Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ ВУЗОВ

Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая

МАТЕМАТИКА

для подготовительных отделений вузов

Справочное пособие

Под редакцией А. А. Гусака

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1989

ББК 22.1я2
Г96
УДК 51 (035.5)

Рецензенты: кафедра «Дифференциальные уравнения» Гомельского государственного университета; д-р физ.-мат. наук, проф. К. А. Рыбников

Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая

Г 96 Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие. Под ред. А. А Гусака.— Мн.: Выш. шк., 1989.— 495 с.: ил.
ISBN 5-339-00226-8.

В пособии излагается материал, предусмотренный программами по математике для средней школы. Оно состоит из двух разделов: арифметики, алгебры, начал анализа; геометрии. Теоретический материал иллюстрируется примерами, приводятся задачи и упражнения для самостоятельного решения.

Для слушателей подготовительных отделений вузов. Может быть использовано абитуриентами при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

$$Г\frac{4306020500-111}{М304(03)-89}85-89$$

ББК 22.1я2

ISBN 5-339-00226-8

ОТ АВТОРОВ

Справочное пособие написано в соответствии с программой курса математики для подготовительных отделений при высших учебных заведениях, утвержденной в 1984 г.

Пособие состоит из двух разделов. В первом содержится материал по арифметике, алгебре и началам анализа. Рассматриваются множества чисел: натуральных, целых, рациональных, действительных; простейшие признаки делимости чисел, отношения и пропорции, десятичные дроби и проценты, степени и корни, многочлены, функции, уравнения и системы уравнений, неравенства, последовательности и прогрессии, предел и непрерывность функции, производная и ее применения, тригонометрические функции, первообразная и интеграл. Даны определения соответствующих понятий, доказаны относящиеся к ним теоремы. Изложение теоретического материала иллюстрируется примерами и рисунками. Предлагаются задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Второй раздел пособия посвящен геометрии. В этом разделе приводится материал по следующим темам: треугольники, четырехугольники, геометрические построения, окружность, метод координат и его простейшие применения, преобразования фигур, многоугольники, площади фигур, плоскости и прямые в пространстве, векторы, двугранные, трехгранные и многогранные углы, многогранники, тела вращения, объемы тел и площади поверхностей. В конце каждой главы даны упражнения.

При рассмотрении вопросов об объемах тел и площадях поверхностей, используются элементы интегрального исчисления. Излагая тему «Векторы», авторы придерживаются традиционной точки зрения на основные понятия, отраженной в «Математической энциклопедии».

Поскольку в данном пособии компактно изложен программный материал курса математики средней школы, оно может быть использовано и абитуриентами при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам: доктору физико-математических наук К. А. Рыбникову, профессору механико-математического факультета Московского государственного университета, кандидату физико-математических наук В. И. Мироненко, доценту, зав. кафедрой дифференциальных уравнений Гомельского университета, всем сотрудникам этой кафедры за критические замечания и полезные советы.

Замечания и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел

$A \Rightarrow B$ — B следует из A

$A \Leftrightarrow B$ — обозначение равносильности A и B

$\in$ — знак принадлежности множеству ($n \in \mathbf{N}$)

$\notin$ — знак непринадлежности множеству ($n \notin \mathbf{N}$)

$\subset$ — знак включения

$\cup$ — знак объединения множеств

$\cap$ — знак пересечения множеств

$\triangleright$ — начало доказательства

$\triangleleft$ — конец доказательства

I. АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Натуральные числа

Числа, употребляемые при счете предметов, называют *натуральными*. Наименьшим натуральным числом является число 1. Наибольшего натурального числа не существует.

▷ Действительно, допустим противное, пусть n — наибольшее натуральное число. Прибавив к n единицу, получим натуральное число $n+1$, которое больше n, что противоречит предположению. ◁

Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд натуральных чисел. Этот ряд может быть продолжен неограниченно. Бесконечный натуральный ряд чисел записывают так: 1, 2, 3, ... Ряд натуральных чисел обозначают **N**.

Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Условились цифры 0, 2, 4, 6, 8 называть *четными*, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — *нечетными*. Значение цифры в записи числа зависит от занимаемого ею места, от ее позиции. Например, в записи 333 первая слева тройка означает три сотни, вторая — три десятка, третья — три единицы. Вследствие этого указанную систему записи чисел называют *десятичной позиционной системой счисления*.

Чтобы прочитать число, записанное в десятичной системе, его обозначение разбивают на группы, по три цифры в каждой группе справа налево. Первые три цифры справа (единицы, десятки и сотни) составляют класс единиц, три следующие (единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч) — класс тысяч, далее идут классы миллионов, миллиардов и т. д.

Расширим ряд натуральных чисел, добавив к нему число 0. Нуль считается числом, предшествующим всем натуральным числам. Ряд натуральных чисел с числом 0 обозначают $\mathbf{N}_0$.

Над натуральными числами можно производить арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление.

Сложить два натуральных числа a и b — это значит найти такое натуральное число, в котором столько единиц, сколько их вместе в числах a и b. Это число называют *суммой* данных чисел и обозначают $a+b$, а числа a и b — *слагаемыми.*

Чтобы сложить несколько натуральных чисел, надо сложить сначала два из них, затем к их сумме прибавить следующее натуральное число и т. д. Сумма натуральных чисел является натуральным числом. Отметим, что $a+0=a$, $0+a=a$.

Сложение натуральных чисел подчинено переместительному (коммутативному) и сочетательному (ассоциативному) законам, выражаемым соответственно равенствами:

1) $a+b=b+a$; 2) $(a+b)+c=a+(b+c)=a+$ $+b+c$ для любых значений a, b, c. Эти равенства означают следующее: 1) от перестановки слагаемых значение суммы не меняется; 2) чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего.

Вычесть из натурального числа a натуральное число b — значит найти такое натуральное число x, которое в сумме с числом b дает $a: x+b=a$. Число x называют *разностью чисел* a и $b: x=a-b$. Число a называют *уменьшаемым,* число b — *вычитаемым.* Разность $a-b$ является натуральным числом, когда $a>b$. Другими словами, во множестве натуральных чисел вычитание возможно лишь в случае, когда уменьшаемое больше вычитаемого. Разность $a-b$ показывает, на сколько единиц число a больше числа b. Отметим, что $a-0=a$, $a-a=0$.

Произведением натурального числа а на натуральное число b, большее 1, называют сумму b слагаемых, каждое из которых равно a, и обозначают $a \cdot b$ или ab. Числа a и b называют *множителями.* Действие нахождения произведения чисел a и b называют *умножением.*

Произведением числа a на 1 называют само число a, т. е. $a \cdot 1=1 \cdot a=a$. По определению считают, что $a \cdot 0=0 \cdot a=0$.

Умножение чисел обладает переместительным и сочетательным свойствами, выражаемыми для любых значений a, b, c соответственно равенствами:

1) $ab=ba$; 2) $(ab)c=a(bc)=abc$.

Эти равенства означают следующее: 1) от перестановки множителей значение произведения не меняется; 2) чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно умножить первое из них на произведение второго и третьего.

Выражение $(ab)c$ можно записывать без скобок: abc

При любых значениях a, b, c выполняется равенство $(a+b)c = ac + bc$, которое выражает распределительный закон умножения относительно сложения: при умножении суммы на число можно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения.

При любых значениях a, b и c, если только a больше или равно b, верно равенство: $(a-b)c = ac - bc$. Оно выражает распределительный закон умножения относительно вычитания.

Результатом умножения натуральных чисел является натуральное число.

Любое натуральное число N в десятичной системе счисления можно разложить по разрядам, т. е. представить в виде суммы разрядных слагаемых (единиц, десятков, сотен, тысяч и т. д.):

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots \\ \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \qquad (1.1)$$

где каждое из $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — одно из чисел 0, 1, 2, 3, ..., 9; a_0 — цифра единиц; a_1 — цифра десятков и т. д.

Например, $7835 = 7000 + 800 + 30 + 5 = 7 \cdot 10^3 + 8 \times \times 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$.

Разложение чисел по разрядам применяют для обоснования правил сложения, вычитания и умножения многозначных чисел; при этом используют основные свойства этих действий.

Пример 1. Сложим числа 234 и 561. Каждое слагаемое сначала представим в виде суммы разрядных слагаемых: $234 = 200 + 30 + 4$, $561 = 500 + 60 + 1$. Складывая эти числа и применяя переместительный и сочетательный законы сложения, получаем $234 + 561 = (200 + 30 + 4) + (500 + 60 + 1) = (200 + 500) + (30 + 60) + (4 + 1) = 700 + 90 + 5 = 795$. Этим объясняется правило сложения натуральных чисел «столбиком»:

$$\begin{array}{r} 234 \\ +\ 561 \\ \hline 795 \end{array}$$

Пример 2. Умножим число 23 на 8. Число 23 разложим по разрядам: $23 = 20 + 3$. Значит, $23 \cdot 8 = (20 + 3)8 = 20 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 160 + 24 = 184$. Это можно записать так:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}23\\8\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}24\\160\end{array}\\ \hline 184\end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}23\\8\end{array}\\ \hline 184\end{array}$$

Разделить натуральное число a на натуральное число b — значит найти такое натуральное число c, при умножении которого на число b получается a: $cb = a$. Итак, если $c \cdot b = a$, то $c = a:b$, или $c = a/b$. Число c называют *частным* чисел a и b, число a — *делимым*, число b — *делителем* числа a. Из определения деления следует, что $a:1 = a$, $a:a = 1$, $0:a = 0$ (так как $0 \cdot a = 0$).

Замечание. Ни одно число нельзя делить на нуль. Действительно, разделить число a на нуль — значит найти такое число c, что $0 \cdot c = a$. Если $a \neq 0$, то это равенство противоречиво, так как $0 \cdot c = 0$ при любом c. Если $a = 0$, то $0 \cdot c = 0$ при любом c, поэтому невозможно указать одно определенное значение c. Значит, делить число a на нуль нельзя! Нельзя делить и 0 на 0!

Деление одного натурального числа на другое нацело не всегда возможно (см. § 1.3.).

1.2. Целые числа

Натуральные числа можно изображать точками на прямой линии. Чтобы определить положение точки на прямой по отношению к фиксированной точке O (начало отсчета), недостаточно знать ее расстояние от точки O, необходимо еще указать, по какую сторону от начала отсчета она находится. Чаще всего такую прямую располагают горизонтально, направление вправо от точки O считают положительным, а влево — отрицательным. Положительное направление на прямой обозначают стрелкой. Обычно вместо того, чтобы писать слова «влево» и «вправо», пишут по одну сторону от точки O числа 1, 2, 3 ..., а по другую ее сторону — числа со знаком «минус»: $-1, -2, -3, \ldots$ (рис. 1.1). Числа 1, 2, 3, ... называют *положительными*, числа $-1, -2, -3$ — *отрицательными*. Число 0 отделяет на прямой положительные числа от отрицательных. Оно изображается точкой O — началом отсчета. Само число 0 не является ни положительным, ни отрицательным. Все целые положительные числа и число 0 называют *неотрицательными числами.*

Число, показывающее положение точки на прямой, называют *координатой этой точки.* Прямую линию с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и положительным направлением называют *координатной прямой.*

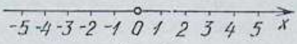


Рис. 1.1

Точки с координатами 5 и -5 (рис. 1.1) одинаково удалены от точки O, находятся по разные стороны от нее и симметричны относительно этой точки. Чтобы попасть из точки O в эти точки, надо отложить от нее отрезки длиной 5 в противоположных направлениях. Вследствие этого числа 5 и -5 называют противоположными. Для каждого числа существует одно противоположное ему число. Число 0 противоположно самому себе. Два противоположных числа изображаются на координатной прямой точками, симметричными относительно начала отсчета.

Число, противоположное числу a, обозначают $-a$.

Натуральные числа, противоположные им числа и нуль называют *целыми числами.* Множество всех целых чисел обозначают $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}=\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Из двух чисел меньшим считается то, изображение которого расположено левее на координатной прямой, и бóльшим то, изображение которого расположено правее (при выборе положительного направления, указанном на рис. 1.1). Так как при этом выборе положительного направления положительные числа изображаются точками координатной прямой справа от нуля, а отрицательные — слева от нуля, то всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное число меньше нуля, поэтому всякое отрицательное число меньше всякого положительного числа.

Введем понятие модуля целого числа. *Модулем числа a* называют неотрицательное число $|a|$, определяемое формулой:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a \text{ положительно или равно нулю,} \\ -a, \text{ если } a \text{ отрицательно.} \end{cases}$$

Для положительного числа и нуля модуль равен самому числу, для отрицательного числа — противоположному числу. Например, $|8| = 8$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$. Очевидно, что $|-a| = |a|$. Модуль числа не может быть отрицательным. Модуль числа равен расстоянию от начала отсчета до точки, которой соответствует это число.

Если отметить на координатной прямой два отрицательных числа, то левее окажется то число, модуль которого больше. Следовательно, из двух отрицательных чисел $-a$ и $-b$ меньше то, у которого больше модуль, и больше то, у которого меньше модуль: $-a < -b$, если $|-a| > |-b|$. Например, $-7 < -5$, так как $|-7| > |-5|$.

Введение отрицательных чисел делает выполнимым действие вычитания над целыми числами (разность $a - b$ имеет смысл и при $a < b$). Арифметические действия над целыми числами выполняют по правилам, приведенным ниже.

1. Чтобы сложить два отрицательных числа, нужно сложить их модули и перед полученным числом поставить минус. Например, $(-17) + (-8) = -(17 + 8) = -25$.

2. Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например, $62 + (-12) = +(62 - 12) = 50$;

$$(-36) + 30 = -(36 - 30) = -6;$$
$$27 + (-34) = -(34 - 27) = -7;$$
$$(-28) + 60 = +(60 - 28) = 32.$$

Отметим, что сумма двух противоположных чисел равна нулю. Например, $8 + (-8) = 0$; $a + (-a) = 0$.

3. Если надо сложить несколько чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, можно сложить отдельно положительные и отдельно отрицательные, а потом к сумме положительных чисел прибавить сумму отрицательных чисел. Например, $30 + 12 + (-20) + (-12) = 42 + (-32) = 10$.

4. Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $-15 - 18 = -15 + (-18) = -33$; $41 - (-7) = 41 + 7 = 48$.

Любое выражение, содержащее лишь знаки сложения и вычитания, можно рассматривать как сумму. Например, выражение $-3+5-a$ можно рассматривать как сумму трех слагаемых: -3, 5 и $-a$; $-3+5-a=-3+5+(-a)$.

Разность двух чисел положительна, если уменьшаемое больше вычитаемого, и отрицательна, если уменьшаемое меньше вычитаемого. Разность равна нулю, если уменьшаемое и вычитаемое равны.

5. Чтобы перемножить два числа с разными знаками, нужно перемножить модули этих чисел и перед полученным числом поставить минус. Например, $(-6)\cdot 3=-(6\cdot 3)=-18$.

При изменении знака любого множителя знак произведения изменяется, а модуль его остается тем же. Если же меняются знаки обоих множителей, то знак произведения и его модуль не меняются (здесь произведение изменяет знак дважды): $5\cdot 3=15$; $5\cdot(-3)=-15$; $(-5)(-3)=15$.

6. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули. Произведение двух отрицательных чисел есть число положительное. Например, $(-5)(-3)=|-5|\cdot|-3|=5\cdot 3=15$.

7. Чтобы разделить отрицательное число на отрицательное, надо разделить модуль делимого на модуль делителя. Частное двух отрицательных чисел есть число положительное. Например, $-72:(-8)=|-72|:|-8|=72:8=9$.

8. Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо разделить модуль делимого на модуль делителя и перед полученным числом поставить минус. Например, $-24:8=-(24:8)=-3$; $45:(-5)=-(45:5)=-9$.

При делении нуля на любое число, не равное нулю, получаем нуль.

Действия над целыми числами обладают теми же свойствами, что и действия над натуральными числами (см. § 1.1).

1.3. Деление с остатком

Деление одного натурального числа на другое нацело не всегда выполнимо. Вследствие этого рассматривают более общее действие — деление с остатком.

Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком — значит представить число a в виде $a=bq+r$, где q и r — неотрицательные целые числа, причем

$0 \leqslant r < b$. Число q при этом называют *неполным частным*, а число r — *остатком от деления* a на b. Например, при делении числа 27 на 6 неполное частное равно 4, а остаток $3: 27 = 6 \cdot 4 + 3$. Чтобы найти делимое при делении с остатком, надо неполное частное умножить на делитель и к полученному произведению прибавить остаток. Очевидно, что $r = 0$ тогда и только тогда, когда b является делителем a. Деление с остатком всегда выполнимо, о чем свидетельствует следующая теорема (теорема о делении с остатком).

Теорема 1.1. *Для любых натуральных чисел a и b существует единственная пара неотрицательных целых чисел q и r, таких, что*

$$a = bq + r, \tag{1.2}$$

где $0 \leqslant r < b$

▷ Если $a < b$, то пара $q = 0$, $r = a$ удовлетворяет условиям теоремы. Если $a = b$, то пара $q = 1$, $r = 0$ удовлетворяет условиям теоремы. Если $a > b$, то запишем одно за другим числа

$$a,\ a - b,\ a - 2b,\ a - 3b,\ \ldots \tag{1.3}$$

до тех пор, пока не появится отрицательное число. Пусть последним из неотрицательных членов последовательности (1.3), т. е. самым маленьким из них, окажется число $a - bq$. Обозначим его r, т. е. $a - bq = r$. Тогда получим $a = bq + r$. Очевидно, что $r < b$, в противном случае число $r - b = a - bq - b = a - (q + 1)b$ было бы неотрицательным, а это противоречит предположению о том, что r — наименьшее из неотрицательных чисел последовательности (1.3). Итак, $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Докажем, что пара чисел q, r в формуле (1.2) определяется однозначно. Пусть существует другая пара q_1, r_1, такая, что $a = bq_1 + r_1$, где $0 \leqslant r_1 < b$. Из этого равенства и формулы (1.2) следует, что $bq_1 + r_1 = bq + r$, или $b(q_1 - q) = r - r_1$ (здесь, не нарушая общности, предполагаем, что $q_1 \geqslant q$). Последнее равенство означает, что $r - r_1$ делится на b. Так как $r - r_1 < b$, то деление $r - r_1$ на b возможно, если $r - r_1 = 0$, т. е. $r_1 = r$. В этом случае $b(q_1 - q) = 0$; поскольку $b \neq 0$, то $q_1 - q = 0$, или $q_1 = q$. Однозначность деления с остатком доказана. ◁

1.4. Делимость натуральных чисел

Натуральное число b является делителем натурального числа a, если

$$a = bc, \tag{1.4}$$

где c — натуральное число. В этом случае говорят, что число a делится без остатка на число b. Отметим, что из равенства $a = bc$ следует, что число a также делится без остатка и на число c, т. е. c — делитель числа a. Например, $15 = 5 \cdot 3$; 5 и 3 — делители числа 15.

Напомним, что натуральные числа, делящиеся на 2 и число 0, называют *четными*, а натуральные числа, не делящиеся на 2,— *нечетными*. *Кратным числа* b называют число a, которое делится без остатка на b. Множество чисел, кратных данному числу b, бесконечно.

Замечание 1. Число 1 является делителем любого натурального числа, поскольку любое натуральное число делится без остатка на 1. Число 0 кратно любому натуральному числу, так как 0 делится без остатка на любое натуральное число.

Докажем теоремы, выражающие основные свойства делимости натуральных чисел.

Теорема 1.2. *Если каждое слагаемое делится на данное число, то их сумма делится на это число.*

▷ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, каждое из которых делится на b, т. е. $a_1 = bc_1$, $a_2 = bc_2$, ..., $a_n = bc_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — натуральные числа. Поскольку $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = bc_1 + bc_2 + \ldots + bc_n = b(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = bc$, где $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ — натуральное число (как сумма натуральных чисел), то сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на b. ◁

Следствие. Если сумма двух слагаемых и одно из них делятся на некоторое число, то и другое слагаемое делится на это число.

▷ Действительно, если $a + d = cb$ и $a = c_1 b$, то $d = cb - a = cb - c_1 b = b(c - c_1) = bc_2$, где $c_2 = c - c_1$; итак, $d = bc_2$, т. е. d также делится на b. ◁

Замечание 2. Не следует думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $23 + 13$ делится на 6, хотя ни одно из слагаемых не делится на это число.

Таким образом, условие теоремы 1.2 не необходимо для делимости суммы на число (оно только достаточно) (см. § 1.14).

Условие следствия является необходимым условием делимости слагаемого d на число b.

Теорема 1.3. *Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность разделится на это число.*

$\triangleright$ Пусть a, b, m — натуральные числа, a и b делятся на m, т. е. $a = mc_1$, и $b = mc_2$, где c_1 и c_2 — натуральные числа. Будем считать, что $a > b$, тогда, используя распределительное свойство умножения относительно вычитания, получаем $a - b = mc_1 - mc_2 = m(c_1 - c_2) = mc$, где $c = c_1 - c_2$ — натуральное число ($c_1 > c_2$). Поскольку $a - b = mc$, то разность $a - b$ делится на m. $\triangleleft$

Теорема 1.4. *Если каждое слагаемое, кроме одного, делится на некоторое число, а это одно на него не делится, то и сумма на него не разделится.*

$\triangleright$ Пусть в сумме $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ слагаемые $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ делятся на m, но a_n не делится на m. Выразим отсюда a_n: $a_n = s - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ и воспользуемся методом доказательства от противного.

Пусть s делится на m, тогда, так как $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ делится на m (по теореме 1.2), то должно делиться на m и a_n (по теореме 1.3), что противоречит условию (a_n не делится на m). Следовательно, s не делится на m. $\triangleleft$

Теорема 1.5. *Если хотя бы один из множителей делится на данное число, то их произведение также делится на это число.*

$\triangleright$ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, одно из которых, например a_1, делится на b, т. е. $a_1 = bc_1$, где c_1 — натуральное число, тогда $a_1a_2 \cdots a_n = (bc_1)a_2 \cdots a_n = b(c_1a_2 \cdots a_n) = bc$, где $c = c_1a_2 \cdots a_n$ — натуральное число (как произведение натуральных чисел). Равенство $a_1a_2 \cdots a_n = bc$ означает, что произведение $a_1a_2 \cdots a_n$ делится на b. $\triangleleft$

Замечание 3. Условие теоремы является достаточным, но не необходимым для делимости произведения на число. Например, произведение $14 \cdot 27$ делится на 21, хотя ни 14, ни 27 на 21 не делятся.

Теорема 1.6. *Если натуральное число a делится на произведение двух натуральных чисел, то оно разделится на каждое из этих чисел в отдельности.*

$\triangleright$ Если a делится на произведение mn (m и n — натуральные числа), то $a = mnc$, где c натуральное число. Следовательно, $a = mnc = m(nc) = n(mc)$ или $a = mc_1$, где $c_1 = nc$, $a = nc_2$, где $c_2 = mc$, что доказывает теорему. ◁

Теорема 1.7. *Если натуральное число a делится порознь на два натуральных числа b и c, причем b и c не имеют общих делителей, кроме единицы, то a делится на произведение bc.*

Доказать теорему предоставляем читателю.

1.5. Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10

Признак делимости на 2. На 2 делятся все те и только те натуральные числа, запись которых оканчивается четной цифрой.

▷ Пользуясь распределительным свойством, запись (1.1) натурального числа N представим в виде $N = 10(a_n 10^{n-1} + a_n 10^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0$, или

$$N = 10A + B, \tag{1.5}$$

где $A = a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots + a_1$; $B = a_0$. Поскольку 10 делится на 2, то по теореме 1.5 и число $10A$ делится на 2. Учитывая это, замечаем, что если число N делится на 2, то по следствию из теоремы 1.2 число B необходимо делится на 2. Если число B делится на 2, то по теореме 1.2 этого достаточно, чтобы и N делилось на 2. Но однозначное число $B = a_0$ делится на 2 лишь в случае, когда оно равно 0, 2, 4, 6, 8, т. е. когда запись числа N оканчивается четной цифрой. ◁

Признак делимости на 5. На 5 делятся те и только те натуральные числа, запись которых оканчивается нулем или цифрой 5.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2. Предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно, использовав равенство (1.5).

С помощью этого признака можно, например, установить, что числа 2005, 3700, 4730 делятся на 5.

Признак делимости на 10. На 10 делятся те и только те натуральные числа, запись которых оканчивается нулем

Доказательство этого признака предоставляется читателю.

Признак делимости на 4. На 4 делятся те и только те числа, две последние цифры в записи которых образуют число, делящееся на 4.

▷ Для доказательства этого признака запись (1.1) натурального числа N представим в виде $N = 100(a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \ldots + a_2) + 10a_1 + a_0$, или $N = 100A + B$, где $A = a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \ldots + a_2$, $B = 10a_1 + a_0$. Число 100 делится на 4, поэтому $100A$ также делится на 4. Если число N делится на 4, то по следствию из теоремы 1.2 число B необходимо делится на 4. Если число B делится на 4, то по теореме 1.2 этого достаточно, чтобы и число N делилось на 4. Остается лишь указать на то, что число $B = 10a_1 + a_0$ образовано двумя цифрами, которыми оканчивается запись числа N. ◁

На основании этого признака заключаем, что числа 2000, 3564, 4608, 17824 делятся на 4, а число 12714 на 4 не делится.

Под суммой цифр некоторого натурального числа понимают сумму чисел, изображаемых указанными цифрами, например, сумма цифр числа 375 равна $3 + 7 + 5 = 15$.

Признак делимости на 3. На 3 делятся все те и только те натуральные числа, сумма всех цифр которых делится на 3.

▷ Для доказательства признака сделаем предварительные замечания. Любое число, записанное посредством только цифры 9, делится на 9: $9:9 = 1$, $99:9 = 11$, $999:9 = 111$ и т. д. Любая степень числа десять с натуральным показателем (другими словами, любое натуральное число, записанное посредством одной единицы с последующими нулями) при делении на девять дает в остатке единицу: $10^1 = 10 = 9 + 1$, $10^2 = 100 = 99 + 1$, $10^3 = 1000 = 999 + 1$ и т. д. Принимая это во внимание, запись (1.1) натурального числа N можно представить так:

$$N = a_n(\underbrace{99\ldots9}_{n} + 1) + a_{n-1}(\underbrace{99\ldots9}_{n-1} + 1) + \ldots + a_1(9 + 1) + a_0 = a_n\underbrace{99\ldots9}_{n} + a_{n-1}\underbrace{99\ldots9}_{n-1} + \ldots + a_1 9 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0),$$

или

$$N = 9A + B,$$

где $A = a_n\underbrace{11\ldots1}_{n} + a_{n-1}\underbrace{11\ldots1}_{n-1} + \ldots + a_1$; $B = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$.

Поскольку число 9 делится на 3, то $9A$ также делится на 3. Если число N делится на 3, то по следствию из теоремы 1.2 необходимо делится на 3 и B — сумма цифр числа N. Если B — сумма цифр числа N — делится на 3, то по теореме 1.2 этого достаточно, чтобы N делилось на 3. $\triangleleft$

Признак делимости на 9. На 9 делятся те и только те натуральные числа, сумма всех цифр которых делится на 9.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 3. С помощью указанного признака можно, например, установить, что число 2943 делится на 9, так как сумма его цифр $2+9+4+3=18$ делится на 9.

1.6. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Натуральное число p называют *простым*, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число. *Составным* называют такое натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, так как оно имеет лишь один натуральный делитель: само это число.

Наименьшим простым числом является число 2. Это единственное четное простое число. Остальные простые числа нечетные. Запишем несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и др., приведем примеры составных чисел: 4, 6, 8, 9, 10 и др.

Теорема 1.8. *Множество простых чисел является бесконечным.*

$\triangleright$ Предположим противное, т. е. что множество простых чисел конечно. Выпишем все эти числа: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Произведение всех простых чисел обозначим P и рассмотрим число $P+1$:

$$P=p_1p_2\ldots p_n; \quad P+1=p_1p_2\ldots p_n+1 \quad (n \text{ — натуральное число}).$$

Число $P+1$ больше каждого из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, поэтому оно не может быть простым (в силу предположения). Следовательно, составное число $P+1$ делится хотя бы на одно простое число p_k (k — одно из чисел $1, 2, \ldots, n$).

Число P также делится на простое число p_k. На основании следствия из теоремы 1.2 число 1 должно делиться на p_k, что возможно лишь в случае $p_k = 1$, а это противоречит предположению (p_k — простое число). Бесконечность множества простых чисел доказана. $\triangleleft$

Любое составное число можно представить в виде равного ему произведения простых множителей, т. е. разложить на простые множители. Об этом свидетельствует следующая теорема, которая приводится без доказательства.

Теорема 1.9. *Всякое натуральное число, кроме единицы, может быть единственным способом представлено в виде произведения простых чисел (если не учитывать порядок расположения множителей).*

Эту теорему называют *основной теоремой арифметики.*

Пусть составное число a разложено в произведение простых чисел, среди которых могут быть и равные. Записывая произведения равных множителей в виде степени, получаем

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \tag{1.6}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные простые делители числа a; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — некоторые целые положительные числа, равные числу повторений простых делителей в разложении числа a. Равенство (1.6) называют *каноническим разложением натурального числа a на простые множители.*

При разложении натуральных чисел на простые множители используют признаки делимости. Множители обычно записывают в порядке их возрастания справа от вертикальной черты. Приведем примеры таких разложений:

$$\begin{array}{r|l} 190 & 2 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \\ & \\ & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $190 = 2 \cdot 5 \cdot 19$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Всякое натуральное число, на которое делятся одновременно натуральные числа a и b, называют *общим дели-*

телем этих чисел. Наибольший из общих делителей чисел a и b называют их *наибольшим общим делителем.*

Всякое натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел a и b, называют *общим кратным* этих чисел. Наименьшее из таких чисел называется *наименьшим общим кратным* (НОК) чисел a и b.

Если числа разложить на простые множители, можно легко найти их НОК и их *наибольший общий делитель* (НОД). Найдем, например, НОК и НОД чисел 396 и 360. Разложим 396 и 360 на простые множители: $396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Найдем разложение на простые множители числа, являющегося наименьшим общим кратным чисел 396 и 360. Ясно, что в него должны войти все простые множители, входящие как в разложение числа 396, так и в разложение числа 360, потому что это число должно делиться и на 396 и на 360. Вследствие этого надо выписать все простые множители, входящие в разложение одного из чисел, например, числа 396, и дополнить его недостающими множителями из разложения числа 360, т. е. числами 2 и 5. Получим: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 3960$, т. е. НОК (396; 360) = 3960. На основании рассмотренного примера можно сделать вывод — для того чтобы найти НОК двух чисел, необходимо: 1) разложить данные числа на простые множители; 2) составить произведение из всех простых множителей разложения одного из данных чисел и недостающих простых множителей из разложения другого данного числа; 3) найти значение полученного произведения.

Ясно, что в разложение числа, являющегося наибольшим общим делителем чисел 396 и 360, должны войти те простые множители, которые содержатся как в разложении числа 396, так и в разложении числа 360, потому что числа 396 и 360 должны делиться на их НОД. Таким образом, НОД $(396; 360) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Следовательно, чтобы найти НОД двух чисел, надо: 1) разложить данные числа на простые множители; 2) составить произведение из всех общих простых множителей, входящих в каждое из разложений, причем, если множитель входит в разложение с разными показателями, то берут его с меньшим показателем; 3) найти значение полученного произведения.

Найдем, например, НОД чисел 120, 144:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5; \; 144 = 2^4 \cdot 3^2.$$

Следовательно, НОД $(120; 144) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 108, 216:

$$108 = 2^2 \cdot 3^3;\ 216 = 2^3 \cdot 3^3.$$

Значит, НОК $(108; 216) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.

Два натуральных числа, НОД которых равен единице, называют *взаимно простыми*. Числа 6 и 25, например, взаимно простые, так как НОД $(6; 25) = 1$.

Теорема 1.10. *Если k — общее кратное чисел a и b, m — их наименьшее общее кратное, то k делится на m.*

$\triangleright$ Разделив k на m с остатком, получим $k = mq + r$, где r — целое неотрицательное число, причем $0 \leqslant r < m$. Поскольку k и m делятся на a и на b, то на основании следствия из теоремы 1.2 число r также должно делиться и на a и на b, т. е. r должно быть общим кратным этих чисел. Так как $r < m$, а m — НОК чисел a и b, то r может делиться на a и на b лишь в случае, если $r = 0$. Итак, $k = mq$, т. е. k делится на m. $\triangleleft$

Теорема 1.11. *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.*

$\triangleright$ Пусть числа a и b взаимно простые, m — их НОК. Поскольку ab делится и на a и на b, то по теореме 1.10 ab делится на m, т. е. $ab = mk$, где k — натуральное число. Так как m делится на a, то $m = ac$, где c — натуральное число. Подставив $m = ac$ в равенство $ab = mk$, получим $ab = ack$, откуда $b = ck$, т. е. число b делится на k.

Аналогично можно установить, что a делится на k. Согласно условию, числа a и b взаимно просты, поэтому $k = 1$. Равенство $ab = mk$ принимает вид $ab = m$, что доказывает теорему. $\triangleleft$

Следствие. Для того чтобы число a делилось на каждое из взаимно простых чисел b и c, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на их произведение.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.12. *Для того чтобы числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы ни один из простых множителей, входящих в каноническое разложение числа a, не входил в каноническое разложение числа b.*

Легко заметить, что каноническое разложение на простые множители чисел, изображенных единицей с последующими нулями (чисел вида 10^n, n — натуральное число), содержит только двойки и пятерки, причем двоек и пятерок поровну. Кроме того, их столько, сколько нулей имеет число. Например, $10=2\cdot5$; $100=2^2\cdot5^2$; $1000=2^3\cdot5^3$, $10^n=2^n\cdot5^n$.

Можно доказать, что для любых натуральных чисел a и b имеет место равенство: НОД $(a;\ b)$ НОК $(a;\ b)=ab$.

Например, НОД $(72;\ 120)=24$, НОК $(72;\ 120)=360$, значит, НОД $(72;\ 120)\cdot$ НОК $(72;\ 120)=24\cdot360=8640$; произведение чисел 72 и 120 равно $72\cdot120=8640$, поэтому НОД $(72;\ 120)\cdot$ НОК $(72;\ 120)=72\cdot120$.

Упражнения

1. Выполните действия:
а) $(-153+258-435+269)\cdot(-22)$; б) $(-8+32):(-6)-7$;
в) $38\cdot(-3)-(-24)\cdot(-4)+(-16)\cdot(-30)$;
г) $-6\cdot4-84:(-6+2)$.

2. Найдите значение выражения:
а) $(-125)\cdot(-8)\cdot5\cdot(-42):6$;
б) $7a-3-6b$, если $a=-5$; $b=-2$.

3. Докажите следующие утверждения:
а) одно из двух последовательных четных чисел делится на 4;
б) если a — простое число больше трех, то одно из двух чисел $(a-1)$ или $(a+1)$ делится на 3;
в) квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке единицу;
г) при простом натуральном $n\geqslant5$ число n^2-1 делится на 24;
д) если n — натуральное число, то:
$\frac{10^n-4}{3}$ — натуральное число; $\frac{9^{2n}+14}{5}$ — натуральное число;
е) $41^{10}-1$ делится на 10; ж) $89^{26}-45^{25}$ делится на 2.

1.7. Множество рациональных чисел. Арифметические действия над рациональными числами

Рациональной дробью a/b называют упорядоченную пару $(a,\ b)$ целых чисел a и b, у которой $b\neq0$. В рациональной дроби a/b число a называют *числителем*, а число b — *знаменателем*.

Рассмотрим рациональные дроби, числитель и знаменатель которых — положительные числа; такие дроби назовем *положительными*. Знаменатель положительной рациональной дроби показывает, на сколько равных частей разделена единица, а числитель — сколько взято таких частей. Отсюда следует правило сравнения положительных рациональных дробей с равными знаменателями или с равными числителями.

Из двух положительных рациональных дробей с равными знаменателями больше та, числитель которой больше, и меньше та, числитель которой меньше:

$$\left(\frac{a}{c} > \frac{b}{c}\right) \Leftrightarrow (a > b). \qquad (1.7)$$

Из двух положительных рациональных дробей с равными числителями больше та, знаменатель которой меньше, и меньше та, знаменатель которой больше:

$$\left(\frac{a}{b} > \frac{a}{c}\right) \Leftrightarrow (b < c).$$

Положительную рациональную дробь, числитель которой меньше знаменателя, называют *правильной*. Положительная рациональная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называется *неправильной*. Правильная дробь меньше единицы, а неправильная — больше или равна единице, поэтому любая неправильная дробь больше любой правильной дроби.

Введем понятие равенства двух рациональных дробей.

Две рациональные дроби a/b и c/d называют *равными* или *эквивалентными* тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc). \qquad (1.8)$$

Это соотношение эквивалентности обладает следующими свойствами:

1) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$; 2) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$;

3) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, то $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

Первые два свойства очевидны: 1) $ab = ba$, 2) если $ad = bc$, то и $cb = da$. Докажем третье свойство. Из первых двух равенств на основании соотношения (1.8) $ad = bc$, $cf = de$. Умножая почленно эти равенства, находим, что $adcf = bcde$. Отсюда получаем $af = be$, поэтому $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$. Первое свойство называют *свойством рефлексивности*, второе — *свойством симметричности*, третье — *свойством транзитивности*.

Из определения равенства рациональных дробей следует, что

$$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}, \qquad (1.9)$$

где n — любое целое число, отличное от нуля. Равенство (1.9) выражает основное свойство рациональной дроби: рациональная дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же целое число, отличное от нуля. Это равенство позволяет привести две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к общему знаменателю bd: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$. Число d называют *дополнительным множителем первой дроби*, число b — дополнительным множителем второй дроби.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо:

1) найти НОК знаменателей данных дробей;

2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;

3) числитель и знаменатель каждой дроби умножить на ее дополнительный множитель.

Неравенство двух положительных рациональных дробей определяется следующим соотношением: $\left(\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(ad<bc)$.

Это соотношение можно пояснить с помощью соотношения (1.7). Пусть $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. Так как $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$, то $\frac{ad}{bd}<\frac{bc}{bd}$, или $ad<bc$.

Обратное утверждение также верно: если $ad<bc$, то $\frac{ad}{bd}<\frac{bc}{bd}$, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$.

Согласно второму свойству соотношения эквивалентности (1.8), равенство (1.9) можно записать в виде $\frac{na}{nb}=$ $=\frac{a}{b}$. Это равенство означает, что рациональная дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель разделить на одно и то же целое число, отличное от нуля. Следовательно, дробь вида $na/(nb)$ можно заменить равной ей дробью a/b с меньшим числителем и меньшим знаменателем посредством деления числителя и знаменателя на их общий множитель. В этом случае говорят, что дробь $an/(bn)$ сокращена на общий множитель n числителя и знаменателя. Например, числитель и знаменатель дроби 6/15 можно сократить на их общий множитель 3:

$$\frac{6}{15}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{2}{5}$$

Рациональную дробь называют *несократимой*, если ее числитель и знаменатель являются взаимно простыми числами. Например, дробь 7/15 несократима, так 7 и 15 — взаимно простые числа.

Суммой рациональных дробей a/b *и* c/d называют рациональную дробь, определяемую формулой

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}. \tag{1.10}$$

Эта формула означает следующее:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},$$

т. е. дроби с различными знаменателями приводятся к общему знаменателю; при сложении дробей с одинаковыми знаменателями складываются их числители. Например,

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{2\cdot 4+3\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}.$$

Произведением рациональных дробей a/b и c/d называют дробь ac/bd:

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \tag{1.11}$$

Эта формула означает, что при умножении дробей отдельно перемножаются числители и отдельно — знаменатели, полученные результаты соответственно будут числителем и знаменателем произведения данных дробей. Например, $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.

С помощью формулы (1.10) можно получить правило вычитания двух рациональных дробей. *Разностью* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ *дробей* a/b *и* c/d называют дробь $\frac{x}{y}$, такую, что $\frac{c}{d}+\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

Складывая дроби по формуле (1.10) и используя формулу (1.9), находим:

$$\frac{cy+dx}{dy}=\frac{a}{b};\quad \left.\begin{matrix} cy+dx=na; \\ dy=nb \end{matrix}\right\};\ y=\frac{nb}{d};\ x=\frac{n}{d}\left(\frac{ad-bc}{d}\right);$$

$$\frac{x}{y}=\frac{ad-bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}. \qquad (1\ 12$$

Формула (1.11) дает возможность получить правило деления дробей. *Частным* $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ *дробей* $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют такую дробь $\frac{x}{y}$, для которой $\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, $\frac{cx}{dy}=\frac{a}{b}$. Из этой формулы получаем

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\frac{d}{c};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}. \qquad (1.13)$$

Полученная формула означает следующее: чтобы разделить одну дробь на другую, достаточно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй и произведение записать числителем; числитель второй дроби умножить на знаменатель первой и результат записать знаменателем.

Рациональные дроби c/d и p/q называют *обратными,* если

$$\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}=1. \qquad (1.14)$$

Очевидно, что это равенство будет выполнено, если $\frac{p}{q}=\frac{d}{c}$. Таким образом, каждая дробь $c/d\neq 0$ имеет обратную дробь d/c, поскольку для этих дробей выполняется равенство (1.14): $\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}=1$.

Правило (1.13) можно формулировать следующим образом: чтобы разделить дробь a/b на дробь c/d, достаточно умножить дробь a/b на дробь d/c, обратную дроби c/d.

Обратимся к соотношению эквивалентности (1.8) и введем понятие рационального числа. Это соотношение разбивает множество всех рациональных дробей на классы эквивалентности. Приведем примеры таких классов — классов эквивалентных рациональных дробей:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \dots\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \dots\right\}.$$

Рациональным числом называют каждый класс эквивалентных рациональных дробей. Разные классы определяют разные рациональные числа. Например, первый из указанных классов эквивалентности определяет рациональное число $1/2$, а второй — рациональное число $1/3$.

Для обозначения рациональных чисел r применяют рациональные дроби a/b из класса эквивалентности, задающего это число: $\frac{a}{b} \in r$. Таким образом, одно и то же рациональное число может быть записано разными, но эквивалентными дробями. Например, рациональное число $\frac{1}{2}$ можно записать каждой из рациональных дробей:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \ldots, \frac{n}{2n}, \ldots (n \in \mathbf{N}).$$

Если каждому рациональному числу, содержащему рациональную дробь вида $a/1$, поставить в соответствие целое число a, то получится взаимно однозначное отображение множества указанных рациональных чисел на множество $\mathbf{Z}$ целых чисел. Рациональные числа, содержащие рациональные дроби вида $a/1$, обозначают a.

Рациональное число, содержащее рациональную дробь вида $0/b$, называют *нулем*.

Если r — рациональное число и $\frac{a}{b} \in r$, то рациональное число, содержащее рациональную дробь $-a/b$, называют *рациональным числом, противоположным числу* r, и обозначают $-r$. Рациональное число называют *положительным*, если оно содержит рациональную дробь a/b, у которой a и b одного знака. Рациональное число называют *отрицательным*, если оно содержит дробь a/b, у которой a и b имеют разные знаки. Если рациональное число положительно, то противоположное ему число отрицательно; если рациональное число отрицательно, то противоположное ему число положительно.

Таким образом, получено множество рациональных чисел, которое в качестве своего подмножества содержит множество $\mathbf{Z}$ целых чисел. Множество рациональных чисел обозначают $\mathbf{Q}$. Из сказанного следует, что $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Сравнение рациональных чисел производится следующим образом. Всякое положительное число r_1 считается больше нуля: $r_1 > 0$; всякое отрицательное рациональное число r_2 считается меньше нуля: $r_2 < 0$; всякое отрицательное рациональное число считается меньше всякого положительного. Положительное рациональное число r' считается меньше положительного рационального числа r'': $r' < r''$, если существуют такие рациональные дроби: $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, что $ad < bc$. Отрицательное рациональное число r' считается меньше отрицательного рационального числа r'', если положительное рациональное число $-r'$ больше положительного рационального числа $-r''$: $-r' > -r''$. Модуль $|r|$ рационального числа определяется так: $|r| = r$, если $r \geqslant 0$; $|r| = -r$, если $r < 0$.

Суммой рациональных чисел r' и r'' называют класс эквивалентных рациональных дробей, содержащий сумму рациональных дробей a/b и c/d, принадлежащих r' и r'': $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$.

Произведением рациональных чисел r' и r'' называют класс эквивалентных рациональных дробей, содержащий произведение рациональных дробей a/b и c/d, принадлежащих r' и r'': $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$.

Сравнение, сумма и произведение рациональных чисел r' и r'' не зависят от выбора представителей в классах эквивалентности $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$, т. е. однозначно определяются самими рациональными числами r' и r''.

Арифметические действия над рациональными числами r' и r'' осуществляются по формулам (1.10) — (1.13) применительно к представителям этих чисел: $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$.

В заключение отметим, что из любой неправильной рациональной дроби можно выделить целую часть. Для этого нужно разделить с остатком числитель на знаменатель; частное от деления будет целой частью, остаток — числителем, а делитель — знаменателем дробной части. Выделим, например, целую часть неправильной дроби 54/5. Так как $54 = 10 \cdot 5 + 4$, то

$$\frac{54}{5} = \frac{10 \cdot 5 + 4}{5} = 10 + \frac{4}{5} = 10\frac{4}{5}.$$

Обратно, число $10\frac{4}{5}$ можно записать в виде неправильной дроби со знаменателем, равным знаменателю дробной части числа, и числителем, равным сумме произведения его целой части на знаменатель дробной части и числителя дробной части:

$$10\frac{4}{5}=10+\frac{4}{5}=\frac{10\cdot 5}{5}+\frac{4}{5}=\frac{10\cdot 5+4}{5}=\frac{54}{5},\quad 10\frac{4}{5}=\frac{54}{5}.$$

1.8. Отношения и пропорции

Частное двух чисел a и b иначе называют отношением a к b. Отношение двух положительных чисел показывает, во сколько раз одно число больше другого, или какую часть одно число составляет от другого.

Равенство двух отношений называют *пропорцией*.

Пропорцию можно записать так:

$$a:b=c:d \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \qquad (1.15)$$

Будем считать, что все члены пропорции отличны от нуля.

В пропорции $a:b=c:d$ числа a и d называют *крайними членами*, а числа b и c — *средними членами пропорции*; отношение $a:b$ называют *первым отношением пропорции*, отношение $c:d$ — *вторым отношением*, числа a и c называют *предыдущими членами* этих отношений, а b и d — *последующими членами*.

Пропорция считается верной, если значениями ее левой и правой частей является одно и то же число.

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов.

Обратно, если произведение крайних членов равно произведению средних членов, то пропорция верна.

Докажем это свойство, которое называют *основным свойством пропорции*.

▷ Пусть дана пропорция $a:b=c:d$. Если пропорция верна и значение первого отношения равно k, то и значение второго отношения равно k: $a:b=k$ и $c:d=k$, поэтому $a=bk$, а $c=dk$.

Составим произведение крайних и произведение средних членов пропорции: $ad=(bk)d=bkd$, $bc=b(dk)=bkd$. Следовательно, произведение крайних членов пропорции (1.15) равно произведению ее средних членов, т. е., если $a:b=c:d$, то

$$ad=bc. \qquad (1.16)$$

Обратно, разделив обе части равенства $ad = bc$ на bd ($bd \neq 0$), получим $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, т. е., если произведение двух чисел равно произведению двух других, то из этих четырех чисел можно составить пропорцию, беря множители одного произведения за крайние, а множители другого произведения за средние члены пропорции. ◁

Пусть $ad = bc$ и все числа a, b, c, d отличны от нуля. Разделив обе части этого равенства первый раз на bd, второй — на ab, третий — на ac, четвертый — на cd, получим соответственно четыре пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \qquad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}. \tag{1.17}$$

Первое и второе равенства означают, что в верной пропорции можно менять местами крайние члены; второе и третье равенства свидетельствуют о том, что в пропорции можно менять средние члены; первое и четвертое равенства говорят о том, что в пропорции можно ставить оба крайних члена на места средних, а оба средних — на места крайних. Получившиеся при этом новые пропорции будут верны.

Прибавив по единице к обеим частям первого из равенств (1.17), получим

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \text{ или } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \tag{1.18}$$

т. е. в верной пропорции сумма членов первого отношения так относится к своему последующему члену, как сумма членов второго отношения — к своему последующему.

Вычитая по единице из обеих частей первого из равенств (1.17), получаем

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \text{ или } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \tag{1.19}$$

т. е. в верной пропорции разность членов первого отношения так относится к своему последующему члену, как разность членов второго отношения — к своему последующему.

Разделив почленно равенство (1.18) на первое из равенств (1.17), найдем

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}, \tag{1.20}$$

т. е. в верной пропорции сумма членов первого отношения так относится к своему предыдущему члену, как сумма членов второго отношения — к своему предыдущему.

Разделив почленно равенство (1.19) на первое из равенств (1.17), получим

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}, \tag{1.21}$$

т. е. в верной пропорции разность членов первого отношения так относится к своему предыдущему члену, как разность членов второго отношения — к своему предыдущему.

Разделив почленно равенство (1.20) на равенство (1.21), получим

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \tag{1.22}$$

т. е. в верной пропорции сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения — к их разности.

Пропорции (1.18) — (1.22) называют *производными пропорциями.*

Рассмотрим пропорцию $a:x=c:d$, где x — неизвестная величина, a, c, d — заданные числа. По основному свойству пропорции $ad=cx$, откуда $x=(ad):c$, т. е. неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на известный средний член. Аналогично неизвестный крайний член пропорции равен произведению ее средних членов, деленному на известный крайний член.

Пример. Найти x из пропорции $\frac{a+x}{x-a}=\frac{b}{c}$.

Составим производную пропорцию вида (1.22) и найдем x:

$$\frac{(x+a)+(x-a)}{(x+a)-(x-a)}=\frac{b+c}{b-c};\qquad \frac{x}{a}=\frac{b+c}{b-c};\qquad x=\frac{(b+c)a}{b-c}.$$

Замечание. Можно использовать и свойство (1.16): $(a+x)c=(x-a)b$, откуда $ac+cx=bx-ab$, $x(c-b)=-(ac+ab)$, $x=\frac{a(b+c)}{b-c}$.

Рассмотрим ряд равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Обозначим общее значение всех этих отношений k.

Тогда

$$\frac{a_1}{b_1}=k; \qquad \frac{a_2}{b_2}=k; \qquad \frac{a_3}{b_3}=k; \ ...; \qquad \frac{a_n}{b_n}=k,$$

откуда $a_1=b_1k$; $a_2=b_2k$; $a_3=b_3k$; ...; $a_n=b_nk$.

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=k(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n),$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k,$$

т. е.

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Итак, если несколько отношений равны друг другу, то отношение суммы их предыдущих членов к сумме последующих равно каждому из этих отношений.

1.9. Десятичные дроби. Проценты

Основные понятия. *Десятичной дробью* называют дробь, знаменатель которой — число, выраженное единицей с одним или несколькими нулями, т. е. дробь вида $n/10^k$ (n — целое, k — натуральное число). Десятичные дроби условились записывать без знаменателей: сначала пишут целую часть, а потом числитель дробной части. Целую часть отделяют запятой от числителя дробной части. При этом числитель дробной части пишут так, чтобы в нем было столько цифр, сколько нулей в знаменателе. Если в числителе меньше цифр, чем нулей в знаменателе, то перед числителем добавляют соответствующее количество нулей. Например,

$$5\frac{13}{100}=5{,}13; \qquad \frac{3}{10}=0{,}3; \ \frac{7}{100}=\frac{07}{100}=0{,}07;$$

$$7\frac{19}{1000}=7\frac{019}{1000}=7{,}019.$$

Если к десятичной дроби приписать справа нуль, то получится равная ей дробь. Например, $0{,}75=0{,}750=0{,}7500$; $12=12{,}0=12{,}00$. Если десятичная дробь оканчивается нулем, то этот нуль можно отбросить, получится равная ей дробь. Например, $0{,}500=0{,}50=0{,}5$; $40{,}00=40{,}0=40$.

Из двух десятичных дробей с разными целыми частями меньше та, у которой целая часть меньше: $4{,}23 < 7{,}35$. Чтобы сравнить две дроби с одинаковыми целыми частями, надо уравнять, приписывая справа нули, число десятичных знаков после запятой в обеих дробях и сравнить их дробные части ($7{,}6 > 7{,}593$; $7{,}600 > 7{,}593$).

Как и в целой части, значения цифр после запятой в десятичной дроби зависят от их места (позиции). Например, дробь 0,777 можно представить так:

$$0{,}777 = \frac{777}{1000} = \frac{700}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{7}{1000} = 0{,}700 + 0{,}070 + 0{,}007.$$

Таким образом, первая цифра 7 показывает число десятых, вторая — число сотых, а третья — число тысячных. В соответствии с этим первый разряд после запятой называют разрядом десятых, второй — разрядом сотых, третий — разрядом тысячных и т. д. Запись $435{,}072 = 400 + 30 + 5 + 0{,}070 + 0{,}002$ называют разложением дроби 435, 072 в виде суммы разрядных слагаемых.

Действия над десятичными дробями. Сложение и вычитание десятичных дробей, как и натуральных чисел, удобно записывать «столбиком»:

$$\begin{array}{r} 4{,}35 \\ +\;3{,}21 \\ \hline 7{,}56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12{,}730 \\ +\;123{,}687 \\ \hline 136{,}417 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142{,}653 \\ -\;17{,}432 \\ \hline 125{,}221 \end{array}$$

Чтобы сложить две десятичные дроби, необходимо: 1) в слагаемых уравнять число знаков после запятой; 2) слагаемые записать одно под другим так, чтобы запятая оказалась под запятой; 3) сложить получившиеся дроби, как складывают натуральные числа; 4) в полученной сумме поставить запятую под запятыми в слагаемых.

Аналогично формулируется правило для вычитания десятичных дробей.

Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятую, а затем в произведении отделить справа налево запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе. Если в произведении получается меньше цифр, чем нужно отделить запятой, то впереди пишут соответствующее количество нулей. По этому же правилу умножается натуральное число на десятичную дробь и десятичная дробь на натуральное число.

Примеры умножения:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}835 \\ 0{,}95 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 4175 \\ 7515 \end{array} \\ \hline 0{,}79325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}142 \\ 0{,}013 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 426 \\ 142 \end{array} \\ \hline 0{,}001846 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 48 \\ 0{,}28 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 384 \\ 96 \end{array} \\ \hline 13{,}44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}83 \\ 306 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 498 \\ 249 \end{array} \\ \hline 253{,}98 \end{array}$$

Отметим частные случаи умножения десятичных дробей. Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., необходимо в этой дроби перенести запятую вправо соответственно на 1, 2, 3 и т. д. цифры. Например, $6{,}23 \cdot 10 = 62{,}3$; $3{,}547 \cdot 100 = 354{,}7$; $2{,}481 \cdot 1000 = 2481$.

Чтобы умножить десятичную дробь на 0,1, на 0,01, на 0,001 и т. д., надо в этой дроби перенести запятую влево соответственно на 1, 2, 3 и т. д. цифры. Например, $70{,}3 \cdot 0{,}1 = 7{,}03$; $3{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}0302$.

При делении десятичной дроби на натуральное число запятая в частном ставится, когда кончается деление целой части. Если целая часть меньше делителя, то в ответе получается нуль целых. Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число. Если в делимом после запятой меньше цифр, чем в делителе, то справа к нему надо приписать столько нулей, чтобы уравнять число цифр после запятой в делимом и делителе.

Например, разделим 1,1 на 0,02. Так как в делимом только одна цифра после запятой, припишем к нему справа один нуль и перенесем в делимом и делителе запятую на две цифры вправо.

В результате получим $1{,}1 : 0{,}02 = 110 : 2 = 55$.

Примеры деления чисел:

$$
\begin{array}{r|l}
-10{,}12 & 4 \\ \cline{2-2}
8 & 2{,}53 \\ \cline{1-1}
-21 & \\
20 & \\ \cline{1-1}
-12 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3{,}41 & 5 \\ \cline{2-2}
30 & 0{,}682 \\ \cline{1-1}
-41 & \\
40 & \\ \cline{1-1}
-10 & \\
10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$11{,}045:2{,}35=4{,}7 \qquad 21{,}07:0{,}7=30{,}1$$

$$
\begin{array}{r|l}
-1104{,}5 & 235 \\ \cline{2-2}
940 & 4{,}7 \\ \cline{1-1}
-1645 & \\
1645 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-210{,}7 & 7 \\ \cline{2-2}
21 & 30{,}1 \\ \cline{1-1}
-07 & \\
7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Проценты. Часто приходится рассматривать сотые части разных величин: денежных сумм, массы продуктов, объема товаров и т. д. (сотую часть рубля называют копейкой, сотую часть метра — сантиметром).

Процентом называют одну сотую часть числа. Если слово «процент» следует после числа, записанного цифрами, то вместо него ставят знак %. Задачи на проценты можно решать, например, с помощью пропорций. Приведём примеры решения таких задач.

Задача 1. В школе 800 учащихся. Среди них 408 мальчиков. Сколько процентов учащихся этой школы составляют мальчики?

Сначала узнаем, сколько учащихся приходится на 1 %. Поскольку всех учащихся 800, то на 1 % приходится $800:100=8$ учащихся. Далее получаем, что мальчики составляют 51 %, так как $408:8=51$ (%)

Задача 2. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Если 138 разделим на 23, то получим, что 6 страниц приходится на 1 %. Поскольку все страницы в книге составляют 100 %, значит, в ней было $6\cdot100=600$ (страниц).

Задача 3. В магазине за два дня продано 1280 кг яблок. В первый день продано 55 % всех яблок. Сколько килограммов яблок продано во второй день?

В первый день продано 55 % всех яблок, значит, во второй день продано 45 % яблок, что составляет $1280\cdot0{,}45=576$ (кг).

Задача 4. По плану рабочий должен был изготовить 60 деталей. Однако он сделал на 18 деталей больше, чем предусматривалось планом. На сколько процентов рабочий выполнил план?

Один процент плана составляет $60:100=0{,}6$ детали. Рабочий сделал $60+18=78$ (деталей) Значит, он выполнил план на 78 0,6 = 130 (%)

Округление десятичных дробей. В некоторых случаях представляется необходимым и целесообразным округление десятичных дробей до какого-нибудь разряда. При сравнении числа и его приближения используют знак $\approx$ (приближенно равно). При округлении десятичных дробей до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра 5, 6, 7, 8 или 9, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу. Если первая следующая за этим разрядом цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют. Если отбрасываемая цифра стояла до запятой, то на ее месте пишут нуль.

Пример 1. Округлить до единиц 76,2358.

Отбросим все цифры, стоящие после запятой. Так как первой из отброшенных цифр была цифра 2, то цифру единиц не меняем: $76{,}2358 \approx 76$.

Пример 2. Округлить до сотых 123, 4579.

Отбросим все цифры, следующие за сотыми. Поскольку следующая за цифрой сотых (5) стоит цифра 7, то цифру сотых увеличиваем на единицу: 123, $4579 \approx 123{,}46$.

Пример 3. Округлить до сотен число 3542,7.

Заменяем все цифры, следующие за сотнями, нулями, а цифру 7 после запятой отбрасываем. Первой из замененных нулями цифр была цифра 4, поэтому цифру в разряде сотен не изменяем: $3542{,}7 \approx 3500$.

Упражнения

1. Найдите значения выражений:

а) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot 1{,}8\cdot 1\frac{1}{5}:0{,}07}{\frac{1}{5}:0{,}49\cdot 2\frac{5}{8}}$; б) $\dfrac{0{,}2\left(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)}{2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}1}$;

в) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}:\frac{7}{18}}$; г) $\dfrac{28{,}8:13\frac{5}{7}+6{,}6:\frac{2}{3}}{1\frac{11}{16}:2{,}25}$;

д) $1\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-3\frac{3}{8}+1\frac{5}{8}\right)-1\frac{5}{6}$;

е) $\frac{5}{16}:0{,}125+1{,}456\cdot\frac{7}{25}-4{,}5\cdot\frac{4}{5}$

2. Решите уравнения:

а) $3(2{,}5x-0{,}2)-15\frac{1}{15}=8-\left(\frac{2}{3}-0{,}5x\right)$;

б) $\frac{10{,}5}{y-3{,}6}=\frac{51}{y+1{,}8}$; в) $\frac{2x-3{,}2}{1{,}2}=\frac{5x-6}{0{,}5}$.

Ответы

1. в) 1; г) 16; д) $3\frac{5}{6}$; е) 4,1.

2. а) $3\frac{2}{7}$; б) 5; в) 1,12.

1.10. Бесконечные десятичные дроби. Периодические десятичные дроби

С помощью деления числителя на знаменатель любое дробное неотрицательное число $\frac{a}{b}$ (a, b — целые числа, $a \geqslant 0$, $b > 0$) можно обратить в конечную или бесконечную десятичную дробь. Например, $\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{7}{25}=0{,}28$; $\frac{7}{3}=2{,}3333...$ Для единообразия конечные десятичные дроби и целые числа будем дополнять бесконечной последовательностью нулей, например, $\frac{1}{4}=0{,}2500...$; $15=15{,}00...$ Следовательно, любое неотрицательное рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $r=a_0,\ a_1a_2a_3...$, где a_0 — целая часть числа r; $0,\ a_1a_2a_3...$ — его дробная часть. Такое представление возможно и для отрицательных рациональных чисел.

Бесконечную десятичную дробь $a_0,\ a_1a_2a_3...$ называют *периодической*, если у нее, начиная с некоторого места, одна цифра или группа цифр повторяется, непосредственно следуя одна за другой. Повторяющуюся группу цифр называют *периодом* и записывают в скобках. Так, вместо 5,666... пишут 5,(6) и читают: пять целых и шесть в периоде.

Представление рационального числа в виде десятичной дроби получают с помощью деления. Запишем, например, число 7/12 в виде десятичной дроби. Будем делить 7 на 12:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,70 & 12 \\
\underline{60} & 0{,}583 \\
-\,100 & \\
\underline{96} & \\
-\,40 & \\
\underline{36} & \\
40 &
\end{array}
$$

В остатке снова получилось 40, дальнейшее деление можно не выполнять: как остатки, так и цифры в частном будут повторяться. Итак, $7/12 = 0{,}58(3)$.

Читателю предлагается убедиться в том, что $3/14 = 0{,}2(142857)$.

Рассмотрим теоремы, указывающие условия, при которых несократимая дробь a/b обращается в конечную десятичную дробь или в бесконечную периодическую десятичную дробь.

Теорема 1.13. *Несократимую дробь a/b можно обратить в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда в разложении ее знаменателя на простые множители содержатся только двойки и пятерки, или $b = 1$.*

▷ *Необходимость.* Пусть несократимая дробь a/b (a и b — взаимно простые числа) обращается в конечную десятичную дробь. Значит, $\frac{a}{b} = \frac{n}{10^k}$ (n — целое, k — натуральное число), откуда

$$n = \frac{a \cdot 10^k}{b}. \tag{1.23}$$

Поскольку a и b — взаимно простые числа, а n — целое число, то равенство (1.23) возможно тогда и только тогда, когда 10^k разделится на b. Но $10^k = 2^k \cdot 5^k$, поэтому число b в своем разложении на простые множители не может иметь других множителей, кроме 2 и 5, т. е. необходимо, чтобы

$$b = 2^m \cdot 5^p, \tag{1.24}$$

где m и p — целые неотрицательные числа, не большие k.

Достаточность. Пусть выполнено равенство (1.24), т. е. число b имеет в своем разложении только 2 и 5. Предложим, что $m \geqslant p$, тогда $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m 5^p} = \frac{a \cdot 5^{m-p}}{2^m 5^p 5^{m-p}} = \frac{a \cdot 5^{m-p}}{2^m 5^m} = \frac{n}{10^m}$, где $n = a \cdot 5^{m-p}$ — целое число. ◁

Теорема 1.14. Если $b \neq 2^m 5^p$, где m и p — целые неотрицательные числа, то, обращая несократимую дробь a/b в десятичную, получают бесконечную периодическую десятичную дробь.

▷ Поскольку дробь a/b несократима (a и b — взаимно простые числа), то деление a на b не может закончиться остатком, равным нулю, а также не может привести к конечной десятичной дроби (так как не выполнено условие (1.24)). В результате деления получим бесконечную десятичную дробь. Выполняя деление a на b, будем получать остатки, меньшие делителя b, причем различных остатков будет не больше $b-1$ и остатками могут быть числа $1, 2, 3, \ldots, b-1$. Остатков конечное число, а процесс деления бесконечен. Следовательно, начиная с некоторого, остатки начнут повторяться. Если повторится какой-то остаток, то повторится и соответствующая цифра в частном, и после этого остатка будут повторяться в той же последовательности остатки и соответствующие им цифры частного. В результате получится бесконечная десятичная периодическая дробь. ◁

Следствие. Каждое рациональное число можно представить бесконечной периодической дробью.

Это утверждение следует из доказанных теорем и соглашения о том, чтобы считать конечные десятичные дроби и целые числа (дополняя их бесконечной последовательностью нулей) бесконечными десятичными дробями,

Замечание. Бесконечные десятичные дроби с нулем в периоде получаются в случае, когда некоторый остаток в процессе деления оказывается равным нулю.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.15. Любая периодическая дробь является представлением некоторого рационального числа.

На примерах покажем, как находить соответствующие числа.

Пример 1. Записать периодическую дробь 0,(45) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь x: $x = 0,(45)$. Умножив это равенство на 100, получим $100x = 45,(45)$. Вычитая первое равенство из последнего, находим $100x - x = 45,(45) - 0,(45)$, $99x = 45 - 0$,

$$x = \frac{45-0}{99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Пример 2. Записать периодическую дробь 2,3(41) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь $x: x = 2{,}3(41)$. Умножив это равенство на 10 и на 1000, получим $10x = 23{,}(41)$, $1000x = 2341{,}(41)$. Вычитая из последнего равенства предыдущее, находим $1000x - 10x = 2341{,}(43) - 23{,}(41) = 2341 - 23$, $990x = 2341 - 23$,

$$x = \frac{2341 - 23}{990} = \frac{2318}{990} = \frac{1159}{495}.$$

Пример 3. Записать периодическую дробь 3,46(8) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через $x: x = 3{,}46(8)$. Умножив это равенство на 100 и на 1000, получим $100x = 346{,}(8)$, $1000x = 3468{,}(8)$. Вычитая из последнего неравенства предыдущее, находим: $1000x - 100x = 3468{,}(8) - 346{,}(8) = 3468 - 346$, $900x = 3468 - 346$,

$$x = \frac{3468 - 346}{900} = \frac{3122}{900} = \frac{1561}{450}.$$

Обращение периодической дроби в обыкновенную проводят по следующему правилу.

Чтобы записать данную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девятки дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Если к полученной обыкновенной дроби применить правило деления чисел, то получим, что эта дробь равна данной периодической дроби.

Замечание. Легко видеть, что

$$3{,}7(0) = \frac{370 - 37}{90} = \frac{333}{90} = 3{,}7; \quad 3{,}6(9) = \frac{369 - 36}{90} = \frac{333}{90} = 3{,}7$$

Следовательно, $3{,}7 = 3{,}7(0) = 3{,}6(9)$.

Аналогично можно показать, что $8{,}36 = 8{,}36(0) = 8{,}35(9)$, $0{,}042 = 0{,}042(0) = 0{,}041(9)$, $14{,}2917 = 14{,}2917(0) = 14{,}2916(9)$.

Таким образом, периодические дроби с периодом 9 всегда можно заменить соответствующими конечными десятичными дробями. Это нужно иметь в виду при сравнении двух бесконечных десятичных дробей.

При сравнении двух бесконечных десятичных дробей (не имеющих периода 9) пользуются следующим правилом:

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ldots < b_0,\ b_1b_2b_3\ldots,$$

если $a_k = b_k$ и $a_i < b_i$ при всех $k < i$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, 3, \ldots$).

Таким образом, если целые части двух десятичных дробей разные, то та дробь больше, у которой целая часть больше. Если целые части одинаковы, то надо обратиться к наименьшему разряду, для которого цифры дробей различны: та из дробей больше, у которой цифра этого разряда больше. Например, $2{,}753282 < 3{,}145698$; $4{,}58365 < 4{,}58371$; $2{,}35000 < 2{,}35010$; $7{,}128364 < 7{,}128367$.

1.11. Понятие об иррациональных числах. Множество действительных чисел. Числовая ось

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a. Для арифметического квадратного корня из числа a принято обозначение $\sqrt{a}$.

Теорема 1.16. *Среди рациональных чисел нет такого, которое явилось бы значением* $\sqrt{2}$.

▷ Допустим противное: существует такое рациональное число, квадрат которого равен 2. Это число можно представить в виде несократимой дроби m/n, где m, n — натуральные числа. Тогда $\sqrt{2} = m/n$, $2 = m^2/n^2$, $m^2 = 2n^2$. Поскольку число $2n^2$ — четное, то и равное ему число m^2 тоже четное, поэтому число m — также четное (так как квадрат нечетного числа есть нечетное число), т. е. $m = 2k$, где k — натуральное число. Подставив это выражение в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $(2k)^2 = 2n^2$, $4k^2 = 2n^2$, $2k^2 = n^2$. Так как $2k^2$ — четное число, то n^2 — также четное, поэтому и n — четное число. Итак, m и n — четные числа, а это противоречит предположению о том, что дробь m/n несократима. Значит, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Следовательно, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. ◁

Это число называют *иррациональным*. Иррациональными числами являются $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ и т. п. Отметим, что к иррациональным числам относится число π, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру.

В § 1.10 доказано, что каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью. Было отмечено также, что любая периодическая десятичная дробь является представлением некоторого рационального числа.

Кроме периодических бесконечных десятичных дробей, существуют *непериодические дроби*: такова, например, дробь 0,212112111211112111112..., у которой после первой двойки одна единица, после второй — две единицы и т. д. Каждая непериодическая бесконечная десятичная дробь $x = a_0, a_1a_2\ldots a_n \ldots$, где a_0 — целая часть числа x, a_1, a_2, ..., a_n, ... — десятичные знаки, является представлением некоторого нового (не рационального) числа, называемого иррациональным. Множество всех таких чисел называют *множеством иррациональных чисел*.

Множеством действительных (вещественных) чисел называют множество всех рациональных и всех иррациональных чисел. Таким образом, оказывается, что любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью. Множество всех действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Действительные числа упорядочены по величине, т. е. для любых двух действительных чисел x и y справедливо одно и только одно из соотношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$. Смысл неравенства между действительными числами определяется правилом сравнения бесконечных десятичных дробей (см. § 1.10).

Для действительного числа $x = a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ приближения с точностью до 10^{-n} по недостатку (x_n) и по избытку (x_n') определяются так:

$$x_n = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n;\quad x_n' = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$$

Очевидно, что $x_n' = x_n + 10^{-n}$, $x_n \leqslant x < x_n'$.

Прибавление к десятичной дроби числа 10^{-n} равносильно увеличению последней цифры дроби на единицу. Отметим, что каждое из десятичных приближений x_n и x_n' действительного числа x является рациональным числом.

Пример. Выпишем первые пять приближений (по недостатку и избытку) для числа 7,2431: $7 \leqslant x < 7 + 1$; $7{,}2 \leqslant x < 7{,}2 + 0{,}1$; $7{,}24 \leqslant x < 7{,}24 + 0{,}01$; $7{,}243 \leqslant x < 7{,}244$; $7{,}2431 \leqslant x < 7{,}2432$.

Для действительных чисел можно определить арифметические операции сложения и умножения. Вычитание определяется как действие, обратное сложению, а деление — как действие, обратное умножению. Основные свойства арифметических действий над целыми числами остаются справедливыми и для действительных чисел.

Определим сумму и произведение двух действительных чисел x и y. Для их приближений по недостатку и избытку с точностью до 10^{-n} верны неравенства $x_n \leqslant x < x'_n$, $y_n \leqslant y < y'_n$.

Суммой действительных чисел x и y называют такое действительное число z, которое при любом целом неотрицательном n удовлетворяет неравенствам $x_n + y_n \leqslant \leqslant z < x'_n + y'_n$. Можно доказать, что такое число существует и является единственным.

Произведением неотрицательных действительных чисел x и y называют такое действительное число z, которое при любом целом неотрицательном n удовлетворяет неравенствам $x_n y_n \leqslant z < x'_n y'_n$. Можно доказать, что такое число существует и является единственным.

Действительные числа можно изображать точками координатной оси. Координатная прямая уже была описана в § 1.2. Отличие состоит в том, что теперь каждой точке прямой отвечает действительное число. Числу по-прежнему отвечает точка (см. ниже). Пусть O и M_0 — точки координатной прямой, расстояние между ними равно единице: $|OM_0| = 1$ (рис. 1.2). Точка O делит прямую на два луча: положительный луч OE и отрицательный луч. Каждой точке M луча OE соответствует неотрицательное число.

$$x_M = |OM|,$$

которое называют *координатой точки* M и записывают $M(x)$. Координата начальной точки O равна нулю. Если точка M принадлежит отрицательному лучу, то ее координатой служит число $x_M = -|OM|$. Вся координатная прямая обозначается Ox. Каждой точке координатной прямой соответствует определенное действительное число — ее координата; обратно, для любого действительного числа x можно построить точку, координатой которой является это число. Например, если дано действительное число $\sqrt{2}$, то можно построить точку $M(\sqrt{2})$. Это построение приведено на рис. 1.3. (Здесь использована теорема Пифагора: $|OM| = |OA|$, $|OA| = \sqrt{|OE|^2 + |AE|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.)

Следовательно, между действительными числами и точками координатной прямой установлено взаимно однозначное соответствие. Если $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ — две точки координатной прямой, то расстояние между ними вычисляется по формуле $d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$, где $|x_2 - x_1|$ — модуль разности $x_2 - x_1$ (см. § 1.12). Доказа-

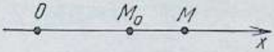


Рис. 1.2

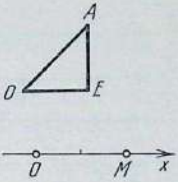


Рис. 1.3

тельство этой формулы можно получить, рассмотрев различные случаи расположения точек M_1, M_2 относительно точки O (рис. 1.4).

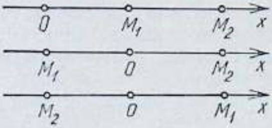


Рис. 1.4

Пример 1. Найти расстояние между точками $M_1(5)$ и $M_2(-3)$. $d = |5 - (-3)| = |5 + 3| = 8$, или $d = |-3 - 5| = |-8| = 8$.

Пример 2. Найти расстояние между точками $M_1(-7)$ и $M_2(-12)$.

$$d = |(-7) - (-12)| = |-7 + 12| = |5| = 5,$$

или

$$d = |(-12) - (-7)| = |-5| = 5.$$

Установленное взаимно однозначное соответствие между действительными числами x и изображающими их точками $M(x)$ координатной прямой позволяет говорить о числах, пользуясь геометрической терминологией.

Будем считать, что координатная прямая расположена горизонтально; за положительное направление на ней выбрано направление слева направо. В этом случае неравенство $x_1 < x_2$ означает, что точка $M(x_1)$ лежит справа от точки $M(x_2)$. В этом случае можно говорить также, что само число x_1 лежит левее числа x_2. Если $x_1 < x_2 < x_3$ или $x_3 < x_2 < x_1$, то говорят, что число x_2 лежит между числами x_1 и x_3. Число $|x_2 - x_1|$, выражающее расстояние между точками $M(x_1)$ и $M(x_2)$, называют *расстоянием между числами* x_1 и x_2.

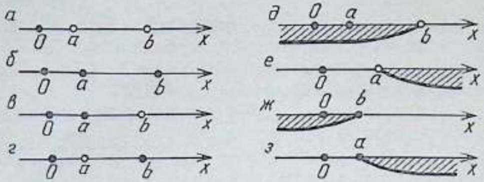


Рис. 1.5

Множество всех действительных чисел называют *числовой осью;* оно изображается всей координатной прямой, его обозначают $(-\infty; +\infty)$ (читается: промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности).

Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$ $(a < b)$, называют *числовым промежутком* (или *промежутком*) и обозначают $(a; b)$ (читается: «промежуток от a до b») (рис. 1.5, *а*).

Множество всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$ и $a < x \leqslant b$, обозначают соответственно: $[a; b]$ (читается: «промежуток от a до b, включая a и b»), $[a; b)$ и $(a; b]$ (рис. 1.5, *б*, 1.5, *в*, 1.5, *г*).

Промежуток (a, b) называют *интервалом*, промежуток $[a; b]$ — *отрезком* или *сегментом*, а промежутки $[a; b)$, $(a; b]$ — *полуинтервалами*.

Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $x < b$, изображается полупрямой, расположенной влево от точки с координатой b. Это множество обозначают $(-\infty; b)$ (читается: «промежуток от минус бесконечности до b») (рис. 1.5, *д*). Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $x > a$, представляет собой промежуток, который обозначают $(a; +\infty)$ (читается: «промежуток от a до плюс бесконечности») (рис. 1.5, *е*). Множество всех чисел, удовлетворяющих условиям $x \leqslant b$ и $x \geqslant a$, обозначают соответственно $(-\infty; b]$ и $[a; +\infty)$ (рис. 1.5, *ж*, 1.5, *з*).

1.12. Модуль действительного числа, его свойства

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа называют неотрицательное действительное число $|x|$, определяемое формулой:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|3{,}5| = 3{,}5$; $|-17| = 17$; $|0| = 0$.

Модуль действительного числа геометрически представляет собой расстояние (рис. 1.6, *а*) от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала отсчета (точки O). Следовательно, неравенство $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x < \varepsilon$ (рис. 1.6, *б*), неравенство $|x - a| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) равносильно неравенствам $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (рис. 1.6, *в*), неравенство $|x| > \varepsilon$ — неравенству $x < -\varepsilon$ или $x > \varepsilon$ (рис. 1.6, *г*).

Из определения модуля следует, что для любого действительного числа выполняются соотношения:

1) $|x| \geqslant 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $x \leqslant |x|$.

Эти соотношения обозначают следующее: 1 — модуль действительного числа x есть число неотрицательное; 2 — противоположные числа x и $-x$ имеют равные модули; 3 — любое действительное число не больше своего модуля.

Отметим некоторые свойства модуля действительного числа.

1. Модуль суммы двух действительных чисел не больше суммы модулей слагаемых:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1.25}$$

$\triangleright$ Действительно, если $x + y \geqslant 0$, то по определению $|x + y| = x + y$. В соответствии с соотношением 3 имеем $x \leqslant |x|$ и $y \leqslant |y|$, поэтому $|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$, т. е. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Если $x + y < 0$, то $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |-x| + |-y| = |x| + |y|$. Отметим, что равенство в выражении (1.25) будет только в случае, когда x и y имеют один и тот же знак. $\triangleleft$

Это свойство верно для любого числа слагаемых:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

2. Модуль разности двух действительных чисел не меньше разности модулей уменьшаемого и вычитаемого: $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.

$\triangleright$ Положим $x-y=z$, тогда $x=y+z$ и в соответствии с выражением (1.25) $|x|=|y+z| \leqslant |y|+|z|=$

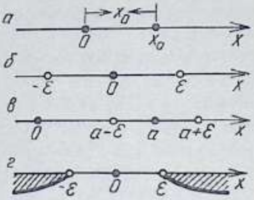


Рис 1.6

$=|y|+|x-y|$, т. е. $|x| \leqslant |y|+|x-y|$, откуда $|x-y| \geqslant |x|-|y|$. $\triangleleft$

3. Модуль произведения двух действительных чисел равен произведению модулей множителей: $|xy|=|x|\,|y|$.

4. Модуль частного двух действительных чисел равен частному модулей делимого и делителя:

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

1.13. Понятие о полной и неполной индукции. Метод математической индукции

Метод рассуждений, ведущий от частных случаев к некоторому общему выводу, называют *индукцией* (от лат. *inductio* — наведение). Рассмотрим примеры использования такого метода рассуждений.

1. В результате сложения первых нечетных натуральных чисел 1, 3, 5, 7, 9, ..., $(2n-1)$ $(n \in N)$ получаем

$1=1^2$, $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^3$, $1+3+5+7=16=4^2$, $1+3+5+7+9=25=5^2$, $1+3+5+7+9+11=36=6^2$.

Каждая из полученных сумм оказалась равной квадрату числа слагаемых. Это может служить основанием для гипотезы о том, что указанное свойство справедливо при любом числе слагаемых. Гипотезу можно сформулировать так: сумма первых нечетных чисел натурального ряда для любого натурального n равна квадрату числа слагаемых, т. е. n^2:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \qquad (1.26)$$

Итак, шесть рассмотренных частных случаев «навели» на гипотезу, которая, как будет показано ниже, справедлива.

2. В квадратный трехчлен $P(x)=x^2+x+41$ подставим вместо x натуральные числа от 1 до 10. Найдем $P(1)=1^2+1+41=43$, $P(2)=47$, $P(3)=53$, $P(4)=61$, $P(5)=71$, $P(6)=83$, $P(7)=97$, $P(8)=113$, $P(9)=131$, $P(10)=151$.

Каждое из полученных чисел является простым. Подставляя вместо x числа $0, -1, -2, -3, -4, -5$, также получаем простые числа: $P(0)=41$, $P(-1)=41$, $P(-2)=$ $=43$, $P(-3)=47$, $P(-4)=53$, $P(-5)=61$.

Возникает гипотеза, что значение данного трехчлена является простым числом при любом целом значении x. Однако эта гипотеза ошибочна, поскольку, например, $P(40)=40^2+40+41=40^2+2\cdot 40+1^2=(40+1)^2=$ $=41^2$ — составное число.

Следовательно, один и тот же метод рассуждений в одном случае может привести к правильному выводу (см. пример 1), в другом — к ошибочному (см. пример 2).

Указанный метод называют *методом неполной индукции,* поскольку, применяя его, вывод делают после рассмотренных лишь нескольких случаев, не охватывающих всех возможных. Хотя этот метод не приводит к надежным выводам, он полезен тем, что позволяет сформулировать гипотезу, которую потом можно доказать или опровергнуть.

Полной индукцией называют такой метод рассуждений, при котором вывод делается после рассмотрения всех возможных случаев. Ясно, что этот метод используется тогда, когда число случаев конечно и не «слишком велико» Полная индукция в математике имеет ограниченное применение, поскольку многие математические утверждения охватывают бесконечное множество частных случаев, провести проверку которых не представляется возможным.

В математике широко используется метод *математической индукции*, который, как и метод полной индукции, приводит к вполне надежным выводам. Сформулируем сначала принцип математической индукции.

Если высказывание $A(n)$, зависящее от натурального числа n, истинно для $n=1$, а из того, что оно истинно для $n=k$ (k — натуральное число), следует его истинность и для следующего числа $n=k+1$, то высказывание $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Принцип математической индукции является одной из аксиом арифметики натуральных чисел. Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называют *методом математической индукции*.

Доказательство высказывания, зависящего от натурального числа n, методом математической индукции состоит из двух частей: в первой части доказывается (проверяется) истинность высказывания при $n=1$; во второй части предполагается, что высказывание верно при $n=k$, и доказывается справедливость высказывания при $n=k+1$ с учетом предполагаемой справедливости его при $n=k$. Если доказана первая и вторая части, то на основании принципа математической индукции делается вывод, что высказывание верно для любого натурального числа n.

Пользуясь методом математической индукции, покажем, что равенство (1.26) верно для любого натурального числа n.

Проверяем справедливость равенства (1.26) при $n=1$: $1=1^2$, $1=1$ — верное равенство.

Предположим, равенство (1.26) верно при $n=k$, т. е. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$. Составим сумму $1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$, в которой $k+1$ — слагаемое. Принимая во внимание предыдущее равенство, получаем $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$, т. е. с учетом справедливости равенства при $n=k$ равенство (1.26) верно и при $k=k+1$.

Таким образом, равенство (1.26) верно для любого натурального n.

Пример 1. Доказать, что равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1.27}$$

верно при любом натуральном n.

Действительно, при $n=1$ равенство (1.27) верно: $1=\frac{1\cdot 2}{2}=1$. Предположим, что оно верно при $n=k$, т. е.

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.28}$$

Составим сумму для $n=k+1$: $1+2+3+\ldots+k+(k+1)$ и докажем, что она равна $\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Принимая во внимание равенство (1.28), получаем $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=$ $=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, т. е. равенство (1.27) верно при $n=k+1$. Поэтому по методу математической индукции равенство (1.27) верно для любого натурального числа n.

Пример 2. Доказать, что выражение 9^n-1 делится на 2 при любом натуральном n.

Проверяем справедливость высказывания при $n=1$: $9-1=8$ — при $n=1$ высказывание верно, так как 8 делится на 2.

Предполагаем, что при $n=k$ выражение 9^k-1 делится на 2.

Докажем, что из делимости на 2 выражения 9^n-1 при $n=k$ вытекает делимость на 2 этого выражения и при $n=k+1$, т. е. докажем, что выражение $9^{k+1}-1$ делится на 2. Для этого представим его в виде суммы $9^{k+1}-1=9^k\cdot 9-1=(9^k\cdot 8)+(9^k-1)$. Каждое слагаемое полученной суммы делится на 2 (в первом слагаемом множитель 8 делится на 2, а второе слагаемое по предположению делится на 2), значит, $9^{k+1}-1$ делится на 2. Следовательно, высказывание справедливо для любого натурального n.

Упражнения

1. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n справедливы следующие равенства:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$;

в) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

г) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)\times$ $\times(n+3)$;

д) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

е) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

ж) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n:

а) число $9^{n+1}-8n-9$ делится на 16;
б) число n^3+11 делится на 6;
в) число $6^{2n-1}+1$ делится на 7;
г) число 7^n-1 делится на 6;
д) число $4^n+15n-1$ делится на 9;
е) число n^5-n делится на 30;
ж) число $10^n-18n-28$ делится на 2.

3. Докажите методом математической индукции справедливость следующих неравенств:

а) $2^{n+1} > (n+4)^2$ для любого натурального n;
б) $2^n > 2n+1$ для всех натуральных $n \geqslant 3$;
в) $2^n > n^3$ для всех натуральных $n \geqslant 10$.

1.14. Теоремы. Высказывания. Условия

Результаты математических исследований обычно формулируют в виде теорем, формул, чертежей, таблиц и т. д. В теоремах указывается связь между новыми свойствами некоторых объектов и уже доказанными свойствами в предшествующих теоремах или свойствами, принятыми в качестве отправных и сформулированных в исходных положениях (аксиомах). Истинность теорем устанавливается посредством логических рассуждений.

Теоремы составляются с помощью высказываний. *Высказыванием* в математике называют любое утверждение, которое по природе своей является либо истинным, либо ложным. Примеры высказываний:

1) между числами 1 и 10 заключено 4 простых числа;
2) между числами 10 и 20 нет простых чисел;
3) непараллельные прямые на плоскости пересекаются;
4) непараллельные прямые в пространстве пересекаются. (Высказывания 1 и 3 истинны, 2 и 4 — ложны).

Теоремы часто имеют формулировку: «из истинности высказывания P следует истинность высказывания Q», или «пусть P истинно, тогда истинно Q», или сокращенно $P \Rightarrow Q$.

Итак, пусть справедлива теорема, в которой условием является высказывание P, а заключением — высказывание Q, т. е. верна теорема $P \Rightarrow Q$. В этом случае принято говорить, что P является достаточным условием для Q, иными словами, истинности P достаточно для того, чтобы истинным было и Q.

В качестве примера возьмем следующие высказывания (n — натуральное число):

A: «число n делится на 6»; B: «число n делится на 2»; C: «число n делится на 12».

Справедливы следующие утверждения (теоремы): $A \Rightarrow B$ (делимости числа n на 6 достаточно, чтобы оно делилось на 2), $C \Rightarrow B$, $C \Rightarrow A$ (высказывание C — достаточное условие и для B, и для A).

Теорему $P \Rightarrow Q$ можно записать в равносильной форме $Q \Leftarrow P$. Если истинность Q является следствием истинности P, то говорят, что Q является необходимым условием для P. Примером может служить соотношение между высказываниями A и B ($B \Leftarrow A$): делимость числа n на 2 следует из делимости числа n на 6 (для делимости натурального числа n на 6 необходимо, чтобы оно делилось на 2).

Таким образом, необходимое условие Q представляет собой то требование, которое непременно должно быть выполнено для справедливости высказывания P. Однако Q не гарантирует справедливости P. Например, для делимости числа n на 4 необходимо, чтобы его последняя цифра была четной, однако из четности последней цифры не следует, что число n непременно делится на 4 (число 18 имеет четную последнюю цифру, но оно не делится на 4).

Если из P следует Q, но из Q не следует P, то говорят, что P является достаточным, но не необходимым условием для Q, а Q при этом — необходимое, но не достаточное условие для P. Отметим, что в общем случае из истинности теоремы $P \Rightarrow Q$ не вытекает истинность обратной теоремы $Q \Rightarrow P$.

В рассмотренном выше примере из $A \Rightarrow B$ не следует $B \Rightarrow A$, т. е. B не является достаточным условием для A (из того, что натуральное число n делится на 2, не следует его делимость на 6). B — необходимое условие для A.

Равенство длин сторон четырехугольника — достаточное условие для того, что этот четырехугольник — параллелограмм, но это условие не является необходимым. Действительно, существуют параллелограммы, стороны которых имеют различную длину.

Если одновременно справедливы утверждения (теоремы) $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, т. е. P и Q оказываются равносильными высказываниями (истинность P обеспечивает истинность Q и наоборот), то говорят, что каждое из высказываний P и Q является достаточным и необходимым условием для другого и обозначают $P \Leftrightarrow Q$ или $Q \Leftrightarrow P$.

Теорему $P \Leftrightarrow Q$ (или $Q \Leftrightarrow P$) можно сформулировать так: «P справедливо тогда и только тогда, когда справедливо Q», или «для истинности P необходимо и достаточно, чтобы было истинно Q». В качестве примера рассмотрим высказывание A: «натуральное число n делится на 6» и высказывание C: «натуральное число n делится и на 2, и на 3». Здесь справедлива теорема $A \Leftrightarrow C$, т. е. для делимости натурального числа n на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 2 и на 3 одновременно.

Приведем еще один пример. Произведение двух чисел положительно (высказывание P) тогда и только тогда, когда эти числа имеют одинаковые знаки (высказывание Q). Здесь сформулирована теорема $P \Leftrightarrow Q$.

Замечание. Термин «условие» может быть заменен словом «признак» (достаточный признак, необходимый признак, необходимый и достаточный признак). В ряде случаев вместо «необходимый и достаточный признак» пишут кратко «признак». Например, необходимым признаком квадрата является равенство длин его диагоналей. Признаком делимости натурального числа n на 3 является делимость на 3 суммы его цифр.

1.15. Объединение и пересечение множеств

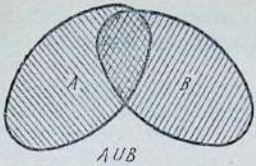
Под *множеством* понимают совокупность некоторых объектов (элементов множества), обладающих общим для них свойством. Примеры множеств: множество цифр, множество натуральных чисел и т. п.

Для обозначения принадлежности или непринадлежности некоторого элемента данному множеству используют соответственно знаки $\in$ и $\notin$. Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут $x \in A$. Запись $y \notin B$ означает, что элемент y не принадлежит множеству B.

Если каждый элемент множества B принадлежит также и множеству A, то говорят, что B есть подмножество A и записывают $B \subset A$ или $A \supset B$. Знак $\subset$ называют знаком включения.

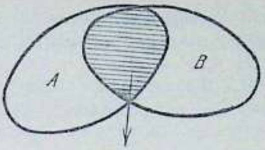
Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$. На рис. 1.7. объединение множеств схематически изображено заштрихованной областью. Например, пусть A — множество четных чисел, B — множество нечетных чисел, тогда $A \cup B$ — множество всех целых чисел.

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству A, так и множеству B. Пересечение множеств A и B обозначается так: $A \cap B$. Пересечение множеств A и B схематически изображено на рис. 1.8 заштрихованной областью. Пример: пусть A — множество всех четных чисел и B —



$A \cup B$

Рис. 1.7



$A \cap B$

Рис. 1.8

множество чисел, кратных 3, тогда $A \cap B$ есть множество чисел, кратных 6.

Понятия пересечения и объединения можно распространить на любое число множеств.

2. СТЕПЕНИ. МНОГОЧЛЕНЫ. КОРНИ

2.1. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим единицы, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a. Степень числа a с показателем n обозначают: a^n. По определению степени $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$.

Вообще

$$a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n}, \qquad (2.1)$$

где $n > 1$.

В выражении a^n число a (повторяющийся множитель) называют *основанием степени*, число n, показывающее, сколько раз множителем повторяется число a,— *показателем степени*. Нахождение значения степени называют возведением в степень. При возведении в степень положительного числа получается число положительное. При возведении в степень отрицательного числа может получиться как положительное число, так и отрицательное. Например,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8; \qquad (-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27;$$
$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81.$$

Степень отрицательного числа с четным показателем есть число положительное, степень отрицательного числа с нечетным показателем — число отрицательное. Степень числа 0 с любым показателем n равна 0: $0^n = 0$. Степенью любого числа a с показателем единица называют само число $a: a^1 = a$.

Рассмотрим произведение степеней с одинаковыми основаниями. Докажем, что если основание степени a — любое действительное число, а m и n — произвольные натуральные числа, то

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{2.2}$$

▷ Действительно, используя определение степени (2.1) и свойства умножения, получаем

$$a^m a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{m \text{ раз}} \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa \cdots a}_{(m+n) \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Таким образом, $a^m a^n = a^{m+n}$. ◁

Равенство (2.2) выражает основное свойство степени: произведение двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей перемножаемых степеней. Основное свойство степени справедливо для трех и более степеней, т. е.

$$a^{m_1} a^{m_2} \dots a^{m_k} = a^{m_1 + m_2 + \dots + m_k},$$

где a — любое число; $m_1, m_2, \dots, m_k$ — натуральные числа. Эта формула выражает правило умножения степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают. Например, $a^5 a^8 = a^{5+8} = a^{13}$; $bb^3b^5 = b^9$.

Рассмотрим возведение степени в степень. Покажем, что

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{2.3}$$

▷ Действительно,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdots a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}. \ ◁$$

Итак, при возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели степеней перемножают. Например, $(2^3)^2 = 2^6 = 64$; $(a^3)^3 = a^9$.

Рассмотрим степень произведения. Докажем, что для любых a и b и произвольного натурального числа n

$$(ab)^n = a^n b^n. \tag{2.4}$$

$\triangleright$ В самом деле, воспользовавшись определением (2.1), сочетательным и переместительным законами умножения, найдем

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{(aa\cdots a)}_{n \text{ раз}}\underbrace{(bb\cdots b)}_{n \text{ раз}} = a^n b^n. \ \triangleleft$$

Таким образом, при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

Можно доказать, что свойство (2.4) верно и для m множителей:

$$(a_1 a_2 \cdots a_m)^n = a_1^n a_2^n \cdots a_m^n,$$

т. е., что n-я степень произведения m множителей равна произведению n-х степеней всех множителей. Например, $(3a^2b)^3 = 27a^6b^3$; $(3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 3600$.

Рассмотрим частное двух степеней с одинаковыми основаниями $a^m : a^n$. Докажем, что для любого $a \neq 0$ и произвольных натуральных чисел m и n, таких, что $m > n$,

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \tag{2.5}$$

Действительно, $a^{m-n}a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m$, т. е.

$$a^{m-n}a^n = a^m. \tag{2.6}$$

Из равенства (2.6), следует $a^m : a^n = a^{m-n}$. $\triangleleft$

Равенство (2.5) выражает правило деления степеней: при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя. Например, $7^6 : 7^3 = 7^{6-3} = 7^3 = 343$; $a^{12} : a^4 = a^{12-4} = a^8$.

Перейдем к вопросу о степени дроби. Покажем, что

$$(a/b)^n = a^n/b^n, \tag{2.7}$$

где n — натуральное число; a и b — любые числа; $b \neq 0$.

Действительно, используя определение степени и применяя правило умножения дробей, получаем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\,\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa\cdots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb\cdots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Следовательно, $(a/b)^n = a^n/b^n$, т. е. n-я степень дроби равна n-й степени числителя, деленной на n-ю степень знаменателя. Например, $\left(\frac{a^3}{2b^2}\right)^4 = \frac{a^{12}}{16b^8}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$. Итак, чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй в знаменателе дроби.

2.2. Степень с целым показателем

Обратимся к формуле (2.5). При исследовании вопроса о частном двух степеней с одинаковыми основаниями предполагалось, что показатель степени делимого больше показателя степени делителя ($m > n$). Рассмотрим случаи, когда $m = n$ и $m < n$.

Если правило (2.5) деления степеней использовать и для случая $m = n$, то получим

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

Выражение a^0 ранее не было определено. Принимая во внимание, что значение $a^m : a^m$ при любом $a \neq 0$ равно 1, целесообразно считать, что, если $a \neq 0$, то

$$a^0 = 1. \tag{2.8}$$

Таким образом, любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице.

Выражению 0^0 не приписывают никакого смысла.

В случае $m < n$ разность $m - n$ будет целым отрицательным числом.

Допустим, что правило (2.5) деления степеней можно применять и в случае $m < n$. Если $m < n$, то $n = m + k$, где k — натуральное число. Тогда

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+k} = a^{m-(m+k)} = a^{m-m-k} = a^{-k}.$$

С другой стороны,

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+k} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m a^k} = \frac{1}{a^k}.$$

Принимая во внимание полученные результаты для $a^m : a^n$, целесообразно считать, что $a^{-k} = 1/a^k$. Такое соглашение принимается для степеней с любым отличным от нуля основанием.

Итак, по определению

$$a^p = 1/a^{-p}, \tag{2.9}$$

если $a \neq 0$ и p — целое отрицательное число, т. е. целая отрицательная степень числа, отличного от нуля, равна единице, деленной на степень того же числа с положительным показателем, равным модулю отрицательного показателя.

Например, если $a = 3$, $p = -2$, то $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$.

Замечание. Эти рассуждения приведены для того, чтобы показать, что определения (2.8) и (2.9) степени с нулевым и отрицательным показателями целесообразны; правило (2.5) деления степеней сохраняется и для случаев $m = n$ и $m < n$.

Целая отрицательная степень числа нуль не определяется, т. е. запись 0^{-n}, где n — натуральное число, считается лишенной смысла.

Свойства (2.2) — (2.5), (2.7) для степеней с натуральными показателями справедливы и для степеней с любыми целыми показателями.

Докажем, например, справедливость свойства (2.4) для случая, когда показатель степени n — целое отрицательное число, т. е. докажем, что

$$(ab)^{-p} = a^{-p}b^{-p},$$

где $a \neq 0$; p — натуральное число.

▷ Воспользовавшись определением (2.9) степени с целым отрицательным показателем и свойством (2.4), установленным для степеней с натуральным показателем, будем иметь:

$$(ab)^{-p} = \frac{1}{(ab)^p} = \frac{1}{a^p b^p} = \frac{1}{a^p}\,\frac{1}{b^p} = a^{-p}b^{-p}. \ ◁$$

Действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями. Например,

$$(5^m)^2(5^{-3})^m = 5^{2m}5^{-3m} = 5^{2m-3m} = 5^{-m};$$

$$(3a^{-5}b^2)^{-2} = 3^{-2}(a^{-5})^{-2}(b^2)^{-2} = \frac{1}{9}a^{10}b^{-4}.$$

2.3. Рациональные выражения. Тождественные преобразования. Тождества

С помощью знаков действий и скобок можно составлять выражения из чисел и переменных. Выражения, составленные из переменных и чисел посредством действий сложения, вычитания и умножения, называют целыми выражениями относительно этих переменных. В целых выражениях произведение одинаковых множителей может быть записано в виде степени. Например, $(x+b)(x-b)$, $\frac{mx-nx}{5}$, $\frac{3ax^2}{2}+x$, $\frac{a+b}{a^2}x^3+b^3x^2-\frac{2x}{a^2-b^2}$ — целые выражения относительно переменной x.

Выражения, составленные из переменных и чисел с помощью действий сложения, вычитания, умножения, а также деления на выражение с переменной, или на саму переменную, называют *дробными*. Например, $\frac{2b+x}{4x^2}$, $\frac{b^2+c}{2c+1}$, $\frac{3a}{y}-1$ — дробные выражения относительно x, c и y соответственно. Целые и дробные выражения называют *рациональными*.

Рациональное выражение вида a/b называют *рациональной дробью*. При сложении, умножении, вычитании рациональных выражений получаются выражения того же вида. При составлении выражений используют скобки, которые указывают на определенный порядок выполнения действий.

Если в выражении с переменными заменить каждую переменную ее числовым значением и выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок действий, то получится число, которое называют значением выражения при данных значениях переменных. Если в выражении встречается деление на нуль, то говорят, что выражение при этих значениях переменных не имеет смысла.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*. Совокупность всех допустимых значений переменных составляет *область определения* (данного) *рационального выражения*.

Областью определения целого выражения служит множество всех чисел, так как целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных.

Дробные выражения при некоторых значениях переменных могут не иметь смысла. Например, выражение $\frac{5}{2-x}-3$ не имеет смысла при $x=2$, а при всех остальных значениях x оно имеет смысл. Значит, областью определения данного выражения служит множество всех чисел, кроме числа 2.

Два выражения называют *тождественно равными*, если при всех допустимых для них значениях переменных соответственные значения этих выражений равны. Например, при всех значениях переменной x значения выражений $(x+1)^2$ и x^2+2x+1 равны между собой. О таких выражениях говорят, что они тождественно равны на множестве всех чисел. Значения выражений $5x^3/(4x^2)$ и $5x/4$ равны при всех значениях x, кроме $x=0$. О таких выражениях говорят, что они тождественно равны на множестве всех чисел, кроме нуля.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением, называют *тождественным преобразованием* выражения.

Равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных, называют *тождеством*. Примеры тождеств: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $m+(-m)=0$; $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)$; $a(bc)=(ab)c$.

2.4. Одночлены. Многочлены. Действия над одночленами и многочленами

Одночленом называют выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и степеней переменных с натуральным показателем. Например, каждое из выражений $7a^2x^3$, $-4m^5$, $\frac{3}{5}b$, $2a(-3a^3)$ является одночленом. Числа, переменные, натуральные степени переменных также называют одночленами.

Одночлен $2a^2(-3a^3)$ можно представить и как $-6a^5$. Эти выражения тождественно равны. Говорят, что одночлен имеет стандартный вид, если он содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, а каждое произведение одинаковых переменных в нем представлено степенью. Например, одночлен $12x^2y^3$ отличается от тождественно равных ему одночленов $3x\cdot 4xy^3$ и $2xy\cdot 6xy^2$ тем, что он имеет лишь один числовой множитель, стоящий на первом месте, и каждое произведение одинаковых переменных x и y записано в виде степени; одночлен $12x^2y^3$ записан в стандартном виде. Группируя множители и используя основное свойство степени, любой одночлен можно привести к стандартному виду.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена.* Например, коэффициент одночлена $7a^3b^4$ равен 7, а одночлена $\frac{1}{2}x^5$ равен $\frac{1}{2}$. Поскольку $a^4x = 1a^4x$, $-a^4x = -1a^4x$, то коэффициентами этих одночленов являются соответственно числа 1 и -1.

Два одночлена, отличающиеся только знаком, называют *противоположными.* Например, $7a^2b$ и $-7a^2b$ — противоположные одночлены.

Одночлены, записанные в стандартном виде, называют *подобными*, если они отличаются только коэффициентами или совсем не отличаются. Например, $3a^3b$, $-5a^3b$, $7a^3b$, $3a^3b$ — подобные одночлены.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Так, степень одночлена $8x^4$ равна 4, степень одночлена $12x^2y^3$ равна 5. Если одночлен есть число, то его степень считают равной нулю; исключение составляет число 0, этому одночлену не приписывают никакой степени.

Если коэффициент одночлена равен нулю, например, $0x^3y$, $0kp^2$, то его называют *нулевым одночленом.*

Сумма нескольких подобных одночленов равна одночлену, подобному каждому из них, с коэффициентом, равным сумме коэффициентов слагаемых.

Например, сумма одночленов $3a^5b$, $-2a^5b$ и $4a^5b$ равна:

$$3a^5b + (-2a^5b) + (4a^5b) = (3 + (-2) + 4)a^5b = 5a^5b.$$

При умножении одночленов стандартного вида перемножают их коэффициенты, а показатели степеней одинаковых переменных складывают.

Например, произведение одночленов $6x^2y^3$ и $-2x^5y^2$ равно:

$$6x^2y^3(-2x^5y^2) = (6(-2))x^{2+5}y^{3+2} = -12x^7y^5.$$

При делении одночленов стандартного вида делят их коэффициенты и из показателя степени каждой переменной делимого вычитают показатель соответственной переменной делителя.

Например, частное от деления одночлена $24a^5b^4c^3$ на одночлен $3a^3bc^2$ равно:

$$24a^5b^4c^3 : 3a^3bc^2 = (24:3)a^{5-3}b^{4-1}c^{3-2} = 8a^2b^3c.$$

При возведении в степень одночлена стандартного вида возводят в эту степень его коэффициент, а показатели степеней каждой переменной умножают на показатель степени, в которую возводят одночлен. Например,

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5)^3a^{3\cdot 3}b^{2\cdot 3} = -125a^9b^6.$$

Сумму одночленов называют *многочленом.*

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют членами многочлена. Например, многочлен $4a^3 + ab - 3b^2$ состоит из членов $4a^3$, ab и $-3b^2$.

Подобные слагаемые — одночлены в многочлене — называют *подобными членами многочлена.* Если многочлен содержит несколько подобных членов, то их сумму можно заменить одним одночленом, подобным каждому из них. Операцию замены суммы нескольких подобных членов одним членом, тождественно равным этой сумме, называют *приведением подобных членов.*

Например, в многочлене $4ab + 2a - 5 - 3ab$ члены $4ab$ и $-3ab$ являются подобными. Выполнив приведение подобных членов в многочлене, получим: $4ab + 2a - 5 - 3ab = ab + 2a - 5$.

