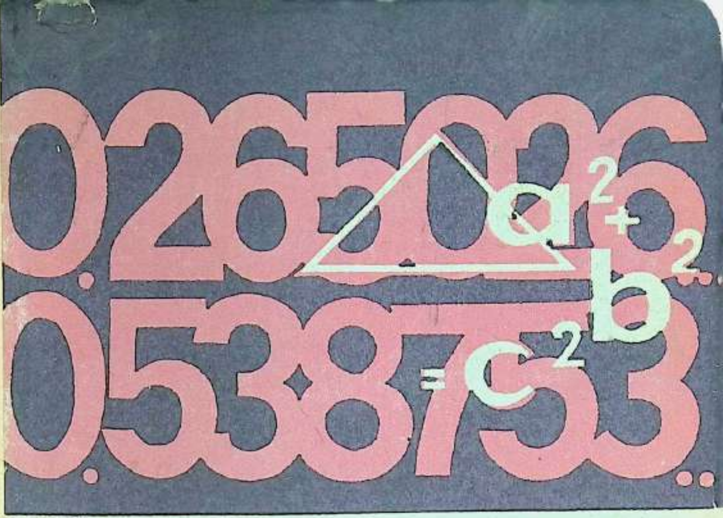


Н. В. Метельский

Пособие по математике для поступающих в техникумы и училища

Н. В. Метельский

Пособие по математике для поступающих в техникумы и училища

Издание 3-е, стереотипное

Под редакцией
канд. физ.-мат. наук
доц. Л. К. Тутаева

Издательство
«Вышэйшая школа»
Минск 1968

Метельский Н. В.

М54 Пособие по математике для поступающих в техникумы и училища. Под ред. Л. К. Тутаева. Минск, «Вышэйш. школа», 1968.

742 с. с илл.

Пособие содержит теорию и задачи с решениями по арифметике, алгебре и геометрии за 5—8 классы.

Основные его особенности: краткость изложения; тесная связь теоретических и практических знаний; наличие методических указаний к теоретическому материалу и решению задач.

Пособие может быть использовано как для самостоятельной подготовки, так и при обучении на подготовительных курсах при техникумах.— Библиогр.: с. 467.

$\frac{2\text{-}2\text{-}2}{46\text{-}68}$

51

От автора

Пособие содержит теорию и задачи с решениями по курсу математики восьмилетней школы в соответствии с программой для поступающих в средние специальные учебные заведения. Оно удобно как для самостоятельной подготовки, так и для занятий на подготовительных курсах при техникумах и частично при вузах. Книга может быть полезна для многих выпускников средней школы. Ее можно по-разному использовать и в школе, в частности — в качестве руководства для самостоятельной работы учащихся, желающих повысить свою подготовку по математике.

При составлении пособия автор особо заботился о тех, кто сравнительно давно окончил школу. Он учел и то обстоятельство, что читателю в нужный момент не всегда удается достать весь комплект учебников и задачников по арифметике, алгебре и геометрии. В пособие включены все необходимые сведения из теории с их обоснованием в возможно кратком изложении. Они чередуются с упражнениями или задачами. Опыт показывает, что именно в таком пособии, последовательно осуществляющем единство теории и практики, нуждаются и те, кто занимается на подготовительных курсах.

Учитывая большой объем программы, автор стремился дать по каждой теме такой минимум задач, который позволил бы читателю достаточно полноценно усвоить предмет. Решения составлены для тех, кто будет испытывать затруднения. В некоторых случаях решения помещены сразу же после условий, чтобы таким образом лучше выделить основные типы задач и методы их решения. В задачах по каждой теме требуется применять материал из предыдущих тем. Пособие стимулирует самостоятельное мышление, предоставляет читателю возможность самому решать посильные вопросы. С этой же целью иногда даны сокращенные доказательства и решения и широко применяется система ссылок.

Подавляющее большинство упражнений и задач составлено автором или тщательно подобрано и переработано им в соответствии со стремлением создать систему задач, наиболее целесообразную для такого рода пособия. Автор стремился создать и более совершенную (в рамках нынешней программы) систему теоретических сведений с учетом современных научно-методических идей. В решении множества конкретных вопросов, возникавших в процессе работы над книгой, автор опирался прежде всего на собственный опыт преподавания в школе.

В издании третьем устранены замеченные дефекты.

Автор с благодарностью примет замечания и предложения, которые просит направлять по адресу: г. Минск, ул. Кирова, 24, издательство «Вышэйшая школа».

Математические знаки

$=$	равно	$a=b$
$\neq$	не равно	$a\neq b$
$\approx$	приближенно равно	$a\approx b$
$>$	больше	$a>b$
$<$	меньше	$a<b$
$\geqslant$	больше или равно (не меньше)	$a\geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно (не больше)	$a\leqslant b$
$+$	плюс, сложение	$a+b$
$-$	минус, вычитание	$a-b$
$\cdot$ или $\times$	умножение	$a\times b$, $a\cdot b$, ab
$:$ или —	деление, отношение	$a:b$, $\frac{a}{b}$
a^n	a в степени n	
$\sqrt{\ }$	квадратный корень	$\sqrt{a}$
( ), [ ], { }	скобки: круглые, квадратные, фигурные	
—, /	дробь	$\frac{a-b}{c}$, $^2/_3$
%	проценты	78%
$\lvert\ \rvert$	абсолютная величина	$\lvert a\rvert$
$\parallel$	параллельно	$AB\parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	$AB\perp CD$
$\angle$ или $\measuredangle$	угол (плоский)	$\angle ABC$, $\angle B$, $\measuredangle B$
d	прямой угол	

$\smile$	дуга		$\smile AB$
$\triangle$	треугольник		$\triangle ABC$
$\backsim$	подобно		$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$
$^\circ$	градус	плоского угла или дуги	$27{,}3^\circ = 27^\circ{,}3$
$'$	минута		
$''$	секунда		$52^\circ 16' 39''$
$\sin\alpha$	синус α		$\sin 30^\circ$
$\cos\beta$	косинус β		$\cos 47^\circ 13'$
$\mathrm{tg}\, x$	тангенс x		$\mathrm{tg}\, ABC$
$\mathrm{ctg}\, A$	котангенс A		$\mathrm{ctg} \angle A$

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Арифметика и алгебра

Глава I ● Целые числа и десятичные дроби

§ 1. Числа, изучаемые в арифметике

1. Целые числа. Числа, которые получаются при счете, называются натуральными числами. Если натуральные числа расположить в порядке возрастания (от меньшего к большему), то получим натуральный ряд чисел. Наименьшее натуральное число — единица. Наибольшего натурального числа нет, потому что, какое бы большое число ни взяли, к нему можно прибавить единицу и получить еще большее число. Счет можно продолжать бесконечно. Бесконечный натуральный ряд можно записать так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Если имеется совокупность каких-нибудь предметов, то ее называют множеством, а предметы — элементами множества. Множество всех натуральных чисел бесконечно, а множество натуральных чисел, например первого десятка конечно (их только десять). Множество может содержать только один элемент и даже может не иметь элементов (пустое множество).

Под словами «целые числа» в арифметике понимают все множество натуральных чисел и число нуль (это еще не все множество целых чисел, ибо здесь нет целых отрицательных чисел).

2. Понятие о дроби. Если число 1 (оно может означать одно яблоко, один метр и т. д.) разделим, например, на 5 равных частей, то получим пятые доли единицы. Таких долей можно взять одну или несколько, и записывается это так: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$.

Число, состоящее из множества равных долей единицы, называется дробью.

Дробь, записанная с помощью двух целых чисел, называется обыкновенной дробью. Число, стоящее снизу (под чертой), называется знаменателем дроби и показывает, на сколько равных частей была разделена единица. Число, стоящее вверху (над чертой), называется числителем дроби и показывает, сколько равных долей единицы взято. Знаменатель не может быть нулем. Числитель и знаменатель — члены дроби.

Ту же дробь, например $\frac{3}{5}$, можно получить и другим способом, разделив 3 единицы на пять равных частей: $3:5=\frac{3}{5}$.

3. Десятичные дроби. Целые числа в десятичной системе счисления образуются следующим образом. 10 единиц образуют 1 десяток, 10 десятков образуют 1 сотню (сто), 10 сотен — 1 тысячу, 10 тысяч — 1 десяток тысяч и т. д. Так, в числе 325 содержится: сотен 3, десятков 2, единиц 5. Если брать слева направо, то каждая следующая разрядная единица в 10 раз меньше предыдущей (тысяча, сотня, десяток, единица). Если сотню разделим на 10 равных частей, то получим десяток; из десятка таким же образом получим единицу. Если же разделим единицу на 10 равных частей, то получим десятую долю единицы; разделив десятую долю единицы на 10 равных частей, получим сотую долю единицы. Дальше таким же образом получим тысячную, десятитысячную, стотысячную, миллионную и т. д. долю единицы. В числе таких десятичных долей единицы может быть несколько, и записываться они будут в перечисленном порядке направо от целых единиц, после запятой. Так, число 40,023 читается: сорок целых двадцать три тысячных.

Число, содержащее десятые, сотые, тысячные и т. д. доли единицы, записанные тем же способом, что и целые числа, называется десятичной дробью.

Из двух десятичных дробей та больше, у которой число целых больше; при равенстве целых та дробь больше, у которой число десятых больше; при равенстве целых и десятых та дробь больше, у которых сотых больше, и т. д. ($4{,}1 > 3{,}97$; $7{,}19 > 7{,}14$).

Перенесение запятой вправо на один знак увеличивает число в 10 раз, на два знака — в 100 раз, на три знака — в 1000 раз и т. д.

Перенесение запятой влево на один, два, три и т. д. знака уменьшает число соответственно в 10, в 100, в 1000 и т. д. раз.

4. Нахождение дроби данного числа. Задача 1. Сколько гектаров засеяно рожью, если ее посевы составляют 0,3 общей площади колхоза, равной 1340 *га*?

Решение. 0,1 общей площади составляет $1340 : 10 = 134$ (*га*), а 0,3 составят в три раза больше: $134 \cdot 3 = 402$ (*га*).

Задача 2. Сколько получим расплавленного чугуна, если в плавильную печь загружено 15 800 *кг* чугуна и потери на угары составляют 0,07 загрузки?

Решение. 0,01 загруженного чугуна составляет $15\,800 : 100 = 158$ (*кг*), а все потери — в 7 раз больше: $158 \cdot 7 = 1106$ (*кг*); расплавленного чугуна получим $15\,800 - 1106 = 14694$ (*кг*).

Чтобы от данного числа найти величину дроби, состоящей из n некоторых долей, достаточно найти от этого числа величину одной такой доли и умножить ее на n.

5. Нахождение числа по данной величине его дроби. Задача 1. Сколько ударов в минуту делает пульс человека, который насчитал 48 ударов за $\frac{2}{3}$ минуты?

Решение. Данная величина 48 содержит две таких доли, которых в искомом числе содержится три, поэтому $48 : 2 = 24$ есть $\frac{1}{3}$ искомого числа, а все это число в 3 раза больше: $24 \cdot 3 = 72$ (удара).

Задача 2. Какова скорость звука, если скорость реактивного пассажирского самолета равна 960 *км/ч* и составляет 0,8 скорости звука.

Решение. 0,1 от скорости звука составляет $960 : 8 = 120$, а скорость звука в 10 раз больше: $120 \cdot 10 = 1200$ (*км/ч*).

Чтобы найти число по данной величине его дроби, состоящей из n долей, полученных делением единицы на m равных частей, достаточно

данную величину разделить на n и полученный результат умножить на m.

6. Метрическая система мер. Кроме отвлеченных чисел (например, 35; 709; 5128 и др.), в арифметике встречаются еще именованные числа, получаемые в результате измерения конкретных величин (длины, площади, объема, веса и т. д.).

Основная единица длины — метр. Вот ее соотношения с другими единицами длины: 1 *м* = 10 *дм* = 100 *см* = 1000 *мм* = 0,001 *км*.

Основная единица площади — квадратный метр. 1 *кв. м* = 100 *кв. дм* = 10 000 *кв. см* = 1 000 000 *кв. мм* = 0,000001 *кв. км*. Широко распространены единицы площади гектар и ар: 1 *га* = 10 000 *кв. м* и 1 *а* = 100 *кв. м*.

Основная единица объема — кубический метр. 1 *куб. м* = 1000 *куб. дм* = 1 000 000 *куб. см* = 1 000 000 000 *куб. мм* = 0,000 000 001 *куб. км*. Для измерения объема жидкостей применяются литры: 1 *л* = 1 *куб. дм*.

Основная единица веса — килограмм. 1 *кг* = 1000 *г* = 1 000 000 *мг* = 0,01 *ц* = 0,001 *т*.

Упражнения 1—9

1. Назовите: а) первые пять классов чисел; **б)** первые разряды каждого из этих классов; **в)** вторые разряды тех же классов; **г)** их третьи разряды.

2. а) Сколько нужно знаков (цифр), чтобы записать любое число в десятичной системе счисления? Напишите все арабские цифры.

б) Всегда ли одна и та же цифра (например, 4) означает одно и то же число (142; 4000; 4)?

в) Меняется ли значение одной и той же цифры в римской нумерации от перемены ее места в записи числа (I = 1; II = 2; III = 3; IV = 4; V = 5; VI = 6; VII = 7; VIII = 8; IX = 9; X = 10; XI = 11; ...; XX = 20; XXX = 30; XL = 40; L = 50; LX = 60 и т. д.)?

г) Какая из двух письменных нумераций является позиционной и какая не является позиционной?

3. а) Как разделить 3 яблока между четырьмя мальчиками поровну?

б) Каким еще способом можно получить дробь $\frac{3}{4}$?

4. а) Во сколько раз тысяча больше десятка, миллион — сотни, единица — сотой доли, десятая — десятитысячной?

б) Во сколько раз миллиметр меньше дециметра, ар — гектара, кубический сантиметр — литра, миллиграмм — грамма, центнер — тонны?

5. а) Что меньше и во сколько раз: 1,5 и 150; 0,7 и 0,0007; 200 и 0,02; 360 и 36 000; 0,0297 и 29 700?

б) Увеличить в 10 000 раз: 0,35; 174; 0,0001; 5,000009.

в) Уменьшить в 100 раз: 93,5; 8,005; 0,01; 7; 1520.

6. а) Что больше: 17,59 или 20,58; 439,75 или 439,68; 0,0096 или 0,01; 0,30632 или 0,30617?

б) Что меньше: $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{2}$; $\frac{3}{5}$ или $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$ или $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{15}$ или 0,1; $\frac{7}{90}$ или 0,07; $\frac{13}{105}$ или 1,013?

7. а) Найти дробь от данного числа: $\frac{5}{7}$ от 56; $\frac{4}{11}$ от 121; 0,17 от 300; 0,9 от 510; 0,0001 от 10; 0,002 от 400.

б) Найти число, если: $\frac{2}{7}$ его составляют 260; 0,6 его составляют 150; 0,27 его составляют 135; 0,0609 его составляют 18 270.

8. При молотьбе пшеницы получается 0,7 зерна, 0,27 мякины и 0,03 других отходов. Сколько получится зерна, мякины и других отходов, если их общий вес составляет 178 *ц*?

9. Вес сахара составляет 0,15 веса той свеклы, из которой он изготовлен. Сколько переработано свеклы, если из нее получено 16,5 *т* сахара?

§ 2. Четыре действия над целыми числами и десятичными дробями

Каждое арифметическое действие состоит в нахождении по двум данным числам третьего числа. Данные числа называются компонентами, а искомые — результатом действия.

1. Сложение и вычитание. Если к множеству единиц (или долей единицы) одного данного числа присчитать по одной все единицы (или такие же доли единицы) другого данного числа, то полученное число называется суммой двух данных чисел. Данные числа называются слагаемыми. *Действие, заключающееся в нахождении суммы* *двух данных чисел, называется сложением.* $7{,}6 + 23{,}1 = 30{,}7$.

Действие, заключающееся в нахождении одного из слагаемых по известной сумме и другому слагаемому, называется вычитанием. $30{,}7 - 7{,}6 = 23{,}1$. Данная сумма (30,7) при вычитании называется уменьшаемым, известное слагаемое (7,6) — вычитаемым, а искомое слагаемое (23,1) — разностью. Другими словами: уменьшаемое — это число, из которого вычитают, вычитаемое — число, которое вычитают, разность — результат вычитания.

Если одно из двух данных множеств пустое (см. пункт 1 § 1), то: $a + 0 = a$, $0 + b = b$, $a - 0 = a$; но если мы имеем разность вида $0 - b$, то вычитание невозможно (во множестве неотрицательных чисел, которые рассматриваем в арифметике).

Сложение и вычитание — действия взаимно обратные (что в одном находим, то в другом известно).

Если сложение и вычитание выполняются устно, то запись их делают в строчку. Если же действия выполняются письменно, то записывают их в столбик так, чтобы единицы стояли под единицами, десятки под десятками, сотни под сотнями и т. д., а десятые доли под десятыми, сотые под сотыми и т. д. Действие начинают выполнять справа.

$$\begin{array}{rr} & 1257 \\ + & 890 \\ \hline & 2147 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 5000 \\ - & 97 \\ \hline & 4903 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 91{,}05 \\ + & 0{,}963 \\ \hline & 92{,}013 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 270 \\ - & 0{,}86 \\ \hline & 269{,}14 \end{array}$$

За один раз можно сложить и больше двух слагаемых.

Сложение проверяют вычитанием: если из суммы вычесть одно слагаемое и при этом получится другое слагаемое, то сложение выполнено верно.

Вычитание можно проверить сложением (при сложении разности с вычитаемым должно получиться уменьшаемое) или вычитанием (при вычитании разности из уменьшаемого должно получиться вычитаемое).

2. Умножение. Здесь надо различать два случая. *Умножение на целое число, большее единицы,— это действие, заключающееся в нахождении суммы одинаковых слагаемых.* Например, $0{,}2 \cdot 3 = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6$. Число, являющееся одинаковым слагаемым (0,2), называется множимым. Число (3), которое указывает, сколько одинаковых слагаемых, называется **множителем**. Каждый компонент умножения называется **сомножителем**. Результат умножения называется **произведением** (0,6).

Если множитель есть единица, то произведением является множимое ($a \cdot 1 = a$). Если множитель есть нуль, то и произведение также нуль ($a \cdot 0 = 0$).

Умножением данного числа на дробь называется нахождение дроби от данного числа. Например: $15{,}6 \cdot 0{,}4$ означает найти дробь 0,4 от 15,6, т. е. найти 0,1 от 15,6 (уменьшить 15,6 в 10 раз перенесением запятой) и увеличить в 4 раза полученное число ($1{,}56 \cdot 4 = 1{,}56 + 1{,}56 + 1{,}56 + 1{,}56 = 6{,}24$). $15{,}6 \cdot 0{,}4 = 6{,}24$.

Из двух приведенных примеров видно, что те же произведения (0,6 и 6,24) мы можем получить короче, если, не обращая внимания на запятые в сомножителях, мы перемножим их, как целые числа, и в полученном произведении отделим запятой справа столько знаков, сколько их имеется в обоих слагаемых вместе ($0{,}2 \cdot 3$; $2 \cdot 3$; 0,6). В этом и состоит правило умножения десятичных дробей. Если устно умножить числа трудно, то их подписывают в столбик, однако здесь целые не обязательно должны стоять под целыми, десятые — под десятыми и т. д.

$$\begin{array}{r} 705\\ \times\;2004\\ \hline 2820\\ 1410\\ \hline 1412820 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15{,}6\\ \times\;0{,}4\\ \hline 6{,}24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1460\\ \times\;2{,}09\\ \hline 1314\\ 292\\ \hline 3051{,}40 \end{array}$$

3. Деление. *Действие, состоящее в отыскании одного из двух сомножителей по известному другому сомножителю и их произведению, называется делением.* Умножение и деление — действия взаимно обратные: $1{,}6 \cdot 5 = 8$; $8 : 1{,}6 = 5$. При делении произведение (8) называется **делимым**, известный сомножитель (1,6) — **делителем**, а искомый сомножитель (5) — **частным**.

Делимое может быть нулем ($0 : a = 0$), однако делить на нуль невозможно.

Приведем примеры письменного выполнения деления целых чисел и десятичных дробей в различных случаях.

1) 67000 | 134
670 500
0

2) 1596717 | 531
1593 3007
3717
3717
0

3) 125 | 40
120 3,125
50
40
100
80
200
200
0

4) 1699,52 | 452
1356 3,76
3435
3164
2712
2712
0

5) 108 : 0,15,
10800 | 15
105 720
30
30
0

6) 15,368 : 0,34;
1536,8 | 34
136 45,2
176
170
68
68
0

7) 0,30135 : 14,35;
30,135 | 1435
2870 0,021
1435
1435
0

Если при делении число целых единиц в остатке окажется меньше делителя, то в частном ставим запятую, раздробляем целые единицы остатка в десятые доли (сносим к остатку цифру десятых долей делимого, а если их нет — приписываем к остатку нуль) и продолжаем деление.

Если делителем является десятичная дробь, то зачеркиваем в делителе запятую и увеличиваем делимое во столько раз, во сколько увеличен делитель, после чего новое делимое делим на целое число (от этого частное не изменится; см. п. 2 § 4).

Умножение проверяется делением (при делении произведения двух сомножителей на один из сомножителей должен получиться другой сомножитель). Деление проверяется умножением (перемножая делитель и частное, должны получить делимое) или делением (при делении делимого на частное должен получиться делитель).

Умножением убеждаемся в правильности правил деления целых чисел и десятичных дробей:

1) 134·500 = 67 000;
3) 3,125·40 = 125;

7)
$$\begin{array}{r} \times\ 14{,}35 \\ 0{,}021 \\ \hline 1435 \\ 2870 \\ \hline 0{,}30135 \end{array}$$

4. Округление десятичных дробей и целых чисел. При делении 125 на 40 в целых числах получаем частное 3 и остаток 5. Однако, если продолжать деление в десятичных дробях, то получим частное 3,125 и остатка не будет (равен нулю). Мы получили конечную десятичную дробь, которая имеет последнюю цифру (5 тысячных). Но если 125 будем делить на 30, то остаток (20) будет бесконечно повторяться и получим в частном бесконечную десятичную дробь 4,1666..., в которой цифра 6 будет бесконечно повторяться. В другом примере 1 : 3 = = 0,333... бесконечно повторяется цифра 3.

$$\begin{array}{r|l} 125 & 30 \\ \cline{2-2} 120 & 4{,}1666\ldots \\ \hline 50 & \\ -30 & \\ \hline 200 & \\ -180 & \\ \hline 200 & \\ -180 & \\ \hline 200 & \\ 180 & \\ \hline 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 0{,}333\ldots \\ 9 & \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 10 & \\ -9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

В частном $3:11 = 0{,}272727...$ бесконечно повторяются две цифры (27). Такие бесконечные десятичные дроби называются **периодическими**, а повторяющаяся цифра (или цифры) называется **периодом**. Их можно записать так: $4{,}1666... = 4{,}1(6)$; $0{,}333... = 0,(3)$; $0{,}272727... = 0{,}(27)$.

Значения таких частных можно взять приближенно, например с точностью до 0,01: $4{,}1666... \approx 4{,}16$; $0{,}0333... \approx \approx 0{,}33$; $0{,}272727... \approx 0{,}27$. Значения здесь взяты по недостатку, так как они меньше точных значений бесконечных дробей (например: $4{,}16 < 4{,}1666...$). Если эти приближенные значения по недостатку увеличим на 0,01, то получим приближенные значения тех же бесконечных дробей с точностью до 0,01 по избытку: $4{,}1666... \approx 4{,}17$; $0{,}333... \approx \approx 0{,}34$; $0{,}272727... \approx 0{,}28$. Значение по избытку больше точного значения ($4{,}17 > 4{,}1666...$). Замена числа его приближенным значением называется округлением. Округлять лучше по недостатку, если первая из отбрасываемых цифр 0, 1, 2, 3 или 4, и по избытку, если такая цифра есть 5, 6, 7, 8 или 9. В наших примерах: $4{,}1666... \approx 4{,}17$; $0{,}333... \approx \approx 0{,}33$; $0{,}272727... \approx 0{,}27$. Если округляем до разряда десятых долей, то отбрасываем сотые, тысячные и т. д. Можно округлять и конечные десятичные дроби, например: $26{,}35 \approx 26{,}4$; $0{,}9304 \approx 0{,}930$. При округлении целых чисел отбрасываемые цифры обязательно заменять нулями, например: $6\,025\,098 \approx 6\,025\,000$ (округлили до разряда единиц тысяч), $345\,807 \approx 345\,810$ (до десятков).

5. Порядок действий. Сложение и вычитание называются **действиями первой ступени**, а умножение и деление — **действиями второй ступени**.

Правила порядка действий (если нет скобок): 1) если над числами надо выполнить действия только первой или только второй ступени, то они выполняются в том порядке, в каком записаны; 2) если над числами выполняются действия обеих ступеней, то сначала выполняются действия второй (высшей) ступени в порядке их записи, а затем действия первой (низшей) ступени в порядке их записи.

Правила порядка действий (если имеются скобки): 3) действия выполняются сначала в круглых скобках, затем в квадратных, потом в фигурных (если они есть) и, наконец, за скобками; 4) если в одних скобках имеется несколько действий, то они выполняются в том порядке, который установлен правилами 1 и 2, и также за скобками.

Упражнения 10—19

Выполнить указанные действия:

10.
$$\begin{array}{r} 53{,}404\\ +\;1{,}4342\\ 0{,}05\\ 5{,}5428\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} -\;23{,}0105\\ 19{,}478\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} \times\;0{,}0105\\ 2{,}04\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 183{,}96 & \underline{10{,}512} \end{array}$$

11. (Устно.) а) $7{,}5+8+0+0{,}45+1{,}05$;

б) $43{,}75-0{,}5-0-30$;

в) $17{,}4\cdot 3$; $52\cdot 0{,}2\cdot 1$; $0{,}24\cdot 0{,}001$; $9{,}95\cdot 0$; $0\cdot 1$;

г) $6{,}3:3$; $1{,}8:6$; $0{,}8:4$; $49:0{,}7$; $0{,}65:0{,}5$; $0:0{,}5$; $1:0{,}01$; $3{,}006:1$.

12. $0{,}632:1{,}264+0{,}228:\{[1{,}5291-14{,}53662:(3-0{,}095)\cdot 0{,}305]:0{,}12\}$.

Решение. 1)
$$\begin{array}{r} -\;3{,}000\\ 0{,}095\\ \hline 2{,}905 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} 14\,536{,}62 & 2\,905\\ \cline{2-2} 14\,525\phantom{{,}62} & 5{,}004\\ \cline{1-1} 11620 & \\ 11620 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} \times\;5{,}004\\ 0{,}305\\ \hline 25\,020\\ 15012\\ \hline 1{,}526220 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} -\;1{,}5291\\ 1{,}52622\\ \hline 0{,}00288 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r|l} 0{,}288 & 12\\ \cline{2-2} 24 & 0{,}024\\ \cline{1-1} 48 & \\ 48 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r|l} \underline{632} & 1264\\ \cline{2-2} 6320 & 0{,}5\\ 6320 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r|l} 228 & 24\\ \cline{2-2} 216 & 9{,}5\\ \cline{1-1} 120 & \\ 120 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

8) $0{,}5+9{,}5=10$.

Ответ: 10.

13. а) $117:100+0{,}216\cdot 35$;

б) $4{,}609-1{,}37+5\cdot 0{,}125$;

в) $(1\cdot 12{,}5+0{,}168:0{,}15)\cdot(2{,}1-0{,}6):0{,}09$.

14. а) $[(13{,}051+16{,}92):(1{,}875+0{,}175)-1{,}1]:[(0{,}855+0{,}185)\cdot 4]$;

б) $52:\{6:(0{,}4-0{,}2):[2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)]+(34{,}06-33{,}81)\cdot 4:[6{,}84:(28{,}57-25{,}15)]\}-8$.

15. Выполнить действия, вычислив приближенное частное с точностью до 0,001 (округлить ответ во втором примере до десятых долей):

а) $(11{,}69 + 9{,}3 - 12{,}79) \cdot 0{,}9 : 16{,}2$;

б) $(16{,}97 + 25{,}84) \cdot (35{,}49 : 4{,}563)$.

16. Округлить:

а) до разряда сотен 305 769; 59 241; 2 780 250;

б) до целых гектаров 8 327 123 *кв. м*; 13012450 *кв. м*; до целых литров 247 380 *см*^{3}; 4 506 *см*^{3};

в) до десятых долей 3,051; 0,84; 0,09306; до миллионных долей 0,00310231; 0,0000998.

17. Продана ткань трех сортов. 0,3 всей ткани продали по 1,14 руб. за 1 *м*; 0,25 всей ткани продали по 0,98 руб. и 13,5 *м* остальной ткани продали по 1,41 руб. за 1 *м*. Сколько денег получено за всю проданную ткань?

Примечание. Задачи по арифметике рекомендуется решать арифметически, т. е. без составления уравнений.

18. Кладовщик по первому ордеру выдал 0,4 всей наличной проволоки, а по второму — 0,75 остатка, и у него осталось еще 28,5 *кг*. Сколько проволоки было до первой выдачи?

19. Если неизвестное число умножить на 0,25 и из произведения вычесть 0,5, то получится 1. Найти число.

§ 3. Законы и свойства арифметических действий

1. Переместительный закон сложения. ***Сумма не изменяется от перемены мест слагаемых:***

$$a+b=b+a;\ a+b+c=a+c+b=c+a+b=$$
$$=c+b+a=\dots \text{ и т. д.}$$

Убедитесь в этом вычислением обеих частей каждого из равенств: $19 + 6 = 6 + 19$; $0{,}73 + 2{,}07 = 2{,}07 + 0{,}73$; $0{,}3 + 1{,}2 + 18 + 0{,}055 = 1{,}2 + 18 + 0{,}055 + 0{,}3$ и т. д.

2. Сочетательный закон сложения. ***Сумма не изменится, если рядом стоящие слагаемые заменить их суммой:***

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Числовой пример: $3{,}17 + 0{,}36 + 11{,}64 = 3{,}17 + (0{,}36 + 11{,}64)$; левая часть: $3{,}17 + 0{,}36 + 11{,}64 = 3{,}53 + 11{,}64 =$

$= 15,17$; правая часть: $3,17 + (0,36 + 11,64) - 3,17 + 12 = 15,17$; $15,17 = 15,17$.

