данной инверсией сама в себя, если степень полюса инверсии относительно этой окружности равна степени инверсии.*

Действительно, при $h = p$ имеем $k = 1$, т. е. две взаимно обратные окружности совпадают.

2. *Радиус преобразованной окружности относится к радиусу данной как степень инверсии к абсолютной величине степени полюса инверсии относительно данной окружности.*

Действительно, пусть M, N и M', N' — точки пересечения данной и преобразованной окружностей с линией центров (черт. 240), r и r' — радиусы обеих окружностей. По формуле (4′) находим:

$$\frac{r'}{r}=\frac{M'N'}{MN}=\frac{h}{PM\cdot PN}.$$

Приведёнными теоремами полностью решается вопрос о преобразовании прямых и окружностей при инверсии.

Мы можем коротко сказать, что *совокупность всех прямых и окружностей преобразуется при инверсии в ту же самую совокупность.*

Из теорем 173 и 174 вытекают и способы построения соответственных прямых и окружностей.

12

Построение 61. Построить окружность или прямую, обратную данной окружности или данной прямой.

Пусть дана прямая a, не проходящая через полюс инверсии P (черт. 239). Чтобы построить соответствующую ей окружность, достаточно опустить из точки P перпендикуляр PA на данную прямую и построить точку A', обратную точке A (§ 87, построение 60). Окружность, имеющая PA' своим диаметром, и будет искомой.

Способ построения прямой, которая обратна данной окружности, проходящей через полюс инверсии, очевиден.

Пусть теперь дана окружность O, не проходящая через полюс P (черт. 240). Построим точку A', обратную какой-либо точке A окружности O (§ 87, построение 60). Если B — вторая точка пересечения прямой PA с окружностью O, то центр O' искомой окружности можно построить как точку пересечения прямой PO с прямой, проходящей через A' и параллельной BO.

§ 89. Основное свойство инверсии (сохранение углов).

Рассмотрим теперь одно из самых существенных свойств инверсии. При формулировке этого свойства мы будем пользоваться понятиями угла между двумя окружностями и угла между окружностью и прямой линией.

Углом между двумя окружностями называется любой из углов между касательными к обеим окружностям в одной из их общих точек (безразлично в какой!). Один из этих двух углов равен углу между радиусами обеих окружностей, проведёнными в их общую точку (точнее говоря, углу между двумя лучами, выходящими из общей точки и проходящими через центры обеих окружностей; ср. сноску на стр. 18).

Угол между окружностями равен нулю или двум прямым, если окружности касаются одна другой.

Углом между окружностью и прямой называется любой из углов между прямой и касательной к окружности в одной из точек её пересечения с данной прямой. Эти углы соответственно равны тем углам, которые радиус окружности, проведённый в точку пересечения с данной прямой, образует с перпендикуляром к данной прямой.

Свойство инверсии, которое мы имеем в виду, выражается следующей теоремой.

Теорема 175. *Угол между двумя окружностями равен углу между окружностями, им обратными; это свойство имеет место и в том случае, если некоторые из упоминаемых здесь окружностей заменяются прямыми линиями.*

Доказательство. Пусть окружности O и O_1 пересекаются в некоторой точке A (черт. 240). Обозначим через P полюс инверсии, через B — вторую точку пересечения прямой PA с окружностью O, через A' — точку, обратную точке A, и через O' и O_1' — центры окружностей, обратных окружностям O и O_1 (подчеркнём, что точки O' и O_1' *не* будут, вообще говоря, обратными точками O и O_1). Так как A и A' — антигомотетические точки окружностей O и O', то радиусы OB и $O'A'$ параллельны. Отсюда следует, что углы OAA' и $O'A'A$ равны и имеют противоположные направления. По аналогичной причине и углы O_1AA' и $O_1'A'A$ равны и имеют противоположные направления. Следовательно, и углы OAO_1 и $O'A'O_1'$, т. е. угол между данными окружностями и угол между окружностями, им обратными, будут равны как суммы или разности соответственно равных углов и будут иметь противоположные направления.

Аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда некоторые из рассматриваемых окружностей заменяются прямыми линиями; вместо радиусов окружностей придётся только рассматривать перпендикуляры к этим прямым.

Следствия. 1. *Две окружности или окружность и прямая, касающиеся друг друга, преобразуются при инверсии в окружности и прямые, также касающиеся друг друга (если точка касания не совпадает с полюсом инверсии).*

2. *Две окружности или окружность и прямая, пересекающиеся под прямым углом, преобразуются при инверсии в окружности или прямые, пересекающиеся также под прямым углом.*

§ 90. Применение инверсии к доказательству теорем.

Рассмотренные в предыдущих параграфах свойства инверсии дают возможность применить её к доказательству ряда теорем элементарной геометрии.

В настоящем параграфе мы приводим несколько отдельных примеров такого применения.

Геометрическое место VI[1]. *Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек равно отношению двух данных неравных отрезков, есть окружность.*

Пусть требуется найти геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию $MA:MB=a:b$, где A и B — данные точки, a и $b\ (a\neq b)$ — данные отрезки.