Многочлен, в котором все слагаемые — одночлены стандартного вида и приведены подобные члены, называют *многочленом стандартного вида. Степенью многочлена стандартного вида* называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, $6a^3b - 5ab + 2$ — многочлен стандартного вида четвертой степени. Многочлены стандартного вида в зависимости от числа членов называют двучленами, трехчленами и т. д. Например, $2x + 3$ — двучлен, $a^3 + 5a - 7$ — трехчлен.

Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Члены многочлена можно расположить в любом порядке. Так, многочлен $3x^2 + 7x^5 - 4x^3 + 2x^4 - 8x + 6$ можно расположить в порядке убывания показателей степени переменной x: $7x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 6$ или в порядке возрастания показателей степени переменной x: $6 - 8x + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 7x^5$. В первом случае говорят, что многочлен расположен по убывающим степеням переменной x, во втором — что он расположен по возрастающим степеням переменной x.

Сумму и разность многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида. При сложении двух многочленов записываются все их члены и приводятся подобные члены. При вычитании знаки всех членов вычитаемого многочлена меняются на противоположные. Например, $(8a^2+6a-7)+(-2a^2+3a+4)=8a^2+6a-7-2a^2+3a+4=6a^2+9a-3$; $(7a^2-5a-6)-(-3a^2+2a-8)=7a^2-5a-6+3a^2-2a+8=10a^2-7a+2$.

Члены многочлена можно заключать в скобки. Поскольку это тождественное преобразование, обратное раскрытию скобок, то легко установить правило заключения в скобки. Если перед скобками ставится плюс, то все члены, заключаемые в скобки, записывают с их знаками, если перед скобками ставится минус, то все члены, заключаемые в скобки, записывают с противоположными знаками. Например,

$$a^4+6a^3-9a+7=a^4+(6a^3-9a+7);$$
$$a^4+6a^3-9a+7=a^4-(-6a^3+9a-7).$$

С помощью распределительного закона умножения произведение одночлена и многочлена можно преобразовать в многочлен. Например,

$$3x^2(2x^3-4x+8)=3x^2\cdot 2x^3+3x^2(-4x)+3x^2\cdot 8=$$
$$=6x^5-12x^3+24x^2.$$

Правило умножения одночлена на многочлен можно сформулировать так: *чтобы умножить одночлен на многочлен, достаточно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.*

Произведение двух любых многочленов можно представить в виде многочлена.

Пусть, например, требуется найти произведение многочленов $a+b$ и $c+d+e$. Обозначим многочлен $c+d+e$ буквой t и воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен:

$$t(a+b)=ta+tb.$$

В полученное выражение $ta+tb$ вместо t подставим многочлен $c+d+e$ и используем правило умножения одночлена на многочлен:

$$ta + tb = (c + d + e)a + (c + d + e)b = ac + ad + ae + bc + bd + be.$$

Таким образом, $(c + d + e)(a + b) = ac + ad + ae + bc + bd + be$, т. е. произведение многочленов представлено в виде многочлена. Правило умножения многочлена на многочлен можно сформулировать следующим образом: *чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.*

Например, представим в виде многочлена выражение

$$(2x + 3y)(x^2 + 4xy + y^2).$$

Воспользуемся правилом умножения многочлена на многочлен и полученный многочлен преобразуем в многочлен стандартного вида:

$$(2x + 3y)(x^2 + 4xy + y^2) = 2x(x^2 + 4xy + y^2) + 3y(x^2 + 4xy + y^2) = 2x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 3x^2y + 12xy^2 + 3y^3 = 2x^3 + 14xy^2 + 11x^2y + 3y^3.$$

Итак, многочлены можно складывать, вычитать и умножать. При этом в результате снова получается многочлен.

Многочленом от одной переменной x степени n называют выражение вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — любые числа, которые называют *коэффициентами многочлена*, причем $a_n \neq 0$, n — целое неотрицательное число. Это выражение может состоять и из одного слагаемого, в этом случае многочлен является одночленом.

Кроме многочленов, содержащих переменную x степени n, рассматривают многочлены нулевой степени. Многочлен нулевой степени — это число, отличное от нуля. Число, равное нулю, также считают многочленом и называют *нуль-многочленом.* В отличие от других многочленов нуль-многочлен не имеет степени.

Если $a_n \neq 0$, коэффициент a_n называют *старшим коэффициентом многочлена* $P_n(x)$, одночлен $a_n x^n$ — его старшим членом, коэффициент a_0 — свободным членом.

Многочлены от переменной x обозначают $P(x)$, $S(x)$, $R(x)$, $Q(x)$ и т. п. Чтобы указать, что многочлен $P(x)$ имеет степень n (n — натуральное число), записывают $P_n(x)$.

Если вместо переменной x в многочлен $P_n(x)$ подставить действительное число c, то в результате получится действительное число $P_n(c)$, которое называют *значением многочлена* $P_n(x)$ при $x=c$. Итак, $P_n(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_1c+a_0$. Число c называют *корнем многочлена* $P_n(x)$, если $P_n(c)=0$.

Заметим, что под словом «многочлен» здесь понимается не любая алгебраическая сумма одночленов, а лишь сумма одночленов, каждый из которых представляет собой произведение числа и целой неотрицательной степени переменной.

Отметим, что свободный член многочлена $P_n(x)$ является его значением при $x=0$ (в точке 0), т. е. $P_n(0)=a_0$, а сумма коэффициентов многочлена есть его значение в точке 1, т. е. $P_n(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$.

2.5. Деление многочленов

Рассмотрим деление многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q(x)$ степени m:

$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0,$$

где m — натуральное число. Деление возможно, если степень многочлена-делимого $P_n(x)$ — не меньше степени многочлена-делителя $Q_m(x)$, т. е. когда $n\geqslant m$, и $Q_m(x)$ — не нуль-многочлен.

Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ $(n\geqslant m)$ — это значит найти два таких многочлена $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, чтобы

$$P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x). \qquad (2.10)$$

При этом многочлен $S_{n-m}(x)$ степени $n-m$ называют многочленом-частным, $R_k(x)$ — остатком $(k<m)$.

Если делитель $Q_m(x)$ не нуль-многочлен, то деление $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ $(n\geqslant m)$ всегда выполнимо, а частное и остаток определяются однозначно.

В том случае, когда $R_k(x)=0$ при всех x, т. е. $P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)$, говорят, что многочлен $P_n(x)$ делится (или нацело делится) на многочлен $Q_m(x)$.

Деление многочленов выполняется аналогично делению многозначных чисел: делят старший член многочлена-делимого на старший член многочлена-делителя, затем частное от деления этих членов, которое будет старшим членом многочлена-частного, умножают на многочлен-делитель и полученное произведение вычитают из многочлена-делимого. В результате получают многочлен-первый остаток, который делят на многочлен-делитель аналогичным образом и находят второй член многочлена-частного. Этот процесс продолжают до тех пор, пока деление не закончится или степень многочлена-остатка не будет меньше степени многочлена-делителя.

Например,

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 6x^3-16x^2-12x+3 \\ 6x^3-28x^2+30x \end{array} & \begin{array}{l} 3x^2-14x+15 \\ \hline 2x+4 \text{ (многочлен-частное)} \end{array} \\ -\begin{array}{r} 12x^2-42x+3 \\ 12x^2-56x+60 \\ \hline 14x-57 \end{array} & \begin{array}{l} \text{(первый остаток)} \\ \\ \text{(многочлен-остаток)} \end{array} \end{array}$$

Значит, согласно формуле (2.10), $6x^3-16x^2-12x+3=$ $=(3x^2-14x+15)(2x+4)+(14x-57)$.

Рассмотрим деление с остатком многочлена $P_n(x)=$ $=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 — заданные числа, на двучлен $x-c$.

По выражению (2.10)

$$P_n(x)=(x-c)S_{n-1}(x)+R, \tag{2.11}$$

где частное $S_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+$ $+b_1x+b_0$; R — остаток. Так как степень многочлена-остатка должна быть меньше степени многочлена-делителя $x-c$, т. е. меньше единицы, то остаток R — некоторое число.

Найдем коэффициенты b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0 частного $S_{n-1}(x)$.

Равенство (2.11) запишем в виде

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=(x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+ \\ +b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)+R$$

и выполним умножение в правой части:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0 \\ x-c \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} b_{n-1}x^n+b_{n-2}x^{n-1}+\ldots+b_1x^2+b_0x \\ -cb_{n-1}x^{n-1}-\ldots \qquad -cb_1x-cb_0 \end{array} \\ \hline b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-cb_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(b_0-cb_1)x-cb_0 \end{array}$$

Сумма полученного многочлена и остатка R должна быть тождественно равна многочлену $P_n(x)$.

Два многочлена, целые относительно переменной x, заданные в стандартном виде, тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты их подобных членов и степени их совпадают.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x полученного многочлена и многочлена $P_n(x)$, имеем: $b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}-cb_{n-1}=a_{n-1}$, $b_{n-3}-cb_{n-2}=a_{n-2}$, ..., $b_0-cb_1=a_1$, $R-cb_0=a_0$. Откуда последовательно находим коэффициенты многочлена $S_{n-1}(x)$: $b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}$, $b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$, ..., $R=a_0+cb_0$.

Чтобы найти коэффициенты многочлена-частного $S_{n-1}(x)$, удобно использовать метод, который называют *схемой Горнера*. Этот метод заключается в следующем. В верхнюю строчку выписывают последовательно все коэффициенты многочлена-делимого. В нижней строчке слева записывают число c. При заполнении нижней строчки учитывают, что старший коэффициент многочлена-частного равен старшему коэффициенту многочлена-делимого, поэтому под старшим коэффициентом многочлена-делимого записывают в нижней строчке этот старший коэффициент. Каждое следующее число нижней строчки получается прибавлением к соответствующему коэффициенту верхней строчки произведения предыдущего числа нижней строчки и числа c. В конце нижней строчки под свободным членом многочлена-делимого получим остаток. Все числа нижней строчки, кроме числа c, являются коэффициентами многочлена-частного.

В рассматриваемом случае деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-c)$ схема Горнера будет иметь вид:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=$ $=a_{n-1}+cb_{n-1}$	$b_{n-3}=$ $=a_{n-2}+cb_{n-2}$	...	$b_0=$ $=a_1+cb_1$	$R=$ $=a_0+cb_0$

Пример 1. Найти частное и остаток при делении многочлена $6x^3-16x^2-12x+3$ на двучлен $x+2$.

Составим схему Горнера (здесь $c=-2$)

	6	-16	-12	3
-2	6	$-16+6\cdot(-2)=-28$	$-12+-28\cdot(-2)=44$	$3+44\cdot(-2)=$ $=-85$

Итак, числа 6, -28 и 44 — искомые коэффициенты частного, значит, частное равно $6x^2-28x+44$, а остаток равен -85.

Рассмотрим теорему, которая позволяет находить остаток R от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x-c$, не выполняя самого деления.

Теорема 2.1 (Безу). *Остаток от деления многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ на двучлен $x-c$ равен значению многочлена при $x=c$, т. е. $R=P_n(c)$.*

$\triangleright$ Действительно, выполнив деление многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x-c$, получим (согласно формуле (2.11)) $P_n(x)=(x-c)\cdot S_{n-1}(x)+R$, где остаток R — некоторое число.

Полагая $x=c$, получаем $P_n(c)=(c-c)S_{n-1}(c)+R=$ $=0\cdot S_{n-1}(c)+R=R$. Итак, $R=P_n(c)$. $\triangleleft$

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена $2x^3+3x^2-3x+1$ на двучлен $x+2$.

Для нахождения остатка R вычислим значение многочлена при $x=-2$:

$P_3(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-3(-2)+1=3$. Искомый остаток $R=3$.

Замечание. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $ax+b\,(a\neq 0)$ равен $P_n(-b/a)$ — значению многочлена $P_n(x)$ при $x=-b/a$.

Следствие. Для делимости многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x-c$ необходимо и достаточно, чтобы число c было корнем многочлена $P_n(x)$.

Покажем, что если многочлен $P_n(x)$ делится на $x-c$, то $x=c$ — корень многочлена $P_n(x)$, т. е. что условие необходимо.

$\triangleright$ Действительно, если $P_n(x)$ делится на $x-c$, то остаток $R=0$. С другой стороны (по теореме Безу), $R=P_n(c)$. Значит, $P_n(c)=0$, а это означает (по определению), что $x=c$ — корень многочлена $P_n(x)$. Условие достаточно. В самом деле, если $x=c$ корень многочлена $P_n(x)$, то (по определению) $P_n(c)=0$. С другой стороны (по теореме Безу), $P_n(c)=R$. Значит, $R=0$, т. е. $P_n(x)$ делится на $x-c$. ◁

Из теоремы Безу вытекают и другие следствия. Перечислим их без доказательства.

1. Если $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ — различные корни многочлена $P_n(x)$, то многочлен $P_n(x)$ делится на произведение $(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdots(x-c_n)$.

2. Если $P_n(x)\neq 0$, то число различных корней многочлена $P_n(x)$ не превосходит его степени.

3. Если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — все корни многочлена $P_n(x)= =a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, то $P_n(x)=a_n(x-c_1)\times \times(x-c_2)\cdots(x-c_n)$.

4. Многочлен $P_n(x)=x^n-a^n$ делится на двучлен $x-a$ при любом натуральном n.

5. Многочлен $P_n(x)=x^n-a^n$ делится на двучлен $x+a$ при любом четном n.

6. Многочлен $P_n(x)=x^n+a^n$ делится на двучлен $x+a$ при любом нечетном n.

Многочлен со старшим коэффициентом, равным единице, называют *приведенным многочленом*.

Для нахождения корней многочленов полезно знать следующие теоремы.

Теорема о дробных корнях. *Приведенный многочлен с целыми коэффициентами не может иметь дробных рациональных корней.*

Теорема о целых корнях. *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем свободного члена.*

Докажем вторую теорему.

▷ Пусть целое число c — корень многочлена $P_n(x)= =a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — целые коэффициенты. Тогда по определению корня многочлена $a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_1c+a_0=0$, откуда $a_0=-a_nc^n-a_{n-1}c^{n-1}-\ldots-a_1c$ или $a_0=c(-a_nc^{n-1}- -a_{n-1}c^{n-2}-\ldots-a_1)$. Выражение, стоящее в скобках,— целое число, поэтому последнее равенство означает, что свободный член a_0 делится на c. ◁

Из теоремы следует, что при отыскании целых корней многочлена с целыми коэффициентами достаточно подвергнуть испытанию делители свободного члена.

Пример 3. Найти корни многочлена $6x^3-11x^2+6x-1$.

Сначала попытаемся найти целые корни этого многочлена. Согласно теореме о целых корнях, ими могут быть только делители свободного члена, т. е. числа 1 и -1. Подвергаем испытанию число -1:

$P_3(-1)=6(-1)^3-11(-1)^2+6(-1)-1=-24\neq 0$. Следовательно, число -1 не является корнем многочлена. Подвергнув испытанию число 1, получим $P_3(1)=0$, значит, число 1 — целый корень многочлена.

Согласно следствию из теоремы Безу, данный многочлен делится на двучлен $x-1$. Определим частное от деления данного многочлена на $x-1$. Коэффициенты частного найдем по схеме Горнера:

	6	-11	6	-1
1	6	-5	1	0

Таким образом, $6x^3-11x^2+6x-1=(x-1)(6x^2-5x+1)$. Поскольку числа $1/2$ и $1/3$ — корни трехчлена $6x^2-5x+1$, то данный многочлен имеет три корня: 1, $1/2$ и $1/3$.

2.6. Формулы сокращенного умножения

Рассмотрим преобразование в многочлен стандартного вида некоторых часто встречающихся выражений. Соответствующие тождества называют *формулами сокращенного умножения.*

Преобразуем в многочлен произведение разности двух выражений и их суммы $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

Значит,

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2. \tag{2.12}$$

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Тождество (2.12) — одна из формул сокращенного умножения. Она позволяет (сокращенно) находить произведение разности двух выражений и их суммы.

Например, $(3x^3y^2-5)(3x^3y^2+5)=(3x^3y^2)^2-5^2=9x^6y^4-25$;

$$99\cdot 101=(100-1)(100+1)=100^2-1^2=9999;$$
$$1{,}05\cdot 0{,}95=(1+0{,}05)(1-0{,}05)=1^2-(0{,}05)^2=1-0{,}0025=0{,}9975.$$

Преобразуем квадрат двучлена $(a+b)^2$ в многочлен. Представим выражение $(a+b)^2$ в виде произведения $(a+b)(a+b)$ и выполним умножение, пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Значит,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{2.13}$$

Квадрат суммы двух выражений тождественно равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Тождество (2.13) называют *формулой квадрата суммы*.

Рассмотрим квадрат разности $a - b$. Очевидно, что

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = \\ = a^2 - 2ab + b^2.$$

Значит,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{2.14}$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Формулы (2.13) и (2.14) дают возможность представить в виде многочлена квадрат суммы (разности) любых двух выражений. Например,

$$(7x+2y)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(2y) + (2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2;$$
$$(6x-5y)^2 = 36x^2 - 60xy + 25y^2.$$

Выведем формулу для квадрата трехчлена. Представим трехчлен в виде суммы двух слагаемых и воспользуемся формулой (2.13):

$$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Значит, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Квадрат трехчлена равен сумме квадратов всех его членов и удвоенных произведений каждого члена на каждый из последующих.

Преобразуем куб суммы двух выражений: $(a+b)^3$ в многочлен. Представим $(a+b)^3$ в виде $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$. Применим формулу (2.13) и выполним умножение:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \\ = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Значит,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (2.15)$$

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

Рассмотрим куб разности $a-b$. Очевидно, что

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + \\ + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Значит,

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (2.16)$$

Преобразуем в многочлены следующие произведения: $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Выражение вида a^2+ab+b^2 называют *неполным квадратом суммы* двух выражений a и b, а a^2-ab+b^2 — неполным квадратом их разности.

Выполняя умножение, будем иметь

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = \\ = a^3 + b^3;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = \\ = a^3 - b^3.$$

Значит,

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3; \qquad (2.17)$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3. \qquad (2.18)$$

Тождество (2.17) представляет собой формулу сокращенного умножения суммы двух выражений на неполный квадрат их разности.

Произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности равно сумме кубов этих выражений.

Тождество (2.18) представляет собой формулу сокращенного умножения разности двух выражений на неполный квадрат их суммы.

Произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы равно разности кубов этих выражений.

Например, $(x+4)(x^2-4x+16) = x^3 + 64$;

$$(2b-a)(4b^2+2ab+a^2) = 8b^3 - a^3.$$

2.7. Разложение многочлена на множители

Иногда при решении уравнений, вычислениях и в других случаях бывает полезно представить многочлен в виде равного ему произведения двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены). Такое тождественное преобразование называют *разложением многочлена на множители.*

Рассмотрим основные способы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки. Учитывая, что каждый член многочлена $15a^4x^3 - 10a^2x^2$ можно заменить произведением двух множителей $15a^4x^3 - 10a^2x^2 = 5a^2x^2 \cdot 3a^2x - 5a^2x^2 \cdot 2$, а полученное выражение на основании распределительного свойства представить в виде произведения $5a^2x^2 \cdot 3a^2x - 5a^2x^2 \cdot 2 = 5a^2x^2(3a^2x - 2)$, то данный многочлен можно заменить произведением общего делителя всех его членов и частного, полученного от деления многочлена на этот делитель: $15a^4x^3 - 10a^2x^2 = 5a^2x^2(3a^2x - 2)$. Общий делитель всех членов многочлена называют *общим множителем* (в нашем примере общий множитель $5a^2x^2$).

Общий множитель можно выносить за скобки и с плюсом и с минусом; общим множителем может быть и многочлен.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x$.

Все члены данного многочлена содержат общий множитель $4ax$. Следовательно, $4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x = 4ax(x^2 + 2ax - 3a^2)$. Члены многочлена, стоящего в скобках, получены в результате деления каждого члена данного многочлена на общий множитель $4ax$.

Пример 2. Разложить на множители многочлен $3(x-y) - 2a(x-y) + 7b(x-y)$.

Члены данного многочлена имеют общий множитель $x - y$. Вынесем его за скобки: $3(x-y) - 2a(x-y) + 7b(x-y) = (x-y)(3 - 2a + 7b)$.

Пример 3. Разложить на множители многочлен $(ax-5) - b(5-ax) - 7c(ax-5)$.

Чтобы выделить общий множитель $ax - 5$, вынесем за скобку -1 во втором слагаемом. Тогда получим $(ax-5) + b(ax-5) - 7c(ax-5) = (ax-5)(1 + b - 7c)$.

Итак, чтобы разложить многочлен на множители способом вынесения общего множителя за скобки, следует:

1) найти общий множитель, для этого, если все коэффициенты многочлена — целые числа, в качестве коэффи-

циента общего множителя надо взять наибольший по модулю общий делитель всех коэффициентов многочлена, а каждую переменную, входящую во все члены многочлена, взять с наименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене;

2) найти частное от деления данного многочлена на общий множитель;

3) записать произведение общего множителя и полученного частного.

Как уже отмечалось, общим множителем может быть и многочлен.

2. Способ группировки. Иногда разложение многочлена на множители можно выполнить, группируя его члены так, чтобы в каждой группе слагаемые имели общий множитель. Сгруппировав таким образом члены и вынеся в каждой группе за скобки общий множитель, данный многочлен представляют в виде суммы, в которой каждое слагаемое имеет общий множитель. Его следует вынести за скобки, а выражение, оставшееся в скобках, упростить. Например, пусть требуется разложить на множители многочлен $ax^2+ay^2+bx^2+by^2$. Все члены многочлена общего множителя не имеют. Сгруппируем их попарно: первый со вторым и третий с четвертым: $(ax^2+ay^2)+(bx^2+by^2)$; из каждой группы вынесем за скобки их общие множители: $a(x^2+y^2)+b(x^2+y^2)$; вынесем за скобки общий множитель x^2+y^2: $(x^2+y^2)(a+b)$. Итак, $ax^2+ay^2+bx^2+by^2=(ax^2+ay^2)+(bx^2+by^2)=a(x^2+y^2)+b(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(a+b)$.

Способ, с помощью которого разложили на множители многочлен, называют *способом группировки.*

Группировку членов можно проводить различными способами. Например, $ac+bc-2a-2b=(ac-2a)+(bc-2b)=a(c-2)+b(c-2)=(c-2)(a+b)$, или иначе, $ac+bc-2a-2b=(ac+bc)-(2a+2b)=c(a+b)-2(a+b)=(a+b)(c-2)$. Заметим, что при группировке слагаемых можно перед скобкой ставить минус.

3. Применение формул сокращенного умножения. В тех случаях, когда многочлен, подлежащий разложению на множители, имеет форму правой части какой-либо формулы сокращенного умножения, его разложение на множители достигается применением соответствующей формулы, записанной в другом порядке.

Поменяв местами в формуле (2.12) левую и правую части, получим:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \tag{2.19}$$

Эта формула разности квадратов: разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Формула (2.19) применяется для разложения на множители разности квадратов двух выражений.

Поменяв местами в формулах (2.13) — (2.18) левые и правые части, получим:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \tag{2.20}$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2; \tag{2.21}$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3; \tag{2.22}$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3; \tag{2.23}$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \tag{2.24}$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \tag{2.25}$$

Тождество (2.24) называют *формулой суммы кубов*. Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Тождество (2.25) называют *формулой разности кубов*. Разность кубов двух выражений равна разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Приведем примеры использования формул (2.19) — (2.25) при разложении многочленов на множители:

$16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x - 3y)(4x + 3y);$

$81a^2 + 90ab + 25b^2 = (9a)^2 + 2 \cdot 9a \cdot 5b + (5b)^2 = (9a + 5b)^2;$

$9p^2 - pn + \frac{1}{36}n^2 = (3p)^2 - 2 \cdot 3p \cdot \frac{1}{6}n + \left(\frac{1}{6}n\right)^2 = \left(3p - \frac{n}{6}\right)^2;$

$8a^6 + 12a^4 + 6a^2 + 1 = (2a^2)^3 + 3 \cdot (2a^2)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2a^2 \times 1^2 + 1^3 = (2a^2 + 1)^3;$

$64 - 48x + 12x^2 - x^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 - x^3 = (4 - x)^3;$

$27c^3 + 8 = 3c^3 + 2^3 = (3c + 2)(9c^2 - 6c + 4);$

$125 - a^3b^3 = (5 - ab)(25 + 5ab + a^2b^2).$

4. Способ введения новых вспомогательных членов. Этот способ заключается в том, что данный многочлен заменяют другим, тождественно равным ему,

но содержащим другое число членов, путем введения двух противоположных одночленов или замены какого-либо его члена тождественно равной ему суммой подобных одночленов. Причем это делается с таким расчетом, чтобы к полученному многочлену можно было применить способ группировки.

Пример 4. Разложить на множители многочлен x^4+4.

Прибавим и вычтем $4x^2$, применим способ группировки, а затем формулу разности квадратов двух выражений:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x).$$

Пример 5. Разложить на множители многочлен $a^4+a^2b^2+b^4$.

Заменим член a^2b^2 суммой $2a^2b^2+(-a^2b^2)$, применим способ группировки и формулу разности квадратов двух выражений:

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2=$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab).$$

Пример 6. Разложить на множители многочлен $c^3+6c^2+11c+6$.

Заменим член a^2b^2 суммой $2a^2b^2+(-a^2b^2)$, применим способ групп и применим способ группировки:

$$c^3+6c^2+11c+6=c^3+3c^2+3c^2+9c+2c+6=(c^3+3c^2)+$$
$$+(3c^2+9c)+(2c+6)=c^2(c+3)+3c(c+3)+2(c+3)=(c+3)(c^2+$$
$$+3c+2)=(c+3)(c^2+2c+c+2)=(c+3)((c^2+2c)+(c+2))=$$
$$=(c+3)(c(c+2)+(c+2))=(c+3)(c+2)(c+1).$$

При разложении многочленов на множители, как правило, используют несколько способов. При разложении на множители многочлена с целыми коэффициентами с одной переменной используют теорему Безу и вытекающие из нее следствия, а также теорему о целых корнях многочлена. Пусть, например, требуется разложить на множители многочлен $P_4(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.

Чтобы разложить многочлен $P_4(x)$ на множители, найдем его корни. По теореме о целых корнях (учитывая, что $P_4(x)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами) целыми корнями многочлена $P_4(x)$ могут быть числа ±1, ±2, ±3, ±6 (делители свободного члена). Подвергнув испытанию эти числа, найдем, что число 1 — корень многочлена ($P_4(1)=1+5+5-5-6=0$). Значит, согласно теореме Безу, многочлен $P_4(x)$ делится на двучлен $x-1$. Частное от деления $P_4(x)$ на $x-1$ найдем, пользуясь схемой Горнера:

	1	5	5	-5	-6
1	1	6	11	6	0

Итак, согласно формуле (2.10), $P_4(x)=(x-1)(x^3+6x^2+11x+6)$. Чтобы найти другие корни многочлена $P_4(x)$, следует определить корни многочлена $S_3(x)=x^3+6x^2+11x+6$. Среди делителей свободного члена многочлена $S_3(x)$ находим целый корень: $x=-1(S_3(-1)=-1+6-11+6=0)$. По схеме Горнера определяем частное от деления $S_3(x)$ на двучлен $x+1$: $Q_2(x)=x^2+5x+6$. Поскольку числа -2 и -3 — корни трехчлена x^2+5x+6, то данный многочлен $P_4(x)$ имеет четыре корня: 1, -1, -2, -3. Поэтому $P_4(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$.

2.8. Корень n-й степени из действительного числа. Арифметический корень n-й степени. Правила действий над корнями

Корнем n-й степени (n — натуральное число) *из действительного числа a* называют такое действительное число b, n-я степень которого равна a. Корень n-й степени из числа a принято обозначать: $\sqrt[n]{a}$ (читают: «корень n-й степени из числа a»). Согласно определению корня n-й степени,

$$\sqrt[n]{a}=b, \text{ если } b^n=a. \qquad (2.26)$$

Рассмотрим примеры.

1. Запись $\sqrt[3]{343}$ означает корень третьей степени (или кубический корень) из числа 343. Так как $7^3=343$, то $\sqrt[3]{343}=7$.

2. Запись $\sqrt[5]{-243}$ означает корень пятой степени из числа -243, $\sqrt[5]{-243}=-3$, так как $(-3)^5=-243$.

3. Числа 3 и -3 — корни четвертой степени из числа 81, так как $3^4=81$ и $(-3)^4=81$.

4. Запись $\sqrt[4]{-625}$ не имеет смысла, так как не существует такого действительного числа, четвертая степень которого была бы равна -625.

Если n — нечетное число то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a; если n — четное число, то выражение

$\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geqslant 0$ и не имеет смысла при $a < 0$ (четная степень любого действительного числа неотрицательна).

Нахождение корня n-й степени из данного числа a называют *извлечением корня* n-й степени из числа a. Число a, из которого извлекается корень n-й степени, называют *подкоренным выражением*, а число n — *показателем корня*.

Очевидно, что при всех значениях a, если имеет смысл выражение $\sqrt[n]{a}$, выполняется равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$; это следует из формулы (2.26).

При нахождении корня n-й степени из действительного числа следует иметь в виду следующее:

1) корень нечетной степени из числа a всегда существует, и притом только один; если a — положительное число, то существует положительное число, являющееся корнем нечетной степени из числа a, если a — отрицательное число, то существует отрицательное число, служащее корнем нечетной степени из числа a;

2) существуют два противоположных числа, являющихся корнями четной степени из положительного числа a; положительный корень n-й степени обозначают в этом случае $\sqrt[n]{a}$. Тогда противоположное ему число будет $-\sqrt[n]{a}$.

Например, корни уравнения $x^4 = 8$, которые являются противоположными числами, записывают так: $\sqrt[4]{8}$ (положительный корень) и $-\sqrt[4]{8}$ (отрицательный корень);

3) корень любой натуральной степени n из числа нуль равен нулю: $\sqrt[n]{0} = 0$, так как $0^n = 0$;

4) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует.

Для любого неотрицательного действительного числа a и любого натурального n (как четного, так и нечетного) выражение $\sqrt[n]{a}$ всегда имеет смысл и обозначает неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Неотрицательный корень n-й степени из неотрицательного числа a называют *арифметическим корнем n-й степени*.

Иными словами, неотрицательное число, n-я степень которого равна неотрицательному числу a, называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Можно доказать, что арифметический корень из неотрицательного числа всегда существует и единствен.

Из определения арифметического корня n-й степени следует: выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$; выражение $\sqrt[n]{a}$ может принимать только неотрицательное значение; при любом неотрицательном значении a верно равенство

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \tag{2.27}$$

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени из числа, противоположного данному, т. е., если $a < 0$ и $n = 2k - 1$, где k — натуральное число, то

$$\sqrt[2k-1]{a} = -\sqrt[2k-1]{-a}. \tag{2.28}$$

Действительно, по определению корня

$$(\sqrt[2k-1]{a})^{2k-1} = a; \ (-\sqrt[2k-1]{-a})^{2k-1} = -(-a) = a,$$

т. е. $(\sqrt[2k-1]{a})^{2k-1} = (-\sqrt[2k-1]{-a})^{2k-1}$, откуда следует равенство (2.28).

Например, $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[5]{-1/3} = -\sqrt[5]{1/3}$.

Замечание 1. В дальнейшем запись $\sqrt[n]{a}$ будем использовать только для обозначения арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа a.

Замечание 2. Если $n = 2$, то показатель корня не пишется. Например, вместо $\sqrt[2]{7}$ пишут $\sqrt{7}$ и читают: «арифметический корень из 7».

Арифметический корень n-й степени обладает свойствами, которые выражаются следующими теоремами.

Теорема 2.2. *Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, n — натуральное число, то*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}. \tag{2.29}$$

▷ При $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ каждое из выражений $\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ имеет смысл и принимает неотрицательное значение ($\sqrt[n]{ab} \geqslant 0$ по определению арифметического корня, $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}) \geqslant 0$, так как $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$). Теорема будет доказана, если мы установим, что n-я степень произведедения $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ равна ab. Используя свойство степени произведения, получаем:

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab.$$

Значит, по определению арифметического корня n-й степени при $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ верно равенство (2.29), т. е. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Таким образом, корень n-й степени из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней той же степени из этих множителей. $\triangleleft$

Теорема 2.2 распространяется и на случай, когда число множителей под знаком корня больше двух. Например, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$. Действительно, $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{(ab)c}=\sqrt[n]{ab}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

Из формулы (2.29) следует правило умножения корней:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0). \tag{2.30}$$

Равенство (2.30) означает следующее: произведение нескольких арифметических корней с одинаковыми показателями равно арифметическому корню с тем же показателем из произведения подкоренных выражений данных корней.

Теорема 2.3. *Если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \tag{2.31}$$

т. е. при любом натуральном n корень степени n из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню степени n из числителя, деленному на корень той же степени из знаменателя.

$\triangleleft$ В самом деле, поскольку при $a\geqslant 0$ и $b>0$ каждое из выражений $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ имеет смысл, причем $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$, $\sqrt[n]{b}>0$, то $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geqslant 0$. Используя свойство степени дроби, получаем

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Значит, согласно определению арифметического корня n-й степени при $a \geqslant 0$ и $b > 0$, верно равенство (2.31). ◁

Если в равенстве (2.31) поменять местами левую и правую части, то получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (a \geqslant 0 \text{ и } b > 0), \tag{2.32}$$

из которого следует, что если два арифметических корня имеют одинаковые показатели, то частное от деления одного из них на другой равно арифметическому корню с тем же показателем из частного от деления подкоренных выражений данных корней.

Теорема 2.4. *Если* $a \geqslant 0$, n *и* k — *натуральные числа, то*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \tag{2.33}$$

▷ В самом деле, поскольку $a \geqslant 0$, то выражение $\sqrt[k]{a}$ имеет смысл, причем $\sqrt[k]{a} \geqslant 0$, поэтому $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ также имеет смысл, и $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$. Докажем, что nk-я степень выражения $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ равна a.

Действительно, используя свойство степени и равенство (2.27), будем иметь:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a.$$

Следовательно, по определению арифметического корня равенство

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, где $a \geqslant 0$, истинно. ◁

Итак, для того чтобы извлечь корень степени n из арифметического корня степени k, надо показатели корней перемножить и из подкоренного выражения извлечь корень степени nk.

Теорема 2.5. *Если $a \geqslant 0$, n и k — натуральные числа, то*

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}. \qquad (2.34)$$

Другими словами, для того чтобы возвести арифметический корень степени n в натуральную степень k, достаточно возвести в степень k подкоренное выражение и из полученного результата извлечь корень степени n.

▷ Для доказательства теоремы воспользуемся определением степени с натуральным показателем и равенством (2.30):

$$(\sqrt[n]{a})^k = \underbrace{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{k \text{ раз}} = \sqrt[n]{\underbrace{aa\cdots a}_{k \text{ раз}}} = \sqrt[n]{a^k}\text{, т. е.}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}. \ ◁$$

Таким образом, формулы (2.32) — (2.34) определяют соответственно правила деления корней, извлечения корня, возведения корня в степень.

Замечание. Если a неотрицательное число, n — натуральное число, то верно тождество

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \qquad (2.35)$$

▷ Действительно, из определения арифметического корня n-й степени $(\sqrt[n]{a})^n = a$, а согласно теореме 2.6, $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$. Значит, $\sqrt[n]{a^n} = a$. ◁

Теорема 2.6. *При любом значении a верно тождество*

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, \qquad (2.36)$$

где k — натуральное число.

▷ В самом деле, значение выражения $|a|$ неотрицательно при любом значении a (это следует из определения модуля числа). Кроме того, $|a|^{2k} = a^{2k}$: действительно, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и $|a|^{2k} = a^{2k}$, если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $|a|^{2k} = (-a)^{2k} = a^{2k}$.

Так как $|a| \geqslant 0$ и $|a|^{2k} = a^{2k}$, то при любом a по определению арифметического корня и в силу его единственности $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$. ◁

Из тождества (2.36) следует, что если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[2k]{a^{2k}} = a$; если $a < 0$, то $\sqrt[2k]{a^{2k}} = -a$. Например, $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Теорема 2.7. *Если* $a \geqslant 0$, n, k, m *— натуральные числа, то*

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{2.37}$$

$\triangleright$ Действительно, согласно теореме 2.5 и тождеству (2.35),

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{km}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{(a^k)^m}} = \sqrt[n]{a^k}. \ \triangleleft$$

Мы доказали, что если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделить на одно и то же натуральное число (их общий множитель), то значение корня не изменится.

Если в равенстве (2.37) поменять местами левую и правую части, то получим равенство

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{mk}}, \tag{2.38}$$

из которого следует, что значение корня из неотрицательного числа не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число.

Доказанное свойство иногда называют *основным свойством корня.*

Пользуясь этим свойством, корни с разными показателями всегда можно привести к одинаковому показателю.

Приведем, например, к одинаковому показателю корни $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$. Используя формулу (2.38), данные корни можно привести к наименьшему общему показателю, равному 6: $\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$; $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$.

Теорема 2.8. *Если* $a \geqslant 0$, n и m *— натуральные числа, причем* m *делится на* n, *то*

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}, \tag{2.39}$$

т. е., чтобы извлечь корень из степени неотрицательного числа, показатель которой делится на показатель корня, достаточно показатель подкоренного выражения разделить на показатель корня, оставив основание степени прежним.

▷ В самом деле, так как $a \geqslant 0$, то $a^{m/n} \geqslant 0$ и по теореме о возведении степени в степень $(a^{m/n})^n = a^{mn/n} = a^m$. Значит, по определению арифметического корня, $a^{m/n}$ есть арифметический корень n-й степени из a^m, т. е. выполняется равенство (2.39). ◁

Приведем примеры использования доказанных теорем.

Пример 1. Найдите значение выражения $\sqrt{75 \cdot 48}$.

Подкоренное выражение можно представить в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа: $\sqrt{75 \cdot 48} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 16 \cdot 9}$. Применив теорему 2.3, получим: $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 9} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Пример 2. Упростить выражение $\sqrt{25x^6y^{18}}$, если $x > 0$, $y < 0$.

Так как $\sqrt{25x^6y^{18}} = \sqrt{5^2(x^3)^2(y^9)^2}$, то воспользуемся последовательно теоремами 2.2 и 2.6: $\sqrt{5^2(x^3)^2(y^9)^2} = \sqrt{5^2}\,\sqrt{(x^3)^2} \cdot \sqrt{(y^9)^2} = 5|x^3|\,|y^9|$. Так как $x > 0$, то $x^3 > 0$ и, следовательно, $|x^3| = x^3$. Так как $y < 0$, то $y^9 < 0$ и, следовательно, $|y^9| = -y^9$, поэтому при $x > 0$ и $y < 0$

$$\sqrt{25x^6y^{18}} = 5|x^3|\,|y^9| = 5x^3(-y)^9 = -5x^3y^9.$$

Пример 3. При каких значениях x справедливо равенство

$$\sqrt[4]{(x-5)^4} = x - 5?$$

Так как $\sqrt[4]{(x-5)^4} = |x-5|$ (по теореме 2.6), а $|x-5| = x-5$, когда $x - 5 \geqslant 0$, т. е. когда $x \geqslant 5$, то данное равенство справедливо при $x \geqslant 5$.

Пример 4. Упростить выражение $\sqrt{a^2 - 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 12a + 36}$ при $3 \leqslant a \leqslant 6$.

Представим данное выражение в виде $\sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(a-6)^2}$ Так как при $3 \leqslant a \leqslant 6$ $\sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = a-3$, а $\sqrt{(a-6)^2} = |a-6| = -(a-6) = 6-a$, то

$$\sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(a-6)^2} = |a-3| + |a-6| = a - 3 + 6 - a = 3.$$

Пример 5. Извлечь корень $\sqrt{\dfrac{64a^6}{b^2}}$, если $a < 0$, $b > 0$.

Применяя последовательно известные теоремы, получаем

$$\sqrt{\frac{64a^6}{b^2}} = \frac{\sqrt{64a^6}}{\sqrt{b^2}} = \frac{8|a^3|}{|b|} = \frac{-8a^3}{b}.$$

Теорема 2.9. *Если a и b — неотрицательные числа, n — натуральное число, то*

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}. \qquad (2.40)$$

▷ Действительно, пользуясь тождеством (2.35), любое неотрицательное число можно представить в виде $a=\sqrt[n]{a^n}$. Следовательно, $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$. ◁

Преобразование корня по формуле (2.40) называют *внесением множителя* под знак корня. Чтобы внести под знак корня неотрицательный множитель, стоящий перед ним, следует возвести этот множитель в степень, показатель которой равен показателю корня, и записать его множителем под знаком корня.

Пусть дано выражение $\sqrt[n]{a^n b}$. Если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то это выражение можно записать в виде $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$.

Такое преобразование называют *вынесением множителя* из-под знака корня. Таким образом, если в подкоренном выражении имеется множитель с показателем, кратным показателю корня, то его можно вынести из-под знака корня. При этом следует помнить, что формула $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$ верна при $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$. Например, равенство $\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$ верно для $a\geqslant 0$ и неверно для $a<0$. Поэтому, если заранее не делается оговорка о неотрицательности буквенного множителя, выносимого из-под знака корня, то необходимо этот множитель записывать перед корнем под знаком модуля. Например, равенство $\sqrt{3a^2}=|a|\sqrt{3}$ верно для всех действительных значений a.

Пример 6. Внести множитель под знак корня в выражении $2a\sqrt[4]{5a}$, где $a\geqslant 0$. По формуле (2.40), зная, что $a\geqslant 0$, получаем

$$2a\sqrt[4]{5a}=\sqrt[4]{5a\cdot 2^4a^4}=\sqrt[4]{80a^5}.$$

Пример 7. Внести множитель под знак корня в выражении $-5\sqrt{a}$.

Отрицательный множитель -5 нельзя представить в виде арифметического квадратного корня и поэтому нельзя внести под знак корня. Запишем данное выражение в виде $(-1)\cdot 5\sqrt{a}$ и внесем под знак корня положительный множитель 5: $-5\sqrt{a}=(-1)5\sqrt{a}=-\sqrt{25a}$.

Пример 8. Внести множитель под знак корня в выражении $x\sqrt{3}$.

В выражении $x\sqrt{3}$ множитель x может быть как отрицательным, так и положительным, поэтому, если $x<0$, то $x\sqrt{3}=-(-x)\sqrt{3}=$

$= -\sqrt{3(-x)^2} = -\sqrt{3x^2}$. Если $x \geqslant 0$, то, внося множитель под знак корня, получаем: $x\sqrt{3} = \sqrt{3x^2}$.

Пример 9. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt[4]{x^9}$.

Заметим, что выражение $\sqrt[4]{x^9}$ имеет смысл только при $x \geqslant 0$. Представим подкоренное выражение x^9 в виде произведения двух степеней так, чтобы показатель одной из них делился бы на показатель корня. В результате получим: $\sqrt[4]{x^9} = \sqrt[4]{x^8 x} = \sqrt[4]{(x^2)^4 x} = x^2\sqrt[4]{x}$, где $x \geqslant 0$.

Пример 10. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{a^6 b}$. Выносяя множитель из-под знака корня, получаем

$$\sqrt{a^6 b} = \begin{cases} a^3\sqrt{b}, \text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0; \\ -a^3\sqrt{b}, \text{ если } a < 0,\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

Приведем еще одно свойство арифметического корня: если $a > b > 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ $(n \in N)$.

$\triangleright$ Действительно, если предположить, что $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$, то, возводя обе части неравенства в n-ю степень, получаем $a \leqslant b$, что противоречит условию: $a > b$. $\triangleleft$

Справедливо и обратное утверждение: если $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, то $a > b > 0$.

2.9. Степень с рациональным показателем

Введем понятие степени с рациональным показателем. При расширении понятия степени числа будем исходить из следующего условия: основное свойство степеней $a^m a^n = a^{m+n}$, выполняющееся для целых m и n, должно сохраняться и для дробных показателей.

Если $a > 0$, x — произвольное рациональное число, представленное дробью m/n, где m — целое число, n — натуральное $(n \neq 1)$, то по определению

$$a^x = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Если $a = 0$ и x — дробное положительное число, то $a^x = 0$ $(a = 0,\ x > 0)$.

Докажем, что основное свойство степеней справедливо и в случае рациональных показателей.

Теорема 2.10. *Если $a > 0$, x_1, x_2 — дробные рациональные показатели, то*

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

▷ Для доказательства теоремы рациональные показатели x_1 и x_2 представим в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $x_1 = m_1/n$, $x_2 = m_2/n$, где m_1 и m_2 — целые числа, n — натуральное число ($n > 1$). Воспользовавшись свойством корня $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, получим

$$a^{x_1}a^{x_2} = a^{m_1/n}a^{m_2/n} = \sqrt[n]{a^{m_1}}\sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1}a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} =$$
$$= a^{(m_1+m_2)/n} = a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}} = a^{x_1+x_2}, \; a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}. \; \triangleleft$$

Следствие. Для любого положительного числа a и рационального числа x

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \qquad (2.41)$$

Действительно, по теореме 2.10 $a^{-x}a^x = a^{-x+x} = a_0 = 1$, откуда и следует формула (2.41).

Для степеней с рациональным показателем и другие свойства степеней с натуральным показателем также справедливы.

Теорема 2.11. *Если $a > 0$, x_1, x_2 — рациональные числа, то*

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}.$$

▷ Пусть $x_2 = n$ — натуральное число, большее 1. Тогда

$$(a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_1})^n = \underbrace{a^{x_1}a^{x_1}\cdots a^{x_1}}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{x_1+x_1+\ldots+x_1}^{n \text{ раз}}} = a^{x_1n} = a^{x_1x_2}.$$

Пусть $x_2 = 1$, тогда $(a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_1})^1 = a^{x_1 \cdot 1} = a^{x_1x_2}$.

Пусть $x_2 = -n$, где n — натуральное число, тогда

$$(a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_1})^{-n} = \frac{1}{(a^{x_1})^n} = \frac{1}{a^{x_1n}} = a^{-x_1n} = a^{x_1(-n)} = a^{x_1x_2}.$$

Пусть $x_2 = m/n$ — дробное число, где m — целое, n — натуральное ($n \neq 1$), тогда

$(a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_1})^{m/n} = \sqrt[n]{(a^{x_1})^m} = \sqrt[n]{a^{x_1m}}$, откуда получаем:

1) если x_1 — целое, то x_1m — целое и $\sqrt[n]{a^{x_1m}} = a^{\frac{x_1m}{n}} = a^{x_1\frac{m}{n}} = a^{x_1x_2}$;

2) если $x_1 = p/q$ — дробное, где p — целое, q — натуральное и $q \neq 1$, то

$$\sqrt[n]{a^{x_1 m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{pm}{q}}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^{pm}}} = \sqrt[nq]{a^{pm}} =$$
$$= a^{pm/(qn)} = a^{p/q}a^{m/n} = a^{x_1}a^{x_2}. \triangleleft$$

Следствие. Если $a > 0$, x — рациональное, n — натуральное и $n \neq 1$, то $\sqrt[n]{a^x} = a^{x/n}$.

$\triangleright$ В самом деле,

$$\sqrt[n]{a^x} = \sqrt[n]{(a^x)^1} = (a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{x \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}. \triangleleft$$

Теорема 2.12. *Если $a > 0$, $b > 0$ и x — рациональное число, то*

$$(ab)^x = a^x b^x. \tag{2.42}$$

$\triangleright$ Действительно, если x — целое число, то равенство (2.42) верно на основании свойства степени с целым показателем. Если x — дробное число, то, представив его в виде $x = m/n$, где m — целое, $n \neq 1$ — натуральное, получим

$$(ab)^x = (ab)^{m/n} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = a^{m/n}b^{m/n} =$$
$$= a^x b^x. \triangleleft$$

Следствие. Если $a > 0$, $b > 0$ и x — рациональное число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

$\triangleright$ В самом деле, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = (ab^{-1})^x = a^x(b^{-1})^x = a^x \cdot \frac{1}{b^x} =$
$= \frac{a^x}{b^x}. \triangleleft$

2.10. Степень с действительным показателем

Пусть действительное число α записано в виде десятичной дроби, а (α_n) — последовательность его десятичных приближений с недостатком. Для любого действительного числа $a > 0$ степень a^α определяется равенством

$$a^\alpha = \lim_{n \to \infty} a^{\alpha_n}. \tag{2.43}$$

$\triangleright$ Докажем, что для любого действительного числа α и любого действительного числа $a > 0$ степень a^α существует, т. е. существует предел (2.43).

Для любого действительного числа α последовательность (α_n) его десятичных приближений с недостатком является неубывающей и монотонной. Пусть, например, $\alpha_n \leqslant \beta$ для всех n, где β — целое число. Тогда, если $a > 1$, то последовательность (a^{α_n}) в силу свойства степеней с рациональным показателем будет неубывающей и ограниченной сверху числом α^{β}; если $0 < a < 1$, то (a^{α_n}) будет невозрастающей и ограниченной снизу нулем. Из теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности следует, что предел (2.43) существует в обоих случаях. ◁

Степени с действительными показателями обладают всеми свойствами степеней с рациональными показателями:

Пусть a и b — действительные положительные числа, x, y — произвольные действительные числа, тогда

1) $a^x a^y = a^{x+y}$; 2) $(a^x)^y = a^{xy}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$;

4) $(a/b)^x = a^x/b^x$; 5) если $a > 1$ и $x < y$, то $a^x < a^y$;

6) если $0 < a < 1$ и $x < y$, то $a^x > a^y$; 7) если $a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$;

8) если $a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$.

3. ФУНКЦИИ

3.1. Понятие функции. Основные определения

Рассмотрим два множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ по вполне определенному правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* со значениями во множестве Y и пишут $y = f(x)$, при этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции* $y = f(x)$, ее обозначают $D(f)$. Совокупность всех значений функции $f(x)$ называют *множеством значений или областью значений функции* и обозначают $E(f)$.

Замечание. Область значений $E(f)$ функции $y = f(x)$ может не совпадать с множеством Y, но $E(f)$ всегда подмножество множества Y.

Функцию, область определения и область значений которой — числовые множества, называют *числовой функцией* или *действительной функцией одной действительной переменной.*

Введем на плоскости систему прямоугольных декартовых координат. *Графиком функции* $y=f(x)$ называют множество точек $M(x;\ f(x))$ плоскости, т. е. множество точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции.

Основные способы задания функции: 1) *аналитический*; 2) *табличный*; 3) *графический*.

Если функция задана формулой $y=f(x)$, то говорят, что она задана аналитически. По этой формуле для любого значения x из области определения данной функции можно найти единственное значение y из области ее значений.

Примеры аналитического способа задания функции: $y=2x+5$; $y=x^2$; $y=x^2+3$.

Если функция задана формулой $y=f(x)$, то значение, которое она принимает при $x=a$, обозначают $f(a)$. Например, если $f(x)=x^2$, то $f(0)=0^2=0$, $f(1)=1^2=1$, $f(2)=2^2=4$, $f(-2)=(-2)^2=4$ и т. д.

Если функция задана формулой и область определения функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл. Например, область определения функции $y=5x/(x-3)$ состоит из всех чисел, кроме $x=3$.

Табличный способ задания функции состоит в составлении таблицы соответствующих значений x и y.

Отметим, что если задана формула $y=f(x)$, то для заданных x_k всегда можно составить таблицу значений x_k, y_k при $k=1, 2, 3, \dots$ Обратное неверно. По заданной таблице невозможно найти точную формулу $y=f(x)$, по которой вычисляются значения y_k при заданных значениях $x_k (k=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$. В таких случаях ставится задача нахождения приближенной формулы.

Графический способ задания функции состоит в том, что функция задается с помощью графика. Примером может служить график температуры воздуха, вычерченный самопишущим прибором. Из графика можно узнать, как изменялась температура воздуха в течение соответствующего промежутка времени.

Если задан график функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, то для любого $x_0 \in [a;\ b]$ можно найти соответствующее значение y_0. Для этого необходимо через точку $M(x_0)$ провести перпендикуляр к оси Ox, найти точку N пересечения перпендикуляра с графиком (рис. 3.1). Вычислив длину отрезка MN с помощью заданного масштаба и взяв ее с плюсом, когда точка N выше оси Ox (и с минусом, когда точка N — ниже этой оси), получаем искомое значение y_0.

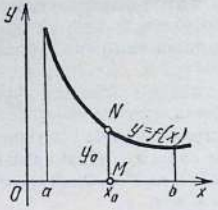


Рис. 3.1

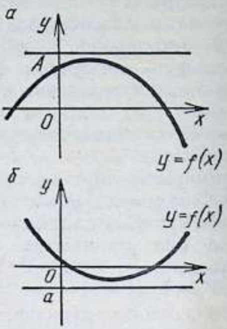


Рис. 3.2

Если функция задана формулой $y=f(x)$ или таблицей значений x_k, y_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$, можно построить ее график. График функции, заданной табличным способом, состоит из отдельных точек.

Функцию $y=f(x)$ называют *ограниченной сверху* на множестве X, если существует такое число A, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant A$.

Функцию $y=f(x)$ называют *ограниченной снизу* на множестве X, если существует такое число a, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $a \leqslant f(x)$.

Функцию $y=f(x)$ называют *ограниченной на множестве* X, если она ограничена на нем сверху и снизу, т. е. существуют такие числа a и A, что для всех $x \in X$ выполняются неравенства $a \leqslant f(x) \leqslant A$.

График функции $y=f(x)$, ограниченной сверху на множестве X, целиком лежит ниже горизонтальной прямой $y=A$ (рис. 3.2, *а*). График функции, ограниченной снизу, целиком лежит выше горизонтальной прямой $y=a$ (рис. 3.2, *б*). График функции, ограниченной на некотором множестве, целиком лежит в полосе между прямыми $y=a$ и $y=A$.

Например, функция $f(x)=1/(1+x^2)$ является ограниченной на всей действительной оси. Для этой функции $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$, $E(f)=(0;\ 1]$. Ее график расположен между прямыми $y=0$ (ось Ox) и $y=1$ (рис. 3.3). Функция

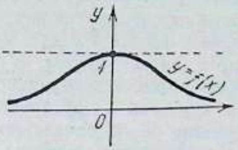


Рис. 3.3

$f(x)=x^2$ ограничена на любом конечном промежутке $(\alpha;\ \beta)$, но не ограничена в промежутке $(-\infty;\ +\infty)$. Эта функция в своей области определения $X=(-\infty;\ +\infty)$ ограничена снизу ($f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in X$), но не ограничена сверху.

Определение ограниченной функции можно также дать следующим образом. Функцию $y=f(x)$ называют ограниченной на множестве X, если существует такое число $C>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant C$.

3.2. Четные и нечетные функции

Числовое множество X называют *симметричным* относительно точки O, если вместе с любым своим элементом x оно содержит и противоположный элемент $(-x)$: $x\in X \Rightarrow (-x)\in X$. Примеры симметричных множеств: $(-3;\ 3)$; $(-7;\ 7)$; $(-\infty;\ +\infty)$. Множества $[-3;\ 6]$, $[2;\ 5]$ не являются симметричными.

Функцию $y=f(x)$ называют *четной*, если она определена на симметричном множестве X и для любого $x\in X$ выполняется равенство

$$f(-x)=f(x). \tag{3.1}$$

Примером четной функции является функция $f(x)=x^2$. Действительно, эта функция определена в симметричном промежутке $(-\infty;\ +\infty)$ и для любого $x\in(-\infty;\ +\infty)$

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, т. е. выполнено равенство (3.1). Четной является функция $f(x)=x^n$, где n — четное число. Функция $f(x)=|x|$ — также четная.

График четной функции симметричен относительно оси Oy. В самом деле, если точка $M(a, b)$ принадлежит графику данной функции $y=f(x)$, т. е. ее координаты удовлетворяют равенству $b=f(a)$, то точка $N(-a, b)$ также принадлежит этому графику, так как, согласно условию (3.1), $f(-a)=f(a)=b$. Точки $M(a, b)$ и $N(-a, b)$, абсциссы которых отличаются лишь знаком, а ординаты равны между собой, симметричны относительно оси Oy. Значит, для любой точки графика существует точка того же графика, симметричная ей относительно оси Oy.

Функцию $y=f(x)$ называют *нечетной*, если она определена на симметричном множестве X и для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x). \tag{3.2}$$

Например, функция $f(x)=x^3$ — нечетная, так как она определена на симметричном промежутке $(-\infty; +\infty)$ и для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ $f(-x)=(-x)^3=-x^3=$ $=-f(x)$, т. е. выполнено равенство (3.2). Нечетной является всякая функция $f(x)=x^n$, где n — нечетное число.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Действительно, если точка $M(a, b)$ принадлежит графику нечетной функции $y=f(x)$, т. е. ее координаты a и b связаны зависимостью $b=f(a)$, то точка $N(-a; -b)$ также принадлежит этому графику, так как $-b=f(-a)$ (это следует из равенства (3.2) и равенства $f(-a)=-f(a)=-b$). Точки $M(a, b)$ и $N(-a, -b)$, соответствующие координаты которых отличаются только знаками, симметричны относительно начала координат. Это значит, что для любой точки графика существует симметричная ей точка относительно точки $O(0, 0)$.

Если $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ — нечетные функции, то их сумма и разность также нечетные функции, а частное и произведение — четные функции.

▷ Обозначим сумму и разность данных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно:

$$F_1(x)=f(x)+\varphi(x);\ F_2(x)=f(x)-\varphi(x).$$

Так как по определению $f(-x)=-f(x)$, $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, то

$$F_1(-x)=f(-x)+\varphi(-x)=-f(x)-\varphi(x)=-(f(x)+\varphi(x))=-F_1(x);$$
$$F_2(-x)=f(-x)-\varphi(-x)=-f(x)+\varphi(x)=-(f(x)-\varphi(x))=-F_2(x).$$

Полученные равенства означают, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — нечетные функции.

Обозначим произведение и частное данных функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ соответственно:

$$\Phi_1(x)=f(x)\varphi(x);\ \Phi_2(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\qquad(\varphi(x)\neq 0).$$

Докажем, что $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ — четные функции.

Действительно, учитывая, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ — нечетные функции, будем иметь:

$\Phi_1(-x)=f(-x)\varphi(-x)=(-f(x))(-\varphi(x))=f(x)\varphi(x)=\Phi_1(x);$

$$\Phi_2(-x)=\frac{f(-x)}{\varphi(-x)}=\frac{-f(x)}{-\varphi(x)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\Phi_2(x).\ \triangleleft$$

Аналогично можно доказать, что произведение четной и нечетной функций является нечетной функцией.

Читателю предлагается убедиться в том, что сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

Замечание. Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, например, функция $f(x)=2x+3$.

3.3. Монотонные функции. Периодические функции

Функцию $y=f(x)$ называют *возрастающей на промежутке* X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется условие

$$(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)<f(x_2)).\qquad(3.3)$$

Другими словами, функцию называют возрастающей на некотором промежутке, если любому большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. График возрастающей функции изображен на рис. 3.4, *а*.

Функцию $y=f(x)$ называют *убывающей на промежутке* X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется условие

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2)). \tag{3.4}$$

Иначе говоря, функцию называют убывающей на некотором промежутке если любому большему значению аргу-

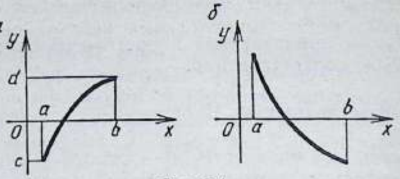


Рис. 3.4

мента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции. График убывающей функции изображен на рис. 3.4, *б*.

Функцию, возрастающую на некотором промежутке или убывающую на нем, называют *монотонной на промежутке*.

Функцию $y=f(x)$, определенную на множестве X, называют *периодической*, если существует такое отличное от нуля число T, что выполняются два условия: 1) если $x \in X$, то $(x+T) \in X$ и $(x-T) \in X$; 2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(x+T)=f(x)$. Число T называют *периодом функции* $y=f(x)$.

Из этого определения следует, что если T — период функции $y=f(x)$, то $2T$ — также ее период. Действительно: 1) если $x \in X$, то $x+T \in X$, откуда $((x+T)+T) \in X$, т. е. $(x+2T) \in X$; 2) $f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x)$. Это означает, что $2T$ — период функции $y=f(x)$. Аналогично проверяется, что $3T$, $4T$, вообще любое число nT, где $n \in \mathbf{N}$, является периодом этой функции.

Покажем, что если T — период функции $y=f(x)$, то число $-T$ также является периодом этой функции. Если $x \in X$, то $(x-T) \in X$, далее $f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T)$. Последнее равенство означает, что $-T$ является периодом функции. Аналогично можно проверить, что периодами этой функции являются также числа $-2T$, $-3T$, ... Таким образом, периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Если T — период функции $y = f(x)$, то любое число вида kT, где $k \in Z$, также является периодом функции.

Наименьший из положительных периодов, если он существует, называют *основным периодом*.

График периодической функции обладает следующей особенностью. Если T — основной период функции $y = f(x)$, то для построения ее графика достаточно построить его ветвь на одном из промежутков длиной T, а затем произвести параллельный перенос построенной ветви вдоль оси Ox на $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ... Примером периодической функции может служить функция $y = \{x\}$ (см. § 3.9). Периодическими являются тригонометрические функции (см. гл. 9).

3.4. Прямая пропорциональная зависимость

Функцию, которую можно задать формулой

$$y = kx, \tag{3.5}$$

где k — действительное число, отличное от нуля, называют *прямой пропорциональностью* (или просто *пропорциональностью*). Число $k (k \neq 0)$ называют *коэффициентом пропорциональности*; о переменной y при этом говорят, что она пропорциональна переменной x.

Областью определения функции (3.5) является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. В конкретных случаях прямой пропорциональной зависимости двух переменных величин областью определения может служить некоторое подмножество множества $\mathbf{R}$.

Из формулы (3.5) при $x \neq 0$ следует, что

$$y/x = k \ (k \neq 0). \tag{3.6}$$

Обратное также верно: если выполняется равенство (3.6), то $y = kx$, т. е. выполняется и равенство (3.5). Равенство (3.6) можно использовать при выяснении вопроса о том, является ли функция, заданная табличным способом, прямой пропорциональной зависимостью. С этой целью нужно составить частное y/x для всех пар соответственных значений x и y, для которых $x \neq 0$. Если эти частные равны одному и тому же числу, отличному от нуля, и если значению $x = 0$ соответствует значение $y = 0$, то зависимость y от x — прямая пропорциональность.

Рассмотрим основное **свойство прямой пропорциональной зависимости**. Если функция $y=f(x)$ — прямая пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) — пары соответственных значений переменных x и y, причем $x_2 \neq 0$, то

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}. \tag{3.7}$$

▷ Действительно, в данном случае функцию можно задать формулой $y=kx$, где $k \neq 0$. В соответствии с этой формулой $y_1=kx_1$, $y_2=kx_2$, причем $y_2 \neq 0$, так как $x_2 \neq 0$. Из этих равенств получаем

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{kx_1}{kx_2}=\frac{x_1}{x_2}. \triangleleft$$

Если $k>0$, x и y — переменные, принимающие только положительные значения, то доказанное основное свойство прямой пропорциональности можно сформулировать следующим образом: при прямой пропорциональной зависимости $y=kx$ с увеличением значения x в несколько раз соответствующее значение y увеличится во столько же раз, с уменьшением значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшится во столько же раз.

Свойство прямой пропорциональности, выражаемое формулой (3.7), используют при решении задач.

Рассмотрим, например, **деление числа на части, пропорциональные данным числам**. Пусть числа a, b, c таковы, что $a/3=k$, $b/4=k$, $c/5=k$, т. е. $a=3k$, $b=4k$, $c=5k$, где k — некоторое число, отличное от нуля. В этом случае говорят, что числа a, b, c пропорциональны числам 3, 4, 5 (k — коэффициент пропорциональности).

Пример 1. Найти длины сторон треугольника, если известно, что они пропорциональны числам 3, 4, 5, а его периметр равен 36 см.

Пусть k — коэффициент пропорциональности, тогда длины сторон треугольника будут равны соответственно $3k$, $4k$, $5k$. Из условия задачи получим уравнение $3k+4k+5k=36$, $12k=36$, откуда $k=3$. Следовательно, $3k=9$, $4k=12$, $5k=15$.

Длины сторон треугольника 9 см, 12 см, 15 см.

Чтобы разделить число на части, пропорциональные данным числам, надо разделить это число на сумму данных чисел и полученное частное последовательно умножить на каждое из данных чисел.

Пример 2. Разделить число 40 на части, пропорциональные числам 2, 3, 5.

Надо найти таких три слагаемых a, b, c, чтобы $a+b+c=40$ и $a:b:c=2:3:5$. Так как $2+3+5=10$, то последовательно находим $a=\frac{40}{10}\cdot 2=8$, $b=\frac{40}{10}\cdot 3=12$, $c=\frac{40}{10}\cdot 5=20$.

Замечание. Если число надо разделить на части, пропорциональные дробным числам, то отношение дробных чисел надо заменить отношением целых чисел, а затем применить указанное выше правило.

Графиком функции $y=kx$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $A(1, k)$.

▷ Проведем прямую через две точки $O(0, 0)$, $A(1, k)$, $k>0$. Пусть E и C — проекции точки A на координатные оси (рис. 3.5), тогда $OE=1$, $OC=k$.

Покажем, что любая точка прямой OA принадлежит графику функции $y=kx$; любая точка графика функции $y=kx$ является точкой прямой OA.

1. Пусть $M(x, y)$ — любая точка прямой OA, $P(x, 0)$, $Q(0, y)$ — ее проекции на координатные оси, тогда $OP=x$, $OQ=y$. Из подобия треугольников OAE и OMP получаем: $\frac{AE}{OE}=\frac{MP}{OP}$, откуда $\frac{OC}{OE}=\frac{OQ}{OP}$, значит, $k=y/x$, т. е. $y=kx$. Так как при $k>0$ положительным x соответствуют положительные y, а отрицательным x — отрицательные y, то $y=kx$ для всех точек прямой OA. Аналогично $y=kx$ и при $k<0$.

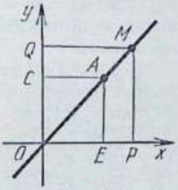


Рис. 3.5

2. Пусть $N(x, y')$ — любая точка графика функции $y=kx$, где x — то же, что и для точки $M(x, y)$ прямой OA. Точка $A(1, k)$ также принадлежит графику этой функции ($y=k$ при $x=1$). Запишем формулу (3.7) для двух пар значений $(1, k)$, (x, y'): $y'/k=x/1$, откуда $k=y'/x$. С другой стороны, $k=y/x$. Сравнивая два выражения для k, заключаем, что $y'=y$ (поскольку в этих выражениях k и x имеют одни и те же значения). Это означает, что точка $N(x, y')$ совпадает с точкой $M(x, y)$, т. е. лежит на прямой OA. ◁

Всякая прямая, проходящая через начало координат и не совпадающая с осями, является графиком прямой пропорциональности.

▷ Чтобы это доказать, возьмем прямую, проходящую через начало координат и не совпадающую с осями Ox и Oy. Зафиксируем на этой прямой точку с абсциссой $x = 1$. Ординату этой точки обозначим k. Очевидно, что $k \neq 0$. Учитывая, что график прямой пропорциональности $y = kx$, где $k \neq 0$, есть прямая, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(1, k)$, и что через две точки можно провести только одну прямую, можно сделать вывод, что данная прямая совпадает с графиком функции, заданной формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, и является графиком прямой пропорциональности с коэффициентом k. ◁

Величина угла наклона прямой $y = kx$ к оси Ox зависит от значения коэффициента k: если k — положительное число, то этот угол острый, если k — отрицательное число, то угол — тупой.

3.5. Линейная функция

Линейной называют функцию, которую можно задать формулой

$$y = kx + b, \tag{3.8}$$

где k и b — некоторые действительные числа.

Областью определения линейной функции (3.8) является множество всех действительных чисел, так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях x.

Рассмотренная в § 3.4 прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. В самом деле, при $b = 0$ и $k \neq 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = kx$, а этой формулой задается прямая пропорциональность.

В § 3.4 было доказано, что графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $A(1, k)$. Рассмотрим график линейной функции $Y = kx + b$. При $x = x_1$ имеем $y_1 = kx_1$ и $Y_1 = kx_1 + b$, $Y_1 - y_1 = b$; при $x = x_2$ получаем $y_2 = kx_2$, $Y_2 = kx_2 + b$, $Y_2 - y_2 = b$. Очевидно, что $Y - y = b$ при любом значении x. Это значит, что при одних и тех же значениях x соответствующие ординаты точек отличаются на одну и ту же постоянную b. Следовательно, графиком функции $Y = kx + b$ является прямая, параллельная прямой $y = kx$.

Для построения прямой линии достаточно определить положение двух ее различных точек. Пусть, например, требуется построить график линейной функции $y = -2x + 1$. Зафиксируем два произвольных значения x, например $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Вычислим соответствующие значения y: $y_1 = -2 \cdot 0 + 1 = 1$, $y_2 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$. Построим в координатной плоскости точки $M_1(0, 1)$, $M_2(1, -1)$ и проведем через эти точки прямую (рис. 3.6). Эта прямая является графиком функции $y = -2x + 1$. Она параллельна прямой, являющейся графиком функции $y = -2x$, проходящей через начало координат и точку $A(1, -2)$ (в данном случае $k = -2$).

Расположение графика линейной функции $y = kx + b$ относительно системы координат зависит от значений k и b.

От коэффицента k зависит величина угла наклона графика линейной функции к оси Ox: если k — положительное число ($k > 0$), то угол наклона острый (см. рис. 3.5), если k — отрицательное число ($k < 0$), то угол наклона тупой (см. рис. 3.6). Число k называют *угловым коэффициентом прямой.*

Замечание 1. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси Ox, т. е. $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, образуемый прямой и осью Ox.

Если $k = 0$, функция (3.8) принимает вид

$$y = b. \tag{3.9}$$

Графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox (рис. 3.7, *а*), пересекающая ось Oy в точке $B(0, b)$. Если $b < 0$, прямая будет расположена ниже оси Ox, если $b = 0$, прямая совпадает с осью Ox.

Замечание 2. Прямая, параллельная оси Oy и пересекающая ось Ox в точке $A(a, 0)$, определяется уравнением $x = a$ (рис. 3.7, *б*, здесь $a > 0$). Если $a < 0$, точка A будет слева от начала координат. Если $a = 0$, прямая совпадает с осью Oy.

Как зависит расположение графика функции $y = kx + b$ от числа b? Если $x = 0$, то $y = b$. Это значит, что график функции $y = kx + b$ пересекает ось Oy в точке $B(0, b)$, ордината которой равна b. Если дано несколько линейных функций при различных k и одном и том же значении b, то их графики — прямые, проходящие через точку $B(0, b)$.

Можно доказать, что всякая прямая на плоскости, не параллельная оси ординат, является графиком некоторой линейной функции.

Графики двух линейных функций представляют собой прямые, которые либо пересекаются, либо параллельны.

Рассмотрим линейные функции, заданные формулами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ с различными коэффициентами k и выясним взаимное расположение их графиков.

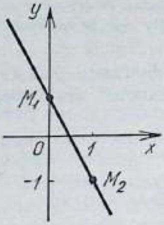


Рис. 3.6

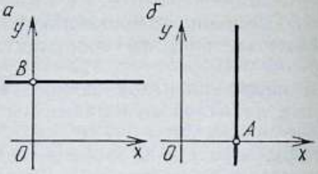


Рис. 3.7

Если графики функций пересекаются, то это означает, что они имеют общую точку. В данном случае найдется такое значение переменной x, которому соответствует одно и то же значение y для обеих функций, т. е. будем иметь соотношение

$$k_1x + b_1 = k_2x + b_2. \tag{3.10}$$

Преобразуем это соотношение:

$$k_1x - k_2x = b_2 - b_1;$$

$$x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1.$$

Так как $k_1 \neq k_2$, то $x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$ — единственное значение переменной x, при котором значения рассматриваемых функций равны. Итак, если $k_1 \neq k_2$, графики функций пересекаются. Если $k_1 = k_2$, а $b_2 \neq b_1$, равенство $x(k_1 - k_2) = (b_2 - b_1)$ противоречиво, и, следовательно, уравнение (3.10) решений не имеет. Это означает, что прямые, являющиеся графиками линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, не имеют общих точек, т. е. они параллельны.

Таким образом, графики двух линейных функций пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, и параллельны, если их угловые коэффициенты одинаковы.

3.6. Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называют функцию, которую можно задать формулой

$$y = k/x, \tag{3.11}$$

где k — действительное число, отличное от нуля. О переменной y в этом случае говорят, что она обратно пропорциональна переменной x. Областью определения функции (3.11) является множество всех действительных чисел, отличных от нуля, поскольку выражение k/x имеет смысл при любом значении x, кроме $x = 0$.

Из формулы (3.11) следует, что

$$xy = k \ (k \neq 0). \tag{3.12}$$

Верно и обратное: если $xy = k$, где $k \neq 0$, то y выражается формулой (3.11).

Равенство (3.12) позволяет выяснить, является ли функция $y = f(x)$, заданная табличным способом, обратной пропорциональностью. Для этого сравнивают произведения xy для всех пар соответственных значений переменных x и y. Если эти произведения равны одному и тому же числу k, отличному от нуля, то данная функция является обратной пропорциональностью.

Если данная функция $y = f(x)$ — обратная пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) — любые пары соответственных значений переменных x и y, то

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}. \tag{3.13}$$

▷ Действительно, по формуле (3.11) получаем $y_1 = k/x_1$, $y_2 = k/x_2$, причем $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ (поскольку $k \neq 0$). Из этих двух равенств получаем равенство (3.13):

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}. \ \triangleleft$$

Если переменные x и y принимают положительные значения и $k > 0$, то доказанное свойство обратной пропорциональности можно сформулировать так: с увеличением значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается во столько же раз, с уменьшением значения x в несколько раз соответствующее значение y увеличивается во столько же раз.

Это свойство обратной пропорциональности используют при решении задач.

Пример. Разделить число 130 на части обратно пропорционально числам 2, 3, 4.

Чтобы разделить число на части обратно пропорционально данным числам, нужно это число разделить на части прямо пропорционально обратным числам.

Найдем числа, обратные числам 2, 3 и 4. Это будут числа 1/2, 1/3 и 1/4. Заменим отношение $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ дробных чисел отношением целых чисел $6:4:3$ и разделим число 130 на части прямо пропорционально этим числам. Обозначив искомые части a, b и c, получим

$$a=\frac{130}{6+4+3}\cdot 6=\frac{130}{13}\cdot 6=60;\ b=\frac{130}{13}\cdot 4=40;\ c=\frac{130}{13}\cdot 3=30.$$

Выясним некоторые особенности графика функции $y=k/x$, где $k\neq 0$.

График не имеет общих точек с осью Oy, поскольку число 0 не входит в область определения данной функции и на графике нет точек с абсциссой 0. Так как значение y ни при каком x не равно нулю, то общих точек с осью Ox график не имеет. Итак, график обратной пропорциональности не пересекает ни одну из координатных осей.

Функция $y=k/x$ при $k>0$ принимает положительные значения, если $x>0$, и отрицательные, если $x<0$. Это следует из того, что знак дроби k/x, где $k>0$, зависит от знака x: если $x>0$, то $k/x>0$, если $x<0$, то $k/x<0$. График функции $y=k/x$ при $k>0$ представляет собой кривую, расположенную в первой и третьей координатных четвертях (рис. 3.8, a).

Функция $y=k/x$ при $k>0$ убывает в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

$\triangleright$ Пусть $x_2>x_1>0$, $k>0$ и $y_1=k/x_1$, $y_2=k/x_2$, тогда

$$y_2-y_1=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1-kx_2}{x_1x_2}=\frac{k(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0,$$

а, значит, $y_2<y_1$, т. е. в промежутке $(0;\ +\infty)$ функция $y=k/x$ при $k>0$ убывает. Нетрудно убедиться в том, что функция $y=k/x$ при $k>0$ убывает и в промежутке $(-\infty;\ 0)$. $\triangleleft$

Значит, чем больше положительная абсцисса точки графика, тем ближе эта точка к оси абсцисс. Для достаточно больших значений x это расстояние может стать сколь угодно малым. Чем ближе положительная абсцисса точки графика к нулю, тем больше ордината этой точки, тем ближе эта точка к оси ординат.

Функция $y = k/x$ при $k < 0$ принимает отрицательные значения, если $x > 0$, и положительные, если $x < 0$. Гра-

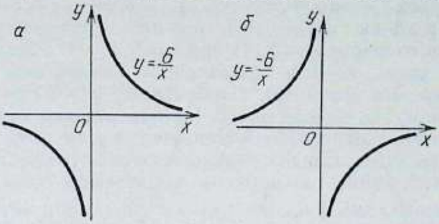


Рис. 3.8

фик ее расположен во второй и четвертой координатных четвертях (рис. 3.8, *б*).

Нетрудно убедиться в том, что функция $y = k/x$ при $k < 0$ возрастает в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

Заметим, что функция $y = k/x$ $(k \neq 0)$ возрастает (или убывает) в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, однако она не является возрастающей (или убывающей) на всей области определения.

Например, функция $y = -6/x$ возрастает в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, но на всей области определения для нее не справедливо высказывание, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Так, при $x_1 = -3$, $y_1 = 2$, а при $x_2 = 12$, $y_2 = -1/2$, т. е. из того, что $x_2 > x_1$ не следует, что $y_2 > y_1$.

При любом значении k $(k \neq 0)$ график обратной пропорциональности $y = k/x$ представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей. Кривую эту называют *гиперболой*. На рис. 3.8, *а*, *б* изображены соответственно графики функций $y = 6/x$ и $y = -6/x$.

3.7. Квадратичная функция

Квадратичной называют функцию, заданную формулой

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (3.14)$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$.

Отметим, что в случае $a=0$ формула (3.14) принимает вид $y=bx+c$ и задает линейную функцию.

Так как выражение ax^2+bx+c имеет смысл для любого x, то квадратичная функция определена при всех x, т. е. областью ее определения является бесконечный промежуток $(-\infty; +\infty)$.

1. График функции $y=ax^2$. Формула $y=ax^2$ получена из формулы (3.14) при $b=0$, $c=0$. Рассмотрим случай, когда $a=1$ и формула принимает вид $y=x^2$. Очевидно, что $y=0$ при $x=0$. Далее, $y>0$ при $x\neq 0$, поскольку $x^2>0$, если $x\neq 0$ (четная степень как положительного, так и отрицательного числа есть число положительное). Следовательно, все точки графика функции $y=x^2$, кроме точки $(0, 0)$, лежат выше оси Ox.

Покажем, что функция $f(x)=x^2$ убывает в интервале $(-\infty; 0)$ (на множестве отрицательных чисел) и возрастает в интервале $(0; +\infty)$ (на множестве положительных чисел).

$\triangleright$ В самом деле, если x_1 и x_2 — отрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам $x_1<x_2<0$, то числа $-x_1$, $-x_2$ являются положительными, причем $-x_1> -x_2$, откуда $(-x_1)^2>(-x_2)^2$, или $x_1^2>x_2^2$, т. е. $f(x_1)>f(x_2)$. Итак, из неравенств $x_1<x_2<0$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. Значит, функция $f(x)=x^2$ убывает в интервале $(-\infty; 0)$. Пусть x_1 и x_2 — положительные числа, причем $x_1<x_2$. Отсюда следует, что $x_1^2<x_2^2$, или $f(x_1)<f(x_2)$. Таким образом, $(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)<f(x_2))$, т. е. функция $f(x)=x^2$ возрастает в интервале $(0; +\infty)$. $\triangleleft$

Поскольку $(-x)^2=x^2$, т. е. $f(-x)=f(x)$, то $f(x)=x^2$ — четная функция и ее график симметричен относительно оси Oy (рис. 3.9).

Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2 (a\neq 0)$. При любом $a (a\neq 0)$ областью определения функции является бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$, так как выражение ax^2 имеет смысл для всех x.

Если $a>0$, то множеством значений функции $f(x)=ax^2$ будет полуинтервал $[0; +\infty)$. Функция $f(x)=ax^2$ $(a>0)$ убывает на множестве отрицательных чисел, поскольку

$$(x_1<x_2<0)\Rightarrow(x_1^2>x_2^2)\Rightarrow(ax_1^2>ax_2^2),$$

и возрастает на множестве положительных чисел, так как

$$(0<x_1<x_2)\Rightarrow(x_1^2<x_2^2)\Rightarrow(ax_1^2<ax_2^2).$$

Поскольку $f(x)=ax^2$ — четная функция, то ее график симметричен относительно оси Oy: он проходит через начало координат и целиком расположен в первой и во второй координатных четвертях.

Если $a<0$, то множеством значений функции $f(x)=ax^2$ будет полуинтервал $(-\infty; 0]$. Функция $y=ax^2$

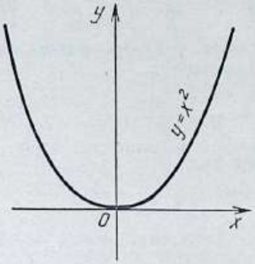


Рис. 3.9

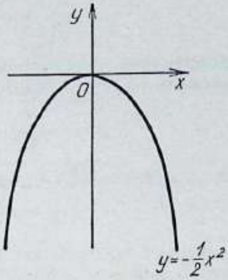


Рис. 3.10

$(a<0)$ возрастает на множество отрицательных чисел, так как

$$(x_1<x_2<0) \Rightarrow (x_1^2>x_2^2) \Rightarrow (ax_1^2<ax_2^2),$$

и убывает на множество положительных чисел, поскольку

$$(0<x_1<x_2) \Rightarrow (x_1^2<x_2^2) \Rightarrow (ax_1^2>ax_2^2).$$

График функции $f(x)=ax^2$ $(a<0)$ проходит через начало координат, целиком расположен в третьей и четвертой координатных четвертях и симметричен относительно оси Oy. На рис. 3.10 изображен график функции $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

Замечание. Если на одном рисунке изобразить графики функций $y=ax^2$ и $y=-ax^2$, то они будут симметричны относительно оси Ox. График функции $y=ax^2$ называют *параболой*.

Как уже отмечалось, парабола $y=ax^2$ симметрична относительно оси ординат. Ось ординат называют *осью симметрии параболы*. Точка пересечения параболы с осью ее симметрии называется *вершиной параболы*.

2. График функции $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Так как $a\neq 0$, то допустимы следующие преобразования:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right),$$
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (3.15)$$

Следовательно, уравнение $y=ax^2+bx+c$ равносильно уравнению (3.15). Введем обозначения:

$$p=-\frac{b}{2a};\quad q=-\frac{b^2-4ac}{4a}, \qquad (3.16)$$

тогда уравнение (3.15) примет вид

$$y=a(x-p)^2+q$$

или

$$y-q=a(x-p)^2. \qquad (3.17)$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$X=x-p;\ Y=y-q. \qquad (3.18)$$

Уравнение (3.17) примет вид

$$Y=aX^2. \qquad (3.19)$$

Графиком функции, заданной уравнением (3.19), в системе координат O_1XY является парабола. Следовательно, график функции (3.14) представляет собой параболу. Вершина этой параболы находится в точке с координатами $X=0$, $Y=0$. Из равенств $X=0$, $Y=0$ и формул (3.18) находим старые координаты $x=p$, $y=q$ вершины параболы (3.19). Таким образом, график уравнения $y=a(x-p)^2+q$ есть парабола с вершиной в точке $O_1(p,\ q)$, причем p и q находятся из формул (3.16). Принимая это во внимание, можно сделать вывод, что формулами $x=-\frac{b}{2a}$, $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ определяются координаты вершины параболы (3.14), а прямая $x=-\frac{b}{2a}$ служит ее осью симметрии.

Пример. Построить график функции $y = 0{,}5x^2 - 4x + 5$.

Выделим из данного трехчлена квадрат двучлена

$y = 0{,}5(x^2 - 8x + 10) = 0{,}5(x^2 - 8x + 16 - 16 + 10) = 0{,}5(x^2 - 8x + 16) - 3$, $y = 0{,}5(x-4)^2 - 3$, $y + 3 = 0{,}5(x-4)^2$, т. е. уравнение

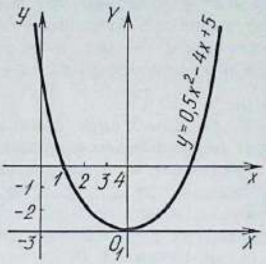


Рис. 3.11

параболы в новых координатах имеет вид $U = 0{,}5X^2$. Строим график функции $U = 0{,}5X^2$ в системе координат O_1XY (рис. 3.11), полученной параллельным переносом системы Oxy, начало которой имеет координаты $x = 4$, $y = -3$.

3.8. Степенная функция

Функцию называют *степенной*, если она может быть задана формулой

$$y = ax^\alpha, \tag{3.20}$$

где a и α — действительные числа, причем $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$, x — независимая переменная. Отметим, что при $a = 0$ формула (3.20) имеет вид $y = 0$, а при $\alpha = 0$ — вид $y = a$; уравнение $y = a$ определяет прямую, параллельную оси Ox, а уравнение $y = 0$ — ось Ox. Эти случаи исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Будем рассматривать случаи, когда $\alpha = n$, где n — натуральное число. Функция $y = ax^n$ определена при всех значениях аргумента x.

При $\alpha = 1$ формула (3.20) принимает вид $y = ax$ и задает прямую пропорциональность, график которой — прямая, проходящая через начало координат и точку $A(1,\ a)$. При $\alpha = 2$ формула (3.20) имеет вид $y = ax^2$ и задает квадратичную функцию, график которой — парабола с вершиной в начале координат. Осью симметрии этой параболы является ось ординат; парабола лежит ниже оси абсцисс при $a<0$ и выше ее — при $a>0$.

Если $\alpha=3$, то формула (3.20) примет вид $y=ax^3$. Положим $a=1$ и рассмотрим свойства функции $y=x^3$.

1. Функция $y=x^3$ определена при всех x.

2. Множество значений функции $y=x^3$ совпадает с бесконечным интервалом $(-\infty;\ +\infty)$. В самом деле, любое действительное значение y_0 данная функция принимает при $x_0=\sqrt[3]{y_0}$.

3. Если $x=0$, то $y=0$; это означает, что график функции проходит через начало координат.

4. Функция принимает положительные значения при $x>0$ и отрицательные при $x<0$. Отсюда следует, что график данной функции расположен в первой и третьей координатных четвертях (так как обе координаты любой точки графика, кроме точки $(0;\ 0)$, либо положительные, либо отрицательные).

5. Функция $y=x^3$ является нечетной: она определена на симметричном множестве — интервале $(-\infty;\ +\infty)$, и при любом x выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, ибо $(-x)^3=-x^3$. Следовательно, график функции $y=x^3$ симметричен относительно начала координат.

6. Функция $y=x^3$ возрастает во всей области ее определения.

▷ Действительно, если x_1 и x_2 — любые действительные числа, удовлетворяющие неравенству $x_1<x_2$, то $x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$ или $x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)\times$ $\times\left(\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right)$. Поскольку $x_2-x_1>0$, то из этого равенства следует, что $x_2^3-x_1^3>0$, или $x_2^3>x_1^3$. Итак, $(x_1<x_2)\Rightarrow(x_1^3<x_2^3)$; значит, $y=x^3$ — возрастающая функция. ◁

Учитывая эти свойства, можно построить график функции $y=x^3$ (рис. 3.12). На рис. 3.13 изображен график функции $y=-x^3$.

Рассмотрим функцию $y=ax^n$, где n — нечетное число, т. е. $n=2k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Функция $y=ax^{2k+1}$ обладает свойствами, аналогичными свойствам функции $y=ax^3$.

1. Функция $y=ax^{2k+1}$ определена при всех значениях x.

2. Множество значений функции $y=ax^{2k+1}$ совпадает с бесконечным интервалом $(-\infty;\ +\infty)$.

3. Если $x=0$, то $y=0$; график функции проходит через начало координат.

4. Если $a>0$, то функция принимает положительные значения при $x>0$ и отрицательные при $x<0$. Если $a<0$, то функция принимает положительные значения при

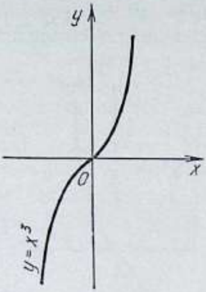


Рис. 3.12

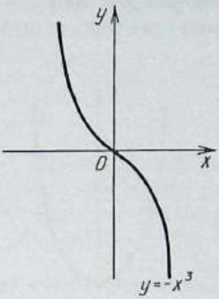


Рис. 3.13

$x<0$ и отрицательные при $x>0$. Следовательно, при $a>0$ график функции $y=ax^{2k+1}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях (как и график функции $y=x^3$), при $a<0$ — во второй и четвертой координатных четвертях (как и график функции $y=-x^3$).

5. Функция $y=ax^{2k+1}$ является нечетной: она определена на симметричном множестве — интервале $(-\infty;\ +\infty)$, и при любом x удовлетворяет равенству $f(-x)=-f(x)$, ибо $a(-x)^{2k+1}=-ax^{2k+1}$. Следовательно, график функции $y=ax^{2k+1}$ симметричен относительно начала координат.

6. Функция $y=ax^{2k+1}$ при $a>0$ является возрастающей, а при $a<0$ убывающей во всей области определения.

Исходя из этих свойств, можно заключить, что при $a>0$ график функции $y=ax^{2k+1}$ напоминает график функции $y=x^3$, а при $a<0$ — график функции $y=-x^3$.

Переходим к функции $y=ax^n$, где n — четное число, т. е. $n=2k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Функция $y=ax^{2k}$ обладает свойствами, аналогичными свойствам функции $y=ax^2$.

1. Функция $y=ax^{2k}$ определена при всех значениях x.

2. Данная функция принимает неотрицательные значе-

ния при $a > 0$ ($ax^{2k} \geqslant 0$) и неположительные значения при $a < 0$ ($ax^{2k} \leqslant 0$). Область ее значений — бесконечный промежуток $[0; +\infty)$ при $a > 0$ и бесконечный промежуток $(-\infty; 0]$ при $a < 0$.

3. Если $x = 0$, то $y = 0$ при любом a.

4. Из двух последних свойств следует, что график функции $y = ax^{2k}$ проходит через начало координат и лежит выше оси абсцисс при $a > 0$ и ниже этой оси при $a < 0$.

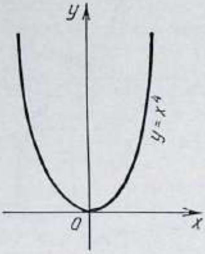


Рис. 3.14

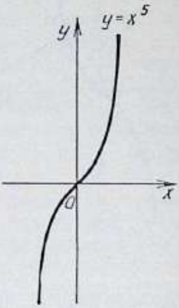


Рис. 3.15

5. Функция $y = ax^{2k}$ является четной: она определена на симметричном множестве $(-\infty; +\infty)$, и при любом x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, ибо $a(-x)^{2k} = ax^{2k}$. Следовательно, график функции $y = ax^{2k}$ симметричен относительно оси ординат.

6. Функция $y = ax^{2k}$ в случае $a > 0$ убывает в интервале $(-\infty; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. При $a < 0$ она возрастает в интервале $(-\infty; 0)$ и убывает в интервале $(0; +\infty)$.

Используя эти свойства, можно построить графики функций $y = ax^n$ при заданных a и n. На рис. 3.14 изображен график функции $y = x^4$, а на рис. 3.15 — график функции $y = x^5$.

3.9. Функции $y = [x]$, $y = \{x\}$

Каждое число можно представить в виде суммы двух слагаемых, причем различными способами, например, число 21,7 — в виде суммы чисел 10 и 11,7; 7,7 и 14;

-3 и 24,7 и т. п. В дальнейшем будем представлять числа в виде суммы таких двух слагаемых, одно из которых — целое число, а другое — неотрицательная правильная дробь.

1. Функция $y=[x]$. *Целой частью числа x* называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Целую часть числа x обозначают $[x]$. Это определение означает следующее: если

$$x=n+q,\ n\in \mathbf{Z},\ 0\leqslant q<1, \tag{3.21}$$

то

$$[x]=n. \tag{3.22}$$

Например, $[20,3]=20$, ибо $20,3=20+0,3$, $n=20$, $q=0,3$; $[\sqrt{5}]=2$, ибо $\sqrt{5}=2,236=2+0,236$; $[\pi]=3$, ибо $\pi\approx 3,14=3+0,14$; $[0,21]=0$, ибо $0,21=0+0,21$; $[-2,25]=-3$, ибо $-2,25=-3+0,75$.

Замечание 1. При нахождении целой части числа в соответствии с формулой (3.21) необходимо представить его в виде суммы *целого* числа (положительного, отрицательного или 0) и *дробного положительного* числа. Так, в последнем примере нельзя представить число таким образом: $-2,25=-2+(-0,25)$.

Очевидно, что если x — целое число, то $[x]=x$, так как, если $x=n$, то $x=n+0$, $n\in Z$, $q=0$. Если x — дробное число, то $[x]<x$. В этом случае x заключено между двумя последовательными целыми числами $[x]$ и $[x]+1$, т. е. $[x]<x<[x]+1$. Следовательно, при любом x справедливо соотношение

$$[x]\leqslant x<[x]+1. \tag{3.23}$$

Формулой

$$y=[x], \tag{3.24}$$

где $[x]$ — целая часть x, задается функция, область определения которой — множество действительных чисел.

Построим график функции (3.24). В соответствии с формулами (3.21) и (3.22) можно сделать вывод: если $0\leqslant x<1$, то $y=0$; если $1\leqslant x<2$, то $y=1$; если $2\leqslant x<3$, то $y=2$; если $-1\leqslant x<0$, то $y=-1$; если $-2\leqslant x<-1$, то $y=-2$. Вообще, если $n\leqslant x<n+1$, где n — целое число, то $y=n$. Значит, на каждом проме-

жутке вида $[n;\ n+1)$ значение функции равно n. График функции $y=[x]$ представлен на рис. 3.16.

2. Функция $y=\{x\}$. *Дробной частью числа x* называют разность между этим числом и его целой частью.

Дробную часть числа x обозначают $\{x\}$: $\{x\}=x-[x]$.

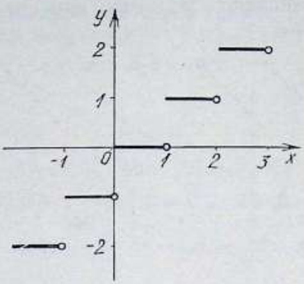


Рис. 3.16

Например, $\{7{,}3\}=7{,}3-[7{,}3]=7{,}3-7=0{,}3$; $\{15\}=15-[15]=15-15=0$; $\{-5{,}7\}=-5{,}7-[-5{,}7]=-5{,}7-(-6)=-5{,}7+6=0{,}3$.

Из неравенств (3.23) следует, что

$$0\leqslant x-[x]<1,\ 0\leqslant\{x\}<1. \tag{3.25}$$

Итак, дробная часть числа — это неотрицательное число, меньшее 1. Отметим, что соотношение (3.25) следует также из формул (3.21) и (3.22).

Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$y=\{x\}\ \text{или}\ y=x-[x]. \tag{3.26}$$

Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Из неравенств (3.25) и определения рассматриваемой функции следует, что $y=\{x\}$ — ограниченная функция, так как $|y|<1$ при всех x. Построим график функции $y=\{x\}$.

Если $0\leqslant x<1$, то $[x]=0$; формула (3.26) принимает вид $y=x$. Значит, на промежутке $[0,1)$ графиком функции $y=\{x\}$ служит соответствующая часть прямой $y=x$.

Если $1\leqslant x<2$, то $[x]=1$ и формула (3.26) принимает вид $y=x-1$. Графиком функции $y=\{x\}$ на промежутке

$[1;\ 2)$ служит соответствующая часть прямой $y = x - 1$

Если $-1 \leqslant x < 0$, то $[x] = -1$ и формулу (3.26) можно записать так: $y = x + 1$. Следовательно, графиком функции $y = \{x\}$ на промежутке $[-1;\ 0)$ служит соответствующая часть прямой $y = x + 1$.

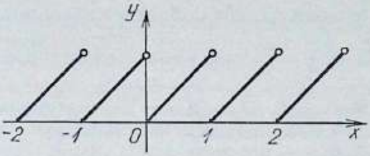


Рис. 3.17

Вообще, если $n \leqslant x < n + 1$, где $n \in Z$, то $[x] = n$, и формула (3.26) принимает вид $y = x - n$. Значит, на любом промежутке $[n;\ n + 1)$ графиком функции $y = \{x\}$ служит соответствующая часть прямой $y = x - n$. График функции $y = \{x\}$ изображен на рис. 3.17.

Замечание 2. Функция $y = \{x\}$ является периодической функцией (см. § 3.3) с периодом $T = 1$.

3.10. Показательная функция

Функцию, заданную формулой

$$y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1),$$

называют *показательной*.

Отметим, что при $a = 1$ функция $y = a^x$ постоянна ($y = 1^x = 1$) при всех x и этот случай в дальнейшем не рассматривается.

Так как выражение a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$ имеет смысл при любом значении x, то показательная функция определена на всем множестве действительных чисел: $D(a^x) = (-\infty;\ +\infty)$.

Функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ при неравных значениях аргумента принимает различные значения.

$\triangleright$ Предположим противное: $x_1 \neq x_2$, но $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отсюда получаем равенство $1 = a^{x_2 - x_1}$, которое возможно лишь при $x_2 - x_1 = 0$ или $x_2 = x_1$, что противоречит предположению $(x_1 \neq x_2)$. $\triangleleft$

При любом положительном a и любых действительных значениях α и β справедливы равенства:

1) $a^0=1$; 2) $a^1=a$; 3) $a^{-\alpha}=1/a^\alpha$; 4) $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$; 5) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$; 6) $a^\alpha:a^\beta=a^{\alpha-\beta}$; 7) $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$; 8) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Показательная функция обладает приведенными ниже свойствами.

1. Функция $y=a^x$ принимает только положительные значения.

$\triangleright$ В самом деле: а) если $x=n$ — натуральное число, то $a^x=a^n>0$ как произведение положительных чисел; б) если $x=m/n$ — положительная дробь, где m и n — натуральные числа, причем $n\geqslant 2$, то $a^x=a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}>0$, (поскольку $a^m>0$ и по определению корень n-й степени из положительного числа есть число положительное); в) если $x=\alpha$ — положительное иррациональное число, тогда $r_1<\alpha<r_2$, где r_1 и r_2 — приближенные рациональные значения числа α соответственно по недостатку и избытку, которые можно выбрать положительными; поскольку $a^{r_1}<a^\alpha<a^{r_2}$ или $a^{r_1}>a^\alpha>a^{r_2}$ и $a^{r_1}>0$, $a^{r_2}>0$, то $a^\alpha>0$ как число, заключенное между двумя положительными числами; г) если x — отрицательное число, т. е. $x=-p$, где $p>0$, то $a^x=a^{-p}=\frac{1}{a^p}>0$, так как $p>0$ и $a^p>0$; д) если $x=0$, тогда $a^x=a^0=1>0$. Таким образом, $a^x>0$ при любом действительном x. $\triangleleft$

На основании свойства 1 можно сделать следующие заключения: областью значений функции $y=a^x$ служит промежуток $(0;\ +\infty)$; функция $y=a^x$ ограничена снизу (так как $y>0$ при любом x).

График функции целиком расположен выше оси Ox, он пересекает ось Oy в точке $(0;\ 1)$.

2. Если $a>1$, то $a^x>1$ при $x>0$ и $a^x<1$ при $x<0$:

$\triangleright$ а) если $x=n$ — натуральное число, то $a^x>1^x$, ибо $a>1$, или $a^x>1$;

б) если $x=m/n$ — рациональное число (m, n — целые положительные числа, $n\geqslant 2$), то из неравенства $a>1$ следует: $a^m>1$, $\sqrt[n]{a^m}>\sqrt[n]{1}$, $\sqrt[n]{a^m}>1$, $a^{m/n}>1$, или $a^x>1$;

в) пусть $x=\alpha$ — иррациональное число ($\alpha>0$), а x_1 — приближенное положительное рациональное значение α с недостатком ($\alpha>x_1$). Так как $a>1$, то $a^{x_1}>1$, поэтому $a^x=a^\alpha>1$;

г) если x — отрицательное число, т. е. $x=-p$, где $p>0$, то $a^x=a^{-p}=1/a^p$. Поскольку $a>1$ и $p>0$, то $a^p>1$, поэтому $1/a^p<1$, т. е. $a^x=a^{-p}<1$. ◁

Из свойства 2 следует, что график функции $y=a^x$ ($a>1$) расположен выше прямой $y=1$ при $x>0$ и ниже ее при $x<0$.

3. Функция $y=a^x$ при $a>1$ является возрастающей.

▷ Зафиксируем два различных значения аргумента $x_1<x_2$ и рассмотрим отношение $a^{x_1}:a^{x_2}=a^{x_1-x_2}$. Поскольку $x_1<x_2$, то $x_1-x_2<0$. На основании свойства 2 получаем $a^{x_1}:a^{x_2}=a^{x_1-x_2}<1$, т. е. $a^{x_1}<a^{x_2}$. Итак, $(x_1<x_2)\Rightarrow(a^{x_1}<a^{x_2})$, значит, функция $y=a^x$ возрастает в ее области определения при $a>1$. ◁

4. Если $a<1$, то $a^x<1$ при $x>0$ и $a^x>1$ при $x<0$.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства 2.

5. Функция $y=a^x$ при $a<1$ является убывающей.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства 3.

6. Каково бы ни было положительное число y_0, существует такое x_0, что $a^{x_0}=y_0$.

Это свойство принимаем без доказательства. Геометрически оно означает, что при любом положительном значении y_0 график функции $y=a^x$ обязательно пересекает прямую $y=y_0$ (причем лишь в одной точке).

7. Если x неограниченно возрастает ($x\to+\infty$), то a^x при $a>1$ также неограниченно возрастает ($a^x\to+\infty$); если x неограниченно убывает ($x\to-\infty$), то a^x принимает сколь угодно малые положительные значения ($a^x\to0$).

В случае $a<1$ функция a^x неограниченно возрастает ($a^x\to+\infty$) при неограниченном убывании аргумента ($x\to-\infty$) и принимает сколь угодно малые положительные значения ($a^x\to0$) при неограниченном возрастании аргумента ($x\to+\infty$).

Пользуясь свойствами функции $y=a^x$, можно построить ее график при фиксированном значении a. На рис. 3.18 приведен график функции $y=2^x$, на рис. 3.19 — график функции $y=2^{-x}$. Если эти графики изобразить в одной системе координат, то они будут симметричны относительно оси Oy. Той же особенностью обладают графики функций $y=a^x$ и $y=a^{-x}$ при одном и том же значении a ($a>0$, $a \neq 1$).

В заключение отметим, что многие процессы в природе (изменение атмосферного давления с изменением высоты над уровнем моря, рост численности бактерий, распад

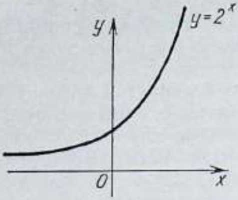


Рис. 3.18

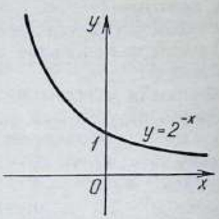


Рис. 3.19

радиоактивного вещества и др.) могут быть описаны с помощью формулы $y=a^x$ ($a>0$).

3.11. Обратная функция

Рассмотрим функцию

$$y=f(x), \tag{3.27}$$

определенную на некотором множестве X. Каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. С другой стороны, каждому элементу $y \in Y$ соответствует один или несколько таких элементов $x \in X$. Например, если функция $y=f(x)$ не является монотонной на отрезке $[a; b]$, то некоторые значения она может принимать несколько раз. Если функция монотонна на отрезке (возрастает или убывает на нем), то каждое свое значение она принимает только один раз.

В случае, когда каждому элементу $y \in Y$ ставится в соответствие только один такой элемент $x \in X$, для которого $f(x)=y$, получаем функцию

$$x=\varphi(y), \tag{3.28}$$

заданную на множестве Y со значениями в множестве X. Функцию (3.28) называют *обратной* по отношению к функции (3.27); функцию (3.27) при этом называют *обратимой*. *Обратима* та и только та функция, которая каждое свое значение принимает только один раз. Иными словами, функция обратима тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает лишь при одном значении аргумента.

Две функции f и φ называют *взаимно обратными*, если $E(f)=D(\varphi)$, $D(f)=E(\varphi)$ и для любых $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = D(\varphi)$

$$(y_0=f(x_0)) \Leftrightarrow (x_0=\varphi(y_0)).$$

Для взаимно обратных функций выполняются тождества:

$$f(\varphi(y)) \equiv y,\ y \in Y;\ \varphi(f(x)) \equiv x,\ x \in X.$$

Эти тождества следуют из определения взаимно обратных функций.

Если придерживаться стандартных обозначений (y — функция, x — аргумент), то функцию (3.28), обратную функции (3.27), можно записать:

$$y=\varphi(x). \tag{3.29}$$

Как же получена функция (3.29), обратная функции (3.27)? Из формулы (3.27) мы выразили x через y, получили формулу (3.28), в которой поменяли местами x и y. Значит, для того чтобы задать формулой функцию, обратную данной, нужно выразить переменную x через переменную y из первоначальной формулы и в полученной при этом формуле поменять обозначения: x на y и y на x.

Всякая возрастающая функция обратима.

▷ Действительно, пусть $y=f(x)$ — возрастающая функция (см. § 3.3), x_1, x_1 — два любых различных значения из промежутка, на котором эта функция возрастает. Так как $x_1 \neq x_2$, то либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 > x_2$. Если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Это означает, что неравным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. Следовательно, функция $y=f(x)$ каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, т. е. $f(x)$ — обратимая функция. ◁

Функция $x=\varphi(y)$, обратная возрастающей функции $y=f(x)$, также является возрастающей.