Применение переместительного и сочетательного законов сложения позволяет заменять суммой любые слагаемые (не только рядом стоящие).

3. Переместительный закон умножения. ***Произведение не изменяется от перестановки сомножителей:***

$$ab = ba; \ abc = acb = cab = cba = bac = bca.$$

Убедитесь в этом на числовых примерах.

4. Сочетательный закон умножения. ***Произведение не изменится, если несколько рядом стоящих сомножителей заменить их произведением:***

$$abc = a(bc).$$

Переместительный закон вместе с сочетательным позволяет заменить произведением и не рядом стоящие сомножители: $1,62 \cdot 4 \cdot 0,125 \cdot 0,25 \cdot 8 = 1,62 \cdot (4 \cdot 0,25) \cdot (8 \cdot 0,125) = 1,62 \cdot 1 \cdot 1 = 1,62$. Как видно из этого примера, выполнение действий иногда облегчается благодаря применению их законов. Законы действий широко используются при устных вычислениях.

5. Распределительный закон умножения. ***Чтобы умножить сумму нескольких слагаемых на число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить:***

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Это распределительный закон умножения относительно сложения. Относительно вычитания этот закон записывается так:

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Убедитесь в верности распределительного закона умножения на числовых примерах.

6. Свойства действий. Укажем здесь лишь те свойства, на которые придется ссылаться в алгебре.

Чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другим:

$$m + (a + b + c) = m + a + b + c.$$

Чтобы умножить число на произведение нескольких сомножителей, достаточно умножить данное число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д.:

$$m \cdot abc = mabc.$$

Чтобы умножить произведение нескольких сомножителей на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения:

$$(abc) \cdot m = (a \cdot m) \cdot bc.$$

Чтобы разделить сумму нескольких слагаемых на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить:

$$(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m.$$

Чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из сомножителей, оставив другие сомножители без изменения:

$$(abc) : m = (a : m) \cdot bc.$$

Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д.

$$m : (abc) = [(m : a) : b] : c.$$

Подставьте вместо букв числа и проверьте равенства, выражающие свойства.

Упражнения 20—25

20. Выполнить указанные действия устно наиболее удобным способом:

а) $175 + 359 + 525$; $2,15 + 4,76 + 1,35$; $169 + 87 + 531$; $28 + 379 + 122$; $243 + 3,19 + 127 + 6,31$;

б) $5 \cdot 47$; $7 \cdot 309$; $30 \cdot 106$; $2 \cdot 34 \cdot 50$; $25 \cdot 237 \cdot 4$; $5 \cdot 1238 \cdot 2$; $125 \cdot 376 \cdot 8$; $12 \cdot 0,14 \cdot 0,25$; $16 \cdot 1,36 \cdot 0,125$;

в) $(50 + 6) \cdot 8$; $(300 + 9) \cdot 4$; $(6000 + 5) \cdot 3$; $206 \cdot 9$; $7 \cdot 409$; $(400 - 5) \cdot 6$; $5 \cdot (800 - 16)$; $592 \cdot 4$; $3 \cdot 781$; $4 \cdot (35,8 -$

$-0,25)$; $0,25 \cdot (64,7 - 60,3)$; $(78,2 + 21,8) \cdot 0,0396$; $(3.64 + 6,36) \cdot 7905$; $(15,5 + 0,125) \cdot 8$;

г) $0,5 + (1,5 + 2,78)$; $2 \cdot (1,75 \cdot 0,4 \cdot 0,01)$; $(6,35 \cdot 0,25 \times 3) \cdot 4$; $(30 + 0,45 + 150) : 15$; $(0,175 \cdot 7) : 25$; $240 : (12 \cdot 0,4 \times 12,5)$.

Примечание. Законы и свойства арифметических действий позволяют несколько изменить установленный порядок выполнения действий (§ 2) с целью упрощения вычислений; так, в некоторых примерах выгодно начинать не с выполнения действия в скобках, а с применения распределительного закона умножения

21. а) $0,25 \cdot 1,5 + (3,05 \cdot 4,08 - 19,05 : 3,75 + 0,036) : (2,92 + 21,59 : 4,25)$;

б) $(4,3 + 2,8) \cdot (4,3 - 2,8) : [(3,6 - 0,63) : (4,61 + 7,27)] + 4,488 : 0,12$.

22. В 7 часов из пунктов A и B выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста, выехавшего из пункта A, равнялась 14 *км/ч*, а другого — 13 *км/ч*. Первый достиг пункта B в 11 часов. На каком расстоянии от пункта A был в это время другой велосипедист?

Решение. 1) За сколько времени первый велосипедист достиг пункта B?

$$11 - 7 = 4 \text{ (часа)}.$$

2) Какое расстояние между пунктами A и B?

$$14 \cdot 4 = 56 \text{ (км)}.$$

3) Какое расстояние проехал второй велосипедист за 4 часа?

$$13 \cdot 4 = 52 \text{ (км)}.$$

4) Сколько осталось еще проехать второму велосипедисту до пункта A?

$$56 - 52 = 4 \text{ (км)}.$$

23. а) Сумма двух чисел 167,28. Одно из них больше другого на 87,72. Найти эти два числа.

б) Найти два числа по их сумме s и разности r.

24. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу. Расстояние между их станциями отправления 566,4 *км*. Какая скорость каждого поезда, если они встретились через 3 часа 12 минут после отправления и если разность их скоростей составляла 63 *км/ч*?

25. Спортсмен на байдарке прошел по течению реки 13,2 *км* за 1 час и вернулся к тому же месту, плывя против течения, за 1,5 часа. Определить скорость течения реки и собственную скорость движения байдарки.

§ 4. Изменение суммы, разности, произведения и частного

Следующие правила, выражающие изменение результатов действий в зависимости от изменения одного из компонентов, устанавливаются из рассмотрения числовых примеров.

1. Увеличение и уменьшение на некоторое число компонентов сложения и вычитания.

Если, не изменяя одного слагаемого, другое слагаемое увеличить на какое-нибудь число, то и сумма увеличится (а при уменьшении слагаемого — уменьшится) на такое же число:

$$20 + 10 = 30; \quad 25 + 10 = 35; \quad 19 + 10 = 29.$$

Если увеличить (уменьшить) уменьшаемое на какое-нибудь число, не изменяя вычитаемого, то и разность увеличится (уменьшится) на такое же число:

$$60 - 20 = 40; \quad 63 - 20 = 43; \quad 58 - 20 = 38.$$

Если вычитаемое увеличим (уменьшим) на какое-нибудь число, не изменяя уменьшаемого, то разность уменьшится (увеличится) на такое же число:

$$50 - 30 = 20; \quad 50 - 31 = 19; \quad 50 - 27 = 23.$$

2. Увеличение и уменьшение в несколько раз компонентов умножения и деления.

Если один из сомножителей увеличить (уменьшить) в несколько раз, не изменяя другого сомножителя, то и произведение увеличится (уменьшится) во столько же раз:

$$5 \cdot 3 = 15; \quad 5 \cdot 6 = 30; \quad 5 \cdot 1 = 5.$$

Если делимое увеличить (уменьшить) в несколько раз, не изменяя делителя, то и част-

ное увеличится (уменьшится) во столько же раз:

$$20:5=4;\quad 60:5=12;\quad 10:5=2.$$

Если делитель увеличить (уменьшишь) в несколько раз, не изменяя делимого, то частное уменьшится (увеличится) во столько же раз:

$$60:6=10;\quad 60:12=5;\quad 60:2=30.$$

Если оба компонента деления увеличить (или оба уменьшить) в одно и то же число раз, то частное не изменится. В самом деле, например, от увеличения делимого частное увеличится, а от увеличения делителя частное уменьшится, причем в то же число раз, а в итоге частное не изменится. Это — основное свойство частного.

Упражнения 26—33

26. а) $17+5=22$; $(17-0{,}5)+(5+0{,}5)=16{,}5+5{,}5=22$. Объясните, почему сумма (22) не изменилась, хотя слагаемые изменились. Сформулируйте правило.

б) $12\cdot 2{,}5=30$; $(12:4)\cdot(2{,}5\cdot 4)=3\cdot 10=30$. Объясните, почему произведение (30) не изменилось, хотя сомножители изменились. Сформулируйте правило.

27. а) Одно из слагаемых увеличили на 35,4, а другое слагаемое уменьшили на 40,3. Как изменилась сумма?

б) Один из сомножителей увеличили в 7 раз, а другой сомножитель уменьшили в 2 раза. Как изменилось произведение?

28. а) Как изменится разность, если уменьшаемое уменьшим на 15,25, а вычитаемое увеличим на 3,75?

б) Как изменится разность, если уменьшаемое увеличить на 105 и вычитаемое увеличить на 70,2?

в) В каких случаях при изменении уменьшаемого и вычитаемого разность не изменится?

29. а) Как изменится частное, если делимое увеличить в 5 раз, а делитель уменьшить в 3 раза?

б) Как изменится частное, если делимое уменьшить в 6 раз и делитель уменьшить в 3 раза?

в) В каких случаях при изменениях делимого и делителя частное не изменится?

30. Вычислить:

а) $(1{,}0905:0{,}025-6{,}84\ 3{,}07+2{,}38:100):(2{,}192:6{,}85+45{,}553\cdot 0{,}04+0{,}12238)$;

б) $0{,}1554:0{,}037+(5{,}036\cdot 9{,}07+8{,}096\cdot 7{,}005+2{,}139):(10-6{,}525):3{,}76-9{,}85$.

31. Найти два числа, если:

а) их сумма равна 80 и одно из чисел составляет 0,6 другого числа;

б) их сумма равна 228, а их частное равно 8,5;

в) их сумма равна s и одно из чисел больше другого в n раз.

32. Огород имеет форму прямоугольника длиной в 32 *м* и шириной 10 *м*. 0,05 всей площади огорода засеяно морковью, а остальная часть огорода засажена картофелем и луком, причем картофелем засажена площадь в 7 раз большая, чем луком. Какая площадь занята картофелем, луком и морковью в отдельности?

33. Одна бригада может выполнить некоторую работу за 5 дней. Ту же работу вторая бригада может выполнить в 1,25 раза скорее, чем первая, а третья бригада в 1,25 раза скорее, чем вторая. За сколько дней будет выполнена вся работа, если три бригады будут работать вместе?

Примечание. В задачах такога типа, где объем выполняемой работы не указан, вся работа принимается за 1; ответ округлить до 0,01 дня.

§ 5. Нахождение слагаемого, уменьшаемого, вычитаемого, сомножителя, делимого и делителя

Рассмотрим решения самых простейших уравнений, в каждом из которых требуется найти неизвестный компонент арифметического действия по известному компоненту и данному результату действия.

1. Решение уравнения $x+17=25$ (или $17+x=25$) следует из определения действия вычитания (§ 2): $x=25-17=8$.

Чтобы найти неизвестное слагаемое, достаточно из суммы двух слагаемых вычесть известное слагаемое: $x+a=b$, $x=b-a$.

2. $x-14{,}5=12{,}5$; так как по определению уменьшаемое есть сумма вычитаемого и разности (§ 2), то $x=12{,}5+14{,}5=27$.

Чтобы найти уменьшаемое, достаточно к вычитаемому прибавить разность: $x - a = b$, $x = a + b$.

3. $42{,}6 - x = 25$; $x = 42{,}6 - 25 = 17{,}6$.

Чтобы найти вычитаемое, достаточно из уменьшаемого вычесть разность: $a - x = b$, $x = a - b$.

4. $x \cdot 7{,}25 = 725$; решение этого уравнения следует из определения деления (§ 2). $x = 725 : 7{,}25 = 100$.

Чтобы найти неизвестный сомножитель, достаточно разделить произведение двух сомножителей на известный сомножитель: $x \cdot a = b$, $x = b : a$.

5. $x : 2{,}5 = 14$; так как по определению делимое есть произведение делителя и частного, то $x = 14 \cdot 2{,}5 = 35$.

Чтобы найти делимое, достаточно делитель умножить на частное: $x : a = b$, $x = a \cdot b$.

6. $45 : x = 22{,}5$; $x = 45 : 22{,}5 = 2$.

Чтобы найти делитель, достаточно делимое разделить на частное: $a : x = b$, $x = a : b$.

Упражнения 34—41

34. Найти x из уравнения $(64 - 16x) : 0{,}4 + 13 = 24$ арифметическим путем.

Решение. 24 есть сумма двух слагаемых: 13 и $(64 - 16x) : 0{,}4$; последнее слагаемое, содержащее x, равно $24 - 13 = 11$. Получаем более простое уравнение: $(64 - 16x) : 0{,}4 = 11$, в котором 11 является частным, 0,4 является делителем, $(64 - 16x)$ — делимым. Делимое равно $0{,}4 \cdot 11 = 4{,}4$. Получаем еще более простое уравнение: $64 - 16x = 4{,}4$. Найдем вычитаемое $16x$; оно равно $64 - 4{,}4 = 59{,}6$. $16x = 59{,}6$, откуда неизвестный множитель $x = 59{,}6 : 16 = 3{,}725$.

Ответ: $x = 3{,}725$.

35. Пользуясь правилами решения арифметических уравнений (§ 5), найти x: а) $7x - 40 = 37$; б) $(15 + 2x) : 5 = 8{,}4$; в) $(0{,}12 + 34x) \cdot 56 - 7{,}89 = 189{,}23$.

36. Найти среднее арифметическое чисел: а) 20 и 27; б) 130,6; 142,9 и 149,5; в) a, b, c и d.

Примечание. Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество

37. а) Вычислить, какую в среднем зарплату получал рабочий в месяц, если 3 месяца он получал по 115,6 руб., 5 месяцев — по 98,2 руб. и 4 месяца — по 88,3 руб.

б) Самолет пролетел в первый час 690 *км*, что составляло 0,23 всего расстояния, которое он должен пролететь за 4 часа. С какой средней скоростью должен пролететь самолет все маршрутное расстояние?

38. Найти два числа, если:

а) их разность равна 36,2 и одно из чисел больше другого в 3 раза;

б) их разность равна r и одно из чисел больше другого в m раз;

в) их разность 52,5 и одно из чисел составляет 0,7 другого.

39. Со станции отправился поезд, идущий со скоростью 60 *км/ч*. Через 1,5 часа с этой же станции в том же направлении отправился другой поезд со скоростью 100 *км/ч*. Через сколько времени второй поезд нагонит первый и на каком расстоянии от станции отправления?

40. Цистерна наполняется нефтью двумя трубами за 1,6 часа, а одной трубой за 2,5 часа. За сколько времени наполнится цистерна другой трубой? (Ответ округлить до десятых долей часа.)

41. По норме тракторист должен за 15 дней вспахать 63 *га*. За сколько дней тракторист вспахал 116 *га*, если дневную норму он перевыполнял в среднем на 1,6 *га*?

Глава II ● Обыкновенные дроби

§ 6. Делимость натуральных чисел

1. Простые и составные числа. Делитель и кратное. *Если одно из натуральных чисел* (см. п. 1 § 1) *делится на другое без остатка, то первое число называется кратным второго, а второе — делителем первого.* Например, $14:7=2$; 14 — кратное числа 7, а 7 — делитель числа 14; 14 — кратное числа 2, а 2 — делитель числа 14.

Каждое натуральное число, кроме 1, имеет по крайней мере два различных делителя (оно делится без остатка на себя и на 1).

Число, которое имеет только два делителя, называется простым. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и т. д. — простые. Их бесконечное множество.

Число, имеющее более двух делителей, называется составным. Например, число 14 имеет делители 1, 2, 7 и 14; число 30 имеет делители 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Составных чисел имеется также бесконечно много.

Число 1 имеет только один делитель и не является ни простым, ни составным.

2. Признаки делимости на 2, 5, 3 и 9.

Если каждое слагаемое делится без остатка на данное число, то и сумма разделится без остатка на данное число. Например, $15+20+5+35=75$; каждое слагаемое делится на 5, поэтому и сумма (75) делится на 5.

Если делятся на данное число все слагаемые, кроме одного слагаемого, которое не делится на данное число, то и сумма не разделится на

данное число. Например, $20 + 7 + 40 + 10 + 130 = 207$; все слагаемые, кроме 7, делятся на 10, а 7 не делится на 10, поэтому и сумма (207) не делится на 10.

Если хотя бы один из сомножителей делится на данное число, то и все произведение разделится на данное число. Например, $15 \cdot 18 = 270$; 18 делится на 9, поэтому и 270 делится на 9 без остатка.

Число, которое делится на 2, называется четным. Множество четных натуральных чисел: 2, 4, 6, 8, 10, 12 и т. д. — бесконечное.

Число, которое не делится на 2, называется нечетным. Множество нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 и т. д. — бесконечное.

Нуль считается четным числом.

Каждое натуральное число можно представить в виде двух слагаемых таким образом: $56 = 50 + 6$; $193 = 190 + 3$; $9370 = 9370 + 0$; $7 = 0 + 7$. Первое слагаемое есть число круглых десятков, и оно всегда делится на 2 и на 5. Если и второе слагаемое (число простых единиц) будет делиться на 2, то и все число будет делиться на 2; если же число простых единиц не делится на 2, то и все число не разделится на 2.

На 2 делятся все те и только те числа, у которых в разряде единиц — четное число.

Делимость числа на 5 также зависит только от его цифры простых единиц.

На 5 делятся все те и только те числа, у которых цифра единиц 0 или 5.

Каждое число можно представить следующим образом: $576 = 500 + 70 + 6 = 100 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 6 = (99 + 1) \cdot 5 + (9 + 1) \cdot 7 + 6 = 99 \cdot 5 + 9 \cdot 7 + 5 + 7 + 6 = 99 \cdot 5 + 9 \cdot 7 + 18$. Первое слагаемое ($99 \cdot 5$) делится на 3 и на 9, потому что множитель 99 делится на 3 и на 9. То же надо сказать и о втором слагаемом $9 \cdot 7$. Все теперь зависит от третьего слагаемого ($18 = 5 + 7 + 6$), представляющего сумму цифр данного числа 576. Если и третье слагаемое разделится (на 3 и 9), то и сумма разделится, если же оно не разделится, то и сумма не разделится.

На 3 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3.

На 9 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 9.

3. Разложение составных чисел на простые множители. *Разложить число на простые множители — значит представить его в виде равного ему произведения простых чисел.* Например, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$.

$$\begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2457 & 3 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 555 & 3 \\ 185 & 5 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

$$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \quad 2457 = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \quad 555 = 3 \cdot 5 \cdot 37.$$

Если трудно сразу разложить данное число на простые множители, то определяют по признаку делимости, делится ли данное число на 2. Если делится, то делят и полученное частное подписывают под данным числом. Если это частное делится на 2, то делят, а если не делится, то определяют по признакам делимости, делится ли оно на 3, на 5, затем на 7, на 11 и т. д.

4. Наибольший общий делитель. *Число, на которое делится каждое из данных чисел, называется общим делителем этих чисел.* Так, у чисел 14, 22 и 30 общий делитель 2; у чисел 15 и 30 имеется три общих делителя (не считая 1): 3; 5 и 15.

Самый больший из общих делителей данных чисел называется их наибольшим общим делителем (НОД).

Чтобы найти НОД нескольких чисел, можно разложить их на простые множители, выписать их общие простые множители и перемножить. Например, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; НОД (210; 90 и 750) $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Однако часто можно найти НОД устно, без разложения на множители. Так, НОД (18 и 24) = 6; НОД (90; 45 и 135) = 45.

Числа, не имеющие общих делителей (кроме единицы), называются взаимно простыми. Например, 8 и 15; 27 и 40.

5. Наименьшее общее кратное. *Число, которое делится на каждое из данных чисел, называется общим кратным этих чисел.* Так, для чисел 3 и 8 общим кратным будет каждое из следующих чисел: 24, 48, 72, 96, 120 и т. д., т. е. общих кратных у любых данных чисел будет бесконечно много.

Самое меньшее из общих кратных данных чисел называется наименьшим общим кратным этих чисел (НОК).

НОК (3 и 8) = 24; НОК (5; 12 и 20) = 60. Если числа взаимно простые, то их произведение и есть их НОК. Если устно трудно найти НОК, то данные числа разлагают на простые множители, из большего числа выписывают все множители и к ним приписывают недостающие множители из разложений остальных чисел. Например, $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$; $280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$; $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; НОК (63; 280 и 150) $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}_{280} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 280 \cdot 45 = 12\,600$.

Упражнения 42—47

42. Найти устно, не разлагая на множители:

а) НОД чисел 36 и 60; 72 и 84; 96 и 120; 130 и 195; 64 и 160;

б) НОК чисел 15 и 25; 60, 80 и 120; 100, 200, 400 и 300;

в) НОД и НОК чисел 24 и 36; 60, 90 и 120.

43. Разложить на множители и найти:

а) НОД чисел 144 и 168; 375 и 625;

б) НОК чисел 64, 128 и 192; 124, 62, 93 и 310.

44. Вычислить:

а) $(17{,}76 + 19{,}048) : 7{,}385 \cdot (0{,}872 : 2{,}18 + 4{,}578 : 3{,}27)$;

б) $62{,}736 : 13{,}07 + (6{,}025 \cdot 6{,}08 + 18{,}78 : 3{,}75 - 4{,}856) : 6{,}05 : (4{,}7593 - 4{,}05 \cdot 0{,}706)$.

45. Смешали 2 сорта конфет: 6,2 *кг* по 6,5 руб. за 1 *кг* и 18,6 *кг* по 4,5 руб. за 1 *кг*. Сколько стоит 1 *кг* смеси?

46. Сколько взяли зерна для получения 181 *кг* хлеба, если при размоле зерна теряется 0,1 веса, а припек равен 0,4 веса муки? (Ответ дать с точностью до 1 *кг*.)

47. На платформы погружено 250 сосновых и еловых бревен, общий вес которых 74,9 *т*. Сколько по отдельности погружено тех и других бревен, если одно сосновое бревно весило 0,28 *т*, а еловое — 0,35 *т*?

§ 7. Свойства обыкновенных дробей

Понятие обыкновенной дроби дано в п. 2 § 1.

1. Правильные и неправильные дроби, смешанные числа. *Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, назы-*

вается правильной дробью. Дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему, называется неправильной дробью. Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{29}{100}$, $\frac{28}{71}$, $\frac{11}{236}$ и др. — правильные, дроби $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{23}{15}$, $\frac{70}{10}$, $\frac{101}{100}$, $\frac{3709}{2000}$ и др. — неправильные.

Правильная дробь всегда меньше единицы, неправильная дробь равна единице или больше единицы. Неправильная дробь либо равна целому числу $\left(\frac{3}{3}=1, \frac{28}{7}=4 \text{ и т. д.}\right)$, либо содержит целое число и правильную дробь $\left(\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}, \frac{103}{10}=10\frac{3}{10} \text{ и т. д.}\right)$.

Чтобы из неправильной дроби выделить целое число, нужно разделить числитель дроби на ее знаменатель, полученное частное сделать целым числом, остаток (если он не равен нулю) сделать числителем, оставив прежний знаменатель.

Число, содержащее целые единицы и правильную дробь, называется смешанным числом.

Чтобы обратить смешанное число в неправильную дробь, нужно знаменатель умножить на целое число, к полученному произведению прибавить числитель и сделать эту сумму числителем искомой дроби, а знаменатель оставить прежний $\left(5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}\right)$.

2. Изменение величины дроби. ***Если числитель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, а знаменатель оставить без изменения, то и величина дроби увеличится (уменьшится) во столько же раз.*** Возьмем $\frac{6}{7}$; дробь $\frac{12}{7}$ в 2 раза больше дроби $\frac{6}{7}$, так как она содержит в 2 раза больше таких же (седьмых) долей единицы; дробь $\frac{2}{7}$ в 3 раза меньше дроби $\frac{6}{7}$.

Если знаменатель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, не изменяя числителя, то величина дроби уменьшится (увеличится) во столько же раз. Дробь $\frac{9}{2}$ больше в 5 раз дроби

$\frac{9}{10}$, так как содержит столько же (9) в 5 раз больших долей; дробь $\frac{9}{20}$ в 2 раза меньше дроби $\frac{9}{10}$.

3. Основное свойство дроби. ***Если оба члена дроби увеличить в одно и то же число раз или уменьшить в одно и то же число раз, то величина дроби не изменится*** (см. задачу 29 (в)).

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3};\ \frac{5}{9}=\frac{10}{18};\ \frac{33}{22}=\frac{3}{2};\ \frac{8}{5}=\frac{24}{15}.$$

4. Сокращение дробей. *Сокращением дроби называется замена ее другой равной ей дробью* ***с*** *меньшими членами путем деления числителя и знаменателя на одно и то же число.*

Сократим дробь $\frac{126}{210}$ на 2, получим $\frac{63}{105}$; сократим на 3 еще: $\frac{21}{35}$; сократив на 7, получим несократимую дробь $\frac{3}{5}$. Такое сокращение называется последовательным; при нем числитель и знаменатель несколько раз делим на их общий делитель (здесь на 2, на 3, на 7). Можно было сразу сделать полное сокращение дроби на НОД ее числителя и знаменателя; здесь на $2\cdot3\cdot7=$ $=42=$ НОД (126 и 210). При отыскании общих делителей членов дроби используем признаки делимости чисел.

5. Приведение дробей к общему знаменателю. Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно: 1) найти наименьшее общее кратное их знаменателей; 2) заменить этим НОК их знаменатели; 3) вычислить, во сколько раз увеличился при этой замене каждый знаменатель (найти дополнительные множители); 4) умножит числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель.

$$\overset{\overset{15}{\smile}}{\frac{3}{4}},\ \overset{\overset{10}{\smile}}{\frac{1}{6}},\ \overset{\overset{12}{\smile}}{\frac{2}{5}};\ \text{НОК}\,(4;\ 6\ \text{и}\ 5)=60;\ \frac{45}{60},\ \frac{10}{60},\ \frac{24}{60}.$$

6. Сравнение дробей по величине. Из двух дробе с одинаковым числителем та большая, у которой знаменатель меньший (она состоит из более крупных долей Из двух дробей с одинаковым знаменателем та больша у которой больший числитель. Если знаменатели дроб разные, то дроби можно привести к общему знаменател

Упражнения 48—54

48. а) Выделить целые числа из неправильных дробей:

$$\frac{17}{5}, \frac{85}{10}, \frac{37}{36}, \frac{14}{14}, \frac{100}{9}, \frac{191}{100}, \frac{72}{24}, \frac{1000}{125}, \frac{397}{63}.$$

б) Обратить смешанные числа в неправильные дроби:

$$1\frac{3}{4}, 25\frac{7}{9}, 155\frac{3}{10}, 200\frac{1}{6}, 4\frac{97}{179}, 1\frac{524}{3109}$$

в) Представить числа 3, 8, 35 в виде неправильных дробей со знаменателями: 4, 10, 25, 1000.

49. а) Увеличить каждую из дробей в 3 раза двумя способами:

$$\frac{1}{6}, \frac{5}{27}, \frac{19}{51}, \frac{31}{42}, \frac{100}{153}, \frac{235}{309}.$$

б) Уменьшить каждую из дробей в 5 раз двумя способами:

$$\frac{15}{22}, \frac{40}{7}, \frac{75}{99}, \frac{160}{203}, \frac{800}{111}, \frac{625}{626}.$$

50. а) Сократить дроби последовательно:

$$\frac{18}{30}, \frac{40}{110}, \frac{70}{98}, \frac{210}{252}, \frac{180}{630}, \frac{42}{378}, \frac{165}{495}, \frac{825}{165}.$$

б) Сделать полное сокращение дробей, найдя НОД:

$$\frac{255}{85}, \frac{182}{273}, \frac{279}{1395}, \frac{420}{84}, \frac{322}{1771}.$$

51. Привести дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) устно

$$\frac{3}{16} \text{ и } \frac{7}{9}; \quad \frac{9}{13}, \frac{5}{26} \text{ и } \frac{1}{78}; \quad \frac{1}{45} \text{ и } \frac{11}{60};$$

б) письменно

$$\frac{5}{86} \text{ и } \frac{7}{60}; \quad \frac{9}{50}, \frac{31}{80}, \frac{13}{360} \text{ и } \frac{23}{144}.$$

52. а) Поставить знак > или < между дробями:

$$\frac{11}{15} \text{ и } \frac{8}{15}; \quad \frac{5}{6} \text{ и } \frac{17}{18}; \quad \frac{10}{13} \text{ и } \frac{10}{11}; \quad \frac{29}{5} \text{ и } \frac{29}{10}; \quad \frac{37}{38} \text{ и } \frac{91}{92}.$$

б) Расположить дроби в порядке возрастания величины:

$$\frac{1}{10},\ \frac{11}{26},\ \frac{7}{65},\ \frac{1}{130},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{13}.$$

в) Расположить дроби в порядке убывания величины:

$$\frac{5}{72},\ \frac{11}{36},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{24},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{18},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{8}.$$

53. а) Среднее арифметическое двух чисел равно 95,4; одно из этих чисел равно 100,8. Найти другое число.

б) Среднее арифметическое трех чисел равно 9,98. Найти эти три числа, если известно, что первое из них составляет $\frac{1}{3}$ второго, а третье есть среднее арифметическое между первым и вторым числами.

54. Рабочий может выполнить некоторую работу за 12,5 часа, а его ученик может сделать 0,03 этой же работы за 1,5 часа. За какое время выполнят всю работу оба, работая вместе?

§ 8. Четыре действия над обыкновенными дробями

Определения арифметических действий, которые были даны в § 2 для целых чисел и десятичных дробей, верны и для дробей обыкновенных.

1. Сложение и вычитание. ***Чтобы сложить или вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить или вычесть их числители и оставить тот же знаменатель:***

$$\frac{7}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3};\quad \frac{13}{24}-\frac{5}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}.$$

Если нужно сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, то их сначала приводят к наименьшему общему знаменателю.

$$\overset{\overset{3}{\smile}}{\frac{7}{16}}+\overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{11}{24}}=\frac{21}{48}+\frac{22}{48}=\frac{43}{48};\quad \overset{\overset{4}{\smile}}{\frac{19}{27}}-\overset{\overset{27}{\smile}}{\frac{1}{4}}=\frac{76}{108}-\frac{27}{108}=\frac{49}{108}.$$

Сложение и вычитание смешанных чисел делается так:

1) $10\frac{2}{3}+1\frac{6}{25}+\frac{8}{15}=10\frac{50}{75}+1\frac{18}{75}+\frac{40}{75}=11\frac{108}{75}=$
$=12\frac{33}{75}=12\frac{11}{25};$

2) $6\frac{2}{5}-4=2\frac{2}{5}$;

3) $28\frac{5}{8}-9\frac{5}{12}=28\frac{15}{24}-9\frac{10}{24}=19\frac{5}{24}$;

4) $16-7\frac{4}{11}=15\frac{11}{11}-7\frac{4}{11}=8\frac{7}{11}$;

5) $106\frac{1}{3}-81\frac{13}{22}=106\frac{22}{66}-81\frac{39}{66}=105\frac{88}{66}-81\frac{39}{66}=24\frac{49}{66}$.

