ЗНАНИЯ — МОЛОДЕЖИ

В ПОМОЩЬ ПОСТУПАЮЩИМ В ВУЗЫ

МАТЕМАТИКА

ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РСФСР
Ленинградская организация

П. В. ГРИГОРЬЕВ, П. А. СОБОЛЕВ, И. С. СРЕБРЯНСКИЙ, Н. В. ТРАВИН

ЗНАНИЯ — МОЛОДЕЖИ

(В помощь поступающим в высшие учебные заведения)

МАТЕМАТИКА

ЛЕНИНГРАД
1970

Г-834 **Григорьев П. В., Соболев П. А., Сребрянский И. С., Травин Н. В.**

Знания — молодежи. (Математика). Л., «Знание», 1970 (Об-во «Знание» РСФСР. Ленинградская организация). 215 500 экз., 44 коп.

Перед. загл. авт.: П. В. Григорьев, доцент, канд. физ.-матем. наук; П. А. Соболев; И. С. Сребрянский, доцент, канд. технич. наук; Н. В. Травин, доцент.

Сборник лекций предназначен для лиц, готовящихся к поступлению в высшие технические учебные заведения. В связи с этим большое внимание уделено узловым моментам теории, излагаются также некоторые вопросы, не входящие в программу средней школы.

Основные положения теории иллюстрируются решением большого количества примеров и задач средней и повышенной трудности. В конце каждой главы даются упражнения для самостоятельной работы.

$\frac{6\text{-}4\text{-}6}{27\text{-}70}$ 51

Научный редактор доцент Н. В. ТРАВИН

$\frac{6\text{-}4\text{-}6}{27\text{-}70}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие по математике (алгебра и тригонометрия) предназначается для поступающих в высшие технические учебные заведения. В соответствии с этим расположение материала отличается от общепринятого в школьных учебниках.

В связи со спецификой вступительных экзаменов в вузы большое внимание уделено узловым моментам теории (функциональная зависимость, исследование функций, равносильность уравнений, неравенств и систем), излагаются некоторые вопросы, не входящие в школьный курс (теорема Безу и другие).

В пособии указываются методы и приемы решения многих примеров и задач повышенной трудности (уравнения и неравенства высших степеней, уравнения и неравенства с параметрами, построение графиков функций). В конце каждой главы даются упражнения для самостоятельной работы, снабженные ответами и пояснениями.

Решение задач и выполнение сложных математических преобразований даст возможность абитуриенту повторить курс и хорошо подготовиться к экзамену и учебе в вузе.

Большинство задач и примеров, помещенных в пособии, предлагалось в разные годы на вступительных экзаменах в ленинградских институтах: Политехническом, Электротехническом им. В. И. Ульянова (Ленина) и Кораблестроительном.

Главы I, II написаны П. А. Соболевым; III — И. С. Сребрянским; IV — Н. В. Травиным; V — П. В. Григорьевым.

1*

ГЛАВА I

ЧИСЛА

§ 1. МНОЖЕСТВА

Понятие множества в настоящее время является одним из основных математических понятий. Ему нельзя дать точного определения, и поэтому ограничимся только его описанием. *Множеством* называется совокупность, собрание каких-нибудь предметов. Эти предметы называются *элементами* множества (например, множество сторон треугольника a, b, c; множество корней данного алгебраического уравнения и т. д.). Множество задается при помощи указания правила, согласно которому можно определить его элементы. Возьмем множество M вершин шестиугольника $ABCDEF$, оно записывается так

$$M=\{ABCDEF\}.$$

Вообще, если x есть элемент множества A, то это обозначается $x \in A$.

Если же x не входит в A, пишут: $x \overline{\in} A$.

Если всякий элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A есть *часть* (или *подмножество*) множества B и записывают: $A \subset B$. Например:

$$A=\{3,\ 4,\ 5\},\quad B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \text{то}\ A \subset B.$$

Множество называется *конечным*, если количество его элементов может быть выражено некоторым числом; в противном случае оно называется *бесконечным*. Примеры конечных множеств: множество корней квадратного уравнения, численность населения в данной стране; бесконечных: множество точек прямой, множество прямых, пересекающихся в одной точке.

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента (например, множество действительных корней уравнения $x^2+4=0$).

Пусть A и B два множества. Множество S, состоящее из всех элементов обоих множеств A и B и не содержащее никаких других элементов, называется *суммой* или соединением множеств A и B и обозначается так: $S = A + B$.

Подобным же образом определяется сумма скольких угодно множеств. Пусть

$$A = \{1, 2, 3, 4\};$$
$$B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Тогда

$$A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Множество P, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B, называется *пересечением* или общей частью A и B, его обозначение: $P = AB$. Например, если

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ и } B = \{3, 4, 5, 6\}, \text{ то } AB = \{3, 4\}.$$

Аналогично определяется произведение скольких угодно множеств.

Разностью двух множеств A и B называется совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B, и она обозначается так: $A - B$. Например, если

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ и } B = \{3, 4, 5, 6\},$$

то

$$A - B = \{1, 2\}.$$

Говорят, что между элементами множеств A и B установлено *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу из множества A по некоторому правилу поставлен в соответствие один и только один элемент из множества B и если при этом каждому элементу из множества B окажется поставленным в соответствие один и только один элемент из множества A. В этом случае множества A и B называются *эквивалентными* и это записывается так: $A \sim B$.

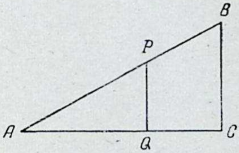


Рис. 1.

Ясно, что если A и B — конечные множества и они эквивалентны, то в них содержится одинаковое число элементов. Так, множество точек гипотенузы и множество точек катета эквивалентны, так как каждой точке P гипотенузы соответствует только одна точка Q катета — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на катет (рис. 1).

§ 2. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Первыми числами, которыми при счете предметов пользовалось человечество, были целые положительные числа. Они называются *натуральными числами*, а ряд 1, 2, 3, 4, …, n, … называется *рядом натуральных чисел*. Имеется наименьшее натуральное число 1, но нет наибольшего натурального числа, так как за каждым натуральным числом следует еще большее натуральное число. Следовательно, множество натуральных чисел — есть множество бесконечное.

Сумма и произведение нескольких натуральных чисел есть также натуральные числа. В этом случае говорят, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения.

Напомним основные законы, к которым приводятся сложение и умножение.

1. $a+b$ и ab — есть натуральные числа.

2. Сумма $a+b$ и произведение ab — однозначны.

3. Сочетательный закон: $(a+b)+c=a+(b+c)$ и $(ab)c=$ $=a(bc)$.

4. Переместительный закон: $a+b=b+a$ и $ab=ba$.

5. Закон монотонности: если $a=b$, то $c+a=c+b$ и $ac=bc$; если $a>b$, то $a+c>b+c$ и $ac>bc$.

6. Распределительный закон умножения относительно сложения, т. е. $a(b+c)=ab+ac$.

Натуральное число называется простым, если оно делится только само на себя и на единицу; если же оно делится и на другие числа, то оно называется составным. Отметим, что единица не является ни простым, ни составным числом. Первыми простыми числами в порядке возрастания являются: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … Можно показать, что существует бесконечно много простых чисел.

Возьмем, например, составное число 84 и разделим его на наименьший простой делитель 2. Получим: $84:2=42$. Число 42 также разделим на наименьший делитель 2. Получим: $42:2=$ $=21$ и т. д. Расположим эти вычисления по следующей схеме:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array}$$

Число 84 представимо в виде произведения простых сомножителей: $84=2\cdot2\cdot3\cdot7=2^2\cdot3\cdot7$. Это представление числа 84 в виде простых сомножителей можно сделать единственным образом, если не принимать во внимание порядок следования сомножителей. Так можно поступить с каждым составным числом.

Пусть имеются два натуральных числа n и m. *Общим наибольшим делителем* чисел n и m называется наибольшее число, на которое делятся эти числа, и обозначается ОНД (n, m).

Найдем ОНД для чисел 84 и 72. Для этого разложим их на простые множители: $84=2^2\cdot 3\cdot 7$; $72=2^3\cdot 3^2$. Пусть $d=$ОНД $(84, 72)$. Числа 84 и 72 делятся на d, и поэтому в разложении числа d на простые множители могут входить только те простые числа, которые входят в оба разложения чисел 84 и 72, причем с общим наибольшим показателем. Следовательно, $d=2^2\cdot 3=12$.

Числа m и n называются *взаимно простыми*, если их общий наибольший делитель равен 1. Например, числа 15 и 16 будут взаимно простыми, так как ОНД $(15, 16)=1$.

Общим наименьшим кратным чисел m и n называется такое наименьшее число, которое делится на числа m и n и обозначается ОНК (m, n).

Пусть $Q=$ОНК $(84, 72)$. Q — наименьшее число, которое должно делиться на 84 и 72. Поэтому разложение числа Q на простые множители должно содержать те простые числа, которые входят в разложение чисел 84 и 72, причем с наибольшим показателем. Следовательно, $Q=2^3\cdot 3^2\cdot 7=8\cdot 9\cdot 7=504$.

Заметим, что

$$\text{ОНК}\ (m, n)=\frac{mn}{\text{ОНД}\ (m, n)}.$$

§ 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В арифметике сложение и умножение называются *прямыми* действиями, а вычитание и деление — *обратными* действиями.

Если в результате сложения и умножения нескольких натуральных чисел получаются всегда также натуральные числа, то этого нельзя сказать об обратных действиях — вычитании и делении. Например, $5-3=2$, $12:4=3$, $4-6=-2$, $12:5=2^2/_5$. Числа -2 и $2^2/_5$ не будут натуральными числами.

Чтобы вычитание было всегда возможно, присоединим к множеству натуральных чисел число 0 и целые отрицательные числа $-1, -2, -3, \ldots$ Натуральные числа, 0 и целые отрицательные числа *образуют множество целых чисел* C

$$C=\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Очевидно, множество натуральных чисел N есть часть множества целых чисел C, т. е. $N\subset C$.

Обратим внимание на число 0. Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным числом. На число 0 нельзя делить; так как если бы $a:0=b$, то при $a\neq 0$ имели бы $a=0\cdot b=0$, что противоречило бы условию $a\neq 0$.

Если сложение, умножение и вычитание на множество целых чисел C всегда возможно, то этого нельзя сказать относительно действия деления. Например, $(-8):2=-4$, $16:(-8)=-2$, но $15:4=3^3/_4$, число $3^3/_4$ не является целым числом. Следовательно, множество целых чисел замкнуто относительно сложения, умножения и вычитания и не замкнуто относительно действия деления.

Расширим теперь множество целых чисел, присоединяя к ним дробные числа. Дробью называется частное от деления двух целых чисел. Исторически дроби возникли в процессе измерения величин. Предположим, что нужно измерить отрезок CD (рис. 2). Пусть AB отложится на CD ровно 4 раза. Тогда длина отрезка CD будет выражаться числом 4, т. е. $CD=4$ (ед. дл.). Если AB на CD не укладывается целое число раз, то берем, например,

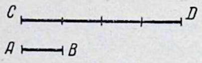


Рис. 2.

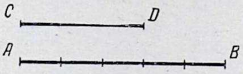


Рис. 3.

$\frac{1}{5}$ часть отрезка AB и она на CD укладывается ровно 3 раза (рис. 3). Тогда длина $CD=\frac{3}{5}$ (ед. дл.), т. е. выражается дробным числом.

Числа целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль называются *рациональными числами*, которые образуют множество рациональных чисел R.

Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число и n — целое положительное число.

Такое представление (при $m \neq 0$) — единственное, если числа $|m|$ и n взаимно простые, т. е. ОНД $(|m|, n)=1$.

Для сложения и умножения рациональных чисел остаются в силе те же основные законы (за исключением закона монотонности для умножения), которые имеют место для натуральных чисел.

В законе монотонности имеется отклонение: если $a>b$, то будет $ac>bc$, $ac=bc$, $ac<bc$ соответственно при условиях: $c>0$, $c=0$, $c<0$.

При сложении, вычитании, умножении и делении (кроме деления на нуль) рациональных чисел получаются опять рациональные числа, т. е. множество рациональных чисел замкнуто относительно действий: сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

Множество рациональных чисел R обладает важным свойством плотности. Под *плотностью* множества R понимают такое свойство, что между двумя любыми рациональными числами всегда можно вставить новое рациональное число.

Рассмотрим обращение обыкновенной дроби в десятичную дробь.

Десятичной дробью называется дробь $\frac{m}{n}$, у которой знаменатель имеет вид 10^k, где k — натуральное число. Например, $^3/_{10}=0,3$; $\frac{121}{100}=1,21$. Для того чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель разделить на знаменатель $\left(\frac{3}{8}=0,375\right)$.

Обыкновенная несократимая дробь $\frac{m}{n}$ обратится в конечную десятичную дробь, если при разложении знаменателя n на простые множители будут только входить простые числа 2 и 5. Действительно, здесь должно быть равенство $\frac{m}{n}=\frac{p}{10^k}$, $10^k=2^k\cdot 5^k$. Например,

$$\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\cdot 5}=\frac{7\cdot 5^3}{2^4\cdot 5\cdot 5^3}=\frac{7\cdot 125}{10^4}=\frac{875}{10000}=0,0875.$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь бесконечную десятичную дробь

$$a,\ a_1\, a_2\, a_3\, \ldots,\ a_n\, \ldots,$$

где a — целое число, а $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ означают цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Дробь считается заданной, если указано правило, по которому можно назвать цифру, стоящую на любом месте после запятой.

Бесконечная десятичная дробь называется *периодической*, если некоторая совокупность цифр неизменно повторяется в одной и той же последовательности. Эта совокупность цифр называется *периодом* дроби. Например, 0,4363636... Здесь периодом является число 36. Эта дробь кратко записывается так: 0,4 (36). Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется *чистой периодической* дробью. Например, 2, (35). Если же между запятой и периодом есть несколько цифр, то дробь называется *смешанной периодической* дробью, например, 2,53 (78).

Пусть имеется обыкновенная несократимая дробь $\frac{m}{n}$. Если в разложении знаменателя n на простые множители входят простые числа, отличные от 2 и 5, то дробь $\frac{m}{n}$ обращается в бесконечную десятичную периодическую дробь. Покажем это на примере.

Будем делить 6 на 7

$$
\begin{array}{l|l}
6 & 7 \\ \hline
60 & 0{,}857142857142\ldots \\
\underline{56} & \\
\quad 40 & \\
\quad \underline{35} & \\
\qquad 50 & \\
\qquad \underline{49} & \\
\qquad\; 10 & \\
\qquad\;\; \underline{7} & \\
\qquad\quad 30 & \\
\qquad\quad \underline{28} & \\
\qquad\qquad 20 & \\
\qquad\qquad \underline{14} & \\
\qquad\qquad\; 60 & \\
\qquad\qquad\; \ldots &
\end{array}
$$

Легко усмотреть, что получаются остатки, причем каждый остаток меньше 7. Следовательно, при делении может быть самое большее 6 остатков: 1, 2, 3, 4, 5, 6, поэтому не более чем после шести шагов деления остаток должен повториться, а следовательно, и цифры в частном при дальнейшем делении будут повторяться, т. е. получится бесконечная десятичная периодическая дробь. Можно показать, что период должен быть отличен от 9.

Заметим, что конечную десятичную дробь можно рассматривать как бесконечную десятичную периодическую дробь с периодом 0. Например, $2{,}38 = 2{,}38000\ldots$ Таким образом, любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби, период которой отличен от 9. Можно доказать и обратное утверждение, что любая бесконечная десятичная периодическая дробь является рациональным числом. Приведем правила.

Правило 1. Чтобы обратить чистую десятичную периодическую дробь в обыкновенную, нужно в числителе написать период, а в знаменателе поставить столько девяток, сколько имеется цифр в периоде. Например:

$$0{,}(47) = \frac{47}{99}; \quad 0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \quad 2{,}(13) = 2\,\frac{13}{99}.$$

Правило 2. Чтобы обратить смешанную десятичную периодическую дробь в обыкновенную, нужно в числителе от числа, стоящего после запятой до второго периода, отнять число, стоящее после запятой до первого периода, а в знаменателе написать столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр находится между запятой и первым периодом

$$0{,}45333\ldots = \frac{453 - 45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75}.$$

Возьмем теперь какую-нибудь дробь с периодом 9. Например, 0,39999... Применим к ней правило 2. Получим: $0,39999\ldots = \frac{39-3}{90} = \frac{36}{90} = \frac{4}{10} = 0,4$. Следовательно, дробь 0,39999... оказалась равной конечной десятичной дроби 0,4. Поэтому дробь 0,4 можно рассматривать как бесконечную периодическую дробь 0,4000... с периодом 0 и как бесконечную десятичную периодическую дробь 0,39999... с периодом 9, т. е. $0,4 = 0,400\ldots$; $0,4 = 0,3999\ldots$

Заметим, что для того чтобы конечную десятичную дробь представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби с периодом 9, нужно последнюю цифру уменьшить на единицу, а затем написать девятки ($2,6 = 2,59999\ldots$).

Однако для того, чтобы между рациональными числами и бесконечными десятичными дробями имелось бы взаимно однозначное соответствие, считают, что конечная десятичная дробь представляется бесконечной десятичной периодической дробью с периодом нуль, а не девять.

§ 4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим теперь действие возведения в степень и обратное действие — извлечение корня. По определению степени $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$. Следовательно, a^n, где n — натуральное число, есть частный случай умножения, когда все сомножители равны между собой. Очевидно, если a рациональное число, то и a^n есть тоже рациональное число.

Обратное действие $\sqrt[n]{a}$ (a — рациональное число) не всегда дает рациональное число. Покажем это на примере $\sqrt{2}$. Будем доказывать от противного. Предположим, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь (m и n — целые). По определению корня: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ или

$$m^2 = 2n^2. \tag{1,1}$$

Справа стоит четное число. Следовательно, m^2 и m будут также четными числами. Пусть $m = 2k$, где k — целое число, подставим его значение в выражение (1,1), получим: $4k^2 = 2n^2$ или $2k^2 = n^2$.

Так как $2k^2$ — четное число, то и n^2, а следовательно, и n — четные числа. Дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2, а это противоречит предположению, что дробь $\frac{m}{n}$ — несократимая. Значит, $\sqrt{2}$ не будет рациональным числом.

Применим к $\sqrt{2}$ правило извлечения квадратного корня

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

	1
24	100
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
2	56564
	3836

Процесс извлечения не может быть закончен, так как тогда получили бы рациональное число. Следовательно, $\sqrt{2}$ будет бесконечной десятичной дробью. Она не будет и периодической (всякую периодическую дробь можно обратить в обыкновенную дробь). Таким образом, $\sqrt{2}$ можно записать в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

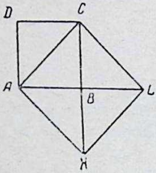


Рис. 4.

Покажем, что измерение отрезков иногда также приводит к бесконечной десятичной непериодической дроби. Для этого напомним некоторые сведения из геометрии.

Отрезок AB называется *общей мерой* отрезков CD и MN, если он укладывается целое число раз на каждом из этих отрезков. Два отрезка, имеющие общую меру, называются *соизмеримыми*, а не имеющие общей меры — *несоизмеримыми*.

Теорема. *Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

Доказательство (от противного). Пусть диагональ AC соизмерима со стороной AB (рис. 4). Тогда существует общая мера для отрезков AC и AB — отрезок MN. Отрезок MN укладывается на отрезке AC m раз, а на отрезке AB — n раз. Если MN принять за единицу длины, то $AC = m$ (ед. дл.), $AB = n$ (ед. дл.).

На диагонали AC построим квадрат $ACLK$, тогда $S_{ACLK} = 2S_{ADCB}$. Но $S_{ACLK} = m^2$, а $S_{ADCB} = n^2$, следовательно, $m^2 = 2n^2$. Отсюда $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ и $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, а это, как раньше было показано, невозможно. Следовательно, отрезки AC и AB несоизмеримы.

Теорема. *Если отрезок CD соизмерим с единицей длины AB, то его длина выражается рациональным числом.*

Доказательство. Существует отрезок MN, который укладывается на AC и AB целое число раз. Пусть на AC он укладывается m раз, а на AB — n раз. Но тогда $\frac{1}{n}$ — часть отрезка

AB на CD — уложится ровно m раз, поэтому $CD = \frac{m}{n}$ (ед. дл.), т. е. длина CD выражается рациональным числом.

Теорема. *Если отрезок CD несоизмерим с единицей длины AB, то его длина не выражается рациональным числом.*

Доказательство (от противного). Пусть $CD = \frac{m}{n}$ (ед. дл.).

Тогда $\frac{1}{n}$ часть отрезка AB уложится m раз на отрезке CD, т. е. $\frac{1}{n}$ часть отрезка AB будет общей мерой отрезков CD и AB. Следовательно, они будут соизмеримы, что противоречит условию.

Предположим теперь, что отрезок CD несоизмерим с единицей длины AB (рис. 5).

Отложим отрезок AB на CD возможное число раз (2 раза). Получится остаток C_1D, который меньше AB. Можно сказать, что длина CD приближенно (с недостатком) равна 2 (ед.). Возьмем 1/10 часть отрезка AB и будем ее откладывать на отрезке C_1D. Пусть она уложится на C_1D 5 раз, и еще получится остаток C_2D, который будет меньше 1/10 AB.

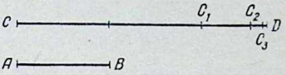


Рис. 5.

Тогда за приближенное значение (с недостатком) длины CD можно взять число 2,5. Теперь 1/10 часть AB разделим на 10 равных частей и возьмем одну такую часть, т. е. 1/100 часть AB. Будем ее откладывать на C_2D. Допустим, она отложится 3 раза и еще останется остаток C_3D, который будет меньше 1/100 AB. За приближенную длину отрезка CD (с недостатком) можно принять число 2,53.

Этот процесс будет продолжаться бесконечно, в противном случае длина отрезка CD выразилась бы рациональным числом, что невозможно. Естественно считать, что длина отрезка выражается бесконечной десятичной дробью: 2,534...

Эта дробь не будет периодической, так как периодическую дробь можно обратить в обыкновенную дробь. Итак, если отрезок несоизмерим с единицей длины, то его длина выражается бесконечной десятичной непериодической дробью.

Примеры с $\sqrt{2}$ и с измерением отрезка показывают, что множество рациональных чисел нужно расширить и ввести так называемые иррациональные числа.

Иррациональным числом называется число, которое можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

Теперь можно сказать, что если отрезок несоизмерим с единицей длины, то его длина выражается иррациональным числом. Иррациональными числами будут $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\lg 2$, $\lg 11$ и вообще $\lg N$, где $N \neq 10^n$ (n — любое рациональное число). Также будут являться иррациональными числами значения тригонометрических функций многих углов, например: $\sin 5°$, $\cos 12°$, $\operatorname{tg} 37°$ и т. д.

Совокупность рациональных и иррациональных чисел называется *множеством действительных чисел*. Для дальнейшего изучения действительных чисел введем понятие абсолютной величины числа.

Абсолютной величиной числа A называется само это число, если число A положительное или нуль, и $-A$, если число A — отрицательное. Абсолютную величину числа A обозначают так: $|A|$. Например: $|5|=5$; $|0|=0$; $|3{,}5|=3{,}5$. Из определения абсолютной величины следует, что $-|A| \leqslant A \leqslant |A|$ и $|-A|=|A|$.

Будем считать, что действительные числа представлены в виде бесконечных десятичных дробей. Два положительных действительных числа называются *равными*, если все их соответствующие десятичные знаки одинаковые.

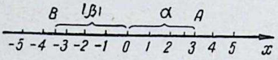


Рис. 6.

Пусть имеется два положительных действительных числа:

$$\alpha = a,\ a_1 a_2 a_3 \ldots;$$
$$\beta = b,\ b_1 b_2 b_3 \ldots$$

Число α будет больше числа β, если $a > b$; при $a = b$ имеет место $a_1 > b_1$; при $a = b$ и $a_1 = b_1$ должно быть $a_2 > b_2$ и т. д.

$$37{,}128\ldots > 37{,}126\ldots; \quad 0{,}4582\ldots > 0{,}4549\ldots$$

Два отрицательных числа α и β называются равными, если $|\alpha| = |\beta|$. Из двух отрицательных чисел большим считается то, абсолютная величина которого меньше $(-2{,}1589\ldots > -5{,}9287\ldots)$.

Считают, что любое положительное число больше нуля и любого отрицательного числа. Число нуль больше любого отрицательного числа $(2{,}1589\ldots > 0$; $2{,}1589\ldots > -1{,}3581\ldots$; $0 > -4{,}2837\ldots)$.

Изобразим действительное число α (при $\alpha > 0$) на числовой оси. От точки отсчета 0 отложим в сторону направления оси отрезок, длина которого равна α (рис. 6).

Точка A, являющаяся концом этого отрезка, и будет изображением числа α.

Чтобы изобразить отрицательное число β, нужно от точки отсчета 0 отложить в противоположную сторону направления оси отрезок, длина которого равна $|\beta|$. Точка B будет изображением числа β. Число нуль изображается точкой 0. Очевидно, двум неравным числам будут соответствовать две различные точки. Если $\alpha > \beta$, то точка A будет находиться правее точки B. Каждому действительному числу на числовой оси соответствует единственная точка.

Покажем обратное утверждение, что каждая точка на числовой оси является образом только одного действительного числа. Действительно, пусть M — любая точка на числовой оси. Она будет изображать положительное число, равное длине отрезка $0M$, если M находится правее точки 0, и отрицательное число, абсолютная величина которого будет равна длине отрезка $0M$, если точка M будет находиться левее точки 0.

Следовательно, множество всех действительных чисел и множество всех точек на числовой оси находятся во взаимно однозначном соответствии, т. е. они эквивалентны. Это свойство множества действительных чисел называется *свойством непрерывности*.

Покажем, что любое действительное число можно заменить рациональным числом с любой точностью.

Приближением с недостатком к действительному числу α с точностью до $\frac{1}{n}$ называется такое рациональное число r, когда $r \leqslant \alpha$, но $r + \frac{1}{n} > \alpha$. Особенно удобны десятичные приближения. *Десятичным приближением* числа α с недостатком с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется десятичная дробь r с k числом цифр после запятой и такая, что $r \leqslant \alpha$, но $r + \frac{1}{10^k} > \alpha$.

Число $r' = r + \frac{1}{10^k}$ называется десятичным *приближением числа с избытком* с точностью до $\frac{1}{10^k}$.

Возьмем положительное действительное число

$$\alpha = a,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1} \ldots$$

Рациональное число $r = a,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$ будет приближенным значением числа α с недостатком с точностью до $\frac{1}{10^k}$, а число $r' = r + \frac{1}{10^k}$ — приближенным значением числа α с избытком с точностью до $\frac{1}{10^k}$, так как $r \leqslant \alpha$, но $r' > \alpha$.

Например, для числа $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ имеем:

Приближенное значение с недостатком	1	1,4	1,41	1,414	1,4142...
Приближенное значение с избытком	2	1,5	1,42	1,415	1,4143...
Точность	1	0,1	0,01	0,001	0,0001...

Если число α иррациональное, то α будет больше любого своего десятичного приближения с недостатком, но меньше любого своего десятичного приближения с избытком, т. е. $r < \alpha < r'$.

Перейдем теперь к действиям с действительными числами. Пусть нужно сложить два положительных действительных числа

α и β, например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Вычислим их приближенные значения с недостатком:

Для числа $\sqrt{2}$	1,4	1,41	1,414	...
Для числа $\sqrt{3}$	1,7	1,73	1,732	...
Точность	0,1	0,01	0,001	...

. . . .

Соответственные приближенные значения с избытком получим, если последнюю цифру увеличим на единицу. Сложим соответственные приближенные значения с недостатком и с избытком:

$$\begin{array}{ll} 1{,}4 \quad +1{,}7 \quad =3{,}1 & 1{,}5 \quad +1{,}8 \quad =3{,}3 \\ 1{,}41 \ +1{,}73 \ =3{,}14 & 1{,}42 \ +1{,}74 \ =3{,}16 \\ 1{,}414+1{,}732=3{,}146 & 1{,}415+1{,}733=3{,}148 \\ \ldots & \end{array}$$

Замечаем, что сумма приближенных значений с недостатком увеличивается, а сумма приближенных значений с избытком уменьшается по мере увеличения точности приближения, причем разность сумм (0,2; 0,02; 0,002; ...) стремится к нулю.

Можно показать, что существует — и притом единственное — действительное число γ, которое больше (или равно) всех сумм приближенных значений с недостатком, но меньше всех сумм приближенных значений с избытком

$$\begin{array}{l} 3{,}1 < \gamma < 3{,}3 \\ 3{,}14 < \gamma < 3{,}16 \\ 3{,}146 < \gamma < 3{,}148 \\ \ldots \end{array}$$

По определению это число γ принимается за сумму чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$

$$\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14\ldots$$

Произведением положительных действительных чисел α и β называется такое действительное число, которое больше или равно всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, но меньше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

Если оба числа α и β отрицательны, то по определению $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Если одно число положительное, а другое отрицательное, то по определению $\alpha\beta = -|\alpha||\beta|$. Если хотя бы одно из чисел α или β равно нулю, то $\alpha\beta = 0$.

Сложение и умножение действительных чисел подчиняются тем же законам, которые имеют место для рациональных чисел. Вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению.

Множество действительных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на нуль), возведения в целую неотрицательную степень.

Рассмотрим теперь действие извлечения корня. *Корнем n-й степени из числа a* называется число, n-я степень которого равна a, т. е. если $\sqrt[n]{a}=x$, то $x^n=a$.

Положительный корень четной степени из положительного числа называется *арифметическим* корнем. Так

$$\sqrt{4}=2, \quad \sqrt[4]{16}=2, \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Корень из действительного числа не всегда будет действительным числом. Например, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ — действительное число, $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$ — действительное число, но $\sqrt{-4}$ не будет действительным числом, так как квадрат любого действительного числа, отличного от нуля, будет положительным числом.

Следовательно, множество действительных чисел не будет замкнутым относительно действия извлечения корня.

§ 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Развитие математики, физики и техники потребовало расширения множества действительных чисел и введения так называемых комплексных чисел.

Комплексным числом называется число вида $a+bi$, где a и b — любые действительные числа, а i — некоторый символ, который называется мнимой единицей. Обозначим комплексное число $a+bi$ через z: $z=a+bi$.

Число a называется *действительной* частью, а b — *мнимой* частью числа z.

Комплексные числа $z=a+bi$ и $z_1=a_1+b_1i$ называются *равными*, если $a=a_1$ и $b=b_1$, т. е. если их действительные и мнимые части соответственно равны.

Комплексное число $a+bi$ при $b\neq 0$ называется *мнимым* числом. Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, то оно будет равным действительному числу a. Следовательно, всякое действительное число является частным случаем комплексного, т. е. множество действительных чисел будет подмножеством комплексных чисел.

Число $0+bi$ называется *чисто мнимым* и обозначается bi. Числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются *сопряженными*. У них одинаковые действительные части, а мнимые имеют только противоположный знак (например, $2+3i$ и $2-3i$).

Для мнимых чисел понятия «больше» и «меньше» не существуют. Нельзя сказать, что $2+3i$ больше $2+i$ или $2-i$ меньше $2+i$.

Суммой двух комплексных чисел $a+bi$ и a_1+b_1i называется комплексное число $(a+a_1)+(b+b_1)i$. При сложении комплексных чисел их действительные и мнимые части соответственно складываются

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i;$$
$$(1+i)+(2-3i)=(1+2)+(1-3)i=3-2i.$$

Комплексные числа $a+bi$ и $-a-bi$ называются *противоположными*. Их сумма равна нулю

$$(a+bi)+(-a-bi)=(a-a)+(b-b)i=0+0i=0.$$

Сумма двух сопряженных чисел равняется действительному числу

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a+0i=2a.$$

Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое в сумме с z_2 дает число z_1.

Если $z_1=a_1+b_1i$; $z_2=a_2+b_2i$, то можно показать, что

$$z_1-z_2=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

Следовательно, чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно произвести отдельно вычитание действительных и мнимых частей

$$(3+4i)-(8-2i)=(3-8)+(4+2)i=-5+6i.$$

Произведением двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число

$$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i,$$

т. е.

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i. \qquad (1,2)$$

Например, $(3+4i)\ (2-i)=[3\cdot2-4\ (-1)]+[3\ (-1)+4\cdot2]\,i=10+5i$.

Если в равенстве (1,2) положим $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$, то получим: $ii=i^2=-1$. При этом полагают, что $i=\sqrt{-1}$. Если принять $b_1=0$, то получим

$$a_1(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i.$$

Из определения сложения и умножения следует, что число $a+bi$ можно рассматривать как двучлен, где $i=\sqrt{-1}$. Если $z=a+bi$, то $z0=(a+bi)\,0=a0+b0i=0$, т. е. $z0=0$ при любом z.

Произведение двух сопряженных чисел есть действительное положительное число, так как

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2>0.$$

Для сложения и умножения комплексных чисел справедливы те же законы, что и для натуральных чисел, кроме законов монотонности (понятий «больше» и «меньше» для мнимых чисел не существует).

Вычислим i^n, где n — любое натуральное число

$$i^1 = i; \qquad i^3 = i^2 i = -1i = -i;$$

$$i^2 = -1; \quad i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

При любом натуральном числе k получим: $i^{4k} = 1$, так как $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$;

$i^{4k+1} = i$, так как $i^{4k+1} = i^{4k} i = 1i = i$; $i^{4k+2} = -1$, так как $i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = 1(-1) = -1$; $i^{4k+3} = -i$, так как $i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = 1(-i) = -i$.

Подобным образом можно записать: $i^{117} = i^{4\cdot 29+1} = i$.

Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 называется такое комплексное число z, которое при умножении на z_2 дает z_1.

Из равенства $z = \frac{z_1}{z_2}$ вытекает, что $zz_2 = z_1$. Если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то можно показать, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

При практическом выполнении деления следует умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на $a_2 - b_2 i$ (число, сопряженное знаменателю). Например,

$$\frac{3 + 4i}{2 + i} = \frac{(3 + 4i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{6 - 3i + 8i - 4i^2}{2^2 + 1^2} = \frac{10 + 5i}{5} = 2 + i.$$

Пример 1. Показать, что числа $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ являются корнями уравнения $x^3 - 1 = 0$.

Решение. $x^3 - 1 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 - 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \pm 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} i + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 - 1 = -\frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{3} i + \frac{9}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8} i - 1 = 0.$

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{(1 + i)^8}{0{,}4\,(1 - i)^{10}} \left(\frac{2 - i}{4 + 3i} - \frac{1 - 2i}{3 + 4i}\right).$$

Решение. $\frac{(1+i)^8}{0{,}4\,(1-i)^{10}}\left(\frac{2-i}{4+3i}-\frac{1-2i}{3+4i}\right)=$

$$=\frac{[(1+i)^2]^4}{0{,}4\,[(1-i)^2]^5}\left[\frac{(2-i)(4-3i)}{4^2+3^2}-\frac{(1-2i)(3-4i)}{3^2+4^2}\right]=$$

$$=\frac{(1+2i-1)^4}{0{,}4\,(1-2i-1)^5}\,\frac{8-4i-6i-3-3+6i+4i+8}{25}=$$

$$=\frac{16}{0{,}4\,(-32i)}\,\frac{10}{25}=\frac{1}{-2i}=\frac{1}{2}\,i.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\,i$.

Пример 3. Найти действительные числа x и y из уравнения

$$\frac{3x-iy}{2y-5ix}=\frac{7+5i}{12-8i}.$$

Решение. $(12-8i)(3x-iy)=(7+5i)(2y-5ix)$. Перемножим $36x-24ix-12iy-8y=14y+10iy-35ix+25x$ или $(36x-8y)+(-24x-12y)\,i=(14y+25x)+(10y-35x)\,i$.

На основании равенства двух комплексных чисел получим

$$\begin{cases} 36x-8y=14y+25x, \\ -24x-12y=10y-35x \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 11x-22y=0, \\ 11x-22y=0. \end{cases}$$

Система сводится к одному уравнению $x-2y=0$. Следовательно, $x=2t$; $y=t$, где t — любое действительное число, отличное от нуля.

Пример 4. Упростить выражение

$$(\alpha-\alpha^2+2\alpha^3)(2-\alpha+\alpha^2),\ \text{где}\ \alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Найдем сначала α^2 и α^3,

$$\alpha^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$

$$\alpha^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1+3}{4}=1.$$

Теперь

$$(\alpha-\alpha^2+2\alpha^3)(2-\alpha+\alpha^2)=(\alpha-\alpha^2+2)(2-\alpha+\alpha^2)=$$

$$=2\alpha-\alpha^2+\alpha^3-2\alpha^2+\alpha^3-\alpha^4+4-2\alpha+2\alpha^2=4-\alpha^2+2\alpha^3-\alpha^4=$$

$$=4-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+2-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=6+1=7.$$

Для геометрического изображения комплексных чисел возьмем на плоскости систему координат $x0y$ (рис. 7). Каждому комплексному числу $a+bi$ поставим в соответствие точку M с координатами (a, b). Например, числу $1+3i$ поставим в соответствие точку A $(1, 3)$, числу $3=3+0i$ — точку B $(3, 0)$, числу $-2i=0-2i$ — точку C $(0, -2)$.

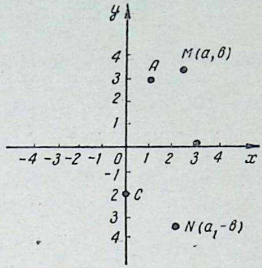


Рис. 7.

Точки, изображающие действительные числа, находятся на оси $0x$, и поэтому она называется *действительной осью*, а точки, изображающие чисто мнимые числа, расположены на оси $0y$, и она называется *мнимой осью*. Двум сопряженным числам $a+bi$ и $a-bi$ будут соответствовать точки M (a, b) и $N(a, -b)$ — симметричные относительно действительной оси.

Каждая точка плоскости имеет определенные координаты (α, β), и поэтому каждой точке плоскости будет отвечать только одно комплексное число $\alpha+\beta i$. Следовательно, можно сказать, что множество всех комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек плоскости, т. е. эти множества эквивалентны.

Каждая точка $M(a, b)$ плоскости единственным образом определяет радиус-вектор $\overline{OM}$ (рис. 8), начало которого находится в начале координат 0, а конец — в точке M, поэтому можно дать другое геометрическое представление комплексных чисел, при котором комплексное число $a+bi$ изображается вектором $\overline{OM}$. В этом случае $a=\text{пр}_{0x}\overline{OM}$, а $b=\text{пр}_{0y}\overline{OM}$.

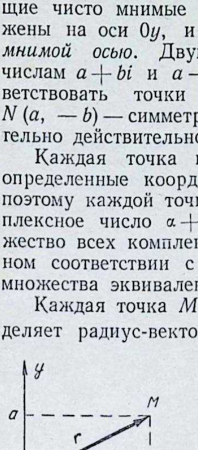


Рис. 8.

Длина r вектора $\overline{OM}$ называется модулем числа $a+bi$ и обозначается $|a+bi|$. Очевидно, $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Если число $a+0i=a$ действительное, то его модуль $|a|$ совпадает с абсолютной величиной числа a.

Угол, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением действительной оси и отсчитываемый от действительной оси, называется *аргументом* числа $a+bi$ и обозначается $\arg(a+bi)$. Заметим, что число 0 есть единственное число, аргумент которого неопределенный.

Изобразим геометрически сумму двух чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$. Пусть их сумма будет $z_3=a_3+b_3i$. Тогда $a_3=$ $=a_1+a_2$, $b_3=b_1+b_2$.

Пусть векторы $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ изображают соответственно числа z_1 и z_2 (рис. 9). Построим параллелограмм $OM_1M_3M_2$ на сторонах OM_1 и OM_2.

Покажем, что вектор $\overline{OM_3}$ будет изображать число $z_3 = z_1 + z_2$. Действительно,

$$\triangle OM_2N_2 = \triangle M_1M_3P,$$

откуда

$$ON_3 = ON_1 + N_1N_3 = ON_1 + M_1P = ON_1 + ON_2 = \\ = a_1 + a_2 = a_3;$$

$$N_3M_3 = N_3P + PM_3 = N_1M_1 + N_2M_2 = b_1 + b_2 = b_3,$$

поэтому вектор $\overline{OM_3}$ изображает число $a_3 + b_3i = z_3$. Вектор $\overline{OM_3}$ называется суммой векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$

$$\overline{OM_3} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}.$$

Изобразим теперь геометрически также разность двух чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Пусть эти числа изображаются соответственно векторами $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ (рис. 10).

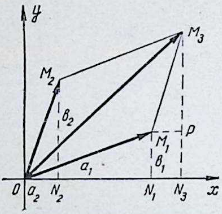


Рис. 9.

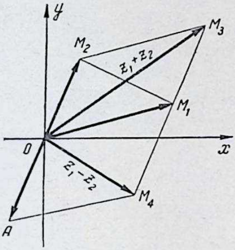


Рис. 10.

Число $-z_2 = -a_2 - b_2i$ изобразится вектором $\overline{OA}$, который направлен в сторону, противоположную направлению вектора $\overline{OM_2}$; $OA = OM_2$. Разность $z_4 = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Следовательно, вектор $\overline{OM_4}$, изображающий число z_4, будет равен сумме векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{OA}$, т. е. $\overline{OM_4} = \overline{OM_1} + \overline{OA}$.

Для модуля суммы комплексных чисел существуют два важных неравенства. Стороны OM_1, M_1M_3 и OM_3 образуют треугольник. Поэтому получим

$$OM_1 - M_1M_3 \leqslant OM_3 \leqslant OM_1 + M_1M_3,$$

однако

$$OM_1 = |z_1|; \quad M_1M_3 = OM_2 = |z_2|; \quad OM_3 = |z_1 + z_2|.$$

Следовательно,

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

т. е. модуль суммы не больше, чем сумма модулей слагаемых, и не меньше, чем разность модулей слагаемых.

Теперь $|z_1-z_2|=OM_4=M_1M_2$, т. е. $|z_1-z_2|=M_1M_2$. Следовательно, модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа.

Покажем, что модуль произведения нескольких комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей. Действительно, пусть $z_1=a+bi$ и $z_2=x+yi$. Тогда

$$z_1z_2=(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(ay+bx)\,i.$$

Следовательно,

$$|z_1z_2|=\sqrt{(ax-by)^2+(ay+bx)^2}=$$
$$=\sqrt{a^2x^2-2abxy+b^2y^2+a^2y^2+2abxy+b^2x^2}=$$
$$=\sqrt{a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}=|z_1||z_2|,$$

т. е. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$. Отсюда

$$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}z_2\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|.$$

Следовательно, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя.

Пример 5. Найти модуль комплексного числа

$$\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Решение.

$$\left|\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}\right|=\frac{|x^2-y^2+2xyi|}{|xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}|}=$$
$$=\frac{\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}}{\sqrt{(xy\sqrt{2})^2+(\sqrt{x^4+y^4})^2}}=\frac{\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}}{\sqrt{2x^2y^2+x^4+y^4}}=1.$$

Пример 6. Где расположены точки, изображающие комплексные числа z, для которых $|z+2i|\leqslant 1$?

Решение. $|z+2i|=|z-(-2i)|\leqslant 1$. $|z-(-2i)|$ есть расстояние между точками z и $(-2i)$. Следовательно, $|z-(-2i)|\leqslant$ $\leqslant 1$ есть точки круга с центром в точке $-2i$ и радиусом 1 (рис. 11).

Пример 7. Известно, что $|z|=1$. Где расположены точки $1+2z$?

Решение. $|z|=1$ есть окружность радиусом *1* и с центром в точке *0*. Следовательно, $|2z|=2|z|=2$ есть окружность радиуса *2* с центром в точке *0*. Тогда $1+2z$ есть окружность с радиусом *2* и центром (*1*, *0*) (рис. 12).

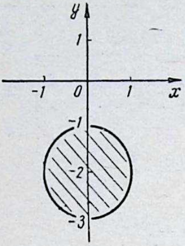


Рис. 11.

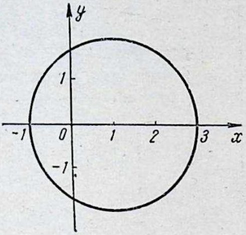


Рис. 12.

Пример 8. Где расположены точки, для которых $1<|z|<2$?

Решение. $|z|<2$ есть круг с центром в точке *0* и радиусом *2*. $|z|>1$ есть внешняя часть круга с центром в точке *0* и радиусом *1*. Следовательно, $1<|z|<2$ есть кольцо с центром в точке *0* и радиусами *1* и *2* (без границы) (рис. 13).

Пример 9. Где расположены точки, для которых $|z|\leqslant 3$ и $0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{6}$?

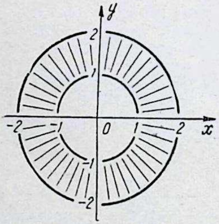


Рис. 13.

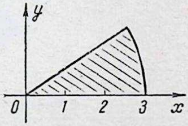


Рис. 14.

Решение (рис. 14). $|z|\leqslant 3$ есть круг с центром в точке *0* и радиусом *3*. $0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{6}$ есть угол с вершиной в точке *0* и со сторонами $y=0$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Следовательно, $|z|\leqslant 3$ и $0\leqslant$ $\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{6}$ есть круговой сектор с вершиной в точке *0*, радиусом *3* и углом $\frac{\pi}{6}$.

В заключение приведем схему, которая наглядно показывает соотношение между множествами различных чисел (рис. 15).

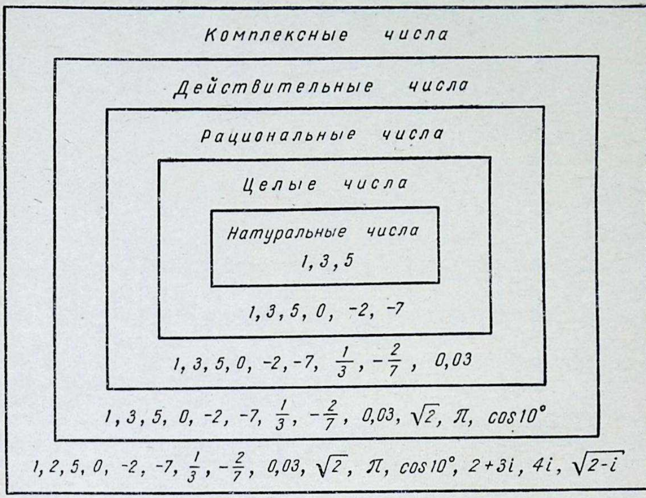


Рис. 15.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти общие наибольшие делители чисел: а) 48 и 36; б) 64 и 96; в) 56 и 72.

2. Найти общие наименьшие кратные чисел: а) 24 и 36; б) 48 и 54; в) 32 и 56.

3. Обратить в обыкновенные дроби следующие бесконечные периодические дроби: а) 2, (35); б) 0,5 (38); в) 3,00 (4).

4. Найти действительные числа x и y из соотношения

$$(x+y)^2 i - \frac{6}{i} - x = -y + 5(x+y)i - 1.$$

5. Вычислить а) $(1+i)^{10}$; б) $(1-i)^{17}$.

6. Вычислить $(\sqrt{3}+i)^{12}$.

7. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}(3-i)z_1 + (4+2i)z_2 &= 2+6i,\\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 &= 5+4i.\end{aligned}\right\}$$

8. Найти целое число n, если $(1+i)^n = (1-i)^n$.

9. Упростить выражение $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{15}$, если $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

10. Решить уравнение $|z| - z = 1 + 2i$.

11. Выяснить, где находятся точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z = x + yi$, для которых: а) $\arg z = c$ (c — заданное число); б) $-\pi < \arg z < \pi$; в) $\left.\begin{array}{l} |z - 2i| = 1, \\ \arg z = \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right\}$; г) $|2i - 3 - 2z| > 4$; д) $|z + 3| = |z - 3|$; е) $|z - 1 - i| = |z + 1|$; ж) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$; з) $\log_{1/2}|z - 2| > \log_{1/2}|z|$; и) $|z| = \left|z + \dfrac{2}{i}\right|$.

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

§ 1. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В результате измерения физических или других величин, например, времени, массы, скорости, давления и т. д., определяются численные их значения.

В ходе различных процессов некоторые величины изменяются, а другие сохраняют свое численное значение. Например, при равномерном движении время и путь изменяются, а скорость остается *постоянной*.

Величина, которая в данном явлении сохраняет одно и то же численное значение, называется *постоянной*. Если же величина принимает различные численные значения, то она называется *переменной*. Заметим, что одна и та же величина при одних условиях может быть постоянной величиной, а при других условиях переменной. Скорость при равномерном движении есть величина постоянная, а при равноускоренном — переменная.

Множества значений, которые принимает переменная величина, могут быть различны и зависеть от характера данной величины. Так, температура воды при нормальном давлении может изменяться от 0 до 100° С, число сторон многоугольника может быть любым целым положительным числом не меньше трех.

Множество всех численных значений переменной величины называется областью изменения этой величины.

Отметим *области изменения* переменной величины, которые часто встречаются.

Если переменная x принимает все действительные значения, удовлетворяющие неравенству $a<x<b$, то говорят, что x изменяется на *интервале* (a, b).

Если $a \leqslant x \leqslant b$, то x изменяется на *отрезке*, или *сегменте*, $[a, b]$.

Если $a < x \leqslant b$ или $a \leqslant x < b$, то получим *полуоткрытые* интервалы, или *полусегменты*, $(a, b]$ и $[a, b)$.

Если $x > a$ или $x < b$, то x изменяется на бесконечном интервале $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$.

Если x принимает любые действительные значения, то x изменяется на бесконечном интервале следующего вида: $(-\infty, +\infty)$.

Часто также рассматривают переменную x, значения которой перенумерованы всеми натуральными числами,

$$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$$

Такое множество значений x называется *бесконечной последовательностью*.

Интервал, полусегмент и сегмент иногда заменяют соответственно терминами: открытый промежуток, полуоткрытый и замкнутый промежуток.

§ 2. ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ ЗАДАНИЯ

При изучении явлений природы часто приходится иметь дело с несколькими переменными, причем изменение одних переменных влечет за собой изменение других. Тогда говорят, что между этими переменными существует *функциональная зависимость*. Например, площадь S и радиус r связаны формулой $S = \pi r^2$. Если изменить величину радиуса r, то будет меняться и площадь S, и наоборот. Точно так же при равномерном движении пройденный путь S и время t будут связаны соотношением $S = v_0 t$; здесь имеем функциональную зависимость между переменными S и t.

Дадим теперь общее определение функциональной зависимости. Пусть дано множество A действительных чисел. Если дан закон, в силу которого каждому числу x из множества A поставлено в соответствие одно и только одно действительное число y, то говорят, что на множестве A определена функция. Эту функциональную зависимость y от x обозначают так: $y = f(x)$.

В определении функции существенны два момента: указывается область A изменения аргумента x; устанавливается закон соответствия между значениями x и y.

Множество A всех рассматриваемых значений независимой переменной x называется *областью определения или задания функции* (ООФ). Значения независимой переменной $x \in A$ называются *допустимыми*; поэтому область определения функции иногда называют *областью допустимых значений* аргумента x (ОДЗ).

Множество значений функции y называется *областью изменения* функции (ОИФ).

Функция может быть задана различными способами. Самые распространенные — это аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ. Функциональная зависимость между функцией y и независимой переменной x задается при помощи формулы или уравнения, связывающих x и y. Например, $y=3x^2+5$; $y=\sqrt{x+1}$; $2y-x+1=0$.

Функция также может быть задана несколькими формулами в различных промежутках

$$y=\begin{cases} \cos x, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ x^2, & \text{если } x<0, \end{cases}$$

или

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Заметим, что если область определения функции $y=f(x)$ при аналитическом способе задания не указана, то под областью определения этой функции понимают совокупность тех действительных значений независимой переменной x, при которых аналитическое выражение $f(x)$ имеет смысл и принимает лишь действительные значения.

Рассмотрим несколько примеров.

Найти область определения функций (область допустимых значений аргумента) для следующих функций

1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$; 3) $y=\sqrt[6]{x-2}+\frac{2}{\sqrt{4-x}}$;

4) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$; 5) $y=\lg(x^2-1)+\lg(1-x^2)$;

6) $y=\sqrt{\lg\cos x}$; 7) $y=\sqrt{\frac{1-x}{x^2-8x+15}}+$
$+\lg[\lg(x^2-5x+16)-1]$.

Решения.

1) Здесь $\sqrt{1-x^2}$ будет принимать действительные значения, если $1-x^2\geqslant 0$ или $x^2\leqslant 1$, т. е. $|x|\leqslant 1$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Следовательно, ОДЗ будет сегмент $[-1, 1]$.

2) Выражение имеет смысл при всех действительных значениях x за исключением $x=-1$ и $x=2$. Следовательно, ОДЗ будет иметь интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ и $(2, +\infty)$.

3) Для $\sqrt[6]{x-2}$ имеем: $x-2\geqslant 0$ или $x\geqslant 2$; для $\frac{2}{\sqrt{4-x}}$ $4-x>0$ или $x<4$. Следовательно, ОДЗ будет полусегмент $[2,4)$.

4) Имеем: $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$; $\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$; $1+x^2\geqslant 2|x|$; $|x^2|-2|x|+$ $+1\geqslant 0$; $(|x|-1)^2\geqslant 0$. Это неравенство выполняется при всех действительных значениях x.

Ответ: $(-\infty, +\infty)$.

5) Для $\lg(x^2-1)$ находим: $x^2-1>0$, $x^2>1$, $|x|>1$; для $\lg(1-x^2)$ определим: $1-x^2>0$, $x^2<1$, $|x|<1$.

Неравенства $|x|>1$ и $|x|<1$ противоречивы и функция y в области действительных чисел не определена.

6) Имеем: $\lg\cos x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 1$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ответ: $x = 2\pi k$ (ОДЗ состоит из бесконечного числа изолированных точек).

7) Для $\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-8x+15}}$ имеем: $\dfrac{1-x}{x^2-8x+15} \geqslant 0$. При $x \neq 3$ и $x \neq 5$ получим

$$(x-1)(x-3)(x-5) \leqslant 0.$$

Его решения $x \leqslant 1$ и $3 < x < 5$ (рис. 16). Для $\lg[\lg(x^2-5x+16)-1]$ имеем: $\lg(x^2-5x+16)-1>0$, $\lg(x^2-5x+16)>\lg 10$, $x^2-5x+16>10$, $x^2-5x+6>0$, $(x-2)\times(x-3)>0$, $x<2$ и $x>3$. ОДЗ будет: $x \leqslant 1$ и $3<x<5$ (рис. 17).

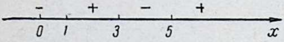


Рис. 16.

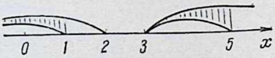


Рис. 17.

Функция y аргумента x называется *явной*, если уравнение, которому удовлетворяют соответствующие значения x и y, разрешено относительно y. Если же уравнение не разрешено относительно y, то говорят, что функция задана неявно.

Примеры явных функций: $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$; $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Примеры неявных функций: $2x - y + 3 = 0$; $xy - 5 = 0$. Общий вид неявно заданной

$$F(x, y) = 0.$$

При неявном задании функции возможно, что из уравнения, связывающего значения двух переменных, всем (или некоторым) значениям одной из переменных соответствует два или больше значений другой переменной. В этом случае считается, что одно уравнение задает *многозначную* функцию. Например, решая уравнение $y^2 - 2x^2 = 3$ относительно y, получим: $y = \pm\sqrt{2x^2+3}$, т. е. каждому значению x здесь соответствуют два значения y. Эту двузначную функцию можно считать составленной из двух однозначных $y = \sqrt{2x^2+3}$ и $y = -\sqrt{2x^2+3}$.

Такого рода расщепление многозначной функции на однозначные можно произвести разными способами. Вопрос о наиболее целесообразном выборе расщепления решается в каждом частном случае отдельно.

Табличный способ. Функциональная зависимость $y=f(x)$ задается при помощи таблицы, т. е. выписываются в определенном порядке значения переменной x и соответствующие им значения y.

Пример. Наблюдения в один из ноябрьских дней в Ленинграде показали, что температура в течение дня была следующая:

Время, *час*	9	10	12	14	15
Температура, *градус* . .	—3	—2	0	1	0

Здесь каждому моменту времени из множества $\{9, 10, 12, 14, 15\}$ соответствует определенное значение температуры $T°$,

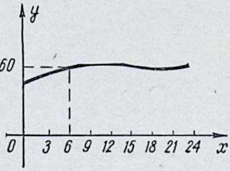


Рис. 18.

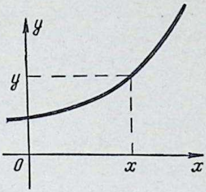


Рис. 19.

т. е. температура $T°$ есть функция времени t: $T°=f(t)$. Например, $-2=f(10)$; $1=f(14)$.

Графический способ. Функциональная зависимость между переменными x и y задается при помощи графика (чертежа). Например, барограф (прибор для непрерывной регистрации давления) начертил на ленте в течение суток непрерывную кривую изменения давления (рис. 18).

Здесь x — время, выраженное в часах, а y — давление в *мм* ртутного столба. Из графика ясно, что если $x=6$, то $y=760$. Областью определения функции будет отрезок $[0,24]$.

Вообще графиком функции $y=f(x)$ называется геометрическое место точек на плоскости $x0y$, абсциссами которых являются значения независимой переменной x, а ординатами — соответствующие значения функции y (рис. 19). В связи с этим функциональную зависимость $y=f(x)$ называют *уравнением графика* или *уравнением линии*.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ФУНКЦИЙ

Возрастающая и убывающая функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на отрезке $[a, b]$, если для любых значений $x=x_1$ и $x=x_2$, удовлетворяющих условию $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами, функция называется возрастающей, если большим значениям аргумента x соответствуют большие значения функции y (рис. 20).

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на отрезке $[a, b]$, если для любых значений x_1 и x_2, удовлетворяющих условию

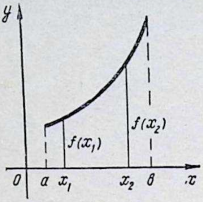


Рис. 20.

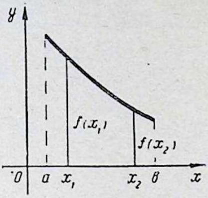


Рис. 21.

$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента x соответствует меньшее значение функции y (рис. 21).

Функции, которые на отрезке $[a, b]$ только возрастают или только убывают, называются *монотонными* на этом отрезке. Примеры монотонных функций:

$$y=kx+b \quad \text{при } k \neq 0; \quad y=a^x; \ y=\log_a x.$$

Четные и нечетные функции

Пусть дана функция $y=f(x)$, область определения которой симметрична относительно начала координат.

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при замене аргумента x на $-x$ значение функции не меняется, т. е. $f(-x)=f(x)$. Примеры четных функций:

$$y=x^2, \quad \text{так как } (-x)^2=x^2;$$
$$y=\cos x, \quad \text{так как } \cos(-x)=\cos x;$$
$$y=|x|, \quad \text{так как } |-x|=|x|.$$

График четной функции симметричен относительно оси $0y$. Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка на графике функции $y=f(x)$ (рис. 22). Ее координаты удовлетворяют уравнению $y=f(x)$, т. е. $y_0=f(x_0)$. Координаты точки $M_1(-x_0, y_0)$ также будут удовлетворять уравнению, так как $f(-x_0)=f(x_0)$. Следовательно, точка $M_1(-x_0, y_0)$ находится на графике; точки M_1 и M_0 симметричны относительно оси $0y$, а значит и график будет симметричен относительно оси ординат. Поэтому для построения графика четной функции достаточно построить ту его часть, которая находится правее оси $0y$ (для $x \geqslant 0$), а затем ее отобразить в левую полуплоскость симметрично относительно оси ординат.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если при замене аргумента x на $-x$ изменяется только знак функции, т. е. $f(-x)=-f(x)$. Примеры нечетных функций:

$$y=x^3, \quad \text{так как} \quad f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x);$$

$$y=\sin x, \quad \text{так как} \quad f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0)$ находится на графике

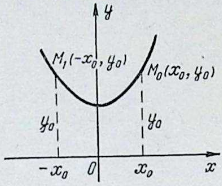


Рис. 22.