▷ Действительно, поскольку $f(x)$ — возрастающая функция, то для любых x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Поскольку $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$, то для любых y_1, y_2 из неравенства $y_1 < y_2$ следует неравенство $x_1 < x_2$. Это означает, что $x = \varphi(y)$ — возрастающая функция. ◁

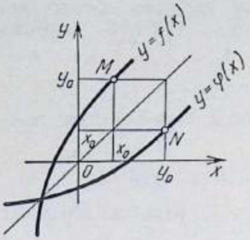


Рис. 3.20

Аналогично можно показать, что всякая убывающая функция обратима и что функция, обратная убывающей, является убывающей.

Таким образом, монотонная функция обратима и обратная ей функция также монотонна.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, построенные в одной и той же системе координат, симметричны относительно прямой $y = x$.

Докажем это утверждение.

▷ Пусть точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику $y = f(x)$, т. е. $y_0 = f(x_0)$, тогда $x_0 = \varphi(y_0)$. Это означает, что точка $N(y_0, x_0)$ принадлежит графику обратной функции. Заметим теперь, что точки $M(x_0, y_0)$ и $N(y_0, x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 3.20). Следовательно, если некоторая точка принадлежит графику функции $y = f(x)$, то симметричная ей точка (относительно прямой $y = x$) принадлежит графику обратной функции $y = \varphi(x)$. Аналогично доказывается и обратное: если точка принадлежит графику функции $y = \varphi(x)$, то симметричная ей точка относительно прямой $y = x$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. ◁

Пример 1. Найти функцию, обратную функции $y = -3x + 6$.

Данная функция является убывающей, поэтому она обратима. Обратная ей функция также убывающая. Чтобы задать формулой функцию, обратную данной функции, выразим x через y: $3x = 6 - y$, $x = -\frac{1}{3}y + 2$. Обозначив функцию y, а аргумент x, т. е. поменяв местами x и y, получим $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Этой формулой задается функция, обратная исходной. (Постройте графики рассматриваемых взаимно обратных функций и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.)

Пример 2. Найти функцию, обратную функции $y=x^2$, где $x\geqslant 0$.

Данная функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$, поэтому она обратима. Обратная ей функция также возрастает. Из формулы $y=x^2$, где $x\geqslant 0$, найдем $x: x=\sqrt{y}$. Это выражение имеет смысл, так как $y\geqslant 0$. Обозначив функцию y, а аргумент x, т. е. поменяв местами x и y, получим для обратной функции формулу $y=\sqrt{x}$. График функции $y=\sqrt{x}$ можно получить, зеркально отразив от прямой $y=x$ ветвь параболы $y=x^2$, где $x\geqslant 0$.

3.12. Логарифмическая функция

Понятие логарифма. Пусть даны положительные действительные числа a и b и ставится задача подобрать показатель x так, чтобы было верным равенство $a^x=b$, иными словами, требуется решить уравнение $a^x=b$.

Замечаем, что если $a=1$ и $b\neq 1$, то равенство $a^x=b$ не имеет смысла ни при каком x, если $a=1$ и $b=1$, то при любом действительном значении x $a^x=b$.

Ответ на вопрос задачи дает следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 3.1. *Для любой пары действительных чисел a и b, таких, что $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, существует, и притом только одно, действительное число x, такое, что $a^x=b$.*

Это число x называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$ (читают: «логарифм числа b по основанию a»).

Таким образом, уравнение $a^x=b$ имеет один и только один корень, если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0: x=\log_a b$.

Логарифмом числа $b>0$ по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$) называют показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Таким образом,

$$x=\log_a b,\ (a^x=b). \tag{3.30}$$

Например, $\log_2 16$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить число 16. Значит, $\log_2 16=4$, так как $2^4=16$. Аналогично $\log_3\frac{1}{27}=-3$, так как $3^{-3}=\frac{1}{27}$; $\log_5 1=0$, так как $5^0=1$.

Заметим, что при $b\leqslant 0$ уравнение $a^x=b$ не имеет корней (значение показательной функции $y=a^x$ положительно при любом значении x). Значит, отрицательные числа и число нуль логарифмов не имеют.

Из определения логарифма (см. формулу (3.30)) следует тождество

$$a^{\log_a b} = b, \tag{3.31}$$

где $b>0$, $a>0$, $a \neq 1$, которое называют *основным логарифмическим тождеством*.

Свойства логарифмов следуют из соответствующих свойств степеней, потому что определение логарифма дается через понятие степени. Будем считать, что основание a логарифмов — положительное и отличное от единицы действительное число, действительные числа b_1, b_2, b таковы, что $b_1>0$, $b_2>0$, $b>0$, а m и n — действительные числа, отличные от нуля.

1. Логарифм единицы равен нулю, т. е. $\log_a 1 = 0$. Действительно, если $\log_a 1 = x$, то по определению логарифма $a^x = 1$, откуда, учитывая, что $a \neq 1$, имеем $x = 0$, т. е. $\log_a 1 = 0$.

2. Если логарифм некоторого числа равен нулю, то это число равно единице, т. е. когда $\log_a b = 0$, то $b = 1$.

Действительно, поскольку $\log_a b = 0$, если $a^0 = b$ (см. формулу (3.30)), то $b = 1$.

3. Если число и основание логарифма равны между собой, то логарифм равен единице, т. е. $\log_a a = 1$.

Действительно, если $x = \log_a a$, то $a^x = a$, откуда $x = 1$, т. е. $\log_a a = 1$.

4. Если логарифм некоторого числа равен единице, то число и основание равны между собой (когда $\log_a b = 1$, то $b = a^1 = a$).

5. Если два числа имеют один и тот же логарифм при данном основании, то эти числа равны между собой, т. е., когда $\log_a b_1 = x$ и $\log_a b_2 = x$, то $b_1 = b_2$.

Действительно, в этом случае $a^x = b_1$, $a^x = b_2$, т. е. $b_1 = b_2$.

6. Если число и основание логарифма расположены по одну сторону от единицы, т. е. они или оба больше, или оба меньше единицы, то логарифм положителен.

▷ Докажем это свойство для случая $a>1$ и $b>1$. Предположим противное, т. е., что $x = \log_a b$ не является положительным. Тогда или $x=0$, или $x<0$. Если $x=0$, т. е. $\log_a b = 0$, то $b = 1$, что противоречит условию ($b>1$).

Если $x<0$, то $x=-y$, где $y>0$. Поскольку $b=a^x$ и $a^x=a^{-y}=1/a^y$, то $b=1/a^y$. Так как $a>1$ и $y>0$, то $a^y>1$, т. е. $b<1$, что противоречит условию ($b>1$). Итак, $\log_a b>0$, если $a>1$, $b>1$.

Аналогично доказывается, что $\log_a b>0$, когда $0<a<1$, $0<b<1$.

Таким образом, $\log_a b>0$, если $a>1$ и $b>1$, или $0<a<1$ и $0<b<1$. ◁

7. Если число и основание логарифма расположены по разные стороны от единицы, т. е. одно из них больше, а другое меньше единицы, то логарифм отрицателен.

Это утверждение предлагаем доказать читателю.

8. Покажем, что справедлива следующая формула:

$$\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b. \qquad (3.32)$$

▷ Действительно, формула (3.32) верна тогда и только тогда, когда верно равенство

$$(a^n)^{\frac{m}{n}\log_a b}=b^m. \qquad (3.33)$$

Чтобы доказать справедливость формулы (3.33), выполним ряд преобразований:

$$(a^n)^{\frac{m}{n}\log_a b}=\left(a^{n\frac{m}{n}}\right)^{\log_a b}=(a^m)^{\log_a b}=(a^{\log_a b})^m=b^m.$$

Из справедливости формулы (3.33) следует равенство (3.32). ◁

Пример 1. Вычислить $3^{\log_{81}8}$.

Используя свойства степеней, формулы (3.31) и (3.32), получаем

$3^{\log_{81}8}=3^{\log_{3^4}2^3}=3^{\frac{3}{4}\log_3 2}=(3^{\log_3 2})^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$.

Из формулы (3.32) вытекают приведенные ниже следствия:

1) значение логарифма не изменится, если число и основание логарифма возвести в одну и ту же степень: $\log_{a^m} b^m=\log_a b$. Например, $\log_{25}9=\log_{625}81=\log_5 3$;

2) логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания степени:

$$\log_a b^m=m\log_a b. \qquad (3.34)$$

Например, $\log_3 5^4=4\log_3 5$;

$\log_a\sqrt{b}=\log_a b^{1/2}=\frac{1}{2}\log_a b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$;

3) справедливо следующее равенство:

$$\log_a^n b^m = m^n \log_a^n b.$$

▷ Действительно, с учетом следствия 2 имеем

$$\log_a^n b^m = (\log_a b^m)^n = (m \log_a b)^n = m^n \log_a^n b. \ ◁$$

9. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2. \qquad (3.35)$$

▷ Так как $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, то эти числа имеют логарифмы. Обозначим их логарифмы соответственно x_1 и x_2: $\log_a b_1 = x_1$, $\log_a b_2 = x_2$. По определению логарифма $a^{x_1} = b_1$, $a^{x_2} = b_2$. Перемножив эти равенства почленно, получим $a^{x_1 + x_2} = b_1 b_2$, откуда следует, что $\log_a(b_1 b_2) = x_1 + x_2$, или $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$. ◁

Отметим, что формула (3.35) справедлива для любого числа положительных множителей.

10. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2. \qquad (3.36)$$

▷ Действительно,

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a(b_1 b_2^{-1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2^{-1} = \log_a b_1 - \log_a b_2. \ ◁$$

11. Если основание логарифма больше единицы, то большему из двух положительных чисел соответствует больший логарифм (а меньшему — меньший) и, наоборот, большему логарифму соответствует большее число.

Покажем, что если $a > 1$, то из неравенств $0 < b_1 < b_2$ следует $\log_a b_1 < \log_a b_2$, и, наоборот, из неравенства $\log_a b_1 < \log_a b_2$ следует $b_1 < b_2$.

▷ Действительно, так как $0 < b_1 < b_2$, то $\frac{b_1}{b_2} < 1$, поэтому $\log_a \frac{b_1}{b_2} < 0$, где $a > 1$ (см. свойство 4 логарифмов), но, согласно формуле (3.36), $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$. Значит, $\log_a b_1 - \log_a b_2 < 0$, откуда $\log_a b_1 < \log_a b_2$.

Итак,

$$(a>1,\ 0<b_1<b_2)\Rightarrow(\log_a b_1<\log_a b_2).$$

Покажем обратное: если $a>1$, то из неравенства $\log_a b_1<\log_a b_2$ следует, что $b_1<b_2$. Для этого сравним две степени $a^{\log_a b_1}$ и $a^{\log_a b_2}$. Так как $a>1$ и $\log_a b_1<$ $<\log_a b_2$, то $a^{\log_a b_1}<a^{\log_a b_2}$ (см. § 3.10, свойство 3), откуда на основании (3.31) получаем, что $b_1<b_2$. ◁

Если основание логарифма меньше единицы, но положительно, то большему из двух положительных чисел соответствует меньший логарифм (а меньшему — больший) и, наоборот, большему логарифму соответствует меньшее число.

12. Между логарифмами некоторого положительного числа b с двумя разными основаниями a и c ($a>0$, $a\neq1$, $c>0$, $c\neq1$) существует зависимость, которую можно выразить формулой:

$$\log_c b=\log_a b\cdot\log_c a$$

или

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{3.37}$$

▷ Пусть $\log_a b=x_1$ и $\log_c b=x_2$, тогда $a^{x_1}=b$ и $c^{x_2}=b$, откуда $a^{x_1}=c^{x_2}$. Учитывая, что логарифмы двух равных чисел по одному и тому же основанию равны между собой, запишем $\log_c a^{x_1}=\log_c c^{x_2}$, откуда $x_1\log_c a=$ $=x_2\log_c c$. Но $\log_c c=1$, поэтому $x_1\log_c a=x_2$, т. е. $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$ или $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$. ◁

Мы доказали, что логарифм положительного числа b по основанию a равен логарифму того же числа b по другому основанию c, деленному на логарифм первого основания a по основанию c.

Множитель $\frac{1}{\log_c a}$ называют модулем перехода от логарифма по основанию a к логарифму по основанию c.

В частности, из формулы (3.37) с учетом свойства 3 логарифмов следует, что $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, или $\log_a b\times$ $\times\log_b a=1$.

Используя рассмотренные свойства логарифмов, можно представить логарифм некоторого выражения, составленного из положительных чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, в виде суммы логарифмов входящих в него чисел.

Такое преобразование называют *логарифмированием*.

Пример 2. Прологарифмировать выражение по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$

$$A = \frac{d^2 b^3}{\sqrt[5]{c^3}},$$

где $b > 0,\ d > 0,\ c > 0$. Представим выражение A в виде произведения степеней: $A = d^2 b^3 c^{-3/5}$. Применяя формулы (3.35) и (3.34) для логарифма произведения и степени, находим:

$$\log_a A = \log_a (d^2 b^3 c^{-3/5}) = \log_a d^2 + \log_a b^3 + \log_a c^{-3/5} =$$
$$= 2\log_a d + 3\log_a b - \frac{3}{5}\log_a c.$$

Во многих случаях приходится решать обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел.

Такое преобразование называют *потенцированием*. Возможность такого перехода следует из свойства 3 логарифмов: если равны логарифмы чисел при равных основаниях, то равны и сами числа.

Пример 3. Найти x, если

$$\log_a x = 2\log_a c + \frac{5}{3}(\log_a c - 2\log_a b),$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$.

Используя свойства логарифмов, находим:

$$\log_a x = \log_a c^2 + \frac{5}{3}\log_a \frac{c}{b^2} = \log_a c^2 + \log_a\left(\sqrt[3]{\frac{c}{b^2}}\right)^5 =$$
$$= \log_a\left(c^2\left(\sqrt[3]{\frac{c}{b^2}}\right)^5\right)$$

Итак, $\log_a x = \log_a\left(c^2\left(\sqrt[3]{\frac{c}{b^2}}\right)^5\right)$, откуда находим $x = c^2\left(\sqrt[3]{\frac{c}{b^2}}\right)^5$.

В теоретических вопросах и вычислительной практике часто используют логарифмы с основанием, равным иррациональному числу e ($e \approx 2{,}718281\ \ldots$), и логарифмы с основанием 10.

Логарифм с основанием e называют *натуральным* и обозначают: $\ln b$.

Логарифм с основанием 10 называют *десятичным* и обозначают: $\lg b$. Таким образом,

$$\ln b = \log_e b \qquad (b > 0);$$
$$\lg b = \log_{10} b \qquad (b > 0).$$

Отметим, что $\lg \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ нулей}} = n$, так как $\underbrace{1000\ldots0}_{n \text{ нулей}} = 10^n$, где $n \in \mathbf{N}$

$\lg \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ нулей}}1 = -n$, так как $\underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ нулей}}1 = 10^{-n}$, где $n \in \mathbf{N}$.

Формула (3.37) позволяет вычислять натуральные логарифмы по известным десятичным и наоборот:

$$\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{1}{\lg e}\lg b = \frac{1}{0{,}4343}\lg b$$

или $\lg b = 0{,}4343 \ln b$.

Число $\lg e \approx 0{,}4343$ называют модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Логарифмическая функция. Так как каждому положительному числу x при заданном основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) соответствует одно определенное значение его логарифма: $\log_a x$, то $\log_a x$ есть функция от x, определенная на множестве всех положительных чисел.

Функцию $y = \log_a x$, где a — фиксированное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$, называют *логарифмической функцией*.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной показательной функции $y = a^x$. Показательная функция $y = a^x$ характеризует изменение степени числа a в зависимости от изменения показателя степени, а логарифмическая функция $y = \log_a x$ характеризует изменение показателя степени в зависимости от изменения степени числа a. Графиком функции $y = \log_a x$ будет служить кривая, полученная из графика функции $y = a^x$ посредством преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 3.21).

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена на множестве всех положительных чисел: $D(\log_a) = (0;\ +\infty)$. Область ее значений — множество всех действительных чисел: $E(\log_a) = (-\infty;\ +\infty)$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) обладает приведенными ниже свойствами.

1. Логарифмическая функция является монотонной на

всей области ее определения, причем убывающей, если $0 < a < 1$, и возрастающей, если $a > 1$.

2. При $x = 1$ значение логарифмической функции равно 0: $\log_a 1 = 0$.

Точка (1; 0) — единственная точка пересечения графика логарифмической функции с осями координат.

3. Если $a > 1$, то $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$ и $y = \log_a x > 0$ при $x > 1$; если $0 < a < 1$, то $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$ и $y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$.

Указанные свойства логарифмической функции следуют из рассмотренных ранее свойств логарифмов.

4. Если $a > 1$ и x, убывая, стремится к нулю ($x \to 0$), то $\log_a x$ неограниченно убывает ($\log_a x \to -\infty$); если x неограниченно возрастает ($x \to +\infty$), то $\log_a x$ неограниченно возрастает ($\log_a x \to +\infty$). Если $0 < a < 1$ и $x \to 0$, то $\log_a x \to +\infty$; если $x \to +\infty$, то $\log_a x \to -\infty$.

Перечисленные свойства дают возможность судить о поведении логарифмической функции в зависимости от изменения x.

Приведенные на рис. 3.21, 3.22 графики иллюстрируют свойства логарифмической функции при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

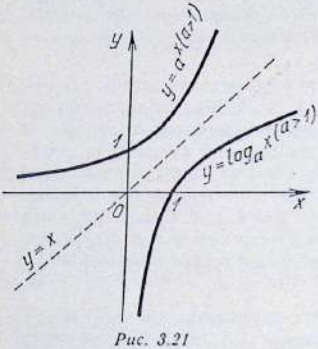


Рис. 3.21

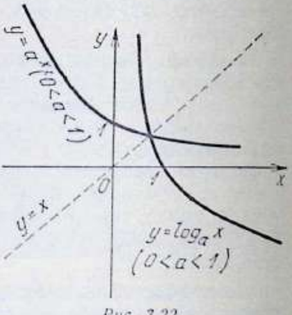


Рис. 3.22

Упражнения

1. Выясните, какие из данных чисел положительные и какие отрицательные:

а) $\log_8 15$; б) $\log_{0,3} 2{,}1$; в) $\log_4 \frac{3}{5}$; г) $\log_{0,7} 0{,}02$.

2. Выясните, что больше:
а) $\log_2 7$ или $\log_{0,2} 27$; б) $\log_5 6$ или $\log_6 3$.
3. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[8]{243}$;

б) $3^{\log_9 15}$; в) $16^{\frac{1}{\log_5 4}}$; г) $625^{\frac{1}{4}+\log_{25} 3}$.

4. Упростите:
а) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 81$;

б) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \ldots \log_{26} 27$;

в) $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$; г) $a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}}$;

д) $b^{\log_a c} - c^{\log_a b}$

$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$.
5. Прологарифмируйте:

а) $A = \sqrt[3]{\frac{4}{a^2}}\ \sqrt[5]{\frac{3c}{b^3}}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$; б) $B = \frac{5a^2 \sqrt[3]{(a+b)^2}}{b^3(a-b^2)}$
$(a > 0,\ b > 0)$.
6. Найдите x, если:

а) $\lg x = 8 \lg a + 3 \lg b - \frac{5}{6} \lg c$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$; б) $\log_3 x = \frac{2 \log_3 7}{3} - \frac{\log_3 5}{6}$.

7. Упростите:
а) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$;
б) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\ a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2 \log_{ab}(a+b)}$.

3.13. Преобразования графиков функций

Во многих случаях график функции может быть построен как результат некоторых геометрических преобразований (параллельный перенос, поворот, симметричное отражение относительно какой-либо оси, сжатие к оси, растяжение от оси и др.) известного графика некоторой исходной функции $f(x)$. Покажем, как по графику функции $f(x)$ построить график некоторой функции $\varphi(x)$. Будем считать, что функция $f(x)$ рассматривается в области ее определения и график ее построен.

1. Построение графика функции $\varphi(x) = f(x) + a$, где $a \neq 0$. Области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают. Замечаем, что при любом фиксированном $x = x_0$ (из области определения функций) значения функций отличаются на одно и тоже число a: $\varphi(x) - f(x) = a$, поэтому, если некоторая точка $M(x_0,\ y_0)$

принадлежит графику функции $f(x)$, то точка $N(x_0, y_0 + a)$ будет принадлежать графику функции $\varphi(x)$ (рис. 3.23). Значит, для построения графика функции $\varphi(x) = f(x) + a$ $(a \neq 0)$ следует график функции $f(x)$ перенести параллельно в направлении оси ординат как единое

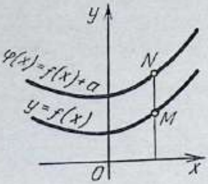


Рис. 3.23

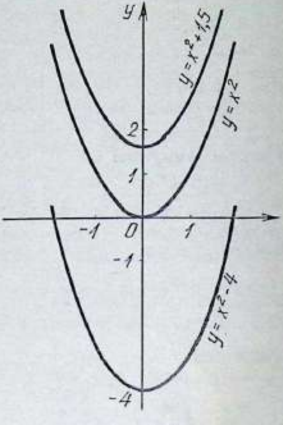


Рис. 3.24

целое на $|a|$ единиц вниз (если $a < 0$) или вверх (если $a > 0$).

Согласно этому правилу построены приведенные на рис. 3.24 графики функций $\varphi(x) = x^2 + 1{,}5$ и $\varphi(x) = x^2 - 4$ по графику $f(x) = x^2$.

Замечание 1. Для построения графика функции $\varphi(x) = f(x) + a$ можно перенести ось абсцисс на $|a|$ единиц вверх (если $a > 0$) или вниз (если $a < 0$) и в новой системе координат построить график функции $f(x)$, который для первоначальной системы координат будет графиком функции $\varphi(x)$. По этому правилу построен график функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - 3$, приведенный на рис. 3.25.

Упражнения

Постройте графики функций $\varphi(x)$ по известному графику $f(x)$:

1. $f(x) = \log_{0,5} x$; $\varphi(x) = \log_{0,5} x + 2$; $\varphi(x) = \log_{0,5} x - 2$.

2. $f(x)=2^x$; $\varphi(x)=2^x-3$; $\varphi(x)=2^x+3$.
3. $f(x)=x$; $\varphi(x)=x+4$; $\varphi(x)=x-4$

2. Построение графика функции $\varphi(x)=f(x+b)$, где $b\neq 0$. Область определения функции $f(x+b)$ состоит из таких x, что $x+b$ принадлежат области

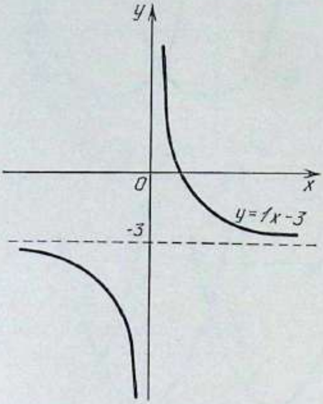


Рис. 3.25

определения функции $f(x)$. Пусть $b>0$ и в некоторой точке $x=x_0$ функция $\varphi(x)$ имеет значение $\varphi(x_0)=f(x_0+b)$. Очевидно, что такое значение будет у функции $f(x)$ в точке x_0+b, т. е. функция $\varphi(x)$ принимает те же значения, что и функция $f(x)$, но в точках, расположенных на оси абсцисс левее на b единиц. Заметим, что если $b<0$, то функция $\varphi(x)$ принимает те же значения, что и функция $f(x)$, но в точках x, расположенных на $|b|$ единиц правее. Таким образом, если некоторая точка $M(x_0, y_0)$ будет принадлежать графику $f(x)$, то точка $N(x_0-b, y_0)$ будет принадлежать графику $\varphi(x)$ (рис. 3.26). Значит, для построения графика функции $\varphi(x)=f(x+b)$ $(b\neq 0)$ график функции $f(x)$ как единое целое следует перенести параллельно в направлении оси абсцисс на $|b|$ единиц влево (если $b>0$) или вправо (если $b<0$). На рис. 3.27 в соответствии с этим

правилом построены графики $\varphi(x)=(x-2)^2$ и $\varphi(x)=$
$=(x+3)^2$. Здесь $f(x)=x^2$.

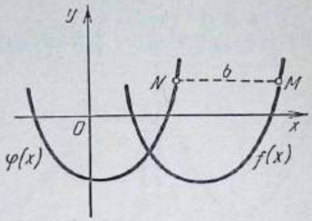


Рис. 3.26

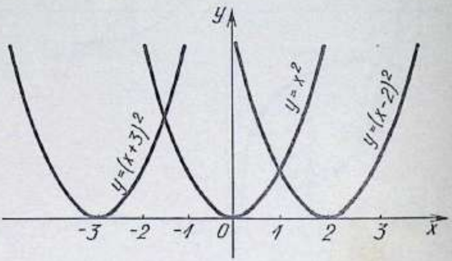


Рис. 3.27

Замечание 2. Для построения графика $\varphi(x)=f(x+b)$ $(b\neq 0)$ можно перенести ось ординат на $|b|$ единиц влево (если $b>0$) или вправо (если $b<0$) и в новой системе координат построить график $f(x)$, который для первоначальной системы координат будет графиком функции $\varphi(x)$. На рис. 3.28 по этому правилу построен график $\varphi(x)=$
$=\dfrac{1}{x-3}$.

Упражнения

Постройте графики функций $\varphi(x)$ по графику $f(x)$:

1. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; $\varphi(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$; $\varphi(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $\varphi(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

3. $f(x)=\log_2 x$; $\varphi(x)=\log_2(x-4)$; $\varphi(x)=\log_2(x+4)$.

3. Построение графика функции $\varphi(x) = f(x+b)+a$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$. График функции $\varphi(x) = f(x+b)+a$ можно построить по графику $f(x)$, применив последовательно приведенные выше правила. Например, график квадратного трехчлена $\varphi(x)=(x+2)^2+3$ может быть получен из параболы $f(x)=x^2$ сдвигом ее параллельно оси ординат на три единицы вверх и параллельно оси абсцисс на две единицы влево.

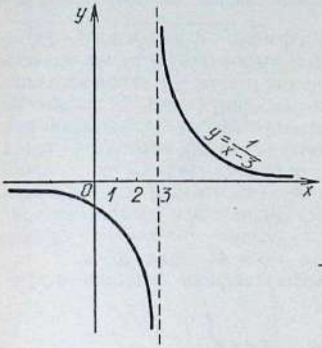


Рис. 3.28

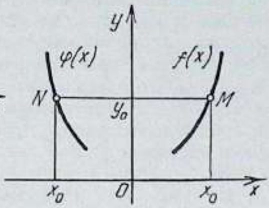


Рис. 3.29

4. Построение графика функции $\varphi(x) = f(-x)$. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют области определения, симметричные относительно начала координат. Пусть в некоторой точке $x = x_0$ функция $f(x)$ принимает значение $f(x_0)$. Функция $\varphi(x)=f(-x)$ принимает такое же значение в точке $x=-x_0$, которая симметрична x_0 относительно оси ординат: $\varphi(-x_0)=f(-(-x_0))=f(x_0)$. Поэтому, если некоторая точка $M(x_0,\ y_0)$ принадлежит графику $f(x)$, то симметричная ей относительно оси Oy точка $N(-x_0,\ y_0)$ будет принадлежать графику $\varphi(x)$. Значит, чтобы построить график функции $\varphi(x)=f(-x)$, следует график функции $f(x)$ симметрично отразить относительно оси Oy (рис. 3.29).

Упражнения

Постройте графики функций:

1. $\varphi(x)=\frac{6}{-x}$; 2. $\varphi(x)=2^{-x}$.

Указание. Определите функцию, график которой может быть использован для построения искомого графика, постройте ее график и используйте правило 4.

5. Построение графика функции $\varphi(x)=-f(x)$. Функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ имеют одну и ту же область определения. Значения функции $\varphi(x)=-f(x)$ при всех значениях x (из области определения функций) равны по модулю, но противоположны по знаку значениям функции $f(x)$ при тех же значениях x. Если некоторая точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику $f(x)$, то точка $N(x_0, -y_0)$, симметричная ей относительно оси Ox, будет принадлежать графику $\varphi(x)$. Значит, при построении графика функции $\varphi(x)=-f(x)$ следует график $f(x)$ симметрично отразить относительно оси Ox (рис. 3.30).

На рис. 3.31 изображены графики функций $\varphi(x)=-x^2$ и $f(x)=x^2$.

Упражнения

Постройте графики функций:

1. $\varphi(x)=-\frac{1}{x}$. 2. $\varphi(x)=-\log_2 x$. 3. $\varphi(x)=-2^x$.

6. Построение графика функции $\varphi(x)=mf(x)$, где $m>0$. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одну и ту же область определения. Замечаем, что при равных значениях аргумента x (из области определения функций) значения функции $\varphi(x)$ будут в m раз больше соответствующих значений функции $f(x)$ при $m>1$, или в $1/m$ раз меньше, если $0<m<1$. Нули функций совпадают. Если точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику $f(x)$, то точка $N(x_0, my_0)$ будет принадлежать графику $\varphi(x)=mf(x)$. Значит, для построения графика функции $\varphi(x)=mf(x)$ следует каждую ординату графика $f(x)$ увеличить в m раз, если $m>1$ (произвести растяжение от оси Ox), или уменьшить в $1/m$ раз, если $0<m<1$ (произвести сжатие к оси Ox). Нули функций остаются на месте.

Замечание 3. Если $m<0$, то к преобразованию сжатия (растяжения) присоединяется симметрия относительно оси Ox.

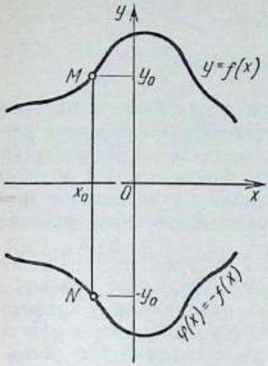


Рис. 3.30

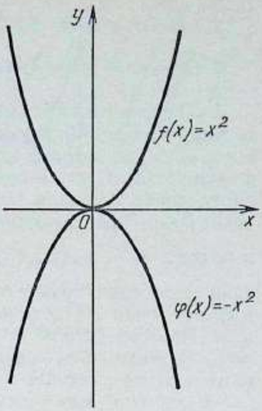


Рис. 3.31

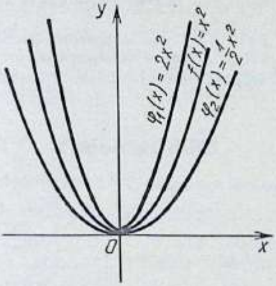


Рис. 3.32

На рис. 3.32. построены графики функции $\varphi_1(x)=2x^2$ и $\varphi_2(x)=\frac{1}{2}x^2$, здесь $f(x)=x^2$.

Упражнения

Постройте графики функций $\varphi(x)$ по известному графику $f(x)$:

1. $f(x)=\log_2 x$; $\varphi(x)=2\log_2 x$; $\varphi(x)=\frac{1}{2}\log_2 x$.

2. $f(x)=2^x$; $\varphi(x)=2\cdot 2^x$; $\varphi(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^x$

3. $f(x)=\sin x$; $\varphi(x)=3\sin x$; $\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin x$.

7. **Построение графика функции $\varphi(x)=f(nx)$, где $n>0$.** Функция $\varphi(x)=f(nx)$ определена для тех x, число nx которых принадлежит области определения функции $f(x)$. Пусть в некоторой точке $x=x_0$ (из области определения функции $f(x)$) функция $f(x)$ принимает значение $f(x_0)$. Тогда функция $\varphi(x)$ будет иметь то же значение в точке $x=\frac{x_0}{n}$, так как $\varphi\left(\frac{x_0}{n}\right)=f\left(n\frac{x_0}{n}\right)=f(x_0)$. Значит, если некоторая точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику $f(x)$, то точка $N(x_0/n, y_0)$ будет принадлежать графику $\varphi(x)$. Поэтому, чтобы построить график функции $\varphi(x)=f(nx)$, надо абсциссы всех точек графика $f(x)$ уменьшить в n раз, если $n>1$ (произвести сжатие графика $f(x)$ к оси Oy), или увеличить в $1/n$ раз, если $0<n<1$ (произвести растяжение графика $f(x)$ от оси Oy). Точка пересечения графика с осью Oy остается на месте.

Замечание 4. Если $n<0$, то к преобразованию сжатия (растяжения) присоединяется симметрия относительно оси Oy.

На рис. 3.33 приведены графики функций $\varphi(x)=\{0,5x\}$ и $\varphi(x)=\{2x\}$.

Упражнения

Постройте графики функций:

1. $f(x)=\cos x$; $\varphi(x)=\cos 2x$; $\varphi(x)=\cos\frac{1}{2}x$.
2. $f(x)=1/x$; $\varphi(x)=1/0{,}5x$.
3. $f(x)=x^2$; $\varphi(x)=(2x)^2$.

8. **Построение графика функции $\varphi(x)=|f(x)|$.** Из определения модуля следует, что

$$\varphi(x)=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0;\\ -f(x), & \text{если } f(x)<0.\end{cases}$$

Значит, для значений аргумента x, при которых $f(x)\geqslant 0$, график $\varphi(x)$ совпадает с графиком $f(x)$; для тех значений x, при которых $f(x)<0$, график $\varphi(x)$ совпадает с графиком $-f(x)$. Таким образом, чтобы построить график $\varphi(x)=|f(x)|$, следует без изменения оставить части графика $f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$, а части графика $f(x)$, где $f(x)<0$,

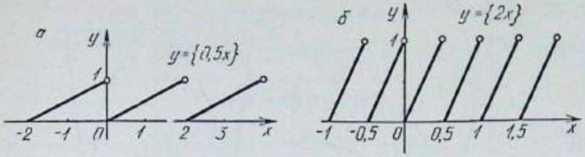


Рис. 3.33

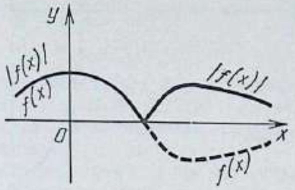


Рис. 3.34

симметрично отразить относительно оси Ox, чтобы получить точки графика $\varphi(x)$, соответствующие тем же абсциссам (рис. 3.34).

На рис. 3.35 по этому правилу построены графики функций $\varphi(x)=|\log_2 x|$ и $\varphi(x)=|x^2-4|$.

Упражнения

Постройте графики функций:

1. $\varphi(x)=|x|$. **2.** $\varphi(x)=|x+2|$. **3.** $\varphi(x)=|x^2-6x+5|$.
4. $\varphi(x)=|2^x-2|$.

9. **Построение графика функции** $\varphi(x)=f(|x|)$. Прежде всего заметим, что $|x|=x$ для всех $x\geqslant 0$, а, следовательно, $f(|x|)=f(x)$. Значит, все точки графика $f(x)$, лежащие в правой полуплоскости, будут принадлежать и графику $\varphi(x)$. Для всех $x<0$ $\varphi(x)=f(|-x|)=f(|x|)$, т. е. функция $\varphi(x)$ — четная, а график четной функции (см. § 3.2) симметричен относительно оси Oy. Таким образом, при построении графика функции $\varphi(x)=f(|x|)$ надо сохранить без изменения ту часть графика $f(x)$, которая расположена справа от оси Oy и на ней, и отразить ее симметрично относительно оси Oy.

На рис. 3.36 изображен график функции $\varphi(x)=\log_2|x|$.

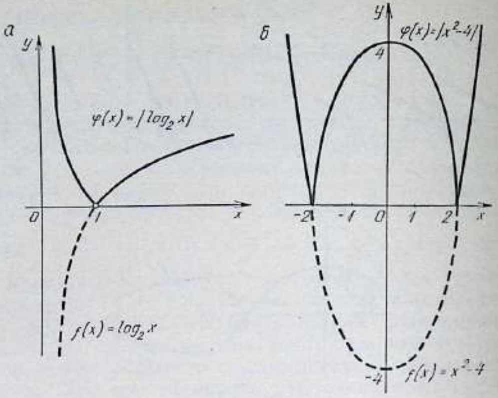


Рис. 3.35

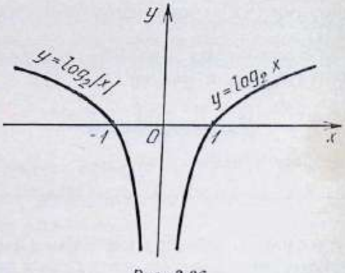


Рис 3.36

Упражнения

Постройте графики функций:

1. $\varphi(x)=\sin|x|$. 2. $\varphi(x)=x^2-6|x|+5$. 3. $\varphi(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

10. Построение графика функции $\varphi(x)=|f(|x|)|$.

При построении графика $\varphi(x)=|f(|x|)|$ можно последовательно применить правила 8 и 9.

Упражнение

Постройте график функции $\varphi(x) = |x^2 - 6|x| + 5|$ по графику $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

4. УРАВНЕНИЯ

4.1. Уравнение и его корни

Равенство, содержащее переменную, называют *уравнением*. Уравнением с одной переменной x называют равенство

$$f(x) = \varphi(x),$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции переменной x, при этом $f(x)$ считают левой частью уравнения, а $\varphi(x)$ — его правой частью. Не исключается случай, когда $\varphi(x) = c$, где c — постоянная.

Областью определения (или областью допустимых значений переменной) уравнения $f(x) = \varphi(x)$ называют множество значений переменной x, при которых одновременно $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют смысл. Область определения уравнения представляет собой пересечение областей определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Корнем (или *решением*) *уравнения* называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Например, равенство $x + 3 = 7$ верно при $x = 4 (4 + 3 = 7)$, значит, число 4 — корень уравнения $x + 3 = 7$.

Уравнение может иметь один, два, три и более корней или вообще их не иметь.

Например, уравнение $x + 3 = 7$ имеет один корень; уравнение $x^2 + 5x + 6 = 0$ — два корня: -2 и -3; корнем уравнения $1{,}2(x + 5) = 6 + 1{,}2x$ является любое число; уравнение $2x + 3 = 2x + 6$ корней не имеет.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней.

В процессе решения уравнения обычно производят некоторые преобразования, т. е. последовательно заменяют данное уравнение другими уравнениями, пока не получат уравнение, которое можно решить очевидным образом. При выполнении таких преобразований, как, например, приведение в уравнении подобных членов, умножение и деление обеих частей уравнения на общий множитель, содержащий переменную, могут быть потеряны или появиться посторонние корни (см. § 4.2).

Введем понятия системы уравнений и совокупности уравнений.

Рассмотрим уравнение $(x^2-4)^2+((x-2)(x-3))^2=0$. Очевидно, что $(x^2-4)^2 \geqslant 0$ и $((x-2)(x-3))^2 \geqslant 0$, а сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю: $(x^2-4)^2=0$, $((x-2)(x-3))^2=0$. Таким образом, чтобы решить заданное уравнение, надо найти такие значения переменной x, которые обращают в верное равенство каждое из уравнений $x^2-4=0$ и $(x-2)(x-3)=0$, т. е. являются решениями как первого, так и второго уравнений. В таких случаях говорят, что надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-4=0; \\ (x-2)(x-3)=0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2-4=0$ имеет корни 2 и -2, а уравнение $(x-2)(x-3)=0$ — корни 2 и 3. Из найденных корней только корень $x=2$ служит решением каждого из уравнений системы. Значит, первоначальное уравнение имеет единственный корень $x=2$.

Итак, в случае, когда ищут значения переменных, удовлетворяющие одновременно нескольким заданным уравнениям, говорят, что задана система уравнений.

Решением системы уравнений с одной переменной называют значения переменной, обращающие каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что система решений не имеет.

В случае, когда ищут значения переменной, удовлетворяющие хотя бы одному из заданных уравнений, говорят, что задана совокупность уравнений. Для обозначения совокупности уравнений иногда используют квадратную скобку.

Рассмотрим уравнение $(x^2-9)(x^2-16)=0$. Произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, т. е. $x^2-9=0$ или $x^2-16=0$. Поэтому, чтобы решить данное уравнение, надо найти множества корней уравнений $x^2-9=0$ и $x^2-16=0$ и взять объединение множеств их корней, другими словами, нужно решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9=0; \\ x^2-16=0. \end{array}\right.$$

Корнями уравнения $x^2-9=0$ являются числа 3 и -3, корнями уравнения $x^2-16=0$ — числа 4 и -4. Объединением множеств $\{-3;\ 3\}$, $\{-4;\ 4\}$ является множество $\{-4;\ -3;\ 3;\ 4\}$, которое и будет множеством корней первоначального уравнения.

Итак, решить совокупность нескольких уравнений с одной переменной — значит найти объединение множеств корней всех уравнений, входящих в данную совокупность; решить систему нескольких уравнений с одной переменной — значит найти пересечение множеств корней каждого из уравнений системы. Говорят, что система не имеет решений или несовместна, если пересечение множеств корней уравнений, входящих в систему,— пустое множество.

В дальнейшем, в зависимости от обстоятельств, мы не всегда будем использовать указанные обозначения для систем и совокупностей уравнений, т. е. в некоторых случаях будем опускать ту или другую скобку и записывать уравнения в одну строчку, указывая при этом, что рассматривается: система или совокупность уравнений.

4.2. Равносильные уравнения

При решении уравнений путем преобразований стараются от данного уравнения перейти к равносильному ему уравнению или совокупности нескольких уравнений, равносильной данному уравнению. Отметим, что такой переход не всегда возможен.

Пусть нужно решить уравнение

$$f(x)=\varphi(x) \tag{4.1}$$

и в результате преобразования уравнения (4.1) получено уравнение

$$f_1(x)=\varphi_1(x). \tag{4.2}$$

Говорят, что при переходе от уравнения (4.1) к уравнению (4.2) происходит *потеря корней*, если существует число x (хотя бы одно), являющееся корнем уравнения (4.1) и не являющееся корнем уравнения (4.2). Число x называют *посторонним корнем уравнения* (4.1), если это число, являясь корнем уравнения (4.2), полученного в результате преобразования уравнения (4.1), не является корнем уравнения (4.1).

Если в результате преобразования уравнения (4.1) получено уравнение (4.2), такое, что каждый корень уравнения (4.1) является корнем уравнения (4.2), а каждый корень уравнения (4.2) является корнем уравнения (4.1), то говорят, что уравнения (4.1) и (4.2) равносильны (или эквивалентны).

Итак, уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными*. Множества корней равносильных уравнений совпадают. В частности, эти множества могут оказаться пустыми. Уравнения, не имеющие корней, считают равносильными.

Для обозначения равносильности уравнений используют знак $\Leftrightarrow$. Запись $(f(x)=\varphi(x))\Leftrightarrow(f_1(x)=\varphi_1(x))$ или $(4.1)\Leftrightarrow(4.2)$ означает, что уравнения (4.1) и (4.2) равносильны.

Например, $(3x-6=0)\Leftrightarrow(x-2=0)$;

$$(x^2-x=20)\Leftrightarrow((x+4)(x-5)=0);$$

$$(x-2=x-5)\Leftrightarrow\left(\frac{9}{x-7}=0\right).$$

Уравнение (4.2) называют *уравнением-следствием* уравнения (4.1), если при переходе от уравнения (4.1) к уравнению (4.2) не происходит потери корней, т. е. любой корень уравнения (4.1) является корнем уравнения (4.2).

Из определения вытекает, что уравнение (4.2), являющееся следствием уравнения (4.1), может иметь более широкое множество корней, чем множество корней уравнения (4.1). В частности, если уравнение (4.1) не имеет корней, то уравнение (4.2) есть его следствие. Запись

$$(f(x)=\varphi(x))\Rightarrow(f_1(x)=\varphi_1(x)) \text{ или } (4.1)\Rightarrow(4.2)$$

означает, что уравнение (4.2) — уравнение-следствие уравнения (4.1).

Например, уравнение $x-3=0$ имеет один корень — число 3, уравнение $x^2=9$ — два корня — числа 3 и -3, поэтому

$$(x-3=0)\Rightarrow(x^2=9),$$

т. е. второе уравнение — уравнение-следствие первого уравнения.

Если каждое из уравнений (4.1) и (4.2) является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

Уравнения обладают следующими свойствами.

Теорема 4.1. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или функцию, определенную* *при всех значениях переменной из области определения уравнения, то получится уравнение, равносильное данному, т. е. уравнение*

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (4.3)$$

равносильно уравнению

$$f(x)+g(x)=\varphi(x)+g(x), \qquad (4.4)$$

где функция $g(x)$ определена при всех x из области определения уравнения (4.3) *(в частности, $g(x)=c$, где c — некоторое число).*

Докажем, что уравнения (4.3) и (4.4) равносильны.

▷ Пусть некоторое значение $x=a$ является корнем уравнения (4.3), т. е. при этом значении x уравнение (4.3) обращается в верное числовое равенство $f(a)=\varphi(a)$. По условию функция $g(x)$ определена при всех x из области определения уравнения (4.3), поэтому $g(a)$ — некоторое число. Прибавив это число к обеим частям числового равенства $f(a)=\varphi(a)$, получим снова верное числовое равенство $f(a)+g(a)=\varphi(a)+g(a)$. Значит, при $x=a$ уравнение (4.4) также обращается в верное равенство. Мы доказали, что каждый корень уравнения (4.3) является корнем уравнения (4.4), т. е. (4.3) $\Rightarrow$ (4.4).

Пусть некоторое значение $x=b$ является корнем уравнения (4.4), т. е. $f(b)+g(b)=\varphi(b)+g(b)$ — верное числовое равенство. Вычитая из обеих частей последнего равенства число $g(b)$, получаем верное числовое равенство $f(b)=\varphi(b)$. Значит, при $x=b$ уравнение (4.3) также обращается в верное равенство. Мы доказали, что каждый корень уравнения (4.4) является корнем уравнения (4.3), т. е. (4.4) $\Rightarrow$ (4.3). Таким образом, уравнения (4.3) и (4.4) имеют одни и те же корни; значит, они равносильны. ◁

Следствие 1. Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, получится уравнение, равносильное данному.

▷ Действительно, если $\varphi(x)=p(x)+g(x)$, то уравнение (4.3) принимает вид $f(x)=p(x)+g(x)$. Прибавляя к обеим частям уравнения $-g(x)$, получаем $f(x)-g(x)=p(x)+g(x)-g(x)$, или $f(x)-g(x)=p(x)$. ◁

Следствие 2. Если в обеих частях уравнения имеются одинаковые члены, их можно опустить.

Следствие 3. Уравнение (4.3) можно записать в виде

$$F(x)=0, \tag{4.5}$$

где $F(x)$ — функция переменной x.

В самом деле, прибавляя $-\varphi(x)$ к обеим частям уравнения (4.3) и вводя обозначение $F(x)=f(x)-\varphi(x)$, получаем уравнение (4.5).

Замечание 1. Требование, предъявляемое к функции $g(x)$ условием теоремы 4.1, является существенным. Если функция определена не для всех x из области определения уравнения (4.3), то переход к уравнению (4.4) может привести к потере корней уравнения (4.3). Потерять можно те корни, которые не принадлежат области определения функции $g(x)$. Например, уравнение $x(x-1)=0$ имеет два корня — 0 и 1, а уравнение $x(x-1)+\frac{2}{x-1}=\frac{2}{x-1}$ — только один корень — число 0, т. е., если к обеим частям исходного уравнения $x(x-1)=0$ прибавить функцию $g(x)=\frac{2}{x-1}$, то будет потерян корень $x=1$, ибо функция $g(x)=\frac{2}{x-1}$ не определена при $x=1$.

Теорема 4.2. *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число или функцию, определенную при всех x из области определения уравнения и отличную от нуля, то получится уравнение, равносильное данному, т. е. уравнение*

$$f(x)=\varphi(x) \tag{4.6}$$

равносильно уравнению

$$f(x)g(x)=\varphi(x)g(x), \tag{4.7}$$

где функция $g(x)$ определена при всех x из области определения уравнения (4.6) и при любом x $g(x)\neq 0$ (в частности $g(x)=c$, где $c\neq 0$ — некоторое число).

Доказательство теоремы 4.2, аналогичное доказательству теоремы 4.1, опускаем.

Следствие 4. Если одновременно изменить знаки обеих частей уравнения, получится уравнение, равносильное данному.

Замечание 2. Требования, предъявляемые к функции $g(x)$ условием теоремы 4.2, являются существенными. Если функция $g(x)$ определена не для всех x из области определения уравнения (4.6) или равна нулю при некоторых значениях переменной x, то переход к уравнению (4.7) может привести к появлению посторонних корней уравнения (4.6). Этими корнями могут быть значения x, для которых $g(x)=0$. Умножение обеих частей уравнечия (4.6) на функцию $g(x)$, которая не определена при некоторых значениях переменной x, может привести к потере корней. Этими корнями могут быть те значения x, при которых $g(x)$ не определена.

Так, например:

1) уравнения $x+5=3$ и $(x+5)(x^2+4)=3(x^2+4)$ равносильны, так как функция x^2+4, на которую умножили обе части уравнения $x+5=3$, определена при всех x и ни при одном из x не обращается в нуль,

2) уравнения $x+5=3$ и $(x+5)(x^2-9)=3(x^2-9)$ не равносильны, так как второе уравнение, кроме корня $x=-2$, являющегося и корнем первого уравнения, имеет еще корни $x=3$ и $x=-3$, а это те значения x, при которых функция x^2-9 равна нулю;

3) уравнения $x^2=9$ и $x^2\cdot\frac{1}{x-3}=9\cdot\frac{1}{x-3}$ не равносильны, так как множитель $\frac{1}{x-3}$ при $x=3$ теряет смысл а $x=3$ — корень уравнения $x^2=9$

Сформулируем еще некоторые теоремы о равносильности уравнений.

Теорема 4.3. *Если на некотором множестве функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неотрицательны, то на этом множестве равносильны уравнения*

$$f(x)=\varphi(x) \text{ и } (f(x))^n=(\varphi(x))^n (n\in \mathbf{N}),$$

т. е.

$$(f(x)=\varphi(x))\Leftrightarrow((f(x))^n=(\varphi(x))^n).$$

Теорема 4.4. *Если $a>0$ и $a\neq 1$, то уравнения*

$$f(x)=\varphi(x);\; a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$$

равносильны, т. е.

$$(f(x)=\varphi(x))\Leftrightarrow(a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}).$$

Теорема 4.5. *Если $a>0$ и $a\neq 1$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ положительны на некотором множестве, тогда на этом множестве равносильны уравнения*

$$f(x)=\varphi(x);\; \log_a f(x)=\log_a \varphi(x),$$

т. е.

$$(f(x)=\varphi(x))\Leftrightarrow(\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)).$$

Теорема 4.6. *Если для любого действительного x справедливо тождественное равенство $\varphi(x)\equiv\psi(x)$, то уравнение $f(x)=\varphi(x)$ равносильно уравнению $f(x)=\psi(x)$.*

Теорема 4.7. Уравнение

$$f(x)g(x)=\varphi(x)g(x) \tag{4.8}$$

равносильно совокупности двух уравнений

$$f(x)=\varphi(x),\ g(x)=0,$$

рассматриваемых в области определения уравнения (4.8), т. е.

$$(f(x)g(x)=\varphi(x)g(x))\Leftrightarrow(f(x)=\varphi(x),\ g(x)=0).$$

Говорят, что уравнение равносильно совокупности уравнений, если каждый корень уравнения является корнем совокупности и, наоборот, каждый корень совокупности является корнем уравнения.

Например, уравнение $(x-7)(x-2)=x-2$ равносильно совокупности двух уравнений $x-7=1$, $x-2=0$, так как числа 2 и 8, и только они, являются решениями уравнения и совокупности.

Замечание 3. Равносильность уравнений рассматривается относительно определенного числового множества. Два уравнения могут быть равносильны на одном множестве и неравносильны на другом. Например, уравнения $(x-2)(x^2-7)=0$ и $x-2=0$ равносильны на множестве целых чисел и неравносильны на множестве действительных чисел.

Если при решении уравнения невозможно выполнить равносильный переход от одного уравнения к другому, переходят к уравнению-следствию.

Теорема 4.8. Уравнение

$$(f(x))^n=(\varphi(x))^n,$$

где n — натуральное число, является уравнением-следствием уравнения

$$f(x)=\varphi(x),$$

т. е. $(f(x)=\varphi(x))\Rightarrow((f(x))^n=(\varphi(x))^n)$.

Теорема 4.9. *Если $a>0$ и $a\neq 1$, то уравнение $f(x)=\varphi(x)$ — уравнение-следствие уравнения $\log_a f(x)=\log_a\varphi(x)$, т. е.*

$$(\log_a f(x)=\log_a \varphi(x))\Rightarrow(f(x)=\varphi(x)).$$

Теорема 4.10. Уравнение $f(x)=\varphi(x)g(x)$ — *уравнение-следствие уравнения*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x),$$

т. е.

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)\right)\Rightarrow(f(x)=\varphi(x)g(x)).$$

Преобразование, связанное с освобождением уравнения от знаменателя, может привести к появлению посторонних корней.

Замечание 4. Теоремы 4.1—4.10 используют при решении уравнений.

4.3. Линейное уравнение с одной переменной

Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение, содержащее эту переменную только в первой степени. Так, уравнение $f_1(x)=f_2(x)$ с одной переменной является линейным, если

$$f_1(x)=ax+b,\ f_2(x)=cx+d, \text{ т. е.}$$
$$ax+b=cx+d. \tag{4.9}$$

Линейное уравнение с одной переменной можно решать, используя теоремы о равносильных переходах и следствия из них, следующим образом:

1) перенести все члены, содержащие переменную, в одну часть уравнения, а все известные — в другую (члены с переменной обычно переносят в левую часть уравнения);

2) осуществить приведение подобных слагаемых (при наличии буквенных коэффициентов переменная выносится за скобки).

В результате этих преобразований уравнение (4.9) преобразуется в уравнение

$$Ax=B. \tag{4.10}$$

Если $A\neq 0$, то, разделив обе части уравнения (4.10) на A, получим единственный корень уравнения $x=B/A$. Линейное уравнение (4.10) (при $A\neq 0$) называют *уравнением первой степени* с одной переменной.

Если $A=0$, $B\neq 0$, то уравнение (4.10) принимает вид $0\cdot x=B$, где $B\neq 0$. Это уравнение не имеет корней

(так как левая часть равна нулю при любом значении x, а правая отлична от нуля)

Если $A=0$, $B=0$, то уравнение (4.10) можно записать: $0\cdot x=0$. Последнее равенство верно при любом значении x. Это уравнение имеет бесконечное множество корней. Множеством его корней служит множество всех действительных чисел.

Итак, линейное уравнение может иметь только один корень, не иметь корней или иметь бесконечно много корней.

Замечание. При приведении линейного уравнения (4.9) к виду (4.10) в соответствующих случаях целесообразно раскрыть скобки и преобразовать его в уравнение с целыми коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение $3(x+5)+5(x+2)=6x+39$.

Выполним ряд равносильных преобразований. Раскрыв скобки, получим $3x+15+5x+10=6x+39$. Приводя подобные члены, найдем $8x+25=6x+39$. Перенося члены, содержащие x, в левую часть, а постоянные — в правую, получаем $8x-6x=39-25$ или $2x=14$, откуда $x=7$

Пример 2. Решить уравнение $\frac{2(x+8)}{11}+\frac{7(x-1)}{2}=\frac{5(x+3)}{6}+4$.

Умножив обе части уравнения на число 66 (общее наименьшее кратное всех знаменателей), получим уравнение, равносильное исходному:

$$12(x+8)+231(x-1)=55(x+3)+264.$$

Преобразуем это уравнение и найдем его корень:

$$12x+96+231x-231=55x+165+264;$$
$$243x-135=55x+429,\ 188x=564,$$

$x=3$ — корень исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $2(x+3)+3(x-1)=x+4(x+2)$.

Выполним равносильные преобразования:

$2x+6+3x-3=x+4x+8;\quad 5x+3=5x+8;\quad (5-5)x=8-3;$
$0\cdot x=5.$

Никакие значения x не могут удовлетворить последнему уравнению. Данное уравнение корней не имеет.

4.4. Уравнения, содержащие переменную в знаменателе дроби

Рассмотрим уравнение вида

$$p(x)=g(x), \tag{4.11}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения, причем хотя бы одно из них является дробным.

Представим выражения $p(x)$ и $g(x)$ в виде дробей с одинаковыми знаменателями. В результате получим уравнение вида

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \qquad (4.12)$$

(где $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \neq 0$ — целые рациональные выражения), которое равносильно уравнению (4.11), если в ходе выполнения тождественных преобразований область определения уравнения $p(x) = g(x)$ не изменилась. Уравнение (4.12) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ \psi(x) \neq 0, \end{cases} \qquad (4.13)$$

так как две дроби с одинаковыми знаменателями равны тогда и только тогда, когда их числители равны, а общий знаменатель имеет смысл при всех значениях переменной и отличен от нуля.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x+3}{x-2} + 1 = \frac{x+8}{x-2}$.

Приведем к общему знаменателю обе части уравнения (приведем уравнение к виду (4.12)): $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{x+8}{x-2}$.

Перейдем к системе вида (4.13): $2x + 1 = x + 8$, $x - 2 \neq 0$. Корнем уравнения $2x + 1 = x + 8$ является число $x = 7$, которое является корнем исходного уравнения, так как оно удовлетворяет и условию $x - 2 \neq 0$ $(7 - 2 \neq 0)$.

4.5. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называют уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (4.14)$$

где x — переменная; a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$.

Коэффициент a принято называть первым (или старшим) коэффицистом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом квадратного уравнения (4.14)

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называют *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Если $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение (4.14) принимает вид $ax^2 = 0$ и имеет корень $x = 0$, так как $a \neq 0$.

Если $b = 0$, $c \neq 0$, то имеем неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Для решения уравнения $ax^2+c=0$ $(a\neq 0)$ перенесем c в правую часть уравнения с противоположным знаком и разделим обе части полученного уравнения на $a\neq 0$:

$$ax^2=-c;\ x^2=-c/a.$$

Возможны два случая: $\frac{c}{a}>0$ и $\frac{c}{a}<0$.

Если $\frac{c}{a}>0$, то $-\frac{c}{a}<0$ и уравнение $x^2=-\frac{c}{a}$ не имеет действительных корней.

Если $\frac{c}{a}<0$, то $-\frac{c}{a}>0$ и поэтому уравнение $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет два действительных корня:

$$x_1=\sqrt{-c/a},\ x_2=-\sqrt{-c/a}$$

Таким образом, если знаки чисел a и c одинаковые, то уравнение $ax^2+c=0$ не имеет действительных корней; если знаки чисел a и c противоположные, то уравнение $ax^2+c=0$ имеет два действительных корня.

Пример 1. Решить уравнение $25x^2-9=0$.

Записывая уравнение $25x^2-9=0$ в виде $x^2=9/25$, находим его корни $x_1=\sqrt{9/25}$ и $x_2=-\sqrt{9/25}$, т. е. $x_1=3/5$ и $x_2=-3/5$.

Если $c=0$, $b\neq 0$, то имеем неполное квадратное уравнение $ax^2+bx=0$ $(a\neq 0)$, которое можно решить, разложив левую его часть на множители: $x(ax+b)=0$. Отсюда либо $x=0$, либо $ax+b=0$ и тогда $x=-b/a$. Таким образом, уравнение $ax^2+bx=0$ имеет два корня: $x_1=0$ и $x_2=-b/a$.

При решении квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ используют метод выделения квадрата двучлена. Поясним этот метод.

Разделим обе части уравнения (4.14) на a и получим уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \qquad (4.15)$$

Запишем левую часть уравнения (4.15) в виде

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Прибавляя и вычитая число $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, представим уравнение (4.15) в виде

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

откуда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{4.16}$$

Так как $4a^2>0$, то знак в правой части уравнения (4.16) зависит от знака выражения b^2-4ac и совпадает с ним.

Выражение b^2-4ac называют *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$ и обозначают $D: D=b^2-4ac$.

Возможны три случая: $D>0$, $D=0$ и $D<0$.

1. Если $D>0$, уравнение (4.16) можно записать:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2. \tag{4.17}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения (4.17), получаем, что уравнение (4.17) равносильно совокупности двух уравнений:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

откуда

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4.18}$$

Формулы (4.18) можно объединить:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

или

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \qquad (4.19)$$

Таким образом, в случае положительного дискриминанта, т. е. при $D=b^2-4ac>0$, уравнение (4.14) имеет два различных действительных корня, определяемые по формуле (4.19).

2. Если $D=0$, уравнение (4.16) принимает вид $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ и имеет два равных действительных корня $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Эти корни можно получить из формул: $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ при $D=0$. Если $D\to 0$, корни x_1 и x_2 приближаются друг к другу.

3. Если $D<0$, уравнение (4.16) не имеет действительных корней.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2-7x+4=0$.

Здесь $D=49-4\cdot 4\cdot 3=49-48=1>0$. По формуле (4.19) находим $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{7\pm 1}{6}$, откуда $x_1=4/3$, $x_2=1$

Пример 3. Решить уравнение $y^2+4y+13=0$.

Здесь $D=16-4\cdot 13=16-52=-36<0$, следовательно, уравнение действительных корней не имеет.

Квадратное уравнение вида

$$x^2+px+q=0 \qquad (4.20)$$

называют *приведенным*. В этом уравнении старший коэффициент равен единице.

Всякое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ делением обеих частей уравнения на $a\neq 0$ может быть приведено к виду (4.20).

Теорема 4.11. *Сумма корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ равна $-b/a$, а произведение корней равно c/a.*

▷ Если дискриминант уравнения $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad (a \neq 0).$$

Следовательно,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Если дискриминант $D = 0$, т. е. $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 = 4ac$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два равных действительных корня $x_1 = -\frac{b}{2a}$, $x_2 = -\frac{b}{2a}$ (см. формулу (4.19) при $D = 0$). Таким образом, $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. ◁

Доказанная теорема называется *теоремой Виета**.

Замечание. В случае приведенного квадратного уравнения (4.20) сумма корней равна $-b$, а произведение корней равно c, т. е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней — свободному члену.

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета.

Теорема 4.12. *Числа m и n являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если их сумма равна $-b/a$, а произведение равно c/a.*

▷ Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, равносильно уравнению $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. По условию $m + n = -b/a$, $mn = c/a$. Подставляя эти выражения в последнее уравнение, получаем $x^2 - (m+n)x + mn = 0$. Преобразуем левую часть полученного уравнения: $x^2 - (m+n)x + mn = x^2 - mx - nx + mn = x(x-m)$ —

* Франсуа Виет — французский математик (1540—1603)

$-n(x-m)=(x-m)(x-n)$. Очевидно, что уравнение $(x-m)(x-n)=0$, равносильное уравнению $x^2-(m+n)x+mx=0$, имеет корни m и n и никаких других. Итак, числа m и n, и только они, являются корнями уравнения $x^2+x\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$, а, следовательно, и уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$. ◁

Замечание. При $a=1$ числа m и n являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2+bx+c=0$, если их сумма равна $-b$, а произведение равно c.

Зависимость между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами может быть использована при составлении квадратного уравнения по его корням.

Биквадратным называют уравнение

$$ax^4+bx^2+c=0, \tag{4.21}$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a\neq 0$. Это уравнение сводится к квадратному уравнению (4.14) путем введения новой переменной y по формуле $y=x^2$.

Рассмотрим квадратный трехчлен ax^2+bx+c $(a\neq 0)$. *Корнем квадратного трехчлена* называют такое значение переменной, при котором его значение равно нулю. Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, т. е. $D=b^2-4ac>0$, то этот трехчлен имеет два различных действительных корня. Обозначим эти корни x_1 и x_2. Можно доказать, что

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{4.22}$$

▷ В самом деле,

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=$$
$$=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2).$$

По теореме Виета $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$. Следовательно, $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=ax^2+bx+c$.

Таким образом, при $D>0$ и $a\neq 0$ справедливо тождество (4.22). ◁

Тождеством (4.22) можно пользоваться и тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен нулю. В этом случае многочлен имеет два равных действительных корня $x_1 = x_2$. Тождество (4.22) принимает вид

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) \text{ или}$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Пример 4. Разложить на множители квадратный трехчлен
$$4x^2 - 4x - 3.$$

Найдем корни этого трехчлена, решив уравнение $4x^2 - 4x - 3 = 0$. По формуле (4.19) находим $x_1 = 3/2$, $x_2 = -1/2$.
На основании формулы (4.22) заключаем, что

$$4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Пример 5. Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Данное биквадратное уравнение приведем к уравнению $y^2 - 5y + 4 = 0$, где $y = x^2$. Решая это уравнение, находим $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Следовательно, исходное уравнение имеет четыре решения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

4.6. Иррациональные уравнения

Иррациональным называют уравнение, содержащее переменную под знаком радикала.

Примеры иррациональных уравнений: $\sqrt{x+1} - 3 = 0$, $\sqrt{x^2 - 5x + 6} - (x-2)(x-3) = 0$, $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = 1$.

Для решения иррациональных уравнений в простейших случаях могут быть использованы: метод «уединения» радикала, метод замены переменной, метод приведения к смешанной системе уравнений и неравенств.

Иррациональное уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x)$ равносильно системе

$$f(x) \geqslant 0;\ \varphi(x) \geqslant 0;\ f(x) = (\varphi(x))^{2n}.$$

Это значит, чтобы решить исходное уравнение, необходимо найти корни уравнения $f(x) = (\varphi(x))^{2n}$ и проверить, удовлетворяют ли они условиям $f(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$. В некоторых случаях целесообразно начинать с проверки выполнения этих условий.

Метод «уединения» радикала состоит в том, что, оставляя радикал в одной части уравнения, возводят обе части уравнения в соответствующую степень до тех пор, пока не получат уравнение, не содержащее радикалов. Поскольку при этом могут появиться посторонние корни, то необходима проверка найденных корней. Такая проверка нужна и при введении новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+5}=x-1$.

Это уравнение равносильно уравнению $x+5=(x-1)^2$ при выполнении условий $x+5\geqslant 0$, $x-1\geqslant 0$ или $x\geqslant -5$, $x\geqslant 1$, т. е. при $x\geqslant 1$.

Решим уравнение

$x+5=(x-1)^2$; $x+5=x^2-2x+1$; $x^2-3x-4=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=4$. Так как условию $x\geqslant 1$ удовлетворяет только второе значение переменной, то исходное уравнение имеет единственный корень $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-1}-x=-7$.

Область определения уравнения задается неравенством $x-1\geqslant 0$ или $x\geqslant 1$. Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{x-1}-x=-7;\ \sqrt{x-1}=x-7;\ x-1=(x-7)^2;$$
$$x-1=x^2-14x+49;\ x^2-15x+50=0.$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1=5$, $x_2=10$. Оба значения удовлетворяют условию $x\geqslant 1$, однако только значение $x=10$ является корнем исходного уравнения. В этом убеждаемся непосредственной подстановкой:

$$\sqrt{5-1}-5=\sqrt{4}-5=2-5=-3\neq 7;$$
$$\sqrt{10-1}-10=\sqrt{9}-10=3-10=-7.$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-10}=1$.

Это иррациональное уравнение содержит два радикала. Область определения переменной задается системой неравенств:

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0; \\ 2x-10\geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\geqslant -2; \\ x\geqslant 5, \end{cases} \text{ откуда } x\geqslant 5.$$

«Уединим» сначала первый радикал и преобразуем уравнение:

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-10}+1;\ x+2=2x-10+2\sqrt{2x-10}+1;$$
$$x+2=2x-9+2\sqrt{2x-10}.$$

«Уединим» второй радикал и преобразуем новое уравнение:

$$2\sqrt{2x-10}=-x+11;\ 4(2x-10)=x^2-22x+121;$$
$$8x-40=x^2-22x+121;\ x^2-30x+161=0.$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1=7$, $x_2=23$. Каждое из найденных значений удовлетворяет условию $x\geqslant 5$, но лишь $x=7$ является корнем исходного уравнения (в чем нетрудно убедиться, сделав проверку)

4.7. Показательные уравнения

Показательным называют уравнение, содержащее переменную в показателе степени, т. е. уравнение вида

$$a^{f(x)} = b^{\varphi_1(x)},$$

где a и b — действительные числа ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), $f(x)$ и $\varphi_1(x)$ — некоторые функции переменной x.

Так как $b = a^{\log_a b}$ (см. основное тождество, § 3.12), то показательное уравнение $a^{f(x)} = b^{\varphi_1(x)}$ можно привести к виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$.

Действительно, подставляя выражение для b в уравнение $a^{f(x)} = b^{\varphi_1(x)}$, получаем $a^{f(x)} = a^{\log_a b \cdot \varphi_1(x)}$ или $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, где $\varphi(x) = \log_a b \cdot \varphi_1(x)$.

Решение показательных уравнений основано на приведенной ниже теореме.

Теорема 4.13. *Показательное уравнение*

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \tag{4.23}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = \varphi(x). \tag{4.24}$$

▷ Пусть c — корень уравнения (4.23), т. е. $a^{f(c)} = a^{\varphi(c)}$. Отсюда на основании свойств показательной функции получаем $f(c) = \varphi(c)$. Это равенство означает, что c — корень уравнения (4.24).

Обратно, если b — корень уравнения (4.24), т. е. $f(b) = \varphi(b)$, то $a^{f(b)} = a^{\varphi(b)}$. Это значит, что b — корень уравнения (4.23).

Итак, уравнения (4.23) и (4.24) равносильны. ◁

Простейшие из уравнений (4.23) получаются при $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x) = \alpha$. Они имеют соответственно вид: $a^{f(x)} = 1$, $a^{f(x)} = a^{\alpha}$. Первое из этих уравнений равносильно уравнению $f(x) = 0$, второе — уравнению $f(x) = \alpha$.

Если задано уравнение

$$a^{f(x)} = b,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq a),$$

то его можно привести к уравнению вида $a^{f(x)} = a^{\alpha}$, где $\alpha = \log_a b$. Это уравнение равносильно уравнению $f(x) = \log_a b$.

Замечание. Последнее уравнение получается из предыдущего уравнения логарифмированием по основанию a.

Аналогично решают уравнения более общего вида

$$a_1^{f_1(x)} a_2^{f_2(x)} \dots a_n^{f_n(x)} = b, \tag{4.25}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ — положительные числа, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ — заданные функции. Логарифмируя обе части уравнения (4.25) по некоторому основанию $a (a > 0, a \neq 1)$, получаем уравнение

$$f_1(x) \log_a a_1 + f_2(x) \log_a a_2 + \dots + f_n(x) \log_a a_n = \log_a b,$$

равносильное уравнению (4.25).

Показательное уравнение

$$P(a^{f(x)}) = 0, \tag{4.26}$$

где $a > 0, a \neq 1$; $P(a^{f(x)})$ — заданный многочлен, решают путем введения новой переменной t по формуле

$$a^{f(x)} = t \ (t > 0).$$

Для t получают уравнение $P(t) = 0$ $(t > 0)$. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_m$ — корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $t > 0$. Тогда корнями уравнения (4.26) будут все корни уравнения $a^{f(x)} = t_k$, где $k = 1, 2, \dots, m$, т. е. корни уравнений

$$f(x) = \log_a t_k, \ k = 1, 2, \dots, m.$$

Пример 1. Решить уравнение $3^{x^2-4x} = 3^{2x-8}$.

Данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 4x = 2x - 8$ или $x^2 - 6x + 8 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Эти числа являются корнями исходного показательного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $4^{x+1} + 4^x = 320$.

Преобразуем это уравнение и найдем его корни:

$$4^x(4+1) = 320, \ 4^x 5 = 320; \ 4^x = 64; \ 4^x = 4^3; \ x = 3.$$

Пример 3. Решить уравнение $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$.

Перепишем это уравнение в виде $10 \cdot 2^x - (2^x)^2 - 16 = 0$ и введем новую переменную t по формуле $t = 2^x$. Получим уравнение относительно переменной t: $10t - t^2 - 16 = 0$ или $t^2 - 10t + 16 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = 8$. Этим значениям t соответствуют два уравнения: $2^x = 2$, $2^x = 8$, откуда $x = 1$ и $x = 3$. Полученные значения — корни исходного уравнения, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Пример 4. Решить уравнение $5^{x+1,5} = 7^{2x}$.

Поскольку $7 = 5^{\log_5 7}$, то уравнение принимает вид $5^{x+1,5} = 5^{\log_5 7 \cdot 2x}$, откуда $x + 1,5 = 2x \log_5 7$, $1,5 = (2 \log_5 7 - 1)x$, $x = \dfrac{1,5}{2 \log_5 7 - 1} = \dfrac{3}{2(2 \log_5 7 - \log_5 5)} = \dfrac{3}{2 \log_5 \frac{49}{5}} = \dfrac{3}{2} \log_{\frac{49}{5}} 5.$

4.8. Логарифмические уравнения

Логарифмическим называют уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма:

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} \varphi(x). \tag{4.27}$$

Здесь рассматривается случай, когда переменная x входит и в основание логарифмов, и в выражение, стоящее под знаком логарифма. Функция $g(x)$ должна удовлетворять условиям: $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$; функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ должны быть положительными.
Уравнением-следствием уравнения (4.27) является

$$f(x) = \varphi(x). \tag{4.28}$$

▷ Покажем, что каждый корень уравнения (4.27) является корнем уравнения (4.28). Пусть x_0 — любой корень уравнения (4.27), тогда: 1) $g(x_0) > 0$, $g(x_0) \neq 1$; 2) $f(x_0) > 0$, $\varphi(x_0) > 0$; 3) $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Последнее равенство означает, что x_0 — корень уравнения (4.28). ◁

Таким образом, при переходе от уравнения (4.27) к уравнению (4.28) потери корней не происходит. В то же время уравнение (4.28) может иметь корни, не удовлетворяющие уравнению (4.27), если не выполняется хотя бы одно из условий, налагаемых на функции $g(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$, т. е. если окажется, что или $g(x_0) \leqslant 0$, или $g(x_0) = 1$, или $f(x_0) \leqslant 0$, или $\varphi(x_0) \leqslant 0$.

Уравнение (4.27) равносильно смешанной системе

$$f(x) = \varphi(x);\ f(x) > 0;\ \varphi(x) > 0;\ g(x) > 0;\ g(x) \neq 1.$$

В частном случае, когда $g(x) = a$, причем $a > 0$, $a \neq 1$, уравнение (4.27) принимает вид

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x).$$

Это уравнение равносильно смешанной системе

$$f(x) = \varphi(x);\ f(x) > 0;\ \varphi(x) > 0.$$

Отметим, что последняя система в свою очередь равносильна каждой из следующих систем:

$$f(x) = \varphi(x),\ f(x) > 0;\ f(x) = \varphi(x),\ \varphi(x) > 0.$$

При решении логарифмических уравнений используют свойства логарифмов, например уравнение

$$\log_a f(x) + \log_a \varphi(x) = \log_a h(x) \qquad (4.29)$$

преобразуют к виду

$$\log_a (f(x)\varphi(x)) = \log_a h(x). \qquad (4.30)$$

Уравнения (4.29) и (4.30) могут быть неравносильными. Действительно, область допустимых значений переменной суммы $\log_a f(x) + \log_a \varphi(x)$ задается системой неравенств $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, тогда как область допустимых значений выражения $\log_a(f(x)\varphi(x))$ — неравенством $f(x) \times \varphi(x) > 0$, которое равносильно совокупности двух систем неравенств

$$f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0;\ f(x) < 0,\ \varphi(x) < 0.$$

Итак, при переходе от уравнения (4.29) к уравнению (4.30) может произойти расширение области допустимых значений переменной. Значит, могут появиться посторонние корни. Чтобы решить уравнение (4.29), необходимо отобрать те корни уравнения (4.30), которые принадлежат области допустимых значений уравнения (4.29), т. е. удовлетворяют системе неравенств $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, $h(x) > 0$, или сделать проверку найденных корней подстановкой в исходное уравнение (4.29).

При решении логарифмических уравнений используют также переход к новому основанию. Рассмотрим уравнение

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} \varphi(x). \qquad (4.31)$$

Перейдем в этом уравнении к новому основанию $r(x)$, где $r(x) > 0$, $r(x) \neq 1$. В результате получим уравнение

$$\frac{\log_{r(x)} f(x)}{\log_{r(x)} g(x)} = \frac{\log_{r(x)} \varphi(x)}{\log_{r(x)} p(x)}. \qquad (4.32)$$

Можно доказать, что если x_0 — корень уравнения (4.31), то он будет корнем уравнения (4.32).

Таким образом, если функция $r(x)$ принимает положительные значения, отличные от нуля, в точках, где определены левая и правая части уравнения (4.31), то при переходе к логарифмам по основанию $r(x)$ потери корней не происходит. В этом случае переход от уравнения (4.32) к уравнению (4.31) также не приводит к потере корней, т. е. уравнения (4.31) и (4.32) равносильны.

При решении уравнений вида

$$P(\log_a f(x))=0, \tag{4.33}$$

где $P(\log_a f(x))$ — многочлен, вводится новая переменная по формуле $y=\log_a f(x)$.

В заключение отметим, что уравнения, содержащие переменную в основании и в показателе степени, решают, как правило, логарифмированием обеих частей. Если в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения логарифмируют по основанию этого логарифма.

Пример 1. Решить уравнение $\log_x 2+\log_2 x=2{,}5$.

Воспользуемся формулой перехода к новому основанию логарифмов, которая в данном случае принимает вид $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$. Подставляя это выражение в данное уравнение, получаем

$$\frac{1}{\log_2 x}+\log_2 x=\frac{5}{2};\ 2\log_2^2 x-5\log_2 x+2=0,$$

т. е. уравнение вида (4.33). Введем новую переменную y по формуле $y=\log_2 x$ и решим квадратное уравнение $2y^2-5y+2=0$, получим $y_1=\dfrac{1}{2}$, $y_2=2$. Найденным значениям y по формуле $y=\log_2 x$ соответствуют значения $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=4$. Эти числа являются корнями данного логарифмического уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$.

Воспользуемся свойством логарифма $\log_{a^k} b^k=\log_a b$. В соответствии с этой формулой получаем

$$\log_2 x=\log_{2^4} x^4=\log_{16} x^4,\ \log_4 x=\log_{4^2} x^2=\log_{16} x^2.$$

Данное уравнение принимает вид

$$\log_{16} x^4+\log_{16} x^2+\log_{16} x=7,\ \log_{16}(x^4x^2x)=7.$$

Отсюда получаем $\log_{16} x^7=7$, $x^7=16^7$, $x=16$. Это значение удовлетворяет условию $x>0$ и является корнем данного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=x$.

Логарифмируя данное равенство по основанию 10, получаем

$$(\lg^2 x+\lg x^3+3)\lg x=\lg x \Leftrightarrow (\lg^2 x+\lg x^3+3)\lg x-\lg x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lg^2 x+\lg x^3+2)\lg x=0 \Leftrightarrow \lg x=0,\ \lg^2 x+\lg x^3+2=0.$$

Первое уравнение имеет корень $x=1$. Второе уравнение запишем в виде $\lg^2 x+3\lg x+2=0$ и введем новую переменную y по формуле $y=\lg x$. Получим квадратное уравнение $y^2+3y+2=0$, $y_1=-1$, $y_2=-2$, откуда $\lg x=-1$, $x=10^{-1}$ и $\lg x=-2$, $x=10^{-2}$. Все значения x удовлетворяют условию $x>0$, которым определяется область допустимых значений уравнения. Данное уравнение имеет три корня: $x_1=1$, $x_2=0{,}1$, $x_3=0{,}01$.

4.9. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Рассмотрим уравнения, которые содержат переменную или функцию этой переменной под знаком модуля. К простейшим уравнениям такого рода относится уравнение

$$|f(x)| = a, \tag{4.34}$$

где $f(x)$ — функция переменной x; a — действительное число.

Если $a < 0$, то уравнение (4.34) не имеет корней (так как $|f(x)| \geqslant 0$). Если $a = 0$, уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$. Если $a > 0$, уравнение равносильно совокупности уравнений: $f(x) = a$, $f(x) = -a$.
Уравнение вида

$$F(|f(x)|) = 0 \tag{4.35}$$

с помощью замены $|f(x)| = y$, $y \geqslant 0$ сводится к уравнению

$$F(y) = 0. \tag{4.36}$$

Если уравнение (4.36) имеет положительные корни $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то для нахождения корней уравнения (4.35) надо решить совокупность уравнений вида (4.34):

$$|f(x)| = y_1, \ |f(x)| = y_2, \ \ldots, \ |f(x)| = y_n.$$

Уравнение вида $F(x;\ |x|) = 0$, где $F(x;\ |x|)$ — функция переменной x и $|x|$, равносильно совокупности уравнений

$$F(x;\ x) = 0 \ (x \geqslant 0), \ F(x;\ -x) = 0 \ (x < 0).$$

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, решают и с помощью «раскрытия» модулей на непересекающихся промежутках.

Суть метода состоит в следующем: 1) находят те значения переменной, при которых рассматриваемые модули равны нулю; 2) область определения уравнения разбивают на промежутки, концы которых — корни модулей; 3) определяют, какой знак имеет выражение, стоящее под знаком модуля, на каждом из построенных промежутков; 4) на каждом промежутке раскрывают модуль и решают уравнение; 5) проверяют, принадлежат ли найденные решения уравнения рассматриваемому промежутку: если принадлежат, их включают в ответ, если нет — отбрасывают.

Таким методом можно решить, например, уравнение вида

$$|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x) = 0, \qquad (4.37)$$

где $f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $\varphi(x)$ — заданные непрерывные функции переменной x.

Сначала находят область определения функции

$$F(x) = |f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x).$$

Далее находят корни модулей, т. е. каждой функции $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$ (т. е. значения переменной, при которых функция обращается в нуль). Корни функции делят область определения функции $F(x)$ на промежутки, в которых функции $f_i(x)$ сохраняют знак. Затем определяют знаки всех функций $f_i(x)$ на каждом промежутке и, пользуясь определением модуля, переходят от уравнения с модулем к уравнению без модуля. Решают полученные уравнения; выясняют, принадлежат ли рассматриваемому промежутку найденные корни. Объединение соответствующих корней будет множеством решений уравнения (4.37).

Пример 1. Решить уравнение $|x^2-5x|=6$.

Это уравнение вида (4.34), оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$x^2-5x=-6;\ x^2-5x=6 \text{ или } x^2-5x+6=0,\ x^2-5x-6=0.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1=2$, $x_2=3$, второе — корни $x_3=-1$, $x_4=6$. Каждое их этих чисел является корнем исходного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $2^{\left|\frac{x+1}{x-4}\right|}=64$. Отметим, что $x\neq 4$. Данное уравнение можно переписать так: $2^{\left|\frac{x+1}{x-4}\right|}=2^6$, откуда $\left|\frac{x+1}{x-4}\right|=6$. Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\frac{x+1}{x-4}=6;\ \frac{x+1}{x-4}=-6,\ x\neq 4.$$

Решая уравнения, находим $x_1=5$, $x_2=\frac{23}{7}$. Эти значения удовлетворяют условию $x\neq 4$ и являются корнями данного уравнения.

4.10. Уравнения с параметром

Рассмотрим уравнение

$$f(x, \alpha)=0, \qquad (4.38)$$

где $f(x, \alpha)$ — выражение с двумя переменными x и α. Решить это уравнение — значит отыскать такие пары значений (x, α), которые удовлетворяют равенству (4.38), т. е. обращают его в верное числовое равенство. Другими словами, уравнение вида (4.38) можно рассматривать как уравнение с двумя переменными x и α.

Если же придать переменной α какое-нибудь фиксированное значение α_0, то равенство (4.38) превратится в уравнение с одной переменной x: $f(x, \alpha_0)=0$, или $f_1(x)=0$.

Когда ставится задача для каждого действительного значения α решить уравнение (4.38) относительно x, то его называют уравнением с переменной x и параметром α.

Решить уравнение (4.38) с параметром α — значит для каждого действительного значения α найти множество действительных значений x, удовлетворяющих данному уравнению. Отметим, что для некоторых значений параметра α это множество может оказаться пустым. Сначала нужно установить, при каких значениях параметра уравнение имеет решения.

Таким образом, решить уравнение с параметром — это значит найти соответствие, с помощью которого для каждого значения параметра указывается множество корней данного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $5\alpha(\alpha-3)x=\alpha-3$.

Если коэффициент при x отличен от нуля, то можно выразить x. Рассмотрим те значения параметра α, при которых указанный коэффициент равен нулю. Такими значениями являются $\alpha=0$, $\alpha=3$. Если $\alpha=0$, уравнение принимает вид $0\cdot x=3$. Это уравнение не имеет корней. При $\alpha=3$ данное уравнение запишется так: $0\cdot x=0$. Последнему уравнению удовлетворяет любое значение x, уравнение имеет бесконечное множество корней. Если $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 3$, уравнение принимает вид $5\alpha x=1$ (на $(\alpha-3)\neq 0$ можно сократить), оно имеет единственное решение $x=\frac{1}{5\alpha}(\alpha\neq 0)$.

Итак, если $\alpha=3$, уравнение имеет бесконечное множество решений, если $\alpha\neq 3$, $\alpha\neq 0$, уравнение имеет единственное решение $x=1/(5\alpha)$.

Пример 2. При каких значениях параметра α уравнение $x^2-2\alpha x+9=0$ имеет два равных действительных корня?

Как известно, квадратное уравнение имеет два равных действительных корня, когда его дискриминант равен нулю. Найдем дискриминант этого уравнения и приравняем его нулю:

$$D=(-2\alpha)^2-4\cdot 9=4\alpha^2-4\cdot 9=4(\alpha^2-9);\ D=0, \alpha^2=9.$$

Из последнего уравнения находим два значения: $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-3$.

4.11. Графический метод решения уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x)=\varphi(x). \qquad (4.39)$$

Построим на одном чертеже графики функций $y_1=f(x)$ и $y_2=\varphi(x)$. Пусть M_0 — точка пересечения графиков (рис. 4.1), x_0 — абсцисса этой точки, тогда $y_1=y_2$, т. е. $f(x_0)=\varphi(x_0)$. Это равенство означает, что x_0 — решение уравнения (4.39).

Чтобы графически решить уравнение (4.39), необходимо построить в одной системе координат графики двух функций $y_1=f(x)$, $y_2=\varphi(x)$ и найти точки пересечения этих графиков. Абсциссы этих точек будут корнями данного уравнения. Например, для уравнения $x^2=-x+2$ такими точками будут точки $M_1(-2, 4)$, $M_2(1, 1)$ — точки пересечения графиков функций $y_1=x^2$ и $y_2=-x+2$ (рис. 4.2). Абсциссы точек M_1 и M_2, т. е. $x=-2$ и $x=1$ — корни уравнения $x^2=-x+2$.

Если уравнение имеет вид

$$f(x)=0, \qquad (4.40)$$

то в качестве функции $\varphi(x)$ выступает функция $y_2=0$. Графиком функции $y=0$ является ось Ox. Решениями уравнения (4.40) будут точки пересечения графика функции $y=f(x)$ и оси Ox, точки касания этого графика оси Ox или другие общие точки графика и данной оси (рис. 4.3).

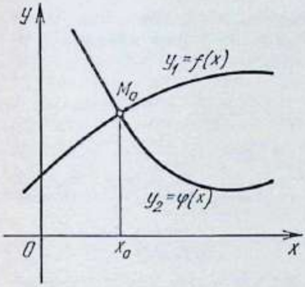


Рис. 4.1

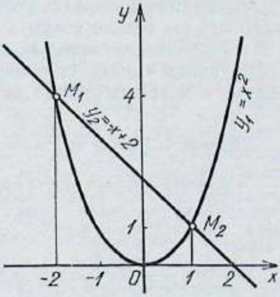


Рис. 4.2

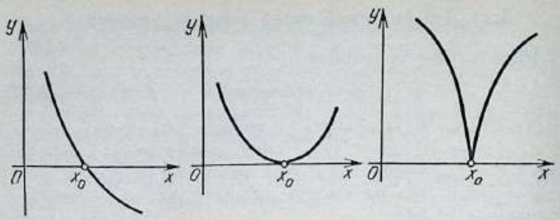


Рис. 4.3

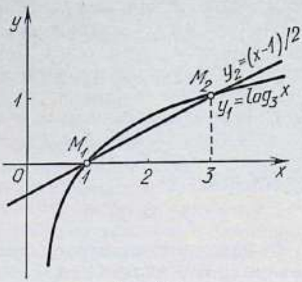


Рис. 4.4

Для графического решения уравнения (4.40) необходимо построить график функции $y=f(x)$, найти общие точки графика и оси Ox (точки пересечения, точки касания или другие общие точки).

Графический метод особенно удобен, когда требуется определить только количество корней или найти интервалы, в которых находятся корни.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3 x = \frac{x-1}{2}$

Построим графики функций $y_1 = \log_3 x$, $y_2 = \frac{x-1}{2}$ (рис 4.4) Эти графики пересекаются в двух точках: $M_1(1, 0)$, $M_2(3; 1)$. Абсциссы этих точек, т е числа $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, являются корнями данного уравнения.

Пример 2. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = (x-1)^2$ и в каких интервалах находятся эти корни?

Строим графики двух функций $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = (x-1)^2$ Эти графики пересекаются в точках M_1 и M_2 (рис 4.5) Следовательно, данное

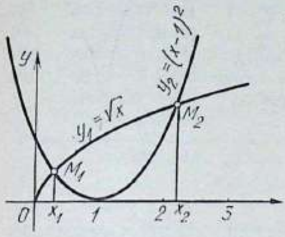


Рис. 4.5

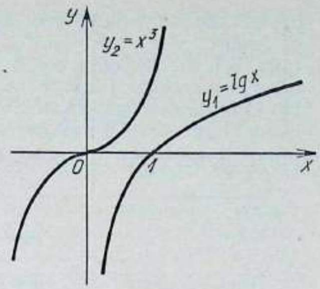


Рис. 4.6

уравнение имеет два корня: x_1 — абсцисса точки M_1, x_2 — абсцисса точки M_2. Очевидно, что $0<x_1<1$, $2<x_2<3$, т. е. один корень находится в интервале (0; 1), второй — в интервале (2; 3).

Пример 3. Решить уравнение $\lg x = x^3$.

Построив графики функций $y_1=\lg x$, $y_2=x^3$ (рис. 4.6), обнаружим, что они не имеют общих точек. Значит, данное уравнение не имеет корней.

5. НЕРАВЕНСТВА

5.1. Основные свойства числовых неравенств

Действительные числа будем изображать точками координатной оси, положительное направление которой выбрано так, как на рис. 5.1.

Из двух действительных чисел меньшим считается то, которому на координатной прямой соответствует точка, лежащая левее, и большим то, которому соответствует точка, лежащая правее. Отсюда, в частности, следует, что всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное число меньше нуля. Если число a меньше b, то пишут $a<b$; если число b больше a, то пишут $b>a$. Отношения «больше» и «меньше» взаимосвязаны: если $a<b$, то $b>a$, и, наоборот, если $a>b$, то $b<a$.

Отметим простейшие свойства отношения «меньше» между числами: 1) при любом a высказывание $a<a$ ложно; 2) если a и b различные числа, то истинно одно и только одно из высказываний: $a<b$ или $b<a$. Это свойство геометрически означает следующее: если $A(a)$ и

$B(b)$ — две различные точки координатной прямой, то либо A лежит левее B (рис. 5.1, a), либо B — левее A (рис. 5.1, $б$); 3) если $a<b$, $b<c$, то $a<c$ (свойство транзитивности). Геометрически это свойство означает, что если на координатной прямой точка $A(a)$ лежит левее точки $B(b)$, которая находится левее точки $C(c)$, то точка A также расположена левее точки C (рис. 5.1, a).

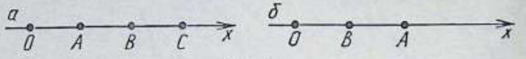


Рис. 5.1

Для отношения «больше» между числами справедливы свойства, аналогичные перечисленным свойствам для отношения «меньше».

Неравенства $a<b$, $c<d$ (или $a>b$, $c>d$) будем называть *неравенствами одинакового смысла*, а неравенства $a<b$ и $c>d$ — *неравенствами противоположного смысла*. Отметим, что эти термины относятся лишь к форме записи неравенств. Так, по отношению к неравенству $a<b$ неравенство $c<d$ является неравенством того же смысла, а в записи $d>c$ — неравенством противоположного смысла.

Часто используется запись $a \leqslant b$, или, что то же самое, $b \geqslant a$. Запись $a \leqslant b$ по определению означает, что либо $a<b$, либо $a=b$.

Наряду с неравенствами вида $a<b$, $a \leqslant b$ используются и так называемые *двойные неравенства*, т. е. неравенства вида $a<c<b$, $a \leqslant c<b$, $a<c \leqslant b$, $a \leqslant c \leqslant b$. По определению запись $a<c<b$ означает, что справедливы оба неравенства: $a<c$ и $c<b$. Аналогичный смысл имеют и остальные неравенства.

Неравенства, составленные с помощью знаков $<$ или $>$, называют *строгими*; неравенства, составленные с помощью знаков $\leqslant$ или $\geqslant$, называют *нестрогими*.

Основные свойства числовых неравенств выражаются следующими теоремами.

Теорема 5.1. *Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда разность $a-b$ отрицательна; число a больше числа b тогда и только тогда, когда разность $a-b$ положительна.*

▷ Действительно, пусть a и b — некоторые числа, причем $a<b$, тогда $a=b-c$, где c — положительное число. Отсюда получаем $a-b=-c$, т. е. $a-b<0$, так как число $-c$ — отрицательное. Таким образом, если $a<b$, то $a-b<0$. Если $a-b<0$, то $a<b$. Действительно, из неравенства $a-b<0$ имеем $a-b=-c$, где $c>0$, поэтому $a=b-c$, т. е. $a<b$. ◁

Очевидно, что $a=b$ тогда и только тогда, когда $a-b=0$. Отсюда следует, что $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a-b \leqslant 0$.

Теорема 5.2. *Если $a<b$ и c — любое число, то $a+c<b+c$.*

▷ Рассмотрим разность $(a+c)-(b+c)$, которая равна разности $a-b$. Если $a<b$, то $a-b<0$ (на основании теоремы 5.1). Если $a-b<0$, то и $(a+c)-(b+c)<0$, откуда на основании той же теоремы следует, что $a+c<b+c$. ◁

Следствие. Если слагаемое из одной части верного неравенства перенести в другую с противоположным знаком, то получится верное неравенство.

В самом деле, пусть $a+b<c$, тогда $a+b+(-b)<c+(-b)$, откуда $a<c-b$.

Теорема 5.3. *Если $a<b$ и c — положительное число, то $ac<bc$. Если $a<b$ и c — отрицательное число, то $ac>bc$.*

▷ Рассмотрим разность $ac-bc$ и преобразуем ее в произведение $ac-bc=c(a-b)$. Поскольку $a<b$, то $a-b<0$. При положительном c произведение $c(a-b)$ отрицательно: $c(a-b)<0$, поэтому и $ac-bc<0$, откуда $ac<bc$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ◁

Теорема 5.4. *Если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$.*

▷ Так как $a<b$, то $a+c<b+c$ (по теореме 5.2), поскольку $c<d$, то $b+c<b+d$. По свойству транзитивности из неравенств $a+b<b+c$ и $b+c<b+d$ следует неравенство $a+c<b+d$. ◁

Теорема 5.5. *Если $a<b$ и $c<d$, где a, b, c, d — положительные числа, то $ac<bd$.*

▷ Поскольку $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$ (по теореме 5.3). Так как $c<d$ и $b>0$, то $bc<bd$. По свойству транзитивности из неравенств $ac<bc$ и $bc<bd$ следует неравенство $ac<bd$. ◁

Следствие. Если $0<a<b$, то $a^n<b^n$, где n — натуральное число.

5.2. Неравенства с одной переменной

Неравенством с одной переменной x называют выражение вида

$$f(x) < \varphi(x), \tag{5.1}$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции этой переменной. При этом считают $f(x)$ левой частью, а $\varphi(x)$ — правой частью неравенства (5.1). Рассматривают и другие неравенства с переменной x:

$$f(x) > \varphi(x),\ f(x) \geqslant \varphi(x),\ f(x) \leqslant \varphi(x).$$

Решением неравенства с одной переменной называют такое значение этой переменной, при котором оно обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной — значит найти множество всех его решений или показать, что неравенство не имеет решений.

Областью определения неравенства $f(x) < \varphi(x)$ называют общую часть областей определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Два неравенства называют *равносильными*, если множества их решений совпадают. Равносильными считаются и неравенства, не имеющие решений.

Основная идея решения неравенства состоит в следующем: данное неравенство заменяют другим, более простым, но равносильным исходному. Такую замену иногда приходится делать несколько раз, пока не получится неравенство, равносильное данному, решение которого находится очевидным образом. Указанная замена чаще всего осуществляется на основе приведенных ниже теорем.

Теорема 5.6. *Неравенства* $f(x) < \varphi(x)$ *и* $\varphi(x) > f(x)$ *равносильны.*

Теорема 5.7. *Неравенства* $f(x) < \varphi(x)$ *и* $f(x) + g(x) < \varphi(x) + g(x)$ *равносильны, если* $g(x)$ *имеет смысл в области определения неравенства* $f(x) < \varphi(x)$.

Отметим, что равносильны неравенства $f(x) < \varphi(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x) < \varphi(x)$.

Теорема 5.8. *Неравенства* $f(x) < \varphi(x)$ *и* $f(x)g(x) < \varphi(x)g(x)$ *равносильны, если* $g(x) > 0$ *для всех значений* x *из области определения неравенства* $f(x) < \varphi(x)$.

В частности, для любого положительного числа c равносильны неравенства $f(x) < \varphi(x)$ и $cf(x) < c\varphi(x)$, а также $f(x) < \varphi(x)$ и $\frac{f(x)}{c} < \frac{\varphi(x)}{c}$.

Теорема 5.9. *Неравенства* $f(x) < \varphi(x)$ *и* $f(x)g(x) > \varphi(x)g(x)$ *равносильны, если* $g(x) < 0$ *для всех* x *из области определения неравенства* $f(x) < \varphi(x)$.

В частности, для любого отрицательного числа a равносильны неравенства $f(x) < \varphi(x)$ и $af(x) > a\varphi(x)$, а также $f(x) < \varphi(x)$ и $\frac{f(x)}{a} > \frac{\varphi(x)}{a}$.

Отметим, что доказательство сформулированных теорем легко следует из соответствующих свойств числовых неравенств.

Замечание. Неравенство $f(x) < \varphi(x)$ можно привести к виду

$$F(x) < 0. \tag{5.2}$$

Действительно, прибавив $-\varphi(x)$ к обеим частям неравенства $f(x) < \varphi(x)$ и введя обозначение $F(x) = f(x) - \varphi(x)$, получим неравенство (5.2).

5.3. Линейные неравенства с одной переменной

Линейным неравенством с одной переменной называют неравенство вида

$$ax + b < cx + d. \tag{5.3}$$

С помощью свойств неравенств, выраженных теоремами 5.6—5.9, неравенство (5.3) можно записать так:

$$Ax < B. \tag{5.4}$$

Если $A > 0$, то, разделив почленно неравенство (5.4) на A, получим решение этого неравенства: $x < B/A$. Если $A < 0$, то, разделив почленно неравенство (5.4) на A, получим $x > B/A$. Если $A = 0$, $B > 0$, то неравенству (5.4) удовлетворяет любое значение x (неравенство имеет бесконечное множество решений). Если $A = 0$ и $B \leqslant 0$, то неравенство (5.4) не имеет решений.

Пример 1. Решить неравенство $2(x-1) + 3(2x+4) < 4(x+7) + 6$.

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$2x - 2 + 6x + 12 < 4x + 28 + 6 \Leftrightarrow 8x + 10 < 4x + 34.$$

Переносим 10 с минусом в правую часть неравенства, а $4x$ с минусом — в левую его часть: $8x - 4x < 34 - 10 \Leftrightarrow 4x < 24$.

Разделив обе части последнего неравенства на 4, получим $x < 6$.

Итак, множеством решений последнего неравенства, а также и первоначального неравенства являются все числа промежутка $(-\infty; 6)$.

В случае, когда коэффициенты неравенства (5.3) выражаются дробными рациональными числами, целесообразно привести его сначала к неравенству с целыми коэффициентами.

Пример 2. Решить неравенство

$$9x - \frac{x+2}{3} - \frac{5(x-1)}{2} > \frac{7(x+8)}{6} + 5.$$

Умножим обе части неравенства на 6 и преобразуем его:

$$54x - 2(x+2) - 15(x-1) > 7(x+8) + 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 54x - 2x - 4 - 15x + 15 > 7x + 56 + 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 37x + 11 > 7x + 86 \Leftrightarrow 37x - 7x > 86 - 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 30x > 75 \Leftrightarrow x > 75/30 \Leftrightarrow x > 2{,}5.$$

Получили, что множество решений данного неравенства — промежуток $(2{,}5;\ +\infty)$.

Таким образом, при решении неравенства первой степени с одной переменной следует:

1) члены, содержащие переменную, перенести в одну часть неравенства, а члены, не содержащие переменную, в другую его часть и привести подобные слагаемые, т. е. привести неравенство к виду (5.4).

2) разделить обе части неравенства на коэффициент при переменной, если он не равен нулю; если коэффициент при переменной равен нулю, т. е. получено одно из неравенств $0 \cdot x > B$ или $0 \cdot x < B$, то нужно выяснить, является ли неравенство верным при любом значении переменной или оно решений не имеет.

5.4. Системы линейных неравенств. Неравенства, сводящиеся к системам линейных неравенств

Будем рассматривать системы линейных неравенств вида

$$\begin{cases} ax + b > 0; \\ cx + d > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} ax + b > 0; \\ cx + d < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x + b_1 > 0; \\ a_2x + b_2 < 0; \\ a_3x + b_3 > 0 \end{cases} \text{ и т. п.}$$

Решением системы неравенств называют такое значение переменной, при котором каждое из них обращается в верное числовое неравенство.

К простейшим системам линейных неравенств относятся следующие:

$$\begin{cases} x > a; \\ x < b, \end{cases} \quad \begin{cases} x > a; \\ x > b, \end{cases} \quad \begin{cases} x < a; \\ x < b. \end{cases} \qquad (5.5)$$

Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$4x-18>0;\ 5x+16>0;\ 3x-20<0$$

Данная система равносильна системе

$$x>9/2;\ x>-16/5;\ x<20/3,$$

которая в свою очередь равносильна системе двух неравенств $x>9/2$, $x<20/3$, решением которой является интервал $(9/2;\ 20/3)$. Итак, решением исходной системы является интервал $(9/2;\ 20/3)$.

Пример 2. Решить двойное неравенство $-5<3-4x<7$.

Двойное неравенство представляет собой иную запись системы неравенств $3-4x>-5$, $3-4x<7\Leftrightarrow 8>4x$, $-4x<4\Leftrightarrow x<2$, $x>-1$. Решением данного неравенства является интервал $(-1;\ 2)$.

К системам линейных неравенств сводится решение неравенств вида

$$(ax+b)(cx+d)>0,\ (ax+b)(cx+d)<0; \tag{5.6}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}>0,\ \frac{ax+b}{cx+d}<0, \tag{5.7}$$

где a, b, c, d — действительные числа.

Например, первое из неравенств (5.6) верно при тех и только тех значениях переменной x, которые удовлетворяют хотя бы одной из систем неравенств:

$$\begin{cases} ax+b>0; \\ cx+d>0, \end{cases} \quad \begin{cases} ax+b<0; \\ cx+d<0, \end{cases} \tag{5.8}$$

т. е. удовлетворяют совокупности систем неравенств (5.8), так как произведение двух множителей положительно тогда и только тогда, когда множители имеют один знак, т. е. оба положительны или оба отрицательны. Второе из неравенств (5.6) верно при тех и только тех значениях переменной, которые удовлетворяют совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} ax+b>0; \\ cx+d<0, \end{cases} \quad \begin{cases} ax+b<0; \\ cx+d>0, \end{cases} \tag{5.9}$$

так как произведение двух множителей отрицательно тогда и только тогда, когда множители имеют разные знаки. Значение дроби положительно тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, поэтому первое из неравенств (5.7) верно при тех и только тех значениях переменной x, которые удовлетворяют хотя бы одной из систем (5.8). Значение дроби отрицательно тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель имеют разные знаки. Значит, второе из неравенств (5.7) верно при тех и только тех значениях переменной, которые удовлетворяют хотя бы одной из систем (5.9)

Пример 3. Решить неравенство $(3x-7)(2x+19)>0$.

Решением заданного неравенства будут те значения переменной x, которые удовлетворяют хотя бы одной из систем неравенств:

$$\begin{cases} 3x-7>0; \\ 2x+19>0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-7<0; \\ 2x+19<0. \end{cases}$$

Первая из этих систем равносильна системе $x>7/3$, $x>-19/2$ и имеет решение $x>7/3$. Вторая система равносильна системе $x>7/3$, $x<-19/2$ и имеет решение $x<-19/2$. Решением заданной системы будут все x, принадлежащие промежутку $(-\infty;\ -19/2)$ или $(7/3;\ +\infty)$.

5.5. Неравенства второй степени с одной переменной

Неравенством с одной переменной второй степени называют неравенство вида

$$ax^2+bx+c>0 \text{ или } ax^2+bx+c<0. \qquad (5.10)$$

При решении неравенств (5.10) используют свойства квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ и особенности расположения ее графика в зависимости от коэффициента a и дискриминанта $D=b^2-4ac$.

Рассмотрим отдельно случаи, когда $a>0$ и $a<0$.

При $a>0$ графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является «восходящая» парабола (ветви параболы направлены вверх). При $D>0$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 (будем считать, что $x_1<x_2$) и график функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2. Следовательно, $ax^2+bx+c>0$ при $x<x_1$ или $x>x_2$; $ax^2+bx+c<0$ при $x_1<x<x_2$ (рис. 5.2, *а*). При $D=0$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два равных действительных корня $x_1=x_2$. Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, расположенная выше оси Ox и касающаяся ее в точке $x=x_1$. В этом случае $ax^2+bx+c>0$ при всех x, кроме $x=x_1$, неравенство $ax^2+bx+c<0$ решений не имеет (рис. 5.2, *б*). При $D<0$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. График функции $y=ax^2+bx+c$ не пересекает ось Ox и расположен целиком выше оси абсцисс (рис. 5.2, *в*). В этом случае $ax^2+bx+c>0$ при всех x, решением данного неравенства будет бесконечный промежуток $(-\infty;\ +\infty)$. Неравенство $ax^2+bx+c<0$ решений не имеет.