Примем одну из данных точек, например B, за полюс инверсии, выбрав степень последней h произвольно, и обозначим через A' и M' точки, обратные данной точке A и одной из точек M искомого геометрического места. По формуле (4) будем иметь:

$$M'A'=\frac{h\cdot MA}{MB\cdot AB}.$$

Так как $MA:MB=a:b$, то $M'A'=\dfrac{ah}{b\cdot AB}=\text{const}$. Итак, геометрическое место точек M', обратных точкам M, есть окружность, имеющая своим центром точку A'.

Посмотрим, проходит ли эта окружность через полюс инверсии? Чтобы окружность проходила через полюс инверсии B, мы должны иметь $\dfrac{ah}{b\cdot AB}=BA'$. Так как, по определению обратных точек, $AB\cdot BA'=h$, то предыдущее равенство невозможно при $a\neq b$. Итак, геометрическое место точек M', обратных точкам M, есть окружность, не проходящая через полюс инверсии.

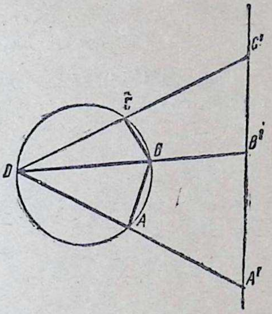
---

[1] См. § 49 и § 75 (геометрическое место X, следствие).

Следовательно, и геометрическое место точек M есть окружность.

Теорема 176 (Птоломея)[1]. *Во всяком выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ (черт. 241) — вписанный четырёхугольник. Выполним над точками A, B и C произвольную инверсию с полюсом D. Точки A', B' и C', обратные точкам A, B и C, лежат на одной прямой.



Черт. 241.

Если теперь в равенство $A'B' + B'C' = A'C'$ подставить вместо $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ их выражения по формуле (4), а именно

$$A'B' = \frac{h\cdot AB}{DA\cdot DB}; \ldots, \qquad (5)$$

и выполнить алгебраические преобразования, то мы и получим:

$$AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD.$$

Теорема 177. *Во всяком выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность, диагонали относятся одна к другой, как суммы произведений сторон, сходящихся в концах каждой диагонали.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 176. Только вместо соотношения $A'B' + B'C' = A'C'$ надо взять соотношение (теорема 157)

$$DB'^2 = DA'^2\cdot\frac{B'C'}{A'C'} + DC'^2\cdot\frac{A'B'}{A'C'} - A'B'\cdot B'C'.$$

---

[1] Клавдий Птоломей (или, в другой транскрипции, Птолемей) — крупнейший греческий астроном, живший во II в. н. э.

Заменяя здесь $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ их выражениями (5), а DA', DB' и DC' — их значениями $\frac{h}{DA}$, $\frac{h}{DB}$ и $\frac{h}{DC}$, мы и получим после несложных преобразований

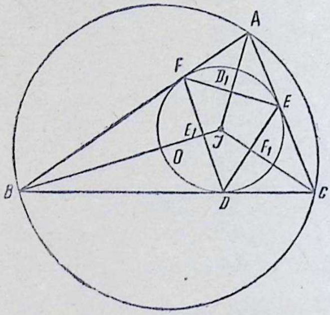
$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}.$$

Теорема 161[1]. *Расстояние между центрами окружностей, описанной около треугольника и вписанной в него, выражается через их радиусы следующим образом:*

$$OI^2=R^2-2Rr.$$

Аналогично, для вневписанной окружности имеем:

$$OI_a^2=R^2+2Rr_a.$$



Черт. 242.

Доказательство. Ограничимся случаем вписанной окружности. Пусть ABC (черт. 242) — данный треугольник; $O(R)$ и $I(r)$ — описанная и вписанная окружности; D, E и F — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника DEF.

Примем вписанную окружность за окружность инверсии. Точками, обратными точкам A, B и C, будут (по определению взаимно обратных точек, черт. 236 на стр. 311) точки D_1, E_1 и F_1 — середины отрезков EF, DF и DE. Следовательно, окружностью, обратной описанной окружности, будет окружность $D_1E_1F_1$, т. е. окружность девяти точек треугольника DEF. Радиус последней окружности будет равен $\frac{1}{2}r$ (в силу теоремы 143, следствие).

---

[1] Ср. § 74.

Степень рассматриваемой инверсии равна r^2; абсолютная величина степени полюса I инверсии относительно окружности $O(R)$ равна $R^2 - OI^2$. Применяя теорему 174, следствие 2, мы получим

$$\frac{1}{2}r : R = r^2 : (R^2 - OI^2),$$

откуда и вытекает доказываемое соотношение.

§ 91. Применение инверсии к задачам на построение.

Инверсию возможно использовать как один из методов решения геометрических задач на построение. Получающиеся при этом способы построения не всегда будут самыми простыми. Тем не менее, они обладают тем преимуществом, что получаются, исходя из некоторой общей идеи. Идея эта заключается в том, чтобы посредством выбранной надлежащим образом инверсии преобразовать как данные, так и искомые элементы в другие таким образом, чтобы предложенная задача приняла наиболее простой вид.