2. Умножение. Согласно определению умножения на целое число, имеем: $\frac{3}{8}\cdot 5=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=$ $=\frac{3+3+3+3+3}{8}=\frac{3\cdot 5}{8}$. Таким образом, получили: $\frac{3}{8}\cdot 5=\frac{3\cdot 5}{8}$.

Чтобы умножить дробь на целое число, нужно умножить на это число числитель и оставить тот же знаменатель: $\frac{m}{n}\cdot a=\frac{m\cdot a}{n}$.

$$\frac{3}{8}\cdot 5=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8};\quad \frac{7}{18}\cdot 10=\frac{7\cdot 10}{18}=\frac{35}{9}=3\frac{8}{9}.$$

Под умножением числа на дробь понимаем нахождение этой дроби от данного числа (см. п. 2 § 2). $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ — значит найти, сколько составляют $\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{3}$ от $\frac{4}{5}$ составляет $\frac{4}{5\cdot 3}$ $\left(\frac{4}{5}\right.$ уменьшили в 3 раза; см. п. 2 § 7$\Big)$, а $\frac{2}{3}$ составляют в 2 раза больше: $\frac{4}{5\cdot 3}$ увеличим в 2 раза и получим $\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}$. Следовательно, $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}$.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе—знаменателем:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{b\cdot n}.$$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}.$$

Это правило применимо и тогда, когда один из сомножителей есть целое число (представляем его в виде дроби со знаменателем 1). $8\cdot\frac{3}{4}=\frac{8}{1}\cdot\frac{3}{4}=\frac{8\cdot3}{1\cdot4}=6$; $a\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{n}$; $\frac{2}{15}\cdot5=\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2\cdot5}{15\cdot1}=\frac{2}{3}$.

Смешанные числа перед умножением обращаем в неправильные дроби: $1\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot17\frac{1}{2}\cdot3\cdot10\frac{4}{5}=\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{35}{2}\times$ $\times\frac{3}{1}\cdot\frac{54}{5}=\frac{9\cdot5\cdot35\cdot3\cdot54}{7\cdot9\cdot2\cdot5}=405$.

$$0\cdot\frac{3}{5}=0;\ 12\frac{7}{8}\cdot0=0;\ 1\cdot2\frac{1}{5}=2\frac{1}{5};\ \frac{9}{11}\cdot1=\frac{9}{11}.$$

Если множитель больше 1, то произведение больше множимого; если же множитель есть правильная дробь, то произведение меньше множимого.

3. Деление. ***Чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой дроби умножить на числитель второй и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем:*** $\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot m}$.

$$\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=\frac{3\cdot7}{5\cdot4}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}.$$

Деление обратно умножению, поэтому в правильности правила деления дробей убедимся умножением:

$$1\frac{1}{20}\cdot\frac{4}{7}=\frac{21}{20}\cdot\frac{4}{7}=\frac{21\cdot4}{20\cdot7}=\frac{3}{5};\ \frac{a\cdot n}{b\cdot m}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n\cdot m}{b\cdot m\cdot n}=\frac{a}{b}.$$

Правило деления дробей верно и тогда, когда делимое или делитель есть целое число. Отсюда можно получить и отдельные правила для деления целого числа на дробь и дроби на целое число:

$$a:\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{m};\ \frac{a}{b}:m=\frac{a}{b\cdot m}.$$

Если в множестве натуральных чисел не всегда было возможно деление (без остатка), то в множестве дробей деление любых чисел (дробных или целых) всегда возможно $\left(\text{например,}\quad 5:7=\frac{5}{7}\right)$, кроме деления на нуль.

$$0:\frac{7}{9}=\frac{0\cdot9}{7}=\frac{0}{7}=0;\ \frac{3}{4}:1=\frac{3}{4};\ 13\frac{1}{2}:\frac{9}{10}=\frac{27}{2}:\frac{9}{10}=$$
$$=\frac{27\cdot10}{2\cdot9}=15;$$

$$1 : \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}; \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 1.$$

Два числа, произведение которых равно 1 $\left(\frac{2}{5}\right.$ и $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{2}$ и 2 и др.), называются взаимно обратными числами. Деление всегда можно заменить умножением на число, обратное делителю:

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}; \quad \frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} =$$
$$= \frac{4\ 7}{5\ 3} = 1\frac{13}{15}.$$

4. Легко убедиться на числовых примерах, что на обыкновенные дроби распространяются законы и свойства арифметических действий (см. § 3), изменение результата действия в зависимости от изменения компонентов (см. § 4) и нахождение неизвестного компонента действия по известному компоненту и результату действия (см. § 5).

5. **Нахождение дроби от числа и числа по данной величине его дроби.** Поскольку умножение числа на дробь определено как нахождение этой дроби от данного числа, то задачу нахождения дроби от числа можно решать одним действием. Задача. Найти $\frac{5}{11}$ от $2\frac{4}{9}$. Решение: $2\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} = \frac{22 \cdot 5}{9 \cdot 11} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ (надо уметь решать и в 2 действия; см. п. 4 § 1).

Задачи на нахождение числа по данной величине его дроби также можно решать в одно действие. Задача 1 (см. п. 5 § 1): $48 : \frac{2}{3} = \frac{48 \cdot 3}{2} = 72$. Задача 2 (см. там же): $960 : 0{,}8 = 1200$.

Чтобы найти дробь от числа, достаточно умножить данное число на дробь. Чтобы найти число по данной величине его дроби, достаточно разделить данную величину на дробь.

6. **Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями.** При решении примеров и задач случается, что компоненты одного и того же действия выражены различными дробями — обыкновенной и десятичной. Приходится обращать обыкновенную дробь в десятичную или наоборот.

Основной способ обращения обыкновенной дроби в десятичную — это деление числителя на знаменатель. При этом десятичная дробь получается либо конечная, либо бесконечная периодическая (см. п. 4 § 2). Бесконечную дробь перед выполнением действий надо округлить.

Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби не содержит других простых множителей, кроме двоек и пятерок, то такая обыкновенная дробь обращается в конечную десятичную; в противном случае она обращается в бесконечную дробь.

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot5}{2\cdot5}=\frac{5}{10}=0{,}5;\ \frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0{,}6;\ \frac{7}{20}=\frac{7}{2\cdot2\cdot5}=$$

$$=\frac{7\cdot5}{2\cdot2\cdot5\cdot5}=\frac{35}{100}=0{,}35;\ \frac{11}{50}=\frac{11\cdot2}{50\cdot2}=\frac{22}{100}=0{,}22;$$

$$\frac{13}{125}=\frac{13\cdot8}{125\cdot8}=\frac{104}{1000}=0{,}104 \text{ и т. п. —}$$

обращаются в конечные дроби.

$$\frac{16}{75}=\frac{16}{25\cdot3},\ \frac{5}{14}=\frac{5}{2\cdot7},\ \frac{7}{45}=\frac{7}{5\cdot9},\ \frac{19}{110}=\frac{19}{2\cdot5\cdot11} \text{ и т. п. —}$$

обращаются в бесконечные дроби, но

$$\frac{42}{105}=\frac{2\cdot3\cdot7}{5\cdot3\cdot7}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Чтобы *выразить десятичную дробь в виде обыкновенной*, нужно число десятичных долей взять числителем, а знаменателем взять число, записанное единицей со столькими нулями справа при ней, сколько цифр после запятой; полученную дробь сократить, если это возможно.

$$0{,}305=\frac{305}{1000}=\frac{61}{200};\ 12{,}07=12\frac{7}{100} \text{ и т. д.}$$

Упражнения 55—62

55. Выполнить указанные действия:

а) $10\frac{37}{80}+2\frac{19}{48}+1\frac{5}{32}+7\frac{1}{96}$;

б) $\frac{11}{15}-\frac{23}{36}$; $18\frac{3}{23}-9\frac{9}{19}$; $33-16\frac{5}{43}$;

в) $16\cdot3\frac{1}{2}\cdot8\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{25}\cdot5\cdot6\frac{1}{4}$;

г) $\frac{35}{48}:\frac{21}{32}$; $7\frac{3}{5}:57$; $180:17\frac{1}{7}$.

56. $$\frac{8:\left[3:\left(2\frac{3}{4}-1\frac{15}{28}\right)+\frac{2}{3}:\frac{3}{2}\right]+\frac{57}{223}}{14\cdot\left(5\frac{5}{7}-4\frac{3}{4}\right)-9\frac{5}{7}+\frac{3}{14}}.$$

Решение. 1) $2\frac{3}{4}-1\frac{15}{28}=2\frac{21}{28}-1\frac{15}{28}=1\frac{6}{28}=1\frac{3}{14}$; 2) $3:1\frac{3}{14}=3:\frac{17}{14}=\frac{3\cdot 14}{17}=\frac{42}{17}=2\frac{8}{17}$; 3) $\frac{2}{3}:\frac{3}{2}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}$; 4) $2\frac{8}{17}+\frac{4}{9}=2\frac{72}{153}+\frac{68}{153}=2\frac{140}{153}$; 5) $8:2\frac{140}{153}=8:\frac{446}{153}=$ $=\frac{8\cdot 153}{446}=\frac{612}{223}=2\frac{166}{223}$; 6) $2\frac{166}{223}+\frac{57}{223}=2\frac{223}{223}=3$; 7) $5\frac{5}{7}-$ $-4\frac{3}{4}=5\frac{20}{28}-4\frac{21}{28}=4\frac{48}{28}-4\frac{21}{28}=\frac{27}{28}$; 8) $14\cdot\frac{27}{28}=\frac{14\cdot 27}{28}=$ $=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$; 9) $13\frac{1}{2}-9\frac{5}{7}=13\frac{7}{14}-9\frac{10}{14}=12\frac{21}{14}-9\frac{10}{14}=$ $=3\frac{11}{14}$; 10) $3\frac{11}{14}+\frac{3}{14}=3\frac{14}{14}=4$; 11) $3:4=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

57. а) $3\frac{1}{8}:\left[\left(4\frac{5}{12}-3\frac{13}{24}\right)\cdot\frac{4}{7}+\left(3\frac{1}{18}-2\frac{7}{12}\right)\cdot 1\frac{10}{17}\right]$;

б) $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{16}\right):\left(\frac{15}{16}\cdot\frac{14}{39}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{13}{21}\right):\left(2\frac{1}{8}\cdot 2\frac{2}{7}\cdot 2\frac{15}{17}\times\right.$ $\left.\times 4\frac{2}{3}:196\right)$;

в) $$\frac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\cdot\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1};$$

г) $$\frac{\left[5\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2\frac{31}{252}+3\frac{5}{21}\right)\right]\cdot\left[24:\left(1\frac{1}{2}:4\frac{3}{8}\right)\right]}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right)}.$$

58. $\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39.$

Решение. 1) $$\begin{array}{r|l} 21{,}6 & 15 \\ \cline{2-2} \underline{15} & 1{,}44 \\ 66 & \\ \underline{60} & \\ 60 & \\ \underline{60} & \\ 0 & \end{array}$$

2) $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}=\frac{2\ 15}{3\ 4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$;

3) $2\frac{1}{2}=2{,}5$; $2{,}5+1{,}44=$
$=3{,}94$;

4) Частное $7{,}7:24\frac{3}{4}$ будет бесконечной дробью. Если в условии не сказано, с какой точностью округлять, и нужно получить точный ответ, то переходим к обыкновенным дробям:

$$7\frac{7}{10}:24\frac{3}{4}=\frac{77}{10}:\frac{99}{4}=\frac{77\cdot4}{10\cdot99}=\frac{14}{45};$$

5) $\frac{196}{225}-\frac{14}{45}=\frac{196-70}{225}=\frac{126}{225}=\frac{14}{25}$;

6) $$\begin{array}{r|l} 69{,}5 & 139 \\ \cline{2-2} \underline{695} & 0{,}5 \\ 0 & \end{array};$$

7) $\frac{14}{25}=\frac{14\cdot4}{25\cdot4}=\frac{56}{100}=0{,}56$;

$$\begin{array}{r} 3{,}94 \\ +\,0{,}56 \\ 0{,}5 \\ \hline 5{,}00. \end{array}$$

Ответ: 5.

59. а) $\left(\frac{1}{3125}-\frac{0{,}0008}{10}\right):\frac{1}{1250}:\left[\left(\frac{1}{2000}-0{,}0001875\right):\frac{1}{3200}\right]$;

б) $$\left[\frac{\left(11-9\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left(4{,}05-3\frac{13}{20}\right)\cdot20}-\frac{0{,}45-\frac{9}{40}}{13\frac{5}{8}:\left(2\frac{3}{5}+\frac{1}{8}\right)}\right]:62\frac{91}{200}.$$

60. Железобетонная панель перекрытия имеет в длину 4 *м*, в ширину 15 *дм*, а толщина ее равна 1,6 *дм*. Сколько весит эта панель, если 1 *куб. м* ее весит 2,4 *т*?

61. Каменщик укладывает в среднем за смену по 21 *куб. м* кирпичной кладки, что составляет 2,5 сменной нормы. На сколько дней раньше срока по норме каменщик уложит 252 *куб. м* кирпичной кладки?

62. В резервуар проведены три трубы: через две первые вода вливается, через третью — вытекает. Первая труба наполняет резервуар за $3\frac{1}{3}$ часа, вторая — за 0,75 этого времени, а через третью трубу вся вода из наполненного резервуара вытекает за 2 часа. За какое время наполнится пустой резервуар, если открыть все три трубы?

Глава III ● Отношения, проценты, пропорции

§ 9. Отношения, проценты

1. Отношение. *Отношением одного числа к другому называется частное от деления первого числа на второе.* Делимое называется предыдущим членом отношения, а делитель — последующим членом (он не может быть равным 0). Отношение 5 к 2 есть число 2,5, которое показывает, что предыдущий член (5) отношения в 2,5 раза больше последующего (2). Отношение 2 к 5 есть $\frac{2}{5}$, которое показывает, что предыдущий член (2) составляет $\frac{2}{5}$ от последующего (5).

$15:5=3$. Предыдущий член отношения равен произведению его последующего члена на данное отношение ($15=5\cdot 3$). Последующий член отношения равен частному от деления предыдущего его члена на данное отношение ($5=15:3$).

Основное свойство отношения: ***величина отношения не изменится, если оба его члена умножить (разделить) на одно и то же число, не равное нулю.***

$\frac{3,2}{6,4}=0,5$; $\frac{3,2\cdot 10}{6,4\cdot 10}=0,5$; $\frac{32}{64}=0,5$ или $\frac{32:4}{64:4}=0,5$; $\frac{8}{16}=0,5$ (см. п. 3 § 7). Отношение можно сократить, а также можно заменить отношение дробных чисел равным ему отношением целых чисел:

$$1\frac{3}{4}:\frac{4}{5}=\frac{7}{4}:\frac{4}{5}=\frac{35}{20}:\frac{16}{20}=35:16.$$

2. Нахождение процентов от данного числа. *Сотая часть числа называется его процентом.*

Чтобы найти $p\%$ от числа A, нужно найти 1% от A (это будет $\frac{A}{100}$) и умножить на p:

$$\frac{A}{100}\cdot p.$$

Так, 37% от 300 составляют $\frac{300}{100}\cdot 37 = 111$, а 37% от 50 составляют $\frac{50}{100}\cdot 37 = 18{,}5$; 140% от 360 составляют $\frac{360}{100}\cdot 140 = 504$.

3. Нахождение числа по данной величине его процентов. ***Чтобы найти число по данной величине a его $p\%$, нужно найти 1% от искомого числа, разделив данную величину a на p, и умножить полученный результат на 100:***

$$\frac{a}{p}\cdot 100.$$

Задача 1. Найти число, если 12% его составляют 30. Решение. $\frac{30}{12}\cdot 100 = 2{,}5\cdot 100 = 250$.

Задача 2. Найти число, 45% которого составляют 30. Решение. $\frac{30}{45}\cdot 100 = \frac{2}{3}\cdot 100 = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$.

Задача 3. Найти число, 170% которого составляют 510. Решение. $\frac{510}{170}\cdot 100 = 300$.

4. Нахождение процентного отношения чисел. Процент — сотая доля, число процентов — это число сотых долей. Например, $\frac{13}{100} = 13\%$; $0{,}45 = 45\%$; $1{,}09 = 109\%$; $0{,}8 = 80\%$; $0{,}635 = 63{,}5\%$; $3 = 300\%$, т. е. чтобы число выразить в процентах, нужно умножить его на 100.

Найти процентное отношение числа a к числу A — значит найти, сколько процентов составляет число a от числа A. Для этого нужно вычислить отношение a к A и выразить его в процентах, умножив на 100%:

$$\frac{a}{A}\cdot 100\%.$$

Задача 1. Сколько процентов составляет 3 от 5? Решение. $\frac{3}{5}\cdot 100\% = 60\%$.

Задача 2. Сколько процентов составляет 5 от 3? Решение. $\frac{5}{3}\cdot 100\% = 166\frac{2}{3}\%$.

Задача 3. Найти процентное отношение 5 к 12,5. Решение. $\frac{5}{12,5}\cdot 100\% = 40\%$.

Упражнения 63—73

63. а) Вычислить величину отношения: $\frac{3}{20}$ к $\frac{3}{8}$; 2,2 к 1,44; $6:0,75$; $1\frac{3}{4}:1\frac{13}{15}$; 49 *кг* к 140 *кг*; 171 *км* : 45 *км*.

б) Найти неизвестный член отношения: $x:208 = 3,05$; $x:1\frac{3}{4}=\frac{16}{21}$; $0,72:x=1,8$; $2\frac{13}{16}:x=1\frac{7}{8}$.

в) Заменить отношением целых чисел: $1:\frac{1}{80}$; $\frac{3}{10}:\frac{9}{250}$; $15,02:2,5$; $7\frac{14}{25}:7\frac{1}{5}$; $3:2\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$; $0,5:1,75:2,5$.

64. а) Определить масштаб карты, на которой 2 *см* соответствуют 90 *км* в действительности.

б) Масштаб плана 1 : 21 000. Чему равно действительное расстояние, если на плане оно равно 10 *см*?

65. Размеры бетонного блока для постройки стен следующие: 2,7 *м* × 1,4 *м* × 0,5 *м*. Пустотность составляет 30% объема блока. Сколько кубометров бетона потребуется на изготовление 1000 таких блоков?

66. Машинист крана обязался погрузить за смену 1500 *т* чугуна при норме в 1050 *т*, а погрузил 1820 *т*. На сколько процентов машинист перевыполнил норму и на сколько процентов он перевыполнил свое обязательство? (Вычислить с точностью до 0,1%.)

67. Колхоз убрал 1320 *га* зерновых и ему еще осталось убрать 29,6% площади, занятой зерновыми. Сколько гектаров было под зерновыми?

68. Прядильная фабрика выработала за месяц сверх плана 1,6 *т* пряжи, перевыполнив план на 8%. Выпуск первосортной пряжи составил 97,7% при плане в 96%. Сколько тонн первосортной пряжи выработала фабрика сверх плана?

69. Один забойщик шахты вырубил за смену 26,25 *т* угля, выполнив 175% нормы. Сколько тонн угля вырубил другой забойщик, который выполнил 182% той же нормы?

70. Сумма двух чисел равна $285\frac{3}{4}$; первое число составляет 14,3% второго. Найти эти числа.

71. После того, как из числа вычли 10%, затем 25% остатка и еще 20% следующего остатка, в результате получилось 27. Найти это число.

72. Сколько процентов останется от числа, после того как из него вычтут $\frac{5}{8}$ его, а затем $\frac{2}{3}$ остатка?

73. Выполнить действия:

$$1,4\cdot\left[\frac{5}{7}:\frac{3\frac{1}{3}+\left(6\frac{2}{7}:2\frac{13}{21}-1,5\right)\cdot 1\frac{23}{27}}{\left(5,7:3\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right):8}+0,25\right]+0,6.$$

§ 10. Пропорции, пропорциональность величин

1. Пропорция. *Равенство двух отношений называется пропорцией.* Из отношений $\frac{12}{6}=2$ и $\frac{18}{9}=2$ получаем пропорцию: $\frac{12}{6}=\frac{18}{9}$. Члены отношений называются членами пропорции: 12 и 9 — крайние, 6 и 18 — средние члены пропорции.

Возьмем пропорцию: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; равенство не нарушится, если обе части его умножим на bd: $\frac{a\cdot bd}{b}=\frac{c\cdot bd}{d}$; сократив отношения на b и d, получим основное свойство пропорции: $ad=bc$. ***Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.***

Правильность пропорции можно проверить по выполнению основного свойства или по определению пропорции, вычислив оба ее отношения.

$$\frac{x}{b}=\frac{c}{d};\quad dx=bc;\quad x=\frac{bc}{d}.$$

Неизвестный крайний член пропорции равен частному от деления произведения средних ее членов на известный крайний. Неизвестный средний член пропорции $\left(\frac{a}{b}=\frac{x}{d}\right)$ находим аналогично $\left(x=\frac{ad}{b}\right)$.

2. **Свойство равных отношений.** Дана пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, поэтому $ad = bc$. Составим пропорцию $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ и проверим, правильна ли она: $(a+c)b = (b+d)a$, $ab + bc = ab + ad$, $bc = ad$, что верно. Итак, для пропорции выполняется основное свойство, поэтому пропорция $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ верна.

Если взять любое число равных отношений, например $\frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, то и для них составленная указанным способом пропорция верна: $\frac{2+5+3+1+4}{6+15+9+3+12} = \frac{2}{6}$, или $\frac{15}{45} = \frac{2}{6}$, или $15 \cdot 6 = 45 \cdot 2$, $90 = 90$. ***Сумма предыдущих членов равных отношений так относится к сумме последующих членов тех же отношений, как любой предыдущий член к своему последующему.***

3. **Пропорциональность величин.** *Если при увеличении (уменьшении) одной величины в несколько раз другая величина также увеличивается (уменьшается) во столько же раз, то такие две величины называются прямо пропорциональными.* Например, количество товара и стоимость его (при постоянной цене) — величины прямо пропорциональные.

Если с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая величина наоборот — уменьшается (увеличивается) во столько же раз, то такие величины называются обратно пропорциональными. Например, скорость движения и время, необходимое для прохождения одного и того же расстояния, — величины обратно пропорциональные (для равномерного движения).

Задачи с прямо или обратно пропорциональными величинами решаются при помощи пропорций или способом приведения к единице (см. задачи 77, 78 и др.).

4. **Пропорциональное деление** (или деление числа в данном отношении). ***Чтобы разделить число прямо пропорционально данным числам, достаточно разделить его на сумму данных чисел и полученное частное умножить на каждое из них.***

Задача. Разделить 35 прямо пропорционально числам $2:7:5$. Решение. $\frac{35}{2+7+5}\cdot 2 = 2{,}5\cdot 2 = 5$; $\frac{35}{14}\cdot 7 = 17{,}5$; $\frac{35}{14}\cdot 5 = 12{,}5$. Проверка. $5 + 17{,}5 + 12{,}5 = 35$.

Упражнения 74—84

74. а) Составить пропорции из следующих отношений: $21:7$; $16:24$; $15:5$; $3:7{,}5$; $5:7{,}5$; $4:10$.

б) Можно ли составить пропорции из следующих чисел: 7, 42, 6 и 49; 12, 4, 8 и 6; 15, 10, 20 и 25.

в) Решить пропорции: $x:0{,}4 = 0{,}02:0{,}3$; $1{,}6:0{,}5 = 2{,}4:x$; $3{,}5:x = 6\frac{3}{7}:2\frac{2}{49}$; $6\frac{1}{8}:3\frac{1}{9} = x:1\frac{11}{21}$.

75. а) Найти x из пропорций: $6{,}4:7{,}2 = 5{,}6x:0{,}9$; $4{,}8x:5\frac{1}{4} = 7{,}5:3\frac{1}{8}$; $7\frac{1}{9}:2\frac{2}{3}x = 4{,}8:3{,}2$; $7{,}2:1\frac{1}{8} = 8{,}1:0{,}9x$.

б) В пропорции $9:6 = 15:10$ сделаны следующие перестановки членов:

$$\begin{array}{ll}
10:6 = 15:9; & 9:15 = 6:10; \\
6:10 = 9:15; & 10:15 = 6:9; \\
6:9 = 10:15; & 15:9 = 10:6; \\
 & 15:10 = 9:6.
\end{array}$$

Проверить правильность полученных пропорций.

76. Указать прямо пропорциональные и обратно пропорциональные величины среди следующих:

а) время равномерного движения и пройденный путь;

б) цена товара и количество его, которое можно купить на данную сумму;

в) количество рабочих и время выполнения определенной работы;

г) объем и вес тела, сделанного из данного материала;

д) длина и ширина прямоугольника с постоянной площадью;

е) величина отношения и величина его предыдущего члена;

ж) величина отношения и величина его последующего члена;

з) длина стороны квадрата и площадь его.

77. Из 8 ведер молока получили 3,2 *кг* масла. Сколько нужно молока для получения 16 *кг* масла?

78. По плану 40 комбайнеров должны убрать всю площадь посева зерновых за 12 дней. За сколько дней уберут эту площадь 48 комбайнеров?

79. Количества кур, уток и гусей, имеющихся в колхозе, относятся, как $7\frac{1}{5} : 2\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$. Сколько кур, уток и гусей в отдельности, если их вместе 2799?

80. В колхозном саду посадили яблони, груши и сливы. Яблони составляли 32,5% всех посаженных деревьев, а количества груш и слив относились, как $2\frac{1}{3} : 1\frac{5}{6}$, причем груш было на 162 больше, чем слив. Сколько деревьев было посажено?

81. Три бригады трактористов обработали за сезон 22 800 *га* пашни. Первая бригада обработала 28,5% всей пашни, а площади, обработанные второй и третьей бригадами, относились, как $1\frac{3}{4} : 3$. Сколько гектаров обработано в среднем каждым трактором третьей бригады, если у нее было 6 тракторов?

82. Самолет пролетел расстояние между двумя городами за 3 часа. Сколько времени потребуется самолету, чтобы пролететь то же расстояние, если скорость будет на 20% больше?

83. 5 насосов в течение 3 часов выкачали 1800 ведер воды. Сколько воды выкачают 4 таких же насоса в течение 7 часов?

84. Выполнить действия:

$$\text{а)}\ 1{,}65 - \frac{3\frac{1}{6} : \left(4\frac{2}{7} : 3\frac{3}{14} + 5\right) + 0{,}25 - \frac{1}{6}}{1\frac{2}{3} \cdot \left(7{,}8 - 2{,}4 \cdot 3\frac{1}{6}\right)} : 1\frac{3}{32};$$

$$\text{б)}\ \frac{7{,}05 : \left(4\frac{3}{8} + 5\frac{1}{40}\right) \cdot 1\frac{7}{9}}{1\frac{7}{9} \cdot \left(3{,}25 - 2\frac{6}{7}\right) : 1\frac{4}{7}} : \left[8{,}4 \cdot \left(5\frac{1}{6} - 4{,}85\right) : 1{,}52 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\right] + 0{,}32.$$

Глава IV ● Действия над рациональными числами, одночленами и многочленами

§ 11. Буквенные выражения

1. Алгебраические выражения. Уже в арифметике мы убедились в том, что числа иногда выгодно обозначать буквами (запись законов сложения и умножения, правил действий над обыкновенными дробями, формул решения трех основных задач на проценты и т. д.). Еще шире буквенные обозначения чисел применяются в алгебре.

Несколько чисел, обозначенных буквами или цифрами и соединенных знаками действий, называют алгебраическим выражением.

Число, которому равно выражение в результате замены букв их значениями и выполнения указанных действий, называют значением алгебраического выражения.

Значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, называются допустимыми значениями для этих букв. Например, в выражении $\frac{a}{b}$, обозначающем обыкновенную дробь, множество допустимых значений a состоит из всех натуральных чисел и нуля, а множество допустимых значений b — из тех же чисел, кроме нуля (на нуль делить невозможно).

Чтение и запись алгебраических выражений — в упражнениях 85, 86.

2. Коэффициент. Если произведение содержит несколько числовых и буквенных множителей, то по законам умножения все числовые множители можно заменить одним множителем (их произведением), который принято ставить впереди буквенных множителей. *Числовой множитель, стоящий впереди буквенных множителей, называется коэффициентом.*

Коэффициент может быть любым числом. Если коэффициент — целое число, то он показывает, сколько раз одинаковым слагаемым повторяется то буквенное выражение, к которому он относится. $3ab = ab + ab + ab$. Если коэффициент есть дробь, то он показывает, какая дробь берется от значения буквенного выражения. $0{,}3x$, $\frac{7}{6}c$ означают: 0,3 от числа x, $\frac{7}{6}$ от числа c. Коэффициент 1 не ставится.

3. Возведение в степень. Кроме четырех действий: сложения, вычитания, умножения и деления (их называют иногда арифметическими) в алгебре рассматриваются еще два новых взаимно обратных действия: возведение в степень и извлечение корня (см. § 20). *Действие, посредством которого находится произведение нескольких равных сомножителей, называется возведением в степень.*

Произведение n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a. Число (a), которое возводится в степень, называется основанием степени. Число (n), которое показывает, в какую степень возводится основание, называется показателем степени. $\underbrace{aa\ldots a}_{n} = a^n$.

$5^3 = 125$; 5 — основание степени, 3 — показатель степени, 5^3 (или $5\cdot5\cdot5$, или 125) — степень (третья степень числа 5). 7^2, a^3 читают так: семь в квадрате, a куб.