При $a<0$ графиком функции $y=ax^2+bx+c$ являет-

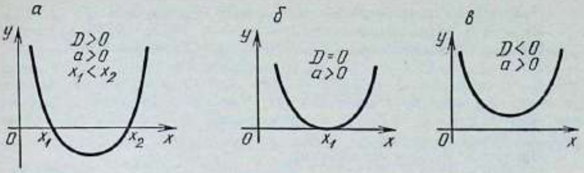


Рис. 5.2

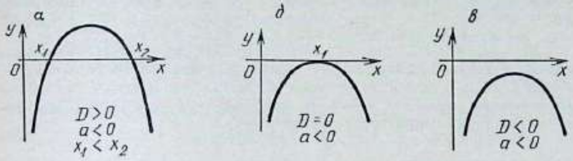


Рис 5.3

ся «нисходящая» парабола (ветви параболы направлены вниз).

Если $D > 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в двух различных точках x_1 и x_2, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(x_1 < x_2)$. В этом случае $ax^2 + bx + c < 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$, $ax^2 + bx + c > 0$ при $x_1 < x < x_2$.

Если $D = 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox в точке x_1, где x_1 — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(x_1 = x_2)$, все остальные точки параболы лежат ниже этой оси. Следовательно, $ax^2 + bx + c < 0$ при всех $x \neq x_1$. Решением неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ являются все действительные числа, кроме $x = x_1$. Неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ решений не имеет.

Если $D < 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось Ox, он расположен целиком ниже этой оси. Таким образом, $ax^2 + bx + c < 0$ при любых x; решением неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ служит интервал $(-\infty, +\infty)$. Неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ решений не имеет.

Рассмотренные случаи проиллюстрированы рис. 5.3, *а*—*в*.

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 9x + 14 > 0$.

В данном случае $a = 1$, $b = -9$, $c = 14$, $a > 0$. $D = b^2 - 4ac = 25 > 0$. Уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$ имеет два различных действительных корня $x_1 = 2$, $x_2 = 7$. В точках $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ график функции

$y=x^2-9x+14$ пересекает ось Ox; $y>0$ при $x<2$ и $x>7$, т. е. $x^2-9x+14>0$ при $x<2$ и $x>7$.

Пример 2. Решить неравенство $2x^2-5x+7<0$.

Так как $D=25-56<0$, то уравнение $2x^2-5x+7=0$ не имеет действительных корней. График $y=2x^2-5x+7$ не пересекает ось Ox, он целиком расположен выше оси Ox, т. е. $y>0$ при всех x. Значит, при всех x $2x^2-5x+7>0$. Следовательно, неравенство $2x^2-5x+7<0$ решений не имеет.

Пример 3. Решить неравенство $x^2-7x+12<0$.

Поскольку $D=49-48>0$, уравнение $x^2-7x+12=0$ имеет два различных действительных корня $x_1=3$, $x_2=4$. График функции $y=x^2-7x+12$ пересекает ось Ox в точках $x_1=3$, $x_2=4$, причем $y<0$ при $3<x<4$. Следовательно, $x^2-7x+12<0$ при $3<x<4$.

Пример 4. Решить неравенство $9x^2-12x+4>0$.

Уравнение $9x^2-12x+4=0$ имеет два равных действительных корня $x_1=x_2=2/3$, поскольку $D=0$. График функции $y=9x^2-12x+4$ касается оси Ox в точке $x=2/3$. Все остальные точки графика расположены выше этой оси, т. е. $y>0$ при всех $x\neq 2/3$. Итак, $9x^2-12x+4>0$ при всех x, кроме $x=2/3$.

5.6. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Рассмотрим неравенство

$$|x|<b. \tag{5.11}$$

Если $b>0$, то, согласно определению модуля действительного числа, неравенству (5.11) удовлетворяют все значения x из интервала $(-b;\ b)$ (рис. 5.4).

Если $b\leqslant 0$, то неравенство (5.11) решений не имеет.

Рассмотрим неравенство

$$|x-a|<b. \tag{5.12}$$

Обозначим разность $x-a$ через u, т. е. $u=x-a$. Тогда неравенство (5.12) примет вид $|u|<b$. Это неравенство вида (5.11), поэтому при $b>0$ получаем $-b<u<b$ или $-b<x-a<b$. Прибавляя a ко всем частям последнего двойного неравенства, находим $a-b<x<a+b$. Итак, при $b>0$ решения неравенства (5.12) образуют интервал $(a-b;\ a+b)$ (рис. 5.5).

Если $b\leqslant 0$, то неравенство (5.12) решений не имеет.

Рассмотрим неравенство

$$|x|>b. \tag{5.13}$$

Из определения модуля действительного числа следует, что при $b\geqslant 0$ неравенству (5.13) удовлетворяют все значения x, для которых $-x>b$ или $x>b$, т. е. $x<-b$ или $x>b$.

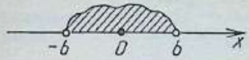


Рис. 5.4

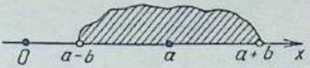


Рис. 5.5

Решением неравенства (5.13) является объединение двух интервалов $(-\infty;\ -b)$ и $(b;\ +\infty)$ (рис. 5.6).

Если $b<0$, то неравенству (5.13) удовлетворяет любое значение x, его решение — множество всех действительных чисел, т. е. промежуток $-\infty;\ +\infty)$.

Рассмотрим неравенство

$$|x-a|>b. \tag{5.14}$$

Из определения модуля действительного числа следует, что при $b \geqslant 0$ неравенству (5.14) удовлетворяют те

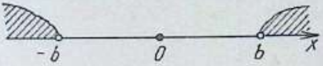


Рис. 5.6

значения x, для которых $-(x-a)>b$ или $x-a>b$, т. е. $x-a<-b$ или $x-a>b$, откуда

$$x<a-b \text{ или } x>a+b. \tag{5.15}$$

Первое из неравенств (5.15) определяет интервал $(-\infty;\ a-b)$, а второе — интервал $(a+b;\ +\infty)$. Объединение этих двух интервалов (рис. 5.7) является решением неравенства (5.14).

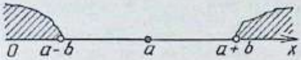


Рис. 5.7

Если $b<0$, то неравенству (5.14) удовлетворяет любое значение x; решение этого неравенства в данном случае — множество всех действительных чисел, т. е. промежуток $(-\infty;\ +\infty)$.

Пример 1. Решить неравенство $|x-1|<7$

Это неравенство вида (5.12). Ему удовлетворяют те значения x, для которых $-7<x-1<7$ или $-6<x<8$. Решением неравенства является интервал $(-6;\ 8)$.

Пример 2. Решить неравенство $|2x-1|>5$.

Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств $2x-1>5$ и $2x-1<-5$, откуда $x>3$ и $x<-2$. Решение неравенства: $(-\infty;\ -2)\cup(3;\ +\infty)$.

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, следует иметь в виду, что на множестве определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

1) неравенство $|f(x)|<a$, если $a>0$, равносильно двойному неравенству $-a<f(x)<a$;

2) неравенство $|f(x)|<a$, если $a\leqslant 0$, решений не имеет;

3) неравенство $|f(x)|>a$, если $a>0$, равносильно совокупности двух неравенств $f(x)>a$ и $f(x)<-a$;

4) неравенство $|f(x)|>a$, где $a\leqslant 0$, справедливо при всех значениях x, входящих в область определения $f(x)$;

5) неравенство $|f(x)|>\varphi(x)$ равносильно совокупности двух неравенств $f(x)>\varphi(x)$ и $f(x)<-\varphi(x)$;

6) неравенство $|f(x)|<\varphi(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>-\varphi(x); \\ f(x)<\varphi(x). \end{cases}$$

Пример 3. Решить неравенство $|x-2|>x+3$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств $x-2>x+3$ и $x-2<-(x+3)$, откуда $0>5$ и $x<-1/2$. Так как неравенство $0>5$ не имеет смысла, то $x<-1/2$ — решение неравенства.

Пример 4. Решить неравенство $|x-1|+|x-2|>3+x$.

Это неравенство можно решить с помощью «раскрытия» модулей на непересекающихся промежутках.

Отметим на числовой прямой значения x, при которых выражения $x-1$ и $x-2$, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль, т. е. $x=1$ и $x=2$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $x\geqslant 2$, $1\leqslant x<2$, $x<1$ (рис. 5.8).

Рассматривая x последовательно на каждом из промежутков, получаем, что данное неравенство равносильно совокупности трех систем неравенств:

$$\begin{cases} x\geqslant 2; \\ (x-1)+(x-2)>3+x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1; \\ (1-x)+(2-x)>3+x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\leqslant x<2; \\ (x-1)+(2-x)>3+x, \end{cases}$$

Решением первой системы служат все $x>6$, вторая система несовместна, множество решений третьей системы состоит из всех $x<0$. Значит, решением данного неравенства являются два промежутка: $(-\infty,\ 0)$, $(6;\ +\infty)$.

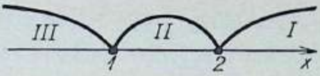


Рис. 5.8

Задачи

Решите неравенства:

1. $|x-5|<9$.
2. $|x+2| \leqslant 2x^2-9x+9$.
3. $2|x+1|>x+4$.
4. $|x+2|+|x-3|>x+5$.
5. $|5-2x|+|3x-4| \geqslant 2x+3$.
6. $|2x+5|-|3x-4| \leqslant 2x-4$.
7. $|x^2-5x|<6$.
8. $x^2-7x+12<|x-4|$.
9. $|x-6|>x^2-5x+9$.
10. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.

Ответы. **1.** $(-4;\ 14)$. **2.** $\left(-\infty;\ \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$. **3.** $(-\infty;\ -2);\ (2;\ +\infty)$. **4.** $(-\infty;\ 0);\ (6;\ +\infty)$. **5.** $(-\infty;\ 6/7);\ (4;\ +\infty)$. **6.** $(-5;\ -5/3);\ (13/3;\ +\infty)$. **7.** $(-1;\ 2);\ (3;\ 6)$. **8.** $(2;\ 4)$. **9.** $(1;\ 3)$. **10.** $(-7;\ -2);\ (3;\ 4)$.

5.7. Дробно-рациональные неравенства

Дробно-рациональным неравенством называют неравенство вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)}>k$ $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}<k\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены степени n и m; k — известное число, т. е. левая часть представляет отношение двух многочленов, а правая — некоторое известное число или нуль. Очевидно, что множество решений дробно-рационального неравенства не должно содержать корней многочлена $\varphi(x)$.

С помощью теоремы, приведенной ниже, дробно-рациональное неравенство можно заменить равносильным ему целым неравенством.

Теорема 5.10. *Неравенство* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}>0$ *равносильно неравенству* $f(x)\varphi(x)>0$, *если* $\varphi(x)\neq 0$, *а неравенство* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}<0$ — *неравенству* $f(x)\varphi(x)<0$.

▷ Действительно, если $\varphi(x)\neq 0$, то, умножив числитель и знаменатель левой части неравенства $\frac{f(x)}{\varphi(x)}>0$ на $\varphi(x)$, получим неравенство

$$\frac{f(x)\varphi(x)}{(\varphi(x))^2}>0, \qquad (5.16)$$

равносильное неравенству $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ (выполнили тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства).

Учитывая, что $(\varphi(x))^2 > 0$ при всех x, умножим обе части неравенства (5.16) на $(\varphi(x))^2$. В результате получим неравенство $f(x)\varphi(x) > 0$, равносильное данному $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$. ◁

(Вторая часть теоремы доказывается аналогично).

При решении дробно-рациональных неравенств удобно пользоваться следующей схемой:

1) перенести все члены неравенства $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > k$ в левую часть: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} - k > 0$;

2) привести в левой части полученного неравенства все члены к общему знаменателю. В результате получим неравенство вида $\frac{g(x)}{\varphi(x)} > 0$;

3) заменить дробное неравенство $\frac{g(x)}{\varphi(x)} > 0$ целым, т. е. равносильным ему неравенством $g(x)\varphi(x) > 0$;

4) разложить левую часть полученного неравенства (если это возможно) на простейшие множители, т. е. представить неравенство в виде $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) > 0$ (или < 0), где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные действительные числа — корни множителей.

5) использовать метод интервалов для решения полученного неравенства.

Замечание. Если числитель и знаменатель дробно-рационального неравенства $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > k$ $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} < k\right)$ являются линейными функциями одной переменной, то его называют *дробно-линейным неравенством*.

Неравенство $\frac{ax+b}{cx+d} > k$ $\left(\frac{ax+b}{cx+d} < k\right)$, где a, b, c, d — заданные числа, причем $c \neq 0$ — дробно-линейное неравенство.

Пример 1. Решить неравенство $\frac{x-6}{2x-1} < 0$.

Заменим дробно-линейное неравенство равносильным ему целым неравенством $(x-6)(2x-1) < 0$.

Применив метод интервалов, получим множество решений данного неравенства: $\frac{1}{2} < x < 6$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} < 1$

Применим приведенную выше схему решения дробно-линейного неравенства: $\frac{1}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2-x)(x-1) < 0 \Leftrightarrow (2-x)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ и $x < 1$.

Получили, что $x > 2$ и $x < 1$ образуют множество решений данного неравенства.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^2-7x+12}{x^2-11x+30} > 0$.

Заменим данное дробно-рациональное неравенство целым

$$(x^2-7x+12)(x^2-11x+30) > 0$$

и разложим его левую часть на простейшие множители

$$(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) > 0.$$

Применим метод интервалов: выбираем те промежутки (рис. 5.9) где мы поставили плюс. Значения переменной x из этих промежутков $x > 6$, $4 < x < 5$, $x < 3$ и образуют множество решений исходного неравенства.

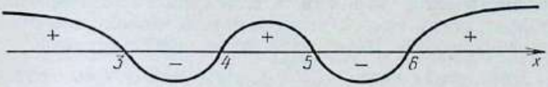


Рис. 5.9

Пример 4. Решить неравенство $\frac{4x^3-3x+1}{x^2(x^2-4)} > 0$.

Заменим дробно-рациональное неравенство целым:

$$(4x^3-3x+1)(x^2-4)x^2 > 0.$$

Поскольку $4x^3-3x+1 = (x-1)(4x^2+4x+1) = (x-1)(2x+1)^2$, то имеем $(x-1)(2x+1)^2(x^2-4)x^2 > 0$.

Так как $x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$, а $(2x+1)^2 > 0$ при всех $x \neq -1/2$, то неравенство $(x-1)(x^2-4) > 0$ равносильно последнему неравенству при всех x, кроме $x = 0$ и $x = -1/2$.

Решением неравенства $(x-1)(x-2)(x+2) > 0$ является объединение промежутков $-2 < x < 1$ и $x > 2$.

Решением исходного неравенства будет объединение таких промежутков: $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 2$.

Задачи

Решите неравенства:

1. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.
2. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.
3. $1 + \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}$.
4. $\frac{37-2x}{3} + 9 \leqslant \frac{3x-8}{4} - x$.
5. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$.
6. $\frac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3} < 0$.

Ответы. 1. (1; 3); (3; 5). 2. $-4{,}5$; -2); (3; $+\infty$). 3. $(-\infty;\ 2-\sqrt{3})$; (1; 3); $(2+\sqrt{3};\ +\infty)$. 4. (56; $+\infty$). 5. $(-\infty;\ -2)$; $(-1;\ 0)$. 6. $(-\infty;\ -1)$; (1,5; 3); (4; $+\infty$).

5.8. Иррациональные неравенства

Рассмотрим иррациональные неравенства вида

$$\sqrt{f(x)}<\varphi(x);\ \sqrt{f(x)}>\varphi(x).$$

При решении иррациональных неравенств применяется преобразование возведения в степень обеих его частей, которое может привести к появлению посторонних решений. Следует также помнить, что рассматриваются только арифметические корни и что операция возведения в квадрат обеих частей неравенства возможна лишь при условии, что обе части неравенства неотрицательны.

Для неравенства $\sqrt{f(x)}<\varphi(x)$ необходимо, чтобы $f(x)\geqslant 0$ и $\varphi(x)>0$. С учетом этих условий после возведения в квадрат обеих частей неравенства получим систему, равносильную данному неравенству:

$$\sqrt{f(x)}<\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geqslant 0;\\ \varphi(x)>0;\\ f(x)<(\varphi(x))^2.\end{cases}$$

О знаке правой части неравенства $\sqrt{f(x)}>\varphi(x)$ ничего определенного сказать нельзя, поэтому следует рассматривать отдельно два случая: 1) $\varphi(x)<0$, 2) $\varphi(x)\geqslant 0$. В первом случае неравенство $\sqrt{f(x)}>\varphi(x)$ выполняется для всех x, таких, что $f(x)\geqslant 0$ и $\varphi(x)<0$. Во втором случае, учитывая, что обе части неравенства неотрицательные, возводим их в квадрат и получаем систему, равносильную данному неравенству.

Таким образом, имеем

$$\sqrt{f(x)}>\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ \varphi(x)<0;\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\geqslant 0;\\ \varphi(x)\geqslant 0;\\ f(x>(\varphi(x))^2\end{cases}\end{array}\right.$$

Для получения множества решений неравенства $\sqrt{f(x)} > \varphi(x)$ следует объединить все решения каждой системы совокупности.

Заметим, что во второй системе первое неравенство можно опустить — оно следует из третьего неравенства этой системы.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 7 - x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0; \\ 7-x > 0; \\ x-1 < 49 - 14x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1; \\ x < 7; \\ x^2 - 15x + 50 > 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $x^2 - 15x + 50 > 0$ служит объединение промежутков $x > 10$, $x < 5$, поэтому множеством решений данного неравенства является полуинтервал $[1; 5)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x+2} > x$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств, так как правая часть неравенства может быть и неотрицательной и отрицательной:

$$\sqrt{x+2} > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geqslant 0; \\ x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \geqslant 0; \\ x \geqslant 0; \\ x+2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -2; \\ x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -2; \\ x \geqslant 0; \\ -1 < x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 0; \\ 0 \leqslant x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 2.$$

Итак, решением данного неравенства служит полуинтервал $[-2; 2)$.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{1+2x} - \sqrt{x+4} < 1$.

Данное неравенство удобно преобразовать к виду $\sqrt{1+2x} < 1 + \sqrt{x+4}$ (в этом неравенстве обе части неотрицательны). Полученное неравенство (оно равносильно данному) равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 1+2x \geqslant 0; \\ x+4 \geqslant 0; \\ 1+2x < 1 + 2\sqrt{x+4} + \\ \quad + x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2}; \\ 2\sqrt{x+4} > x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2}; \\ x - 4 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2}; \\ x - 4 \geqslant 0; \\ 4(x+4) > x^2 - \\ \quad - 8x + 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 4; \\ \begin{cases} x \geqslant 4; \\ x^2 - 12x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 4; \\ \begin{cases} x \geqslant 4; \\ 0 < x < 12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 4; \\ 4 \leqslant x < 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 12.$$

Множество решений этого неравенства образует полуинтервал $[-0{,}5;\ 12)$.

Задачи

Решите неравенства:

1. $3\sqrt{6+x-x^2} > 4x-2$.
2. $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$.
3. $\sqrt{5x-x^2-6} < 3+2x$.
4. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.
5. $\sqrt{x+6} < x-6$.
6. $\sqrt{x+7} > 2x-1$.
7. $\sqrt{6-x-x^2} < \sqrt{3x+6}$.
8. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1/2$.
9. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$.
10. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.
11. $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{3x+1} \geqslant 0$.
12. $\dfrac{\sqrt{3x+11}}{4+x} \leqslant 0$.

Ответы. **1.** $[-2;\ 2)$. **2.** $\left[-5;\ \dfrac{-9-\sqrt{61}}{8}\right)$. **3.** $[2;\ 3)$. **4.** $(-\infty;\ -2]$; $\left[5;\ 5\dfrac{9}{13}\right)$. **5.** $(10;\ +\infty)$. **6.** $[-7;\ 2)$. **7.** $(0;\ 2]$. **9.** $(-\infty;\ 2)$; $(14;\ +\infty)$. **10.** $[2\sqrt{21}/3;\ +\infty)$.

5.9. Показательные неравенства

При решении показательных неравенств следует помнить, что функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ является возрастающей, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$. Поэтому неравенство вида $a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}$ на пересечении областей определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $a>1$ равносильно неравенству $f(x)>\varphi(x)$, а при $0<a<1$ — неравенству $f(x)<\varphi(x)$. Таким же образом

$$(g(x))^{f(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)>1; \\ f(x)>\varphi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0<g(x)<1; \\ f(x)<\varphi(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Если имеем неравенство вида $a^{f(x)}>b$ $(a>0)$, то при $b\leqslant 0$ решением неравенства будет любое $x\in D(f)$; если же $b>0$, то данное неравенство равносильно неравенству $f(x)>\log_a b$, когда $a>1$, и неравенству $f(x)<\log_a b$, когда $0 < a < 1$. Если $a=1$, то получаем числовое неравенство $1 < b$.

Неравенство вида $a^{f(x)} < b$ $(a > 0)$ при $b \leqslant 0$ решений не имеет, а при $b > 0$ равносильно совокупности систем неравенств:

$$a^{f(x)} < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1; \\ f(x) < \log_a b; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство вида $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + c > 0$ (или < 0) с помощью подстановки $a^{f(x)} = y > 0$ сводится к квадратному неравенству $Ay^2 + By + c > 0$ (или < 0) и получающейся в результате подстановки совокупности неравенств: $a^{f(x)} > y_1$, $a^{f(x)} < y_2$ или системы неравенств:

$$\begin{cases} a^{f(x)} < y_1; \\ a^{f(x)} > y_2, \end{cases}$$

где $y_1 > y_2$ — корни квадратного трехчлена $Ay^2 + By + c$.

Рассмотрим решение показательных неравенств на примерах.

Пример 1. Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-7} > \left(\frac{5}{2}\right)^{7x-3}$.

Заметим, что $\frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$, и перепишем данное неравенство в виде $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-7} > \left(\frac{2}{5}\right)^{3-7x}$.

Учитывая, что основание $\frac{2}{5} < 1$, получаем $2x - 7 < 3 - 7x$ или $9x < 10$, откуда $x < 10/9$.

Итак, $(-\infty;\ 10/9)$ — множество решений данного неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leqslant 5 \cdot 36^x$

Разделив обе части неравенства на $36^x > 0$, получим

$$3\left(\frac{4}{9}\right)^x + 2\left(\frac{9}{4}\right)^x \leqslant 5.$$

Положив $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, будем иметь $3y + \frac{2}{y} \leqslant 5$ или $3y^2 - 5y + 2 \leqslant 0$.

Решая квадратное неравенство, получаем $\frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 1$, откуда $\frac{2}{3} \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^x \leqslant 1$. Двойное неравенство $\frac{2}{3} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^0$, поскольку $\frac{2}{3} < 1$, равносильно двойному неравенству $0 \leqslant 2x \leqslant 1$, откуда

$0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Итак, решением исходного неравенства служит отрезок $[0;\ 0{,}5]$.

Пример 3. Решить неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.

Это неравенство равносильно следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2>1; \\ x^2-6x+8>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-2<1; \\ x^2-6x+8<0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3; \\ \left[\begin{array}{l} x>4; \\ x<2; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x<3; \\ 2<x<4 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4; \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Таким образом, $x>4$ и $2<x<3$ образуют множество решений данного неравенства.

Задачи

Решите неравенства:

1. $2^{3x-2}<2^{x+3}$. 2. $7^{|x|-3}>1$. 3. $4^x<2^{x+1}+3$.

4. $-1 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x<2$. 5. $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2^{3-x}+9$. 6. $x^{3x+1}>x^x$.

7. $(1{,}25)^{1-x}<(0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$. 8. $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2} \leqslant 9$.
9. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$. 10. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1$.

Ответы. 1. $(-\infty;\ 5/2)$. 2. $(-\infty;\ -3)$; $(3;\ +\infty)$. 3. $(-\infty;\ \log_2 3)$. 4. $(\log_{1/3} 2;\ +\infty)$. 5. $(-2\log_2 3;\ +\infty)$. 6. $(1;\ +\infty)$. 7. $(25;\ +\infty)$. 8. $(-\infty;\ 2]$. 9. $(0;\ +\infty)$. 10. $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$; $(1;\ +\infty)$.

5.10. Логарифмические неравенства

Решая логарифмические неравенства, следует обращать внимание на то, что при основании, большем единицы, логарифмическая функция монотонно возрастает, а при положительном основании, меньшем единицы,— монотонно убывает. В связи с этим при $a>1$ неравенство $\log_a f(x)<\log_a \varphi(x)$ равносильно неравенству $f(x)<\varphi(x)$, а при $0<a<1$ — равносильно неравенству $f(x)>\varphi(x)$ в области определения неравенства.

Аналогично

$$\log_a f(x)>\log_a \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1; \\ f(x)>\varphi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1; \\ f(x)<\varphi(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенства вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > 0 \text{ (или } < 0); \ \log_{\varphi(x)} f(x) > k \text{ (или } < k),$$

где k — некоторое число.

Решение каждого неравенства сводится к решению совокупности двух систем неравенств, равносильной данному неравенству в области его определения.

Используя свойство логарифмов о том, что логарифм положителен, если логарифмируемое число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, и логарифм отрицателен, если они лежат по разные стороны от единицы, можем записать, что неравенство $\log_{\varphi(x)} f(x) > 0$ равносильно следующей совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 1; \\ \varphi(x) > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < f(x) < 1; \\ 0 < \varphi(x) < 1, \end{cases}$$

а неравенство

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1; \\ 0 < \varphi(x) < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1; \\ \varphi(x) > 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Неравенство $\log_{\varphi(x)} f(x) > k$ можно заменить неравенством $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} (\varphi(x))^k$ и использовать свойство монотонности логарифмической функции. Поэтому неравенство

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ f(x) > (\varphi(x))^k; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1; \\ 0 < f(x) < (\varphi(x))^k. \end{cases} \end{array} \right.$$

Неравенство

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ 0 < f(x) < (\varphi(x))^k; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1; \\ f(x) > (\varphi(x))^k. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_{x+7} 25 > 2$.

Это неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 7 > 1; \\ 25 > (x+7)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x + 7 < 1; \\ 25 < (x+7)^2 \end{cases}$$

Решение первой системы дает $-6 < x < 2$. Вторая система не имеет решений. Множество решений данного неравенства — промежуток $(-6;\ 2)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_8(x^2-4x+3) < 1$.

Учитывая, что основание логарифма $8 > 1$, заключаем, что данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0; \\ x^2-4x+3<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3; \\ x<1; \end{array}\right. \\ -1<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x<5; \\ -1<x<1. \end{array}\right.$$

Данное неравенство выполняется при $3 < x < 5$ или $-1 < x < 1$

Пример 3. Решить неравенство $\log_{0,2}(x^2+6x+8) > \log_{0,2}(10+5x)$.

Поскольку основание логарифмов $0,2 < 1$, то данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+6x+8>0; \\ 10+5x>0; \\ x^2+6x+8<10+5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4; \\ x>-2; \end{array}\right. \\ x>-2; \\ -2<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<1.$$

Множество решений неравенства — промежуток $(-2;\ 1)$.

Задачи

Решите неравенства:

1. $\log_3 x - \log_3^2 x \leqslant \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 4$

2. $\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2} < 0.$

3. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0.$

4. $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}.$

5. $\log_x(16-6x-x^2) > 1.$

6. $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1.$

7. $\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4.$

8. $\log_2^2 x + 3\log_2 x \geqslant \frac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 16.$

Ответы. **1.** $(0;\ 1/3)$; $(9;\ +\infty)$. **2.** $(4;\ 6)$. **3.** $(1;\ +\infty)$. **4.** $(3;\ 4)$; $(4;\ +\infty)$. **5.** $\left(1;\ \frac{-7\pm\sqrt{113}}{2}\right)$. **6.** $(0;\ 1/2)$; $(1;\ 2)$; $(3;\ 6)$. **7.** $(1;3)$. **8.** $(-\infty;\ 1/16]$; $[2;\ +\infty)$.

5.11. Неравенства с двумя переменными

Неравенством с двумя переменными x и y называют неравенство вида

$$f(x;\ y) < \varphi(x;\ y) \text{ (или } f(x;\ y) > \varphi(x;\ y)), \qquad (5.17)$$

где $f(x;\ y)$ и $\varphi(x;\ y)$ — выражения с указанными переменными.

Решением неравенства (5.17) называют упорядоченную пару чисел $(x_0;\ y_0)$, при подстановке которых в это неравенство получаем верное числовое неравенство. В этом случае говорят, что пара чисел $(x;\ y)$ удовлетворяет данному неравенству. Например, упорядоченная пара чисел (3; 4) является решением неравенства $2x+3y+7<3x+4y+5$, ибо $2\cdot3+3\cdot4+7<3\cdot3+4\cdot4+5$; $25<30$.

Неравенство (5.17) можно записать в виде

$$F(x;\ y)<0.$$

Решить неравенство — значит найти множество всех его решений. Изображение множества решений неравенства с двумя переменными есть некоторая фигура на плоскости.

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} f_1(x;\ y)<\varphi_1(x;\ y); \\ f_2(x;\ y)<\varphi_2(x;\ y) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F_1(x;\ y)<0; \\ F_2(x;\ y)<0. \end{cases}$$

Решением системы неравенств называют упорядоченную пару чисел $(x_0;\ y_0)$, которая удовлетворяет каждому неравенству данной системы.

Пример 1. Выяснить, что представляет собой множество решений неравенства $y>2x+1$.

Как известно, графиком функции $y=2x+1$ будет прямая. Выберем на этой прямой точку A (рис. 5.10) и проведем через нее прямую l, параллельную оси Oy. Координаты точки A удовлетворяют уравнению $y=2x+1$. У любой точки B, расположенной на прямой l выше точки A, абсцисса та же, что и у точки A, а ордината больше, чем ордината точки A. Значит, ее координаты удовлетворяют неравенству $y>2x+1$. Координаты точки A и любой точки C, лежащей на прямой l ниже точки A, этому неравенству не удовлетворяют. Вообще, неравенству $y>2x+1$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек плоскости, которые расположены выше прямой $y=2x+1$. Решением неравенства $y=2x+1$ будет открытая полуплоскость, расположенная выше прямой $y=2x+1$ (рис. 5.10).

Замечание 1. Аналогично можно показать, что множество решений неравенства $y < 2x + 1$ есть открытая полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = 2x + 1$.

Замечание 2. Прямая $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, разбивает множество точек плоскости, не принадлежащих этой прямой, на две открытые полуплоскости, одна из которых задается неравенством $y > kx + b$, а другая — неравенством $y < kx + b$.

Пример 2. Множество решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ есть круг радиуса R с центром в начале координат.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка указанного круга (рис. 5.11). Обозначим $|OM_0| = R_0$, тогда $R_0 \leqslant R$. Поскольку $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, то неравенство $R_0 \leqslant R$ принимает вид $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leqslant R$ или $x_0^2 + y_0^2 \leqslant R^2$. Значит, координаты точки M_0 удовлетворяют данному неравенству.

Замечание 3. Неравенству $x^2 + y^2 > R^2$ удовлетворяют координаты всех точек $N_1(x_1; y_1)$ плоскости, лежащих вне окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 5.12).

Пример 3. Неравенству $y > x^2$ удовлетворяют координаты тех точек плоскости, которые расположены «внутри» параболы $y = x^2$ (рис. 5.13).

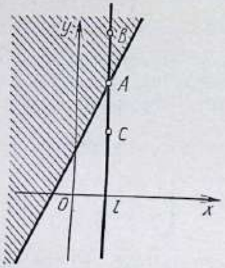


Рис. 5.10

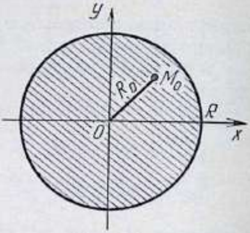


Рис. 5.11

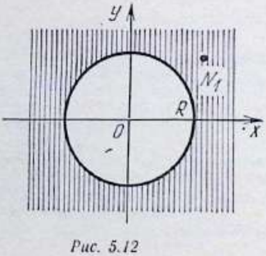


Рис. 5.12

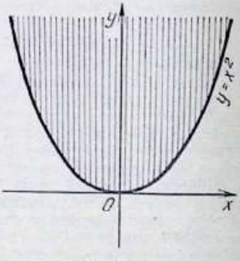


Рис. 5.13

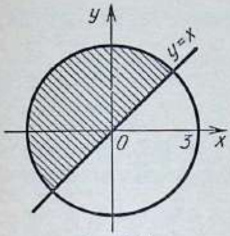


Рис. 5.14

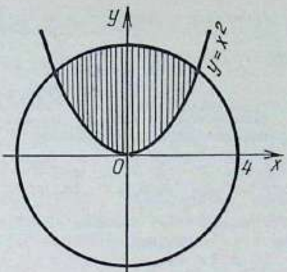


Рис. 5.15

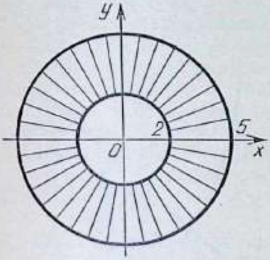


Рис. 5.16

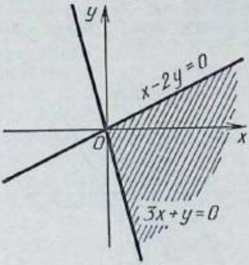


Рис. 5.17

Пример 4. Множество решений системы неравенств

$$x^2 + y^2 < 9; \ y > x$$

представляет собой совокупность точек плоскости, лежащих внутри круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 9$, и выше прямой $y = x$ (рис. 5.14).

Пример 5. Системе неравенств $x^2 + y^2 \leqslant 16$, $y \geqslant x^2$ удовлетворяют координаты всех точек круга $x^2 + y^2 \leqslant 16$, лежащих «внутри» параболы $y = x^2$ и на самой параболе (рис. 5.15).

Пример 6. Решением системы неравенств $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25$ является кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиусов $R_1 = 2$, $R_2 = 5$ с центром в начале координат (рис. 5.16).

Пример 7. Множество решений системы неравенств $3x + y \geqslant 0$, $x - 2y \geqslant 0$ представляет собой угол — пересечение двух полуплоскостей, каждая из которых определяется одним из данных неравенств (рис. 5.17).

Пример 8. Система неравенств $y \geqslant 2x - 3$ и $y \leqslant 2x + 1$ определяет полосу, ограниченную параллельными прямыми $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 1$ (рис. 5.18).

Пример 9. Решением системы неравенств $y \geqslant x^2 + 1$, $x + y \leqslant 3$ является параболический сегмент (рис. 5.19).

Пример 10. Решением системы трех неравенств:

$$y<\frac{1}{3}x+2;\ \ y>-\frac{1}{2}x+3;\ \ y>2x-4$$

является множество внутренних точек треугольника ABC (рис. 5.20)

Задачи

Изобразите на чертеже множество решений каждого из данных неравенств с двумя переменными:

1. $x>0$. 2. $y\leqslant 0$. 3. $x>-1$. 4. $y<-2$. 5. $x\geqslant 3$. 6. $y\leqslant 4$. 7. $y<2x$. 8. $y\geqslant 3x$. 9. $y<3x-1$. 10. $y\geqslant -4x+5$. 11. $x<3y$. 12. $x>-2y$. 13. $y>x^2$. 14. $y\leqslant x^2+3$. 15. $xy>6$. 16. $xy<-12$. 17. $(x-2)^2+(y-1)^2<9$. 18. $(x+3)^2+(y-4)^2>25$.

Изобразите на чертеже множество решений каждой системы неравенств с двумя переменными.

19. $x<0$; $y<0$. 20. $x>2$; $y<3$. 21. $x\leqslant 1$, $y\geqslant 4$. 22. $y>3x+2$; $y<3x+5$. 23. $y>2x+3$; $y<2x+1$. 24. $y\geqslant 4x-5$; $y\leqslant 4x-1$ 25. $x^2+y^2<9$; $y>-x$. 26. $x^2+y^2<16$; $y<x^2+1$. 27. $xy>6$; $x+y>7$ 28. $y>2x+1$, $y<2x-1$; $y>4x$. 29. $x+y+2\geqslant 0$; $x+y-1\leqslant 0$; $x+2\geqslant 0$; $x-1\leqslant 0$ 30. $x-y+1\geqslant 0$; $x-y-1\leqslant 0$; $y+3\geqslant 0$; $y-2\leqslant 0$.

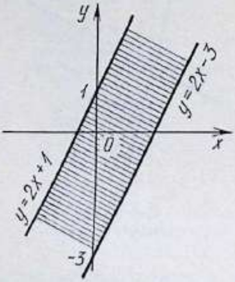


Рис 5.18

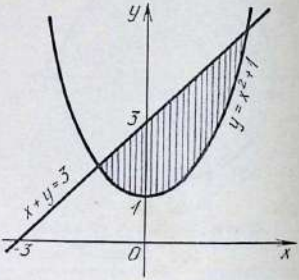


Рис. 5.19

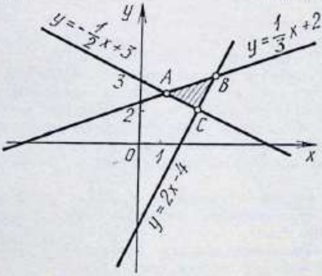


Рис 5.20

6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

6.1. Числовая последовательность

Числовой последовательностью, или *последовательностью,* называют числовую функцию

$$x_n = \varphi(n), \tag{6.1}$$

определенную на множестве всех натуральных чисел. Числовую последовательность называют *конечной*, если она определена на конечном подмножестве натуральных чисел: $x_n = \varphi(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, m$, и *бесконечной*, если она определена на бесконечном подмножестве всех натуральных чисел: $x_n = \varphi(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots$ Значения функции $x_1 = \varphi(1)$, $x_2 = \varphi(2)$, $x_3 = \varphi(3)$, ..., $x_n = \varphi(n)$, ..., соответствующие значениям аргумента $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ — называют первым, вторым, третьим, ..., n-м, ... членами последовательности, а сами значения аргумента — номерами членов последовательности. Член x_n называют также *общим членом последовательности.* Последовательность, заданную формулой (6.1), будем обозначать $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ или (x_n). Зная функцию $\varphi(n)$ и номер n, по формуле (6.1) можно вычислить любой член последовательности. Отметим, что вместо x можно использовать и другие буквы. Приведем примеры последовательностей, записывая несколько первых их членов: 1) если $x_n = \frac{1}{n^2}$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{9}$, ...; 2) если $y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, то $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{1}{3}$, ...; 3) если $z = \cos \pi n$, то $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, ...

Последовательность, все члены которой равны между собой, называют *постоянной.* Так, $x_n = 1$ — постоянная последовательность: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, ...

Последовательность может быть задана не одной, а несколькими формулами. Например, последовательность

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{при} \quad n = 2k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \\ 1/2^n, & \text{при} \quad n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

задана двумя формулами. Эта последовательность имеет вид: $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{1}{4}$; 2; $\frac{1}{8}$; 2; $\frac{1}{32}$; ...

Способ задания последовательности с помощью одной или нескольких формул называют *аналитическим*. К основным способам задания последовательности, кроме аналитического, относятся табличный и рекуррентный.

Табличный способ задания последовательности состоит в том, что приводится таблица, в которой указаны номера n и значения x_n:

n	1	2	3	4	5	...	n	...
(x_n)	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	...	$\frac{(-1)^{n+1}}{n_2}$	...

К табличному способу задания последовательности сводится задание конечной последовательности путем перечисления всех ее членов в порядке возрастания их номеров.

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается первый член x_1 этой последовательности и дается формула, позволяющая по номеру $n \geqslant 1$ и члену последовательности с номером n вычислить член с номером $n+1$.

Пример. Первый член последовательности (x_n) равен единице, а каждый член, начиная со второго, равен произведению своего номера и предыдущего члена, т. е. $x_{n+1} = (n+1)x_n$. По этой формуле получаем $x_2 = x_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2$, $x_3 = x_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $x_4 = x_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

В данной последовательности член с номером n равен произведению всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $x_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Последовательность называют *возрастающей*, если она является возрастающей функцией. Другими словами, (x_n) — возрастающая последовательность, если при всех n выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$. Например, $x_n = n$ — возрастающая последовательность, $x_n = 1/n$ — *убывающая*. Возрастающие и убывающие последовательности называют монотонными.

Последовательность (x_n) называют *неубывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т. е. $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Последовательность (x_n) называют *невозрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не больше предыдущего члена, т. е. $x_{n+1} \leqslant x_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Невозрастающие и убывающие последовательности также называют *монотонными*.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует такое число A, что $x_n \leqslant A$ для всех номеров n. Последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует такое число a, что $a \leqslant x_n$ при всех n. Последовательность (x_n), ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*. Очевидно, что последовательность (x_n) ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число $c > 0$, что $|x_n| \leqslant c$ для всех n. Например, последовательность $x_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена, так как $|x_n| \leqslant 1$.

6.2. Предел последовательности

Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Применяют следующие обозначения предела последовательности (x_n): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $x_n \to a$, $n \to \infty$.

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной: $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. Действительно, в этом случае $x_n = c$, для числа $a = c$ получаем $|x_n - a| = |c - c| < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

Последовательность, имеющую предел, называют *сходящейся*.

Последовательность, у которой нет предела, называют *расходящейся*.

Отметим, что неравенство (6.2) равносильно неравенствам $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ $(n > N)$.

Интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ называют ε-окрестностью точки a и обозначают $O(a; \varepsilon)$. Определение предела последовательности имеет следующий геометрический смысл: число a является пределом последовательности (x_n), если в любой его окрестности содержатся почти все ее члены, т. е. вне этой окрестности находится лишь конечное число членов данной последовательности: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$.

Пример 1. Последовательность $\left(x_n = 2 + \dfrac{1}{n}\right)$ имеет предел $a = 2$.

В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое натуральное число N, что $|x_n - a| = \left|\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) - 2\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, при всех

$n > N$, если только $N \geqslant 1/\varepsilon$. Например, если $\varepsilon_1 = 0{,}1$, то $N_1 = 10$; если $\varepsilon_2 = 0{,}01$, то $N_2 = 100$, и т. д.

Таким образом, $\lim\limits_{n \to \infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$, а последовательность, заданная формулой $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, является сходящейся.

Замечание 1. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ имеет пределом нуль:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{6.3}$$

Действительно, $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ при всех $n > N$, где $N > 1/\varepsilon$.

Замечание 2. Не следует думать, что предел последовательности меньше всех ее членов (как в рассмотренном примере). Он может быть больше всех членов последовательности, например $\lim\limits_{n \to \infty}\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$.

Члены последовательности могут также «колебаться» вокруг своего предела (одни быть меньше его, другие — больше, например $\lim\limits_{n \to \infty}\left(5 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 5$.

Пример 2. Последовательность $x_n = \cos \pi n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ не имеет предела.

Эта последовательность принимает следующие значения: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, ..., $x_n = (-1)^n$, ... Каково бы ни было число a, вне его ε-окрестности при $0 < \varepsilon < 1$ находится бесконечное множество членов этой последовательности (хотя среди них много равных между собой). Принимая во внимание геометрический смысл определения предела последовательности, заключаем, что число a не будет ее пределом. Данная последовательность является расходящейся.

Теорема 6.1 (о единственности предела). *Последовательность может иметь только один предел.*

▷ Предположим противное — сходящаяся последовательность (x_n) имеет два различных предела a и b $(a \neq b)$. Пусть $a < b$, тогда $b - a > 0$. В этом случае каждый из интервалов $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$, где $\varepsilon = (b - a)/3$, должен содержать все члены последовательности (x_n), за исключением их конечного числа. Это невозможно, так как указанные интервалы не имеют общих точек (рис. 6.1). Наличие противоречия доказывает теорему. ◁

Приведем без доказательства две теоремы.

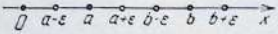


Рис. 6.1

Теорема 6.2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Теорема 6.3. *Всякая монотонная ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет предел.*

Основные свойства пределов последовательностей выражаются теоремой, которая приводится без доказательства.

Теорема 6.4. *Если* (x_n), (y_n) — *сходящиеся последовательности, то их сумма, разность, произведение и частное имеют пределы, причем*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n + \lim_{n \to \infty} y_n; \tag{6.4}$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} y_n; \tag{6.5}$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n; \tag{6.6}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}. \; (\lim_{n \to \infty} y_n \neq 0) \tag{6.7}$$

Из этой теоремы можно получить приведенные ниже следствия.

1. Если (x_n), (y_n), (z_n) — сходящиеся последовательности, то

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n + z_n) = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} y_n + \lim_{n \to \infty} z_n; \tag{6.8}$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n z_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n \lim_{n \to \infty} z_n. \tag{6.9}$$

Равенство (6.8) верно также для любой конечной алгебраической суммы сходящихся последовательностей, а равенство (6.9) — для любого конечного числа множителей.

2. Если последовательность (x_n) имеет предел, то для любого числа c последовательность (cx_n) сходится, причем

$$\lim_{n \to \infty} (cx_n) = c \lim_{n \to \infty} x_n. \tag{6.10}$$

3. Если (x_n) — сходящаяся последовательность и m — натуральное число, то

$$\lim_{n \to \infty} x_n^m = (\lim_{n \to \infty} x_n)^m.$$

Пример 3. Доказать, что последовательность $x_n = q^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $0 < q < 1$, является бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Эта последовательность монотонно убывает, поскольку $x_{n+1} < x_n$ $(q^{n+1} < q^n)$, и ограничена снизу, так как $0 < q^n$ при всех n.

Согласно теореме 6.3, данная последовательность имеет предел; обозначим его a, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$. Очевидно, что последовательность (q^{n+1}) имеет тот же предел a: $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = a$. Принимая во внимание свойства пределов, получаем

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (q\cdot q^n) = qa,$$

т. е. $a = qa$. Поскольку $q \neq 1$, последнее равенство возможно лишь при $a = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ (0 < q < 1). \tag{6.11}$$

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ представляет неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n)$ — неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ представляет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n)$ — неопределенность вида $(0\cdot\infty)$.
Раскрытием неопределенностей указанных видов называют нахождение соответствующих пределов. В некоторых случаях указанные неопределенности раскрываются элементарными способами, с помощью доказанных теорем и предварительных преобразований.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{14n^2 + 9n - 8}{2n^2 - 11n + 4}$.

Когда n стремится к бесконечности, числитель и знаменатель данной дроби также стремятся к бесконечности: имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на n^2 и воспользовавшись формулами (6.3), (6.4) — (6.7), (6.10), получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 + 9n - 8}{2n^2 - 11n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{14 + \dfrac{9}{n} - \dfrac{8}{n^2}}{2 - \dfrac{11}{n} + \dfrac{4}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(14 + \dfrac{9}{n} - \dfrac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{11}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 14 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{11}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 14 + 9\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} - 8\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - 11\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + 4\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{14 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = 7,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

6.3. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называют числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют *разностью арифметической прогрессии* и обозначают d.

Таким образом, арифметическая прогрессия (b_n) определяется:

1) условием $b_1 = b$, где b — заданное число; 2) рекуррентной формулой $b_{n+1} = b_n + d$. Чтобы задать арифметическую прогрессию (b_n), достаточно указать ее первый член b_1 и разность d. Например, если $b_1 = 1$, $d = 3$, то имеем прогрессию 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

Отметим, что d может быть любым числом. Если $d > 0$, то арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью (как в приведенном примере). Если $d < 0$, то арифметическая прогрессия будет убывающей последовательностью. Например, когда $b_1 = 0$, $d = -1$, получаем убывающую последовательность 0, -1, -2, -3, ... В случае $d = 0$ все члены арифметической прогрессии равны между собой и прогрессия является постоянной последовательностью. Например, если $b_1 = 7$ и $d = 0$, то имеем последовательность 7, 7, 7, ...

Теорема 6.5. *Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член ее, начиная со второго, есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов.*

▷ *Необходимость.* Пусть последовательность (b_n) — арифметическая прогрессия, и b_{n-1}, b_n, b_{n+1} — три произвольно выбранные последовательные ее члены $(n \geqslant 2)$. Поскольку разность между любым членом арифметической прогрессии и предшествующим ему членом одна и та же, то $b_n - b_{n-1} = b_{n+1} - b_n$. Отсюда получаем $2b_n = b_{n-1} + b_{n+1}$ или

$$b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2}. \qquad (6.12)$$

Это равенство означает, что любой член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов.

Достаточность. Пусть для любых трех последовательных членов b_{n-1}, b_n, b_{n+1} некоторой последовательности (b_n) выполняется соотношение (6.12). Из этого соотношения получаем $2b_n = b_{n-1} + b_{n+1}$, $b_n - b_{n-1} = b_{n+1} - b_n$.

Последнее равенство означает, что разность между любым членом последовательности (b_n) и ему предшествующим равна одному и тому же числу. Значит, последовательность (b_n) является арифметической прогрессией. ◁

Зная первый член b_1 арифметической прогрессии (b_n) и ее разность d, по формуле $b_{n+1} = b_n + d$ посредством последовательных вычислений можно найти любой член этой прогрессии. При больших n это требует большого объема вычислительной работы. Можно указать более короткий способ вычисления любого члена арифметической прогрессии. По определению арифметической прогрессии (зная b_1, d и формулу $b_{n+1} = b_n + d$) имеем $b_2 = b_1 + d$, $b_3 = b_2 + d = (b_1 + d) + d = b_1 + 2d$, $b_4 = b_3 + d = (b_1 + 2d) + d = b_1 + 3d$. Очевидно, что $b_5 = b_1 + 4d$, $b_6 = b_1 + 5d$ и т. д. Вообще

$$b_n = b_1 + d(n-1). \tag{6.13}$$

Формула (6.13) выражает n-й член арифметической прогрессии (b_n) через ее первый член, разность и число членов, предшествующих данному. Эту формулу можно доказать с помощью метода математической индукции.

▷ Действительно, при $n = 2$ формула (6.13) верна $(b_2 = b_1 + d)$. Пусть эта формула верна для $n = m$, она будет верной и для $n = m + 1$:

$$b_{m+1} = b_m + d = (b_1 + d(m-1)) + d =$$
$$= b_1 + dm - d + d = b_m + md. ◁$$

Выведем формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии. Сумму n первых членов арифметической прогрессии (a_n) обозначим S_n и запишем ее сумму дважды, поменяв во втором случае порядок слагаемых на обратный:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n;$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В правой части этой формулы сумма каждой пары чисел (в скобках) равна $a_1 + a_n$. Действительно, $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$, $a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ и т. д.

Поскольку число всех таких пар равно n, то $2S_n = (a_1 + a_n)n$, откуда

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Подставив сюда выражение для a_n (формула 6.13), получим

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2}n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n,$$

т. е.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

6.4. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число. Это число называют *знаменателем геометрической прогрессии* и обычно обозначают q. В соответствии с определением числовая последовательность (a_n) будет геометрической прогрессией, если $a_1 \neq 0$, $a_2 = a_1 q$:

$$a_3 = a_2 q, \ \ldots, \ a_n = a_{n-1} q, \ \ldots,$$

где $q \neq 0$.

Из определения следует, что в геометрической прогрессии (a_n)

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots,$$

т. е. отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему является постоянным и равно числу q — знаменателю этой прогрессии.

Таким образом, геометрическая прогрессия (a_n) определяется: 1) условием $a_1 = a (a \neq 0)$; 2) рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n q$ $(q \neq 0)$. Для задания геометрической прогрессии достаточно указать ее первый член и знаменатель.

Знаменатель q геометрической прогрессии есть действительное число, отличное от нуля. Если $q > 0$ $(q \neq 1)$, то геометрическая прогрессия (a_n) является либо возрастающей последовательностью, либо убывающей последовательностью, в зависимости от знака a_1 и величины q. Если $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой, прогрессия будет постоянной последовательностью. В случае $q < 0$ члены прогрессии с нечетными номерами имеют тот же знак, что и первый член, а члены с четными номерами имеют знак, противоположный знаку первого члена прогрессии. При отрицательном знаменателе прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью.

Теорема 6.6. *Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предшествующего и последующего членов, т. е.* $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

▷ *Необходимость.* Пусть последовательность (a_n) — геометрическая прогрессия. Выберем произвольно три ее последовательных члена a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Поскольку отношение любого члена геометрической прогрессии к предшествующему члену равно одному и тому же числу, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \tag{6.14}$$

откуда и следует необходимость.

Достаточность. Если любой член последовательности (a_n), начиная со второго, равен среднему пропорциональному последующего и предыдущего членов, то выполняется равенство (6.14). Отсюда следует достаточность. ◁

Зная первый член a_1 и знаменатель q геометрической прогрессии (a_n), путем последовательных вычислений можно найти второй, третий и любой ее член. Однако при больших n для вычисления a_n удобнее пользоваться формулой, которая выражает любой член последовательности (a_n) через ее первый член a_1, знаменатель прогрессии q и номер n искомого члена a_n. Из определения прогрессии следует, что $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2$, $a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3$, $a_5 = a_4 q = (a_1 q^3)q = a_1 q^4$ и т. д.
Можно заметить, что

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{6.15}$$

Докажем эту формулу методом математической индукции. При $n=2$ формула верна: $a_2=a_1q$. Пусть она верна для $n=m$, т. е. $a_m=a_1q^{m-1}$, тогда $a_{m+1}=$ $=a_mq=(a_1q^{m-1})q=a_1q^m$, т. е. она верна и для $n=m+1$. Следовательно, формула (6.15) верна при любом $n\in N$.

Выведем формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии (a_n). Обозначим эту сумму S_n:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n. \qquad (6.16)$$

Если $q=1$, то все члены прогрессии равны a_1 и $S_n=na_1$. Предположим, что $q\neq 1$. Умножим обе части равенства (6.16) на q:

$$S_nq=a_1q+a_2q+a_3q+\ldots+a_{n-1}q+a_nq.$$

Поскольку $a_1q=a_2$, $a_2q=a_3$, $a_3q=a_4$, ..., $a_{n-1}q=a_n$, то

$$S_nq=a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+a_nq. \qquad (6.17)$$

Вычтем почленно равенство (6.17) из равенства (6.16):

$$S_n-S_nq=a_1-a_nq;\ S_n(1-q)=a_1-a_nq.$$

Так как $q\neq 1$ и $1-q\neq 0$, то

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}. \qquad (6.18)$$

Эта формула выражает сумму первых членов геометрической прогрессии (a_n) через ее первый член a_1, последний член a_n и знаменатель q. Формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии можно записать и в другом виде. Подставим в формулу (6.18) вместо a_n выражение a_1q^{n-1} (получено из формулы (6.15)):

$$S_n=\frac{a_1-(a_1q^{n-1})q}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q},$$

т. е.

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad (6.19)$$

Формула (6.19) выражает сумму n первых членов геометрической прогрессии через ее первый член, знаменатель и число членов.

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называют бесконечную геометрическую прогрессию, знаменатель которой по модулю меньше единицы, т. е. $|q|<1$.

Рассмотрим бесконечно убывающую прогрессию, заданную формулой $a_n = a_1 q^{n-1}$, где $|q| < 1$:

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2,\ a_1 q^3,\ \ldots,\ a_1 q^{n-1},\ \ldots$$

Составим сумму первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Эта сумма определяется формулой (6.19). Придавая n значения $n=1$, $n=2$, $n=3$ и т. д., получаем последовательность сумм S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ... или, короче, последовательность (S_n). *Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* называют предел последовательности (S_n) при неограниченном возрастании n. Обозначим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии S, тогда по определению

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Учитывая формулу (6.19), равенство (6.11) и свойства пределов, получаем

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1}{1-q} q^n \right) =$$

$$= \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \lim_{n \to \infty} q^n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} 0,$$

т. е.

$$S = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (6.20)$$

Следовательно, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна ее первому члену, деленному на разность $1-q$, где q — знаменатель данной прогрессии.

Пример 1. Вычислить сумму геометрической прогрессии с общим членом $a_n = 1/2^{n-1}$.

В данном случае $a_1 = 1/2^0 = 1$, $q = 1/2$, поэтому по формуле (6.20) имеем $S = \frac{1}{1-1/2} = 2$.

Покажем на примерах, как с помощью бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно обратить периодическую десятичную дробь в обыкновенную.

Пример 2. Десятичную дробь 0,(41) обратить в обыкновенную.

Представим данную дробь в виде

$$0,(41)=0,414141...=\frac{41}{100}+\frac{41}{10000}+\frac{41}{1000000}+...$$

Слагаемые в правой части этого равенства образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $a_1 = 41/100$, а знаменатель $q=1/100$. По формуле (6.20) находим

$$0,(41)=\frac{41/100}{1-1/100}=\frac{41}{99}.$$

Пример 3. Периодическую десятичную дробь 0,2 (3) обратить в обыкновенную.

Представим эту дробь в виде

$$0,2(3)=0,2333...=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+...$$

В правой части данного равенства все слагаемые, начиная со второго, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, для которой $a_1=3/100$, $q=1/10$. По формуле (6.20) получаем

$$0,2(3)=\frac{2}{10}+\frac{3/100}{1-1/10}=\frac{7}{30}.$$

7. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

7.1. Предел функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную в некотором интервале, содержащем точку $x=a$. В самой точке $x=a$ данная функция может быть и не определена.

Число b называют *пределом функции* $y=f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0<|x-a|<\delta, \tag{7.1}$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon. \tag{7.2}$$

Для предела функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к a, используются следующие обозначения:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Отметим, что x стремится к a произвольным образом: аргумент может принимать значения $x>a$ и $x<a$.

Выясним геометрический смысл понятия предела функции, воспользовавшись ее графиком (рис. 7.1). Неравенство (7.1) означает, что x отстоит от точки a

на расстоянии, меньшем δ, т. е. принадлежит интервалу $(a-\delta;\ a+\delta)$ или δ-окрестности точки a на оси Ox. Неравенство (7.2) означает, что значения функции $y=f(x)$ не выходят из интервала $(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$ оси Oy, т. е. принадлежат ε-окрестности точки b на этой оси. Следовательно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то точка M графика функции $y=f(x)$

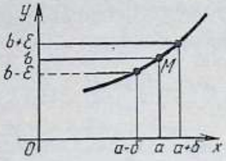


Рис. 7.1

должна находиться в полоске шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$, $y=b+\varepsilon$ для всех значений x, удаленных от точки a меньше, чем на δ.

Из определения предела следует, что предел постоянной равен этой постоянной:

$$\lim_{x\to a} c = c. \tag{7.3}$$

Действительно, для любого $\varepsilon>0$: $|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$.

Рассматривают также односторонние пределы функции: предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ и предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$. (Запись $x\to a-0$ означает, что x стремится к a, оставаясь меньше a; $x\to a+0$ означает, что x стремится к a, оставаясь больше a.) Когда $a=0$, вместо $0-0$ пишут -0, вместо $0+0$ пишут $+0$, поэтому предел слева записывается $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=b_1$, а предел справа $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=b_2$.

Если односторонние пределы равны (рис. 7.1), т. е. $b_1=b_2$, то предел b функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ существует и равен односторонним пределам:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Если односторонние пределы различны (рис. 7.2, *а*) или хотя бы один из них не существует (рис. 7.2, *б*), то не существует и предел функции в точке $x = a$.

При введении понятия предела функции предполагалось, что a — некоторое число. Однако иногда приходится рассматривать случаи, когда x по модулю неограниченно возрастает. Тогда говорят, что x стремится к бесконечности

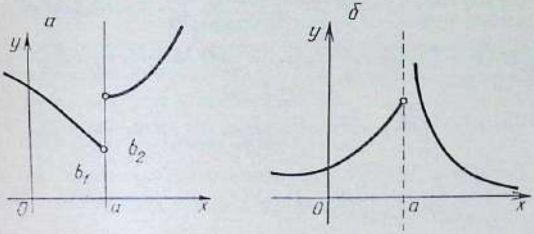


Рис. 7.2

и пишут $x \to \infty$ (когда x принимает отрицательные значения, пишут $x \to -\infty$, когда положительные, $x \to +\infty$). Сформулируем определение предела функции при $x \to +\infty$.

Число b называют пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $x > N$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$.

7.2. Основные свойства пределов функций

Основные свойства пределов функций выражаются теоремами, приводимыми здесь без доказательств.

Теорема 7.1. *Функция $y = f(x)$ при $x \to a$ может иметь только один предел.*

Теорема 7.2. *Если каждая из функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеет предел при $x \to a$, то их сумма, разность, произведение и частное имеют пределы, причем*

$$\lim_{x \to a} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x); \qquad (7.4)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} \varphi(x); \qquad (7.5)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a}\varphi(x); \tag{7.6}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \ (\lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0). \tag{7.7}$$

Из теоремы 7.2. можно получить ряд следствий.

Следствие 1. Если функции $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_m = f_m(x)$ при $x \to a$ имеют пределы, то

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \\ + \lim_{x\to a} f_m(x); \tag{7.8}$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \lim_{x\to a} f_2(x) \ldots \lim_{x\to a} f_m(x). \tag{7.9}$$

Следствие 2. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то функция $y = cf(x)$, где $c = \mathrm{const}$, также имеет предел, причем

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x). \tag{7.10}$$

Эта формула следует из формулы (7.6) и того факта, что предел постоянной равен данной постоянной.

Замечание. Формула (7.10) означает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Следствие 3. Если $\lim\limits_{x\to a} y(x) = b$ и m — натуральное число, то

$$\lim_{x\to a}(y(x))^m = (\lim_{x\to a} y(x))^m = b^m,$$

в частности,

$$\lim_{x\to a}(x^m) = (\lim_{x\to a} x)^m = a^m. \tag{7.11}$$

Формула (7.11) следует из формулы (7.9).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 + 3x + 1)$.

Применяя формулы (7.3), (7.8), (7.10), (7.11), находим

$$\lim_{x\to 2}(2x^2 + 3x + 1) = \lim_{x\to 2}(2x^2) + \lim_{x\to 2}(3x) + \lim_{x\to 2} 1 =$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 + 3\lim_{x\to 2} x + 1 = 2(2^2) + 3\cdot 2 + 1 = 15.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2 - 2x + 9}{4x^2 - 3x + 2}$

На основании формул (7.3) — (7.5), (7.7), (7.10), (7.11) получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-2x+9}{4x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2-2x+9)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-3x+2)}=\frac{5\cdot 1^2-2\cdot 1+9}{4\cdot 1^2-3\cdot 1+2}=\frac{12}{3}=4.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-5x+4}$.

При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, предварительно преобразуем дробь, разложив на множители каждый трехчлен. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x-4}=\frac{1+5}{1-4}=-2.$$

7.3. Непрерывность функции в точке

Функцию $y=f(x)$, определенную на интервале $(a;\ b)$, называют непрерывной в точке $x_0\in(a;\ b)$, если предел этой функции в данной точке x_0 равен ее значению при $x=x_0$:

$$\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0). \tag{7.12}$$

Учитывая определение предела функции, можно дать другую формулировку понятия непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Функцию $y=f(x)$, определенную на интервале $(a;\ b)$, называют непрерывной в точке $x_0\in(a;\ b)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Приращением аргумента в точке x_0 называют разность

$$\Delta x=x-x_0, \tag{7.13}$$

где $x\in(a;\ b)$. Приращением функции в той же точке называют разность

$$\Delta y=f(x)-f(x_0). \tag{7.14}$$

Из равенства (7.13) следует, что $x=x_0+\Delta x$ (x называют приращенным значением аргумента). Формулу (7.14) можно записать в виде $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. На рис. 7.3. иллюстрируются понятия приращения аргумента и приращения функции.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0 выражается равенством

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0 \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \quad (7.15)$$

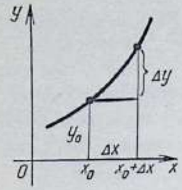


Рис. 7.3

В самом деле, положив $x=$ $=x_0+\Delta x$, из равенства (7.12) получим равенство (7.15):

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

(здесь использован тот факт, что предел постоянной в (x_0) равен этой постоянной).

Обратно, из равенства (7.15) следует равенство (7.12):

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0;\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Таким образом, функция непрерывна в точке, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Замечание. Поскольку $x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x$, то формулу (7.12) можно переписать так:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x),$$

т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x)=x^2$ непрерывна в каждой точке области ее определения.

Данная функция определена при всех x. Зафиксируем произвольное значение $x_0\in(-\infty;\ +\infty)$. Найдем приращение функции $\Delta y=$ $=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=$ $=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$, т. е. $\Delta y=(2x_0+\Delta x)\Delta x$.

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}((2x_0+\Delta x)\Delta x)=0$, то функция $f(x)=x^2$ непрерывна в точке x_0.

Пример 2. Доказать, что функция $f(x)=x^m$, где m — натуральное число, непрерывна в любой точке ее определения.

Пусть x_0 — произвольная точка области определения. На основании равенства (7.11) получаем $\lim\limits_{x\to x_0}(x^m)=(\lim\limits_{x\to x_0}x)^m=x_0^m$. Значит, выполнено равенство (7.12), функция непрерывна в точке x_0.

Теорема 7.3. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в ней их сумма $f(x)+\varphi(x)$,* *разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$, а при условии $\varphi(x_0)\neq 0$ и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.*

Доказательство следует из определения непрерывности функции в точке и теоремы 7.2.

Следствие 1. Если функции $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, ..., $y_m=y_m(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в ней и их сумма и произведение. Это следует из определения непрерывности функции в точке и формул (7.8) и (7.9).

Следствие 2. Целая рациональная функция $P_n(x)=$ $=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ (n — натуральное число) непрерывна при всех x.

Это следует из непрерывности функций $y=x^m$ ($m=$ $=1, 2, \ldots, n$) (см. пример 2) и непрерывности функции $y=c$ ($c=\mathrm{const}$).

Следствие 3. Дробная рациональная функция

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

непрерывна при всех x, для которых знаменатель не обращается в нуль.

Введем понятие функции от функции, или сложной функции. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ — функции своих аргументов, причем область определения функции $f(u)$ содержит область значений функции $\varphi(x)$, то каждому x из области определения функции $\varphi(x)$ соответствует единственное y, такое, что $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием

$$y=f(\varphi(x)),$$

называется *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Теорема 7.4. *Если функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $F(x)=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.*

▷ Так как функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что $f(y)$ определена на интервале $(y_0-\eta;\ y_0+\eta)$, и выполняется неравенство $|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$ при всех y, удовлетворяющих условию $0<|y-y_0|<\eta$.

Поскольку функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, то найдется такое $\delta>0$, что функция определена на интервале $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, и $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\eta$ для всех x из этого интервала.

Следовательно, для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, функция $f(\varphi(x))$ определена и выполняется неравенство $|f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))|<\varepsilon$ или $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$, т. е. функция $F(x)=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. $\triangleleft$

7.4. Точки разрыва функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на интервале $(a;\ b)$, кроме, быть может, точки $x_0\in(a;\ b)$. Значение аргумента x_0 называют *точкой разрыва* данной функции, если функция определена в этой точке, но не является непрерывной в ней, или при $x=x_0$ функция не определена. Функцию $y=f(x)$ при этом называют *разрывной* в точке x_0.

Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, то она называется *точкой разрыва первого рода*. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 1. Функция $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ разрывна в точке $x_0=0$, причем $x_0=0$ — точка разрыва первого рода.

Действительно, x_0 — точка разрыва, так как при $x_0=0$ функция не определена; $f(x)=-1$ при $x<0$ и $f(x)=1$ при $x>0$. В точке $x_0=0$ существуют конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$. Скачок данной функции в точке равен $f(+0)-f(-0)=1-(-1)=2$ (рис. 7.4).

Если функция $y=f(x)$ разрывна в точке x_0 и ее конечные односторонние пределы равны, т. е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называют *точкой устранимого разрыва*.

Это название объясняется тем, что если доопределить такую функцию (когда она не была определена при $x=x_0$), положив $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то получится функция, непрерывная в точке x_0.

Пример 2. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ имеет разрыв в точке $x_0=3$, причем $x_0=3$ — точка устранимого разрыва.

Действительно, при $x_0=3$ функция не определена, $x_0=3$ — точка разрыва данной функции. Поскольку $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, т. е.

$\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3-0} (x+3) = 6$, $\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3+0} (x+3) = 6$, то $x_0 = 3$ — точка устранимого разрыва. (Сделайте чертеж.)

Полагая $f(3) = 6$, получаем уже непрерывную функцию $y = x + 3$.

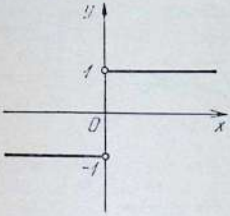


Рис. 7.4

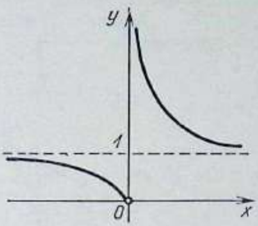


Рис. 7.5

Если x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$ и по крайней мере один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ является бесконечным или не существует, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Пример 3. Функция $f(x) = 2^{1/x}$ разрывна в точке $x_0 = 0$, причем x_0 — точка разрыва второго рода.

Данная функция не определена при $x_0 = 0$, поэтому $x_0 = 0$ — точка ее разрыва. Поскольку $\lim\limits_{x\to -0} 2^{1/x} = 0$, $\lim 2^{1/x} = +\infty$, т. е. один из односторонних пределов является бесконечным, то $x_0 = 0$ — точка разрыва второго рода (рис. 7.5).

8. ПРОИЗВОДНАЯ

8.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Многие задачи, разные по своему содержанию, приводят к необходимости рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это, в частности, задачи о касательной к линии, о скорости неравномерного прямолинейного движения и др.

Рассмотрим задачу о касательной к линии. *Касательной к линии l* в ее точке M_0 (рис. 8.1) называют прямую

M_0T — предельное положение секущей M_0M, когда точка M стремится по линии l к точке M_0. Задача состоит в следующем: составить уравнение касательной к линии $y=f(x)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$. Для решения задачи можно воспользоваться уравнением $y-y_0=k(x-x_0)$ прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой

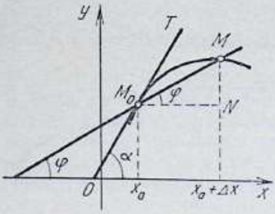


Рис. 8.1

коэффициент k. Однако в данном случае значение k неизвестно, его нужно найти.

Введем прямоугольную декартову систему координат, построим график функции $y=f(x)$. Фиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ этого графика. Пусть $M(x_0+\Delta x; \ y_0+\Delta y)$ — некоторая другая его точка. Через точки M_0 и M проведем прямую (секущую). Величину угла наклона прямой M_0M к оси Ox обозначим φ. Через точку M_0 проведем прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с перпендикуляром, проведенным из точки M к оси абсцисс; точку пересечения обозначим N. Из прямоугольного треугольника M_0NM получаем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{NM}{M_0M}; \ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Предположим, что точка M стремится к точке M_0 вдоль линии l, тогда $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. При этом секущая M_0M меняет свое положение. Пусть прямая M_0T является ее предельным положением при $M\to M_0$, т. е. M_0T — касательная к линии l в ее точке $M_0(x_0, y_0)$. Обозначим α величину угла наклона касательной M_0T к оси Ox. Тогда при $M\to M_0$ (и $\Delta x\to 0$) $\operatorname{tg}\varphi\to\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{M\to M_0}\operatorname{tg}\varphi$, или

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (8.1)$$

Итак, угловой коэффициент касательной ($k=\operatorname{tg}\alpha$) выражен через предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x\to 0$.

Рассмотрим задачу о скорости неравномерного прямолинейного движения. Неравномерное прямолинейное движение точки M осуществляется по закону $x=f(t)$, где $x=OM$ — длина пути (рис. 8.2), $f(t)$ — заданная функция

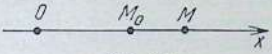


Рис. 8.2

времени t. Пусть в момент времени t_0 точка M занимала положение M_0. За промежуток времени $\Delta t=t-t_0$ пройден путь $M_0M=\Delta x=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)=\Delta f(t_0)$. Средней скоростью $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt называют отношение приращения пути Δx к соответствующему приращению времени Δt: $v_{\text{ср}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Скоростью точки M в данный момент времени t_0 (мгновенной скоростью) называют предел средней скорости при $\Delta x\to 0$:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} \text{ или } v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}. \qquad (8.2)$$

Таким образом, мгновенная скорость определена как предел отношения приращения пути к приращению времени при $\Delta t\to 0$.

Обе задачи привели к необходимости рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Указанный предел называют производной данной функции в заданной точке.

8.2. Производная, ее геометрический и физический смысл

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную и непрерывную в интервале $(a;\ b)$. Зафиксируем точку $x_0\in(a;\ b)$. Пусть $x\in(a;\ b)$, тогда $\Delta x=x-x_0$ — приращение аргумента в точке x_0, которому соответствует приращение функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ в той же точке.

Производной функции в данной точке называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю. Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначим $f'(x_0)$, тогда по определению

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \quad (8.3)$$

Из формул 8.1 и 8.3 получаем равенство

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha. \quad (8.4)$$

Это равенство выражает геометрический смысл производной: производная функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ равна тангенсу угла между касательной к графику данной функции в его точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и положительным направлением оси Ox.

Подставляя в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$ значение $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, получаем *уравнение касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Из определения производной и формулы (8.2) следует

$$v=f'(t_0). \quad (8.5)$$

Формула (8.5) выражает физический смысл производной: скорость движения точки в момент времени t_0 равна производной от пути по времени при $t=t_0$.

Функцию, имеющую производную в данной точке, называют *дифференцируемой в этой точке*.

Докажем, что если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в ней.

Действительно, так как $\Delta f(x_0)=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\Delta x$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)0=0.$$

Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание 1. Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная в точке, может не иметь в ней производной. Например, функция $f(x)=|x|$ непрерывна в точке $x_0=0$, но не имеет в ней производной. В самом деле, $\Delta f(x_0)=\Delta x$ при $\Delta x>0$ и $\Delta f(x_0)=-\Delta x$ при $\Delta x<0$, поэтому $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 1$ при $\Delta x > 0$, $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = -1$ при $\Delta x < 0$. Это отношение не имеет предела, когда $\Delta x \to 0$ произвольным образом.

Зафиксируем некоторую другую точку x из области определения функции $y = f(x)$ и рассмотрим предел вида (8.3):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}; \ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Из формул видно, что каждому значению x соответствует некоторое число $f'(x)$ (если только оно существует), т. е. $f'(x)$ — функция переменной x.

Если отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при $x \to x_0$ имеет предел слева (или справа), то его называют *производной слева* (*производной справа*). Такие производные называют односторонними.

Односторонние производные функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают: $f'_-(x_0)$ — производная слева, $f'_+(x_0)$ — производная справа:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \ f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, когда односторонние производные существуют и равны между собой: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Например, функция $f(x) = |x|$ имеет односторонние производные в точке $x_0 = 0$: $f'_-(0) = -1$ (производная слева), $f'_+(0) = 1$ (производная справа), причем $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

Функцию называют *дифференцируемой в промежутке*, если она имеет производную в каждой точке этого промежутка.

В случае замкнутого промежутка на его концах имеются в виду односторонние производные.

Если для некоторого значения x_0 выполняется одно из условий $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что в точке x_0 существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$.

Геометрическое истолкование производной как углового коэффициента касательной к графику функции распространяется и на эти случаи. Касательная в этих случаях параллельна оси Oy (рис. 8.3, *а*, *б*). Аналогично устанавливается понятие об односторонней бесконечной производной. На рис. 8.3, *в*, *г* изображены графики функций, имеющие острие, направленное вниз или вверх; односторонние бесконечные производные различны по знаку, но существует единственная вертикальная касательная.

Замечание 2. Для обозначения производной употребляются и другие символы: y', y'_x, $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

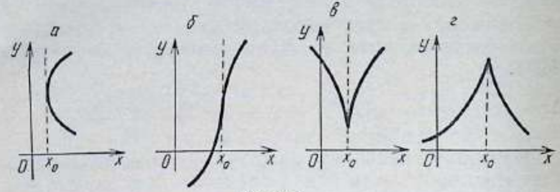


Рис. 8.3

Пользуясь определением производной, найдем производные функций $y=x$ и $y=c$. Если $y=x$, то $\Delta y=\Delta x$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, откуда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, т. е.

$$y'_x=x'_x=1. \tag{8.6}$$

Если $y=c$ ($c=\text{const}$), то $\Delta y=0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, значит,

$$c'=0. \tag{8.7}$$

8.3. Основные правила дифференцирования

Дифференцированием называют операцию нахождения производной. Основные правила дифференцирования указывают, как найти производную суммы (разности), произведения и частного двух дифференцируемых функций.

Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ — дифференцируемые функции, то существуют производные их суммы (разности), произведения и частного, причем

$$(u+v)'=u'+v';\ (u-v)'=u'-v'; \tag{8.8}$$

$$(uv)'=u'v+uv'; \tag{8.9}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \tag{8.10}$$

▷ Обозначим $y(x)=u(x)+v(x)$, или короче $y=u+v$. Зафиксируем значение x. Аргументу x придадим приращение Δx. Ему будет соответствовать приращение функции $\Delta y=\Delta u+\Delta v$. Разделим это равенство почленно на Δx

и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$, т. е. $y' = u' + v'$.

Так как $y = u + v$, то $(u + v)' = u' + v'$. Вторая из формул (8.8) доказывается аналогично.

Пусть $z(x) = u(x)v(x)$, или короче $z = uv$. Тогда $\Delta z = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$, откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = uv' + u'v + ov'$ (так как $u(x)$ и $v(x)$ — постоянные при фиксированном x; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, поскольку $u = u(x)$ — дифференцируемая функция, а поэтому и непрерывная). Таким образом, $z' = uv' + u'v$, или $(uv)' = u'v + uv'$. Формула (8.9) доказана.

Предположим, что $v(x) \neq 0$, обозначим $w(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ или $w = u/v$. Тогда

$$\Delta w = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ (функция $v = v(x)$ дифференцируема, поэтому и непрерывна), получаем формулу (8.10): $w' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ или $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. ◁

Формулы (8.8) — (8.10) выражают основные правила дифференцирования. Если $u = u(x)$ — дифференцируемая функция и c — постоянная, то

$$(cu)' = cu'. \tag{8.11}$$

Эта формула следует из равенств (8.7) и (8.9): $(cu)' = c'u + cu' = cu'$. Формула (8.11) означает, что постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Рассмотрим взаимно обратные функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$. Предположим, что $y = f(x)$ — дифференцируемая функция и $y'_x \neq 0$. Покажем, что функция $x = \varphi(y)$ имеет производную по своему аргументу. Так как $\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Следовательно, производные взаимно обратных функций связаны формулами:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}; \; y'_x = \frac{1}{x'_y} \; (x'_y \neq 0). \tag{8.12}$$

8.4. Производная функции от функции

Обратимся к понятию сложной функции, или функции от функции.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную по x, причем

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{8.13}$$

Аргумент u в данном случае называют *промежуточным аргументом.*

Поскольку $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}; \; u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $y'_x = y'_u u'_x$. Эта формула означает следующее: производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по независимой переменной.

В других обозначениях формула (8.13) принимает вид $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$.

8.5. Основные формулы дифференцирования

Производная логарифмической функции. Пусть дана функция $y = \log_a x \; (a > 0, \, a \neq 1)$. Эта функция определена при $x > 0$.

Приведем без доказательства формулу для производной этой функции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e, \tag{8.14}$$

где число e определяется по формуле $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

При $a = e$ получаем формулу для производной функции $y = \ln x$ ($\log_e x = \ln x$ — натуральный логарифм x)

$$(\ln x)' = 1/x. \tag{8.15}$$

Если $u = u(x)$ — дифференцируемая функция от x, и $u(x) > 0$, то из формул (8.13) — (8.15) следуют соответствующие формулы:

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u}\log_a e u'; \ (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e;$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'; \ (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \tag{8.16}$$

в которых штрихом обозначена производная по x. Производную, определяемую по формуле (8.16), называют *логарифмической*.

Найдем производную функции $y = \ln|x|$, которая определена при всех x, кроме $x = 0$. Учитывая определение модуля, имеем:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{если} \quad x > 0; \\ \ln(-x), & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

При $x > 0$ производная рассматриваемой функции определяется по формуле (8.15). При $x < 0$ производную находим с помощью формулы (8.16). Полагая $-x = u$, получаем

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}; \ (\ln(-x))' = \frac{1}{x}.$$

Итак, справедлива формула

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \ (x \neq 0). \tag{8.17}$$

Если $u = u(x)$ — дифференцируемая функция от x, и $u(x) \neq 0$, то из формул (8.13) и (8.17) следует формула

$$(\ln|u|)' = \frac{1}{u}u' \text{ или } (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \ (u \neq 0).$$

Производная степенной функции. Рассмотрим функцию $y=x^\alpha$, где α — любое действительное число. Область определения этой функции зависит от α (например, если $\alpha<0$, то функция не определена при $x=0$). Логарифмируя равенство $y=x^\alpha$ по основанию e, получаем $\ln y=$ $=\alpha\ln x$. Используя формулы (8.15) и (8.16), находим

$$\frac{1}{y}y'=\alpha\frac{1}{x},\ y'=\alpha\frac{1}{x}y=\alpha\frac{1}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак, получена формула

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{8.18}$$

С помощью этой формулы находим, например, $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$. Отметим, что при $\alpha=1$ из равенства (8.18) получаем формулу (8.6). Рассмотрим другие частные случаи: $\alpha=1/2$, $\alpha=-1$. По формуле (8.18) находим:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}};\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(x^{-1})'=(-1)\,x^{-1-1}=(-1)x^{-2}=-\frac{1}{x^2};\quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом,

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Если $u=u(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u';$$

$$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}};\quad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}.$$

Производная показательной функции. Пусть дана функция $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq1$. Эта функция определена при всех x. Прологарифмируем равенство $y=a^x$ по основанию e: $\ln y=x\ln a$. Отсюда $\frac{1}{y}y'=\ln a$, $y'=y\ln a$, $y'=a^x\ln a$.

Следовательно,

$$(a^x)'=a^x\ln a. \tag{8.19}$$

В частном случае при $a=e$ имеем

$$(e^x)'=e^x. \tag{8.20}$$

Если $u=u(x)$ — дифференцируемая функция, то из равенств (8.13), (8.19), (8.20) следуют формулы:

$$(a^u)'=a^u u' \ln a; \ (e^u)'=e^u u'.$$

Например, $(e^{x^2})'=e^{x^2}(x^2)'=2xe^{x^2}$.

8.6. Дифференциал функции

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y=f(x)$. *Дифференциалом функции* называют произведение производной и приращения аргумента и обозначают dy:

$$dy=f'(x)\Delta x, \tag{8.21}$$

если $y=x$, то $dx=x'\Delta x=\Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Так как $\Delta x=dx$, то формула (8.21) принимает вид

$$dy=f'(x)dx \text{ или } dy=y'dx, \tag{8.22}$$

т. е. дифференциал функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной. Очевидно, что дифференциал функции зависит от значений x и Δx. Если x и Δx — фиксированные числа, то dy — определенное число (для данной функции).

Поскольку $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Умножая второе равенство почленно на Δx и используя формулу (8.21), получаем

$$\Delta y=dy+\alpha\Delta x \ (\alpha\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0). \tag{8.23}$$

Из этой формулы видно, что дифференциал функции есть часть приращения функции. Эту часть называют *главной линейной частью приращения функции*: главной потому, что оставшаяся часть является бесконечно малой по сравнению с Δx ($\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$); линейной потому, что $f'(x)\Delta x$ зависит от первой степени Δx ($f'(x)$ — постоянная при фиксированном x). Итак, дифференциал функции — главная линейная часть ее приращения. Например, если $f(x)=x^2$, то

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2\Delta xx+ \\ +(\Delta x)^2-x^2; \ \Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Приращение данной функции состоит из двух частей: первая ($2x\Delta x$) является линейной частью — дифференциалом функции, вторая ($\alpha\Delta x = \Delta x^2$) есть бесконечно малая по сравнению с Δx. Рис. 8.4 иллюстрирует сказанное для функции $f(x) = x^2$ при фиксированных x и Δx; x^2 — площадь квадрата $ABCD$, $(x + \Delta x)^2$ — площадь квадрата $AEFN$, разность площадей указанных квадратов, т. е. площадь фигуры $DEFNBC$ — есть приращение функции, площадь двух прямоугольников ($BCKN$ и $DELC$) — дифференциал функции; приращение функции отличается от дифференциала площадью малого квадрата $CLFK$.

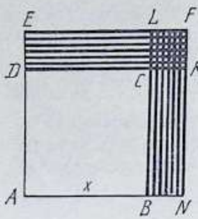


Рис. 8.4

Выясним геометрический смысл дифференциала функции $f(x)$. Построим график этой функции (рис. 8.5), отметим его точки $M(x, y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Через точку M проведем касательную к графику $f(x)$ и прямую, параллельную оси Ox. Обозначим T и N соответственно точки пересечения касательной и указанной прямой с перпендикуляром, проведенным из точки M' к оси абсцисс. Пусть β — величина угла наклона касательной к оси Ox, т. е. $\beta = \angle TMN$. Тогда из прямоугольного треугольника MTN, применяя формулы (8.4) и (8.22), находим

$$NT = MN \operatorname{tg} \beta, \; NT = \Delta x \operatorname{tg} \beta = \Delta x f'(x) = dy, \; dy = NT.$$

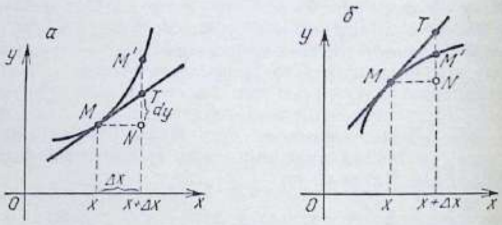


Рис. 8.5

Следовательно, дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x, y)$, когда аргумент получает приращение Δx. Отметим, что дифференциал функции может быть больше ее приращения (рис. 8.5 *б*, $dy > \Delta y$).

Обратимся к формуле (8.23). Из этой формулы следует, что при достаточно малых Δx

$$\Delta y \approx dy, \tag{8.24}$$

т. е. приращение функции приближенно равно ее дифференциалу. Учитывая формулы для Δy и Δx, из приближенного равенства (8.24) получаем:

$$f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\Delta x; \tag{8.25}$$
$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{8.26}$$

Формулы (8.24) — (8.26) применяются в приближенных вычислениях.

8.7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{8.27}$$

Вместо доказательства рассмотрим график функции $y=f(x)$. Концы дуги AB соединим отрезком прямой. Величину угла наклона этой прямой к оси Ox обозначим α. Через точку $A(a; f(a))$ проведем прямую, параллельную оси Ox до пересечения с перпендикуляром, проведенным из точки $B(b; f(b))$ к оси абсцисс (рис. 8.6). В прямоугольном треугольнике ANB $AN=b-a$, $NB=f(b)-f(a)$, $\angle BAN=\alpha$, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Предположим, что отрезок AB передвигается, оставаясь параллельным исходному положению, до тех пор, пока он станет касательной к графику в некоторой точке $C(c, f(c))$, где $a<c<b$. Формула (8.4) в данном случае

принимает вид $\operatorname{tg}\alpha = f'(c)$. Из двух формул для $\operatorname{tg}\alpha$ следует $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Умножив почленно последнее равенство на $(b-a)$, получим формулу (8.27), которую называют *формулой конечных приращений*. Она означает следующее: конечное приращение дифференцируемой функции равно произведению соответствующего приращения аргумента и значения производной в некоторой промежуточной точке.

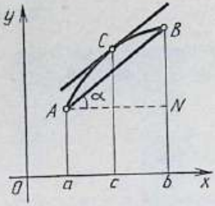


Рис. 8.6

Рассмотрим следствия из теоремы Лагранжа.

Следствие 1. Если производная функции равна нулю в некотором промежутке, то функция постоянна в этом промежутке.

▷ Пусть $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, тогда для любой фиксированной точки x_0 и любой другой точки x из этого промежутка по теореме Лангранжа получаем $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поскольку $f'(c) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = 0$ или $f(x) = f(x_0) = \text{const}$. ◁

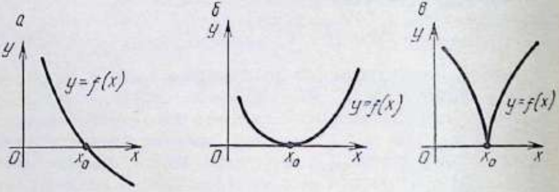


Рис. 8.7

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные в некотором промежутке, то они отличаются в нем лишь произвольной постоянной.

▷ Действительно, если $f_1'(x) = f_2'(x)$ для всех $x \in (a;\ b)$, или $(f_1(x) - f_2(x))' = 0$, то по следствию 1 $f_1(x) - f_2(x) = c$, где $c = \text{const}$, т. е. функции отличаются произвольной постоянной. ◁

Корнем (нулем) функции $y=f(x)$ называют такое значение x_0 аргумента x, при котором эта функция равна нулю: $f(x_0)=0$. Корень функции геометрически означает точку пересечения ее графика с осью Ox (рис. 8.7, *а*), точку их касания (рис. 8.7, *б*) или другую их общую точку (рис. 8.7, *в*).

Теорема Ролля. Между двумя различными корнями дифференцируемой функции находится по меньшей мере один корень ее производной.

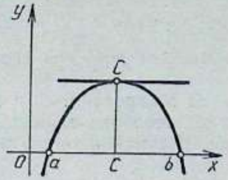


Рис. 8.8

▷ Пусть a и b — различные корни функции, т. е. $f(a)=0$, $f(b)=0$, $a<b$. Применяя теорему Лагранжа, получаем $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, где $a<c<b$. Так как $f(b)=f(a)=0$, то $0=f'(c)(b-a)$. Поскольку $b-a\neq 0$, то $f'(c)=0$, то $a<c<b$. Итак, c — корень производной, причем $a<c<b$. ◁

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл: если график функции $y=f(x)$ пересекает ось Ox в точках a и b, то между ними имеется хотя бы одно значение c, такое, что касательная к графику в точке $C(c, f(c))$ параллельна оси Ox (рис. 8.8).

8.8. Производные высших порядков

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y=f(x)$. Ее производную $y'=f'(x)$ назовем *первой производной*, или *производной первого порядка*.

Второй производной, или *производной второго порядка* функции $y=f(x)$, называют производную от ее первой производной и обозначают y'' или $f''(x)$, т. е. $y''=(y')'$, $f''(x)=(f'(x))'$.

Выясним физический смысл второй производной. Рассмотрим прямолинейное движение точки, осуществляемое по закону $x=f(t)$, где $x=OM$ — пройденный путь (см. рис. 8.2), $f(t)$ — заданная функция времени t. Скорость v этого движения равна производной от пути по времени: $v=f'(t)$. Фиксируем момент времени t, приращению Δt будет соответствовать приращение скорости Δv. Назовем средним ускорением за промежуток времени Δt отношение приращения скорости Δv к приращению Δt, а ускорением в данный момент времени t предел среднего ускорения при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$w_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \; w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Поскольку последний предел есть производная функции v, то $w = v'$. Так как $v = f'(t)$, то $w = v' = (f'(t))' = f''(t)$, т. е. $w = f''(t)$. Эта формула выражает физический смысл второй производной: ускорение неравномерного прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.

Третьей производной, или производной третьего порядка, от функции $y = f(x)$ называют производную от ее второй производной и обозначают y''' или $f'''(x)$: $y''' = (y'')'$, $f'''(x) = (f''(x))'$.

Аналогично определяются производные четвертого, пятого и более высоких порядков.

При нахождении производных высших порядков используют обычные правила и формулы дифференцирования. Например, если $y = 3x^2 - 7x + 5$, то $y' = 6x - 7$, $y'' = 6$, $y''' = 0$; если $y = \sin 2x$, то $y' = 2 \cos 2x$, $y'' = -4 \sin 2x$, $y''' = -8 \cos 2x$, $y^{IV} = 16 \sin 2x$; если $y = e^x$, то $y' = e^x$, $y'' = e^x$, ..., $y^{(n)} = e^x$ при любом натуральном n.

8.9. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Необходимое и достаточное условие постоянства функции $y = c$ выражается равенством $y' = 0$.

Действительно, если $y = c$, то $y' = c' = 0$. Обратно, если $y' = 0$, то по следствию 1 из теоремы Лагранжа получаем $y = c$.

Обратимся к понятиям возрастающей и убывающей функции (см. формулы (3.3) и (3.4)).

Используя понятие производной, можно установить, является ли возрастающей или убывающей данная функция на некотором промежутке. Это осуществляется с помощью следующей теоремы, выражающей достаточное условие возрастания (убывания) функции.

Теорема 8.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет положительную производную ($f'(x) > 0$) в некотором промежутке, то она возрастает в этом промежутке; если $f'(x) < 0$, то функция убывает в соответствующем промежутке.*

▷ Пусть $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$. Фиксируем значения $x_1,\ x_2 \in (a;\ b)$ и используем теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где c лежит между x_1 и x_2. Так как $f'(c) > 0$, то разности $f(x_2) - f(x_1)$ и $(x_2 - x_1)$ имеют один знак. Поэтому из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Это означает, что $f(x)$ возрастает в интервале $(a;\ b)$.

Предположим, что $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, тогда $f'(c) < 0$, где $c \in (a;\ b)$. Из равенства $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ заключаем, что разности $x_2 - x_1$ и $f(x_2) - f(x_1)$ имеют противоположные знаки. Поэтому, если $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Значит, функция убывает в промежутке $(a;\ b)$. ◁

Замечание. Теорема имеет следующий геометрический смысл: если касательная к графику функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(a;\ b)$, проведенная в любой точке графика, образует с осью Ox острый угол α ($\operatorname{tg} \alpha > 0$), то функция возрастает в этом промежутке. Если касательная к графику функции образует с осью Ox тупой угол α ($\operatorname{tg} \alpha < 0$), то функция убывает в соответствующем промежутке.

Пример. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 10$.

Находим производную данной функции $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$. Разложим на множители квадратный трехчлен: $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-1)(x-5)$. Отсюда видно, что если $x < 1$, то $f'(x) > 0$: функция возрастает в интервале $(-\infty;\ 1)$; если $1 < x < 5$, то $f'(x) < 0$: функция убывает в интервале $(1;\ 5)$; если $x > 5$, то $f'(x) > 0$: функция возрастает в интервале $(5;\ +\infty)$.

8.10. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума

Максимумом функции $f(x)$ называют такое ее значение $f(x_1)$, которое больше всех других ее значений, принимаемых в точках, достаточно близких к точке x_1: $f(x) < f(x_1)$, где $x = x_1 + \Delta x$; $|\Delta x| < \sigma$, $\sigma > 0$, σ — достаточно малое число (рис. 8.9, *а*).

Минимумом функции $f(x)$ называют такое ее значение $f(x_2)$, которое меньше всех других ее значений, принимаемых в точках, достаточно близких к точке x_2: $f(x_2) < f(x)$, где $x = x_2 + \Delta x$; $|\Delta x| < \delta$; $\delta > 0$, δ — достаточно малое число (рис. 8. 9, *б*). Максимум и минимум функции называют *экстремумом. Точкой экстремума функции* $f(x)$ называют такое значение x_0 аргумента, при котором функция имеет экстремум, т. е. максимум или минимум. На рис. 8.9 x_1 и x_2 — точки экстремума, причем x_1 — точка максимума, x_2 — точка минимума.

Необходимое условие экстремума выражается следующей теоремой.

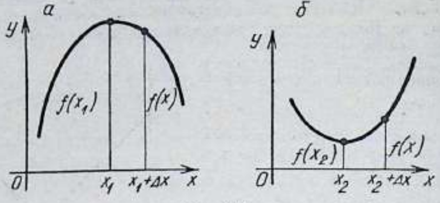


Рис. 8.9

Теорема 8.2. *В точке экстремума дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

▷ Пусть x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$. Для определенности предположим, что x_0 — точка минимума, тогда $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$, где $|\Delta x| < \sigma$, $\sigma > 0$. Следовательно, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x > 0$, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x < 0$.

Переходя к пределам в этих неравенствах, при $\Delta x \to 0$, получаем: $f'(x_0) \geqslant 0$ при $\Delta x > 0$; $f'(x_0) \leqslant 0$ при $\Delta x < 0$. Здесь принято во внимание то, что предел b функции, принимающий положительные значения, является неотрицательным. Поскольку предел функции есть постоянная, не зависящая от способа стремления аргумента к своему предельному значению, то из неравенств $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$ следует, что $f'(x_0) = 0$. В случае, когда x_0 — точка максимума, доказательство аналогично. ◁

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл: если при $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет экстремум, то касательная в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ графика данной функции параллельна оси Ox. Действительно, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю: $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 0$.

Замечание 1. Равенство $f'(x_0) = 0$ не является достаточным условием того, что x_0 — точка экстремума функции $f(x)$. Например, для функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеем $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, но x_0 не является точкой экстремума, ибо $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$

(см. рис. 3.21). Поэтому нет такой окрестности точки x_0, для всех точек которой выполнялось хотя бы одно из неравенств $f(x) < f(x_0)$ или $f(x_0) < f(x)$.

Замечание 2. Функция может иметь экстремум в точке, в которой производная не существует или обращается в бесконечность. Например, функция $f(x) = |x-2|$ не имеет производной в точке $x = 2$ (рис. 8.10), но достигает в ней минимума: $f(2) = 0$ и $f(x) > f(2)$ для всех точек любой окрестности точки $x = 2$. Функция $f(x) = x^{2/3}$ не имеет конечной производной в точке $x = 0$, поскольку $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ при $x = 0$ обращается в бесконечность, но в этой точке функция имеет минимум: $f(0) = 0$, $f(x) > f(0)$ при $x \neq 0$.

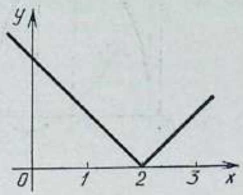


Рис. 8.10

Точка, в которой производная равна нулю, называется *стационарной*. Точка, в которой функция не имеет производной, или в которой производная обращается в бесконечность, называется *критической*. Следовательно, точки экстремума следует искать среди критических и стационарных точек.

8.11. Достаточное условие экстремума

Вопрос о достаточном условии экстремума можно решить с помощью первой или второй производной.

Чтобы сформулировать теорему о достаточном условии экстремума с помощью первой производной, разъясним, что понимают под выражением «функция меняет знак при переходе через данную точку». Будем говорить, что функция $f(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, если $f(x_1)f(x_2) < 0$ при значениях x_1 и x_2, достаточно близких к x_0 и таких, что $x_1 < x_0 < x_2$, причем знак меняется с плюса на минус, когда $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$, и с минуса на плюс, если $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (рис. 8.11).

Теорема 8.3. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю при $x = x_0$ и меняет знак при переходе через x_0, то x_0 — точка экстремума, причем: 1) x_0 — точка максимума, если знак меняется с плюса на минус; 2) x_0 — точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.*

▷ По условию $f'(x_0) = 0$, $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, когда $x_1 < x_0 < x_2$, причем x_1 и x_2 незначительно удалены от x_0.

Предположим, производная меняет знак с плюса на минус, т. е. $f'(x_1) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0$, где $\varepsilon > 0$, $f'(x_2) < 0$ при $x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon$.

Эти неравенства означают, что функция $f(x)$ возрастает в интервале $(x_0 - \varepsilon;\ x_0)$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех x из этого интервала; функция $f(x)$ убывает в интервале $(x_0;\ x_0 + \varepsilon)$,

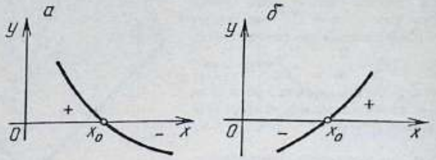


Рис. 8.11

т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0;\ x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, для всех $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Значит, $f(x_0)$ — максимум функции, x_0 — точка максимума. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ◁

Пример 1. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x$.

Производная $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ обращается в нуль в двух точках: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Поскольку $f'(x) > 0$ при $x < -1$ и $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 1$, то $x_1 = -1$ — точка максимума. Так как $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 1$ и $f'(x) > 0$ при $x > 1$, то $x_2 = 1$ — точка минимума. Вычислим значения экстремумов: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$.

Теорема 8.4. *Если при $x = x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю, а вторая отлична от нуля, то x_0 — точка экстремума данной функции, причем: 1) x_0 — точка максимума, если $f'(x_0) < 0$; 2) x_0 — точка минимума, если $f'(x_0) > 0$.*

▷ В соответствии с условием $f'(x) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, тогда либо $f''(x_0) > 0$, либо $f''(x_0) < 0$. Рассмотрим случай, когда $f''(x_0) < 0$. По определению второй производной

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0},$$

так как $f'(x_0) = 0$. Поскольку $f''(x_0) < 0$, то частное $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ также отрицательно при значениях x, достаточно близких к x_0. Производная $f'(x) < 0$, когда $x - x_0 > 0$, т. е.

при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и $f'(x) > 0$, когда $x - x_0 < 0$, т. е. при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ ($\varepsilon > 0$). Эти неравенства означают, что $f(x)$ возрастает в интервале $(x_0 - \varepsilon;\ x_0)$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0)$, и $f(x)$ убывает в интервале $(x_0;\ x_0 + \varepsilon)$, т. е. $f(x_0) > f(x)$ для всех $x \in (x_0;\ x_0 + \varepsilon)$. Таким образом, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$. Значит, x_0 — точка максимума функции $f(x)$. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. $\lhd$

Пример 2. Найти экстремум функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x + 8$. Первая производная $f'(x) = 3x^2 - 3x \cdot 18 = 3(x^2 - x - 6) = 3(x+2)(x-3)$ равна нулю при $x = -2$ и при $x = 3$. Вторая производная $f'(x) = 6x - 3$ при этих значениях аргумента в нуль не обращается: $f''(-2) = -15 < 0$, $f''(3) = 15 > 0$. Так как $f''(-2) < 0$, то $x = -2$ — точка максимума; поскольку $f''(3) > 0$, то $x = 3$ — точка минимума. Значения экстремумов: $f(-2) = 30$, $f(3) = -31{,}5$.

8.12. Направления выпуклости графика

График функции $y = f(x)$ называют *выпуклым вверх (вогнутым вниз)* в интервале $(a;\ b)$, если он расположен целиком ниже касательной, проведенной в любой его точке (рис. 8.12, *а*). График функции $y = f(x)$ называют *выпуклым вниз (вогнутым вверх)* в интервале $(a;\ b)$, если он расположен целиком выше касательной, проведенной в любой его точке (рис. 8.12, *б*).

Достаточные условия выпуклости графика (вверх или вниз) выражаются теоремой, приведенной ниже.

Теорема 8.5. *Если вторая производная функции положительна в некотором интервале, то ее график является выпуклым вниз в этом интервале, если вторая производная функции отрицательна, то ее график является выпуклым вверх в соответствующем интервале.*

$\rhd$ Пусть для функции $y = f(x)$ ее вторая производная в интервале $(a;\ b)$ положительна: $f''(x) > 0$ при $x \in (a;\ b)$. Фиксируем точку $M_0(x_0,\ y_0)$ графика данной функции. Уравнение касательной к графику в этой точке имеет вид: $Y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ или $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Вторую координату точки касательной обозначили Y, чтобы различать ординаты точки графика функции $y = f(x)$ и точки касательной к этому графику при одном и том же значении аргумента x. Вычитая равенство $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ из равенства $y = f(x)$, находим $y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Применяя теорему Лагранжа, получаем $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, где c лежит между x и x_0. Следовательно, $y-Y=f'(c)(x-x_0)-$ $-f'(x_0)(x-x_0)$ или

$$y-Y=(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0). \qquad (8.28)$$

По условию $f''(x)>0$, т. е. $(f'(x))'>0$ при $x\in(a;\ b)$. Значит, $f'(x)$ возрастает в интервале $(a;\ b)$. Если $x_0<x$, то $x_0<$

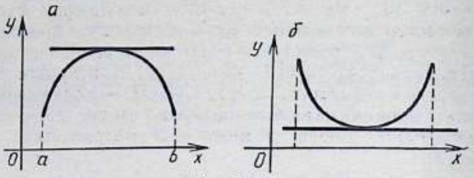


Рис. 8.12

$<c<x$ и $f'(x_0)<f'(c)$, т. е. $x-x_0>0$ и $f'(c)-f'(x_0)>0$. Согласно формуле (8.28), $y-Y>0$, или $y>Y$. Это означает, что график функции лежит выше касательной справа от точки M_0. Если $x<x_0$, то $x<c<x_0$ и $f'(c)<f'(x_0)$, т. е. $x-x_0<0$, $f'(c)-f'(x_0)<0$. По формуле (8.28) получим, что $y-Y>0$, или $y>Y$: график функции находится выше касательной слева от M_0. Таким образом, график функции $y=f(x)$ расположен целиком выше касательной, проведенной в любой его точке M_0, т. е. является выпуклым вниз в интервале $(a;\ b)$.

Первое утверждение теоремы доказывается аналогично. $\lhd$

Пример. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $f(x)=x^3-3x^2+1$.

Дифференцируя эту функцию, находим: $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=$ $=6x-6=6(x-1)$. Отсюда видно, что $f''(x)>0$ при $x>1$ и $f''(x)<0$ при $x<1$. Значит, график функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty;\ 1)$ и выпуклым вниз в интервале $(1;\ +\infty)$.

8.13. Точки перегиба графика функции

Точкой перегиба графика функции называют такую точку M_0 графика (рис. 8.13), при переходе через которую выпуклость меняется на вогнутость.

Достаточное условие точки перегиба выражается теоремой, приведенной ниже.