Мы покажем сейчас применение этого метода как на задачах, уже рассмотренных (а именно на задаче Аполлония и её частных случаях, § 86), так и на некоторых новых задачах.

Построения 37 и 57. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности или данной прямой.

Обе задачи были уже рассмотрены (§§ 66 и 84). Инверсия приводит к новому методу решения этих задач. Пусть A и B — данные точки, a — данная прямая или данная окружность. Примем точку A за полюс инверсии. Степень инверсии можно выбрать произвольно. Построим точку B', обратную точке B (построение 60), и окружность a', обратную a (построение 61). Искомая окружность преобразуется при этом в касательную к окружности a', проходящую через точку B'. Точка прикосновения T' этой касательной будет обратна точке касания T искомой окружности с прямой или окружностью a. Поэтому точка T лежит на прямой AT'.

Построение можно несколько упростить путём целесообразного выбора степени инверсии, если a — окружность. За степень инверсии можно принять степень точки A относительно a. При этом окружность a' будет совпадать с a, и построение принимает следующий вид. Строим точку B', обратную точке B. Из точки B' проводим касательные к данной окружности. Если T' — точка прикосновения одной из этих касательных, то вторая точка пересечения T прямой AT' с окружностью a будет искомой точкой касания.

Построения 36 и 58. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых или двух данных окружностей.

Обе задачи были уже рассмотрены (§§ 66 и 85). С помощью инверсии все эти задачи решаются следующим образом. Пусть A — данная точка, a и b — данные прямые или окружности. Примем точку A за полюс инверсии, степень которой выберем произвольно. Построим окружности a' и b', обратные a и b. Искомая окружность преобразуется при этом в общую касательную окружностей a' и b'. Точка прикосновения T' этой общей касательной, например, к окружности a', будет обратна точке касания T искомой окружности с окружностью a. Поэтому точка T лежит на прямой AT'.

Построение можно опять несколько упростить путём целесообразного выбора степени инверсии, если a (или b) — окружность. За степень инверсии можно принять степень точки A относительно a. При этом окружность a' совпадёт с a, и остаётся только построить окружность b', обратную b, а затем — общие касательные к окружностям a и b'.

Построение 59 (задача Аполлония). Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

Эта задача была уже рассмотрена (§ 86). Инверсия позволяет в некоторых случаях свести её к более простым задачам.

Если три данные окружности имеют общую точку P, то инверсия с полюсом P преобразует их в прямые линии, и мы приходим к построению 15а (§ 25). Построив окружности, касающиеся трёх прямых, мы строим окружности, им обратные.

Если две из данных окружностей имеют общую точку P, то инверсия с полюсом P преобразует их в прямые линии и мы приходим к построению 38 (§ 66)[1].

Построение 62. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность или прямую под данным углом.

Пусть требуется построить окружность x, проходящую через две данные точки A и B и пересекающую данную окружность (или прямую) a под данным углом α. При этом под углом между двумя окружностями будем понимать (§ 89) один из углов между касательными к обеим окружностям в их общей точке; аналогично, под углом между окружностью и прямой будем понимать один из углов между данной прямой и касательной к окружности в их общей точке.

Примем точку A за полюс инверсии и построим точку B' обратную точке B. Искомая окружность x обратится в прямую x',

---

[1] Третий способ решения задачи Аполлония будет рассмотрен ниже (§ 94).

пересекающую под углом α окружность a', обратную a. Таким образом, мы приходим к следующей задаче: построить прямую x', проходящую через точку B' и пересекающую данную окружность a' под данным углом α.

Так как все прямые, пересекающие окружность a' под углом α, касаются одной и той же окружности, концентрической с a', то последняя задача решается весьма просто. Точки пересечения искомой окружности x с a будут обратны точкам пересечения прямой x' с окружностью a'.

Построение можно упростить путём надлежащего выбора степени инверсии, если дана окружность (а не прямая) a. В этом случае за степень инверсии проще всего принять степень точки A относительно a; при этом окружность a' будет совпадать с a.

Наибольшее число решений — два.

Построение 63. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности (или данную окружность и данную прямую или две данные прямые) соответственно под углами α и β.

Пусть требуется построить окружность x, проходящую через данную точку A и пересекающую данную окружность (или прямую) a под углом α, а другую данную окружность (или прямую) b — под углом β. Угол между двумя окружностями будем понимать так же, как и при выполнении построения 62.

Примем точку A за полюс инверсии. Искомая окружность x обратится в прямую x', пересекающую окружность a', обратную a, под углом α, а окружность b', обратную b, — под углом β. Таким образом, мы приходим к следующей задаче: построить прямую, пересекающую две данные окружности соответственно под данными углами. Так как все прямые, пересекающие данную окружность под данным углом, касаются одной и той же окружности, концентрической с данной, то последняя задача сводится к построению общих касательных к двум окружностям.

Построение опять можно упростить (как и построение 62) путём надлежащего выбора степени инверсии, если среди данных есть хотя бы одна окружность.

Наибольшее число решений — четыре.

Замечание. Построения 62 и 63 представляют собой предельные случаи следующей общей задачи, известной под именем задачи Штейнера[1]):

Построить окружность, пересекающую три данные окружности соответственно под данными углами.