4. Порядок действий. Порядок выполнения четырех действий, установленный в арифметике (§ 2), сохраняется. Действия возведение в степень и извлечение корня называются действиями третьей ступени. Порядок выполнения шести действий такой: ***сначала выполняются действия третьей ступени в порядке их записи, потом второй и, наконец, первой ступени. В таком же порядке выполняются действия в круглых скобках, затем в квадратных, потом в фигурных и, наконец, за скобками.***

Такой порядок действий следует соблюдать и при нахождении числового значения алгебраического выражения.

Упражнения 85—91

85. Прочесть словами следующие выражения:

а) $(a-b)c$;
б) $(a-b)+c$;
в) $3(a+b)-2ab$;
г) $(a+b):(a-b)$;
д) $\left(\frac{2}{3}c\right)^3$;
е) $\frac{2}{3}c^3$;
ж) $3a^2b$;
з) a^2-b^2;
и) $(a-b)^2$;
к) a^2+b^2;
л) a^3+b^3;
м) $(a-b)^3$;
н) $(5x+y)^3$;
о) $[5(x+y)]^2$;
п) $(x^3-y^3):(x-y)$.

86. Записать в буквенном виде следующие алгебраические выражения:
а) квадрат суммы чисел x и y;
б) произведение суммы двух чисел на их разность;
в) куб суммы двух чисел;
г) неполный квадрат разности двух чисел;
д) произведение неполного квадрата суммы чисел a и b на разность чисел x и y;
е) частное от деления суммы кубов чисел a и b на неполный квадрат разности чисел x и y;
ж) утроенная n-я степень разности чисел p и q;
з) квадрат суммы удвоенного числа m и числа n;
и) сумма квадратов разностей $m-n$ и $p-q$;
к) куб полусуммы двух чисел x и y.

87. Указать допустимые значения букв в выражениях:

а) $\frac{A}{100}\cdot p$, $\frac{a}{p}\cdot 100$, $\frac{a}{A}\cdot 100\%$ (формулы решения основных задач на проценты);

б) $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$ (среднее арифметическое n чисел);

в) $a:b$; г) $(a-b)c$; д) $\frac{a}{b-c}$.

88. а) Написать сокращенно при помощи коэффициентов следующие выражения: $xyz+xyz$; $m+m+m+n+n$; $mx+mx+ny+ny+ny+ny+mnxy$; $\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}$; $\frac{a+a+a+a}{b+b+b}$; $a^2+a^2+a^2+b^3+b^3$; $a^3b+a^3b+ab^2+ab^2+ab^2+ab^2+ab^2$.

б) Написать без коэффициентов следующие выражения: $4ab$; $3b+2c$; $3\cdot\frac{a}{2}$; $\frac{4xyz}{3mn}$; $2x^2y^3z$; $3m^2n+4mn^2$.

89. а) Ввести показатели степеней: $xxxyy$; $3\cdot3\cdot3\cdot3$; $5\cdot5mmmn$; $3\cdot3aaaabb-2\cdot2\cdot2abbb$.

б) Написать без показателей степени: $2^3a^2b^5$; a^2-b^2; x^3+y^3; $2a^5-3b^2$; $3^2(m-n)^3$.

в) Найти числовые значения степеней: 30^2; 5^3; 1^5; 1^n; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(3\frac{1}{3}\right)^2$; $0{,}01^2$; $0{,}1^5$; $2{,}5^2$; $0{,}035^3$.

90. а) Ввести коэффициенты и показатели в выражения: $m+m+m+mm$; $abb+abb-aaab$; $\frac{xxy+xxy+xxy}{zzz+zzz}$.

б) Написать без коэффициентов и показателей: $3n^2$; $2b^3c^2$; $4pq^2+5p^2q$.

91. Найти значения алгебраических выражений при заданных числовых значениях букв:

а) $b^3+3b^2-4b+10$ при $b=\frac{1}{3}$;

б) $\frac{1+m-m^2}{1-m+m^2}+\frac{6m^3+4}{1-m+m^2}$ при $m=1$;

в) $\{[(a-4)a-3]a+5\}a-75$ при $a=5$;

г) $\frac{1+a^2}{(1+ab)^2+(a+b)^2}$ при $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{3}$.

§ 12. Рациональные числа

1. Отрицательные числа. Множество рациональных чисел. *Натуральные числа вместе с дробями, которые изучались в арифметике, называют положительными числами.* Для любой пары положительных чисел всегда существует их положительная сумма, произведение и частное, но не всегда существует их разность (например, 3—5). Для того чтобы вычитание было всегда выполнимо, ввели отрицательные числа. Их обозначают со знаком — (минус) (-2; $-0{,}7$; -3 и т. д.). Так, разность 3—5 обозначается -2 ($3-5=-2$). Положительные числа обозначаются со знаком + (плюс), который или пишется впереди числа, или подразумевается ($+2$; $+1{,}75$; $+\frac{2}{3}$; 7,06; $10\frac{5}{7}$; 1 305 и т. д.).

Числа со знаком плюс называют положительными. Числа со знаком минус называют отрицательными. Нуль — число ни положительное, ни отрицательное. *Числа положительные и отрицательные (целые и дробные) и нуль называют рациональными числами.*

Положительными и отрицательными числами выражаются значения тех величин, которые можно понимать в двух противоположных смыслах. Например, имущество и долг, приход и расход, прибыль и убыток, температура (выше и ниже нуля), время (отсчитываемое от данного момента в будущее и прошлое), движение в двух противоположных направлениях, а также процесс увеличения и уменьшения какой-нибудь величины и др.

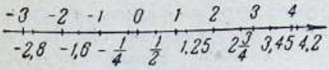


Рис. 1.

2. Числовая ось. Абсолютная величина числа. Сравнение чисел.

Если взять произвольную прямую (рис. 1), выбрать на ней положительное (вправо) и отрицательное (влево) направления и от некоторой ее точки *O* откладывать в обе стороны какой-нибудь отрезок, принятый за единицу, то получим точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4 и т. д. и —1, —2, —3 и т. д. Точке *O* соответствует число нуль. Так как прямая бесконечна в обе стороны, то на ней поместятся точки, соответствующие всем целым числам (положительным, отрицательным и нулю). На этой же прямой найдется определенная точка, соответствующая любому данному дробному числу (положительному и отрицательному), если откладывать и нужные доли отрезка, принятого за единицу $\left(\frac{1}{2};\ 2\frac{3}{4};\ -1{,}6;\ -2{,}8;\ -\frac{1}{4};\ 1{,}25;\ 3{,}45;\ 4{,}2 \text{ и т. д.; см. рис. } 1\right)$. *Прямую, на которой каждому рациональному числу соответствует определенная точка, называют числовой прямой, или числовой осью.*

Два числа называются противоположными, если соответствующие им точки числовой прямой расположены по разные стороны от начальной точки O и на одинаковом расстоянии от нее (например, 2 и —2; 0,5 и —0,5; 273 и —273).

Абсолютной величиной отрицательного числа называют противоположное ему положительное число. Абсолютной величиной положительного числа и нуля называют само это число. $|-5|$ читается: «абсолютная величина минус пяти». $|-5| = 5$; $|+0{,}8| = 0{,}8$; $|0| = 0$.

Всякое положительное число (*a*) больше нуля, а всякое отрицательное число (*b*) меньше нуля: $a > 0 > b$. Следовательно, $a > b$ (всякое положительное число больше всякого отрицательного). Из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше, например $-2 > -5$, потому что $|-2| < |-5|$. Из любых двух чисел то больше, которое на числовой оси изображается правее $\left(\frac{1}{2} > -2; -1{,}6 > -2{,}8;\ 4 > 1{,}25;\ \text{см. рис. } 1\right)$.

3. Сложение рациональных чисел. Правила действий над рациональными числами устанавливаются так, чтобы для положительных чисел остались верными правила и законы действий, установленные в арифметике, и чтобы каждая задача решалась тем же действием, что и в арифметике.

Задача. У одного мальчика имеется a руб., а у его брата b руб. Сколько рублей имеется у братьев вместе?

Решение. $a + b$ (руб.). Вычислим искомую сумму при следующих данных (отрицательные числа означают долг):
1) $(+3{,}5) + (+1{,}7) = +5{,}2$; 2) $(-2{,}3) + (-0{,}9) = -3{,}2$; 3) $(+5{,}25) + (-2) = +3{,}25$; 4) $(-4) + (+2{,}65) = -1{,}35$.

Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и перед результатом поставить их общий знак.

Чтобы сложить два числа с противоположными знаками и с разными абсолютными величинами, надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую и перед результатом поставить знак слагаемого с большей абсолютной величиной.

Сумма противоположных чисел равна нулю $(+8) + (-8) = 0$.

Если одно из двух слагаемых есть 0, то сумма равна другому слагаемому.

Легко убедиться на примерах, что для любых рациональных чисел верны законы сложения (переместительный и сочетательный).

4. Вычитание рациональных чисел. Вычитание обратно сложению, поэтому вычитание можно проверить сложением.

Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число,

противоположное вычитаемому: $a-b=a+(-b)$.

Применим это правило вычитания к примерам:

1) $(-19{,}6)-(-28)=(-19{,}6)+(+28)=+8{,}4$;

2) $\left(-23\frac{3}{4}\right)-(+41)=\left(-23\frac{3}{4}\right)+(-41)=-64\frac{3}{4}$.

Сумма разности и вычитаемого должна равняться уменьшаемому:

1) $(+8{,}4)+(-28)=-19{,}6$; 2) $\left(-64\frac{3}{4}\right)+(+41)=-23\frac{3}{4}$.

Этим подтверждается правильность правила вычитания рациональных чисел.

Сложение можно проверить вычитанием.

5. Алгебраическая сумма. Так как вычитание рациональных чисел можно заменить сложением (по правилу вычитания), то выражение, содержащее сложения и вычитания, может быть представлено в виде одних только сложений и поэтому оно называется алгебраической суммой. Например, $(-13{,}5)+\left(+7\frac{1}{3}\right)-(-0{,}25)-(+21)=(-13{,}5)+\left(+7\frac{1}{3}\right)+(+0{,}25)+(-21)$. Знаки сложения можно опустить и записать положительные и отрицательные слагаемые с их знаками друг за другом. Тогда наша алгебраическая сумма примет вид: $-13{,}5+7\frac{1}{3}+0{,}25-21$, что означает, что числа $-13{,}5$, $+7\frac{1}{3}$, $+0{,}25$ и -21 нужно сложить.

6. Умножение рациональных чисел. Задача. Какая температура будет через b часов, если в данный момент она равна 0° и каждый час повышается на $a°$?

Решение. $a°\cdot b$. Вычислим искомую температуру при следующих значениях: 1) $a=+2°$, $b=+3$; 2) $a=-2°$, $b=+3$; 3) $a=+2°$, $b=-3$; 4) $a=-2°$, $b=-3$.

1) $(+2°)\cdot(+3)=+6°$; 2) $(-2°)\cdot(+3)=-6°$ (понижаясь на 2° в час, температура через 3 часа будет $-6°$); 3) $(+2°)\cdot(-3)=-6°$ (температура повышалась на 2° каждый час и 3 часа назад была $-6°$); 4) $(-2°)\cdot(-3)=+6°$ (температура понижалась на 2° в час и 3 часа назад была $+6°$, так как в данный момент 0°).

Чтобы перемножить два рациональных числа, нужно перемножить их абсолютные величины и полученный результат взять со знаком плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если сомножители имеют противоположные знаки.

Произведение двух чисел равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

При перемножении нескольких чисел произведение их абсолютных величин берут со знаком плюс, если число отрицательных сомножителей четное, и со знаком минус, если число отрицательных сомножителей нечетное.

Для любых рациональных чисел верны законы умножения (переместительный, сочетательный и распределительный относительно сложения и вычитания; см. § 3).

7. Деление рациональных чисел. Деление обратно умножению. Рассмотрим примеры: 1) $18{,}6:6=3{,}1$; 2) $(-18):(-6)=+3$, так как $(+3)\cdot(-6)=-18$; 3) $(+22):(-5)=-4{,}4$, так как $(-4{,}4)\cdot(-5)=+22$; 4) $(-21):(+5)=-4{,}2$, так как $(-4{,}2)\cdot(+5)=-21$.

Чтобы разделить одно рациональное число на другое (не равное нулю), надо абсолютную величину делимого разделить на абсолютную величину делителя и перед частным поставить знак плюс, если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, и знак минус, если делимое и делитель имеют противоположные знаки.

Деление на нуль невозможно.

8. Возведение рационального числа в натуральную степень. Рассмотрим примеры: 1) $(+5)^2=(+5)\cdot(+5)=+25$; $(+4)^3=(+4)\cdot(+4)\cdot(+4)=+64$; 2) $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9$; $(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+16$; 3) $(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$; $(-2)^5=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-32$. Получаем три правила.

Положительное число при возведении в степень с любым натуральным показателем дает число положительное.

Четная степень отрицательного числа положительна.

Нечетная степень отрицательного числа отрицательна.

Упражнения 92—99

92. а) Поставить между следующими числами знак $>$ или $<$: $9{,}5$ и 0; $-0{,}37$ и 0; $0{,}05$ и -5; $-107\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$.

б) Записать рациональные числа в порядке возрастания: $-1{,}2$; $0{,}75$; 0; -17; $-22{,}05$; $0{,}125$; -100; 101; $-1{,}205$.

в) Сравнить абсолютные величины следующих чисел: $|-3|$ и $|3|$; $|5{,}7|$ и $|10|$; $|-50{,}7|$ и $|-40{,}7|$; 0 и $|-100|$.

г) Записать числа в порядке убывания их абсолютных величин: $-3{,}65$; $-\frac{2}{3}$; $10\frac{5}{7}$; 0; $150{,}3$; -300; $-299{,}9$.

93. Выполнить действия над рациональными числами:

а) $(-15{,}3)+\left(+12\frac{1}{4}\right)$; $-0{,}75+0{,}9$; $-37\frac{2}{3}-102\frac{1}{2}$;

б) $375-(+276{,}8)$; $0{,}13-\left(-\frac{11}{20}\right)$; $-39\frac{3}{4}-(-20{,}5)$; $-\frac{5}{7}-\left(+6\frac{1}{2}\right)$;

в) $-\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{14}{9}\right)$; $1{,}25\cdot(-8)$; $0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; $0{,}5\times(-1{,}5)\cdot(-4)\cdot(-0{,}1)$;

г) $-3\frac{1}{3}:2{,}5$; $-0{,}7:(-0{,}05)$; $0:(-2{,}1)$; $5{,}75:(-5{,}75)$; $1:\left(-\frac{7}{9}\right)$;

д) $(+10)^3$; $(-1{,}5)^2$; $(-1{,}5)^3$; $(-0{,}03)^3$; $(-1)^7$; $(-1)^8$; $(-1{,}1)^4$.

94. Составить формулы из положительных и отрицательных чисел, соединенных знаками действий, и вычислить ответы в задачах:

а) Уровень воды в реке в течение шести суток последовательно изменялся на $+12{,}5$ *см*, $+9{,}5$ *см*, -5 *см*, $+8{,}5$ *см*, $-10{,}5$ *см*, -9 *см*. На сколько поднялся уровень воды за 6 суток и на сколько в среднем он поднимался ежесуточно?

б) На складе имелось 70 *т* топлива, когда пополнение запаса топлива и отпуск его потребителям стали выражаться числами $+30$ *т* и $-12{,}5$ *т* ежедневно. Сколько тонн топлива будет на складе через 15 дней?

95. Сделать вычисления в обеих частях равенства и убедиться в выполнимости законов сложения и умножения для рациональных чисел; сформулировать эти законы:

а) $(-16{,}35)+\left(+31\frac{2}{3}\right)+(-10{,}65)=-16{,}35+$ $+(-10{,}65)+31\frac{2}{3}$;

б) $13{,}5+\left(-51\frac{1}{3}\right)+\left(-18\frac{2}{3}\right)=13{,}5+\Big[-51\frac{1}{3}-$ $-18\frac{2}{3}\Big]$;

в) $0{,}25\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot(-40)\cdot\frac{2}{3}=0{,}25\cdot(-40)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)\times$ $\times\frac{2}{3}$;

г) $-9\frac{1}{3}\cdot 0{,}125\cdot(-8)=-9\frac{1}{3}\cdot[0{,}125\cdot(-8)]$;

д) $0{,}4\cdot[-25+0{,}5-1{,}25]=0{,}4\cdot(-25)+0{,}4\cdot 0{,}5+$ $+0{,}4\cdot(-1{,}25)$.

96. Решить простейшие уравнения, пользуясь арифметическими правилами (см. § 5):

а) $-0{,}176+x=-5{,}07$; $x\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{5}$;

б) $x-\left(-\frac{3}{4}\right)=17{,}5$; $155{,}1-x=-39{,}86$;

в) $-96\frac{1}{2}:x=-\frac{5}{6}$; $x:(-0{,}75)=4{,}4$.

97. Выполнить указанные действия:

а) $\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(+5\frac{3}{4}\right)+\left(-3\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-6\frac{1}{2}\right)$.

Решение. В подобных примерах выгодно сделать только три сложения (если воспользоваться законами сложения): 1) сложение всех положительных слагаемых;

2) сложение всех отрицательных слагаемых; 3) сложение результатов 1-го и 2-го действий.

1) $5\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=6\frac{1}{4}$; 2) $-2\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}-6\frac{1}{2}=$ $=-12\frac{3}{4}$; 3) $6\frac{1}{4}-12\frac{3}{4}=-6\frac{1}{2}$.

б) $$\frac{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot1\frac{1}{2}-4\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1}.$$

Решение. 1) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$; 2) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; 3) $3\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot4}{9}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$; 4) $-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot1\frac{1}{2}=\frac{2\cdot2\cdot3}{3\cdot2}=+2$; 5) $-4\cdot\frac{9}{4}=-\frac{4\cdot9}{4}=$ $=-9$; 6) $1\frac{1}{3}+2-9=-5\frac{2}{3}$; 7) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\times$ $\times\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}$; 8) $2\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)\cdot\frac{9}{4}=-\frac{2\cdot8\cdot9}{27\cdot4}=$ $=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$; 9) $-1\frac{1}{3}-1=-2\frac{1}{3}$;

10) $-5\frac{2}{3}:\left(-2\frac{1}{3}\right)=-\frac{17}{3}:\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{17\cdot3}{3\cdot7}=2\frac{3}{7}$.

98. Выполнить указанные действия:

а) $(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)+(-3)+$ $+\left(+\frac{3}{4}\right)$;

б) $(-0{,}41)+(+0{,}79)+(-0{,}64)+(-0{,}18)+(-0{,}32)+$ $+(-0{,}24)$;

в) $-6+\left\{\left[-1\frac{1}{2}+\left(+1\frac{2}{3}\right)\right]+\left[+1\frac{2}{5}+\left(+2\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$;

г) $\{2{,}15+[-1{,}315+(-7{,}2)]\}+[(-1{,}78)+$ $+(+9{,}235)]$;

д) $\{-1{,}75+[+3{,}4+(-6{,}283)]\}+[(+2{,}53)+$ $+(-0{,}472)]$;

е) $3:\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}:2\right)+5\cdot\left[0{,}4-\frac{2}{5}:(-2)\right]+$ $+(-2):(-1)$;

ж) $2\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-8)-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]^3+\frac{2}{3}\cdot(-9)\left[2-\right.$
$\left.-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2.$

99. Найти значения следующих выражений:

а) $[x:(y-1)]\cdot(-4)-[xy+(-3)]:(-1)$ при $x=-5,\ y=-2$;

б) $2(c-d)^2-3(c+d)(c-d)$ при $c=2\frac{1}{2},\ d=-1\frac{1}{2}$;

в) $\frac{2m^2-4m-1}{m^2+m+1}$ при $m=-\frac{3}{4}$.

§ 13. Одночлены и многочлены

1. Целые рациональные выражения. Одночлен и многочлен. *Алгебраическое выражение называется рациональным, если в нем нет никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.*

Рациональное выражение называется целым, если оно не содержит буквенных делителей. Например: $2a+b^2$; $\frac{4}{3}xy$; $\frac{7x}{5}$ (или $1{,}4x$); $\frac{m^2-4m+3}{2}\left(\text{или } \frac{1}{2}m^2-2m+\frac{3}{2}\right)$ и т. д.

Рациональное выражение называется дробным, если оно содержит буквенные делители. Например: $\frac{a+c}{2a}$; $x+\frac{5}{y}$; $\frac{m^2+1}{m+n}$; $\frac{1}{1+a}$ и т. д.

Алгебраическое выражение, которое содержит только действия умножения и возведения в степень, называется одночленом. Примеры одночленов: $3{,}5a$; $-5x^2y^3z$; -2^4; $\frac{1}{4}m^5$; c; 4 и т. д. (отдельная буква или число также считаются одночленами).

Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется многочленом. Примеры многочленов: x^2+1; $5a^3-4ab^2+3{,}2$; $-m^2+2mn-n^2+8$ и т. д. *Одночлены, входящие в состав многочлена, называются его членами.* В зависимости от числа членов многочлены подразделяются на двучлены, трехчлены и т. д. Одночлен считается частным случаем многочлена.

Одночлены и многочлены являются целыми рациональными алгебраическими выражениями. Целые рациональные выражения вида $(x+y)a$, $2(m^2-3n)^2-1{,}3n$ также считаются многочленами, так как после выполнения действий и раскрытия скобок они становятся алгебраической суммой одночленов: $ax+ay$; $2m^4-12m^2n+18n^2-1{,}3n$. Итак, любое целое рациональное выражение может быть представлено в виде многочлена.

2. Равенство, неравенство; тождество, тождественное преобразование. *Два числа или два алгебраических выражения, соединенные знаком «равно», называются равенством.* Примеры равенств:

$$1{,}75=1\frac{3}{4};\ (-5)^3=-125;\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$\frac{a^3-c^3}{a-c}=a^2+ac+c^2;\ 1{,}5x=-6;\ x^2-6x+9=0;\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=$$
$$=\frac{ad}{bc};\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ ad=bc \text{ и т. д.}$$

Два числа или алгебраических выражения, соединенные знаком «больше» или «меньше», называются неравенством. Например: $-5>-9{,}5$; $0>-100$; $-1<0{,}01$; $(a-b)^2\geqslant 0$; $-x^2\leqslant 0$; $a^2+b^2>2ab$ при $a\neq b$. Каждое равенство или неравенство состоит из двух частей: левой и правой.

Равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв, называется тождеством. Например: $\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

В этих равенствах a и b могут быть любыми рациональными числами и при любых числовых значениях букв a и b левая часть равна правой. В равенстве

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

допустимыми значениями букв (см. п. 1 § 11) являются любые рациональные числа, кроме $b=0$ и $d=0$, и при всех этих допустимых значениях букв равенство верно. Три рассмотренных равенства являются тождествами. А вот равенство $-3{,}6:x=-1{,}2$ не является тождеством, так как множество допустимых значений x состоит из всех рациональных чисел, кроме нуля, а это равенство верно не при всех допустимых значениях x (оно верно только при одном значении: $x=3$).

Выражения, которые имеют одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв, называются тождественно равными или тождественными. Тождественными являются всегда, например, левая и правая часть одного и того же тождества.

Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется тождественным преобразованием этого выражения. Например, выражение $(a+b)c$ можно тождественно преобразовать в такое: $ac+bc$ (см. § 3, распределительный закон).

3. Приведение подобных членов. *Одинаковые или отличающиеся только коэффициентами одночлены называются подобными.* Примеры подобных членов: $0,6ab$ и $0,6ab$; $9a^2b^3c$ и $-\frac{2}{3}a^2b^3c$; m^2 и $1,35m^2$. Примеры не подобных членов: $-2a$ и $-2a^2$; mn и m; $3,1x^2y$ и $-7xy$.

Поскольку буквы и выражения в алгебре представляют в общем виде числовые значения некоторых величин, то на алгебраические выражения распространяются законы и свойства арифметических действий, установленные для чисел. На основе этого ниже будут выведены правила действий над алгебраическими выражениями, в частности над одночленами и многочленами.

К многочлену $3a-5b+0,5c-b-\frac{1}{3}a+2,75b$, содержащему подобные члены, применим переместительный и сочетательный законы сложения: $\left(3a-\frac{1}{3}a\right)+(-5b-$ $-b+2,75b)+0,5c$ и распределительный закон умножения: $\left(3-\frac{1}{3}\right)a+(-5-1+2,75)b+0,5c$ или $2\frac{2}{3}a-$ $-3,25b+0,5c$. Указанные тождественные преобразования проделываются в уме и записываются короче: $3a-5b+$ $+0,5c-b-\frac{1}{3}a+2,75b=2\frac{2}{3}a-3,25b+0,5c$.

Замена алгебраической суммы подобных членов тождественно равным этой сумме одним членом называется приведением подобных членов. После приведения подобных членов получается член, подобный приводимым членам, но с коэффициентом, равным сумме их коэффициентов. Исключением является случай, когда сумма коэффициентов подобных членов равна нулю, — тогда эти члены взаимно уничтожаются. Например, $3x^2 + 0{,}7x^2 - 5x^2 + 1{,}3x^2 = 0 \cdot x^2 = 0$.

4. Сложение одночленов и многочленов. Сложить одночлены: $2a^3$; $-a^2$; $-0{,}25a^3$; $5{,}3$. Запишем их сумму: $(+2a^3) + (-a^2) + (-0{,}25a^3) + (+5{,}3)$ или проще: $2a^3 - a^2 - 0{,}25a^3 + 5{,}3$.

Ответ: $1{,}75a^3 - a^2 + 5{,}3$.

Чтобы сложить одночлены, достаточно записать их один за другим с их же знаками и привести подобные члены (если таковые окажутся).

Многочлен всегда можно представить в виде суммы, поэтому правило прибавления многочлена следует из правила прибавления суммы (см. п. 6 § 3).

$$xy + \left[3x + (-5{,}1xy) + \frac{5}{7}y\right] = xy + 3x - 5{,}1xy + \frac{5}{7}y = -4{,}1xy + 3x + \frac{5}{7}y.$$

Чтобы прибавить многочлен, надо приписать все его члены один за другим с их же знаками и привести подобные (если они имеются):

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d.$$

Если читать это равенство слева направо, то получим правило раскрытия скобок, перед которыми стоит плюс. Если же переходить от правой части к левой, то получим правило заключения членов в скобки, перед которыми ставится плюс.

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с их же знаками.

Чтобы заключить многочлен в скобки со знаком плюс перед ними, надо записать в скобках все члены многочлена с их знаками.

$$(a + b - c) + (x - y - z + u) = a + b - c + x - y - z + u.$$

5. Вычитание одночленов и многочленов. Из $-3x$ вычесть $+5x^2$. Искомая разность: $-3x - (+5x^2)$. Вычитание заменим сложением (см. п. 4 § 12): $-3x + (-5x^2)$ или $-3x - 5x^2$. Получаем: $-3x - (+5x^2) = -3x - 5x^2$.

Чтобы вычесть одночлен, достаточно приписать его к уменьшаемому с противополож-

ным знаком и привести имеющиеся подобные члены.

Противоположные числа (см. п. 2 и 3 § 12) отличаются только знаками, и сумма их равна нулю (например, $+3$ и -3). Одночлены, которые отличаются только знаками, будем называть противоположными (например, $-5ab$ и $+5ab$); их сумма также равна нулю. Два многочлена назовем противоположными, если все члены каждого из них противоположны членам другого. Например, многочлены $a-b+c$ и $-a+b-c$ — противоположные: $(a-b+c)+(-a+b-c)=a-b+$ $+c-a+b-c=0$.

Пусть требуется из a вычесть $x-y+z$. Искомая разность: $a-(x-y+z)=a+(-x+y-z)=a-x+y-z$. Вычитание заменили прибавлением противоположного вычитаемому числа, в данном случае — противоположного многочлена и применили правило прибавления многочлена.

Чтобы вычесть многочлен, достаточно приписать к уменьшаемому все его члены с противоположными знаками и сделать приведение подобных членов (если они окажутся).

$$4a^2b-(-5a^2b^2+ab^2)=4a^2b+5a^2b^2-ab^2.$$

Из этого правила следуют правила раскрытия скобок и заключения в скобки со знаком минус перед скобками.

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с противоположными знаками.

Чтобы заключить многочлен в скобки со знаком минус перед ними, надо записать в скобках все члены многочлена с противоположными знаками.

$$(a-b+c)-(-m+n+p-q)=a-b+c+$$
$$+m-n-p+q.$$

6. **Умножение одночленов и многочленов.**

$$3^2\cdot 3^5=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^7;$$

$$a^n\cdot a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ раз}}=a^{n+m}.$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним.

Для умножения одночлена на одночлен применим правило умножения на произведение (см. п. 6 § 3), а затем — переместительный и сочетательный законы умножения:

$$(-2a^2bc)\cdot\left(-\frac{3}{4}a^4b^3\right)=-2a^2bc\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot a^4\cdot b^3=$$
$$=(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(a^2\cdot a^4)\cdot(b\cdot b^3)\cdot c=\frac{3}{2}a^6b^4c.$$

Чтобы перемножить одночлены, надо перемножить их коэффициенты и показатели их одинаковых букв сложить, а буквы, содержащиеся только в одном из одночленов, надо перенести с теми же показателями в произведение.

$$\frac{1}{3}x^5y^2\cdot(-6)xz^{10}u^4\cdot 0{,}5x^3y^6z^2v=-x^9y^8z^{12}u^4v.$$

Из распределительного закона умножения (см. § 3) следует правило умножения многочлена на одночлен:

$$\boldsymbol{(a+b-c)\cdot m=am+bm-cm.}$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Переместительный закон умножения позволяет по этому же правилу умножать и одночлен на многочлен:

$$-0{,}3x^2y\cdot(2{,}5x^4z^2-y^3z)=-0{,}75x^6yz^2+0{,}3x^2y^4z.$$

В произведении многочленов $(x-y+z)\cdot(a-b)$ рассматриваем множитель $(a-b)$ как одно число и получим: $x(a-b)-y(a-b)+z(a-b)$. Еще раз применим распределительный закон умножения: $ax-bx-ay+by+az-bz$. Запишем короче:

$$\boldsymbol{(x-y+z)\cdot(a-b)=ax-bx-ay+by+az-bz.}$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить:

$$\boldsymbol{(m-n)\cdot(m^2+mn+n^2)=m^3+m^2n+mn^2-m^2n-mn^2-}$$
$$\boldsymbol{-n^3=m^3-n^3.}$$

7. Деление одночленов и многочлена на одночлен. $a^5:a^2=a^3$, потому что $a^3\cdot a^2=a^5$; $3^{10}:3^8=3^2$; $a^m:a^n=a^{m-n}$, где показатели степеней есть числа натуральные и $m>n$.