Теорема 8.6. *Если при $x = x_0$ вторая производная функции $f(x)$ равна нулю и меняет знак при переходе через это значение, то $M_0(x_0,\ f(x_0))$ — точка перегиба графика данной функции.*

$\triangleright$ По условию $f''(x_0) = 0$, вторая производная меняет знак при переходе через x_0. Предположим, что знак меняется с минуса на плюс, т. е. $f''(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0 (\varepsilon > 0)$, $f''(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. На основании теоремы 8.5 заключаем, что график функции $f(x)$ является выпуклым вверх в интервале $(x_0 - \varepsilon;\ x_0)$ и вогнутым вверх (выпуклым вниз) в интервале $(x_0;\ x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, в точке $M(x_0,\ f(x_0))$ выпуклость вверх меняется на вогнутость вверх, т. е. M_0 — точка перегиба графика функции $f(x)$. Случай, когда вторая производная меняет знак с плюса на минус, рассматривается аналогично. $\triangleleft$

Пример. Найти точку перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

Дифференцируя данную функцию, получаем $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$. Вторая производная равна нулю при $x_0 = 2$ и меняет знак при переходе через это значение аргумента (с минуса на плюс: $f'(x) < 0$, если $x < 2$ и $f'(x) > 0$, если $x > 2$). Значит, $x_0 = 2$ — абсцисса точки перегиба. Ордината этой точки $f(x_0) = f(2) = 6$. Следовательно, $M_0(2,\ 6)$ — точка перегиба графика данной функции.

8.14. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называют прямую линию, к которой неограниченно приближается точка, движущаяся по кривой при неограниченном ее удалении от начала координат (рис. 8.14).

Различают вертикальные (параллельные оси Oy), и невертикальные (пересекающие эту ось) асимптоты.

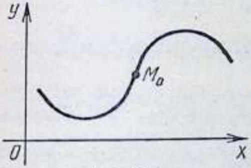


Рис. 8.13

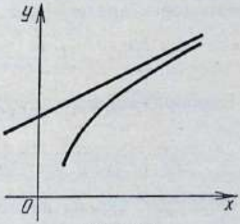


Рис. 8.14

Прямую, определяемую уравнением $x=a$, называют *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов этой функции в точке a является бесконечным:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

Например, график функции $f(x)=\frac{5}{x-3}$ имеет вертикальную асимптоту $x=3$ (рис. 8.15), так как

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{5}{x-3}=-\infty; \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{5}{x-3}=+\infty.$$

Прямую, определенную уравнением

$$y=kx+b, \tag{8.29}$$

называют *невертикальной (наклонной) асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если эта функция представима в виде

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{8.30}$$

где

$$\lim_{x\to\pm\infty} \alpha(x)=0. \tag{8.31}$$

Если график функции $y=f(x)$ имеет невертикальную асимптоту (8.29), тогда существуют два предела:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=k; \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx)=b. \tag{8.32}$$

Действительно, в этом случае функцию $f(x)$ можно представить формулой (8.30), причем $\alpha(x)$ удовлетворяет условию (8.31). Разделим равенство (8.30) почленно на x и перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\frac{f(x)}{x}=k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=k.$$

Преобразуем формулу (8.30) и перейдем к пределу при $x\to\pm\infty$:

$$f(x)-kx=b+\alpha(x); \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx)=b.$$

Обратное также верно. Если существуют пределы (8.32), то график функции $f(x)$ имеет невертикальную

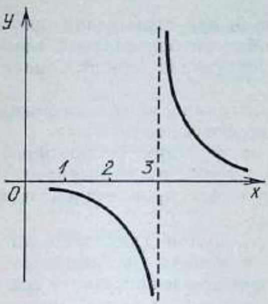


Рис. 8.15

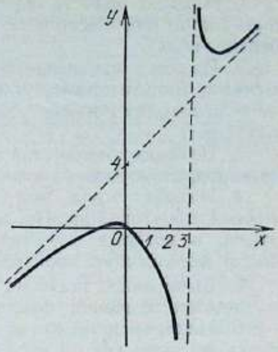


Рис. 8.16

асимптоту (8.29). В самом деле, второй из пределов (8.32) означает, что $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$ или $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ $(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0)$, т. е. выполнено равенство (8.30) и условие (8.31).

Пример. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 3}$.

График данной функции имеет вертикальную асимптоту $x = 3$, так как $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = +\infty$. Поскольку

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 3} = x + 4 + \frac{12}{x - 3} \text{ и } \lim_{x \to \infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

т. е. функция представима формулой вида (8.30) и выполнено условие (8.31), то имеется и невертикальная асимптома $y = x + 4$ (рис. 8.16).

8.15. Исследование функций и построение их графиков

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. Исследование функций и построение их графиков проводят по схеме, приведенной ниже.

1. Находят область определения функции (это может быть один или несколько промежутков, конечных или бесконечных).

2. Изучают изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения (для чего необходимо найти соответствующие односторонние пределы).

3. Находят промежутки возрастания и убывания функции (исследуя знак ее первой производной).

4. Находят точки экстремума функции (с помощью первой или второй производной, а также путем выявления точек, в которых функция не имеет производной или имеет бесконечную производную).

5. Вычисляют значения экстремумов (для чего вычисляются значения функции в точках экстремумов).

6. Находят промежутки выпуклости и вогнутости графика функции (путем исследования знака второй производной и нахождения точек, в которых вторая производная равна нулю и меняет знак при переходе через соответствующую точку).

7. Находят асимптоты графика функции (вертикальные и невертикальные, в соответствии с их определениями и свойствами).

8. Находят точки пересечения графика функции с координатными осями (для чего нужно решить системы уравнений: $y=f(x)$, $x=0$ и $y=f(x)$, $y=0$; если некоторая из этих систем несовместна, то график не пересекает соответствующую ось).

При построении графиков функций необходимо иметь в виду, что график функции, принимающей только положительные (отрицательные) значения, целиком расположен выше (ниже) оси Ox; график четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой, на которой лежит биссектриса первого координатного угла.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x^2+2$ и построить ее график.

Данная функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой. При неограниченном увеличении независимой переменной x ($x\to+\infty$) значения функции неограниченно возрастают ($f(x)\to+\infty$), при неограниченном уменьшении независимой переменной x ($x\to-\infty$) значения функции неограниченно уменьшаются ($f(x)\to-\infty$).

Асимптот функция не имеет. Производная данной функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Решив уравнение $3x^2 - 6x = 0$, находим (стационарные) точки функции $f(x)$: $x = 0$ и $x = 2$. Этими точками числовая прямая (область определения функции) разбивается на три промежутка, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак: $f'(x) > 0$ для $x > 2$ и $x < 0$, $f'(x) < 0$ для $0 < x < 2$. Следовательно, в промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(2;\ +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает, а в промежутке $(0;\ 2)$ — убывает. Точка $x = 0$ является точкой максимума, $f(0) = 2$; точка $x = 2$ является точкой минимума, $f(2) = -2$.

Из уравнения $f(x) = 0$ находим нули функции. Разложим выражение $x^3 - 3x^2 + 2$ на множители:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 2 = x^2(x-1) - 2x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = (x-1)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3})).$$

Решив уравнение $(x-1)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3})) = 0$, находим три нуля функции $f(x)$: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, $x_3 = 1 - \sqrt{3}$. В этих точках график заданной функции пересекает ось Ox. Исследуемая функция принимает положительные значения ($f(x) > 0$) при $1 - \sqrt{3} < x < 1$ и $x > 1 + \sqrt{3}$ и отрицательные ($f(x) < 0$) при $x < 1 - \sqrt{3}$ и $1 < x < 1 + \sqrt{3}$. График заданной функции пересекает ось Oy в точке $y = 2$.

График функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ изображен на рис. 8.17.

Пример 2. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2}$ и построить ее график.

Данная функция определена на всем множестве действительных чисел за исключением точки $x = 0$, непрерывна и дифференцируема на всей области определения. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. При неограниченном увеличении и неограниченном уменьшении независимой переменной x значения функции стремятся к числу 2:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 2; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2} = 2.$$

Прямая, задаваемая уравнением $y = 2$,— горизонтальная асимптота. Прямая, задаваемая уравнением $x = 0$,— вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2} = -\infty.$$

Находим производную данной функции: $f'(x) = \dfrac{-5x^2 + 6x}{x^4} = \dfrac{-5x + 6}{x^3}$.

Точка $x = 6/5$ является стационарной для функции $f(x)$ (производная $f'(x)$ при $x = 6/5$ обращается в нуль), в точке $x = 0$ производная $f'(x)$ не существует, но так как точка $x = 0$ не принадлежит области определения данной функции, то она не является критической точкой.

В промежутке (0; 6/5) производная данной функции положительна, значит, функция в этом промежутке возрастает; в промежутке (6/5; $+\infty$) производная данной функции отрицательна, значит, в этом промежутке функция убывает. Следовательно, точка $x=6/5$ является точкой максимума функции. При этом максимальное значение функции $f\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{49}{12}$. Кроме того, максимальное значение функции является наибольшим на всей области определения функции.

Так как $f'(x)<0$ при $x<0$, то функция убывает в промежутке $(-\infty; 0)$.

Находим вторую производную данной функции: $f''(x)=$ $=\frac{10x^3-18x^2}{x^5}=\frac{10x-18}{x^4}$.

В промежутке (1,8; $+\infty$) график функции $f(x)$ вогнут вверх, так как в этом промежутке вторая производная положительна, а в промежутках $(-\infty; 0)$ и (0; 1,8) вторая производная отрицательна, значит, график функции вогнут вниз. В точке $x=1{,}8$ график функции $f(x)$ имеет перегиб.

График функции $f(x)=\frac{2x^2+5x-3}{x^2}$ изображен на рис. 8.18.

График функции не пересекает ось Oy, а пересекает ось Ox в точках, которые являются корнями уравнения $\frac{2x^2+5x-3}{x^2}=0$, т. е. в точках $x=-3$ и $x=1/2$.

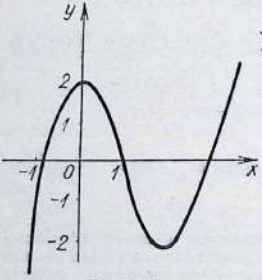


Рис. 8.17

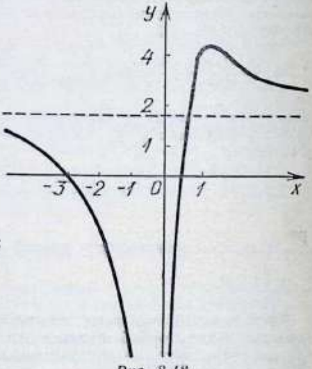


Рис. 8.18

9. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

9.1. Радианное измерение углов и дуг. Соотношения между градусной и радианной мерами угла

Радианом называют величину центрального угла, длина дуги которого равна длине радиуса. Если $OA = R = \breve{AB}$ (рис. 9.1), то $\angle BOA = 1$ рад, причем $1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$. Действительно, в окружности радиусом R центральный угол 180° опирается на дугу длиной πR, центральный угол 1° — на дугу длиной $\frac{\pi}{180}R$, а центральный угол $\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$ — на дугу длиной $\frac{180}{\pi}\left(\frac{\pi R}{180}\right) = R$. Следовательно,

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ. \qquad (9.1)$$

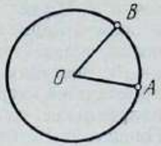


Рис. 9.1

Эта формула является основной при переводе радианной меры углов в градусную и обратно. Из формулы (9.1) получаем: $180^\circ = \pi$, $270^\circ = \frac{3}{2}\pi$, $360^\circ = 2\pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $-30^\circ = -\frac{\pi}{6}$.

Отметим, что

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) 57^\circ 17' 45'' \simeq 57{,}3^\circ; \; 1 \text{ рад} = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} = 3438'.$$

Поскольку 180° соответствуют π радианам, то

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745, \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \simeq \frac{1}{60} \cdot 0{,}01745 \simeq 0{,}0002909;$$

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' \simeq \frac{1}{60} \cdot 0{,}00029 \simeq 0{,}0000048.$$

Эти соотношения позволяют переводить градусную меру угла в радианную. Например,

$$150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{150\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi; \; 340^\circ = \frac{340}{180}\pi = \frac{17}{9}\pi.$$

Если длину дуги окружности радиусом R обозначить l, радианную меру центрального угла этой окружности, опирающегося на данную дугу α, то на основании определения радианной меры угла $l/R = \alpha$, откуда $l = R\alpha$.

9.2. Тригонометрические функции числового аргумента

Отображение множества действительных чисел на множество точек единичной окружности. Поворот на α радиан вокруг начала координат будем обозначать R^α, а образ точки $P_0(1, 0)$ при повороте R^α через P_α: $P_\alpha = R^\alpha(P_0)$. Каждому действительному числу t поставим в соответствие точку $P_t = R^t(P_0)$ единичной окружности, получим отображение $t \xrightarrow{R^t} P_t$ множества R на множество точек единичной окружности. Поскольку повороты R^t и $R^{t+2\pi}$ совпадают, то точка P_t будет соответствовать не только числу t, но и всем числам вида $t + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — множество целых чисел). Чтобы наглядно представить отображение $t \to P_t$, поступим следующим образом. На прямой $x = 1$, проходящей через точку P_0, выберем положительное направление, как на оси Oy, и превратим ее в ось P_0t. Представим себе бесконечную нерастяжимую нить, натянутую вдоль этой оси и закрепленную в точке P_0. Оба конца этой нити будем «наматывать» на единичную окружность (рис. 9.2). При этом точка нити с ординатой t на оси P_0t попадет в точку P_t единичной окружности, в нее же попадут точки с ординатой $t + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Другими словами, два действительных числа s и t, отображающиеся на одну и ту же точку единичной окружности, связаны между собой соотношением $s - t = 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Определение тригонометрических функций числового аргумента. Рассмотрим окружность радиусом $R = 1$ с центром в точке O. Поместим в этой точке начало прямоугольной декартовой системы координат (рис. 9.3). Единичную точку P_0 оси абсцисс повернем на угол α радиан вокруг начала координат; в результате получим точку $P_\alpha = R^\alpha(P_0)$, ее координаты обозначим x_α, y_α, где $x_\alpha = OA$, $y_\alpha = OB$; $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$.

Введем понятия синуса и косинуса числового аргумента. Ординату y_α точки P_α, полученной при повороте точки $P_0(1, 0)$ вокруг начала координат на α радиан, называют *синусом числа* α. Абсциссу x_α точки P_α, полученной при повороте точки $P_0(1, 0)$ вокруг начала координат на α радиан, называют *косинусом числа* α. Итак,

$$y_\alpha = \sin \alpha; \; x_\alpha = \cos \alpha, \tag{9.2}$$

где $P_\alpha = R^\alpha(P_0)$; $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$. Синус числа α равен синусу

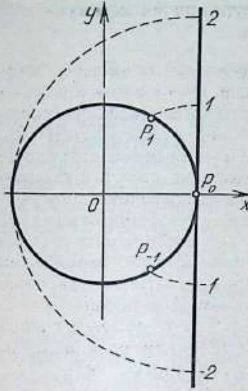


Рис. 9.2

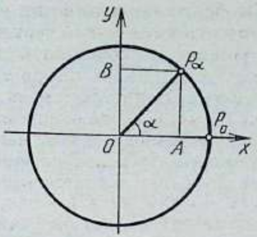


Рис. 9.3

угла α радиан, а косинус числа α — косинусу угла α радиан.

Каждому действительному числу x поставим в соответствие его синус, получим функцию $y = \sin x$. Сопоставляя каждому действительному числу x его косинус, получаем функцию $y = \cos x$.

Область определения функций синуса и косинуса есть множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Множеством значений этих функций служит отрезок $[-1;\ 1]$, поскольку координаты любой точки P_α единичной окружности по модулю не превосходят единицы: $|\sin \alpha| \leqslant 1$, $|\cos \alpha| \leqslant 1$.

Если $P_\alpha(x_\alpha,\ y_\alpha)$ — точка единичной окружности, то по теореме Пифагора $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$. Подставляя в это равенство выражения (9.2), получаем

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{9.3}$$

Это соотношение, верное при всех α, называют *основным тригонометрическим тождеством.*

Введем определения тангенса и котангенса числового аргумента. *Тангенсом числа* α называют отношение синуса этого числа к косинусу того же числа:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \tag{9.4}$$

Котангенсом числа α называют отношение косинуса этого числа к синусу того же числа:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{9.5}$$

Полезно наглядное представление о тангенсе и котангенсе. Рассмотрим прямую $x = 1$, проходящую через точку P_0 единичной окружности (рис. 9.4). Пусть для определенности $0 < \alpha < \pi/2$. Точку пересечения указанной прямой с лучом OP_α обозначим M. Из подобия треугольников $OP_\alpha A$, OMP_0 получаем: $MP_0/OP_0 = P_\alpha A/OA$. Поскольку $OP_0 = 1$, $P_\alpha A = \sin \alpha$, $OA = \cos \alpha$, то

$$MP_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Вообще, ордината точки M пересечения луча OP_α и прямой P_0M ($P_0M \perp Ox$) есть тангенс угла α, поэтому прямую P_0M называют *линией тангенсов*. Аналогично можно показать, что абсцисса точки N пересечения луча OP_α (рис. 9.5) с прямой $P_{\pi/2}N$ ($P_{\pi/2}N \perp Oy$) есть котангенс угла α: $P_{\pi/2}N = \operatorname{ctg} \alpha$. Прямую $P_{\pi/2}N$ называют *линией котангенсов*.

Функции тангенс и котангенс определяются формулами: $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, где x — любое действительное число.

Из формулы (9.4) следует, что область определения тангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, так как в этих точках знамена-

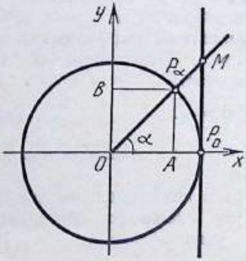


Рис. 9.4

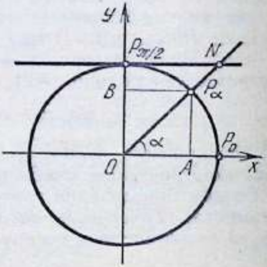


Рис. 9.5

тель обращается в нуль ($\cos \alpha = 0$) и тангенс α не существует. Множеством значений тангенса является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Из формулы (9.5) видно, что область определения котангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида πn, где $n \in \mathbf{Z}$, поскольку в этих точках знаменатель обращается в нуль ($\sin \alpha = 0$) и котангенс α не существует. Множеством значений котангенса является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Синус, косинус, тангенс и котангенс считают основными тригонометрическими функциями. Рассматривают также тригонометрические функции секанс и косеканс, определяемые формулами

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \qquad (9.6)$$

Покажем, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha. \qquad (9.7)$$

▷ Пусть A и B — основания перпендикуляров, проведенных из точки P_α единичной окружности на координатные оси (рис. 9.6). Тогда $OA = \cos \alpha$, $OB = \sin \alpha$. Рассмотрим угол $P_\alpha OB$, дополняющий угол AOP_α до прямого: $\angle P_\alpha OB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Построим угол $A_1OP_{\frac{\pi}{2} - \alpha}$, величина которого равна $\frac{\pi}{2} - \alpha$, для чего отложим $OA_1 = OB$, $OB_1 = OA$. Так как точка $P_{\frac{\pi}{2} - \alpha}$ имеет координаты $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, т. е. $OA_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $OB_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, то из равенства $OA_1 = OB$, $OB_1 = OA$ и выражений для OA, OB, OA_1, OB_1 получаем формулы (9.7). ◁

Два угла α и β, для которых $\alpha + \beta = \pi/2$, называют *дополнительными*. В частности, угол β является дополнительным к углу $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, угол α — дополнительным к углу $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Для дополнительных углов доказаны формулы (9.7). Эти формулы означают следующее: синус любого угла равен косинусу дополнительного к нему угла; косинус любого угла равен синусу дополнительного к нему угла. Например,

$$\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

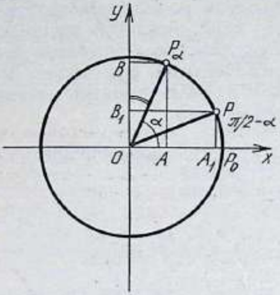


Рис. 9.6

Знаки тригонометрических функций. Исследуем вопрос о знаках значений тригонометрических функций. Рассмотрим единичную окружность с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат (см. рис. 9.3). Поворот на α радиан вокруг начала координат отображает точку $P_0(1, 0)$ на точку $P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$, которая в зависимости от величины α, может оказаться в любой из четырех четвертей. Если точка P_α окажется на координатной оси, то будем указывать, на какой полуоси (положительной или отрицательной) она находится. Поскольку ординаты точек I и II четвертей положительны, то значения синусов чисел (углов), находящихся в этих четвертях, также положительны. Так как ординаты точек III и IV четвертей отрицательны, то значения синусов в этих четвертях отрицательны (рис. 9.7, *а*). Аналогично устанавливается, что значения косинусов положительны в I и IV четвертях и отрицательны во II и III четвертях (рис. 9.7, *б*).

Поскольку знаки синуса и косинуса совпадают в I и III четвертях и противоположны во II и IV четвертях, то из формул (9.4), (9.5) следует, что тангенс и котангенс положительны в I и III четвертях и отрицательны во II и IV четвертях (рис. 9.7, *в*).

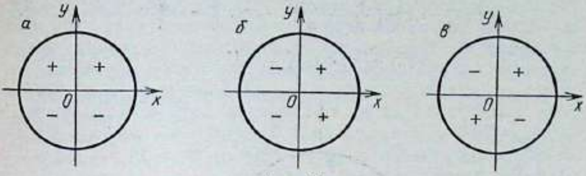


Рис. 9.7

Четные и нечетные тригонометрические функции. Докажем, что косинус — четная функция, а синус, тангенс и котангенс — нечетные. Пусть α и $-\alpha$ — два любых противоположных действительных числа. На единичной окружности им соответствуют точки P_α и $P_{-\alpha}$, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 9.8). Эти точки имеют следующие координаты: $P_\alpha(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $P_{-\alpha}(\cos(-\alpha),\ \sin(-\alpha))$. Поскольку P_α и $P_{-\alpha}$ симметричны относительно оси абсцисс, то отсюда следует, что их абсциссы совпадают, а ординаты противоположны. Это значит, что при любом α $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin(-\alpha)=$ $=-\sin\alpha$. Полученные равенства означают, что косинус — четная функция, а синус — нечетная.

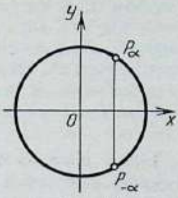


Рис. 9.8

Используя эти равенства, с помощью формул (9.4) и (9.5) получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

т. е. $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Следовательно, тангенс и котангенс — нечетные функции.

9.3. Периодичность тригонометрических функций

Докажем, что тригонометрические функции являются периодическими. Трем действительным числам α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2\pi$ на единичной окружности соответствует одна и та же точка P_α. Следовательно, если число α принадлежит области определения тригонометрической функции, то числа $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2\pi$ также принадлежат этой области и для них справедливы равенства: $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\sin(\alpha - 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$, $\cos(\alpha - 2\pi) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha - 2\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi) = \operatorname{ctg}\alpha$.

Эти равенства означают, что число 2π является периодом указанных тригонометрических функций.

Найдем наименьший положительный период каждой из этих функций. Пусть $T \neq 0$ — наименьший положительный период функции $\sin x$, тогда $\sin(\alpha + T) = \sin\alpha$ при любом α. В частности, при $\alpha = 0$ получаем $\sin(0 + T) = \sin 0$, т. е. $\sin T = 0$. На единичной окружности существуют только две точки, имеющие ординату, равную нулю: P_0 и P_π. Наименьшие положительные числа, изображаемые этими точками, соответственно равны 2π и π. Значит, число T может быть равным либо 2π, либо π. Если $T = \pi$ — период функции $\sin x$, то тождество $\sin(\alpha + \pi) = \sin\alpha$ должно выполняться для всех α, в том числе и для $\alpha = \pi/2$. Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$, а $\sin \pi/2 = 1$, то оно не выполняется при $\alpha = \pi/2$, т. е. $T = \pi$ не является периодом рассматриваемой функции. Итак, число $T = 2\pi$ — наименьший положительный период функции $\sin x$, поскольку $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha - 2\pi) = \sin\alpha$ при любом α.

Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции $\cos x$ тоже равен 2π.

Покажем, что наименьший положительный период функции $\sin ax$, где $a > 0$, равен $2\pi/a$. Пусть $T > 0$ — такое число, что $\sin a(x + T) = \sin ax$ для всех x. Это равенство будет выполняться, если $a(x + T) - ax = 2\pi$, откуда $ax + aT - ax = 2\pi$ или $aT = 2\pi$, $T = 2\pi/a$. Например, наименьший период функции $\sin \frac{a}{3}$ равен $T = 2\pi : \frac{1}{3} = 6\pi$.

Аналогично можно показать, что наименьшим положительным периодом функции $\cos ax$, где $a > 0$, будет также число $T = 2\pi/a$.

Упражнение

Докажите, что функции $y=\sin(ax+b)$, $y=\cos(ax+b)$, где $a>0$, имеют наименьший положительный период $T=2\pi/a$.

Наименьшим положительным периодом для функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ является число π.

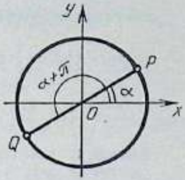


Рис. 9.9

В самом деле, при любом действительном α числам $\alpha+\pi$ и $\alpha-\pi$ соответствуют точки P и Q единичной окружности, симметричные относительно начала координат (рис. 9.9). Такие точки имеют соответственно противоположные координаты: $P(x;\ y)$, $Q(-x;\ -y)$. Поскольку $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, $-x=\cos(\alpha+\pi)$, $-y=\sin(\alpha\pm\pi)$, то $\operatorname{tg}\alpha=y/x$, $\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=y/x$, $\operatorname{ctg}\alpha=x/y$, $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=x/y$, откуда $\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$. Если T — период тангенса ($T>0$), то $\operatorname{tg} T=\operatorname{tg}(0+T)=\operatorname{tg} 0=0$. Но на интервале $(0;\ \pi)$ тангенс и котангенс нулей не имеют. Следовательно, $T\geqslant\pi$, т. е. π — наименьший положительный период для тангенса и котангенса.

Если угол задан не в радианной, а в градусной мере, то периодами синуса и косинуса будет любое целое число градусов, кратное 360°, а наименьший положительный период равен 360°. Для тангенса и котангенса периодом будет любое целое число градусов, кратное 180°; наименьший положительный период равен 180°.

Покажем, что наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg} ax$, где $a>0$, равен π/a. Пусть $T>0$ — такое число, что $\operatorname{tg} a(x+T)=\operatorname{tg} ax$ при всех x из области определения функции $\operatorname{tg} ax$. Это равенство будет выполняться, если $a(x+T)-ax=\pi$, или $aT=\pi$, откуда $T=\pi/a$. Например, функция $y=\operatorname{tg} 3x$ имеет наименьший положительный период $T=\pi/3$, функция $y=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ — период $T=\pi:\frac{1}{4}=4\pi$.

Аналогично можно показать, что наименьший положительный период функции $y=\operatorname{ctg} ax$, где $a>0$, также равен $T=\pi/a$.

Упражнение

Докажите, что каждая из функций $y = \operatorname{tg}(ax+b)$ и $y = \operatorname{ctg}(ax+b)$, где $a > 0$, имеет наименьший положительный период $T = \pi/a$.

Свойства четности, нечетности и периодичности тригонометрических функций широко используются при вычислениях.

Пример 1. Найти значение $\sin \frac{43}{3}\pi$.

Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, получаем

$$\sin\frac{43}{3}\pi = \sin\left(14+\frac{1}{3}\right)\pi = \sin\left(14\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(7\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \\ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Найти значение $\cos(-1125°)$.

Принимая во внимание четность и периодичность функции $y = \cos x$, находим

$$\cos(-1125°) = \cos 1125° = \cos(3\cdot 360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9.4. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Каждую тригонометрическую функцию некоторого аргумента можно выразить через любую другую тригонометрическую функцию того же аргумента. Выведем соответствующие формулы.

Из основного тригонометрического тождества $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (см. формулу (9.3)) следует, что $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$, откуда

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha};\ |\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}. \quad (9.8)$$

Предположив, что $\cos\alpha \neq 0$, разделим почленно основное тождество на $\cos^2\alpha$: $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ или (с учетом формулы (9.6))

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha. \quad (9.9)$$

Предположив, что $\sin\alpha \neq 0$, разделим почленно основное тождество на $\sin^2\alpha$: $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ или (с учетом формулы (9.6))

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha. \quad (9.10)$$

Отметим, что формула (9.9) верна при $\alpha \neq$

$\neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$, а формула (9.10) — при $\alpha \neq n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$. Из формул (9.8) следуют формулы

$$|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{|\cos \alpha|}; \quad |\operatorname{ctg} \alpha| = \frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{|\sin \alpha|}. \quad (9.11)$$

Учитывая определения тангенса и котангенса (см. выражения (9.4) и (9.5)), получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad (9.12)$$

Отметим, что из формул (9.6) следуют формулы $\cos \alpha \sec \alpha = 1$, $\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1$.

Замечание. В левых частях формул (9.8), (9.11) тригонометрические функции находятся под знаком модуля. При использовании этих формул следует обратить особое внимание на выбор знака. Плюс или минус в этих формулах выбирается в зависимости от того, к какой четверти принадлежит угол α.

Полученные формулы позволяют вычислять значения всех тригонометрических функций, если известно значение одной из них.

Пример. Известно, что $\sin \alpha = 12/13$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$. Вычислить значения всех остальных тригонометрических функций этого угла.

Так как угол α расположен во второй четверти, то синус и косеканс угла α положительны, все остальные его тригонометрические функции отрицательны. По второй из формул (9.8), которая принимает вид $\cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha}$, находим $\cos \alpha = -\sqrt{1+\left(\frac{12}{13}\right)^2} =$ $= -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$. С помощью формул (9.6) находим

$$\sec \alpha = 1 : \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{13}{5} = -2\frac{3}{5}; \ \operatorname{cosec} \alpha = 1 : \frac{12}{13} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}.$$

С помощью формул (9.4) и (9.5) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \left(-\frac{5}{13}\right) : \frac{12}{13} = -\frac{5}{12}.$$

Отметим, что последний результат можно получить и по второй из формул (9.12).

9.5. Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

Теорема 9.1. *Для любых двух углов α и β справедлива формула*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (9.13)$$

▷ Рассмотрим две любые точки A и B единичной окружности (рис. 9.10) и их единичные радиусы-векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, образующие с осью Ox соответственно углы α и β, а между собой — угол $(\alpha-\beta)$. По определению скалярного произведения имеем

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=|\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|\cos(\alpha-\beta)=1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\beta);$$
$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\cos(\alpha-\beta). \tag{9.14}$$

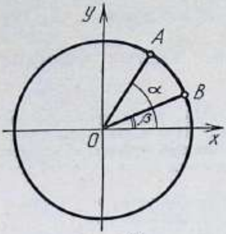


Рис. 9.10

Поскольку $\overline{OA}=(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $\overline{OB}=(\cos\beta;\ \sin\beta)$ и скалярное произведение двух векторов равно произведению одноименных координат, то

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{9.15}$$

Из равенств (9.14), (9.15) следует формула (9.13): косинус разности двух углов равен произведению их косинусов плюс произведение их синусов. ◁

Пример 1. Вычислить $\cos\frac{\pi}{12}$.

Так как $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+$ $+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

Теорема 9.2. *Для любых двух углов α и β справедлива формула*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{9.16}$$

▷ Сумму $\alpha+\beta$ представим в виде $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$. Применяя формулу (9.13), получаем $\cos(\alpha+\beta)=$ $=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, поскольку $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, т. е. косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение их синусов. ◁

Следствие. Справедлива формула

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{9.17}$$

Действительно, применяя формулу (9.16) при $\alpha=\beta$, получаем

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\\=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Пример 2. Вычислить $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, то $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\times$ $\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

Теорема 9.3. *Для любых двух углов α и β справедлива формула*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (9.18)$$

▷ Воспользуемся формулами (9.7). Так как $\sin\alpha=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, то $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$ $=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$. Применяя формулу (9.13), получаем формулу (9.18): $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+$ $+\cos\alpha\sin\beta$. ◁

Итак, синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла и косинуса второго плюс произведение косинуса первого угла и синуса второго.

Следствие. Справедлива формула

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (9.19)$$

В самом деле, при $\beta=\alpha$ формула (9.18) принимает вид

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha;\ \sin 2\alpha=\\=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Пример 3. Вычислить $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Так как $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, то $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+$

$$+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Теорема 9.4. *Для любых двух углов α и β справедлива формула*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\alpha. \qquad (9.20)$$

$\triangleright$ Используя формулы (9.7) и (9.16), получаем $\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-$ $-\cos\alpha\sin\beta.$ $\triangleleft$

Следовательно, синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла и косинуса второго минус произведение косинуса первого угла и синуса второго угла.

Теорема 9.5. *Для любых двух углов α и β, таких, что* $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, $\beta\neq(2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m\in\mathbf{Z}$ и $\alpha+\beta\neq$ $\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (9.21)$$

$\triangleright$ Учитывая определение тангенса, а также формулы (9.16), (9.18), получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части на $\cos\alpha\cos\beta$ и приняв во внимание определение тангенса, получим формулу (9.21). $\triangleleft$

Таким образом, тангенс суммы двух углов равен дроби, числитель которой есть сумма тангенсов этих углов, а знаменатель — разность между единицей и произведением тангенсов тех же углов.

Следствие. Справедлива формула

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \text{если}\quad \alpha\neq(1+2k)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},\quad \alpha\neq$$
$$\neq(1+2m)\frac{\pi}{4},\ m\in\mathbf{Z}. \qquad (9.22)$$

$\triangleright$ В самом деле, при $\beta=\alpha$ формула (9.21) принимает вид

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}\ \text{или}\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.\ \triangleleft$$

Пример 4. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-(2+\sqrt{3}).$$

Теорема 9.6. *Для любых двух углов α и β, таких, что $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, $\beta\neq(2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m\in\mathbf{Z}$ и $\alpha-\beta\neq$ $\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$, справедлива формула*

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (9.23)$$

▷ Учитывая определение тангенса, а также формулы (9.13) и (9.20), находим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части на $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (9.23). Эта формула означает, что тангенс разности двух углов равен дроби, числитель которой есть соответствующая разность тангенсов этих углов, а знаменатель — сумма единицы и произведения тангенсов тех же углов. ◁

Приведем формулировки еще двух теорем.

Теорема 9.7. *Для любых углов α и β, таких, что $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $\beta\neq\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$,* и *$\alpha+\beta\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, справедлива формула*

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (9.24)$$

Эту формулу называют формулой котангенса суммы двух углов.

Теорема 9.8. *Для любых двух углов α и β, таких, что $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $\beta\neq\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$ и $\alpha-\beta\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, справедлива формула*

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (9.25)$$

Формулу (9.25) называют формулой котангенса разности двух углов.

Доказательства этих теорем аналогичны доказательствам теорем 9.5 и 9.6.

Теоремы 9.1 — 9.8 называют *теоремами сложения*. Путем последовательного применения теорем сложения можно получить формулы для тригонометрических функций углов $n\alpha$, где $n \in \mathbf{Z}$, через тригонометрические функции угла α.

Выведем, например, формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$. Представляя 3α как $(2\alpha + \alpha)$ и применяя формулы (9.16), (9.18), а также формулы (9.17) и (9.19), получаем:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Итак, получены следующие формулы:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

9.6. Тригонометрические функции двойного и половинного угла

Тригонометрические функции двойного угла выражаются следующими формулами:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Первые три формулы были получены ранее (см. (9.17), (9.19), (9.22)); четвертая следует из равенства (9.24) при $\beta = \alpha$.

Первая формула означает следующее: косинус двойного угла 2α равен разности квадратов косинуса и синуса данного угла α. Вторая формулируется следующим образом: синус двойного угла 2α равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного угла α.

Третья формула верна, если $\alpha \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, $\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

При этих условиях тангенс двойного угла 2α равен дроби, числитель которой есть удвоенный тангенс угла α, а знаменатель — разность между единицей и квадратом тангенса угла α.

Четвертая формула верна при всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$. Если выполнено это условие, то котангенс двойного угла 2α равен дроби, числитель которой есть разность между квадратом котангенса угла α и единицей, а знаменатель — удвоенный котангенс угла α.

Рассмотрим следующие тождества:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(первое из них — основное тождество (9.3), второе — формула (9.17), записанные для половинного угла $\alpha/2$).

Вычитая почленно второе тождество из первого, получаем $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \ \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (9.26)$$

Сложив почленно эти тождества, получим $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, откуда

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \ \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (9.27)$$

Разделив почленно равенство (9.26) на (9.27), будем иметь

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \ \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (9.28)$$

Из формул (9.12) и (9.28) находим

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \ \left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \qquad (9.29)$$

Формулы (9.26) (9.29) выражают тригонометрические функции половинного угла $\alpha/2$ через косинус данного угла α. В этих формулах плюс или минус берется в зависимости от того, какого знака $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

Для вычисления $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ могут быть использованы и другие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad (\alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}).$$

Чтобы получить эти формулы, совершим соответствующие преобразования. Полагая $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (тогда $\cos(\alpha/2)\neq0$ и $\sin(\alpha/2)\neq0$), получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}=\frac{\sin(\alpha/2)2\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)\,2\sin(\alpha/2)}=\frac{2\sin^2(\alpha/2)}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}=\frac{\sin(\alpha/2)\,2\cos(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)\,2\cos(\alpha/2)}=\frac{\sin\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Пример. Вычислить $\operatorname{tg}(\pi/8)$.

Применяя первую из приведенных выше формул, находим

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)}=\frac{\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=$$
$$=\sqrt{2}-1.$$

9.7. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Выразим $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Разложим сначала $\sin\alpha=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)$ по формуле (9.19) синуса двойного аргумента:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Разделим правую часть этого равенства на $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1$:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)}.$$

Предположим, что $\cos^2(\alpha/2) \neq 0$, т. е. $\alpha \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, получим формулу

$$\sin \alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha/2)}. \tag{9.30}$$

Чтобы выразить $\cos \alpha$ через $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, предварительно разложим $\cos \alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)$ по формуле (9.17) косинуса двойного аргумента:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

тогда

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2)}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на $\cos^2(\alpha/2) \neq 0$, получим формулу

$$\cos \alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha/2)}, \tag{9.31}$$

которая справедлива для всех $\alpha \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

При любых $\alpha \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ и $\alpha \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, верна формула

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}(\alpha/2)}{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha/2)}, \tag{9.32}$$

которая может быть получена в результате почленного деления (9.30) на (9.31) или как следствие формулы (9.22).

9.8. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Формулы (9.18) и (9.20) запишем в виде:

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Почленно сложим и вычтем эти равенства:

$$\sin(u+v)+\sin(u-v)=2\sin u\cos v;$$
$$\sin(u+v)-\sin(u-v)=2\cos u\sin v.$$

Введем обозначения $u+v=\alpha$, $u-v=\beta$. Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$u=\frac{\alpha+\beta}{2};\ v=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Подставив выражения для α, β, u, v в равенства, приведенные выше, получим:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (9.33)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (9.34)$$

Формула (9.33) означает, что сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов и косинуса их полуразности.

Формула (9.34) читается следующим образом: разность синусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов и синуса их полуразности.

Замечание. В формуле (9.34) разность берется так, что от угла, стоящего под знаком уменьшаемого синуса, вычитается угол, стоящий под знаком вычитаемого синуса.

Формулы (9.13) и (9.16) запишем так:

$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v;$$
$$\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v.$$

Выполнив над этими равенствами ряд преобразований, получим формулы:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (9.35)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (9.36)$$

Равенство (9.35) можно сформулировать так: сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов и косинуса их полуразности.

Поскольку $-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, то формулу (9.36) можно записать так:

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad (9.37)$$

т. е. разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов и синуса обратной их полуразности.

Пример. Доказать тождество

$$\frac{\cos 4\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}.$$

Применяя формулы (9.34), (9.36), получаем

$$\frac{\cos 4\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin 4\alpha} = \frac{-2\sin(5\alpha/2)\sin(3\alpha/2)}{-2\cos(5\alpha/2)\sin(3\alpha/2)} = \operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}.$$

Отметим, что если $\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, $\beta \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, то верны следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \ \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \quad (9.38)$$

Докажем первую из них:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Вторая формула доказывается аналогично.

Если $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $\beta \neq \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, то справедливы формулы:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}; \ \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \quad (9.39)$$

Доказать эти формулы представляем читателю самостоятельно.

9.9. Преобразование произведений тригонометрических функций в полусумму и полуразность

Во многих случаях бывает необходимо представить произведение тригонометрических функций в виде суммы или разности. Чтобы получить соответствующие формулы, обратимся к теоремам сложения (см. § 9.5).

Почленно сложив равенства

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

получим $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$, откуда

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (9.40)$$

т. е. произведение косинуса любого угла α и косинуса любого угла β равно полусумме косинуса разности этих углов и косинуса их суммы.

Вычитая второе равенство из первого, находим $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$, откуда

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (9.41)$$

т. е. произведение синуса угла α и синуса угла β равно полусумме косинуса разности этих углов и косинуса их суммы.

Почленно сложив равенства

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

получим $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$, получим

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (9.42)$$

Формула (9.42) читается так: произведение синуса любого угла α и косинуса любого угла β равно полусумме синуса разности этих углов и синуса их суммы.

Замечание. В правой части формулы (9.42) разность берется так, что от угла, стоящего под знаком синуса, вычитается угол, стоящий под знаком косинуса.

Пример 1. Упростить выражение $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{4\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)}$.

Заметим, что $\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)-$ $-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}$.

Применяя формулы (9.41), (9.19), (9.7), будем иметь

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{4\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 2. Вычислить $\sin 20^\circ \cos 10^\circ \sin 40^\circ$.

Применяя формулы (9.42), (9.41), (9.7), получаем $\sin 20^\circ \times \cos 10^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2}(\sin 10^\circ + \sin 30^\circ)\sin 40^\circ = \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \frac{1}{4}\sin 40^\circ = \frac{1}{4}(\cos 30^\circ - \cos 50^\circ) + \frac{1}{4}\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}\cos 50^\circ + \frac{1}{4}\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}\sin 40^\circ + \frac{1}{4}\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

9.10. Формулы приведения

При решении задач и примеров часто необходимо вычислять и значение тригонометрических функций при значениях аргумента, больших $\pi/2$. Выведем формулы, позволяющие свести такие вычисления к случаю, когда аргумент — острый угол. Такие формулы называют *формулами приведения.*

Так как $T = 2\pi$ — наименьший положительный период для синуса и косинуса, то нахождение значений этих функций сводится к вычислению их значений от аргумента, изменяющегося в пределах $0 \leqslant x < 2\pi$. Любое число x можно представить в виде $x = 2\pi n + \alpha$, где $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in [0;\ 2\pi)$. Нахождение синуса и косинуса для таких x можно свести к вычислению их значений для α из промежутка $[0;\ \pi/2]$. Воспользуемся теоремами сложения:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha;$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-1\times \times\sin\alpha=-\sin\alpha,$

т. е

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha. \quad (9.43)$$

Для функций тангенс и котангенс наименьшим положительным периодом является число π. Любое число x можно записать в виде $x=\pi n+\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$, $0\leqslant\alpha<\pi$. Значит, нахождение тангенса и котангенса при любом x сводится к вычислению значений этих функций при $\alpha\in[0;\ \pi)$. Учитывая формулы (9.43), для $\alpha\in[0;\ \pi/2]$ получаем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$(9.44)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, формулы (9.43), (9.44) являются формулами приведения для углов $(\pi/2+\alpha)$.

Аналогично можно получить формулы приведения для углов $(\pi+\alpha)$, $(3\pi/2+\alpha)$ (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Функция	x		
	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Заменив в формулах (9.43) и (9.44) α на $-\alpha$ и приняв во внимание, что синус — нечетная функция, а косинус — четная, получим результаты, которые занесем в табл. 9.2.

Функцию косинус называют кофункцией функции синус и обратно. В таком отношении находятся и функции

Таблица 9.2

Функция	x				
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

тангенс и котангенс. Используя понятие кофункции, приведем одно из правил для запоминания полученных формул.

Если в формуле приведения угол α вычитается из числа $\pi/2$ или прибавляется к этому числу, взятому нечетное число раз, то приводимая функция меняется на кофункцию; если же число $\pi/2$ взято четное число раз, то приводимая функция на кофункцию не меняется. Знак перед приведенной функцией ставится такой же, как и знак приводимой функции в соответствующей четверти, если считать угол α острым.

9.11. Непрерывность тригонометрических функций

Докажем сначала лемму, необходимую для доказательства теорем о непрерывности тригонометрических функций.

Лемма. Для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x|<\pi/2$, справедливы неравенства

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|. \qquad (9.45)$$

▷ Рассмотрим случай, когда $0<x<\pi/2$. Пусть в круге единичного радиуса (рис. 9.11) точка B получена в результате поворота точки A на x радиан вокруг начала координат: $R_0^x(A)=B$. Проведем касательную к окружности в точке A. Точку пересечения касательной с продолжением радиуса OB обозначим C. Вычислим площади треугольников OAB, OAC и сектора $OADB$. Так как $|OA|=|OB|=R=1$, то

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|OA|\,|OB|\sin x=\frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_{OAC}=\frac{1}{2}|OA|\,|AC|=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x;$$

$$S_{OADB} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{1}{2} x.$$

Из рис. 9.11 видно, что $S_{OAB} < S_{OADB} < S_{OAC}$, т. е. $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ или $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Таким образом, неравенства (9.45) справедливы при $0 < x < \pi/2$. Если $-\pi/2 < x < 0$, то $0 < -x < \pi/2$, и для таких значений $-x$ справедливы неравенства $\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x)$. Поскольку $-x = |x|$, $\sin(-x) = |\sin x|$, $\operatorname{tg}(-x) = |\operatorname{tg} x|$, то из этих неравенств следуют неравенства (9.45). ◁

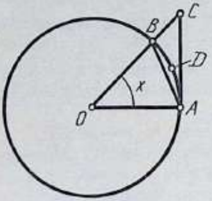


Рис. 9.11

Замечание. Для всех x справедливо неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|. \tag{9.46}$$

▷ Действительно, если $x = 0$, то $\sin 0 = 0$, т. е. соотношение (9.46) выполнено. Если $0 < |x| < \pi/2$, то неравенство (9.46) следует из неравенств (9.45). Если $|x| \geqslant \pi/2$, то $|\sin x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant |x|$, т. е. $|\sin x| \leqslant |x|$. Итак, неравенство (9.46) верно при всех x. ◁

Теорема 9.9. *Функция $y = \sin x$ непрерывна при всех x, т. е. $\lim \sin x = \sin a$ при любом значении $a \in \mathbf{R}$.*

▷ Зафиксируем произвольное число $a \in \mathbf{R}$ и рассмотрим разность $\sin x - \sin a$. Применяя формулы (9.34) и (9.46), оцениваем по модулю указанную разность: $|\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \times \left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\cdot 1\,\frac{|x-a|}{2} = |x-a|$, т. е. $|\sin x - \sin a| \leqslant |x - a|$. Если для любого числа $\varepsilon > 0$ положить $\delta = \varepsilon$, то при $|x-a| < \delta$ получим $|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a| < \varepsilon$ или $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$. Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна при любом $x \in \mathbf{R}$. ◁

Теорема 9.10. *Функция $y = \cos x$ непрерывна при всех x, т. е. $\lim \cos x = \cos a$ при любом $a \in \mathbf{R}$.*

▷ Зафиксируем любое число $a \in \mathbf{R}$ и рассмотрим разность $\cos x - \cos a$. Используя формулы (9.36) и (9.46), получаем

$$|\cos x - \cos a| = \left|-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\cdot 1\,\frac{|x-a|}{2} = |x-a|$$

или $|\cos x - \cos a| \leqslant |x - a|$. Положим $\delta = \varepsilon$ для любого числа $\varepsilon > 0$. Тогда при $|x - a| < \delta$ получим $|\cos x - \cos a| \leqslant |x - a| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$. Значит, функция $y = \cos x$ непрерывна при любом $x \in \mathbf{R}$. ◁

Теорема 9.11. *Каждая из функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна в своей области определения.*

▷ Если $a \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, то $\cos a \neq 0$. Применяя теорему о пределе частного, а также теоремы 9.9 и 9.10, получаем

$$\lim_{x \to a} \operatorname{tg} x = \frac{\lim\limits_{x \to a} \sin x}{\lim\limits_{x \to a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a.$$

Это означает, что функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна в любой точке из области ее определения. ◁

Непрерывность функции $y = \operatorname{ctg} x$ в своей области определения доказывается аналогично.

9.12. Предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею дуги

Рассмотрим сначала предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге (будем иметь в виду радианное измерение углов).

Теорема 9.12. *Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге равен единице, т. е.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (9.47)$$

▷ Если $0 < x < \pi/2$, то выполняются неравенства (9.45), т. е. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Разделив почленно эти неравенства на $\sin x$ ($\sin x > 0$), получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (9.48)$$

(Эти неравенства верны и для отрицательных значений аргумента, так как $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$.) Из неравенств (9.48) получаем

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x;\ 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x;$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \cos 0 - \cos x.$$

Поскольку косинус — непрерывная функция, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что из неравенства $|0 - x| < \delta$ следует $|\cos 0 - \cos x| < \varepsilon$. Следовательно, для всех $x \neq 0$, удовлетворяющих неравенству $|x| < \delta$, получаем $\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < \cos 0 - \cos x = |\cos 0 - {}$ ${}-\cos x| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ◁

Предел (9.47) называют иногда *первым замечательным пределом.*

Теорема 9.13. *Предел отношения длины хорды окружности к длине стягиваемой ею дуги при стремлении длины дуги к нулю равен единице.*

▷ Пусть хорда AB окружности радиусом R (см. рис. 9.11) стягивается дугой, содержащей x радиан, тогда $|AB| = 2R\sin\frac{x}{2}$, $l = Rx$, где l — длина дуги AB. Учитывая формулу (9.47), получаем:

$$\lim_{l\to 0}\frac{|AB|}{l} = \lim_{x\to 0}\frac{2R\sin(x/2)}{Rx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1. \ ◁$$

9.13. Производные тригонометрических функций

Производная функции $y = \sin x$. Зафиксируем значение аргумента x, придадим ему приращение Δx, получим приращенное значение аргумента $x + \Delta x$, которому соответствует приращенное значение функции $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$. Приращение функции выразится формулой $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Применяя формулу (9.34), получаем

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента и преобразуем его:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}.$$

Переходим к пределу, используя непрерывность функции косинус и формулу (9.47):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=\cos x,$$

т. е.

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{9.49}$$

Производная функции $y=\cos x$. Зафиксируем значение x аргумента функции, придадим ему приращение Δx, которому соответствует приращение $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$. Применяя формулу (9.36), находим

$$\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента и преобразуем его:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}=-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=-\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{9.50}$$

Производная функции $y=\operatorname{tg} x$. Чтобы найти производную этой функции, используем правило дифференцирования частного и формулы (9.49), (9.50):

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x. \tag{9.51}$$

Производная функция $y=\operatorname{ctg} x$. Рассуждая аналогично, находим

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$
$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \qquad (9.52)$$

Запишем формулы дифференцирования тригонометрических функций: $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция переменной x. Применяя правило дифференцирования сложной функции (см. § 8.4) и формулы (9.49) — (9.52), находим:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \qquad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \cos(4 - 5x)$.

Полагая $u = 4 - 5x$ и применяя формулу $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$, получаем $y' = -\sin(4-5x) \cdot (4-5x)' = -\sin(4-5x) \cdot (-5) = 5\sin(4-5x)$.

9.14. Свойства и график функции $y = \sin x$

Функция $y = \sin x$ имеет наименьший положительный период, равный 2π, поэтому для изучения ее свойств достаточно исследовать функцию на любом промежутке длиной 2π, например, на отрезке $[-\pi; \pi]$.

С помощью производной $(\sin x)' = \cos x$ находим критические точки: на отрезке $[-\pi; \pi]$ $\cos x = 0$ только при $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$. Учитывая знаки значений косинуса (см. рис. 11.7, *б*), заключаем, что $(\sin x)' < 0$ при $x \in (-\pi; -\pi/2) \cup (\pi/2; \pi)$; $(\sin x)' > 0$ при $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, значит, $x = -\pi/2$ — точка минимума, $x = \pi/2$ — точка максимума.

В промежутках $(-\pi; -\pi/2)$, $(\pi/2; \pi)$ функция $y = \sin x$ убывает, в промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ — возрастает.

Перечислим свойства функции $y = \sin x$.

1. Функция $y = \sin x$ определена при всех x, т. е. областью ее определения служит вся числовая прямая: $D(\sin x) = (-\infty; +\infty)$.

2. Область значений функции $y = \sin x$ совпадает с отрезком $[-1; 1]$: $E(\sin x) = [-1; 1]$; так как $|\sin x| \leqslant 1$, то синус — ограниченная функция.

3. Функция $y = \sin x$ является нечетной, так как $\sin(-x) = -\sin x$ при всех x из области ее определения (см. § 9.2).

4. Функция $y = \sin x$ — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π (см. § 9.3).

5. $\sin x = 0$ при всех значениях $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\sin x > 0$ при всех $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\sin x < 0$ при всех $x \in (\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Функция $y = \sin x$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке бесконечного интервала $(-\infty;\ +\infty)$.

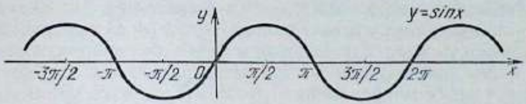


Рис. 9.12

9. Функция $y = \sin x$ имеет экстремумы: максимумы $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, минимумы $\sin x = -1$ при $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

10. Функция $y = \sin x$ не является монотонной на всей числовой прямой; она монотонна в соответствующих промежутках: возрастает от -1 до 1 на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbf{Z}$, убывает от 1 до -1 на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Используя свойства функции $y = \sin x$, построим сначала ее график на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ длиной 2π, отметив, что $\sin(-\pi/2) = -1$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi;\ 0)$, $\sin x > 0$ при $x \in (0;\ \pi)$ (рис. 9.12).

Ввиду того что $y = \sin x$ — периодическая функция с периодом 2π, график ее на промежутках $[-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, где $n \in \mathbf{Z}$, получается из ее графика, построенного на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, параллельным переносом вдоль оси Ox на расстояние $2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

На рис. 9.12 изображена часть графика $y = \sin x$ (весь график неограниченно продолжается влево и вправо).

График функции $y = \sin x$ называют *синусоидой*.

9.15. Свойства и график функции $y = \cos x$

Функция $y = \cos x$, имеет наименьший положительный период, равный 2π, поэтому для изучения ее свойств достаточно исследовать функцию на любом промежутке длиной 2π, например на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

С помощью производной $(\cos x)' = -\sin x$ находим критические точки: на отрезке $[0;\ 2\pi]$ $\sin x = 0$ только при $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, причем точки $x = 0$, $x = 2\pi$ являются концами отрезка, а $x = \pi$ — внутренняя точка. Учитывая знаки значений синуса (см. рис. 11.7 *а*), заключаем, что $(\cos x)' < 0$ при $x \in (0;\ \pi)$ и $(\cos x)' > 0$ при $x \in (\pi;\ 2\pi)$. Значит, функция $y = \cos x$ убывает в промежутке $(0;\ \pi)$ и возрастает в промежутке $(\pi;\ 2\pi)$. Так как в точке $x = \pi$ производная функции равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс, то $x = \pi$ — точка минимума, причем $\cos \pi = -1$. На концах промежутка $[0;\ 2\pi]$ функция также принимает экстремальные значения: $\cos 0 = 1$, $\cos 2\pi = 1$. Заметим еще, что $\cos x > 0$ при $x \in (0;\ \pi/2) \cup (3\pi/2;\ 2\pi)$, $\cos x < 0$ при $x \in (\pi/2;\ 3\pi/2)$.

Перечислим свойства функции $y = \cos x$.

1. Функция $y = \cos x$ определена при всех x, т. е. областью ее определения является вся числовая прямая: $D(\cos x) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. Областью значений функции $y = \cos x$ служит отрезок $[-1;\ 1]$; $E(\cos x) = [-1;\ 1]$. Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$, то косинус — ограниченная функция.

3. Функция $y = \cos x$ — четная, так как $\cos(-x) = \cos x$ при всех x из области ее определения (см. § 9.2).

4. Функция $y = \cos x$ — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π (см. § 9.3).

5. $\cos x = 0$ при всех значениях $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\cos x > 0$ при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\cos x < 0$ при всех $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Функция $y = \cos x$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке бесконечного интервала $(-\infty;\ +\infty)$.

9. Функция $y = \cos x$ имеет экстремумы: максимумы $\cos x = 1$ при всех $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, минимумы $\cos x = -1$ при всех $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

10. Функция $y = \cos x$ не является монотонной на всей области ее определения; она монотонна в соответствующих конечных промежутках: возрастает от -1 до 1 в промежутках $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$, убывает от 1 до -1 в промежутках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Используя свойства функции $y = \cos x$, построим ее график сначала на отрезке $[0;\ 2\pi]$ (рис. 9.13). Ввиду того, что $y=\cos x$ — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π, график ее на промежутках $[2\pi n;\ 2\pi+2\pi n]$, где $n\in\mathbf{Z}$, получается из ее графика, построенного на отрезке $[0,\ 2\pi]$, параллельным переносом вдоль оси Ox на расстояние $2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$.

График функции $y=\cos x$ называют *косинусоидой*.

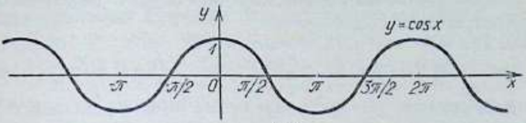


Рис. 9.13

Замечание. График функции $y=\cos x$ можно получить также параллельным переносом вдоль оси Ox влево на расстояние $\pi/2$ графика функции $y=\sin x$. Действительно, сдвинув синусоиду $y=\sin x$ влево на $\pi/2$, получим график функции $y=\sin(x+\pi/2)=\cos x$.

9.16. Свойства и график функции $y=\operatorname{tg} x$

Функция $y=\operatorname{tg} x$ определена при всех x, кроме $x=\frac{\pi}{2}+$ $+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, иными словами, областью определения функции $y=\operatorname{tg} x$ является бесконечное множество промежутков $(-\pi/2+\pi n;\ \pi/2+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Исследуем функцию $y=\operatorname{tg} x$ в промежутке $(-\pi/2;\ \pi/2)$, длина которого равна π — наименьшему положительному периоду этой функции. Поскольку $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}>0$ при всех $x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$, то функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает в рассматриваемом промежутке. Прямые $x=-\pi/2$, $x=\pi/2$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y=\operatorname{tg} x$, так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x=+\infty;\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x=-\infty.$$

Отметим, что $\operatorname{tg}0=0$, $\operatorname{tg} x<0$ при всех $x\in(-\pi/2;\ 0)$ и $\operatorname{tg} x>0$ при всех $x\in(0;\ \pi/2)$.

Основные свойства функции $y=\operatorname{tg} x$.

1. Функция $y=\operatorname{tg} x$ определена при всех действительных x, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$.

2. Область значений функции $y = \operatorname{tg} x$ — бесконечный промежуток $(-\infty; +\infty)$ совпадает со всей числовой прямой: $E(\operatorname{tg} x) = R$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ — функция неограниченная.

3. Тангенс — нечетная функция, так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всех x из области ее определения.

4. Тангенс — периодическая функция с наименьшим положительным периодом π.

5. $\operatorname{tg} x = 0$ при всех $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\operatorname{tg} x > 0$ при всех $x \in (\pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\operatorname{tg} x < 0$ при всех $x \in (-\pi/2 + \pi n; \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке области ее определения.

9. Функция $y = \operatorname{tg} x$ экстремумов не имеет.

10. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает в каждом промежутке $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат. Строим график функции $y = \operatorname{tg} x$ (сначала для промежутка $(0; \pi/2)$, потом для промежутка $(-\pi/2; 0)$ (рис. 9.14)). График функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутках $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$, получается из ее графика, построенного на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на расстояние πn, $n \in \mathbf{Z}$. График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*.

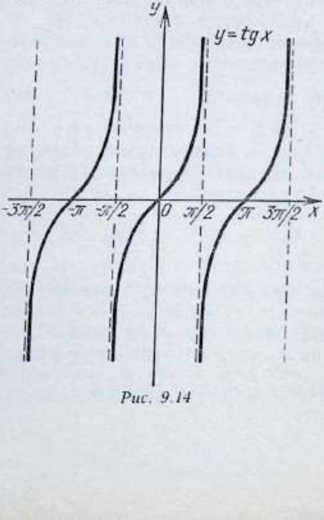


Рис. 9.14

9.17. Свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена при всех действительных x, кроме $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, иными словами, областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ является бесконечное множество промежутков $(\pi n; (n+1)\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$, длина каждого из которых равна π — наименьшему положительному периоду рассматриваемой функции. Исследуем функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на одном из указанных промежутков, например на промежутке $(0; \pi)$. Поскольку $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} < 0$ при всех $x \in (0; \pi)$, то функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает в промежутке $(0; \pi)$. Отметим, что $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$, $\operatorname{ctg} x > 0$ при всех $x \in (0; \pi/2)$, $\operatorname{ctg} x < 0$ при всех $x \in (\pi/2; \pi)$. Прямые, определяемые уравнениями $x = 0$, $x = \pi$, служат вертикальными асимптотами графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, так как соответствующие односторонние пределы бесконечны: $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{ctg} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pi - 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1. Областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел, кроме $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Область значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ — бесконечный промежуток $(-\infty; +\infty)$: $E(\operatorname{ctg} x) = R$.

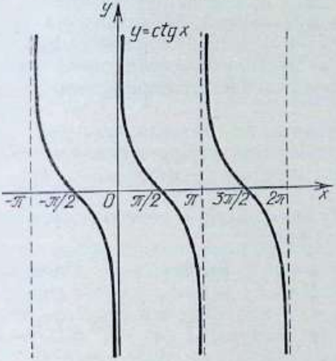


Рис. 9.15

Котангенс — неограниченная функция.

3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ при всех $x \in D(\operatorname{ctg} x)$.

4. Котангенс — периодическая функция с наименьшим положительным периодом π.

5. $\operatorname{ctg} x = 0$ при всех $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\operatorname{ctg} x > 0$ при всех $x \in (\pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\operatorname{ctg} x < 0$ при всех $x \in (-\pi/2 + \pi n;\ \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке области ее определения.

9. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ экстремумов не имеет.

10. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает в каждом промежутке $(\pi n;\ (n+1)\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$ имеет вид, изображенный на рис. 9.15. С помощью параллельного переноса графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, построенного на промежутке $(0;\ \pi)$, вдоль оси Ox на расстояние πn, $n \in \mathbf{Z}$, получим график функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутках $(\pi n;\ (n+1)\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют *котангенсоидой*.

9.18. Обратные тригонометрические функции

Функция, обратная синусу. Функция $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ возрастает, непрерывна и принимает значения из отрезка $[-1;\ 1]$. Значит, на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ определена функция, обратная функции $y = \sin x$. Эту обратную функцию называют *арксинусом* и обозначают $y = \arcsin x$. Введем определение арксинуса числа a.

Арксинусом числа a, если $a \in [-1;\ 1]$, называют угол (или дугу), синус которого равен числу a и который принадлежит отрезку $[-\pi/2;\ \pi/2]$; его обозначают $\arcsin a$.

Таким образом, $\arcsin a$ есть угол, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\sin(\arcsin a) = a, \ |a| \leqslant 1; \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция $y=\arcsin x$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$, областью ее значений является отрезок $[-\pi/2;\ \pi/2]$. На отрезке $[-1;\ 1]$ функция $y=\arcsin x$ непрерывна и монотонно возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$ (это следует из того, что функция $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ непрерывна и монотонно возрастает). Наибольшее значение она принимает при $x=1$: $\arcsin 1=\pi/2$, а наименьшее — при $x=-1$: $\arcsin(-1)=-\pi/2$. При $x=0$ функция равна нулю: $\arcsin 0=0$.

Покажем, что функция $y=\arcsin x$ является нечетной, т. е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$ при любом $x\in[-1;\ 1]$.

Действительно, по определению, если $|x|\leqslant 1$, имеем $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(-x)\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Умножая на -1 все члены последнего двойного неравенства, получаем $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Таким образом, углы $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ принадлежат одному и тому же отрезку $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Найдем синусы этих углов: $\sin(\arcsin(-x))=-x$ (по определению); поскольку функция $y=\sin x$ нечетная, то $\sin(-\arcsin x)=$ $=-\sin(\arcsin x)=-x$. Итак, синусы углов, принадлежащих одному и тому же промежутку $[-\pi/2;\ \pi/2]$, равны, значит, равны и сами углы, т. е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$. Значит, функция $y=\arcsin x$ — нечетная. График функции $y=\arcsin x$ симметричен относительно начала координат (рис. 9.16).

Покажем, что $\arcsin(\sin x)=x$ для любого $x\in$ $\in[-\pi/2;\ \pi/2]$.

▷ Действительно, по определению $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin$ $(\sin x)\leqslant\frac{\pi}{2}$, а по условию $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$. Значит, углы x и $\arcsin(\sin x)$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y=\sin x$. Если синусы таких углов равны, то равны и сами углы. Найдем синусы этих углов: для угла x имеем $\sin x$, для угла $\arcsin(\sin x)$ имеем $\sin(\arcsin(\sin x))=\sin x$. Получили, что синусы углов равны, следовательно, и углы равны, т. е. $\arcsin(\sin x)=x$. ◁

Пример 1. Вычислить $\arcsin(\sin 37°)$.

Поскольку $37° \in [-90°; 90°]$, то $\arcsin(\sin 37°) = 37°$.

Пример 2. Вычислить $\arcsin(\sin(-572°))$.

Так как $-572° \notin [-90°; 90°]$, то нельзя писать, что $\arcsin(\sin(-572°)) = -572°$. Но $\sin(-572°) = \sin(-212°) = \sin 32°$, поэтому $\arcsin(\sin(-572°)) = \arcsin(\sin 32°) = 32°$.

Пример 3. Вычислить $\arcsin(\sin 2)$.

Очевидно, что $2 > \pi/2$ и $2 \notin [-\pi/2; \pi/2]$. Но поскольку $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$, где $(\pi - 2) \in [-\pi/2; \pi/2]$, то $\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$.

Пример 4. Найти $\cos(\arcsin x)$.

Положив в формуле $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ угол $\alpha = \arcsin x$, получим:

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Перед корнем следует взять плюс, ибо угол $\alpha = \arcsin x$ принадлежит отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$, в котором косинус неотрицателен. Итак, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Функция, обратная косинусу. Областью значений функций $y = \cos x$ является отрезок $[-1; 1]$. На отрезке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ непрерывна и монотонно убывает. Значит, на отрезке $[0; \pi]$ определена функция, обратная функции $y = \cos x$. Эту обратную функцию называют *арккосинусом* и обозначают $y = \arccos x$.

Арккосинусом числа а, если $|a| \leqslant 1$, называют угол, косинус которого равен числу a и который принадлежит отрезку $[0; \pi]$; его обозначают $\arccos a$.

Таким образом, $\arccos a$ есть угол, удовлетворяющий следующим двум условиям:

$$\cos(\arccos a) = a, \ |a| \leqslant 1; \ 0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi.$$

Например, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$;

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \text{ так как } \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ и } \frac{2\pi}{3} \in [0; \pi].$$

Функция $y = \arccos x$ определена на отрезке $[-1; 1]$, областью ее значений является отрезок $[0; \pi]$. На отрезке $[-1; 1]$ функция $y = \arccos x$ непрерывна и монотонно убывает от π до 0 (поскольку $y = \cos x$ — непрерывная и монотонно убывающая функция на отрезке $[0; \pi]$); на концах отрезка она достигает экстремальных значений: $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos 1 = 0$. Отметим, что $\arccos 0 =$

$=\pi/2$. График функции $y=\arccos x$ (рис. 9.17) симметричен графику $y=\cos x$ относительно прямой $y=x$.

Покажем, что имеет место равенство

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x. \tag{9.53}$$

▷ В самом деле, по определению $0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi$ и $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. Умножая на -1 все части последнего

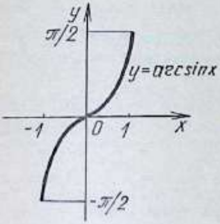


Рис. 9.16

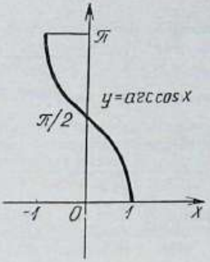


Рис. 9.17

неравенства, получаем $-\pi\leqslant-\arccos\leqslant 0$. Прибавляя π ко всем частям последнего неравенства, находим, что $0\leqslant\pi-\arccos x\leqslant\pi$. Таким образом, значения углов $\arccos(-x)$ и $\pi-\arccos x$ принадлежат одному отрезку $[0;\ \pi]$. Поскольку на отрезке $[0;\ \pi]$ косинус монотонно убывает, то на нем не может быть двух различных углов, имеющих равные косинусы. Найдем косинусы углов $\arccos(-x)$ и $\pi-\arccos x$. По определению $\cos(\arccos(-x))=-x$, по формулам приведения и по определению $\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x$. Итак, косинусы углов равны, значит, равны и сами углы, т. е. верно равенство (9.53). ◁

Докажем тождество $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$, если $|x|\leqslant 1$.

Пусть $\arcsin x=\alpha$, $\arccos x=\beta$. Тогда $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=x$, откуда $\sin\alpha=\cos\beta$. Так как $\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, то $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Убедимся в том, что углы α и $\pi/2-\beta$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y=\sin x$. Тогда из равенства синусов этих углов будет следовать равенство самих углов. Согласно определениям, $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Из этих неравенств следует $-\pi \leqslant -\beta \leqslant 0$, $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \beta \leqslant \pi/2$. Итак, углы α и $\pi/2-\beta$ принадлежат одному отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$, поэтому из равенства $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ получаем $\alpha = \frac{\pi}{2}-\beta$ или $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Значит, $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

Пример 5. Найти $\sin(\arccos x)$.

Так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то $\sin(\arccos x) \geqslant 0$. Пользуемся формулой $\sin\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta}$, причем перед корнем берем плюс. Итак, имеем: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2} = \sqrt{1-x^2}$.

Пример 6. Вычислить $\sin(\arcsin x + \arcsin y)$.

Воспользуемся формулой синуса суммы двух углов: $\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

Пример 7. Доказать, что $\arccos(\cos x) = x$ для любого $x \in [0, \pi]$.

По определению $0 \leqslant \arccos(\cos x) \leqslant \pi$; по условию $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Значит, углы x и $\arccos(\cos x)$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y = \cos x$. Найдем косинусы этих углов: для угла x имеем $\cos x$, для угла $\arccos(\cos x)$ имеем $\cos(\arccos \times \times (\cos x)) = \cos x$. Из равенства косинусов углов следует равенство самих углов, т. е. $\arccos(\cos x) = x$.

Пример 8. Вычислить $\arccos(\cos 210°)$.

Так как $210° > 180°$, то выполним преобразования: $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30°$. Поскольку $30° \in [0; 180°]$, то, учитывая равенство (9.53), будем иметь $\arccos(\cos 210°) = \arccos(-\cos 30°) = 180° - \arccos(\cos 30°) = 180° - 30° = 150°$.

Функция, обратная тангенсу. Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ принимает все числовые значения: $E(\operatorname{tg} x) = (-\infty; +\infty)$. На этом промежутке она возрастает монотонно и непрерывна. Значит, на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ определена функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$. Эту обратную функцию называют *арктангенсом* и обозначают $y = \operatorname{arctg} x$.

Арктангенсом числа a называют угол из промежутка $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс которого равен a. Таким образом, $\operatorname{arctg} a$ есть угол, удовлетворяющий следующим условиям: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ и $0 < \operatorname{arctg} a < \pi$. Итак, любому числу x всегда соответствует единственное значение функции $y = \operatorname{arctg} x$. Очевидно, что $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; +\infty)$, $E(\operatorname{arctg} x) = (-\pi/2; \pi/2)$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является возрастающей, поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает в промежутке $(-\pi/2; \ \pi/2)$. Нетрудно доказать, что $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, т. е., что арктангенс — нечетная функция. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ относительно прямой $y = x$; график $y = \operatorname{arctg} x$ проходит через начало координат (ибо $y = \operatorname{arctg} 0 = 0$) и симметричен относительно начала координат (как график нечетной функции) (рис. 9.18). Можно доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $x \in (-\pi/2; \ \pi/2)$.

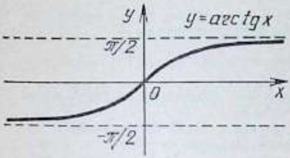


Рис. 9.18

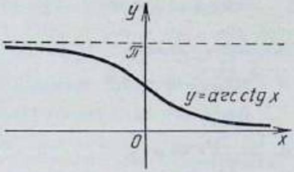


Рис. 9.19

Функция, обратная котангенсу. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \ \pi)$ принимает все числовые значения из промежутка $(-\infty; \ +\infty)$. Область ее значений совпадает с множеством всех действительных чисел. В промежутке $(0; \ \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и монотонно возрастает. Значит, на этом промежутке определена функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$. Функцию, обратную котангенсу, называют *арккотангенсом* и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$.

Арккотангенсом числа a называют угол, принадлежащий промежутку $(0; \ \pi)$, котангенс которого равен a. Таким образом, $\operatorname{arcctg} a$ есть угол, удовлетворяющий следующим условиям: $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$ и $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$. Из определения обратной функции и определения арккотангенса следует, что $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \ +\infty)$, $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \ \pi)$. Арккотангенс является убывающей функцией, поскольку функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает в промежутке $(0; \ \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ не пересекает ось Ox, так как $y > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. При $x = 0$ $y = \operatorname{arcctg} 0 = \pi/2$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 9.19.

Отметим, что для всех действительных значений x верно тождество: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Пример 9. Найти $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Положив в формуле $\sin\alpha = \pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, выражающей синус через тангенс, угол $\alpha = \operatorname{arctg} x$, получим $\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2}}$. Учитывая, что при $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ синус и тангенс имеют одинаковые знаки, перед корнем возьмем плюс. Поэтому $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать тождество:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 10. Найти $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

Воспользуемся формулой $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Получаем $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{1}{x}$.

Упражнения

1. Докажите:

а) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2) = 2 - \pi$.

2. Вычислите:

а) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

Ответы. 2. а) $\dfrac{1}{9}$; б) $-\sqrt{2}/4$.

9.19. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическими называют уравнения, содержащие переменную под знаком тригонометрических функций. *Решением* или *корнем тригонометрического уравнения* называют такое значение переменной, при котором это уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить тригонометрическое уравнение — значит найти все его корни или доказать, что уравнение решений не имеет.

Общий метод решения тригонометрических уравнений состоит в сведении их с помощью различных преобразований к одному или нескольким простейшим уравнениям. Эти уравнения будут рассмотрены ниже.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что тождественные преобразования тригонометрических уравнений, возведение частей уравнения в квадрат, применение тригонометрических тождеств для решения уравнения могут изменить область его определения. Например, использование формулы $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ приводит к сужению области определения уравнения на значения $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а формул

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

на значения $x = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Применение же формулы $\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} x = 1$ расширяет область определения уравнения на значения $x = \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$, а формулы $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ — на значения $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание 2. При решении тригонометрических уравнений форма записи корней его нередко зависит от избранного способа решения. Например, угол $\pi/3$ можно записать несколькими способами:

$$\frac{\pi}{3} = \arccos \frac{1}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим простейшие тригонометрические уравнения. К ним относят уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Рассмотрим тригонометрическое уравнение

$$\sin x = a. \tag{9.54}$$

Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbf{R}$, то при $|a| > 1$, т. е. при $a < -1$ и $a > 1$ данное уравнение решений не имеет (рис. 9.20). Если $a = -1$ или $a = 1$, уравнение принимает вид $\sin x = -1$ или $\sin x = 1$. Эти уравнения имеют соответствующие множества решений:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

При $|a| < 1$ уравнение (9.54) также имеет бесконечное множество решений (рис. 9.21). Чтобы решить уравнение (9.54) при $|a| < 1$, достаточно найти все его решения на любом отрезке длиной 2π, поскольку период синуса равен 2π. Из рис. 9.21 видно, что удобно взять отрезок $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$. В самом деле, этот отрезок состоит из двух отрезков $[-\pi/2;\ \pi/2]$, $[\pi/2;\ 3\pi/2]$; на первом отрезке синус возрастает, на втором — убывает; на каждом из них любое свое значение функция $y = \sin x$ принимает только один раз. Следовательно, на каждом из этих двух отрезков имеется лишь одно решение уравнения (9.54). По определению арксинуса решение уравнения $\sin x = a$, принадле-

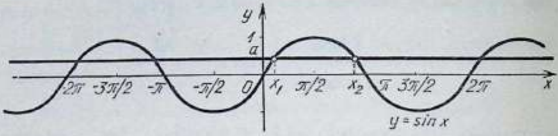


Рис. 9.20

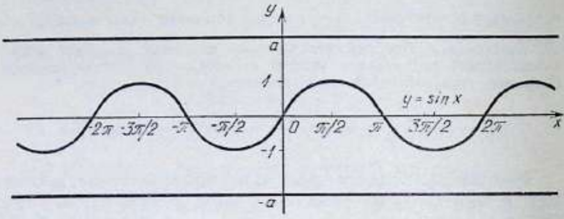


Рис. 9.21

жащее отрезку $[-\pi/2;\ \pi/2]$, есть $x = \arcsin a$. Найдем решение этого уравнения, принадлежащее отрезку $[\pi/2;\ 3\pi/2]$, воспользовавшись формулой $\sin x = \sin(\pi - x)$. Если $x \in [\pi/2;\ 3\pi/2]$, т. е. $\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, то $-3\pi/2 \leqslant -x \leqslant -\pi/2$. Прибавляя число π ко всем частям последних неравенств, получаем $-\pi/2 \leqslant \pi - x \leqslant \pi/2$. Это означает, что $(\pi - x) \in [-\pi/2;\ \pi/2]$. Уравнение $\sin x = a$ равносильно уравнению $\sin(\pi - x) = a$. Поскольку $(\pi - x) \in [-\pi/2;\ \pi/2]$, то отсюда получаем $\pi - x = \arcsin a$, или $x = \pi - \arcsin a$. Чтобы найти все решения уравнения (9.54), воспользуемся периодичностью синуса. Прибавляя числа вида $2\pi m$, где $m \in \mathbf{Z}$, к каждому из двух полученных решений ($x = \arcsin a$, $x = \pi - \arcsin a$), находим два бесконечных подмножества:

$$x = \arcsin a + 2\pi m;$$
$$x = -\arcsin a + (2m+1)\pi,\ m \in \mathbf{Z}. \qquad (9.55)$$

объединение которых дает все бесконечное множество решений рассматриваемого уравнения. Это множество решений уравнения (9.54) можно выразить формулой:

$$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (9.56)$$

В самом деле, при четном k $(k=2m)$ из формулы (9.56) получаем первую формулу (9.55), при нечетном k $(k=2m+1)$ — вторую формулу (9.55).

Замечание. При $|a|=1$ множества решений, определяемых каждой из формул (9.55), совпадают.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x=\sqrt{3}/2$.

По формуле (9.56) получаем $x=(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Так как $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, то $x=(-1)^k \frac{\pi}{3}+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 3x=-1/2$.

По формуле (9.56) получаем $3x=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Так как $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin \frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$, то $3x=(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}+$ $+\pi k$, откуда $x=(-1)^{k+1} \frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3} k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Аналогично можно решить тригонометрическое уравнение

$$\cos x=a. \qquad (9.57)$$

Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$, то при $|a|>1$, т. е. при $a<-1$ и $a>1$ это уравнение решений не имеет. Если $a=1$, то уравнение (9.57) принимает вид $\cos x=1$: оно имеет решение $x=2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. При $a=-1$ получаем уравнение $\cos x=-1$, решения которого определяются формулой $x=(2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}$. При $a=0$ уравнение (9.57) имеет решения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Найдем решения уравнения (9.57) при $|a|<1$ (рис. 9.22). Поскольку период косинуса равен 2π, то, чтобы найти все решения этого уравнения, достаточно рассмотреть отрезок длиной 2π. Удобнее всего выбрать отрезок $[-\pi;\ \pi]$, так как на этом отрезке функция последовательно принимает все свои значения по одному разу. Следовательно, уравнение (9.57) на отрезке $[0;\ \pi]$ имеет решение $x=\arccos a$, а на отрезке $[-\pi;\ 0]$ — $x=-\arccos a$, поскольку $y=\cos x$ — четная функция.

Итак, на отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение $\cos x = a$, $|a| < 1$ имеет решения $x = \pm \arccos a$. Чтобы получить все решения этого уравнения, необходимо, учитывая периодичность косинуса, прибавить к каждому из найденных

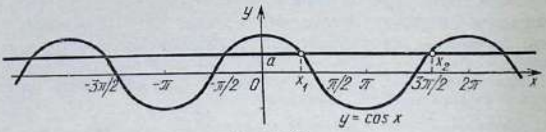


Рис. 9.22

решений $2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. В результате получаем два бесконечных множества решений:

$$x = \arccos a + 2\pi n; \ x = -\arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Эти решения можно записать с помощью одной формулы

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (9.58)$$

Формула (9.58) дает все решения (9.57) при $|a| < 1$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos x = 1/2$.
Поскольку $a = 1/2$ и $|a| < 1$, то по формуле (9.58) получаем

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n; \ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg} x = a. \qquad (9.59)$$

Поскольку множеством значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является бесконечный промежуток $(-\infty; +\infty)$, то данное уравнение имеет решения при любом значении a. Наименьший положительный период функции тангенс равен π. Каждое из своих значений в промежутке длиной π функция принимает только один раз. Выберем промежуток $(-\pi/2; \pi/2)$, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

По определению арктангенса на этом промежутке решением уравнения (9.59) будет $x = \operatorname{arctg} a$. Чтобы получить все решения данного уравнения, к полученному решению надо прибавить все числа вида πn, где $n \in \mathbf{Z}$. Итак, уравнение (9.59) имеет решения

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (9.60)$$

Пример 4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.

По формуле (9.60) $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a \tag{9.61}$$

также имеет решения при любом значении a (ибо множеством значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является бесконечный промежуток $(-\infty; +\infty)$). Наименьший положительный период функции котангенс равен π. Каждое из своих значений в промежутке длиной π функция принимает только один раз. В качестве такого промежутка выберем промежуток $(0; \pi)$, на этом промежутке функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает. По определению арккотангенса на этом промежутке решением уравнения (9.61) будет $x = \operatorname{arcctg} a$. Чтобы получить все решения уравнения (9.61), надо к найденному решению прибавить все числа вида πn, где $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, уравнение (9.61) имеет решения

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \tag{9.62}$$

Пример 5. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

По формуле (9.62) получаем $x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x = \pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

9.20. Некоторые примеры решения тригонометрических уравнений

Рассмотрим способы решения некоторых видов тригонометрических уравнений.

1. Уравнения вида

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0; \ a \cos^2 x + b \cos x + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{9.63}$$

Такие уравнения называют квадратными относительно одной тригонометрической функции одного аргумента. Эти уравнения сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям путем решения их как алгебраических уравнений второй степени относительно заданной тригонометрической функции.

Пример 1. Решить уравнение $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$, его корни $\sin x = -1$, $\sin x = 1/2$. Уравнение $\sin x = -1$ имеет корни: $x = -\pi/2 +$

$+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а уравнение $\sin x = 1/2$ — корни: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, данное уравнение имеет следующие корни: $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$, его корни $\cos x = -2$, $\cos x = 1$. Уравнение $\cos x = -2$ не имеет корней, а уравнение $\cos x = 1$ имеет корни $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, которые и составляют множество корней заданного уравнения.

К уравнениям вида (9.63) с помощью замены $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$ или $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$ могут быть приведены уравнения

$$a \sin^2 x + b \cos x + c = 0; \ a \cos^2 x + b \sin x + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Пример 3. Решить уравнение $2 \sin^2 x - 5 \cos x + 1 = 0$.

Заменив $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим $2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x + 1 = 0$, или $2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0$, откуда $\cos x = -3$, $\cos x = 1/2$. Уравнение $\cos x = -3$ не имеет корней, из второго уравнения находим корни: $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n = \pm \pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, которые являются корнями и данного уравнения.

2. Уравнения вида

$$a \sin x + b \cos x = 0 \ (a \neq 0, \ b \neq 0); \tag{9.64}$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0. \tag{9.65}$$

Это уравнения, в которых левая часть есть однородный многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$. Уравнения вида (9.64) и (9.65) называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Однородное уравнение (9.65) можно привести к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ (путем деления обеих частей на $\cos x \neq 0$, если $a \neq 0$) или относительно $\operatorname{ctg} x$ (посредством деления на $\sin x \neq 0$, если $c \neq 0$).

Рассмотрим уравнение (9.64):

$$a \sin x + b \cos x = 0 \ (a \neq 0, \ b \neq 0).$$

Разделив обе его части на $\cos x \neq 0$, получим $a \operatorname{tg} x + b = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

В процессе решения обе части уравнения были разделены на $\cos x \neq 0$. Поэтому следует проверить, не являются ли корнями уравнения (9.64) те значения x, при которых $\cos x = 0$. Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, так как $a \neq 0$. Но равенства $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$ одновременно не могут выполняться ни при каком значении x, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Таким образом, при переходе от уравнения (9.64) к уравнению $a \operatorname{tg} x + b = 0$ корни не теряются и посторонние не появляются, т. е. уравнения равносильны.

Следует заметить, что к уравнению вида (9.65) приводится уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.$$

Для этого достаточно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и заменить правую часть на $d(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После соответствующих преобразований получим однородное уравнение второй степени:

$$(a-d)\sin^2 x + b \sin x \cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0.$$

Данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 5 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, находим $\operatorname{tg} x = 5$, $\operatorname{tg} x = -1$, откуда получаем, что заданное уравнение имеет следующие корни: $x = \operatorname{arctg} 5 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 8 \cos^2 x = -2.$$

Преобразуем уравнение к однородному, для чего заменим -2 на $-2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ и запишем его в виде

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 8 \cos^2 x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0.$$

После приведения подобных слагаемых уравнение примет вид

$$4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0.$$

Разделив все члены полученного однородного уравнения на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим уравнение $4 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 6 = 0$, равносильное данному, корни которого $\operatorname{tg} x = 2$, $\operatorname{tg} x = -3/4$, откуда находим множества корней заданного уравнения: $x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = -\operatorname{arctg} \dfrac{3}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Уравнения, содержащие тригонометрические функции различных углов.

При решении таких уравнений, если представляется возможным, следует выразить все тригонометрические функции через одну функцию одного и того же угла или привести к однородному уравнению вида (9.65).

Пример 6. Решить уравнение $\sin x \cos x \cos 2x = 1/8$.

В это уравнение входят тригонометрические функции различных углов (x и $2x$). Используя формулу $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, преобразуем его левую часть: $\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{8}$; $\sin 4x = \frac{1}{2}$. Из полученного уравнения следует

$$4x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 7. Решить уравнение $\sin 2x = 1 - 3\cos^2 x$.

Применяя формулы $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, преобразуем уравнение к виду (9.65): $2 \sin x \cos x - \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0$. Разделив его почленно на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{3}$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{3}$, имеющих соответственно решения:

$$x = \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{3}) + n\pi,\ n \in \mathbf{Z};\ x = \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{3}) + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 8. Решить уравнение $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$.

Так как $2\cos^2 4x = 1 + \cos 8x$, то уравнение принимает вид $1 + \cos 8x + \sin 10x = 1$ или $\cos 8x + \sin 10x = 0$. Преобразуем полученное уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8x\right) + \sin 10x = 0$, $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Следовательно, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$, $\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда соответственно получаем $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, где $n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{9} n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

4. Уравнения вида

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2 ax + \sin^2 bx = \sin^2 cx + \sin^2 dx;\\
&\sin^2 ax + \cos^2 bx = \sin^2 cx + \cos^2 dx;\\
&\sin^2 ax + \sin^2 bx + \sin^2 cx + \sin^2 dx = 2;\\
&\cos^2 ax + \cos^2 bx = \cos^2 cx + \cos^2 dx;\\
&\sin^2 ax - \cos^2 bx = \sin^2 cx - \cos^2 dx;\\
&\cos^2 ax + \cos^2 bx + \cos^2 cx + \cos^2 dx = 2.
\end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

Если числа a, b, c, d удовлетворяют одному из условий

$$a + b = c \pm d;\ a - b = c \pm d, \tag{9.67}$$

то уравнения вида (9.66) приводятся к уравнениям от тригонометрических функций удвоенного аргумента с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

В данном случае уравнение имеет вид первого из уравнений (9.66), причем $a=1$, $b=1$, $c=3$, $d=4$. Так как $a-b=c-d$, то выполнено условие (9.67). Применяя указанные выше формулы для $\sin^2 x$, преобразуем данное уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2};$$

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x.$$

Применяя формулу (9.35), получаем

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0; \ \cos x \, 2\sin 5x \sin 2x = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = 0; \ \sin 5x = 0; \ \sin 2x = 0,$$

имеющих соответственно решения: $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{5}m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Поскольку множество решений $\frac{\pi}{2}k$ содержит множество $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, то решения исходного уравнения определяются формулами:

$$x = \frac{\pi}{5}m, \ m \in \mathbf{Z}; \ x = \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

5. Уравнения вида

$$\sin ax \sin bx = \sin cx \sin dx; \ \sin ax \sin bx = \cos cx \cos dx;$$
$$\cos ax \cos bx = \cos cx \cos dx; \ \sin ax \cos bx = \sin cx \cos dx.$$

Эти уравнения решаются с помощью формул (9.40) — (9.42).

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x.$$

Применяя формулу (9.42), преобразуем данное уравнение:

$$\frac{\sin 6x - \sin 4x}{2} = \frac{\sin 12x + \sin 6x}{2}; \ \sin 12x + \sin 4x = 0.$$

С помощью формулы (9.33) последнее уравнение приводим к виду $2\sin 8x \cos 4x = 0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$\sin 8x = 0$, $\cos 4x = 0$, имеющих решения $x = \frac{\pi}{8}n$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как множество решений $\frac{\pi}{8}(2k+1)$ содержится в множестве решений $\frac{\pi}{8}n$, то решение исходного уравнения определяется по формуле $x = \frac{\pi}{8}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Уравнения вида

$$\sin ax = \sin bx; \ \cos ax = \cos bx;$$
$$\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg} bx; \ \operatorname{ctg} ax = \operatorname{ctg} bx. \tag{9.68}$$

Эти уравнения решаются с помощью тригонометрических формул (9.34), (9.37) — (9.39), которые дают возможность преобразовать разность тригонометрических функций в соответствующее произведение.

Пример 11. Решить уравнение $\sin 8x = \sin 2x$.
Применяя формулу (9.34), преобразуем данное уравнение:

$$\sin 8x - \sin 2x = 0; \ 2 \sin 3x \cos 5x = 0.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0; \\ \cos 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \pi n; \\ 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3}n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{10}(1+2n), \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Уравнения вида

$$\sin ax - \cos bx = 0; \ \sin ax + \cos bx = 0$$

с помощью формул приведения (см. § 9.10) можно привести к уравнениям (9.68).

Пример 12. Решить уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.
Применяя формулы (9.7) и (9.34), преобразуем это уравнение:

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0;$$
$$2 \sin \frac{1}{2}x\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin \frac{6x - \pi}{4} = 0; \ \cos \frac{2x + \pi}{4} = 0,$$

имеющих соответственно решения:

$$x=\frac{\pi}{6}(1+4n),\ n\in\mathbf{Z};\ x=\frac{\pi}{2}(1+4n),\ n\in\mathbf{Z}.$$

7. Уравнения вида

$$a\sin x+b\cos x=c\,(a^2+b^2\neq 0). \qquad (9.69)$$

Условие $a^2+b^2\neq 0$ означает, что a и b одновременно в нуль не обращаются. При решении таких уравнений бывает полезным преобразование выражения $a\sin x+$ $+b\cos x$ в произведение с помощью вспомогательного угла. Введем угол φ, положив

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (9.70)$$

Тогда $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\varphi +$ $+\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$.

Уравнение (9.69) принимает вид

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=c \text{ или } \sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1$, т. е. если $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, или $c^2\leqslant a^2+b^2$, то полученное уравнение имеет решение:

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z};$$

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi-\varphi,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 13. Решить уравнение $2\sin x-2\cos x=1-\sqrt{3}$.

Применяя формулы (9.70) для данного случая $(a=2,\ b=2)$, получаем $\sin\varphi=2/2\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$, $\cos\varphi=2/2\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$. Преобразуем исходное уравнение: $2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=1-\sqrt{3}$,

$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=1-\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1-\sqrt{3}$,

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Так как $-1<\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}<0$ или $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right|<1$, то исходное уравнение имеет решение

$$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}(1+4n),\ n\in\mathbf{Z}.$$

Замечание 1. Выражение $a\sin x+b\cos x$ можно преобразовать в произведение с помощью вспомогательного угла φ, определяемого по формуле $\operatorname{tg}\varphi=a/b$.

Действительно, с учетом этой формулы получаем $a\sin x+b\cos x=$ $=b\left(\frac{a}{b}\sin x+\cos x\right)=b(\operatorname{tg}\varphi\sin x+\cos x)=\frac{b}{\cos\varphi}(\sin\varphi\sin x+$ $+\cos x\cos\varphi)=\frac{b}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi)$.

Уравнение (9.69) принимает вид

$$\frac{b}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi)=c;\ \cos(x-\varphi)=\frac{c\cos\varphi}{b}.$$

Если $\left|\frac{c\cos\varphi}{b}\right|\leqslant 1$, то из последнего уравнения находим

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{c\cos\varphi}{b}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$

$$x=\pm\arccos\frac{c\cos\varphi}{b}+2\pi n+\varphi,\text{ где }\varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{b},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 14. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1$.

Заметив, что $\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, преобразуем уравнение: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin 3x-$ $-\cos 3x=1$; $\sin\frac{\pi}{3}\sin 3x-\cos 3x\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}$; $-\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=$ $=\frac{1}{2}$; $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

Из последнего уравнения следует $3x+\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+$ $+2\pi n$, $3x=\pm\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\pm\frac{2}{9}\pi-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n$, откуда $x=$ $=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}n$, или $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Уравнение вида $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ можно решить, выделив в левой его части квадрат двучлена:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-$$
$$-2\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2x=$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Таким образом,

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x. \qquad (9.71)$$

Уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ преобразуется к виду $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=a$ или $\sin^2 2x=2(1-a)$, откуда следует, что оно имеет решение, если выполняются условия $0\leqslant 2(1-a)\leqslant 1$.

Пример 15. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=5/8$.
Применяя формулу (9.71), преобразуем это уравнение:

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{5}{8};\ \sin^2 2x=\frac{3}{4}.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2};\\ \sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n;\\ 2x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, & n\in\mathbf{Z},\\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, & n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Решение исходного уравнения можно выразить формулой

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Замечание 2. Все решения уравнения $\sin^2 x=a^2$, где $|a|\leqslant 1$, определяются по формуле $x=\pm\arcsin a+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, а все решения уравнения $\cos^2 x=a^2$, где $|a|\leqslant 1$ — по формуле $x=\pm\arccos a+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Это следует из того, что квадрат любой тригонометрической функции является четной периодической функцией с периодом π. Все решения уравнений $\operatorname{tg}^2 x=a^2$, $\operatorname{ctg}^2 x=a^2$ определяются соответственно по формулам

$$x=\pm\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$
$$x=\pm\operatorname{arcctg} a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 16. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$.
Применяя формулы (9.19) и (9.71), преобразуем уравнение:

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\sin 2x;\ \sin^2 2x+\sin 2x-2=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\sin 2x$, имеем: $\sin 2x=1$, $\sin 2x=-2$. Второе уравнение корней не имеет. Из первого уравнения находим: $2x=\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, $x=\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Следовательно, решения данного уравнения определяются по формуле $x=\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

9.21. Тригонометрические неравенства

Если $f(x)$ — периодическая тригонометрическая функция, то, чтобы решить неравенство $f(x)>a$ или $f(x)<a$, достаточно найти его решения на отрезке, длина которого равна периоду функции $f(x)$. Все множество решений исходного неравенства будет состоять из найденных значений x, а также всех x, отличающихся от найденных на любое целое число периодов функции $f(x)$.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства:

$$\begin{gathered}\sin x>a;\ \sin x<a;\ \cos x>a;\ \cos x<a;\\ \operatorname{tg} x>a;\ \operatorname{tg} x<a;\ \operatorname{ctg} x>a;\ \operatorname{ctg} x<a.\end{gathered}\tag{9.72}$$

Функция $\sin x$ имеет наименьший положительный период 2π, поэтому неравенство $\sin x>a$ целесообразно решить сначала на отрезке длиною 2π, например на отрезке $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$. Строим графики функций $y=a$ $(-1\leqslant a<1)$ и $y=\sin x$ (см. рис. 9.21). На отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2)$ функция $\sin x$ монотонно возрастает, и уравнение $\sin x=a$, где $|a|\leqslant 1$, имеет один корень $x_1=\arcsin a$. На отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ функция $\sin x$ монотонно убывает, и уравнение $\sin x=a$ имеет корень $x_2=\pi-\arcsin a$. На промежутке между корнями x_1 и x_2 график функции $y=\sin x$ расположен выше графика функции $y=a$ $(-1\leqslant a<1)$. Поэтому для всех x из промежутка $(\arcsin a;\ \pi-\arcsin a)$ неравенство $\sin x>a$ выполняется, если $-1\leqslant a<1$. В силу периодичности функции $\sin x$ такие промежутки будут повторяться через 2π. Таким образом, решениями неравенства $\sin x>a$ $(-1\leqslant a<1)$ будут те и только те значения x, которые удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\arcsin a+2\pi n<x<\pi-\arcsin a+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$
$$\arcsin a+2\pi n<x<-\arcsin a+(2n+1)\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как $\sin x$ — ограниченная функция, причем $|\sin x|\leqslant 1$, то при $a\geqslant 1$ неравенство $\sin x>a$ решений не имеет. Если $a < -1$, неравенство $\sin x > a$ выполняется при всех $x \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим теперь неравенство $\sin x < a$. Если $a \leqslant -1$, неравенство решений не имеет. Если $a > 1$, неравенство выполняется при всех $x \in \mathbf{R}$. Если $-1 < a \leqslant \leqslant 1$, решениями неравенства будут все значения x, удовлетворяющие неравенствам

$$-\arcsin a + (2n+1)\pi < x < \arcsin a + (n+1)2\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Аналогично решаются простейшие тригонометрические неравенства $\cos x > a$ и $\cos x < a$.

Пример 1. Решить неравенство $\cos x < 1/2$.

Решим это неравенство сначала на отрезке $[0;\ 2\pi]$. На отрезке $[0;\ \pi]$ функция $\cos x$ монотонно убывает, уравнение $\cos x = 1/2$ имеет один корень $x_1 = \pi/3$ (см. рис. 9.22). На отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ функция $\cos x$ монотонно возрастает, уравнение $\cos x = 1/2$ имеет единственный корень $x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$. Все значения x, принадлежащие промежутку $[\pi/3;\ 5\pi/3]$, являются корнями неравенства $\cos x < 1/2$ (см. рис. 9.22). Все корни этого неравенства определяются неравенствами

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5}{3}\pi + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить неравенство $\cos x > \sqrt{3}/2$.

Найдем сначала решения этого неравенства, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ \pi]$, применяя рассуждения, аналогичные приведенным в примере 1 и используя рисунок, аналогичный рис. 9.22, заключаем, что все решения данного неравенства задаются неравенствами

$$-\pi/3 + 2\pi n < x < \pi/3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Неравенства $\operatorname{tg} x > a$ и $\operatorname{tg} x < a$ целесообразно решать сначала на промежутке $(-\pi/2;\ \pi/2)$, а неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ и $\operatorname{ctg} x < a$ — на промежутке $(0;\ \pi)$.

Пример 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < 3$.

Найдем сначала решения, принадлежащие промежутку $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Решениями этого неравенства будут те и только те значения x, которые удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Можно показать, что решениями неравенства $\operatorname{tg} x > a$ являются те и только те значения x, которые удовлетворяют неравенствам $\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

Решения неравенств $\operatorname{ctg} x > a$ и $\operatorname{ctg} x < a$ удовлетворяют соответственно неравенствам:

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. Более сложные тригонометрические неравенства следует предварительно свести к неравенствам вида (9.72). При этом используются те же преобразования, что и при решении тригонометрических уравнений.

Пример 4. Решить неравенство $\sin x < \cos x$.

Преобразуем это неравенство

$$\sin x - \cos x < 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x < 0;\ \sin\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x < 0;\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 5. Решить неравенство $\sin x > \cos 2x$.

Это неравенство приводится к квадратному неравенству относительно $\sin x$: $2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$. Решая последнее неравенство, получаем $\sin x < -1$, $\sin x > 1/2$. Первое неравенство решений не имеет. Решения второго из них определяются неравенствами

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 6. Решить неравенство $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

Выражая $\cos 2x$ и $\sin 2x$ через тангенс половинного угла, получаем

$$\frac{2(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} > \operatorname{tg} x,$$

(Это неравенство равносильно исходному, так как $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, не принадлежит области определения заданного неравенства.) Обозначим $\operatorname{tg} x$ через t и выполним преобразования:

$$2(1 - t^2) + 2t - t(1 + t^2) > 0;\ t^3 + 2t^2 - t - 2 < 0;$$
$$t^2(t + 2) - (t + 2) < 0;\ (t + 2)(t^2 - 1) < 0;\ (t + 2)(t + 1)(t - 1) < 0.$$

Решив последнее неравенство относительно $t = \operatorname{tg} x$, получим $\operatorname{tg} x < -2$, $-1 < \operatorname{tg} x < 1$. Отсюда соответственно находим

$$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg}(-2) + \pi n;\ -\pi/4 + \pi n < x < \pi/4 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Объединение этих множеств служит множеством решений исходного неравенства.

Задачи

1. Решите тригонометрические уравнения:

а) $\sin x \cos x + \sin^2 x - 7\cos^2 x = -5$; б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;
в) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$; г) $3\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = 9/2$;
д) $3\sin x - \cos x = 1$;
е) $\cos 2x = \cos x$;
ж) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
з) $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x$;
и) $\sin 3x \sin 2x = \sin 11x \sin 10x$;
к) $\cos 2x = \cos x - \sin x$;
л) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{2}\sin 2x - \frac{3}{2}\sin^2 2x$;
м) $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$;
н) $1 + \operatorname{tg} x = (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x)$;
о) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \operatorname{tg} x$.

2. Докажите, что:

а) $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\arcsin\frac{3}{5} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

3. Решите тригонометрические неравенства:

а) $\sin x < \cos x$; б) $\sin^6 x + \cos^6 x > 5/8$;
в) $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$; г) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 > 0$.

Ответы. 1. а) $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; е) $x = \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; ж) $x = \frac{\pi}{10}(1 + 2n)$, $x = \frac{\pi}{4}(1 + 2n)$, $n \in \mathbf{Z}$; з) $x = \frac{\pi}{7}n$, $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$; и) $x = \frac{\pi}{8}n$, $x = \frac{\pi}{13}n$, $n \in \mathbf{Z}$; к) $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2}(1 + 4n)$, $x = \frac{\pi}{4}(1 + 4n)$, $n \in \mathbf{Z}$; л) $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$; м) $x = \frac{\pi}{12}(1 + 12n)$, $x = \frac{\pi}{8}(1 + 4n)$, $n \in \mathbf{Z}$; н) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; о) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3. а) $-\frac{3}{4}\pi + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5}{6}\pi + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

10. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

10.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства

Функцию $F(x)$ называют *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке $(a;\ b)$, если при всех $x \in (a;\ b)$

$$F'(x) = f(x). \qquad (10.1)$$

Например, функция $F(x) = x^3$ — первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ в интервале $(-\infty;\ +\infty)$, так как $(x^3)' = 3x^2$ для всех $x \in \mathbf{R}$; $F(x) = \ln x$ — первообразная функции $f(x) = 1/x$ в интервале $(0;\ +\infty)$, поскольку $(\ln x)' = 1/x$ при всех $x > 0$; функция $F(x) = \arcsin x$ — первообразная для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в интервале $(-1;\ 1)$, ибо $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для всех $x \in (-1;\ 1)$.

Отметим, что если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ в некотором промежутке, то первообразной является и функция

$$\Phi(x) = F(x) + c \quad (c = \text{const}). \qquad (10.2)$$

В самом деле, $\Phi'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Последнее равенство означает, что $\Phi(x)$ — первообразная функция для $f(x)$ (см. формулу (10.1)).

Равенство (10.2) выражает множество всех первообразных функций для $f(x)$ в некотором промежутке. Действительно, если $\Phi(x)$ и $F(x)$ — первообразные данной функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$, $F'(x) = f(x)$, то по следствию 2 из теоремы Лагранжа получаем $\Phi(x) - F(x) = c$, где c — постоянная, откуда $\Phi(x) = F(x) + c$, т. е. выполняется равенство (10.2). Таким образом, равенство (10.2) выражает множество всех первообразных для функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)dx$ называют множество всех первообразных для данной функции. Вводя обозначение для неопределенного интеграла и учитывая формулу (10.2), получаем

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad (10.3)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функцию $f(x)$ называют при этом *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*. Принимая во внимание приведенные выше первообразные, а также формулу (10.3), получаем следующие примеры неопределенных интегралов:

$$\int 3x^2dx = x^3 + c; \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

Неопределенный интеграл обладает приведенными ниже свойствами.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

Это следует из определения неопределенного интеграла и определения дифференциала:

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x);$$
$$d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'\,dx = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$ $(c = \text{const})$.