Рассмотрение общего случая задачи Штейнера выходит из рамок настоящей книги.

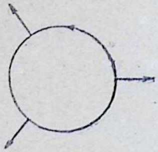
---

[1]) Штейнер (Steiner) Якоб, 1796—1863, один из крупнейших геометров XIX века. См. вступительную статью Синцова к книге Штейнера [26], стр. 3 — 12.

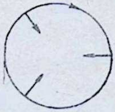
§ 92. Направленные окружности.

В настоящем и в следующих параграфах мы будем рассматривать такие свойства окружностей, которые требуют для своей точной формулировки выбора на рассматриваемых окружностях определённого направления.

Окружность, на которой задано определённое направление, называется направленной окружностью. На чертеже заданное на окружности направление отмечается стрелочкой (черт. 243 и 244). При рассмотрении направленных окружностей приходится и прямые линии рассматривать как направленные (§ 8).



Черт. 243.



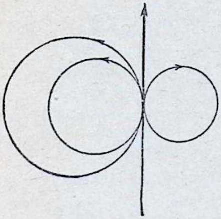
Черт. 244.

С принципиальной точки зрения рассмотрение направленных прямых и окружностей не представляет никаких новых трудностей. О выборе направления на прямой говорилось в § 8. Выбор направления на окружности сводится к выбору одного из двух возможных направлений углов при её центре (§ 8). При этом о любых двух направленных окружностях можно сказать, направлены ли они одинаково или противоположно: сравнение направлений возможно для любых двух направленных окружностей. В случае направленных прямых линий сравнение направлений возможно лишь для параллельных прямых (§ 20).

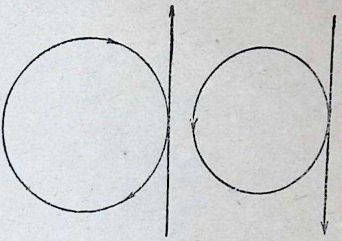
За положительное направление для окружностей примем, как это обычно делается, направление против часовой стрелки (черт. 243); направление по часовой стрелке будем считать отрицательным (черт. 244).

Радиусу направленной окружности естественно приписывать знак: мы будем считать радиусы положительно (отрицательно) направленных окружностей положительными (соответственно отрицательными). Точки мы будем — там, где это уместно по характеру вопроса, — считать направленными окружностями нулевого радиуса.

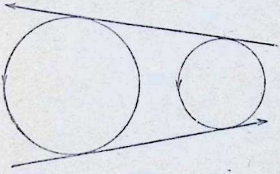
Будем говорить, что направленная окружность касается направленной прямой только в том случае, если направление на касательной совпадает с направлением на окружности вблизи точки касания (черт. 245), в случаях же, изображённых на чертежах 246, направленная прямая не считается касательной к направленной окружности.



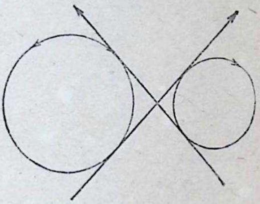
Черт. 245.



Черт. 246.



Черт. 247.



Черт. 248.

Две направленные окружности имеют самое большее две направленных общих касательных; если они направлены одинаково (противоположно), то эти общие касательные будут внешними (соответственно внутренними) общими касательными (теорема 141; черт. 247 и 248).

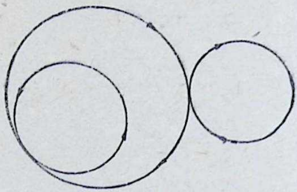
Точка пересечения общих касательных к двум одинаково (противоположно) направленным окружностям совпадает с их внешним (соответственно внутренним) центром подобия.

Аналогично, две направленные окружности касаются одна другой в случаях, изображённых на чертеже 245, и не считаются касающимися одна другой в случаях, изображённых на чертеже 249.

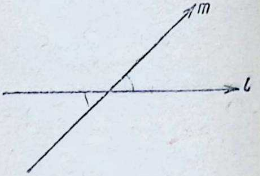
Расстояние между центрами и радиусы (рассматриваемые по абсолютной величине и по знаку) двух направленных окружностей, касающихся одна другой, связаны зависимостью $OO' = |r - r'|$.

При этом точку (как окружность нулевого радиуса) и окружность мы должны считать касающимися одна другой, если точка лежит на окружности.

Две направленные прямые будем считать параллельными, если они не только параллельны, но и одинаково направлены.



Черт. 249.



Черт. 250.

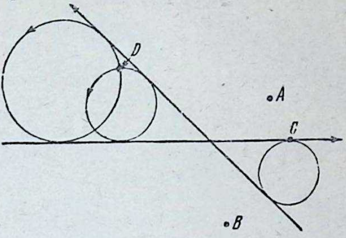
В то время как две ненаправленные прямые образуют при своём пересечении 4 угла, в случае двух направленных прямых l и m можно говорить об одном определённом угле $\angle lm$ между направленными прямыми (черт. 250).

Биссектрисой этого вполне определённого угла мы пользовались уже при доказательствах теорем 80 и 147.