При делении степеней одного и того же числа из показателя m делимого надо вычесть показатель n делителя, если $m > n$.

Частное от деления равных чисел равно единице, поэтому $a^m : a^m = 1$.

При делении одночленов, например $6x^7 : 2x^4$, должен получиться такой одночлен, умножение которого на делитель $2x^4$ дает делимое $6x^7$. Искомым частным будет $3x^3$, так как $3x^3 \cdot 2x^4 = 6x^7$. Получаем $6x^7 : 2x^4 = 3x^3$. Аналогично: $-12a^5b^4c^2 : 3a^2b = -4a^3b^3c^2$, так как $-4a^3b^3c^2 \times 3a^2b = -12a^5b^4c^2$.

Чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно коэффициент делимого разделить на коэффициент делителя и к полученному частному приписать множителем каждую букву делимого с показателем, равным разности показателей этой буквы в делимом и делителе. Буква, входящая только в делимое, переносится в частное с тем же показателем. Если показатели какой-нибудь буквы в делимом и делителе одинаковы, то эта буква не войдет в частное.

$$-\frac{1}{2}m^3n^6p : \frac{1}{8}m^3n = -4n^5p.$$

В частном получится дробное выражение, а не целый одночлен, если показатель буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом или если делитель содержит букву, которой нет в делимом. Например:

$$5a^2 : 3a^3 = \frac{5a^2}{3a^3} = \frac{5}{3a}; \quad 2x^3y : 2x^2z = \frac{2x^3y}{2x^2z} = \frac{xy}{z}.$$

Правило деления многочлена на одночлен следует из правила деления суммы на число (см. п. 6 § 3):

$$\left(0{,}6m^2n^4 - \frac{2}{3}m^8np^3 + m^5n^2q\right) : (-2m^2n) =$$

$$= -0{,}3\,n^3 + \frac{1}{3}m^6p^3 - \frac{1}{2}m^3nq.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена. В частном получится многочлен, а не дробное выражение, лишь тогда, когда каждый член делимого нацело делится на делитель.

8. Возведение одночленов в степень. Формулы сокращенного умножения. $(m^2)^3 = m^2 \cdot m^2 \cdot m^2 = m^{2+2+2} = m^{2 \cdot 3} = m^6$. Короче: $(m^2)^3 = m^6$.

При возведении степени в степень показатели перемножаются, основание же не изменяется.

$$(-2a^3b)^2 = -2a^3b \cdot (-2a^3b) = 4a^6b^2$$

или короче:

$$(-2a^3b)^2 = 4a^6b^2; \quad \left(\frac{1}{3}xy^4z^2\right)^3 = \frac{1}{27}x^3y^{12}z^6,$$
$$(5p^3q^2)^n = 5^np^{3n}q^{2n}.$$

Чтобы возвести в степень одночлен, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Сокращенно это запишется так:

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

Аналогично получим:

$$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab + b^2$$

или сокращенно:

$$\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.}$$

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

или сокращенно:

$$\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа.

Аналогично получим:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, минус куб второго числа.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=$$
$$=a^3+b^3$$

или сокращенно:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.

Аналогично получим формулу:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

Произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.

Упражнения 100—113

100. Указать, какие из следующих алгебраических выражений являются дробными, целыми, одночленами, многочленами; какие могут быть представлены в виде многочленов после выполнения некоторых действий:

а) $-\frac{5}{7}a^3bc^2$;
б) $2x^4\cdot\frac{y^3}{z}$;
в) $0{,}5m-1{,}7m^2n$;
г) $a(b-c)$;
д) $10p^2-\frac{p^3}{100}$;
е) $ab+\frac{a}{b}$;
ж) $\frac{ax^2y}{3}$;
з) $(m-n)^2$;
и) $(a^2+b^2)(x-y)^3$.

101. а) Проверить равенства: 1) $x-5=10$ при $x=15$ и при $x=-15$; 2) $27:a=-9$ при $a=-3$ и при в) $-2(3-m-m^2)+5(1+m+m^2)-(9m^3-12m^2-3m):(-3m)$;

г) $\left[5(a+2b^2)(a-2b^2)-\frac{2}{5}(5a-4b^2)(a+12{,}5b^2)+\frac{3}{5}a\left(\frac{1}{2}a-1{,}2b^2\right)\right]:(-0{,}3a)$.

110. Произвести умножение по формулам:

а) $(1+2x^2)^2$;
б) $(9m^3-5p^2n)^2$;
в) $(3ab-1)(3ab+1)$;
г) $(7n^4+6m)(7n^4-6m)$;
д) $(y+2z)^3$;
е) $(y^3-x^2)^3$;
ж) $(a+2)(a^2-2a+4)$;
з) $(1-a)(1+a+a^2)$;
и) $(2+m)(2-m)(m^2+4)$;
к) $\left(1\frac{2}{3}x^{3m}-0{,}6y^{n-1}\right)^2$.

111. Вычислить при помощи формул сокращенного умножения:

а) $72\cdot68$; $199\cdot201$; 55^2-45^2; $\left(7\frac{1}{3}\right)^2-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; $0{,}7^2-0{,}3^2$ — по формуле $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;

б) 41^2; 69^2; 105^2; 98^2; $7{,}1^2$ — по формулам $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$;

в) $57^3+3\cdot57^2\cdot43+3\cdot57\cdot43^2+43^3$; $11^3-3\cdot11^2+3\cdot11-1$ — по формулам $a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$.

112. Произвести умножение по формулам, раскрыть скобки и привести подобные члены:

а) $(a+3)^2-(a+2)^2$; б) $(x+2)^3-(x-1)^3$;
в) $(a+9)(a-9)-(a+10)(a-10)$;
г) $(x^2+2x+4)(x-2)-(x-1)^3$.

113. Решить уравнения:

а) $6y-(14y^2-21y^3):7y^2+15=14$;
б) $(x+5)^2-(x-1)^2=48$;
в) $(2z-1)^2-7(z+3)(z-3)+3(z+2)^2=28$.

Примечание. После выполнения действий в левой части каждого уравнения получим одно из простейших уравнений, рассмотренных в арифметике (§ 5).

Глава V ● Алгебраические дроби

§ 14. Разложение многочлена на множители

В предыдущем параграфе изложены пять действий над целыми рациональными выражениями — одночленами и многочленами. Прежде чем перейти к действиям над дробными рациональными выражениями, рассмотрим операцию разложения многочлена на множители, которая находит применение, в частности, при сокращении алгебраических дробей и при приведении их к простейшему общему знаменателю.

Разложением многочлена на множители называют тождественное преобразование его в произведение нескольких сомножителей, являющихся целыми алгебраическими выражениями.

Например, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Разберем следующие основные способы разложения многочленов на множители.

1. **Вынесение общего множителя за скобки.** По правилу умножения многочлена на одночлен имеем: $(a + b - c)m = am + bm - cm$; отсюда получаем, что

$$am + bm - cm = m(a + b - c).$$

Если все члены многочлена имеют общий множитель, то его можно вынести за скобки. При этом произведение, в которое тождественно преобразуется данный многочлен, состоит из двух сомножителей: общего множителя (m), выносимого за скобки, и частного (a + b − c) от деления данного многочлена на выносимый множитель.

Примеры. 1) $16m^2n - 4m^3n^4 = 4m^2n(4 - mn^3)$; общий множитель $4m^2n$ составлен из произведения наибольшего общего делителя (см. п. 4 § 6) всех коэффициентов (16 и 4) данного многочлена и общих буквенных множителей (m^2 и n), взятых с наименьшими показателями степеней из данных в многочлене.

2) $5a(x-1) + 3b(x-1) - 7(x-1) = (x-1)(5a + 3b - 7)$; здесь общий двучленный множитель $(x-1)$.

2. Разложение способом группировки. В многочлене $ax - by + bx - ay$ нет общего для всех членов множителя. Однако первый и третий члены имеют общий множитель, второй и четвертый члены имеют свой общий множитель, поэтому объединим члены в две группы: $(ax + bx) - (by + ay)$. После вынесения за скобки x и y получим общий двучленный множитель $(a + b)$, который также вынесем за скобки. Все это запишется так:

$$ax - by + bx - ay = (ax + bx) - (by + ay) = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y).$$

Это и есть способ группировки.

Разложить на множители способом группировки можно лишь такой многочлен, в котором можно разбить все члены на две или несколько групп, поддающихся разложению на множители и содержащих общий для всех групп многочленный множитель.

Пример. $ax^2 - bx^2 - ax + cx^2 + bx - cx = (ax^2 - bx^2 + cx^2) - (ax - bx + cx) = x^2(a - b + c) - x(a - b + c) = (x^2 - x)(a - b + c) = x(x - 1)(a - b + c)$. Можно сгруппировать члены этого же многочлена по-другому:

$$(ax^2 - ax) - (bx^2 - bx) + (cx^2 - cx) = ax(x - 1) - bx(x - 1) + cx(x - 1) = x(x - 1)(a - b + c).$$

3. Разложение по формулам умножения. Каждая из семи формул сокращенного умножения (см. п. 8 § 13), если правую ее часть сделать левой, а левую — правой, дает разложение многочлена на множители:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3;$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Примеры. 1) $m^6 - 2m^3n^3 + n^6 = (m^3 - n^3)^2$;

2) $(x + z)^2 + 2(x + z)y + y^2 = [(x + z) + y]^2 = (x + z + + y)^2$;

3) $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b) \times \times (a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

4) $8x^3 - 60x^2z + 150xz^2 - 125z^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5z + + 3\cdot 2x\cdot(5z)^2 - (5z)^3 = (2x - 5z)^3$.

4. Другие способы. Применение нескольких способов. Иногда приходится применять такие приемы разложения многочлена на множители:

1) Заменить один из членов равной ему суммой двух членов так, чтобы получить возможность применить способ группировки. Например,

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x + 3) + 4(x + 3) = = (x + 3)(x + 4).$$

2) Прибавить к многочлену два таких противоположных члена (см. п. 5 § 13), чтобы получить возможность выделить в многочлене квадрат суммы или разности двух чисел и применить формулы сокращенного умножения. Например,

$$a^2 + 6a + 8 = a^2 + 6a + 9 - 9 + 8 = (a + 3)^2 - 1 = [(a + 3) - - 1][(a + 3) + 1] = (a + 3 - 1)(a + 3 + 1) = (a + 2)(a + 4).$$

В дальнейшем будет указан общий способ разложения квадратного трехчлена на множители (см. п. 6. § 21).

Способы разложения многочлена на множители применяются примерно в таком порядке. Сначала надо вынести за скобки общий множитель всех членов, если таковой имеется. Затем попытаться применить одну из формул сокращенного умножения ко всему многочлену или к каким-нибудь двум, трем или четырем его членам. Подбираем пары членов такого типа: $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ или $a^3 + b^3$; трехчлены типа $a^2 + 2ab + b^2$ или $a^2 - 2ab + b^2$; четырехчлены типа $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ или $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - - b^3$, где a и b — любые числа или выражения. Наконец, пытаемся применить способ группировки.

Примеры применения нескольких способов разложения многочлена на множители:

1) $9x^5y + 18x^4y + 9x^3y = 9x^3y(x^2 + 2x + 1) = 9x^3y(x + 1)^2$;

2) $2bc + a^2 - b^2 - c^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 = [a - (b - c)][a + (b - c)] = (a - b + c)(a + b - c)$;

3) $p^3 - 3p^2 - 3p + 1 = p^3 + 1 - 3p^2 - 3p = (p^3 + 1) - (3p^2 + 3p) = (p + 1)(p^2 - p + 1) - 3p(p + 1) = (p + 1) \times [(p^2 - p + 1) - 3p] = (p + 1)(p^2 - 4p + 1)$.

Упражнения 114—123

114. Разложить многочлены на множители способом вынесения за скобки общего множителя (см. п. 1 § 14):

а) $4xy - 8xz$;
б) $12a^6b^4 - 3a^3b^2$;
в) $54m^8n^5 - 42m^5n^3 - 24m^4n^7$;
г) $-15x^5y^7 + 5x^3y^6 - 10x^9y^5$;
д) $m(q - p) - (p - q)$;
е) $p(1 - a + a^2) - 1 + a - a^2$.

115. Разложить многочлены на множители по формулам умножения (см. п. 3 § 14):

а) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
б) $a^2x^2 - 2abx + b^2$;
в) $9(3x + y)^2 - 6(3x + y) + 1$;
г) $-x^2 + 2xy - y^2$;
д) $1 - m^2n^2$;
е) $36a^4b^2 - 49x^4$;
ж) $(p + q)^2 - (k + l)^2$;
з) $x^3 + 1$;
и) $n^3 - 8$;
к) $-a^3 - b^3$;
л) $(p + q)^3 - 1$;
м) $27p^3 - 27p^2y + 9py^2 - y^3$;
н) $y^3 + 3y^2 + 3y + 1$.

116. Разложить многочлены на множители способом группировки (см. п. 2 § 14):

а) $xy + yz + x + z$;
б) $m(p - q) + nq - np$;
в) $ab + 1 + a + b$;
г) $a(x - y) - b(y - x)$;
д) $56a^2 - 40ab + 63ac - 45bc$;
е) $ax^2 - bx^2 + bx - ax + a - b$.

117. Разложить многочлены на множители, применяя разные способы:

а) $y - y^3$; ж) $(x + a)^3 - (a - x)^3$;
б) $4 - m^2 - 2mn - n^2$; з) $4a^6b^4 - (a^6 + b^4)^2$;
в) $1 - p^2 + 2pq - q^2$; и) $(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2$;
г) $k^4 - l^4$; к) $x^3 + x^2 + 2xy + y^2 + y^3$;
д) $mp - np - m^2 +$ л) $m^3 - m^2n - mn^2 + n^3$;
$+ 2mn - n^2$; м) $5p^3x - 15p^2qx + 15pq^2x -$
е) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; $- 5q^3x$.

118. Разложить на множители, применив частные приемы разложения (см. п. 4 § 14):

а) $x^2 - 5x + 6$; в) $m^2 + 2mn - 15n^2$;
б) $a^2 + a - 12$; г) $3p^2 + 27p + 54$.

119. Найти частные от деления следующих многочленов (получатся формулы сокращенного деления):

а) $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$; в) $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$; д) $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$;
б) $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$; г) $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$; е) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$.

120. Выполнить деление многочленов, пользуясь формулами деления (см. упражнение 119) и умножения:

а) $(1 - 4x^2) : (1 - 2x)$; ж) $(9c^2 + 30c + 25) : (3c + 5)$;
б) $(25 - m^2n^2) : (mn + 5)$; з) $(z^2 - 12z + 36) : (z - 6)$;
в) $(8a^3 + 27) : (2a + 3)$; и) $(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) : (a + 1)$;
г) $(p^9 - q^6) : (p^3 - q^2)$; к) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$;
д) $(27y^3 + 8) : (9y^2 - 6y + 4)$; л) $(d^3 + 6d^2 + 12d + 8) : (d^2 +$
$+ 4d + 4)$;
е) $\left(\frac{1}{8}b^3 - 1\right) : \left(\frac{1}{4}b^2 + \right.$ м) $(1 - 3x + 3x^2 - x^3) : (1 -$
$\left. + \frac{1}{2}b + 1\right)$; $- 2x + x^2)$.

121. Выполнить действия (разложить компоненты деления на множители и использовать правила деления произведения на число или числа на произведение; см. п. 6 § 3):

а) $\frac{10x^2 - 10y^2}{5x - 5y}$; в) $\frac{m^2y + 2mny + n^2y}{7m^2 - 7n^2}$;
б) $\frac{12ma^3 - 12mb^3}{3a^2 + 3ab + 3b^2}$; г) $\frac{3p^2 - 6pq + 3q^2}{p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3}$.

122. а) Доказать, что сумма произведения двух последовательных натуральных чисел и большего из них равна квадрату большего числа.

б) Доказать, что произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

123. Выполнить действия (см. упражнение 121) в выражении $\frac{5na^3 - 5nb^3}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ в буквенном виде, а затем в полученное более простое выражение, тождественно равное данному, подставить числа $a = 1\frac{2}{3}$, $b = -\frac{6}{7}$, $n = -0{,}37$ и найти числовое значение данного выражения.

§ 15. Действия над алгебраическими дробями

1. Алгебраическая дробь. *Частное двух многочленов, записанное с помощью черты деления, называется алгебраической дробью.* Два многочлена (в частности, одночлены), входящие в состав алгебраической дроби, называются ее членами; делимое называется числителем, а делитель — знаменателем дроби. Примеры алгебраических дробей: $\frac{2a^3 - 1}{a^2 + 3}$, $\frac{x^4 - 2x^3 - x + 1}{x^2 + 5x}$, $\frac{4m^2n^3}{m^2 - mn + n^2}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{15x(x + y)}{8y^3}$. Хотя целое выражение не является дробью, но его можно записать в виде дроби со знаменателем 1. Например, $2x - 3y = \frac{2x - 3y}{1}$. Любое дробное выражение в результате тождественного преобразования можно сделать алгебраической дробью. Например, $\frac{\frac{a}{c} - 1}{\frac{x + 3}{y}} = \frac{\frac{a - c}{c}}{\frac{x + 3}{y}} = \frac{(a - c)y}{c(x + 3)}$.

Так как знаменатель дроби не может быть равным нулю, то допустимыми значениями букв, входящих в алгебраическую дробь, будут только те числа, которые не обращают ее знаменатель в нуль. В дальнейшем всегда будет подразумеваться, что знаменатели дробей не равны нулю. При этом дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю.

2. Основное свойство дроби. Как арифметическая, так и алгебраическая дробь является частным, поэтому каждая из них обладает одним и тем же основным свойством, вытекающим из основного свойства частного (см. п. 2 § 4).

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить (или разделить) на одно и то же число, не равное нулю, то величина дроби не изменится. Это выражается следующими формулами:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc} \text{ и } \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c},$$

где a, b и c обозначают любые числа, одночлены или многочлены, но $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

3. Сокращение дробей. *Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель этой дроби на их общий множитель.* Согласно основному свойству алгебраической дроби, ее величина при сокращении не изменяется, т. е. получается дробь, тождественно равная данной дроби.

Если один или оба члена дроби есть многочлены, то сначала их надо разложить на множители и только после этого можно сокращать дробь на общий множитель всего числителя и всего знаменателя. Например,

$$\frac{ab-a^2}{ac}=\frac{a(b-a)}{ac}=\frac{b-a}{c}$$

сократили на общий множитель a всего числителя $a(b-a)$ и всего знаменателя ac.

Однако нельзя сокращать так: $\frac{ab-a^2}{ac}=\frac{b-a^2}{c}$, потому что то a, на которое мы сократили в числителе, является множителем не всего числителя, а лишь одного члена (ab) числителя. Нельзя сокращать и на один или несколько общих членов числителя и знаменателя, например так: $\frac{ab-a^2}{ab-b}=\frac{-a^2}{-b}$. Разложив числитель и знаменатель на множители, убеждаемся, что эта дробь несократима (числитель и знаменатель не имеют ни одного общего множителя): $\frac{ab-a^2}{ab-b}=\frac{a(b-a)}{b(a-1)}$; здесь как одночленные множители a и b, так и двучленные множители $(b-a)$ и $(a-1)$ различны. Этих грубых ошибок можно избежать, если вдуматься в смысл операции сокращения дроби как деления ее обоих членов на их общий множитель. Ведь при делении многочлена на число надо разделить каждый его член на это число, в то время как при делении произведения (или одночлена) надо разделить на это число лишь один сомножитель. Нельзя путать эти два правила.

Если члены дроби — одночлены, то легко найти их общие множители, на которые следует сократить. Например,

$$\frac{12a^2b^3xz^2}{8a^5c^2y}=\frac{3b^3xz^2}{2a^3c^2y};$$

мы отдельно сократили коэффициенты на 4, не изменяя при этом всех остальных множителей, а затем также отдельно сократили a^2 и a^5 на a^2.

4. Перемена знака у членов дроби.

Величина дроби не изменится, если знаки числителя и знаменателя изменить на противоположные:

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}.$$

В самом деле, вторая дробь получается из первой умножением ее членов a и b на -1, отчего величина дроби не изменяется (по основному свойству дроби).

Если переменить знак на противоположный только у одного члена дроби, то и знак у дроби переменится на противоположный. Например, $\frac{3}{6}=0{,}5$ и $\frac{-3}{6}=-0{,}5$, поэтому $\frac{3}{6}\neq\frac{-3}{6}$. Но $\frac{3}{6}=$ $=-\frac{-3}{6}$, так как $0{,}5=-(-0{,}5)$.

Величина дроби не изменится, если переменить знак у одного из членов дроби и перед дробью:

$$\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}.$$

Не следует путать два случая перемены знака у члена дроби:

1) Если член дроби, у которого нужно изменить знак, является многочленом, то нужно изменить знак на противоположный у каждого члена этого многочлена и перед дробью. Например,

$$\frac{-a^2+ab-b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=-\frac{a^2-ab+b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=-\frac{1}{a+b};$$

перемена знака у числителя и перед дробью, не изменяя величины дроби, позволила сократить дробь на общий трехчленный множитель числителя и знаменателя.

2) Если член дроби, у которого нужно переменить знак, является произведением, то достаточно переменить знак на противоположный только у одного сомножителя этого произведения и перед дробью. Например,

$$\frac{3b(a-b)(a+b)}{2a(b-a)(b^2+a^2)} = -\frac{3b(b-a)(a+b)}{2a(b-a)(b^2+a^2)} =$$
$$= -\frac{3b(a+b)}{2a(b^2+a^2)};$$

здесь переменили знак у множителя $a-b$ в числителе и получили множитель $b-a$, отчего изменился знак всего числителя, поэтому переменили знак и перед дробью.

5. Приведение дробей к общему знаменателю. Общий знаменатель нескольких дробей должен делиться на знаменатель каждой из этих дробей, т. е. быть общим кратным их знаменателей. Таких общих кратных существует бесконечно много (одним из них является произведение всех данных знаменателей), однако в качестве общего знаменателя удобнее брать наименьшее общее кратное знаменателей. Его будем называть простейшим общим знаменателем, и находить его можно так же, как и наименьшее общее кратное нескольких чисел (см. п. 5 § 6): ***разложить многочленные знаменатели на множители и к одному из знаменателей приписать недостающие множители из остальных знаменателей данных дробей.***

Приведем к простейшему общему знаменателю следующие дроби:

$$\frac{m}{6ax^2y+6bx^2y}, \quad \frac{n}{15a^2y^3-30aby^3+15b^2y^3}.$$
$$\frac{p}{a^3x+3a^2bx+3ab^2x+b^3x}.$$

После разложения знаменателей на множители получим: $\frac{m}{6x^2y(a+b)}$, $\frac{n}{15y^3(a-b)^2}$, $\frac{p}{x(a+b)^3}$. В общий знаменатель включаем полностью, например, первый знаменатель; тогда недостающими множителями из второго знаменателя будут 5 ($15=3\cdot5$, но 3 уже входит в 6), y^2 ($y^3=y\cdot y^2$, но y уже входит с первым знаменателем) и $(a-b)^2$, а из третьего знаменателя войдет недостающий множитель $(a+b)^2$, так как $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$, но $a+b$ уже входит из первого знаменателя. Получили: $6x^2y(a+b)\times\times 5y^2(a-b)^2\cdot(a+b)^2=30x^2y^3(a+b)^3(a-b)^2$.

Сравнив это выражение с данными знаменателями, видим, что ***простейший общий знаменатель дробей включает наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей, умноженное на все различные множители, входящие в знаменатели, причем каждый множитель берется с наибольшим показателем, с каким он входит в знаменатели.***

Разделив полученный общий знаменатель на знаменатель каждой из дробей, получим дополнительные множители, на которые и умножаем числители дробей. При этом и знаменатель дроби в результате приведения к общему знаменателю оказался умноженным на такой же дополнительный множитель, в результате чего каждая дробь сохраняет свою величину (см. п. 2). Получим:

$$\frac{m\cdot 5y^2(a+b)^2(a-b)^2}{30x^2y^3(a+b)^3(a-b)^2},\quad \frac{n\cdot 2x^2(a+b)^3}{30x^2y^3(a+b)^3(a-b)^2},$$

$$\frac{p\cdot 30xy^3(a-b)^2}{30x^2y^3(a+b)^3(a-b)^2}.$$

6. Сложение и вычитание алгебраических дробей.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и сумму разделить на их общий знаменатель.

Правила сложения и вычитания алгебраических дробей можно получить из правила деления многочлена на одночлен (см. п. 7 § 13):

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m},\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m},$$

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Чтобы вычесть дробь из другой дроби с тем же знаменателем, надо из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и разность разделить на их общий знаменатель.

При помощи сложения можно проверить правильность правила вычитания:

$$\frac{a-b}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a-b+b}{m}=\frac{a}{m}.$$

Любые дроби с различными знаменателями можно заменить тождественными им дробями с одинаковыми знаменателями, поэтому операция приведения дробей к общему знаменателю дает возможность свести сложение и вычитание дробей с различными знаменателями к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

После разложения многочленных знаменателей на множители простейший общий знаменатель ищем так: 1) если данные знаменатели не имеют общих множителей, то произведение этих знаменателей и является простейшим их общим знаменателем (см. ниже пример 1); 2) если у знаменателей имеются общие множители и если один из знаменателей делится на каждый из остальных, то он и является простейшим общим знаменателем (см. пример 2); 3) наконец, применяем правило, данное в п. 5 этого параграфа (см. пример 3).

После сложения и вычитания числителей в полученном в числителе многочлене приводим подобные члены и разлагаем его на множители, чтобы сократить дробь, если окажутся общие множители у числителя и знаменателя.

Примеры. 1) $\frac{3x}{5y}+\frac{2x}{3z}=\frac{9xz}{15yz}+\frac{10xy}{15yz}=\frac{9xz+10xy}{15yz}$;

$$\frac{3a}{a-b}-\frac{2b}{a+b}=\frac{3a(a+b)-2b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{3a^2+3ab-2ab+2b^2}{(a-b)(a+b)}=$$
$$=\frac{3a^2+ab+2b^2}{a^2-b^2};$$

2) $$\frac{4}{49a^2-1}+\frac{1+7a}{1-7a}-\frac{1-7a}{1+7a}=\frac{4}{(7a-1)(7a+1)}-$$
$$-\frac{1+7a}{7a-1}-\frac{1-7a}{1+7a}=\frac{4-(1+7a)^2-(1-7a)(7a-1)}{(7a-1)(7a+1)}=$$
$$=\frac{4-1-14a-49a^2-7a+1+49a^2-7a}{(7a-1)(7a+1)}=\frac{4-28a}{(7a-1)(7a+1)}=$$
$$=\frac{4(1-7a)}{(7a-1)(7a+1)}=-\frac{4(1-7a)}{(1-7a)(7a+1)}=-\frac{4}{7a+1};$$

3) $$\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x^3+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+$$
$$+\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{1}{x-1}=$$

$$= \frac{2(x^2 - x + 1) + (x - 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 2 + x - 1 - x^3 - 1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \frac{2x^2 - x - x^3}{(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{-x(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \frac{-x(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{-x(x - 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x - x^2}{x^3 + 1}.$$

7. Умножение и деление алгебраических дробей. Действия над алгебраическими дробями выполняются по тем же правилам, что и действия над обыкновенными дробями в арифметике.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Чтобы перемножить дроби, надо перемножить отдельно их числители и их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем произведения.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Чтобы разделить дробь на дробь, надо числитель делимого умножить на знаменатель делителя и полученное произведение записать числителем, а знаменатель делимого умножить на числитель делителя и полученное произведение записать знаменателем частного.

Правильность правила деления можно проверить умножением:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Правила умножения и деления дробей применимы и в том случае, если один из компонентов есть целое выражение, например:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c};\quad a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b};$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}.$$

Два алгебраических выражения называют **взаимно обратными**, если их произведение равно единице, например:

$$a \text{ и } \frac{1}{a}; \ -3x^2y \text{ и } -\frac{1}{3x^2y}; \ \frac{m-n}{a+b} \text{ и } \frac{a+b}{m-n} \text{ и т. д.}$$

Деление можно заменить умножением:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc};$$

получили тот же результат.

Чтобы разделить два алгебраических выражения (в частности, дроби) достаточно делимое умножить на выражение, обратное делителю.

При умножении и делении дробей многочленные числители и знаменатели надо попытаться разложить на множители и сделать сокращение дроби, полученной в произведении или в частном, и только после этого выполнить перемножение в числителе и знаменателе.

Примеры. 1) $\frac{8mn}{3a^2b} \cdot \left(-\frac{5ab^2}{12m^2n^2}\right) = -\frac{40mnab^2}{36m^2n^2a^2b} = -\frac{10b}{9mna}$;

2) $-\frac{24a^2b^2}{5pq} : \frac{12a^2b^2}{5p^2q^2} = -\frac{24a^2b^2 \cdot 5p^2q^2}{5pq \cdot 12a^2b^2} = -2pq$;

3) $\frac{x}{1-a^2} \cdot \frac{a^3+1}{ax^2} = \frac{x(a^3+1)}{(1-a^2)ax^2} = \frac{x(a+1)(a^2-a+1)}{(1-a)(1+a)ax^2} = \frac{a^2-a+1}{ax(1-a)}$.

8. Возведение дроби в натуральную степень.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}; \ \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{xxx}{yyy} = \frac{x^3}{y^3}.$$

Чтобы возвести дробь в какую-нибудь степень, достаточно возвести в эту степень числитель и знаменатель данной дроби:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример. $\left(\frac{5x^2y^3z}{x^2-yz}\right)^3 = \frac{125x^6y^9z^3}{x^6-3x^4yz+3x^2y^2z^2-y^3z^3}$.

При решении примеров на все действия с алгебраическими дробями следует придерживаться порядка выполнения действий, указанного в п. 4 § 11.

Упражнения 124—131

124. При каких значениях x следующие дроби не имеют смысла:

а) $\frac{3}{1-x}$; в) $\frac{x-1}{x+1}$; д) $\frac{2x}{9-x^2}$;

б) $\frac{x}{x-5}$; г) $\frac{1}{(x-2)(x+2)}$; е) $\frac{abx}{(x+a)(x-b)}$.