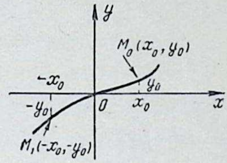


Рис. 23.

нечетной функции $y=f(x)$ (рис. 23) и, следовательно, $y_0=f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(-x_0, -y_0)$, симметричную с точкой M_0 относительно начала координат. Она также будет находиться на графике, так как $f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0$, т. е. $f(-x_0)=-y_0$.

Таким образом, график будет симметричен относительно начала координат. Для построения графика нечетной функции достаточно построить ту его часть, которая находится правее оси $0y$, а затем ее дополнить другой частью, симметричной к построенной части относительно начала координат.

Периодические функции

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T\neq 0$, что при любом допустимом значении x имеет место равенство: $f(x+T)=f(x)$. Следовательно, от прибавления к аргументу x числа T значение функции не изменяется.

Число T называется *периодом функции*. Покажем, что числа kT, где $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, также будут периодами функции. Возьмем, например, число $-2T$. На основании равенства $f(x)=f(x+T)$ получим:

$$f(x-2T)=f(x-2T+T)=f(x-T)=f(x-T+T)=f(x),$$

т. е. $f(x-2T)=f(x)$ и $-2T$ является периодом функции.

Обычно, говоря о периоде функции $y=f(x)$, имеют в виду наименьший положительный период. Если его обозначить через T_0, то все периоды T функции найдутся по формуле: $T=kT_0$, где k — любое целое число, отличное от нуля. Для $\sin x$ и $\cos x$

период будет равен 2π, а все периоды — $T=2\pi k$. Для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ период равен π, а все периоды — $T=\pi k$.

Найдем период функции $y=\sin \omega x$, где ω — рациональное положительное число. По определению периода имеем: $\sin \omega (x+T)=\sin \omega x$. Отсюда

$$\sin \omega (x+T)-\sin \omega x=0, \quad 2\cos\left(\omega x+\frac{\omega T}{2}\right)\sin\frac{\omega T}{2}=0.$$

Так как $\cos\left(\omega x+\frac{\omega T}{2}\right)\neq 0$ при любом x, то $\sin\frac{\omega T}{2}=0$. Следовательно,

$$\frac{\omega T}{2}=\pi k, \quad T=\frac{2\pi k}{\omega}.$$

Наименьший положительный период $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$ при $k=1$. Например, для функции $\sin 2x$ период $T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$, а для функции

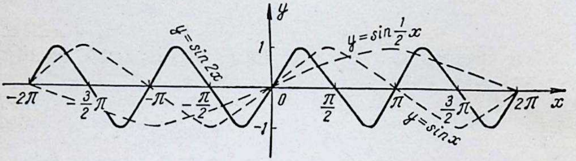


Рис. 24.

$\sin\frac{1}{2}x \quad T_0=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$. Отсюда видно, что при $\omega>1$ синусоида сжимается в ω раз, а при $\omega<1$ растягивается в $\frac{1}{\omega}$ раз вдоль оси $0x$ (рис. 24). Для функции $\cos \omega x$ период $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$, а для $\operatorname{tg} \omega x$ и $\operatorname{ctg} \omega x$ период $T_0=\frac{\pi}{\omega}$.

Заметим, что если функция y есть алгебраическая сумма периодических функций, то период функции y будет равен общему наименьшему кратному периодов этих функций.

Приведем примеры определения периодов функций.

а) $y=\sin 2\pi x$.

Решение. $T_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$.

б) $y=\sin^2 x$.

Решение. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. Следовательно, $T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

в) $y=|\cos x|$.

Решение. $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$. Следовательно, $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

г) $y = \frac{1}{2} \sin x \cos^2 \frac{x}{2}$.

Решение. $\frac{1}{2} \sin x \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x \frac{1+\cos x}{2} =$
$= \frac{1}{4}(\sin x + \sin x \cos x) = \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{8} \sin 2x$. Функции $\frac{1}{4} \sin x$ и $\frac{1}{8} \sin 2x$ имеют периоды соответственно 2π и π, поэтому $T_0 =$ $=$ ОНК $(2\pi, \pi) = 2\pi$.

д) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Решение. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x =$ $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$. Следовательно, $T_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

е) $y = \sin 3x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$.

Решение. Периоды функций $\sin 3x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} 2x$ будут соответственно равны $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $T_0 =$ ОНК $\left(\frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\right) =$ $= 2\pi$.

Для построения графика периодической функции $y = f(x)$ с периодом T_0 достаточно построить график на полусегменте

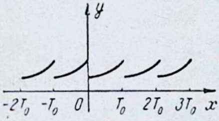


Рис. 25.

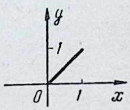


Рис. 26.

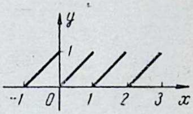


Рис. 27.

$[0, T_0)$, затем в силу равенства $f(x) = f(x + T_0)$ его перенести влево и вправо вдоль оси $0x$ на величину kT_0 (рис. 25).

Построим график функции $y = \{x\}$, где $\{x\}$ есть дробная часть числа x, т. е. разность между числом x и ближайшим целым меньшим числом. Например,

$$\{5{,}3\} = 0{,}3, \quad \text{так как} \quad 5{,}3 - 5 = 0{,}3;$$
$$\{-7{,}4\} = 0{,}6, \quad \text{так как} \quad -7{,}4 - (-8) = 0{,}6.$$

Очевидно, $\{x + 1\} = \{x\}$. Следовательно, функция $y = \{x\}$ является периодической с периодом $T_0 = 1$. Построим сначала график функции $y = \{x\}$ на полусегменте $[0, 1)$, где $\{x\} = x$, т. е. $y = x$ (рис. 26).

Заметим, что точка (1, 1) не принадлежит графику. Для получения всего графика функции $y=\{x\}$ нужно этот отрезок прямой перенести вдоль оси $0x$ на величину k, где $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 27).

§ 4. АСИМПТОТЫ

Для построения графика функции большое значение имеют асимптоты графика. Прямая AB называется *асимптотой* для кривой L (рис. 28), если расстояние d ($d=MP$) точки M от прямой AB стремится к нулю при удалении точки M по линии L в бесконечность.

Посмотрим, как можно найти вертикальные и горизонтальные асимптоты графика функции $y=f(x)$. Пусть $x=a$, вертикальная асимптота для графика функции $y=f(x)$ (рис. 29). Тогда при стремлении x к числу a значения функции y по абсолютной величине будут неограниченно возрастать. Следовательно, для нахождения вертикальных асимптот нужно найти те значения x, при приближении к которым значения функции y по абсолютной величине будут неограниченно возрастать.

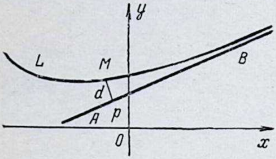


Рис. 28.

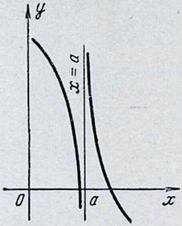


Рис. 29.

Рассмотрим пример $y=\frac{1}{x-2}$. Здесь вертикальной асимптотой будет прямая $x=2$, так как $|y|\to+\infty$ при $x\to 2$. Пусть теперь прямая $y=b$ будет горизонтальной асимптотой для графика функции $y=f(x)$ (рис. 30).

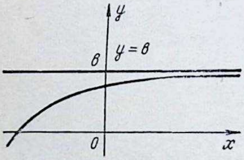


Рис. 30.

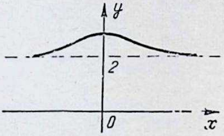


Рис. 31.

Из определения асимптоты следует, что $y\to b$ при $x\to\infty$. Следовательно, нужно, чтобы x стремился к $+\infty$ или к $-\infty$; если y при этом будет стремиться к числу b, то $y=b$ будет горизонтальной асимптотой.

Пример 1. Найти горизонтальную асимптоту графика функции $y=2+\frac{3}{x^2+5}$.

Р е ш е н и е. Здесь $y\to 2$ при $x\to\infty$. Следовательно, $y=2$ будет горизонтальной асимптотой (рис. 31).

Пример 2. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты графиков функций:

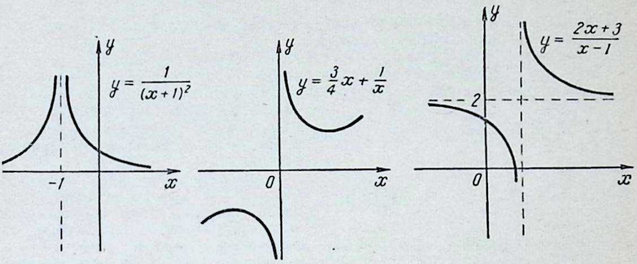
а) $y=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$. Следовательно, $x=-1$ — вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$, $y=0$ — горизонтальная асимптота.

б) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{x}\right) = \infty$, $x=0$ — вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{x}\right) = \infty$. Здесь горизонтальных асимптот нет.

в) $y = \frac{2x+3}{x-1}$.



а) б) в)

Рис. 32.

Решение. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x+3}{x-1} = \infty$, $x=1$ — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-2+5}{x-1} = \lim_{x \to \infty}\left(2 + \frac{5}{x-1}\right) = 2, \ y=2$$

— горизонтальная асимптота.

На рис. 32 изображен общий вид графиков функций, приведенных в примерах.

§ 5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Функция $y=f(x)$ при $x=x_0$ имеет максимум, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 при $x \neq x_0$, имеет место неравенство $f(x_0) > f(x)$ (рис. 33), — минимум, если $f(x_0) < f(x)$ (рис. 34).

Максимум и минимум функции часто называют экстремумом функции.

В определении экстремума функции существенно, чтобы функция была определена как левее, так и правее точки x_0, т. е. эта точка x_0 должна быть внутри того промежутка, в котором определена функция $f(x)$. Например, точка $x=b$ на рис. 33 не будет являться точкой максимума. Если при $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум, то это не значит, что она будет при $x=x_0$ иметь наибольшее значение. Функция $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 33, будет иметь максимум при $x=x_0$, а наибольшее значение — при $x=b$.

Очень часто функция $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где она задана, не будет ни возрастающей, ни убывающей. Этот отрезок можно разбить на несколько

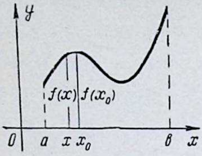


Рис. 33.

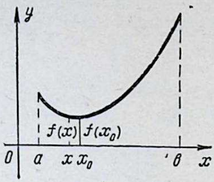


Рис. 34.

участков, так что на каждом из этих участков она будет или только возрастающей или только убывающей (рис. 35).

На отрезке $[a, c]$ функция возрастает, на $[c, d]$ — убывает, и т. д.

В точках C, E функция имеет максимум, а в точках D, F — минимум. Видим, что при переходе через точку максимума слева направо функция от возрастания переходит к убыванию, а в точках минимума наоборот — от убывания к возрастанию.

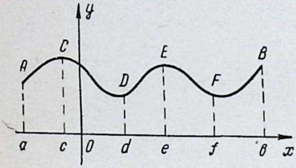


Рис. 35.

Монотонная функция не имеет экстремумов. Другие функции могут иметь конечное или бесконечное число экстремумов. Например, функция $y=ax^2+bx+c$ имеет один экстремум: минимум при $a>0$ и максимум при $a<0$ (рис. 36 и 37).

Функция $y=\sin x$ имеет бесконечное число экстремумов: максимумы в точках $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$ и минимумы в точках $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$ (рис. 38).

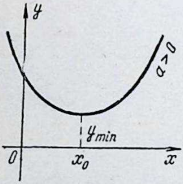


Рис. 36.

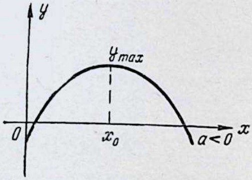


Рис. 37.

Найдем экстремум квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$, что равносильно нахождению координат вершины параболы $y=ax^2+bx+c$. Для этого выделим из трехчлена полный квадрат

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Так как выражение $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ и оно равняется нулю только при $x=-\frac{b}{2a}$, то квадратный трехчлен будет иметь минимум (при $a>0$) или максимум (при $a<0$), равный $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ и, следовательно, вершина пара-

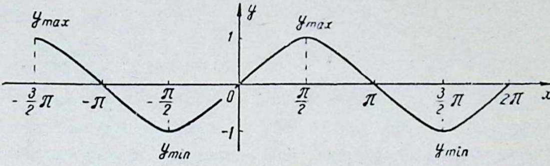


Рис. 38.

болы будет иметь координаты: $x=-\frac{b}{2a}$, $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Заметим, что если x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c, то по теореме Виета: $x_1+x_2=$ $=-\frac{b}{a}$, тогда

$$x_{\text{экстр}}=-\frac{b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

т. е. абсцисса вершины параболы равна среднему арифметическому корней трехчлена.

Пример 3. Найти экстремум функции $y=x^2-4x+3$.

Решение. Выделим полный квадрат

$$y=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1.$$

Так как $a=1>0$, то при $x=2$ имеем минимум, равный $y_{\min}=f(2)=$ $=-1$ (рис. 39).

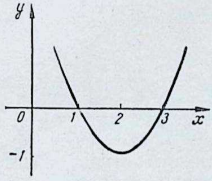


Рис. 39.

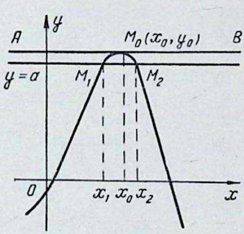


Рис. 40.

Для нахождения экстремума других функций можно иногда использовать следующий прием. Пусть, например, $M_0(x_0, y_0)$ — точка максимума для функции $y=f(x)$ (рис. 40). Пересечем график функции $y=f(x)$ прямой $y=a$, где $a<y_0$ (число a мало отличается от y_0). Получим две точки пересечения M_1 и M_2 с абсциссами x_1 и x_2. Будем прямую $y=a$ перемещать вверх до совмещения с AB. При этом x_1 и x_2 будут приближаться друг

к другу и примут значение x_0. Но так как x_0 есть точка максимума, то значение $y=a$, при котором уравнение $f(x)=a$ имеет кратные корни $(x_1=x_2)$, есть экстремальное значение функции.

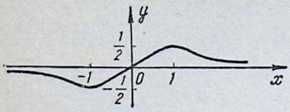


Рис. 41.

Пример 4. Найти экстремумы функции $y=\frac{x}{x^2+1}$.

Решение. Решаем уравнение $\frac{x}{x^2+1}=a$ или $ax^2-x+a=0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a^2}}{2a}. \qquad (2,1)$$

Для того чтобы $x_1=x_2$, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения равнялся нулю, т. е. $1-4a^2=0$. Отсюда $a_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$. Это будут экстремальные значения функции. Для нахождения абсцисс экстремальных точек подставим значения a в формулу (2,1). Получим: $x_{1,2}=\pm 1$. Следовательно, при $x=1$ $y_{max}=\frac{1}{2}$; при $x=-1$ $y_{min}=-\frac{1}{2}$ (рис. 41).

§ 6. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и является монотонной. Допустим, что область изменения функции y — отрезок $[\alpha, \beta]$ (рис. 42). Каждому значению y_0 на отрезке $[\alpha, \beta]$ будет соответствовать одно значение x_0 на отрезке $[a, b]$ такое, что $y_0=f(x_0)$. Следовательно, на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена функция $x=\varphi(y)$. Функция $x=\varphi(y)$ называется *обратной* для функции $y=f(x)$ и, наоборот, функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=\varphi(y)$. Поэтому их называют *взаимно обратными*. Заметим, что отрезок $[a, b]$ является ООФ для функции $y=f(x)$ и ОИФ для обратной функции $x=\varphi(y)$, а отрезок $[\alpha, \beta]$ будет ОИФ для функции $y=f(x)$ и ООФ для обратной функции $x=\varphi(y)$. Часто функция $x=\varphi(y)$ определяется из функции $y=f(x)$ решением уравнения $y=f(x)$ относительно x.

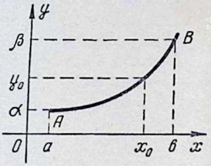


Рис. 42.

Графиками функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ будет одна и та же линия AB (рис. 42), только аргумент x для функции $y=f(x)$ откладывается на оси абсцисс, а аргумент y для функции $x=\varphi(y)$ — на оси ординат. Обыкновенно аргумент обозначают через x, а функцию через y. Придерживаясь этого правила, получим функцию $y=\varphi(x)$, которая также является обратной к функции $y=f(x)$. Геометрически это значит, что ось абсцисс оказалась вертикальной, а ось ординат — горизонтальной.

Чтобы оси восстановить в исходное положение, необходимо координатную плоскость повернуть вокруг биссектрисы 1-го координатного угла на 180° и, следовательно, график функции $y=\varphi(x)$ окажется симметричным к графику функции $y=f(x)$

(рис. 43). Например, возьмем показательную функцию $y=a^x$ при $a>1$ и найдем для нее обратную функцию $\log_a y=x$ или $y=\log_a x$.

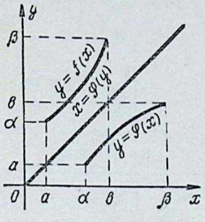


Рис. 43.

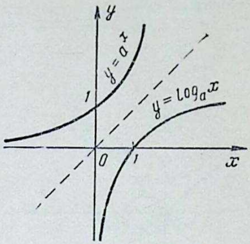


Рис. 44.

Логарифмическая функция будет обратной к показательной функции и графики их будут симметричны относительно биссектрисы 1-го координатного угла (рис. 44). Интервал $(-\infty, +\infty)$ будет ООФ для функции $y=a^x$ и ОИФ для обратной функции $y=\log_a x$. Интервал $(0, +\infty)$ является ОИФ для $y=a^x$ и ООФ для $y=\log_a x$.

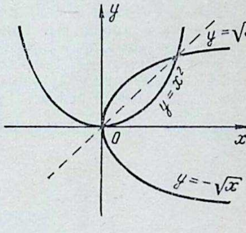


Рис. 45.

Если функция $y=f(x)$ не является монотонной на отрезке $[a, b]$, то нужно этот отрезок так разбить на части, чтобы на каждой части функция была монотонной. Тогда для каждой такой части можно найти функцию, которая будет обратной для функции $y=f(x)$. Так, имеем функцию $y=x^2$, определенную на интервале $(-\infty, +\infty)$. Она на интервале $(-\infty, 0)$ будет убывающей, а на интервале $(0, +\infty)$ — возрастающей (рис. 45). Тогда $y=\sqrt{x}$ будет обратной функцией для функции $y=x^2$ на интервале $(0, +\infty)$, а $y=-\sqrt{x}$ будет обратной функцией для $y=x^2$ на интервале $(-\infty, 0)$.

§ 7. ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Линейная функция $y=kx+b$. ООФ — $(-\infty, +\infty)$, ОИФ — $(-\infty, +\infty)$. График — прямая линия (рис. 46). Угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол между положительным направлением оси $0x$ и прямой. С увеличением k по абсолютной величине наклон прямой увеличивается. При $k=0$ имеем: $y=b$ — прямая, параллельная оси $0x$. Функция $y=kx+b$ при $k\neq 0$ монотонная: возрастает при $k>0$ (прямая образует с положительным направлением оси $0x$ острый угол φ) и убывает при $k<0$ (угол φ тупой). Прямая пересекает ось ординат в точке $(0, b)$. Если $b=0$, то $y=kx$, функция выражает прямую пропорциональную зависимость между x и y. Прямая будет проходить через начало координат.

2. Функция $y=\frac{k}{x}$. Определена при всех значениях x за исключением $x=0$. ОИФ — интервалы $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. График — гипербола (рис. 47). Функция в каждом из интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$ монотонная: возрастает при $k<0$ и убывает при $k>0$. Она выражает обратную пропорциональную зависимость между x и y.

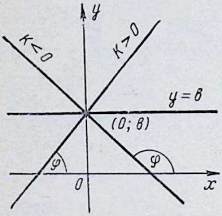


Рис. 46.

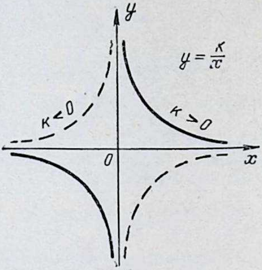


Рис. 47.

Функция — нечетная, и, следовательно, гипербола симметрична относительно начала координат. Она расположена в первой и третьей четвертях при $k>0$ и во второй и четвертой четвертях при $k<0$. Оси координат являются асимптотами гиперболы.

3. Квадратичная функция (квадратный трехчлен) $y=ax^2+bx+c$. Определена на всей оси $0x$. Графиком является парабола с осью симметрии, параллельной оси Oy и с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ (рис. 48). Это точка минимума, если $a>0$ (ветви параболы направлены вверх), или точка максимума, если $a<0$ (ветви параболы направлены вниз). При увеличении a по абсолютной величине ветви параболы становятся круче. При $D=b^2-4ac>0$ функция имеет два действительных корня, при $D=0$ — один двойной и при $D<0$ — ни одного действительного корня. Это означает, что парабола либо пересекает ось $0x$, либо касается ее, либо не имеет с ней ни одной общей точки.

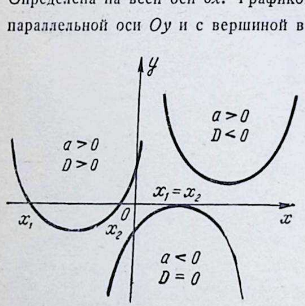


Рис. 48.

4. Показательная функция $y=a^x$ **при** $a>0$. Определена на всей оси $0x$. ОИФ — интервал $(0,\ +\infty)$, т. е. график находится в верхней полуплоскости. Функция монотонная при $a\neq 1$, возрастающая при $a>1$, убывающая при $a<1$. $y=1$ при $a=1$. График проходит через точку $(0,\ 1)$, так как $1=a^0$. Ось $0x$ является асимптотой (рис. 49).

5. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ **при** $a>0$ **и** $a\neq 1$.

Определена при $x>0$ (отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют). ОИФ — интервал $(-\infty,\ +\infty)$. Монотонна: возрастает при $a>1$, убывает при $a<1$. График проходит всегда через точку (1, 0), так как $\log_a 1=0$. Ось ординат является асимптотой для графика (рис. 50).

6. Функция $y=\sin x$. Определена на всей оси $0x$. ОИФ — отрезок $[-1, 1]$. Функция нечетная, так как $\sin(-x)=-\sin x$ и, следовательно, график симметричен относительно начала координат. Функция периодическая с периодом $T_0=2\pi$. Она возрастает в первой и четвертой четвертях, т. е. при $0<x<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$, а в силу периодичности возрастает и

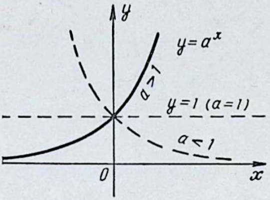


Рис. 49.

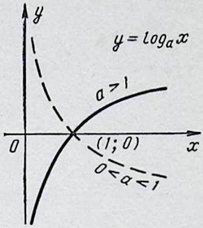


Рис. 50.

в интервалах $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$. Функция убывает во второй и третьей четвертях, т. е. при $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$, а также в интервалах $\frac{\pi}{2}+2\pi n<$ $<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi n$. Она имеет наибольшее значение $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и наименьшее значение $y=-1$ при $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi n$.

Функция $y=\sin x$ будет положительной в первой и во второй четвертях, т. е. при $0<x<\pi$, и отрицательной в третьей и четвертой четвертях, т. е.

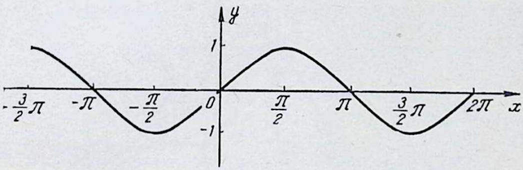


Рис. 51.

при $\pi<x<2\pi$. В силу периодичности она будет положительна в интервалах $2\pi n<x<\pi+2\pi n$ и отрицательна в интервалах $\pi+2\pi n<x<2\pi+2\pi n$. Корни функции — $x=\pi n$. График функции называется *синусоидой* (рис. 51).

7. Функция $y=\cos x$. Определена на всей оси $0x$. ОИФ — отрезок $[-1, 1]$. Функция четная, так как $\cos(-x)=\cos x$ и, следовательно, график симметричен относительно оси $0y$. Функция периодическая с периодом $T_0=2\pi$. Она положительна в первой и четвертой четвертях, т. е. при $0<x<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$, и в силу периодичности в интервалах $-\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$. Отрицательна во второй и третьей четвертях, т. е.

при $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, а также в интервалах $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$. Функция убывает в первой и во второй четвертях, т. е. при $0 < x < \pi$, и возрастает в третьей и четвертой четвертях, т. е. при $\pi < x < 2\pi$. Так как она периодическая с периодом 2π, то она будет убывать в интервалах $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ и возрастать в интервалах $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$. Имеет наибольшее значение $y = 1$ при $x = 2\pi n$ и наименьшее значение $y = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$.

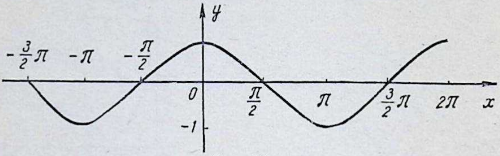


Рис. 52.

Корни функции — $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. График функции $y = \cos x$ называется *косинусоидой*. Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то косинусоиду можно получить из синусоиды, сдвинув последнюю влево вдоль оси $0x$ на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52).

8. Функция $y = \operatorname{tg} x$. Не определена при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. ОИФ — интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная, так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и поэтому ее график симметричен относительно начала координат. Она периодическая

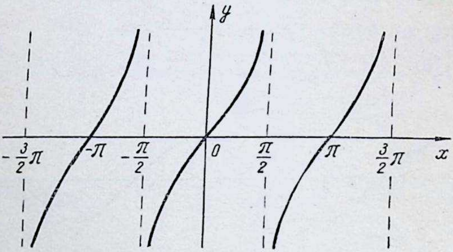


Рис. 53.

с периодом $T_0 = \pi$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ возрастающая. В силу периодичности во всех остальных интервалах $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ она будет также возрастающей. Функция положительная в первой и третьей четвертях и отрицательная во второй и четвертой четвертях. В силу периодичности она будет положительной в интервалах $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ и отрицательной в интервалах $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$. Корни функции — $x = \pi n$. Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ являются вертикальными асимптотами для графика функции (рис. 53).

9. Функция $y = \operatorname{ctg} x$. Не определена при $x = \pi n$. ОИФ — интервал $(-\infty, +\infty)$. Нечетная, так как $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ и поэтому график симметричен относительно начала координат. Функция периодическая с периодом $T_0 = \pi$. В интервале $0 < x < \pi$ она убывающая и в силу периодичности во всех остальных интервалах $\pi n < x < \pi + \pi n$ будет также убывающей. Функция положительная в первой и третьей четвертях и отрицательная во

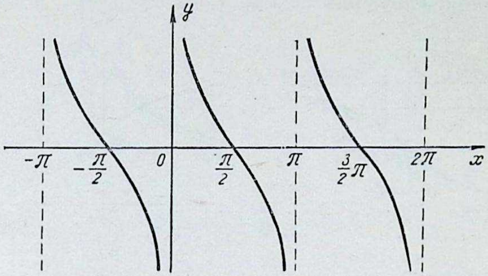


Рис. 54.

второй и четвертой четвертях. В силу периодичности она будет положительной в интервалах $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ и отрицательной в интервалах $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$.

Корни функции — $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Прямые $x = \pi n$ являются асимптотами для графика функции (рис. 54).

10. Функция $y = \arcsin x$. Определена на отрезке $[-1, 1]$. ОИФ — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Нечетная, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ и, следовательно,

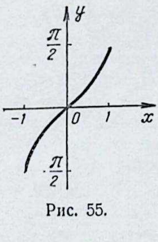


Рис. 55.

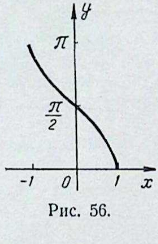


Рис. 56.

график симметричен относительно начала координат. Функция — монотонно возрастающая. Имеет один корень $x = 0$ (рис. 55).

11. Функция $y = \arccos x$. Определена на отрезке $[-1, 1]$. ОИФ — отрезок $[0, \pi]$. Функция — монотонно убывающая и положительная (рис. 56).

12. Функция $y = \operatorname{arctg} x$. Определена на всей оси $0x$. ОИФ — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Нечетная, так как $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (график симметричен относительно начала координат). Функция — монотонно возрастающая. Имеет один корень $x=0$. Прямые $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$ будут горизонтальными асимптотами для графика функции (рис. 57).

13. Функция $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. Определена на всей оси $0x$. ОИФ — интервал $(0, \pi)$. Функция убывающая и положительная. Корней нет. График имеет горизонтальные асимптоты $y=0$ и $y=\pi$ (рис. 58).

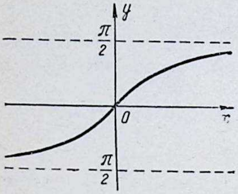


Рис. 57.

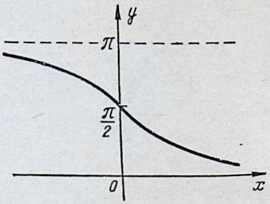


Рис. 58.

14. Степенная функция $y=x^\alpha$, где α — любое действительное число.

а) Пусть α — положительное четное число, т. е. $\alpha=2n$, где $n=1, 2, \ldots$ Функция $y=x^{2n}$ определена на всей оси $0x$. ОИФ — полузамкнутый интервал $[0, +\infty)$, четная, так как $(-x)^{2n}=x^{2n}$ и поэтому ее график будет симметричен относительно оси $0y$. Она положительна при всех значениях x за исключением $x=0$ (корень функции) (рис. 59).

б) α — положительное нечетное число, т. е. $\alpha=2n+1$, где $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ Функция $y=x^{2n+1}$ определена на всей оси $0x$. ОИФ — интервал

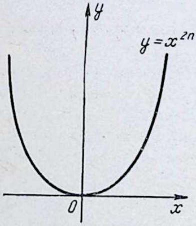


Рис. 59.

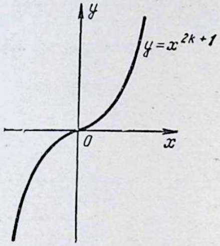


Рис. 60.

$(-\infty, +\infty)$. Она — нечетная, так как $(-x)^{2n+1}=-x^{2n+1}$, и, следовательно, график симметричен относительно начала координат. Функция — монотонно возрастающая. Имеет один корень $x=0$ (рис. 60).

в) α — отрицательное четное число, т. е. $\alpha=-2n$, где $n=1, 2, 3, \ldots$ Тогда $y=x^{-2n}$ или $y=\frac{1}{x^{2n}}$. Функция четная, определена при всех значениях x за исключением $x=0$. ОИФ — интервал $(0, +\infty)$. Оси координат будут асимптотами для графика (рис. 61).

г) α — отрицательное нечетное число, т. е. $\alpha = -(2n+1)$. Тогда $y = x^{-(2n+1)}$ или $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$. Определена на всей оси $0x$ за исключением $x = 0$.

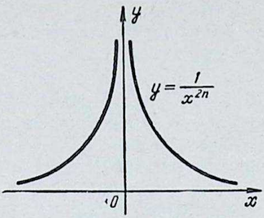


Рис. 61.

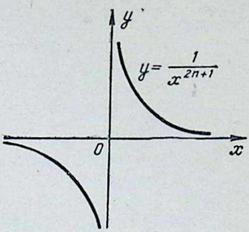


Рис. 62.

ОИФ — интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Функция нечетная и монотонно убывающая (рис. 62).

§ 8. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функции: степенная x^α, показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ называются *основными элементарными функциями*.

Введем теперь понятие суперпозиции (наложения) функций. Смысл этого понятия состоит в том, что вместо аргумента данной функции подставляется другая функция от другого аргумента. Например, если $z = y^3$, а $y = \sin x$, то суперпозиция этих функций дает $z = \sin^3 x$.

Предположим, что функция $z = \varphi(y)$ определена на отрезке $[c, d]$, а функция $y = f(x)$ — на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения принадлежат отрезку $[c, d]$. Здесь переменная y играет роль промежуточной переменной. По заданному значению x из отрезка $[a, b]$ находим (в силу зависимости $y = f(x)$) соответствующее значение y из отрезка $[c, d]$, а затем по этому значению y находим (в силу зависимости $z = \varphi(y)$) значение z. Это значение z и считаем соответствующим значению x.

Суперпозиция этих функций дает функцию $z = \varphi[f(x)]$, которая называется *сложной* функцией.

Предположение, что значения функции $y = f(x)$ должны принадлежать отрезку $[c, d]$, существенно. Например, если $z = \lg y$, а $y = \sin x$, то суперпозиция этих функций дает $z = \lg \sin x$. Но для функции $y = \sin x$ областью определения является интервал $(-\infty, +\infty)$, а для функции $y = \lg \sin x$ — только те значения x, для которых $\sin x > 0$, т. е. $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Операция суперпозиции может производиться не один, а несколько раз. Например, $z = y^3$, $y = \sin v$, $v = x^2 + 1$. Тогда суперпозиция этих функций дает $z = \sin^3(x^2 + 1)$.

Функция, которую можно получить из основных элементарных функций при помощи четырех арифметических действий и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз, называется *элементарной функцией*. Например,

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}; \quad \cos^2\left(1+\sqrt[3]{1-x^4}\right).$$

Дадим теперь классификацию элементарных функций с точки зрения тех действий, которые нужно произвести над аргументом x, чтобы получить соответствующее значение функции y.

Функция называется *целой рациональной* (она также называется *многочленом* или *полиномом*), если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число действий: сложение, вычитание и умножение

$$y=kx+b; \quad y=ax^2+bx+c;$$

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Функция называется *дробно-рациональной*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число действий: сложение, вычитание, умножение и деление.

Дробно-рациональную функцию всегда можно представить как отношение двух многочленов

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}.$$

Функции целые рациональные и дробно-рациональные называются *рациональными* функциями.

Функция называется *иррациональной*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число действий: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с рациональным показателем

$$y=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2+1}; \quad y=\frac{3x^4+\sqrt[5]{x^4+1}}{\sqrt[3]{1+7x^2}}.$$

Дадим теперь определение алгебраической функции.

Алгебраической называется функция y, являющаяся корнем алгебраического уравнения

$$P_0(x)\,y^n+P_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+P_{n-1}(x)\,y+P_n(x)=0,$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ являются многочленами независимой переменной x.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной* функцией. Например,

$$y=\log_a x; \; y=\sin x; \; y=\cos x; \; y=\operatorname{tg} x; \; y=\operatorname{arc\,tg} x; \; y=x^{\pi}.$$

Наконец, вышеизложенную классификацию изобразим при помощи схемы (рис. 63).

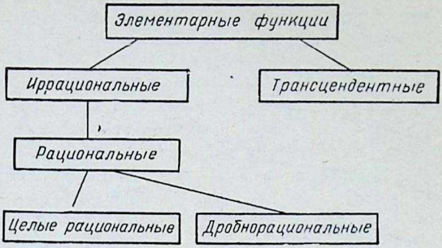


Рис. 63.

§ 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Графиком функции пользуются, чтобы наглядно изобразить поведение функции. Для этого нужно уметь «читать» график, т. е. видеть, на каких интервалах функция положительная, отрицательная, возрастающая, убывающая, при каких значениях x обращается в нуль, имеет экстремумы и т. д.

Пример 5. Из рассмотрения графика параболы $y=2x^2$ (рис. 64) установить свойства этой функции.

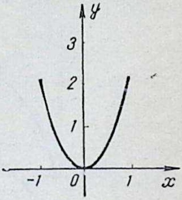


Рис. 64.

Решение. 1) ООФ — все действительные значения переменной x, так как перпендикуляр, восстановленный к оси $0x$ в любой точке, пересекает параболу.

2) Парабола имеет с осью абсцисс только одну общую точку: $x=0$, $y=0$. Следовательно, $y=2x^2$ имеет только один корень $x=0$.

3) Парабола расположена в верхней полуплоскости, поэтому $y>0$ при $x \neq 0$, т. е. функция $y=2x^2$ положительна при всех значениях $x \neq 0$.

4) Парабола симметрична относительно оси ординат, поэтому функция $y=2x^2$ четная.

5) При $x>0$ функция $y=2x^2$ возрастающая, а при $x<0$ — убывающая.

Приступим теперь к построению графика функции, если известен график исходной функции.

1. Построим график функции $y=f(x)+c$, если известен график функции $y=f(x)$.

Функция $y=f(x)+c$ отличается от функции $y=f(x)$ только слагаемым c. Следовательно, если $c>0$, то нужно ординату каждой точки графика функции $y=f(x)$ увеличить на c единиц, т. е. поднять вверх вдоль оси ординат на c единиц. Если же $c<0$, то нужно этот график опустить на $|c|$ единиц вниз (рис. 65). Например, чтобы построить график функции $y=x^2-2$, нужно

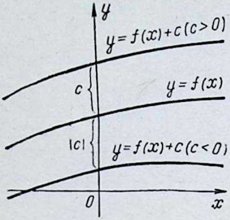


Рис. 65.

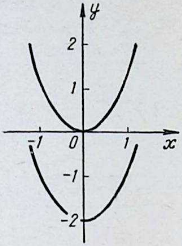


Рис. 66.

параболу $y=x^2$ опустить на 2 единицы вниз (рис. 66). При построении графика функции $y=\lg x+2$ сначала следует построить график функции $y=\lg x$, а затем его поднять на 2 единицы вверх в направлении оси ординат (рис. 67).

2. Построим график функции $y=f(x-m)$, если известен график функции $y=f(x)$.

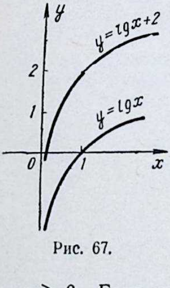


Рис. 67.

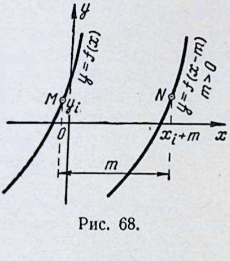


Рис. 68.

Пусть $m>0$. Если x_1 — любое допустимое значение x для функции $y=f(x)$ и $y_1=f(x_1)$, то точка $M(x_1, y_1)$ будет находиться на графике функции $y=f(x)$.

Найдем значение функции $y=f(x-m)$ при $x=x_1+m$. Получим:

$$y=f(x_1+m-m)=f(x_1)=y_1.$$

Следовательно, точка $N(x_i+m, y_1)$ будет находиться на графике функции $y=f(x-m)$. В этом случае каждой точке $M(x_1, y_1)$ на графике функции $y=f(x)$ соответствует точка $N(x_1+m, y_1)$

на графике функции $y=f(x-m)$. Так как у точек M и N ординаты одинаковые, то весь график функции $y=f(x-m)$ получится перемещением в направлении оси Ox графика функции $y=f(x)$ на m единиц (рис. 68).

Если $m<0$, то аналогичные рассуждения приведут к выводу, что для построения графика функции $y=f(x-m)$ нужно график функции $y=f(x)$ сдвинуть влево вдоль оси абсцисс на $|m|$ единиц (рис. 69).

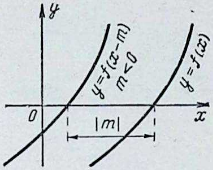


Рис. 69.

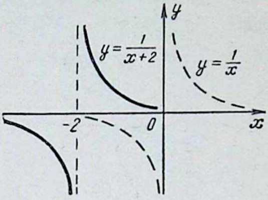


Рис. 70.

Например, чтобы построить график функции $y=\frac{1}{x+2}$, сначала возьмем график функции $y=\frac{1}{x}$, а затем его перенесем на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс (рис. 70).

3. Построим график функции $y=|f(x)|$, если известен график функции $y=f(x)$. В тех интервалах, где $f(x)\geqslant 0$, будем иметь: $|f(x)|=f(x)$, а графики функций $y=|f(x)|$ и $y=f(x)$ совпадут. В интервалах, где $f(x)<0$, получим: $|f(x)|=-f(x)$ и, следо-

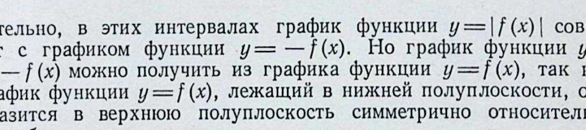


Рис. 71.

вательно, в этих интервалах график функции $y=|f(x)|$ совпадет с графиком функции $y=-f(x)$. Но график функции $y=-f(x)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$, так как график функции $y=f(x)$, лежащий в нижней полуплоскости, отобразится в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс.

Итак, чтобы получить график функции $y=|f(x)|$, нужно часть графика функции $y=f(x)$, расположенной в верхней полуплоскости, оставить без изменения, а другую часть графика функции $y=f(x)$, расположенную в нижней полуплоскости (если такая часть будет), отобразить в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс (рис. 71).

Например, чтобы построить график функции $y=|\lg x|$, возьмем график функции $y=\lg x$ (рис. 72). Часть графика, расположенную при $0<x<1$ в нижней полуплоскости, нужно отобразить в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс, а часть графика, расположенную в верхней полуплоскости, оставить без изменения (рис. 73).

4. Построим график функции $y=f(|x|)$, если известен график функции $y=f(x)$. Функция

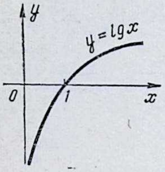


Рис. 72.

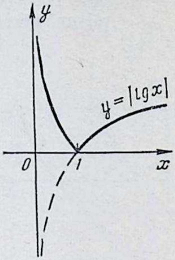


Рис. 73.

$y=f(|x|)$ — четная, так как $f(|-x|)=f(|x|)$. Следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат. Но при $x\geqslant 0$ имеем: $|x|=x$ и поэтому $f(|x|)=f(x)$, т. е. при $x\geqslant 0$ графики функции $y=f(|x|)$ и $y=f(x)$ совпадают.

Итак, для построения графика функции $y=f(|x|)$ нужно часть графика функции $y=f(x)$, расположенную в правой полуплоскости, отобразить в левую полуплоскость симметрично относительно оси ординат (рис. 74).

Например, чтобы построить график функции $y=|\lg|x||$, сна-

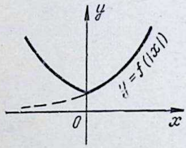


Рис. 74.

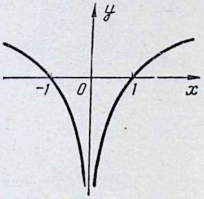


Рис. 75.

чала строим график функции $y=\lg x$ (см. рис. 72), затем график функции $y=\lg|x|$. Для этого часть графика (в данном случае весь график), расположенную в правой полуплоскости, отобразим в левую полуплоскость симметрично относительно оси ординат (рис. 75). Чтобы получить график функции $y=|\lg|x||$, нужно часть графика функции $y=\lg|x|$, расположенную в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс (рис. 76).

5. Построим график функции $y=f(kx)$, если известен график функции $y=f(x)$ Предположим, что $k>1$. Если x_1 — любое допустимое значение x для функции $y=f(x)$ и $y_1=f(x_1)$, то точка $M(x_1,\ y_1)$ будет находиться на графике функции $y=f(x)$. Найдем значение функции $y=f(kx)$ при $x=\frac{x_1}{k}$. Получим: $y=f\left(k\frac{x_1}{k}\right)=f(x_1)=y_1$. Поэтому точка $N\left(\frac{x_1}{k},\ y_1\right)$ находится на графике функции $y=f(kx)$. Следовательно, чтобы получить график функции $y=f(kx)$, нужно каждую точку $M(x,\ y)$ графика функции $y=f(x)$ переместить в положение точки $N\left(\frac{x}{k},\ y\right)$, т. е. совершить сжатие графика функции $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс в k раз (рис. 77).

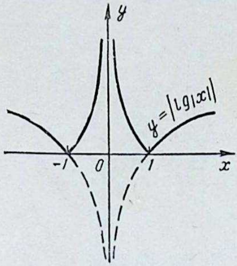


Рис. 76.

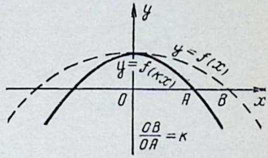


Рис. 77.

Если $0<k<1$, то положим, что $k_1=\frac{1}{k}$, где $k_1>1$. Тогда $\frac{x_1}{k}=\frac{x_1}{\frac{1}{k_1}}=k_1x_1$, т. е. точка N будет иметь абсциссу k_1x_1. Следовательно, чтобы получить график функции $y=f(kx)$ при $k<1$ $k_1=\frac{1}{k}$, нужно сделать растяжение графика функции $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс в k_1 раз.

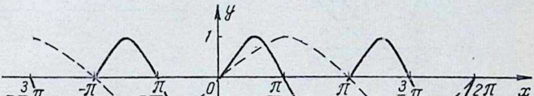


Рис. 78.

Например, чтобы построить график функции $y=\sin 2x$, необходимо все точки синусоиды $y=\sin x$ переместить так вдоль оси абсцисс, чтобы абсциссы этих точек стали по абсолютной величине в 2 раза меньше, т. е. нужно синусоиду сжать вдоль оси абсцисс в 2 раза (рис. 78).

6. Построим график функции $y=Af(x)$ при $A>0$, если известен график функции $y=f(x)$. Пусть точка $M(x, f(x))$ находится на графике функции $y=f(x)$, а точка $N(x, Af(x))$ — на графике функции $y=Af(x)$. Так как у этих точек абсциссы одинаковые, то они находятся на одной вертикали. Но ордината точки N равна $Af(x)$, а ордината точки M равна $f(x)$, и поэтому точка N

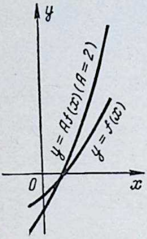


Рис. 79.

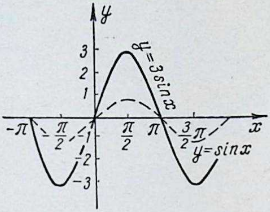


Рис. 80.

находится в A раз дальше от оси абсцисс, чем точка M. Следовательно, для того чтобы получить график функции $y=Af(x)$, нужно график функции $y=f(x)$ растянуть в A раз вдоль оси ординат. При $0<A<1$ нужно сжать график функции $y=f(x)$ в $\frac{1}{A}$ раз вдоль оси ординат, чтобы получить график функции $y=Af(x)$ (рис. 79).

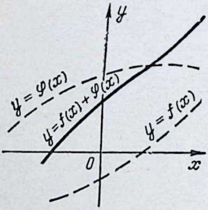


Рис. 81.

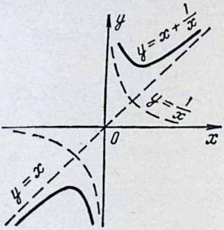


Рис. 82.

Например, чтобы построить график функции $y=3\sin x$, нужно синусоиду $y=\sin x$ растянуть в 3 раза вдоль оси ординат, и получим график функции $y=3\sin x$ (рис. 80).

7. Построим график функции $y=f(x)+\varphi(x)$, если известны графики функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$. Начертим графики функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ (они начерчены штрихами, рис. 81). Складываем их ординаты при одинаковых значениях x, причем под суммой ординат понимаем их алгебраическую сумму. Получив, таким образом, достаточно большое количество точек, проводим

через них «плавную» линию, которая и будет графиком функции $y=f(x)+\varphi(x)$. Аналогично строится график функции $y=$ $=f(x)-\varphi(x)$.

Например, чтобы построить график функции $y=x+\frac{1}{x}$, используем графики функций $y=x$ и $y=\frac{1}{x}$ (они начерчены штрихами,

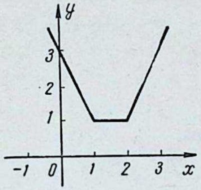


Рис. 83.

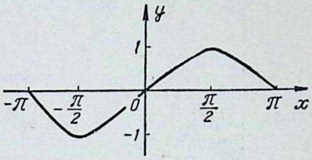


Рис. 84.

рис. 82). Складывая ординаты точек этих графиков при одинаковых значениях x, получим график функции $y=x+\frac{1}{x}$ (сплошная линия).

Рассмотрим теперь еще несколько примеров на построение графиков функций.

Пример 6. Построить график функции $y=|x-1|+|x-2|$.

Решение. Если $-\infty<x<1$, то $|x-1|=1-x$ и $|x-2|=$ $=2-x$. Следовательно, $y=1-x+2-x$, т. е. $y=3-2x$ при $x<1$.

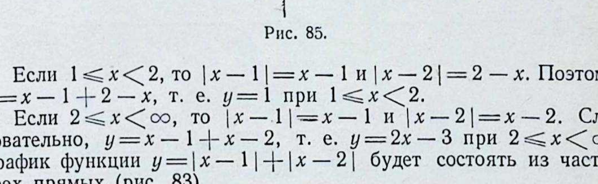


Рис. 85.

Если $1\leqslant x<2$, то $|x-1|=x-1$ и $|x-2|=2-x$. Поэтому $y=x-1+2-x$, т. е. $y=1$ при $1\leqslant x<2$.

Если $2\leqslant x<\infty$, то $|x-1|=x-1$ и $|x-2|=x-2$. Следовательно, $y=x-1+x-2$, т. е. $y=2x-3$ при $2\leqslant x<\infty$. График функции $y=|x-1|+|x-2|$ будет состоять из частей трех прямых (рис. 83).

Пример 7. Построить графики функций:

а) $y=\sin x$; б) $y=\sin|x|$; в) $y=|\sin x|$; г) $y=|\sin|x||$.

Решение. а) График функции $y=\sin x$ — синусоида (рис. 84).

б) $y=\sin|x|$ (см. п. 4). Нужно начертить синусоиду при $x\geqslant 0$ и отобразить ее относительно оси ординат (рис. 85).

в) $y=|\sin x|$ (см. п. 3). Нужно часть синусоиды, расположенную в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс (рис. 86).

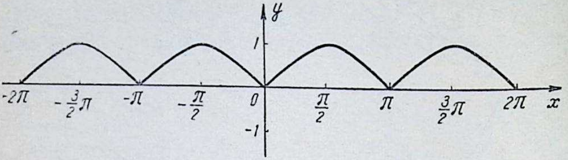


Рис. 86.

г) $y=|\sin|x||$ (см. п. 3). Нужно часть графика функции $y=\sin|x|$, расположенную в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 86).

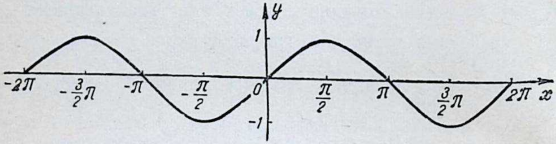


Рис. 87.

8. Построим график функции $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$ при $A>0$, $\omega>0$. Для этого необходимо: а) построить синусоиду $y=\sin x$; б) сжать синусоиду $y=\sin x$ в ω раз при $\omega>1$ вдоль оси абсцисс или произвести растяжение в $\frac{1}{\omega}$ раз при $0<\omega<1$, после чего

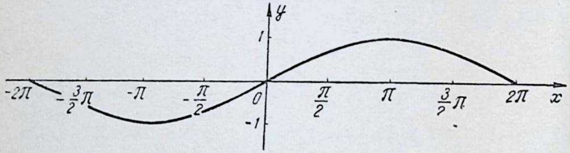


Рис. 88.

получим график функции $y=\sin\omega x$ (см. п. 5); в) затем график функции $y=\sin\omega x$ растянуть вдоль оси ординат в A раз при $A>1$ или сжать в $\frac{1}{A}$ раз при $0<A<1$. Получим график функции $y=A\sin\omega x$ (см. п. 6); г) график функции $y=A\sin\omega x$ перенести вдоль оси абсцисс на α единиц влево (при $\alpha>0$) или на $|\alpha|$ единиц вправо (при $\alpha<0$). Получим искомый график функции $y=A\sin\omega(x+\alpha)$ (см. п. 2).

Например, чтобы построить график функции $y=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$, нужно: а) построить синусоиду $y=\sin x$ (рис. 87); б) так как $\omega=\frac{1}{2}$, то растягиваем синусоиду в 2 раза вдоль оси абсцисс. Получим график функции $y=\sin\frac{1}{2}x$ (рис. 88); в) растянем график функции $y=\sin\frac{1}{2}x$ вдоль оси ординат в 2 раза. Получим график функции $y=2\sin\frac{1}{2}x$ (рис. 89); г) перенесем график функции $y=2\sin\frac{1}{2}x$ вправо вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{4}$ единиц. Получим график функции $y=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ (рис. 90).

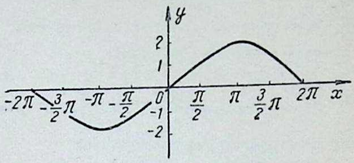


Рис. 89.

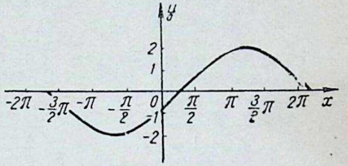


Рис. 90.

Аналогично можно построить графики функций

$$y=A\cos[\omega(x+\alpha)];\qquad y=A\operatorname{tg}[\omega(x+\alpha)];\qquad y=A\operatorname{ctg}[\omega(x+\alpha)].$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти области определения функций:

1. а) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$; б) $y=\sqrt{\frac{(2x-4)x^2}{x+6}}$;

в) $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x^2}}$; г) $y=\frac{1}{4-\sqrt{15+2x-x^2}}$.

2. а) $y=\sqrt{2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}}$; б) $y=\frac{1}{x^{\sqrt{5}}+4}$; в) $y=(x-2)^x$.

3. а) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^2-1}}$; б) $y=\frac{1}{\log_2(x^2-2x-8)-4}$;

в) $y=\lg|x-1|-\lg|x+2|$.

4. а) $y=\arcsin\sqrt{-x}$; б) $y=\arccos\sqrt{x^2-1}$; в) $y=\arcsin(1+\operatorname{tg}^2\pi x)$.

5. а) $y=\sqrt{\sqrt{2}-2\sin x}$; б) $y=\sqrt{\log_a\sin x}$; в) $y=\lg\lg\operatorname{tg}x$.

Установить четность или нечетность следующих функций:

6. а) $y=\sqrt[5]{(x+1)^4}+\sqrt[5]{(x-1)^4}$; б) $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

в) $y=|x|$.

7. а) $y=\frac{2^x+2^{-x}}{5}$; б) $y=\frac{2^x-2^{-x}}{4}$; в) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$.

8. а) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$; б) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

9. а) $y=x^4-5x^2+7\cos x$; б) $y=x^3-5x+3\sin x$.

Найти периоды функций:

10. а) $y=\sin\pi x$; б) $y=\cos^2 x$; в) $y=\sin^3 x$.

11. а) $y=3\sin\frac{x}{4}-2\cos\frac{x}{5}$; б) $y=3\operatorname{tg}2x-2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

Построить графики функций:

12. а) $y=|x|$; б) $y=|x-1|$; в) $y=1-|x|$;
г) $y=2x-|x-2|+1$; д) $y=x+|x+3|$.

13. а) $y=|x^2-3x+2|$; б) $y=x^2-3|x|+2$;
в) $y=|x^2-3|x|+2|$.

14. а) $y=\frac{2}{x-1}$; б) $y=-\frac{|x|}{x}$; в) $y=\frac{x}{1-x^2}$; г) $y=\frac{1}{x^2-4}$;
д) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

15. а) $y=1+\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; в) $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}$.

16. а) $y=3^{x+1}-1$; б) $y=2^{|x|}$; в) $y=a^x+a^{-x}$.

17. а) $y=\log_3(1-x^2)$; б) $y=a^{\log_a x}$ при $a>0$, $a\neq 1$;
в) $y=-\log_2|x|-1$; г) $y=\frac{1}{\lg x}$.

18. а) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\operatorname{cosec} x$; в) $y=\sec x$;
г) $y=|\sin x|+\sin x$.

19. а) $y=\arcsin|x|$; б) $y=\sin(\arcsin x)$; в) $y=\arcsin(\sin x)$.

20. а) $y=\lg\sin x$; б) $y=\sqrt{\log_5\cos x}$; в) $y=7^{\log_7\sin|x|}$.

ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. ТОЖДЕСТВО И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Под *математическим* или *аналитическим* выражением понимается символическая запись ряда математических операций (действий), которые следует произвести в определенной последовательности, чтобы получить численное значение данного выражения.

Числовым значением математического выражения называется число, которое получается, если в это выражение подставить вместо букв их данные числовые значения и произвести над ними действия, указанные в выражении. Например, для выражения x^2+2 численным значением его при $x=3$ будет число $11=3^2+2$.

Буквы, содержащиеся в математическом выражении, могут играть двоякую роль: одни буквы, называемые обычно *параметрами*, означают (каждая) вполне определенные числа (одни и те же в процессе данного рассуждения); другие, называемые *аргументами*, не обозначают определенных чисел, им можно приписывать различные числовые значения. При этом должно быть указано, какое именно числовое множество является *допустимым* для аргументов, а также область определения заданного математического выражения или, что то же самое, область допустимых значений (ОДЗ) для аргументов, входящих в данное выражение.

Например, в выражении для произвольного трехзначного числа в десятичной системе счисления $100x+10y+z$ допустимые значения аргументов есть тройки чисел x, y и z, где x — любое целое число, не меньшее 1 и не большее 9, а y и z — любое целое неотрицательное число не большее 9.

В квадратном трехчлене ax^2+bx+c аргументом является x, а a, b, c — данные числовые коэффициенты (параметры).

Если дано математическое выражение от некоторых аргумен-тов без указания допустимых значений для этих аргументов, то за область допустимых значений аргументов или, что то же самое за область определения этого выражения принимают естественную область задания, т. е. такую систему чисел, при которой выпол нимы все математические операции (на заданном числовом мно жестве) в рассматриваемом выражении.

Например, для выражения $\frac{2}{x-y}$ допустимой является любая система неравных чисел x и y; при $x=y$ деление невыполнимо и выражение теряет смысл. Для выражения $\sqrt{1-x^2}$ в области действительных чисел ОДЗ определяется из неравенства $1-x^2 \geqslant 0$ откуда $|x| \leqslant 1$ или $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Для выражения $\sqrt{-1-x^2-y}$ в области действительных чисел ни одна система чисел x, y не является допустимой, так как при любых действительных значе ниях x и y подкоренное выражение отрицательно.

Областью определения выражения $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$ является мно жество всех чисел, отличных от $x=1$ и $x=2$.

Допустимыми значениями букв, входящих в равенство (или неравенство), считаются те значения, которые являются допусти мыми для букв обоих математических выражений одновременно образующих равенство (или неравенство). Например, равенство $\sqrt{1-x^2}=2^{\frac{1}{2}\log_2(1-x^2)}$ в области действительных чисел справед ливо для $-1<x<1$, так как выражение $\sqrt{1-x^2}$ справедливо при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а выражение $2^{\frac{1}{2}\log_2(1-x^2)}$ — при $-1<x<1$. Оба выражения одновременно имеют смысл в области действительных чисел в общей части промежутков $[-1, 1]$ и $(-1, 1)$, т. е. в про межутке $(-1, 1)$.

Равенство, справедливое при всех допустимых значениях вхо-дящих в него букв, а также справедливое числовое равенство называется *тождеством*. Выражения, находящиеся в левой и пра-вой частях тождества, называются *тождественными*. Замена ма-тематического выражения тождественным ему называется *тожде-ственным преобразованием* данного выражения.

Два выражения могут быть тождественными в одних условиях и не быть тождественными в других. Это определяется ОДЗ для аргументов. Например, если решается задача, в которой x есть угол треугольника, то равенство $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$ — тождество; здесь область определения — $0<x<\pi$. Если же никаких огра-ничений на x не наложено, то ОДЗ будет x — любое действи-тельное число $(-\infty<x<+\infty)$ и тогда рассматриваемое равен-ство не будет тождественным, так как существуют такие значения x, при которых $\sin x<0$, а $\sqrt{\sin^2 x} \geqslant 0$ всегда (рассматривается арифметический корень).

Неравенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, а также справедливое числовое неравенство называется *тождественным*. Доказательство утверждения, что некоторое неравенство тождественное, называется доказательством неравенства. Например, простой проверкой доказывается тождество $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; доказательство известного тождественного равенства $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ сводится к теореме Пифагора, справедливость которой устанавливается в геометрии; справедливость неравенства $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, где $a>0$ и $b>0$, устанавливается сведéнием данного неравенства к очевидному неравенству $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

Математические выражения подразделяются на *алгебраические* и *неалгебраические* (трансцендентные).

Математическое выражение называется алгебраическим, если в него входят лишь алгебраические операции: четыре арифметических действия (сложение, вычитание, умножение, деление), возведение в целую степень и извлечение корня целой степени.

В элементарной математике рассматриваются лишь простейшие трансцендентные операции: x^α (где α — иррациональное число), a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\arccos x$ и т. д.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

В каждом отдельном случае в алгебраическом выражении выделяются основные буквенные величины — аргументы, по отношению к которым ведется классификация, и неосновные величины (остальные буквы) — параметры. Выражение относится к тому или иному классу в зависимости от того, какие действия производятся над основными величинами (аргументами), входящими в него.

В целых рациональных выражениях над аргументами производятся только сложение, вычитание, умножение и возведение в целую положительную степень. Примерами целых рациональных выражений могут служить: x; x^3; $2(x-y)$; $x^2-2ax+a^2$ и т. п. ОДЗ для аргументов целого рационального выражения является произвольная система чисел, взятых в качестве значений аргументов из числового множества, на котором это выражение рассматривается.

В рациональных выражениях над аргументами производятся сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целые положительную и отрицательную степени. Рациональное выражение называется *дробным*, если оно содержит действие деления на выражения, содержащие аргументы. Например:

$$\frac{1}{x^2};\quad x^{-3}+1;\quad \frac{2x+3}{x-1};\quad \frac{x-y}{(x+y)^2}+x-y^{-2}.$$

ОДЗ для аргументов являются все числа (из данного числового множества), кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль. Если же рассматриваются несколько алгебраических дро-бей, то допустимыми значениями букв будут те, которые не обра-щают в нуль ни один из знаменателей этих дробей. Так, дробь $\frac{2x+7}{x-3}$ определена для любых x за исключением $x=3$; в дробях $\frac{2x-15}{x-2}$ и $\frac{4x^2-9}{x+6}$, если они рассматриваются совместно, допусти-мые значения x — любые за исключением $x=2$ и $x=-6$; дробь $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ определена для любых x и y за исключением $x=y$.

Выражения $\frac{a}{0}$; $\frac{x-5}{x-x}$; $\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2-x^2+2xy-y^2}$ не считаются ра-циональными, так как они не имеют численного значения ни пр[и] каких значениях аргументов x и y.

В *иррациональных выражениях* к рациональным операция[м] присоединяется извлечение корня из аргументов, а также [и]з рациональных выражений, содержащих аргументы (возведени[е] в дробную степень).

В элементарной математике за корень четной степени из н[е]отрицательного действительного числа принимается арифмети[че]ский корень ($\sqrt{4}=2$; $\sqrt{(-3)^2}=3$), а за корень нечетной ст[е]пени из любого действительного числа принимается его единстве[н]ное действительное значение ($\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{-8}=-2$).

Исходя из этих положений, определяется ОДЗ букв, входящи[х] в иррациональное выражение: для корня четной степени подк[о]ренное выражение должно быть неотрицательным, для корня н[е]четной степени — любым действительным. Если приходится ра[с]сматривать выражения, содержащие дроби, необходимо, кро[ме] того, исключить из допустимых значений букв, значения кот[о]рых обращают знаменатели дробных выражений в нуль. Есл[и] рассматриваются совместно несколько иррациональных выраж[е]ний, то ОДЗ их будет общая часть всех ОДЗ отдельных ра[с]сматриваемых выражений.

Тождественные преобразования выражений производятся н[а] основании законов равенства, определений действий (операци[й]) над теми или иными выражениями, а также на основании зако[]нов этих действий (операций).

§ 3. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Наиболее простым видом целого рационального выражени[я] является одночлен. Одночленом называется произведение число[]вого множителя и одной или нескольких букв, каждая из кото[]рых взята в некоторой степени с целым неотрицательным пока[]зателем. Одно число, выраженное цифрами или одной буквой[,] также считается одночленом. Числовой множитель одночлена на[]зывается числовым *коэффициентом* одночлена. Он может равняться единице и тогда не пишется. Но любой множитель, например в виде буквы, или несколько таких множителей, не являющихся аргументами, можно принять за коэффициент. В этом случае коэффициент будет буквенный. Два одночлена называются *равными*, если у них равны коэффициенты и они составлены из одинаковых букв с соответственно равными показателями. Одночлены называются *подобными*, если они равны или отличаются только коэффициентами.

Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется *многочленом*. Одночлен рассматривается как частный случай многочлена.

Правила действий над целыми выражениями устанавливаются на сснованиии общих законов арифметических действий. Можно показать, что при помощи элементарных преобразований (приведение подобных членов, сложение, вычитание и умножение одночленов и многочленов) всякое целое рациональное выражение можно представить в виде многочлена. Если многочлен не имеет подобных членов, то он называется *приведенным*. Для приведенных многочленов справедлива теорема: *чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты их членов, содержащие одни и те же буквы в одинаковых степенях, были равны.*

Операции умножения многочлена на многочлен и возведения многочлена в целую положительную степень достаточно трудоемки. Поэтому полезны формулы сокращенного умножения и деления, справедливость которых устанавливается прямым выполнением указанных действий:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b);$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

Часто также приходится возвышать в квадрат многочлен. Пользуясь формулой $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, легко возвысить в квадрат трехчлен

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Теперь нетрудно четырехчлен $a+b+c+d$ возвысить в квадрат, принимая сумму $(a+b+c)$ за один член. После преобразований получим:

$$(a+b+c+d)^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Итак, квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов с удвоенными произведениями каждого члена многочлена на каждый из последующих (с учетом знаков этих произведений).

На практике часто встречается необходимость в разложении многочлена на множители, т. е. представления многочлена в виде произведений множителей (одночленов и многочленов).

Какие-либо общие указания для совершения этой операции дать трудно. Отметим лишь некоторые частные приемы разложения многочленов на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки

$$ab + ac = a(b + c).$$

2. Метод группировки

$$ab + bc + ad + cd = (ab + bc) + (ad + cd) = b(a + c) + d(a + c) = \\ = (a + c)(b + d).$$

3. Применение формул сокращенного умножения и деления

$$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5).$$

4. Использование свойств алгебраических уравнений

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2.$$

Выносим x^2 за скобки. Подбором устанавливаем, что числа $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ являются корнями уравнения $P(x) = 0$. Деля $P(x)$ на $x^2(x-1)(x+1) = x^4 - x^2$, получаем в частном: $x^2 - 2x + 5$. В этом выражении $p = -2$, $q = 5$, $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 5 < 0$ и оно больше на действительные множители разложено быть не может. Следовательно,

$$P(x) = x^2(x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 5).$$

Приведем примеры разложения многочленов на множители.

Пример 1. Разложить на множители $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Решение. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = (x + y)^3 + 3(x + y)^2 z + 3(x + y)z^2 + z^3 - (x^3 + y^3) - z^3 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2 + 3xz + 3yz + 3z^2 - x^2 + xy - y^2) = (x + y)(3xy + 3xz + 3yz + 3z^2) = 3(x + y)[x(y + z) + z(y + z)] = 3(x + y)(y + z)(x + z)$.

Пример 2. Разложить на множители $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

Решение. Сумма коэффициентов при аргументе x во всех степенях равна 9, отсюда

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x^3 - 1) + (5x^2 - 5) + (3x - 3) = \\ = (x - 1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3) = (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = \\ = (x - 1)(x + 3)^2.$$

Пример 3. Разложить на множители $A = (x + 1)(x + 3)(x + 5) \times (x + 7) + 15$.

Решение. Сумма свободных членов в первой и четвертой скобках равна сумме свободных членов во второй и третьей скобках $(1+7=3+5)$. Выполним умножение первой скобки на четвертую, второй — на третью:

$$A=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+$$
$$+7\cdot 15+15=(x^2+8x)^2+2\cdot 11(x^2+8x)+121-1=$$
$$=(x^2+8x+11)^2-1=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)=$$
$$=(x^2+8x+10)(x+6)(x+2).$$

Пример 4. Разложить на множители $A=y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$.

Решение. $A=ay^3-xy^3-ax^3+x^3y+a^3(x-y)=xy(x^2-y^2)-a(x^3-y^3)+a^3(x-y)=(x-y)(x^2y+xy^2-ax^2-axy-ay^2+a^3)=(x-y)[x^2(y-a)+xy(y-a)-a(y^2-a^2)]=(x-y)\times(y-a)(x^2+xy-ay-a^2)=(x-y)(y-a)[(x^2-a^2)+y(x-a)]=(x-y)(y-a)(x-a)(x+y+a)$.

Приведем примеры на доказательство тождеств.

Пример 5. Доказать тождество

$$(2+xy+x+y)^2+(2-xy+x-y)^2=2(x+2)^2+2y^2(x+1)^2.$$

Доказательство. Если в левой части равенства возвысить многочлены в квадрат и затем производить группировку, то трудно получить правую часть данного равенства. Проще принять $x+2=u$ и $xy+y=v$, тогда, обозначив левую часть данного равенства через A, получим:

$$A=(u+v)^2+(u-v)^2=2u^2+2v^2=2(x+2)^2+2(xy+y)^2=$$
$$=2(x+2)^2+2y^2(x+1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. Доказать, что произведение любых четырех последовательных целых чисел, увеличенное на единицу, равно квадрату некоторого целого числа.

Доказательство. Пусть n — любое целое число. Тогда имеем:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1=$$
$$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2.$$

При целом n число n^2+3n+1 — также целое, что и требовалось доказать.

Часто встречаются так называемые *условные тождества* — равенства, справедливые при всех значениях аргументов, удовлетворяющих одному или нескольким условиям.

Пример 7. Показать, что $x^3+y^3+z^3=3xyz$ при условии: $x+y+z=0$.

Решение. $(x+y+z)^3=0$ или $(x+y)^3+3(x+y)\times z(x+y+z)+z^3=x^3+3xy(x+y)+y^3+z^3=0$, откуда $x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)$.

Но из условия $x+y+z=0$ имеем: $x+y=-z$, поэтому $x^3+y^3+z^3=3xyz$, что и требовалось доказать.

Пример 8. Показать, что $(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=$ $=(3x-5y)^2$ при условии: $x^2=y^2+z^2$.

Решение. Обозначим левую часть данного равенства через A и преобразуем ее

$$A=(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(5x-3y)^2-16z^2=$$
$$=25x^2-30xy+9y^2-16(x^2-y^2)=9x^2-30xy+25y^2=$$
$$=(3x-5y)^2,$$

что и требовалось доказать.

Делимость многочленов

Сложение, вычитание и умножение целых рациональных выражений всегда выполнимо в том смысле, что в результате этих операций получается снова целое рациональное выражение. Иначе дело обстоит с делением.

Разделить один многочлен ($M(x)$) на второй ($N(x)$) — это значит отыскать (если это возможно) такой третий многочлен ($Q(x)$), произведение которого на второй равно первому многочлену ($QN=M$). Для этого необходимо, чтобы степень многочлена-делителя была не больше степени многочлена-делимого.

Если $M(x)$, $N(x)$ и $Q(x)$ связаны равенством $M(x)=N(x)\cdot Q(x)$, то говорят, что $M(x)$ на $N(x)$ делится нацело (без остатка). Но далеко не всякие три многочлена могут быть связаны таким равенством. Вместе с тем, если степень $M(x)$ не ниже степени $N(x)$, то всегда можно по ним найти такие единственные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ (степень $R(x)$ меньше степени $N(x)$), когда выполняется тождество

$$M(x)=N(x)\cdot Q(x)+R(x).$$

Отыскание многочленов $Q(x)$ (неполное частное) и $R(x)$ (остаток) по данным многочлена $M(x)$ (делимое) и $N(x)$ (делитель) называется *делением с остатком* многочлена $M(x)$ на многочлен $N(x)$.

Все сказанное о делимости многочленов относится к любым целым рациональным выражениям, поскольку последние можно свести к многочленам.

Пример 9. Определить, при каких значениях a и b многочлен $M(x)=x^3+8x^2+5x+a$ делится на трехчлен $N(x)=x^2+3x+b$.

Решение. При делении многочлена $M(x)$ на многочлен $N(x)$ в нашем случае в частном должен получиться многочлен первой степени. Пусть $Q(x)=Ax+B$, где A и B — пока неизвестные коэффициенты. Тогда по условию задачи $M(x)=N(x)\cdot Q(x)$, или в нашем случае,

$$x^3+8x^2+5x+a=(x^2+3x+b)(Ax+B),$$
$$x^3+8x^2+5x+a=Ax^3+(3A+B)x^2+(Ab+3B)x+Bb.$$

Последнее равенство — тождество, которое будет иметь место, когда коэффициенты при одинаковых степенях аргумента равны друг другу. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим: $1=A$, $8=3A+B$, $5=Ab+3B$, $a=Bb$, откуда $A=1$, $B=5$, $b=-10$, $a=-50$.

Таким образом, многочлен $M(x)$ будет делиться на многочлен $N(x)$, когда $a=-50$, $b=-10$, т. е. многочлен $x^3+8x^2+5x-50$ делится на $x^2+3x-10$. Рекомендуем это проверить, выполнив деление по схеме «углом».

Большой интерес представляет возможность установления такого признака, по которому можно было бы, не производя деления, судить о делимости или неделимости данного многочлена $M(x)$ на двучлен $N(x)=x-a$. В этом случае делитель $N(x)$ есть многочлен первой степени и, следовательно, остаток $R(x)$ — многочлен нулевой степени, т. е. некоторое число R, не зависящее от x.

Теорема Безу. *Остаток R от деления многочлена $M(x)$ на двучлен $x-a$ равен тому значению многочлена $M(x)$, которое получится, если в нем всюду вместо x подставить число a* ($R=M(a)$).

Из теоремы Безу легко получаются такие очевидные следствия:

1. Если $M(a)=0$, то многочлен $M(x)$ делится на двучлен $x-a$ без остатка.

2. Если $M(a)\neq 0$, то многочлен $M(x)$ не делится на двучлен $x-a$.

3. Остаток от деления многочлена $M(x)$ на двучлен $x+a$ равен $M(-a)$.

4. Если $M(-a)=0$, то многочлен $M(x)$ делится на двучлен $x+a$ без остатка.

5. Если $M(-a)\neq 0$, то многочлен $M(x)$ не делится на двучлен $x+a$.

Пример 10. Проверить, делится ли многочлен $M(x)=x^4+x^3-2x^2+4x-24$ на двучлены: а) $x-2$; б) $x-4$; в) $x+1$; г) $x+3$.

Решение. а) $M(2)=0$ — значит делится; б) $M(4)=280\neq 0$ — не делится; в) $M(-1)=-30\neq 0$ — не делится; г) $M(-3)=0$ — делится.

Таким образом, если многочлен $M(x)$ имеет корень $x=a$, то он делится на $x-a$ нацело, т. е. разлагается на два множителя: $M(x)=(x-a)\,Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени, на единицу меньше чем $M(x)$.

Если многочлен с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшей степени аргумента равным единице имеет целый корень, то этот корень должен находиться среди делителей свободного члена. Для испытания корней следует брать делители свободного члена как со знаком (+), так и со знаком (—). Этим можно пользоваться для разложения многочлена на множители.

Пример 11. Разложить на множители

$$M(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9.$$

Решение. Свободный член 9 имеет целые делители: ±1; ±3; ±9. Испытывая эти числа, имеем:

$$M(1)=1-6+10-6+9\neq0,$$
$$M(-1)=1+6+10+6+9\neq0,$$
$$M(3)=81-6\cdot27+10\cdot9-6\cdot3+9=0.$$

Следовательно, число 3 есть корень многочлена $M(x)$. Но в этом случае многочлен делится на $x-3$. Разделив $x^4-6x^3+10x^2-6x+9$ на $x-3$, получаем в частном: $Q(x)=x^3-3x^2+x-3$. Таким образом,

$$x^4-6x^3+10x^2-6x+9=(x-3)(x^3-3x^2+x-3).$$

Для разложения многочлена $Q(x)$ можно воспользоваться тем же методом

$$x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+1(x-3)=(x-3)(x^2+1).$$

Таким образом,

$$x^4-6x^3+10x^2-6x+9=(x-3)^2(x^2+1).$$

§ 4. ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Дробное выражение определяется, как рациональное выражение. Оно включает действие деления на выражения, содержащие аргументы. К определению алгебраической дроби можно подойти и по-другому. Если целое алгебраическое выражение M делят на целое выражение N, то частное иногда обозначают $\frac{M}{N}$ и называют *отношением* M к N.

Отношение двух целых выражений называется *дробным алгебраическим выражением*, или *алгебраической рациональной дробью*. Обыкновенные арифметические дроби являются частным случаем алгебраических. Они получаются из алгебраических, когда числитель и знаменатель — целые положительные числа.

Можно доказать, что необходимым и достаточным условием равенства значений двух дробей $\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}$ при всех допустимых значениях аргументов является выполнение тождества

$$MQ=NP. \qquad (3,1)$$

Алгебраические дроби называются *тождественными*, если для них выполняется тождество (3,1). Здесь важно иметь в виду, что тождество $\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}$ справедливо лишь при тех значениях входящих в дроби аргументов (букв), которые не обращают в нуль N

и Q ($N \neq 0$, $Q \neq 0$), тождество $MQ = NP$ имеет место при любых значениях тех же аргументов.

Например, дроби $\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$ и $\frac{x}{x - y}$ тождественны, так как

$$(x^2 + xy)(x - y) = (x^2 - y^2)x.$$

Данные дроби тождественны при всех значениях x и y, за исключением $x = \pm y$, когда они неопределенны. Последнее тождество имеет место при любых x и y.

Дроби $\frac{x^2}{x}$ и $\frac{x}{1}$ тождественны, так как $x^2 \cdot 1 = x \cdot x$. Эти дроби тождественны при всех значениях x за исключением $x = 0$, когда дробь $\frac{x^2}{x}$ не определена, тождество же $x^2 = x \cdot x$ имеет место при любых значениях x.

Непосредственно из определения равенства двух алгебраических дробей следуют все обычные свойства равенства. Кроме того, если S — рациональное алгебраическое выражение, то $\frac{M}{N} = \frac{MS}{NS}$ для всех значений аргументов, при которых S не обращается в нуль. Так, например,

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{(x + y)(x + y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{(x + y)^2}{x^2 - y^2}, \quad \text{если } x \neq \pm y.$$

Алгебраическая дробь называется *несократимой*, если ее числитель и знаменатель не имеют общих множителей. Можно доказать, что для любой алгебраической дроби существует тождественная ей несократимая алгебраическая дробь.

Чтобы прийти от данной дроби к тождественной ей несократимой дроби, надо выявить общий наибольший делитель числителя и знаменателя и на него сократить дробь. *Общим наибольшим делителем* (ОНД) двух целых алгебраических выражений называется такое алгебраическое выражение наибольшей степени (относительно аргументов), которое является делителем обоих выражений.

Например, ОНД выражений $x^3 + y^3$ и $x^4 - y^4$ является $x + y$, поэтому дробь

$$\frac{x^3 + y^3}{x^4 - y^4} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}.$$

Последняя дробь — несократима. Дробь

$$\frac{x^2 + 5y + 6y^2}{x^2 - xy - 2y^2}$$

также несократима, так как, разлагая числитель и знаменатель на множители, имеем:

$$x^2 + 5y + 6y^2 = (x + 2y)(x + 3y);$$
$$x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y).$$

Видно, что числитель и знаменатель данной дроби не содержат общих множителей. ОНД числителя и знаменателя равен 1 (числитель и знаменатель взаимно просты).

Алгебраические дроби можно приводить к общему знаменателю. Именно, каковы бы ни были две дроби $\frac{M}{N}$ и $\frac{P}{Q}$, существуют дроби, соответственно тождественные данным и имеющие один и тот же знаменатель $\left(\frac{MQ}{NQ}; \frac{PN}{NQ}\right)$.

Если знаменатели N и Q не взаимно просты, то в качестве общего знаменателя может быть взято общее наименьшее кратное (ОНК) многочленов N и Q. ОНК находится следующим образом. Многочлены N и Q разлагаются на множители, а затем составляется произведение одночленных и многочленных множителей, содержащихся в разложении хотя бы одного из данных многочленов (N или Q). При этом каждый множитель берется в наибольшей степени, в которой он входит в разложения N или Q. Приведение дробей к общему знаменателю производится умножением числителя и знаменателя каждой дроби на множители, дополняющие ее знаменатель до ОНК N и Q.

Пример 12. Привести дроби $\frac{x}{x^2-y^2}$ и $\frac{xy}{x^3-y^3}$ к общему знаменателю.

Решение. Знаменатели дробей разлагаем на множители:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y); \quad x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Находим ОНК: $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)$. Умножая числитель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель, получим:

$$\frac{x}{x^2-y^2}=\frac{x(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x^3+x^2y+xy^2}{x^4+x^3y-xy^3-y^4};$$

$$\frac{xy}{x^3-y^3}=\frac{xy(x+y)}{(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x^2y+xy^2}{x^4+x^3y-x^2y^3-y^4}.$$

Правила действий над алгебраическими дробями аналогичны соответствующим правилам действий для арифметических дробей. В результате сложения, вычитания, умножения и деления алгебраических дробей снова придем к алгебраической дроби, а в отдельных случаях — к целому рациональному выражению. Приведение рационального выражения к виду несократимой алгебраической дроби называется его упрощением.

Приведем примеры на действия с алгебраическими дробями.

Пример 13. Сложить дроби

$$A=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Решение. Общий знаменатель этих дробей $N=(x-y)\times$ $\times(y-z)(z-x)$.

$$A=\frac{1}{N}[x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)]=$$
$$=\frac{1}{N}[-x^2(y-z)+xy^2-y^2z+yz^2-xz^2]=$$
$$=\frac{1}{N}[-x^2(y-z)+x(y^2-z^2)-yz(y-z)]=$$
$$=\frac{y-z}{N}(-x^2+xy+xz-yz)=\frac{y-z}{N}[-x(x-y)+z(x-y)]=$$
$$=\frac{(y-z)(x-y)(z-x)}{N}=\frac{N}{N}=1.$$

Пример 14. Доказать тождество

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

Решение. Заметим, что дроби, находящиеся в левой части, получаются друг из друга круговой перестановкой букв. Преобразуем первое слагаемое, разбив его на две дроби

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}.$$

Произведя круговую перестановку букв, получим для второго и третьего слагаемых:

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a};\quad \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}.$$

Данное тождество доказывается почленным сложением полученных тождеств.

Пример 15. Сложить дроби

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}.$$

Решение. Не следует приводить все дроби сразу к общему знаменателю. Сложим сначала первые две дроби, затем к полученному результату прибавим третью дробь и т. д.

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a}{a^2-b^2};\quad \frac{2a}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a^2+b^2}=\frac{4a^3}{a^4-b^4};$$
$$\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}=\frac{8a^7}{a^8-b^8};\quad \frac{8a^7}{a^8-b^8}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}=\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}.$$

Пример 16. Показать, что $xy+xz+yz=0$, если $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=1$.

Решение. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.
Но так как по условию $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то $ab+ac+bc=0$. Далее положим $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{k}$ (при $k\neq0$);

тогда $a=kx$, $b=ky$, $c=kz$. Подставляя эти значения a, b и c в равенство $ab+ac+bc=0$, получим:

$$k^2xy+k^2xz+k^2yz=0.$$

Поскольку $k^2\neq 0$, то $xy+xz+yz=0$, что и требовалось доказать.

Пример 17. Определить A и B так, чтобы имело место тождество

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x+1)^2}.$$

Решение. $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x+1)^2}=\dfrac{A(x+1)^2+B(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}=$
$=\dfrac{Ax^2+(2A+B)x+A-2B}{x^3-3x-2}$, отсюда

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x-2}=\frac{Ax^2+(2A+B)x+A-2B}{x^3-3x-2}$$

и

$$x^2+5=Ax^2+(2A+B)x+A-2B.$$

Пользуясь определением тождественных многочленов, находим: $A=1$; $2A+B=0$; $A-2B=5$. Следовательно, $A=1$, $B=-2$.

При выполнении преобразований рациональных выражений часто пользуются отрицательной степенью числа. Напомним, что при $a\neq 0$ по определению имеем: $a^0=1$ и $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, где n — целое положительное число.

Известные правила действий со степенями, ранее установленные для натуральных показателей, остаются в силе для любых целых степеней. Так, формулы

$$a^m a^n=a^{m+n};\quad a^m:a^n=a^{m-n};$$

$$(a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^n=a^nb^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

остаются верными для любых целых m и n при допустимых значениях a и b. Формула $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ также верна при любом целом n и $a\neq 0$, но при $n>0$ — по определению, а при прочих n — устанавливается соответствующей теоремой.

Приведем примеры на преобразование рациональных выражений, содержащих отрицательные степени.

Пример 18. Упростить выражение

$$\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right]:\left(2a^nb+3a^{n+1}-6\frac{a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}.$$

Решение. Обозначим выражение в квадратных скобках через A, выражение в круглых скобках — через B. Тогда

$A : B^{-1} = AB$. В выражении A перейдем к положительным показателям степеней. Получим:

$$A = \frac{2a+b}{a(2b+a)} - \frac{6b}{4b^2-a^2} = \frac{(b-2a)(2b+a)}{a(2b+a)(2b-a)} = \frac{b-2a}{a(2b-a)}.$$

Теперь преобразуем B

$$B = a^n\left(2b+3a-\frac{6a^2}{2a-b}\right) = a^n\frac{b(a-2b)}{2a-b}.$$

Находим: $AB = a^{n-1}\cdot b$.

Пример 19. Упростить выражение

$$A = \frac{x^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}-b(ax)^{-1}}, \text{ если } x = \frac{1}{(a+b)^{-1}} - \left(\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)^{-1}.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель выражения A на ax, тогда $A = \frac{a-x}{x-b}$. С другой стороны, $x = a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$, поэтому

$$A = \frac{a-x}{x-b} = \frac{a-\frac{2ab}{a+b}}{\frac{2ab}{a+b}-b} = \frac{a^2+ab-2ab}{2ab-ab-b^2} = \frac{a(a-b)}{b(a-b)} = \frac{a}{b}.$$

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Преобразования иррациональных выражений основаны на общих законах арифметических действий и на следующих теоремах, справедливых для арифметических корней:

1. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$; 2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

3. $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$; 4. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$; 5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

6. $\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}$.

(Если же m — четно и $a<0$, то последняя формула принимает вид: $\sqrt[m]{a^m b} = -a\sqrt[m]{b}$ при $m=2k$, $a<0$).

7. $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$.

(Если же $m=2k$ (четное) и $a<0$, то $a\sqrt[m]{b} = -\sqrt{a^m b}$).

Еще раз подчеркнем, что перечисленные теоремы для корней, не являющихся арифметическими, не во всех случаях справедливы. Четная степень любого действительного числа — неотрицательна, поэтому в области действительных чисел действие извлечения корня четной степени из отрицательных чисел невыполнимо (символ $\sqrt[2k]{a}$ при $a<0$ не имеет смысла в области действительных чисел).

Если показатель $m=2k+1$ — нечетный, то теоремы **1**, **2**, **4**, **6** и **7** справедливы и в том случае, когда все или некоторые подкоренные выражения отрицательны. Теоремы **3** и **5** в этом случае имеют место лишь при дополнительном условии, что $n=2l+1$ — нечетно. Так, если $n=2$, $m=3$, $a=-8$, то левая часть формулы 3 дает $\sqrt[6]{64}=2$, а правая $\sqrt[3]{-8}=-2$. Что касается формулы 5, то обе ее части при тех же числовых значениях букв не имеют смысла.

Всякое иррациональное выражение может быть приведено к так называемому *нормальному виду*. Это можно произвести при помощи сокращения показателя, вынесения множителя за знак корня, уничтожения иррациональности в знаменателе.

Сокращение показателя производится на общий делитель показателя корня и показателей всех множителей, стоящих под знаком корня (подкоренное выражение предварительно разлагается на множители). Например,

$$\sqrt[6]{16(x^{12}-2x^{11}+x^{10})}=\sqrt[6]{2^4x^{10}(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x^5(x-1)}.$$

Вынесение за знак корня множителя A возможно, если его показатель степени m больше или равен показателю корня n. Тогда m делится на n и A выносится за корень в степени частного и остается под корнем в степени остатка от этого деления. Например,

$$\sqrt[3]{32x^4y^6z^{10}t^2}=2xy^2z^3\sqrt[3]{4xzt^2}.$$

Уничтожение иррациональности в знаменателе производится различными способами, которые проиллюстрируем на примерах.

1. $\sqrt{\frac{a}{3b}}=\sqrt{\frac{a\cdot 3b}{9b^2}}=\frac{1}{3b}\sqrt{3ab}.$

2. $\sqrt[3]{\frac{x}{4yz^2}}=\sqrt[3]{\frac{x\,2y^2z}{8y^3z^3}}=\frac{1}{2yz}\sqrt[3]{2xy^2z}.$

3. $\frac{x}{\sqrt[3]{xy^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{x^3y^3}}=\frac{1}{y}\sqrt[3]{x^2y}.$

4. $\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}=\frac{x(\sqrt{3}+\sqrt{x})}{3-x}.$

5. $$\frac{xy}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{xy^2}}=\frac{xy\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3xy^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{xy^2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3xy^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)}=$$
$$=\frac{xy\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3xy^2}+y^2\sqrt[3]{x^2y}\right)}{3+xy^2}$$

6. $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}=$$
$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc}.$$

При умножении и делении радикалов с различными показателями пользуются теоремами 1 и 2, предварительно приведя данные радикалы к общему показателю

$$\sqrt[m]{A}\sqrt[n]{B}=\sqrt[mn]{A^n}\sqrt[mn]{B^m}=\sqrt[mn]{A^nB^m}.$$

Подобным образом

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[mn]{\frac{A^n}{B^m}}=\sqrt[mn]{\frac{A^nB^{mn-m}}{B^{mn}}}=\frac{1}{B}\sqrt[mn]{A^nB^{m(n-1)}}.$$

Например,

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{108};$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}}=\frac{1}{b}\sqrt[6]{a^3b^2}.$$

Приведение корней к общему показателю необходимо, например, при установлении равенства или неравенства между числами, выраженными через радикалы.

Пример 20. Что больше $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$?

Решение. Пусть $\sqrt[3]{3}\vee\sqrt[5]{5}$, где знак $\vee$ означает один из знаков $>$, $=$, $<$. Приведем радикалы к общему показателю. Имеем: $\sqrt[15]{3^5}\vee\sqrt[15]{5^3}$ или $\sqrt[15]{243}\vee\sqrt[15]{125}$, а так как $243>125$, то $\sqrt[15]{243}>\sqrt[15]{125}$ и $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

При преобразованиях иногда бывает полезна формула, которая называется формулой „сложного“ квадратного радикала

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (3,2)$$

(здесь знаки берутся одновременно либо верхние, либо нижние). Справедливость этой формулы легко установить хотя бы возведением обеих частей в квадрат. Формулу (3,2) целесообразно применять, когда A^2-B есть точный квадрат некоторого числа.

Например,

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}}=$$
$$=\sqrt{8}+1=2\sqrt{2}+1.$$

Приведем ряд примеров на преобразование иррациональных выражений.

Пример 21. Упростить выражение

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Решение. Все подкоренные выражения положительны. Произведение третьего и четвертого множителей равно

$$\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Умножая на второй множитель, получим:

$$\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

И, наконец, умножим на первый множитель $A=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$. Итак, $A=1$.

Пример 22. Упростить, а затем найти численную величину выражения

$$A=a+\sqrt{a^2\frac{(1+b^2)^2-4b^2}{(b^2+1)^2}},\ \text{если}\ a=-2,\ b=2.$$

Решение. $A=a+\sqrt{\frac{a^2}{(b^2+1)^2}}\sqrt{1+2b^2+b^4-4b^2}=$
$=a-\frac{a}{b^2+1}(b^2-1)=\frac{2a}{b^2+1}$.

Так как $a<0$ и $b>1$, то арифметические корни $\sqrt{a^2}=-a$, $\sqrt{(1-b^2)^2}=b^2-1$, что и было учтено в преобразованиях. Подставляя значения a и b, получим:

$$A=\frac{2(-2)}{2^2+1}=-\frac{4}{5}.$$

Пример 23. Упростить выражение

$$A=\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}},$$

если $a>0$, $x>0$, $a\neq x$.

Решение. $A=\left(\frac{\sqrt[4]{ax}\,(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\times$

$$\times\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{2}}=\left(\frac{-\sqrt{ax}+1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=\sqrt{ax}+a.$$

Пример 24. Упростить выражение

$$A=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (3,2), преобразуем знаменатели. Так как

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}},$$

то

$$\sqrt{2}\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$A=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,[(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})]}{9-3}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,(3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3})}{6}=\sqrt{2}.$$

Пример 25. Упростить выражение

$$A=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}},\text{ если } x=\frac{2ab}{b^2+1},\ a>0,\ 0<b<1.$$

Решение. $A=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a}{x}+$

$+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{x^2}}=\frac{a}{x}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}$, но $\frac{a}{x}=\frac{b^2+1}{2b}$, поэтому

$$A=\frac{b^2+1}{2b}+\sqrt{\frac{(b^2+1)^2}{4b^2}-1}=\frac{b^2+1}{2b}+\frac{1-b^2}{2b}=\frac{1}{b}.$$

Пример 26. Какое из двух чисел больше $3\sqrt{3}+\sqrt{15}$ или 7?

Решение. Пусть $3\sqrt{3}+\sqrt{15}\vee 7$. Если числа x и y неотрицательные и $x=y$, или $x>y$, или $x<y$, то при натуральном n будет соответственно $x^n=y^n$, $x^n>y^n$, $x^n<y^n$.

Итак, если $3\sqrt{3}+\sqrt{15}\vee 7$, то $(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2\vee 7^2$; $27+6\sqrt{45}+15\vee 49$; $6\sqrt{45}\vee 7$. Повторяя эту операцию, получим: $36\cdot 45\vee 49$; $1620\vee 49$; но $1620>49$, поэтому $3\sqrt{3}+\sqrt{15}>7$.

Пример 27. Найти численную величину выражения $A=x^3-6x-21$, если $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Решение. Для вычисления x^3 воспользуемся формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Тогда

$$A=\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3+$$
$$+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\,x-6x-21=20+14\sqrt{2}+$$
$$+20-14\sqrt{2}+3\cdot 2x-6x-21=19.$$

Пример 28. Упростить выражение

$$A=\sqrt{x^2+6x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2-8x+16}.$$

Решение. $A=\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=$ $=|x+3|+|x-2|+|x-4|$.

а) Если $x\leqslant -3$, то $x+3\leqslant 0$, $x-2<0$, $x-4<0$; следовательно,

$$A=(-x-3)+(-x+2)+(-x+4)=-3x+3.$$

б) Если $-3<x\leqslant 2$, то $x+3>0$, $x-2\leqslant 0$, $x-4<0$; следовательно,

$$A=(x+3)+(-x+2)+(-x+4)=-x+9.$$

в) Если $2<x\leqslant 4$, то $x+3>0$, $x-2>0$, $x-4\leqslant 0$; следовательно,

$$A=(x+3)+(x-2)+(-x+4)=x+5.$$

г) Если $x>4$, то $x+3>0$, $x-2>0$, $x-4>0$; следовательно,

$$A=(x+3)+(x-2)+(x-4)=3x-3.$$

Итак, $A=-3x+3$, если $x\leqslant -3$; $A=-x+9$, если $-3<x\leqslant 2$; $A=x+5$, если $2<x\leqslant 4$; $A=3x-3$, если $x>4$.

Если m и n — натуральные числа, $n>1$ и $a\geqslant 0$, то *дробной степенью* числа a с показателем $\frac{m}{n}$, обозначаемой $a^{m/n}$, называется $\sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, по определению:

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}. \qquad (3,3)$$

Дробная степень $a^{\frac{m}{n}}$ является лишь другой формой записи $\sqrt[n]{a^m}$, но не делает выражение рациональным, если оно не приводилось к таковому. Например, $\sqrt{2}=2^{1/2}$; $\sqrt[3]{3^2}=3^{2/3}$; $\sqrt[5]{a^3}=a^{3/5}$.

Отрицательная дробная степень определяется так:

$$a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}} \quad (\text{для } a>0).$$

Например,

$$3^{-1/2}=\frac{1}{3^{1/2}}; \qquad a^{-5/3}=\frac{1}{a^{5/3}}.$$

Определение дробной степени не распространяется на отрицательное основание. В формуле $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$ основание $a\geqslant 0$, если $m\leqslant 0$, то $a>0$.

С помощью этих определений можно показать, что ранее известные правила действий со степенями верны для любых рациональных показателей степеней (при допустимых значениях оснований). Формулы

$$a^p a^q=a^{p+q};\ a^p:a^q=a^{p-q};$$

$$(a^p)^q=a^{pq}; \sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}};$$

$$(ab)^p=a^p b^p;\ \left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p};\ a^{-p}=\frac{1}{a^p}$$

верны для любых рациональных p и q при допустимых значениях a и b.

Приведем примеры на преобразование иррациональных выражений, в которые входят дробные (рациональные) показатели.

Пример 29. Упростить выражение

$$A=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}\right)\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}+\frac{(a+1)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right].$$

Решение. 1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}=\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}=\frac{4a-a^2-1}{4a}=$ $=-\frac{(a-1)^2}{4a}$; 2) $\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}=\frac{1}{a+1}$; 3) $(a+1)^{3/2}=\sqrt{(a+1)^3}$ будут арифметическими корнями при условии $a>-1$. При этом условии $\sqrt{(a^2-1)(a-1)}=\sqrt{(a+1)(a-1)^2}$ будет также арифметическим корнем, причем $\sqrt{(a-1)^2(a+1)}=(a-1)\sqrt{a+1}$ при $a\geqslant 1$ и $\sqrt{(a-1)^2(a+1)}=(1-a)\sqrt{a+1}$ при $a<1$.

Значит

$$A=-\frac{(a-1)^2}{4a}\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{|a-1|}\right).$$

При $a=\pm 1$ и $a=0$ это выражение теряет смысл.

Итак, $A=\frac{a-1}{a+1}$ при $a>1$ и $A=\frac{(a^2+1)(1-a)}{2a(a+1)}$ при $-1<a<1$, т. е. при $|a|<1$.

Пример 30. Доказать тождество

$$a^{1/2}-\frac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}+\frac{2}{a^{3/2}}=0 \text{ при } a>0.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного тождества

$$a^{1/2}-\frac{a-\frac{1}{a^2}}{a^{1/2}-\frac{1}{a^{1/2}}}+\frac{1-\frac{1}{a^2}}{a^{1/2}+\frac{1}{a^{1/2}}}+\frac{2}{a^{3/2}}=$$

$$=a^{1/2}-\frac{(a^3-1)\,a^{1/2}}{(a-1)\,a^2}+\frac{(a^2-1)\,a^{1/2}}{(a+1)\,a^2}+\frac{2}{a^{3/2}}=$$

$$=a^{1/2}-\frac{a^2+a+1}{a^{3/2}}+\frac{a-1}{a^{3/2}}+\frac{2}{a^{3/2}}=$$

$$=a^{1/2}-\frac{1}{a^{3/2}}(a^2+a+1-a+1-2)=a^{1/2}-a^{1/2}=0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 31. Вычислить выражение

$$A=\left[\frac{(x^2+a^2)^{-1/2}+(x^2-a^2)^{-1/2}}{(x^2+a^2)^{-1/2}-(x^2-a^2)^{-1/2}}\right]^{-2},$$

если $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$, $a>0$, $n>m>0$.

Решение. Преобразуем сначала данное выражение

$$A=\frac{[(x^2-a^2)^{1/2}-(x^2+a^2)^{1/2}]^2}{[(x^2-a^2)^{1/2}+(x^2+a^2)^{1/2}]^2}=\frac{x^2-(x^4-a^4)^{1/2}}{x^2+(x^4-a^4)^{1/2}}.$$

При $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$, $x^2=a^2\frac{m^2+n^2}{2mn}$;

$$(x^4-a^4)^{1/2}=a^2\left[\frac{(m^2+n^2)^2}{4m^2n^2}-1\right]^{1/2}=\frac{a^2}{2mn}(n^2-m^2)$$

при $n>m>0$. Поэтому

$$A=\frac{a^2\frac{m^2+n^2}{2mn}-\frac{a^2}{2mn}(n^2-m^2)}{a^2\frac{m^2+n^2}{2mn}+\frac{a^2}{2mn}(n^2-m^2)}=\frac{m^2}{n^2}.$$

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Доказательство утверждения, что некоторое неравенство — тождественное, называется *доказательством неравенства*.

Доказательство неравенства часто осуществляется сведе́нием данного неравенства к известному или к доказательству путем усиления неравенства. Приведем примеры на доказательства некоторых неравенств и на применение характерных методов.

Пример 32. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, т. е. что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Доказательство. Будем считать неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ справедливым. Тогда $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ или $a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$, или $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Последнее неравенство очевидно при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Поэтому справедливо и исходное неравенство, так как все выкладки обратимы. Очевидно, равенство имеет место, когда $a=b$.

Пример 33. Доказать, что $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a>0$.

Доказательство. Из $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ и $a>0$ следует, что $a^2+1 \geqslant 2a$ или $a^2-2a+1 \geqslant 0$, или $(a-1)^2 \geqslant 0$. Это неравенство справедливо, выкладки обратимы при $a>0$, поэтому справедливо и исходное неравенство. Очевидно, что равенство имеет место при $c=1$.

Пример 34. Доказать, что $\frac{a^2}{1+a^4} \leqslant \frac{1}{2}$.

Доказательство. При $a \neq 0$ имеем: $\frac{a^2}{1+a^4} = \frac{1}{a^2+\frac{1}{a^2}}$, но $a^2+\frac{1}{a^2} \geqslant 2$ (см. предыдущий пример), поэтому $\frac{a^2}{1+a^4} \leqslant \frac{1}{2}$; при $a=0$ неравенство очевидно.

Пример 35. Доказать, что при любых натуральных значениях n

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<3.$$

Доказательство. При $n=1$ и $n=2$ неравенство очевидно непосредственно. Для доказательства в общем виде заменим в знаменателях, начиная с четвертого, слагаемые — числа 3, 4, 5, …, n меньшим числом 2. Будем иметь неравенства

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}<\frac{1}{2^{k-1}},$$

следовательно,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отбрасывая отрицательное слагаемое $\frac{1}{2^{n-1}}$, мы вновь только усилим неравенство. Таким образом,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<3,$$

что и требовалось доказать.

Пример 36. Доказать, что при любых натуральных n

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

и полагая последовательно $k=2, 3, \ldots, n$, после подстановки в левую часть исходного неравенства получим:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2,$$

что и требовалось доказать.

Пример 37. Доказать, что при любом натуральном n

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!<(n+1)!^*$$

Доказательство. Преобразуем левую часть неравенства

$$(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+(4-1)\cdot 3!+\ldots+[(n+1)-1]\,n!=$$
$$=1!2-1!+2!3-2!+3!4-3!+\ldots+n!\,(n+1)-n!=$$
$$=2!-1!+3!-2!+4!-3!+\ldots+(n+1)!-n!=$$
$$=(n+1)!-1<(n+1)!$$

Пример 38. Доказать, что $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$, если $a+b\geqslant 1$.

Доказательство. Так как $a+b\geqslant 1$, то $a^2+2ab+b^2\geqslant 1$. Сложив это неравенство с очевидным неравенством $a^2-2ab+b^2\geqslant\geqslant 0$, получим: $2a^2+2b^2\geqslant 1$ или $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$. Возводя обе части последнего неравенства в квадрат, найдем: $a^4+2a^2b^2+b^4\geqslant\frac{1}{4}$. Сложив это неравенство с очевидным неравенством $a^4-2a^2b^2+b^4\geqslant\geqslant 0$, получим:

$$2a^4+2b^4\geqslant\frac{1}{4}\ \text{или}\ \ a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8},$$

---

* $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n;\ 1!=1;\ 0!=1.$

что и требовалось доказать. Знак равенства имеет место при $|a|=|b|=\frac{1}{2}$.

Пример 39. Доказать, что если числа a и b одного знака и $a<b$, то обратные числа связаны неравенством противоположного смысла, т. е. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Доказательство. Составим разность $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$. Так как сомножители знаменателя одного знака, то $ab>0$, а так как по условию $a<b$, то $b-a>0$. Значит разность $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$, откуда $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, что и требовалось доказать.

Пример 40. Доказать, что модуль суммы двух чисел не больше суммы модулей этих чисел; модуль разности — не меньше разности модулей, т. е.

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|;$$
$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Доказательство. Известно, что неравенство с модулем, например $|c|\leqslant d$, равносильно двойному неравенству без модуля $-d\leqslant c\leqslant d$.

Возьмем два очевидных неравенства

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|;$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

и, сложив их почленно, получим двойное:

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$$

которое, согласно двойному неравенству без модуля, равносильно неравенству с модулем

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

что и требовалось доказать.

Используя только что доказанное неравенство, можно записать $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$, т. е. $|a|\leqslant|a-b|+|b|$. Откуда $|a-b|\geqslant|a|-|b|$, что и требовалось доказать.

Пример 41. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, то

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Доказательство. Составим разность

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{4a^3+4b^3-a^3-b^3-3ab(a+b)}{8}=$$
$$=\frac{3[(a^3+b^3)-ab(a+b)]}{8}=\frac{3(a+b)(a^2-ab+a^2-ab)}{8}=$$
$$=\frac{3(a+b)(a-b)^2}{8}\geqslant0$$

при $a>0$, $b>0$ (равно нулю при $a=b$). Значит $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant$ $\geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, что и требовалось доказать.

Пример 42. Доказать, что произведение двух положительных сомножителей, сумма которых постоянна, будет наибольшим, когда они равны.

Доказательство. Пусть x и y — такие два сомножителя, что их сумма равна c, где c — постоянная величина. Тогда $x+y=c$. Известно, что $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ или $xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$. Отсюда $xy \leqslant \frac{c^2}{4}$. Произведение окажется наибольшим, когда будет иметь место знак равенства. Последнее произойдет в случае, если $x=y$, т. е. $x=y=\frac{c}{2}$, что и требовалось доказать.

Пример 43. Доказать, что куб гипотенузы больше суммы кубов катетов, т. е. доказать, что если $c=\sqrt{a^2+b^2}$, то $c^3>a^3+b^3$.

Доказательство. Пусть это неравенство справедливо, т. е. $c^3>a^3+b^3$ или $(\sqrt{a^2+b^2})^3>a^3+b^3$. Возведем последнее неравенство в квадрат

$$(a^2+b^2)^3>(a^3+b^3)^2;$$

$$a^6+b^6+3a^2b^2(a^2+b^2)>a^6+2a^3b^3+b^6;$$

$$a^2b^2[3(a^2+b^2)-2ab]>0; \quad a^2b^2[2(a^2+b^2)+(a^2-2ab+b^2)]>0$$

$$a^2b^2[2(a^2+b^2)+(a-b)^2]>0$$

— очевидное неравенство. Для доказательства исходного неравенства следует убедиться в обратимости каждого преобразования, начиная с последнего.

Пример 44. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Доказательство. Преобразуем выражение

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Число, стоящее в каждой из скобок (в правой части), как сумма двух положительных обратных чисел не меньше двух (см. пример 33), так что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 3+2+2+2=9,$$

откуда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$, что и требовалось доказать.

Пример 45. Доказать, что уравнение

$$(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$$

не имеет действительных корней, если $a \neq b \neq c$.

Доказательство. Достаточно показать, что дискриминант этого уравнения меньше нуля, т. е. $D<0$.

$$D=(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-$$
$$-3a^2-3b^2-3c^2=-[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+$$
$$+(b^2-2bc+c^2)]=-[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2].$$

Если $a\neq b\neq c$, то каждое из чисел в квадратных скобках положительно, так что $D<0$, что и требовалось доказать.

Пример 46. Доказать, что выражение

$$A=3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10$$

неотрицательно при любых $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Доказательство. Положим $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$, тогда $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=$ $=t^2-2$, и наше выражение примет вид

$$A=3t^2-8t+4.$$

Это квадратный трехчлен с корнями $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=2$. Трехчлен $A=3t^2-8t+4\geqslant 0$ при $t\leqslant\frac{2}{3}$ и $t\geqslant 2$. Если x и y разных знаков, то $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}<0$ и трехчлен положителен. Если же x и y одного знака, то $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$ (как сумма двух положительных обратных чисел); при $t\geqslant 2$ трехчлен $A\geqslant 0$. Таким образом, $A>0$ при любых $x\neq 0$ и $y\neq 0$, так как при этом $t<0$ (тем более $t<\frac{2}{3}$) или $t\geqslant 2$. Трехчлен A обращается в нуль при $t=2$, т. е. при $x=y$.

Пример 47. Показать, что при любых значениях x функция $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может иметь значений, больших $\frac{3}{2}$ и меньших $\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{3}{2}\geqslant y\geqslant\frac{1}{2}$ при любых действительных значениях x.

Доказательство (от противного). а) Пусть $y>\frac{3}{2}$, тогда

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>\frac{3}{2},\quad 2x^2+2x+2>3x^2+3,\quad x^2-2x+1<0,$$
$$(x-1)^2<0,$$

что невозможно ни при каких действительных x. Следовательно, невозможно и $y>\frac{3}{2}$.

б) Пусть $y<\frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}<\frac{1}{2},\quad 2x^2+2x+2<x^2+1,\quad x^2+2x+1<0,$$
$$(x+1)^2<0.$$

что также невозможно ни при каких действительных x. Следовательно, невозможно, чтобы было $y<\frac{1}{2}$. Итак, $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$, что и требовалось доказать.

Пример 48. Доказать, что корни уравнения

$$x^2+4kx-4(k+1)=0$$

при любом действительном значении k — действительные числа.

Доказательство. Достаточно показать, что дискриминант данного квадратного уравнения неотрицателен, т. е. $D\geqslant 0$. Составим дискриминант

$$D=(4k)^2+16(k+1)=16(k^2+k+1).$$

Трехчлен k^2+k+1 всегда положителен, так как имеет отрицательный дискриминант и положительный коэффициент при k^2. Значит, $D>0$ и корни исходного уравнения — действительные (различные).

Пример 49. Доказать, что

а) $$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd};$$

б) $$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, т. е. что среднее арифметическое четырех и трех неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Доказательство. а) Известно, что $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ и $\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$. Перемножая эти неравенства, получим:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{abcd}.$$

Числа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{c+d}{2}$ неотрицательны, поэтому

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}$$

или

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}.$$

Подставляя в правую часть неравенства вместо $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$ число, меньшее его $\sqrt{abcd}$, мы только усилим неравенство. Поэтому

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt{\sqrt{abcd}}$$

или

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd},$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что знак равенства имеет место лишь при $a=b=c=d$.

б) Для чисел $a, b, c, \frac{a+b+c}{3}$ имеем:

$$abc\frac{a+b+c}{3} \leqslant \left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^4,$$

откуда

$$abc\frac{a+b+c}{3} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$$

или

$$abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

или

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Очевидно, что равенство имеет место лишь при $a=b=c$, что и требовалось доказать.

Мы доказали, что среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического для двух, трех и четырех чисел. Можно доказать, что это верно для любого числа n неотрицательных чисел, т. е. что справедлива формула

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Очевидно, что равенство имеет место при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Доказательство трансцендентных тождеств (равенств и неравенств)

В курсе элементарной математики рассматриваются некоторые выражения, включающие элементарные трансцендентные функции, а именно: степенную (с иррациональным показателем), показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Преобразование трансцендентных выражений, а также доказательство трансцендентных равенств и неравенств основываются на законах равенств и неравенств, на законах алгебраических действий и на свойствах тех функций, которые входят в данные математические выражения или в заданные равенства или неравенства.

Преобразование показательных и логарифмических выражений

Выполняя преобразование математических выражений, содержащих показательные и логарифмические функции, используют правила алгебраических действий над этими функциями, основные соотношения и свойства этих функций. Области определения показательных, логарифмических и алгебраических функций, входящих в заданное выражение, позволяют установить в каждом случае допустимые значения букв (аргументов или параметров) рассматриваемого выражения.

Приведем примеры на преобразование показательных и логарифмических выражений.

Пример 50. Разложить на множители $A = a^{5x} + a^x + 1$.

Решение. $A = a^{5x} - a^{2x} + a^{2x} + a^x + 1 = a^{2x}(a^{3x} - 1) + a^{2x} + a^x + 1 = a^{2x}(a^x - 1)(a^{2x} + a^x + 1) + (a^{2x} + a^x + 1) = (a^{2x} + a^x + 1) \times (a^{3x} - a^{2x} + 1)$.

Пример 51. Упростить выражение

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} + 1}}, \quad \text{если} \quad x < 0.$$

Решение. $\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (2^x - 2^{-x})^2} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{(2^x + 2^{-x})^2} - 1 = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) - 1 = \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2} = \frac{\left(2^{\frac{x}{2}} - x^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2}$.

Аналогично получим:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} + 1 = \frac{\left(2^{\frac{x}{2}} + x^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2}.$$

Поэтому данное выражение примет вид:

$$A = \sqrt{\frac{\left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2}} = \frac{\left|2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right|}{2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}}}.$$

Так как $x < 0$, то

$$2^{\frac{x}{2}} < 2^{-\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \left|2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right| = 2^{-\frac{x}{2}} - 2^{\frac{x}{2}},$$

поэтому

$$A = \frac{2^{-\frac{x}{2}} - 2^{\frac{x}{2}}}{2^{-\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}}}.$$

Умножая числитель и знаменатель этой дроби на $2^{\frac{x}{2}}$, получим:

$$A = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x}.$$

Пример 52. Доказать равенство $\log_a N = \log_{a^k} N^k$.

Доказательство. Пусть $\log_a N = x$, тогда по определению логарифма $a^x = N$. Возведя это равенство в степень k, получим: $(a^x)^k = N^k$ или $(a^k)^x = N^k$. Логарифмируя последнее равенство по основанию a^k, получим $x = \log_{a^k} N^k$. Таким образом,

$$\log_a N = \log_{a^k} N^k.$$

Пример 53. Доказать, что $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Доказательство. Пусть $x = \log_b a$, тогда $b^x = a$. Логарифмируем последнее равенство по основанию a

$$\log_a (b^x) = \log_a a \text{ или } x \log_a b = 1,$$

но $x = \log_b a$, поэтому $\log_b a \log_a b = 1$, откуда

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Очень часто при преобразованиях выражений, в которые входят знаки логарифмов, используется основное тождество

$$a^{\log_a N} = N. \tag{3,4}$$

В самом деле, по определению логарифма $x = \log_a N$ или $a^x = N$. Подставляя в последнее равенство вместо x его значение, равное $\log_a N$, получаем тождество (3,4).

Предыдущий пример можно решить и так:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Логарифмируя обе части этого равенства по основанию b, получаем: $\log_a b \log_b a = 1$, откуда

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Пример 54. Доказать равенство

$$\log_a N = \frac{1}{\log_b a} \log_b N, \text{ если } a > 0,\ b > 0,\ N > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1.$$

Доказательство. Логарифмируя обе части равенства $N = a^{\log_a N}$ по основанию b, получаем: $\log_b N = \log_b (a^{\log_a N})$ или $\log_b N = \log_a N \log_b a$, откуда

$$\log_a N = \frac{1}{\log_b a} \log_b N,$$

что и требовалось доказать.

Последняя формула устанавливает правило перехода от логарифма числа по основанию b к логарифму того же числа по основанию a. Для этого достаточно умножить логарифм по основанию b на величину $M=\frac{1}{\log_b a}$, которая называется *модулем перехода* от системы логарифмов с основанием b к системе логарифмов с основанием a.

Пример 55. Доказать, что

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab} N}=1+\log_a b.$$

Доказательство. Имеем (см. пример 54):

$$\log_{ab} N=\frac{\log_a N}{\log_a (ab)},$$

следовательно,

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab} N}=\log_a N:\frac{\log_a N}{\log_a (ab)}=\log_a (ab)=1+\log_a b.$$

Пример 56. Доказать тождество

$$\log_{\frac{a}{b}} x=\frac{\log_a x \log_b x}{\log_b x-\log_a x}.$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой $\log_n m=\frac{1}{\log_m n}$ (см. пример 53), имеем:

$$\log_{\frac{a}{b}} x=\frac{1}{\log_x\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{1}{\log_x a-\log_x b}=\frac{1}{\frac{1}{\log_a x}-\frac{1}{\log_b x}}=\frac{\log_a x\log_b x}{\log_b x-\log_a x},$$

что и требовалось доказать.

Пример 57. Упростить выражение $A=\sqrt[\log_3 4]{16}$.

Решение. $A=\sqrt[\log_3 4]{16}=16^{\frac{1}{\log_3 4}}=(4^2)^{\log_4 3}=4^{2\log_4 3}=(4^{\log_4 3})^2=3^2=9$.

Пример 58. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125$, если $\log_{25} 7=a$, $\log_2 5=b$.

Решение. $\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125=\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}=\log_5\left(\frac{49}{8}\right)^3=\log_5\frac{7^6}{2^9}=6\log_5 7-9\log_5 2$, но $\log_5 7=\log_{25} 49=2\log_{25} 7=2a$, а $\log_5 2=\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{b}$, поэтому

$$\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125=12a-\frac{9}{b}.$$

Пример 59. Доказать, что если $4a^2+9b^2=4ab$, $a>0$, то

$$\log_c\frac{2a+3b}{4}=\frac{\log_c a+\log_c b}{2}, \text{ где } c>0,\ c\neq 1.$$

Доказательство. Так как $4ab=4a^2+9b^2$, т. е. сумма квадратов, из которых один не равен нулю, больше нуля ($4a^2>0$), поэтому $ab>0$. Но так как $a>0$, то и $b>0$. Разделив обе части равенства $4a^2+9b^2=4ab$ на 16, получим: $\frac{a^2}{4}+\frac{9b^2}{16}=\frac{ab}{4}$. Дополнив левую часть до полного квадрата, для чего добавим к обеим частям $2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{4}b=\frac{3ab}{4}$, имеем: $\left(\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}\right)^2=ab$.

Прологарифмировав последнее равенство по любому основанию, получим:

$$\log_c\left(\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}\right)^2=\log_c(ab)$$

или

$$2\log_c\frac{2a+3b}{4}=\log_c a+\log_c b,$$

откуда

$$\log_c\frac{2a+3b}{4}=\frac{\log_c a+\log_c b}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 60. Упростить выражение

$$x=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\ldots\log_{15}16.$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 2 (см. пример 54), получим:

$$x=\log_2 3\,\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\,\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\,\frac{\log_2 6}{\log_2 5}\cdots\frac{\log_2 16}{\log_2 15}=\log_2 16=4.$$

При доказательствах тождественности неравенств, в которые входят показательные и логарифмические функции, используют основные свойства неравенств и свойства монотонности показательной и логарифмической функций (функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ при $a>1$ возрастают, при $0<a<1$ — убывают).

Пример 61. Доказать, что

$$\log_c\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{\log_c a+\log_c b}{2},\quad\text{если } a>0,\ b>0,\ c>1,$$

и

$$\log_c\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\log_c a+\log_c b}{2},\quad\text{если } a>0,\ b>0,\ 0<c<1.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)=\frac{1}{2}\log_c ab=\log_c\sqrt{ab}$$

и известно, что $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, то тогда при $c>1$ имеем:

$$\log_c\frac{a+b}{2}\geqslant\log_c\sqrt{ab}\quad\text{или}\quad\log_c\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{\log_c a+\log_c b}{2},$$

а при $0<c<1$

$$\log_c \frac{a+b}{2} \leqslant \log_c \sqrt{ab} \text{ или } \log_c \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{\log_c a + \log_c b}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 62. Доказать, что $2^{a+\frac{1}{a}} \geqslant 4$, если $a>0$.