Посмотрим теперь, как видоизменятся некоторые из рассмотренных ранее задач на построение, если рассматривать данные окружности и прямые как направленные.

Построение 36′. Построить направленную окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных направленных прямых (ср. § 66 и § 91, построение 36).

Для направленных прямых и окружностей задача не имеет решения, если точка лежит внутри угла между данными прямыми или внутри угла, ему вертикального (точки A и B на черт. 251), имеет одно решение, если данная точка лежит на одной из данных прямых (точка C), и два решения, если данная точка лежит внутри одного из углов, смежных с углом между двумя данными прямыми (точка D).



Черт. 251.

Построение 58′. Построить направленную окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных направленных окружностей (ср. § 85 и § 91, построение 58).

В отличие от того, что имело место для ненаправленных окружностей, наибольшее число решений равно двум. Действительно, если данные окружности одинаково направлены (или противоположно направлены), то искомая окружность должна касаться их одинаковым образом (соответственно — неодинаковым образом).

§ 93. Расширение.

Все рассмотренные до сих пор преобразования — движения, подобия, инверсии — обладают тем свойством, что точкам в них соответствуют опять точки. Такие преобразования называются точечными. В этом параграфе мы рассмотрим одно из простейших преобразований, не являющихся точечными, а именно расширение.

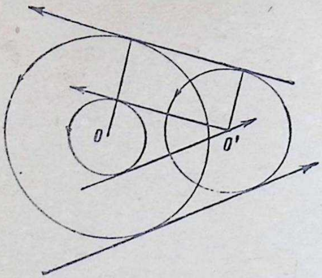
Начнём с разбора следующей задачи.

Построение 31[1]). Построить общие касательные к двум данным окружностям.

---

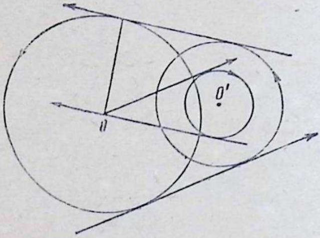
[1]) Ср. § 65.

Напомним способ построения, известный из школьного курса. Ограничимся для определённости внешними общими касательными.



Черт. 252.

Пусть $O(r)$ и $O'(r')$ — данные окружности (черт. 252 и 253). Для построения внешних общих касательных строим вспомогательную окружность радиуса $|r-r'|$, концентрическую с одной из данных окружностей, и из центра другой данной окружности проводим к этой вспомогательной окружности касательные. Прямые, параллельные построенным касательным и касающиеся одной из данных окружностей, будут искомыми общими касательными.



Черт. 253.

Рассмотрим теперь известное построение внешних общих касательных с точки зрения свойств направленных окружностей. Так как речь идёт о внешних общих касательных, то данные окружности придётся рассматривать (§ 92) как имеющие одинаковое, например положительное, направление. Напомним, что радиусы положительно (отрицательно) направленных окружностей мы условились считать положительными (соответственно отрицательными).

При замене искомых общих касательных касательными к вспомогательной окружности данные направленные окружности $O(r)$ и $O'(r')$ заменяются концентрическими с ними направленными окружностями радиусов $r-r'$ и нуль (черт. 252) или радиусов нуль и $r'-r$ (черт. 253). Короче говоря, радиусы обеих данных направленных окружностей уменьшаются на r' или на r. Искомые направленные общие касательные заменяются направленными прямыми, им параллельными[1]) и отстоящими от них на расстоянии r' (черт. 252) или r (черт. 253).

При обратном переходе радиусы обеих направленных окружностей увеличиваются соответственно на r' или на r.

Предоставляем читателю показать, что буквально те же рассуждения применимы к отысканию внутренних общих касательных, если только рассматривать данные окружности как имеющие противоположные направления. При этом радиус одной из данных окружностей должен считаться положительным, а другой — отрицательным.

Рассмотренное решение задачи о построении общих касательных к двум направленным окружностям даёт повод ввести следующее общее определение.

Расширением[2]) мы будем называть преобразование направленных окружностей, в котором каждой направленной окружности радиуса r соответствует концентрическая с ней направленная окружность радиуса $r+a$, где $a \gtreqless 0$ — постоянное число, которое мы назовём параметром расширения.

В задаче о построении общих касательных мы пользовались расширением с параметром $a=-r'$ (или $a=-r$) при замене искомых общих касательных касательными к вспомогательной окружности и расширением с параметром $a_1=+r'$ (или соответственно $a_1=+r$) при обратном переходе.

Из самого определения вытекает несколько свойств расширения, которые мы и перечислим.

1. *Расширение представляет собой взаимно однозначное соответствие между направленными окружностями* (считая в их числе и точки как окружности нулевого радиуса).

2. *Тождественное преобразование можно рассматривать как частный случай расширения* (с параметром $a=0$).

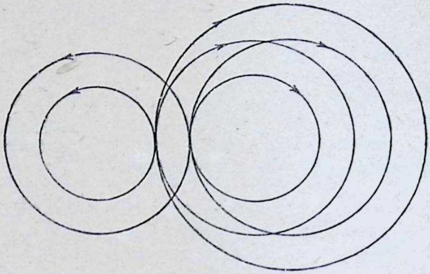
---

[1]) Напомним, что для двух направленных прямых понятие параллельности включает в себя (§ 92) и совпадение направлений.