▷ Введем обозначение $\int d\varphi(x) = \Phi(x)$, воспользуемся формулой $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$ и первым свойством:

$$\Phi(x) = \int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)\,dx; \ \Phi'(x) = \varphi'(x).$$

Отсюда по следствию 2 из теоремы Лагранжа получаем $\Phi(x) = \varphi(x) + c$, где c — постоянная. Подставляя это выражение в равенство $\int d\varphi(x) = \Phi(x)$, получаем $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$. ◁

3. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int (f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \ (c = \text{const},\ c \neq 0).$$

Эти два свойства доказываются с помощью дифференцирования каждой части соответствующего равенства, использования первого свойства неопределенного интеграла и следствия 2 из теоремы Лагранжа. При этом принимается во внимание, что неопределенный интеграл определен с точностью до постоянного слагаемого.

10.2. Таблица простейших неопределенных интегралов

Таблицу простейших неопределенных интегралов получим с помощью таблицы дифференциалов основных функций и второго свойства неопределенного интеграла.

Запишем сначала таблицу дифференциалов основных функций. Учитывая, что для функции $y=f(x)$ $dy=f'(x)dx$ и принимая во внимание основные формулы дифференцирования, получаем таблицу дифференциалов:

$$d\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)=x^{\alpha}dx \quad (\alpha\neq-1); \quad d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=a^x dx \, (a>0;\ a\neq 1);$$

$$d(\ln|x|)=\frac{1}{x}dx \ (x\neq 0); \quad d(e^x)=e^x dx;$$

$$d(\sin x)=\cos x dx; \qquad d(-\cos x)=\sin x dx;$$

$$d(\operatorname{tg} x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx; \qquad d(-\operatorname{ctg} x)=\frac{1}{\sin^2 x}dx;$$

$$d(\arcsin x)=d(-\arccos x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$d(\operatorname{arctg} x)=d(-\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{1+x^2}dx.$$

Если $F'(x)=f(x)$, то $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$, т. е. $dF(x)=f(x)dx$. По свойству 2 неопределенного интеграла получаем $F(x)+c=\int f(x)dx$ или $\int f(x)dx=F(x)+c$.

Итак,

$$dF(x)=f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx=F(x)+c. \tag{10.4}$$

С помощью формулы (10.4) из таблицы дифференциалов получаем таблицу простейших неопределенных интегралов:

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \ (\alpha\neq 1)$;
2. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c \ (a>0;\ a\neq 1)$;
3. $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c \ (x\neq 0)$;

4. $\int e^x dx = e^x + c$;

5. $\int \cos x dx = \sin x + c$;

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$;

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$;

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c_1$;

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c_1$.

Отметим некоторые частные случаи формулы 1. При $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$, $\alpha = -2$ соответственно получаем:

$$\int dx = x + c; \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c; \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c.$$

Замечание. Все формулы таблицы неопределенных интегралов остаются верными, если вместо x в них записать u, где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция от x. Действительно, пусть справедливо соотношение (10.4). Рассмотрим сложную функцию $F(u)$, где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция аргумента x.

Так как $dF(u) = F'_u u'_x dx = F'_u du = f(u) du$, т. е. $dF(u) = f(u) du$, то $F(u) + c = \int f(u) du$ или $\int f(u) du = F(u) + c$. Таким образом, выполняется соотношение

$$dF(u) = f(u) du \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + c. \qquad (10.5)$$

Обратно, при $u = x$ получаем формулу (10.4). С помощью выражения (10.5) можно получить формулы вида 1—10, в которых вместо x записано $u = u(x)$, где $u(x)$ — дифференцируемая функция.

10.3. Понятие об основных методах интегрирования

К основным методам интегрирования относятся: непосредственное интегрирование, интегрирование заменой аргумента, интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование основано на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если каждая из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ имеет первообразную в некотором промежутке, то в нем имеет первообразную и их сумма $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$, причем

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + ... + \int f_n(x) dx. \qquad (10.6)$$

Эта формула означает, что неопределенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int(x^3+3e^x-7\cos x)dx$. На основании формулы (10.6) получаем

$$\int(x^3+3e^x-7\cos x)dx=\int x^3dx+\int 3e^xdx+\int -7\cos x\,dx.$$

Используя свойство 3 неопределенного интеграла и формулы 1 (при $\alpha=3$), 4, 5, получаем

$$\int(x^3+3e^x-7\cos x)dx=\int x^3dx+3\int e^xdx-7\int\cos x\,dx=\frac{x^4}{4}+3e^x-$$
$$-7\sin x+c.$$

Переходим к методу замены переменной, или методу подстановки. Пусть требуется найти

$$\int f(x)dx=F(x)+c, \tag{10.7}$$

где $F'(x)=f(x)$.

Введем новую переменную t по формуле $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(x)=F(\varphi(t))$ и найдем ее производную:

$$(F(\varphi(t)))'_t=F'_xx'_t=f(x)x'_t=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Это равенство означает, что $F(\varphi(t))$ — первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+c=F(x)+c.$$

Отсюда и из формулы (10.7) получаем

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{10.8}$$

По формуле (10.8) осуществляется замена переменной в неопределенном интеграле. Правая часть этой формулы получается из левой ее части в результате следующих формальных действий: вместо x записываем $\varphi(t)$, вместо dx — $\varphi'(t)dt$. Переменная t выбирается так, чтобы неопределенный интеграл в правой части формулы (10.8) сводился к табличным интегралам.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int\sin(5-8x)dx$.

Введем новую переменную t по формуле $5-8x=t$, откуда $x=\frac{5-t}{8}$, $dx=-\frac{dt}{8}$. Применяя формулу (10.8), находим

$$\int\sin(5-8x)dx=\int\sin t\left(-\frac{dt}{8}\right)=-\frac{1}{8}\int\sin t\,dt=\frac{1}{8}\cos t+c=$$
$$=\frac{1}{8}\cos(5-8x)+c.$$

Здесь принято во внимание, что $\int \sin t dt = -\cos t + c$ (см. замечание в § 10.2).

Пример 3. Найти $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

Введем новую переменную t по формуле $t = x^2 + 1$. Отсюда получаем $dt = 2xdx$ или $xdx = \frac{1}{2}dt$. На основании формулы (10.8) имеем

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Мы воспользовались тем, что $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$ (см. замечание в § 10.2).

Метод интегрирования по частям основан на формуле

$$\int udv = uv + \int vdu. \tag{10.9}$$

Как известно, если $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции, то $d(uv) = udv + vdu$, откуда $udv = d(uv) - vdu$. Взяв неопределенный интеграл от каждой части этого равенства и использовав свойства неопределенного интеграла, получим формулу (10.9). Более подробно эту формулу можно записать так:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

10.4. Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$ (рис. 10.1), т. е. плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $(f(x) \geqslant 0)$, отрезками aA и bB прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ox, и вычислим ее площадь. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n произвольных отрезков: $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$. Длину каждого отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ обозначим Δx_k. На каждом из отрезков Δx_k как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_k')$, где x_k' — произвольная точка отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, а $f(x_k')$ — значение

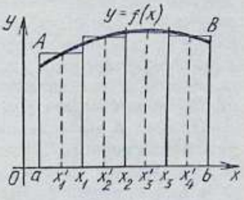


Рис. 10.1

функции в этой точке. Произведение $f(x'_k)\Delta x_k$ выражает площадь такого прямоугольника. Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = f(x'_1)\Delta x_1 + f(x'_2)\Delta x_2 + \dots + f(x'_n)\Delta x_n. \qquad (10.10)$$

Сумму (10.10) называют *интегральной суммой* для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Интегральная сумма выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из построенных прямоугольников и приближенно заменяющей площадь данной криволинейной трапеции $aABb$. Правую часть формулы (10.10) запишем кратко:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x'_k)\Delta x_k, \qquad (10.11)$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n}$ — знак суммы n однотипных слагаемых. В силу непрерывности функции $y=f(x)$ площадь построенной ступенчатой фигуры при достаточно малых Δx_k «почти совпадает» с площадью рассматриваемой криволинейной трапеции. Для каждого разбиения отрезка $[a;\ b]$, выбрав соответствующее значение $x'_k \in [x_{k-1};\ x_k]$, можно составить интегральную сумму. В результате получим последовательность разбиений и соответствующую последовательность интегральных сумм.

Можно доказать, что существует предел S переменной S_n, когда число отрезков n неограниченно возрастает, а длины всех отрезков $\Delta x_k \to 0$, т. е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x'_k)\Delta x_k.$$

Предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры при неограниченном увеличении числа n отрезков деления $[a;\ b]$ и стремлении к нулю длин отрезков деления ($\Delta x_k \to 0$), называют площадью криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, где $f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;\ b]$, осью Ox ($y=0$) и прямыми $x=a$, $x=b$.

Задача о вычислении длины прямолинейного пути по заданной скорости. Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $v=f(t)$, где $f(t)$ — заданная функция времени t. Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t до T. Промежуток

$[t_0; T]$ разобьем на n промежутков $[t_0; t_1], [t_1; t_2], \ldots, [t_{n-1}; T]$ длиной $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$; $t_n = T$). В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t_k')$, где t_k' — некоторое значение t из промежутка $[t_{k-1}; t_k]$, поэтому длина пути, пройденного за этот промежуток, приближенно равна $f(t_k')\Delta t_k$. Складывая все частичные длины $f(t_k')\Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой M за промежуток от t_0 до T:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k')\Delta t_k. \qquad (10.12)$$

Переходя к пределу при стремлении всех Δt_k к нулю, находим путь:

$$S = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k')\Delta t_k.$$

Итак, пройденный путь равен пределу интегральной суммы (10.12) функции $v = f(t)$ на отрезке $[t_0; T]$.

Таким образом, решение обеих задач свелось к составлению интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k$, где $x_k' \in [x_{k-1}; x_k]$, число слагаемых n которой неограниченно растет, а каждое слагаемое стремится к нулю и нахождению предела такой суммы.

К необходимости рассмотрения пределов интегральных сумм вида (10.11) и (10.12) приводят и многие другие задачи: вычисление объемов, длин дуг, вычисление массы прямолинейного стержня, работы, давления жидкости и др.

Предел S интегральной суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k$ для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, когда число n отрезков неограниченно возрастает, а наибольшая длина отрезков Δx_k стремится к нулю, называют *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$ и читают: определенный интеграл от a до b. Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k. \qquad (10.13)$$

Число a называют *нижним пределом интегрирования*, b — *верхним*, промежуток $[a; b]$ — *промежутком интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*.

Функцию $f(x)$ называют интегрируемой на отрезке $[a; b]$, если для нее существует предел (10.13).

Отметим без доказательства: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c; d]$, содержащемся в $[a; b]$.

Возвращаясь к задаче о площади S криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$), отрезками прямых $x=a$, $x=b$ ($a<b$) и отрезком оси Ox, можно сказать, что она может быть вычислена с помощью определенного интеграла $S=\int\limits_a^b f(x)dx$. Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $v(t)$ ($v(t)$ — непрерывная функция), то путь S, пройденный телом за время движения от $t=t_0$ до $t=T$ ($t_0<T$), можно определить по формуле $S=\int\limits_{t_0}^{T} v(t)dt$.

Задача о площади криволинейной трапеции раскрывает геометрический смысл определенного интеграла, а задача о вычислении длины прямолинейного пути по заданной скорости выражает его физический смысл.

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt=\ldots\int\limits_a^b f(u)du.$$

10.5. Формула Ньютона—Лейбница

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a; b]$. Если $x\in[a; b]$, то функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; x]$. Предположим, что x изменяется на отрезке $[a; b]$ от a до b. Тогда каждому значению $x=m$ соответствует определенная площадь S криволинейной трапеции $aAMm$, ограниченной графиком непрерывной функции $y=f(x)$, осью Ox и отрезками прямых $x=a$, $x=m$ (рис. 10.2). Поэтому площадь S есть функция x, т. е. на отрезке $[a; b]$ определена функция

$$S(x)=\int\limits_a^x f(t)dt. \tag{10.14}$$

где переменную интегрирования обозначили t, переменный верхний предел — x. Если изменять величину верхнего предела x, то соответственно будет изменяться и численное значение интеграла $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, т. е. интеграл с переменным верхним пределом является функцией верхнего предела.

Если функция $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ определена на отрезке $[a;\ b]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то при $x=a$ $S(a)=0$, т. е. $S(a)=\int_a^a f(t)dt=0$, при $x=b$ $S(b)=\int_a^b f(t)dt=S$ (S — некоторое число).

Докажем, что $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ есть функция, первообразная для функции $y=f(x)$: $S'(x)=f(x)$, т. е. если подынтегральная неотрицательная функция непрерывна, то производная определенного интеграла (10.14) с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции для этого предела.

Действительно, по определению производной

$$S'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}. \tag{10.15}$$

Пусть для определенности $\Delta x > 0$. Поскольку $\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x)$, то $\Delta S(x)$ — площадь полосы, заштрихованной на рис. 10.3. Рассмотрим прямоугольник $KNMP$ той же площади $\Delta S(x)$, опирающийся на отрезок $[x;\ x+\Delta x]$ $(KP=\Delta x)$. Сторона NM этого прямоугольника пересекает график функции $f(x)$ в некоторой точке с абсциссой $c \in [x;\ x+\Delta x]$ (иначе площадь прямоугольника $KNMP$

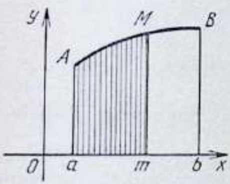


Рис. 10.2

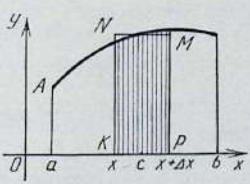


Рис. 10.3

будет или больше или меньше $\Delta S(x)$). Значит, высота прямоугольника $KNMP$ равна $f(c)$, а площадь его $\Delta S(x)=f(c)\Delta x$. Подставляя это выражение в формулу (10.15), получаем

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c).$$

При $\Delta x\to 0$ точка $c\in[x;\ x+\Delta x]$ стремится к x, поэтому, так как функция $f(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x)$. Итак, получили $S'(x)=f(x)$.

Выведем формулу для вычисления определенного интеграла. Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[a;\ b]$ функция и $F(x)$ $(x\in[a;\ b])$ — одна из первообразных функции $f(x)$ $(F'(x)=f(x))$. Тогда приращение первообразной $F(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ $(F(b)-F(a))$ равно значению определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (10.16)$$

Действительно, каждая из первообразных для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ отличается одна от другой постоянным слагаемым (см. формулу 10.2)). Поэтому, если $F'(x)=f(x)$ и $S'(x)=f(x)$, где $S'(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, то $S(x)=$ $=F(x)+C$. Для нахождения C в последнем равенстве положим $x=a$. Тогда $S(a)=F(a)+C$, но $S(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=$ $=0$, поэтому $0=F(a)+C$, откуда $C=-F(a)$. Следовательно, $S(x)=F(x)-F(a)$, т. е. $\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$. При $x=b$ получаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Равенство (10.16) называют формулой Ньютона—Лейбница.

Приращение $F(b)-F(a)$ первообразной $F(x)$ принято записывать $F(x)|_a^b$, поэтому формула (10.16) принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.
Символ $F(x)|_a^b$ читается: двойная подстановка от a до b.

Итак, чтобы вычислить определенный интеграл, достаточно найти одну из первообразных подынтегральной функции и вычислить ее значение сначала при $x = b$, затем при $x = a$ и из первого результата вычесть второй.

Пример. Вычислить $\int_1^3 2x\,dx$.

Для функции $y = 2x$ первообразной является функция $F(x) = x^2$, следовательно,

$$\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

Можно было взять другую первообразную, например, $x^2 - 3$. Тогда

$$\int_1^3 2x\,dx = (x^2 - 3)|_1^3 = (3^2 - 3) - (1^2 - 3) = 8.$$

Следовательно, от выбора первообразной значение определенного интеграла не зависит.

Укажем некоторые свойства определенного интеграла.

1. Если $a \geqslant b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, где $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[a; b]$ функция, т. е., если нижний и верхний пределы интегрирования поменять местами, то знак интеграла изменится на противоположный.

2. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то функция $kf(x)$, где k — постоянный множитель, также интегрируема на $[a; b]$ и

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то их сумма и разность также интегрируемы на этом отрезке и

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx,$$

т. е. определенный интеграл алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов слагаемых.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a;\ b]$, $[a;\ c]$, $[c;\ b]$, то она интегрируема на двух других и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

при любом расположении точек a, b, c.

Эти свойства легко доказать, используя формулу Ньютона—Лейбница.

Докажем свойство 4. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и $a < c < b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) +$$
$$+ (F(c) - F(a)) = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

10.6. Приложения определенного интеграла

Как было показано в § 10.4, площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.

График функции $y = (x+2)^2$ касается оси Ox в точке $x = -2$ (рис. 10.4). $F(x) = \frac{1}{3}(x+2)^3$ — одна из первообразных функции $y = (x+2)^2$. Искомая площадь $S = \int_{-2}^{0} (x+2)^2 dx = \frac{1}{3}(x+2)^3 \Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{3}((0+2)^3 - (-2+3)^3) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Если функция $f(x)$ принимает отрицательные значения на отрезке $[a;\ b]$ $(a < b)$, то площадь фигуры $aABb$ (рис. 10.5), ограниченная графиком $y = f(x)$, отрезками прямых $y=0$, $x=a$ и $x=b$, вычисляется также с помощью определенного интеграла. Однако в данном случае интеграл будет отрицательным.

Значит, если $f(x) \leqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -S$ или $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. Знак $\int\limits_a^b f(x)dx$ указывает на положение фигуры

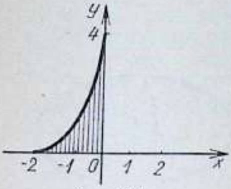


Рис. 10.4

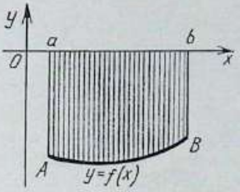


Рис. 10.5

относительно оси Ox: плюс — выше оси Ox, минус — ниже оси Ox, площадь же равна модулю величины интеграла.

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 - 2x$ и $y = 0$.

На отрезке $[0;\ 2]$ функция $y = x^2 - 2x \leqslant 0$, поэтому искомая площадь (рис. 10.6) $S = |\int\limits_0^2 (x^2 - 2x)dx|$.

Так как $\int\limits_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{4} - 4 = -1\frac{1}{3}$, то $S = \left|-1\frac{1}{3}\right| = 1\frac{1}{3}$.

Если $a < b$ и непрерывная функция $f(x)$ на $[a;\ b]$ меняет знак, т. е. площадь, ограниченная графиком $f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, расположена частично выше оси Ox, а частично ниже оси Ox (рис. 10.7), то следует вычислить отдельно площадь S_1, лежащую выше оси Ox, и площадь S_2, лежащую ниже оси Ox. Вся искомая площадь $S = S_1 + S_2$ или $S = |S_1| + |S_2|$.

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную графиком $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ и осью Ox.

Из рис. 10.8 следует, что искомая площадь S равна $S_1 + S_2$:

$$S_1 = \int\limits_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2;$$

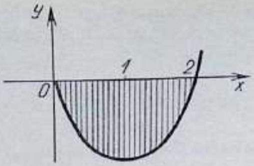


Рис. 10.6

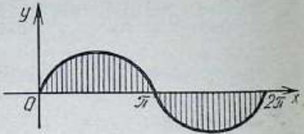


Рис. 10.7

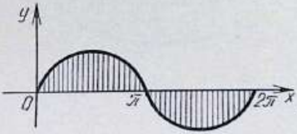


Рис. 10.8

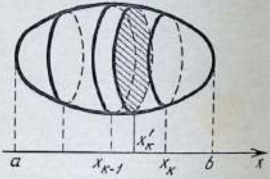


Рис. 10.9

$$S_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx\right| = \left|-\cos x\,\Big|_{\pi}^{2\pi}\right| = |-\cos 2\pi + \cos \pi| = |-1-1| =$$

$$= |-2| = 2;$$

$$S = 2 + 2 = 4.$$

Замечание. Определенный интеграл от нечетной функции на симметричном отрезке $[-a;\ a]$ равен нулю, а от четной функции на том же отрезке $[-a;\ a]$ равен удвоенному его значению от этой функции на отрезке $[0;\ a]$.

Объем тела можно вычислить с помощью определенного интеграла, если известна площадь любого поперечного сечения этого тела, перпендикулярного к некоторому направлению.

Разобьем данное тело на элементарные слои плоскостями, перпендикулярными к оси Ox (рис. 10.9). Точки пересечения этих плоскостей с осью Ox обозначим $a = x_0$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$, причем $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Для любого фиксированного $x \in [a;\ b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения данного тела. Каждый элементарный слой, отсеченный плоскостями, пересекающими ось Ox

в точках x_{k-1} и x_k ($k=1, 2, 3, \ldots, n$, $x_0=a$, $x_n=b$), заменим цилиндром с высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и площадью основания $S(x_k')$, $x_k' \in [x_{k-1};\ x_k]$. Объем указанного элементарного цилиндра выражается формулой $\Delta V_k = S(x_k')\Delta x_k$. Составим сумму всех таких произведений:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(x_k')\Delta x_k.$$

Эта сумма является интегральной для данной функции $S=S(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Она выражает объем ступенчатого тела, состоящего из элементарных цилиндров и приближенно заменяющего данное тело.

Объемом тела называют предел объема указанного ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное тело, при $\lambda \to 0$, где λ — длина наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$). Обозначим объем тела V, тогда по определению

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(x_k')\Delta x_k.$$

С другой стороны

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(x_k')\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx.$$

Из двух последних равенств следует формула

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (10.17)$$

для вычисления объема тела по заданным поперечным сечениям.

Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху дугой AB непрерывной линии $y=f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 10.10), то $S(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и формула (10.17) принимает вид

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ или } V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (10.18)$$

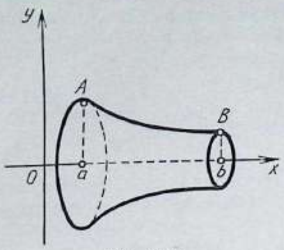


Рис. 10.10

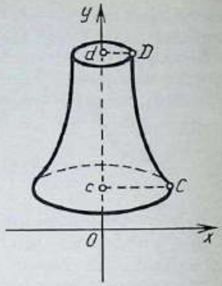


Рис. 10.11

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 10.11), где CD — дуга кривой $x=\varphi(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$, вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \text{ или } V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=6/x$, $x=1$, $x=6$.

Пределы интегрирования известны: $a=1$, $b=6$. Применяя формулу (10.18), находим

$$V=\pi\int_1^6 \frac{36}{x^2}dx = -36\pi \frac{1}{x}\Big|_1^6 = -36\pi\left(\frac{1}{6}-1\right)=30\pi.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линией $y=x^2+1$, осями координат и прямой $x=1$.

Зная пределы интегрирования $a=0$, $b=1$, находим

$$V=\pi\int_0^1 (x^2+1)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^4+2x^2+1)dx =$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{28\pi}{15}.$$

Задачи

1. Вычислите следующие интегралы:

а) $\int\limits_1^2 (x+3\cos x\,dx)$; б) $\int\limits_1^3 3^x\,dx$; в) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; г) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$;

д) $\int\limits_2^{1/3} \frac{dx}{x^2}$; е) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 dx}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

а) $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$; б) $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$;

в) $y=\frac{3}{x}$, $y=-x+4$; г) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$;

д) $y=1-x^2$, $y=0$; е) $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $y=e$;

ж) $y=3-2x-x^2$, $y=1-x$; з) $y=\cos x$, $y=0$, $|x|\leqslant\pi/2$;

и) $y=x+1$, $y=5-3x-2x^2$; к) $y=-x^2+6x-1$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

Ответы. **1** в) 2; г) -1; д) $-2{,}5$; е) 1.

2 а) 5/12; б) $1/\ln 2$; в) $4-3\ln 3$; г) $2\frac{2}{3}$; д) $1\frac{1}{3}$; е) $1\frac{1}{2}$; ж) $4\frac{1}{2}$; з) 2; и) 9; к) $13\frac{1}{3}$.

II. ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Планиметрией называют раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур, расположенных в одной плоскости (от лат. *planum* — плоскость и греч. μετρέω — измеряю).

11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

11.1. Точки и прямые

Точка и прямая являются основными геометрическими фигурами на плоскости. Точки принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, ..., а прямые — строчными: a, b, c, d, ... На рис. 11.1 изображены прямые a, b, точки A, B, C, D. Точки B и C лежат на прямой b. Можно сказать также, что точки B и C *принадлежат* прямой b или что прямая b *проходит* через точки B и C. Точка A лежит на прямой a, она не принадлежит прямой b. Точка D не лежит ни на прямой a, ни на прямой b. Точка C принадлежит и прямой a и прямой b. Прямые a и b *пересекаются* в точке C. Точка C является точкой пересечения прямых a и b.

Основными свойствами принадлежности точек и прямых на плоскости называют следующие два утверждения, называемые *аксиомами*.

Аксиома 1. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие этой прямой.*

Аксиома 2. *Каковы бы ни были две различные точки, существует единственная прямая, проходящая через эти точки.*

Из этих свойств получаем следствие.

Следствие 1. Две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.

Действительно, если бы они имели две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две различные прямые, что невозможно в силу аксиомы 2.

Рассмотрим прямую a и три точки A, B, C, лежащие на этой прямой (рис. 11.2). Точка B *лежит между* точками A и C. О таком расположении точек A, B, C говорят, что точки A и C *лежат по разные стороны от точки* B. Можно сказать также, что точка B разделяет точки A и C. Точки A и B *лежат по одну сторону от точки* C, они не разделяются точкой C. Точки B и C лежат по одну сторону от точки A.

Пусть на прямой a лежат точки A и B (рис. 11.3). *Отрезком* AB называют часть прямой a, точками которой являются все точки X прямой a, лежащие между A и B, включая и сами эти точки. Точки A и B называются концами отрезка.

Прямая a разбивает плоскость на две *полуплоскости* α и β (рис. 11.4). Точки A и B лежат в одной полуплоскости. Отрезок AB не пересекается с прямой a. Точки A_1 и B_1 лежат в разных полуплоскостях. Отрезок A_1B_1 пересекается с прямой a (рис. 11.5).

Основными свойствами расположения точек на прямой и на плоскости назовем следующие утверждения.

Аксиома 3. *Из трех различных точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Аксиома 4. *Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с*

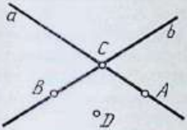


Рис. 11.1

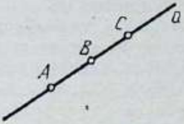


Рис. 11.2

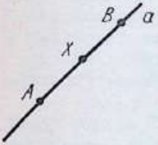


Рис. 11.3

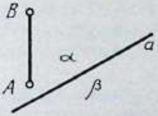


Рис. 11.4

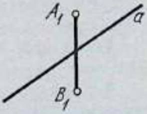


Рис. 11.5

этой прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.

Рассмотрим прямую a и точку A на ней (рис. 11.6). Через точку A проведем прямую b, отличную от прямой a. Прямая b разобьет плоскость на две полуплоскости.

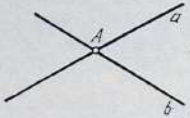


Рис. 11.6

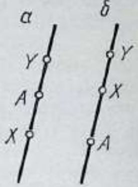


Рис. 11.7

Часть прямой a, лежащая в одной из этих полуплоскостей, включая и саму точку A, называется *полупрямой* или *лучом*. Полупрямые прямой a, на которые она разбивается точкой A, называются *дополнительными*. Точка A называется *начальной точкой* полупрямой. Пусть даны две точки X и Y на различных полупрямых прямой a, отличные от точки A. Точка A разделяет эти точки (рис. 11.7, *а*). Если точки X и Y принадлежат одной и той же полупрямой, то точка A не разделяет эти точки (рис. 11.7, *б*). Таким образом, получено следующее свойство разбиения прямой на две полупрямые.

Следствие 2. При разбиении прямой на две полупрямые точки разных полупрямых разделяются точкой, производящей деление, а точки одной полупрямой не разделяются этой точкой.

11.2. Измерение отрезков и углов

Для измерения отрезков применяют различные измерительные инструменты. Простейшим из таких инструментов является линейка.

Основными свойствами измерения отрезков будем называть следующие утверждения.

Аксиома 5. *Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.*

Аксиома 6. *Если точка C прямой AB лежит между точками A и B, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и CB: $AB = AC + CB$.*

Углом называется фигура, состоящая из двух полупрямых с общей начальной точкой (рис. 11.8). Эту точку называют *вершиной угла*, а полупрямые — *сторонами угла*. Если стороны угла являются дополнительными прямыми одной прямой, то угол называется *развернутым* (рис. 11.9). Угол обозначают или указанием его вершины,

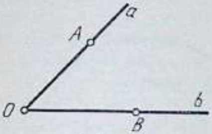


Рис. 11.8

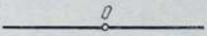


Рис. 11.9

или указанием его сторон, или указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла (по одной на каждой стороне). Слово «угол» часто заменяют значком $\angle$. Угол на рис. 11.8 можно обозначать тремя способами: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. Применяя третий способ, букву, обозначающую вершину, ставят посередине (между двумя другими буквами).

Рассмотрим рис. 11.10. Будем говорить, что луч c, исходящий из вершины O угла (ab), *проходит между* его сторонами, если он расположен в одной полуплоскости с лучом a относительно прямой, содержащей луч b, и в одной полуплоскости с лучом b относительно прямой, содержащей луч a. В случае развернутого угла будем считать, что любой луч, исходящий из его вершины, отличный от сторон этого угла, проходит между его сторонами.

В качестве основной единицы измерения углов берется угол в один градус (обозначается $1°$). Угол в один градус — это угол, равный $1/180$ части развернутого угла. Угол, равный $1/60$ части угла в $1°$,— это угол в одну минуту (обозначается $1'$). Угол, равный $1/60$ части угла в $1'$,— это угол в одну секунду (обозначается $1''$).

Углы в градусах измеряются с помощью транспортира. На рис. 11.11 угол (ab) равен $135°$. Луч c проходит между сторонами угла (ab). Угол (ac) равен $90°$, а угол (cb) — $45°$. Угол (ab) равен сумме углов (ac) и (cb).

Основными свойствами измерения углов будем называть следующие утверждения.

Аксиома 7. *Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую, чем $0°$. Развернутый угол равен $180°$.*

Аксиома 8. *Если луч c исходит из вершины угла (ab) и проходит между его сторонами, то угол (ab) равен сумме углов (ac) и (cb).*

С помощью линейки на полупрямой a с начальной точкой A можно отложить отрезок данной длины. С помощью транспортира от полупрямой a с начальной точкой

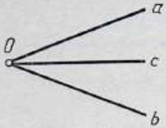


Рис. 11.10

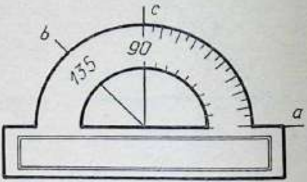


Рис. 11.11

A в данной полуплоскости можно отложить заданный в градусах угол.

Основными свойствами откладывания отрезков и углов будем называть следующие утверждения.

Аксиома 9. *Каково бы ни было положительное число m, на данной полупрямой из ее начальной точки можно отложить отрезок длиной m, и притом только один.*

Аксиома 10. *Каково бы ни было положительное число n, меньшее 180, от данной полупрямой в данной полуплоскости можно отложить угол, равный n градусам, и притом только один.*

Применяя аксиомы 6 и 9, можно получить следующее утверждение.

Следствие 3. Если на полупрямой AB из ее начальной точки A отложить отрезок AC, меньший отрезка AB, то C будет находиться между A и B.

$\triangleright$ На полупрямой AB из ее начальной точки A отложим отрезок AC, меньший отрезка AB. Точка A не может лежать между B и C, так как B и C лежат на одной полупрямой с начальной точкой A. Если бы точка B лежала между A и C, то по аксиоме 6 было бы $AB+BC=AC$, т. е. $AB<AC$. Так как по условию $AC<AB$, то точка B не лежит между A и C. Поскольку одна из трех точек непременно лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только точка C. $\triangleleft$

11.3. Теоремы и доказательства

Правильность утверждения о свойстве геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения, называемого *доказательством*. *Теоремой* называют предложение, выражающее свойство геометрической фигуры, которое доказывается.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться основными свойствами простейших фигур, а также уже доказанными свойствами, т. е. доказанными теоремами. Никакими другими свойствами фигур, даже если они нам кажутся очевидными, пользоваться нельзя.

Формулировка каждой теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что известно (дано). Эта часть называется *условием теоремы*. В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется *утверждением теоремы*. Поясним эти понятия на примере следующей теоремы.

Теорема 11.1. *Если прямая a, не проходящая ни через одну из вершин треугольника ABC, пересекает его сторону AB, то она пересекает, и притом только одну из двух других сторон, BC или AC.*

▷ Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 11.12). Поскольку отрезок AB пересекается с прямой a, то точки A и B лежат в разных полуплоскостях, одной из которых принадлежит точка C. Если точка C лежит в той полуплоскости, что и точка A, то отрезок AC не пересекается с прямой a, а отрезок BC пересекается с этой прямой (рис. 11.12, *а*). Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то отрезок AC пересекается с прямой a, а отрезок BC не пересекается с ней (рис. 11.12, *б*). В обоих случаях прямая a пересекает, и притом только один из отрезков, AC или BC. ◁

Условие этой теоремы состоит в том, что прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и

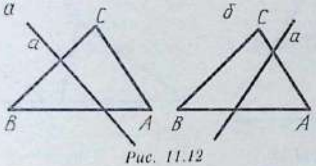


Рис. 11.12

пересекает сторону AB. Утверждение теоремы заключается в том, что прямая a пересекает, и притом только одну из двух других сторон, BC или AC.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться чертежом как геометрической записью того, что выражается словами. Не разрешается использовать в рассуждениях свойства фигуры, видимые на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и доказанные теоремы.

Для доказательства ряда теорем нам понадобятся еще две аксиомы. Сформулируем их, предварительно введя соответствующие определения.

Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называют *вершинами треугольника*, а отрезки — *сторонами треугольника*. На рис. 11.13 изображен треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, AC. Треугольник обозначают его вершинами, вместо слова «треугольник» употребляют значок $\triangle$. Например, треугольник на рис. 11.13 обозначают так: $\triangle ABC$.

Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. *Два угла* называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются равными, если у них $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 11.14).

Замечание. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов лежат равные стороны.

Аксиома 11 (первый признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны соответственно двум сторонам*

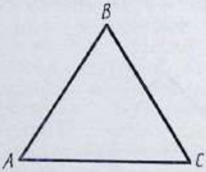


Рис. 11.13

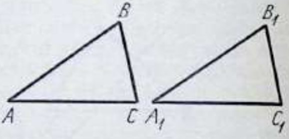


Рис. 11.14

и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Например, если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A_1 = \angle A$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, то треугольники равны, т. е. $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$, $B_1C_1 = BC$.

Рассмотрим две прямые на плоскости, считая их неограниченно продолженными в обоих направлениях. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Аксиома 12 (основное свойство параллельных прямых). *Через данную точку B, не лежащую на данной прямой a, можно провести на плоскости только одну прямую, параллельную прямой a.*

11.4. Взаимное расположение трех лучей с общим началом

Взаимное расположение трех лучей с общим началом устанавливается следующими теоремами.

Теорема 11.2. *Луч c, исходящий из вершины угла (ab), проходит между сторонами угла, если он пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.*

▷ Рассмотрим отрезок AB с концами на сторонах данного угла (рис. 11.15). Точка C пересечения отрезка AB с лучом c лежит между A и B. Из трех точек A, B, C только одна лежит между двумя другими. Значит, точка B не лежит между A и C, поэтому точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч b. В той же полуплоскости лежат лучи a и c, поскольку точка A принадлежит лучу a, а точка C — лучу c.

Аналогично доказывается, что лучи b и c лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч a. Это значит, что луч c проходит между сторонами угла (ab). ◁

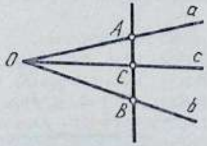


Рис. 11.15

Теорема 11.3. *Если луч c, исходящий из вершины угла (ab), проходит между сторонами этого угла, то стороны угла расположены в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c.*

▷ Угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc). Если бы стороны угла (ab) лежали в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч c, то луч b проходил бы между сторонами угла (ac). Значит, угол (ac) равнялся бы сумме углов (ab) и (bc), что невозможно. ◁

11.5. Смежные и вертикальные углы. Прямой угол. Перпендикулярные прямые

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рис. 11.16 углы (a_1b) и (a_2b) смежные. Пусть C — точка на прямой AB, лежащая между точками A и B, а D — точка, не лежащая на прямой AB (рис. 11.17). Углы ACD и BCD являются смежными. Действительно, у них сторона CD общая, а стороны CA и CB являются дополнительными полупрямыми прямой AB с начальной точкой C, разделяющей точки A и B этих полупрямых.

Теорема 11.4. *Сумма смежных углов равна 180°.*

▷ Пусть (a_1b) и (a_2b) — смежные углы (см. рис. 11.16). Луч b проходит между сторонами a_1 и a_2 развернутого угла. Следовательно, сумма углов (a_1b) и (a_2b) равна развернутому углу, т. е. 180°.

Следствие. Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. На рис. 11.18 углы (a_1b_1) и (a_2b_2) вертикальные.

Теорема 11.5. *Вертикальные углы равны.*

▷ Пусть (a_1b_1) и (a_2b_2) — вертикальные углы (рис. 11.18). Угол (a_1b_2) является смежным с углом (a_1b_1) и углом (a_2b_2). Отсюда на основании теоремы 11.4 заключаем, что каждый из углов (a_1b_1) и (a_2b_2) дополняет угол (a_1b_2) до 180°, т. е. углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны. ◁

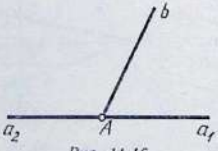


Рис. 11.16

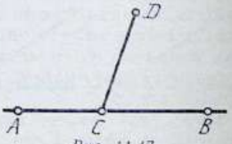


Рис. 11.17

Прямым углом называется угол, равный 90° Из теоремы 11.4 следует, что *угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.* Рассмотрим две пересекающиеся прямые a и b (рис. 11.19). Полупрямые этих прямых образуют четыре угла. Пусть α — один из этих углов. Любой из остальных трех углов будет смежным либо с углом α, либо с

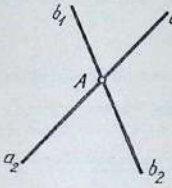


Рис. 11.18

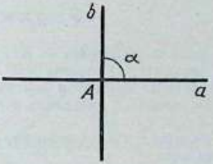


Рис. 11.19

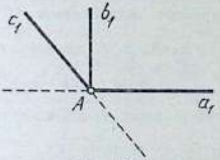


Рис. 11.20

вертикальным углом α. Отсюда следует, что если один из углов является прямым, то все остальные углы тоже прямые. В этом случае будем говорить, что прямые пересекаются под прямым углом. Прямые, которые пересекаются под прямым углом, называются взаимно *перпендикулярными.*

Теорема 11.6. *Через каждую точку прямой можно провести, и притом только одну, перпендикулярную к ней прямую.*

▷ Рассмотрим прямую a и точку A на этой прямой. Пусть a_1 — одна из полупрямых прямой a с начальной точкой A (рис. 11.20). Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный 90°. Прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна к прямой a. Допустим, что существует другая прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой a. Обозначим через c_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1. Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные по 90° каждый, отложены в одной полуплоскости от полупрямой a_1. Но от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°. Следовательно, не существует другой прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a. ◁

Упражнения

1. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими, если точка B принадлежит отрезку AC?

2. Проведите прямую и отметьте на ней четыре точки: A, B, C, D так, чтобы точка C разделяла точки A и D, а точка D разделяла точки B и C.

3. Объясните, что означает выражение: полупрямая проходит между сторонами угла.

4. На плоскости даны четыре точки: A, B, C, D. Докажите, что если отрезки AB и CD пересекаются, то точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC.

5. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если отрезок $AB = 14$ см, $AC = 9$ см, $BC = 5$ см?

6. Могут ли три точки A, B, C лежать на одной прямой, если отрезок $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 5$ см?

7. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Отрезок $AB = 5$ см, а отрезок $BC = 4$ см. Чему равен отрезок AC, если точка B лежит между A и C? Чему равен отрезок AC, если точка C лежит между B и A?

8. Докажите следствие из теоремы 11.4.

9. Чему равны смежные углы, если один из них в три раза больше другого?

10. Чему равны смежные углы, если один из них на 40° больше другого?

11. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Найдите остальные углы.

12. ТРЕУГОЛЬНИКИ

12.1. Второй признак равенства треугольников

Второй признак равенства треугольников выражается следующей теоремой.

Теорема 12.1. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

▷ Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$.

Если у треугольников $A_1C_1 = AC$, то они равны по первому признаку равенства. Предположим, что $A_1C_1 \neq AC$, тогда либо $A_1C_1 < AC$, либо $A_1C_1 > AC$. Допустим для определенности, что $A_1C_1 < AC$.

На полупрямой AC отложим отрезок AC_2, равный A_1C_1 (рис. 12.1). Тогда C_2 будет лежать между A и C. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC_2 равны по первому признаку

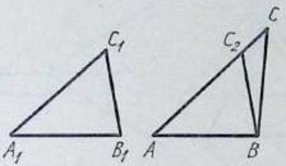


Рис. 12.1

равенства: $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$ по условию теоремы, а $AC_2 = A_1C_1$ по построению. Из равенства этих треугольников следует равенство углов $A_1B_1C_1$ и ABC_2, а угол $A_1B_1C_1$ равен углу ABC по условию теоремы, поэтому $\angle ABC_2 = \angle ABC$.

Луч BC_2 проходит между лучами BA и BC, так как он пересекает отрезок AC. Следовательно, угол ABC_2 меньше угла ABC, что противоречит полученному выше равенству этих углов. ◁

Замечание. Способ доказательства, примененный в теореме 12.1, называют доказательством от противного. Это способ доказательства состоит в том, что сначала делают предположение, противоположное утверждению теоремы. Далее путем рассуждений, опираясь на аксиомы и доказанные теоремы, приходят к выводу, противоречащему условию теоремы. На этом основании заключают, что предположение было неверным. В теореме 12.1 утверждается равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, а значит, равенство сторон A_1C_1 и AC. Предположив, что $A_1C_1 < AC$, мы пришли к выводу, что угол $A_1B_1C_1$, равный углу ABC_2, меньше угла ABC. Этот вывод противоречит условию (углы равны: $\angle B_1 = \angle B$).

12.2. Равнобедренный треугольник

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны (рис. 12.2). Равные стороны называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием* треугольника.

Теорема 12.2 В равнобедренном треугольнике углы при основании равны: если $AC = BC$, то $\angle A = \angle B$.

$\triangleright$ Треугольник CAB равен треугольнику CBA по первому признаку равенства треугольников. В самом деле, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$. $\triangleleft$

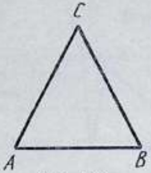


Рис. 12.2

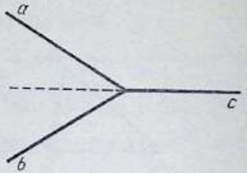


Рис. 12.3

Теорема 12.3. *Если $\angle A = \angle B$ в треугольнике ABC, то треугольник равнобедренный.*

$\triangleright$ Треугольник ABC равен треугольнику BAC по второму признаку равенства: $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Из равенства треугольников следует, что $AC = BC$. $\triangleleft$

Обратной теоремой для данной теоремы (или по отношению к данной теореме) называется теорема, в которой условием является утверждение, а утверждением — условие данной теоремы. Данную теорему по отношению к обратной теореме иногда называют *прямой* (исходной, первоначальной).

Теорема 12.3 является обратной теореме 12.2: утверждение теоремы 12.2 является условием теоремы 12.3, а условие теоремы 12.2 является утверждением теоремы 12.3.

Замечание. Не всякая теорема имеет обратную, т. е. если данная теорема верна, то обратная может быть неверна. Поясним это на примере теоремы 11.6. Теорема, обратная теореме 11.6, была бы такой. Если прямая, содержащая луч c, исходящий из вершины угла (ab), разделяет стороны угла, то луч c проходит между сторонами угла. Это утверждение неверно (рис. 12.3). Прямая, содержащая луч c, разделяет стороны угла (ab), но луч c не проходит между сторонами угла. Луч, дополнительный к лучу c, проходит между сторонами угла (ab).

Рассмотрим треугольник ABC и точку D на прямой AB (рис. 12.4). Отрезок CD называется *медианой треугольни-*

ка, проведенной к стороне AB, если точка D — середина отрезка AB, т. е. $AD = BD$. Отрезок CD называется *биссектрисой треугольника*, если полупрямая CD проходит между сторонами CA, CB треугольника и делит угол C пополам, т. е. $\angle ACD = \angle BCD$. Отрезок CD называется *высотой треугольника*, если прямые AB и CD взаимно перпендикулярны.

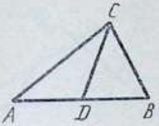


Рис. 12.4

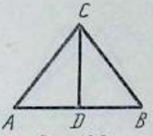


Рис. 12.5

Теорема 12.4. *В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.*

▷ Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AB (рис. 12.5). Пусть CD — медиана, проведенная к основанию. Треугольники CAD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников: $AC = BC$ ($\triangle ABC$ равнобедренный), $\angle CAD = \angle CBD$ (по теореме 12.2), $AD = DB$ (D — середина отрезка AB). Из равенства треугольников следуют равенства углов: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Первое равенство означает, что CD — биссектриса угла C, а второе, что CD — высота треугольника (углы ADC и BDC смежные и равные, поэтому прямые). ◁

12.3. Третий признак равенства треугольников

Третий признак равенства треугольников дает приведенная ниже теорема.

Теорема 12.5. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

▷ Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$.

Если $\angle A_1 = \angle A$ или $\angle B_1 = \angle B$, то треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Предположим, что у данных треугольников $\angle A_1 \neq \angle A$,

$\angle B_1 \neq \angle B$. Отложим от полупрямой AB в полуплоскость, которой принадлежит точка C, угол, равный углу A_1, и отложим на его стороне отрезок AC_2, равный A_1C_1 (рис. 12.6). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку: $A_1B_1 = AB$ (по условию), $\angle BAC_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $AC_2 = A_1C_1$ (по построению). Из равенства треугольников следует, что $BC_2 = B_1C_1$. Треугольники CC_2A и

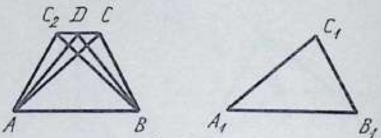


Рис. 12.6

CC_2B имеют общее основание и являются равнобедренными: $AC_2 = AC$ (ибо $A_1C_1 = AC$, $AC_2 = A_1C_1$), $BC_2 = BC$ (ибо $BC = B_1C_1$, а $B_1C_1 = BC_2$). Обозначим D середину отрезка CC_2. Точка D не лежит на прямой AB, так как отрезок CC_2 не пересекает эту прямую. Следовательно, прямые AD и BD различны. По теореме 12.4 прямые AD и BD перпендикулярны к прямой CC_2. Это противоречит тому, что через точку D можно провести только одну прямую, перпендикулярную к прямой CC_2. ◁

12.4. Соотношения между углами и сторонами треугольника

Приводимые ниже две теоремы устанавливают соотношения между углами треугольника.

Теорема 12.6. *Сумма любых двух углов треугольника меньше 180°.*

▷ Рассмотрим треугольник ABC (рис. 12.7). Докажем, что сумма углов при вершинах A и C меньше 180°. Обозначим O середину стороны AC. На продолжении отрезка BO отложим отрезок $OD = OB$. Треугольники AOD и COB равны по первому признаку: $AO = OC$ и $OD = OB$ (по построению), $\angle BOC = \angle AOD$ (как вертикальные). Из равенства указанных треугольников следует, что $\angle OCB = \angle OAD$. Поскольку луч AO пересекает отрезок BD с концами на сторонах угла BAD, то $\angle BAD = \angle BAO + \angle OAD = \angle BAO + \angle OCB$ (ибо $\angle OAD = \angle OCB$). Итак, угол BAD равен сумме углов треугольника при вершинах A и C. Этот угол не является развернутым, так как точка D не лежит на прямой AB, поэтому он меньше $180°$. Таким образом, сумма углов A и C треугольника ABC, равная углу BAD, меньше $180°$. ◁

Угол, меньше $90°$, называется *острым*. Угол, больше $90°$, но меньше $180°$, называется *тупым*.

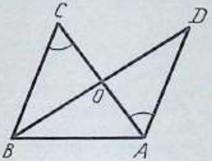


Рис. 12.7

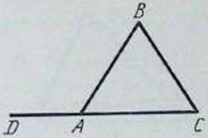


Рис. 12.8

Следствие. В каждом треугольнике два угла острые.

Действительно, если бы только один угол был острый, то сумма двух других углов была бы не меньше $180°$, что противоречит теореме 12.6.

Внешним углом треугольника ABC при вершине A называется угол BAD, смежный с углом BAC (рис. 12.8). Угол треугольника при вершине A (т. е. $\angle BAC$) называют *внутренним углом*.

Теорема 12.7. *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.*

▷ Рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 12.8). Докажем, что внешний угол при вершине A больше внутреннего угла B. По теореме 12.6 $\angle A + \angle B < 180°$, откуда $\angle B < 180° - \angle A$, или $\angle ABC < \angle BAD$, где $\angle BAD = 180° - \angle A$ — внешний угол треугольника ABC при вершине A. Итак, $\angle BAD > \angle ABC$. Аналогично доказывается, что $\angle ACB < \angle BAD$. ◁

Следующая теорема устанавливает соотношения между углами треугольника и противолежащими им сторонами.

Теорема 12.8. *В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит бóльшая сторона.*

▷ Пусть $AB > BC$ в треугольнике ABC (рис. 12.9). На полупрямой BA отложим отрезок $BC_1 = BC$. Точка C_1 лежит между точками A и B. Луч CC_1 проходит между

CA и CB (он пересекает отрезок AB), поэтому угол BCC_1 меньше угла BCA, т. е. угла C треугольника ABC. Так как $\triangle BC_1C$ — равнобедренный, то $\angle BC_1C = \angle BCC_1$. Угол BC_1C является внешним углом треугольника AC_1C и поэтому больше угла A. Следовательно, в треугольнике ABC угол C больше угла A. Первое утверждение теоремы доказано: против большей стороны лежит больший угол.

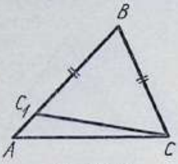


Рис. 12.9

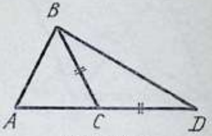


Рис. 12.10

Докажем, что если угол C больше угла A, то $AB > BC$. Допустим, что утверждение неверно, тогда либо $AB = BC$, либо $AB < BC$. В первом случае треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle A = \angle C$, что противоречит условию. Если же $AB < BC$, то по доказанному угол A больше угла C, что также противоречит условию. Итак, если угол C больше угла A, то $AB > BC$, т. е. против большего угла лежит большая сторона. ◁

Соотношения между сторонами треугольника дает следующая

Теорема 12.9. *У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей стороны.*

▷ Рассмотрим треугольник ABC (рис. 12.10). Докажем, что $AB < AC + CB$. На полупрямой AC отложим отрезок $AD = AC + CB$. Точка C лежит между A и D, поэтому $AC + CD = AD$. Из этих двух равенств следует, что $CD = CB$, т. е. треугольник CBD — равнобедренный, поэтому $\angle CBD = \angle ADB$. Так как луч BC проходит между BA и BD, то угол ABD больше угла CBD. Значит, угол ABD больше угла ADB. Согласно теореме 12.8, заключаем, что $AD > AB$, или $AC + BC > AB$. ◁

12.5. Неравенство треугольника

Расстоянием между двумя точками A и B называют длину отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними принимается равным нулю.

Неравенством треугольника называется свойство расстояний между тремя точками, выражаемое следующей теоремой.

Теорема 12.10. *Если A, B, C — любые три точки, то расстояние AB не больше суммы расстояний $AC+CB$.*

▷ Рассмотрим два случая: 1) все три точки A, B, C различны и не лежат на одной прямой; 2) все точки различны и лежат на одной прямой.

В первом случае утверждение теоремы следует из теоремы 12.9.

Если различные точки A, B, C принадлежат одной прямой, то одна из этих точек лежит между двумя другими. Если C лежит между A и B, то по аксиоме 6 $AB = AC + CB$. Если B лежит между A и C, то $AB + BC = AC$. Если A лежит между B и C, то $BC = AB + AC$. Итак, при любом варианте расположения точек A, B, C расстояние AB не больше $AC + CB$, т. е. $AB \leqslant AC + CB$. ◁

Замечание. Теорема верна и в случае, когда две точки совпадают или все три точки совпадают.

Если совпадают точки A и B, то $AB = 0$. Если A и C совпадают, то $AB = CB$. Если B и C совпадают, то $AB = AC$. Значит, при любом варианте совпадения двух точек AB не больше $AC + CB$. Когда все три точки совпадают, то $AB = 0$, $AC = 0$, $CB = 0$. Следовательно, AB не больше $AC + CB$.

Следствие. Каковы бы ни были $n+2$ точки A, C_1, C_2, ..., C_n, B, расстояние AB не больше $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots + C_nB$.

▷ Действительно, по теореме 2.10 $AB \leqslant AC_1 + C_1B$. Согласно той же теореме, $C_1B \leqslant C_1C_2 + C_2B$, поэтому $AB \leqslant AC_1 + C_1C_2 + C_2B$. Далее, $C_2B \leqslant C_2C_3 + C_3B$. Следовательно, $AB \leqslant AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3B$ и т. д. В итоге получаем, что $AB \leqslant AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots + C_nB$. ◁

Ломаной называется фигура, состоящая из точек A_1, A_2, ..., A_n и отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют *вершинами*, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ — *звеньями ломаной*. Точки A_1, A_n называют *концами ломаной*. *Длиной ломаной* называется сумма длин ее звеньев. На рис. 12.11 изображена ломаная с вершинами A_1, A_2, ..., A_7.

Теорема 12.11. *Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего его концы.*

▷ Действительно, пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — данная ломаная. Тогда по доказанному $A_1A_n \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots +$

$+ A_{n-1}A_n$. Этим и завершается доказательство, так как A_1A_n — длина отрезка, соединяющего концы, а $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$ — длина ломаной. ◁

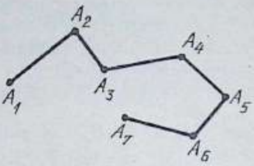


Рис. 12.11

12.6. Параллельные прямые

Признаки параллельности двух прямых выражаются теоремами, приведенными ниже.

Теорема 12.12. *Если прямая с параллельна прямым a и b, то прямые a и b параллельны.*

▷ Предположим, что прямые a и b не параллельны, тогда они пересекаются в некоторой точке A. Значит, через точку A проходят две прямые, параллельные прямой c. Однако это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной (см. § 11.3, аксиома 12). ◁

Следствие. Если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Рассмотрим две прямые AB и CD (рис. 12.12). Пусть AC — третья прямая, пересекающая прямые AB и CD. Прямую AC по отношению к AB и CD называют *секущей*. Углы, получающиеся при пересечении прямых AB и CD с секущей AC, имеют названия. Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними односторонними* (рис. 12.12, *а*). Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними накрест лежащими* (рис. 12.12, *б*).

Секущая AC образует с прямыми AB и CD две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов. Если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°. Это следует из свойств смежных углов.

Теорема 12.13. *Если внутренние накрест лежащие углы прямых a и b с секущей c равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые a и b параллельны.*

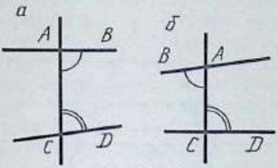


Рис. 12.12

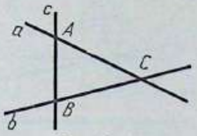


Рис. 12.13

▷ Допустим, что прямые a и b не параллельны, следовательно, они пересекаются в некоторой точке C (рис. 12.13). Обозначим точки пересечения прямой c прямыми a и b через A и B; рассмотрим треугольник ABC. Согласно теореме 12.6, сумма углов A и B меньше 180°. Это противоречит условию: их сумма равна 180° (как внутренних односторонних углов). ◁

Докажем теорему, обратную теореме 12.13.

Теорема 12.14. *Внутренние накрест лежащие углы параллельных с секущей равны, а сумма внутренних односторонних углов равна* 180°.

▷ Пусть прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает их в точках A и B соответственно (рис. 12.14). Через точку A проведем прямую a_1 так, чтобы сумма внутренних односторонних углов секущей c с прямыми a_1 и b была равна 180°. Согласно теореме 12.13, прямая a_1 параллельна прямой b. Так как через точку A можно провести только одну прямую, параллельную b, то прямая a_1 совпадает с a. Следовательно, сумма внутренних односторонних углов секущей c с параллельными a и b равна 180°, а, значит, накрест лежащие углы равны. ◁

Следствие. Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Доказать это предлагается читателю самостоятельно.

Теорема 12.15. *Пусть три параллельные прямые a, b, c пересекаются прямыми d и d_1 в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1*

соответственно (рис. 12.15). Если точка B лежит между A и C, то точка B_1 лежит между A_1 и C_1. Если $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$.

▷ Точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b, поскольку отрезок AC пересекается с прямой b (в точке B). Точки A и A_1 лежат в одной

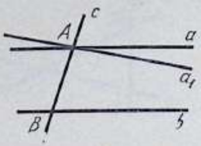


Рис. 12.14

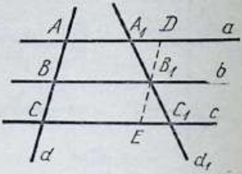


Рис. 12.15

полуплоскости относительно прямой b, так как принадлежат прямой a, параллельной b. Точно так же точки C и C_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой b. Следовательно, точки A_1 и C_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b, поэтому отрезок A_1C_1 пересекается с этой прямой. Единственной точкой, общей для прямых A_1C_1 и b, является точка B_1. Значит, точка B_1 лежит между A_1 и C_1. Первое утверждение теоремы доказано.

Проведем через точку B_1 прямую, параллельную прямой d. Точки пересечения этой прямой с прямыми a и c обозначим D и E. Треугольники B_1A_1D и B_1C_1E равны: $B_1D = B_1E$ ($B_1D = AB$, $B_1E = BC$, а $AB = BC$ по условию), $\angle DA_1B_1 = \angle EC_1B_1$, $\angle A_1DB_1 = \angle B_1EC_1$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных a и c). Из равенства треугольников следует $A_1B_1 = B_1C_1$. ◁

Замечание. Теорема верна и для n параллельных прямых: если на одной стороне угла последовательно отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые, то эти прямые отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

12.7. Сумма углов треугольника

Теорема 12.16. *Сумма углов любого треугольника равна 180°.*

▷ Рассмотрим треугольник ABC (рис. 12.16). Обозначим O середину стороны BC. На полупрямой, дополнительной к полупрямой OA, отложим отрезок $OD = OA$. Треугольники BOD и AOC равны по первому признаку: $BO = OC$, $AO = OD$ (по построению), $\angle BOD = \angle AOC$ (как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $\angle DBO = \angle ACO$. Эти углы являются внутренними накрест лежащими для прямых AC, BD и секущей BC. Действительно, точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, поскольку отрезок AD пересекает прямую BC. По теореме 12.13 из равенства $\angle DBO = \angle ACO$ следует, что прямые AC и BD параллельны.

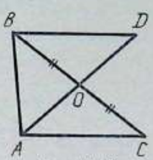


Рис. 12.16

Для прямых AC, BD и секущей AB углы DBA и CAB являются внутренними односторонними. В самом деле, точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Поскольку прямые AC и BD параллельны, то сумма внутренних односторонних углов CAB и DBA равна 180°.

Так как луч BC проходит между лучами BD и BA (он пересекает отрезок AD в точке O), то $\angle DBA = \angle DBC + \angle ABC$. Далее, $\angle DBC = \angle ACB$ (так как $\angle DBO = \angle ACO$), поэтому сумма углов треугольника ABC, т. е. $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$, равна сумме внутренних односторонних углов при параллельных, т. е. 180°. ◁

Следствие. В прямоугольном треугольнике ABC острые углы дополняют друг друга до 90°, т. е. если $\angle C = 90°$, то $\angle A + \angle B = 90°$.

Теорема 12.17. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.*

▷ Рассмотрим треугольник ABC. Согласно теореме 12.16, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Так как разность $180° - \angle C$ выражает градусную меру внешнего угла треугольника при вершине C, то теорема доказана. ◁

12.8. Прямоугольные треугольники

Треугольник называется *прямоугольным*, если один из его углов — прямой. Поскольку в любом треугольнике два угла острые, то в прямоугольном треугольнике только один прямой угол. Два других угла прямоугольного треугольника острые.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*. Остальные две стороны называются *катетами*. Углы, противолежащие катетам, являются острыми.

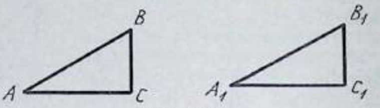


Рис. 12.17

Так как в любом треугольнике против большего угла лежит большая сторона (теорема 12.8), то в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета. Поскольку в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны, то в прямоугольном треугольнике сумма катетов больше гипотенузы.

Для прямоугольных треугольников, кроме трех известных признаков равенства, имеются и другие признаки, которые дает приведенная ниже теорема.

Теорема 12.18. *Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 равны, если выполняется одна из пар условий:*

1) $B_1C_1 = BC$, $\angle A_1 = \angle A$; 2) $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$; 3) $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$.

▷ Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 12.17) в случае, когда выполняется либо условие 1, либо условие 2, равны по второму признаку. Действительно, согласно теореме 2.16, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180°$. По условию $\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle A_1 = \angle A$, поэтому $\angle B_1 = \angle B$.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие 3. Докажем, что $A_1C_1 = AC$. Допустим, что $A_1C_1 \neq AC$, например, $A_1C_1 < AC$. На полупрямой AC отложим отрезок $CA_2 = C_1A_1$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и A_2BC равны по первому признаку равенства: $\angle C_1 = \angle C$ и $B_1C_1 = BC$ (по условию), $A_2C = A_1C_1$ (по построению). Из равенства треугольников следует, что $\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$, $BA_2 = B_1A_1$. Однако последнее равенство невозможно. В самом деле, так как $B_1A_1 = BA$, то треугольник ABA_2 равнобедренный. Следовательно, $\angle BAA_2 = \angle BA_2A$. Угол BA_2A является тупым (как смежный с острым углом BA_2C). Значит, угол BAA_2 тоже тупой, но это невозможно (в треугольнике не может быть два тупых угла). ◁

12.9. Перпендикуляр и наклонная

Рассмотрим прямую a, ее точку A и точку B вне прямой a. Отрезок BA называется *перпендикуляром*, проведенным из точки B к прямой a, если прямые a и AB взаимно перпендикулярны (рис. 12.18). Точку A называют *основанием перпендикуляра*.

Теорема 12.19. *Из точки вне данной прямой можно провести к этой прямой перпендикуляр, и притом только один.*

▷ Рассмотрим прямую a и точку B вне ее (рис. 12.19). На прямой a отметим какие-нибудь точки C и D. Если прямая BC перпендикулярна к a, то отрезок BC и есть перпендикуляр, проведенный из точки B к прямой a.

Предположим, BC не является перпендикуляром к прямой a. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, одной из которых принадлежит точка B. От полупрямой CD в другую полуплоскость построим угол, равный углу BCD, и на стороне этого угла отложим отрезок $CB_1 = CB$. Точки B_1 и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a, поэтому отрезок BB_1 пересекает эту прямую в некоторой точке A. Треугольники CAB и CAB_1 равны по первому признаку: $\angle BCA = \angle B_1CA$, $CB_1 = CB$, AC — общая сторона. Из равенства треугольников следует, что $\angle B_1AC = \angle BAC$. Так как эти углы смежные (и равные), то они прямые. Итак, прямая BA перпендикулярна к прямой a, т. е. отрезок BA есть перпендикуляр, проведенный из точки B к прямой a.

Допустим, что из точки B к прямой a можно провести два перпендикуляра BA и BA_1. В этом случае у треугольника BAA_1 будет два прямых угла: $\angle A$ и $\angle A_1$, что невозможно. Таким образом, из точки B можно провести к прямой a перпендикуляр, и притом только один. ◁

Рассмотрим перпендикуляр BA, проведенный из точки B к прямой a, и произвольную точку C прямой a, отличную от A (рис. 12.20). Отрезок BC называют *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a, а точку C — *основанием наклонной*. Отрезок AC называется *проекцией* *наклонной.* В прямоугольном треугольнике ABC BC является гипотенузой, AC и AB — катетами. Следовательно, наклонная длиннее перпендикуляра.

Расстоянием от точки B до прямой a называется длина перпендикуляра, проведенного из точки B к прямой a. Если точка B лежит на прямой, то расстояние при-

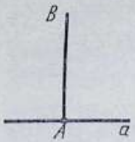


Рис. 12.18

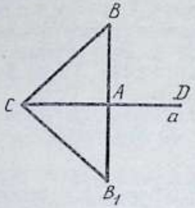


Рис. 12.19

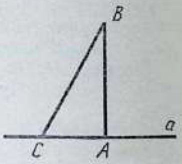


Рис. 12.20

нимают равным нулю. Так как перпендикуляр меньше наклонной, то расстояние от точки B до прямой a не больше расстояния от точки B до любой из точек прямой a.

Упражнения

1. Докажите, что если у треугольника два угла равны, то он равнобедренный.

2. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

3. Докажите, что если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны; биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

5. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

6. Может ли быть треугольник с двумя прямыми углами?

7 Докажите, что в любом треугольнике два внешних угла тупые.

8. Может ли треугольник ABC иметь стороны $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $AC = 17$ см?

9. Докажите, что равные наклонные, проведенные из данной точки к данной прямой, имеют равные проекции. Обратно, если у наклонных проекции равны, то равны и сами наклонные.

10. Докажите, что две биссектрисы треугольника пересекаются в точке, которая одинаково удалена от сторон треугольника.

11. Докажите, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

12. Докажите, что из двух наклонных, проведенных из одной точки к данной прямой, больше та, у которой больше проекция. Обратно, у большей наклонной бо́льшая проекция.

13. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

14. Чему равны углы равностороннего треугольника?

15. Чему равны углы треугольника, если они относятся как 3:4:5?

16. Чему равны углы равнобедренного прямоугольного треугольника?

13. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

13.1. Выпуклые четырехугольники

Четырехугольником ABCD называется фигура, которая состоит из четырех точек A, B, C, D, любые три из которых не лежат на одной прямой, и четырех отрезков AB, BC, CD и DA, соединяющих эти точки. Точки A, B, C, D называют *вершинами четырехугольника*, а отрезки AB, BC, CD, AD — его *сторонами*. Вершины A и C, B и D называются *противолежащими вершинами*, стороны AB и CD, BC и AD — *противолежащими сторонами*.

Четырехугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону (рис. 13.1). Отметим, что четырехугольник $ABCD$, изображенный на рис. 13.2, выпуклым не является.

Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются его *диагоналями* (на рис. 13.1 и 13.2 это отрезки AC, BD).

Теорема 13.1. *Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются.*

▷ Поскольку четырехугольник $ABCD$ выпуклый (рис. 13.3), то точки B и C, лучи AB и AC лежат по одну сторону от прямой AD. Аналогично заключаем, что лучи AC и AD лежат по одну сторону от прямой AB. Значит, луч AC проходит между сторонами угла BAD. Следовательно, прямая AC разделяет точки B и D, т. е. пересекает отрезок BD. Таким же способом доказываем, что диагональ AC пересекает прямую BD. Прямые AC и BD могут иметь только одну точку пересечения. На прямой AC она является точкой диагонали AC и на прямой BD — точкой диагонали BD. Итак, диагонали AC и BD пересекаются. ◁

Замечание. Если четырехугольник $ABCD$ не является выпуклым (см. рис. 13.2), то диагонали AC и BD не имеют общей точки, хотя прямые AC и BD пересекаются.

Теорема 13.2. *Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.*

▷ Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 13.3). Луч DB проходит между лучами DA и DC, так как пересекает отрезок AC. Следовательно, в четырех-

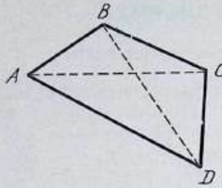


Рис. 13.1

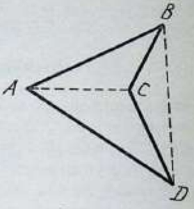


Рис. 13.2

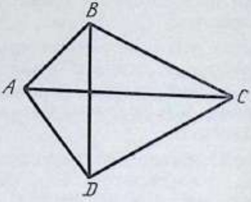


Рис. 13.3

угольнике $\angle D = \angle ADB + \angle CDB$. Аналогично доказываем, что $\angle B = \angle ABD + \angle CBD$. Отсюда следует, что $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = (\angle A + \angle ABD + \angle ADB) + (\angle C + \angle CDB + \angle CBD)$, т. е. сумма углов четырехугольника равна сумме углов двух треугольников BAD и BCD, т. е. равна 360°. ◁

13.2. Параллелограмм

Стороны четырехугольника будем называть параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны (рис. 13.4).

Докажем, что параллелограмм является выпуклым четырехугольником. Рассмотрим какую-нибудь сторону параллелограмма, например AB. Так как прямая CD параллельна прямой AB, то отрезок CD не пересекается с прямой AB. Это значит, что точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. В той же полуплоскости лежат отрезки CD, BC, AD. Итак, параллелограмм лежит в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через его сторону AB. К такому же выводу

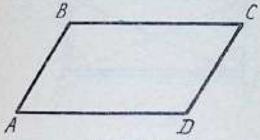


Рис. 13.4

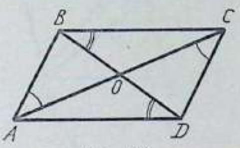


Рис. 13.5

придем, взяв любую другую сторону. Следовательно, параллелограмм является выпуклым четырехугольником.

Теорема 13.3. *У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*

▷ Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 13.5). Так как параллелограмм — выпуклый четырехугольник, то, согласно теореме 13.2, его диагонали AC и BD пересекаются в некоторой точке O. Углы BAC и ACD являются внутренними накрест лежащими для параллельных AB, CD и секущей AC, так как точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC (отрезок BD пересекается с прямой AC). Следовательно, $\angle BAC = \angle ACD$. Аналогично заключаем, что $\angle BCA = \angle CAD$. Треугольники ABC и CDA равны по второму признаку: $\angle BAC = \angle ACD, \angle BCA = \angle CAD$ (по доказанному), AC — общая сторона. Из равенства треугольников следует, что $BC = AD$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle CDA$ или $\angle B = \angle D$. Аналогично доказывается, что $\angle BAD = \angle DCB$ или $\angle A = \angle C$. ◁

Теорема 13.4. *Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.*

▷ Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ и точку O пересечения его диагоналей AC и BD (рис. 13.5). Треугольники AOD и BOC равны по второму признаку равенства треугольников: $BC = AD$ (как противолежащие стороны параллелограмма); $\angle OBC = \angle ODA$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных AD, BC и секущей BD); $\angle OAD = \angle OCB$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных AD, BC и секущей AC). Из равенства треугольников следует, что $OA = OC$, $OB = OD$. ◁

Теорема 13.5. *Если у выпуклого четырехугольника две противолежащие стороны параллельны и равны, то че-*

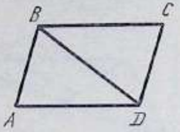


Рис. 13.6

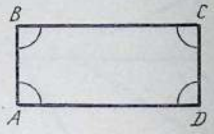


Рис. 13.7

тырехугольник есть параллелограмм. Если у выпуклого четырехугольника противолежащие стороны равны, то он — параллелограмм.

▷ Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, у которого $AD = BC$ (рис. 13.6). В обоих случаях треугольники ABD и CDB равны: для первой части теоремы они равны по первому признаку равенства, а для второй части — по третьему признаку. Из равенства треугольников следует равенство углов $\angle CBD = \angle ADB$, $\angle ABD = \angle CDB$. Углы CBD и ADB являются внутренними накрест лежащими для прямых BC, AD и секущей BD, из их равенства заключаем, что прямые BC и AD параллельны. Аналогично получаем, что прямые CD и AB параллельны. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. ◁

13.3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат.

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые (рис. 13.7).

Теорема 13.6. *Прямоугольник есть параллелограмм. Диагонали прямоугольника равны.*

▷ Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 13.8). Прямые AD и BC, перпендикулярные к прямой AB, являются параллельными (см. следствие из теоремы 12.14). Прямые AB и CD перпендикулярны к прямой AD, поэтому также параллельны. Итак, прямоугольник есть параллелограмм.

Проведем диагонали AC и BD и рассмотрим треугольники ABD и DAC. Эти треугольники равны: $AB = CD$ (как противолежащие стороны параллелограмма), AD — общая сторона, $\angle A = \angle D$ (как прямые). Из равенства треугольников следует, что $AC = BD$, т. е. диагонали прямоугольника равны. ◁

Ромбом называют параллелограмм, все стороны которого равны (рис. 13.9).

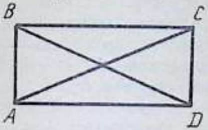


Рис. 13.8

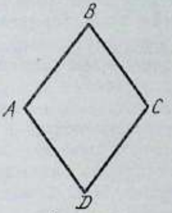


Рис. 13.9

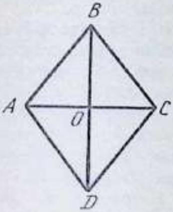


Рис. 13.10

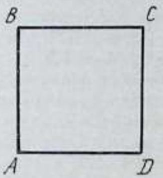


Рис. 13.11

Теорема 13.7. *Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.*

▷ Рассмотрим ромб $ABCD$ и точку O пересечения его диагоналей (рис. 13.10). Треугольники AOB и COB равны: OB — общая сторона, $AB = CB$ по определению ромба, $AO = OC$ согласно теореме 13.4. Из равенства треугольников следует, что $\angle AOB = \angle COB$, $\angle ABO = \angle CBO$. Углы AOB и COB смежные, их равенство означает, что они прямые. Первое утверждение теоремы доказано.

Луч BD проходит между сторонами угла ABC, и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому BD является биссектрисой угла ABC. Второе утверждение также доказано. ◁

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны (рис. 13.11).

Квадрат является ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, в точке пересечения делятся пополам, являются биссектрисами его углов.

13.4. Трапеция

Трапецией (от греч. τραπεξίον (трапедзион) — столик, обеденный стол (сравните: трапеза, трапезная)) называется выпуклый четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны (рис. 13.12). Эти стороны являются *основаниями* трапеции, а две другие (непараллельные) — *боковыми сторонами*. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется *равнобочной*, или *равнобедренной*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции*.

Теорема 13.8. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

▷ Рассмотрим трапецию $ABCD$, у которой AD и BC — основания, PQ — средняя линия (рис. 13.13). Через точку P проведем прямую, параллельную основаниям. Согласно теореме 12.15, она пересекает отрезок CD посередине (так как $AP = PB$), т. е. в точке Q. Следовательно, средняя линия трапеции параллельна основаниям.

Докажем второе утверждение теоремы. Через точку Q проведем прямую, параллельную стороне AB, пересекающую прямую AD в точке F, а прямую BC в точке E. Треугольники EQC и FQD равны: $CQ = QD$ (по определению средней линии трапеции), $FQ = QE$ ($FQ = AF$, $QE = PB$, а $AP = PB$), $\angle CQE = \angle FQD$ (как вертикальные). Из равенства этих треугольников следует, что $CE = DF$. По свойству параллелограмма $PQ = BE = BC + CE$, $PQ = AF = AD - FD$. Складывая эти равенства почленно и учитывая равенство $CE = FD$, полу-

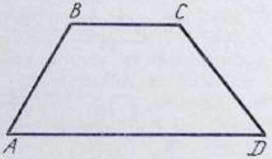


Рис. 13.12

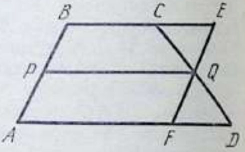


Рис. 13.13

чаем $2PQ = AD + BC$, откуда $PQ = (AD + BC)/2$, т. е. средняя линия равна полусумме оснований. ◁

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон.

Теорема 13.9. *Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны.*

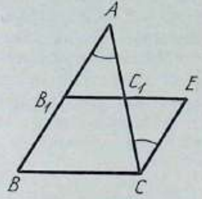


Рис. 13.14

▷ Рассмотрим треугольник ABC, его среднюю линию B_1C_1, соединяющую середины сторон AB и AC (рис. 13.14). Через точку B_1 проведем прямую, параллельную BC. Согласно теореме 12.15, она пересекает отрезок AC посередине, т. е. в точке C_1. Следовательно, средняя линия параллельна стороне BC.

Докажем второе утверждение. Через точку C проведем прямую, параллельную AB. Она пересекает прямую B_1C_1 в некоторой точке E. Треугольники AC_1B_1 и CC_1E равны: $AC_1 = C_1C$ (по определению), $CE = AB_1 (AB_1 = B_1B$, $B_1B = CE)$, $\angle AC_1B_1 = \angle CC_1E$ (как вертикальные).

Из равенства этих треугольников следует, что $B_1C_1 = C_1E$. Так как $BC = B_1E = B_1C_1 + C_1E = 2B_1C_1$, то $B_1C_1 = BC/2$. Итак, средняя линия B_1C_1 равна половине стороны BC. ◁

Упражнения

1. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то он выпуклый.

2. Могут ли быть все углы выпуклого четырехугольника тупыми?

3. Докажите, что середины сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

4. Докажите, что выпуклый четырехугольник, все углы которого равны, есть прямоугольник.

5. Найдите углы ромба, если одна из диагоналей его равна стороне.

6. Докажите, что если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то он является ромбом.

7. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов параллелограмма являются вершинами квадрата.

8. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба, а середины сторон ромба — вершинами прямоугольника.

9. Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей трапеции, параллельна основаниям.

10. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

14.1. Простейшие задачи на построение

В задачах на построение геометрическую фигуру строят с помощью чертежных инструментов: линейки и циркуля. Основным в решении задач на построение является выяснение вопроса о том, как это сделать, и соответствующее доказательство. Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, эта фигура обладает требуемыми свойствами.

Рассмотрим простейшие задачи на построение и способы их решения.

Задача 14.1. Построить треугольник по трем сторонам a, b, c.

Решение. Пусть даны три отрезка a, b, c (рис. 14.1). Требуется построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам. С помощью линейки проведем произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку B (рис. 14.2). Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром в точке B и радиуса a. Обозначим C одну из точек пересечения окружности с прямой. Далее, раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b,— окружность из центра C. Если A — точка пересечения этих окружностей, то треугольник ABC имеет заданные стороны a, b, c.

Замечание. Задача 14.1 не всегда имеет решение. Согласно теореме 12.9, отрезки a, b, c должны удовлетворять условиям: $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$.

Задача 14.2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

Решение. Пусть дан угол с вершиной в точке A и полупрямая с начальной точкой A_1 (рис. 14.3). Проведем произвольную окружность с центром в точке A, которая пересечет стороны угла в точках B и C (рис. 14.3, *а*). Проведем окружность с центром в точке A_1 радиуса AB. Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B_1 (рис. 14.3, *б*). Опишем окружность радиуса BC с центром в точке B_1. Точка C_1 пересечения построенных окружностей лежит на стороне искомого угла. Для доказательства заметим, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Так как $B_1C_1=BC$, то $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$ (в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы).

Задача 14.3. Данный угол разделить пополам.

Решение. Описываем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла (рис. 14.4). Пусть B и C — точки пере-

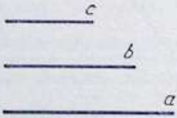


Рис. 14.1

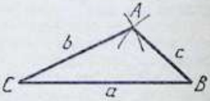


Рис. 14.2

сечения этой окружности со сторонами угла. Из точек B и C описываем окружности того же радиуса. Точку их пересечения, отличную от точки A, обозначим D. Полупрямая AD делит угол BAC пополам. Действительно, так как треугольники ABD и ACD равны ($AB = AC$, $BD = CD$, AD — общая сторона), то $\angle BAD = \angle CAD$ (эти углы лежат против равных сторон BD и DC).

Задача 14.4. Разделить данный отрезок пополам.

Решение. Дан отрезок AB (рис. 14.5). Из точек A и B описываем окружности радиуса AB, точки их пересечения обозначим буквами C и D. Эти точки лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Отрезок CD пересекает прямую AB в некоторой точке O. Точка O и есть середина отрезка AB.

Действительно, четырехугольник $ABCD$ является ромбом, а его диагонали AB и CD в точке их пересечения делятся пополам, т. е. $AO = OB$, O — середина отрезка AB.

Задача 14.5. Из данной точки O провести перпендикуляр к данной прямой a.

Решение. Возможны два случая: 1) точка O лежит на прямой a; 2) точка O не лежит на прямой a.

В первом случае из точки O прямой a (рис. 14.6) проводим окружность произвольного радиуса. Пусть A и B — точки пересечения этой окружности с прямой a. Из точек A и B проводим окружности радиуса AB. Точку их пересечения обозначим C. Искомая прямая проходит через

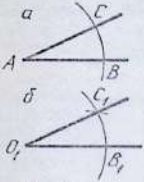


Рис. 14.3

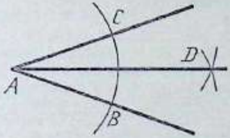


Рис. 14.4

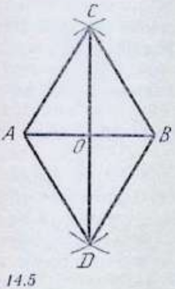


Рис. 14.5

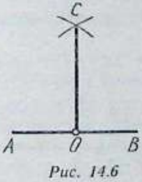


Рис. 14.6

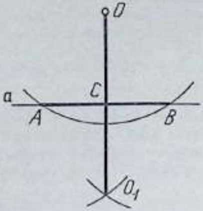


Рис. 14.7

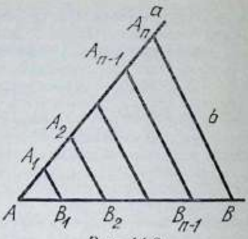


Рис. 14.8

точки O и C. Перпендикулярность прямых OC и AB следует из равенства углов при вершине O в треугольниках AOC и BOC. Эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников: $AC = BC$, $AO = OB$, OC — общая сторона.

Во втором случае из точки O проводим окружность произвольного, но достаточно большого радиуса, пересекающую прямую a в некоторых точках A и B (рис. 14.7). Из точек A и B проводим окружности того же радиуса. Точку их пересечения, отличную от O, обозначим O_1. Искомая прямая проходит через точки O и O_1. Действительно, четырехугольник $AOBO_1$ является ромбом, поэтому OO_1 и AB взаимно перпендикулярны как его диагонали. Итак, прямая OO_1 перпендикулярна к прямой a.

Задача 14.6. Разделить данный отрезок AB на n равных частей.

Решение. Из точки A проведем любую полупрямую a, отличную от AB (рис. 14.8). Отложим на ней n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$. Через точки A_n и B проведем прямую b. Прямые, параллельные прямой b и проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1}, пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые делят отрезок AB на n равных отрезков (согласно теореме 12.15).

14.2. Геометрическое место точек

Геометрическим местом точек называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством, и только им. Например, геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки, является окружность.

Важное геометрическое место точек дает следующая теорема.

Теорема 14.1. *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.*

▷ Рассмотрим прямую, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину — точку O (рис. 14.9). Пусть C — любая точка этой прямой, тогда

$CA = CB$. Это следует из равенства треугольников AOC и BOC ($AO = OB$, $\angle AOC = \angle BOC$, OC — общая сторона).

Докажем, что каждая точка D плоскости, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой OC. Допустим, точка D не лежит на прямой OC. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OC. Для определенности предположим, что точка D находится в одной полуплоскости с точкой B (рис. 14.9). В этом случае отрезок AD пересекается с прямой OC в некоторой точке E. По доказанному $AE = BE$. По условию $AD = BD$. Так как $AD = AE + ED$, то в треугольнике BDE $BD = BE + ED$, что невозможно (ибо сумма двух сторон больше третьей стороны треугольника). ◁

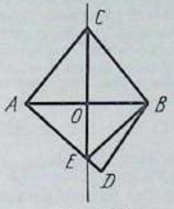


Рис. 14.9

14.3. Метод геометрических мест

Метод геометрических мест является одним из основных методов решения задач на построение. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть при решении задачи на построение необходимо найти некоторую точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих условию 1, есть некоторая фигура F, а геометрическое место точек, удовлетворяющих условию 2, есть некоторая фигура Ф. Искомая точка X принадлежит каждой из фигур F и Ф, т. е. является точкой их пересечения. Если геометрические места являются простыми, состоят из прямых и окружностей, то мы можем их построить и найти искомую точку X.

Окружностью, описанной около треугольника, называется окружность, проходящая через каждую из вершин треугольника.

Задача 14.7. Найти окружность, описанную около данного треугольника ABC.

Решение. Центр O искомой окружности находится на одинаковом расстоянии от всех трех вершин A, B, C треугольника. Иначе говоря, центр O удовлетворяет двум условиям: 1) центр находится на одинаковом расстоянии от вершин A и C; 2) центр окружности находится на одинаковом расстоянии от вершин B и C. Геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому условию, является перпендикуляр к стороне AC, проведенный через ее середину D. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть перпендикуляр к стороне BC, проведенный через ее середину E. Следовательно, центр O описанной окружности совпадает с точкой пересечения указанных перпендикуляров.

Замечание. Из этого решения получаем важное следствие.

Центр описанной окружности находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, поэтому, согласно теореме 14.1, он лежит на перпендикуляре к отрезку AB, проведенном через его середину. Значит, три прямые, проходящие через середины сторон треугольника перпендикулярно к этим сторонам, пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.

Упражнения

1. Постройте прямую, параллельную данной прямой AB и проходящей через данную точку C.
2. Постройте угол, равный разности двух углов.
3. Постройте углы, равные 60° и 30°.
4. Постройте угол, равный 45°.
5. Постройте отрезок, равный 1/4 данного отрезка.
6. Постройте угол, равный 1/4 данного угла.
7. Постройте треугольник ABC по следующим условиям:
   1) даны стороны AB, AC и угол A;
   2) даны стороны AB, BC и угол A;
   3) даны углы A, B и сторона AB.
8. Постройте треугольник по сторонам AB, BC и медиане, проведенной к одной из этих сторон.
9. Постройте треугольник по сторонам AB, BC и высоте, проведенной из вершины A.
10. Постройте параллелограмм $ABCD$ по сторонам AB, AD и углу A.
11. Постройте прямоугольник $ABCD$ по сторонам AB и AD.
12. Постройте ромб по его диагоналям.
13. Постройте трапецию по ее сторонам.
14. Постройте квадрат по его стороне.
15. Постройте точку, равноудаленную от данных точек A, B и находящуюся на данном расстоянии от точки C.
16. Постройте точку, равноудаленную от двух данных прямых a, b и находящуюся на данном расстоянии от точки C.

15. ОКРУЖНОСТЬ

15.1. Простейшие свойства окружности

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки той же плоскости. Данная точка называется *центром окружности*, а расстояние от центра до точек окружности называется *радиусом окружности*. Радиусом является также отрезок, соединяющий центр окружности с какой-нибудь ее точкой. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой.* Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.*

Кругом радиуса R называется конечная часть плоскости, ограниченная окружностью того же радиуса. Другими словами, круг радиуса R — геометрическое место точек плоскости, расстояние которых до данной точки (центра круга) не больше R.

Простейшие свойства окружности выражаются следующими теоремами.

Теорема 15.1. *Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам.*

▷ Пусть C — середина данной хорды AB (рис. 15.1). Через точку C проведем диаметр OC. Треугольники AOC и BOC равны по третьему признаку: $OA = OB$ (по определению окружности), $AC = CB$ (по условию), OC — общая сторона. Из равенства треугольников следует равенство углов ACO и BCO. Так как эти углы смежные и равные, то они прямые. Следовательно, диаметр OC перпендикулярен к хорде AB и делит ее пополам. Так как через точку O можно провести только одну прямую, перпендикулярную к прямой AB, то другого диаметра, перпендикулярного к хорде, не существует. ◁

Теорема 15.2. *Всякая хорда не больше диаметра. Она равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.*

▷ Допустим, что хорда AB не является диаметром (рис. 15.1). Из треугольника AOB следует, что $AB < AO + BO$. Так как AO и BO — радиусы, а их сумма равна длине диаметра, то последнее неравенство означает, что хорда меньше диаметра. ◁

Прямая, проходящая через точку A окружности, называется *касательной*, если она перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку A (рис. 15.2). Точка A называется *точкой касания.*

Теорема 15.3. *Касательная имеет с окружностью только одну общую точку — точку касания.*

▷ Рассмотрим любую точку B касательной, отличную от точки касания A, и отрезок OB (рис. 15.2). Так как OA — перпендикуляр, а OB — наклонная, то $OB > OA$. Значит, точка B отстоит от центра окружности O на расстоянии, большем радиуса. Следовательно, точка B окружности не принадлежит. ◁

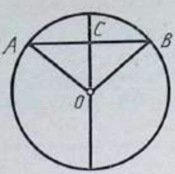


Рис. 15.1

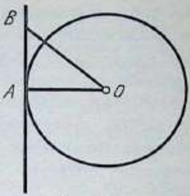


Рис. 15.2

15.2. Центральные углы

Через две точки A и B данной окружности проведем прямую (рис. 15.3). Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Части окружности, лежащие в этих полуплоскостях, называют *дугами окружности*. Если AB — диаметр, то дуги окружности называют *полуокружностями*.

Если AB не является диаметром, то дуги окружности различают следующим образом. Одной из полуплоскостей, на которые прямая разбивает плоскость, принадлежит центр окружности — точки O (рис. 15.3). Дугу, лежащую в этой полуплоскости, называют дугой, большей полуокружности. Другую дугу называют дугой, меньшей полуокружности. Радиусы, проведенные в точки дуги, большей полуокружности, не пересекают хорду AB, а радиусы, проведенные в точки дуги, меньшей полуокружности, пересекают эту хорду.

Центральным углом, соответствующим данной дуге окружности, называют фигуру, которая состоит из лучей, исходящих из центра окружности и пересекающих эту дугу в ее граничных точках.

Для центральных углов определяют градусную меру по следующему правилу. Когда соответствующая дуга AB меньше полуокружности, то за меру центрального угла принимают обычную меру угла, образованного лучами OA и OB. Если AB — диаметр и дуга равна полуокружности, то угловую меру полагают равной $180°$. Если дуга больше полуокружности, то за угловую меру принимают $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного угла (меньшего $180°$).

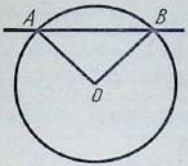


Рис. 15.3

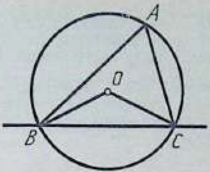


Рис. 15.4

15.3. Вписанные углы

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в двух точках, отличных от вершины, называется *вписанным* в окружность. На рис. 15.4 изображен вписанный угол BAC с вершиной в точке A. Прямая BC разбивает окружность на две дуги, одной из которых не принадлежит точка A. Центральный угол, соответствующий дуге, не содержащей точку A, называется центральным углом, соответствующим данному вписанному углу. На рис. 15.4 центральный угол BOC, соответствующий вписанному углу BAC, отмечен лучами, исходящими из точки O.

Теорема 15.4. *Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.*

▷ Пусть одна из сторон вписанного угла проходит через центр окружности (рис. 15.5). Вписанному углу A соответствует центральный угол BOC, являющийся внешним углом треугольника AOB при вершине O. Треугольник AOB равнобедренный с боковыми сторонами OA и OB. Углы при основании этого треугольника равны: $\angle A = \angle B$. Так как $\angle BOC = \angle A + \angle B = 2\angle A$, то $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC$. Следовательно, вписанный угол BAC равен половине соответствующего центрального угла BOC.

Когда ни одна из сторон вписанного угла не проходит через центр, проводим диаметр из вершины A вписанного угла, и рассматриваем два случая: 1) стороны угла A разделяются диаметром AD (рис. 15.6); 2) стороны угла A не разделяются диаметром (рис. 15.7).

В первом случае по доказанному $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$,

$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$. Если центральный угол, соответствующий углу A, меньше $180°$ (рис. 15.6, *а*), то отсюда заключаем, что $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$, т. е. вписанный угол BAC равен половине соответствующего центрального угла BOC.

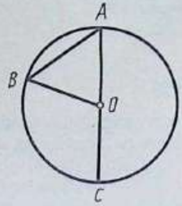


Рис. 15.5

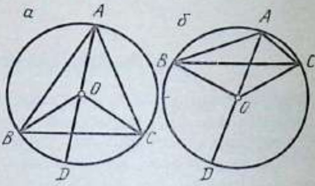


Рис. 15.6

Если центральный угол, соответствующий вписанному углу, больше $180°$ (рис. 15.6, *б*), то $\angle BOD = 180° - \angle AOB$, $\angle COD = 180° - \angle AOC$, откуда $\angle BAC = \frac{1}{2}(360° - \angle BOC)$. Следовательно, вписанный угол BAC равен половине соответствующего центрального угла BOC.

Во втором случае (когда диаметр AD не разделяет стороны угла A) доказательство аналогично. ◁

Следствие 1. Вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат на одной из дуг, определяемых прямой AB, равны.

Действительно, все они измеряются половиной одного и того же центрального угла.

Следствие 2. Углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

В самом деле, они измеряются половиной центрального развернутого угла ($180°$), т. е. равны $90°$.

Рассмотрим хорду AB окружности (рис. 15.8). Проведем касательную к окружности в точке A. Точка A разбивает касательную на две полупрямые, которые назовем полукасательными. Угол между полукасательной и хордой и центральный угол, соответствующий той из дуг AB, которая лежит в одной полуплоскости с полукасательной относительно прямой AB, называются соответствующими.

Теорема 15.5. *Угол между хордой и полукасательной в ее концевой точке измеряется половиной соответствующего центрального угла.*

▷ Рассмотрим сначала угол между полукасательной и хордой, соответствующий меньшему центральному углу (рис. 15.8). В этом случае угол между полукасательной

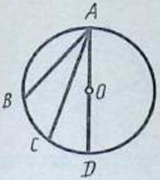


Рис. 15.7

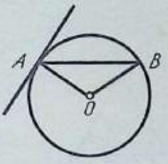


Рис. 15.8

и хордой равен $90° - \angle OAB$. В равнобедренном треугольнике $\angle OAB = \angle A = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB)$, поэтому интересующий нас угол равен $90° - \angle OAB = 90° - \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}\angle AOB$, т. е. половине соответствующего центрального угла.

Угол между другой полукасательной и хордой является смежным к рассмотренному углу, поэтому равен $180° - \frac{1}{2}\angle AOB$. Эта разность выражает градусную меру половины дополнительного центрального угла. ◁

15.4. Вписанная и описанная окружности

Будем говорить, что точка X лежит внутри треугольника ABC (рис. 15.9), если она лежит в одной полуплоскости с каждой вершиной относительно прямой, содержащей противоположную сторону. Окружность с центром внутри треугольника, касающуюся каждой из его сторон, называют *вписанной в треугольник*.

Теорема 15.6. *Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.*

▷ Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 15.10). Поскольку точка O лежит внутри треугольника, то луч AO лежит в одной полуплоскости с лучом AB относительно прямой AC и в одной полуплоскости с лучом AC относительно прямой AB. Значит, луч AO проходит между лучами AB и AC. Точки касания сторон треугольника AC и AB с окружностью обозначим B_1 и C_1 соответственно. Прямоугольные

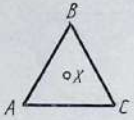


Рис. 15.9

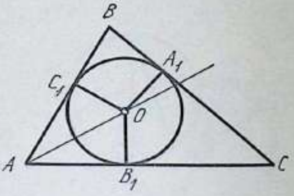


Рис. 15.10

треугольники AOB_1 и AOC_1 равны: $OB_1 = OC_1$ (как радиусы) AO — общая сторона. Отсюда следует, что $\angle OAC_1 = \angle OAB_1$. Итак, центр вписанной окружности лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины A. Аналогично доказывается, что центр вписанной окружности лежит на двух других биссектрисах треугольника. ◁

Теорема 15.7. *Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенным через их середины.*

Эта теорема доказана ранее (см. § 14.3, задача 14.7).

Задача 15.1. Построить касательные к данной окружности с центром O, проходящие через данную точку A, лежащую вне круга.

Решение. На отрезке OA как на диаметре строим окружность (рис. 15.11). Пусть B и C — точки пересечения этой окружности с данной окружностью. Прямые AB и AC являются касательными к данной окружности, проходящими через точку A. Действительно, углы OBA и OCA, как опирающиеся на диаметр OA, являются прямыми (следствие 2 из теоремы 15.4).

Упражнения

1. Проведите окружность данного радиуса через две данные точки.
2. Проведите окружность через три данные точки, не лежащие на одной прямой.
3. Найдите центр данной дуги окружности.
4. Разделите данную дугу окружности на две равные части.

5. Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α.

6. Докажите, что если прямая имеет с окружностью общую точку и не касается ее в этой точке, то она имеет еще одну общую точку с окружностью.

7. Проведите окружность данного радиуса, касающуюся сторон данного угла.

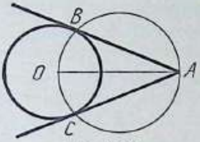


Рис. 15.11

8. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через точку B.

9. Постройте треугольник ABC по стороне AB, углу C и высоте к основанию AB.

10. Найдите геометрическое место середин хорд, проходящих через данную точку.

11. Дан треугольник ABC. Постройте окружности, касающиеся прямых AB, AC и BC. Сколько существует таких окружностей?

12. Выпуклый четырехугольник называется вписанным в окружность, если каждая из его вершин лежит на окружности. Докажите, что у вписанного четырехугольника сумма противолежащих углов равна $180°$.

13. Докажите, что отрезки касательных AB и AC, проведенных из одной точки к окружности, равны (см. рис. 5.11).

14. Выпуклый четырехугольник называется описанным около окружности, если каждая из его сторон касается окружности. Докажите, что у описанного четырехугольника суммы противолежащих сторон одинаковы.

16. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

16.1. Основной признак подобия треугольников

Треугольники называются *подобными*, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Метрические соотношения в треугольнике — это зависимости между его сторонами и углами. Они дают возможность найти все элементы треугольника, т. е. стороны и углы, если заданы некоторые из них, однозначно определяющие треугольник.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называют подобными, если у них $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$, $A_1B_1/$

$/AB = B_1C_1/BC = A_1C_1/AC$. Подобие треугольников обозначается знаком $\backsim$: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$. Приведем пример подобных треугольников. В треугольнике ABC проведем среднюю DE (рис. 16.1). Треугольники ABC и DEC подобны, так как их углы равны, а стороны пропорциональны. Действительно, у них общий угол C, $\angle D = \angle A$

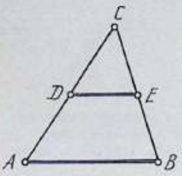


Рис. 16.1

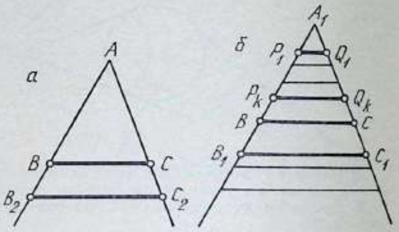


Рис. 16.2

(как углы при параллельных прямых DE, AB и секущей AD), $\angle E = \angle B$ (как углы при параллельных прямых DE, AB и секущей CE). Так как $CD/AC = CE/BC = 1/2$ (по определению средней линии), $DE/AB = 1/2$ (по свойству средней линии), то

$$\frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} = \frac{DE}{AB}.$$

Замечание. Средняя линия треугольника отсекает треугольник, подобный данному.

Основной признак подобия треугольников дает теорема, приведенная ниже.

Теорема 16.1. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

▷ Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$. Из этих равенств следует, что $\angle C_1 = \angle C$. Действительно, согласно теореме 12.16, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180°$. Отсюда с учетом равенств $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ получаем $\angle C_1 = \angle C$.

Докажем пропорциональность сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. На полупрямой AB отложим отрезок

$AB_2 = A_1B_1$ (рис. 16.2, *а*). Для определенности будем считать, что $AB \leqslant A_1B_1$. Через точку B_2 проведем прямую, параллельную BC, точку пересечения этой прямой с прямой AC обозначим C_2. Углы ABC и AB_2C_2 равны как углы при параллельных прямых BC, B_2C_2 и секущей BB_2. Треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку: $\angle B_2AC = \angle B_1A_1C_1$ (по условию $\angle A_1 = \angle A$), $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ $AB_2 = A_1B_1$ (по построению). Из равенства треугольников следует, что $AC_2 = A_1C_1$.

На полупрямой A_1B ($A_1B = AB$) отложим отрезок A_1P_1 так, чтобы два отношения AB/A_nP_1 и AB_2/A_1P_1 не выражались целым числом (рис. 16.2, *б*). На отрезке A_1B построим точки P_2, P_3, ..., P_k, ... так, чтобы $A_1P_k = kA_1P_1$. Введем обозначения: n — наименьшая целая часть от деления AB на A_1P_1, m — наименьшая целая часть от деления AB_2 на A_1P_1. Поскольку по предположению $AB \leqslant A_1B_1$, то $n \leqslant m$. Значит, точка B находится между P_n и P_{n+1}, а точка B_1 — между P_m и P_{m+1}. Следовательно, $nA_1P_1 < < A_1B < (n+1)A_1P_1$, $mA_1P_1 < A_1B_1 < (m+1)A_1P_1$. Отсюда следует, что

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m}. \tag{16.1}$$

Через точки B, P_1, P_2, P_3, ... проведем прямые, параллельные прямой B_1C_1. Согласно теореме 12.15, эти прямые на полупрямой A_1C отсекают равные отрезки $A_1Q_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots$ Точка C лежит между точками Q_n и Q_{n+1}, а точка C_1 — между точками Q_m и Q_{m+1}. Значит, $nAQ_1 < A_1C < (n+1)AQ_1$, $mA_1Q_1 < A_1C_1 < (m+1)A_1Q_1$. Отсюда получаем

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m}. \tag{16.2}$$

Из неравенств (16.1) и (16.2) следует, что отношения AB/AB_2 и AC/AC_2 различаются меньше, чем $(n+1)/m - - n/(m+1)$, или

$$\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{n+m+1}{m(m+1)} < \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m}.$$

Таким образом, отношения AB/AB_2 и AC/AC_2 отличаются не более чем на $2/m$.

Если взять отрезок A_1P_1 достаточно малым, то число m будет как угодно велико, а число $2/m$ — как угодно мало. Следовательно, отношения AB/AB_2 и AC/AC_2 отличаются как угодно мало. Это может быть только в случае, когда они равны:

$$\frac{AB}{AB_2}=\frac{AC}{AC_2}.$$

Из этого равенства получаем

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

так как $AB_2=A_1B_1$ (по построению), $AC_2=A_1C_1$ (по доказанному).

Аналогично доказывается, что $AC/A_1C_1=BC/B_1C_1$. ◁

16.2. Другие признаки подобия треугольников

Докажем теоремы, которые дают два других признака подобия треугольников.

Теорема 16.2. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны, то эти треугольники подобны.*

▷ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC};\ \angle A_1=\angle A. \tag{16.3}$$

Построим треугольник $A_2B_2C_2$ (рис. 16.2), у которого $A_2B_2=A_1B_1$, $\angle B_2=\angle B$, $\angle A_2=\angle A$. Согласно теореме 16.1, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, поэтому

$$\frac{A_2B_2}{AB}=\frac{A_2C_2}{AC}. \tag{16.4}$$

Так как $A_2B_2=A_1B_1$, то из равенств (16.3) и (16.4) следует, что $A_2C_2=A_1C_1$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны: $A_2B_2=A_1B_1$ (по построению), $A_2C_2=A_1C_1$ (по доказанному), $\angle A_2=\angle A_1$ (ибо $\angle A=\angle A_1$; $\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$).

Поскольку треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ равны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. ◁

Теорема 16.3. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.*

▷ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}. \tag{16.5}$$

Построим треугольник $A_2B_2C_2$, у которого $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$. Согласно теореме 16.1, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, поэтому

$$\frac{A_2C_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}. \tag{16.6}$$

Так как $A_2C_2 = A_1C_1$, то из равенств (16.5) и (16.6) следует, что $B_2C_2 = B_1C_1$. Треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку: $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$ (по построению), $B_2C_2 = B_1C_1$ (по доказанному).

Поскольку треугольник ABC подобен треугольнику $A_2B_2C_2$, а треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

16.3. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Средним арифметическим двух чисел a и b называют число $(a+b)/2$, а их *средним геометрическим* (или средним пропорциональным) — число $\sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0)$.

Теорема 16.4. *У прямоугольного треугольника высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу. Каждый катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу.*

▷ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 16.3). Пусть CD — высота, проведенная из вершины C, AD — проекция катета AC на гипотенузу AB, DB — проекция катета BC. Прямоугольные треугольники CAD и BCD подобны согласно теореме 16.1: $\angle ADC = \angle CDB$ (прямые), $\angle CAD = \angle BCD$ (так как каждый из них дополняет $\angle ABC$ до 90°). Из подобия треугольников следует, что $CD/BD = AD/CD$, откуда $CD^2 = AD \cdot BD$, т. е. $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$. Первое утверждение теоремы доказано.

Треугольники BCD и BAC подобны, так как угол B общий, $\angle CDB = \angle ACB$ (прямые). Из подобия этих треугольников следует, что $AB/CB = CB/BD$, откуда $CB^2 = AB \cdot BD$, т. е. $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$. ◁

Задача 16.1. Даны два отрезка a и b. Построить отрезок $x=\sqrt{ab}$.