Доказательство. Так как $2>1$, то для доказательства того, что $2^{a+\frac{1}{a}} \geqslant 4$ или $2^{a+\frac{1}{a}} \geqslant 2^2$, надо убедиться, что $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$. Последнее неравенство имеет место при $a>0$ (см. пример 33), а поэтому и данное неравенство справедливо при любом $a>0$.

Пример 63. Доказать, что если $0<a<1$ и $n \geqslant k \geqslant 1$, то

$$\log_a k + \log_a (n-k+1) < \log_a n.$$

Доказательство. Так как $0<a<1$, то для доказательства данного неравенства или, что то же самое, неравенства $\log_a [k(n-k+1)] \leqslant \log_a n$ надо убедиться в справедливости неравенства $k(n-k+1) \geqslant n$. (*)

Для доказательства последнего неравенства рассмотрим разность

$$k(n-k+1)-n = nk-k^2+k-n = k(n-k)-(n-k) =$$
$$=(n-k)(k-1).$$

Так как $n \geqslant k$ и $k \geqslant 1$, то $(n-k)(k-1) \geqslant 0$. Тогда $k(n-k+1) \geqslant n$. Равенство $k(n-k+1)=n$, очевидно, будет только при $n=k$ или при $k=1$. Следовательно, при заданных условиях неравенство (*) справедливо, а поэтому при этих же условиях справедливо и исходное неравенство.

Пример 64. Доказать, что

$$\frac{1}{n}(\log_a 2 + \log_a 3 + \ldots + \log_a n) \geqslant \frac{1}{2}\log_a n,$$

если $a>1$.

Доказательство. Так как $a>1$, то для доказательства данного неравенства или, что равносильного ему, неравенства

$$\frac{1}{n}\log_a (2\cdot 3 \ldots n) \geqslant \frac{1}{2}\log_a n$$

или

$$\log_a (1\cdot 2\cdot 3 \ldots n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \log_a n^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\log_a \sqrt[n]{n!} \geqslant \log_a \sqrt{n},$$

надо доказать неравенство $\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}$. Для доказательства последнего неравенства воспользуемся неравенством $k(n-k+1) \geqslant n$

при $k=1, 2, \ldots, n$ (см. предыдущий пример), тогда получим следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll}
k=1, & 1n=n; \\
k=2, & 2(n-1)>n; \\
k=3, & 3(n-2)>n; \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
k=n-1, & (n-1)2>n; \\
k=n, & n\cdot 1=n.
\end{array}$$

Перемножив эти соотношения почленно, получим $n!\cdot n!\geqslant n^n$, т. е. $(n!)^2\geqslant n^n$. Таким образом, $\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n}$. Знак равенства имеет место лишь при $n=1$ и $n=2$. Из справедливости неравенства $\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n}$ следует справедливость исходного неравенства (при $a>1$).

Пример 65. Доказать, что

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}>2.$$

Доказательство. Перейдя к основанию логарифмов, равному 3, получим:

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10,$$

а так как $10>9$, то $\log_3 10>\log_3 9=2$. Следовательно, $\log_3 2+$ $+\log_3 5>2$, а поэтому

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}>2,$$

что и требовалось доказать.

Преобразование тригонометрических выражений

Выполняя преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции, пользуются свойствами алгебраических действий над тригонометрическими функциями и основными формулами тригонометрии.

Приведем примеры на преобразование математических выражений, содержащих тригонометрические функции.

Пример 66. Доказать тождество

$$1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Доказательство. $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)=\cos^4\alpha+$$
$$+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\cos^2\alpha+$$
$$+\sin^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

поэтому

$$1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=3\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 67. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$.

Решение. Из соотношения $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем, что

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Кроме того, $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=a^2$, откуда $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a^2-1}{2}$. Следовательно,

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{1}{2}(2a^2-a^4+1).$$

Пример 68. Вычислить значение выражения $\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-7$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. $\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(3\operatorname{tg}\alpha+1)}{\cos\alpha(1-3\operatorname{tg}\alpha)}=\frac{-21+1}{1+21}=-\frac{10}{11}$.

Пример 69. Показать, что если имеет место равенство

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma),$$

то значение каждой части равно $|\sin\alpha||\sin\beta||\sin\gamma|$.

Решение. Умножив обе части равенства на $(1+\cos\alpha)\times\times(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$, получим:

$$[(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)]^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)\times\times(1-\cos^2\gamma)=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

Выражение $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\geqslant 0$ при любых значениях α, β, γ. Поэтому, извлекая из обеих частей полученного равенства квадратный корень, получим:

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=|\sin\alpha||\sin\beta||\sin\gamma|,$$

что и требовалось доказать.

Пример 70. Упростить выражение

$$A=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Решение. Преобразуем вторую дробь

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$A=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

В полученном тождестве допустимые значения аргумента для левой и правой частей (если их рассматривать по отдельности) различны. В самом деле, выражение $\sin\alpha+\cos\alpha$ имеет смысл при всех действительных значениях α, а выражение в левой части и, следовательно, все тождество имеет смысл при всех α, кроме значений, удовлетворяющих хотя бы одному из следующих условий:

$$\sin\alpha=\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha=\pm 1,\quad \alpha=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Пример 71. Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$ дробь

$$P=\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}.$$

Решение. В знаменателе стоит однородный многочлен второй степени относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Разделив числитель и знаменатель данной дроби на $\cos^2\alpha$ и учитывая, что $\frac{1}{\cos^2\alpha}=$ $=\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha$, получим:

$$P=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{a\operatorname{tg}^2\alpha+b\operatorname{tg}\alpha+c}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{a\operatorname{tg}^2\alpha+b\operatorname{tg}\alpha+c}.$$

Пример 72. Доказать тождество

$$\frac{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\sin^2 x+\operatorname{tg}x}-\frac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=\sin x\cos x.$$

Решение. Преобразуем члены в левой части равенства

$$\frac{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\sec^2 x+\operatorname{tg}x}=\frac{1+\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}}{1+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

Тогда левая часть примет вид:

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos^3 x}{\sin x}=\frac{\cos x\,(1-\cos^2 x)}{\sin x}=\cos x\sin x,$$

что и требовалось доказать.

Пример 73. Упростить выражение

$$P=\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right).$$

Решение. Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$ и $|\cos\alpha|\leqslant 1$, то все подкоренные выражения неотрицательны, поэтому

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=-\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|},$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{(1-\cos\alpha)-(1+\cos\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=-\frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}.$$

Следовательно,

$$P=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{|\sin\alpha||\cos\alpha|}=\frac{4\sin 2\alpha}{|\sin 2\alpha|}.$$

Если $2k\pi<2\alpha<(2k+1)\pi$, то $\sin 2\alpha>0$ и $|\sin 2\alpha|=\sin 2\alpha$. Если же $(2k+1)\pi<2\alpha<(2k+2)\pi$, то $\sin 2\alpha<0$ и $|\sin 2\alpha|=-\sin 2\alpha$, поэтому $P=4$, если $\pi k<\alpha<(2k+1)\frac{\pi}{2}$, и $P=-4$, если $(2k+1)\frac{\pi}{2}<\alpha<(2k+2)\frac{\pi}{2}$.

Пример 74. Вычислить значение выражения

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta),$$

если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение. $A=\cos^2(\alpha+\beta)[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]=$ $=\frac{a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}$.

По теореме Виета имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{b}{a},\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{a},$$

тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{b}{c-a}.$$

Поэтому

$$A=\frac{a\frac{b^2}{(c-a)^2}+b\frac{b}{c-a}+c}{1+\frac{b^2}{(c-a)^2}}=\frac{c(b^2+c^2-2ac+a^2)}{(c-a)^2+b^2}=c.$$

Пример 75. Пусть $x+y+z=\frac{\pi}{2}k$. Для каких целых значений k сумма $S=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x$ не зависит от x, y, z?

Решение. Так как

$$\cos(x+y+z)=\cos(x+y)\cos z-\sin(x+y)\sin z=$$
$$=\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z-\sin x\cos y\sin z-$$
$$-\sin y\cos x\sin z=\cos x\cos y\cos z(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-$$
$$-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z),$$

то

$$S=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Так как по условию $x+y+z=\frac{\pi}{2}k$, то при $k=2n+1$ окажется, что $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0$ и $S=1$. Таким образом, при нечетных k сумма S не зависит от x, y, z.

Пример 76. Доказать, что если $|A|<1$ и $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

Доказательство. Пользуясь формулой синуса суммы, преобразуем соотношение $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$. Имеем: $\sin\alpha=A(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$ или $\sin\alpha(1-A\cos\beta)=A\cos\alpha\sin\beta$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A},$$

что и требовалось доказать.

Пример 77. Доказать, что если $\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}$, то выражение $A=a\cos2\alpha+b\sin2\alpha$ не зависит ни от α, ни от b.

Доказательство. Из условия $\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}$ следует, что $\frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, поэтому

$$A=a\left(\cos2\alpha+\frac{b}{a}\sin2\alpha\right)=a\left(\cos2\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin2\alpha\right)=$$
$$=\frac{a(\cos2\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{a\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha}=a.$$

Таким образом, $A=a$ и не зависит ни от α, ни от b, что и требовалось доказать.

Пример 78. Вычислить без таблиц

$$A=\cos24^\circ+\cos48^\circ-\cos84^\circ-\cos12^\circ.$$

Решение. $A=(\cos24^\circ+\cos48^\circ)-(\cos84^\circ+\cos12^\circ)=$
$=2\cos36^\circ\cos12^\circ-2\cos48^\circ\cos36^\circ=2\cos36^\circ(\cos12^\circ-\cos48^\circ)=$
$=4\cos36^\circ\sin18^\circ\sin30^\circ=\frac{8\sin18^\circ\cos18^\circ\cos36^\circ\cdot\frac{1}{2}}{2\cos18^\circ}=\frac{2\sin36^\circ\cos36^\circ}{2\cos18^\circ}=$
$=\frac{\sin72^\circ}{2\cos18^\circ}=\frac{\cos18^\circ}{2\cos18^\circ}=\frac{1}{2}.$

Пример 79. Преобразовать в произведение

$$A=(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2.$$

Решение. $A=\cos^2x+\cos^2y+\sin^2x+\sin^2y+2\cos x\cos y+$
$+2\sin x\sin y=2[1+\cos(x-y)]=4\cos^2\frac{x-y}{2}.$

Пример 80. Доказать, что $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+$ $+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0.$

Доказательство. Приведем дроби к общему знаменателю, который равен $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)$. В числителе получим:

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]+\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma+\alpha)-$$
$$-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]+\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\alpha+\beta)-\cos(\gamma-\beta+\alpha)]=0,$$

откуда и следует справедливость данного тождества.

Пример 81. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ=3.$$

Доказательство. $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}\operatorname{tg}20^\circ\times$

$$\times\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}\,\frac{\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ}{\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}=\sqrt{3}\,\frac{2\sin10^\circ\cos10^\circ2\sin20^\circ}{\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}\times$$
$$\times\cos20^\circ\,2\sin40^\circ\cos40^\circ=8\sqrt{3}\,\frac{\sin10^\circ\cos10^\circ\sin20^\circ\sin40^\circ}{\sin10^\circ}=$$
$$=8\sqrt{3}\cos10^\circ\times\frac{\cos20^\circ-\cos60^\circ}{2}=4\sqrt{3}\left(\cos10^\circ\cos20^\circ-\frac{1}{2}\cos10^\circ\right)=$$
$$=4\sqrt{3}\left(\frac{\cos30^\circ+\cos10^\circ}{2}-\frac{1}{2}\cos10^\circ\right)=2\sqrt{3}\cos30^\circ=2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=3,$$

что и требовалось доказать.

Пример 82. Доказать, что $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{1}{8}$.

Доказательство. $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{2\sin20^\circ\cos20^\circ}{2\sin20^\circ}\times$

$$\times\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{2\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{2\cdot2\sin20^\circ}=\frac{2\sin80^\circ\cos80^\circ}{2\cdot4\sin20^\circ}=\frac{\sin160^\circ}{8\sin20^\circ}=$$

$=\frac{\sin(180^\circ-160^\circ)}{8\sin20^\circ}=\frac{\sin20^\circ}{8\sin20^\circ}=\frac{1}{8}$, что и требовалось доказать.

Пример 83. Доказать, что равенство $\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha=1$ невозможно ни при каком значении α.

Доказательство. Имеем: $\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha=\sin2\alpha\times$

$$\times(\sin\alpha\sin3\alpha)=\frac{1}{2}\sin2\alpha(\cos2\alpha-\cos4\alpha)=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha-$$
$$-\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos4\alpha=\frac{1}{4}\sin4\alpha-\frac{1}{4}(\sin6\alpha-\sin2\alpha)=(\sin4\alpha-\sin6\alpha+$$
$$+\sin2\alpha).$$

Но так как

$$\frac{1}{4}|\sin4\alpha-\sin6\alpha+\sin2\alpha|\leqslant\frac{1}{4}(|\sin4\alpha|+|\sin6\alpha|+|\sin2\alpha|\leqslant\frac{3}{4},$$

то $\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha\neq1$ ни при каком значении α.

Пример 84. Доказать, что если α — угол первой и третьей четв[е]ртей $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\right.$ где $k=0, 1, 3, \ldots, n)$, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$.

Доказательство. Так как в первой и третьей четвертях $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, а $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$ как сумма обратных неотрицательных чисел.

[Пр]имер 85. Доказать, что при любом допустимом значении α спр[ав]едливо неравенство

$$\sec^4\alpha + \operatorname{cosec}^4\alpha \geqslant 8.$$

[До]казательство. Так как $\sec^4\alpha + \operatorname{cosec}^4\alpha = \frac{1}{\cos^4\alpha} + \frac{1}{\sin^4\alpha} =$

$$= \frac{\sin\ldots\cos^4\alpha}{\sin\ldots\cos^4\alpha} = \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{16}\sin^4 2\alpha} =$$

$$= \frac{8(\ldots\sin^2 2\alpha)}{\ldots 2\alpha} = \frac{8(1+\cos^2 2\alpha)}{\sin^4 2\alpha} \geqslant \frac{8}{\sin^4 2\alpha} \geqslant 8,$$ что и требовалось доказа[ть].

Пр[имер] 86. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то справедливо нера[вен]во

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}.$$

[Дока]зательство. Так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, то, [обозна]чая левую часть неравенства буквой A, имеем:

$$A = \ldots\cos\beta + \cos[\pi - (\alpha+\beta)] = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= \ldots\frac{\ldots+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) = 1 - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} +$$

$$+ 2\ldots\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +\right.$$

$$\left.+ \ldots\frac{\ldots\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{\ldots} -\right.$$

$$\left. - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

Учит[ыва]о ... то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

$\ldots\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2 \geqslant 0$ и 0 ... имеет место неравенство $(a^2 - b^2)^2 \geqslant$

... < 1, то имеет место неравенство $(1-x)^n +$

полу... ...альное число.

$A \leqslant \ldots^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ... [с]праведливо равенство $\sqrt{2\left(\sqrt{1+\left(\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{2}\right)^2}-1\right)} =$

лос...

... Показать, ...[выч]ислить $\log_4 39{,}2$, зная, что $\log_7 2 = a$, $\log_2 10 = b$.

тел...

Решение. $y=\frac{\sin x+\operatorname{tg}x}{\cos x+\operatorname{ctg}x}=\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)}=\frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1+\sin x)}$.

Так как при $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $|\cos x|<1$ и $|\sin x|<1$, то при любых значениях x $1+\cos x>0$ и $1+\sin x>0$, поэтому

$$y=\frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1+\sin x)}>0.$$

Пример 88. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x$.

Решение. $y=2\left(\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 3x-\cos\frac{\pi}{6}\times\right.$ $\left.\times\cos 3x\right)=-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$, но $-1\leqslant\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$. Следовательно, $y_{\min}=-2$, когда $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1$, т. е. при $3x+\frac{\pi}{6}=$ $=2k\pi$, откуда $x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$. $y_{\max}=2$, когда $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$, т. е. $3x+\frac{\pi}{6}=\pi(2k+1)$, откуда $x=\frac{2k+1}{3}\pi-\frac{\pi}{18}$.

Пример 89. Доказать, что $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{arc\,tg}x=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=x$. Пусть $\operatorname{arc\,ctg}x=\beta$, тогда $\operatorname{ctg}\beta=x$. Из этих уравнений следует, что $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$, т. е. α и β — дополнительные углы. Значит $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Возвращаясь к старым обозначениям, получим:

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

8 si

Пример

УПРАЖНЕНИЯ

возможно ни п

множители:

Доказатель

$x^2+11x-21;$

$\times(\sin\alpha\sin 3\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2$ $7x^2-5x+6;$

$2;$

$-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 4$ $c+ca+ab)-abc;$

$+\sin 2\alpha).$ $-yx^2+zx^2-zy^2;$

Но так как $xz^2+y^2z+yz^2+3xyz;$

$b^2+c^2)^3.$

$\frac{1}{4}|\sin 4\alpha-\sin 6\alpha+\sin 2\alpha|\leqslant\frac{1}{4}(|\sin 4\alpha$

то $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\neq 1$ ни при каком значении α. $+2y^2(x+3)^2.$

3. Упростить выражения:

а) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{1-(m+x)^{-2}}{\left(1-\frac{1}{m+x}\right)^2}:\left[1-\frac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right]^{-1}$, если $x=\frac{1}{m-1}$.

4. Доказать, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, то $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$.

5. Доказать, что $\frac{a^2x^2y^2-a^2x^2-y^2+1}{a^2xy-\frac{y}{x}+x\left(a^2-\frac{1}{x^2}\right)}+1=a^2$, если $x=a-1$, $y=a+2$.

6. Упростить выражения:

а) $\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$, если $x=2am\,[b\,(1+m^2)]^{-1}$ и $0<m<1$;

б) $\frac{mn-\sqrt{m^2-1}\sqrt{n^2-1}}{mn+\sqrt{m^2-1}\sqrt{n^2-1}}$, если $2m=x+\frac{1}{x}$, $2n=y+\frac{1}{y}$ и $x<-1$, $y<-1$;

в) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{ab^{-1}(x-1-ab^{-1})}+\sqrt{ba^{-1}(x-1-ba^{-1})}}$, если $x=(a^2+ab+b^2)(ab)^{-1}$ и $b>a>0$.

7. Доказать равенства:

а) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=\sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}}$, если $x=\sqrt[4]{5}$;

б) $\frac{4x^3-3x+(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}-1}{4x^3-3x+(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}+1}=\frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{(2x-1)\sqrt{x+1}}$.

8. Упростить выражение
$y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

9. Найти значение выражения

$z=x^3-3x-2\,\frac{A^2+B}{A^2-B}$ при $x=\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}}+\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$.

10. Доказать, что для любых вещественных чисел a, b, c, d справедливо неравенство $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$.

11. Доказать неравенство $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

12. Доказать, что если $x+y+z=1$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

13. Доказать, что если $ab\geqslant 0$, то имеет место неравенство $(a^2-b^2)^2\geqslant(a-b)^4$.

14. Доказать, что если $|x|<1$, то имеет место неравенство $(1-x)^n+(1+x)^n\leqslant 2^n$, где n — натуральное число.

15. При каких x справедливо равенство $\sqrt{2\left(\sqrt{1+\left(\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{2}\right)^2}-1\right)}=3^{-x}-3^{x}$?

16. Вычислить $\log_4 39{,}2$, зная, что $\log_7 2=a$, $\log_2 10=b$.

17. Доказать, что если $n^2 = (kn)^{\log_k m}$, то $\log_m x = \frac{1}{2} \, (\log_k x + \log_n x)$.

18. Доказать равенства:

а) $3 \sin^8 x - 8 \sin^6 x + 6 \sin^4 x + 4 \cos^6 x - 3 \cos^8 x = 1$;

б) $2 \sin^4 x - 8 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \cos^2 x + 3 = 8 \sin^6 x$;

в) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 (\alpha + \beta) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta) = 2$;

г) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin^2 (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$;

д) $\frac{\sin \alpha}{\sin\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{3\alpha}{2}\right)}$;

е) $\frac{\cos \alpha \cos (2\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta)} + \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \operatorname{tg} (\alpha - \beta)$;

ж) $\frac{1}{\sin (\alpha - \beta) \sin (\alpha - \gamma)} + \frac{1}{\sin (\beta - \gamma) \sin (\beta - \alpha)} + \frac{1}{\sin (\gamma - \alpha) \sin (\gamma - \beta)} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}}$;

з) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

и) $\operatorname{tg} 7^\circ{,}5 + \operatorname{tg} 37^\circ{,}5 + \operatorname{tg} 7^\circ{,}5 \operatorname{tg} 37^\circ{,}5 = 1$.

19. Упростить выражение

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \ldots \cos \frac{\pi}{2^n}.$$

20. Вычислить, не пользуясь таблицами:

а) $\cos 40^\circ \sin 70^\circ \cos 80^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

21. Дано: $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = 2$. Найти $\alpha + \beta$.

ГЛАВА IV

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения

Уравнением с одним неизвестным называется выражение вида

$$f(x) = \varphi(x),$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые элементарные функции, аргумент x — искомая величина. В частности, правая или левая часть уравнения может быть числом, тогда она рассматривается как постоянная функция, имеющая одно и то же значение при всех значениях аргумента.

Уравнение называется *алгебраическим*, если функции, входящие в его состав, являются алгебраическими. В частности, если в алгебраическом уравнении хотя бы одна из функций иррациональная, оно называется *иррациональным*; если в его состав входят рациональные функции и хотя бы одна из них дробная, — *дробным алгебраическим*; наконец, если все функции — целые рациональные (многочлены), — *целым алгебраическим*.

Заметим, что последнее всегда можно привести к виду

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

где n — натуральное число, называемое *степенью уравнения*.

Если хотя бы одна из функций, входящих в состав уравнения, трансцендентная (неалгебраическая), то уравнение называется *трансцендентным*.

Примеры алгебраических уравнений:

$$\frac{0{,}5x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=3 \text{ — иррациональное;}$$

$$\frac{\pi}{x^2-1}-\frac{1}{x}=3+x \text{ — дробное;}$$

$$ax^4+bx^3-c=0 \text{ — (целое) алгебраическое 4-й степени;}$$

$$2^{\sqrt[3]{x}}=8;\ \operatorname{arc\,tg} x=x^2 \text{ — трансцендентные.}$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется общая часть областей определения функций, входящих в состав уравнения (множество всех значений неизвестного, при которых эти функции имеют смысл). Например, ОДЗ уравнения $\sqrt{1-x^2}=\lg x$ является общая часть двух промежутков: $1-x^2\geqslant 0$, $x^2\leqslant 1$, $|x|\leqslant 1$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $x>0$, а именно: $0<x\leqslant 1$.

Решением (корнем) уравнения называется любое значение неизвестного, при подстановке которого в обе части уравнения последнее обращается в числовое тождество. Решить уравнение — значит найти множество всех его корней (полезно заметить, что, исходя из определения, все корни должны входить в ОДЗ).

Если все числа, входящие в ОДЗ, являются корнями уравнения, то говорят, что уравнение *удовлетворяется тождественно*, т. е. данное равенство представляет собой тождество. Например,

$$x^2+2ax+a^2\equiv(x+a)^2.$$

При постановке задачи о решении уравнения должно быть указано, в какой числовой области рассматривается данное уравнение, так как множество корней одного и того же уравнения для разных числовых областей может быть различным. Так, уравнение $x^4-1=0$ в области действительных чисел имеет два корня $x_{1,2}=\pm 1$, а в области комплексных чисел — четыре: $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm i$. Если нет специального указания, условимся искать корни уравнений только в области действительных чисел, при этом ОДЗ, естественно, следует устанавливать в той же области.

Два уравнения называются *равносильными (эквивалентными)*, если множество всех корней первого уравнения совпадает с множеством корней второго. Другими словами, любое решение первого является решением второго, и наоборот. * Следовательно, если данное уравнение заменить равносильным, то при такой замене множество корней исходного уравнения остается неизменным.

Практическое решение уравнения состоит в том, что над выражениями, входящими в его состав, производят ряд математических

---

* В частности, противоречивые уравнения равносильны, так как оба не имеют решений.

преобразований, получая из исходного уравнения одно за другим новые. Этот процесс длится до тех пор, пока не приходят к уравнению, решение которого известно. Идеальным случаем был бы тот, когда каждое последующее уравнение оказалось бы равносильным предыдущему, тогда последнее уравнение было бы равносильным исходному и его корни совпадали бы с корнями исходного уравнения. Преобразование, при котором данное уравнение переходит в равносильное, будем называть *обратимым*.

Однако на практике получение такой цепочки равносильных уравнений не всегда возможно. Это зависит от характера преобразований, производимых над исходным уравнением. Крайне важно выяснить, какие преобразования могут привести к получению неравносильного уравнения.

Введем некоторые определения. Если любой корень уравнения

$$f(x)=\varphi(x) \tag{4,1}$$

является корнем уравнения

$$f_1(x)=\varphi_1(x) \tag{4,2}$$

(обратное необязательно), то уравнение (4,2) называется *следствием* уравнения (4,1) или *выводным*. Иначе говоря, уравнение (4,2) есть следствие уравнения (4,1), когда множество всех корней уравнения (4,2) содержит, как часть, множество всех корней уравнения (4,1). В частном случае может оказаться, что эти множества совпадают, тогда уравнения будут равносильными. Теперь можно дать другое определение равносильности: два уравнения называются *равносильными*, если каждое из них является следствием другого. На основе этого определения можно доказать некоторые теоремы о равносильности уравнений.

Теорема 1. *Уравнения*

$$f(x)=\varphi(x); \tag{4,3}$$
$$f(x)+\omega(x)=\varphi(x)+\omega(x)$$

равносильны, если функция $\omega(x)$ имеет смысл в ОДЗ, установленной для уравнения (4,1).

Доказательство. Действительно, если число x_0 — корень уравнения (4,1), то существует тождество

$$f(x_0)=\varphi(x_0), \tag{4,4}$$

причем так как x_0 входит в ОДЗ уравнения (4,1), то число $\omega(x_0)$ имеет смысл. Прибавив $\omega(x_0)$ к каждой части тождества (4,4), получим новое тождество

$$f(x_0)+\omega(x_0)=\varphi(x_0)+\omega(x_0), \tag{4,5}$$

которое означает, что x_0 — корень уравнения (4,3). Значит уравнение (4,3) есть следствие уравнения (4,1).

Если теперь x_0 — корень уравнения (4,3), то справедливо тождество (4,5). Прибавив число $\omega(x_0)$ в каждую часть этого тождества, получим тождество (4,4), из которого следует, что x_0 — корень уравнения (4,1). Значит уравнение (4,1) есть следствие уравнения (4,3), и по определению эти уравнения равносильны.

Аналогично можно доказать и теорему **2**.

Теорема 2. *Уравнения*

$$f(x)=\varphi(x); \tag{4,6}$$

$$f(x)\,\omega(x)=\varphi(x)\,\omega(x)$$

равносильны, если $\omega(x)$ имеет смысл и отлична от нуля в ОДЗ, установленной для уравнения (4,1).

Замечания.

1. Из теорем *1* и *2* вытекает, что равносильность уравнения при переносе членов из одной части в другую, а также при делении обеих частей на функцию $\omega(x)\neq 0$ не нарушается.

2. $\omega(x)$ может быть, в частности, многочленом от x или постоянным числом (многочленом нулевой степени).

3. Требование, чтобы при умножении и делении на $\omega(x)$ последняя не обращалась в нуль в ОДЗ, существенно, иначе возможна потеря корней или приобретение посторонних.

Условия равносильности, сформулированные в теоремах *1, 2* и замечаниях, являются достаточными, но не необходимыми, т. е. если какое-либо из них не выполнено, то преобразованное уравнение может иногда оказаться равносильным исходному, а иногда нет.

Пример 1. Для каждой заданной пары уравнений определить, являются ли они равносильными, а если нет, то какое из них будет следствием другого:

а) $x^3=x$ и $x^3+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}$; б) $x^2-9=0$ и $(x^2-9)(x+2)=0$;

в) $x^2-1=0$ и $\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$; г) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$ и $x^2-4=0$;

д) $\sqrt{x-5}=2$ и $x-5=4$; е) $\sqrt{(x-2)(x-3)}=\sqrt{12}$ и $\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}=\sqrt{12}$;

ж) $\sqrt{x}=-x$ и $x=x^2$; з) $x+1+\lg x=\lg x$ и $x+1=0$; и) $\lg x^4=0$ и $4\lg x=0$; к) $\log_a x^2=c$ и $2\log_a|x|=c$;

л) $x^3=x$ и $3\lg x=\lg x$.

Решение. а) Первое уравнение — следствие второго, так как корни второго $x_1=1$ и $x_2=-1$ находятся среди корней первого: $x_1=1$, $x_2=-1$; $x_3=0$. б) Второе — следствие первого, оно имеет три корня $x_{1,2}=\pm 3$ и $x_3=-2$, а первое — лишь два ($x_{1,2}=\pm 3$). в) Равносильны, так как имеют по два одинаковых корня $x_{1,2}=\pm 1$. г) Второе — следствие первого. д) Равносильны. е) Первое — следствие второго, так как имеет корни $x_1=6$ и $x_2=-1$, а второе только один ($x_1=6$). ж) Второе — следствие первого, так как единственный корень первого $x=0$ входит в число корней второго. з) Второе — следствие первого, так как имеет корень $x=-1$, а первое не имеет корней. и) Первое — следствие второго, оно имеет корни $x_{1,2}=\pm 1$, а второе — лишь $x=1$. к) Равносильны. л) Первое — следствие второго, оно имеет корни $x_1=1$, $x_2=0$, а второе — лишь один ($x=1$).

В каждой паре уравнений рассмотренного примера второе уравнение может быть получено из первого с помощью некоторого преобразования. При этом следует различать три случая: второе уравнение равносильно исходному; является следствием исходного; не является следствием исходного.

Случай равносильности разобран выше. Здесь корни обоих уравнений совпадают, т. е. каждое из уравнений является следствием другого и преобразование обратимо.

Если исходное уравнение заменить следствием, то может оказаться, что второе уравнение (следствие) имеет корни, не являющиеся корнями исходного уравнения. Такие корни называются *посторонними*.

Если же исходное уравнение преобразовано так, что полученное уравнение не является его следствием, то некоторые корни исходного уравнения не будут корнями второго. Такие корни называются *потерянными*.

В первом и во втором случаях мы сталкиваемся с необратимыми преобразованиями. Заметим, что если в примере 1 поменять местами уравнения в каждой паре, то вместо появления посторонних корней возможны потери их, и наоборот. Такая перестановка уравнений равнозначна тому, что над вторым уравнением производится обратное преобразование.

При решении уравнения, как уже отмечалось, приходится производить ряд тождественных преобразований. Рассмотрим на примере те из них, которые могут привести к нарушениям условий теорем *1* и *2*.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2-5x+\sqrt{x-2,5}=\sqrt{x-2,5}-6.$$

Решение. Приведя подобные члены, получим уравнение: $x^2-5x+6=0$, которое имеет два корня: $x=2$, $x=3$. Исходное уравнение имело лишь один корень $x=3$, так как его ОДЗ: $x\geqslant 2,5$. Данное преобразование привело к расширению ОДЗ и появлению постороннего корня.

Пример 3. Решить уравнение $(x-5)^2=7(x-5)$.

Решение. Это — квадратное уравнение с корнями $x=12$ и $x=5$. Если разделить обе части на $x-5$, то получим: $x-5=$ $=7$, откуда $x=12$. Корень $x=5$, обращающий делитель в нуль, потерян. Преобразование — запрещенное.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{x^2-9}{x+3}=0$.

Решение. Следует установить ОДЗ, а затем, приравняв числитель нулю, из полученных корней исключить тот, который не входит в ОДЗ, или сократить дробь на $x+3=0$.

Рассуждение, что если дробь равна нулю, то и числитель равен нулю, — неверное. Необходимо добавить условие: если знаменатель ее не равен нулю. Если этой оговорки не сделать, получим уравнение $x^2-9=0$ с двумя корнями $x=\pm 3$, из которых $x=-3$ не входит в ОДЗ, так как обращает знаменатель в нуль.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{(x-16)^2}{x-16}=0$

Решение. Так как ОДЗ: $x\neq 16$, уравнение, очевидно, корней не имеет.

Рассмотрим в общем виде другие преобразования, могущие привести к неравносильным уравнениям.

Пример 6. Рассмотреть с точки зрения равносильности следующие пары уравнений (для краткости функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ будем обозначать просто f и φ):

а) $f=\varphi$, $\quad f^2=\varphi^2$;

б) $f=\varphi$, $\quad f^3=\varphi^3$;

в) $\frac{f}{\varphi}=0$, $\quad f=0$;

г) $\sqrt{f^2}=c$, $\quad f=c\,(c>0)$;

д) $\sqrt[3]{f^3}=c$, $\quad f=c$;

е) $\sqrt{f}\,\sqrt{\varphi}=c$, $\quad \sqrt{f\varphi}=c\ (c>0)$;

ж) $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\varphi}}=c$, $\quad \sqrt{\frac{f}{\varphi}}=c\ (c>0)$;

з) $a^f=a^\varphi$, $\quad f=\varphi$;

и) $\log_a f=\log_a \varphi$, $\quad f=\varphi$;

к) $\log_a f^2=c$, $\quad 2\log_a f=c$;

л) $\log_a f^3=c$, $\quad 3\log_a f=c$;

м) $\log_a f+\log_a \varphi=c$, $\quad \log_a (f\varphi)=c \quad (c>0)$;

н) $\log_a f-\log_a \varphi=c$, $\quad \log_a \frac{f}{\varphi}=c$;

о) $f=\varphi$, $\quad \cos f=\cos\varphi$.

Решение. а) Второе уравнение — следствие первого, так как из $f^2=\varphi^2$ следует либо $f=\varphi$, либо $f=-\varphi$ (в дальнейшем последнее уравнение мы будем называть «посторонним»). Значит при возведении в степень можно приобрести посторонние корни, а при обратном преобразовании (извлечении корня) — потерять.

б) Равносильны. В самом деле, записывая уравнение $f^3=\varphi^3$ в виде $f^3-\varphi^3=0$ или $(f-\varphi)(f^2+f\varphi+\varphi^2)=0$, видим, что второй множитель левой части $f^2+f\varphi+\varphi^2=\left(f+\frac{\varphi}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\varphi^2$ не обращается в нуль ни при каких ненулевых f и φ.

в) Второе уравнение — следствие первого, оно может содержать посторонние корни, обращающие знаменатель в нуль. При условии $\varphi \neq 0$ уравнения будут равносильными.

г) Неравносильны, так как $\sqrt{f^2}=|f|$, первое из уравнений является следствием второго.

д) Равносильны.

е) и ж) Второе — следствие первого, так как из условия $f\varphi > 0$ вытекает либо система $f > 0$, $\varphi > 0$, либо $f < 0$, $\varphi < 0$, в то время как из первого следует лишь одна система $f > 0$, $\varphi > 0$.

з) Равносильны при условии $a > 0$ и $a \neq 1$ (ограничения относительно числа a будут сохраняться и для дальнейших примеров).

и) Второе — следствие первого, так как либо $f > 0$, $\varphi > 0$, либо $f < 0$, $\varphi < 0$; из первого следует только $f > 0$, $\varphi > 0$. Уравнения будут равносильными при условии $f > 0$, $\varphi > 0$.

к) Неравносильны, так как $\log_a f^2 = 2\log_a |f|$, первое из уравнений является следствием второго.

л) Равносильны.

м) и н) Второе — следствие первого по причинам, указанным в е) и ж).

о) Второе — следствие первого, так как из $\cos f = \cos\varphi$ имеем: $f \pm \varphi = 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Легко усмотреть, что любые преобразования уравнений непременно заканчиваются:

— либо *получением равносильного уравнения* (приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую, приведение дробных выражений к общему знаменателю и отбрасывание последнего, а также возведение в нечетную степень, извлечение корня с нечетным показателем, приравнивание показателей при одинаковых положительных основаниях, логарифмирование нечетных степеней и т. д.);

— либо *потерей корней* (деление на выражение, содержащее неизвестное, логарифмирование четных степеней, неверное извлечение корня с четным показателем из квадрата и произведения функций и т. д.);

— либо *появлением посторонних корней* (умножение на выражение, содержащее неизвестное, возведение в четную степень, сокращение некоторых дробей, перемножение корней с одинаковыми четными показателями, потенцирование, взятие одноименных тригонометрических функций от обеих частей уравнения и т. д.).

Преобразования, изменяющие множество корней исходного уравнения, связаны обычно либо с сужением ОДЗ, которому сопутствует потеря корней, либо с расширением ОДЗ, в результате которого возможно появление посторонних корней.

Подводя итоги сказанному о преобразованиях уравнения, можно дать следующие общие рекомендации:

— по возможности необходимо применять преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, т. е. стремиться к обратимости преобразования;

— преобразования, ведущие к сужению ОДЗ, т. е. к потере корней, недопустимы;

— в случае вынужденных преобразований, расширяющих ОДЗ и, следовательно, приводящих к возможности приобретения посторонних корней, следует установить способ выявления этих корней.

Теперь мы перейдем к вопросу: как практически решать уравнение и нужна ли проверка полученных корней?

Существуют два подхода к решению уравнения.

1. Сразу устанавливается ОДЗ уравнения (это целесообразно в случае, когда нахождение ОДЗ не представляет технических трудностей). Если цепочка преобразований приводит все время к равносильным уравнениям, то полученные корни в проверке не нуждаются. Расширение же ОДЗ на каком-либо шаге — сигнал о возможности появления посторонних корней. Если в процессе преобразований тщательно следить за ОДЗ и попутно налагать на неизвестное нужные ограничения, то даже и при расширении ОДЗ мы будем получать равносильные уравнения (разумеется, в ОДЗ). В таком случае проверка тоже не нужна. Когда же нет твердой уверенности в том, что хотя бы одно из преобразуемых уравнений равносильно предыдущему, следует сделать проверку. При этом сначала исключаются корни, не входящие в ОДЗ, а остальные проверяются подстановкой в исходное уравнение.

2. Приступают к решению уравнения, не занимаясь установлением ОДЗ. Если в ходе решения применяются преобразования, могущие привести к появлению посторонних корней, проверка всех полученных корней является *обязательной* (независимо от того, появились ли посторонние корни или нет). Если проверка какого-либо корня связана с большими вычислительными трудностями (например, при иррациональных корнях), целесообразно проверить, входит ли он в ОДЗ (предварительно найдя ее), и если да, то выяснить, не является ли он корнем «постороннего» уравнения, полученного на каком-то шаге процесса. В случае отрицательного ответа этот корень следует считать корнем исходного уравнения.

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{x^2-2x+3}{x-1}+4x+\frac{x-3}{x-1}=0.$$

Решение. ОДЗ: $x\neq 1$. Приведем к общему знаменателю; произведя соответствующие упрощения, получим: $5x^2-5x=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=1$. Но $x=1$ не входит в ОДЗ, это посторонний корень, появившийся в результате умножения обеих частей уравнения на $x-1$. Можно было при решении не устанавливать ОДЗ, но тогда необходима проверка всех полученных корней.

Пример 8. Решить уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin x}=0$.

Решение. ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi k$. Приравнивая числитель нулю, получим: $\sin 2x = 0$, $x = \frac{\pi k}{2}$. Исключая отсюда значения, не входящие в ОДЗ, имеем окончательно: $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. Тот же результат получим, сокращая дробь на $\sin x \neq 0$.

Пример 9. Решить уравнение $\dfrac{1-\cos x}{\sin \frac{x}{2}} = 0$.

Решение. Попытка непосредственно сократить на $\sin\frac{x}{2}$ приведет к следствию: $2\sin\frac{x}{2} = 0$, т. е. к расширению ОДЗ и появлению посторонних корней. Делить можно лишь на выражение, не равное нулю, предполагая, что $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Чтобы избежать появления посторонних корней при сокращении дробей, необходимо предварительно найти ОДЗ.

Пример 10. Показать, что следующие уравнения не имеют решений:

а) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x^2+5} + 1 = 0$;

б) $\sqrt{x-5} + \sqrt{2-x} = 8$;

в) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2} = x$;

г) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 1{,}5$.

Решение. а) Левая часть заведомо положительна, так как корни — арифметические.

б) ОДЗ: $x-5 \geqslant 0$, $2-x \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 5$, $x \leqslant 2$ — система неравенств противоречива.

в) ОДЗ: $x^2-1 \geqslant 0$, $1-x^2 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, т. е. $x^2 \geqslant 1$, $x^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, общая часть $x=1$. Но при $x=1$ левая часть равна нулю, а правая единице, что невозможно.

г) ОДЗ: $2x+1 \geqslant 0$, $x+3 \geqslant 0$, общая часть $x \geqslant -0{,}5$. Но тогда $\sqrt{x+3} \geqslant \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58 > 1{,}5$ и тем более $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} > 1{,}5$, что противоречит исходному уравнению.

Пример 11. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{0{,}5x^5+0{,}1x^4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{x^2}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{0{,}1\,x^2}\sqrt{5x+1}} = \dfrac{\sqrt{10}}{x^2}$. ОДЗ: $x > -\frac{1}{5}$, $x \neq 0$. Сокращая на x^2 и $\sqrt{5x+1}$, получим тождество: $1=1$, верное в ОДЗ.

Ответ: $-\frac{1}{5} < x < 0$, $0 < x < \infty$.

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+3x+2} + \sqrt{2x^2-3x+2} = \sqrt{7x^2+8}$.

Решение. ОДЗ: $-\infty < x < \infty$ (все подкоренные выражения положительны, так как в каждом из них $D<0$, $a>0$), обе части уравнения положительны. Поэтому, возведя в квадрат, получим уравнение: $2\sqrt{4x^4-x^2+4}=3x^2+4$, равносильное исходному. Возводя еще раз в квадрат, снова получим по той же причине равносильное уравнение: $7x^4-28x^2=0$, $7x^2(x^2-4)=0$. Корни $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=\pm 2$ в проверке не нуждаются.

Пример 13. Решить уравнение $\lg x^2=2$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$.

Первый способ. $\lg x^2=\lg 100$, $x^2=100$, $x_{1,2}=\pm 10$.

Второй способ. $2\lg|x|=2$, $\lg|x|=1$, $|x|=10$, $x_{1,2}=\pm 10$. Неверным было бы такое решение: $2\lg x=2$, $\lg x=1$, $x=10$ (ввиду сужения ОДЗ потерян корень $x_2=-10$).

Пример 14. Решить уравнение $(x-5)^{x+1}=(x-5)^3$.

Решение. Так как в показательно-степенной функции степень с любым вещественным показателем рассматривается только при положительном основании, то ОДЗ: $x-5>0$, т. е. $x>5$. При этом условии, приравнивая показатели степеней, получим: $x=2$ — значение, не входящее в ОДЗ.

Рассмотрим теперь особые случаи. Если основание равно нулю ($x=5$), имеем: $0^6=0^3$ (тождество). Если основание равно единице ($x=6$), то получим: $1^7=1^3$ (снова тождество).

Ответ: $x_1=5$, $x_2=6$.

Пример 15. Решить уравнение $\sqrt{\lg(1-x)}+5\lg(1-x)=6$.

Решение. ОДЗ: $1-x>0$, $x<1$, $\lg(1-x)>0$, $1-x>1$, $x<0$; общая часть $x<0$. Обозначив $\sqrt{\lg(1-x)}=t$, получим уравнение: $5t^2+t-6=0$ с корнями $t_1=-\frac{6}{5}$, $t_2=1$. Первый негоден, так как равенство $\sqrt{\lg(1-x)}=-\frac{6}{5}$ невозможно (корень — арифметический); для второго имеем: $\sqrt{\lg(1-x)}=1$, $\lg(1-x)=1$ (расширение ОДЗ), $1-x=10$, $x=-9$.

Пример 16. Решить уравнение $x^2-5+\sqrt{x^2-6}=7$.

Решение. ОДЗ: $x^2-6\geqslant 0$, $|x|\geqslant\sqrt{6}$. Уединим радикал $\sqrt{x^2-6}=12-x^2$, заметив, что $12-x^2\geqslant 0$, т. е. $|x|\leqslant\sqrt{12}$. При возведении в квадрат ОДЗ расширяется и возможно появление посторонних корней (нужна проверка). Получим уравнение: $x^4-25x^2+150=0$. Проверкой убеждаемся, что $x_{1,2}=\pm\sqrt{10}$ — корни исходного уравнения. Что касается корней $x_{3,4}=\pm\sqrt{15}$, то из условия $|x|\leqslant\sqrt{12}$ сразу вытекает, что они посторонние (эти корни являются корнями уравнения $\sqrt{x^2-6}=x^2-12$).

Конкретные соображения и рекомендации для решения уравнений, порожденных функциями разной природы, будут даны ниже.

Уравнения, содержащие параметры

Если в уравнение, кроме неизвестных, входят числа, обозначенные буквами, то они называются *параметрами*. Те числовые значения параметра, при которых уравнение имеет смысл, называются *допустимыми*. Множество всех таких значений составляет ОДЗ параметра.

Решение уравнения с параметрами начинается обычно с установления ОДЗ неизвестного, а также ОДЗ параметров (если это не затруднительно). Затем совершают необходимые преобразования с целью выразить неизвестное через параметры. Однако этого еще недостаточно. Решить уравнение, содержащее параметр, означает, что для каждого допустимого значения параметра следует найти множество всех корней данного уравнения. Если параметров несколько, множество корней ищется обычно для определенного соотношения между параметрами. Обязательно следует исследовать особые значения параметра, при которых корни уравнения существуют, но не выражаются полученными формулами. В текстовых задачах ОДЗ параметров устанавливаются из условий конкретной задачи.

Пример 17. Решить уравнение $m^2(x-2)-3m=x+1$.

Решение. После преобразований получим: $(m^2-1)x=$ $=2m^2+3m+1$. Если $|m|\neq 1$, то решение выражается формулой

$$x=\frac{2m^2+3m+1}{m^2-1}=\frac{2m+1}{m-1}.$$

Рассмотрим особые значения параметра. Если $m=1$, то исходное уравнение противоречиво, если же $m=-1$, то удовлетворяется тождественно. Здесь можно сделать ошибку; подставив формально $m=-1$ в окончательную формулу, получим: $x=\frac{1}{2}$, что неверно.

Уравнения с двумя неизвестными

Уравнение с двумя неизвестными $F(x, y)=0$ в общем случае имеет бесчисленное множество решений, так как, давая одному из неизвестных произвольное (допустимое) значение, из уравнения можно найти соответствующее ему значение второго неизвестного. Геометрически это означает, что линия $F(x, y)=0$ состоит из бесчисленного множества точек, причем координаты любой точки этой линии (пара чисел: x и y) являются решением уравнения $F(x, y)=0$.

Алгебраическое уравнение называется *однородным*, если оно содержит члены одной и той же степени относительно неизвестных и не содержит свободного члена. Например,

$$ax+by=0;\ ax^2+bxy+cy^2=0.$$

Однородные уравнения среди бесчисленного множества решений обязательно содержат нулевое.

Рассмотрим однородное уравнение второй степени

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

Положив $x=yt$, получим: $ay^2t^2+bty^2+cy^2=0$ или

$$y^2(at^2+bt+c)=0.$$

Если $y=0$, то $x=0$ (нулевое решение). Если $at^2+bt+c=0$, то, обозначив корни этого квадратного уравнения через t_1 и t_2, получим решение однородного уравнения: $x=t_1y$ и $x=t_2y$, где y — любое число.

Очевидно, одно уравнение с числом неизвестных, бóльшим двух, тоже будет иметь бесчисленное множество решений.

Системы уравнений

Два и несколько уравнений образуют *систему* уравнений. Решить систему уравнений — значит найти такие значения неизвестных, при которых каждое уравнение системы превращается в тождество. В частности, решением системы уравнений с двумя неизвестными называется пара таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, превращают каждое из уравнений системы в тождество (для системы с тремя неизвестными решением будет тройка чисел и т. д.).

Если система имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной;* ни одного — *несовместной;* два и более решений — *неопределенной*. Если каждое решение какой-либо системы является решением другой, то последняя называется *следствием* первой системы. Если же, кроме того, и первая является следствием второй, то эти системы называются *равносильными*. Значит, у равносильных систем множества решений совпадают.

В ходе решения исходную систему приходится преобразовывать. При этом новая система будет равносильна исходной в следующих случаях:

— если любое уравнение системы заменить равносильным ему;

— если из системы удалить уравнение, являющееся следствием других уравнений этой системы;

— если из системы удалить уравнение, удовлетворяющееся тождественно.

Неравенства

Для любых действительных чисел a и b имеет место только одно из трех следующих соотношений: либо $a>b$, либо $a<b$, либо, наконец, $a=b$. По определению $a>b$, если $a-b$ — положительное число, и $a<b$, если $a-b$ — отрицательное число; это означает, что утверждения $a>b$ и $a-b>0$ равносильны (так же $a<b$ равносильно $a-b<0$).

Неравенством с одним неизвестным называется выражение вида $f(x)>\varphi(x)$ или $f(x)<\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции аргумента x.

Неравенства, содержащие знаки $>$ или $<$, будем называть *строгими*, а со знаками $\geqslant$ или $\leqslant$ — *нестрогими*, подобно тому, как числа $a>0$, $b<0$ мы называем соответственно (строго) положительным и отрицательным, а числа $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$ — неотрицательным и неположительным.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называется общая часть областей определения функций, входящих в состав неравенства.

Решением неравенства называется любое (допустимое) значение неизвестного, при подстановке которого в неравенство последнее обращается в верное числовое неравенство. Решить неравенство — значит найти множество всех его решений.

Два неравенства называются *равносильными*, если все решения первого являются решениями второго, и наоборот, все решения второго являются решениями первого. Преобразование, при котором данное неравенство переходит в равносильное, называется *обратимым*.

Неравенства обладают многими свойствами уравнений. Можно доказать, что при переносе членов неравенства из одной части в другую (с изменением знака), умножении и делении на положительное число или выражение получим равносильное неравенство. Отметим лишь некоторые специфические свойства неравенств.

1) При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число или выражение неравенство меняет смысл (нельзя делить и умножать на выражение, знак которого неизвестен).

2) Неравенства $\frac{f}{\varphi}\geqslant 0$ и $f\varphi\geqslant 0$ равносильны (при условии, если $\varphi\neq 0$).

3) Если $f>0$, $\varphi>0$ и $f>\varphi$, то $\frac{1}{f}<\frac{1}{\varphi}$.

Практическое решение неравенства состоит в том, что, используя известные свойства неравенств, его постепенно упрощают. При этом следует стремиться к тому, чтобы процесс преобразований был обратимым, т. е. чтобы каждое вновь получаемое неравенство было равносильно предыдущему. Однако не все преобразования сохраняют равносильность неравенства. Одни из них сужают ОДЗ, другие, наоборот, расширяют ее. Так как все решения неравенства должны входить в ОДЗ, необходимо в процессе решения следить за ОДЗ. Преобразования, сужающие ОДЗ и могущие привести к потере части решений, безусловно, запрещены. С другой стороны, иногда по необходимости приходится совершать преобразования, расширяющие ОДЗ и ведущие к появлению посторонних решений. К ним относятся, в частности, приведение дробных выражений к общему знаменателю, возведение в четную степень, потенцирование обеих частей неравенства и др.

В случае вынужденного расширения ОДЗ необходимо с целью сохранения равносильности оставить только те корни преобразованного неравенства, которые входили в ОДЗ исходного уравнения. Невыполнение этого может привести к приобретению посторонних корней, проверить которые подстановкой в исходное неравенство технически невозможно: их, как правило, бесчисленное множество. Отсюда ясно, что при решении неравенств крайне важно внимательно следить за обратимостью процесса преобразований, т. е. равносильностью вновь получаемых уравнений, и в частности за изменением ОДЗ.

Пример 18. Решить неравенства: а) $\pi > -\frac{1}{x}$; б) $\frac{2x}{x-1} \leqslant 1$; в) $\frac{1}{x^3} > 27$; г) $x^6 \leqslant 64$; д) $\frac{1}{x-|x|} > 0$.

Решения: а) ОДЗ: $x \neq 0$. Если $x > 0$, то $\pi x > -1$, $x > -\frac{1}{\pi}$, откуда $x > 0$; если же $x < 0$, то $\pi x < -1$, $x < -\frac{1}{\pi}$, тогда $x < -\frac{1}{\pi}$.

Ответ: $x > 0$, $x < -\frac{1}{\pi}$.

б) ОДЗ: $x \neq 1$, $\frac{2x}{x-1} - 1 \leqslant 0$, $\frac{x+1}{x-1} \leqslant 0$, $(x+1)(x-1) \leqslant 0$, откуда $-1 \leqslant x < 1$.

в) ОДЗ: $x \neq 0$. Так как правая часть положительна, то левая тем более, т. е. $x > 0$. «Переворачивая» неравенство, имеем по известному свойству: $x^3 < \frac{1}{27}$ или $x < \frac{1}{3}$.

Ответ: $0 < x < \frac{1}{3}$.

г) Так как обе части неотрицательны, то, извлекая из обеих частей корни 6-й (четной) степени, получим: $|x| \leqslant 2$ или $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

д) ОДЗ: $x \neq 0$, $x - |x| \neq 0$. Так как левая часть положительна, то $x - |x| > 0$, откуда $x > |x|$. Если при этом $x > 0$, то неравенство $x > x$ противоречиво; если же $x < 0$, то $x > -x$, $2x > 0$, $x > 0$, что противоречит предположению. Следовательно, решений нет. Попытка умножить обе части на знаменатель привела бы к неравенству $1 > 0$, т. е. к появлению посторонних решений.

Для неравенств, содержащих параметры, необходимо исследовать, при каких значениях параметров неравенство имеет решение, и указать для каждого значения параметра соответствующее ему решение, а также указать те значения параметров, при которых решений нет.

Пример 19. Решить неравенство $x - \frac{a}{a-1} < 1 - \frac{x-1}{a-1}$.

Решение. ОДЗ параметра: $a \neq 1$ (иначе неравенство не имеет смысла). Сделав приведение к общему знаменателю и перенеся все члены в левую часть, получим: $\frac{ax}{a-1} < 0$.

Если $a-1>0$ (т. е. $a>1$), то $ax<0$, откуда $x<0$. Если же $a-1<0$ (т. е. $a<1$), то $ax>0$. Здесь возможны три случая: а) при $0<a<1$ будет $x>0$; б) при $a<0$ окажется $x<0$; в) при $a=0$ неравенство не выполняется.

Ответ: если $a>1$, то $x<0$; если $0<a<1$, то $x>0$; если $a=1$ или $a=0$, то решений нет.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

Линейные и квадратные уравнения

Линейным называется уравнение вида $ax+b=0$. Если $a\neq 0$, оно имеет единственный корень $x=-\frac{b}{a}$. Если $a=0$, но $b\neq 0$, уравнение имеет вид: $0\cdot x=-b$. Так как последнее равенство не может выполняться ни при каких x, корней нет. Если $a=b=0$, то имеем $0\cdot x=0$ — равенство, которое выполняется при любых x; следовательно, уравнение имеет бесконечное множество корней.

Пример 20. Решить уравнение $||x-1|-1|=1$.

Решение. Если $x-1\geqslant 0$ (т. е. $x\geqslant 1$), то имеем: $|x-2|=1$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$. Если же $x<1$, то $|x|=1$ и, следовательно, $x_3=-1$.

Пример 21. Решить уравнение $\frac{a+2}{x-2}=a-1$.

Решение. ОДЗ неизвестного: $x\neq 2$, параметра a — множество всех действительных чисел. Преобразовав, получим:

$$(a-1)\,x=3a.$$

Если $a\neq 1$, уравнение имеет единственный корень $x=\frac{3a}{a-1}$. Если $a=1$, то исходное уравнение противоречиво, $\frac{3}{x-2}=0$ (корней нет).

Пример 22. Решить уравнение $\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x}$.

Решение. Это уравнение — дробное. ОДЗ неизвестного: $x\neq 0$, $x\neq a$; ОДЗ параметров a и b — множество всех действительных чисел. Имеем: $a-x=bx$, $(b+1)\,x=a$.

Если $b\neq -1$, то $x=\frac{a}{b+1}$. Так как $x\neq 0$ (ОДЗ), то $a\neq 0$; так как $x\neq a$ (ОДЗ), то $b\neq 0$. Если $b\neq -1$ и $a\neq 0$, то $0\cdot x=a$ (нет корней); если $b=-1$ и $a=0$, то $0\cdot x=0$ (бесчисленное множество корней); если $b=0$, то нет корней, так как тогда $x=a$ (ОДЗ); если $a=0$ и $b\neq -1$, то нет корней, так как тогда $x=0$ (ОДЗ).

Ответ: если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $b\neq -1$, то $x=\frac{a}{b+1}$ (единственный корень); если $b=-1$ и $a\neq 0$ — нет корней; если $b=-1$ и $a=0$, то x — любое действительное число, кроме $x=0$ и

$x=a$ (ОДЗ!); если $b=0$ — нет корней; если $a=0$ и $b\neq-1$ — тоже нет корней.

Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (4,7)$$

называется *полным*, если все его коэффициенты не равны нулю, и *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Если $a\neq 0$, $c=0$, то получим: $ax^2+bx=0$, $x(ax+b)=0$, и значит уравнение имеет два действительных корня, из которых один обязательно нулевой: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

Если $a\neq 0$, $b=0$, имеем: $ax^2+c=0$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$; если при этом a и c разных знаков, уравнение имеет два действительных корня, равных по модулю, но противоположных по знаку; если a и c имеют одинаковые знаки, оба корня мнимые. Если $a\neq 0$, но $b=c=0$, уравнение имеет вид: $ax^2=0$, откуда $x_{1,2}=0$.

Корни *полного* квадратного уравнения могут быть найдены по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (4,8)$$

Если же в уравнении (4,8) $a=0$, то получим линейное уравнение: $bx+c=0$, которое было рассмотрено выше. Деля обе части уравнения (4,8) на $a\neq 0$ и обозначая $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, получим *приведенное* квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0, \qquad (4,9)$$

корни которого определяются по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (4,10)$$

Последней формулой выгодно пользоваться лишь тогда, когда второй коэффициент p уравнения (4,9) четен; при нечетном p технически целесообразнее использовать формулу (4,8). Если же в полном (неприведенном) уравнении второй коэффициент b четен, то, подставляя в формулу (4,7) $b=2k$ (k — любое целое число), получим уравнение

$$ax^2+2kx+c=0, \qquad (4,11)$$

корни которого находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}. \qquad (4,12)$$

Подкоренные выражения в формулах (4,8), (4,10), (4,12) называются *дискриминантом* (D) квадратного уравнения. Если

$D>0$ — корни уравнения действительные и разные; если $D=0$ — действительные и равные (при этом левая часть уравнения есть полный квадрат); если $D<0$ — комплексно-сопряженные.

Теорема Виета, связывающая корни квадратного уравнения с его коэффициентами, для полного и приведенного уравнений (4,7) и (4,9) может быть записана соответственно в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a};\\ x_1x_2&=\frac{c}{a};\end{aligned}\right\} \tag{4,13}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=-p;\\ x_1x_2&=q.\end{aligned}\right\} \tag{4,14}$$

С помощью этой теоремы можно сделать некоторые заключения о характере корней квадратного уравнения, не решая его. Так, например, при условии, что оба корня полного квадратного уравнения действительные и разные, из формулы (4,13) следует, что

Корни	Если
Одинаковых знаков	$\frac{c}{a}>0$
Разных знаков	$\frac{c}{a}<0$
Оба положительны	$\frac{c}{a}>0,\quad \frac{b}{a}<0$
Оба отрицательны	$\frac{c}{a}>0,\quad \frac{b}{a}>0$
Положительный корень по модулю больше отрицательного	$\frac{c}{a}<0,\quad \frac{b}{a}<0$
Отрицательный корень по модулю больше положительного	$\frac{c}{a}<0,\quad \frac{b}{a}>0$

Пример 23. При каких значениях $d\ (d\neq 1)$ корни уравнения

$$(d-1)x^2-2dx+d+3=0$$

а) действительны; б) равны; в) одинаковых знаков; г) оба отрицательны; д) положительный корень по модулю больше отрицательного; е) один корень равен нулю; ж) равны по модулю, но разных знаков?