[2]) Термин «расширение» представляет собой дословный перевод термина dilatation, принятого в западно-европейских языках; в русском языке употребляется иногда термин «параллельное преобразование».

Преобразование, обратное расширению, есть также расширение (параметры обоих расширений отличаются только знаком). *Произведение двух расширений есть также расширение* (параметр произведения равен сумме параметров обоих расширений).

3. *Расширение не является точечным преобразованием.* Точке (как окружности нулевого радиуса) соответствует в расширении с параметром a направленная окружность с центром в данной точке и радиусом, равным a. Всякой направленной окружности радиуса $r = -a$ соответствует в расширении с параметром a точка (как окружность нулевого радиуса).



Черт. 254.

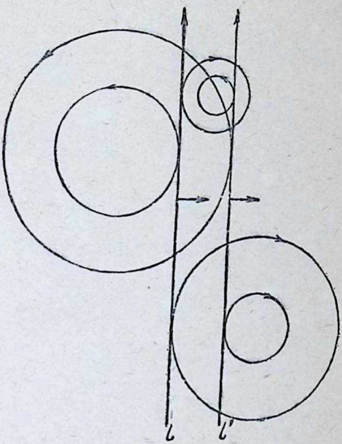
4. *Направленные окружности, касающиеся одна другой, преобразуются в направленные окружности, также касающиеся одна другой* (черт. 254).

Вытекает из того, что условие касания двух направленных окружностей $OO' = |r - r'|$ (§ 92) не нарушается при увеличении радиусов обеих окружностей на одну и ту же величину.

5. *Направленные окружности, касающиеся одной и той же направленной прямой l, преобразуются при расширении в направленные окружности, также касающиеся некоторой направленной прямой l'* (черт. 255). Направлен-

ные прямые l и l' параллельны[1]) и отстоят одна от другой на расстоянии, равном параметру расширения.

В этом смысле мы можем сказать, что *направленной прямой l соответствует при расширении параллельная ей направленная прямая l'*, отстоящая от l на величину, равную абсолютной величине параметра расширения в соответствующую сторону: прямая смещается вправо (влево) для наблюдателя, смотрящего вдоль прямой в положительном направлении, если параметр расширения положителен (соответственно — отрицателен).



Черт. 255.

Так, на черт. 255 прямая l' получается из l путём переноса «вправо» на расстояние a (параметр расширения положителен), а прямая l — из l' путём переноса на то же расстояние в противоположную сторону (параметр расширения отрицателен).

---

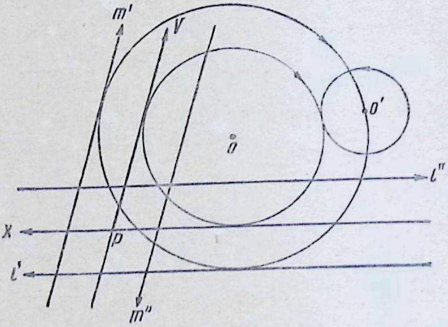
[1]) См. сноску [1]) на стр. 329.

§ 94. Применение расширения к задачам на построение.

Рассмотренное в предыдущем параграфе преобразование — расширение — находит, в частности, применение при решении геометрических задач на построение («метод расширения»). В качестве типичных примеров мы рассмотрим в этом параграфе задачу Аполлония (§ 86 и § 91, построение 59) и один из её частных случаев (§ 66, построение 38). Каждый раз мы будем рассматривать сначала соответствующее построение для направленных окружностей и прямых.

Построение 38′. Построить направленную окружность, касающуюся двух данных направленных прямых и данной направленной окружности.

Пусть PX и PY — данные направленные прямые (черт. 256), $O'(r')$ — данная направленная окружность, $O(r)$ — одна из искомых направленных окружностей.



Черт. 256.

Применим к данным направленным прямым и к данной и искомой окружностям расширение с параметром $a = -r'$. Данная окружность $O'(r')$ преобразуется в её центр O'; данные прямые PX и PY — в параллельные им направленные прямые l' и m', отстоящие от данных (в надлежащую сторону) на расстояние, равное $|a|$. Искомая окружность преобразуется в новую направленную окружность $O(r - r')$, проходящую через точку O' и касающуюся направленных прямых l' и m'. Таким образом, мы приходим к построению 36′ (§ 92). После того как точка O будет построена как центр окружности $O(r-r')$, не представляет никакого труда построить окружность $O(r)$.

Задача не имеет (§ 92) решений, если центр данной окружности лежит внутри угла $\angle l'm'$ или внутри угла, ему вертикального; имеет одно решение, если он лежит на одной из прямых l' или m' и два решения, если он лежит внутри одного из двух углов, смежных с углом $\angle l'm'$.

Построение 38. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых и данной окружности (ненаправленных).

Два способа решения этой задачи, оба использующие свойства гомотетии, были уже рассмотрены (§ 66).

Третий способ непосредственно вытекает из только что сказанного.