125. Не изменяя величины дроби, преобразовать ее так, чтобы:

а) числитель и знаменатель дроби не содержали знака минус $-\frac{-5x}{-7y}$; $-\frac{10a^2b}{-17pq}$; $\frac{-6mn^3}{11abc^2}$;

б) перед дробью стоял знак минус $\frac{-x-y}{a}$; $\frac{a-x}{a+b}$; $\frac{m^2-n}{m-n}$.

126. Сократить дроби:

а) $\frac{18a^2b^4y^3}{24a^3b^2x}$; д) $\frac{x^3+y^3}{2x^2+4xy+2y^2}$;

б) $\frac{10x^2-2xy}{15xy-3y^2}$; е) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^4-b^4}$;

в) $\frac{42a^3-30a^2b}{25b^3-35ab^2}$; ж) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$;

г) $\frac{(a+1)^3}{a^3-a}$. з) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-2x^3+x}$.

127. Выполнить сложение и вычитание дробей:

а) $\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2}+2ab^2-\frac{3}{2ab}$;

б) $\frac{3}{a+1}+\frac{1}{1-a}-\frac{2a}{1-a^2}$;

в) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{b-a}-\frac{b}{b+a}$;

г) $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}$;

д) $\frac{1}{2a-3b}-\frac{2a+3b}{4a^2+6ab+9b^2}-\frac{6ab}{8a^3-27b^3}$;

е) $\frac{a+2x}{3a-3x}+\frac{3c-a}{2c-2a}+\frac{a^2-cx}{a^2-ac+cx-ax}$;

ж) $\frac{a-2n}{a^3+n^3}-\frac{a-n}{a^2n-an^2+n^3}-\frac{1}{an+n^2}$;

з) $\frac{1}{(m-n)(m-p)}+\frac{1}{(n-m)(n-p)}+\frac{1}{(p-m)(p-n)}$.

128. Выполнить умножение и деление дробей:

а) $\frac{a(b+c)}{b^2-2bc+c^2}\cdot\frac{b(c-b)}{b^2+2bc+c^2}$;

б) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+3xy(x+y)+y^3}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$;

в) $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac}\quad\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$;

г) $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy}:\frac{x+y+z}{y+z-x}$;

д) $\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-27}:\frac{x^2+x-1}{x^2+3x+9}$.

129. Выполнить указанные действия:

$$\left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\frac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right]:\frac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}.$$

Решение. Сначала надо выполнять действия вычитания дробей, стоящих в квадратных скобках, для чего разложим знаменатели этих дробей на множители. Попутно будем подготавливать дробь, стоящую вне квадратных скобок, к выполнению деления:

$$\left[\frac{x-1}{3x+x^2-2x+1}-\frac{1-3x+x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1}\right]:\frac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}=$$

$$=\left[\frac{x-1}{x^2+x+1}-\frac{1-3x+x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1}\right]:\frac{(1+x^2)-(2x+2x^3)}{(1+x^3)+(2x+2x^2)}=$$

$$=\frac{(x-1)^2-(1-3x+x^2)-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}:\frac{(1+x^2)-2x(1+x^2)}{(1+x)(x^2-x+1)+2x(1+x)}=$$

$$=\frac{x^2-2x+1-1+3x-x^2-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}:\frac{(1+x^2)(1-2x)}{(1+x)(x^2-x+1+2x)}=$$

$$=\frac{-x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)}:\frac{(1+x^2)(1-2x)}{(1+x)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{-(x^2+1)(1+x)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)\cdot(1+x^2)(1-2x)}=\frac{-(1+x)}{(x-1)(1-2x)}=$$

$$=\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}.$$

130. Выполнить действия над дробями:

а) $\left(\frac{a+x}{2x}\right)^2\cdot\left[-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2\right]$;

б) $\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}+\frac{\frac{2}{mn}}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2}$;

в) $\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{2}{p+q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right]:\frac{(p+q)^2}{pq}$;

г) $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{y-x}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)$;

д) $\left(\frac{1}{2c-d}+\frac{3d}{d^2-4c^2}-\frac{2}{2c+d}\right):\left(\frac{4c^2+d^2}{4c^2-d^2}+1\right)$;

е) $\left[\frac{1}{(m+n)^2}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{(m+n)^3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right]m^2n^2$;

ж) $\left(\frac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\frac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\cdot\left(1-\frac{x-1}{a}-\frac{x}{a^2}\right)$;

з) $\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]\left[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]}{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}\cdot\frac{[(a+b)^2-ab][(a-b)^2+ab]}{(a-b)^3+3ab\,(a-b)}$.

131. Доказать тождества:

а) $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)=m-n$;

б) $\left(\frac{3c}{9-3x-3c+cx}-\frac{1}{c^2-9}:\frac{x-c}{3c^2+9c}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3c}=$
$=\frac{x^2+3x+9}{c-x}$.

Указание. Взять только ту часть тождества, в которой находится более сложное выражение, и выполнить указанные в ней действия; если полученный результат будет такой же, как выражение, стоящее в другой части, то тождество доказано.

Глава VI ● Функции и уравнения первой степени

§ 16. Функции и графики

1. Прямоугольная система координат. Две взаимно перпендикулярные числовые оси (см. п. 2 § 12) *OX* и *OY* с общей начальной точкой *O* образуют прямоугольную систему координат на плоскости (рис. 2). Точку *O* называют началом координат, оси — осями координат, плоскость — координатной плоскостью. Ось *OX* называют осью абсцисс, ось *OY* — осью ординат. Координатная плоскость разделяется осями координат на четыре четверти (квадранты): I, II, III и IV.

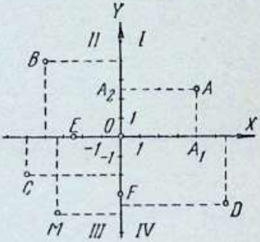


Рис. 2.

Если из какой-нибудь точки *A* на плоскости опустить перпендикуляры AA_1 и AA_2 на координатные оси, то основаниям перпендикуляров — точкам A_1 и A_2 — соответствуют числа, которые называются координатами точки *A*. Это записывается так: *A*(4; 2,5). Первая координата (4), полученная на оси абсцисс (*OX*), называется абсциссой, а вторая (2,5), полученная на оси ординат, называется ординатой данной точки *A*. Итак, координаты точки на плоскости — это два числа, определяющие положение этой точки на плоскости в данной системе координат. Та же точка *A* имела бы другие координаты, если бы взяли другие оси координат.

Проверьте, правильно ли записаны координаты следующих точек (рис. 2): $B(-4;\ 4)$, $C(-5;\ -2)$, $D(5{,}5;\ -3{,}5)$, $E(-2{,}5;\ 0)$, $F(0;\ -3)$, $O(0;\ 0)$.

Следовательно, если дана точка на координатной плоскости, то можно найти ее координаты. Можно решить и обратную задачу: построить точку по данным ее координатам, например $M(-3{,}3;\ -4)$. На оси абсцисс берем точку $-3{,}3$, а на оси ординат точку -4, восставим перпендикуляры к осям из полученных точек до взаимного пересечения в искомой точке M. Таким же образом постройте точки $N(1;\ -1)$, $P(-6;\ 0{,}5)$, $Q(0;\ -1)$, $R\left(2\frac{2}{3};\ 0\right)$.

2. Переменные величины, аргумент и функция. Если, например, поезд движется равномерно, то скорость его постоянна (пусть $v = 60$ *км/ч*), а время движения (t) и пройденный путь (s) изменяются, причем путь зависит от времени движения. Эта зависимость выражается формулой: $s = 60t$ (или в общем виде $s = vt$). По этой формуле можно вычислить путь, пройденный за любое указанное время. Так, за 3 часа $s = 60 \cdot 3 = 180$ (*км*), за 10,7 часа $s = 60 \cdot 10{,}7 = 642$ (*км*) и т. д.

Эту же зависимость между s и t при $v = 60$ *км/ч* выразим при помощи таблицы:

t	0	1	2	3	4	5	...	8	...	15	...
s	0	60	120	180	240	300	...	480	...	900	...

В равномерном движении мы имеем дело с тремя величинами: скоростью, временем и путем, причем скорость есть величина постоянная, а время и путь — переменные. Величина, значение которой в данном процессе остается неизменным, называется постоянной. Величина, значение которой в рассматриваемом процессе изменяется, называется переменной.

Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной соответствует определенное значение другой, то первая величина называется аргументом, а вторая — функцией этого аргумента. В нашем примере путь s является функцией от времени t, которое является аргументом.

Мы уже указали здесь два способа задания функции: 1) аналитический способ (при помощи формулы, в нашем примере $s = 60t$ или $s = vt$); 2) табличный способ (при помощи таблицы). Возможен еще и третий способ — графический (при помощи графика, см. п. 3 § 16).

Множество всех допустимых значений (см. п. 1 § 11) аргумента называют областью определения функции. Аргумент может принимать любое, ни от чего не зависящее значение из области определения функции, поэтому аргумент еще называют независимой переменной величиной, а функцию — зависимой переменной, так как ее значение всегда зависит от того, какое значение принимает аргумент.

Приведем другие примеры функций. Площадь квадрата (Q) является функцией длины его стороны (a), что выражается аналитически так: $Q = a^2$. Область определения этой функции — множество всех положительных чисел (длина стороны может быть только положительным числом). Длина окружности (C) есть функция длины ее радиуса (R), а именно: $C = 2\pi R$; здесь 2π — постоянная величина. Давая любые положительные значения аргументу R, будем получать соответствующие значения функции — длины окружности. Но если аргументом сделать длину окружности и ей давать любые положительные значения, то функцией от C будет радиус R, что выразится формулой $R = \frac{C}{2\pi}$. Эта функция обратна функции $C = 2\pi R$. Функция может быть и от нескольких аргументов. Так, площадь прямоугольника (Q) есть функция от его длины (a) и высоты (h); от изменения a и h изменяется и площадь: $Q = ah$. Любое алгебраическое выражение можно рассматривать как функцию от входящих в него букв. Обозначим через A, например, выражение $\frac{a(1-a)}{a-2}$, тогда A есть функция от аргумента a. Давая аргументу любые значения, кроме 2, будем получать соответствующие значения A.

Аргумент обычно обозначают буквой x, а функцию — буквой y. Зависимость между функцией и аргументом называют функциональной зависимостью.

3. **Прямо пропорциональная зависимость и ее график.** Рассмотрим простейший пример функциональной зависимости.

Зависимость между двумя переменными величинами x и y, выражающаяся формулой $y = kx$, где постоянная *величина k есть положительное или отрицательное число, называется прямо пропорциональной зависимостью.*

k называют коэффициентом пропорциональности.

Прямо пропорциональные величины (см. п. 3 § 10) также находятся в прямо пропорциональной зависимости между собой и имеют ту же формулу, но коэффициент пропорциональности может быть там только положительным числом и значения переменных положительны.

Если произвольные значения x умножать на число k, то будем получать соответствующие значения y. Следовательно, x — аргумент, а y — функция от x.

Пусть $k = 2{,}5$; составим таблицу для функции $y = 2{,}5x$:

x	0	1	2	3	4	...	−1	−2	−3	−4	...
y	0	2,5	5	7,5	10	...	−2,5	−5	−7,5	−10	...

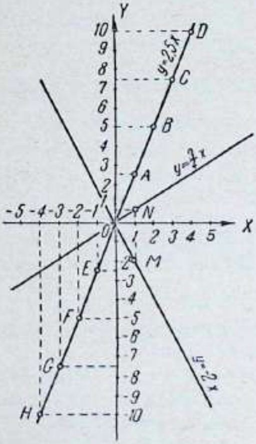


Рис. 3.

Каждой паре чисел этой таблицы соответствует точка на координатной плоскости. Построим точки с такими координатами: $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 2,\ 5)$, $B(2;\ 5)$, $C(3;\ 7{,}5)$, $D(4;\ 10)$, $E(-1;\ -2{,}5)$, $F(-2;\ -5)$, $G(-3;\ -7{,}5)$, $H(-4;\ -10)$. Все эти точки оказались на одной прямой, проходящей через начало координат (см. рис. 3). Пар чисел, удовлетворяющих формуле $y = 2{,}5x$, может быть бесконечно много. Можно предположить, что и бесконечное множество соответствующих им точек принадлежит той же прямой.

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данной функции, называют **графиком** этой функции.

Графиком прямо пропорциональной зависимости ($y = kx$) является прямая, проходящая через начало координат

и через точку с абсциссой 1 и ординатой k (доказательство этого дано в упражнении 136).

Поскольку одна точка прямой, являющейся графиком функции $y = kx$, всегда известна (0; 0), то достаточно найти еще одну ее точку. Удобнее всего взять точку с абсциссой $x = 1$, тогда ордината этой точки $y = k \cdot 1 = k$, т. е. равна коэффициенту пропорциональности. Так, график функции $y = \frac{3}{4}x$ пройдет через точку $N\left(1;\ \frac{3}{4}\right)$, а график функции $y = 2{,}5x$ — через точку $A(1;\ 2{,}5)$. График функции с отрицательным k, например $y = -2x$, пройдет через точку $M(1;\ -2)$.

Из сравнения этих трех графиков можно сделать следующие выводы: 1) если $k > 0$, то график проходит в I и III четвертях; 2) если $k < 0$, то график проходит во II и IV четвертях; 3) чем больше абсолютная величина k, тем больше острый угол между положительной полуосью абсцисс OX и графиком функции $y = kx$ $\left(2{,}5 > \frac{3}{4}\right.$, поэтому $\angle XOA > \angle XON$; $|-2| > \frac{3}{4}$, поэтому $\left.\angle XOM > \angle XON\right)$.

4. Обратно пропорциональная зависимость и ее график. *Зависимость между переменными величинами x и y, выражающаяся формулой* $y = \frac{k}{x}$, *где постоянная величина k есть положительное или отрицательное число, называется обратно пропорциональной зависимостью.*

Если обе части равенства $y = \frac{k}{x}$ умножить на x, то получим новый вид формулы обратно пропорциональной зависимости: $yx = k$. Эта формула говорит о следующем свойстве величин x и y, находящихся в обратно пропорциональной зависимости: ***если любое значение x умножить на соответствующее значение y, то получим постоянное число k.*** Таким же свойством обладают обратно пропорциональные величины (см. п. 3 § 10 и упражнение 26 (б)), для которых коэффициент k и значения x и y только положительны. Функция же $y = \frac{k}{x}$, как и ее аргумент x, может быть и отрицательной, однако они не могут быть равными нулю.

Выразим эту функцию табличным и графическим способами. Пусть $k = 6$. Давая произвольные значения аргументу, вычислим по формуле $y=\frac{6}{x}$ соответствующие значения функции:

x	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	6	...	$-\frac{3}{4}$	-1	-2	-3	-4	-6	...
y	8	6	3	2	1,5	1	...	-8	-6	-3	-2	$-1{,}5$	-1	...

Отметим на координатной плоскости точки, соответствующие парам чисел, и соединим эти точки плавной линией (рис. 4). Полученная кривая, состоящая из двух ветвей, и является графиком обратно пропорциональной зависимости. Она называется гиперболой. При $k>0$ она располагается в I и III квадрантах, а при $k<0$ — во II и IV квадрантах плоскости. Гипербола никогда не пересечет координатных осей, но к ним приближается сколь угодно близко при неограниченном возрастании и неограниченном убывании абсолютной величины аргумента.

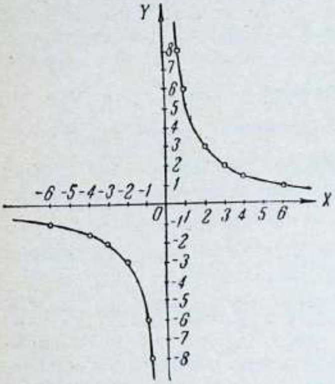


Рис. 4.

5. Линейная функция и ее график. Функция, находящаяся в прямо пропорциональной зависимости от всего аргумента, аналитически выражалась одночленом, содержащим аргумент в первой степени (kx). Теперь рассмотрим функцию, выражающуюся двучленом $kx+b$, который также содержит аргумент только в первой степени. k и b здесь постоянные величины, любые числа. Такой двучлен называют двучленом первой степени, или линейным двучленом относительно x.

Двучлен первой степени относительно аргумента называется линейной функцией этого аргумента:

$$y = kx + b.$$

График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая линия, параллельная графику функции $y = kx$ и отсекающая на оси ординат отрезок b (рис. 5).

Убедимся в этом. Пусть прямая OM является графиком функции $y = kx$ (рис. 5). Пусть $b > 0$. Прибавим к ординате (LM) какой-нибудь точки прямой OM отрезок MN, имеющий длину b. Тогда $OL = x$, $LM = kx$ и $LN = kx + b$, т. е. точка N, имеющая абсциссу x и ординату $kx + b$, принадлежит графику функции $y = kx + b$. Если через точку N провести прямую NN', параллельную прямой OM, то прямая NN' и будет графиком функции $y = kx + b$. В самом деле, $M'N' = MN$ (см. § 22 в части второй) и $M'N' = b$, поэтому ордината любой точки (например, N') прямой NN' равна соответствующей ординате ($L'M'$) точки прямой OM плюс b. Следовательно, координаты всех точек прямой NN' удовлетворяют формуле $y = kx + b$. Очевидно, что координаты ни одной точки, не лежащей на прямой NN', не удовлетворяют этой формуле, так как ордината такой точки получается из $L'M'$ прибавлением отрезка, большего ($M'F$) или меньшего ($M'E$), чем $M'N' = b$.

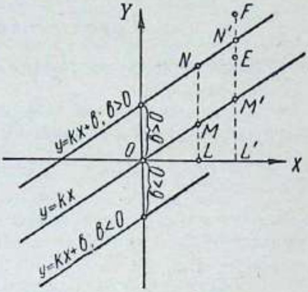


Рис. 5.

Если $b < 0$, то график линейной функции пересекает отрицательную полуось ординат. Функция $y = kx$ является частным случаем линейной функции при $b = 0$. Если $b \neq 0$, а $k = 0$, то линейная функция принимает вид: $y = b$ ($y = 0 \cdot x + b$, т. е. при любых значениях x функция равна b). Ее графиком будет прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая ось ординат в точке с ординатой b. Если $k = 0$ и $b = 0$, то $y = 0 \cdot x + 0 = 0$, т. е. при любых значениях x функция имеет значение 0. Графиком $y = 0$ будет прямая, совпадающая с осью абсцисс (см. упражнение 138 (г)).

Для построения графика линейной функции, например $y = 2x - 3$, удобнее всего построить такие две точки искомой прямой: одну с абсциссой $x = 0$ (ее ордината получается из формулы функции $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$) и другую с ординатой $y = 0$ (ее абсцисса: $0 = 2x - 3$, $2x = 3$, $x = 1{,}5$). Через точки $(0;\ -3)$ и $(1{,}5;\ 0)$ проводим прямую — график $y = 2x - 3$.

О квадратной функции и ее графике см. в § 19.

Упражнения 132—140

132. Начертить на бумаге в клетку прямоугольную систему координат.

а) Отметить на координатной плоскости точки со следующими координатами: $(3;\ 5)$, $(-1;\ 4)$, $(-2;\ -0{,}5)$, $(1;\ -6)$, $\left(0;\ 5\frac{2}{3}\right)$, $(0;\ -3)$, $(-2{,}75;\ 0)$, $(5{,}2;\ 0)$, $(-4;\ -4)$.

б) Указать координаты точек, симметричных (см. § 8 в части второй) следующим точкам относительно оси абсцисс: $(1{,}5;\ 3{,}6)$, $(5;\ 0{,}9)$, $(0;\ 3)$, $(5;\ -2{,}5)$, $(0;\ -6)$, $(-1{,}4;\ -4{,}5)$, $(-7;\ -0{,}75)$, $(-3{,}2;\ 4{,}4)$, $(385;\ -190)$.

в) Указать координаты точек, симметричных следующим точкам относительно оси ординат: $(-2;\ -3{,}9)$, $(-4;\ 0)$, $(-5{,}5;\ 2{,}6)$, $(3{,}75;\ -3{,}75)$, $(3{,}5;\ 0)$, $\left(4{,}8;\ 2\frac{1}{3}\right)$, $(-76;\ -1392)$.

г) Сделайте выводы о том, как решать упражнения (б) и (в), не обращаясь к чертежу.

133. Какому геометрическому месту (см. § 15 в части второй) принадлежат точки координатной плоскости:

а) $(2;\ 2)$, $(4;\ 4)$, $(19;\ 19)$ и т. д.;

б) $(-1;\ -1)$, $(-5;\ -5)$, $(-42;\ -42)$ и т. д.;

в) $(-3;\ 3)$, $(-4{,}5;\ 4{,}5)$, $(-25;\ 25)$ и т. д.;

г) $(0{,}5;\ -0{,}5)$, $(2;\ -2)$, $(16;\ -16)$ и т. д.?

134. а) Указать координаты точек, симметричных данным точкам относительно начала координат (см. § 25 в части второй): $(3{,}5;\ 0)$, $(-6{,}1;\ 0)$, $(0;\ -3{,}6)$, $(0;\ 10{,}7)$, $(-5;\ -5)$, $(-3{,}3;\ 3{,}3)$, $(4{,}9;\ -4{,}9)$, $(125;\ 125)$.

б) Каждая из следующих точек: $(1;\ 1)$, $(-1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $(1;\ -1)$ принадлежит одновременно двум геометрическим местам. Каким именно?

в) Найти координаты вершин квадрата, если его диагонали лежат на координатных осях и длина диагонали равна 7.

г) Указать координаты вершин прямоугольника, если его оси симметрии лежат на осях координат, а стороны имеют длины 12 и 5,6 (возможны два случая).

135. Выразить аналитически (при помощи формулы) следующие функции от указанных аргументов и указать вид функциональной зависимости:

а) периметр квадрата (y) от его стороны (x);

б) сторону равностороннего треугольника (y) от его периметра (x);

в) скорость равномерного движения (y) от времени движения (x), необходимого для прохождения данного расстояния (s);

г) y от x, если y *км* есть расстояние, на которое удалится поезд от города A через x часов равномерного движения со скоростью v *км/ч*, причем отсчет времени (x) начали тогда, когда поезд уже находился от A на расстоянии s *км*.

136. Доказать, что график функции $y = kx$ есть прямая линия, проходящая через начало координат и через точку с координатами (1; k).

137. а) Какими числами могут быть и какими не могут быть коэффициенты в формулах функций: $y = kx$; $y = \frac{k}{x}$; $y = kx + b$?

б) Указать область определения каждой из этих функций (см. п. 2 § 16).

в) Почему функция $y = \frac{k}{x}$ не может быть равной нулю? При каких значениях аргумента эта функция лишь приближается к нулю сколь угодно близко? Что происходит с функцией, когда аргумент приближается к нулю?

138. а) Начертить график функции $y = \frac{-2}{x}$ (возьмите единицы на осях длиной в 4 клеточки каждая и давайте аргументу значения $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 и т. д., а также отрицательные).

б) Построить графики линейных функций $y = 2x + 3$ и $y = x - 5$ и по графику определить абсциссы точек пересечения каждой из двух построенных прямых с осью OX.

в) То же самое для функций $y = -\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$ (за единицу взять три клеточки) и $y = -2{,}25x + 6{,}75$ (за единицу взять 4 клеточки).

г) Построить графики функций $y = 4$, $y = -3$, и $y = 0$ (см. п. 5 § 16).

139. Найти координаты (приближенно, с точностью до 0,1) точек пересечения графиков:

а) прямых линий $y = 5{,}3x - 3{,}6$ и $y = -1{,}8x + 7{,}1$;

б) прямой $y = 0{,}6x$ с гиперболой $y = \frac{3}{x}$.

Указание. Желательно использовать бумагу с миллиметровой сеткой.

140. а) Начертите графики, определяемые следующими формулами: $x = 5$; $x = -2$ и $x = 0$ (см. упражнение 138 (г)).

б) Не вычерчивая графиков, определить координаты точек пересечения прямых: $y = 0$ и $x = 2{,}5$; $y = -7{,}2$ и $x = 0$; $y = 17{,}5$ и $x = -312{,}7$.

§ 17. Уравнение 1-й степени с одним неизвестным

1. Уравнение. Уравнению можно дать такое простейшее определение, опираясь лишь на понятие равенства (см. п. 2 § 13, где дано также определение тождества).

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

Примеры простейших уравнений встречались еще в арифметике и в первых разделах алгебры, когда мы находили неизвестный компонент арифметического действия по известному компоненту и результату действия (см. § 5; упражнения 96, 113). Эти уравнения решались на основе шести правил, полученных из определений действий. В алгебре применяется общий и более удобный способ решения уравнений, основанный на теории равносильности. Но сначала дадим еще другое, более распространенное в науке определение уравнения, основанное на понятии функции.

Если x — аргумент, то $kx + b$ есть линейная функция от него (см. п. 5 § 16). Эта функция, как и всякая другая, иногда для удобства обозначается одной буквой y. Однако если и не пользоваться обозначением функции через y, то она все равно остается той же функцией. Так, например, $2x + 3$ есть та же линейная функция, что и $y = 2x + 3$. Это замечание относится к любой функции.

Если строить график функции, то значения функции $2x + 3$ будут являться ординатами точек ее графика.

Равенство двух функций от одних и тех же аргументов называется уравнением.

Аргументы функций, составляющих уравнение, называются неизвестными этого уравнения.

Равенство двух линейных функций от одного и того же аргумента называется уравнением 1-й степени с одним неизвестным.

Решить уравнение — значит найти все те значения неизвестного (неизвестных), при которых значения функций в обеих частях уравнения равны. Все такие значения неизвестного (неизвестных) называются корнями или решениями уравнения.

В отношении числа корней уравнения могут быть следующие случаи: 1) единственный корень, например $x - 5 = 9$, корень только один: $x = 14$; 2) несколько корней, например: $(x - 2)(x - 3)(x - 1)(x - 5) = 0$ имеет 4 корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 5$, так как при подстановке вместо x одного из этих корней левая часть также равна нулю; 3) корней нет, например: $x + 1,5 = x + 2$, ибо не существует такого числа (x), чтобы, прибавив к нему разные числа (1,5 и 2), получить равные числа; 4) бесконечное множество корней, например $2x + 6 = 2(3 + x)$, ибо в обеих частях уравнения одна и та же функция $2x + 6$, поэтому при любом значении x значения обеих частей равны.

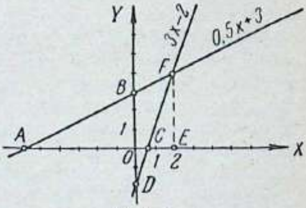


Рис. 6.

2. Графическое решение уравнения. Решим уравнение 1-й степени с одним неизвестным графически, т. е. при помощи графиков двух линейных функций.

а) Для решения уравнения $0,5x + 3 = 3x - 2$ требуется найти то значение x, при котором обе линейные функции $0,5x + 3$ и $3x - 2$ имеют одинаковые значения. На графике это будут две одинаковые ординаты y при одном и том же значении абсциссы x, т. е. общая точка двух прямых — графиков функций $0,5x + 3$ и $3x - 2$. Построим эти графики (см. п. 5 § 16). Первый из них пройдет через точки $A(-6; 0)$

и $B(0;\ 3)$, а второй — через точки $C\left(\frac{2}{3};\ 0\right)$ и $D(0;\ -2)$. Абсцисса 2 общей точки F графиков AB и CD (рис. 6) и является корнем данного уравнения (значение каждой из двух функций равно ординате $EF = 4$). Уравнение имеет единственный корень ($x = 2$), так как две прямые пересекаются в единственной точке (F).

б) Решать графически уравнение $2x + 1 = 2x - 5$ не придется, ибо и без построения графиков известно, что прямые $2x + 1$ и $2x - 5$ параллельны прямой $y = 2x$, а поэтому параллельны между собой (см. п. 5 § 16). Графики линейных функций, составляющих данное уравнение, не пересекаются (рис. 7), поэтому эти функции не принимают равных значений ни при каком значении x. Такое уравнение не имеет решения (корня).

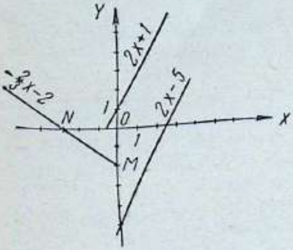


Рис. 7.

в) Обе линейные функции в уравнении

$$-\frac{2}{3}x - 2 = -\frac{2}{3}x - 2$$

одинаковые, поэтому оба графика (прямые) совпадут, все их точки будут общие и при любом значении абсциссы x функции имеют равные значения. Такое уравнение имеет бесчисленное множество решений: любое значение x является его корнем. Совпадающие прямые (рис. 7) проходят через точки $M(0;\ -2)$ и $N(-3;\ 0)$.

Отсюда можно сделать вывод. Поскольку две прямые на плоскости (два графика линейных функций) могут либо пересекаться, либо быть параллельными, либо совпадать, то и уравнение 1-й степени с одним неизвестным может иметь соответственно либо единственный корень, либо не имеет корней, либо имеет их бесчисленное множество. Иного здесь быть не может.

3. Два основных свойства уравнений. Равносильные уравнения.

Два уравнения называются равносильными (или эквивалентными), если каждое из них имеет все корни другого, иначе: *если они имеют только одинаковые корни или совсем не имеют корней.*

Так, уравнения $x+7=13$ и $2x=12$ равносильные, так как каждое из них имеет единственный корень 6. Равносильные уравнения могут иметь и несколько одинаковых корней. Примеры неравносильных уравнений: 1) $25-x=17$ и $x:3=15$ имеют различные единственные корни; 2) $(x-1)(x-3)=0$ и $x-1=0$ имеют общий корень 1, но первое имеет еще корень 3, которого не имеет второе уравнение.

Свойство 1. ***Если к обеим частям уравнения прибавить один и тот же многочлен, содержащий неизвестное (в частности, одночлен или число), то полученное уравнение равносильно данному.***

Убедимся в этом на примерах. Уравнение $17+x=22$ имеет единственный корень 5. Прибавив к обеим частям уравнения, например, число -3, получим новое уравнение: $14+x=19$, которое также имеет единственный корень 5 и поэтому равносильно данному уравнению $17+x=22$.

Уравнение $0{,}5x+3=3x-2$, которое мы решили графически, имеет корень 2. Прибавив к обеим частям многочлен $-0{,}5x+2$, получим уравнение: $0{,}5x+3-0{,}5x+$ $+2=3x-2-0{,}5x+2$, которое после приведения подобных членов примет более простой вид: $5=2{,}5x$. Отсюда получаем: $x=5:2{,}5=2$, т. е. тот же единственный корень.