Решение. а) $D=d^2-(d-1)(d+3)=-2d+3\geqslant 0$, $d\leqslant \frac{3}{2}$. б) $D=0$, $d=\frac{3}{2}$. в) $D\geqslant 0$, т. е. $d\leqslant\frac{3}{2}$, $\frac{c}{a}>0$, $\frac{d+3}{d-1}>0$, откуда $d<-3$, $d>1$.

Ответ: $1<d\leqslant\frac{3}{2}$, $d<-3$.

г) К последним условиям надо добавить: $\frac{b}{a}>0$, $\frac{-2d}{d-1}>0$, откуда $0<d<1$ — система неравенств противоречива, решений нет.

д) $D>0$, т. е. $d<\frac{3}{2}$; $\frac{d+3}{d-1}<0$, т. е. $-3<d<1$; $\frac{-2d}{d-1}<$ <0, т. е. $d<0$, $d>1$.

Ответ: $-3<d<0$.

е) Свободный член равен нулю $d+3=0$, т. е. $d=-3$.

ж) $D>0$, т. е. $d<\frac{3}{2}$, второй коэффициент равен нулю ($2d=0$), т. е. $d=0$.

Пример 24. Доказать, что если корни x_1 и x_2 уравнения $px^2+nx+n=0$ таковы, что $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a}{b}$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{p}}=0$$

($a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$).

Решение. Так как по теореме Виета $x_1 x_2=\frac{n}{p}$, а по условию $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a}{b}$, то $x_1=\pm\sqrt{\frac{na}{pb}}$, $x_2=\pm\sqrt{\frac{nb}{pa}}$. Так как по теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{n}{p}$, то

$$\sqrt{\frac{na}{pb}}+\sqrt{\frac{nb}{pa}}+\frac{n}{p}=0.$$

Деля обе части этого равенства на $\sqrt{\frac{n}{p}}$, получим ответ.

Пример 25. Доказать, что уравнение $x^2+ax+1=0$ не имеет рациональных и целых корней, если a — целое и $|a| \neq 2$.

Решение. Допустим, что уравнение имеет рациональный корень $\frac{m}{n}$ $\left(\frac{m}{n}\right.$ — несократимая дробь, причем $\left.n \neq 1\right)$, тогда он должен удовлетворять уравнению, т.е. $\frac{m^2}{n^2}+a\frac{m}{n}+1=0$; умножая на n, получим: $\frac{m^2}{n}+am+n=0$. Так как $am+n$ — целое число, а $\frac{m^2}{n}$ — дробь, то предположение неверно. Допустим теперь, что уравнение имеет целый корень m, тогда $m^2+am+1=0$; деля на m, будем иметь: $m+a+\frac{1}{m}=0$. Так как $m+a$ — целое, а $\frac{1}{m}$ — дробь, то это предположение тоже неверно.

Уравнения высших степеней

Как уже отмечалось, *алгебраическим уравнением* n-й степени называется уравнение вида

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0, \qquad (4,15)$$

в левой части которого стоит многочлен $P_n^{(x)}$ с действительными коэффициентами, а допустимые значения неизвестного принадлежат области комплексных чисел.

Основная теорема алгебры (Гаусса), доказательство которой выходит за рамки элементарного курса, гласит, что всякое уравнение n-й степени имеет хотя бы один корень x_1 (действительный или комплексный). Но тогда, согласно следствию теоремы Безу, многочлен $P_n(x)$ должен делиться без остатка на разность $x - x_1$. При этом в частном получится многочлен $P_{n-1}(x)$ степени на единицу ниже, так что

$$P_n(x) = (x - x_1)\, P_{n-1}(x). \tag{4,16}$$

Но по теореме Гаусса уравнение $P_{n-1}(x) = 0$ имеет хотя бы один корень x_2; это означает, что многочлен $P_{n-1}(x)$ делится без остатка на $x - x_2$

$$P_{n-1}(x) = (x - x_2)\, P_{n-2}(x).$$

Подставляя выражение для $P_{n-1}(x)$ в (4,16), получим:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\, P_{n-2}(x).$$

Повторяя этот процесс, получим корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (так как на последнем n-м шаге в частном получим многочлен первой степени).

Таким образом, многочлен $P_n(x)$ имеет n корней и может быть разложен на n линейных множителей:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Среди этих корней могут быть и действительные и комплексные. Значит, уравнение n-й степени имеет ровно n корней. Так как мы рассматриваем многочлены только с действительными коэффициентами, то каждому комплексному корню $x = \alpha + \beta i$ отвечает сопряженный комплексный корень $\bar{x} = \alpha - \beta i$; значит число комплексных корней уравнения является четным. Следовательно, уравнение нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень, а отдельные пары корней уравнения любой степени могут быть и действительными и комплексными.

Для уравнений I—IV степеней существуют формулы, позволяющие выразить их корни через коэффициенты самого уравнения. Практически этими формулами пользуются только при решении уравнений I и II степеней. Формулы для кубического уравнения (Кардано) и уравнения IV степени (Феррари) настолько сложны, что имеют незначительную практическую ценность.

Двучленные уравнения $x^n + a = 0$. В алгебре рассматриваются частные случаи этого уравнения при $n = 3,4,6$. Найдем решения соответствующих уравнений:

1. $x^3 - a^3 = 0$; 2. $x^3 + a^3 = 0$;

3. $x^4 - a^4 = 0$; 4. $x^4 + a^4 = 0$;

5. $x^6 - a^6 = 0$; 6. $x^6 + a^6 = 0$.

Решения.

1. $(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$, $x_1=a$, $x_{2,3}=-\frac{a}{2}\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}i$;

2. $(x+a)(x^2-ax+a^2)=0$, $x_1=-a$, $x_{2,3}=\frac{a}{2}\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}i$;

3. $(x^2-a^2)(x^2+a^2)=0$, $\quad x_{1,2}=\pm a$, $x_{3,4}=\pm ai$;

4. $(x^4+2a^2x^2+a^4)-2a^2x^2=0$, $(x^2+a^2)^2-(a\sqrt{2}x)^2=0$,

$(x^2-a\sqrt{2}x+a^2)(x^2+a\sqrt{2}x+a^2)=0$,

$$x_{1,2,3,4}=\frac{\pm a\sqrt{2}(1\pm i)}{2};$$

5. $(x^3-a^3)(x^3+a^3)=0$ (решения уравнений $x^3-a^3=0$ и $x^3+a^3=0$ получены в примерах 1 и 2);

6. $(x^2)^3+(a^2)^3=0$, $(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^2)=0$,

$$x_{1,2}=\pm ai,$$

$(x^4+2a^2x^2+a^4)-3a^2x^2=0$, $(x^2+a^2)^2-(a\sqrt{3}x)^2=0$,

$(x^2-a\sqrt{3}x+a^2)(x^2+a\sqrt{3}x+a^2)=0$,

$$x_{3,4,5,6}=\frac{a(\pm\sqrt{3}\pm i)}{2}.$$

Заметим, что если в таких уравнениях коэффициент при x^n не равен единице, следует разделить на него обе части уравнения.

Трехчленные уравнения $ax^{2n}+bx^n+c=0$. При $n=2$ уравнение является биквадратным. Подстановкой $x^n=y$ трехчленное уравнение сначала сводится к квадратному $ay^2+by+c=0$, а затем — к двум двучленным уравнениям n-й степени.

Пример 26. Решить уравнение $x^6-7x^3-8=0$.

Решение. Подставляя $x^3=y$, имеем: $y^2-7y-8=0$, откуда $y_1=8$, $y_2=-1$. Возвращаясь к старому неизвестному, получим два кубических уравнения: $x^3=8$ и $x^3=-1$.

Ответ: $x_1=2$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}i$, $x_4=-1$, $x_{5,6}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

При решении некоторых уравнений высших степеней могут быть использованы следующие методы: метод проб, разложение левой части на множители, некоторые искусственные приемы и, наконец, графический метод.

Метод проб и разложение левой части на множители. Можно доказать, что если уравнение (4,7) имеет рациональный корень, то им может быть только такая дробь $\frac{p}{q}$, числитель которой есть делитель свободного члена a_0, а знаменатель — делитель старшего коэффициента a_n. Значит все рациональные корни могут быть найдены конечным числом испытаний. В частности, всякий целый корень уравнения с целыми коэффициентами есть делитель свободного члена, всякий рациональный корень приведенного ($a_n=1$) уравнения с целыми коэффициентами есть целое число.

Практически методом проб находят обычно один из корней уравнения, а затем, пользуясь следствием теоремы Безу, понижают степень уравнения на единицу (метод не дает возможности найти иррационального или комплексного корня).

Пример 27. Решить уравнения:

а) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^3 + 4 = 3x^2$;

в) $x(x-1)(x-2) = 24$;

г) $x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x = 0$.

Решения. а) Ищем рациональный корень в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p выбирается из чисел ± 1, ± 2; q — из чисел ± 1, ± 2. Составим всевозможными методами несократимые дроби: ± 1, ± 2, $\pm 1/2$; только среди этих дробей и могут быть рациональные корни уравнения. Методом проб находим корень $x_1 = -1$. Разделив многочлен $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ на $x + 1$, получим: $2x^2 - 5x + 2$. Соответствующее ему квадратное уравнение имеет корни $x_2 = 2$ и $x_3 = 1/2$.

б) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Ищем целый корень среди чисел ± 1, ± 2, ± 4. Методом проб находим: $x_1 = 1$. После понижения степени имеем уравнение: $x^2 - 4x + 4 = 0$ с корнями $x_{2,3} = 2$.

в) $x^3 - 3x^2 + 2x - 24 = 0$. Среди делителей свободного члена находим целый корень: $x_1 = 4$. Понижение степени приводит к уравнению $x^2 + x + 6 = 0$ с комплексными корнями $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

г) Имеем: $x(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 0$, $x_1 = 0$. Методом проб среди чисел ± 1 находим: $x_2 = -1$, затем получаем уравнение $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ и снова методом проб находим: $x_3 = -1$. После понижения степени остается последнее уравнение $x^2 + 1 = 0$ с корнями $x_{4,5} = \pm i$.

Пример 28. Решить уравнение $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$, если один из его корней равен $1 + i$.

Решение. Так как коэффициенты уравнения — действительные числа, то корню $x_1 = 1 + i$ отвечает сопряженный корень $x_2 = 1 - i$. Тогда $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2x + 2$. Разделив $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ на $x^2 - 2x + 2$, получим: $3x^2 + x - 1$. Корни соответствующего квадратного уравнения: $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Искусственные приемы. К таким приемам относятся: введение нового неизвестного для понижения степени уравнения, группировка, разложение на множители и т. д.

Пример 29. Решить уравнение $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) = 15$.

Решение. Полагая $x^2 - 2x = y$, получим уравнение: $y^2 + 2y - 15 = 0$ с корнями $y_1 = -5$, $y_2 = 3$. Возвращаясь к старому неизвестному и решая два квадратных уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$ и $x^2 - 2x - 3 = 0$, получим: $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$.

Пример 30. Решить уравнение $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$.

Решение. ОДЗ: $x\neq-1$, $x\neq0$. Положим $\frac{x+1}{x}=y$. Тогда $4y^4-17y^2+4=0$, откуда $y_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, $y_{3,4}=\pm2$. Имеем: $\frac{x+1}{x}=\pm\frac{1}{2}$, $\frac{x+1}{x}=\pm2$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{2}{3}$, $x_4=-\frac{1}{3}$.

Пример 31. Решить уравнение $\frac{x+1}{x^3+x-1}+\frac{x^3+x-1}{x+1}=2$.

Решение. Положим $\frac{x^3+x-1}{x+1}=y$, $\frac{1}{y}+y=2$, $y^2-2y+1=0$, $y_{1,2}=1$. Значит $\frac{x^3+x-1}{x+1}=1$ или $x^3-2=0$ (двучленное уравнение). Разделим обе части на 2, получим: $\left(\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right)^3-1=0$. Примем $\frac{x}{\sqrt[3]{2}}=z$, тогда $z^3-1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$, $z_1=1$, $z_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно, $x_1=\sqrt[3]{2}$, $x_{2,3}=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}\pm\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Пример 32. Решить уравнение $x(x-1)(x+2)(x+1)=24$.

Решение. Перемножая крайние, а затем средние множители, получим: $(x^2+x)(x^2+x-2)=24$. Обозначив $x^2+x=t$, найдем: $t(t-2)=24$ или $t^2-2t-24=0$, откуда $t_1=6$, $t_2=-4$. Решим уравнения $x^2+x-6=0$ и $x^2+x+4=0$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i$.

Пример 33. Решить уравнение $(x+2)(x-3)(x-1)(x+6)=40x^2$.

Решение. $(x^2-x-6)(x^2+5x-6)=40x^2$. Полагая $x^2-6=y$, получим: $(y-x)(y+5x)=40x^2$, $y^2+4xy-45x^2=0$. Решая последнее уравнение как квадратное относительно неизвестного y (или как однородное), находим: $y_1=5x$, $y_2=-9x$. Остается решить два квадратных уравнения: $x^2-5x+6=0$ и $x^2+9x-6=0$.

Ответ: $x_1=6$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=\frac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$.

Пример 34. Решить уравнение $x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=5$.

Решение. Положим $x-\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Имеем уравнение: $y^2+2+\frac{y}{2}=5$ или $2y^2+y-6=0$ с корнями: $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-2$. Решим квадратные уравнения $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ и $x-\frac{1}{x}=-2$.

Ответ: $x_1=2$, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}$.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\} \tag{4,17}$$

Умножая первое уравнение на b_2, а второе на b_1 и вычитая второе уравнение из первого, исключим сначала y

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{4,18}$$

Затем, умножая первое уравнение на a_2, а второе — на a_1 и вычитая первое из второго, исключим x

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{4,19}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1$, записываемое обычно в виде квадратной таблицы из чисел a_1, b_1, a_2, b_2, называют *определителем системы* и обозначают греческой буквой Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Определитель системы Δ, как видно, составлен из коэффициентов при неизвестных x и y системы (4,17). Правую часть уравнения (4,18) легко получить из Δ, если формально заменить коэффициенты при x свободными членами; обозначим ее Δ_x.

Аналогично, заменяя коэффициенты при y свободными членами, получим из Δ правую часть уравнения (4,19). Тогда выводные уравнения (4,18) и (4,19), записанные сокращенно в виде

$$\left.\begin{aligned} \Delta x = \Delta_x, \\ \Delta y = \Delta_y, \end{aligned}\right\} \tag{4,20}$$

составят выводную систему (следствие системы (4,17)), где

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1. \end{aligned}\right\} \tag{4,21}$$

Исходная и выводная системы, как известно, неравносильны: все решения исходной системы являются решениями выводной, однако решения выводной системы могут и не быть решениями исходной.

Исследование. 1) Пусть $\Delta \neq 0$, тогда из формул (4,20) следует:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{4,22}$$

Эти формулы, называемые *формулами Крамера*, дают решение выводной системы (4,20). Докажем, что они являются и решениями исходной системы (4,17). Для этого подставим, например, выражения x и y из формул (4,22) в левую часть первого уравнения системы (4,17)

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta}+b_1\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{a_1(c_1b_2-c_2b_1)+b_1(a_1c_2-a_2c_1)}{\Delta}=$$

$$=\frac{a_1c_1b_2-a_1b_1c_2+b_1a_1c_2-b_1a_2c_1}{\Delta}=\frac{c_1(a_1b_2-a_2b_1)}{\Delta}=c_1.$$

Аналогично, подставив выражение для x и y из формул (4,22) в левую часть второго уравнения системы (4,17), получим c_2. Значит если $\Delta \neq 0$, то система (4,17) имеет единственное решение, находимое по формулам (4,22) (в этом случае исходная и выводная системы равносильны).

2) Пусть теперь $\Delta=0$ и хотя бы одно из чисел Δ_x или Δ_y не равно нулю. В этом случае окажется $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ и равенства (4,20) не могут выполняться ни при каких x. Значит, выводная система несовместна, а исходная тем более.

3) Пусть, наконец, $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$.

$$\Delta=0, \qquad a_1b_2-a_2b_1=0, \qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2};$$

$$\Delta_x=0, \qquad a_1c_2-a_2c_1=0, \qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2};$$

$$\Delta_y=0, \qquad c_1b_2-c_2b_1=0, \qquad \frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

(это справедливо, если a_2, b_2, c_2 не равны нулю).

Следовательно, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$ при $k \neq 0$, т. е. коэффициенты при x и y и свободные члены системы (4,17) пропорциональны. Но в таком случае одно из уравнений системы (4,17) получается умножением всех членов другого на общий множитель k, т. е. является следствием другого. Значит, система (4,17) вырождается в одно уравнение с двумя неизвестными, например $a_1x+b_1y=c_1$, которое имеет бесчисленное множество решений. Отсюда заключаем, что система (4,17) неопределенна. В этом случае исходная и выводная системы неравносильны, так как выводной системе (4,20) удовлетворяет любая пара чисел, а исходной (4,17) — лишь те пары, которые связаны зависимостью $a_1x+b_1y=c_1$, т. е. $y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}$, где x — любое действительное число.

Таким образом, при решении системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными возможны три случая.

1) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера.

2) Если $\Delta=0$, но Δ_x и Δ_y не равны нулю, система несовместна.

3) Если $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, то система неопределенна.

Так как числа Δ, Δ_x, Δ_y выражаются через коэффициенты системы (4,17), то эти случаи можно сформулировать следующим образом:

— система имеет единственное решение, если коэффициенты при неизвестных x и y уравнений системы непропорциональны, т. е. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

— система несовместна, если коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены непропорциональны, т. е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

— система неопределенна, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Известно, что уравнению первой степени с двумя неизвестными отвечает на плоскости некоторая прямая. Если система имеет единственное решение, это означает, что прямые пересекаются (причем координаты точки пересечения прямых являются решением системы); если система несовместна — прямые параллельны, если неопределенна — прямые сливаются.

Рассмотрим однородную систему

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что однородная система всегда имеет нулевое решение: $x = y = 0$. Если $\Delta \neq 0$, то это решение единственно. Если же $\Delta = 0$, то, кроме нулевого, система имеет бесчисленное множество ненулевых решений, т. е. неопределенна.

Пример 35. Решить системы:

$$\text{а)}\ \left.\begin{aligned} 3x + 5y = 13, \\ 7x - 2y = 3, \end{aligned}\right\} \qquad \text{б)}\ \left.\begin{aligned} x + 4y = 10, \\ 3x + 12y = 17, \end{aligned}\right\}$$

$$\text{в)}\ \left.\begin{aligned} 2x - 7y = 21, \\ 8x - 28y = 84, \end{aligned}\right\} \qquad \text{г)}\ \left.\begin{aligned} 5x + 2y = 0, \\ 6x + 7y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. а) $\Delta = 3(-2) - 5 \cdot 7 = -41 \neq 0$ (коэффициенты при неизвестных непропорциональны, $\frac{3}{7} \neq \frac{5}{-2}$); значит система имеет единственное решение.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$.

б) $\Delta = 1 \cdot 12 - 4 \cdot 3 = 0$ (имеет место следующее соотношение между коэффициентами: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \neq \frac{10}{17}$). Система несовместна.

в) $\Delta = 2 \cdot (-28) - (-7) \cdot 8 = 0$, $\Delta_x = 21(-28) - (-7)\,84 = 0$ (все коэффициенты и свободные члены пропорциональны: $\frac{2}{8} = \frac{-7}{-28} = \frac{21}{84}$). Второе уравнение системы получено из первого умножением обеих частей на 4. Система неопределенна.

Ответ: $y = \frac{21 - 2x}{7}$, где x — любое число.

г) $\Delta = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \neq 0$. Система имеет единственное решение: $x = y = 0$.

Пример 36. Решить и исследовать систему

$$\left.\begin{aligned}(a+1)x-(2a+1)y&=a,\\(3a+1)x-(5a+1)y&=a+1.\end{aligned}\right\}$$

Решение. $\Delta=-(a+1)(5a+1)+(2a+1)(3a+1)=a(a-1)$. Если $a\neq 0$ и $a\neq 1$ (при этом $\Delta\neq 0$), система имеет единственное решение: $x=-\frac{3a+1}{a}$, $y=-\frac{2a+1}{a}$. Если $a=0$, система принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=0,\\x-y&=1\end{aligned}\right\}$$

и, как видно, несовместна.

Если $a=1$, то система такова:

$$\left.\begin{aligned}2x-3y&=1,\\4x-6y&=2.\end{aligned}\right\}$$

Видим, что второе уравнение получено умножением первого на 2, так что эта система равносильна уравнению $2x-3y=1$, которое имеет бесчисленное множество решений, $x=\frac{1+3y}{2}$ (y — любое число).

Ответ: система при $a\neq 0$ и $a\neq 1$ имеет единственное решение, при $a=0$ — несовместна, при $a=1$ — неопределенна.

Пример 37. Решить и исследовать систему

$$\left.\begin{aligned}ax+y+z&=1,\\x+ay+z&=a,\\x+y+az&=a^2.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Умножим второе уравнение на a и вычтем из полученного первое $(a^2-1)y+(a-1)z=a^2-1$. Затем из второго вычтем третье $(a-1)y-(a-1)z=a-a^2$. Сложив почленно первое и второе уравнения, получим: $(a^2+a-2)y=a-1$. Если $a^2+a-2\neq 0$ (т. е. $a\neq 1$ и $a\neq -2$), то система имеет единственное решение: $y=\frac{a-1}{a^2+a-2}=\frac{1}{a+2}$, $z=\frac{(a+1)^2}{a+2}$, $x=-\frac{a+1}{a+2}$ (z и x находятся из выводных уравнений).

Рассмотрим особые значения параметра. Если $a=1$, то система сводится к одному уравнению $x+y+z=1$, откуда $x=1-y-z$ (y и z — любые). Если $a=-2$, то система принимает вид

$$\left.\begin{aligned}-2x+y+z&=1,\\x-2y+z&=-2,\\x+y-2z&=4.\end{aligned}\right\}$$

Эта система не имеет решений, так как при почленном сложении обеих частей получается противоречивое равенство $0=3$.

Ответ: система имеет единственное решение при $a \neq 1$ и $a \neq -2$, неопределенна при $a=1$, несовместна при $a=-2$.

Приемы решения некоторых нелинейных систем

Метод подстановки при решении систем уравнений хотя и очень распространен, но часто приводит к громоздким вычислениям. Рассмотрим на примерах некоторые другие приемы.

Пример 38. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=25, \\ xy&=12. \end{aligned}\right\}$$

Решение. *Первый способ*. Возведя второе уравнение в квадрат, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=25, \\ x^2y^2&=144. \end{aligned}\right\}$$

Теперь, исходя из теоремы Виета, x^2 и y^2 можно рассматривать как корни квадратного уравнения $z^2-25z+144=0$, откуда $z_1=16$, $z_2=9$. Значит $x^2=16$, $y^2=9$ или $x^2=9$, $y^2=16$ (система симметрична относительно неизвестных). Выводная система уравнений имеет 8 решений, решения же исходной должны удовлетворять второму ее уравнению: $xy=12$, откуда $y=\frac{12}{x}$. В итоге получим 4 решения: (4, 3), (—4, —3), (3, 4), (—3, —4).

Второй способ. Умножив второе уравнение на 2 и сложив с первым, получим: $(x+y)^2=49$, откуда $x+y=\pm 7$. Затем, вычтя из первого второе, умноженное на 2, найдем: $(x-y)^2=1$, откуда $x-y=\pm 1$. Теперь имеем:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=7, \\ x-y&=1, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-7, \\ x-y&=1, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=7, \\ x-y&=-1, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-7, \\ x-y&=-1. \end{aligned}\right\}$$

Из этих систем получим те же 4 решения.

Третий способ. Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым: $(x+y)^2=49$, откуда $x+y=\pm 7$. Рассматривая x и y как корни квадратного уравнения, сведем системы

$$\left.\begin{aligned} x+y&=7, \\ xy&=12, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-7, \\ xy&=12 \end{aligned}\right\}$$

к двум квадратным уравнениям: $z^2-7z+12=0$, $z^2+7z+12=0$, из которых получим те же решения, что и раньше.

Четвертый способ. Если вычесть из первого уравнения второе, умноженное на 2, то получим: $(x-y)^2=1$ или $x-y=\pm 1$. Тогда системы

$$\left.\begin{aligned} x-y&=1, \\ xy&=12, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x-y&=-1, \\ xy&=12 \end{aligned}\right\}$$

можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x+(-y)&=1, \\ x(-y)&=-12, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+(-y)&=-1, \\ x(-y)&=-12. \end{aligned}\right\}$$

Соответствующие квадратные уравнения примут вид $z^2-z-12=0$ и $z^2+z-12=0$, где $z_{1,2}=x=-y$.

Пятый способ. Преобразуем левую часть первого уравнения с учетом второго $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x+y)^2-24$. Тогда получим: $(x+y)^2=49$, т. е. $x+y=\pm 7$; дальнейшее решение производится так же, как и в третьем способе.

Пример 39. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+y+x^2+y^2&=8, \\ xy+x^2+y^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Имея в виду, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, запишем систему в виде:

$$\left.\begin{aligned} (x+y)+(x+y)^2-2xy&=8, \\ (x+y)^2-\quad xy&=7. \end{aligned}\right\}$$

Введем новые неизвестные $x+y=u$, $xy=v$, тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} u+u^2-2v&=8, \\ u^2-v&=7. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя из второго уравнения $v=u^2-7$ в первое, получим: $u^2-u-6=0$, откуда $u_1=3$, $u_2=-2$. Из подстановки находим: $v_1=u^2-7=2$, $v_2=-3$. Имеем две системы:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3, \\ xy&=2, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-2, \\ xy&=-3. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: (1, 2), (2, 1) (1, −3), (−3, 1).

Пример 40. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=35, \\ x+y&=5. \end{aligned}\right\}$$

Решение. *Первый способ*. Так как $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, то первое уравнение с учетом второго примет вид: $5^3-3xy\cdot 5=35$, откуда $xy=6$. Остается решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5,\\ xy&=6. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: (3, 2), (2, 3).

Второй способ. Разделим первое уравнение на второе (при $x+y\neq 0$), получим уравнение $x^2-xy+y^2=7$, которое можно переписать так: $(x+y)^2-3xy=7$, $25-3xy=7$, откуда $xy=6$. Далее будем действовать так же, как и в первом способе.

Пример 41. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^2-3xy+\ y^2&=-1,\\ 3x^2-\ xy+3y^2&=13. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Замечая, что левые части обоих уравнений однородны, исключим свободный член, для чего первое уравнение умножим на 13 и сложим со вторым. Получим выводное однородное уравнение: $2x^2-5xy+2y^2=0$. Разделив обе части его на $y^2\neq 0$ ($y=0$ не является решением исходной системы), получим квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\frac{x}{y}+2=0,$$

откуда либо $\frac{x}{y}=2$, либо $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, т. е. $x=2y$ или $y=2x$ (симметричная система). Подставляя полученные выражения для x и y в одно из уравнений системы, получим 4 решения: $(\pm 1,\ \pm 2)$, $(\pm 2,\ \pm 1)$.

Пример 42. Найти действительные решения системы

$$\left.\begin{aligned} x^4+y^4&=97,\\ x+y&=\ 5. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Учитывая, что $x+y=5$, запишем левую часть первого уравнения в виде:

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=$$
$$=(25-2xy)^2-2x^2y^2=2x^2y^2-100xy+625.$$

Тогда первое уравнение превратится в квадратное относительно xy

$$(xy)^2-50xy+264=0,$$

откуда $(xy)_1=6$, $(xy)_2=44$. Имеем две системы:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5,\\ xy&=6, \end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} x+y&=5,\\ xy&=44. \end{aligned}\right\}$$

Первая система имеет решения: (2, 3) и (3, 2); вторая действительных решений не имеет.

Пример 43. Подобрать параметр a так, чтобы уравнения

$$x^2+ax-2a=0;$$
$$x^2-2ax+a=0$$

имели общий корень (т. е. чтобы система стала совместной).

Решение. Пусть общий корень $x=x_0$. Тогда $x_0^2+ax_0-2a=0$; $x_0^2-2ax_0+a=0$.

Вычитая второе уравнение из первого, получим: $3ax_0-3a=0$, $3a(x_0-1)=0$. Отсюда либо $a=0$ (тогда общий корень $x_0=0$), либо общий корень $x_0=1$. Подставляя $x_0=1$ в одно из тождеств, найдем, что $a=1$.

Ответ: $a=0$ или $a=1$.

Пример 44. Сколько действительных решений имеет система

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2,\\ xy-z^2&=1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Из второго уравнения $xy=1+z^2$, так что имеем систему

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2,\\ xy&=1+z^2. \end{aligned}\right\}$$

Значит x и y равны корням квадратного уравнения

$$t^2-2t-(1+z^2)=0,\quad t=1\pm\sqrt{1-(1+z^2)}=1\pm\sqrt{-z^2}.$$

Следовательно, t может быть действительным, если только $z=0$; поэтому система имеет единственное решение: $x=1$, $y=1$, $z=0$.

Квадратные неравенства и неравенства высших степеней

Рассмотрим *метод интервалов*, годный для решения не только квадратных неравенств, но и неравенств *более высоких степеней* (если многочлен, стоящий в левой части, разложен на множители или такое разложение возможно). Пусть дано неравенство n-й степени:

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\geqslant 0,\quad (*)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа.

Метод состоит в том, что мы предварительно строим схематический график многочлена n-й степени, стоящего в левой части неравенства (не обращая внимания на знак самого неравенства). В целях стандартизации условимся, чтобы всегда коэффициент при x^n был положителен (этого можно добиться умножением обеих частей неравенства на -1), разности между аргументом x и корнями многочлена $x_1, x_2, \ldots, x_n$ были расположены в убывающем порядке или, что то же самое, в порядке возрастания корней, т. е. $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Такой вид левой части будем называть *каноническим*. График многочлена пересечет действительную ось в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Теперь будем делать всегда одно и то же предположение, а именно: пусть значения аргумента x будут больше большего корня, т. е. $x > x_n$. Тогда в неравенстве (*)

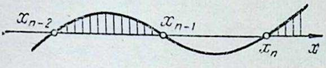


Рис. 91.

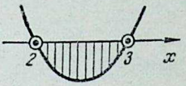


Рис. 92.

разность $x - x_n > 0$, а все остальные разности тем более положительны, т. е. при $x > x_n$ многочлен всегда положителен.

Геометрически это означает, что правее точки $x = x_n$ ординаты графика положительны, т. е. при движении справа налево график проходит через точку $x = x_n$ сверху (рис. 91). Нетрудно видеть, что при принятых соглашениях такая картина будет наблюдаться всегда. Далее, очевидно, график пересечет действительную ось поочередно в точках $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$.

После построения схематического графика многочлена вернемся к самому неравенству (*). Геометрический смысл его таков: при каких значениях x ординаты графика y неотрицательны? Ответ на этот вопрос можно найти сразу из графика — это промежутки оси Ox, для которых ординаты графика неотрицательны, а именно:

$$x \geqslant x_n, \quad x_{n-2} \leqslant x \leqslant x_{n-1}, \ \ldots$$

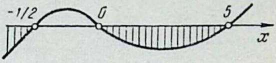


Рис. 93.

Пример 45. Решить неравенство $x^2 - 5x + 6 < 0$.

Решение. Построим схематический график многочлена $y = (x-2)(x-3)$. Если $x > 3$, то $y = (+)(+) > 0$, график проходит через точку $x = 3$ сверху (рис. 92). Решение видно из графика: $2 < x < 3$ (для этих x координаты графика отрицательны).

Пример 46. Решить неравенство

$$-8x(5-x)(2x+1)(x^2+1) \leqslant 0.$$

Решение. Так как $8 > 0$ и $x^2 + 1 > 0$, это неравенство равносильно такому: $-x(5-x)\,2\left(x + \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$. Канонический вид: $\left(x + \frac{1}{2}\right) x (x-5) \leqslant 0$. Если $x > 5$, то $y = (+)(+)(+) > 0$; график проходит через точку $x = 5$ сверху (рис. 93).

Ответ: $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Дробные неравенства и неравенства с параметрами. Указанный метод можно применить и для решения дробных неравенств. Пусть дано неравенство $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \geqslant 0$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены, целые относительно x. Данное неравенство равносильно следующему: $f(x)\varphi(x) \geqslant 0$ (при условии, что $\varphi(x) \neq 0$). Это объясняется тем, что в алгебре правила знаков при умножении и делении одинаковы. Значит, если дано дробное неравенство, можно, исключив из ОДЗ значения x, обращающие знаменатель в нуль, заменить его равносильным целым, решать которое мы уже умеем.

Пример 47. Решить неравенство

$$\frac{7(x^2+x)(2x-3)}{(6-2x)(x^2+2x+10)(x+2)} \leqslant 0.$$

Решение. Так как $x^2+2x+10>0$, то, упрощая, получим:

$$\frac{x(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-3)(x+2)} \geqslant 0.$$

ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq -2$. Равносильное неравенство (канонический вид):

$$(x+2)(x+1)x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3) \geqslant 0.$$

Если $x>3$, то $y=(+)(+)(+)(+)(+)>0$; график, как всегда, проходит через точку $x=3$ сверху (рис. 94). Решения получим из графика (с учетом ОДЗ): $-2<x\leqslant-1$, $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$, $x>3$.

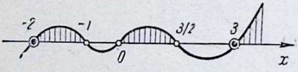


Рис. 94.

Пример 48. Решить неравенство $x(x-1)^2>0$.

Решение. Это неравенство невозможно решить стандартным методом, так как многочлен слева имеет двойной корень $x=1$ (и простой корень $x=0$). Будем рассуждать так: при условии $x \neq 1$ (при $x=1$ имеем: $0>0$, что невозможно) множитель $(x-1)^2$ всегда положителен. Тогда данное неравенство равносильно неравенству $x>0$.

Ответ: $0<x<1$, $x>1$.

Пример 49. Решить неравенство $\frac{(x-3)(2x-1)^2}{x^2(x+5)} \leqslant 0$.

Решение. При условии $x\neq-5$ и $x\neq 0$ даннсе неравенство равносильно такому: $\frac{x-3}{x+5} \leqslant 0$ или $(x+5)(x-3) \leqslant 0$. Решением последнего является промежуток $-5\leqslant x\leqslant 3$, из которого следует исключить точки $x=-5$ и $x=0$.

Ответ: $-5<x<0$, $0<x\leqslant 3$.

Пример 50. $|x+1|<|x|$.

Решение. а) Если $x \geqslant 0$, то $x+1<x$, $1<0$, значит в области $x \geqslant 0$ решений нет; б) если $-1<x<0$, то $x+1<-x$, $2x<-1$, $x<-\frac{1}{2}$, решение: $-1<x<-\frac{1}{2}$; в) если $x \leqslant -1$, то $-x-1<-x$, $-1<0$ (тождество в области $x \leqslant -1$).

Ответ: $x<-\frac{1}{2}$.

Другой способ. Так как обе части неотрицательны, возведем обе части неравенства в квадрат (расширения ОДЗ не происходит, так как исходное неравенство определено на всей оси Ox)

$$(x+1)^2<x^2,\ x^2+2x+1<x^2,\ 2x+1<0,$$

откуда $x<-\frac{1}{2}$.

Пример 51. При каких значениях параметра m трехчлен $(5-m)x^2-2(1-m)x+2(1-m)$ отрицателен для всех действительных значений x?

Решение. Трехчлен ax^2+bx+c отрицателен для всех действительных x, если одновременно выполняются два условия: $a<0$ и $D<0$. Геометрически это означает, что ординаты параболы, являющейся графиком данного трехчлена, будут всегда отрицательны в том случае, если ветви параболы направлены вниз и они нигде не касаются оси Ox (рис. 95). Значит, $a=5-m$, т. е. $m>5$; $D=(1-m)^2-2(5-m)(1-m)<0$ или $(m-1)(m-9)>0$. Имеем систему

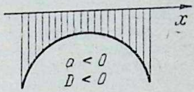


Рис. 95.

$$(m-1)(m-9)>0,\ m>5.$$

Первое неравенство дает: $m>9$, $m<1$ (последнее неравенство противоречит требованию $m>5$). Общая часть неравенств: $m>9$.

Пример 52. При каких значениях параметра m неравенство $(m-2)x^2+2\sqrt{3}x+m>0$ удовлетворяется при всех действительных значениях x?

Решение. Задача аналогична предыдущей. Должно быть: $m-2>0$ и $D<0$, что приводит к системе

$$m>2,\ m^2-2m-3>0.$$

Решая ее, получим:

$$m>2,\ m>3,\ m<-1.$$

Выбирая общую часть этих неравенств, находим ответ.

Ответ: $m>3$.

Пример 53. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{a-x}{a-1}-\frac{x-1}{a+1}=\frac{2a}{a^2-1}$ имеет неотрицательное решение?

Решение. ОДЗ параметра: $a \neq \pm 1$. После преобразований получим: $2ax = a^2 - 1$. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{a^2-1}{2a}$. Так как по условию $x \geqslant 0$, то задача сводится к решению неравенства $\frac{a^2-1}{2a} \geqslant 0$. Перейдем к равносильному неравенству $2a(a^2-1) \geqslant 0$ или $(a+1)a(a-1) \geqslant 0$, которое решаем графически (рис. 96).

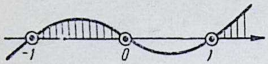


Рис. 96

Ответ: $a > 1$ и $-1 < a < 0$. При $a = 0$ исходное уравнение противоречиво.

Условия расположения заданного числа относительно корней квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, причем хотя бы один из его коэффициентов зависит от параметра k. Поставим вопрос, при каких значениях параметра k заданное действительное число m меньше обоих корней уравнения, больше обоих корней, заключено между ними? Попытка решить такую задачу непосредственно приводит к иррациональным неравенствам (корни квадратного уравнения выражаются через его коэффициенты, а последние по условию зависят от параметра k), решение которых громоздко. Поэтому будем искать условия в виде, не содержащем иррациональных неравенств.

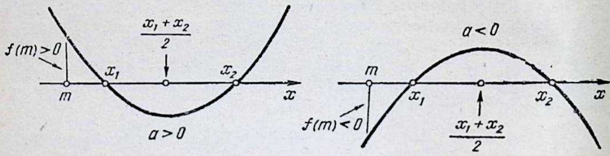


Рис. 97.

Итак, пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ — трехчлен, стоящий в левой части заданного уравнения, его корни обозначим x_1 и x_2 (условимся, что $x_1 \leqslant x_2$). Так как в поставленной задаче действительное число m сравнивается с корнями x_1 и x_2, то последние должны быть действительными. Таким образом, задача имеет смысл только при $D \geqslant 0$.

Составим произведение старшего коэффициента a и значения трехчлена $f(x)$ при $x = m$, т.е. $f(m)$, а затем исследуем знак этого произведения

$$af(m) = a(am^2 + bm + c) = a^2\left(m^2 + \frac{b}{a}m + \frac{c}{a}\right) = a^2(m - x_1)(m - x_2).$$

Очевидно, $af(m) > 0$ может быть в двух случаях: а) либо если одновременно $m - x_1 < 0$ и $m - x_2 < 0$, т. е. при $m < x_1 \leqslant x_2$; б) либо если $m - x_1 > 0$ и $m - x_2 > 0$, т. е. при $x_1 \leqslant x_2 < m$. Это означает, что неравенство $af(m) > 0$ является условием того, что число m находится вне межкорневого промежутка. Теперь остается найти условие, различающее оба эти случая. Для случая „а" ($m < x_1 \leqslant x_2$) очевидно неравенство $m < \frac{x_1 + x_2}{2}$ или на основании теоремы Виета $m < -\frac{b}{2a}$; для случая „б" ($x_1 \leqslant x_2 < m$), наоборот, $m > -\frac{b}{2a}$. Сказанное легко иллюстрируется графически, если учесть, что знак коэффициента a определяет направление ветвей параболы

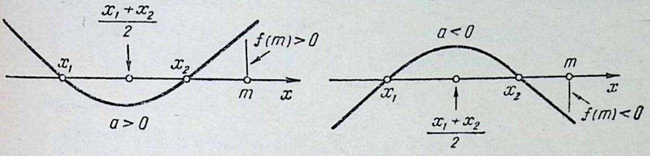


Рис. 98.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (при $a > 0$ ветви идут вверх, при $a < 0$ — вниз), $f(m)$ — ордината параболы в точке $x = m$, а $\frac{x_1 + x_2}{2}$ — абсцисса вершины

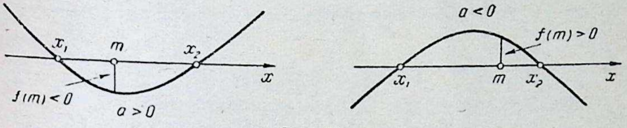


Рис. 99.

параболы. Случай „а" представлен на рис. 97, случай „б" — на рис. 98. На рис. 99 и 100 показаны другие случаи.

в) Если $x_1 < m < x_2$ (рис. 99), то условием станет $af(m) < 0$. г) Если заданы два числа m и n и корни заключены между ними, т. е. $m < x_1 \leqslant$

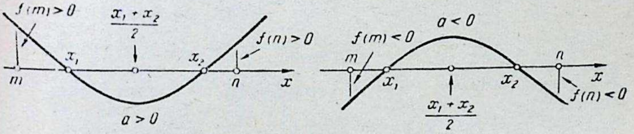


Рис. 100.

$\leqslant x_2 < n$ (рис. 100), то, очевидно, должна выполняться система неравенств

$$af(m) > 0, \quad af(n) > 0, \quad m < -\frac{b}{2a} < n.$$

Приведем сводку всех рассмотренных случаев. Искомые значения параметра k определятся как решение следующих систем неравенств (заметим, что среди последних нет ни одного иррационального).

а) $m < x_1 \leqslant x_2$ б) $x_1 \leqslant x_2 < m$ в) $x_1 < m < x_2$ г) $m < x_1 \leqslant x_2 < n$

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ af(m) > 0 \\ m < -\frac{b}{2a} \end{cases} \qquad \begin{cases} D \geqslant 0 \\ af(m) > 0 \\ m > -\frac{b}{2a} \end{cases} \qquad \begin{cases} D > 0 \\ af(m) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} D \geqslant 0 \\ af(m) > 0 \\ af(n) > 0 \\ m < -\frac{b}{2a} < n \end{cases}$$

Пример 54. При каких значениях параметра k трехчлен $f(x)=x^2-2kx+k+6$ имеет корни, бо́льшие единицы?

Решение. Это — случай „а“, когда $m=1<x_1\leqslant x_2$. Здесь должны быть выполнены три условия:

$$1)\ D\geqslant 0,\ k^2-(k+6)\geqslant 0,\ (k+2)(k-3)\geqslant 0,\ k\geqslant 3,\ k\leqslant -2;$$

$$2)\ af(m)=af(1)>0,\ 1-2k+k+6>0,\ k<7;$$

$$3)\ m<-\frac{b}{2a},\quad 1<\frac{2k}{2},\quad k>1.$$

Ищем решение системы $k\geqslant 3$, $k\leqslant -2$, $k<7$, $k>1$ (рис. 101).

Ответ: $3\leqslant k<7$.

Пример 55. При каких значениях параметра k уравнение $4x^2+(k-2)x+k-5=0$ имеет различные корни, причем $x_1<2$ и $x_2<2$?

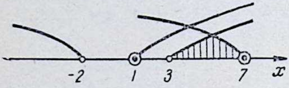


Рис. 101.

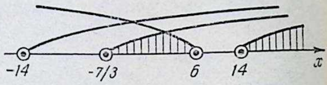


Рис. 102.

Решение. Это — случай „б“, когда $x_1<x_2<m=2$.

$$1)\ D>0,\ D=(k-2)^2-16(k-5)>0,$$

$$k^2-4k+4-16k+80>0,\quad k^2-20k+84>0,$$

откуда $k>14$, $k<6$.

$$2)\ af(m)>0,\ 4f(2)>0,\ 4[16+(k-2)\cdot 2+k-5]>0,$$

$$16+2k-4+k-5>0,\quad 3k>-7,\quad k>-\frac{7}{3};$$

$$3)\ m>-\frac{b}{2a},\quad 2>-\frac{k-2}{8},\quad \frac{k-2}{8}>-2,\ k-2>-16,\quad k>-14.$$

Таким образом, имеем систему $k>14$, $k<6$, $k>-\frac{7}{3}$, $k>-14$. Ее решение (рис. 102): $-\frac{7}{3}<k<6$, $k>14$.

Пример 56. При каких значениях k число 3 заключено между корнями уравнения $kx^2+2(k-1)x-4=0$?

Решение. Это случай „в“, когда $x_1<m=3<x_2$.

$$1)\ D>0,\ (k-1)^2+4k>0,\ (k+1)^2\neq 0,\ k\neq -1.$$

$$2)\ af(m)<0,\ kf(3)<0,\ k[9k+2(k-1)3-4]<0,$$

$$5k(3k-2)<0,\ 0<k<\frac{2}{3}.$$

Имеем систему $k\neq -1$, $0<k<\frac{2}{3}$.

Ответ: $0<k<\frac{2}{3}$.

Пример 57. При каких значениях k уравнение $(k+5)x^2+(2k-3)x+k-10=0$ имеет корни одного и того же знака?

Решение. 1) $D\geqslant 0$, $[-(2k-3)]^2-4(k+5)(k-10)\geqslant 0$, $8k+209\geqslant 0$, $k\geqslant -\frac{209}{8}=-26\frac{1}{8}$.

2) Требование, чтобы корни были одного знака, означает, что либо $m=0<x_1\leqslant x_2$ (случай „а"), либо $x_1\leqslant x_2<m=0$ (случай „б"). Но условием того, что корни лежат вне межкорневого промежутка, является: $af(m)>0$, т. е. $(k+5)(k-10)>0$, откуда $k>10$, $k<-5$. Решая систему $k>-26\frac{1}{8}$, $k>10$, $k<-5$, получим ответ.

Ответ: $-26\frac{1}{8}\leqslant k<-5$.

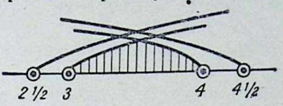


Рис. 103.

Пример 58. При каких значениях k корни уравнения $2x^2-(2k-5)x+k-3=0$ заключены между 0 и 1?

Решение. Имеем случай „г", когда $m=0<x_1\leqslant x_2<n=1$.

$$1)\ D\geqslant 0,\ (2k-5)^2-8(k-3)\geqslant 0,\ 4k^2-28k+49\geqslant 0,$$

$(2k-7)^2\geqslant 0$ — неравенство, верное при любых x.

$$2)\ af(m)>0,\ 2(k-3)>0,\ k>3.$$

$$3)\ af(n)>0,\ 2[2-(2k-5)+k-3]>0,$$

откуда $k<4$.

$$4)\ m<-\frac{b}{2a}<n,\quad 0<2k-5<4,\quad 5<2k<9,\quad 2\frac{1}{2}<k<4\frac{1}{2}.$$

Из системы $k>3$, $k<4$, $2\frac{1}{2}<k<4\frac{1}{2}$ получим решение: $3<k<4$ (рис. 103).

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнения, содержащие квадратные радикалы

Пусть уравнение $f=\varphi$ возведено в квадрат $f^2=\varphi^2$. Последнее уравнение неравносильно исходному — это его следствие, так как, помимо корней исходного $f=\varphi$, оно содержит корни «постороннего» уравнения $f=-\varphi$. В самом деле, возведенное в квадрат уравнение $f^2=\varphi^2$ (или $f^2-\varphi^2=0$) распадается на два: $(f-\varphi)(f+\varphi)=0$ или $f=\varphi$ и $f=-\varphi$.

Из этого факта вытекают два важных следствия.

1. Каждый корень возведенного в квадрат уравнения является либо корнем исходного, либо «постороннего» уравнения; других корней это уравнение не имеет; 2. Если «постороннее» уравнение не имеет корней, то возведенное в квадрат уравнение равносильно исходному.

Решение уравнений, содержащих один радикал. Всегда можно уединить радикал, т. е. представить уравнение в виде $\sqrt{f}=\varphi$, где f и φ — рациональные функции от x; в частности, φ может быть постоянным числом. Так как в левой части корень арифметический, то чтобы равенство имело место, и левая часть должна быть неотрицательной, т. е. должно выполняться неравенство $\varphi\geqslant 0$. Возведя исходное уравнение в квадрат, получим: $f=\varphi^2$. Представив полученное уравнение в виде $f-\varphi^2=0$ или

$(\sqrt{f}-\varphi)(\sqrt{f}+\varphi)=0$, легко усмотреть, что оно распадается на два, из которых первое $\sqrt{f}=\varphi$ равносильно исходному, а второе («постороннее») $f=-\varphi$ не имеет корней, согласно ограничению $\varphi \geqslant 0$. Значит, возведенное в квадрат уравнение равносильно исходному, а поэтому нет необходимости находить ОДЗ (действительно, если исходное уравнение имеет корни, они обязательно будут корнями возведенного в квадрат уравнения).

Таким образом, исходное уравнение $\sqrt{f}=\varphi$ равносильно системе $f=\varphi^2$, $\varphi \geqslant 0$. Практически это означает, что при решении уравнений, содержащих один радикал, следует, уединив радикал, наложить на правую часть ограничение ($\varphi \geqslant 0$), затем возвести обе части уравнения в квадрат и из корней полученного уравнения выбрать лишь те, которые удовлетворяют ограничительному условию.

Замечание. Установленное условие нахождения корней является *достаточным*, в то время как установление ОДЗ — лишь *необходимым* (если исходное уравнение имеет корни, то они обязательно лежат в ОДЗ).

Пример 59. Решить уравнение $\sqrt{2x-3}=4-x$.

Решение. ОДЗ: $x \geqslant \frac{3}{2}$. Ограничение: $4-x>0$ (равенство $4-x=0$ невозможно), т. е. $x<4$. Возводим в квадрат, получим: $2x-3=16-8x+x^2$ или $x^2-10x+19=0$. Это уравнение имеет корни $x_{1,2}=5 \pm \sqrt{6}$, из которых $x_1=5+\sqrt{6}$ не удовлетворяет ограничению $x<4$.

Ответ: $x=5-\sqrt{6}$ (проверка не нужна).

Пример 60. Решить и исследовать уравнение

$$\sqrt{x^2-a^2}=3a-2x.$$

Решение. Ограничение: $3a-2x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant \frac{3a}{2}$. Возводим в квадрат, получим:

$$x^2-a^2=9a^2-12ax+4x^2$$

или

$$3x^2-12ax+10a^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{6a \pm a\sqrt{6}}{3}=\frac{6 \pm \sqrt{6}}{3}a.$$

Ввиду ограничения $\frac{6 \pm \sqrt{6}}{3}a \leqslant \frac{3a}{2}$ или $(3 \pm 2\sqrt{6})\,a \leqslant 0$.

Ответ: Если $a>0$, то $x=\frac{6-\sqrt{6}}{3}$; если $a<0$, то $x=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$; если $a=0$, то $x_{1,2}=0$.

Решение уравнений, содержащих два радикала. Пусть дано уравнение

$$\sqrt{f}+\sqrt{\varphi}=c, \qquad (4,23)$$

где $c \geqslant 0$. ОДЗ: $f \geqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$. Возводя обе части в квадрат, получим уравнение

$$f + \varphi + 2\sqrt{f}\sqrt{\varphi} = c^2, \qquad (4,24)$$

равносильное исходному, так как «постороннее» уравнение $\sqrt{f} + \sqrt{\varphi} = -c$ корней, очевидно, не имеет ($c \geqslant 0$). Преобразуем (4,24)

$$\sqrt{f}\sqrt{\varphi} = \frac{c^2 - (f + \varphi)}{2}.$$

Перемножая в левой части радикалы и обозначая для краткости $\frac{c^2 - (f + \varphi)}{2} = F$, получим:

$$\sqrt{f\varphi} = F. \qquad (4,25)$$

Замена $\sqrt{f}\sqrt{\varphi}$ на $\sqrt{f\varphi}$, вообще говоря, расширяет ОДЗ; однако, установив ОДЗ исходного уравнения ($f \geqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$), мы застраховались от приобретения посторонних корней. Осталось решить уравнение (4,25) с одним радикалом.

Практически это означает, что при решении уравнения вида (4,23) с двумя радикалами следует, установив ОДЗ, возвести обе части в квадрат. Затем, уединив радикалы, наложить на правую часть F ограничение: $F \geqslant 0$ и совершить повторное возведение в квадрат. Из корней полученного уравнения выбрать лишь те, которые входят в ОДЗ и удовлетворяют ограничительному условию.

Замечания. Сказанное верно для уравнений вида $\sqrt{f} - \sqrt{\varphi} = c$ при $c \geqslant 0$. Для уравнений вида $\sqrt{f} \pm \sqrt{\varphi} = \psi$ следует ввести дополнительное условие: $\psi \geqslant 0$. Уравнения с тремя радикалами вида $\sqrt{f} \pm \sqrt{\varphi} = \sqrt{g}$ имеют ОДЗ: $f \geqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Разобранные способы решения иррациональных уравнений не требуют проверки корней. Можно решать эти уравнения, не устанавливая ОДЗ (например, когда это технически трудно) и не вводя ограничений, однако в этом случае проверка корней обязательна, независимо от того, появились посторонние корни или нет.

Пример 61. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4$.

Решение. ОДЗ: $x \geqslant \frac{1}{2}$. Возводя два раза в квадрат, получим сначала уравнение: $2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 14 - 3x$ (заметим, что должно быть: $14 - 3x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant \frac{14}{3}$), а затем $x^2 - 104x + 208 = 0$, корни которого $x_{1,2} = 52 \pm 8\sqrt{39} \approx 52 \pm 49{,}6$. Корень $x = 52 + 8\sqrt{39} \approx 101{,}6$ — посторонний ввиду ограничения $x \leqslant \frac{14}{3}$ (корень уравнения $2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 3x - 14$ появился при повторном возведении в квадрат). Второй корень $x = 52 - 8\sqrt{39} \approx 2{,}4$ удовлетворяет ограничительному условию $x \leqslant \frac{14}{3}$ и входит в ОДЗ.

Пример 62. Решить уравнение $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{2x}$.

Решение. ОДЗ: $3x-5>0$, $x>0$; общая часть: $x>\frac{5}{3}$. Кроме того, должно быть: $3-\sqrt{2x}>0$, т. е. $x<\frac{9}{2}$. Значит $\frac{5}{3}<x<\frac{9}{2}$ (условие первое). Возводим уравнение в квадрат и, упрощая, получим: $6\sqrt{2x}=14-x$. Ограничение: $14-x>0$, т. е. $x<14$ (условие второе). Повторно возводя в квадрат, получим: $x^2-100x+196=0$ с корнями $x_1=2$ и $x_2=98$. $x=2$ — корень, так как удовлетворяет условиям первому и второму (проверка не нужна), а $x=98$ — посторонний.

Пример 63. Решить уравнение

$$\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=\sqrt{2x+7}.$$

Решение. ОДЗ: $x\geqslant 6$. Возведя в квадрат, получим:

$$\sqrt{(7x+1)(3x-18)}=4x-12.$$

Ограничительное условие: $4x-12\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 3$. При повторном возведении в квадрат получим квадратное уравнение с корнями: $x_1=-\frac{18}{5}$ и $x_2=9$. Корень $x=-\frac{18}{5}$ — посторонний.

Ответ: $x=9$.

Уравнения, содержащие кубические радикалы

Так как уравнение $\sqrt[3]{f}=\varphi$ равносильно уравнению $f=\varphi^3$, корни исходного уравнения не нуждаются в проверке. Основной метод решения — возведение в куб; последнее удобно делать по формулам

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab\,(a\pm b),$$

где верхние и нижние знаки берутся одновременно.

Пример 64. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Решение. Возведя в куб, получим:

$$x+3-x+16-3\sqrt[3]{(x+3)(x-16)}\cdot 1=1,$$

откуда $\sqrt[3]{(x+3)(x-16)}=6$. Возведем еще раз в куб, получим квадратное уравнение: $x^2-13x-264=0$.

Ответ: $x_1=24$, $x_2=-11$.

Пример 65. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-3}=0.$$

Решение. Записав уравнение в виде

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3},$$

возведем его дважды в куб. После первого возведения получим:

$$\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}=x+2,$$

а после второго

$$(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3,$$

откуда

$$(x+2)[(x+1)(x+3)-(x+2)^2]=0.$$

Ответ: $x=-2$ (второе уравнение действительных корней не имеет).

Некоторые приемы решения более сложных уравнений

Пример 66. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

Решение. Запишем уравнение так:

$$\sqrt{x^2-3x+5}=-(x^2-3x+5)+12,$$

обозначим $\sqrt{x^2-3x+5}=t$ $(t>0)$; тогда имеем: $t^2+t-12=0$, откуда $t=3$ $(t=-4$ негоден, так как $t>0)$. Значит $\sqrt{x^2-3x+5}=3$; возведя в квадрат, получим: $x^2-3x-4=0$.

Ответ: $x_1=4$, $x_2=-1$.

Пример 67. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$$

Решение. Положим $\sqrt{3x^2+5x+1}=t$ $(t\geqslant 0)$, тогда $3x^2+5x+8=t^2+7$. Уравнение примет вид $\sqrt{t^2+7}=t+1$. Возводя в квадрат, найдем: $t=3$. Значит $\sqrt{3x^2+5x+1}=3$. Еще раз возведем в квадрат, получим: $3x^2+5x-8=0$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-\frac{8}{3}$.

Пример 68. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Решение. $\sqrt[3]{x-16}=t$, $x-16=t^3$, $x+45=t^3+61$. Уравнение примет вид: $\sqrt[3]{t^3+61}=t+1$. Возводя в куб, получим: $t^2+t-20=0$ с корнями $t_1=4$, $t_2=-5$. Возвращаясь к неизвестному x, получим ответ.

Ответ: $x_1=80$, $x_2=-109$.

Пример 69. Решить уравнение $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=1-x$.

Решение. Нахождение ОДЗ в этом случае затруднительно. Наложим ограничение на правую часть: $1-x>0$ $(x<1)$. Возводя обе части в квадрат и упрощая, получим: $x^2(5-4x)=0$, откуда $x_1=\frac{5}{4}$ (посторонний корень, так как не удовлетворяет условию $x<1$) и $x=0$ — корень, который обязательно надо проверить.

Пример 70. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Решение. Положим $\sqrt{2x-5}=t$ $(t\geqslant 0)$, тогда $2x-5=t^2$ и $x=\frac{t^2+5}{2}$. Уравнение имеет вид

$$\sqrt{\frac{t^2+5}{2}-2+t}+\sqrt{\frac{t^2+5}{2}+2+3t}=7\sqrt{2}$$

или

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14,$$

или

$$|t+1|+|t+3|=14,$$

или (так как $t\geqslant 0$)

$$t+1+t+3=14,$$

откуда $t=5$. Значит $\sqrt{2x-5}=5$, $2x-5=25$.

Ответ: $x=15$.

Пример 71. Решить уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Решение. ОДЗ: $x>1$ ($x=1$ — не корень). Освободимся от дробности, получим: $x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ или $\sqrt{x^2-x}=x-\frac{\sqrt{x}}{2}$. Так как правая часть положительна ($x>1$), то, возводя в квадрат, получим:

$$x^2-x=\frac{x}{4}-x\sqrt{x}+x^2$$

или

$$x\sqrt{x}=\frac{5}{4}x,\quad x\left(\sqrt{x}-\frac{5}{4}\right)=0,\quad x=0$$

— посторонний корень (вне ОДЗ); из второго уравнения следует: $\sqrt{x}=\frac{5}{4}$.