Пусть PX и PY (черт. 256) — данные прямые, $O'(r')$ — данная окружность, $O(r)$ — одна из искомых окружностей, на которых уже не задано никакого направления.

Припишем данной окружности $O'(r')$ произвольное направление, например, положительное. Окружности $O(r)$ можно приписать такое направление, чтобы она касалась направленной окружности O', а прямым PX и PY — такие направления, чтобы они обе касались окружности $O(r)$. Наша задача сводится к только что рассмотренной (построение 38'). При этом мы получим четыре такие задачи, так как на каждой из двух данных прямых можно независимо друг от друга выбрать одно из возможных направлений. Применяя расширение, мы придём к построению направленной окружности, касающейся одной из следующих пар направленных прямых (l', m'), (l', m''), (l'', m') и (l'', m'') и проходящей через точку O' (черт. 256). При этом прямые l' и l'' (а также m' и m'') будут иметь противоположные направления, так как они получаются с помощью одного и того же расширения из двух противоположно направленных прямых, совпадающих с PX (или с PY).

Переходим к исследованию задачи. Центр данной окружности может занимать по отношению к ромбу, образованному прямыми l', l'', m' и m'' различные положения.

Если он лежит внутри этого ромба, то он будет лежать внутри четырёх углов, смежных соответственно с $\angle l'm'$, $\angle l'm''$, $\angle l''m'$ и $\angle l''m''$, и задача будет иметь восемь решений. В этом случае данная окружность $O'(r')$ пересекает обе данные прямые, так как расстояние её центра от каждой из прямых PX и PY меньше её радиуса.

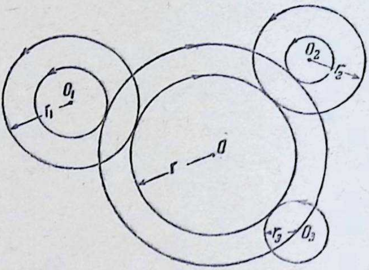
Если центр O' данной окружности лежит вне того же ромба, но не на продолжении его стороны, то он будет лежать внутри одного из четырёх углов $\angle l'm'$, $\angle l'm''$, $\angle l''m'$ и $\angle l''m''$, внутри угла, вертикального одному из тех же четырёх углов, и внутри двух углов, смежных соответственно с остальными двумя из тех же углов. Так, на черт. 256 точка O' лежит внутри $\angle l''m'$, внутри угла, вертикального углу $\angle l'm''$, и внутри двух углов, смежных соответственно с углами $\angle l'm'$ и $l''m''$. Задача будет иметь четыре решения. В этом случае данная окружность O' не имеет общих точек ни с одной из данных прямых (если точка O' лежит как на черт. 256 внутри угла, вертикального по отношению к одному из внутренних углов ромба) или пересекает одну из двух данных прямых в двух точках, но не имеет общих точек с другой данной прямой (если точка O' лежит вне ромба, но в области, примыкающей к одной из сторон ромба).

Итак, поставленная задача имеет восемь решений (ср. черт. 175), если данная окружность пересекает обе данные прямые, и четыре решения, если она не имеет общих точек ни с одной из данных прямых или пересекает одну из них в двух точках, но не имеет общих точек с другой из них.

Предоставляем читателю рассмотреть случай, когда данная окружность касается одной из данных прямых (центр данной окружности лежит на стороне или на продолжении стороны ромба); при этом возможны 4 или 6 решений.

Построение 59′. Построить направленную окружность, касающуюся трёх данных направленных окружностей.

Пусть $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ и $O_3(r_3)$ (черт. 257) — данные направленные окружности, $O(r)$ — одна из искомых направленных окружностей. Выберем для определённости обозначения так, чтобы было $|r_1| \geqslant |r_2| \geqslant |r_3|$.



Черт. 257.

Применим к трём данным и к искомой направленным окружностям расширение с параметром $a = -r_3$. Данные окружности преобразуются соответственно в направленные окружности $O_1(r_1 - r_3)$ и $O_2(r_2 - r_3)$ и в центр O_3 третьей данной окружности. Искомая окружность преобразуется в новую направленную окружность $O(r - r_3)$, касающуюся двух последних направленных окружностей и проходящую через точку O_3. Таким образом, мы приходим к построению 58′ (§ 92). После того как точка O будет построена как центр окружности $O(r-r_3)$, не представляет никакого труда построить и окружность $O(r)$.

Поставленная задача имеет, самое большее, два решения (§ 92).

Построение 59 (задача Аполлония). Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей (ненаправленных).

Два различных способа решения этой задачи были уже рассмотрены (§ 86 и § 91).

Третий способ вытекает из только что сказанного. Пусть $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ и $O_3(r_3)$—данные окружности $(r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3)$, на которых уже не задано никакого направления; $O(r)$ — одна из искомых окружностей.

Припишем одной из трёх данных окружностей — пусть это будет $O_3(r_3)$ — определённое направление, например, положительное. Окружности $O(r)$ можно приписать такое направление, чтобы она касалась направленной окружности O_3, а окружностям $O_1(r_1)$ и $O_2(r_2)$ — такие направления, чтобы они обе касались направленной окружности O. Задача Аполлония для ненаправленных окружностей сводится таким путём к той же задаче для направленных окружностей, которую мы только что рассмотрели (построение 59′).