Свойство 2. ***Если обе части уравнения умножить на одно и то же не равное нулю число, то новое уравнение будет равносильно данному.***

Например, уравнение $x-2{,}5=0{,}5$, имеющее единственный корень 3, после умножения обеих частей на 2 дает новое уравнение $2x-5=1$, которое также имеет только корень 3. Уравнение $3x=36$, имеющее только один корень 12, после умножения обеих частей на $\frac{1}{3}$ дает уравнение $x=12$, у которого единственный тот же корень.

4. Следствия из основных свойств уравнений. Посторонние корни и потеря корней.

Следствие 1. ***Если в обеих частях уравнения имеются одинаковые члены, то их можно опустить.*** Так, уравнения $3x+17=17$ и $3x=0$ равносильны на основании первого свойства, так как второе уравнение получено из первого уравнения прибавлением к обеим частям — 17.

Следствие 2. ***Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, переменив знак этого члена на противоположный.*** Например, уравнения $5x - 9 = 3x + 5$ и $5x - 3x = 5 + 9$ равносильны на основании первого свойства, так как второе уравнение получено из первого прибавлением к обеим частям числа 9 и члена $-3x$.

Следствие 3. ***Если уравнение содержит дроби, в знаменатели которых не входит неизвестное, то от дробей в уравнении можно освободиться, умножив все члены обеих частей уравнения на наименьшее общее кратное всех знаменателей.*** Так, уравнения $\frac{x-1}{3} - 5 = \frac{x}{12} + \frac{x+1}{4}$ и $4(x-1) - 5 \times 12 = x + 3(x+1)$ равносильны на основании второго свойства.

Примечание. Если знаменатели дробных членов уравнения содержат неизвестное, то после освобождения от дробей может получиться уравнение, не равносильное данному. Например, решая уравнение $\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = 0$, получим: $2x - 6 = 0$, откуда $2x = 6$, $x = 3$. Число 3 является корнем уравнения $2x - 6 = 0$, но не удовлетворяет данному уравнению, так как знаменатель $x - 3 = 3 - 3 = 0$, что невозможно. Уравнения данное и полученное неравносильны. Корень 3 для данного уравнения посторонний. Однако не всегда в подобных случаях появится посторонний корень. Так, уравнение $\frac{x+2}{x-2} = 2$ и полученное из него $x + 2 = 2(x-2)$ имеют общий корень 6 (других корней у них нет) и уравнения равносильны. Корень 6 не посторонний, потому что он не обращает знаменатель данного уравнения в нуль. В подобных случаях всегда нужно проверить, не обращает ли полученный корень в нуль знаменатели дробей данного уравнения.

Следствие 4. ***Обе части уравнения можно разделить на общий множитель всех членов, если он не содержит неизвестного, или на любое число, отличное от нуля.*** Так, уравнение $25x^2 + 150x = 375$ равносильно уравнению $x^2 + 6x = 15$ $\left(\text{по второму свойству уравнений; все три члена разделили на 25, что равносильно умножению на } \frac{1}{25}\right)$. Уравнения $5x = 8$ и $x = 1{,}6$ — равносильны.

Примечание. Если разделим обе части уравнения $(x-3)(x-1)=5(x-1)$ на $x-1$, то получим уравнение $x-3=5$, имеющее только один корень 8. Подстановкой убедимся, что данное уравнение имеет еще корень 1, а именно: $(1-3)(1-1)=5(1-1)$, $-2\cdot 0=5\cdot 0$, $0=0$. Корень 1 был потерян при делении обеих частей уравнения на множитель $(x-1)$. Итак, делить уравнение на множитель, содержащий неизвестное, нельзя, так как при этом можно потерять корни и получить уравнение, неравносильное данному (см. упражнение 149 (а), (б)).

5. Уравнение 1-й степени с одним неизвестным. Такое уравнение представляет собой равенство двух линейных функций (см. п. 1 § 17). Любое уравнение 1-й степени с одним неизвестным можно представить в виде $ax+b=0$, где x — неизвестное, коэффициент a и свободный член b — любые числа. Например, в уравнении $3x-2=x-5$ перенесем все члены правой части в левую часть: $3x-2-x+5=0$, а затем приведем подобные члены: $2x+3=0$. Уравнение $2x+3=0$ равносильно уравнению $3x-2=x-5$, и оба они имеют одни и те же корни.

$ax+b=0$ называют нормальным видом уравнения 1-й степени с одним неизвестным. Решается оно (если $a\neq 0$) так: $ax=-b$, $x=-\frac{b}{a}$.

6. Решение уравнения 1-й степени с одним неизвестным. Чтобы найти корень данного уравнения, надо заменять его более простыми и равносильными ему уравнениями до тех пор, пока не получим уравнение вида $x=c$, где x — неизвестное данного уравнения, c — некоторое число. Уравнение $x=c$ равносильно данному уравнению, которое также имеет корень c.

Обычно уравнение 1-й степени с одним неизвестным имеет одно решение (корень), но оно может не иметь корня или иметь бесконечное множество решений (см. п. 2 § 17).

Решение уравнения выполняется обычно по схеме, состоящей из следующих этапов (1-й и 2-й иногда удобно переставить и не в каждом уравнении нужно выполнять все пять этапов):

1) Сделать все коэффициенты уравнения целыми, умножив все члены обеих его частей на наименьшее общее кратное всех знаменателей (согласно следствию 3 п. 4 § 17, полученное при этом уравнение равносильно данному уравнению).

2) Раскрыть скобки (при этом каждая часть уравнения преобразуется в тождественно равную ей и поэтому

полученное уравнение равносильно предыдущему и данному уравнениям).

3) Перенести члены с неизвестным из правой части в левую, а известные члены из левой части — в правую (по следствию 2 получаем уравнение, равносильное предыдущему, а поэтому — и данному).

4) Привести подобные члены в каждой части уравнения (тождественное преобразование не нарушает равносильности).

5) Разделить обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не нуль (по следствию 4 полученное уравнение равносильно предыдущему, а поэтому — и данному уравнению).

Полученное при этом значение неизвестного является искомым корнем данного уравнения. Если подставить полученный корень в данное уравнение вместо неизвестного и выполнить указанные в уравнении действия, то в левой и в правой части должно получиться одно и то же число. Если же получится неверное равенство, то в решении была допущена ошибка, которую надо найти и устранить. Это называется проверкой решения уравнения (см. упражнение 147 и др.).

7. Составление уравнения по условию задачи. Главное значение уравнений состоит в том, что они дают наиболее удобный способ решения многих задач. Даже те задачи, которые в арифметике решаются сложно, в алгебре при помощи уравнений решаются значительно проще.

Составление уравнения по условию задачи выполняется по следующей схеме:

1) Выбираем неизвестное (обычно лучше то, которое в задаче требуется найти, хотя можно и другое) и обозначаем его буквой (например, x).

2) Выражаем другие величины, о которых говорится в задаче, при помощи x и данных в задаче чисел (получаем функции от x).

3) Составляем уравнение, приравнивая две из составленных функций от x или одну из функций и число, которые по условию задачи или по зависимости между величинами должны быть равны.

4) Решаем уравнение.

5) Получаем ответ на вопрос задачи (если корней несколько, то все ли они могут удовлетворять условию задачи; если в задаче требуется найти несколько чисел, то

находим остальные; если через x было обозначено вспомогательное неизвестное, то находим число, которое требуется определить вопросом задачи).

6) Проверка решения и ответа по условию задачи (см. упражнение 155 и последующие).

Упражнения 141—169

141. а) Сравните определение уравнения (см. п. 1 § 17) с определением тождества (см. п. 2 § 13). Что общее у них, в чем различие?

б) Существуют ли уравнения, которые одновременно являются тождествами? Указать пример. Сколько корней имеет такое уравнение?

в) Можно ли тождество считать уравнением? При каком условии? Нужно ли решать такое уравнение, чтобы найти его корни?

г) Существует ли уравнение, у которого равенство всегда неверное? Дать примеры. Сколько корней имеет такое уравнение?

142. а) Заполнить пустые клетки в следующей таблице, выражающей линейную функцию $9x - 16$. Для этого нужно по данному значению аргумента вычислить соответствующее значение функции или по данному значению функции вычислить соответствующее значение аргумента:

x	0	4	-1	0,5	$-\frac{5}{6}$					
$9x - 16$						0	20	-25	$-2{,}5$	$3\frac{2}{7}$

б) Пришлось ли решать уравнения при заполнении таблицы? Указать, в каких случаях и какие именно уравнения.

143. Найти, при каких значениях x следующие две функции имеют одно и то же значение:

а) $-1{,}5x + 2$ и $4x - 3{,}5$ (при помощи графиков, см. п. 2 § 17);

б) $x - 2$ и $\frac{8}{x}$ (графически, см. п. 4 § 16; два ответа);

в) $3x - 10$ и $17x + 15$ (без графиков, вычислить с точностью до 0,01).

144. а) Решить алгебраическим способом уравнение, которое решено графическим способом в п. 2 (а) § 17. Сравнить полученный корень с тем, который построен на графике.

б) Объясните следующее алгебраическое решение уравнения, которое было решено графически в п. 2 (б) § 17: $2x + 1 = 2x - 5$; $2x - 2x = -5 - 1$; $(2 - 2)x = -6$; $0 \cdot x = -6$.

в) Объясните следующее алгебраическое решение уравнения, которое было решено графически в п. 2 (в) § 17:

$$-\frac{2}{3}x - 2 = -\frac{2}{3}x - 2;\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x = -2 + 2;$$

$$\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)x = 0;\ 0 \cdot x = 0.$$

145. Графически решить следующие уравнения 1-й степени с одним неизвестным (с точностью до 0,1; за масштабную единицу на координатных осях взять 2 клетки):

а) $-3{,}5x + 2{,}3 = 1{,}8x$;
б) $2{,}7x - 0{,}9 = -5{,}6$;
в) $-4{,}2x = 1{,}9$ (см. п. 5 § 16).

146. Равносильны ли следующие уравнения? (См. п. 3—4 § 17.) Почему? Ответить на вопросы, не решая уравнений:

а) $(x - 4)(x + 1) = 0$ и $(x - 4)(x - 1) = 0$;
б) $2{,}75x = 11$ и $(x - 4)(x + 10) = 0$;
в) $0{,}5x - 1{,}6 = 0{,}5(x - 3{,}2)$ и $12x = 9{,}5x + 2{,}5x$;
г) $1{,}95x - 2 = 1{,}95x$ и $x + 7{,}3 = x - 1$;
д) $5x + 2 = 3x - 7$ и $5x - 3x = -7 - 2$;
е) $0{,}5x + 1{,}5 = x - 4{,}5$ и $x + 3 = 2x - 9$;
ж) $16x - 12 = 4x - 8$ и $4x - 3 = x - 2$;
з) $x - 9 + 3x = 3x + 7$ и $x - 9 = 7$.

147. Решить уравнение:

$$y - \frac{20y - (10 - 3y)}{156} = \frac{26y - 51}{52} - \frac{2(1 - 3y)}{13}.$$

Решение. Знаменатели дробей: 1, 156, 52 и 13. Наименьшее общее кратное их равно 156. Дополнительные множители: 156, 1, 3 и 12. Приведем уравнение к общему знаменателю (при этом величина каждой дроби не изменится и полученное уравнение будет равносильно данному):

$$\frac{156y}{156} - \frac{20y - (10 - 3y)}{156} = \frac{3(26y - 51)}{156} - \frac{12 \cdot 2(1 - 3y)}{156}.$$

Умножим обе части уравнения на 156 и получим уравнение, равносильное данному (см. 1-й этап схемы решения в п. 6 § 17):

$$156y - 20y + (10 - 3y) = 3(26y - 51) - 24(1 - 3y).$$

Продолжаем решение по той же схеме. Раскроем скобки:

$$156y - 20y + 10 - 3y = 78y - 153 - 24 + 72y.$$

Соберем все члены с неизвестным в левой части, а известные члены — в правой:

$$156y - 20y - 3y - 78y - 72y = -153 - 24 - 10.$$

Приведем подобные члены и разделим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном:

$$-17y = -187;\ y = \frac{-187}{-17};\ y = 11.$$

Проверка. Подставим в данное уравнение вместо y полученное его значение и вычислим левую и правую части отдельно:

$$11 - \frac{20\cdot 11 - (10 - 3\cdot 11)}{156} = 11 - \frac{20\cdot 11 - (10 - 33)}{156} =$$

$$= 11 - \frac{220 - (-23)}{156} = 11 - \frac{220 + 23}{156} = 11 - \frac{243}{156} =$$

$$= 11 - \frac{81}{52} = 11 - 1\frac{29}{52} = 9\frac{23}{52};$$

$$\frac{26\cdot 11 - 51}{52} - \frac{2(1 - 3\cdot 11)}{13} = \frac{286 - 51}{52} - \frac{2(1 - 33)}{13} =$$

$$= \frac{235}{52} - \frac{2(-32)}{13} = \frac{235}{52} - \frac{-64}{13} = \frac{235}{52} + \frac{64}{13} =$$

$$= \frac{235}{52} + \frac{256}{52} = \frac{491}{52} = 9\frac{23}{52}.$$

Итак $9\frac{23}{52} = 9\frac{23}{52}$, т. е. число 11 удовлетворяет данному уравнению и является его корнем.

Так как все уравнения, полученные при решении, равносильны данному уравнению, то число 11 и является его единственным корнем.

Ответ: $y = 11$.

148. Решить следующие уравнения 1-й степени с одним неизвестным, придерживаясь схемы решения (см. п. 6 § 17) и объясняя равносильность получаемых уравнений. В примерах (в) — (д) нет дробей, поэтому начинать надо со 2-го этапа.

а) $\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}=\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$;

б) $\frac{7+9z}{4}-\left(1-\frac{2-z}{9}\right)=7z$ (в этом примере сначала надо раскрыть скобки, а затем освободиться от дробей; сделать проверку решения);

в) $(y+2)(y+5)-3(4y-3)=(y-5)^2$;

г) $4(u-2)-(2u-5)(u-3)=12-2(u-1)^2$;

д) $6(t^2+t+1)=(t+1)^3-(t-1)^3$ (сделать проверку).

149. а) Уравнение $(x-3)(x-1)=5(x-1)$ нельзя сокращать на множитель $(x-1)$, содержащий неизвестное, так как полученное уравнение будет неравносильно данному и при этом потеряем корень (см. п. 4 § 17, следствие 4 и примечание к нему). Чтобы не потерять корня, данное уравнение следует решать, например, так:

$$(x-3)(x-1)-5(x-1)=0;\ (x-1)[(x-3)-5]=0.$$

В левой части уравнения — произведение двух сомножителей, которое равно нулю. Равенство будет верным, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Получаем два уравнения: $x-1=0$ и $(x-3)-5=0$; их корни будут удовлетворять данному уравнению. Корень первого: $x=1$; корень второго: $x-3-5=0$; $x-8=0$; $x=8$.

Проверка первого корня: $(1-3)(1-1)=5(1-1)$; $-2\cdot0=5\cdot0$; $0=0$. Проверка второго корня: $(8-3)(8-1)=5(8-1)$; $5\cdot7=5\cdot7$; $35=35$. Оба корня правильные, не посторонние, и при таком способе решения мы не потеряли корня.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=8$.

Примечание. Это уравнение имеет два корня, так как оно второй степени (квадратное). Если бы мы раскрыли в нем скобки, то увидели бы, что оно содержит x^2. Однако его удобнее решать именно так, как мы его решили здесь. Этот метод решения надо стремиться применять всегда, когда это возможно, т. е. когда возможно, перенеся все члены в одну часть уравнения, разложить ее на множители.

б) Решить таким же способом уравнение $5(x+2)=3(x+2)$. Затем решить его по общей схеме решения уравнения 1-й степени с одним неизвестным (см. п. 6 § 17).

150. Решить уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе:

а) $\frac{1}{x-2}=1$.

Решение. $\frac{1}{x-2}-1=0$; $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}=0$; $\frac{1-x+2}{x-2}=0$; $\frac{3-x}{x-2}=0$. Если бы дробь в левой части была сократимая, то нужно было бы сократить. Умножим обе части уравнения на $x-2$. Так как при этом полученное уравнение может быть неравносильно данному (могут появиться посторонние корни; см. следствие 3 и примечание к нему в п. 4 § 17), то проверка полученных корней будет обязательной. $3-x=0$; $-x=-3$; умножив обе части на -1, получим корень $x=3$.

Проверка. $\frac{1}{3-2}=\frac{1}{1}=1$; $1=1$, корень не посторонний. Здесь достаточно было проверить, не обращается ли знаменатель $x-2$ при $x=3$ в нуль: $x-2=3-2=$ $=1\neq 0$.

Ответ: $x=3$.

б) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$.

Решение. $\frac{(x-1)(1+1)}{x-1}=0$. Сокращаем дробь на $x-1$. $x+1=0$; $x=-1$. Проверка. $\frac{(-1)^2-1}{-1-1}=\frac{1-1}{-2}=$ $=\frac{0}{-2}=0$; $0=0$. Корень не посторонний.

Ответ: $x=-1$.

Примечание. Если бы не сократили на $x-1$, а сразу умножили обе части уравнения на $x-1$, то получили бы уравнение $(x-1)(x+1)=0$, которое имеет два корня: $x-1=0$, $x=1$ и $x+1=0$, $x=-1$. Корень -1 мы уже проверили; проверим еще корень 1, подставив его в знаменатель данного уравнения: $x-1=$ $=1-1=0$, что невозможно (деление на нуль). Итак, корень $x=1$ посторонний. При первом решении мы его не получили потому, что сократили дробь в левой части уравнения.

в) $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$.

Решение. $\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}=0$; после сокращения дроби получаем $x-1=0$, $x=1$. Проверка подстановкой корня 1 в знаменатель: $x-1=1-1=0$, что невозможно. Итак, единственный полученный корень $x=1$ оказался посторонним, поэтому уравнение не имеет решения.

Вывод о решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе: переносим все члены уравнения в левую часть, приводим к простейшему общему знаменателю

155. Число книг на одной полке вдвое меньше, чем на другой. Если взять с первой полки 6 книг, а на вторую поставить 8 книг, то число книг на первой окажется в 7 раз меньше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?

Эту и последующие задачи (156—169) предлагается решить путем составления уравнения с одним неизвестным (см. п. 7 § 17).

Решение. Одно из двух искомых чисел, например число книг первой полки, обозначим через x. На второй полке книг в два раза больше, поэтому второе искомое число будет $2x$. Когда с первой полки взяли 6 книг, то там осталось $x-6$. На вторую полку поставили еще 8 книг, поэтому там оказалось $2x+8$.

Из условия задачи еще не использовано только одно данное — число 7, которое и попытаемся использовать для получения двух равных выражений; соединив их знаком равенства, получим уравнение.

По условию задачи $x-6$ в семь раз меньше числа $2x+8$, поэтому $7(x-6)$ будет равно $2x+8$. Составили уравнение: $7(x-6)=2x+8$.

Решаем его: $7x-42=2x+8$; $7x-2x=8+42$; $5x=50$; $x=10$. Итак, на первой полке было 10 книг, а на второй было $2x$, т. е. 20 книг.

Проверка решения задачи делается обязательно по условию задачи, а не подстановкой в уравнение (проверить нужно не только правильность решения уравнения, но и правильность составления его). Используем полученные числа 10 и 20. Если, выполняя действия над ними и данными в задаче числами, получим одно из данных в условии чисел, то задача решена верно. Действия указываются смыслом задачи, зависимостью между входящими в нее величинами.

Здесь проверку можно сделать, например, так. На первой полке осталось книг $10-6=4$. На второй полке получилось книг в 7 раз больше: $4 \cdot 7=28$. На вторую полку поставили книг: $28-20=8$, что соответствует условию задачи. Задача решена верно.

Ответ: на первой полке было 10 книг, а на второй 20.

156. За блокнот, тетрадь и карандаш уплачено 22 коп. Карандаш стоил в 4 раза дешевле тетради, а блокнот на 4 коп. дороже тетради. Определить цену каждого предмета.

157. Одно из двух неизвестных чисел меньше другого на 6. Половина большего числа на три единицы меньше другого числа. Найти оба числа.

158. Два числа составляют в сумме 47. Если первое из них разделить на второе, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти эти числа.

159. Из двух сортов товара ценою 1,5 руб. и 2,1 руб. за килограмм требуется составить 32 *кг* смеси ценою в 1,65 руб. за килограмм. Сколько нужно взять товара каждого сорта?

160. В двух бригадах вместе было 45 рабочих. Когда два человека были переведены из первой бригады во вторую, то число рабочих первой бригады составило 80% числа рабочих второй бригады. Сколько рабочих было в каждой бригаде вначале?

161. По плану колхоз должен был засевать 25 *га* в день. Однако колхозники ежедневно выполняли план на 120% и закончили весь сев за 3 дня до срока. Как велика была площадь сева?

162. По плану лесоруб должен был заготавливать ежедневно по 3 *куб. м* древесины и выполнить задание в определенный срок. Но лесоруб повысил производительность труда и ежедневно перевыполнял план на 60%, а поэтому еще за 12 дней до окончания планового срока перевыполнил план на 113,4 *куб. м*. Сколько древесины заготовил лесоруб?

163. До окончания постройки плотины оставалось 6 месяцев. Рабочие, применяя рационализаторские методы работы, закончили постройку на 1 месяц раньше. На сколько процентов рабочие повысили производительность труда?

164. Через две трубы, действующие вместе, водоем может наполниться за $9\frac{3}{8}$ часа. Обе трубы были открыты одновременно и действовали в течение 5 часов, а затем вторую трубу закрыли, и первой трубе потребовалось еще 7 часов, чтобы закончить наполнение водоема. За сколько часов каждая труба отдельно могла бы наполнить этот водоем?

165. Из трех труб, проведенных в бассейн, первая наполняет его за 5 часов, вторая наполняет за 15 часов, а через третью вся вода из наполненного бассейна вытекает за 3 часа. За сколько времени вода из наполненного бассейна вытечет при одновременном действии всех труб?

166. Два велосипедиста выехали одновременно из двух городов, находящихся на расстоянии 300 *км*, и едут навстречу друг другу. Первый проезжает в час 12 *км*, второй 13 *км*. Когда они встретятся?

167. Из *А* в *Б* вышел поезд со скоростью 40 *км/ч*. Через 8 часов вышел поезд из *Б* в *А* со скоростью 60 *км/ч*. Расстояние между *А* и *Б* равно 700 *км*. На каком расстоянии от *А* поезда встретятся?

168. Со станции в 12 часов дня выходит пассажирский поезд, делающий по 48 *км/ч*. Через 45 минут с той же станции выходит скорый поезд, делающий по 80 *км/ч*. В каком часу скорый поезд догонит пассажирский?

169. Пешеход должен пройти некоторое расстояние так, чтобы прибыть на место не позже назначенного времени. Пройдя в час 3 *км*, он рассчитал, что опоздает на 20 минут, если будет продолжать путь с тою же скоростью, а поэтому ускорил ход на 0,5 *км/ч* и прибыл на место за 40 минут до срока. Какое расстояние должен был пройти пешеход?

§ 18. Система уравнений 1-й степени

1. Уравнение 1-й степени с двумя неизвестными и его график. Уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — неизвестные, коэффициенты a и b и свободный член c — любые числа, называется уравнением первой степени с двумя неизвестными. $ax + by = c$ — нормальный вид такого уравнения.

Например, $3x - 5y = 2$. Одному из неизвестных можно дать любое значение; тогда получим уравнение с одним неизвестным, из которого найдем значение второго неизвестного. Пусть $y = 2$; $3x - 5 \cdot 2 = 2$; $3x - 10 = 2$; $3x = 12$; $x = 4$. Если бы неизвестному x дали значение 4, то нашли бы значение $y = 2$. Пара чисел $x = 4$ и $y = 2$ удовлетворяет данному уравнению — обращает его в верное равенство: $3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2$; $12 - 10 = 2$; $2 = 2$. Таких пар чисел существует бесконечно много.

Каждая пара значений x и y, удовлетворяющая уравнению с двумя неизвестными x и y, называется решением этого уравнения.

Уравнение первой степени с двумя неизвестными обычно имеет бесконечное множество решений и поэтому называется неопределенным уравнением. Исключением является, например, уравнение $2x + 9y = 2x + 9y + 3$, которое совсем не имеет решений. После приведения его к нормальному виду получим: $2x - 2x + 9y - 9y = 3$, $(2 - 2)x + (9 - 9)y = 3$, $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ или $0 = 3$ — равенство неверное, ему не удовлетворяют никакие значения x и y.

Если в уравнении первой степени с двумя неизвестными коэффициент при y не равен нулю, то можно выразить y через x и известные числа. Например, $6x + 2y = 3$, $2y = -6x + 3$, $y = -3x + 1{,}5$. Последнее уравнение является линейной функцией (см. п. 5 § 16) и его графиком является прямая линия. Эта же прямая является и графиком уравнения $6x + 2y = 3$, которое имеет те же решения, что и полученное из него уравнение $y = -3x + 1{,}5$.

Если же коэффициент при y равен нулю, то получим уравнение с одним неизвестным (x). Например, $5x - 0 \cdot y = 7$, $5x = 7$ или $x = 1{,}4$. Графиком последнего уравнения (см. упражнение 140 (а)), а поэтому и двух других равносильных ему уравнений является прямая, параллельная оси ординат.

Итак, графиком уравнения $ax + by = c$, если a и b не равны нулю одновременно, является прямая линия. Ее обычно строят по точкам пересечения с осями координат.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то возможны 2 случая: 1) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 17$ или $0 = 17$ — уравнение не имеет ни одного решения и ему не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости; 2) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ или $0 = 0$ — уравнение имеет бесчисленное множество решений (причем значения x и y здесь даже не зависят друг от друга) и ему удовлетворяют координаты всех точек плоскости.

2. Система двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными и графическое решение ее.

Несколько уравнений, в которых одноименные неизвестные обозначают одну и ту же величину, называются системой уравнений.

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

называется нормальной формой системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными.

Решить такую систему — значит найти все общие для обоих уравнений решения.

Графически эта система обычно представляется двумя прямыми линиями, и общим решением этих уравнений (решением системы) будут координаты общей точки двух прямых. Здесь возможны три случая:

1) Прямые (графики) имеют только одну общую точку (пересекаются) — система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -6, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

Решением этой системы являются только координаты точки A (рис. 8): $x = 1$, $y = 2$ (подставьте в систему).

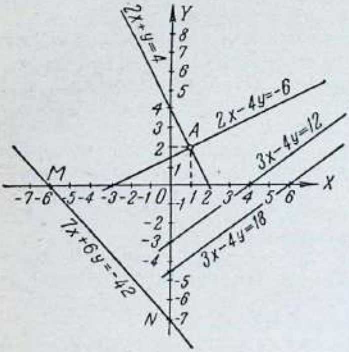


Рис. 8.

2) Прямые (графики) не имеют общих точек (параллельны) — система не имеет решения. Например (рис. 8):

$$\begin{cases} 3x - 4y = 12, \\ 3x - 4y = 18. \end{cases}$$

В этом случае система противоречива: левые части равные (или могут быть сделаны равными), а правые части при этом различны.

3) Прямые (графики) имеют бесконечно много общих точек (совпадают) — система имеет бесконечное множество решений. Например:

$$\begin{cases} 7x + 6y = -42, \\ 3{,}5x + 3y = -21. \end{cases}$$

Прямая MN (рис. 8) является графиком одного и другого уравнения данной системы. В этом случае уравнения системы равносильны (умножив второе уравнение на 2, получим первое уравнение). Координаты любой точки прямой MN являются решением системы.

Наиболее важным является первый случай. Единственное решение такой системы всегда можно найти графически — иногда точно, а чаще всего приближенно с необходимой степенью точности.

Ниже рассмотрим два алгебраических способа решения системы уравнений, где будем опираться на понятие равносильности систем.

Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если все решения каждой из них являются и решениями другой или если обе не имеют решений.

3. Способ подстановки. Возьмем систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=-16, \\ 10x+3y=17. \end{cases}$$

Из одного уравнения выражают одно неизвестное через другое. Выразим, например, y через x из первого уравнения: $y=\frac{8x+16}{5}$. Но во втором уравнении y означает ту же величину, что и в первом (см. определение системы уравнений, п. 2), поэтому можем подставить полученное значение y во второе уравнение. $10x+3\cdot\frac{8x+16}{5}=17$. Получили уравнение 1-й степени с одним неизвестным, из которого найдем, что $x=0{,}5$. Теперь найдем значение другого неизвестного: $y=\frac{8x+16}{5}=4$. Решение данной системы: $x=0{,}5$; $y=4$.

Решая данную систему способом подстановки, мы заменяли ее такими равносильными ей системами, хотя и не записывали их:

$$(1)\begin{cases} 8x-5y=-16, \\ 10x+3y=17; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} y=\frac{8x+16}{5}, \\ 10x+3y=17; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} y=\frac{8x+16}{5}, \\ 10x+3\cdot\frac{8x+16}{5}=17; \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} y=\frac{8x+16}{5}, \\ x=0{,}5; \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} y=4, \\ x=0{,}5. \end{cases}$$

Система (2) равносильна системе (1), так как первые их уравнения равносильны (см. следствия 2 и 4 п. 4 § 17), а вторые их уравнения одинаковые. В системах (3) и (2) первые уравнения одинаковые, а вторые неравносильны (одно с двумя неизвестными, а другое с одним), однако и эти системы равносильны. Каждое уравнение с двумя неизвестными устанавливает свою зависимость между

x и y. Системы будут равносильны, если не будут нарушены эти зависимости как в одном, так и в другом уравнении. Зависимость между x и y второго уравнения системы (2) сохранилась и во втором уравнении системы (3), хотя там вместо y присутствует его значение $\frac{8x+16}{5}$, а это все равно тот же y. Система (4) равносильна системе (3), ибо первые их уравнения одинаковы, а вторые равносильны. Система (5) равносильна системе (4), ибо и в первом уравнении системы (4) x уже известное число (0,5). Следовательно, система (5) равносильна и системе (1) и дает ее решение.