Ответ: $x=\frac{25}{16}$.

Пример 72. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{4}{13}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=t$ $(t\neq 0)$, тогда $x+\frac{1}{x}=t^3-3t$. При этом имеем: $t=\frac{4}{13}(t^3-3t)$ или $t(4t^2-25)=0$.

Корень $t=0$ негоден ($t\neq 0$). Из второго уравнения $t=\pm\frac{5}{2}$. Значит $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\pm\frac{5}{2}$ или $2\sqrt[3]{x^2}\pm 5\sqrt[3]{x}+2=0$ — квадратное уравнение относительно $\sqrt[3]{x}$; его корни $\sqrt[3]{x}=\pm 2$ и $\sqrt[3]{x}=$ $=\pm\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_{1,2}=\pm 8,\quad x_{3,4}=\pm\frac{1}{8}$.

Пример 73. Решить уравнение

$$(a+x)^{2/3}+4(a-x)^{2/3}-5(a^2-x^2)^{1/3}=0.$$

Решение. Разделив обе части на $(a^2-x^2)^{1/3}$ ($x=\pm a$ — не корень), получим:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{1/3}+4\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{1/3}-5=0.$$

Положим: $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{1/3}=t$, тогда $t+\frac{4}{t}-5=0$, $t^2-5t+4=0$, откуда $t_1=4$ и $t_2=1$.

В этом случае имеем: а) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{1/3}=4$, $\frac{a+x}{a-x}=64$, $x=\frac{63}{65}a$; б) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{1/3}=1$, $\frac{a+x}{a-x}=1$, откуда $x=0$.

Ответ: $x_1=\frac{63}{65}a,\quad x_2=0$ (a — любое число).

Пример 74. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2.$$

Решение. Положив $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b-x}}=t$, получим: $t^2-2t+1=0$, откуда $t=1$. Из уравнения $\frac{a-x}{b+x}=1$ найдем, что $x=\frac{a-b}{2}$.

Пример 75. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}.$$

Решение. Если $n\neq 0$ — четное, то ОДЗ: $x>1$, $x<-1$. Разделив обе части на $\sqrt[n]{x^2-1}\neq 0$, имеем: $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}=$ $=\frac{5}{2}$. Положив $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, придем к уравнению $2t^2-5t+2=0$, корни которого $t_1=2$ и $t_2=\frac{1}{2}$. Тогда имеем: а) $\frac{x+1}{x-1}=2^n$, откуда $x=\frac{2^n+1}{2^n-1}$; б) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2^n}$, откуда $x=\frac{1+2^n}{1-2^n}$.

Ответ: $x_1=\frac{2^n+1}{2^n-1},\quad x_2=\frac{1+2^n}{1-2^n}$.

Системы, содержащие иррациональные уравнения

При решении этих систем следует иметь в виду все то, что было сказано о решении алгебраических систем и иррациональных уравнений.

Пример 76. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1, \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$, $y>0$. Преобразовав оба уравнения, получим систему

$$\left.\begin{aligned} x+y=\sqrt{xy}+7, \\ (x+y)\sqrt{xy}=78. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя значение $x+y$ из первого уравнения во второе, получим квадратное уравнение относительно $\sqrt{xy}$: $xy+7\sqrt{xy}-78=0$, откуда $\sqrt{xy}=6$, $xy=36$; из первого уравнения находим: $x+y=13$. Остается решить систему $x+y=13$, $xy=36$.

Ответ: (4, 9) и (9, 4).

Пример 77. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ xy=27. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Перепишем систему так:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}=3 \end{aligned}\right\}$$

и перейдем к квадратному уравнению $z^2-4z+3=0$, корни которого $z_1=3$ и $z_2=1$. Тогда, возвращаясь к старым неизвестным, получим ответ.

Ответ: (27, 1) и (1, 27).

Пример 78. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{13}{36}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Положив $\frac{1}{\sqrt{x}}=u$, $\frac{1}{\sqrt{y}}=v$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} u+v=\frac{5}{6}, \\ u^2+v^2=\frac{13}{36}. \end{aligned}\right\}$$

Возведя первое уравнение этой системы в квадрат и вычитая второе, найдем: $2uv=\frac{1}{3}$, $uv=\frac{1}{6}$.

Имеем теперь более простую систему:

$$\left.\begin{aligned} u+v&=\frac{5}{6},\\ uv&=\frac{1}{6},\end{aligned}\right\}$$

которая сводится к квадратному уравнению $z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}=0$, откуда $z_1=\frac{1}{2}$ и $z_2=\frac{1}{3}$. Тогда $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{3}$ или $u=\frac{1}{3}, v=\frac{1}{2}$. Возвращаясь к неизвестным x и y, получим ответ.

Ответ: (4, 9) и (9, 4).

Пример 79. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})&=6,\\ x+y&=9.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Положив $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, имеем систему

$$\left.\begin{aligned} uv\,(u+v)&=6,\\ u^3+v^3&=9.\end{aligned}\right\}$$

Разделим второе уравнение на первое, получим: u^2+uv+ $+v^2=\frac{3}{2}uv$ или $(u+v)^2=\frac{9}{2}uv$. Составим новую систему

$$\left.\begin{aligned} uv\,(u+v)&=6,\\ (u+v)^2&=\frac{9}{2}uv.\end{aligned}\right\}$$

Подставим из первого уравнения $uv=\frac{6}{u+v}$ во второе, получим: $(u+v)^2=\frac{27}{u+v}$ или $(u+v)^3=27$, откуда $u+v=3$; тогда $uv=2$. Остается решить систему $u+v=3$, $uv=2$ и вернуться к неизвестным x и y.

Ответ: (8, 1) и (1, 8).

Пример 80. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}&=\frac{3}{2},\\ x+y+xy&=9.\end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$, $y>0$ либо $x<0$, $y<0$. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$, тогда первое уравнение имеет вид $t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$ или $2t^2-3t-2=0$, откуда $t=2$. Значит $\sqrt{\frac{x}{y}}=2$ или $x=4y$.

Подставив $x=4y$ во второе уравнение системы, получим: $4y^2+5y-9=0$, откуда $y_1=1$ и $y_2=-\frac{9}{4}$.

Ответ: (4, 1) и $\left(-9, -\frac{9}{4}\right)$.

Пример 81. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}&=3{,}5, \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}&=3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Обозначив $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^3-v^3}{uv(u-v)}&=3{,}5, \\ u-v&=3, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^2+uv+v^2}{uv}&=3{,}5, \\ u&=v+3. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя $u=v+3$ в первое уравнение системы, имеем: $v^2+3v-18=0$, откуда $v_1=3$, $v_2=-6$.

Ответ: (216, 27) и (—27, —216).

Пример 82. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{y}&=\frac{3}{8}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}&=7. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Освободив от иррациональности знаменатель первого члена первого уравнения, получим: $\sqrt{x}=\frac{3y}{16}$. Подставляя это во второе уравнение, имеем квадратное уравнение относительно $\sqrt{y}$: $3y+16\sqrt{y}-112=0$, откуда $\sqrt{y}=4$, $y=16$.

Ответ: (9, 16) (нужна проверка).

Пример 83. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}&=\sqrt{2}+4, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}&=2\sqrt{2}-2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Умножив первое уравнение на $\sqrt{2}$ и сложив со вторым, получим: $\sqrt{x+2y}=2\sqrt{2}$, $x+2y=8$. Подставим $x=8-2y$ во второе уравнение, найдем: $\sqrt{8}-\sqrt{16-4y+2y}=2\sqrt{2}-2$, $\sqrt{16-2y}=4$, откуда $y=6$.

Ответ: (—4, 6).

Иррациональные неравенства

Основным методом решения иррациональных неравенств, содержащих квадратные радикалы, является возведение в квадрат. Следует помнить, что эта операция возможна лишь при условии, если обе части неравенства неотрицательны. Операция эта, расширяя ОДЗ, может привести к появлению посторонних решений. Так как проверка невозможна (решений бесчисленное множество), необходимо тщательно следить за изменением ОДЗ и из конечного множества решений выбрать только ту его часть, которая входит в ОДЗ исходного неравенства и удовлетворяет всем ограничительным условиям, появившимся в ходе решения.

Неравенства вида $\sqrt{f}<\varphi$. Здесь, очевидно, $f\geqslant 0$ (ОДЗ) и, кроме того, $\varphi>0$ (правая часть должна быть положительной, так как арифметический корень, стоящий в левой части, неотрицателен). Поэтому обе части неравенства можно возвести в квадрат, при этом получим равносильное неравенство (с учетом ОДЗ).

Неравенства вида $\sqrt{f}>\varphi$. Как и ранее, $f\geqslant 0$ (ОДЗ). Так как мы ничего не знаем о знаке правой части φ, то следует рассмотреть отдельно два случая: если $\varphi<0$, то неравенство выполняется при всех значениях x, входящих в ОДЗ; если же $\varphi\geqslant 0$, то, возводя обе части в квадрат, получим равносильное неравенство (с учетом ОДЗ и условия $\varphi\geqslant 0$). Останется только выбрать общую часть из решений неравенства, возведенного в квадрат, и неравенств $f\geqslant 0$, $\varphi\geqslant 0$ (заметим, что φ может обратиться в нуль лишь тогда, когда $f>0$).

Для получения окончательного решения исходного неравенства вида $\sqrt{f}>\varphi$ достаточно объединить решения, полученные при рассмотрении обоих случаев.

Пример 84. Решить неравенство $\sqrt{5x-x^2-6}<3+2x$.

Решение. ОДЗ: $5x-x^2-6\geqslant 0$, $(x-3)(2-x)\geqslant 0$, т. е. $2\leqslant x\leqslant 3$. При этих значениях x правая часть $3+2x>0$, т. е. $x>-\frac{3}{2}$. Возводя в квадрат, получим равносильное (в ОДЗ) неравенство:

$$(x-3)(2-x)<(3+2x)^2$$

(хотя ОДЗ расширилась), откуда $5x^2+7x+15>0$. Последнее неравенство удовлетворяется при всех x. Значит решением исходного неравенства являются все значения x из ОДЗ, т. е. $2\leqslant x\leqslant 3$.

Пример 85. Решить неравенство $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$.

Решение. ОДЗ: $6+x-x^2\geqslant 0$, $x^2-x-6\leqslant 0$, $(x+2)\times$ $\times(x-3)\leqslant 0$, т. е. $-2\leqslant x\leqslant 3$. Если правая часть отрицательна $\left(4x-2<0,\text{ т. е. } x<\frac{1}{2}\right)$, то неравенство справедливо и будет удовлетворяться (с учетом ОДЗ) при $-2\leqslant x<\frac{1}{2}$. Пусть теперь правая часть неотрицательна, т. е. $x \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда, возводя обе части в квадрат, получим равносильное (в ОДЗ) неравенство: $x^2 - x - 2 < 0$, решение которого $1 < x < 2$. Учитывая ОДЗ и условие $x \geqslant \frac{1}{2}$, находим общую часть: $\frac{1}{2} \leqslant x < 2$. Объединяя этот результат с предыдущим $\left(-2 \leqslant x < \frac{1}{2}\right)$, получим ответ.

Ответ: $-2 \leqslant x < 2$.

Пример 86. Решить неравенство $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2$.

Решение. ОДЗ: $(x+3)(x-8) \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -3$, $x \geqslant 8$. Если правая часть отрицательна ($x < -2$), неравенство выполняется (с учетом ОДЗ) при $x \leqslant -3$. Пусть теперь правая часть неотрицательна (это будет при $x \geqslant -2$). Возводя в квадрат, получим: $(x+3)(x-8) > (x+2)^2$, откуда $x < -3\frac{1}{9}$, что противоречит условию $x \geqslant -2$.

Ответ: $x \leqslant -3$.

Пример 87. Решить неравенство $\sqrt{(x+4)(x-3)} > 6-x$.

Решение. ОДЗ: $(x+4)(x-3) \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -4$, $x \geqslant 3$. Если $6-x < 0$ ($x > 6$), то неравенство выполняется при любых $x > 6$. Если $6 - x \geqslant 0$ ($x \leqslant 6$), то, возводя в квадрат, получим: $x^2 + x - 12 > 36 - 12x + x^2$, откуда $x > 3\frac{9}{13}$. Объединяя оба случая, имеем: $x > 3\frac{9}{13}$.

Пример 88. Решить неравенство $x^2 > 4\sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

Решение. $x^2 > 4|x-1|$. Если $x \geqslant 1$, то $x^2 > 4(x-1)$, $x^2 - 4x + 4 > 0$, $(x-2)^2 > 0$ и неравенство справедливо при всех $x \neq 2$. Если $x < 1$, то $x^2 < -4(x-1)$, $x^2 + 4x - 4 > 0$, откуда $x > -2 + 2\sqrt{2} \approx 0{,}8$; $x < -2 - 2\sqrt{2} \approx -4{,}8$. Объединяя оба случая, получим:

$$x < -2 - 2\sqrt{2}, \quad -2 + 2\sqrt{2} < x < 2, \quad x > 2.$$

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

Напомним, что показательная функция $y = a^f$, когда $a > 0$, $a \neq 1$, определена при всех x; логарифмическая $y = \log_a f$, когда $a > 0$, $a \neq 1$, — при всех x, удовлетворяющих неравенству $f > 0$; степенно-показательная $y = f^\varphi$ — при всех x, для которых выполняется условие $f > 0$ (в случае же, если и $\varphi > 0$, то основание может быть и нулем, т. е. $f \geqslant 0$).

Основными операциями при решении показательных, логарифмических, а также более сложных уравнений (степенно-показательных, показательно-логарифмических) являются: приравнивание показателей степени при равных основаниях; логарифмирование и потенцирование

Рассмотрим эти уравнения с точки зрения сохранения равносильности.

Уравнения $a^f = a^\varphi$ и $f = \varphi$ равносильны при условии $a > 0$, $a \neq 1$; аналогично уравнения $f^\varphi = f^\psi$ и $\varphi = \psi$ равносильны при условии $f > 0$ (в случае же, если $\varphi > 0$, $\psi > 0$, при условии $f \geqslant 0$).

Уравнения $f = \varphi$ и $\log f = \log \varphi$ неравносильны (первое — следствие второго). Значит при логарифмировании возможно сужение ОДЗ (на второе уравнение накладываются ограничительные условия: $f > 0$, $\varphi > 0$) и, следовательно, потеря корней. При обратной операции — потенцировании, наоборот, ОДЗ расширяется и возможно приобретение посторонних корней.

В ходе решения уравнений используются:

— известные свойства логарифмов

$$\log (f\varphi) = \log |f| + \log |\varphi|,$$

$$\log \frac{f}{\varphi} = \log |f| - \log |\varphi| \quad (\text{при } \varphi \neq 0),$$

$$\log f^{2k} = 2k \log |f|,$$

$$\log f^{2k+1} = (2k+1) \log f;$$

— основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N,$$

верное и для любых функций от x, т. е. $a^{\log_a f} = f$ (заметим, что при этой операции происходит расширение ОДЗ, так как для левой части имеет место ограничение: $f > 0$);

— формула для перехода от одного основания логарифмов к другому

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

а также ее частные случаи

$$\log_a N = \frac{1}{\log_N a}; \ \log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N; \ \ \log_a N = \log_{a^n} N^n$$

(эти формулы также верны и для любых функций от x с соответствующими ограничениями).

Из сказанного ясно, что корни показательных уравнений в проверке не нуждаются. Что же касается логарифмических и более сложных уравнений, то проверка не нужна, если вначале установлена ОДЗ (в процессе решения необходимо следить за ее изменением). В этом случае достаточно из полученных решений выбрать те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения и удовлетворяют наложенным впоследствии ограничениям. Если же наблюдение за ОДЗ не ведется или есть сомнения в равносильности уравнения, полученного на каком-то шаге процесса, проверка корней обязательна.

Показательные и логарифмические уравнения

Общего метода решения таких уравнений не существует, однако можно указать некоторые частные приемы.

Приведение обеих частей показательного уравнения к одному основанию. Утверждение, что если две степени равны, их основания равны, то равны и их показатели, верно только при условии, что основания отличны от нуля и единицы. Из $a^m = a^n$ следует $m = n$ лишь при условии: $a > 0$, $a \neq 1$. Последняя оговорка существенна, иначе из равенства $0^{15} = 0^8$ следовало бы, что $15 = 8$, а из равенства $1^7 = 1^9$ — неверное равенство $7 = 9$. Несоблюдение этой оговорки при решении показательных уравнений с основаниями, зависящими от x, может привести к потере корней.

Пример 89. Решить уравнение $x^{x^2+1} = x^5$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Приравнивая показатели степеней, имеем: $x^2 + 1 = 5$, откуда $x^2 = 4$, $x = 2$ ($x = -2$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим теперь особые случаи, когда основание равно единице и нулю. Если $x = 1$, имеем: $1^2 = 1^5$ (тождество); если $x = 0$, то $0^1 = 0^5$ (тоже тождество). Значит $x = 1$ и $x = 0$ — корни данного уравнения.

Приведем еще один пример, связанный с возможностью потери корня.

Пример 90. Решить уравнение $5^x \cdot \sqrt[x+1]{8^x} = 100$.

Решение. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим:

$$x \lg 5 + \frac{3x}{x+1} \lg 2 = 2 \lg 5 + 2 \lg 2,$$

$$(x-2) \lg 5 + \frac{x-2}{x+1} \lg 2 = 0, \quad (x-2)\left(\lg 5 + \frac{\lg 2}{x+1}\right) = 0,$$

откуда $x_1 = 2$. Далее $\lg 5 = -\frac{\lg 2}{x+1}$, $x + 1 = -\frac{\lg 2}{\lg 5}$,

$$x_2 = -1 - \frac{\lg 2}{\lg 5} = -\frac{\lg 5 + \lg 2}{\lg 5} = -\frac{1}{\lg 5}.$$

Рассуждение, что уравнение можно представить в виде $5^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 5^2 \cdot 2^2$, откуда $x = 2$, будет неверным, так как оно приводит к потере корня.

Особый тип представляют уравнения вида $a^x = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$). Для их решения пользуются определением степени с нулевым показателем (всякое число, не равное нулю, в нулевой степени равно единице).

Пример 91. $17^{x^2-5x+6} = 1$.

Решение. $17^{x^2-5x+6} = 17^0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Пример 92. $x^{x-2} = 1$.

Решение. Очевиден корень $x = 2$. Однако правило, что если степень числа равна единице, то показатель степени равен нулю, верно лишь при условии, что основание не равно единице (если же основание равно единице, то степень будет равна единице при любом показателе). Поэтому рассмотрим особый случай, когда основание равно единице. При $x=1$ имеем тождество $1^{-1}=1$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=1$.

Пример 93. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}$.

Решение Так как $\lg 4=\lg 2^2=2\lg 2$, $\lg 8=\lg 2^3=3\lg 2$, то имеем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-3}=\frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x}=\frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}=\frac{2}{3},$$

откуда $3-x=1$.

Ответ: $x=2$.

Пример 94. $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}}=\sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 1$, $x\neq 3$. Запишем обе части уравнения в виде степеней с дробными показателями

$$3^{\frac{10x+5}{3(x-1)}}=3^{\frac{3(3x-7)}{3(x-3)}},\ \frac{10x+5}{x-1}=\frac{9x-21}{x-3},$$

откуда $x^2+5x-36=0$.

Ответ: $x_1=4$, $x_2=-9$.

Пример 95. $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}}=\sqrt[\sqrt{x}-1]{16}$.

Решение. ОДЗ: $x\geqslant 0$, $x\neq 1$. Преобразовав, имеем:

$$2\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}}=2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}},\ 2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}}=2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}},\ \frac{3\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{x}-1},$$

$$3(x-1)=8\sqrt{x}\ \text{(при } x>1),$$

возведя в квадрат, получим уравнение: $9x^2-82x+9=0$.

Ответ: $x=9$.

Пример 96. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

Решение. $3^x(7\cdot 3-3^4)=5^x(5^2-5^3)$, $60\cdot 3^x=100\cdot 5^x$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3}$.

Ответ: $x=-1$.

Пример 97. $\sqrt{3^{x-56}}-7\sqrt{3^{x-60}}=162$.

Решение. $3^{\frac{x-56}{2}}-7\cdot 3^{\frac{x-60}{2}}=162$, $3^{\frac{x}{2}-28}-7\cdot 3^{\frac{x}{2}-30}=162$, $3^{\frac{x}{2}-30}(3^2-7)=162$, $3^{\frac{x}{2}-30}=81=3^4$, $\frac{x}{2}-30=4$.

Ответ: $x=68$.

Пример 98. $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$.

Решение. $9^x\left(1+\frac{1}{3}\right)=2^x(8\sqrt{2}+\sqrt{2})$, $\frac{4}{3}\cdot 9^x=9\sqrt{2}\cdot 2^x$,

$$\left(\frac{9}{2}\right)^x=\frac{9\sqrt{2}\cdot 3}{4}=\frac{27}{\sqrt{8}}=\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}.$$

Ответ: $x=\frac{3}{2}$.

Пример 99. $2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280$.

Решение. $2^{12x-1}-2^{12x-2}+2^{12x-3}-2^{12x-4}=1280$, $2^{12x-4}(2^3-2^2+2-1)=1280$, $5\cdot 2^{12x-4}=1280$, $2^{12x-4}=256=2^8$.

Ответ: $x=1$.

Пример 100. Решить уравнение $6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}$.

Решение. $3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}$. Разделив обе части уравнения на $2^{x+8}\cdot 3^{2x+4}\neq 0$, получим:

$$\frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}=\frac{3^{3x}}{3^{2x+4}},\quad 2^{x-4}=3^{x-4},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=1.$$

Ответ: $x=4$.

Пример 101. Решить уравнение $3^{x+8}\cdot 7^{3x}=21^{2x+4}$.

Решение. $3^{x+8}\cdot 7^{3x}=3^{2x+4}\cdot 7^{2x+4}$, $\frac{3^{2x+4}}{3^{x+8}}=\frac{7^{3x}}{7^{2x+4}}$, $3^{x-4}=7^{x-4}$, $x-4=0$.

Ответ: $x=4$.

Введение нового неизвестного (подстановка). Большое число показательных уравнений алгебраизируется, т. е. сводится к квадратному (или кубическому) уравнению; при этом иногда удобно вводить новое неизвестное.

Пример 102. Решить уравнение $\dfrac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}+1}}=1{,}5$.

Решение. $3^{x^{2/3}}=3\cdot 3^{x^{1/3}+1}$, $3^{x^{2/3}}=3^{x^{1/3}+2}$, откуда $x^{2/3}-x^{1/3}-2=0$. Полагая $x^{1/3}=y$, получим: $y^2-y-2=0$, откуда $y_1=2$, $y_2=-1$.

Ответ: $x_1=8$, $x_2=-1$.

Пример 103. $27^x+12^x=2\cdot 8^x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $8^x\neq 0$, получим:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^x+\left(\frac{12}{8}\right)^x=2,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0.$$

Обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^x=y$, тогда $y^3+y-2=0$. Это кубическое уравнение имеет лишь один действительный корень $y=1$. Отсюда $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$, $x=0$.

Пример 104. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

Решение. ОДЗ: $|x|\geqslant\sqrt{2}$. Записав уравнение в виде

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}-6=0$$

и положив $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=y$ (при $y>0$), придем к уравнению: $2y^2-5y-12=0$, которое имеет только один корень $y=4$. Имеем: $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4=2^2$, откуда $x+\sqrt{x^2-2}=2$, $\sqrt{x^2-2}=2-x$ (при $x<2$); возводя в квадрат, получим: $x^2-2=(2-x)^2$.

Ответ: $x=\frac{3}{2}$.

Пример 105. $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. Запишем уравнение в виде

$$6\cdot 9^{\frac{1}{x}}-13\cdot 6^{\frac{1}{x}}+6\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$$

и разделим обе части на $4^{\frac{1}{x}}\neq 0$. Имеем:

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}+6=0.$$

Обозначив $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y$, получим квадратное уравнение: $6y^2-13y+6=0$ с корнями $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=\frac{2}{3}$. Решим уравнения: $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{3}{2}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-1$.

Пример 106. $(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62$.

Решение. Положим $(4+15)^x=y$, тогда $(4-\sqrt{15})^x=\frac{1}{(4+\sqrt{15})^x}=\frac{1}{y}$. Уравнение принимает вид $y+\frac{1}{y}=62$ или $y^2-62y+1=0$, откуда

$$y=31\pm 8\sqrt{15}=16\pm 2\cdot 4\sqrt{15}+15=(4\pm\sqrt{15})^2.$$

Возвращаясь к неизвестному x, имеем: $(4+\sqrt{15})^x=(4\pm\sqrt{15})^2$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-2$.

Потенцирование. Эта операция применяется при решении логарифмических уравнений. Напомним, что потенцирование может привести к появлению посторонних корней. Следует иметь в виду, что всякое число N (или функция от x) может быть представлено на основании тождества $N=\log_a a^N$ в виде логарифма по любому положительному основанию.

Пример 107. $\lg(2^x+x-41)=x(1-\lg 5)$.

Решение. Чтобы произвести потенцирование, следует представить правую часть в виде логарифма некоторой функции от x (по основанию 10): $x(1-\lg 5)=x(\lg 10-\lg 5)=x\lg\frac{10}{5}=x\lg 2=\lg 2^x$. Тогда уравнение примет вид $\lg(2^x+x-41)=\lg 2^x$; потенцируя, получим: $2^x+x-41=2^x$, откуда $x=41$.

Пример 108. $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

Решение. Потенцируя, получим:

$$3^{2(x-1)}+7=4(3^{x-1}+1)$$

или

$$3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+3=0,$$

откуда $3^{x-1}=3$ или $3^{x-1}=1$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=1$.

Пример 109. $\lg(6\cdot 5^x+25\cdot 20^x)=x+\lg 25$.

Решение. Так как $x=\lg 10^x$, то, потенцируя, получим: $6\cdot 5^x+25\cdot 20^x=25\cdot 10^x$. Разделив на $5^x\neq 0$, будем иметь: $6+$ $+25\cdot 4^x=25\cdot 2^x$ или $25\cdot 2^{2x}-25\cdot 2^x+6=0$, откуда $2^x=\frac{3}{5}$ и $2^x=\frac{2}{5}$. Логарифмируя, найдем, что $x\lg 2=\lg 3-\lg 5$ и $x\lg 2=$ $=\lg 2-\lg 5$.

Ответ: $x_1=\dfrac{\lg 3-\lg 5}{\lg 2}$, $x_2=\dfrac{\lg 2-\lg 5}{\lg 2}$.

Пример 110. $\log_{x-3}\sqrt{x^2-6x+9}=1$.

Решение. ОДЗ: $x-3>0$, $x-3\neq 1$, т. е. $x>3$ и $x\neq 4$. Уравнение имеет вид $\log_{x-3}|x-3|=1$. По определению логарифма: $x-3=|x-3|$, откуда $x\geqslant 3$. Следует учесть ОДЗ.

Ответ: $3<x<4$, $x>4$.

Пример 111. $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2$.

Решение. ОДЗ: $1-x^2>0$, $|x|<1$, т. е. $-1<x<1$. Потенцируя, имеем:

$$\sqrt{1+x}\sqrt{(1-x)^3}=100\sqrt{1-x^2}.$$

Сокращая на $\sqrt{1-x^2}\neq 0$, получим: $\sqrt{(1-x)^2}=100$, $|1-x|=$ $=100$. Так как $-1<x<1$, то модуль можно снять и имеем $1-x=100$, $x=-99$ (вне ОДЗ). Решений нет.

Пример 112.

$$\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x-1}}\right)-2=\frac{1}{4}\lg 16-\sqrt{x+0{,}25}\lg 4.$$

Решение. ОДЗ: $x\geqslant\frac{1}{4}$. Преобразуем

$$\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}}-\frac{16}{2^{\sqrt{4x+1}}}\right)-\lg 100=\lg 16^{\frac{1}{4}}-\lg 4^{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}.$$

Потенцируя, получим:

$$6^{\sqrt{4x+1}}=216=6^3,\ \sqrt{4x+1}=3,\ \text{откуда}\ x=2.$$

Пример 113. $2\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$.

Решение. ОДЗ: $x>0$, $\lg x>0$, $x>1$; $3-2\lg x>0$, $\lg x<\frac{3}{2}$, $x<10^{3/2}$.

Общая часть: $1 < x < 10^{3/2}$. Представим уравнение в виде

$$\lg(\lg^2 x) = \lg(3 - 2\lg x).$$

Потенцируя, получим:

$$\lg^2 x = 3 - 2\lg x \text{ или } \lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0,$$

откуда $\lg x = 1$ ($\lg x = -3$, $x = 10^{-3}$ не входит в ОДЗ).

Ответ: $x = 10$.

Пример 114. $2x - \lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 4^x$.

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 10^{2x} - \lg 4^x,$$

$$\lg(25^x + 4x - 16) = \lg\frac{100^x}{4^x} = \lg 25^x.$$

Потенцируя, получим: $25^x + 4x - 16 = 25^x$.

Ответ: $x = 4$.

Пример 115. $5\log_2 3 + 2\log_2\sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - 1\frac{2}{3}\log_2 27 = 1{,}5$.

Решение. ОДЗ: $x > 2$. Преобразуем уравнение

$$\log_2 3^5(x-2)\sqrt{8} - \log_2(3^3)^{5/3} = \frac{3}{2},$$

$$\log_2\frac{3^5\sqrt{8}(x-2)}{3^5} = \frac{3}{2} = \log_2 2^{3/2} = \log_2\sqrt{8}.$$

Потенцируя, получим: $x - 2 = 1$.

Ответ: $x = 3$.

Приведение логарифмов к одному основанию. Здесь применяется формула для перехода от одного основания логарифмов к другому или ее частные случаи.

Пример 116. $\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{10}$, $x \neq \frac{1}{100}$. Так как $\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$, то уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{2}{\lg 10x} + \frac{3}{\lg 100x} = 0$$

или

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} + \frac{3}{2 + \lg x} = 0,$$

откуда получим:

$$3\lg^2 x + 5\lg x + 1 = 0, \quad \lg x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Ответ: $x = 10^{\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}}$.

Пример 117. $\log_a(ax)\log_x(ax) = \log_{a^2}\frac{1}{a}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$).

Решение. ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1$. Так как $\log_a(ax)=1+\log_a x$, $\log_x(ax)=\log_x a+1=\frac{1}{\log_a x}+1=\frac{1+\log_a x}{\log_a x}$, $\log_{a^2}\frac{1}{a}=\log_a a^{-\frac{1}{2}}=$ $=-\frac{1}{2}$, то уравнение примет вид

$$\frac{(1+\log_a x)^2}{\log_a x}=-\frac{1}{2}$$

или

$$\log_a^2 x+\frac{5}{2}\log_a x+1=0.$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{a^2}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Пример 118. $\log_4(x+12)\log_x 2=1$.

Решение. ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1$. Приведем оба логарифма к основанию 2. Так как

$$\log_4(x+12)=\log_2\sqrt{x+12}=\frac{1}{2}\log_2(x+12),\ \log_x 2=\frac{1}{\log_2 x},$$

то уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}\log_2(x+12)=\log_2 x$$

или

$$\log_2(x+12)=\log_2 x^2,$$

откуда $x+12=x^2$ или $x^2-x-12=0$.

Ответ: $x=4$ (корень $x=-3$ вне ОДЗ).

Пример 119. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\ \log_3 x=-1$.

Решение. ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1$. Так как корень — арифметический, то должно быть $\log_3 x<0$, т. е. $x<1$. Общая часть: $0<x<1$. Перейдем к основанию x: $\sqrt{\frac{1}{2}(\log_x 3+1)}\ \frac{1}{\log_x 3}=-1$; возведем в квадрат $\frac{1}{2}(\log_x 3+1)=\log_x^2 3$, откуда получим:

$$2\log_x^2 3-\log_x 3-1=0,\ \log_x 3=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{9}$ (корень $x=3$ вне ОДЗ).

Пример 120. $\frac{1}{\log_6(3+x)}+\frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1$.

Решение. ОДЗ: $3+x>0,\ 4-x>0,\ 3+x\neq 1$, откуда $-3<x<4$ и $x\neq -2$. Так как

$$\frac{1}{\log_6(3+x)}=\frac{\log_2 6}{\log_2(3+x)},$$

$$2\log_{0,25}(4-x)=\frac{2\log_2(4-x)}{\log_2 0,25}=-\log_2(4-x),$$

то уравнение примет вид

$$\frac{\log_2 6 - \log_2 (4-x)}{\log_2 (3+x)} = 1, \quad \log_2 6 - \log_2 (4-x) = \log_2 (3+x).$$

Потенцируя, получим: $\frac{6}{4-x} = 3 + x$. Имеем квадратное уравнение $x^2 - x - 6 = 0$ с корнями $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ (последний — вне ОДЗ).

Ответ: $x = 3$.

Пример 121. $\log_{16x} x^3 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 16$, $x \neq 2$. Запишем уравнение в виде $3 \log_{16x} x + \frac{1}{2} \log_{\frac{x}{2}} x = 2$.

Перейдем к основанию x

$$\frac{3}{\log_x 16x} + \frac{1}{2 \log_x \frac{x}{2}} = 2, \quad \frac{3}{\log_x 16 + 1} + \frac{1}{2(1 - \log_x 2)} = 2,$$

$$\frac{3}{4 \log_x 2 + 1} + \frac{1}{2 - 2 \log_x 2} = 2,$$

откуда получим квадратное уравнение

$$16 \log_x^2 2 - 14 \log_x 2 + 3 = 0$$

с корнями $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ и $\log_x 2 = \frac{3}{8}$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 2^{8/3}$.

Пример 122. $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{3}$. Так как

$$\log_{3x} \frac{3}{x} = \frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} = \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x},$$

то уравнение примет вид

$$\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1$$

или

$$\log_3 x (\log_3^2 x + \log_3^2 x - 2) = 0,$$

откуда

$$\log_3 x = 0, \quad \log_3 x = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Логарифмирование. Этот способ применяется в тех случаях, когда невозможно уравнять основания степеней, а также для решения показательно-степенных и показательно-логарифмических уравнений.

Пример 123. $20^x = 500$.

Решение. Логарифмируем обе части по основанию 10

$$x \lg 20 = \lg 500, \quad x = \frac{\lg 500}{\lg 20} = \frac{\lg 5 + 2}{\lg 2 + 1}.$$

Пример 124. $x^{\log_x 9} = 4^{x^2}$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. Так как при этих условиях $x^{\log_x 9} = 9$, то имеем уравнение: $4^{x^2} = 9$, логарифмируя, получим:

$$x^2 \lg 4 = \lg 9, \quad x^2 = \frac{\lg 9}{\lg 4} = \frac{2 \lg 3}{2 \lg 2} = \frac{\lg 2}{\lg 3}.$$

Ответ: $x = \sqrt{\frac{\lg 3}{\lg 2}}$.

Пример 125. $\log_{5-x} 10 = -\frac{1}{2 \lg \sqrt{3-x}}$.

Решение. ОДЗ: $x < 3$, $x \neq 4$, $x \neq 2$. Перейдем к основанию 10

$$\frac{1}{\lg (5-x)} = -\frac{1}{\lg (3-x)}, \quad \lg (5-x) + \lg (3-x) = 0.$$

Потенцируя, получим:

$$(5-x)(3-x) = 1, \quad x^2 - 8x + 14 = 0.$$

Ответ: $x = 4 - \sqrt{2}$.

Пример 126. $5^{3 \lg x} = 12{,}5x$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Логарифмируем по основанию 10

$$3 \lg x \lg 5 = \lg 12{,}5 + \lg x, \quad (3 \lg 5 - 1) \lg x = \lg 12{,}5,$$

$$\lg x = \frac{\lg 12{,}5}{3 \lg 5 - 1} = \frac{\lg 12{,}5}{\lg 12{,}5 - \lg 10} = \frac{\lg 12{,}5}{\lg 12{,}5} = 1.$$

Ответ: $x = 10$.

Пример 127. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \log_3 (x^2 - 1)} = \sqrt{2(x-1)}$.

Решение. ОДЗ: $x > 1$. Преобразуем левую часть так:

$$(3^{-2})^{\log_3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}} = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{-2} = x - 1.$$

Тогда уравнение примет вид $x - 1 = \sqrt{2(x-1)}$; возводя в квадрат, получим: $x^2 - 2x + 1 = 2x - 2$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$.
Ответ: $x = 3$ ($x = 1$ — вне ОДЗ).

Пример 128. $x^{\sqrt[n]{x}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^x$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Имеем: $x^{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{x}{n}}$. Прологарифмируем

$$x^{\frac{1}{n}} \lg x = \frac{x}{n} \lg x, \quad \lg x \left(x^{\frac{1}{n}} - \frac{x}{n}\right) = 0.$$

1) $\lg x=0,\ x_1=1;$

2) $x^{\frac{1}{n}}=\frac{x}{n},\ \frac{1}{n}\lg x=\lg x-\lg n,\ \lg x\left(\frac{1}{n}-1\right)=-\lg n,$

$$\lg x=\frac{\lg n}{1-\frac{1}{n}},\quad \lg x=\frac{n\lg n}{n-1},\quad x=10^{\frac{n\lg n}{n-1}}=(10^{\lg n})^{\frac{n}{n-1}}=n^{\frac{n}{n-1}}.$$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=n^{\frac{n}{n-1}}$ (если $n>0,\ n\neq 1$), x — любое положительное число (если $n=1$).

Пример 129. Решить уравнение

$$x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Преобразовав правую часть, получим x, так что уравнение примет вид $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=x$.

Логарифмируем $(\lg^2 x+3\lg x+3)\lg x=\lg x$. Вынесем $\lg x$ за скобки, получим: $\lg x(\lg^2 x+3\lg x+3-1)=0$, откуда $\lg^2 x+3\lg x+2=0$, $\lg x=-1$, $\lg x=-2$ и $\lg x=0$.

Ответ: $x_1=0{,}1,\ x_2=0{,}01,\ x_3=1.$

Пример 130. Решить уравнение $a^{b^x}=c$ (при $c>0,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1$).

Решение. Логарифмируя по основанию a, получим: $b^x=\log_a c$. Это уравнение не имеет решений, если правая часть неположительна ($\log_a c\leqslant 0$), т. е. если $c\leqslant 1$ при $a>1$ или $c\geqslant 1$ при $a<1$. Если $c>1$ и $a>1$, либо $c<1$ и $a<1$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\log_b\log_a c.$$

Пример 131. Решить уравнение $x^{3-\lg\frac{x}{3}}=900.$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Логарифмируя, получим:

$$\left(3-\lg\frac{x}{3}\right)\lg x=\lg 900,\quad (3-\lg x+\lg 3)\lg x=2\lg 3+2.$$

После преобразования придем к квадратному уравнению

$$\lg^2 x-(3+\lg 3)\lg x+(2\lg 3+2)=0,$$

$$\lg x=\frac{(3+\lg 3)\pm\sqrt{9+6\lg 3+\lg^2 3-8\lg 3-8}}{2}=\frac{(3+\lg 3)\pm(\lg 3-1)}{2};$$

$$\lg x=\lg 30,\quad \lg x=2.$$

Ответ: $x_1=30,\ x_2=100.$

Пример 132. Решить уравнение $\sqrt{3\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$.

Решение. ОДЗ: $x<0,\ \log_2(-x)\geqslant 0,\ -x\geqslant 1,\ x\leqslant -1.$ При этом условии $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, так что уравнение примет вид

$$\sqrt{3\log_2(-x)}=\log_2(-x);$$

выносим общий множитель

$$\sqrt{\log_2(-x)}\,(\sqrt{3}-\sqrt{\log_2(-x)})=0,$$

после чего оно распадается на два уравнения

1) $\sqrt{\log_2(-x)}=0,\ \log_2(-x)=0,\ -x=1,\ x_1=-1;$

2) $\sqrt{\log_2(-x)}=\sqrt{3},\ \log_2(-x)=3,\ -x=2^3,\ x_2=-8.$

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=-8.$

Пример 133. Решить уравнение

$$\lg^2(ax)+\lg^2(bx)+\lg^2(cx)=\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c$$
$$(a>0,\ b>0,\ c>0).$$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Так как

$$\lg^2(ax)=(\lg ax)^2=(\lg a+\lg x)^2=\lg^2 a+\lg^2 x+2\lg a\lg x$$

и т. д., то уравнение можно переписать так:

$$\lg^2 a+\lg^2 x+2\lg a\lg x+\lg^2 b+\lg^2 x+2\lg b\lg x+$$
$$+\lg^2 c+\lg^2 x+2\lg c\lg x=\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c$$

или

$$3\lg^2 x+2(\lg a+\lg b+\lg c)\lg x=0.$$

Далее следует: $\lg x[3\lg x+2\lg(abc)]=0$, откуда 1) $\lg x=0$, $x_1=1$; 2) $\lg x=-\frac{2}{3}\lg(abc)$.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=(abc)^{-\frac{2}{3}}.$

Показательные и логарифмические системы

Стандартных методов для решения таких систем не существует. Следует исходить из того, что́ мы знаем вообще о решении систем и о решении показательных и логарифмических уравнений. Частные приемы решений покажем на примерах.

Пример 134. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2^x3^y&=12,\\2^y3^x&=18.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Перемножив, а затем разделив правые и левые части уравнений, получим: $6^{x+y}=6^3$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\frac{2}{3}$, откуда имеем систему:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=3,\\x-y&=1.\end{aligned}\right\}$$

Ответ: (2, 1).

Пример 135. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3^x+2^{x+2y+1}&=5,\\ 3^{x+1}-2^{x+2y}&=1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Обозначив $3^x=u$, $2^{x+2y}=v$, получим систему: $u+2v=5$, $3u-v=1$, откуда $u=1$, $v=2$.

Ответ: $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

Пример 136. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[x]{a}\ \sqrt[-y]{a}=1,\\ &\frac{\sqrt[x]{bn}}{\sqrt[y]{b}}=n^p. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$, $y\neq 0$. Запишем первое уравнение в виде $a^{1/x-1/y}=1$, откуда $x=y$. Подставив $x=y$ во второе уравнение, получим: $n^{1/x}=n^p$, откуда $x=y=\frac{1}{p}$, если $p\neq 0$, $n>0$, $n\neq 1$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$.

Пример 137. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \log_2\frac{x^2\sqrt{y+1}}{2}&=2,\\ \log_8 x\log_2(y+1)^2&=\frac{4}{3}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$, $y\geqslant -1$. Перепишем первое уравнение так:

$$\log_2 x^2+\log_2\sqrt{y+1}-\log_2 2=2,\quad 2\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2(y+1)=3,$$

$$4\log_2 x+\log_2(y+1)=6$$

и второе

$$\frac{1}{3}\log_2 x\cdot 2\log_2(y+1)=\frac{4}{3},\quad \log_2 x\log_2(y+1)=2.$$

Имеем систему

$$\left.\begin{aligned} \log_2 x\log_2(y+1)&=2,\\ 4\log_2 x+\log_2(y+1)&=6. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя из второго уравнения $\log_2(y+1)=6-4\log_2 x$ в первое, придем к квадратному уравнению

$$2\log_2^2 x-3\log_2 x+1=0,$$

откуда $\log_2 x=1$ и $\log_2 x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $(2,\ 3)$, $(\sqrt{2},\ 15)$.

Пример 138. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lg(x-y)-2\lg 2}{1-\lg(x+y)}=1,\\ \frac{\lg x-\lg 3}{\lg y-\lg 7}=-1.\end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$, $y>0$, $x+y\neq 10$, $x-y>0$. Потенцируя оба уравнения, получим систему $x^2-y^2=40$, $xy=21$ или $x^2+(-y^2)=40$, $x^2(-y^2)=-441$, которая приводит к уравнению $z^2-40z-441=0$ с корнем $z=x^2=49$ (второй негоден); отсюда $x=7$, $y=3$, однако это решение не входит в ОДЗ $(x+y)\neq 10$.

Ответ: решений нет.

Пример 139. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\log_y\log_y x=\log_x\log_x y,\\ \log_a^2 x+\log_a^2 y=8.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Установление ОДЗ здесь громоздко. Преобразуем правую часть первого уравнения, используя формулу перехода к новому основанию логарифмов

$$\log_x\log_x y=\log_x\left(\frac{1}{\log_y x}\right)=\log_x 1-\log_x\log_y x=$$

$$=-\log_x\log_y x=-\frac{\log_y\log_y x}{\log_y x}.$$

Тогда первое уравнение примет вид

$$\log_y\log_y x=-\frac{\log_y\log_y x}{\log_y x};$$

отсюда $\log_y\log_y x\left(1+\frac{1}{\log_y x}\right)=0$, последнее распадается на два уравнения: 1) $\log_y\log_y x=0$, откуда $\log_y x=1$ и $x=y$ (второе не имеет решений). Подставляя $x=y$ во второе уравнение системы, имеем

$$2\log_a^2 x=8,\quad \log_a^2 x=4,\quad \log_a x=\pm 2.$$

Ответ: $x_1=y_1=a^2$, $x_2=y_2=\frac{1}{a^2}$ (нужна проверка).

Пример 140. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}3\sqrt[y]{9^{1-y}}=\sqrt[y]{3^x},\\ 32\sqrt[x]{8^y}=\sqrt[y]{4^x}.\end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$, $y\neq 0$. Перепишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned}3\cdot 9^{\frac{1-y}{y}}=3^{\frac{x}{y}},\\ 32\cdot 8^{\frac{y}{x}}=4^{\frac{x}{y}},\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}3\cdot 3^{\frac{2-2y}{y}}=3^{\frac{x}{y}},\\ 2^5\cdot 2^{\frac{3y}{x}}=4^{\frac{x}{y}},\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}3^{\frac{2-2y}{y}+1}=3^{\frac{x}{y}},\\ 2^{5+\frac{3y}{x}}=2^{\frac{2x}{y}}.\end{aligned}\right\}$$

Приравнивая показатели степеней при равных основаниях, получим: из первого уравнения $\frac{2-2y}{y}+1=\frac{x}{y}$, откуда $x=2-y$, из второго $5+\frac{3y}{x}=\frac{2x}{y}$ или $2x^2-3y^2-5xy=0$ (однородное уравнение), из которого имеем: $x=3y$ и $x=-\frac{y}{2}$. Таким образом, окончательно имеем две системы:

$$\left.\begin{aligned} x&=3y,\\ x&=2-y \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x&=-\frac{y}{2},\\ x&=2-y. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(-2, 4)$.

Пример 141. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{\sqrt{y}}&=y,\\ y^{\sqrt{y}}&=x^4. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$, $y>0$. Подставим $y=x^{\sqrt{y}}$ из первого уравнения во второе: $(x^{\sqrt{y}})^{\sqrt{y}}=x^4$ или $x^y=x^4$; прологарифмируем $y\lg x=4\lg x$, $\lg x(y-4)=0$, откуда $x=1$, $y=4$.

Ответ: $(1, 1)$; $(2, 4)$.

Пример 142. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{y-1}&=5,\\ x^{2y+1}&=3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Логарифмирование ведет к громоздкому решению. Поэтому возведем первое уравнение в квадрат и разделим на него второе, получим $x^3=\frac{3}{25}$, откуда $x=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$.

Подставим это значение x в первое уравнение

$$\left(\frac{3}{25}\right)^{\frac{y-1}{3}}=5,\ \frac{y-1}{3}\lg\frac{3}{25}=\lg 5,\ y-1=\frac{3\lg 5}{\lg 3-\lg 25},$$

$$y=1+\frac{3\lg 5}{\lg 3-2\lg 5}.$$

Ответ: $x=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$, $y=\frac{\lg 3+\lg 5}{\lg 3-2\lg 5}$.

Пример 143. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[\frac{x}{4}]{2x-y}&=2,\\ (2x-y)\cdot 5^{\frac{x}{4}}&=1000. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$. Из первого уравнения $(2x-y)^{\frac{4}{x}} =$
$= 2$, тогда имеем: $2x - y = 2^{\frac{x}{4}}$; подставив это во второе уравнение, получим:

$$2^{\frac{x}{4}} \cdot 5^{\frac{x}{4}} = 1000, \quad 10^{\frac{x}{4}} = 10^3.$$

Ответ: (12, 16).

Пример 144. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^{x^2-2x-3} &= 1, \\ \log_2 x &= y. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$. Подставив $y = \log_2 x$ в первое уравнение и логарифмируя его по основанию 2, получим:

$$(x^2 - 2x - 3) \log_2 \log_2 x = 0,$$

после чего имеем два уравнения: $x^2 - 2x - 3 = 0$ с корнем $x = 3$ (второй — вне ОДЗ) и $\log_2 \log_2 x = 0$ (значит $\log_2 x = 1$ и $x = 2$).

Ответ: (3, $\log_2 3$); (2, 1).

Пример 145. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{12}, \\ y^{x+y} &= x^3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$. Логарифмируем оба уравнения системы

$$\left.\begin{aligned} (x+y)\lg x &= 12 \lg y, \\ (x+y)\lg y &= 3 \lg x. \end{aligned}\right\}$$

Разделим первое на второе $(x + y \neq 0)$: $\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{4 \lg y}{\lg x}$, откуда $\lg x = \pm 2 \lg y$; следовательно, $x = y^2$ и $x = \frac{1}{y^2}$. Подставляя эти значения x в одно из уравнений системы и логарифмируя его, получим решение.

Ответ: (4, 2); (1, 1).

Пример 146. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^y &= y^x, \\ a^x &= b^y \end{aligned}\right\}$$

$(a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1)$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$. Прологарифмируем оба уравнения

$$\left.\begin{aligned} y \lg x &= x \lg y, \\ x \lg a &= y \lg b. \end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения $y=\frac{\lg a}{\lg b}x$. Решения $x>0$, $y>0$ будут при $\frac{\lg a}{\lg b}>0$, т. е. либо $a>1$, $b>1$, либо $a<1$, $b<1$. Подставляя $y=\frac{\lg a}{\lg b}x$ в первое уравнение системы и сокращая на $x\neq 0$, получим:

$$\left(\frac{\lg a}{\lg b}-1\right)\lg x=\lg\frac{\lg a}{\lg b}.$$

Если $\lg a\neq\lg b$, т. е. $a\neq b$, то из последнего уравнения найдем x, а из соотношения $y=\frac{\lg a}{\lg b}x$ найдем и y. Если $a=b$, то имеем тождество, а исходная система примет вид $x^y=y^x$, $a^x=a^y$, откуда $y=x$.

Ответ: $x=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}}$, $y=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b-\lg a}}$, если $a\neq b$ и либо $a>1$, $b>1$, либо $a<1$, $b<1$; $y=x$ (x — любое), если $a=b$.

Пример 147. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}&10^{1-\lg(x-y)}=2{,}5,\\&\lg(x-y)-2\lg 2=1-\lg(x+y).\end{aligned}\right\}$$

Решение ОДЗ: $x-y>0$, $x>-y$. Потенцируя первое уравнение, получим: $\frac{10}{x-y}=\frac{5}{2}$, откуда $x=y+4$. Подставляя это во второе уравнение, найдем, что $\lg(x+1)=1$ и значит $x+y=10$. Имеем систему

$$\left.\begin{aligned}x+y&=10,\\x-y&=\ \ 4.\end{aligned}\right\}$$

Ответ: (7, 3).

Пример 148. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\log_7\log_4\log_3^2(x-y)&=0,\\2^{x+y-20}&=8.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Потенцируя первое уравнение, получим последовательно:

$$\log_4\log_3^2(x-y)=1,\quad \log_3^2(x-y)=4,$$
$$\log_3(x-y)=\pm 2,\quad x-y=3^{\pm 2};$$

значит либо $x-y=9$, либо $x-y=\frac{1}{9}$. Из второго уравнения системы заключаем: $x+y-20=3$ или $x+y=23$. Таким образом, имеем две системы:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=23,\\x-y&=\ \ 9\end{aligned}\right\}\quad\text{и}\quad\left.\begin{aligned}x+y&=23,\\x-y&=\frac{1}{9}.\end{aligned}\right\}$$

Ответ: (16, 7); $\left(\frac{104}{9}, \frac{103}{9}\right)$.

Пример 149. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y^2} &= 77 \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y^2} &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y \neq 0$. Преобразуем систему, применяя основное логарифмическое тождество

$$\left.\begin{aligned} x - |y| &= 77, \\ \sqrt{x} - \sqrt{|y|} &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} u^2 - v^2 &= 77, \\ u - v &= 7, \end{aligned}\right\}$$

если положить $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{|y|} = v$. Из последней системы находим: $u = 9$, $v = 2$; значит $x = 81$, $y = \pm 4$.

Ответ: (81, 4); (81, —4).

Пример 150. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128}, \\ &\lg(x + y) = \lg 40 - \lg(x - y). \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x \neq 0$. Потенцируем второе уравнение $x + y = \frac{40}{x - y}$, откуда $x^2 - y^2 = 40$. Первое уравнение преобразуем так:

$$\sqrt[10]{2^x 2^y} = \sqrt[x]{2^7}, \quad 2^{\frac{x+y}{10}} = 2^{\frac{7}{x}},$$

откуда $\frac{x+y}{10} = \frac{7}{x}$ или $x + y = \frac{70}{x}$.

Разделив последнее первое на последнее второе уравнение, найдем, что $x - y = \frac{4x}{7}$. Получим систему: $x + y = \frac{70}{x}$, $x - y = \frac{4x}{7}$. Складывая оба уравнения, найдем, что $x^2 = 49$, откуда $x = \pm 7$.

Ответ: (7,3) (решение (—7, —3) — вне ОДЗ).

Пример 151. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x - y)^{\lg(x + 1,5)} &= 0,2, \\ \sqrt[\lg(x-y)]{2x + 3} &= 0,1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Так как $\lg(x + 1,5) = \lg\frac{2x+3}{2} = \lg(2x + 3) - \lg 2$, то, логарифмируя первое уравнение, получим:

$$[\lg(2x + 3) - \lg 2]\lg(x - y) = \lg 2 - 1,$$

откуда

$$\lg(x - y) = \frac{\lg 2 - 1}{\lg(2x + 3) - \lg 2}.$$

Подставив найденное значение для $\lg(x-y)$ во второе уравнение и логарифмируя последнее, найдем:

$$\frac{[\lg(2x+3)-\lg 2]\lg(2x+3)}{\lg 2-1}=-1.$$

Это уравнение можно упростить

$$\lg^2(2x+3)-\lg 2\lg(2x+3)+(\lg 2-1)=0.$$

Обозначив $\lg(2x+3)=z$, получим квадратное уравнение: $z^2-\lg 2z+(\lg 2-1)=0$, корни которого $z_1=\lg 2-1$, $z_2=1$. Возвращаясь к неизвестному x, рассмотрим два уравнения:

1) $\lg(2x+3)=\lg 2-1=\lg\frac{2}{10}=\lg\frac{1}{5}$, откуда $2x+3=\frac{1}{5}$, $x=-\frac{7}{5}$;

2) $\lg(2x+3)=1$, $2x+3=10$, $x=\frac{7}{2}$.

Значения y найдутся из любого уравнения системы.

Ответ: $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{32}{5}\right)$; $\left(\frac{7}{2}, \frac{17}{5}\right)$ (нужна проверка).

Пример 152. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\log_a x+\log_{a^2} y&=c,\\ x^2+a^{-\log_{1/a} y}&=2a^c.\end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0$, $y>0$, $a>0$, $a\neq 1$.

Так как $\log_a x=\log_{a^2} x^2$ и $-\log_{\frac{1}{a}} y=\log_{\frac{1}{a}} y^{-1}=\log_{a^{-1}} y^{-1}=\log_a y$, а следовательно, $a^{-\log_{1/a} y}=a^{\log_a y}=y$, то систему можно записать в виде

$$x^2y=a^{2c},\ x^2+y=2a^c.$$

Имеем квадратное уравнение:

$$z^2-2a^cz+a^{2c}=0,\ (z-a^c)^2=0,\ z=a^c;$$

таким образом, $x^2=a^c$, $x=\sqrt{a^c}=a^{c/2}$ и $y=a^c$. Значит система имеет решение: $x=a^{c/2}$, $y=a^c$ (так как $a>0$, $a\neq 1$, то c — любое число).

Пример 153. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\log_a x\log_b y&=\log_a b,\\ a^{\log_{a^2} y}&=\sqrt{x}.\end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1.$ Так как

$$\log_b y=\frac{\log_a y}{\log_a b} \text{ и } a^{\log_{a^2} y}=a^{\log_a \sqrt{y}}=\sqrt{y},$$

то система имеет вид:

$$\log_a x \log_a y=\log_a^2 b, \quad y=x.$$

Подставим $y=x$ в первое уравнение

$$\log_a^2 x=\log_a^2 b, \quad \log_a x=\pm\log_a b.$$

Имеем два уравнения: $\log_a x=\log_a b$, откуда $x=b$; $\log_a x=$ $=-\log_a b=\log_a \frac{1}{b}$, где $x=\frac{1}{b}$.

Ответ: $(b,\ b)$; $\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{b}\right)$.

Пример 154. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (ax)^{\lg a}&=(by)^{\lg b}, \\ b^{\lg x}&=a^{\lg y}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1.$ Прологарифмируем оба уравнения системы

$$\left.\begin{aligned} &\lg a(\lg a+\lg x)=\lg b(\lg b+\lg y), \\ &\lg x\lg b=\lg y\lg a. \end{aligned}\right\}$$

Подставив из второго уравнения $\lg x=\frac{\lg y\lg a}{\lg b}$ в первое, получим:

$$\lg^2 a+\frac{\lg y\lg^2 a}{\lg b}=\lg^2 b+\lg b\lg y,$$

откуда

$$\lg y=\frac{\lg^2 a-\lg^2 b}{\lg b-\frac{\lg^2 a}{\lg b}}=-\lg b=\lg\frac{1}{b},$$

т. е. $y=\frac{1}{b}$;

$$\lg x=\frac{-\lg b\lg a}{\lg b}=-\lg a=\lg\frac{1}{a},$$

т. е. $x=\frac{1}{a}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$.

Пример 155. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^m&=y^n, \\ \log_p\frac{x}{y}&=\frac{\log_p x}{\log_p y}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq 1,\ p>0,\ p\neq 1.$

Так как из первого уравнения $y=x^{\frac{m}{n}}$, подставим это значение во второе уравнение

$$\log_p \frac{x}{x^{\frac{m}{n}}}=\frac{\log_p x}{\log_p x^{\frac{m}{n}}},\quad \log_p x^{1-\frac{m}{n}}=\frac{\log_p x}{\frac{m}{n}\log_p x},$$

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)\log_p x=\frac{n}{m},\quad \log_p x=\frac{n^2}{m(n-m)}.$$

Ответ: $x=p^{\frac{n^2}{m(n-m)}},\quad y=p^{\frac{n}{n-m}}.$

Показательные и логарифмические неравенства

Кроме общих соображений о решении неравенств, изложенных ранее, необходимо помнить, что показательная и логарифмическая функции — монотонные: возрастающие при $a>1$ и убывающие при $a<1$. Поэтому при логарифмировании и потенцировании неравенств в первом случае ($a>1$) получим неравенство того же смысла, а во втором ($a<1$) — противоположного.

Пример 156. Решить неравенство $5^{\frac{2}{x}}>0.$

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. При этом условии показательная функция $y=5^{\frac{2}{x}}$ всегда положительна.