Решение. На произвольной прямой p отметим точку D и отложим от нее на этой прямой в разные стороны отрезки $DA=a$, $DB=b$ (рис. 16.4). На отрезке AB как на диаметре построим окружность. Через точку D проведем прямую, перпендикулярную к AB. Пусть C — точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью, тогда $CD=\sqrt{ab}$. Действительно, в треугольнике ABC угол C прямой, CD —

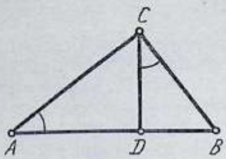


Рис. 16.3

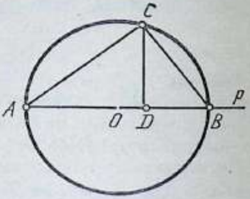


Рис. 16.4

высота, поэтому, согласно теореме 16.4, $CD=\sqrt{AD\cdot DB}$, или $CD=\sqrt{ab}$ (так как $AD=a$, $DB=b$).

Задача 16.2. Доказать геометрически, что $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$ (среднее геометрическое не больше среднего арифметического). Когда в этом соотношении будет знак равенства?

Решение. Построим отрезок $CD=\sqrt{ab}$, как и в задаче 16.1 (рис. 16.5). Отметим, что $(a+b)/2=OA=OE=R$, где R — радиус окружности, построенной на диаметре $AB=a+b$. Так как $CC_1\leqslant EE_1$ (любая хорда не больше диаметра (см. теорему 15.2), то $CD\leqslant OE$, т. е. $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$. Очевидно, что $CC_1=EE_1$, когда $b=a$. Знак равенства в соотношении $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$ будет в случае $b=a$.

Задача 16.3. Даны три отрезка a, b, c. Построить отрезок $x=bc/a$.

Решение. Из произвольной точки O проведем два луча p и q, не лежащие на одной прямой (рис. 16.6). На луче p отложим отрезки

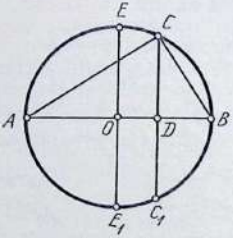


Рис. 16.5

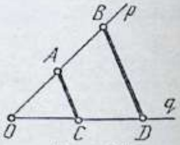


Рис. 16.6

$OA = a$, $OB = b$, а на луче q — отрезок $OC = c$. Через точку B, проведем прямую, параллельную прямой AC. Пусть D — точка пересечения этой прямой с лучом q, тогда треугольники OAC и OBD подобны. Из подобия треугольников следует, что $OD/OC = OB/OA$. Отсюда получаем: $OD = OB \cdot OC/OA$, т. е. $OD = bc/a$.

16.4. Пропорциональность отрезков, хорд и секущих

Теорема 16.5. *Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.*

▷ Рассмотрим окружность и две ее хорды AB, CD, пересекающиеся в точке S (рис. 16.7). Проведем прямую BD. Точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD, именно в той, которой принадлежит и точка S. Значит, точки A и C принадлежат одной из дуг, на которые прямая BD разбивает окружность. Следовательно, вписанные углы DCB и DAB равны. Аналогично доказываем равенство углов ABC и ADC. Согласно теореме 16.1, треугольники ASD и CSB подобны. Из подобия этих треугольников следует равенство $DS/BS = AS/CS$, откуда $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. Итак, произведение отрезков AS и SB хорды AB равно произведению отрезков CS и SD хорды CD. ◁

Пусть дана окружность и точка S вне ее (рис. 16.8). Через точку S проведем прямую, пересекающую окружность в некоторых точках A и B. Эту прямую называют *секущей окружности*, а отрезки SA и SB — *отрезками секущей*.

Теорема 16.6. *Если через точку проведены секущая окружности и касательная, то произведение отрезков секущей равно квадрату отрезка касательной.*

▷ Через точку S, лежащую вне окружности, проведем секущую SA и касательную SC (рис. 16.8). Треугольники

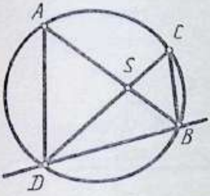


Рис. 16.7

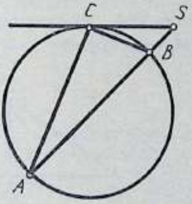


Рис. 16.8

SAC и SCB подобны по основному признаку: у них общий угол S, $\angle CAB = \angle BCS$ (измеряются половиной одного и того же центрального угла). Из подобия треугольников следует равенство $CS/AS = BS/CS$, откуда $AS \cdot BS = CS^2$. ◁

Следствие. Произведения отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны.

▷ Действительно, если через точку S проведены секущие SA (отрезки которой SA и SB) и SD (отрезки которой SD и SE), то $SA \cdot SB = SC^2$, $SD \cdot SE = SC^2$, откуда $SA \cdot SB = SD \cdot SE$. ◁
(Сделайте чертеж.)

16.5. Теорема Пифагора

Теорема 16.7 (Пифагора). *В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.*

▷ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 16.9). Из вершины прямого угла C проведем высоту CD. Докажем сначала, что основание высоты лежит между точками A и B. Предположим, что точка B лежит между A и D (рис. 16.9, *б*). Значит, у треугольника BCD угол D прямой (CD — высота), а угол B тупой как смежный с острым углом. Однако это невозможно, так как сумма углов треугольника равна 180°. Аналогично доказывается, что точка A не может лежать между B и D. Следовательно, точка D лежит между A и B, поэтому $AD + DB = AB$.

Согласно теореме 16.4, $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot DB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая предыдущее равенство, получаем $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB \cdot AB$, $AC^2 + BC^2 = AB^2$. ◁

Задача 16.4. Даны отрезки a и b. Построить отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, если $a > b$.

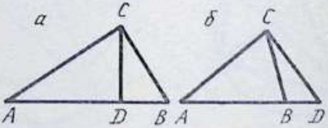


Рис. 16.9

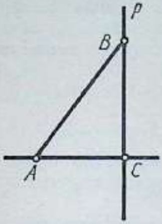


Рис. 16.10

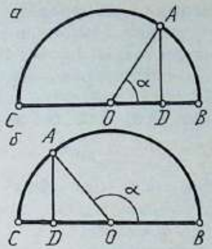


Рис. 16.11

Решение. На произвольной прямой отложим отрезок $AC = b$ (рис. 16.10). Через точку C проведем прямую p, перпендикулярную к AC. Из точки C на прямой p отложим отрезок $CB = a$, тогда $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ (по теореме Пифагора). Итак, отрезок $\sqrt{a^2 + b^2}$ построен.

Проведем окружность радиуса a с центром A. Если B_1 — точка пересечения этой окружности с прямой p, то $CB_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$ (по теореме Пифагора). Отрезок $\sqrt{a^2 - b^2}$ построен.

16.6. Тригонометрические функции углов

Рассмотрим полуокружность с центром O, радиус которой равен единице (рис. 16.11). Пусть A — произвольная точка этой полуокружности, $\alpha = \angle AOB$. Из точки A проведен перпендикуляр к диаметру BC. *Синусом угла* α называется длина отрезка AD. Следовательно, $\sin\alpha = AD$; по определению считаем $\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$. Так как $AD \leqslant 1$, то $\sin\alpha \leqslant 1$. *Косинус угла* обозначается так: $\cos\alpha$. По определению $\cos\alpha = OD$, если угол α острый (рис. 16.11, *а*), $\cos\alpha = -OD$, если угол α тупой; $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = -1$. Так как $OD \leqslant 1$, то $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

Тангенсом угла α называется отношение $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{16.7}$$

В случае $\alpha = 90°$ тангенс угла α не определен.

Котангенсом угла α называется отношение $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{16.8}$$

Котангенс угла α не определен для углов $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$.

Из формул (16.7) и (16.8) следует формула $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ или $\operatorname{ctg}\alpha = 1/\operatorname{tg}\alpha$.

Тригонометрическими функциями угла α называются функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Теорема 16.8. *Для любого угла* α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (16.9)$$

▷ При $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$ это равенство проверяется непосредственной подстановкой соответствующих значений синуса и косинуса.

При всех других значениях α утверждение теоремы следует из теоремы Пифагора для треугольника ODA (см. рис. 16.11, *а*, если угол α острый и рис. 16.11, *б*, если угол α тупой). ◁

16.7. Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы, устанавливающие связь между тригонометрическими функциями углов α, $90° - \alpha$, $180° - \alpha$.

Теорема 16.9. *Если угол* α *острый, то*

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

▷ Рассмотрим углы $\angle AOB = \alpha$ и $\angle A_1OB = 90° - \alpha$ (рис. 16.12). Прямоугольные треугольники ODA и A_1D_1O равны, так как у них равны гипотенузы ($OA_1 = OA$ — радиусы одной окружности) и углы AOD и OA_1D_1 (каждый из них равен α). Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон: $A_1D_1 = OD$, $OD_1 = AD$. Так как $A_1D_1 = \sin(90° - \alpha)$, $OD = \cos\alpha$, $OD_1 = \cos(90° - \alpha)$, $AD = \sin\alpha$, то $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

Разделив почленно первую формулу на вторую и приняв во внимание формулы (16.7) и (16.8), получим $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, т. е. третью из доказываемых формул. ◁

Теорема 16.10. *Для любого угла* α

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha; \ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

▷ Если $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, то утверждение теоремы проверяется подстановкой в эти формулы соответствующих значений синуса и косинуса.

Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle A_1OB = 180° - \alpha$ (рис. 16.13). Треугольники OAD и OA_1D_1 равны (как имеющие равные гипотенузы и равные острые углы α). Из равенства треугольников следует, что $A_1D_1 = AD$, $OD_1 = OD$. Так как $A_1D_1 = \sin(180° - \alpha)$, $AD = \sin\alpha$, то первое равенство примет вид $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

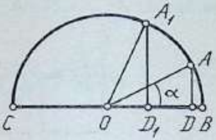


Рис. 16.12

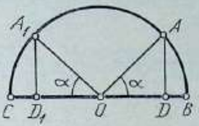


Рис. 16.13

Если $\alpha \neq 90°$, то один из углов α, $180° - \alpha$ острый, другой тупой. Значит, $\cos\alpha$ и $\cos(180° - \alpha)$ имеют противоположные знаки. Так как $OD = \cos\alpha$, $-OD_1 = \cos(180° - \alpha)$, то равенство $OD_1 = OD$ принимает вид $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. ◁

Следствие 1. Синусы смежных углов равны.

Это следует из определения смежных углов и формулы $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

Следствие 2. Справедливы формулы

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Первая — при всех α, кроме $\alpha = 90°$; вторая — при всех α, кроме $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$.

16.8. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 16.11. *В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C*

$$BC = AB\sin A; \quad AC = AB\cos A;$$
$$BC = AC\operatorname{tg} A; \quad AC = BC\operatorname{ctg} A. \qquad (16.10)$$

▷ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 16.14). На полупрямой AB отложим отрезок AB_1, равный единице, через точку B_1 проведем перпендикуляр B_1C_1 к прямой AC. По определению синуса и косинуса угла A имеем: $\sin A = B_1C_1$, $\cos A = AC_1$.

Треугольники ABC и AB_1C_1 подобны, поскольку у них угол A общий, а углы C и C_1 прямые. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{AB_1};\ \frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{AB_1};\ \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1};\ \frac{AC}{BC}=\frac{AC_1}{B_1C_1}.$$

Подставляя $AB_1=1$, $B_1C_1=\sin A$, $AC_1=\cos A$, получаем

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{1};\ \frac{AC}{\cos A}=\frac{AB}{1};\ \frac{BC}{AC}=\frac{\sin A}{\cos A};\ \frac{AC}{BC}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

или

$$BC=AB\sin A,\ AC=AB\cos A;\ BC=AC\operatorname{tg}A;$$
$$AC=BC\operatorname{ctg}A.\ \lhd$$

Замечание. Доказанные равенства можно сформулировать следующим образом.

В прямоугольном треугольнике длина катета равна произведению длины гипотенузы и синуса противолежащего угла или косинуса прилежащего угла; длина катета равна произведению длины другого катета и тангенса противолежащего угла или котангенса прилежащего угла.

(Угол A называют прилежащим к катету AC и противолежащим катету BC.)

Следствие. В прямоугольном треугольнике ABC

$$\sin A=\frac{BC}{AB},\ \cos A=\frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg}A=\frac{AC}{BC}. \quad (16.11)$$

Эти формулы следуют из формул (16.10).

Замечание. Если длины сторон прямоугольного треугольника ABC обозначить $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, то формулы (16.11) примут вид:

$$\sin A=\frac{a}{c};\ \cos A=\frac{b}{c};\ \operatorname{tg}A=\frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}.$$

Задача 16.5. Доказать:

$$\sin 45^\circ=1/\sqrt{2},\ \cos 45^\circ=1/\sqrt{2},\ \operatorname{tg}45^\circ=1,\ \operatorname{ctg}45^\circ=1;$$
$$\sin 30^\circ=1/2,\ \cos 30^\circ=\sqrt{3}/2,\ \operatorname{tg}30^\circ=1/\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}.$$

Решение. Построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, у которого $\angle A=45^\circ$ (рис. 16.15). Так как $\angle B=45^\circ$, то треугольник ABC равнобедренный, т. е. $AC=BC$. Согласно теореме Пифагора, $AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2=2AC^2$, откуда $AB=\sqrt{2}BC$, $AB=\sqrt{2}AC$. Подставляя эти значения в формулы (16.11), получаем $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=1/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{ctg}45^\circ=1$. Построим теперь равносторонний треугольник ABC (рис. 16.16). Все углы его равны, поэтому каждый из них равен 60°. Проведем медиану BD треугольника, тогда $AD = AC/2$. Медиана BD является биссектрисой и высотой, поэтому в треугольнике ABD угол ADB прямой, а $\angle ABD = 30°$.

По аналогии с первой из формул (16.11) можно записать $\sin \angle ABD = AD/AB$. Так как $AB = BC = AC$ и $AD = AC/2$, то

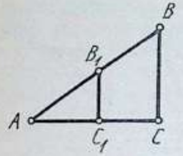


Рис. 16.14

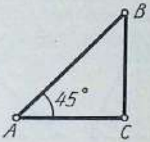


Рис. 16.15

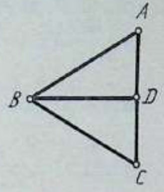


Рис. 16.16

$\sin 30° = \dfrac{AC/2}{AC} = \dfrac{1}{2}$. По формуле (16.9) находим $\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. По формулам (16.7) и (16.8) вычисляем $\operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$.

Для тригонометрических функций острых углов составлены специальные таблицы. Они дают возможность по данному углу найти значения соответствующих тригонометрических функций и обратно.

Значения тригонометрических функций можно находить и с помощью калькуляторов.

Теорема 16.11 позволяет найти все элементы прямоугольного треугольника, т. е. его углы и стороны, если заданы два катета, или гипотенуза и катет, или острый угол и катет, или острый угол и гипотенуза.

16.9. Теорема синусов и теорема косинусов

Докажем теорему, называемую теоремой синусов.

Теорема 16.12. *В любом треугольнике ABC*

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}.$$

▷ Из вершины C треугольника ABC проведем высоту CD (рис. 16.17). В прямоугольном треугольнике ACD имеем $CD = AC \sin \alpha$. Угол α является либо углом A

треугольника ABC, если угол A острый (рис. 16.17, *а*), либо смежным с ним углом, если угол A тупой (рис. 16.17, *б*). Так как синусы смежных углов равны (следствие 1 из теоремы 16.10), то $CD = AC \sin A$. Аналогично из прямоугольного треугольника BCD получаем $CD = BC \sin B$. Из этих равенств следует, что $\sin A/BC = \sin B/AC$.

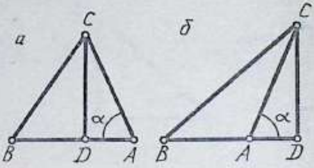


Рис. 16.17

Проведя высоту из вершины A, таким же способом найдем, что $\sin B/AC = \sin C/AB$. Следовательно,

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}. \triangleleft$$

Теорема 16.13. *В любом треугольнике* ABC

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A.$$

$\triangleright$ Из вершины C треугольника ABC проведем высоту CD (рис. 16.17). В прямоугольном треугольнике ACD $CD = AC \sin \alpha$, $AD = AC \cos \alpha$. Угол α либо является углом A треугольника ABC, если угол A острый, либо смежным с ним углом, если угол A тупой. Если угол A острый, то $BD = AB - AD = |AB - AC \cos \alpha|$, если угол A тупой, то $BD = AB + AD = AB + AC \cos \alpha$. Так как косинусы смежных углов равны по величине и противоположны по знаку, то в обоих случаях можно записать $BD = |AB - AC \cos A|$. По теореме Пифагора (для треугольника BCD)

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 = (AC \sin \alpha)^2 + (AB - AC \cos A)^2 = \\ = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A. \triangleleft$$

Доказанная теорема называется теоремой косинусов.

Теорема синусов и теорема косинусов дают возможность найти все элементы треугольника, если известны три его элемента, однозначно определяющие этот треугольник. Такими тремя элементами являются стороны; две стороны и угол, заключенный между ними; сторона и два угла треугольника.

16.10. Свойства биссектрисы

Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине угла, который делит этот угол пополам.

Теорема 16.14. *Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.*

▷ В треугольнике ABC из вершины C проведем биссектрису CD (рис. 16.18). Докажем, что $AD/DB = AC/BC$.

Рассмотрим треугольники ACD и CDB, введем обозначения: $\alpha = \angle CDB$, $\beta = \angle CDA$, $\gamma = \angle ACD = \angle BCD$. К каждому из треугольников применим теорему синусов:

$$\frac{\sin\gamma}{AD} = \frac{\sin A}{CD} = \frac{\sin\beta}{AC}; \quad \frac{\sin\gamma}{DB} = \frac{\sin B}{CD} = \frac{\sin\alpha}{BC}.$$

Так как $\sin\alpha = \sin\beta$ (как синусы дополнительных углов) то

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{AD}{AC}; \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{DB}{BC},$$

откуда

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{BC}; \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}. \;◁$$

Теорема 16.15. *Биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла.*

▷ Пусть AD — биссектриса угла BAC, т. е. $\angle BAD = \angle DAC$ (рис. 16.19). Из произвольной точки M бис-

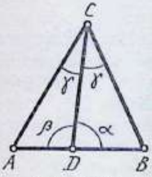


Рис. 16.18

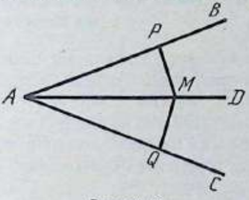


Рис. 16.19

сектрисы проведем перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Длины этих перпендикуляров выражают расстояния точки M от сторон угла. Прямоугольные треугольники APM и AQM равны, так как AM — общая сторона, $\angle PAM = \angle QAM$. Из равенства треугольников следует, что $PM = QM$, т. е. точка M равноудалена от сторон угла. $\triangleleft$

Упражнения

1. Докажите, что если у двух равнобедренных треугольников углы при вершине равны, то треугольники подобны.

2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°. Докажите, что биссектриса треугольника, проведенная из вершины при основании, отсекает треугольник, подобный данному.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника точкой пересечения делятся на отрезки, произведения которых одинаковы. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность.

4. Найдите геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных пересекающихся прямых постоянно.

5. Постройте треугольник с данным периметром, подобный данному треугольнику.

6. Впишите в треугольник ABC квадрат так, чтобы одна сторона квадрата была на стороне AB треугольника, а другие вершины квадрата были на сторонах AC и BC.

7. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся прямых.

8. Сформулируйте каждое из равенств (16.11).

9. Найдите тригонометрические функции углов: 60°, 120°, 135°, 150°.

10. Какие три элемента треугольника однозначно его определяют?

11. Докажите, что если в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то треугольник прямоугольный с прямым углом C.

12. Из вершины B в треугольнике ABC проведена высота BD. Докажите, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm 2AC \cdot AD$ (плюс, если угол C тупой, а минус, если угол C острый).

17. ДЕКАРТОВЫ* КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

17.1. Введение прямоугольных декартовых координат на плоскости

Координатами точки на плоскости называют упорядоченную пару чисел, определяющих ее положение на данной плоскости. Метод координат позволяет геометрические задачи решать алгебраическим способом.

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, точку их пересечения обозначим O (рис. 17.1).

* Д. Декарт (1596—1650) — французский ученый.

Точка O делит каждую прямую на две полупрямые. Условимся одну из полупрямых называть *положительной*, отмечая ее на рисунке стрелкой, а другую *отрицательной*. Точку O называют *началом координат*, а каждую прямую, на которой указано положительное направление,— *координатной осью*. Одну из них называют *осью абсцисс* (или осью x) и обозначают Ox, другую — *осью ординат* (или осью y) и обозначают Oy.

Каждой точке M плоскости поставим в соответствие упорядоченную пару чисел — ее координаты: абсциссу x и ординату y по следующему правилу. Через точку M проведем прямую, параллельную оси ординат Oy (рис. 17.1) до пересечения с осью абсцисс в некоторой точке M_x. Под *абсциссой точки* M будем понимать число x, по модулю равное расстоянию от O до M_x. Оно положительно, если M_x принадлежит положительной полуоси, и отрицательно, если M_x принадлежит отрицательной полуоси. Если же M_x совпадает с точкой O, то полагаем $x=0$. Аналогично определяется *ордината* y *точки* M. Итак, по определению

$$x = OM_x;\ y = OM_y \text{ или } x = -OM_x;\ y = -OM_y, \quad (17.1)$$

где минус берут, когда соответствующая точка принадлежит отрицательной полуоси.

Запись $M(x, y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y (x — абсцисса, y — ордината).

Очевидно, что для точек, лежащих на оси Oy, $x=0$ (точки оси ординат имеют абсциссы, равные нулю); для точек, лежащих на оси Ox, $y=0$ (точки оси абсцисс имеют ординаты, равные нулю). Начало координат (точка O) имеет координаты: $x=0$, $y=0$. Координатные оси разбивают плоскость на четыре части. Каждую часть называют *четвертью* или *квадрантом*. В каждом квадранте (I, II, III, IV) знаки обеих координат сохраняются (рис. 17.2).

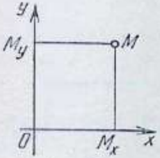


Рис. 17.1

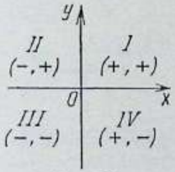


Рис. 17.2

Плоскость, на которой введены указанным способом координаты x и y, будем называть плоскостью Oxy. Каждой точке плоскости Oxy поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (x, y), определяемая по формулам (17.1). Обратно, если дана упорядоченная пара чисел (x, y), то на плоскости Oxy можно построить единственную точку, для которой x и y будут ее координатами.

17.2. Расстояние между двумя точками на плоскости

Расстоянием между точками M_1 и M_2 называют длину отрезка M_1M_2. Пусть на плоскости Oxy даны две точки: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Выразим расстояние между этими точками через их координаты. Если $y_2 = y_1$, то отрезок M_1M_2 параллелен оси Ox (рис. 17.3), а, значит, $M_1M_2 = P_1P_2 = x_2 - x_1$ (рис. 17.3, *а*) или $M_1M_2 = P_2P_1 = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1)$ (рис. 17.3, *б*), т. е.

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|. \tag{17.2}$$

Если $x_2 = x_1$, то отрезок M_1M_2 параллелен оси Oy (рис. 17.4), поэтому

$$M_1M_2 = |y_2 - y_1|. \tag{17.3}$$

Рассмотрим случай, когда $x_2 \neq x_1$ и $y_2 \neq y_1$ (рис. 17.5). Через точки M_1 и M_2 проведем прямые, параллельные осям координат. Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1MM_2. По теореме Пифагора

$$M_1M_2^2 = M_1M^2 + MM_2^2.$$

Согласно формулам (17.2) и (17.3), $M_1M = |x_2 - x_1|$, $MM_2 = |y_2 - y_1|$. Подставив эти выражения в предыдущее равенство, найдем $M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, откуда

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{17.4}$$

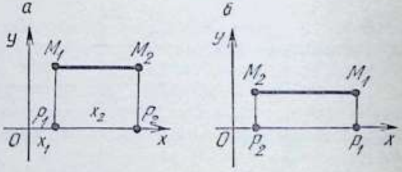


Рис. 17.3

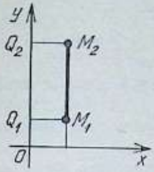


Рис. 17.4

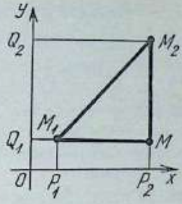


Рис. 17.5

17.3. Деление отрезка в данном отношении

На плоскости Oxy заданы две точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найдем координаты x и y точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda_1:\lambda_2$, т. е. $M_1M/MM_2 = \lambda_1/\lambda_2$.

Предположим, что $x_2 \neq x_1$ и $y_2 \neq y_1$. Через точки M_1, M_2, M проведем прямые, параллельные осям координат (рис. 17.6). Из подобия треугольников M_1N_1M и MN_2M_2 следует, что

$$\frac{M_1N_1}{MN_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Так как $M_1N_1 = |y_1 - y|$, $MN_2 = |y - y_2|$, то $\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Точка M лежит между M_1 и M_2, поэтому y заключено между y_1 и y_2, значит, $y_1 - y$ и $y - y_2$ одного знака. Следовательно,

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Решая уравнение $(y_1 - y)/(y - y_2) = \lambda_1/\lambda_2$ относительно y, получаем ординату точки M:

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{17.5}$$

Аналогично находим абсциссу точки M:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{17.6}$$

Полученные формулы для координат точки M остаются верными и в том случае, когда не выполняется одно из условий: $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$.

Если M — середина отрезка M_1M_2, то $\lambda_1 = \lambda_2$, и формулы (17.5) и (17.6) принимают вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{17.7}$$

т. е. координаты середины отрезка равны полусуммам координат его концов.

Используем полученные формулы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 17.1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.*

▷ Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — вершины треугольника (рис. 17.7). Основание M медианы, проведенной из вершины C, имеет координаты, определяемые по формулам (17.7). Точка медианы, делящая ее в отношении 2:1, имеет следующие координаты:

$$x = \frac{2((x_1 + x_2)/2) + 1 \cdot x_3}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$
$$y = \frac{2((y_1 + y_2)/2) + 1 \cdot y_3}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Если взять медиану, проведенную из вершины B, то мы получим те же координаты точки, делящей ее в отношении 2:1, т. е.

$$x = \frac{2((x_1 + x_3)/2) + 1 \cdot x_2}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$
$$y = \frac{2((y_1 + y_3)/2) + 1 \cdot y_2}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Ту же точку (с координатами $x = (x_1 + x_2 + x_3)/3$, $y = (y_1 + y_2 + y_3)/3$) получим, если рассмотрим медиану, проведенную из вершины A. Следовательно, медианы пересекаются в этой точке. ◁

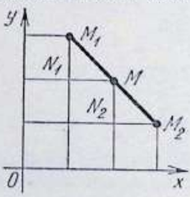


Рис. 17.6

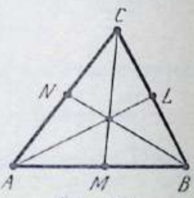


Рис. 17.7

17.4. Уравнение окружности

На плоскости Oxy рассмотрим линию l (рис. 17.8). Уравнение $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — некоторая зависимость между x и y, называют *уравнением линии* l, если ему удовлетворяют координаты x, y всех точек данной линии и только таких точек. Линию полностью определяет ее уравнение, поэтому можно говорить о задании линии своим уравнением.

В геометрии часто рассматривают две задачи: 1) дана линия как некоторое геометрическое место точек, требуется составить ее уравнение; 2) дано уравнение линии, требуется изучить геометрические свойства линии. Приведем примеры таких задач.

1. Составить уравнение окружности с центром $S(a, b)$ и радиусом R (рис. 17.9).

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности — геометрического места точек, равноудаленных от точки $S(a, b)$. Тогда, согласно формуле (17.4), $SM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ и по определению окружности $SM = R$. Следовательно, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0. \tag{17.8}$$

Итак, координаты x, y каждой точки M окружности удовлетворяют уравнению (17.8). Обратно: любая точка $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (17.8), лежит на окружности, так как $SM = R$.

Уравнение (17.8) является уравнением окружности с центром $S(a, b)$ и радиусом R. Отметим частный случай этого уравнения. Если точка S находится в начале координат (рис. 17.10), то $a = 0$, $b = 0$ и уравнение окружности принимает вид

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0. \tag{17.9}$$

2. Какое геометрическое место точек определяет уравнение $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$?

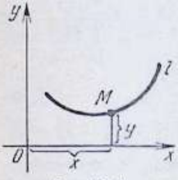


Рис. 17.8

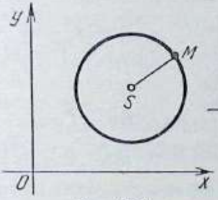


Рис. 17.9

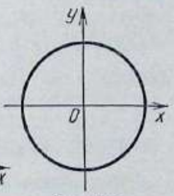


Рис. 17.10

Уравнение это можно переписать в эквивалентной форме:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2-c)=0.$$

Если $a^2+b^2-c>0$, то, обозначив $a^2+b^2-c=R^2$, получим уравнение окружности (17.8). В случае $a^2+b^2-c=0$ уравнение принимает вид $(x-a)^2+(y-b)^2=0$. Оно определяет одну точку $S(a, b)$. Если $a^2+b^2-c<0$, то, обозначив $a^2+b^2-c=-R^2$, получим уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2+R^2=0$, которому не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Итак, если исходное уравнение определяет некоторую линию на плоскости, то этой линией является окружность.

17.5. Уравнение прямой

Составим уравнение произвольной прямой p на плоскости Oxy (рис. 17.11). Проведем произвольную прямую, перпендикулярную к прямой p, и от точки пересечения N отложим на ней равные отрезки $NM_1=NM_2$. Пусть M — произвольная точка прямой p, тогда треугольники MM_1N и MM_2N равны, поэтому $MM_1=MM_2$, т. е. расстояния от точки M до точек M_1, M_2 равны.

Рассмотрим произвольную точку M' плоскости, для которой $M'M_1=M'M_2$. Так как треугольник $M_1M'M_2$ равнобедренный, то его медиана $M'N$ является высотой. Следовательно, прямая $M'N$ совпадет с прямой p. Таким образом, точками прямой p являются те и только те точки M плоскости, для которых $MM_1=MM_2$. Этим свойством воспользуемся при составлении уравнения прямой p.

Обозначим координаты точки M_1 через x_1, y_1, а точки M_2 — через x_2, y_2. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямой p. Согласно формуле (17.4), $M_1M=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$, $M_2M=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$. Так как $M_1M=M_2M$, то $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$. Преобразуя это равенство, получаем:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2;$$
$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0$$

или

$$Ax+By+C=0, \tag{17.10}$$

где $A=2(x_2-x_1)$; $B=2(y_2-y_1)$; $C=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$.

Итак, координаты x, y любой точки M прямой p удовлетворяют уравнению (17.10). Это уравнение прямой является линейным уравнением, т. е. уравнением первой степени относительно координат x и y.

Теорема 17.2. *Любое линейное уравнение*

$$ax + by + c = 0 \qquad (17.11)$$

является уравнением некоторой прямой.

▷ Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — две любые различные точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (17.11). Как было показано выше, прямая M_1M_2 определяется уравнением (17.10). Рассмотрим систему двух уравнений:

$$ax + by + c = 0;$$
$$Ax + By + C = 0.$$

Этой системе удовлетворяют и координаты точки M_1, и координаты

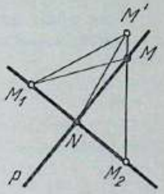


Рис. 17.11

точки M_2. Поскольку эти точки различны, то они по меньшей мере отличаются одной координатой, например $x_2 \neq x_1$. Умножая первое уравнение системы на B, а второе — на b и вычитая почленно, получаем: $(aB - bA)x + (cB - bC) = 0$. Это уравнение как следствие уравнений системы удовлетворяется при $x = x_1$ и $x = x_2$, что возможно в случае, когда $aB - bA = 0$, $cB - bC = 0$. Отсюда получаем $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$, $\frac{b}{B} = \frac{c}{C}$, т. е. $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \lambda$.

Уравнение (17.11) только множителем отличается от уравнения (17.10). Следовательно, оно является уравнением прямой M_1M_2. ◁

Рассмотрим частные случаи уравнения прямой M_1M_2.

1. $A = 0$. Уравнение принимает вид $By + C = 0$, откуда $y = -C/B$. Это значит, что все точки прямой имеют одну и ту же ординату: $-C/B$. Следовательно, прямая параллельна оси Ox (рис. 17.12, *а*). Если и $C = 0$, то прямая совпадает с осью Ox (ее уравнение $y = 0$).

2. $B = 0$. Уравнение принимает вид $Ax + C = 0$, откуда $x = -C/A$. Все точки прямой имеют одну и ту же абсциссу: $-C/A$. Прямая параллельна оси Oy (рис. 17.12, *б*). Если и $C = 0$, то прямая совпадает с осью Oy (ее уравнение $x = 0$).

3. $C = 0$. Уравнение принимает вид $Ax + By = 0$. Прямая проходит через начало координат (рис. 17.12, *в*), так

как координаты $x=0$, $y=0$ удовлетворяют полученному уравнению.

Если $B \neq 0$, то уравнение (17.10) можно разрешить относительно y и привести его к уравнению с угловым коэффициентом k (см. § 3.5):

$$y = kx + b, \tag{17.12}$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$.

Если даны две различные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ прямой (см. уравнение (17.12)), то можно выразить ее

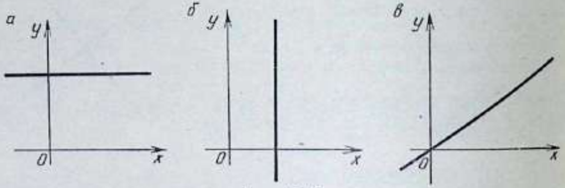


Рис. 17.12

угловой коэффициент k через координаты этих точек, которые удовлетворяют данному уравнению: $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$. Вычитая первое равенство из второго, получаем $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{17.13}$$

Если даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и угловой коэффициент k прямой, то для любой ее точки $M(x, y)$ по формуле (17.13) получаем $k = (y - y_0)/(x - x_0)$, откуда

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{17.14}$$

Уравнение (17.14) называют уравнением прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k.

17.6. Пересечение прямой с окружностью

На плоскости Oxy рассмотрим две линии: пусть первая из них задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{17.15}$$

а вторая — уравнением

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{17.16}$$

Точка пересечения данных линий принадлежит и первой, и второй линиям, поэтому ее координаты удовлетворяют как уравнению (17.15), так и уравнению (17.16), т. е. удовлетворяют системе уравнений

$$F(x, y) = 0, \ \Phi(x, y) = 0. \tag{17.17}$$

Обратно, если координаты x_0, y_0 некоторой точки M_0 удовлетворяют системе уравнений (17.17), то точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит и на линии (17.15), и на линии (17.16), т. е. является точкой их пересечения.

Следовательно, чтобы найти точки пересечения линий, необходимо решить систему их уравнений. Число решений равно числу точек пересечения. Если система (17.17) не имеет действительных решений, то линии (17.15) и (17.16) не пересекаются.

Рассмотрим вопрос о пересечении прямой с окружностью. Пусть R — радиус окружности γ и d — расстояние от центра окружности до прямой p. Начало координат поместим в центре окружности, а в качестве оси Ox возьмем прямую, перпендикулярную к данной прямой p (рис. 17.13). При таком выборе системы координат окружность имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ (см. формулу (17.9)), а прямая — уравнение $x = d$ (см. второй частный случай уравнения $Ax + By + C = 0$). Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, рассмотрим систему их уравнений:

$$x^2 + y^2 = R^2; \ x = d.$$

Из этой системы получаем $y = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$. Отсюда видно, что если $R > d$, то система имеет два решения,

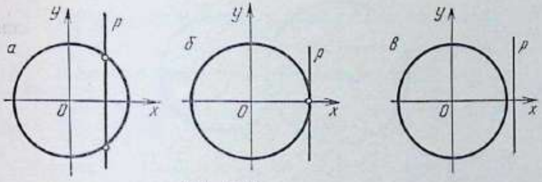


Рис. 17.13

т. е. окружность и прямая имеют две точки пересечения (см. рис. 17.13, *а*). Если $R = d$, система имеет одно решение, т. е. прямая касается окружности (рис. 17.13, *б*). Если $R < d$, система не имеет действительных решений, т. е. прямая и окружность не пересекаются (см. рис. 17.13, *в*).

17.7. Пересечение двух окружностей

Рассмотрим две окружности: одну с центром S_1 радиуса R_1, другую — с центром S_2 радиуса R_2; расстояние между центрами равно d.

Введем прямоугольную декартову систему координат, приняв точку S_1 за начало, а прямую S_1S_2 за положительную полуось Ox (рис. 17.14). В этой системе координат точка S_1 имеет координаты $(0, 0)$, а точка S_2 — координаты $(d, 0)$, где $d = S_1S_2$.

Уравнения окружностей:

$$x^2 + y^2 = R_1^2; \ (x - d)^2 + y^2 = R_2^2.$$

Вопрос о пересечении окружностей сводится к вопросу существования решений у системы этих уравнений и определению числа решений.

Вычитая почленно первое уравнение из второго, получаем $-2dx + d^2 = R_2^2 - R_1^2$, откуда $x = (d^2 + R_1^2 - R_2^2)/(2d)$. Подставляя это значение x в первое уравнение, имеем: $y^2 = R_1^2 - (d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2/(4d^2)$. Для существования решений требуется, чтобы выполнялось условие

$$\Delta = R_1^2 - \left(\frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}\right)^2 \geqslant 0,$$

причем система будет иметь два решения в случае строгого

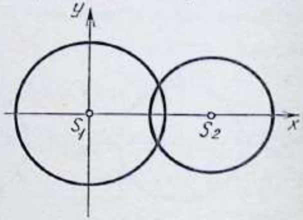


Рис. 17.14

неравенства и одно — в случае равенства. В случае $\Delta < 0$ система действительных решений не имеет, т. е. окружности не пересекаются.

Упражнения

1. Где находятся точки плоскости Oxy, для которых:
а) $|x| = 5$; б) $|x| = a$; в) $|y| = 7$; г) $|y| = b$; д) $|x| = |y|$?

2. Где находятся точки плоскости Oxy, для которых:
а) $|x| < 3$; б) $|y| < 4$; в) $|x| < 2$, $|y| < 5$; г) $|x| < a$, $|y| < b$?

3. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(a, b)$ относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат; г) биссектрисы первого координатного угла.

4. По диагоналям ромба со стороной $a = 8$ направлены оси координат. Найдите координаты вершин ромба.

5. Даны координаты трех вершин параллелограмма: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найдите координаты центра и четвертой вершины.

6. Составьте уравнение геометрического множества точек, равноудаленных от начала координат и точки $A(2, 4)$.

7. Найдите координаты точки на оси Ox, равноудаленной от точек $A(-1, 2)$, $B(7, 5)$.

8. Составьте уравнение геометрического места точек M, для каждой из которых расстояние до точки $A(4, 0)$ вдвое больше расстояния до точки $B(1, 0)$.

9. Как найти координаты центра окружности, описанной около треугольника, заданного координатами его вершин?

10. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин. Как узнать, является он вписанным в окружность или нет?

11. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$.

12. Найдите длину касательной, проведенной из точки $M(5, 8)$ к окружности $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$.

13. При каких значениях c прямая, заданная уравнением $x + y - c = 0$, пересекается с окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

14. Выясните, как расположена прямая $y = 2x + 3$ относительно каждой из окружностей (пересекает, касается или проходит вне окружности):

а) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$; б) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 32 = 0$.

15. Найдите расстояние между центрами двух окружностей:

$$x^2 + y^2 + 14x - 6y - 46 = 0;\ x^2 + y^2 + 8x + 2y - 9 = 0.$$

16. Найдите точки пересечения окружностей $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.

17. Изобразите на чертеже геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений:

а) $y = \sqrt{16 - x^2}$; б) $y = -\sqrt{36 - x^2}$; в) $x = \sqrt{49 - y^2}$; г) $x = -\sqrt{64 - y^2}$; д) $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$; е) $x = -4 + \sqrt{9 - (y + 5)^2}$.

18. Даны уравнения двух пересекающихся прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Докажите, что уравнение любой прямой, проходящей через точку пересечения данных прямых, можно записать в виде

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где λ и μ — постоянные.

18. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

18.1. Примеры преобразований фигур на плоскости

Если каждую точку данной фигуры сместить определенным образом, получим новую фигуру. Будем говорить, что эта фигура получена преобразованием из данной. К числу простейших преобразований фигур на плоскости относятся: симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, гомотетия относительно центра и др.

Рассмотрим фигуру F на плоскости (рис. 18.1). Пусть O — фиксированная точка плоскости, M — произвольная точка фигуры F.

Симметрией относительно точки O называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждой точке M ставится в соответствие точка M' на продолжении отрезка MO, такая, что $OM' = OM$. Точки M и M' называют *симметричными относительно точки O*.

Фигура называется *центрально-симметричной*, а точка O — *центром симметрии*, если такое преобразование симметрии переводит данную фигуру в себя. Примерами центрально-симметричных фигур являются параллелограмм (рис. 18.2), прямоугольник, ромб, квадрат.

На плоскости рассмотрим фигуру F и прямую p (рис. 18.3). Из произвольной точки M фигуры F проведем перпендикуляр MP к прямой p и на его продолжении отложим отрезок $PM' = PM$. Все точки M', полученные указанным способом, образуют фигуру F', которую называют *симметричной* фигуре F. Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *симметрией относительно прямой p*, если каждой точке M фигуры F поставлена в соответствие точка M' на продолжении перпендикуляра MP к прямой p, такая, что $MP = PM'$. Точки, лежащие на одном перпендикуляре к прямой p по разные стороны от нее и на одинаковых расстояниях, называют *симметричными относительно прямой p*.

Фигура называется *симметричной относительно прямой р*, а сама прямая *р* — *осью симметрии*, если такое преобразование симметрии переводит фигуру в себя. Примерами таких фигур являются прямоугольник, ромб, квадрат Так, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 18.4). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 18.5).

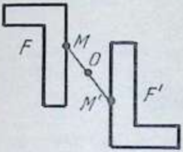


Рис. 18.1

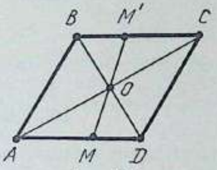


Рис. 18.2

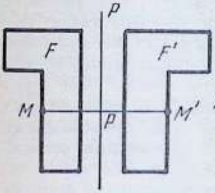


Рис. 18.3

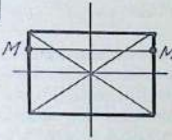


Рис 18.4

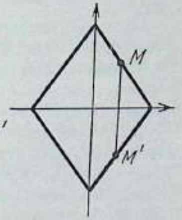


Рис 18.5

В заданной плоскости рассмотрим фигуру F и фиксированную точку O (рис. 18.6). Пусть M — произвольная точка фигуры F. Проведем луч OM и отложим на нем отрезок $OM' = kOM$, где k — заданное число. Каждой точке M фигуры F будет поставлена в соответствие точка M' фигуры F'. Фигуры F и F' в этом случае называют *гомотетичными*. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка M фигуры F переходит в точку M', лежащую на луче OM, причем $OM' = kOM$, где k — фиксированное число (одно и то же для всех точек), называется *гомотетией* относительно центра O. Число k называется *коэффициентом гомотетии.*

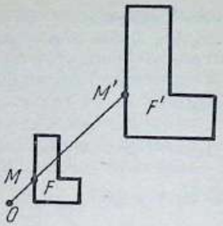


Рис. 18.6

18.2. Движение

Рассмотрим преобразование, которое переводит любые две точки M и N фигуры F в точки M' и N' фигуры F' так, что $M'N' = MN$, т. е. сохраняет расстояние между точками.

Преобразование фигуры F в фигуру F', сохраняющее расстояние между точками, называют *движением*.

Теорема 18.1. *Преобразование симметрии относительно точки и преобразование симметрии относительно прямой являются движениями.*

▷ Рассмотрим преобразование симметрии относительно точки (рис. 18.7). Если M и N — две произвольные точки фигуры F, то преобразование симметрии относительно точки O переводит их соответственно в точки M' и N'. Треугольники MON и $M'ON'$ равны согласно первому признаку: $NO = ON'$, $MO = OM'$ (по определению симметрии относительно центра O), $\angle MON = \angle M'ON'$ (как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $M'N' = MN$, т. е. расстояние между точками M и N фигуры F равно расстоянию между соответствующими точками M' и N' фигуры F'. Значит, преобразование симметрии относительно точки O есть движение.

Переходим к преобразованию симметрии относительно прямой, которую примем за ось Oy прямоугольной декартовой системы координат (рис. 18.8). Если точка $M(x, y)$ фигуры F переходит в точку $M'(x', y')$ фигуры F', то $y' = y$, $x' = -x$, т. е. точки M и M' имеют равные ординаты, а их абсциссы отличаются только знаком. Это следует из определения симметрии относительно прямой. Пусть

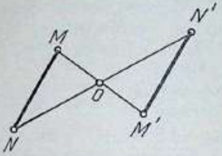


Рис. 18.7

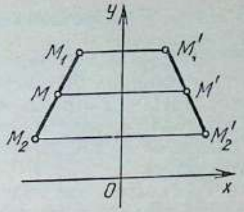


Рис. 18.8

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две произвольные точки фигуры F. Они перейдут соответственно в точки $M_1'(-x_1, y_1)$, $M_2'(-x_2, y_2)$. Согласно формуле (17.4), получаем:

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

$$M_1'M_2'=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Так как $(x_2-x_1)^2=(-x_2+x_1)^2$, то $M_1'M_2'=M_1M_2$. Значит, преобразование симметрии относительно прямой есть движение. ◁

Теорема 18.2. *Если при движении три точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1 то эти точки также лежат на прямой. Если точка B лежит между A и C, то точка B_1 также лежит между A_1 и C_1.*

▷ Допустим, точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой, тогда они являются вершинами треугольника. Значит, $A_1C_1<A_1B_1+B_1C_1$ (согласно теореме 12.9). Отсюда следует, что $AC<AB+BC$ (по определению движения). Но это противоречит равенству $AC=AB+BC$ (по свойству измерения отрезков). Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем, что точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Предположим, что A_1 лежит между B_1 и C_1, тогда $B_1A_1+A_1C_1=B_1C_1$. Следовательно, $AB+AC=BC$, что противоречит равенству $AB+BC=AC$ (так как точка B лежит между A и C). Итак, точка A_1 не лежит между B_1 и C_1. Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между A_1 и B_1. Поскольку из трех точек A_1, B_1, C_1 только одна лежит между двумя другими, то такой точкой может быть только B_1. ◁

Следствие 1. При движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.

▷ Действительно, прямая AC переходит в прямую A_1C_1, полупрямая AC переходит в полупрямую A_1C_1, а отрезок AC — в отрезок A_1C_1 (так как точка B отрезка AC переходит в точку B_1 отрезка A_1C_1). ◁

Следствие 2. При движении сохраняются углы между полупрямыми.

▷ Рассмотрим две полупрямые AB и AC, исходящие из общей точки A и не лежащие на одной прямой. При движении эти полупрямые перейдут в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку (движение сохраняет расстояния, поэтому $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$). Из равенства треугольников следует, что $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$. ◁

Следствие 3. Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.

▷ Пусть фигура F движением переводится в фигуру F', а фигура F' переводится движением в фигуру F''. Пусть при первом движении точка M фигуры F переходит в точку M' фигуры F', а при втором движении точка M' переходит в точку M'' фигуры F''. Результирующее преобразование, переводящее точку M фигуры F в точку M'' фигуры F'', будет движением, так как при нем сохраняется расстояние между точками. ◁

Чтобы сформулировать еще одно следствие, введем понятие преобразования, обратного данному. Предположим, что преобразование фигуры F в фигуру F' переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F'. Пусть произвольная точка M фигуры F при этом преобразовании переходит в точку M' фигуры F'. Преобразование фигуры F' в фигуру F, при котором точка M' переходит в точку M, называется *преобразованием, обратным данному.*

Следствие 4. Преобразование, обратное движению, является также движением.

▷ Действительно, движение сохраняет расстояние между точками, поэтому переводит различные точки в различные. Значит, преобразование, обратное движению, существует. Оно будет движением, так как сохраняет расстояние между точками. ◁

18.3. Параллельный перенос

Параллельным переносом называется такое движение, при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние.

Если точки M и N фигуры F переходят соответственно в точки M' и N' фигуры F', то прямые MM' и MN' параллельны (или совпадают), а отрезки MM' и MN' равны (рис. 18.9).

Приведем пример преобразования, являющегося параллельным переносом. На плоскости Oxy произвольная точка $M(x, y)$ фигуры F переходит в точку $M'(x', y')$, координаты которой

$$x' = x + a; \; y' = y + b, \tag{18.1}$$

где a и b — постоянные.

Докажем, что преобразование, переводящее любую точку $M(x, y)$ в точку $M'(x', y')$, где x' и y' определяются по формулам (18.1), является параллельным переносом Действительно, произвольная точка $A(x_1, y_1)$ при рассматриваемом преобразовании перейдет в точку $A'(x_1 + a, y_1 + b)$. Рассмотрим другую точку $B(x_2, y_2)$, не лежащую на прямой AA' (рис. 18.10). Она преобразуется в точку $B'(x_2 + a, y_2 + b)$. Рассмотрим четырехугольник $AA'B'B$ Согласно формуле (17.7), середины его диагоналей AB' и BA' имеют одни и те же координаты:

$$x = (x_1 + x_2 + a)/2; \; y = (y_1 + y_2 + b)/2.$$

Это значит, что диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т. е. четырехугольник $AA'B'B$ — параллелограмм. Так как $A'B' = AB$, то данное преобразование является движением. Поскольку прямые AA' и BB' параллельны, а отрезки AA' и BB'

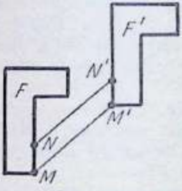


Рис 18.9

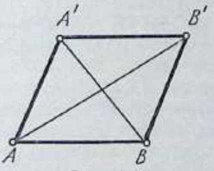


Рис 18 10

равны, то данное движение является параллельным переносом. Отметим, что при параллельном переносе прямая AB переходит в параллельную ей прямую $A'B'$.

Теорема 18.3. *Каковы бы ни были две точки $A(x_1, y_1)$ и $A'(x_2, y_2)$, существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.*

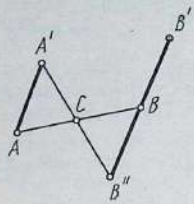


Рис. 18.11

▷ Введем обозначения: $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ и рассмотрим параллельный перенос, заданный формулами (18.1). Очевидно, что при этом параллельном переносе ($x' = x + a$, $y' = y + b$) точка $A(x_1, y_1)$ переходит в точку $A'(x_2, y_2)$, где $x_2 = x_1 + a$, $y_2 = y_1 + b$.

Докажем единственность параллельного переноса. Рассмотрим произвольную точку B, не лежащую на прямой AA' (рис. 18.11). При параллельном переносе точка B сместится на расстояние, равное AA', вдоль прямой, параллельной AA', и перейдет либо в точку B', расположенную в одной полуплоскости с точкой A' относительно прямой AB, либо в точку B'', расположенную в другой полуплоскости относительно той же прямой AB. Предположим, что точка B перейдет в точку B''. В какую точку перейдет при этом точка C (точка пересечения прямой AB с отрезком $A'B''$)? Поскольку прямая AB переходит в прямую $A'B''$, точка C должна сместиться по прямой, параллельной AA', на отрезок, равный AA', и попасть при этом на прямую $A'B''$. Но это невозможно, так как точка C лежит на прямой $A'B''$. Итак, при данном параллельном переносе точка B переходит в точку B'. Однозначность точки, в которую переходит точка B, означает единственность параллельного переноса. ◁

Следствие 1. Любой параллельный перенос задается формулами вида (18.1), т. е. $x' = x + a$, $y' = y + b$.

Следствие 2. При любом параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую.

Теорема 18.4. *Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненных один за другим, снова дают параллельный перенос.*

▷ Любой параллельный перенос задается формулами

(18.1). Обратное преобразование задается формулами $x = x' - a$, $y = y' - b$, т. е. формулами того же вида ($x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$), поэтому оно является параллельным переносом.

Рассмотрим два параллельных переноса, заданных формулами:

$$x' = x + a,\ y' = y + b; \tag{18.2}$$
$$x'' = x' + c,\ y'' = y' + d. \tag{18.3}$$

Параллельный перенос (18.2) переводит точку $M(x, y)$ фигуры F в точку $M'(x', y')$ фигуры F'. Параллельный перенос (18.3) переводит точку $M'(x', y')$ фигуры F' в точку $M''(x'', y'')$ фигуры F''. В результате последовательного выполнения обоих параллельных переносов точка $M(x, y)$ фигуры F переходит в точку $M''(x'', y'')$ фигуры F''. Это преобразование (F в F'') задается формулами $x'' = x + a + c$, $y'' = y + b + d$, которые являются формулами вида (18.1) ($x'' = x + \alpha$, $y'' = y + \beta$, где $\alpha = a + c$, $\beta = b + d$). Следовательно, это преобразование является параллельным переносом. $\triangleleft$

18.4. Поворот

Поворотом около точки O на угол α называется такое движение, при котором точка O остается неподвижной, а каждый луч, исходящий из нее, поворачивается на угол α (рис. 18.12). Точка M луча OM при повороте на угол α переходит в точку M' луча OM', такую, что $OM' = OM$.

Точку O примем за начало прямоугольной декартовой системы координат и докажем следующую теорему.

Теорема 18.5. *Преобразование, при котором произвольная точка $M(x, y)$ фигуры переходит в точку $M'(x', y')$, координаты которой*

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha;\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{18.4}$$

есть поворот на угол α.

$\triangleleft$ Рассмотрим две произвольные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ фигуры F. Они перейдут в точки $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$ фигуры F'. С помощью формулы (17.4) найдем:

$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$; $\quad M_1'M_2'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = ((x_2 - x_1)\cos\alpha - (y_2 - y_1)\sin\alpha)^2 + ((x_2 - x_1)\sin\alpha + (y_2 - y)\cos\alpha)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1))^2$. Итак, $M_1'M_2' = M_1M_2$. Это значит, что рассматриваемое преобразование есть движение. Из формул (18.4) видно, что $x'=0$, $y'=0$ при $x=0$ и $y=0$, т. е. точка O остается неподвижной. Найдем угол φ, на который поворачивается луч OM при рассматриваемом движении. Применяя теорему косинусов для треугольника MOM', получаем $MM'^2 = OM^2 + OM'^2 - 2OM \cdot OM' \cos \varphi$. Согласно формуле (17.4), с учетом формул (18.4), находим:

$$OM^2 = x^2 + y^2;\ OM'^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2,$$
$$MM'^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = (x\cos\alpha - y\sin\alpha - x)^2 + \\ + (x\sin\alpha + y\cos\alpha - y)^2 = 2(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2)\cos\alpha.$$

Подставив эти выражения в предыдущее равенство, будем иметь

$$2(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)\cos\alpha = 2(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)\cos\varphi.$$

Отсюда следует, что $\cos\varphi = \cos\alpha$, т. е. $\varphi = \alpha$. ◁

Отметим без доказательства, что верно и обратное утверждение: всякий поворот около точки O можно задать формулами вида (18.4).

18.5. Равенство фигур

Фигуры F и F' называются *равными*, если они с помощью движения переводятся одна в другую.

В § 11.3. для простейших фигур: отрезков, углов, треугольников уже было введено понятие равенства. Покажем, что равные отрезки, углы и треугольники совмещаются движением.

Рассмотрим равные отрезки AB и A_1B_1, т. е. отрезки, имеющие равные длины (рис. 18.13). Покажем, что существует движение, переводящее отрезок AB в отрезок

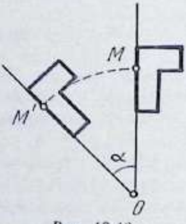


Рис 18.12

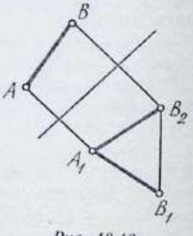


Рис. 18.13

A_1B_1. Совершим преобразование симметрии относительно прямой, перпендикулярной к отрезку AA_1 и проходящей через его середину. Отрезок AB перейдет при этом в отрезок $A_1B_2=AB$. Второе преобразование симметрии относительно прямой, перпендикулярной к отрезку B_1B_2 и проходящей через его середину, переводит отрезок A_1B_2 в отрезок A_1B_1. Поскольку симметрия относительно прямой есть движение, а два движения, выполненные последовательно, снова дают движение, то тем самым доказано существование движения, переводящего отрезок AB в отрезок A_1B_1.

Докажем, что существует движение, которое равные углы, т. е. имеющие одну и ту же градусную меру, переводит один в другой. Рассмотрим равные углы (ab) и (a_1b_1) с вершинами в точках O и O_1 (рис. 18.14). Угол (ab) подвергнем преобразованию симметрии относительно прямой, перпендикулярной к отрезку OO_1 и проходящей через его середину. При этом преобразовании угол (ab) перейдет в равный ему угол (a_2b_2) с вершиной O_1. Угол (a_2b_2) подвергнем преобразованию симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису угла (a_1a_2), в результате получим угол (a_1b_3), равный углу (a_1b_1). Если луч b_3 лежит в одной полуплоскости с лучом b_1 относительно прямой, содержащей луч a_1, то углы (a_1b_3) и (a_1b_1) совпадают и утверждение доказано (рис. 18.14, *а*). Если лучи b_1 и b_3 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч a_1, то выполним еще одну симметрию относительно этой прямой (рис. 18.14, *б*). Угол (a_1b_3) перейдет при этом в угол (a_1b_1), чем и завершается доказательство.

Докажем, что равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ переводятся движением один в другой. Как доказано выше, существует движение, переводящее угол ABC в угол

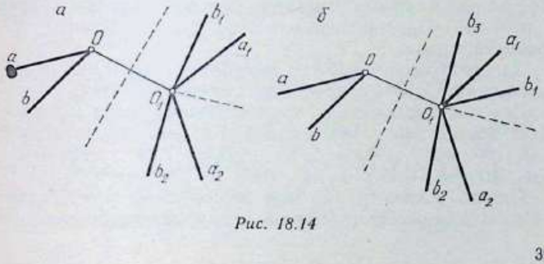


Рис. 18.14

$A_1B_1C_1$. Так как движение сохраняет расстояние между точками, то точка A перейдет в A_1, а точка C — в точку C_1. Следовательно, это движение переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$.

18.6. Преобразование подобия

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *преобразованием подобия*, если при этом расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз. Это означает, что если произвольные точки M и N фигуры F при преобразовании подобия переходят соответственно в точки M' и N' фигуры F', то $M'N' = kMN$. Число k называется *коэффициентом подобия.*

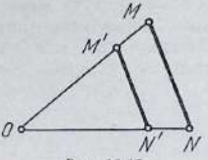


Рис. 18.15

Теорема 18.6. *Гомотетия есть преобразование подобия.*

$\triangleright$ Пусть точки M и N при гомотетии относительно точки O переходят в точки M' и N' (рис. 18.15). Треугольник MON и $M'ON'$ подобны, так как у них углы при вершине O совпадают, а $M'O/MO = N'O/NO = k$, где k — коэффициент гомотетии. Из подобия треугольников следует: $M'N'/MN = M'O/MO = N'O/NO = k$. $\triangleleft$

Как и в случае движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, принадлежащие одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Если точка B лежит между A и C, то точка B_1 — между A_1 и C_1. Отсюда получаем следующее утверждение: преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки. Преобразование подобия сохраняет углы между прямыми.

Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Понятие подобия для треугольников было введено в § 16.1: треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются подобными, если у них $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$, $A_1B_1/AB = B_1C_1/BC = A_1C_1/AC$.

Можно доказать, что при выполнении этих условий треугольники переводятся один в другой преобразованием подобия. Отметим без доказательства, что такое преобразование получается последовательным применением гомотетии и движения.

19. МНОГОУГОЛЬНИКИ

19.1. Выпуклые многоугольники

Многоугольником $A_1A_2...A_n$ называется фигура, состоящая из точек A_1, A_2, ..., A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. Другими словами, многоугольник — замкнутая ломаная линия. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют *вершинами многоугольника*, отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 — его *сторонами*. Две вершины являются смежными, если они соединяются стороной многоугольника. У каждой вершины есть две смежные с ней вершины. *Диагональю* многоугольника называют отрезок, соединяющий две несмежные вершины.

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ (на рис. 19.1 $n=7$). Каждая из прямых A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 разбивает плоскость на две полуплоскости. Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно каждой из этих прямых, причем каждая прямая A_iA_{i+1} $(i=1, 2, ..., n-1)$ не имеет других общих точек с многоугольником, кроме точек отрезка A_iA_{i+1} (на рис. 19.2 $n=5$). Отметим, что многоугольник, изображенный на рисунке 19.1, не является выпуклым.

Пусть K — вершина выпуклого многоугольника, L, M — смежные с ней вершины. *Внутренним углом* многоугольника при вершине K называется угол LKM. *Внешним углом* многоугольника называется угол, смежный с внутренним.

Теорема 19.1. *Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна* $(n-2)180°$, где n — *число сторон*

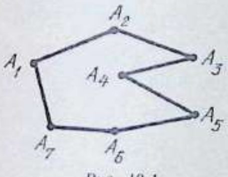


Рис. 19.1

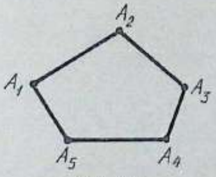


Рис. 19.2

или вершин многоугольника. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от n и равна 360°.

▷ Из вершины A_n многоугольника $A_1A_2...A_n$ проведем диагонали (рис. 19.3). Диагональ A_nA_k проходит внутри угла A_k многоугольника, поскольку точки A_n и A_{k-1} лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_kA_{k+1}, а точки A_n и A_{k+1} — в одной полуплоскости относительно прямой A_kA_{k-1}. Значит, угол многоугольника при вершине A_k равен сумме углов треугольников $A_nA_kA_{k+1}$ и $A_nA_kA_{k-1}$ при вершине A_k. Так как точки A_{k-1} и A_{k+1} лежат по разные стороны прямой A_kA_n, то углы треугольников $A_kA_nA_{k-1}$ и $A_kA_nA_{k+1}$ при вершине A_n также расположены по разные стороны этой прямой. Следовательно, угол многоугольника при вершине A_n равен сумме углов треугольников $A_nA_1A_2$, $A_nA_2A_3$, ..., $A_nA_{n-2}A_{n-1}$ при вершине A_n. Сумма всех внутренних углов многоугольника равна сумме углов всех указанных треугольников. Поскольку число треугольников $n-2$, то сумма углов равна $(n-2)180°$.

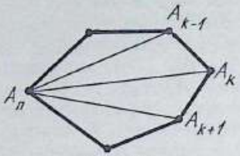


Рис. 19.3

Внешний угол многоугольника является смежным соответствующему внутреннему углу, а сумма смежных углов равна 180°, поэтому сумма внешних углов многоугольника равна $180°\, n-(n-2)180°$, т. е. 360°. ◁

19.2. Пополненный многоугольник. Выпуклая ломаная

Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1A_2...A_n$ (на рис. 19.4 $n=5$). Каждая из прямых A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 разбивает плоскость на две полуплоскости; отметим ту из них, которой принадлежит многоугольник. Будем говорить, что точка X лежит внутри многоугольника, если она расположена в каждой из отмеченных полуплоскостей (рис. 19.4).

Пополненным многоугольником (двумерным многоугольником) называют фигуру, которая состоит не только из сторон и вершин, но также из точек плоскости, лежащих внутри многоугольника (на рис. 19.4 заштрихован) Сам многоугольник образует границу пополненного многоугольника. Слово «пополненный» во многих случаях опускается.

Ломаная $A_1A_2...A_n$ называется *выпуклой*, если многоугольник $A_1A_2...A_n$ выпуклый (рис. 19.5). Ломаную $A_1A_2...A_n$ обозначим γ, а многоугольник $A_1A_2...A_n$ — P. Рассмотрим ломаную $A_1A_2'A_3'...A_{n-1}'A_n$ (имеющую общие точки A_1 и A_n с γ), которую обозначим γ'. Ломаная γ' называется *объемлющей выпуклую ломаную* γ, если обе

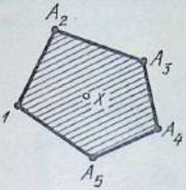


Рис. 19.4

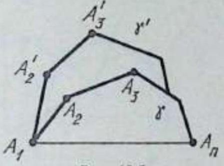


Рис 19.5

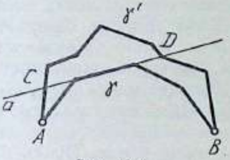


Рис. 19.6

они расположены в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_n и ломаная γ' не содержит внутренних точек многоугольника P.

Теорема 19.2. *Ломаная γ', объемлющая выпуклую ломаную γ, имеет длину, не меньшую, чем γ. Если ломаные не совпадают, то γ' имеет бо́льшую длину.*

▷ Через звено ломаной γ проведем прямую a (рис. 19.6). Следуя вдоль ломаной γ' из ее начальной точки A в конечную точку B, отметим первую точку C и последнюю D ломаной γ', принадлежащие прямой a. Заменив участок CD ломаной γ' прямолинейным отрезком CD, получим новую ломаную, объемлющую γ. Эта новая ломаная имеет длину, не большую γ', причем заведомо меньшую, если у ломаной γ' имеются точки по разные стороны от прямой a. Осуществив аналогичную операцию столько раз, сколько звеньев у ломаной γ, придем к ломаной γ'. Следовательно, ломаная γ' имеет длину, не меньшую, чем γ. Если ломаная γ' не совпадает с γ, то она имеет бо́льшую длину. ◁

19.3. Правильные выпуклые многоугольники

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него стороны равны и углы равны. Из этого определения и теоремы 19.1 следует, что в правильном выпуклом многоугольнике внутренний угол равен $(n-2)180°/n$, а внешний угол равен $360°/n$. Выпуклый многоугольник

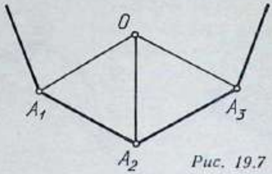


Рис. 19.7

называется *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Выпуклый многоугольник называют *описанным около окружности*, если все его стороны касаются некоторой окружности.

Теорема 19.3. *В правильный выпуклый многоугольник можно вписать и вокруг него описать окружность.*

▷ В правильном выпуклом многоугольнике проведем биссектрисы внутренних углов. Пусть биссектрисы углов A_1 и A_2 пересекаются в точке O, а биссектрисы углов A_2 и A_3 — в точке O'. Равнобедренные треугольники A_1OA_2 и $A_2O'A_3$ равны согласно второму признаку: $A_1A_2 = A_2A_3$ (как стороны правильного многоугольника), равны углы при основаниях (каждый такой угол равен половине внутреннего угла многоугольника). Из равенства этих треугольников следует, что $A_2O = A_2O'$, т. е. точки O и O' совпадают. Значит, биссектрисы углов A_1, A_2, A_3 пересекаются в точке O (рис. 19.7). Аналогично доказывается, что биссектрисы углов A_4, A_5, ..., A_n проходят через точку O. Из равенства равнобедренных треугольников A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$ заключаем, что все их стороны OA_1, OA_2, ..., OA_n равны и их высоты, проведенные из вершины O, тоже равны. Следовательно, точка O является центром описанной и вписанной окружностей. ◁

Обозначим a сторону правильного выпуклого многоугольника, α — половину внутреннего угла. Тогда для радиусов R и r описанной и вписанной окружностей получим формулы: $R = a/(2\cos\alpha)$, $r = a \operatorname{tg} \alpha/2$.

19.4. Длина окружности

Рассмотрим вписанный в окружность выпуклый многоугольник P (рис. 19.8). Пусть A и B — две его смежные вершины. На дуге $\smile AB$ зафиксируем точку C, обозначим через P_1 многоугольник, вершинами которого являются вершины многоугольника P и точка C. Сравним периметры этих многоугольников. Переход от многоугольника P к P_1

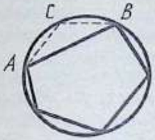


Рис. 19.8

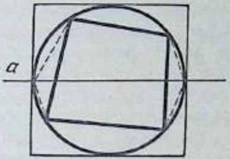


Рис. 19.9

связан с заменой стороны AB на стороне AC и BC (все остальные стороны одинаковы). Поскольку $AB < AC + BC$, то периметр многоугольника P_1 больше периметра многоугольника P.

Добавляя новые вершины, получим многоугольник с бóльшим периметром. Однако это увеличение периметра ограничено. Докажем, что периметры всех вписанных многоугольников будут меньше периметра описанного многоугольника.

Через две точки касания описанного многоугольника с окружностью проведем прямую a и пополним вершины вписанного многоугольника этими точками (рис. 19.9). Периметр вписанного многоугольника при этом увеличится. Применяя теорему 19.2 о выпуклой ломаной и ее объемлющей к частям многоугольника, расположенным в одной плоскости от прямой a, заключаем, что описанный многоугольник имеет периметр больший, чем вписанный. Поскольку периметр описанного квадрата равен $8R$, то периметр любого вписанного многоугольника не больше $8R$.

Длиной окружности будем называть наименьшее число, большее периметра любого вписанного в нее выпуклого многоугольника.

Теорема 19.4. *Длины двух окружностей относятся как их радиусы или диаметры.*

▷ Рассмотрим две окружности K_1 и K_2 соответственно с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2. Окружность K_1 подвергнем преобразованию гомотетии относительно ее центра O_1 с коэффициентом гомотетии $k = R_2/R_1$. В результате получим окружность K_1' с тем же центром O_1 и радиуса R_2 (как и окружности K_2). Посредством движения, переводящего точку O_1 в точку O_2, преобразуем окружность K_1' в окружность K_2. Указанными преобразованиями (гомотетией и движением) любой выпуклый многоугольник, вписанный в окружность K_1, переводится в выпуклый многоугольник, вписанный в окружность K_2. Обратно, любой вписанный в окружность K_2 многоугольник может быть получен таким способом.

Обозначим $S(P_1)$ периметр произвольного выпуклого многоугольника, вписанного в окружность K_1. Многоугольник P_2, вписанный в окружность K_2 и соответствующий многоугольнику P_2, имеет периметр $S(P_1)R_2/R_1$. Согласно определению, длина l_1 окружности K_1 есть наименьшее число, большее любого $S(P_1)$, а длина l_2 окружности K_2 — наименьшее число, большее любого $S(P_1)R_2/R_1$. Очевидно, что $l_2 = l_1(R_2/R_1)$, откуда

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{d_2}{d_1},$$

где d_1, d_2 — диаметры соответственно окружностей K_1 и K_2. ◁

Из доказанной теоремы следует, что $l_1/d_1 = l_2/d_2$, т. е. отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности. Это отношение обозначают π. Число π является иррациональными, $\pi \approx 3{,}1416$.

Таким образом, в любой окружности $l/d = \pi$, откуда следует формула для длины окружности $l = d\pi$ или $l = 2\pi R$.

Упражнения

1. Чему равен каждый внутренний угол правильного шестиугольника?
2. Чему равен каждый внешний угол правильного пятиугольника?
3. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.
4. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиусом R.
5. Выразите радиус вписанной и описанной окружностей для правильного n-угольника через его сторону, если $n = 3, 4, 6$.
6. Найдите сторону правильного вписанного $2n$-угольника, если сторона правильного вписанного n-угольника равна a.
7. Найдите радианную меру каждого угла: $\alpha_1 = 72°$, $\alpha_2 = 150°$, $\alpha_3 = 340°$.

8. Найдите градусную меру каждого угла: $\beta_1 = -\pi/2$, $\beta_2 = (3/4)\pi$, $\beta_3 = (5/6)\pi$, $\beta_4 = \pi/4$, $\beta_5 = \pi/3$.

9. Вычислите длину дуги единичной окружности, соответствующей центральному углу $45°$.

10. Вычислите длину дуги окружности радиусом $R=6$, соответствующей центральному углу $30°$.

20. ПЛОЩАДИ ФИГУР

20.1. Понятие площади фигуры

Под *площадью многоугольника* понимают численную характеристику, приписываемую плоским фигурам определенного вида, и обладающую некоторыми свойствами. В качестве таких фигур здесь рассматриваются пополненные многоугольники. Например, пополненным треугольником называют фигуру, состоящую из трех сторон, трех вершин и всех точек, лежащих внутри треугольника. Будем опускать слово «пополненный» и говорить просто «треугольник», имея в виду пополненный треугольник. В таком же смысле будем понимать прямоугольник, квадрат, параллелограмм, трапеция и др.

Необходимость определения площадей фигур возникла в связи с практической деятельностью человека в глубокой древности.

Представим себе два земельных участка: один в форме квадрата, другой в форме произвольного многоугольника (рис. 20.1). Пусть оба участка используются под посев, например, ржи. Предположим, после посева выяснилось, что на первый участок израсходовано a кг, а на второй — b кг зерна. В этом случае естественно считать, что второй участок в b/a раз больше первого. Число, указывающее, во сколько раз второй участок больше первого, будем называть *площадью* второго участка. Первый участок является единицей измерения. Из этого определения понятия площади получаем следующие ее свойства:

1) каждый участок имеет определенную площадь (так как для засева любого участка потребуется определенное количество зерна);

2) равные участки имеют равные площади (поскольку для засева равных участков требуется одно и то же количество зерна);

3) площадь всего участка равна сумме площадей его частей (если данный участок разбит на части, то количество зерна, необходимого для засева всего участка, равно количеству зерна для засева его частей).

4) площадь единичного квадрата (со стороной $a = 1$) будем считать равной единице.

Согласно приведенному выше определению площади, для того чтобы узнать площадь участка, необходимо его засеять. На практике, однако, требуется решать обратную задачу: определять количество зерна, необходимое для

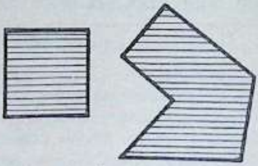


Рис. 20.1

посева. Если бы была известна площадь участка, то искомое количество зерна можно получить путем умножения количества зерна, необходимого для засева единицы площади, на площадь всего участка, отведенного под посев. Как же узнать площадь участка?

Найдем формулы для определения площадей простых фигур. Фигуру называют *простой*, если ее можно разбить на треугольники. Простой фигурой являются, например, выпуклый многоугольник, в частности параллелограмм, треугольник, трапеция. Отметим еще раз, что здесь имеется в виду пополненный многоугольник.

20.2. Площадь прямоугольника

Рассмотрим квадрат, являющийся единицей измерения площади (его сторона $a = 1$) и прямоугольник $ABCD$, площадь которого надо измерить (рис. 20.2). Стороны квадрата разобьем на N равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные его сторонам, которые разобьют его на N^2 малых квадратов. На рис. 20.2 сторона квадрата разбита на 3 части, число малых квадратов равно $3^2 = 9$.

Найдем площадь малого квадрата. По свойству 3 площадь большого квадрата равна сумме площадей малых квадратов. Поскольку площадь большого квадрата равна единице, а N^2 — число малых квадратов, то площадь малого квадрата равна $1/N^2$. Обозначим q сторону малого квадрата, тогда $q = 1/N$; следовательно площадь малого квадрата равна q^2.

На полупрямых AB и AC отметим отрезки q, $2q$, $3q$, ... и через их концы проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника. В результате получим сетку квадратов со сторонами q, покрывающих прямоугольник. Найдем число квадратов, содержащихся в прямоугольнике $ABCD$, и число квадратов, содержащих данный

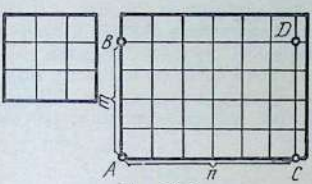


Рис. 20.2

прямоугольник, в котором $AB = a$, $BC = b$. Пусть m — целое от деления a на q, n — целое от деления b на q. Тогда число квадратов, содержащихся в прямоугольнике $ABCD$, будет mn, а число квадратов, содержащих этот прямоугольник, будет не больше $(m+1)(n+1)$. Значит, площадь S прямоугольника заключена между числами mnq^2 и $(m+1)(n+1)q^2$, т. е. $mnq^2 \leqslant S \leqslant (m+1)(n+1)q^2$.

Докажем, что произведение ab заключено также между этими числами. В самом деле, $mq \leqslant a < (m+1)q$, $nq \leqslant b < (n+1)q$, поэтому $mnq^2 \leqslant ab < (m+1)(n+1)q^2$. Поскольку числа S и ab заключены между числами mnq^2 и $(m+1)(n+1)q^2$, то они отличаются не более чем на $(m+1)(n+1)q^2 - mnq^2 = mq^2 + nq^2 + q^2$. Так как $mq \leqslant a$, $nq \leqslant b$, то $mq^2 + nq^2 + q^2 = mq \cdot q + nq \cdot q + q^2 \leqslant aq + bq + q^2$, т. е. числа S и ab различаются не более чем на $aq + bq + q^2 = a/N + b/N + 1/N^2$. Если число N взять достаточно большим, то число $a/N + b/N + 1/N^2$ будет сколь угодно малым. Итак, числа S и ab различаются как угодно мало, что может быть только тогда, когда они равны.

Следовательно, площадь S прямоугольника со сторонами a и b выражается формулой

$$S = ab,$$

где a и b измеряются стороной квадрата, принятого за единицу измерения.

20.3. Площади параллелограмма, треугольника, трапеции

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 20.3), не являющийся прямоугольником. Из точек A и B проведем перпендикуляры AE и BF к прямой CD. Прямоугольные треугольники AED и BFC равны, поэтому имеют равные площади. Так как площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника AED, с другой стороны — сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и треугольника BFC, то площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, т. е. $AB \cdot BF$. Отрезок BF называют *высотой параллелограмма*. Обозначив $AB = a$, $BF = h$, получим

$$S = ah, \tag{20.1}$$

т. е. площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, соответствующей этой стороне.

Выведем формулу для вычисления площади треугольника. Треугольник ABC дополним до параллелограмма $ABCD$, как указано на рис. 20.4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ACD. Эти треугольники равны, поэтому площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте CE треугольника, проведенной к стороне AB. Обозначая $AB = a$, $CE = h$, получаем

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

т. е. площадь треугольника равна половине произведения его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

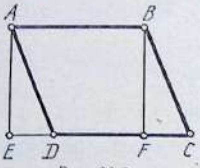


Рис. 20.3

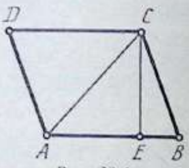


Рис. 20.4

Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 20.5). Поскольку он является параллелограммом, то его площадь вычисляется по формуле (20.1). Эту площадь можно вычислить и по другой формуле. Обозначим через d_1 и d_2 — длины его диагоналей, $d_1 = AC$, $d_2 = BD$. Тогда

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

т. е. площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

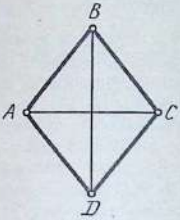


Рис. 20.5

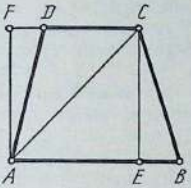


Рис. 20.6

Выведем формулу для вычисления площади трапеции. В трапеции $ABCD$ проведем диагональ AC, которая разобьет ее на два треугольника: ABC и CDA (рис. 20.6) Значит, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CE + \frac{1}{2} DC \cdot AF.$$

Высоты CE и AF указанных треугольников равны расстоянию между параллельными прямыми AB и CD. Это расстояние называют *высотой трапеции.* Обозначив высоту трапеции h ($h = CE = AF$), получим

$$S = \frac{AB + CD}{2} h,$$

т е. площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований и высоты.

20.4. Площади подобных фигур

Рассмотрим две подобные простые фигуры F_1 и F_2. Выясним, как относятся площади $S(F_1)$ и $S(F_2)$ этих фигур.

Поскольку фигуры подобны, то существует преобразование подобия, при котором фигура F_1 переходит в фигуру F_2.

Разобьем фигуру F_1 на треугольники $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$. Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти треугольники в треугольники $\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_n$ разбиения фигуры F_2. Площадь фигуры F_1 равна сумме площадей треугольников $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$, а площадь фигуры F_2 равна сумме площадей треугольников $\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_n$, т. е.

$$S(F_1) = S(\Delta'_1) + S(\Delta'_2) + \ldots + S(\Delta'_n), \; S(F_2) = S(\Delta''_1) + S(\Delta''_2) + \ldots + S(\Delta''_n).$$

Обозначим коэффициент подобия k и будем считать, что $k > 1$. Тогда размеры любого треугольника Δ''_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в k раз больше соответствующих размеров треугольника Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В частности, стороны и высоты треугольника Δ''_i в k раз больше соответствующих сторон и высот треугольника Δ'_i, поэтому $S(\Delta''_i = k^2 S(\Delta'_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Складывая эти равенства почленно, получаем $S(F_2) = k^2 S(F_1)$. Коэффициент подобия k равен отношению соответствующих линейных размеров фигур F_1 и F_2, т. е. $k = l_2/l_1$. Следовательно, $S(F_2) = (l_2^2/l_1^2) S(F_1)$ или $S(F_2)/S(F_1) = l_2^2/l_1^2$, т. е. площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных размеров.

20.5. Площадь круга

Определение круга дано в § 15.1. Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом.

Теорема 20.1. *Площадь круга равна половине произведения длины, ограничивающей его окружности и радиуса:* $S = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R$, $S = \pi R^2$.

▷ В данную окружность с центром O и радиусом R (рис. 20.7) впишем выпуклый многоугольник, периметр которого отличается от длины окружности l меньше, чем на ε, каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$. Существование такого вписанного выпуклого многоугольника следует из определения длины окружности. Пополним этот многоугольник новыми вершинами так, чтобы стороны многоугольника были меньше 2ε. Полученный многоугольник обозначим P и подвергнем его гомотетии относительно центра окружности — точки O с коэффициентом гомотетии $k = R/(R - \varepsilon)$. В результате получим многоугольник P', содержащий исходный круг (рис. 20.7). Площадь многоугольника P меньше площади круга, а последняя меньше площади многоугольника P'.

Поскольку стороны многоугольника P меньше 2ε, то высоты треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ..., опущенные из вершины O, не меньше $R-\varepsilon$ и не больше R. Следовательно, площадь многоугольника P не больше $p(R/2)$ и не меньше

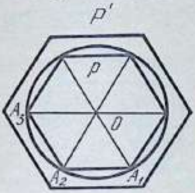


Рис. 20.7

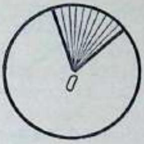


Рис. 20.8

$p(R-\varepsilon)/2$, где p — периметр многоугольника P. Значит, многоугольник P' имеет площадь, не большую $(pR/2)(R/(R-\varepsilon))^2$. Отсюда следует, что площадь круга S удовлетворяет неравенствам

$$(R-\varepsilon)\frac{p}{2} < S < \frac{Rp}{2}\left(\frac{R}{R-\varepsilon}\right)^2.$$

Эти неравенства усилятся, если в левой части p заменить на $l-\varepsilon$, а в правой p — на l, где l — длина окружности:

$$\frac{(R-\varepsilon)(l-\varepsilon)}{2} < S < \frac{Rl}{2}\left(\frac{R}{R-\varepsilon}\right)^2.$$

Правая и левая части неравенства при достаточно малом ε сколь угодно мало отличаются от $lR/2$. Следовательно, площадь круга сколь угодно мало отличается от $lR/2$, что может быть только при $S=lR/2$. Так как $l=2\pi R$, то $S=\pi R^2$. $\triangleleft$

Круговым сектором называют часть круга, лежащую внутри соответствующего центрального угла (рис. 20.8).

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S=\pi R^2\frac{\alpha}{360},$$

где R — радиус круга; α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Круговым сегментом называют общую часть круга и полуплоскости (рис. 20.9). Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \pm S_\Delta,$$

где S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и на концах радиусов, ограничивающих соответст-

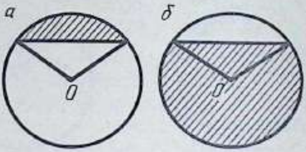


Рис. 20.9

вующий сектор. Минус следует брать, когда $\alpha < 180°$ (рис. 20.9, *а*), а плюс — в случае $\alpha > 180°$ (рис. 20.9, *б*).

Упражнения

1. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} AC \times$ $\times BC \sin C$.

2. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $AD \cdot AB \sin A$.

3. Докажите, что площадь описанного выпуклого многоугольника равна произведению полупериметра и радиуса круга.

4. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на диагоналях параллелограмма, равна удвоенной сумме площадей квадратов, построенных на неравных сторонах.

6. Докажите, что площадь треугольника определяется по формуле $S = (1/2)pr$, где p — периметр треугольника, r — радиус вписанной окружности.

7. Докажите, что площадь правильного n-угольника выражается через радиус описанной окружности R:

$$S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360°}{n}.$$

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Докажите, что площадь прямоугольника, построенного на диагоналях AC и BD данного четырехугольника, равна сумме площадей прямоугольников, построенных на противоположных сторонах (AB и CD, AD и BC).

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Стереометрия — часть геометрии, изучающая свойства фигур, расположенных в пространстве (от греч. στερεος — пространственный, μετρεω — измеряю).

21. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

21.1. Аксиомы стереометрии и некоторые следствия из них

Простейшими фигурами в пространстве являются точка, прямая, плоскость. Введение плоскости, как простейшей фигуры, обусловливает необходимость расширения системы аксиом. Как указывалось выше, аксиомы выражают основные свойства простейших фигур и используются при доказательстве теорем.

В дальнейшем будем использовать аксиомы 1—12, сформулированные в гл. 11 (см. § 11.1—11.3), а также следующими аксиомами стереометрии.

Аксиома 1. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие ей, и точки, не принадлежащие этой плоскости.*

Аксиома 2. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.*

Аксиома 3. *Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.*

Аксиома 2 утверждает, что если две различные плоскости имеют общую точку M, то существует прямая p, принадлежащая каждой из этих плоскостей. Точка M принадлежит прямой p.

В аксиоме 3 говорится, что если две различные прямые p и q имеют общую точку M, то существует плоскость α, содержащая прямые p и q. Плоскость, обладающая этим свойством, единственная.

Рассмотрим простейшие следствия из аксиом стереометрии, которые выражаются следующими тремя теоремами. При доказательстве этих теорем будем пользоваться, кроме аксиом 1—3, следующими аксиомами.

Аксиома 4. *Какова бы ни была прямая, существуют точки пространства, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.*

Аксиома 5. *Каковы бы ни были две точки пространства, существует, и притом единственная, прямая, проходящая через эти точки.*

Теорема 21.1. *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.*

▷ Рассмотрим прямую a и точку B, не принадлежащую этой прямой (рис. 21.1). На прямой a отметим произволь-

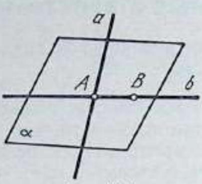


Рис. 21.1

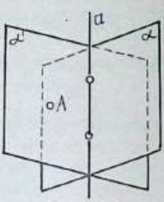


Рис. 21.2

ную точку A, существование которой обусловлено аксиомой 4. Через точки A и B проведем прямую b, что возможно согласно аксиоме 5. Прямые a и b различны, поскольку точка B прямой b не лежит на прямой a. Эти прямые имеют общую точку A. Через прямые a и b проведем плоскость, что возможно в силу аксиомы 3. Указанная плоскость проходит через прямую a и точку B.

Плоскость α, проходящая через прямую a и точку B, является единственной. Предположим, что существует другая плоскость α', отличная от плоскости α, проходящая через прямую a и точку B. Согласно аксиоме 2, различные плоскости α и α' пересекаются по прямой. Значит, этой прямой является прямая a. Однако точка B заведомо не лежит на прямой a и является точкой пересечения. Полученное противоречие доказывает теорему. ◁

Теорема 21.2. *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.*

▷ Рассмотрим прямую a и плоскость α (рис. 21.2). Согласно аксиоме 4, существует точка A, не лежащая на прямой a. Через прямую a и точку A проведем плоскость α'. Если плоскость α' совпадает с α, то плоскости α принадлежит прямая a, что и утверждается теоремой. Если плоскость α' отлична от α, то плоскости α' и α пересекаются по прямой a', содержащей две точки прямой a. Согласно аксиоме 5, прямая a' совпадает с a, поэтому прямая a лежит в плоскости α. ◁

Следствие. Плоскость и не принадлежащая ей прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

Теорема 21.3. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

▷ Рассмотрим три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой (рис. 21.3). Проведем прямые AB и AC. Эти прямые различны, поскольку точки A, B, C не лежат на одной прямой. Согласно аксиоме 3, через прямые AB и AC можно провести единственную плоскость, которой будут принадлежать точки A, B, C. ◁

21.2. Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема 21.4. *Через точку вне данной прямой можно провести к этой прямой параллельную прямую, и притом только одну.*

▷ Через прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой, проведем плоскость α (рис. 21.4). В плоскости α через точку A проведем прямую a_1, параллельную прямой a. Прямая a_1 будет единственной прямой, параллельной a. Чтобы доказать это, допустим, что существует другая прямая a_2, проходящая через точку A и параллельная прямой a. Через прямые a и a_2 проведем плоскость α_2. Так как плоскость α_2 проходит через прямую a и точку A, то, согласно теореме 21.1, она совпадает с α. Согласно аксиоме параллельных, заключаем, что прямые a_1 и a_2 совпадают. ◁

Теорема 21.5. *Если прямая a параллельна прямым b и c, то прямые b и c параллельны.*

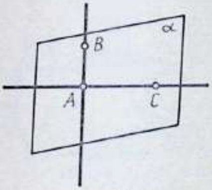


Рис. 21.3

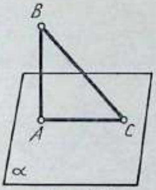


Рис. 21.4

▷ Предположим, что прямые не лежат в одной плоскости (случай, когда прямые принадлежат одной плоскости, исследован в планиметрии). Рассмотрим плоскость β, в которой лежат прямые a и b, и плоскость γ, в которой лежат прямые a и c; эти плоскости различны (рис. 21.5) На прямой b отметим произвольную точку B, проведем через нее и прямую c плоскость γ'. Эта плоскость пересечет плоскость β по некоторой прямой b_1. Можно утверждать, что прямая b_1 параллельна a. Предположим, что прямая b_1 пересекает прямую a в некоторой точке A. Эта точка лежит в плоскости γ и в плоскости γ', поэтому принадлежит прямой c, по которой пересекаются указанные плоскости. Однако параллельные прямые a и c не могут иметь общей точки A. Значит, прямая b_1 параллельна прямой a.

Прямая b_1, будучи параллельной прямой a, должна совпадать с прямой b (по аксиоме параллельных). Поскольку прямая b совпадает с b_1, то прямые b и c лежат в одной плоскости γ'. Эти прямые не могут пересекаться. Действительно, это противоречило бы теореме 21.4, поскольку обе они параллельны прямой a. Следовательно, прямые b и c параллельны как лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки. ◁

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 21.6. *Плоскость α и не лежащая в ней прямая a параллельны, если в плоскости α найдется прямая a_1, параллельная прямой a.*

▷ Через прямые a и a_1 проведем плоскость α_1 (рис. 21.6). Эта плоскость не совпадает с α, поскольку прямая a не лежит в плоскости α. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая a пересекала

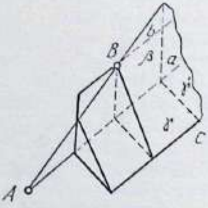


Рис. 21.5

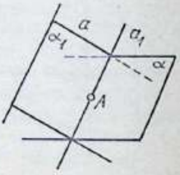


Рис. 21.6

плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Однако это невозможно, так как прямые a и a_1 параллельны. Таким образом, прямая a не пересекает плоскость α, т. е. параллельна плоскости α. $\triangleleft$

21.3. Параллельность плоскостей

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 21.7. *Если плоскость α параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости β, то плоскости α и β параллельны.*

$\triangleright$ В плоскости β рассмотрим две пересекающиеся прямые b_1 и b_2, параллельные плоскости α. Допустим, что различные плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой c (рис. 21.7). Так как прямые b_1 и b_2 не пересекают плоскость α, то они не пересекают прямую c этой плоскости. Это противоречит аксиоме о параллельных: прямые b_1, b_2 и c лежат в одной плоскости β, через точку пересечения b_1 и b_2 проходят две прямые, параллельные прямой c. Наличие противоречия доказывает теорему. $\triangleleft$

Теорема 21.8. *Через точку вне плоскости можно провести, и притом только одну, плоскость, параллельную данной.*

$\triangleright$ Пусть даны плоскость α и точка A вне ее. На плоскости α проведем две пересекающиеся прямые a' и a'', а через точку A — параллельные им прямые b' и b''. Согласно теореме 21.7, плоскость, проходящая через прямые b' и b'', параллельна плоскости α. Докажем, что такая плоскость является единственной. Предположим, через точку A проходят две различные плоскости β_1 и β_2, параллельные плоскости α (рис. 21.8). Прямую, по которой

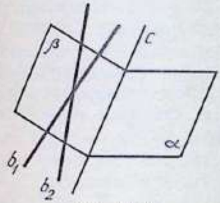


Рис. 21.7

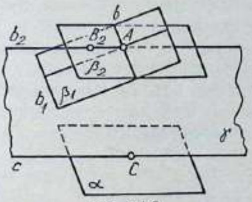


Рис. 21.8

пересекаются эти плоскости, обозначим b. Отметим точку C на плоскости α и точку B_2 на плоскости β_2, не лежащую на прямой b. Через точки A, B_2, C проведем плоскость γ. Пусть b_1, b_2, c — прямые, по которым эта плоскость пересекается соответственно с плоскостями β_1, β_2, α. Прямые b_1 и b_2 не пересекают прямую c, поскольку не пере-

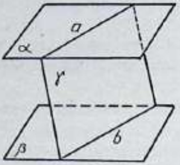


Рис. 21.9

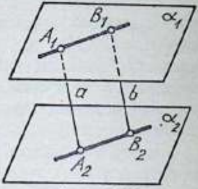


Рис. 21.10

секают плоскость α, которой принадлежит эта прямая. Согласно аксиоме параллельных, прямые b_1 и b_2 совпадают. Следовательно, плоскости β_1 и β_2 проходят через две различные пересекающиеся прямые b и b_1 и поэтому совпадают (согласно аксиоме 3). ◁

Теорема 21.9. *Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.*

▷ Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и плоскость γ, пересекающую их соответственно по прямым a и b. Эти прямые лежат в одной плоскости γ. Если они не параллельны, то содержащие их плоскости α и β пересекаются, что противоречит условию теоремы. ◁

Теорема 21.10. *Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны.*

▷ Рассмотрим параллельные плоскости α_1, α_2 и параллельные прямые a и b, пересекающие плоскости соответственно в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2. Через прямые a и b проведем плоскость, которая пересечет плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 21.10). Четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ является параллелограммом, потому что противолежащие стороны его параллельны. Так как противоположные стороны параллелограмма равны, то $A_1A_2 = B_1B_2$. ◁

21.4. Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости пользуются *параллельным проектированием*, сущность которого состоит в следующем. Строится произвольная прямая p, пересекающая плоскость чертежа, и через произвольную точку A фигуры проводится прямая, параллельная p. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A (рис. 21.11). Построив таким способом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры.

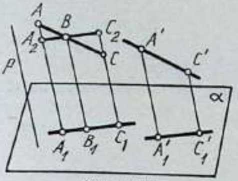


Рис. 21.11

Отметим некоторые свойства изображения фигуры на плоскости.

1. Прямолинейные отрезки фигуры изображаются прямолинейными отрезками или точками на плоскости чертежа. Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа α по прямой A_1C_1 (рис. 21.11). Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

2. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками. Действительно, пусть AC и $A'C'$ — параллельные отрезки фигуры (рис. 21.11). Прямые A_1C_1 и $A'_1C'_1$ параллельны, поскольку они получаются при пересечении параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая — через прямые $A'C'$ и $A'A'_1$.

3. Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании. Докажем, например, что $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$. Через точку B проведем прямую, параллельную A_1C_1

(рис. 21.11). Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны согласно основному признаку. Из подобия треугольников следует указанная пропорция.

21.5. Перпендикулярность прямых

Две прямые в пространстве называются *взаимно перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

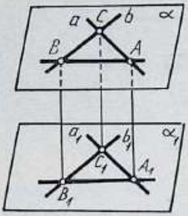


Рис. 21.12

Теорема 21.11. *Если пересекающиеся прямые a и b взаимно перпендикулярны и a_1, b_1 — параллельные им пересекающиеся прямые, то они тоже взаимно перпендикулярны.*

▷ Если все прямые лежат в одной плоскости, то они обладают указанным свойством (рассмотренным в планиметрии). Допустим, прямые не лежат в одной плоскости: прямые a и b принадлежат плоскости α, а прямые a_1 и b_1 плоскости α_1 (рис. 21.12). Прямые a и b параллельны плоскости α_1 (согласно теореме 21.6), плоскости α и α_1 параллельны (по теореме 21.7). Пусть прямые a и b пересекаются в точке C, а прямые a_1 и b_1 — в точке C_1. В плоскости параллельных прямых a и a_1 проведем прямую, параллельную прямой CC_1. Пусть A и A_1 — точки пересечения этой прямой с прямыми a и a_1. В плоскости прямых b и b_1 проведем прямую, параллельную CC_1, точки пересечения ее с прямыми b и b_1 обозначим B и B_1.

Рассмотрим полученные четырехугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1. Эти четырехугольники являются параллелограммами, так как у них противолежащие стороны параллельны. Параллелограммом будет и четырехугольник ABB_1A_1, так как параллельны его стороны AA_1 и BB_1 (каждая из них параллельна CC_1), и стороны AB и A_1B_1, лежащие в параллельных плоскостях (согласно теореме 11.9). Отсюда следует, что $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, т. е. треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны, поэтому $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$. Значит, $\angle A_1C_1B_1$ прямой, т. е. прямые a_1 и b_1 взаимно перпендикулярны. ◁

21.6. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая a, пересекающая плоскость α, называется *перпендикулярной к плоскости* α, если она перпендикулярна к любой прямой в плоскости α, проходящей через точку пересечения прямой a с плоскостью α.

Теорема 21.12. *Если прямая a, пересекающая плоскость α в точке A, перпендикулярна к двум прямым b и c, лежащим в плоскости α и проходящим через точку A, то она перпендикулярна к плоскости α.*

▷ *Через точку* A пересечения двух прямых b и c в плоскости α проведем произвольную прямую p и докажем, что она перпендикулярна к прямой a (рис. 21.13). В плоскости α проведем произвольную прямую, не проходящую через точку A, пересекающую прямые b, c, p соответственно в точках B, C, P.

На прямой a из точки A в разные стороны от нее отложим равные отрезки $AA_1 = AA_2$. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, поскольку отрезок AC является высотой (по условию теоремы) и медианой (по построению $A_1A = AA_2$). По аналогии треугольник A_1BA_2 также равнобедренный. Отсюда следует, что треугольники A_1BC и A_2BC равны (по третьему признаку равенства треугольников), поэтому $\angle A_1BP = \angle A_2BP$. Следовательно, треугольники A_1BP и A_2BP равны (по первому признаку), откуда $A_1P = A_2P$. Значит, треугольник A_1PA_2 равнобедренный, поэтому его медиана является также высотой. Итак, прямая p перпендикулярна к прямой a. ◁

Теорема 21.13. *Если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.*

▷ Рассмотрим две параллельные прямые a, b и плоскость α, перпендикулярную к прямой a (рис. 21.14). Докажем, что плоскость α перпендикулярна и к прямой b. В плоскости α через точку B пересечения прямой b с плоскостью α проведем произвольную прямую q. Через точку A пересечения прямой a с плоскостью α проведем прямую p, параллельную прямой q; эта прямая лежит в плоскости α. Прямые a и p взаимно перпендикулярны, так как прямая a перпендикулярна к плоскости α. Пересекающиеся прямые b и q, параллельные соответственно прямым a и p, также взаимно перпендикулярны (согласно теореме 21.11). Итак, прямая b перпендикулярна к любой прямой q, лежащей в плоскости α, т. е. прямая b перпендикулярна к плоскости α. ◁

Теорема 21.14. *Две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.*

▷ Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α (рис. 21.15). Предположим, что прямые a и b

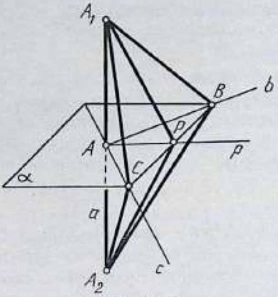


Рис. 21.13

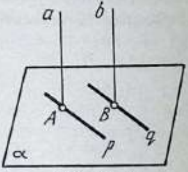


Рис. 21.14

не параллельны. Проведем через какую-нибудь точку C прямой b прямую b', параллельную прямой a. Прямая b' перпендикулярна к плоскости α (по теореме 21.13). Если B и B' — точки пересечения прямых b и b' с плоскостью α, то прямая BB' перпендикулярна к прямым b и b', что невозможно. ◁

Рассмотрим плоскость α, принадлежащую ей точку A и точку B вне плоскости α (рис. 21.16). Отрезок BA называется *перпендикуляром*, проведенным из точки B к плоскости α, если прямая BA перпендикулярна к плоскости α. Если C — произвольная точка плоскости α, отличная от A, то отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к плоскости α. Отрезок AC при этом называется *проекцией наклонной.*

Докажем, что перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α, короче любой наклонной, проведенной из этой точки; что бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию.

Действительно, поскольку треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом A, то по теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Отсюда следует: 1) $BC > AB$, т. е. на-

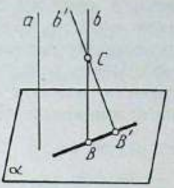


Рис. 21.15

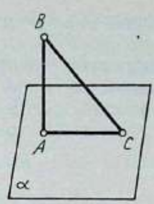


Рис. 21.16

клонная BC больше перпендикуляра BA; 2) чем больше BC, тем больше AC, т. е. чем больше наклонная, тем больше ее проекция.

21.7. Преобразования фигур в пространстве

Понятие преобразования фигур в пространстве определяется так же, как и преобразование фигур на плоскости (см. гл. 18). По аналогии с соответствующими преобразованиями вводятся преобразования симметрии относительно точки и гомотетия.

В пространстве рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости. Рассмотрим произвольную фиксированную плоскость α. Из точки M фигуры проводим перпендикуляр MN к плоскости α и на его продолжении за точку N откладываем отрезок $NM' = MN$. Преобразование, переводящее точку M в симметричную ей точку M', называется *преобразованием симметрии относительно плоскости* α. Если это преобразование переводит фигуру в себя, то фигура называется *симметричной относительно плоскости* α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии*.

Понятие движения в пространстве определяется так же, как и на плоскости: *движением* называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками. Преобразования симметрии относительно точки и плоскости в пространстве являются движениями. При движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми. Это доказывается так же, как и для движения на плоскости.

Докажем новое свойство движения в пространстве: движение переводит плоскости в плоскости.

▷ На произвольной плоскости α отметим три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой (рис. 21.17). При движении эти точки перейдут в некоторые точки A', B', C', не лежащие на одной прямой. Через точки A', B', C' проведем плоскость α' и докажем, что в эту плоскость переходит плоскость α при данном движении. Пусть L —

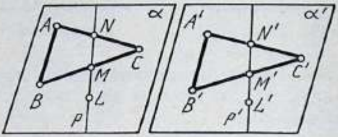


Рис. 21.17

произвольная точка плоскости α. Проведем через нее произвольную прямую p, пересекающую треугольник ABC в двух точках M и N. При данном движении прямая p перейдет в прямую p', а ее точки M и N в точки M' и N', принадлежащие треугольнику $A'B'C'$, а значит, плоскости α'. Таким образом, прямая p' лежит в плоскости α'. Точка L при движении переходит в точку L' прямой p', принадлежащей плоскости α'. Итак, любая точка L плоскости α при движении переходит в соответствующую точку плоскости α' (плоскость α переходит в плоскость α'). ◁

Параллельным переносом в пространстве называется такое движение, при котором точки фигуры смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Параллельный перенос в пространстве обладает свойствами, аналогичными свойствам параллельного переноса на плоскости. Новым является следующее свойство: при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость. Докажем это свойство.

▷ В произвольной плоскости α проведем две пересекающиеся прямые a и b. Эти прямые при параллельном переносе переходят либо в себя, либо в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то, согласно теореме 21.7, она параллельна α. ◁

Преобразование подобия в пространстве определяется так же, как и на плоскости. Аналогично доказывается, что гомотетия в пространстве является преобразованием подобия.

21.8. Углы между прямыми и плоскостями

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Как известно, вертикальные углы равны, а смежные дополняют один другой до 180°. Угловую меру меньшего из этих углов называют главным значением угла между прямыми.

Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не являются параллельными. Например, если в двух параллельных плоскостях взять непараллельные прямые, то они будут скрещивающимися. В самом деле, они не пересекаются (ибо лежат в параллельных плоскостях) и не параллельны (по условию). Отметим, что на плоскости таких прямых нет (две прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны).

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися, параллельными им прямыми. Докажем, что этот угол не зависит от выбора пересекающихся прямых. Рассмотрим пересекающиеся в точке A прямые a_1 и a_2, параллельные данным скрещивающимся прямым. Пусть b_1 и b_2 — другие прямые, параллельные данным скрещивающимся, и пересекающиеся в точке B. Согласно теореме 21.5, прямые a_1 и b_1 параллельны, прямые a_2 и b_2 также параллельны. Осуществим параллельный перенос, переводящий точку A в точку B. Поскольку при параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую, то указанный параллельный перенос переводит прямую a_1 в b_1, а прямую a_2 в b_2. При параллельном переносе сохраняются углы, поэтому угол между прямыми a_1 и a_2 равен углу между прямыми b_1 и b_2, что и требовалось доказать.