При этом мы получим четыре таких задачи, так как на каждой из двух данных окружностей O_1 и O_2 можно независимо друг от друга выбрать одно из двух возможных направлений. (На первый взгляд могло бы показаться, что мы получим не четыре, а даже восемь построений 59′, так как направления на всех трёх данных окружностях можно выбирать произвольно. Однако перемена направлений на всех трёх данных окружностях одновременно, очевидно, не приводит к новым решениям: она лишь изменяет направление на каждой из искомых окружностей.)

Так как каждая из четырёх получившихся задач Аполлония для направленных окружностей имеет, самое большее, два решения, то задача Аполлония для ненаправленных окружностей имеет в общей сложности самое большее 8 решений (сравнить § 86).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1, Планиметрия, М., 1936; 2-е изд., М., 1938; ч. 2., Стереометрия, М., 1938.
2. Александров И. И., Геометрические задачи на построение и методы их решения, М., 1934. (Предыдущие издания под заглавием «Сборник задач на построение».)
3. Арнольд И. В., Теоретическая арифметика, М., 1938; 2-е изд., М., 1940.
4. Бари Н. К., Теория рядов, М., 1936.
5. Бончковский Р. Н., Площади и объёмы, М. — Л., 1937.
6. Вопросы элементарной геометрии. Сборник статей под ред. Ф. Энрикеса, СПБ, 1913.
7. Гильберт Д., Основания геометрии, М. — Л., 1948.
8. Глаголев Н. А., Начертательная геометрия, 2-е изд., М. — Л., 1946.
9. Глаголев Н. А., Элементарная геометрия, ч. 1, Планиметрия, М., 1944; ч. 2, Стереометрия, М., 1945.
10. Дарбу Г., Принципы аналитической геометрии, Л. — М., 1939.
11. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I, М. — Л., 1933.
12. Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, М., 1940.
13. Киселёв А. П., Геометрия, ч. 1, Планиметрия; ч. 2, Стереометрия, М. (Ряд изданий.)
14. Клейн Ф., Высшая геометрия, М. — Л., 1939.
15. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. I. Арифметика, алгебра, анализ, 2-е изд., М. — Л., 1933. Т. II. Геометрия, М. — Л., 1934.
16. Окунев Л. Я., Основы современной алгебры, М., 1941.
17. Перепёлкин Д. И., Геометрические построения в средней школе, М. — Л., 1947.
18. Таннери Ж., Курс теоретической и практической арифметики, М., 1913.
19. Фурсенко В. Б., Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника, «Математика в школе», 1937, № 5 и № 6.

20. **Цейтен Г. Г.**, История математики в древности и в средние века, 2-е изд., М. — Л., 1938.

21. **Четверухин Н. Ф.**, Методы геометрических построений, М., 1938.

22. **Четверухин Н. Ф.**, Высшая геометрия, 5-е изд., М., 1939.

23. **Шапиро Г. М.**, Высшая алгебра, М., 1935.

24. **Шатуновский С. О.**, Об измерении прямолинейных отрезков и построении их с помощью циркуля и линейки, Одесса, 1923.

25. **Шван В.**, Элементарная геометрия, т. 1 [и единственный]. Геометрия на плоскости, М., 1937.

26. **Штейнер Я.**, Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, М., 1939.

27. **Шубников А. В.**, Симметрия, М. — Л., 1940.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

УКАЗАТЕЛЬ АКСИОМ, ТЕОРЕМ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ И ПОСТРОЕНИЙ

Аксиомы

№№ аксиом	стр.	№№ аксиом	стр.
1a — 1c	12	5	61
2a — 2c	14	6	64
3	16	7	80
4a — 4d	36	8	154
4e	37	9	160
4f	42	—	—

Теоремы

№№ теорем	стр.	№№ теорем	стр.	№№ теорем	стр.	№№ теорем	стр.
1—2	13	44—45	62	76	114	108—109	175
3	16	46	63	77—78	117	110	177
4	18	47—48	64	79	119	111	181
5	20	49	71	80	120	112—113	182
6—7	22	50—51	75	81	126	114—115	185
8	24	52	77	82	127	116	186
9—10	38	53	80	83	139	117	187
11—12	42	54	82	84	140	118	188
13	43	55—56	83	85	141	119	189
14—15	44	57	84	86—87	143	120	190
16	45	58—59	85	88—89	144	121	192
17	46	60	92	90—93	145	122	193
18—19	48	61	94	94—95	146	123	196
20	49	62	95	96	147	124	198
21—22	50	63	96	97—98	152	125	199
23	51	64	97	99	154	126	202
24—25	53	65	98	100	157	127	203
26—27	54	66—67	101	101	158	128	204
28—29	56	68—69	102	102	160	129—130	205
30	57	70—71	103	103	163	131	210
31—35	58	72	104	103a—104	164	132	211
36	59	73	109	105	167	133	212
37—41	60	74	111	106	168	134	218
42—43	61	75	113	107	170	135	219

Геометрические места

Построения