Ответ: $x\neq 0.$

Пример 157. Решить неравенство $0<5^{x^2-8x-20}<1.$

Решение. Неравенство $5^{x^2-8x-20}>0$ выполняется всегда. Рассмотрим вторую часть $5^{x^2-8x-20}<1=5^0$. Так как основание больше единицы, неравенство равносильно следующему: $x^2-8x-20<0$, откуда $-2<x<10.$

Пример 158. Решить неравенство $0{,}1^{4x^2-2x-2}<0{,}1^{2x-3}.$

Решение. Ввиду того, что основание меньше единицы, неравенство равносильно следующему: $4x^2-2x-2>2x-3$, откуда $4x^2-4x+1>0$ или $(2x-1)^2>0.$

Ответ: $x\neq \frac{1}{2}.$

Пример 159. Решить неравенство $2^x+2^{2x}>3.$

Решение. Обозначим $2^x=y$. Тогда имеем: $y^2+y-3>0$. Так как корни трехчлена, стоящего слева, $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, то решения неравенства будут: $y>\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $y<\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ (второе неравенство не имеет смысла, так как $y>0$). Значит $2^x>\frac{\sqrt{13}-1}{2}.$

Ответ: $x>\log_2\frac{\sqrt{13}-1}{2}.$

Пример 160. Решить неравенство $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 1$. Так как $\frac{1}{1-2^{x-1}} = \frac{1}{1-\frac{2^x}{2}} = \frac{2}{2-2^x}$, то, положив $2^x = y$, имеем неравенство: $\frac{1}{y-1} > \frac{2}{2-y}$, которое (с учетом ОДЗ) равносильно таким:

$$\frac{1}{y-1} - \frac{2}{2-y} > 0, \quad \frac{4-3y}{(y-1)(2-y)} > 0, \quad \frac{3\left(y-\frac{4}{3}\right)}{(y-1)(y-2)} > 0,$$

$$(y-1)\left(y-\frac{4}{3}\right)(y-2) > 0.$$

Решения последнего будут: $y > 2$, $1 < y < \frac{4}{3}$.

Ответ: $x > 1$, $0 < x < \log_2 \frac{4}{3}$.

Пример 161. Решить неравенство $x^{3x+1} > x^x$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Если $x > 1$, то $3x+1 > x$ или $x > -\frac{1}{2}$, общая часть: $x > 1$; если $x < 1$, то $3x+1 < x$ или $x < -\frac{1}{2}$ (это невозможно, вне ОДЗ). Если $x = 1$, то неравенство не удовлетворяется.

Ответ: $x > 1$.

Пример 162. Решить неравенство $\log_{x+7} 25 > 2$.

Решение. ОДЗ: $x+7 > 0$ (т. е. $x > -7$), $x+7 \neq 1$. Если $x+7 > 1$ (при $x > -6$), то $25 > (x+7)^2$ или $|x+7| < 5$.

Ответ: $-6 < x < -2$ (второе предположение $x+7 < 1$ не дает решений).

Пример 163. Решить неравенство $\log_{3x+2} x < 1$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Предположение, что $3x+2 < 1$ $\left(\text{при } x < -\frac{1}{3}\right)$ бессмысленно (вне ОДЗ). Если $3x+2 > 1$ $\left(\text{при } x > -\frac{1}{3}\right)$, то $x < 3x+2$, т. е. $x > -1$.

Ответ (с учетом ОДЗ): $x > 0$.

Пример 164. Решить неравенство $\log_x \sqrt{x+12} > 1$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. Если $0 < x < 1$, то $\sqrt{x+12} < x$ или $x^2 - x - 12 > 0$, откуда $x > 4$, $x < -3$ (в этой области решений нет). Если $x > 1$, то $\sqrt{x+12} > x$ или $x^2 - x - 12 < 0$, т. е. $-3 < x < 4$.

Ответ: $1 < x < 4$.

Пример 165. Решить неравенство $\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1$.

Решение. ОДЗ: $x^2 - 4x + 3 > 0$, т. е. $x > 3$, $x < 1$. Имеем:

$$\log_8 (x^2 - 4x + 3) < \log_8 8,$$

откуда $x^2-4x-5<0$; решение этого неравенства будет: $-1<x<5$. Учитывая ОДЗ, получаем решение $-1<x<1$, $3<x<5$.

Пример 166. Решить неравенство $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x}$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Если $x>1$, то $2-\log_2^2 x-2\log_2 x>-1$ $\left(\text{так как } \frac{1}{x}=x^{-1}\right)$ или $\log_2^2 x+2\log_2 x-3<0$, т. е. квадратное неравенство с решением $-3<\log_2 x<1$; после потенцирования получим: $\frac{1}{8}<x<2$; общая часть: $1<x<2$. Если $0<x<1$, то получим неравенство:

$$\log_2^2 x+2\log_2 x-3>0,$$

откуда $x>2$, $x<\frac{1}{8}$; общая часть: $0<x<\frac{1}{8}$.

Ответ: $0<x<\frac{1}{8}$, $1<x<2$.

Пример 167. Решить неравенство $\frac{1}{5-\log_a x}+\frac{2}{1+\log_a x}<1$ (при $0<a<1$).

Решение. ОДЗ: $x>0$, $x\neq a^5$, $x\neq\frac{1}{a}$. Перенося все члены в левую часть и полагая $\log_a x=y$, получим после преобразований неравенство:

$$\frac{(y-2)(y-3)}{(5-y)(1+y)}<0$$

или равносильное ему

$$(y+1)(y-2)(y-3)(y-5)>0;$$

решения последнего будут: $y>5$, $2<y<3$, $y<-1$. Возвращаясь к неизвестному x, имеем:

$$\log_a x>5,\ 2<\log_a x<3,\ \log_a x<-1.$$

Ответ: $0<x<a^5$, $a^3<x<a^2$, $x>\frac{1}{a}$.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

Формулы общих решений простейших тригонометрических уравнений

В школьном курсе тригонометрии выводятся формулы для наиболее простых случаев решения уравнений.

1. $\cos x=m$, $\quad x=2\pi k\pm\arccos m$;
2. $\sin x=m$, $\quad x=\pi k+(-1)^k\arcsin m$;
3. $\operatorname{tg} x=m$, $\quad x=\pi k+\operatorname{arctg} m$;
4. $\operatorname{ctg} x=m$, $\quad x=\pi k+\operatorname{arcctg} m$

(формулы 1, 2 при $|m|\leqslant 1$; для формул 3, 4 m — любое число).

Полезно напомнить, что $|\arcsin m| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arctg} m| < \frac{\pi}{2}$, а $0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi$ и $0 < \operatorname{arcctg} m < \pi$. Параметр k пробегает целочисленные значения ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Следует знать частные случаи этих формул при $m=0$ и $m=1$.

5. $\cos x = 0$, $x = 2\pi k \pm \arccos 0 = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4k \pm 1)$.

Так как $(4k \pm 1)$ — любое нечетное число, то решение этого уравнения может быть записано в более простом виде, а именно: $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

6. $\sin x = 0$, $x = \pi k + (-1)^k \arcsin 0$, $x = \pi k$;

7. $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k + \operatorname{arctg} 0$, $x = \pi k$;

8. $\operatorname{ctg} x = 0$, $x = \pi k + \operatorname{arcctg} 0 = \pi k + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$;

9. $\cos x = 1$, $x = 2\pi k \pm \arccos 1$, $x = 2\pi k$;

10. $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$

$\Big($так как $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то исходное уравнение равносильно следующему: $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Применяя предыдущую формулу для аргумента $x - \frac{\pi}{2}$, получим: $x - \frac{\pi}{2} = 2\pi k$ или $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4k+1)\Big)$.

11. $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \pi k + \operatorname{arctg} 1 = \pi k + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(4k+1)$;

12. $\operatorname{ctg} x = 1$, $x = \pi k + \operatorname{arcctg} 1 = \pi k + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Рассмотрим уравнения, содержащие тригонометрические функции в квадрате. Для них можно получить простые, легко запоминающиеся формулы. Выведем, например, формулу для одного из таких уравнений.

13. $\sin^2 x = m$ (при $0 \leqslant m \leqslant 1$).

Из уравнения 13 $\sin x = \pm\sqrt{m}$; решения обоих уравнений

$$x = \pi k + (-1)^k \arcsin \sqrt{m},$$

$$x = \pi k + (-1)^k \arcsin(-\sqrt{m}) = \pi k - (-1)^k \arcsin \sqrt{m}$$

отличаются только знаком, так что множитель $(-1)^k$, регулирующий знак стоящего за ним числа, оказывается ненужным, а общее решение исходного уравнения выражается одной формулой

$$x = \pi k \pm \arcsin \sqrt{m}.$$

Приведем без вывода аналогичные формулы для других функций.

14. $\cos^2 x = m \quad (0 \leqslant m \leqslant 1), \quad x = \pi k \pm \arccos \sqrt{m};$

15. $\operatorname{tg}^2 x = m, \quad x = \pi k \pm \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m};$

16. $\operatorname{ctg}^2 x = m, \quad x = \pi k \pm \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{m}.$

Весьма часто встречаются уравнения, представляющие собой равенство одноименных функций. Найдем формулы общих решений таких уравнений.

17. $\sin f = \sin \varphi$.

Перенося все члены в левую часть, получим: $\sin f - \sin \varphi = 0$. Применим формулу преобразования разности синусов в произведение

$$2 \cos \frac{f+\varphi}{2} \sin \frac{f-\varphi}{2} = 0,$$

откуда $\cos \frac{f+\varphi}{2} = 0$ и $\sin \frac{f-\varphi}{2} = 0$. Решения этих уравнений таковы:

$$\frac{f+\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ и } \frac{f-\varphi}{2} = \pi k.$$

Окончательно имеем:

$$f + \varphi = \pi(2k+1) \text{ и } f - \varphi = 2\pi k.$$

18. $\cos f = \cos \varphi$.

Действуя аналогично предыдущему, получим:

$$\cos f - \cos \varphi = 0, \quad -2 \sin \frac{f+\varphi}{2} \sin \frac{f-\varphi}{2} = 0,$$

откуда: $f + \varphi = 2\pi k$, $f - \varphi = 2\pi k$.

19. $\operatorname{tg} f = \operatorname{tg} \varphi$.

Имеем:

$$\operatorname{tg} f - \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \frac{\sin(f-\varphi)}{\cos f \cos \varphi} = 0, \quad \sin(f-\varphi) = 0, \quad f - \varphi = \pi k.$$

20. $\operatorname{ctg} f = \operatorname{ctg} \varphi$.

Действуя подобным образом, получим:

$$\operatorname{ctg} f - \operatorname{ctg} \varphi = 0, \quad -\frac{\sin(f-\varphi)}{\sin f \sin \varphi} = 0, \quad \sin(f-\varphi) = 0, \quad f - \varphi = \pi k.$$

К этим случаям легко сводятся подобные уравнения, имеющие в обеих частях разные знаки. Для синуса, тангенса и котангенса достаточно воспользоваться свойством нечетности: уравнение $\sin f = -\sin \varphi$ равносильно уравнению $\sin f = \sin(-\varphi)$; уравнение $\operatorname{tg} f = -\operatorname{tg} \varphi$ — уравнению $\operatorname{tg} f = \operatorname{tg}(-\varphi)$; уравнение $\operatorname{ctg} f = -\operatorname{ctg} \varphi$ — уравнению $\operatorname{ctg} f = \operatorname{ctg}(-\varphi)$.

Для косинуса следует использовать свойство полупериодичности, заменив уравнение $\cos f = -\cos\varphi$ уравнением $\cos f = \cos(\varphi \pm \pi)$.

Замечания о проверке решений тригонометрических уравнений

Из рассмотренных формул общих решений видно, что тригонометрическое уравнение либо вообще не имеет решений (например, $\sin x = m$ при $|m| > 1$, что объясняется ограниченностью значений синуса), либо имеет их бесчисленное множество (ввиду периодичности тригонометрических функций).

Множество всех решений тригонометрического уравнения составляет *общее решение*. Последнее может выражаться либо одной, либо несколькими формулами, содержащими целочисленный параметр k. В последнем случае каждое множество решений, определяемое одной формулой, называется *серией*, так что общее решение может состоять из нескольких серий. Одна из серий может входить как часть в другую, тогда она называется *дублирующей*.

Процесс решения тригонометрического уравнения состоит в том, что путем тождественных преобразований его сводят к одному из простейших, решение которого известно. При этом преобразования, как правило, не изменяют ОДЗ, тогда каждое последующее уравнение равносильно предыдущему и проверка решений не нужна. При отсутствии уверенности в равносильности полученного уравнения, а также при применении преобразований, расширяющих ОДЗ (например, при возведении в квадрат), проверка является обязательной.

Введем понятие периода уравнения. *Периодом уравнения* будем называть ОНК периодов всех функций, входящих в состав этого уравнения. Если получено решение какого-либо уравнения, требующее проверки, следует установить период этого уравнения. Проверке подлежат все решения, которые по величине будут меньше величины периода.

Пример 168. Дано уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$. Проверить, будут ли две серии: $x = 2\pi k$ и $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$ его решениями.

Решение. Период уравнения $T = 2\pi$. В первой серии проверке подлежит частное решение $x = 0$ (полученное из общего при $k = 0$), во второй — $x = \frac{\pi}{2}$ (при $k = 0$). (Бо́льшие значения k дают величину x, превышающую 2π).* Подставляя $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ в уравнение, убеждаемся, что обе серии являются решением данного уравнения.

Если при решении уравнения была установлена ОДЗ и учитывалось ее изменение в процессе решения, то при получении решения (особенно в виде нескольких серий) возникает необходимость выбрать из этих серий те решения, которые входят в ОДЗ; желательно также отбросить дублирующие серии. Эту операцию удобно проделать на круге, нанося на последний точки, изображающие частные решения из полученных серий (меньшие по величине, чем период уравнения); при этом наглядно обнаруживаются негодные решения и дублирующие серии.

Пример 169. Решить уравнение $\sin 2x \cos x \operatorname{tg} x = 0$.

Решение. Заметим, что период уравнения $T = 2\pi$. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; при $k = 0$ $x \neq \frac{\pi}{2}$; при $k = 1$ $x \neq \frac{3\pi}{2}$ (эти значения на рис. 104 отмечены крестиками). При этом условии заданное уравнение равносильно системе трех уравнений: $\sin 2x = 0$, $\cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$, которые имеют соот-

---

* Нетрудно видеть, что обе серии представляют собой арифметические прогрессии с разностью, равной 2π.

ветственно решения: $x = \frac{\pi k}{2}$,* $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ (вне ОДЗ), $x = \pi k$. С учетом ОДЗ первая и третья серии совпадают.

Ответ: $x = \pi k$.

Пример 170. Решить уравнение $(1 + \cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$.

Решение. Период уравнения $T = 2\pi$. ОДЗ: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, т. е. $x \neq \pi(2k+1)$ (рис. 105). Тогда

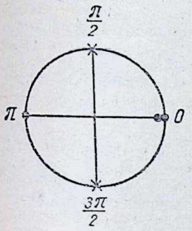


Рис. 104.

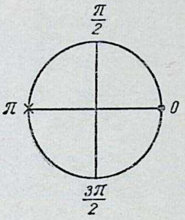


Рис. 105.

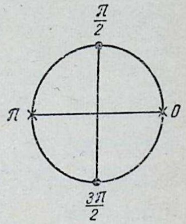


Рис. 106.

а) $1 + \cos x = 0$, $\cos x = -1$, $x = 2\pi k \pm \pi = \pi(2k \pm 1)$ (вне ОДЗ).

б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = \pi k$, $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = 2\pi k$.

Пример 171. Решить уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$.

Решение. ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi k$ (рис. 106). При этом условии исходное уравнение равносильно такому: $\sin 2x = 0$, тогда $2x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{2}$. Учитывая ОДЗ, получим ответ: $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. Тот же результат мы получили бы, если предварительно сократили дробь в левой части.

Пример 172. Решить уравнение $\frac{1 - \cos x}{\sin\frac{x}{2}} = 0$.

Решение. ОДЗ: $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, $\frac{x}{2} \neq \pi k$, $x \neq 2\pi k$. Тогда $1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$ (но это решение — вне ОДЗ). Этот пример поучителен в том смысле, что нельзя бездумно сокращать дробные выражения, в этом случае ОДЗ может расшириться, а значит могут появиться посторонние решения.

---

* При $k = 0$ $x_1 = 0$, при $k = 1$ $x_2 = \frac{\pi}{2}$, при $k = 2$ $x_3 = \pi$, при $k = 3$ $x_4 = \frac{3\pi}{2}$. Значения $x_1 = 0$ и $x_3 = \pi$ нанесены на рис. 104 точками (x_2 и x_4 — вне ОДЗ).

Методы решения тригонометрических уравнений

В связи со специфическим характером тригонометрических уравнений невозможно предложить универсальных методов их решения. Приходится прибегать к частным приемам.

Однородные уравнения. Однородными относительно синуса и косинуса называются те уравнения, которые имеют синус и косинус в одинаковой степени и не содержат свободного члена.

Однородное уравнение первой степени имеет вид: $a\sin x + b\cos x = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Разделив обе части на $\cos x$, получим: $a\,\mathrm{tg}\,x + b = 0$. Опасность потери корня $\cos x = 0$ отсутствует, так как если $\cos x = 0$, то при этом значении аргумента $\sin x = \pm 1$ и левая часть не равна нулю. Далее $\mathrm{tg}\,x = -\frac{b}{a}$ и решение имеет вид: $x = \pi k - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}$.

Пример 173. Решить уравнение $\cos(x-1) = 2\sin x - 3\cos x$.

Решение. Применив формулу косинуса разности двух углов, получим:

$$\cos x\cos 1 + \sin x\sin 1 = 2\sin x - 3\cos x,$$
$$\cos x(\cos 1 + 3) = \sin x(2 - \sin 1).$$

Разделив обе части на $\cos x \neq 0$, найдем: $\mathrm{tg}\,x = \frac{3+\cos 1}{2-\sin 1}$.

Ответ: $x = \pi k + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{3+\cos 1}{2-\sin 1}$.

Пример 174. Решить уравнение $\sin x + 2\sin(\alpha + x) = \sin(\alpha + \beta + x)$.

Решение. Применив формулу синуса суммы, получим:

$$\sin x + 2\sin\alpha\cos x + 2\cos\alpha\sin x =$$
$$= \sin(\alpha+\beta)\cos x + \cos(\alpha+\beta)\sin x.$$

Приведем подобные члены:

$$[1 + 2\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)]\sin x = [\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha]\cos x.$$

Разделив на $\cos x \neq 0$, получим:

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)}.$$

Ответ: $x = \pi k + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)}$.

Однородное уравнение второй степени

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

решается тем же приемом. Разделив обе части на $\cos^2 x \neq 0$, получим квадратное уравнение: $a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = 0$. Если корни последнего x_1 и x_2, то остается решить два уравнения: $\operatorname{tg} x = x_1$ и $\operatorname{tg} x = x_2$, откуда: $x = \pi k + \operatorname{arc\,tg} x_1$ и $x = \pi k + \operatorname{arc\,tg} x_2$.

Заметим, что делить на $\cos^2 x$ возможно лишь в том случае, если левая часть не имеет общего множителя.

Пример 175. Решить уравнение $a\cos^2 x + b\sin x\cos x = 0$.

Решение. Сначала следует вынести общий множитель $\cos x$ за скобку: $\cos x\,(a\cos x + b\sin x) = 0$, откуда $\cos x = 0$ и решение $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. Здесь нельзя применить деления на $\cos^2 x$, так как тогда $a + b\operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -\frac{a}{b}$, $x = \pi k - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ (потерян корень $\cos x = 0$).

Уравнение вида

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

сводится к однородному, если представить d в виде $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ и привести подобные члены.

Пример 176. Решить уравнение $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение. Сделаем уравнение однородным

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Приведя подобные члены и разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим: $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x = \pi k + \operatorname{arc\,tg} 3$.

Введение вспомогательного угла. Пусть дано уравнение

$$a\sin x + b\cos x = c \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$$

Разделим обе его части на $b \neq 0$

$$\frac{a}{b}\sin x + \cos x = \frac{c}{b}$$

и, положив $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$ (это возможно при любых a и b), имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi\sin x + \cos x = \frac{c}{b}, \quad \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin x + \cos x = \frac{c}{b},$$

$$\frac{\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x}{\cos\varphi} = \frac{c}{b}, \quad \cos(x - \varphi) = \frac{c}{b}\cos\varphi,$$

тогда

$$x - \varphi = 2\pi k \pm \arccos\left(\frac{c}{b}\cos\varphi\right),$$

$$x = 2\pi k \pm \arccos\left(\frac{c}{b}\cos\varphi\right) + \varphi,$$

где $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ — известное число.

Если $a = b$, то, вынося общий множитель за скобку, получим в скобке выражение: $\sin x + \cos x$, которое встречается в тригонометрических уравнениях довольно часто. Преобразуем его введением вспомогательного угла. Так как коэффициент при $\sin x$ равен единице, а $1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, то

$$\sin x+\cos x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\sin x+\cos x=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\sin x+\cos x=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (что полезно запомнить). Ввиду того, что $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$ $=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ (последнее на основании равенства дополнительных функций дополнительных углов), выражение $\sin x+\cos x$ можно представить и в другом виде:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 177. Решить уравнение $\sin x+\cos x=1$.

Решение. На основании сказанного выше уравнение имеет вид:

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \text{ или } \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}.$$

Так как косинусы равны, то а) $x=2\pi k$; б) $x-\frac{\pi}{2}=2\pi k$, $x=2\pi k+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

Ответ: $x=2\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

Пример 178. Решить уравнение $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$.

Решение. Левую часть выгодно представить в виде $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, чтобы иметь уравнение с одноименными функциями. Тогда

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 5x.$$

Отсюда получим две серии:

а) $6x+\frac{\pi}{4}=\pi(2k+1)$, $6x=2\pi k+\pi-\frac{\pi}{4}=2\pi k+\frac{3\pi}{4}=$ $=\frac{\pi}{4}(8k+3)$, $x=\frac{\pi}{24}(8k+3)$;

б) $4x-\frac{\pi}{4}=2\pi k$, $4x=2\pi k+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, $x=\frac{\pi}{16}(8k+1)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{24}(8k+3)$, $x=\frac{\pi}{16}(8k+1)$.

Введение вспомогательного угла применяется не только для указанного типа уравнений.

Пример 179. Решить уравнение $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\cos 7x = 0$.

Решение. Так как $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ и $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ (введен вспомогательный угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$, причем $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$), то имеем

$$\sin 11x + \left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 7x + \sin\frac{\pi}{6}\cos 7x\right) = 0$$

или

$$\sin 11x + \sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Переводим в произведение

$$2\sin\left(9x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

Уравнение распадается на два:

а) $\sin\left(9x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$, $9x + \frac{\pi}{12} = \pi k$, $9x = \pi k - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}(12k - 1)$, $x = \frac{\pi}{108}(12k - 1)$;

б) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$, $2x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $2x = \pi k + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \pi k + \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12}(12k + 7)$, $x_1 = \frac{\pi}{24}(12k + 7)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{108}(12k - 1)$, $x = \frac{\pi}{24}(12k + 7)$.

Пример 180. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

Решение. Так как $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right)$, то, преобразуя левую часть, как и в примере **177**, придем к уравнению:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}.$$

По условию равенства косинусов имеем

а) $x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k$, $x = 2\pi k + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}(12k + 1)$;

б) $x - \frac{\pi}{2} = 2\pi k$, $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(12k + 1)$, $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

Пример 181. Решить уравнение $5\sin 2x - 12\cos 2x + 13\sin 6x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 13

$$\frac{5}{13}\sin 2x - \frac{12}{13}\cos 2x + \sin 6x = 0.$$

Пусть $\frac{5}{13}=\cos\varphi$, тогда

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

и уравнение имеет вид:

$$\cos\varphi\sin 2x-\sin\varphi\cos 2x+\sin 6x=0$$

или

$$\sin(2x-\varphi)+\sin 6x=0,$$

или

$$\sin 6x=\sin(\varphi-2x).$$

Исходя из условия равенства синусов, имеем:

а) $4x+\varphi=\pi(2k+1)$, $4x=\pi(2k+1)-\varphi$, $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)-\frac{\varphi}{4}$;

б) $8x-\varphi=2\pi k$, $8x=2\pi k+\varphi$, $x=\frac{\pi k}{4}+\frac{\varphi}{8}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)-\frac{\varphi}{4}$, $x=\frac{\pi k}{4}+\frac{\varphi}{8}$, где $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$ $\left(\text{или } \varphi=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right)$.

Введение рациональной подстановки. Как известно, синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла по формулам

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

поэтому уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно заменить таким:

$$a\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+b\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=c,$$

которое после преобразований сводится к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Заметим, что при этом преобразовании иногда возможна потеря корней.

К этому же результату можно прийти другим путем: выражая левую часть уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ через функции половинного угла, а правую в виде $c=c\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$, получим однородное уравнение второй степени относительно синуса и косинуса половинного угла:

$$a\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right).$$

Приведя подобные члены и разделив обе части уравнения на $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, получим, как и ранее, квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Алгебраизация тригонометрического уравнения. Уравнение вида

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c$$

легко приводится к алгебраическому, если ввести подстановку $\sin x + \cos x = t$. Возводя в квадрат последнее равенство, получим: $1 + 2 \sin x \cos x = t^2$, откуда $\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Тогда исходное уравнение переходит в квадратное $at + b\frac{t^2-1}{2} = c$. Если корни этого уравнения t_1 и t_2 действительны, остается решить два уравнения

$$\sin x + \cos x = t_1 \text{ и } \sin x + \cos x = t_2.$$

Этот способ не дает посторонних корней.

Пример 182. Решить уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

Решение. Положим $\sin x + \cos x = t$, тогда $\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$ и уравнение примет вид $t^2 + 2t - 3 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -3$. Решение уравнения $\sin x + \cos x = 1$ уже получено в примере **177**. Выясним теперь следующий вопрос: поскольку синус и косинус ограничены единицей, то каким числом ограничена по модулю сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента? Известно, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Значит эта величина достигает максимума, равного $\sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$, и минимума, равного $-\sqrt{2}$ при $x = \frac{5\pi}{4}$. Таким образом, оказывается, что

$$-\sqrt{2} \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}, \text{ т. е. } |\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}.$$

Поэтому, например, не решая нашего уравнения $\sin x + \cos x = -3$, можно сказать, что оно не имеет корней.

Ответ: $2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$.

Пример 183. Решить уравнение $\sec x + \operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x \neq \pi k$. Объединяя эти серии, получим: $x \neq \frac{\pi k}{2}$ (проверьте на круге). Преобразовывая уравнение, имеем:

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}, \quad 2(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x.$$

Положим $\sin x + \cos x = t$, тогда $2t = \frac{t^2 - 1}{2}$, $t^2 - 4t - 1 = 0$, откуда $t = 2 - \sqrt{5}$ (второй корень негоден, так как $2 + \sqrt{5} > \sqrt{2}$) и, значит, $\sin x + \cos x = 2 - \sqrt{5}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{5}$.

Ответ: $x = 2\pi k \pm \arccos\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$.

Пример 184. Решить уравнение $5\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

Решение. Обозначим $\sin x - \cos x = t$; возводя в квадрат, получим: $1 - 2\sin x\cos x = t^2$, откуда $2\sin x\cos x = \sin 2x = 1 - t^2$. Уравнение примет следующий вид: $5(1 - t^2) - 12t + 12 = 0$ или $5t^2 + 12t - 17 = 0$, откуда $t = 1$ (второй корень негоден). Остается решить уравнение $\sin x - \cos x = 1$. Так как $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, а $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, то, вынося общий множитель, получим: $2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$, которое распадается на два уравнения (второе из них — однородное).

Ответ: $x = \pi(2k - 1)$, $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

Преобразования, связанные с переводом сумм и разностей функций в произведение. При наличии в уравнении суммы или разности одноименных функций иногда удобно воспользоваться соответствующими формулами тригонометрии:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Пример 185. Решить уравнение $\sin x + \sin 1 = \sin(x + 1)$.

Решение. $2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x-1}{2} = 2\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x+1}{2}$. Выносим общий множитель $2\sin\frac{x+1}{2}\left(\cos\frac{x-1}{2} - \cos\frac{x+1}{2}\right) = 0$, откуда $\sin\frac{x+1}{2} = 0$ (с решением $x = 2\pi k - 1$) и $\cos\frac{x-1}{2} - \cos\frac{x+1}{2} = 0$. Преобразовывая левую часть последнего в произведение, имеем: $2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{1}{2} = 0$, откуда $\sin\frac{x}{2} = 0$, $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = 2\pi k - 1$, $x = 2\pi k$.

Пример 186. Решить уравнение $\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2},\quad 2\sin\frac{3x}{2}\cos x=\cos x,$$

$$\cos x\left(2\sin\frac{3x}{2}-1\right)=0;$$

следовательно, $\cos x=0$ и $\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x=\frac{2\pi k}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{9}$.

Пример 187. Решить уравнение $\cos 3x+\cos 5x+$ $+\sqrt{2}(\cos x+\sin x)\cos x=0$.

Решение. $2\cos 4x\cos x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x=0$, $\cos x\left[\cos 4x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=0$. Значит $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $2\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0$. Последнее уравнение распадается на два:

а) $\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0$, $\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}(2k+1)=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $\frac{5x}{2}=\pi k+$ $+\frac{5\pi}{8}=\frac{\pi}{8}(8k+5)$, $x=\frac{\pi}{20}(8k+5)$;

б) $\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0$ (решается, как и предыдущее).

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x=\frac{\pi}{20}(8k+5)$, $x=\frac{\pi}{12}(8k+3)$.

Пример 188. Решить уравнение $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+$ $+\cos 4x+\cos 5x=0$.

Решение. Группируя первый член с пятым, а второй — с четвертым и переводя обе пары в произведение, получим:

$$2\cos 3x\cos 2x+2\cos 3x\cos x+\cos 3x=0,$$
$$\cos 3x(2\cos 2x+2\cos x+1)=0,$$

откуда

а) $\cos 3x=0$, $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$;

б) $2(2\cos^2 x-1)+2\cos x+1=0$, $4\cos^2 x+2\cos x-1=0$, $\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x=2\pi k\pm\arccos\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)$.

Пример 189. Решить уравнение $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$. Запишем уравнение в виде

$$5\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x,$$

$$5\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x}, \quad \frac{5\cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x},$$

$$5\cos^2 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x), \quad 12\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0,$$

откуда $\cos 2x = \frac{1}{3}$, $\cos 2x = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $x = \pi k \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}$, $x = \pi k \pm \frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right)$.

Заметим, что иногда бывают такие случаи, когда учащийся, решив тригонометрическое уравнение и обнаружив несовпадение своего решения с ответом задачника, находится в недоумении: кто прав, он или автор задачника. Между тем, в зависимости от метода, решение одного и того же уравнения может быть записано в разной форме. Для выяснения вопроса, совпадают ли эти решения, полезно произвести проверку с помощью круга, о чем уже говорилось ранее. Проиллюстрируем это на примере, который решим двумя способами.

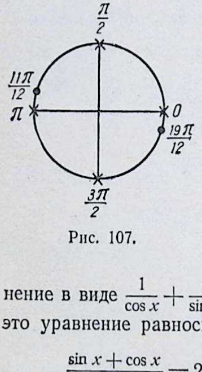


Рис. 107.

Пример 190. Решить уравнение $\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}$.

Решение. Период уравнения $T = 2\pi$. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi k}{2}$ (рис. 107). Перепишем уравнение в виде $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}$. Учитывая ОДЗ, мы видим, что это уравнение равносильно следующим

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{2}, \quad \sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x.$$

Первый способ (алгебраизация). Положим $\sin x + \cos x = t$, тогда уравнение примет вид $t = 2\sqrt{2}\frac{t^2-1}{2}$ или $\sqrt{2}\,t^2 - t - \sqrt{2} = 0$, откуда $t_1 = \sqrt{2}$ и $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Имеем два уравнения:

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$,

$$x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k,$$

откуда $x=2\pi k+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(8k+1)$;

2) $\sin x+\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3},$$

отсюда

а) $x-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=2\pi k,\ x=2\pi k-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}(24k-5)$;

б) $x-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=2\pi k,\ x=2\pi k+\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{12}(24k+11)$.

Таким образом, решение состоит из трех серий:

$$x=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ x=\frac{\pi}{12}(24k-5),\ x=\frac{\pi}{12}(24k+11).$$

Второй способ. Запишем уравнение $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x\times$ $\times\cos x$ в виде $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$ или, сокращая на $\sqrt{2}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$. Так как синусы равны, то должно быть:

1) $3x+\frac{\pi}{4}=\pi(2k+1)=2\pi k+\pi,\ 3x=2\pi k+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(8k+3)$,

$$x=\frac{\pi}{12}(8k+3);$$

2) $x-\frac{\pi}{4}=2\pi k,\ x=2\pi k+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(8k+1)$.

Решение этим способом включает две серии:

$$x=\frac{\pi}{12}(8k+3),\quad x=\frac{\pi}{4}(8k+1).$$

Сравнивая решения, полученные обоими способами, видим, что они формально не совпадают. Однако, чтобы убедиться в совпадении решений, достаточно нанести их на круг. При этом обнаруживается, что во втором способе серия $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$ дублирует серию $x=\frac{\pi}{12}(8k+3)$. Последняя же серия включает в себя все серии, полученные при решении уравнения первым способом. Наиболее кратким ответом, следовательно, будет: $x=$ $=\frac{\pi}{12}(8k+3)$, хотя, как мы видели, решение может быть записано и другим способом.

Преобразования, связанные с переводом произведения функций в сумму или разность. Весьма часто приходится применять следующие формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример 191. Решить уравнение $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$.

Решение. $\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)=\frac{1}{2}$, $\cos 2x-\cos 4x=1$, $\cos 2x=1+\cos 4x$, $\cos 2x=2\cos^2 2x$, $\cos 2x(1-2\cos 2x)=0$, откуда $\cos 2x=0$ и $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$.

Пример 192. Решить уравнение $1+\cos 10x\cos 6x=2\cos^2 8x+\sin^2 8x$.

Решение. $\sin^2 8x+\cos^2 8x+\cos 10x\cos 6x=2\cos^2 8x+\sin^2 8x$, $\cos 10x\cos 6x=\cos^2 8x$, $\frac{1}{2}(\cos 16x+\cos 4x)=\frac{1}{2}(1+\cos 16x)$, откуда $\cos 4x=1$.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{2}$.

Пример 193. Решить уравнение $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$.

Решение. Период уравнения $T=\pi$. ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x\neq\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x\neq\frac{\pi}{6}(2k+1)$. Преобразовав сумму тангенсов в произведение, получим: $\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$. Это уравнение равносильно (в ОДЗ) такому:

$$\sin 3x(\cos 3x-\cos x\cos 2x)=0,$$

которое распадается на два уравнения:

1) $\sin 3x=0$, $x=\frac{\pi k}{3}$;

2) $\cos 3x-\cos x\cos 2x=0$, $\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x=0$, $\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x=0$, $\cos 3x=\cos x$, откуда: а) $4x=2\pi k$, $x=\frac{\pi k}{2}$; если k — нечетное ($k=2n+1$), то решения — вне ОДЗ, если k — четное ($k=2n$), имеем: $x=\frac{\pi 2n}{2}=\pi n$; б) $2x=2\pi k$, $x=\pi k$.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{3}$ (остальные серии — дублирующие).

Пример 194. Решить уравнение $\frac{\sin(45^\circ + x)}{\operatorname{ctg} 2x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos(45^\circ + x)}$.

Решение. ОДЗ: $\operatorname{ctg} 2x$ имеет смысл, если $\sin 2x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} 2x$ находится в знаменателе, откуда следует, что $\cos 2x \neq 0$. Кроме того, $\cos(45^\circ + x) \neq 0$. Следовательно, $x \neq 45^\circ k$. При этом ограничении исходное уравнение равносильно такому:

$$\sin(45^\circ + x)\cos(45^\circ + x) = \sin x \cos x \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

или, если левую часть перевести в сумму,

$$\frac{1}{2}\sin(90^\circ + 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Заменяя в левой части синус на косинус дополнительного угла, получим тождество: $\cos 2x = \cos 2x$, верное в ОДЗ.

Ответ: $x \neq 45^\circ k$.

Пример 195. Решить уравнение $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{8}$.

Решение. Преобразуем уравнение так:

$$\sin x(1 - \cos^2 x)\cos 3x + \cos x(1 - \sin^2 x)\sin 3x = \frac{3}{8}.$$

Раскрывая скобки, имеем:

$$\sin x \cos 3x - \sin x \cos^2 x \cos 3x + \cos x \sin 3x - \cos x \sin^2 x \sin 3x = \frac{3}{8}.$$

После группировки и вынесения общего множителя получим:

$$\sin(x + 3x) - \sin x \cos x(\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x) = \frac{3}{8},$$

$$\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \frac{3}{8}, \quad \sin 4x - \frac{1}{4}\sin 4x = \frac{3}{8},$$

откуда $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{24}$.

Понижение степени синуса и косинуса. Этот метод применяется при наличии в уравнении суммы четных степеней синуса и косинуса, которая не может быть разложена на множители. При этом используются формулы:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 196. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Решение. $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2}$.

Группируем так:

$$(1 + \cos 6x) - (\cos 2x + \cos 4x) = 0, \quad 2\cos^2 3x - 2\cos 3x \cos x = 0,$$
$$2\cos 3x(\cos 3x - \cos x) = 0.$$

Решая уравнения $\cos 3x = 0$ и $\cos 3x = \cos x$, получим: $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x = \pi k$ $\left(\text{серия } x = \frac{\pi k}{2} - \text{дублирующая}\right)$.

Пример 197. Решить уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x$.

Решение. Понизив степень синуса по указанной формуле, получим:

$$\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{1-\cos 8x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2}.$$

После упрощений имеем:

$$\cos 4x + \cos 6x = \cos 8x + \cos 10x$$

или

$$2\cos x \cos 5x = 2\cos 9x \cos x,\ \ 2\cos x(\cos 5x - \cos 9x) = 0,$$

откуда $\cos x = 0$ и $\cos 5x = \cos 9x$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi k}{2}$ $\left(\text{серия } x = \frac{\pi}{2}(2k+1) - \text{дублирующая}\right)$.

Пример 198. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Решение. Представим уравнение в виде

$$(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \frac{5}{8}$$

и, применив указанные формулы, получим:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

После упрощений будем иметь:

$$\cos^2 2x = \frac{1}{4},\ \ 2x = \pi k \pm \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),$$

откуда $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$.

Однако выражения, содержащие сумму одинаковых степеней синуса и косинуса с одинаковыми коэффициентами, удобнее преобразовывать выделением полного квадрата. Так как

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

то последнее уравнение примет вид

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8},\ \ \sin^2 2x = \frac{3}{4},\ \ 2x = \pi k \pm \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),$$

откуда $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$.

Пример 199. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$.

Решение. Преобразовав левую часть, как и в предыдущем примере, получим: $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}\sin 2x$ или $\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$, откуда $\sin 2x = 1$ (второй корень негоден).

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Пример 200. Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{121}{196}$.

Решение. Представив левую часть как сумму кубов, имеем:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \\ - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.^*$$

Тогда уравнение примет вид $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{121}{196}$, откуда $\sin^2 2x = \frac{25}{49}$, $2x = \pi k \pm \arcsin\frac{5}{7}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{7}$.

Уравнения, содержащие тригонометрическую функцию от тригонометрической функции или аркфункции. Если в подобное уравнение входят ограниченные тригонометрические функции (синус и косинус) или аркфункции, то приходится налагать ограничения на правую часть решения. Разберем это на примерах.

Пример 201. Решить уравнение $\cos(\sin \pi x) = 1$.

Решение. $\sin \pi x = 2\pi k$, причем $|2\pi k| \leqslant 1$. Далее, решая новое тригонометрическое уравнение, получим: $\pi x = \pi n + (-1)^n \arcsin 2\pi k$. Так как $|2\pi k| \leqslant 1$, а k — целое число, то для k можно взять только одно значение $k=0$. Значит $\pi x = \pi n$.

Ответ: $x = n$, где n — любое целое число.

Пример 202. Решить уравнение $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos x\right) = 1$.

Решение. $\frac{5}{3}\pi \cos x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $\cos x = \frac{3}{10}(4k+1)$. Общее решение второго уравнения имеет вид:

$$x = 2\pi n \pm \arccos\left[\frac{3}{10}(4k+1)\right].$$

Так как по условию $\left|\frac{3}{10}(4k+1)\right| \leqslant 1$, то k может принять лишь два значения: $k=0$ $\left(\text{тогда } \cos x = \frac{3}{10}\right)$ и $k=-1$ $\left(\text{тогда } \cos x = -\frac{9}{10}\right)$.

Ответ: $x = 2\pi n \pm \arccos\frac{3}{10}$, $x = 2\pi n \pm \arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$ (n — целое).

---

* См. решение примера 198.

Пример 203. Решить уравнение $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\cos x)$.

Решение. Это уравнение — однородное. Разделив обе части на $\cos(\pi\cos x)\neq 0$, найдем:

$$\operatorname{tg}(\pi\cos x)=1,\ \pi\cos x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ \cos x=k+\frac{1}{4}.$$

Так как $\left|k+\frac{1}{4}\right|\leqslant 1$, то возможно лишь $k=-1$ и $k=0$, причем тогда $\cos x=-\frac{3}{4}$ и $\cos x=\frac{1}{4}$.

Ответ: $x=2\pi n\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)=2\pi n\pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)$, $x=$ $=2\pi n\pm\arccos\frac{1}{4}$ (n — целое).

Пример 204. Решить уравнение $\sin(5\operatorname{arc tg} x)=0$.

Решение. $5\operatorname{arc tg} x=\pi k$, $\operatorname{arc tg} x=\frac{\pi k}{5}$, значит $x=\operatorname{tg}\frac{\pi k}{5}$. Так как $|\operatorname{arc tg} x|<\frac{\pi}{2}$, то должно быть: $\left|\frac{\pi k}{5}\right|<\frac{\pi}{2}$ или $|k|<\frac{5}{2}$. Этому неравенству удовлетворяют пять целых значений k, а именно: $k=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Подставляя эти значения k в общее решение $x=\operatorname{tg}\frac{\pi k}{5}$, получим пять частных решений: $x_1=-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$, $x_2=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$, $x_3=\operatorname{tg}0=0$, $x_4=\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$, $x_5=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$.

Некоторые искусственные приемы. Применение их покажем на примерах.

Пример 205. Решить уравнение $\sin x\cos 2x=\frac{1}{4}$.

Решение. Левую часть умножим и разделим на $\cos x\neq 0$. Убедимся, что $\cos x=0$ не является решением этого уравнения. Действительно, если $\cos x=0$, то $|\sin x|=1$, а $\cos 2x=2\cos^2 x-$ $-1=-1$, и уравнение тождественно не удовлетворяется. Следовательно, опасность потери решений отсутствует. Зато возможно появление посторонней серии: $\cos x=0\left[x=\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]$. После совершения указанной операции будем иметь:

$$\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos x}=1,\ \sin 4x=\cos x,\ \cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

Отсюда

а) $5x-\frac{\pi}{2}=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{10}(4k+1)$,

б) $3x-\frac{\pi}{2}=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{6}(4k+1)$.

Просматривая обе серии на круге, обнаруживаем, что в первой серии при $k=1,\ 6,\ 11,\ \ldots$ имеется постороннее решение $x=$ $=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, которое следует отбросить; во второй серии постороннее решение $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$ появляется при $k=2, 5, 8, \ldots$ Заметим, что эти значения k составляют бесконечные арифметические прогрессии с разностями $d_1=5$ и $d_2=3$ и соответственно могут быть записаны в виде формул: $k=5n-4$ и $k=3n-1$ (где n — любое число).

Ответ: $x=\frac{\pi}{10}(4k+1)$, кроме $k=5n-4$ (n — целое число); $x=\frac{\pi}{6}(4k+1)$, кроме $k=3n-1$.

Пример 206. Решить уравнение $8\cos x\cos 2x\cos 4x=1$.

Решение. Умножим и разделим левую часть на $\sin x$. Как и в предыдущем примере, потеря решений здесь невозможна, так как $\sin x=0$ не является решением данного уравнения. Имеем:

$$\frac{8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x}{\sin x}=1.$$

После упрощений получим: $\sin 8x=\sin x$, откуда

а) $9x=\pi(2k+1)$, $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$;

б) $7x=2\pi k$, $x=\frac{2\pi k}{7}$.

Отбрасывая посторонние корни ($\sin x=0$), приходим к ответу: $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$, кроме $k=9n-5$ (n — целое); $x=\frac{2\pi k}{7}$, кроме $k=7n$.

Пример 207. Решить уравнение $1+2\cos 2x+2\cos 4x+$ $+2\cos 6x=0$.

Решение. Умножим и разделим левую часть на $\sin x\neq 0$. Используя формулы перевода произведения в сумму или разность, имеем:

$$\frac{\sin x+\sin 3x-\sin x+\sin 5x-\sin 3x+\sin 7x-\sin 5x}{\sin x}=0$$

или $\frac{\sin 7x}{\sin x}=0$. ОДЗ: $\sin x\neq 0$, $x\neq\pi k$. Тогда $\sin 7x=0$, $x=\frac{\pi k}{7}$. Соблюдая характер ОДЗ, из этого решения следует исключить все значения k, кратные семи, т. е. $k=7n$ (n — целое).

Уравнения, решаемые нестандартными приемами

Пример 208. Решить уравнение $\sin x+\sin 9x=2$.

Решение. Так как синус по модулю не превышает единицы, то сразу очевидно, что $\sin x=1$ и $\sin 9x=1$. Из решений этих уравнений следует выбрать общую часть, чтобы тождественно удовлетворялось исходное уравнение. Первая серия: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, вторая: $x=\frac{\pi}{18}(4k+1)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

Пример 209. Решить уравнение $\sin x \sin 2x \sin 3x=1$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, переводя дважды произведение в сумму или разность,

$$\sin x \sin 2x \sin 3x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 3x \cos x-\sin 3x \cos 3x)=\frac{1}{4}(\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x).$$

Значит уравнение имеет вид

$$\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x=4.$$

Это равенство невозможно ни при каких x. Так как модуль суммы не превышает суммы модулей, а синус не превышает единицы, то

$$|\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x|\leqslant|\sin 4x|+|\sin 2x|+|\sin 6x|\leqslant 3,$$

и, следовательно, левая часть уравнения не может быть равна четырем.

Пример 210. Решить уравнение $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

Решение. ОДЗ: $x\neq\frac{\pi k}{2}$. Имеем:

$$\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x\cos x},\quad 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sin 2x},$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x=1.$$

Произведение синусов может быть равно единице, если только оба множителя одновременно равны либо единице, либо минус единице. Имеем две системы:

1) $$\left.\begin{aligned}&\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\\&\sin 2x=1,\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{4}(8k+1),\\&x=\frac{\pi}{4}(4k+1)\end{aligned}\right\}$$

$\left(\text{общая часть} — x=\frac{\pi}{4}(8k+1)\right)$;

2) $$\left.\begin{aligned}&\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1,\\&\sin 2x=-1,\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{4}(8k-3),\\&x=\frac{\pi}{4}(4k-1)\end{aligned}\right\}$$

(общая часть — пустое множество).

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$.

Пример 211. Решить уравнение $8\sin x\cos x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1$.

Решение. Упрощая, имеем:

$$4\sin 2x\frac{\cos 2x+\frac{1}{2}}{2}=1,\ 2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x=1,$$

$$\sin 4x+\sin 2x=1.$$

Так как стандартным путем последнее уравнение не решается, испробуем две комбинации:

1)
$$\left.\begin{array}{l}\sin 4x=1,\\ \sin 2x=0,\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}(4k+1),\\ x=\frac{\pi k}{2}\end{array}\right\}$$

(общая часть — пустое множество);

2)
$$\left.\begin{array}{l}\sin 4x=0,\\ \sin 2x=1,\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{4},\\ x=\frac{\pi}{4}(4k+1)\end{array}\right\}$$

$\left(\text{общая часть} - x=\frac{\pi}{4}(4k+1)\right)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Пример 212. Решить уравнение $\sin^{10}x+\cos^{10}x=1$.

Решение. Уравнение, очевидно, удовлетворяется при $|\sin x|=1$ и $\cos x=0$, а также при $|\cos x|=1$ и $\sin x=0$, т. е. для пар решений: $\frac{\pi}{2}(4k\pm 1)$ и $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, а также $2\pi k$ и πk. Выбирая общую часть, имеем: $x=\frac{\pi k}{2}$. Если же $|\sin x|\neq 1$ и $|\cos x|\neq 1$, то они — правильные дроби и $\sin^{10}x<\sin^2 x$, а $\cos^{10}x<\cos^2 x$. Поэтому, складывая почленно оба неравенства, получим:

$$\sin^{10}x+\cos^{10}x<\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

что противоречит уравнению. Других решений нет.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{2}$.

Пример 213. Решить уравнение $\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$.

Решение. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю только в том случае, если оба слагаемых равны нулю. Значит имеем систему:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\pi x=0,\\ \sin\pi y=0,\end{array}\right\}\begin{array}{l}\pi x=\pi k,\ x=k,\\ \pi y=\pi n,\ y=n\end{array}$$

(k, n — целые числа).

Ответ: решением является любая пара целых чисел.

Пример 214. Решить уравнение $\sqrt{\sin^2 x - 1} + \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sin 2x$.

Решение. ОДЗ: $\sin^2 x - 1 \geqslant 0$, $1 - \sin^2 x \geqslant 0$, значит в левой части может быть только $\sin^2 x = 1$, т. е. $x = \pi k \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4k \pm 1)$ или $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. При этих значениях x левая часть равна нулю. Но тогда должна быть равна нулю и правая часть, т. е. $\sin 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi k}{2}$.

Ответ (общая часть): $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Пример 215. Решить и исследовать уравнение $a(\sin x + \cos x)^2 = b \cos 2x$.

Решение. $(\sin x + \cos x)[a(\sin x + \cos x) - b(\cos x - \sin x)] = 0$.

1) $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$ (эта серия не зависит от параметров),

2) $(a+b)\sin x + (a-b)\cos x = 0$.

а) если $a = b = 0$, имеем тождество при любых x; б) если $a + b = 0$ $(a = -b)$, то $2a\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; в) если $a - b = 0$ $(a = b \neq 0)$, то $2a \sin x = 0$, $x = \pi k$; г) общий случай $(a + b \neq 0,\ a - b \neq 0)$ $\operatorname{tg} x = -\frac{a-b}{a+b}$, $x = \pi k - \operatorname{arctg}\frac{a-b}{a+b}$.

В заключение рассмотрим пример, где ОДЗ установить затруднительно.

Пример 216. Решить уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\operatorname{ctg} x - 1}$.

Решение. Преобразовывая, получим:

$$\frac{\cos x \sin 2x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)\sin x}{\cos x - \sin x},$$

$$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x, \quad \sin x\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0,$$

откуда а) $\sin x = 0$, $x = \pi k$; б) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(8k \pm 1)$.

Проведя обычные преобразования, мы не потеряли решений; однако при умножении на знаменатели дробей произошло расширение ОДЗ и возможно появление посторонних корней. Значит нужна обязательно проверка решений. Период уравнения $T = 2\pi$. Подставляя обе серии в исходное уравнение и отбрасывая посторонние решения, получим: $x = \frac{\pi}{4}(8k-1)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(8k-1)$.

Тригонометрические неравенства

Ввиду того, что тригонометрические функции — периодические, а некоторые из них или ограничены, или немонотонны, или имеют разрывы, решение тригонометрических неравенств часто вызывает серьезные затруднения.

Пример 217. Доказать неравенство $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\sec^2\alpha+$ $+\operatorname{cosec}^2\alpha\geqslant 6$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi k}{2}\right)$.

Решение. Преобразуем левую часть

$$\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}=\frac{8}{\sin^2 2\alpha}-2.$$

Так как $|\sin 2\alpha|\leqslant 1$, то $\frac{8}{\sin^2 2\alpha}-2\geqslant 6$, что и требовалось доказать.

Пример 218. Доказать, что при любых α верно неравенство $\sin^4\alpha-6\sin^2\alpha+8>0$.

Решение. Так как корни этого биквадратного трехчлена относительно $\sin\alpha$ равны ± 2 и $\pm\sqrt{2}$, то неравенство равносильно следующему:

$$(\sin\alpha-2)(\sin\alpha+2)(\sin\alpha-\sqrt{2})(\sin\alpha+\sqrt{2})>0.$$

Так как всегда $\sin\alpha-2<0$, $\sin\alpha+2>0$, $\sin\alpha-\sqrt{2}<$ <0, $\sin\alpha+\sqrt{2}>0$, то неравенство становится очевидным.

Пример 219. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}>$ $>1+\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}>1+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}>\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$, то имеем:

$$2>2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},\quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{tg}\alpha+1>0,\quad \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1\right)^2>0$$

очевидное неравенство. Все преобразования обратимы.

Пример 220. Решить неравенство $2\cos^2 x-7\cos x+3>0$.

Решение. Разложив левую часть на множители, имеем: $2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(\cos x-3)>0$. Так как всегда $\cos x<3$, то здесь $\cos x<\frac{1}{2}$.

Ответ: $2\pi k+\frac{\pi}{3}<x<2\pi k+\frac{5\pi}{3}$.

Пример 221. Решить неравенство $2\sin^2 x < \sin 2x < 2$.

Решение. Так как $\sin 2x < 2$ при любых x, достаточно решить неравенство $2\sin^2 x < \sin 2x$ или $\sin^2 x < \sin x \cos x$. Разделив обе части на $\cos^2 x > 0$ ($\cos x \neq 0$, иначе было бы $|\sin x| = 1$, что противоречит исходному неравенству), получим: $\mathrm{tg}^2 x < \mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x - 1) < 0$. Значит $0 < \mathrm{tg}\, x < 1$.

Ответ: $\pi k < x < \pi k + \frac{\pi}{4}$.

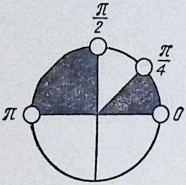


Рис. 108.

Пример 222. Решить неравенство $\cos x + \mathrm{tg}\, x < 1 + \sin x$.

Решение. Преобразуем неравенство так:

$$\mathrm{tg}\, x - \sin x < 1 - \cos x,$$
$$\mathrm{tg}\, x(1 - \cos x) < 1 - \cos x,$$
$$(1 - \cos x)(\mathrm{tg}\, x - 1) < 0.$$

Так как $\cos x < 1$ ($\cos x \neq 1$, иначе было бы, что $x = 2\pi k$ и мы пришли бы к противоречию: $0 < 0$), то очевидно, что $\mathrm{tg}\, x < 1$ (рис. 108).

Ответ: $\pi k < x < \pi k + \frac{\pi}{4}$, $\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \pi$.

Пример 223. Решить неравенство $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$.

Решение. Имеем: $\pi k + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi x}{4(x+1)} < \pi k + \frac{\pi}{2}$. Разделив все части на $\frac{\pi}{4}$, получим:

$$4k + 1 < \frac{x}{x+1} < 4k + 2, \quad \frac{1}{4k+1} > \frac{x+1}{x} > \frac{1}{4k+2}, \quad \frac{1}{4k+1} > 1 + \frac{1}{x} > \frac{1}{4k+2}, \quad \frac{1}{4k+1} - 1 > \frac{1}{x} > \frac{1}{4k+2} - 1, \quad -\frac{4k}{4k+1} > \frac{1}{x} > -\frac{4k+1}{4k+2}.$$

Ответ: $-\frac{4k+1}{4k} < x < -\frac{4k+2}{4k+1}$ (если $k \neq 0$). Если же $k = 0$, то $x < -2$.

§ 6. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ (СМЕШАННЫЕ) УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

Трансцендентные уравнения

Рассмотрим уравнения, в состав которых входит несколько трансцендентных функций.

Пример 224. Решить уравнение $\log_{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = 2$.

Решение. ОДЗ: $\sin x + \cos x > 0$. По определению логарифма имеем: $\sin x + \cos x = (\sqrt{2})^2 = 2$. Решений нет, так как $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$.

Пример 225. Решить уравнение $\log_\pi^2(-x)=\cos^2 x+\sin^2 x$.

Решение. ОДЗ: $-x>0$, т. е. $x<0$. Так как $\log_\pi^2(-x)=1$, то $\log_\pi(-x)=\pm 1$, и, значит, $-x=\pi^{\pm 1}$.

Ответ: $x_1=-\pi$, $x_2=-\frac{1}{\pi}$.

Пример 226. Решить уравнение $3^{\lg \operatorname{tg} x}+3^{\lg \operatorname{ctg} x}=2$.

Решение. ОДЗ: $\operatorname{tg} x>0$, $\operatorname{ctg} x>0$, т. е. $\pi k<x<\pi k+\frac{\pi}{2}$.

Так как $\lg \operatorname{ctg} x=\lg\frac{1}{\operatorname{tg} x}=-\lg \operatorname{tg} x$, то уравнение имеет вид:

$$3^{\lg \operatorname{tg} x}+\frac{1}{3^{\lg \operatorname{tg} x}}=2,\quad 3^{2\lg \operatorname{tg} x}-2\cdot 3^{\lg \operatorname{tg} x}+1=0,$$

$$(3^{\lg \operatorname{tg} x}-1)^2=0,\quad 3^{\lg \operatorname{tg} x}=1,\quad \lg \operatorname{tg} x=0,\quad \operatorname{tg} x=1.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Пример 227. Решить уравнение $\sin x=3^x+3^{-x}$.

Решение. Так как $|\sin x|\leqslant 1$, а сумма обратных чисел $3^x+\frac{1}{3^x}\geqslant 2$, то решений нет.

Пример 228. Решить уравнение $\sin^2 2^{\sqrt{-x}}=\frac{1}{2}$.

Решение. ОДЗ: $x\leqslant 0$. $2^{\sqrt{-x}}=\pi k\pm\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(4k\pm 1)$ или $2^{\sqrt{-x}}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. Следовательно, $\sqrt{-x}=\log_2\left[\frac{\pi}{4}(2k+1)\right]$.

Ответ: $x=-\log_2^2\left[\frac{\pi}{4}(2k+1)\right]$, где $k=0, 1, 2, \ldots$ (отрицательные значения k негодны).

Пример 229. Решить уравнение $\sin^x 1+\cos^x 1=1$.

Решение. Один корень очевиден: $x=2$. Покажем, что других нет. а) Если $x>2$, то $\sin^x 1<\sin^2 1$ и $\cos^x 1<\cos^2 1$, так как синус и косинус — правильные дроби. Значит $\sin^x 1+\cos^x 1<\sin^2 1+\cos^2 1=1$, т. е. левая часть меньше единицы. Отсюда ясно, что любое число, большее двух, не может быть корнем этого уравнения. б) Так же можно показать, что никакое число $x<2$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=2$.

Пример 230. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\frac{10}{3}.$$

Решение. Положим $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=y$, тогда $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\frac{1}{y}$. Получим квадратное уравнение с корнями $y_1=3$, $y_2=\frac{1}{3}$. Имеем: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=3$. Так как

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

то уравнение примет вид $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\sin x}=3$. Логарифмируя, получим:

$$\sin x \lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\lg 3, \quad \sin x=\frac{\lg 3}{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

Значит

$$x=\pi k+(-1)^k \arcsin\frac{\lg 3}{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

Аналогично действуя, получим:

$$x=\pi k-(-1)^k \arcsin\frac{\lg 3}{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

Ответ: $x=\pi k\pm\arcsin\dfrac{\lg 3}{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$.

Пример 231. Решить уравнение $2\lg\cos x=\lg\cos\frac{3x}{2}+\lg\cos\frac{x}{2}$.

Решение. Потенцируя, получим:

$$\cos^2 x=\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos^2 x=\frac{\cos 2x+\cos x}{2},$$

$$2\cos^2 x=2\cos^2 x-1+\cos x, \quad \cos x=1, \quad x=2\pi k.$$

Проверкой находим, что при нечетных k $(k=2n+1)$ эта серия посторонняя.

Ответ: $x=4\pi n$ $(k=2n)$.

Пример 232. Решить уравнение $\log_{\sin x}\frac{4}{3}=-2$.

Решение. ОДЗ: $\sin x>0$, $\sin x\neq 1$. Имеем: $(\sin x)^{-2}=$ $=\frac{4}{3}$, $\sin^2 x=\frac{3}{4}$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (второй корень — вне ОДЗ).