Угол между параллельными прямыми по определению считают равным нулю.

Введем понятие угла между прямой и плоскостью. Рассмотрим плоскость α и пересекающую ее прямую a (рис. 21.18). *Проекцией прямой a* на плоскость α называется прямая a', на которой лежат основания перпендикуляров, проведенных из точек прямой a к плоскости α.

Углом между прямой a и плоскостью α называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость α. Поскольку прямая a, ее проекция a' и перпендикуляр p к плоскости α в точке пересечения с прямой a лежат в

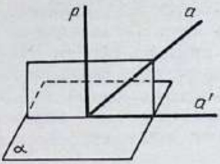


Рис. 21.18

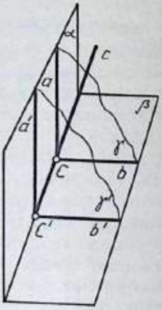


Рис. 21.19

одной плоскости, то угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром p к плоскости.

Угол между параллельными прямой и плоскостью по определению считается равным нулю.

Введем понятие угла между плоскостями. Если плоскости параллельны, то угол между ними по определению считают равным нулю. Рассмотрим плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c (рис. 21.19). Проведем плоскость γ, перпендикулярную к прямой c. Она пересечет плоскости α и β по некоторым прямым a и b. *Углом между двумя плоскостями* α и β называется угол между прямыми a и b. Докажем, что этот угол не зависит от выбора плоскости γ. Рассмотрим другую плоскость γ', перпендикулярную к прямой c, пересекающую плоскости α и β по некоторым прямым a' и b'. Осуществим параллельный перенос, переводящий точку C пересечения плоскости γ с прямой c в точку C' пересечения плоскости γ' с той же прямой. При указанном параллельном переносе прямая a переходит в прямую a', а прямая b — в прямую b'. Следовательно, углы между прямыми a и b, a' и b' равны, что требовалось доказать.

Упражнения

1. Докажите, что если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a.

2. Докажите, что если плоскости α и β пересекаются по прямой c и прямая a параллельна каждой из плоскостей α и β, то она параллельна и прямой c.

3. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

4. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

5. Докажите, что через данную точку к данной плоскости можно провести не более одной перпендикулярной прямой.

6. Докажите, что прямые, проходящие через данную точку прямой перпендикулярно к этой прямой, лежат в одной плоскости.

7. Докажите, что не существует четырех попарно перпендикулярных прямых.

8. Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку с концами в данных точках, проходящая через его середину.

9. Докажите, что геометрическое место оснований наклонных равной длины, проведенных из данной точки к данной плоскости, есть окружность. Где находится центр этой окружности?

10. Докажите, что параллельные прямые образуют с плоскостью равные углы.

22. ВЕКТОРЫ

22.1. Основные определения

Некоторые физические величины (например, масса, работа) могут быть охарактеризованы одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения; такие величины называют *скалярными*. Другие величины (например, сила, скорость) характеризуются числом и направлением; эти величины называют *векторными*. Для геометрического изображения векторных величин служат векторы.

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, конец — в точке B (рис. 22.1), то такой вектор обозначают $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Начало вектора называют точкой его приложения. Используют и другие обозначения векторов: **a**, **b** или $\bar{a}$, $\bar{b}$ и т. д.

Модуль вектора **a** — это его длина, обозначается $|a|$ или a.

Нуль-вектором (или *нулевым вектором*) называется вектор $\overline{AA}$, начало и конец которого совпадают, обозначается **О**. Модуль нуль-вектора равен нулю, а направление не определено.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

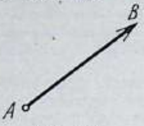


Рис. 22.1

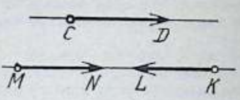


Рис. 22.2

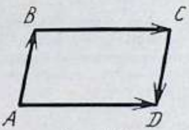


Рис. 22.3

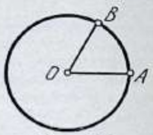


Рис. 22.4

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или одной прямой), называются *коллинеарными* (на рис. 22.2 векторы $\overline{CD}$ и $\overline{MN}$, $\overline{KL}$ и $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ и $\overline{KL}$).

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковые направления и равные длины, называются *равными*. На рис. 22.3 изображен параллелограмм, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны. Отметим, что $\overline{AB} \neq \overline{CD}$, хотя $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$; эти векторы имеют противоположные направления. На рис. 22.4 изображена окружность, указаны две ее различные точки A, B; $\overline{OB} \neq \overline{OA}$, так как векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ имеют разные направления.

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются *противоположными* (векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на рис. 22.3). Вектор, противоположный вектору **a**, обозначается $-$**a**.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются *компланарными*.

Из определения равенства векторов следует, что каковы бы ни были вектор **a** и точка A, всегда можно построить единственный вектор $\overline{AB}$ с началом в точке A, равный вектору **a**, т. е. $\overline{AB} = \mathbf{a}$, или, как говорят, перенести вектор **a** в точку A. Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называется *свободным*.

22.2. Линейные действия над векторами

К линейным действиям над векторами относят сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

Суммой двух векторов **a** и **b** называется третий вектор **c**, начало которого совпадает с началом вектора **a**, а конец — с концом вектора **b** при условии, что вектор **b** отложен из конца вектора **a** (рис. 22.5). Вектор **c** получается по правилу треугольника — (рис. 22.5) или по правилу параллелограмма (рис. 22.6).

Аналогично определяется сумма трех и более векторов. *Суммой n векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора $\mathbf{a}_1$, конец — с концом последнего вектора $\mathbf{a}_n$ при условии, что каждый последующий вектор $\mathbf{a}_{k+1}$ отложен из конца предыдущего $\mathbf{a}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$). Указанный способ построения суммы векторов называется правилом замыкающей. На рис. 22.7 изображен вектор $\overline{OC}$ — сумма трех векторов **a**, **b**, **c**.

Сумма векторов обладает свойством пареместительности (коммутативности): $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, так как $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overline{OB} = \overline{OB'} + \overline{B'B} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (см. рис. 22.6) и свойством сочетательности (ассоциативности):

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

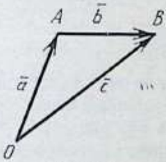


Рис. 22.5

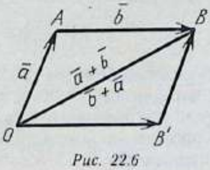


Рис. 22.6

поскольку $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + (\overline{AB} + \overline{BC}) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = (\overline{OA} + \overline{AB}) + \overline{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (рис. 22.7).

Из определения суммы следует, что $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, т. е. нуль-вектор при сложении векторов играет ту же роль, что

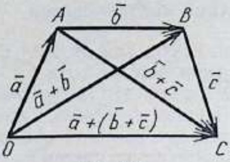


Рис. 22.7

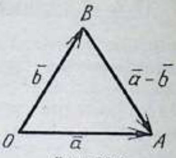


Рис. 22.8

и число 0 при сложении чисел; $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, т. е. сумма двух противоположных векторов равна нуль-вектору.

Разностью $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{d}$, который в сумме с вектором $\mathbf{b}$ дает вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d}, \text{ если } \mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{a}.$$

Чтобы получить разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, необходимо отложить их из одной точки и соединить конец второго вектора с концом первого (рис. 22.8).

Отметим, что $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, т. е. разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ равна сумме двух векторов $\mathbf{a}$ и $(-\mathbf{b})$, где $(-\mathbf{b})$ — вектор, противоположный вектору $\mathbf{b}$ (рис. 22.9).

Векторы-диагонали параллелограмма $OABC$ (рис. 22.10), построенного на некоторых $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, являются соответственно суммой и разностью этих векторов.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на число* α (или числа α на вектор $\mathbf{a}$) называется вектор

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}, \tag{22.1}$$

удовлетворяющий условиям: 1) $|\mathbf{b}| = |\alpha|\,|\mathbf{a}|$; 2) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ одинаково направлены при $\alpha > 0$; 3) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ имеют противоположные направления при $\alpha < 0$. На рис. 22.11 изображены векторы $\mathbf{a}$, $-2\mathbf{a}$, $3\mathbf{a}$. Очевидно, что $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, если $\alpha = 0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}; \tag{22.2}$$

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}; \tag{22.3}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}. \tag{22.4}$$

Докажем эти свойства. Векторы $\alpha(\beta\mathbf{a})$ и $(\alpha\beta)\mathbf{a}$ имеют равные длины, так как $|\alpha(\beta\mathbf{a})| = |\alpha|\,|\beta\mathbf{a}| = |\alpha|\,|\beta|\,|\mathbf{a}|$,

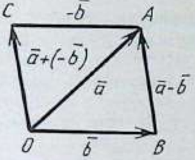


Рис. 22.9

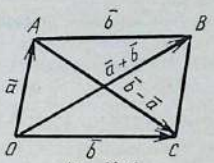


Рис. 22.10

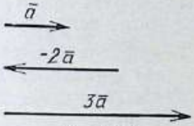


Рис. 22.11

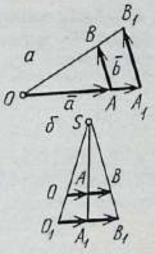


Рис. 22.12

$|(\alpha\beta)\mathbf{a}| = |\alpha\beta|\,|\mathbf{a}| = |\alpha|\,|\beta|\,|\mathbf{a}|$, и одинаковые направления, поскольку эти направления совпадают с направлением вектора $\mathbf{a}$ при $\alpha\beta > 0$ и противоположны ему при $\alpha\beta < 0$. Следовательно, $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$, т. е. выполнено равенство (22.2).

Если $\alpha > 0$, то равенство (22.3) следует из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 (рис. 22.12, *а*), где $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{OA_1} = \alpha\mathbf{a}$, $\overline{OB_1} = \alpha\mathbf{b}$, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, или треугольников SOB, SO_1B_1 (рис. 22.12, *б*), где $\overline{SO_1} = \alpha\overline{SO}$, $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{AB} = \mathbf{b}$, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Случай $\alpha < 0$ рассматривается аналогично. При $\alpha = 0$ равенство (22.3) очевидно.

При $\alpha\beta > 0$ векторы в обеих частях равенства (22.4) имеют одинаковые направления. Так как $|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}| = |\alpha\mathbf{a}| + |\beta\mathbf{a}| = |\alpha|\,|\mathbf{a}| + |\beta|\,|\mathbf{a}| = (|\alpha| + |\beta|)\mathbf{a} = |\alpha + \beta|\,|\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|$, то они имеют также и равные длины. Следовательно, $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Если $\alpha\beta < 0$ и, например, $|\beta| > |\alpha|$, то $\alpha + \beta$ и $(-\alpha)$ имеют одинаковые знаки; на основании доказанного $(\alpha + \beta)\mathbf{a} + (-\alpha)\mathbf{a} = (\alpha + \beta - \alpha)\mathbf{a} = \beta\mathbf{a}$, т. е. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

В других случаях доказательство аналогично.

С помощью метода математической индукции можно доказать следующие равенства:

$$\alpha(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n) = \alpha\mathbf{a}_1 + \alpha\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha\mathbf{a}_n; \quad (22.5)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}_1 + \alpha\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha\mathbf{a}_n. \quad (22.6)$$

22.3. Условие коллинеарности двух векторов

Если $\mathbf{a}$ — некоторый ненулевой вектор и $\mathbf{a}_0$ — единичный вектор того же направления (рис. 22.13), то из определения произведения вектора на число следует равенство

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{a}_0, \quad (22.7)$$

т. е. любой вектор равен произведению его длины и единичного вектора того же направления. Умножая обе части равенства (22.7) на число $\alpha = 1/|\mathbf{a}|$ ($|\mathbf{a}| \neq 0$), получаем

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}; \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \quad (22.8)$$

Докажем, что необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается равенством

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}. \quad (22.9)$$

Действительно, если выполнено равенство (22.9), то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, что следует из определения произведения вектора $\mathbf{a}$ и числа α. Обратно, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то единичные векторы $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ одинаково

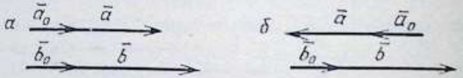


Рис. 22.13

направлены (рис. 22.13, *а*) или имеют противоположные направления (рис. 22.13, *б*), т. е. $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0$ или $\mathbf{a}_0 = -\mathbf{b}_0$. Эти равенства, с учетом формул (22.8), можно записать:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \quad \text{или} \quad \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = -\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

откуда $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, где $\alpha = |\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|$ или $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, где $\alpha = -|\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|$, т. е. выполняется равенство (22.9).

22.4. Проекция вектора на ось

Прямую, на которой зафиксировано положительное направление, называют *осью*.

Величиной направленного отрезка (вектора) оси u называют его длину, взятую с плюсом в случае, когда направление вектора совпадает с направлением оси u, и с минусом, если отрезок и ось имеют противоположные направления.

При любом расположении трех точек A, B, C на некоторой оси (рис. 22.14) величины AB, BC, AC направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ связаны соотношением

$$AB + BC = AC, \tag{22.10}$$

которое называется *основным тождеством*.

Рассмотрим вектор $\overline{AB}$ и ось u. Пусть A_1 — ортогональная проекция точки A на ось u, B_1 — проекция точки B, т. е. основания перпендикуляров, проведенных из данных точек к этой оси (рис. 22.15).

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось u называется величина направленного отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси u. Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось u обозначается $пр_u\overline{AB}$, т. е. $A_1B_1 = пр_u\overline{AB}$. Очевидно, что

$$пр_u\overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi, \tag{22.11}$$

где φ — угол между вектором $\overline{AB}$ и осью u.

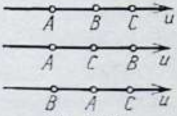


Рис. 22.14

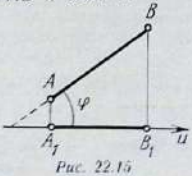


Рис. 22.15

Из равенства (22.11) следует, что если $\mathbf{b}=\mathbf{a}$, то

$$пр_u\mathbf{b}=пр_u\mathbf{a}, \tag{22.12}$$

т. е. равные векторы имеют равные проекции (на одну и ту же ось).

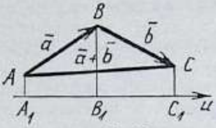


Рис. 22.16

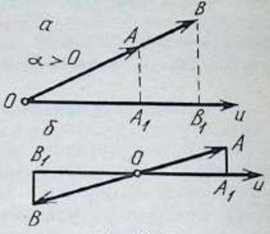


Рис. 22.17

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

$$пр_u(\mathbf{a}+\mathbf{b})=пр_u\mathbf{a}+пр_u\mathbf{b}; \tag{22.13}$$

$$пр_u(\alpha\mathbf{a})=\alpha пр_u\mathbf{a}. \tag{22.14}$$

▷ Пусть $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{BC}=\mathbf{b}$, $\overline{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, A_1, B_1, C_1 — проекции точек A, B, C на ось u (рис. 22.16). Основное тождество (22.10) для трех точек A_1, B_1, C_1 оси u имеет вид: $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$. Так как по определению $A_1B_1=пр_u\mathbf{a}$, $B_1C_1=пр_u\mathbf{b}$, $A_1C_1=пр_u(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, то, подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получаем формулу (22.13). Равенство (22.14) следует из подобия треугольников OAA_1 и OBB_1 (рис. 22.17, *а*, *б*). ◁

С помощью метода математической индукции можно доказать, что

$$пр_u(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n)=пр_u\mathbf{a}_1+пр_u\mathbf{a}_2+\ldots+пр_u\mathbf{a}_n. \tag{22.15}$$

Если $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ — произвольная система векторов; α_1, α_2, ..., α_n — произвольная система действительных чисел, то вектор

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n$$

называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$.

Из равенств (22.14) и (22.15) следует

$$пр_u(\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n)=\alpha_1пр_u\mathbf{a}_1+\alpha_2пр_u\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_nпр_u\mathbf{a}_n. \tag{22.16}$$

22.5. Декартовы координаты точки в пространстве

Прямоугольная декартова система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в одной точке

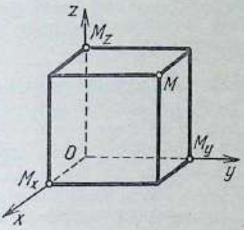


Рис. 22.18

взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в определенном порядке. Точка пересечения осей называется *началом координат*, а сами оси — *координатными осями*, причем первая из них — *осью абсцисс*, вторая — *осью ординат*, третья — *осью аппликат*. Обозначим начало координат O, координатные оси соответственно Ox, Oy, Oz (рис. 22.18).

Пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее три плоскости, перпендикулярные к координатным осям, и точки пересечения с осями обозначим соответственно M_x, M_y, M_z. *Декартовыми прямоугольными координатами точки* M называются числа x, y, z, определяемые по формулам

$$x = OM_x;\ y = OM_y;\ z = OM_z, \tag{22.17}$$

где OM_x, OM_y, OM_z — величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$ соответствующих координатных осей. Число x называется *первой координатой* или *абсциссой*, число y — *второй координатой* или *ординатой*, число z — *третьей координатой* или *аппликатой* точки M Запись $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x, y, z.

Замечание 1 Другими словами, координата x точки M равна длине отрезка OM_x, взятого с плюсом, если M_x принадлежит положительной полуоси Ox, и с минусом, если M принадлежит отрицательной полуоси Ox. Аналогично определяются координаты z и y.

Каждая пара координатных осей определяет плоскость, которую называют *координатной*. Координатные плоскости обозначают соответственно Oxy, Oxz, Oyz.

Замечание 2. Прямоугольные декартовы координаты точки M представляют собой расстояния этой точки до соответствующих координатных плоскостей, взятые с надлежащими знаками (абсцисса x — расстояние до плоскости Oyz, взятое с плюсом, если M — впереди плоскости Oyz, с минусом, если M — сзади плоскости Oyz, когда положительные направления оси Ox и взаимное расположение осей выбраны так, как показано на рис. 22.18).

Из определения декартовых координат следует, что $x=0$ для точек, лежащих в плоскости Oyz; $y=0$ для точек, лежащих в плоскости Oxz; $z=0$ для точек, лежащих в плоскости Oxy. Точки оси Ox характеризуются равенствами $y=0$, $z=0$; точки оси Oy — равенствами $x=0$, $z=0$; точки оси Oz — равенствами $x=0$, $y=0$. Начало координат имеет все нулевые координаты: $x=y=z=0$.

22.6. Декартовы координаты вектора

Рассмотрим в пространстве прямоугольную декартову систему координат. *Радиусом-вектором* точки M называется вектор

$$\mathbf{r}=\overline{OM}, \tag{22.18}$$

точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M (рис. 22.19).

Декартовыми прямоугольными координатами вектора $\mathbf{r}$ называются числа X, Y, Z, определяемые по формулам:

$$X=np_x\mathbf{r};\ Y=np_y\mathbf{r};\ Z=np_z\mathbf{r}. \tag{22.19}$$

Итак, декартовы координаты вектора — его проекции на оси координат. Каждая из записей

$$\mathbf{r}(X,\ Y,\ Z);\ \mathbf{r}=(X,\ Y,\ Z);\ \mathbf{r}=\{X,\ Y,\ Z\} \tag{22.20}$$

означает, что вектор $\mathbf{r}$ имеет координаты X, Y, Z.

Если x, y, z — декартовы координаты точки M, то

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z, \tag{22.21}$$

т. е. координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$ равны координатам точки M. Это следует из определения декартовых координат вектора $\mathbf{r} = \overline{OM}$ и декартовых координат точки M. В самом деле, пусть A, B, C — проекции точки M соответственно на оси Ox, Oy, Oz. Тогда $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$ (согласно формулам (22.17)) $X = np_x\mathbf{r} = OA$, $Y = np_y\mathbf{r} = OB$, $Z = np_z\mathbf{r} = OC$ (согласно формулам (22.19)). Из этих равенств следуют равенства (22.21).

Введем в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ координатных осей (их называют *ортами*) и векторы

$$\overline{OA} = X\mathbf{i};\ \overline{OB} = Y\mathbf{j};\ \overline{OC} = Z\mathbf{k}, \qquad (22.22)$$

где A, B, C — проекции точки M на координатные оси (рис. 22.19). По определению суммы векторов $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AN} + \overline{NM} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$. С учетом формул (22.18), (22.22) это равенство принимает вид

$$\mathbf{r} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \qquad (22.23)$$

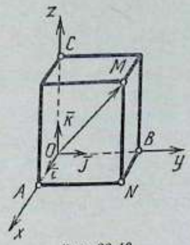


Рис 22.19

Формула (22.23) выражает *разложение вектора* $\mathbf{r}$ *по базисным векторам* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Векторы в правой части формулы (22.23) называют *составляющими* или *компонентами вектора* $\mathbf{r}$.

Таким образом, если известны координаты вектора (22.20), то можно записать его разложение (22.23) по базисным векторам и обратно.

Из равенства (22.12) следует, что равные векторы имеют равные одноименные координаты, поэтому координаты вектора не зависят от точки его приложения.

Декартовыми координатами x, y, z любого вектора $\mathbf{a}$ называются его проекции на координатные оси:

$$X = np_x\mathbf{a};\ Y = np_y\mathbf{a};\ Z = np_z\mathbf{a}.$$

22.7. Переход от векторных соотношений к координатным

Во многих случаях бывает необходимым переход от векторных соотношений к координатным. Если даны векторы и указаны определенные соотношения между ними, то они равносильны аналогичным числовым соотношениям между координатами.

1. Координаты произведения вектора на число. Пусть даны вектор $\mathbf{a}=(X,\ Y,\ Z)$ и число $\alpha \neq 0$. Найти координаты вектора $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$.

На основании определений (см. формулы (22.1), (22.19) и свойств проекций (см. 22.14)) заключаем, что искомые координаты $X_2,\ Y_2,\ Z_2$ вектора $\mathbf{b}$ выражаются формулами:

$$X_2=\alpha X_1;\ Y_2=\alpha Y_1;\ Z_2=\alpha Z_1, \tag{22.24}$$

так как $X_2=np_x\mathbf{b}=np_x(\alpha\mathbf{a})=\alpha np_x\mathbf{a}=\alpha X_1;\ Y_2=np_y\mathbf{b}=\alpha Y_1;\ Z_2=np_z\mathbf{b}$.

Следовательно, координаты произведения вектора $\mathbf{a}$ и числа α равны произведению координат данного вектора и этого числа.

Равенства (22.24) выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\mathbf{a}=(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ и $\mathbf{b}=(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$, которое в векторной форме записывается: $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ (см. 22.9). Если ни одно из чисел $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ не равно нулю, то равенство (22.24) можно записать в виде

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Итак, векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их координаты.

2. Координаты суммы и разности двух векторов. Пусть даны два вектора: $\mathbf{a}=(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$, $\mathbf{b}=(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$. Согласно формулам (22.13) и (22.19), получаем координаты $X,\ Y,\ Z$ суммы этих векторов:

$$X=X_1+X_2;\ Y=Y_1+Y_2;\ Z=Z_1+Z_2. \tag{22.25}$$

Итак, координаты суммы векторов равны суммам их одноименных координат.

Поскольку $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ и $-\mathbf{b}=(-X_2,\ -Y_2,\ -Z_2)$, то, согласно выражению (22.25), имеем:

$$X'=X_1-X_2;\ Y'=Y_1-Y_2;\ Z'=Z_1-Z_2, \tag{22.26}$$

где $X',\ Y',\ Z'$ — координаты вектора $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

3. Координаты вектора, заданного двумя точками. Начало вектора $\overline{M_1M_2}$ находится в точке $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, конец — в точке $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Найдем выражения для его координат через координаты точек M_1 и M_2. Рассмотрим радиусы-векторы точек M_1 и M_2, т. е. $\mathbf{r}_1=\overline{OM_1}$, $\mathbf{r}_2=\overline{OM_2}$ (рис. 22.20). Тогда $\overline{M_1M_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$

Согласно равенству (22.21), $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. По формулам (22.26) получаем координаты вектора M_1M_2:

$$X = x_2 - x_1;\ Y = y_2 - y_1;\ Z = z_2 - z_1. \qquad (22.27)$$

Итак, чтобы получить координаты вектора, необходимо из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.

4. Координаты линейной комбинации векторов. Заданы n векторов $\mathbf{a}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, ..., $\mathbf{a}_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ и их линейная комбинация

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n;\ \mathbf{a} = (X, Y, Z).$$

Учитывая формулы (22.16) и (22.19) делаем вывод, что

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n; \\ Y &= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \dots + \alpha_n Y_n; \\ Z &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \dots + \alpha_n Z_n. \end{aligned}\right\} \qquad (22.28)$$

5. Деление отрезка в данном отношении. Даны две точки в пространстве $M_1(x_1, y_2, z_2)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Проведем через эти точки прямую и отметим любую ее точку M, отличную от M_2.

Отношением, в котором точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, называется число λ, определяемое формулой

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}, \qquad (22.29)$$

где M_1M, MM_2 — величины направленных отрезков $\overline{M_1M}$, $\overline{MM_2}$.

Найдем координаты точки $M(x, y, z)$. Рассмотрим радиусы-векторы точек M_1, M, M_2, т. е. векторы $\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1}$, $\mathbf{r} = \overline{OM}$, $\mathbf{r}_2 = \overline{OM_2}$ (см. рис. 22.20). Из формулы (22.29) следует, что $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$. Так как $\mathbf{r}_1 + \overline{M_1M} = \mathbf{r}$, $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$, $\overline{MM_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$, т. е. $\overline{M_1M} = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$, то $\mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) = \mathbf{r}$ или $\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2 = (1 + \lambda)\mathbf{r}$, откуда

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}.$$

Так как координаты линейной комбинации векторов равны таким же линейным комбинациям их координат (см. формулы (22.28)), то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (22.30)$$

В частности, координаты середины отрезка M_1M_2 определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (22.31)$$

6. Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном пе-

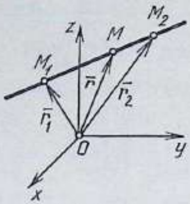


Рис. 22.20

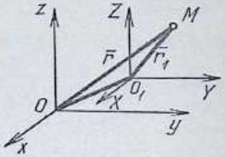


Рис. 22.21

реносе. Рассмотрим две декартовы прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабным отрезком и одинаковыми направлениями координатных осей (рис. 22.21). Начало другой системы находится в точке $O_1(a,\ b,\ c)$. Переход от первой системы $Oxyz$ ко второй O_1XYZ называют *параллельным переносом*. Пусть M — произвольная точка пространства $(x,\ y,\ z)$ — ее координаты в старой системе $Oxyz$, $(X,\ Y,\ Z)$ — координаты в новой системе O_1XYZ, $\mathbf{r}=\overline{OM}$, $\mathbf{r}_1=\overline{O_1M}$ — ее радиусы-векторы. Так как $\mathbf{r}=\underline{OO_1+\mathbf{r}_1}$ или $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\overline{OO_1}$ и $\mathbf{r}=(x,\ y,\ z)$, $\mathbf{r}_1=(X,\ Y,\ Z)$, $\overline{OO_1}=(a,\ b,\ c)$, то

$$x=X+a;\ y=Y+b;\ z=Z+c. \qquad (22.32)$$

Отсюда следует, что

$$X=x-a;\ Y=y-b;\ Z=z-c.$$

22.8. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению их длин и косинуса угла между ними. Если обозначить скалярное произведение $\mathbf{ab}$, то

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \varphi. \qquad (22.33)$$

Так как $|\mathbf{b}| \cos \varphi = пр_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ и $|\mathbf{a}| \cos \varphi = пр_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ (рис. 22.22), то равенство (22.33) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\, пр_{\mathbf{a}} \mathbf{b}; \qquad (22.34)$$
$$\mathbf{ab} = |\mathbf{b}|\, пр_{\mathbf{b}} \mathbf{a}. \qquad (22.35)$$

Понятие скалярного произведения впервые возникло в механике. Если вектор $\mathbf{a}$ изображает силу, точка при-

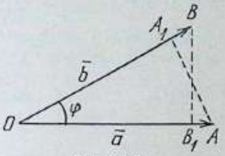


Рис. 22.22

ложения которой перемещается из начала в конец вектора $\mathbf{b}$, то работа w указанной силы определяется равенством $w = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \varphi$.

Скалярным квадратом вектора $\mathbf{a}$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ на себя:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2; \ \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2. \qquad (22.36)$$

Итак, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, поэтому $\mathbf{a}^2 > 0$, если $|\mathbf{a}| \neq 0$, $\mathbf{a}^2 = 0$, если $|\mathbf{a}| = 0$.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается равенством

$$\mathbf{ab} = 0. \qquad (22.37)$$

Действительно, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, то $\varphi = 90°$, $\cos \varphi = 0$; следовательно, $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \varphi = 0$, т. е. выполнено равенство (22.37). Обратное также верно: когда $\mathbf{ab} = 0$ и $|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$, то $\cos \varphi = 0$, $\varphi = 90°$; векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) переместительности (коммутативности)

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}; \qquad (22.38)$$

2) сочетательности (ассоциативности) относительно числового множителя

$$(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}\mathbf{b}; \tag{22.39}$$

3) распределительности (дистрибутивности) относительно суммы векторов

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}. \tag{22.40}$$

Докажем эти формулы. Формула (22.38) следует из формулы (22.33). Применяя формулы (22.35) и (22.14), получаем (22.39):

$$(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\ np_{\mathbf{b}}(\alpha\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\ \alpha np_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \alpha\,|\mathbf{b}|\ np_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a}\mathbf{b}).$$

Аналогично доказывается формула (22.40), при этом используются формулы (22.34) и (22.13):

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,np_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,(np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + np_{\mathbf{a}}\mathbf{c}) = \\ = |\mathbf{a}|\,np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + |\mathbf{a}|\,np_{\mathbf{a}}\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}.$$

Из формул (22.39) и (22.40) следует:

$$(\alpha\mathbf{a})(\beta\mathbf{b}) = (\alpha\beta)(\mathbf{a}\mathbf{b}). \tag{22.41}$$

Докажем, что скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} = (X_1,\ Y_1,\ Z_1);\ \mathbf{b} = (X_2,\ Y_2,\ Z_2) \tag{22.42}$$

выражается формулой

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{22.43}$$

$\triangleright$ С помощью формул (22.36) и (22.37) получаем «таблицу» скалярного умножения базисных векторов:

$$\begin{matrix} \mathbf{i}^2 = 1; & \mathbf{i}\mathbf{j} = 0; & \mathbf{i}\mathbf{k} = 0; \\ \mathbf{j}\mathbf{i} = 0; & \mathbf{j}^2 = 1; & \mathbf{j}\mathbf{k} = 0; \\ \mathbf{k}\mathbf{i} = 0; & \mathbf{k}\mathbf{j} = 0; & \mathbf{k}^2 = 1. \end{matrix} \tag{22.44}$$

Воспользуемся разложениями векторов (22.42) по базисным векторам (см. формулу (22.23)):

$$\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k};\ \mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}.$$

Учитывая формулы (22.38) — (22.41) и таблицу (22.44), находим

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = (X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k})(X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}) = X_1X_2\mathbf{i}^2 + X_1Y_2\mathbf{i}\mathbf{j} + \\ + X_1Z_2\mathbf{i}\mathbf{k} + Y_2X_2\mathbf{j}\mathbf{i} + Y_1Y_2\mathbf{j}^2 + Y_1Z_2\mathbf{j}\mathbf{k} + Z_1X_2\mathbf{k}\mathbf{i} + Z_1Y_2\mathbf{k}\mathbf{j} + \\ + Z_1Z_2\mathbf{k}^2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.\ \triangleleft$$

Итак, скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.

22.9. Длина вектора. Направляющие косинусы вектора. Расстояние между двумя точками в пространстве

Если $\mathbf{b}=\mathbf{a}$, то формула (22.43) принимает вид $\mathbf{aa}=\mathbf{a}^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$. Поскольку $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2$, то

$$|\mathbf{a}|^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2;\ |\mathbf{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}, \quad (22.45)$$

т. е. длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Направляющими косинусами вектора называются косинусы углов α, β, γ, образуемых им с координатными осями. Учитывая формулу (22.11), для вектора $\mathbf{r}=(X, Y, Z)$ получаем

$$X=|\mathbf{r}|\cos\alpha;\ Y=|\mathbf{r}|\cos\beta;\ Z=|\mathbf{r}|\cos\gamma. \quad (22.46)$$

Поскольку $|\mathbf{r}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, то

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\ \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$
$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

откуда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Из формул (22.46) следует, что координаты единичного вектора $\mathbf{e}$ равны его направляющим косинусам, т. е. $\mathbf{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Пусть даны две точки пространства $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Согласно формулам (22.27), получаем вектор $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$. По формуле (22.45) находим длину этого вектора:

$$|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (22.47)$$

По этой формуле определяется расстояние между точками M_1 и M_2.

22.10. Уравнение плоскости

Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к заданному ненулевому вектору $\mathbf{n}=(A, B, C)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ этой плоскости (рис. 22.23). Вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{n}=(A, B, C)$, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\mathbf{n}\overline{M_0M}=0$. Используя выражение скалярного произведения в координатах (см. формулу (22.43)), получаем искомое уравнение:

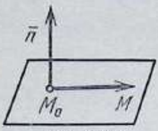


Рис. 22.23

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (22.48).$$

Отметим, что это уравнение первой степени относительно декартовых координат x, y, z; коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного к данной плоскости (этот вектор называют *нормальным вектором плоскости*).

Докажем, что любое уравнение первой степени относительно декартовых координат

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (22.49)$$

определяет плоскость. Пусть (x_0, y_0, z_0) — решение уравнения (22.49): $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. Вычитая это равенство из уравнения (22.49), получаем

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Это уравнение определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{n}=(A, B, C)$. Значит, уравнение (22.49) также определяет плоскость.

22.11. Уравнения прямой в пространстве

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$; такой вектор называют *направляющим вектором прямой*. Отложим из точки M_0 вектор $\overline{M_0A}=\mathbf{a}$ (рис. 22.24). Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка данной прямой, $\mathbf{r}=\overline{OM}$ — ее радиус-вектор, $\mathbf{r}_0=\overline{OM_0}$ — радиус-вектор точки M_0. По определению суммы векторов $\overline{OM}=\overline{OM_0}+\overline{M_0M}$. Так как векторы $\overline{M_0M}$ и $\mathbf{a}$

коллинеарны, то $\overline{M_0M} = \mathbf{a}t$, где t — некоторое число (см. формулу (22.9)). Следовательно, равенство $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$ принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \tag{22.50}$$

Уравнение (22.50) называется *векторно-параметрическим уравнением прямой* (t — параметр, для каждой точки

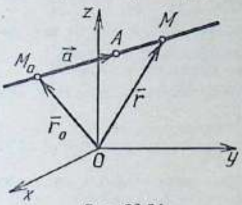


Рис. 22.24

прямой принимает определенное значение). Заметив, что $\mathbf{r} = OM = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \overline{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, от векторного соотношения перейдем к координатным соотношениям

$$x = x_0 + a_1t;\ y = y_0 + a_2t;\ z = z_0 + a_3t. \tag{22.51}$$

Уравнения (22.51) называются *параметрическими уравнениями прямой*. Каждое из этих уравнений разрешим относительно t:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = t; \quad \frac{y - y_0}{a_2} = t; \quad \frac{z - z_0}{a_3} = t.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{22.52}$$

Уравнения (22.52) называются *каноническими уравнениями прямой*.

Составим уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой возьмем вектор $\mathbf{a} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тогда в соответствии с формулой (22.52) искомые уравнения примут вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Упражнения

1. Дана точка M пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и векторы $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$. Как выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$?

2. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин M_1, M_2, M_3 параллелограмма $M_1M_2M_3M_4$. Найдите радиус-вектор четвертой вершины M_4.

3. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$. Найдите $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

4. Дан прямоугольник $ABCD$. Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{DB}$ укажите коллинеарные и равные.

5. Начало вектора находится в точке $M(4, -3{,}5)$, конец — в точке $N(6, -2{,}3)$. Найдите координаты вектора $\overline{MN}$, его длину и направляющие косинусы.

6. Дан треугольник с вершинами $A(7, 5, -4)$, $B(4, 9, 1)$, $C(6, -3, -7)$. Вычислите длину медианы, проведенной из вершины A и периметр треугольника.

7. Проверьте, что четырехугольник с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, 1)$, $C(7, 1, 1)$, $D(4, -2, 1)$ является квадратом.

8. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 1, 3)$, $B(0, 3, 4)$, $C(1, 5, 3)$. Вычислите длину биссектрисы внутреннего угла A.

9. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\varphi = \pi/3$; б) $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$; в) $\mathbf{a} = (1, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (5, 1, 2)$; г) $\mathbf{a} = (6, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 8, -3)$.

10. Найдите внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 7, 2)$, $B(5, -3, 3)$, $C(12, -1, -5)$.

11. Докажите формулы (22.5) и (22.6).

12. Докажите формулы (22.15) и (22.16).

13. Определите, при каком значении α векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны.

14. Вычислите работу, производимую силой $\mathbf{F} = (8, 4, -6)$ при перемещении ее точки приложения из начала в конец вектора $\mathbf{S} = (5, -3, 2)$.

15. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -6, 8)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n} = (2, 1, -2)$.

16. Три последовательные вершины параллелограмма находятся в точках $A(9, -3, 2)$, $B(4, -2, 8)$, $C(-7, -5, 6)$. Запишите уравнения прямых, на которых лежат его диагонали.

23. ДВУГРАННЫЕ, ТРЕХГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ. МНОГОГРАННИКИ

23.1. Двугранные и трехгранные углы

Многогранные углы — это углы, составленные из плоских углов. *Многогранником* называется тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называют *гранями многогранника.* Многогранник называют *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждой его грани. Рассмотрим простейшие многогранники — призмы и пирамиды.

Две плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая c разбивает каждую из этих плоскостей на две

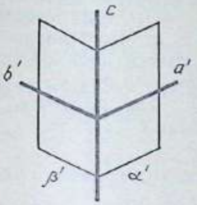


Рис 23.1

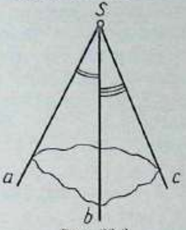


Рис. 23.2

полуплоскости. В каждой из плоскостей α и β зафиксируем по одной полуплоскости, обозначив их α' и β' (рис. 23.1) Фигура, образованная двумя полуплоскостями α' и β' с общей прямой c, называется *двугранным углом.* Полуплоскости α' и β' называют *гранями двугранного угла,* а прямую c их пересечения — *ребром двугранного угла.* Произвольная плоскость γ, перпендикулярная к прямой c, пересекает полуплоскости α' и β' по некоторым полупрямым a' и b'. *Плоским углом* данного двугранного угла называется угол, образованный указанными полупрямыми a' и b'. В качестве меры двугранного угла принимают меру соответствующего ему плоского угла. Мера двугранного угла не зависит от выбора соответствующего плоского угла, так как все плоские углы двугранного угла равны. Двугранный угол может иметь любое значение от 0 до 180°.

Углом между плоскостями α и β называют меньший из двух неравных между собой двугранных углов, образуемых полуплоскостями этих плоскостей. Угол между плоскостями всегда не больше 90°. Если двугранный угол меньше или равен 90°, то угол между плоскостями, в которых лежат грани двугранного угла, равен величине двугранного угла. В противном случае угол между плоскостями дополняет двугранный угол до 180°

Рассмотрим три полупрямые a, b, c, исходящие из одной точки S, не лежащие в одной плоскости (рис. 23.2).

Эти полупрямые образуют три угла: (ab), (bc), (ac). *Трехгранным углом* называется фигура, составленная из этих трех углов и частей плоскостей, заключенных между каждой парой полупрямых. При этом точку S называют *вершиной трехгранного угла*, полупрямые a, b, c называют *ребрами*, а сами плоские углы и части плоскостей, ограниченных их сторонами, называют *гранями*. Полуплоскости углов (ab) и (ac) пересекаются по прямой, содержащей полупрямую a. Полуплоскости этих плоскостей, содержащие полупрямые b и c, образуют двугранный угол. Этот угол называется *двугранным углом трехгранного угла* при ребре a; его называют также двугранным углом, противолежащим плоскому углу (bc).

23.2. Теорема косинусов для трехгранного угла

Теоремой косинусов для трехгранного угла называют следующую теорему.

Теорема 23.1. *Если α, β, γ — плоские углы трехгранного угла и C — двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ, то* $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C$.

▷ Рассмотрим трехгранный угол, у которого S — вершина, a, b, c — ребра, α, β, γ — плоские углы, образованные ребрами b и c, c и a, a и b соответственно, C — двугранный угол при ребре c, т. е. двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ (рис. 23.3). На ребрах a и b отложим отрезки SA и SB единичной длины. Для треугольника ASB по теореме косинусов имеем: $AB^2 = 1 + 1 - 2\cos\gamma$. Вычислим длину отрезка AB другим способом, для чего через точки A и B проведем плоскости, перпендикулярные к ребру c. Эти плоскости пересекут ребро c (или его продолжение) в некоторых точках A_1, B_1. Пусть B_2 —

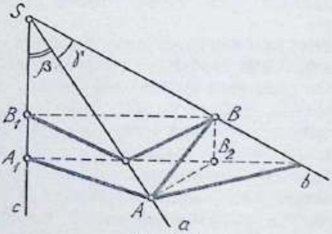


Рис. 23.3

основание перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость, проведенную через точку A. Применяя теорему косинусов к треугольнику AA_1B_2, получаем

$$AB_2^2=AA_1^2+A_1B_2^2-2AA_1\cdot A_1B_2\cos C.$$

Так как $AA_1=\sin\beta$ (получено из $\triangle ASA_1$, у которого $SA=1$), $A_1B_2=BB_1=\sin\alpha$ (получено из $\triangle BSB_1$, $SB=1$), то

$$AB_2^2=\sin^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Из прямоугольного треугольника ABB_2 по теореме Пифагора $AB^2=AB_2^2+BB_2^2$. Поскольку $BB_2=A_1B_1=|SA_1-$ $-SB_1|=|\cos\alpha-\cos\beta|$, то

$$AB^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+(\cos\alpha-\cos\beta)^2-$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta\cos C;$$
$$AB^2=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Сравнивая это выражение с выражением $AB^2=2-2\cos\gamma$, находим

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C. \triangleleft \qquad (23.1)$$

Следствие. У трехгранного угла каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

$\triangleright$ Докажем, например, что $\gamma<\alpha+\beta$. Так как $\cos C>$ >-1, а $\sin\alpha$, $\sin\beta$ положительны, то из формулы (23.1) следует неравенство

$$\cos\gamma>\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\ \cos\gamma>\cos(\alpha+\beta).$$

Отсюда следует, что $\gamma<\alpha+\beta$, так как при возрастании угла от 0 до 180° косинус угла убывает. $\triangleleft$

23.3. Теорема синусов для трехгранного угла

Теоремой синусов для трехгранного угла называют теорему, приведенную ниже.

Теорема 23.2. *Если α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, A, B, C — противолежащие им двугранные углы, то*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}. \qquad (23.2)$$

$\triangleright$ На ребре c трехгранного угла отложим отрезок SC единичной длины (рис. 23.4). Из точки C проведем перпендикуляр CC_1 к плоскости угла (ab). Через точку C проведем плоскости, перпендикулярные к ребрам a и b, пересекающие эти ребра в некоторых точках A и B. Найдем длину перпендикуляра CC_1. Из прямоугольного треугольника SCB с прямым углом B имеем: $CB = SC \sin\alpha$ или $CB = \sin\alpha$ (ибо $SC = 1$). Из прямоугольного треугольника CBC_1 с прямым углом C_1 находим: $CC_1 = CB \sin B = \sin\alpha \sin B$. Найдем длину CC_1 другим способом. Рассмотрим треугольники ACS и CAC_1: $CC_1 = \sin\beta \sin A$. Сравнивая два выражения для CC_1, получаем $\sin\alpha \sin B = \sin\beta \sin A$, откуда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

Аналогично находим, что

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Из двух последних равенств следуют равенства (23.2). ◁

23.4. Многогранные углы

Рассмотрим полупрямые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, исходящие из точки S (рис. 23.5). Предполагаем, что никакие три последовательные полупрямые a_1, a_2, a_3; $a_2, a_3, a_4, \ldots$; a_n, a_1, a_2 не лежат в одной плоскости. Фигуру, составленную из плоских углов (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., $(a_n a_1)$, называют *многогранным углом* (рис. 23.5). Точку S называют *вершиной многогранного угла*, а полупрямые $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его *ребрами*. Многогранный угол называют *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости любого его плоского угла.

Теорема 23.3 *У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов меньше 360°.*

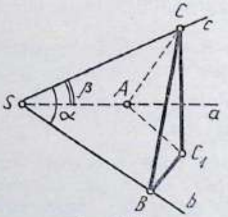


Рис. 23.4

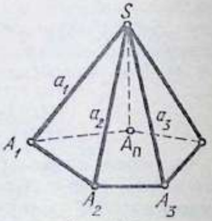


Рис. 23.5

▷ Проведем плоскость, пересекающую все ребра выпуклого многогранного угла в некоторых точках A_1, A_2, A_3, ..., A_n (рис. 23.5). Многоугольник P с вершинами A_1, A_2, ..., A_n является выпуклым (это следует из выпуклости данного многогранного угла). Рассмотрим многогранный угол с вершиной S и трехгранные углы с вершинами A_1, A_2, ..., A_n. Сумма всех их плоских углов состоит из суммы углов многоугольника P, которая равна $180°n - 360°$, и суммы углов n треугольников SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1, равной $180°\ n$. Значит, сумма всех плоских углов равна $2\ 180°\ n - 360°$. У каждого трехгранного угла с вершиной A_k ($k = 1, 2, ..., n$) угол, принадлежащий многоугольнику P, меньше суммы двух других углов (см. следствие из теоремы 23.1). Следовательно, найденная выше сумма всех плоских углов больше $(180°n - 360°)2 + \sigma$, где σ — сумма плоских углов при вершине S, т. е

$$(180°n - 360°)2 + \sigma < 2 \cdot 180°n - 360°.$$

Отсюда следует, что $\sigma < 360°$. ◁

23.5. Призма

Рассмотрим две параллельные плоскости α, α' и прямую p, пересекающую эти плоскости (рис. 23.6). В плоскости α дан выпуклый многоугольник P с вершинами A_1, A_2, A_3, ..., A_n (здесь и в дальнейшем имеются в виду пополненные многоугольники). Через каждую точку M многоугольника проведем прямую, параллельную прямой p и пересекающую плоскость α' в некоторой точке M'. Отрезки MM' заполняют многогранник, ограниченный многоугольником P и равным ему многоугольником P'

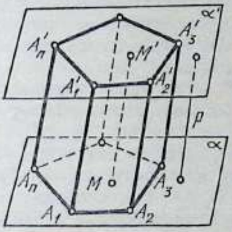


Рис. 23.6

с вершинами A_1', A_2', A_3', ..., A_n' в плоскости α', а также параллелограммами $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$, ..., $A_nA_n'A_1'A_1$. Этот многогранник называют *призмой*, многоугольники P и P' — его *основаниями*, а параллелограммы — *боковыми гранями*, отрезки A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n' — *боковыми ребрами призмы.*

Название происходит от греч. πρίσμα — отпиленный (кусок). Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны к основаниям; в противном случае она называется *наклонной*.

Площадью боковой поверхности призмы (или *боковой поверхностью*) называется сумма площадей ее граней. *Площадью полной поверхности призмы* (или полной поверхностью) называют сумму площади боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 23.4. *Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты призмы, т. е. длины бокового ребра.*

▷ Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер. Следовательно, боковая поверхность S призмы

$$S = a_1l + a_2l + \dots + a_nl = pl,$$

где $p = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — периметр основания призмы; l — длина бокового ребра. ◁

23.6. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой есть параллелограмм (рис. 23.7). Следовательно, у параллелепипеда все грани являются параллелограммами. *Диагональю параллелепипеда* называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани. У параллелепипеда четыре диагонали: A_1A_3', A_2A_4', A_3A_1', A_4A_2' (рис. 23.7).

Теорема 23.5. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.*

▷ Пусть $A_1'A_3$ и $A_4'A_2$ — две диагонали параллелепипеда (рис. 23.8). Четырехугольник $A_2A_3A_4'A_1'$ является параллелограммом, так как четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_4A_4'A_1'$ параллелограммы. Диагонали $A_1'A_3$ и $A_4'A_2$ параллелепипеда служат диагоналями параллелограмма

$A_2A_3A'_4A'_1$. Следовательно, эти диагонали пересекаются и точкой их пересечения делятся пополам. Аналогично доказывается, что диагонали A'_1A_3 и A'_3A_1, а также диагонали A'_1A_3 и $A_4A'_2$ пересекаются и точкой их пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. ◁

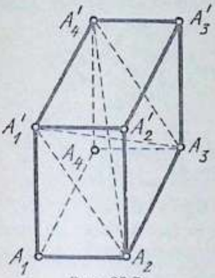


Рис. 23.7

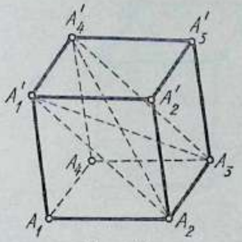


Рис. 23.8

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

Теорема 23.6. *У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.*

▷ Рассмотрим две противолежащие грани параллелепипеда, например $A_1A_2A'_2A'_1$ и $A_3A_4A'_4A'_3$ (рис. 23.8). Поскольку все грани параллелепипеда являются параллелограммами, то прямая A_1A_2 параллельна прямой A_3A_4, а прямая $A_1A'_1$ — прямой $A_4A'_4$. Следовательно, плоскости рассматриваемых граней параллельны. Далее, отрезки A_1A_4 и A'_1, A'_4, а также отрезки $A'_2A'_3$ и A_2A_3 параллельны и равны. Следовательно, посредством параллельного переноса вдоль ребра A_1A_4 грань $A_1A_2A'_2A'_1$ можно совместить с гранью $A_3A_4A'_4A'_3$, значит, эти грани равны. Аналогично доказывается параллельность и равенство любых двух противолежащих граней параллелепипеда. ◁

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник. Следовательно, все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами* или *измерениями*. У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера (измерения).

Теорема 23.7. *В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных размеров (измерений).*

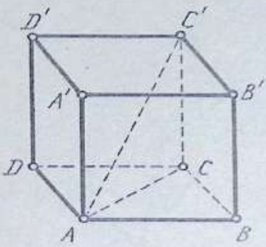


Рис. 23.9

▷ Рассмотрим прямоугольные треугольники ACC' и ABC (рис. 23.9). Согласно теореме Пифагора,

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2,$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

откуда

$$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + C'C^2;$$

так как ребра AB, BC и CC' не параллельны (их длины являются линейными размерами параллелепипеда). ◁

23.7. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, ограниченный выпуклым многоугольником и треугольниками с общей вершиной (рис. 23.10). Выпуклый многоугольник P с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют *основанием пирамиды*, треугольники $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_nA_1$ — ее *боковыми гранями*, отрезки $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ — *боковыми ребрами*, а точку S — *вершиной пирамиды*. Пирамида называется *n-угольной*, если основание P есть n-угольник. Треугольная пирамида называется *тетраэдром* (основанием ее является треугольник). *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр, проведенный из ее вершины S на плоскость α, в которой лежит основание.

Теорема 23.8. *Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.*

▷ Рассмотрим плоскость α', параллельную плоскости α основания пирамиды с вершиной S и пересекающую данную пирамиду (рис. 23.11). На основании пирамиды отметим две произвольные точки M и N. Плоскость α' пересекает лучи SM и SN в некоторых точках M' и N'. Прямые MN и $M'N'$ параллельны, поскольку они лежат в одной плоскости (плоскости треугольника SMN) и не пересекаются. Согласно известной теореме планиметрии, $SM'/SM = SN'/SN$, т. е. отношение $SM'/SM = k$ не зависит от точки M. Следовательно, отсекаемая плоскостью α пирамида получается из данной пирамиды преобразованием гомотетии относительно точки S с коэффициентом гомотетии k. Как известно, гомотетичные фигуры подобны. ◁

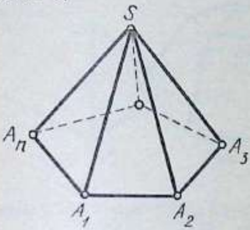


Рис. 23.10

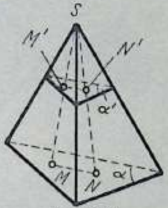


Рис. 23.11

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. У правильной пирамиды боковые ребра равны, а боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*. *Площадью боковой поверхности пирамиды (боковой поверхностью)* называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема 23.9. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания и апофемы.*

▷ Все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники с основанием, равным стороне основания пирамиды. Обозначим сторону основания a, апофему — l, число сторон — n. Тогда боковая поверхность S пирамиды выразится формулой $S = \frac{al}{2} n = \frac{an}{2} l = \frac{pl}{2}$, где $an = p$ — периметр основания. ◁

Согласно теореме 23.8, плоскость α', параллельная плоскости α основания пирамиды и пересекающая пирамиду, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая ее часть, также представляющая собой многогранник, называется *усеченной пирамидой* (рис. 23.12). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях α и α', называются *основаниями пирамиды*, остальные грани — *боковыми гранями*. Основаниями усеченной пирамиды являются подобные многоугольники, боковыми гранями — трапеции. Усеченная пирамида, полученная из правильной пирамиды, называется *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды

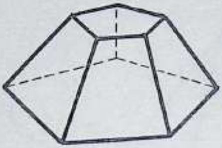


Рис. 23.12

представляют собой равные равнобочные трапеции, их высоты называют *апофемами*.

Теорема 23.10. *Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований и апофемы.*

▷ Если a — сторона нижнего основания, b — сторона верхнего основания, l — апофема, n — число сторон, то боковая поверхность S усеченной пирамиды

$$S = \frac{a+b}{2} ln = \frac{(a+b)n}{2} l = \frac{an+bn}{2} l = \frac{p_1+p_2}{2} l,$$

где $an = p_1$ — периметр нижнего основания; $bn = p_2$ — периметр верхнего основания. ◁

23.8. Правильные многогранники

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани — правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Грани правильного многогранника могут быть или равносторонними треугольниками, или квадратами, или правильными пятиугольниками. В самом деле, начиная с правильного шестиугольника, внутренние углы не меньше $120°$. Так как в каждой вершине многогранника сходится не меньше трех ребер, то у многогранного угла при вершине правильного многогранника сумма плоских углов была бы не меньше $3 \cdot 120° = 360°$. Последнее невозможно, поскольку сумма плоских углов любого выпуклого многогранного угла меньше 360° (см. теорему 23.3).

Если у правильного многогранника грани — правильные треугольники, то число ребер при вершине многогранника не превышает пяти. Действительно, при большем их числе сумма углов при вершине многогранника будет не меньше 360°, а это невозможно (согласно теореме 23.3).

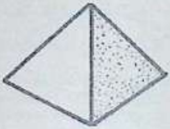


Рис. 23.13

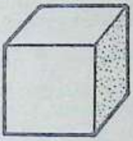


Рис. 23.14

Рис. 23.15

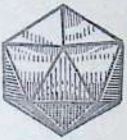


Рис. 23.16

Рис. 23.17

Итак, у правильного многогранника с треугольными гранями число ребер, сходящихся в вершине, может быть равно трем, четырем и пяти. Соответствующими многогранниками являются правильные *тетраэдр* (имеет 4 грани), *октаэдр* (имеет 8 граней) и *икосаэдр* (имеет 20 граней). У тетраэдра (рис. 23.13) в каждой вершине сходятся три ребра, у октаэдра — четыре (рис. 23.15), у икосаэдра — пять (рис. 23.16).

Если у правильного многогранника грани — квадраты, то число ребер, сходящихся в каждой вершине многогранника, равно трем. Соответствующий многогранник называется *кубом* или *гексаэдром* (рис. 23.14). Куб можно определить как прямоугольный параллелепипед, у которого равны все линейные размеры. Куб имеет шесть граней, восемь вершин, двенадцать ребер.

Если у правильного многогранника грани являются правильными пятиугольниками, то в каждой вершине сходится только три ребра. Соответствующий многогранник называется *додекаэдром* (рис. 23.17); он имеет 12 граней.

Отметим без доказательства, что у каждого правильного многогранника все двугранные углы равны.

Существование только пяти указанных типов правильных многогранников доказано греческим ученым Евклидом (III в. до н. э.).

Упражнения

1. Плоские углы трехгранного угла равны 60°. Найдите двугранные углы.

2. Сколько плоских углов, по 60° каждый, может иметь выпуклый многогранный угол?

3. Дан трехгранный угол, для которого α, β, γ — плоские, A, B, C — противолежащие им двугранные углы. Докажите, что $\sin\varphi = \sin\beta \sin A = \sin\alpha \sin B$, где φ — угол между ребром двугранного угла C и плоскостью угла γ.

4. В трехгранном угле два плоских угла равны α, а двугранный угол, заключенный между ними, равен φ. Найдите остальные углы.

5. Один двугранный угол трехгранного угла — прямой, а прилегающие к нему плоские углы равны α и β. Найдите остальные углы.

6. У трехгранного угла задан один плоский угол и два двугранных, прилегающих к этому плоскому, причем один из этих двугранных углов прямой. Найдите остальные углы.

7. Докажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

8. Докажите, что скрещивающиеся диагонали двух параллельных граней куба являются ребрами правильного тетраэдра.

9. Скрещивающиеся ребра тетраэдра равны. Докажите, что все грани тетраэдра равны.

10. Докажите, что центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра.

24. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

24.1. Цилиндр

Под *телом вращения* понимают фигуру, полученную при вращении некоторой линии вокруг прямой. Эта линия описывает соответствующую поверхность, ограничивающую тело вращения. Так, при вращении отрезка вокруг прямой, параллельной данному отрезку, получают цилиндр. Если отрезок пересекает прямую, то при вращении его вокруг этой прямой получается конус. При вращении полуокружности вокруг ее диаметра образуется сфера, ограничивающая шар. Цилиндр, конус, шар относятся к телам вращения.

Рассмотрим две параллельные плоскости α и α' и пересекающую их прямую a. Пусть k — произвольная окружность в плоскости α (рис. 24.1). Через произвольную точку M этой окружности проведем прямую, параллельную прямой a. Эта прямая пересечет плоскость α' в некоторой точке M'. Когда точка M описывает окружность k, точка M' в плоскости α' описывает равную ей окружность k'. Прямая MM' описывает поверхность, называемую *цилиндрической*. Круги, ограниченные окружностями k и k', обозначим теми же буквами K и K'.

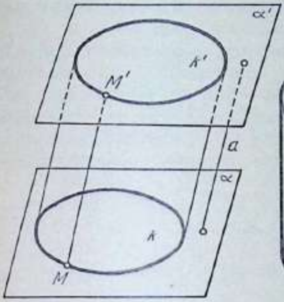


Рис. 24.1

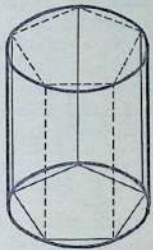


Рис. 24.2

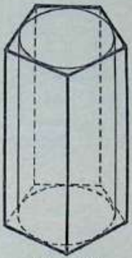


Рис. 24.3

Круговым цилиндром называется тело, ограниченное кругами K, K' и цилиндрической поверхностью. Часть цилиндрической поверхности, заключенная между плоскостями α и α', называется *боковой поверхностью цилиндра*. Круги K и K' называются *основаниями цилиндра*, отрезки MM' — *образующими цилиндра*.

Круговой цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны к основаниям. Прямой круговой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону. В дальнейшем рассматриваются только прямые круговые цилиндры, поэтому слова «прямой» и «круговой» опускаются.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центр его основания параллельно образующим. *Высотой цилиндра* называется отрезок оси между основаниями. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. *Касательной плоскостью цилиндра* называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно к осевому сечению, проведенному через эту образующую.

Теорема 24.1. Плоскость, перпендикулярная к оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

▷ Плоскость β, перпендикулярная к оси цилиндра, параллельна основаниям. Выполним параллельный перенос в направлении оси цилиндра, совмещающий плоскость β с плоскостью основания. При указанном параллельном переносе сечение боковой поверхности плоскостью β совмещается с окружностью основания. ◁

Призмой, вписанной в цилиндр, называется призма, плоскости оснований которой совпадают с плоскостями оснований цилиндра, а боковые ребра являются образующими цилиндра (рис. 24.2). Призма называется *описанной около цилиндра,* если плоскости ее оснований являются плоскостями оснований цилиндра, а грани касаются боковой поверхности (рис. 24.3).

24.2. Конус

Рассмотрим плоскость α и точку S вне ее. Пусть k — произвольный круг в плоскости α (рис. 24.4). На окружности, ограничивающей круг k, отметим произвольную точку M и проведем прямую SM. Когда точка M описывает указанную окружность, прямая SM описывает поверхность, которую называют *конической поверхностью.*

Круговой конус — это тело, ограниченное конической поверхностью и кругом k, лежащим в плоскости α. Круг k при этом называют *основанием конуса*, точку S — *вершиной.* Часть конической поверхности, заключенная между вершиной и основанием, называется *боковой поверхностью конуса.* Отрезки SM, соединяющие вершину с точками окружности основания, называются *образующими конуса.*

Круговой конус называется *прямым*, если ортогональная проекция его вершины на плоскость основания совпадает с центром основания. Прямая, проходящая через вершину конуса перпендикулярно к основанию, называется *осью прямого кругового конуса*, а ее отрезок между вершиной и основанием — его *высотой.* В дальнейшем рассматривается только прямой круговой конус, поэтому слова «прямой» и «круговой» будем опускать.

Конус можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым*. Плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно к осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью*.

Теорема 24.2. *Плоскость, перпендикулярная к оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.*

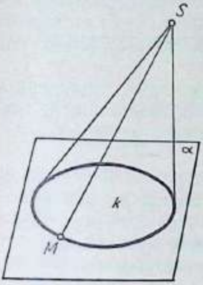


Рис. 24.4

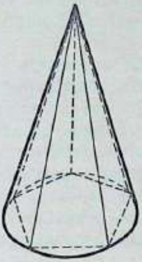


Рис. 24.5

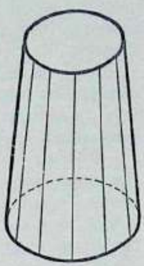


Рис. 24.6

▷ Рассмотрим плоскость β, перпендикулярную к оси конуса, пересекающую конус. Выполним преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания. Это преобразование совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Значит, сечение конуса плоскостью β есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса. ◁

Пирамидой, вписанной в конус, называется пирамида, вершина которой совпадает с вершиной конуса, а основанием является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса (рис. 24.5). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса. Пирамида называется *описанной около конуса*, если ее вершиной является вершина конуса, а основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса. Боковые грани описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса. *Усеченный конус* — это часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 24.6). Усеченный конус можно получить вращением равнобочной трапеции вокруг ее оси симметрии или вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, совпадающей с высотой.

24.3. Шар

Шаром называется тело, точками которого являются все точки пространства, которые удалены от данной точки C на расстояние, не большее R. Точка C называется *центром шара*, а положительное число R — его *радиусом*. Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*.

Шар можно рассматривать как тело, полученное вращением полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр полукруга. При этом вращении полуокружность описывает сферу — границу шара.

Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой шаровой поверхности, также называется *радиусом*. *Диаметр шара* — это отрезок, соединяющий две точки шара и проходящий через его центр. Концы любого диаметра являются диаметрально противоположными точками шара.

Теорема 24.3. *Всякое сечение шара плоскостью есть круг, центром которого является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара к секущей плоскости.*

▷ Рассмотрим шар с центром в точке C и секущую плоскость α (рис. 24.7). Из центра шара к плоскости α проведем перпендикуляр CC'. Пусть M — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. Из прямоугольного треугольника $CC'M$ по теореме Пифагора получаем $CM^2 = C'C^2 + C'M^2$. Так как $CM \leqslant R$, то $C'M \leqslant \sqrt{R^2 - C'C^2}$. Это значит, что любая точка M сечения шара плоскостью α находится на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - C'C^2}$ от точки C', т. е. принадлежат кругу с центром C', радиус которого $R' = \sqrt{R^2 - C'C^2}$. Обратно, любая точка M этого круга принадлежит шару. Следовательно, любое сечение шара плоскостью есть круг с центром в точке C', являющейся основанием перпендикуляра, проведенного из центра шара к секущей плоскости. ◁

Из формулы $R' = \sqrt{R^2 - C'C^2}$ видно, что круг в сечении плоскостью α будет тем больше, чем ближе плоскость α к центру шара, т. е. чем меньше CC'. Наибольший круг получается в сечении плоскостью, проходящей через центр шара. В этом случае $CC'=0$, поэтому $R'=R$, т. е. радиус этого круга равен радиусу шара. Плоскости, равноудаленные от центра шара, пересекают шар по равным кругам.

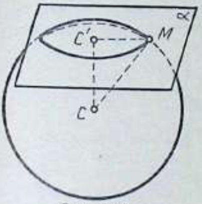


Рис. 24.7

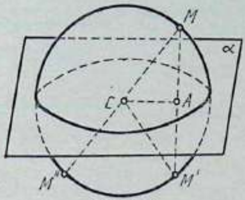


Рис. 24.8

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной*.

Теорема 24.4. *Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является центром симметрии.*

▷ Пусть M — произвольная точка шара и α — его диаметральная плоскость (рис. 24.8). Построим точку M', симметричную точке M относительно плоскости α. Отрезок MM' перпендикулярен к плоскости α и пересекает ее в некоторой точке A, причем $MA=AM'$. Из равенства прямоугольных треугольников CAM и CAM' следует, что $CM'=CM$. Поскольку $CM \leqslant R$, то $CM' \leqslant R$, т. е. точка M', симметричная точке M относительно плоскости α, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь M'' — точка, симметричная точке M относительно центра шара. В этом случае $CM''=CM$. Так как $CM \leqslant R$, то $CM'' \leqslant R$, т. е. точка M'' принадлежит шару. Второе утверждение теоремы также доказано. ◁

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется *большим кругом*.

Касательной плоскостью шара называют плоскость, проходящую через точку A шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведенному в точку касания. Точку A при этом называют *точкой касания*.

Теорема 24.5. *Касательная плоскость шара имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.*

▷ Рассмотрим плоскость α, касательную к шару, и точку A — точку касания (рис. 24.9). Пусть M — произвольная точка плоскости α, отличная от A. Поскольку CA — перпендикуляр, а CM — наклонная, то $CM > CA = R$, где R — радиус шара. Неравенство $CM > R$ означает, что M шару не принадлежит ◁

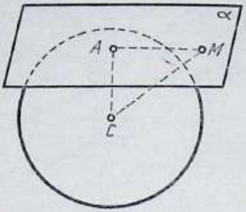


Рис. 24.9

Прямая, проходящая через точку A шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*.

Теорема 24.6. *Через любую точку A шаровой поверхности проходит бесконечное множество касательных; все они лежат в касательной плоскости шара.*

▷ Если плоскость α касается шара в точке A (рис. 24.9), то любая прямая в плоскости α, проходящая через точку A, перпендикулярна к радиусу CA, т. е. является касательной. Любая касательная, проходящая через точку A, перпендикулярна к радиусу CA и, следовательно, лежит в плоскости α. ◁

24.4. Уравнение сферы

Сферой называется множество точек пространства, равноудаленных от данной точки. Данную точку называют *центром сферы*, а расстояние, на которое удалены все точки сферы от центра,— *радиусом*.

Составим уравнение сферы в прямоугольных декартовых координатах x, y, z. Центр сферы находится в точке $C(a, b, c)$, а ее радиус равен R. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка данной сферы, тогда $CM = R$. Выражая расстояние между точками C и M с помощью формулы (22.47), получаем

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R,$$

откуда

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Это уравнение и является уравнением сферы радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$. Если центр сферы находится в начале координат, то $a=b=c=0$, и уравнение сферы принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Упражнения

1. Докажите, что плоскости, проходящие через ось цилиндра, являются его плоскостями симметрии.

2. Докажите, что середины параллельных отрезков с концами на боковой поверхности цилиндра лежат в плоскости, проходящей через ось цилиндра.

3. Докажите, что плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не имеет других общих точек с конусом, либо пересекает боковую поверхность по двум образующим, либо касается боковой поверхности.

4. Докажите, что середины параллельных отрезков с концами на боковой поверхности конуса лежат в плоскости, проходящей через вершину конуса.

5. Докажите, что геометрическое место оснований перпендикуляров, проведенных из данной точки A к плоскостям, проходящим через данную точку B, есть шаровая поверхность.

6. Докажите, что геометрическое место параллельных отрезков с концами на шаровой поверхности есть большой круг.

7. Докажите, что через любые две не диаметральные точки шаровой поверхности можно провести окружность большого круга, и притом только одну.

8. Докажите, что любые две окружности больших кругов шара пересекаются, и притом в двух диаметрально противоположных точках.

9. Докажите, что пересечение двух шаровых поверхностей есть окружность.

10. Составьте уравнение сферы, концы одного из диаметров которой находятся в точках $A(-1, -7, 5)$, $B(3, -5, 9)$.

25. ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

25.1. Понятие объема

Объем трехмерного тела — числовая характеристика тела, равная в простейшем случае, когда тело можно разбить на конечное множество единичных кубов (т. е. кубов с ребрами длины единицы), числу этих кубов.

Площадь поверхности в простейшем случае, когда поверхность ограничивает многогранник, определяется как сумма площадей плоских граней.

Рассмотрим два сосуда: один в форме куба, другой произвольной формы (рис. 25.1). Допустим, оба сосуда доверху наполнены одной и той же жидкостью, причем в первом сосуде оказалось a кг жидкости, а во втором — b кг жидкости. В этом случае естественно считать, что второй сосуд в b/a раз больше первого. Число, указывающее, во сколько раз второй сосуд больше первого, будем называть

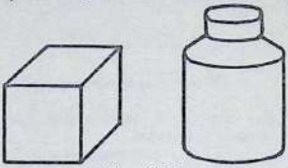


Рис. 25.1

объемом второго сосуда. Первый сосуд является единицей измерения. Из определения объема получаем следующие свойства. Каждый сосуд имеет определенный (положительный) объем, так как для заполнения любого сосуда требуется определенное количество жидкости. Равные сосуды имеют равные объемы, ибо для заполнения каждого из равных сосудов потребуется одно и то же количество жидкости. Объем всего сосуда равен сумме объемов его частей. Действительно, если сосуд разделить на несколько частей, то количество жидкости, необходимое для заполнения всего сосуда, равно количеству жидкости, необходимой для заполнения его частей.

Таким образом, *объем тела* — число, указывающее, во сколько раз это тело больше другого тела, принятого за единицу измерения. Объем куба с единичными линейными размерами принимается равным единице.

Простейшие свойства объема: 1) каждое тело имеет определенный (положительный) объем; 2) равные тела имеют равные объемы; 3) если тело разбито на части, то его объем равен сумме объемов его частей.

Тело называют простым, если его можно разбить на конечное число тетраэдров, т. е. треугольных пирамид. В частности, выпуклые многогранники являются простыми телами.

25.2. Объем параллелепипеда

Рассмотрим единичный куб (принятый за единицу измерения) и прямоугольный параллелепипед, объем которого необходимо измерить (рис. 25.2). Ребра куба, исходящие из одной вершины, разобьем на N частей, и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные к этим ребрам. Указанные плоскости разобьют куб на N^3 малых кубов (на рис. 25.2 $N=3$, $N^3=27$).

Определим объем малого куба. По свойству 3 объем большого куба равен сумме объемов малых кубов. По-

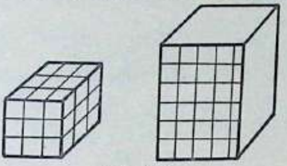


Рис. 25.2

скольку объем большого куба равен единице, и число малых кубов равно N^3, то объем малого куба $1/N^3$. Обозначим длину ребра малого куба q, тогда $q=1/N$, $q^3=1/N^3$.

На ребрах параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отложим отрезки, равные q, $2q$, $3q$, ..., и через их концы проведем плоскости, перпендикулярные к ребрам параллелепипеда. В результате получим множество кубов с ребрами, равными q, покрывающими параллелепипед. Найдем число кубов, содержащихся в параллелепипеде, и число кубов, содержащих параллелепипед.

Обозначим ребра данного параллелепипеда a, b, c. Пусть n — целое от деления a на q, m — целое от деления b на q, l — целое от деления c на q. Число кубов, содержащихся в параллелепипеде, будет lmn, а число кубов, содержащих параллелепипед, не больше $(l+1)(m+1)\times\times(n+1)$. Следовательно, объем параллелепипеда заключен между $lmnq^3$ и $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, т. е.

$$lmnq^3 \leqslant V < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Докажем, что произведение abc заключено между теми же числами, что и V. В самом деле, $nq \leqslant a < (n+1)q$, $mq \leqslant b < (m+1)q$, $lq \leqslant c < (l+1)q$, поэтому

$$lmnq^3 \leqslant abc < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Поскольку оба числа V и abc заключены между числами $lmnq^3$ и $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, то они отличаются не более чем на $(l+1)(m+1)(n+1)q^3 - lmnq^3 = lmq^3 +$

$+ mnq^3 + lnq^3 + lq^3 + mq^3 + nq^3 + q^3 < abq + bcq + acq + aq^2 + bq^2 + cq^2 + q^3$ (ибо $nq \leqslant a$, $mq \leqslant b$, $lq \leqslant c$). При достаточно малом $q = 1/N$ это число $(abq + bcq + acq + aq^2 + bq^2 + cq^2 + q^3)$ будет сколь угодно малым. Итак, числа V и abc отличаются как угодно мало, что может быть только тогда, когда они равны:

$$V = abc, \tag{25.1}$$

т. е. объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров.

Пусть a, b — стороны прямоугольника, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда, $c = H$ — его высота. Тогда формула (25.1) примет вид

$$V = SH, \tag{25.2}$$

т. е. объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания и высоты.

Докажем, что объем любого параллелепипеда вычисляется по формуле (25.2). Рассмотрим наклонный параллелепипед (рис. 25.3, *а*). Через его ребро BC проведем плоскость, перпендикулярную к основанию $ABCD$, и дополним параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$. От полученного тела отсечем треугольную призму плоскостью, проходящей через ребро AD перпендикулярно к основанию $ABCD$. В результате получим параллелепипед, объем которого равен объему исходного параллелепипеда. В самом деле, достроенная призма и отсекаемая имеют одинаковые объемы, так как они совмещаются параллельным переносом на отрезок AB. При указанном преобразовании параллелепипеда сохраняются площадь его основания и высота, а также плоскости двух боковых граней; две другие грани становятся

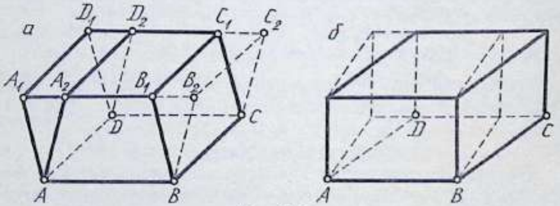


Рис. 25.3

перпендикулярными к основанию Применяя еще раз аналогичное преобразование получаем параллелепипед с боковыми гранями, перпендикулярными к основанию т е прямой параллелепипед Полученный параллелепипед подвергнем аналогичному преобразованию в прямоугольный параллелепипед, дополняя его призмой, а затем отсекая равную ей призму (рис 25 3, *б*) Это преобразование также сохраняет объем параллелепипеда, площадь основания и высоту Так как объем прямоугольного параллелепипеда определяется по формуле (25.2), то объем наклонного параллелепипеда также можно определить по этой формуле.

Следовательно, объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания и высоты.

25.3. Объем призмы

Сначала рассмотрим треугольную призму, дополнив ее до параллелепипеда, как указано на рис. 25.4. Поскольку точка O является центром симметрии параллелепипеда, то достроенная призма симметрична исходной относительно точки O. Следовательно, обе призмы имеют равные объемы, сумма которых равна объему построенного параллелепипеда, вычисляемому по формуле (25.2). Площадь основания параллелепипеда равна удвоенной площади треугольника, а высота — высоте исходной призмы. Отсюда следует, что объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Рассмотрим произвольную призму. Разобьем ее основание на треугольники, а саму призму — на треугольные призмы, как указано на рис. 25.5. Все эти треугольные призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте H исходной призмы.

Объем данной призмы равен сумме объемов всех

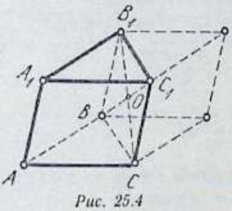


Рис. 25.4

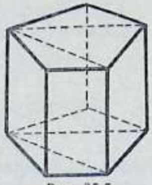


Рис. 25.5

составляющих ее треугольных призм. Учитывая доказанное выше, заключаем, что

$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H,$$

где S_1, S_2, ..., S_n — площади треугольников, на которые разбито основание призмы; H — высота призмы. Так как сумма площадей этих треугольников равна площади S основания призмы, то

$$V = SH,$$

т. е. объем любой призмы равен произведению площади ее основания и высоты.

25.4. Объем пирамиды

Найдем объем пирамиды с основанием S и высотой H. Воспользуемся формулой для вычисления объема тела

$$V = \int_a^b S(x)dx, \qquad (25.3)$$

где $S(x)$ — площадь его поперечного сечения (см. § 10.6).

За ось Ox примем прямую, проходящую через вершину O пирамиды перпендикулярно к ее основанию и направленную от вершины к основанию (рис. 25.6). Пусть $S(x)$ — площадь сечения пирамиды плоскостью, находящейся на расстоянии x от вершины. Поскольку площади параллельных сечений пирамиды относятся как квадраты их расстояний от вершины (см. § 20.4), то

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2},$$

откуда $S(x) = Sx^2/H^2$.

Подставляя это выражение в формулу (25.3), находим

$$V = \int_0^H \frac{Sx^2}{H^2}dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{S}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{S}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$$

Итак,

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

т. е. объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания и высоты.

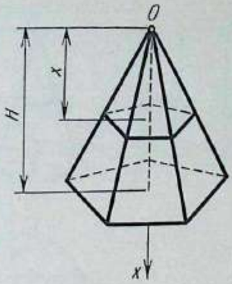


Рис. 25.6

25.5. Объем цилиндра. Объем конуса

Найдем объем цилиндра, радиус основания которого R, а высота H. В качестве оси Ox возьмем ось цилиндра, выбрав точку O, как указано на рис. 25.7. В данном случае $S(x)=\pi R^2$, поэтому по формуле (25.3)

$$V=\int_0^H \pi R^2 dx=\pi R^2\int_0^H dx=\pi R^2 x\Big|_0^H=\pi R^2 H.$$

Итак, объем цилиндра с радиусом основания R и высотой H

$$V=\pi R^2 H,$$

т. е. объем цилиндра равен произведению площади его основания и высоты.

Рассмотрим конус, радиус основания которого R, а высота H. За ось Ox выберем ось конуса, в качестве точки O будем рассматривать вершину конуса (рис. 25.8). Пусть $S(x)$ — площадь сечения конуса плоскостью, находящейся на расстоянии x от вершины. Тогда

$$\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2};\ S(x)=\frac{S}{H^2}x^2.$$

Подставляя это выражение в формулу (25.3), находим

$$V=\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{S}{H^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{S}{H^2}\,\frac{H^3}{3}=\frac{1}{3}SH.$$

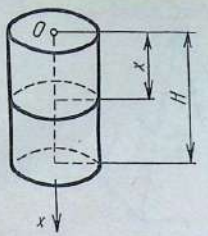


Рис 25.7

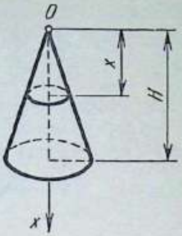


Рис 25.8

Итак, объем конуса равен одной трети произведения площади его основания и высоты. Поскольку площадь основания $S=\pi R^2$, то объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус его основания; H — высота.

25.6. Объем шара и его частей

Для вычисления объема шара воспользуемся формулой (см. § 10.6)

$$V=\pi\int_c^d x^2 dy. \tag{25.4}$$

Окружность с центром в начале координат радиуса R имеет уравнение $x^2+y^2=R^2$ (рис. 25.9). Вращая полуокружность этой окружности (криволинейную трапецию, для которой $x=\varphi(y)=\sqrt{R^2-y^2}$), получаем шар того же радиуса. Подставляя в формулу (25.4) выражение для x^2, $c=-R$, $d=R$, находим

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-y^2)dy=\pi R^2\int_{-R}^{R}dy-\pi\int_{-R}^{R}y^2dy=$$

$$=\pi R^2 y\Big|_{-R}^{R}-\pi\frac{y^3}{3}\Big|_{-R}^{R}=\pi R^2(R-(-R))-\frac{\pi}{3}(R^3-(-R)^3)=$$

$$=2\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Итак, объем шара

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{25.5}$$

Шаровым сегментом называется тело, отсекаемое плоскостью от шара (рис. 25.10) Высотой шарового сегмента называется отрезок AB диаметра, перпендикулярного к секущей плоскости.

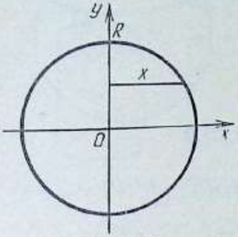


Рис. 25.9

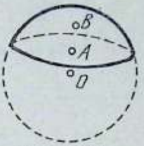


Рис. 25.10

Объем V_1 шарового сегмента можно вычислить по той же формуле (25.4). Если высота сегмента равна $H(H=AB)$, то пределы интегрирования будут $c=R-H$, $d=R$, поэтому

$$V_1=\pi\int\limits_{R-H}^{R}(R^2-y^2)dy=\pi R^2\int\limits_{R-H}^{R}dy-\pi\int\limits_{R-H}^{R}y^2dy=$$

$$=\pi R^2y\Big|_{R-H}^{R}-\pi\frac{y^3}{3}\Big|_{R-H}^{R}=\pi R^2(R-(R-H))-\frac{\pi}{3}(R^3-(R-$$

$$-H)^3)=\pi RH^2-\frac{\pi H^3}{3}.$$

Итак, объем шарового сегмента

$$V_1=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right), \tag{25.6}$$

где H — высота сегмента; R — радиус шара.

Шаровым сектором называется тело, полученное из шарового сегмента следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то он дополняется конусом, основание которого совпадает с основанием этого сегмента, а вершина находится в центре шара (рис. 25.11, *а*). Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется (рис. 25.11, *б*).

Объем шарового сектора получается в результате сложения или вычитания объемов соответствующего сегмента и конуса. Так как объем конуса

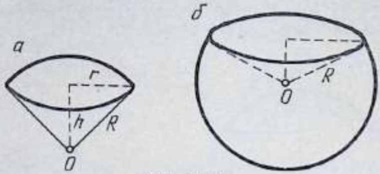


Рис. 25.11

$$V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R - H) =$$
$$= \frac{\pi}{3}(2R^2H - 3RH^2 + H^3), \qquad (25.7)$$

то объем V_2 шарового сектора в первом случае (рис. 25.11, *а*) определяется по формуле

$$V_2 = V_1 + V_к = \pi RH^2 - \frac{\pi H^3}{3} + \frac{\pi}{3}(2R^2H - 3H^2R + H^3),$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Итак, объем шарового сектора

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 H. \qquad (25.8)$$

Объем шарового сектора во втором случае определяется по формуле, аналогичной формуле (25.8) (рис. 25.11, *б*). Действительно $V_2 = V - V_1 - V_к$, где V, V_1, $V_к$ вычисляются соответственно по формулам (25.5), (25.6), (25.7). Учитывая эти формулы, находим

$$V_2 = V - V_1 - V_к = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi RH^2 + \frac{\pi H^3}{3} - \frac{\pi}{3}(2R^2H -$$
$$- 3RH^2 + H^3) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi R^2(2R - H) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^2 H_1.$$

Итак, $V_2=\frac{2}{3}\pi R^2 H_1$, где $H_1=2R-H$ — высота сегмента во втором случае (рис. 25.11, *б*).

25.7. Площади поверхностей тел

Рассмотрим цилиндр радиуса R и высотой H (рис. 25.12, *а*). Боковую поверхность его разрежем по

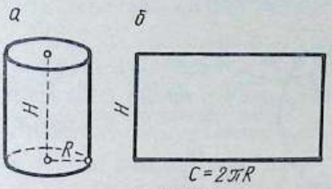


Рис. 25.12

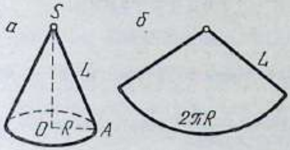


Рис. 25.13

образующей и развернем на плоскость (рис. 25.12, *б*). Получили прямоугольник, основание C которого равно длине окружности основания цилиндра, а высота H — высоте цилиндра. Площадь полученного прямоугольника выражается формулой $S=CH$ или $S=2\pi RH$. Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра

$$S=2\pi RH,$$

где R — радиус цилиндра, H — его высота.

Рассмотрим конус с радиусом основания R и образующей L (рис. 25.13, *а*). Боковую поверхность конуса разрежем по образующей и развернем на плоскость (рис. 25.13, *б*). Получили сектор круга радиусом L; дуга, ограничивающая сектор, равна длине окружности основания конуса. Площадь этого сектора $S=\frac{1}{2}CL=\frac{1}{2}2\pi RL=$

$=\pi RL$. Следовательно, площадь боковой поверхности конуса

$$S=\pi RL,$$

где R — радиус основания конуса; L — длина его образующей.

В заключение отметим, что площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S=4\pi R^2,$$

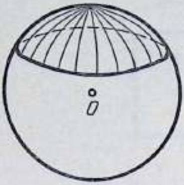


Рис. 25.14

а площадь сегментной поверхности (рис. 25.14) — по формуле

$$S=2\pi RH,$$

где H — высота шарового сегмента.

Упражнения

1. Найдите объем параллелепипеда, зная его ребра a, b, c, исходящие из одной вершины, и углы α, β, γ, образуемые этими ребрами.

2. Докажите, что плоскость, проходящая через ребро тетраэдра и делящая его противолежащее ребро в отношении m/n, делит объем тетраэдра в том же отношении.

3. Докажите, что боковая поверхность пирамиды с площадью основания S и двугранными углами при основании α равна $S/\cos\alpha$.

4. Докажите, что боковая поверхность конуса равна $S/\cos\alpha$, где S — площадь основания конуса, а α — угол между основанием и образующими.

5. Докажите, что площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды вычисляется по формуле $S=(P+p)h/2$, где P, p — периметры оснований; h — апофема.

6. Докажите, что объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле $V=(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)H/3$, где H — высота усеченной пирамиды; S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды.

7. Докажите, что площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле $S=\pi(R_1+R_2)L$, где L — образующая усеченного конуса; R_1 и R_2 — радиусы верхнего и нижнего оснований.

8. Докажите, что объем усеченного конуса вычисляется по формуле $V=\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)/3$, где H — высота; R_1 и R_2 — радиусы оснований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОМБИНАТОРИКА

1. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ПЕРЕСТАНОВКИ

Среди разнообразных задач рассматриваются и такие, в которых приходится иметь дело с некоторыми конечными множествами и различными их подмножествами, а также с подсчетом числа всех возможных подмножеств, или числа подмножеств, содержащих определенное количество элементов с учетом их расположения.

Такие задачи относятся к разделу математики, который называют *комбинаторикой*.

Приведем примеры комбинаторных задач.

1. В классе m мест. Каким числом способов можно рассадить в классе m учеников?

2. Сколькими способами можно выбрать четыре человека на четыре различные должности из девяти кандидатов на эти должности?

3. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

Если каждому элементу множества каким-то образом присвоен свой порядковый номер (какой-то элемент получил номер 1, какой-то — номер 2 и т. д.), благодаря чему в этом множестве установлен определенный порядок следования элементов, то говорят, что множество упорядочено. Одно и то же конечное множество можно упорядочить различными способами. Например, множество учащихся данного класса можно упорядочить (расположить, занумеровать) по росту, по весу, по алфавиту (если нет однофамильцев) и т. д.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, но упорядоченные по-разному, называют различными упорядочениями некоторого множества. Упорядоченные множества считают совпадающими (равными), если они не только состоят из одних и тех же элементов, но и одинаково упорядочены.

Например, a, b и b, a различные упорядочения, а a, b и a, b совпадающие упорядочения множества, состоящего из элементов a и b.

Множество из одного элемента можно упорядочить одним-единственным образом. Условимся считать, что пустое множество можно упорядочить одним-единственным способом.

Различные упорядочения данного конечного множества, содержащего m элементов, называют *перестановками из m элементов*.

Из определения следует, что две различные перестановки из m элементов отличаются одна от другой только порядком расположения элементов и не отличаются самими элементами.

Таким образом, установленный в конечном множестве порядок называют перестановкой его элементов. Число различных перестановок из m элементов обозначают символом P_m. Очевидно, что $P_1 = 1$, т. е. множество из одного элемента образует одну перестановку (место одного элемента всегда можно считать первым).

Покажем, что число перестановок P_m из m элементов определяется формулой

$$P_m = m \cdot P_{m-1}. \qquad (1)$$

▷ Для доказательства формулы (1) из m данных элементов выделим один какой-нибудь элемент, а из всех остальных $m-1$ элементов составим все возможные перестановки. Их число будет P_{m-1}. Перед каждой из составленных перестановок поставим выделенный элемент, в результате получим все возможные перестановки, которые начинаются этим элементом. Следовательно, число всех возможных перестановок, которые начинаются одним определенным элементом, равно P_{m-1}. Учитывая, что на первое место можно поставить любой из m данных элементов, число всех возможных перестановок из m элементов будет равно $P_m = m \cdot P_{m-1}$. ◁

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Сколько различных трехзначных чисел можно записать при помощи цифр 3, 5, 7, если ни одна цифра не входит в изображение числа дважды?

В задаче требуется определить количество различных способов упорядочения данного трехэлементного множества. Очевидно, что цифру, которую можно поставить на первое место, можно выбрать тремя способами. После того как первую цифру выбрали, на второе место можно поставить любую из оставшихся двух цифр. Цифры, которые надо поставить на 2-е и 3-е места, будут меняться местами, поэтому к каждой из трех цифр, поставленных на первое место, будем приписывать двузначные числа, записанные при помощи двух других:

$$3 \begin{array}{l} \nearrow 5 \frown 7 \\ \searrow 7 \smile 5 \end{array} \qquad 5 \begin{array}{l} \nearrow 3 \frown 7 \\ \searrow 7 \smile 3 \end{array} \qquad 7 \begin{array}{l} \nearrow 3 \frown 5 \\ \searrow 5 \smile 3 \end{array}$$

Таким образом, можно записать шесть трехзначных чисел: 357, 375, 537, 573, 735, 753. Искомое число трехзначных чисел равно числу перестановок из трех элементов, т. е. $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 = 6$.

По формуле (1) последовательно находим: $P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, $P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \times \times 3 \cdot 2 = 120$, $P_6 = 6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ и т. д. Обобщением проведенных вычислений может служить следующая формула:

$$P_m = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \qquad (2)$$

из которой следует, что число всех перестановок P_m из m элементов равно произведению первых m натуральных чисел.

Для краткости произведение первых m натуральных чисел принято обозначать символом $m!$:

$$m! = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

($m!$ читается «эм-факториал»).
Используя знак факториала, формулу (2) можно записать

$$P_m = m! \qquad (3)$$

Например, если в таксопарк прибыло 5 водителей и их надо закрепить за имеющимися 5 автомобилями, то это можно сделать

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

различными способами.

Учитывая, что пустое множество можно упорядочить одним-единственным способом, т. е. $P_0 = 1$, то формула (1) оказывается верной и для $m = 1$:

$$P_1 = 1 \cdot P_0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, в множестве, содержащем m элементов, можно $m!$ способами установить определенный порядок расположения элементов или, как говорят, упорядочить его.

Пример 1. Упросить выражение $\frac{P_6}{P_4}$.

Пользуясь формулой (2) и сокращая дробь, получим

$$\frac{P_6}{P_4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 = 30.$$

Пример 2. Доказать, что $\frac{(m+2)!}{m!} = (m+1)(m+2)$.

Действительно, $\frac{(m+2)!}{m!} = \frac{(m+2)(m+1)m \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{m(m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = (m+2)(m+1)$.

Пример 3. Сократить дробь $\frac{(n-1)!}{(n-4)!}$.

Имеем $\frac{(n-1)!}{(n-4)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-4) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = (n-1)(n-2)(n-3)$.

2. РАЗМЕЩЕНИЯ

Пусть дано конечное множество, состоящее из m элементов, и требуется подсчитать число всех его подмножеств, отличающихся составом элементов или порядком их следования.

Если подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, считают различными, то говорят об упорядоченных подмножествах. Каждое упорядоченное подмножество образует некоторую перестановку из элементов этого подмножества.

Упорядоченные подмножества, содержащие n элементов множества, состоящего из m элементов, называют *размещениями из m элементов по n*.

По определению имеем, что $0 \leqslant n < m$ и что размещения из m элементов по n — это все подмножества данного множества, содержащие n элементов, отличающихся друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

Выясним, сколько всего существует размещений из m элементов по n. Число различных размещений из m элементов по n обозначают символом $A_m^n (0 \leqslant n < m)$.

Очевидно, что, так как из множества, состоящего из m элементов, можно выделить m одноэлементных подмножеств, которые упорядочены, ибо содержат только первый элемент,

$$A_m^1 = m. \tag{4}$$

Если $n = 0$, то это означает, что рассматривается подмножество, не содержащее ни одного элемента, поэтому считают

$$A_m^0 = 1, \tag{5}$$

так как существует только одно подмножество любого множества, не содержащее элементов (пустое множество).

При $0 < n < m$ верна следующая формула

$$A_m^n = A_m^{n-1} \cdot (m - (n - 1)). \tag{6}$$

Проверим справедливость формулы (6) для случаев $n = 2$ и $n = 3$. Покажем, что

$$A_m^2 = m(m-1) = A_m^1(m-1).$$

Пусть дано множество, состоящее из m элементов. Будем составлять упорядоченные двухэлементные подмножества данного множества. Выберем в качестве «первого» какой-нибудь один элемент из данных m элементов и присоединим к нему поочередно в качестве «второго» каждый из оставшихся $m - 1$ элементов; получим $m - 1$ размещений по два. Учитывая, что в качестве «первого» можно поочередно брать любой из данных элементов и для каждого из них аналогичным образом составить $m - 1$ размещений, то всего получим $m(m-1)$ размещений. Значит, $A_m^2 = m(m-1)$. Учитывая (4), получаем $A_m^2 = A_m^1(m-1)$.

Рассмотрим пример. Сколько различных двузначных чисел можно записать при помощи цифр 2, 4, 6, 8, если ни одна из цифр не входит в изображение числа дважды?

Имеем множество, содержащее 4 элемента. Способов составления различных двузначных чисел, очевидно, столько, сколько существует двухэлементных упорядоченных подмножеств у множества, содержащего 4 элемента. Выпишем сначала все двузначные числа (размещения по два), у которых на первом месте стоит цифра 2. Получим строку 24, 26, 28, содержащую три размещения. Выпишем теперь все размещения по два, у которых на первом месте находится цифра 4. Получим строку 42, 46, 48, содержащую три размещения. Далее имеем строку 62, 64, 68 и, наконец, строку 82, 84, 86. Всего имеем 4 строки, в каждой из которых содержится три размещения из 4 элементов по два. Замечаем, что на место десятков можно поставить любую из данных четырех цифр. После каждого такого выбора (их $A_4^1 = 4$) остается три цифры, поэтому на место единиц цифру можно поставить тремя способами. Каждая цифра, поставленная на место десятков, может комбинироваться с любой цифрой, поставленной на место единиц, поэтому существует $4 \cdot 3 = 12$ способов, которыми можно четыре цифры поставить на место десятков и единиц. Таким образом, составлено 12 различных двузначных чисел, которые отличаются друг от друга хотя бы одной цифрой или порядком расположения цифр, т. е. $A_4^2 = A_4^1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$.

Покажем, что $A_m^3 = A_m^2 \cdot (m-2)$.

В самом деле, так как число упорядоченных двухэлементных подмножеств множества, содержащего m элементов, равно A_m^2, то, присоединив к каждому такому подмножеству поочередно в качестве «третьего» каждый из оставшихся $m - 2$ элементов данного множества, получим $A_m^2 \cdot (m-2)$ упорядоченных трехэлементных подмножеств. Таким образом, $A_m^3 = A_m^2(m-2)$, т. е. мы доказали, что для $m = 3$ формула (6) верна.

Общее доказательство формулы (6) вполне аналогично.

Из формулы (6) и равенств (4) и (5) последовательно находим:

$$A_m^1 = A_m^0 \cdot m = 1 \cdot m = m;$$
$$A_m^2 = A_m^1 \cdot (m-1) = m(m-1);$$
$$A_m^3 = A_m^2 \cdot (m-2) = m(m-1)(m-2);$$
$$A_m^4 = A_m^3 \cdot (m-3) = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

и вообще, если $n > 0$, то

$$A_m^n = A_m^{(n-1)} \cdot (m-(n-1)) = \underbrace{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}_{n \text{ множителей}}, \quad (7)$$

т. е. число всех размещений из m элементов по n элементов равно произведению n последовательных натуральных чисел от m до $m-(n-1)$. Формуле (7) можно придать другой вид. Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (7), на $(m-n)! = (m-n)(m-(n-1)) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, тогда получим

$$A_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))(m-n)(m-(n+1)) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-n)(m-(n+1)) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

или

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{P_m}{P_{m-n}}, \text{ если } n < m. \quad (8)$$

При $n = 0$ по формуле (8) получаем результат:

$$A_m^0 = \frac{m!}{(m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

который совпадает с (5), значит, формулой (8) можно пользоваться и при $n = 0$.

Заметим, что формула (7) была получена в предположении, что $n > 0$.

Так как перестановки можно считать частным случаем размещений ($n = m$), то

$$A_m^m = P_m = m!. \quad (9)$$

Заметим, что $A_m^{m-1} = A_m^m = m!$. Действительно, по формуле (7) с учетом (9) имеем:

$$A_m^{m-1} = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 = A_m^m = m!.$$

3. СОЧЕТАНИЯ. СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ

Пусть дано конечное множество, состоящее из m элементов, и требуется подсчитать количество его неупорядоченных подмножеств, содержащих n элементов ($1 \leqslant n < m$).

Каждое неупорядоченное подмножество по n элементов в каждом, составленное из m элементов данного множества, называют *сочетанием из m элементов по n*.

Два сочетания из m элементов по n считают различными тогда и только тогда, когда они отличаются по крайней мере одним элементом. В отличие от размещений сочетания являются неупорядоченными подмножествами. Все упорядоченные подмножества с одними и теми же элементами образуют одно сочетание.

Подсчитаем, сколько можно составить сочетаний из m элементов по n в каждом (их число обозначают символом C_m^n), где $1 \leqslant n < m$.

Например, из элементов a, b, c, d четырехэлементного множества можно образовать четыре сочетания по три элемента в каждом: abc, abd, acd, bcd. Значит, $C_4^3 = 4$. Ясно, что $C_m^m = 1$, $C_m^1 = m$. Символ C_m^0 означает число пустых подмножеств множества, состоящего из m элементов, поэтому $C_m^0 = 1$.

Покажем, что число сочетаний C_m^n можно вычислить по формуле

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \tag{10}$$

Заметим, что из каждого сочетания получается столько различных размещений, сколько возможно различных перестановок его элементов. Если имеем C_m^n сочетаний и каждое из них упорядочить (что можно сделать P_n способами), то число A_m^n всех упорядоченных подмножеств множества, состоящего из m элементов, по n элементов в каждом будет равно $C_m^n \cdot P_n$, т. е. $A_m^n = C_m^n \cdot P_n$, откуда следует формула (10).

Рассмотрим пример. В чемпионате по футболу участвует 16 команд. Сколько матчей состоится в первом круге?

В первом круге будет сыграно столько матчей, сколько двухэлементных подмножеств существует у множества, состоящего из 16 элементов. Их число равно $C_{16}^2 = \frac{A_{16}^2}{P_2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$.

Так как $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, $P_n = n!$, то из формулы (10) следует, что

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}. \tag{11}$$

Формула (11) выражает число подмножеств, содержащих по n элементов каждое, взятых из множества, состоящего из m элементов. Ее, с учетом формулы (3), можно записать в виде $C_m^n = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_n}$. Формулу (10) с учетом того, что $A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$, а $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, можно записать в виде (более удобном для вычислений):

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Отметим некоторые свойства сочетаний.

1. Число сочетаний из m элементов по n равно числу сочетаний из m элементов по $m-n$ элементов:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \leqslant n \leqslant m). \tag{12}$$

▷ В самом деле, если воспользоваться формулой (11) для числа C_m^{m-n} сочетаний, то получим:

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n))!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^n. \ \triangleright$$

Заметим, что формулой (12) удобно пользоваться, когда $n > \frac{m}{2}$, например, $C_{20}^{18} = C_{20}^{2} = 190$.

2. Число сочетаний из m элементов по n равно сумме числа сочетаний из $m-1$ элементов по n элементов и по $n-1$ элементу:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} \qquad (1 \leqslant n < m). \tag{13}$$

Равенство (13) легко получить, пользуясь формулой (11):

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\,n!} + \frac{(m-1)!}{(m-n)!\,(n-1)!} =$$
$$= \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\,(n-1)!}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m-n}\right) =$$
$$= \frac{(m-1)!\,m}{(m-1-n)!\,(n-1)!\,n(m-n)} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = C_m^n.$$

Составим таблицу значений C_m^n для некоторых значений m и n (табл. 1).

Таблица 1

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2^m
0	1											$1=2^0$
1	1	1										$2=2^1$
2	1	2	1									$4=2^2$
3	1	3	3	1								$8=2^3$
4	1	4	6	4	1							$16=2^4$
5	1	5	10	10	5	1						$32=2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1					$64=2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1				$128=2^7$
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			$256=2^8$
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		$512=2^9$
10	1	10	45	120	210	256	210	120	45	10	1	$1024=2^{10}$

Эту таблицу принято называть *«треугольником Паскаля»*, в честь французского ученого Блэза Паскаля (1623—1662), в трудах которого она встречается.

Строки таблицы нумеруются неотрицательными целыми числами $m = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Строка с номером m состоит из $m+1$ чисел: $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \ldots, C_m^m$, сумма которых, как показывают подсчеты, равна 2^m (эти суммы для соответствующих значений m указаны в самом правом столбце таблицы 1). В дальнейшем будет доказано, что при любом m $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m$. Формулы (12) и (13) позволяют последовательно заполнять строки треугольника Паскаля, пользуясь тем, что в начале и в конце каждой строки стоят единицы. Из формулы (13) следует, что сумма любых двух соседних чисел любой строки равна числу следующей строки, стоящему под правым слагаемым. Например, складывая числа 6 и 15 шестой строки, получаем число 21, стоящее в седьмой строке под числом 15 шестой строки.

Отметим, что все строки таблицы 1 симметричны: числа, одинаково удаленные от начала и конца строки, равны между собой. Эта симметрия следует из формулы (12). Например, $C_6^4 = C_6^{6-4} = C_6^2 = 15$.

ЛИТЕРАТУРА

Алгебра: Учеб. для 6 класса сред. шк./Под ред. А. Теляковского.— 8-е изд.— М.: Просвещение, 1985.— 224 с.

Алгебра: Учеб. для 7 класса сред. шк./Под ред. А. Теляковского.— 8-е изд.— М.: Просвещение, 1987.— 224 с.

Алгебра: Учеб. для 8 класса сред. шк./Под ред. А. Теляковского.— М.: Просвещение, 1986.— 256 с.

Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9—10 классов сред. шк./Под ред. А. Н. Колмогорова.— 6-е изд.— М.: Просвещение, 1986.— 336 с.

Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Проб. учеб. для 7 класса сред. шк.— М.: Просвещение, 1985.— 192 с.

Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Проб. учеб. для 8 класса сред. шк.— М.: Просвещение, 1986.— 192 с.

Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Проб. учеб. для 9—10 классов.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 1987.— 270 с.

Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И. Математика: Учеб. для 4 класса сред. шк.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 1986.— 304 с.

Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И. Математика: Учеб. для 5 класса сред. шк.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 1986.— 224 с.

Евклид. Начала: В 3 т.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— Т. 1.— 446 с.; 1949.— Т. 2.— 510 с.; 1950.— Т. 3.— 332 с.

Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2 ч.— М.: Просвещение, 1978.— Ч. 1.— 320 с.; 1982.— Ч. 2.— 352 с.

Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. пособие для 6—10 классов сред. шк.— 5-е изд.— М.: Просвещение, 1986.— 304 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

1. Действительные числа

2. Степени. Многочлены. Корни.

3. Функции

4. Уравнения

5. Неравенства

6. Последовательности и прогрессии

7. Предел и непрерывность функции

8. Производная

9. Тригонометрические функции

10. Первообразная и интеграл

II. ГЕОМЕТРИЯ

11. Основные понятия

12. Треугольники

13. Четырехугольники

14. Геометрические построения

15. Окружность

16. Подобие треугольников. Метрические соотношения в треугольнике

17. Декартовы координаты на плоскости

18. Преобразования фигур

19. Многоугольники

20. Площади фигур

21. Плоскости и прямые в пространстве

22. Векторы

23. Двугранные, трехгранные и многогранные углы. Многогранники

24. Тела вращения

25. Объемы тел и площади поверхностей

Справочное издание

Гусак Галина Максимовна
Капуцкая Диана Андреевна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ ВУЗОВ

Справочное пособие

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*
Редактор *Л. Н. Базулько*
Младшие редакторы *В. М. Кушилевич, И. В. Моховикова*
Оформление и художественное редактирование *Ю. С. Сергачева*
Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *В. П. Шкредова*

ИБ № 2762

Сдано в набор 29.09.88. Подписано в печать 4.11.89. Формат 84 × 108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 26,04. Усл. кр.-отт. 26,04. Уч.-изд. л. 26,74. Тираж 110 000 экз. Заказ 1897. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по печати. 220048. Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005. Минск, ул. Красная, 23.

1 р. 70 к.