Ответ: $x=\pi k+(-1)^k\frac{\pi}{3}$.

Пример 233. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left[5\pi\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=1$.

Решение. Имеем:

$$5\pi\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{\pi}{4}(4k+1), \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{4k+1}{20}.$$

Ответ: $x=\log_{\frac{1}{2}}\frac{4k+1}{20}$, причем $\frac{4k+1}{20}>0$, откуда $k>-\frac{1}{4}$; следовательно, $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

Пример 234. Решить уравнение $x^{\log_x(1-\cos x)}=2\sin^2\frac{x}{2}$.

Решение. ОДЗ: $x>0$, $1-\cos x>0$, $\cos x<1$, $x\neq 2\pi k$, $x\neq 1$. Так как $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, то данное уравнение является тождеством, верным в ОДЗ.

Ответ: $x>0$, $x\neq 2\pi k$.

Пример 235. Решить уравнение $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x+2=0$.

Решение. ОДЗ: $\cos x>0$, $\cos x\neq 1$, $\sin x>0$, $\sin x\neq 1$. Перейдем к основанию $\cos x$

$$\log_{\cos x}\sin x+\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}+2=0,$$

получим квадратное уравнение:

$$\log^2_{\cos x}\sin x+2\log_{\cos x}\sin x+1=0,$$

$$(\log_{\cos x}\sin x+1)^2=0,\quad \log_{\cos x}\sin x=-1,$$

откуда

$$(\cos x)^{-1}=\sin x,\quad \frac{1}{\cos x}=\sin x,\ \sin x\cos x=1,$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x=1,\quad \sin 2x=2.$$

Ответ: решений нет.

Пример 236. Решить уравнение $\sin(\pi\lg x)+\cos(\pi\lg x)=1$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Преобразовав левую часть, получим:

$$\sqrt{2}\cos\left(\pi\lg x-\frac{\pi}{4}\right)=1,\ \cos\left(\pi\lg x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}.$$

Из равенства косинусов следует:

а) $\pi\lg x=2\pi k$, $\lg x=2k$, $x=10^{2k}$,

б) $\pi\lg x-\frac{\pi}{2}=2\pi k$, $\quad \pi\lg x=2\pi k+\frac{\pi}{2}$, $\quad \lg x=2k+\frac{1}{2}$, $x=10^{2k+\frac{1}{2}}$.

Ответ: $x_1=10^{2k}$, $x_2=10^{2k+\frac{1}{2}}$.

Пример 237. Решить уравнение $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}=(\operatorname{ctg}x)^{\cos x}$.

Решение. ОДЗ: $x\neq\frac{\pi k}{2}$, $\operatorname{tg}x>0$, $\operatorname{ctg}x>0$. Логарифмируя обе части, получим:

$$\sin x\lg\operatorname{tg}x+\cos x\lg\operatorname{tg}x=0,$$

так как $\lg\operatorname{ctg}x=-\lg\operatorname{tg}x$ или $(\sin x+\cos x)\lg\operatorname{tg}x=0$; отсюда

а) $\sin x+\cos x=0$, $\operatorname{tg}x=-1$ (вне ОДЗ);

б) $\lg\operatorname{tg}x=0$, $\operatorname{tg}x=1$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Пример 238. Решить уравнение $\sin 2a^x+\sin 3a^x=\sin 5a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Решение. $2\sin\frac{5a^x}{2}\cos\frac{a^x}{2}-2\sin\frac{5a^x}{2}\cos\frac{5a^x}{2}=0,$

$$2\sin\frac{5a^x}{2}\left(\cos\frac{a^x}{2}-\cos\frac{5a^x}{2}\right)=0.$$

а) $\sin\frac{5a^x}{2}=0$, $a^x=\frac{2\pi k}{5}$ ($k>0$, так как $a^x>0$), $x=\log_a\frac{2\pi k}{5}$.

б) $2\sin\frac{3a^x}{2}\sin a^x=0$, откуда $\sin\frac{3a^x}{2}=0$, $a^x=\frac{2\pi k}{3}$ ($k>0$), $x=\log_a\frac{2\pi k}{3}$ и $\sin a^x=0$, $a^x=\pi k$, $x=\log_a\pi k$.

Ответ: $x=\log_a\frac{2\pi k}{5}$, $x=\log_a\frac{2\pi k}{3}$, $x=\log_a\pi k$ ($k=1, 2, 3, \ldots$).

Пример 239. Решить уравнение $x^2+4x\cos xy+4=0$.

Решение. Перепишем уравнение таким образом:

$$(x+2\cos xy)^2+4\sin^2 xy=0.$$

Так как сумма двух неотрицательных чисел может быть равной нулю лишь в том случае, если оба слагаемых одновременно равны нулю, то приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} x+2\cos xy=0,\\ \sin xy=0.\end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения имеем: $xy=\pi k$. Но $\cos xy=\cos\pi k=(-1)^k$ зависит от четности k. Рассмотрим два случая: а) если k — четное ($k=2n$), то $\cos xy=1$ и тогда $x=-2$, $y=\frac{\pi k}{x}=\frac{2\pi n}{-2}=-\pi n$; б) если k — нечетное ($k=2n+1$), то $\cos xy=-1$, и тогда $x=2$, $y=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Ответ: $x_1=-2$, $y_1=-\pi n$; $x_2=2$, $y_2=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Графическое решение уравнений

Большое число трансцендентных уравнений вообще не может быть решено элементарными приемами. Однако они могут быть решены графическим путем. Для этого представляют уравнение в виде равенства двух функций: $f(x)=\varphi(x)$, строят по отдельности графики этих функций, а затем измерением определяют абсциссы точек пересечения этих графиков; эти абсциссы и представляют собой корни уравнения. Хотя графический метод не является точным (построить графики функций и произвести измерение абсцисс можно лишь приближенно), тем не менее он дает возможность судить о числе корней и их примерной величине. При необходимости уточнения предварительных результатов, полученных графически, можно использовать в дальнейшем вычислительные методы.

Пример 240. Решить графически уравнения:

а) $2^x=3x$; б) $\log_2 x=\frac{x}{3}$; в) $\sin x=x$; г) $\lg|x|=x^2$.

Решение. Строим графики: а) $y=2^x$, $y=3x$ (рис. 109) и измеряем абсциссу точки их пересечения; получим: $x\approx 0{,}45$; б) $x_1\approx 1{,}4$; $x_2\approx 10$; в) $x=0$; г) нет корней.

Пример 241. Сколько корней имеет уравнение $\sin x=\lg x$?

Решение. Строим графики $y=\sin x$ и $y=\lg x$ (рис. 110). Так как $\sin x\leqslant 1$, то $\lg x\leqslant 1$ и $x\leqslant 10$. На промежутке [0,10] полностью вместился отрезок $(0,2\pi)$, т. е. волна синусоиды, причем здесь будет один корень. Остался отрезок длиной $10-2\pi\approx3{,}7>\pi$, вмещающий еще положительную

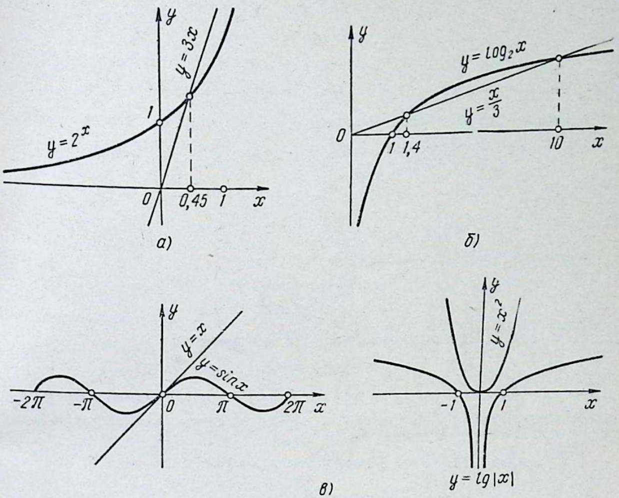


Рис. 109.

Рис. 110.

полуволну синусоиды, с которой кривая $y=\lg x$ пересечется два раза. Значит, число корней равно трем.

Трансцендентные системы и неравенства

Пример 242. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3^{\sin x+\cos y}&=1,\\ 25^{\sin^2 x+\cos^2 y}&=5. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Эту систему можно свести к следующей:

$$\left.\begin{aligned} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя из первого уравнения $\cos x = -\sin y$ во второе, получим: $2\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, откуда $x = \pi k \pm \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$. Если теперь подставить во второе уравнение $\sin x = -\cos y$ (взято тоже из первого уравнения), то окажется, что $2\cos^2 y = \frac{1}{2}$, $\cos^2 y = \frac{1}{4}$, откуда $y = \pi k \pm \pm \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$, $y = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

Пример 243. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin(x + y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Эта система равносильна следующей:

$$\left.\begin{aligned} x + y = \pi k, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{aligned}\right\}$$

Возводя первое уравнение в квадрат и вычитая почленно из него второе, получим: $2xy = \pi^2k^2 - 2$. После этого имеем систему

$$\left.\begin{aligned} x + y = \pi k, \\ xy = \frac{\pi^2k^2 - 2}{2}, \end{aligned}\right\} (*)$$

которая сводится к квадратному уравнению $z^2 - \pi kz + \frac{\pi^2k^2 - 2}{2} = 0$, откуда $z = \frac{\pi k \pm \sqrt{4 - \pi^2k^2}}{2}$. Условие того, что корни действительны: $4 - \pi^2k^2 \geqslant \geqslant 0$, $k^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2}$, и, значит, $|k| \leqslant \frac{2}{\pi}$. Следовательно, $k = 0$, но тогда корень квадратного уравнения $z = \pm 1$. Положив в системе (*) $k = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} x + y = 0, \\ xy = -1. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: (1, -1); (-1, 1).

Пример 244. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\pi x^2}{2} = 1, \\ |x| + |y| = 3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Из первого уравнения $\frac{\pi x^2}{2} = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$, откуда $x^2 = 4k+1$ и $|x| = \sqrt{4k+1}$ $\left(4k + 1 \geqslant 0,\ k \geqslant -\frac{1}{4}\right)$. Из второго уравнения находим: $|y| = 3 - |x| = 3 - \sqrt{4k+1}$. Так как $|y| \geqslant 0$, то

$$3 - \sqrt{4k+1} \geqslant 0,\ \sqrt{4k+1} \leqslant 3,\ 4k + 1 \leqslant 9,\ 4k \leqslant 8,\ k \leqslant 2.$$

Ответ: $|x| = \sqrt{4k+1}$, $|y| = 3 - \sqrt{4k+1}$ ($k = 0, 1, 2$).

Пример 245. Решить неравенство $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$.

Решение. Имеем: $2^{x-1}(2x^2 + x) > 0$, откуда

$$2x^2 + x > 0, \quad x(2x+1) > 0, \quad 2\left(x + \frac{1}{2}\right)x > 0.$$

Ответ: $x > 0$, $x < -\frac{1}{2}$.

Пример 246. Решить неравенство $\sin\frac{\pi}{x} > 0$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$, $2\pi k < \frac{\pi}{x} < 2\pi k + \pi$, $2k < \frac{1}{x} < 2k + 1$, $\frac{1}{2k} > x > \frac{1}{2k+1}$.

Ответ: $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ (при $k \neq 0$); если $k = 0$, то $x > 1$.

Пример 247. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 243$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 1$. Так как $a = \frac{1}{3} < 1$, показательная функция убывает и, следовательно, $\frac{1+x}{1-x} < -5$.

Ответ: $1 < x < \frac{3}{2}$.

Пример 248. Решить неравенство $\log_{\cos x}\sin x > \log_{\sin x}\cos x$ (решения найти в первой четверти).

Решение. ОДЗ: $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$. Преобразовав, получим:

$$\log_{\cos x}\sin x > \frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}, \quad \log^2_{\cos x}\sin x < 1$$

(основание логарифма меньше единицы). Значит $|\log_{\cos x}\sin x| < 1$ или $-1 < \log_{\cos x}\sin x < 1$. Отсюда $\frac{1}{\cos x} > \sin x > \cos x$. Последнее распадается на два неравенства:

а) $\sin x > \cos x$, $\operatorname{tg} x > 1$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin x < \frac{1}{\cos x}$, $\sin x\cos x < 1$, $\sin 2x < 2$

(последнее выполняется при всех x).

Ответ: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить уравнение $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| - x - 2 = 0$.

2. При каких целых a корень уравнения $\frac{x-1}{b} + \frac{x}{a} + \frac{3(x+1)}{2a^2} = 0$ больше двух?

3. Доказать, что корни уравнения $x^2 - 2(k-1)x + 2k + 1 = 0$ всегда действительны и исследовать их знаки в зависимости от значений параметра k, если известно, что $k < 0$.

4. Доказать, что уравнение $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ не имеет действительных корней, если $a + b > c$ и $|a - b| < c$.

5. Сумма квадратов пяти последовательных чисел равна 135. Найти эти числа.

Решить уравнения:

6. $\frac{72}{x}-\frac{36}{x^2}-11=(x-6)^2$.

7. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

8. $x^2-2x+3=2\sqrt{x^2-2x+2}$.

9. $\frac{\sqrt[5]{3+x}}{3}+\frac{\sqrt[5]{3+x}}{x}=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x}$.

10. $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}$.

11. $\sqrt{c+x}-\sqrt{\frac{c^2}{c+x}}=\sqrt{2c+x}$.

12. При каких значениях a система

$$\left.\begin{aligned}(a+1)x-(2a+1)y&=a,\\(3a+1)x-(5a+1)y&=a+1\end{aligned}\right\}$$

а) имеет единственное решение, б) несовместна, в) неопределенна?

Решить системы:

13. $$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{3}{2},\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}&=\frac{5}{4}.\end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned}x+y&=4,\\x^4+y^4&=82.\end{aligned}\right\}$$

15. При каком m уравнения

$$2x^2-(3m+2)x+12=0,$$
$$4x^2-(9m-2)x+36=0$$

имеют общий корень?

Решить системы:

16. $$\left.\begin{aligned}x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}&=\frac{12}{x-y},\\xy&=15.\end{aligned}\right\}$$

17. $$\left.\begin{aligned}x-y&=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right),\\\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}&=3.\end{aligned}\right\}$$

Решить неравенства:

18. $\frac{(x^2-5x+6)(x-1)(3+x)}{(x^2+2x+10)(5x-2)x}\geqslant 0$.

19. $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|<3$.

20. $\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}<0$.

21. При каких a система

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

удовлетворяется при всех значениях x?

Решить неравенства:

22. $\sqrt{x^2-1}+x-5>0.$

23. $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14.$

Решить уравнения:

24. $(x-5)^{x+1}=(x-5)^3.$

25. $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=8\cdot 3^{\frac{x}{3}}.$

26. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6.$

27. $10^{x^2}=2\cdot 100^x.$

28. $2\cdot 3^{x+1}-5\cdot 9^{x-2}=81.$

29. $\sqrt{\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}.$

30. $\log_5(10\cdot 25^x-1)=x+2\log_5 3.$

31. $9\cdot 3^{\log_x^2 4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x 0,125}.$

32. $(\sqrt{3})^{\lg x}=3^{\lg 2}\cdot 9^{\lg(\sqrt{x}-1)}.$

33. $\log_6\left(2^{\sqrt{x}+1}-3\right)=\log_6\log_{\sqrt[3]{3}} 9^{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\log_6 4.$

Решить системы:

34. $\left.\begin{aligned} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}&=512,\\ \lg\sqrt{xy}&=1+\lg 2.\end{aligned}\right\}$

35. $\left.\begin{aligned} x^{4/3}+y^{2/3}&=13,\\ 2\log_6 x+\log_6 y&=3.\end{aligned}\right\}$

Решить неравенства:

36. $4^x-2\cdot 5^{2x}<10^x.$

37. $\log_{0,5}\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}<0.$

Решить уравнения:

38. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=2(\operatorname{cosec} 2x-1).$

39. $1+2\sin 7x=\frac{\sin 10{,}5x}{\sin 3{,}5x}.$

40. $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=4.$

41. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2.$

42. $\sin x+\cos x+\sin 2x=1+\sqrt{2}.$

43. $\sin^2 x+\sin^3 x=\cos^2 x+\cos^3 x.$

44. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 9x.$

45. $2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0.$

46. $\cos\frac{8x}{7}\cos\frac{4x}{7}\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{x}{7}=\frac{1}{16}.$

47. $\sin 2x \cos 5x - \sin 3x \cos 4x = 1$.

48. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Решить неравенства:

49. $\dfrac{1}{\cos x} \geqslant -1$.

50. $2 \sin^2 x < \sin 2x < 2$.

Решить уравнения:

51. $(\cos x)^{1+\cos x} = \sqrt{\cos x}$.

52. $\sqrt[3]{1 + \lg \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x} = 2$.

Решить неравенства:

53. $\log_{\cos x} \sin x > \log_{\sin x} \cos x$.

54. $\log_{\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}} \left(\dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) \leqslant 2$.

ГЛАВА V

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОГРЕССИИ. ПРЕДЕЛЫ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если M есть данное множество элементов и если каждому числу натурального ряда поставлен в соответствие некоторый элемент множества M, то говорят, *что задана последовательность элементов данного множества.*

Это соответствие есть не что иное, как функция, для которой значениями аргумента служат числа натурального ряда, а значениями функции — элементы данного множества.

Членами последовательности могут быть какие угодно предметы. Их принято обозначать буквой с индексом внизу. Индекс указывает то натуральное число, которое данному члену соответствует

$$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ \ldots,\ f(n) = u_n.$$

Члены последовательности обычно располагаются в том же порядке как и члены натурального ряда: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Числовой последовательностью называется множество чисел, следующих одно за другим по определенному правилу. Например, в результате извлечения квадратного корня из числа 3 получаем последовательность рациональных приближенных значений (по недостатку) числа $\sqrt{3}$: 1; 1,7; 1,73; 1,732; ...

Числовая последовательность может быть задана разнообразными способами. Один из возможных способов задания последовательности — это задание *посредством формулы.* Например, $u_n = f(n)$ — функция от натурального аргумента n. Формула $u_n = f(n)$ называется *формулой общего члена* последовательности.

Не всегда последовательность можно задать формулой общего члена. Так, последовательность десятичных приближений $\sqrt{3}$ по недостатку задается не формулой, а описанием процесса, позволяющего для всякого заданного натурального n найти приближенное значение $\sqrt{3}$ по недостатку с точностью $\frac{1}{10^n}$.

Приведем примеры последовательностей.

Формулой $u_n = n^3$ определяется последовательность $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3 \ldots$

Формулой $u_n = \frac{n}{n+1}$ — последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

В последовательности 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... — общий член $u_n = 2^n - 1$.

В последовательности $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots$ — общий член $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Представляет интерес задание n-го члена последовательности как некоторой функции от предыдущих членов $u_n = \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$. Эта функция называется *рекуррентной формулой*. Задание последовательности посредством рекуррентных соотношений есть задание бесконечной системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a, \\ u_2 = \varphi_1(u_1), \\ u_3 = \varphi_2(u_1, u_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}). \end{array}\right\}$$

Эта система легко решается, а именно: зная u_1, находим u_2, зная u_1 и u_2, находим u_3 и т. д.

Пример 1. Последовательность определяется рекуррентной формулой $u_n = u_{n-1} + a$ и начальным значением $u_0 = A$. Составить формулу общего члена.

Решение. Имеем:

$$\begin{array}{l} u_1 = u_0 \quad + a = A + a, \\ u_2 = u_1 \quad + a = A + 2a, \\ u_3 = u_2 \quad + a = A + 3a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_{n-1} + a = A + na. \end{array}$$

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная при помощи рекуррентной формулы:

$$u_n = u_{n-1} + d.$$

Другими словами, арифметическая прогрессия есть последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (с данным числом d). Число d называется *разностью прогрессии*, а числа, составляющие прогрессию, называются ее *членами*.

Общий член прогрессии выражается формулой

$$u_n = u_1 + d(n-1).$$

Если множество допустимых значений аргумента n есть конечное множество последовательных чисел, то соответствующие члены прогрессии образуют конечное множество $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, называемое *конечной арифметической прогрессией*.

При любом натуральном k имеет место формула

$$u_p + u_q = u_{p+k} + u_{q-k}. \qquad (5,1)$$

Так как $u_{p+k} = u_1 + (p+k-1)d$ и $u_{q-k} = u_1 + (q-k-1)d$, то

$$u_{p+k} + u_{q-k} = [u_1 + (p-1)d] + [u_1 + (q-1)d] = u_p + u_q.$$

Отсюда следует, что в конечной арифметической прогрессии сумма двух членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме первого и последнего ее членов. Действительно, приняв в формуле (5,1) $p = 1$, $q = n$, получим:

$$u_{1+k} + u_{n-k} = u_1 + u_n. \qquad (5,2)$$

Из формулы (5,1) следует, что $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$, т. е. всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов. Пусть в формуле (5,1) $p = q = n$ и $k = 1$, тогда получим: $u_n + u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$, откуда

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}, \quad u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n.$$

Разность между предыдущим и последующим членами такой последовательности есть величина постоянная, а это означает, что подобная последовательность есть арифметическая прогрессия. Таким образом,

$$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \ldots = u_n - u_{n-1} = \ldots$$

Заданием двух начальных значений u_1 и u_2 (или любых двух значений u_p и u_q) определяются первый член прогрессии u_1 и ее разность d.

Суммирование конечной арифметической прогрессии проще всего выполняется на основании свойства, выраженного формулой (5,2). Так как сумма членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов, то

$$+\begin{cases} S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ S_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 \end{cases}$$

$$\overline{2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1) = n\,(n_1 + u_n).}$$

Следовательно, $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} n$ или, подставив $u_n = u_1 + d\,(n-1)$, получим:

$$S_n = \frac{n\,[2u_1 + d\,(n-1)]}{2}.$$

Приняв здесь $u_1 = 1$, $d = 1$, получим, в частности, формулу для суммы n первых чисел натурального ряда: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная при помощи рекуррентной формулы $V_n = V_{n-1}q$, где $q \neq 0$. Другими словами, геометрическая прогрессия есть такая числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одно и то же (отличное от нуля) число q. Число q называется *знаменателем прогрессии*, а числа, составляющие прогрессию,— ее *членами*. Общий член геометрической прогрессии выражается формулой

$$V_n = V_1 q^{n-1}.$$

Если множество допустимых значений аргумента n есть конечное множество последовательных чисел, то соответствующие члены прогрессии образуют конечную последовательность $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$, называемую *конечной геометрической прогрессией*.

Если знаменатель геометрической прогрессии положителен ($q > 0$), то прогрессия является *знакопостоянной последовательностью*. Все ее члены имеют один и тот же знак: положительные при $V_1 > 0$ и отрицательные при $V_1 < 0$.

Если знаменатель геометрической прогрессии отрицателен ($q < 0$), то прогрессия является *знакочередующейся последовательностью*. В ней любые соседние члены противоположны по знаку.

Аналогично тому, как это было сделано для арифметической прогрессии, устанавливается, что для всякой геометрической прогрессии при произвольном k имеет место равенство:

$$V_p V_b = V_{p+k} V_{b-k}. \tag{5,3}$$

Отсюда следует, что в конечной геометрической прогрессии произведение двух членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов. В равенстве (5,3), приняв $p=1$, $b=n$, получим: $V_1 V_n = V_{k+1} V_{n-k}$.

Из формулы (5,3) найдем: $V_n = \sqrt{V_{n-1} V_{n+1}}$. Следовательно, всякий член знакоположительной геометрической прогрессии есть среднее геометрическое предыдущего и последующего членов. В самом деле, если в формуле (5,3) принять $p=b=n$, $k=1$, то $V_n^2 = V_{n-1} V_{n+1}$. Отсюда

$$V_n = \sqrt{V_{n-1} V_{n+1}}; \quad \frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{V_{n+1}}{V_n}.$$

Таким образом, отношение всякого последующего члена к предыдущему есть одно и то же число, равное знаменателю прогрессии

$$q = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} = \ldots = \frac{V_n}{V_{n-1}} = \ldots$$

Заданием двух начальных значений V_1 и V_2 (или любых двух значений V_p и V_l) определяются первый член прогрессии V_1 и ее знаменатель $q = \frac{V_2}{V_1}$.

Суммирование конечной геометрической прогрессии производится следующим образом. Имеем:

$$S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V_1 + V_1 q + V_1 q^2 + \ldots + V_n q^{n-1}. \tag{5,4}$$

Умножим последнее равенство на q, получим:

$$q S_n = V_1 q + V_1 q^2 + V_1 q^3 + \ldots + V_1 q^n. \tag{5,5}$$

Вычитая из равенства (5,5) равенство (5,4), найдем:

$$(q-1) S_n = V_1 (q^n - 1), \quad S_n = V_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

или

$$S_n = V_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим несколько примеров, связанных с арифметической и геометрической прогрессиями.

Пример 2. Могут ли числа 1, $\sqrt{3}$, 3 быть членами арифметической прогрессии?

Решение. Допустим, что могут, т. е. $u_m = 1$, $u_n = \sqrt{3}$, $u_p = 3$. Тогда

$$1 = u_1 + (m-1) d, \ \sqrt{3} = u_1 + (n-1) d, \ 3 = u_1 + (p-1) d,$$

откуда

$$u_1 = 1 - (m-1) d = \sqrt{3} - (n-1) d = 3 - (p-1) d,$$
$$\sqrt{3} = 1 + (n-m) d, \ 3 = 1 + (p-m) d,$$

где d — разность прогрессии. Решая последние равенства относительно d, получим: $\frac{\sqrt{3}-1}{n-m} = \frac{3-1}{p-m}$ или $\frac{n-m}{p-m} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, что невозможно, так как справа стоит число иррациональное, а слева — рациональное (m, n, p — натуральные числа, номера членов прогрессии). Следовательно, данные числа не могут быть членами никакой арифметической прогрессии.

Пример 3. Могут ли числа 1, 7, 9 быть членами геометрической прогрессии?

Решение. Предположим, что могут, т. е. $V_m=1$, $V_n=7$, $V_p=9$. Тогда $1=V_1q^{m-1}$, $7=V_1q^{n-1}$, $9=V_1q^{p-1}$. Откуда $V_1=1q^{1-m}=7q^{1-n}=9q^{1-p}$, где q — знаменатель прогрессии. Решая последние равенства относительно q, получим: $q=7^{\frac{1}{n-m}}=9^{\frac{1}{p-m}}$, тогда $7^{p-m}=9^{n-m}$, что невозможно. В самом деле, считая $m<n<p$, видим, что правая часть равенства имеет множителем число 3, а левая часть такого множителя не имеет. Следовательно, числа 1, 7, 9 не могут быть членами никакой геометрической прогрессии.

Пример 4. Доказать, что если синусы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то котангенсы его половинных углов тоже образуют арифметическую прогрессию.

Доказательство. Пусть A, B, C — углы треугольника, тогда $A+B+C=180°$. Допустим, что $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ образуют арифметическую прогрессию. В этом случае $\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$. Отсюда

$$2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}=2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2},$$

$$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2},\quad \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{B-A}{2}=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{C-B}{2}$$

или

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}=$$

$$=\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

или

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Разделив обе части последнего равенства на произведение $\sin\frac{A}{2}\times$ $\times\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, получим: $2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма S_n любого числа n первых членов в α раз больше квадрата числа взятых членов.

Решение. По условию $S_n=\alpha n^2$, но $S_1=u_1=\alpha$ и $S_2=u_1+u_2=$ $=4\alpha$. Откуда $u_2=3\alpha$ и $d=u_2-u_1=2\alpha$. Искомая прогрессия будет α, 3α, 5α, 7α, 9α, ... Например, при $\alpha=4$ это будет 4, 12, 20, 28, ...

Пример 6. Найти геометрическую прогрессию с действительными членами, если сумма первых трех членов ее равна 7, а произведение их — 8.

Решение. По условию имеем: $V_1+V_2+V_3=7$, $V_1V_2V_3=8$, но $V_2^2=$ $=V_1V_3$, поэтому $V_2^3=8$ и $V_2=2$. Остается решить систему

$$\left.\begin{aligned}V_1+V_3&=5,\\ V_1V_3&=4.\end{aligned}\right\}$$

Имеем:

$$z^2-5z+4=0,\quad z_1=1,\quad z_2=4,$$

откуда

$$V_{1_1}=1,\quad V_{3_1}=4,\quad V_{1_2}=4,\quad V_{3_2}=1.$$

Таким образом, налицо две прогрессии, удовлетворяющие заданным условиям:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots \text{ и } 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \dots$$

§ 4. ПРЕДЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела переменной величины. Поясним сущность этого важного понятия и его связь с реальными процессами, происходящими в природе и технике.

Допустим, что в воздушном насосе емкость цилиндра составляет половину всей емкости насоса (цилиндра и колокола вместе взятых). Тогда при каждом полном ходе поршня из колокола будет удаляться половина заключенного в нем воздуха. Обозначим через Q_n количество воздуха, выкачанного после n взмахов поршня. Если первоначальная масса воздуха в коло-

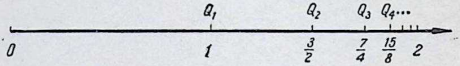


Рис. 111.

коле равна 2, то можно показать, что при неограниченном увеличении числа взмахов значение Q_n как угодно мало отличается от 2. Действительно,

$$Q_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,\quad Q_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2},$$

$$Q_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{2^2},\quad Q_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{2^3}$$

и т. д.

Вообще при любом n имеем:

$$Q_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},\quad |Q_n - 2| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

При неограниченном увеличении числа n дробь $\frac{1}{2^{n-1}}$ может сделаться и остаться меньше любого положительного числа, которое обычно обозначается буквой ε. Особенность рассматриваемого процесса с математической точки зрения состоит в том, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой момент процесса n (число взмахов поршня), после которого выполняется неравенство $|Q_n - 2| < \varepsilon$. Это неравенство математически выражает неограниченность приближения значений переменной Q_n к числу 2 (рис. 111).

Рассмотрим еще один процесс. Пусть тело движется от точки A к B ($AB = 1$) так, что в каждую следующую секунду проходит $\frac{1}{2}$ оставшегося пути. Легко показать, что при неограниченном росте времени (числа секунд) S_n как угодно мало отличается от единицы. Действительно,

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2},\quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2},$$

$$S_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3},\ \dots,$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n},\ \dots,\quad |S_n - 1| = \frac{1}{2^n}.$$

При неограниченном увеличении n дробь $\frac{1}{2^n}$ может сделаться и оставаться меньше любого положительного числа ε. Особенность рассматриваемого процесса с математической точки зрения состоит опять в том, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой момент процесса n (количество секунд, прошедших с начала движения), после которого выполняется неравенство $|S_n - 1| < \varepsilon$. Оно математически выражает неограниченность приближения переменной S_n к единице (рис. 112).

Дадим теперь определение предела переменной величины.

Постоянное число a называется *пределом переменной величины* y, если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε

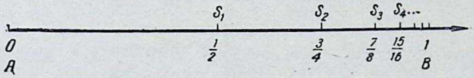


Рис. 112.

абсолютная величина разности между переменной y и этим числом a сделается и останется (в процессе дальнейшего изменения y) меньше ε. Начиная с некоторого момента процесса, здесь будет выполняться неравенство $|y - a| < \varepsilon$.

Тот факт, что переменная y имеет предел a или, как говорят, стремится к a, записывают так: $\lim y = a$ или $y \to a$.

Известно, что длина окружности определяется как предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность (или описанных около нее), при неограниченном удвоении числа его сторон.

Геометрически наличие предела для переменной величины истолковывается просто. Изобразим точкой M переменную величину y, а точкой A — постоянную величину a (рис. 113). В этом случае точка M — движущаяся, а точка A — неподвижная. Возьмем произвольно какое-нибудь число ε. От

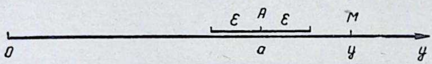


Рис. 113.

неподвижной точки A откладываем вправо и влево по промежутку длиной ε. На прямой получим сколь угодно малый неподвижный промежуток длиной 2ε с центром в неподвижной точке A. Теперь по мере того, как будет протекать время, точка M будет (по какому-либо закону) двигаться по прямой. Но раз число a есть предел переменной величины y, то точка M при движении непременно попадет на этот неподвижный промежуток 2ε и будет там оставаться все время, потому что разность $y - a$ по абсолютной величине сделается и останется меньше ε, как бы мало ни было ε (по определению предела). Эта абсолютная величина разности есть расстояние подвижной точки M от неподвижной точки A (ее предела).

Из указанного геометрического истолкования предела переменной величины следует, что одна и та же переменная величина y может иметь не более одного предела. В самом деле, если бы было два различных предела, то одна и та же движущаяся точка M при дальнейшем своем движении оказалась бы одновременно вблизи двух совершенно различных точек, что явно невозможно.

Но переменная величина может и совсем не иметь никакого предела. Например, переменная y, определенная равенством $y = \sin t$, где t означает время, совсем не имеет никакого предела, когда t неограниченно возрастает (синус колеблется между -1 и $+1$, переменная $y = \sin t$ при изменении не может приблизиться ни к какой постоянной величине).

Приведем основные теоремы о пределах переменных величин.

1. *Предел постоянной равен самой этой постоянной*

$$\lim c = c, \quad \text{где} \quad c = \text{const}.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела и вносить под знак предела*

$$\lim ky = k \lim y, \quad \text{где} \quad k = \text{const}.$$

3. *Предел алгебраической суммы переменных величин равен той же алгебраической сумме пределов этих переменных* (в предположении, что пределы слагаемых существуют)

$$\lim (u + v - w) = \lim u + \lim v - \lim w.$$

4. *Предел произведения переменных величин равен произведению пределов этих величин* (в предположении, что пределы сомножителей существуют)

$$\lim (uv) = \lim u \lim v.$$

5. *Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов этих величин, если только предел делителя (знаменателя дроби) не равен нулю*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \quad \text{если } \lim v \neq 0.$$

Если переменная величина y есть функция переменной величины x, т. е. $y = f(x)$, то представляет интерес нахождение предела y (предела функции) при условии, когда аргумент приближается к определенному постоянному значению a, поэтому предел функции можно определить так.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε можно указать такой открытый интервал, содержащий точку $x = a$, что всюду внутри него, за исключением, быть может, самой точки a, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равный b, записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Приведем примеры на вычисление пределов функций.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{7x - 5}{10 + 2x}$.

Решение. $$\lim_{x \to 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} (7x - 5)}{\lim\limits_{x \to 5} (10 + 2x)} = \frac{7 \cdot 5 - 5}{10 + 2 \cdot 5} = \frac{3}{2}.$$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение. При $x \to 3$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Поэтому непосредственное применение теоремы о пределе дроби здесь невозможно. Однако данную дробь можно сократить (до перехода к пределу, при $x \neq 3$)

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 1},$$

тогда предел легко находится:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{3 + 1}{3 - 2} = 4.$$

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

Решение. Предварительно данную дробь сократим на $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Решение. В данном случае числитель и знаменатель дроби следует умножить на выражение $\sqrt{x+1}-1$, сопряженное знаменателю дроби

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\,(\sqrt{x+1}+1)}{1+x-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$$

Вопрос о существовании предела переменной величины решается в математическом анализе, где устанавливаются условия, при выполнении которых переменная величина имеет предел.

§ 5. СУММА БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Говоря о суммах, мы всегда предполагаем, что число слагаемых в этих суммах конечно. Но при решении некоторых задач приходится сталкиваться с суммами бесконечного числа слагаемых или, как говорят, с рядом

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5,6}$$

Рассмотрим последовательность сумм (так называемых частичных сумм)

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

По определению суммой S бесконечного числа слагаемых $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется *предел частичных сумм* S_n (сумм n первых чисел), когда $n \to \infty$,

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n). \tag{5,7}$$

Этот предел может существовать, а может и не существовать. Соответственно этому говорят, что сумма существует и ряд (5,6) сходится, или не существует, тогда ряд (5,6) расходится. Путем непосредственного суммирования S_n и перехода к пределу можно вычислить суммы (5,6) только в исключительных случаях.

Например, вычислим сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)} + \ldots$$

Дробь $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, поэтому

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Таким образом,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Рассмотрим суммирование бесконечных прогрессий. Сумма бесконечной арифметической прогрессии равна $+\infty$, если разность прогрессии положительна, и равна $-\infty$, если разность прогрессии отрицательна. В самом деле, $(n+1)$-я частичная сумма

$$S_{n+1}=u_1+(u_1+d)+\ldots+(u_1+nd)=\frac{(2u_1+nd)(n+1)}{2}.$$

Если $d>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}=+\infty$; если же $d<0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}=-\infty$.

Ряд, члены которого образуют бесконечную геометрическую прогрессию, имеет вид

$$S=V_1+V_1q+V_1q^2+\ldots+V_1q^{n-1}+V_1q^n+\ldots$$

Этот ряд нередко называется также геометрической прогрессией. Частичная сумма S_n геометрической прогрессии при $q\neq 1$ выражается формулами

$$S_n=V_1\frac{q^n-1}{q-1}\quad\text{или}\quad S_n=V_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $|q|>1$. В этом случае имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=\infty$ и

$$|S_n|=|V_1|\frac{|q^n-1|}{|q-1|}\geqslant|V_1|\frac{|q|^n-1}{|q-1|}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n|=+\infty$. При $V_1>0$, $q>1$ прогрессия расходится к $+\infty$; при $V_1<0$, $q>1$ — расходится к $-\infty$. При $q<-1$ члены прогрессии и ее частичные суммы образуют знакопеременные расходящиеся последовательности.

б) $|q|<1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=0$, прогрессия сходится, так как

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{V_1}{1-q}.$$

в) При $|q|=1$ прогрессия расходится, так как, приняв $q=1$ и $q=-1$, получим соответственно:

$$S=V_1+V_1+\ldots+V_1+\ldots,$$
$$S=V_1-V_1+V_1-V_1+\ldots+(-1)^{n-1}V_1+\ldots$$

В первом случае $S_n=nV_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$. Во втором — $S_n=V_1$, если n нечетно; $S_n=0$, если n четно. Таким образом, S_n представляет собою колеблющуюся, расходящуюся последовательность ($\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует).

Итак, геометрическая прогрессия является расходящейся при $|q| \geqslant 1$ и сходящейся при $|q| < 1$. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является сходящейся. Когда $|q| < 1$, то сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии подсчитывается по формуле

$$S = \frac{V_1}{1-q}.$$

Приведем примеры на бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Пример 11. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $3, V_2, V_3, \ldots, V_n, \ldots$, зная, что ее сумма равна 2.

Решение. По условию имеем: $2 = \frac{3}{1-q}$, откуда $q = -\frac{1}{2}$. Следовательно, искомая прогрессия имеет вид:

$$3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$$

Пример 12. Обосновать правило обращения чистой периодической дроби в обыкновенную.

Правило. *Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно ее период сделать числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.*

Решение. Рассмотрим, например, дробь $0,(23) = 0,232323\ldots = 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + \ldots$ Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $V_1 = 0,23$ и $q = 0,01$. Имеем:

$$S = 0,(23) = \frac{0,23}{1-0,01} = \frac{0,23}{0,99} = \frac{23}{99}.$$

Пример 13. Решить уравнение $1 + \log_2 \cos x + \log_2^2 \cos x + \ldots = 0,(6)$.

Решение. Последовательность $1, \log_2 \cos x, \log_2^2 \cos x, \ldots$ есть геометрическая прогрессия ($q = \log_2 \cos x$) и так как она по условию имеет сумму $\left[0,6 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\right]$, т. е. $|q| = |\log_2 \cos x| < 1$, то эта прогрессия бесконечно убывающая, поэтому $\frac{2}{3} = \frac{1}{1-\log_2 \cos x}$, откуда

$$3 = 2 - 2\log_2 \cos x, \; \log_2 \cos x = -\frac{1}{2}, \; \cos x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ при } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Следующие последовательности, заданные формулой общего члена, записать в развернутом виде:

а) $u_n = (-1)^{n-1}$; б) $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$; в) $u_n = n^2$; г) $u_n = \frac{1}{n!}$;

д) $u_n = \frac{1}{2^n}$.

2. Дано конечное множество членов следующих последовательностей:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 7}, \frac{1}{7\cdot 9}, \ldots$; б) 1, 3, 7, 15, 31, ...;

$$\text{в) } 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{4}, \ldots$$

Составить одну из возможных формул для общего члена.

3. Дано рекуррентное соотношение

$$u_n = (\alpha + \beta)\, u_{n-1} - \alpha\beta u_{n-2}.$$

Найти формулу для u_n, если $u_1 = \alpha + \beta$, $u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$.

4. Найти $a_1 + a_6 + a_{11} + \ldots + a_{31}$, если известно, что $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть арифметическая прогрессия и что $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{31} = 784$.

5. Найти сумму n чисел вида 2, 22, 222, ...

6. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

7. Доказать, что последовательность $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$, где $z_n = \cos nx + i \sin nx$, есть геометрическая прогрессия; с помощью суммы n первых ее членов найти суммы:

$$A = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

и

$$B = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

8. Известно, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Вычислить суммы

$$S_1 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2$$

и

$$S_2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2.$$

9. Найти сумму $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$.

10. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов членов той же прогрессии равна 448. Найти прогрессию.

11. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма первых шести ее членов в семь раз больше суммы остальных членов этой прогрессии.

12. При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

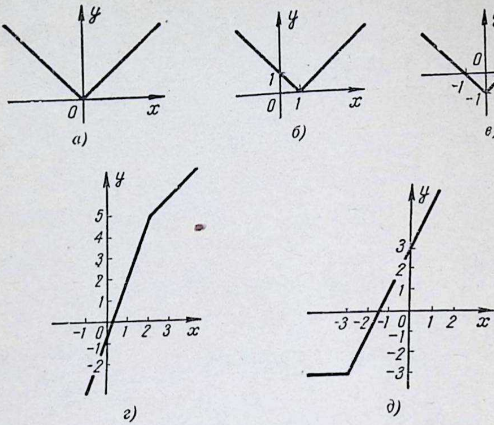
Глава I

1. а) 12; б) 32; в) 8. **2.** а) 72; б) 432; в) 224. **3.** а) $2\frac{35}{99}$; б) $\frac{533}{990}$; в) $3\frac{1}{225}$. **4.** $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Использовать условия равенства двух комплексных чисел. **5.** а) 64. Сначала возвести в квадрат; б) $256-256i$. **6.** 4096. Сначала возвести в куб. **7.** $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$. **8.** $n = 4k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **9.** 0. Умножить и разделить на $\alpha - 1$. **10.** $z = \frac{3}{2} - 2i$. **11.** а) На полупрямой, исходящей из начала координат и составляющей с положительным направлением действительной оси угол, равный c; б) все точки плоскости, исключая точки, расположенные на отрицательной части действительной оси; в) две точки: $M_1(0, 1)$ и $M_2(0, 3)$; г) внешность круга с центром в точке $M\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ и радиусом 2; д) мнимая ось ($0y$); е) прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему точки $M_1(1, 1)$ и $M_2(-1, 0)$ и проходящая через его середину; ж) правая полуплоскость, включая мнимую ось ($0y$); з) точки, расположенные правее прямой $x = 1$, исключая точку $M(2, 0)$; и) прямая $y = 1$.

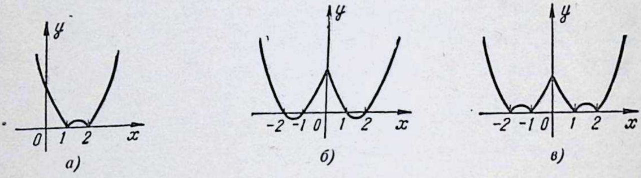
Глава II

1. а) $x \geqslant 1$; б) $x < -6$ и $x \geqslant 2$; в) $x \leqslant -5$ и $x \geqslant 1$; г) $-3 \leqslant x < 1$ и $1 < x \leqslant 5$. **2.** а) $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 3$; б) $x \geqslant 0$; в) $x \geqslant 2$. **3.** а) $\frac{1-\sqrt{5}}{4} \leqslant x < 0$ и $x \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; б) $x < -4$, $-4 < x < -2$, $4 < x < 6$, $x > 6$; в) $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 1$. **4.** а) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; б) $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; в) $x = k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **5.** а) $-\frac{5}{4}\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ при $a > 1$, $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ при $0 < a < 1$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$. **6.** а) Нечетная; б) нечетная; в) четная. **7.** а) Четная; б) нечетная; в) нечетная. **8.** а) Нечетная; б) нечетная. **9.** а) Четная; б) нечетная. **10.** а) 2; б) π; в) 2π. **11.** а) 40π; б) 3π.

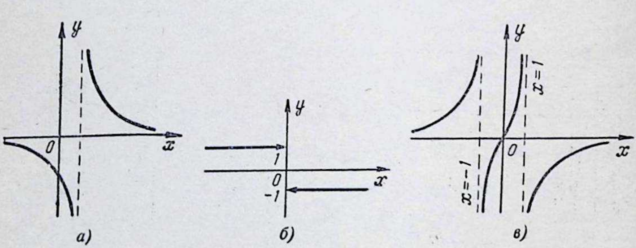
12

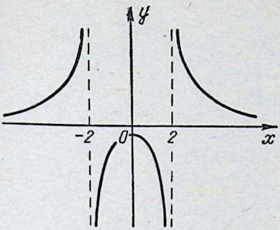


13

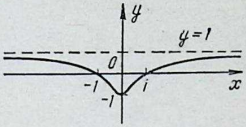


14



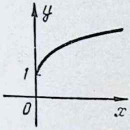


г)

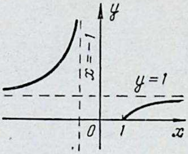


д)

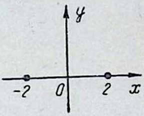
15



а)

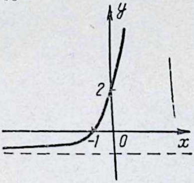


б)

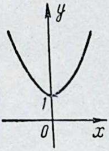


в)

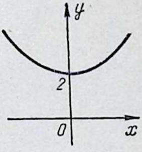
16



а)

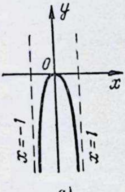


б)

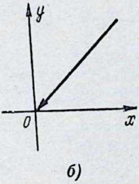


в)

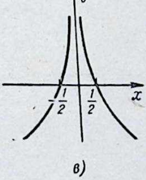
17



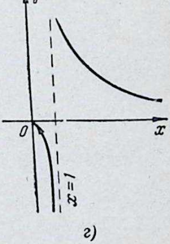
а)



б)

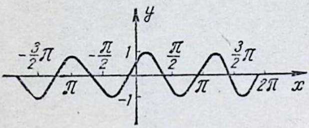


в)

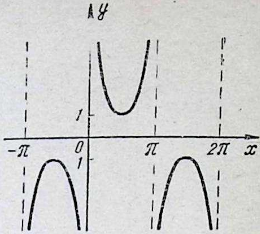


г)

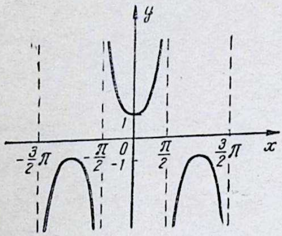
18



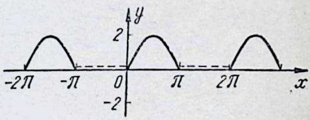
a)



б)

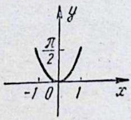


в)

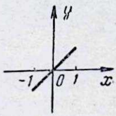


г)

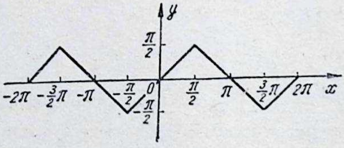
19



a)

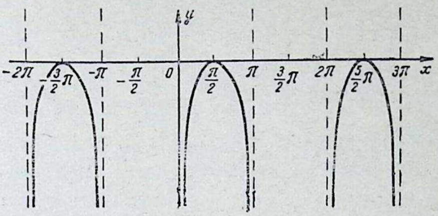


б)

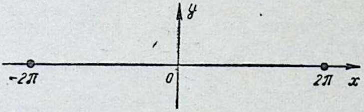


в)

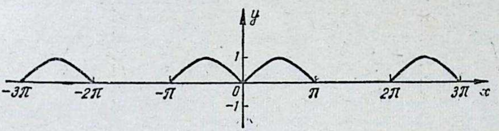
20



а)



б)



в)

Глава III

1. а) $(x-1)(x+7)(x+3)$. Указание. $x^3+9x^2+11x-21 = (x^3-1)+(9x^2-9)+(11x-11)$; б) $(x^2+1)(x-2)(x-3)$. Указание. $x^4-5x^3+7x^2-5x+6=(x^4+7x^2+6)-(5x^3-5x)=(x^2+1)(x^2+6)-5x(x^2+1)=(x^2+1)(x^2-5x+6)$; в) $(x-2)(x+4)^2$. Указание. $x^3+6x^2-32=(x^3-8)+(6x^2-24)=(x-2)(x^2+2x+4)+6(x^2-4)=(x-2)(x^2+8x+16)$; г) $(a+b)(b+c)(c+a)$. Указание. $(a+b+c)\times(bc+ca+ab)-abc=(a+b)(bc+ca+ab)+bc^2+c^2a+abc-abc=(a+b)(bc+ca+ab+c^2)$; д) $(y-z)(z-x)(x-y)$; е) $(x+y+z)\times(xy+yz+zx)$. Указание. $3xyz=xyz+xyz+xyz$; ж) $3(a+c)(a-c)\times(a^2+b^2)(b^2+c^2)$. Указание. Первое слагаемое представить в виде: $[(a^2-c^2)+(b^2+c^2)]^3$ и воспользоваться формулой $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$. **2.** Указание. Положить $2x+3=u$, $xy+3y=v$. **3.** а) 0; б) $\frac{m^3}{2(m-1)}$. **6.** а) $\frac{1}{m}$. Указание. $\sqrt{a\pm bx}=\sqrt{\frac{a(1\pm m)^2}{1+m^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+m^2}}(1\pm m)$; б) $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+1}$. Указание. $\sqrt{m^2-1}=\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)$; в) $\frac{\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$. **7.** а) Указание. Возвести левую часть равенства во вторую степень, заменить x^4 числом 5, после чего полученную дробь сократить; б) Указание. $4x^3-3x-1=(4x^3-4)-(3x-3)=(x-1)(4x^2+4x+1)=(x-1)(2x+1)^2$, $4x^3-3x+1=(x+1)(2x-1)^2$.

8. Указание. $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-1|+|x-3|$, далее рассмотреть значения x для интервалов $(-\infty, -2]$, $(-2, 1]$, $(1, 3]$, $(3, +\infty)$. **9.** $z=0$. Указание. Определить x^3 и подставить x и x^3 в выражение для z. **10.** Указание. Воспользоваться неравенствами $a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2$, $c^4+d^4\geqslant 2c^2d^2$, $a^2b^2+c^2d^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^2c^2d^2}$. **11.** Указание. Из неравенства $2ab\leqslant a^2+b^2$ имеем: $a^2+b^2+2ab\leqslant 2a^2+2b^2$ или $\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$. **12.** Указание. Положить $x=\frac{1}{3}+\alpha$, $y=\frac{1}{3}+\beta$, $z=\frac{1}{3}+\gamma$. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$. **13.** Указание. Переписать доказываемое неравенство в виде $(a-b)^2\times(a+b)^2\geqslant(a-b)^2(a-b)^2$. **14.** Указание. Очевидно, $0<\frac{1+x}{2}<1$, $0<\frac{1-x}{2}<1$ и поэтому $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\leqslant\frac{1+x}{2}$, $\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\leqslant\frac{1-x}{2}$. Далее нужно сложить эти два неравенства. **15.** $x<0$. **16.** $\frac{2+3a-ab}{2a}$. Указание. $\log_4 39{,}2=\log_4\frac{49\cdot 4}{5}=\log_2\frac{7\cdot 2}{\sqrt{5}}$. **17.** $\log_k n^2=\log_k (kn)^{\log_k m}$, $2\log_k n=\log_k m(1+\log_k n)$, $\frac{2}{\log_k m}=\frac{1}{\log_k n}+1$. Умножим полученное равенство на $\log_k x$, считая $x\neq 1$. Получим: $2\frac{\log_k x}{\log_k m}=\frac{\log_k x}{\log_n k}+\log_k x$. Пользуясь формулой $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$, найдем: $2\log_m x=\log_n x+\log_k x$ или $\log_m x=\frac{1}{2}(\log_k x+\log_n x)$, что и требовалось доказать. При $x=1$ доказываемое равенство очевидно, причем в этом случае m, n и k произвольны. **18.** а) и б). Указание. Заменить $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. з) Указание. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}x=\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{2\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x-\cos^2 x+2\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{\cos x+\cos^2 x-2\cos 2x}{\sin x\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}-\frac{4\cos 2x}{\sin 2x}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-4\operatorname{ctg}2x$. Прибавив к этому выражению $4\operatorname{ctg}2x$, получим $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. и) Указание. Из формулы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ имеем $\operatorname{tg}7^\circ{,}5+\operatorname{tg}37^\circ{,}5=\operatorname{tg}(7^\circ{,}5+37^\circ{,}5)(1-\operatorname{tg}7^\circ{,}5\operatorname{tg}37^\circ{,}5)=1-\operatorname{tg}7^\circ{,}5\operatorname{tg}37^\circ{,}5$. **19.** $\frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$. Указание. Умножить и разделить данное выражение на $\sin\frac{\pi}{2^n}$. **20.** а) $\frac{1}{8}$. Указание. Умножить и разделить данное выражение на $\sin 20^\circ$; б) 4. Указание. Сгруппировать первое слагаемое с четвертым, а второе — с третьим. **21.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$. Указание. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

Глава IV

1. $x=-2$, $x\geqslant 2$. **2.** При a, равных -8, -7, -6, -5, -4. **3.** а) Если $k<-\frac{1}{2}$, корни разных знаков, причем положительный корень по модулю больше; б) если $k=-\frac{1}{2}$, то $x_1=0$, $x_2=-3$; в) если $-\frac{1}{2}<k<0$, оба корня отрицательны. **4.** Достаточно показать, что $D<0$. **5.** 3, 4, 5, 6, 7 или $-7, -6, -5, -4, -3$. **6.** $x_1=6$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=1$. **7.** $5\leqslant x\leqslant 10$. **8.** $x=1$. **9.** $x_1=\frac{3}{31}$, $x_2=-\frac{1}{11}$. **10.** $x_1=\frac{3a}{4}$ при $a>0$, $x_2=0$ при $a=0$. **11.** $x=-2c$ при $c<0$, $x>0$ при $c=0$. **12.** а) При $a\neq 0$, $a\neq 1$ — единственное решение: $x=-\frac{3a+1}{a}$, $y=-\frac{2a+1}{a}$; б) при $a=0$ несовместна; в) при $a=1$ неопределенна.

13. $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=2$. **14.** $x_1=25$, $y_1=9$; $x_2=\frac{49}{4}$, $y_2=\frac{84}{4}$. **15.** При $m=3$. Указание. Исключить из обоих уравнений свободные члены. **16.** $x=5$, $y=3$. **17.** $x_1=216$, $y_1=27$; $x_2=-27$, $y_2=-216$. **18.** $x\geqslant 3$, $1\leqslant x\leqslant 2$, $0<x<\frac{2}{5}$, $x<-3$. **19.** $x>\frac{5}{2}$, $x<\frac{1}{4}$. **20.** $1<x<4$. Указание. Положить $\sqrt{x}=t$. **21.** $-1<a<2$. **22.** $x>2{,}6$. **23.** $x\leqslant 50$. **24.** $x_1=6$, $x_2=5$. **25.** $x=3$. **26.** $x_1=2$, $x_2=-2$. **27.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\lg 2}$. **28.** $x_1=4$, $x_2=4-\log_3 5$. **29.** $x_1=-1$, $x_2=-10$. **30.** $x=0$. **31.** $x_1=2$, $x_2=4$. **32.** $x=4$. **33.** $x=1$. **34.** $x_1=25$, $y_1=16$; $x_2=16$, $y_2=25$. **35.** $x_1=3\sqrt{3}$, $y_1=8$; $x_2=2\sqrt{2}$, $y_2=27$. **36.** $x<\frac{\lg 2}{\lg 2-\lg 5}$. Указание. Разделив обе части на 5^{2x}, придем к квадратному неравенству. **37.** $x>6$, $3<x<4$. **38.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **39.** $x=\frac{\pi}{28}(4k+1)$. **40.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **41.** $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. Указание. Понизить степени синусов. **42.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. Указание. Алгебраизировать уравнение. **43.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x=\pi(2k+1)$. **44.** $x=\frac{\pi}{40}(8k+3)$, $x=\frac{\pi}{32}(8k+1)$. **45.** $x=\frac{\pi}{66}(6k-1)$, $x=\frac{\pi}{18}(3k+2)$. **46.** $x=\frac{7\pi}{17}(2k+1)$, $x=\frac{14\pi k}{15}$. Указание. Умножить и разделить левую часть на $\sin\frac{x}{7}$. **47.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. Указание. Учесть, что синус по модулю не превышает единицы. **48.** $x=\pi k+\pi n+\frac{\pi}{4}$, $y=\pi k-\pi n+\frac{\pi}{4}$. **49.** $2\pi k-\frac{\pi}{2}<x<2\pi k+\frac{\pi}{2}$, $x=\pi(2k+1)$. **50.** $\pi k<x<\pi k+\frac{\pi}{4}$. **51.** $x=\frac{2\pi}{3}(6k\pm 1)$, $x=2\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. Указание. Рассмотреть особые случаи, когда основание равно единице и нулю. **52.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **53.** $2\pi k<x<2\pi k+\frac{\pi}{4}$. **54.** $x=\pi k$.

Глава V

1. а) $1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$; б) $1, 0, 1, 0, \ldots, \frac{1-(-1)^n}{2}, \ldots$; в) $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$; г) $1, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}, \ldots$; д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$ **2.** а) $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n\geqslant 1$; б) $u_n=2^n-1$, $n\geqslant 1$; в) $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\frac{1}{n}$, $n>1$. **3.** $u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$, $n\geqslant 2\,(*)$.

Указание. Определить u_3, предположить, что формула (*) верна для $n=k$, и показать, что формула верна также и для $n=k+1$, т. е. для u_{k+1}. **4.** 343. Указание. $a_1+a_{31}=98$. **5.** $\frac{2}{9}\left(10\frac{10^n-1}{9}-n\right)$. **6.** Указание. Заменить $\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\frac{1}{d}$, $k=1, 2, \ldots, n$. **7.** $A=$ $=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $B=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Указание. Показать $\frac{z_{k+1}}{z_k}=\cos x+i\sin x$. **8.** $S_1=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$, $S_2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. Указание. $S_2=2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$, $S_1+S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2$. Зная S_2 и S_1+S_2, легко определить S_1. **9.** $S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. Указание. Заменить $\frac{1}{(k+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$, где $k=1, 2, \ldots, n$. **10.** 14, $\frac{21}{2}$, $\frac{63}{8}$, … **11.** $q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.** $x=\log_2 5$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава IV. **Решение уравнений, систем и неравенств**

Глава V. **Последовательности. Прогрессии. Пределы**

П. В. Григорьев, П. А. Соболев, И. С. Сребрянский, Н. В. Травин

ЗНАНИЯ — МОЛОДЕЖИ

(В помощь поступающим в вузы)

Математика

Редактор издательства *И. И. Верещага*
Технический редактор *Е. П. Арзамасцева*
Корректор *Н. А. Браиловская*
Обложка работы *В. Г. Бахтина*

М-32614. Сдано в набор 24/X 1969 г. Подписано к печати 13/I 1970 г. Формат $60\times90^1/_{16}$. Печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 14,6. Бумага тип. № 3. Тираж 215 500 экз. 1-й завод: 1—100 000 экз. Цена 44 коп. Заказ № 824.

Ленинградская организация общества «Знание» РСФСР
Ленинград, Д-104, Литейный пр., 42

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

Цена 44 коп.