4. Способ алгебраического сложения. Для решения системы

$$\begin{cases} 4x + 5y = 31, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

способом алгебраического сложения сделаем так, чтобы коэффициенты при одном неизвестном (например, при x) были противоположны (для этого умножим первое уравнение на 3, а второе — на — 4). Полученные уравнения будут равносильны данным, а поэтому и полученная система будет равносильна данной. Сложив полученные уравнения, решим уравнение с одним неизвестным. Найденное значение неизвестного (y) подставим в одно из уравнений системы и решим еще одно уравнение с одним неизвестным (x).

$$(1) \begin{cases} 12x + 15y = 93 \\ \underline{-12x + 8y = -24} \end{cases}$$
$$23y = 69$$

$y = 3$; $8x - 2y = 6$; $3x - 2 \cdot 3 = 6$; $3x - 6 = 6$; $3x = 12$; $x = 4$. Решение системы: $x = 4$, $y = 3$.

При решении этим способом систему (1) мы заменяли следующими равносильными ей (а поэтому и данной) системами:

$$(2) \begin{cases} 23y = 69, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} y = 3, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} y = 3, \\ x = 4. \end{cases}$$

В подтверждение равносильности можно было бы привести такие же рассуждения, как и в случае способа подстановки.

Способ алгебраического сложения выгодно применять тогда, когда коэффициенты при одном из неизвестных противоположны или равны, способ подстановки — когда коэффициент при одном из неизвестных в одном из уравнений равен 1. В остальных случаях применяют любой из двух способов.

5. Составление системы уравнений по условию задачи. При решении текстовой задачи методом уравнений применяется схема из шести этапов, данная в п. 7 § 17. В случае составления системы двух уравнений в первом этапе вводятся два неизвестных, во втором этапе используем оба неизвестных, в третьем этапе составляем систему двух уравнений с двумя неизвестными (см. упражнение 175). Систему уравнений составляют обычно тогда, когда в задаче требуется найти два числа, хотя многие из таких задач, как это мы уже видели выше, нетрудно решить и при помощи уравнения с одним неизвестным. Обязательна проверка решения задачи по ее условию.

Упражнения 170—183

170. Решить графически следующие системы уравнений (см. п. 2 § 18):

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 5x + 4y = 36; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 7y = -38{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 4y = 36, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 6y = -30, \\ 65x - 78y = -390; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = -2{,}7x + 6, \\ y = -2{,}7x - 14. \end{cases}$

Примечание. За единицу масштаба взять не менее двух клеток. При построении графиков координаты точек округлять до 0,1 и с такой же степенью точности получить ответ.

171. Решить систему уравнений, в которой удобно применить способ подстановки (см. п. 3 § 18):

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$$

Решение. Выразим то неизвестное, при котором коэффициент равен единице (получить целое выражение лучше, чем дробное). Из уравнения $2x + y = 5$ получаем: $y = 5 - 2x$. Подставим значение неизвестного y в другое уравнение системы: $4x+3(5-2x)=11$. Решаем уравнение с одним неизвестным: $4x+15-6x=11$; $4x-6x=11-15$; $-2x=-4$; $x=(-4):(-2)$; $x=2$. Полученное значение x можно было бы подставить в любое из уравнений данной системы и найти значение y, однако лучше подставлять в уравнение $y=5-2x$, равносильное первому уравнению системы. $y=5-2\cdot 2$; $y=5-4$; $y=1$.

Проверка. $\begin{cases} 2\cdot 2+1=5, \\ 4\cdot 2+3\cdot 1=11; \end{cases}$ $\begin{cases} 4+1=5, \\ 8+3=11; \end{cases}$

$$\begin{cases} 5=5, \\ 11=11. \end{cases}$$

Ответ: $x=2$; $y=1$.

172. Решить систему уравнений, в которой удобно применить способ алгебраического сложения (см. п. 4 § 18):

$$\begin{cases} 4x+5y=25, \\ 4x+3y=13. \end{cases}$$

Решение. Алгебраическое сложение включает в себя как сложение, так и вычитание. В данном примере можно из одного уравнения вычесть другое, в результате чего члены с x, имеющие равные коэффициенты, уничтожатся.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 4x+5y=25 \\ 4x+{}^{-}3y={}^{-}13 \end{array} \\ \hline 2y=12 \end{array}$$

$y=12:2$; $y=6$. Полученное значение неизвестного y подставим, например, во второе уравнение системы:

$$4x+3\cdot 6=13;\quad 4x+18=13;\quad 4x=13-18;\quad 4x=-5;$$
$$x=-5:4;\ x=-1{,}25.$$

Проверка. Так как значение y подставили во второе уравнение и из него же вычислили значение x, то достаточно проверить полученные значения, подставив их еще только в первое уравнение. $4\cdot(-1{,}25)+5\cdot 6=25$; $-5+30=25$; $25=25$.

Ответ: $x=-1{,}25$, $y=6$.

173. Решить следующие системы уравнений первой степени с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} x+y=40, \\ y-x=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-3y=4, \\ x-y=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x+7y=101, \\ 7x-y=55; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x-4y=5, \\ 8x-3y=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 0{,}25x+0{,}04y=2, \\ 4x+25y=641; \end{cases}$

е) $\begin{cases} mx+ny=c, \\ nx-my=m. \end{cases}$

174. Решить следующие системы уравнений (сначала привести к нормальной форме: освободиться от дробей, раскрыть скобки, перенести члены с неизвестными в левую часть, а известные члены — в правую, привести подобные члены):

а) $$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{3y-1}{3}=\frac{5}{6}; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \frac{3x-1}{5}+3y-4=15, \\ \frac{3y-5}{6}+2x-8=\frac{23}{3}; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \frac{1}{p}(1-y)=\frac{1}{q}x, \\ y=\frac{p}{p+q}(x+y)-\frac{p-q}{q}; \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} 0{,}2x-\frac{3{,}2-4y}{5}=x+0.16, \\ \frac{1{,}2y}{0{,}3}-\frac{2{,}5x+1}{y+0{,}6}=4y-\frac{5}{3}; \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2, \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7; \end{cases}$$

е) $$\begin{cases} \frac{x-a}{y-a}=\frac{a-b}{a+b}, \\ \frac{x}{y}=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}. \end{cases}$$

175. Пароход грузится подъемными кранами. Сначала начали грузить 4 крана одинаковой мощности. После того как они проработали 2 часа, к ним присоединились еще два крана меньшей мощности, после этого погрузка была окончена через 3 часа. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка была бы окончена в 4,5 часа. Определить, за сколько часов мог бы произвести погрузку один кран большей или один кран меньшей мощности.

Эту и последующие задачи (176—183) предлагается решить путем составления системы двух уравнений с двумя неизвестными (см. п. 5 § 18).

Решение. Пусть один кран большей мощности может выполнить всю работу за x часов, а меньшей мощности — за y часов. Всю работу принимаем за 1. За один час кран большей мощности выполнит $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а 4 таких крана за 1 час выполнят $\frac{4}{x}$ часть всей работы. За 4,5 часа они выполнят $\frac{4}{x}\cdot 4{,}5$ часть всей работы.

Два крана меньшей мощности за 4,5 часа выполнят $\frac{2}{y}\cdot 4{,}5$ часть всей работы. Работая одновременно, все краны за 4,5 часа выполнят всю работу.

Получаем первое уравнение: $\frac{4}{x}\cdot 4{,}5+\frac{2}{y}\cdot 4{,}5=1$.

Фактически 4 крана большей мощности работали $(2+3)$ часа, а 2 крана меньшей мощности — 3 часа. За это время была выполнена вся работа.

Получаем второе уравнение: $\frac{4}{x}\cdot 5+\frac{2}{y}\cdot 3=1$.

Приведем к нормальной форме и решим систему:

$$\begin{cases}\frac{4}{x}\cdot 4{,}5+\frac{2}{y}\cdot 4{,}5=1,\\ \frac{4}{x}\cdot 5+\frac{2}{y}\cdot 3=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{18}{x}+\frac{9}{y}=1,\\ \frac{20}{x}+\frac{6}{y}=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}18y+9x=xy,\\ 20y+6x=xy.\end{cases}$$

Получилась система уравнений второй степени (член xy второй степени), однако ее можно было бы и не получить, если приравнять левые части уравнений (правые части равны 1 и 1): $\frac{18}{x}+\frac{9}{y}=\frac{20}{x}+\frac{6}{y}$; $18y+9x=20y+6x$;

$9x - 6x = 20y - 18y$; $3x = 2y$; $x = \frac{2y}{3}$. Подставляем значение x в одно из уравнений системы:

$$\frac{18}{\frac{2y}{3}} + \frac{9}{y} = 1, \quad \frac{54}{2y} + \frac{9}{y} = 1, \quad \frac{27}{y} + \frac{9}{y} = 1, \quad 27 + 9 = y,$$

$$y = 36; \quad x = \frac{2y}{3} = \frac{2 \cdot 36}{3} = 24.$$

Другой способ решения системы — введение вспомогательных неизвестных: обозначим $\frac{1}{x}$ через p и $\frac{1}{y}$ через q. Тогда наша система решается так:

$$\begin{cases} \frac{18}{x} + \frac{9}{y} = 1, \\ \frac{20}{x} + \frac{6}{y} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 18 \cdot \frac{1}{x} + 9 \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ 20 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18p + 9q = 1, \\ 20p + 6q = 1. \end{cases}$$

Способом подстановки или способом алгебраического сложения находим:

$$p = \frac{1}{24} \text{ и } q = \frac{1}{36}; \ \frac{1}{x} = \frac{1}{24}, \ x = 24; \ \frac{1}{y} = \frac{1}{36}, \ y = 36.$$

Проверка. Так как кран большей мощности выполняет за 1 час $\frac{1}{24}$ часть всей работы, то 4 таких крана за 5 часов выполнят $\frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 5$ часть всей работы. Краны меньшей мощности выполнили $1 - \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 5$ или $\frac{1}{6}$ часть всей работы. За 1 час эти краны выполняли $\frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{18}$ часть всей работы. Но каждый такой кран за 1 час выполнял $\frac{1}{36}$ часть всей работы, поэтому работало на погрузке $\frac{1}{18} : \frac{1}{36} = 2$ крана меньшей мощности, что соответствует условию задачи.

Ответ: кран большей мощности может выполнить всю работу за 24 часа, а кран меньшей мощности — за 36 часов.

176. 10% одного числа и 20% другого числа состав-

ляют 62,4, а 20% первого числа и 10% второго составляют 69. Найти эти числа.

177. Заплачено за 20 *м* ткани первого сорта и 16 *м* ткани второго сорта 49 руб. 20 коп. Известно, что 10 *м* ткани первого сорта стоят на 5 руб. 40 коп. дороже 8 *м* ткани второго сорта. Сколько стоит метр ткани каждого сорта?

178. На выполнении работы было занято некоторое количество рабочих. Если бы их было на пять больше, то работа была бы окончена на 4 дня раньше, а если бы их было на 10 меньше, то они проработали бы на двадцать дней дольше. Сколько было рабочих и сколько дней они работали?

179. Пшеницы и ржи колхоз собирал вместе 500 *т*. После того как была повышена урожайность пшеницы на 30% и ржи на 20%, колхоз собрал 630 *т* пшеницы и ржи. Сколько пшеницы и сколько ржи собрал колхоз после повышения урожайности?

180. Трехтонка и пятитонка, работая одновременно, могли бы перевезти имеющийся груз в назначенное место за 24 часа. После того как они вместе проработали 15 часов, трехтонка стала на ремонт, а весь оставшийся груз перевезла одна пятитонка, проработав еще 15 часов. За сколько часов могла бы каждая машина в отдельности перевезти весь этот груз?

181. Если искомое двузначное число разделить на число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится единица и в остатке 9. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то частное будет 5 и остаток 11. Найти число.

182. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи одному приходится быть в пути еще 2 часа, а другому $\frac{9}{8}$ часа. Определить скорости автомобилей, если расстояние между A и B равно 210 *км*.

183. Расстояния, которые пролетели два самолета, относятся между собой, как $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$. Второй самолет пролетел на 120 *км* больше первого. Каковы скорости самолетов, если первый самолет 45% своего пути пролетел за 1 час 20 минут, а второй 55% своего пути пролетел за 1 час 48 минут?

Глава VII ● Функции и уравнения второй степени

§ 19. Квадратная функция и ее графики

1. **Квадратная функция.** Многочлен второй степени (относительно буквы x) ax^2+bx+c, где x — переменная величина и постоянные a, b, c — любые числа ($a \neq 0$), может принимать различные значения, зависящие от того, какие значения будем давать x. Следовательно, этот трехчлен, который для удобства обозначим одной буквой y, является функцией от x (см. п. 2 § 16).

Многочлен второй степени относительно x называется квадратной функцией от x. $y=ax^2+bx+c$ — аналитическое выражение квадратной функции.

Если бы a было равно нулю, то не было бы квадратного трехчлена ($0 \cdot x+bx+c$ или $bx+c$ — двучлен первой степени).

Квадратная функция в частных случаях может принимать следующий вид:

$$y=ax^2+c \text{ при } b=0 \text{ (например, } y=5x^2-1, \; y=-2x^2+9);$$

$$y=ax^2+bx \text{ при } c=0 \text{ (например, } y=0{,}7x^2+4x, \; y=-x^2-3{,}75x);$$

$$y=ax^2 \text{ при } b=c=0 \left(\text{например, } y=\frac{2}{3}x^2,\; y=-x^2\right).$$

При $a=1$ два других коэффициента квадратного трехчлена обычно обозначаются через p и q. Тогда квадратная функция $y=x^2+px+q$ может принимать такой вид в частных случаях: $y=x^2+q$, $y=x^2+px$, $y=x^2$.

Для построения графиков представляют интерес следующие квадратные функции: $y=x^2$, $y=x^2+q$,

$y=(x+m)^2$; $y=x^2+px+q$, $y=ax^2$ и $y=ax^2+bx+c$, которые мы и рассмотрим.

2. График функции $y=x^2$. Парабола. Дадим аргументу x произвольные значения, вычислим по формуле $y=x^2$ соответствующие значения функции y:

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Для каждой пары чисел построим в прямоугольной системе координат соответствующую точку (рис. 9). По точкам видно, что графиком данной функции будет кривая линия. Аккуратно соединим от руки последовательные точки графика плавной кривой, а затем, подбирая лекала (шаблоны для проведения различных плавных кривых линий), проведем искомую кривую более точно.

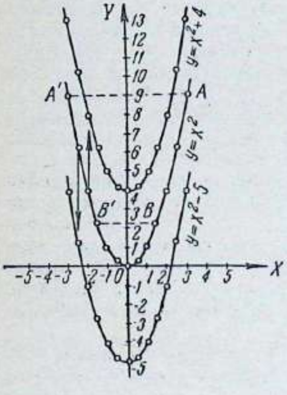


Рис. 9.

Полученная кривая называется **параболой**. На оси OX оказалась единственная точка графика — **вершина параболы**. Функция x^2 всегда положительна (если $x \neq 0$), поэтому все точки этой параболы (кроме вершины) расположились выше оси абсцисс. Ось ординат является здесь осью симметрии параболы (осью параболы) $y=x^2$ (A и A', B и B' и т. д. — пары симметричных точек).

3. График функции $y=x^2+q$. Возьмем функцию вида $y=x^2+4$ $(q>0)$. Значения функции x^2+4 получатся из значений функции x^2 прибавлением числа 4, поэтому получим такую же параболу, как и $y=x^2$, но поднятую вверх на 4 масштабных единицы (рис. 9). График же функции

$y = x^2 - 5$ ($q<0$) есть парабола $y = x^2$, опущенная вниз на 5 единиц масштаба (рис. 9).

4. График функции $y=(x+m)^2$. Построим график функции $y=(x+4)^2$, давая значения аргументу: -7; $-6{,}5$; -6; $-5{,}5$; -5; $-4{,}5$; -4; $-3{,}5$; -3; $-2{,}5$; -2; $-1{,}5$; -1. Точки этого графика расположатся друг относительно друга точно так же, как располагались между собой точки графика $y=x^2$ (рис. 10). Следовательно, график $y=(x+4)^2$ также есть парабола, точки которой можно получить переносом точек параболы $y=x^2$ параллельно оси абсцисс на 4 единицы влево (см. о параллельном перенесении в части второй, задача 173). Аналогично убедимся, что график функции $y=(x-7)^2$ получается параллельным перенесением параболы $y=x^2$ вправо вдоль OX на 7 единиц (рис. 10). Итак, *парабола* $y=(x+m)^2$ *получается параллельным перенесением параболы* $y=x^2$ *вдоль оси OX на* $-m$ *единиц, т. е. на* $|m|$ *единиц влево, если* $m>0$, *или вправо, если* $m<0$.

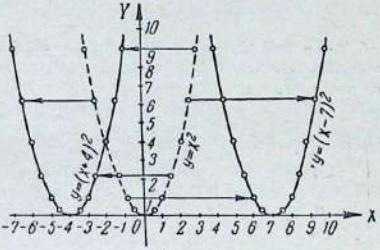


Рис. 10.

5. График функции $y=x^2+px+q$. Покажем, что *любая функция данного вида объединяет в себе свойства функций* $y=(x+m)^2$ и $y=x^2+q$. Выделим в данном квадратном трехчлене полный квадрат:

$$y = x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q =$$

$$=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

График функции $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ есть парабола $y=x^2$, смещенная вдоль оси OX на $-\frac{p}{2}$, и вершина параболы при этом перейдет из начала координат в точку на оси OX с абсциссой $-\frac{p}{2}$ (см. п. 4). Теперь параболу $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ переместим вдоль оси OY на $\frac{4q-p^2}{4}$ (см. п. 3) и в результате получим график $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$, т. е. график искомой функции $y=x^2+px+q$. Вершина параболы при последнем перемещении сохранит свою абсциссу $-\frac{p}{2}$ и получит ординату $\frac{4q-p^2}{4}$. Ось параболы $y=x^2+px+q$, проходящая через вершину с указанными координатами, будет параллельна оси OY (см. упражнение 191).

6. График функции $y=ax^2$. Построим по точкам графики функций: $y=2x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=-2x^2$, $y=-\frac{1}{4}x^2$ (см. п. 2) и сравним их с графиком функции $y=x^2$ и между собой (рис. 11). Значения ax^2 получаются из x^2 умножением на a:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$2x^2$	8	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$	8
$-2x^2$	-8	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	-8

x	-6	-4	-2	-1	0	1	2	4	6
$\frac{1}{4}x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$-\frac{1}{4}x^2$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9

Из графиков видно, что *парабола $y=ax^2$ всегда имеет вершину в начале координат, а ее осью всегда служит ось ординат*. Если $a>0$, то парабола расположена выше оси абсцисс, а если $a<0$, то парабола лежит ниже этой оси, причем если коэффициенты a — противоположные числа (например, $y=2x^2$ и $y=-2x^2$), то две такие параболы расположены симметрично относительно оси абсцисс. Чем больше $|a|$, тем более узкой становится парабола и наоборот — чем меньше $|a|$, тем шире парабола.

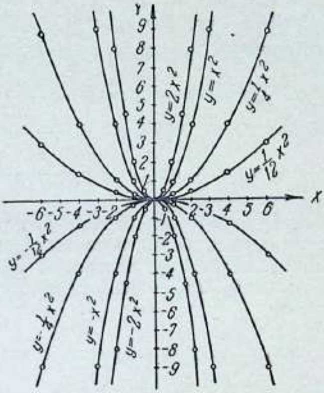


Рис. 11.

7. График функции $y=ax^2+bx+c$. Выполним преобразование данной функции:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \text{ или } y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Отсюда видно, что график функции $y=ax^2+bx+c$ может быть получен из графика $y=x^2$ при помощи трех преобразований: 1) перенеся параболу x^2 на $-\frac{b}{2a}$ вдоль оси абсцисс, получим параболу $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ (см. п. 4);

2) умножив ординаты точек параболы $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ на a, получим параболу $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, которая будет шире или ýже исходной (см. п. 6); 3) перенеся параболу $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ на $\frac{4ac-b^2}{4a}$ вдоль оси ординат (см. п. 3), получим параболу $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, т. е. искомый график квадратной функции $y=ax^2+bx+c$ (см. упражнение 193).

В результате указанных преобразований вершина параболы окажется в точке с координатами $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, при этом ветви параболы обращены вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$.

Итак, *графиком любой квадратной функции является парабола,* которая может быть шире или ýже параболы $y=x^2$ и может занимать на плоскости, вообще говоря, любое такое положение, что ее ось всегда остается параллельна оси ординат.

Упражнения 184—194

184. Не вычисляя и не строя графиков, определить какие из следующих функций имеют наименьшее значение и не имеют наибольшего значения:

а) $y=0{,}3x^2+x-7$; г) $y=-5x^2$;
б) $y=-x^2+4x+1{,}5$; д) $y=25x-7x^2$;
в) $y=173x^2-91$; е) $y=(x-13)^2$;
ж) $y=-(x+1)^2$.

Что можно сказать о существовании наибольших и наименьших значений у остальных из указанных здесь функций?

185. По одному только виду уравнения (формулы) квадратной функции указать координаты вершины параболы:

а) $y=0{,}35x^2$; $y=-10x^2$;
б) $y=x^2+79$; $y=15x^2-6$; $y=-0{,}9x^2+3$;
в) $y=(x-1)^2$; $y=(x+7)^2$.

186. По виду уравнения определить наибольшее или наименьшее значение каждой функции:

а) $y = x^2 - 5$; г) $y = (x + 1{,}6)^2$;
б) $y = 0{,}4x^2 + 0{,}9$; д) $y = (x - 0{,}01)^2$;
в) $y = -12x^2$; е) $y = -100x^2 - 3$.

187. Определить, сколько общих точек имеет парабола с осью абсцисс (одну, две или ни одной), не вычерчивая графика и не решая уравнения:

а) $y = 0{,}5x^2 + 12$; г) $y = -0{,}1x^2 - 0{,}5$;
б) $y = 3x^2 - 1$; д) $y = -7{,}5x^2$;
в) $y = -x^2 + 2{,}7$; е) $y = (x - 0{,}2)^2$;
ж) $y = (5 + x)^2$.

188. О каких параболах можно сказать, что они пересекаются (не строя графиков):

а) $y = 3{,}5x^2$ и $y = -2x^2 + 1$;
б) $y = 7x^2 - 2$ и $y = -x^2 + 6$;
в) $y = -0{,}8x^2 - 0{,}5$ и $y = x^2 + 1{,}2$;
г) $y = 3x^2 + 8$ и $y = -3x^2$;
д) $y = 3x^2 + 8$ и $y = 3x^2$;
е) $y = 2x^2$ и $y = 0{,}25x^2 + 1$ (см. рис. 11);
ж) $y = 2(x - 1)^2$ и $y = -(x + 1)^2$?

189. а) Определить ординаты точек пересечения парабол $y = 3x^2 - 12$ и $y = -3x^2 + 12$ по виду уравнений. Как потом вычислить абсциссы этих точек?

б) Определить координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 5$ с прямой $y = 4$ и параболы $y = x^2 + 4$ с прямой $x = -2$ с помощью графиков (использовать рис. 9).

190. Дана парабола $y = x^2$. Написать уравнение каждой из парабол, полученных путем следующих перенесений данной параболы: **а)** на 5 единиц вверх, **б)** на 4 единицы вниз, **в)** на 3 единицы вправо, **г)** на 6 единиц влево, **д)** на 7 единиц влево и направление ветвей изменено на противоположное.

191. Выделить в следующих квадратных трехчленах полные квадраты (см. п. 5 § 19) и указать, с помощью каких перемещений параболы $y = x^2$ получим графики этих трехчленов: **а)** $y = x^2 + 5x + 1$; **б)** $y = x^2 - 8x + 19$. Построить графики.

192. а) Вычислить координаты вершины параболы $y = x^2 - 3x + 4$, не выделяя полного квадрата (см. п. 5 § 19).

б) Найти наименьшее значение квадратной функции: $y = x^2 - 7x - 12$.

193. Преобразовать следующие квадратные трехчлены путем выделения полного квадрата (см. п. 7 § 19) и определить, с помощью каких преобразований параболы $y = x^2$ получаются графики этих трехчленов: а) $y = 2x^2 - 4x + 2$; б) $y = -0{,}25x^2 - 3x - 7$. Построить графики.

194. а) Вычислить координаты вершин парабол по готовым их буквенным выражениям (см. п. 7 § 19): $y = 4x^2 + 11x - 3$; $y = -x^2 - 4x + 5$.

б) Найти наибольшее или наименьшее значение квадратной функции: $y = 6x^2 - x + 1$; $y = -x^2 + 9x + 10$.

§ 20. Квадратный корень

1. Квадратный корень. Действие извлечения корня. *Квадратным корнем из числа a называется такое число ($\sqrt{a}$), квадрат которого равен a.*

Согласно этому определению, получим: $(\sqrt{a})^2 = a$.

Пусть число a равно 4. Какое число будет $\sqrt{4}$? Обозначим его через x, т. е. $\sqrt{4} = x$. По определению квадратного корня имеем: $x^2 = 4$. Но мы знаем, что $2^2 = 4$ и $(-2)^2 = 4$, поэтому корень имеет два значения: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ или $x = \pm 2$, т. е. $\sqrt{4} = \pm 2$. Аналогично $\sqrt{49} = \pm 7$, так как $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$; $\sqrt{100} = \pm 10$; $\sqrt{1600} = \pm 40$; $\sqrt{0{,}25} = \pm 0{,}5$; $\sqrt{0} = 0$.

Действие, посредством которого отыскивается квадратный корень, называется извлечением квадратного корня.

Квадратный корень из отрицательного числа извлечь невозможно, так как любое число в квадрате дает число неотрицательное (положительное или нуль), а отрицательного дать не может. Так, $\sqrt{-9} \neq \pm 3$, так как $3^2 = 9$ и $(-3)^2 = 9$, а не -9.

2. Арифметическое значение квадратного корня. Подкоренное выражение всегда число неотрицательное. Если оно 0, то существует только один квадратный корень из него: $\sqrt{0} = 0$. Если подкоренное число положительное (например, 36), то существуют два квадратных корня из него: положительный ($\sqrt{36} = +6$) и отрицательный ($\sqrt{36} = -6$). Из этих двух корней мы будем брать только один — положительный, когда будем изучать действия и преобразования над корнями.

Неотрицательный квадратный корень из неотрицательного числа называется арифметическим квадратным корнем из этого числа.

Арифметический корень имеет единственное значение.

Для арифметического корня равенство $\sqrt{a^2} = a$ верно лишь для $a \geqslant 0$; например: $\sqrt{3^2} = 3$ и $\sqrt{0} = 0$ — арифметические корни. Но если a^2 равно, например, $(-5)^2$, то, согласно равенству $\sqrt{a^2} = a$, получаем $\sqrt{(-5)^2} = -5$, а это корень отрицательный и поэтому неарифметический, хотя подкоренное число и положительное: $(-5)^2 = 25$. Чтобы и в этом случае получить арифметический корень, надо брать другое равенство: $\sqrt{a^2} = -a$, если $a < 0$; например, $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$.

Оба равенства для арифметических корней: $\sqrt{a^2} = a$ при $a \geqslant 0$ и $\sqrt{a^2} = -a$ при $a < 0$ можно объединить в одно: $\sqrt{a^2} = |a|$ при любом a.

3. Приближенный квадратный корень. Арифметический $\sqrt{13}$ точно извлечь невозможно. $\sqrt{13}$ не будет целым числом, но он заключается между двумя последовательными числами натурального ряда: $3 < \sqrt{13} < 4$. Поэтому $\sqrt{13} \approx 3$ и $\sqrt{13} \approx 4$ есть приближенные значения корня с точностью до 1 с недостатком (3) и с избытком (4). Действительно, $3^2 < 13$, а $4^2 > 13$. Если возводить в квадрат числа 3,1; 3,2; 3,3 и т. д., то заметим, что $3{,}6^2 < 13$, но $3{,}7^2 > 13$. Поэтому приближенные значения этого корня с точностью до 0,1 будут: $\sqrt{13} \approx 3{,}6$ (с недостатком) и $\sqrt{13} \approx 3{,}7$ (с избытком). Аналогично можно получить приближенные значения любого арифметического квадратного корня с любой степенью точности.

Два приближенных значения какого-нибудь корня с точностью до 1 отличаются друг от друга на 1; с точностью до 0,1 отличаются на 0,1; с точностью до 0,01 отличаются на 0,01 и т. д. Квадрат приближенного значения квадратного корня, взятого с недостатком, всегда меньше подкоренного числа, а квадрат приближенного значения, взятого с избытком, всегда больше подкоренного числа.

4. Квадратный корень из произведения, дроби и степени. ***Чтобы извлечь квадратный корень из произведения, достаточно извлечь его из каждого множителя отдельно и результаты перемножить:***

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c},\text{ где } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0.$$

Правильность этого равенства (и правила) можно проверить по определению квадратного корня (п. 1). $(\sqrt{a}\times\times\sqrt{b}\cdot\sqrt{c})^2$ должно дать подкоренное выражение abc. По правилу возведения в квадрат одночлена (см. п. 8 § 13) имеем: $(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2\cdot(\sqrt{c})^2$. Но по определению корня $(\sqrt{a})^2=a$, $(\sqrt{b})^2=b$, $(\sqrt{c})^2=c$, поэтому $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c})^2==abc$. Верность правила доказана, причем оно верно для любого числа сомножителей.

Примеры. $\sqrt{49\cdot 16\cdot 100}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{100}=7\cdot 4\times\times 10=280$; $\sqrt{0{,}025\cdot 3\cdot 10\cdot 12}=\sqrt{(0{,}025\cdot 10)\cdot(3\cdot 12)}==\sqrt{0{,}25\cdot 36}=\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{36}=0{,}5\cdot 6=3$.

Если это правильное равенство переписать справа налево: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}$, то получим еще одно правило: ***чтобы перемножить квадратные корни, достаточно перемножить их подкоренные выражения и из произведения извлечь квадратный корень.*** Например, $\sqrt{8}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{8\cdot 50}=\sqrt{400}=20$.

Чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь корень отдельно из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\text{ где } a\geqslant 0\text{ и } b\geqslant 0.$$

Доказательство. По определению степени (см. п. 3 § 11) имеем: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$ — подкоренное число.

Примеры. $\sqrt{\frac{25}{121}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}}=\frac{5}{11}$; $\sqrt{3\frac{33}{64}}=\sqrt{\frac{225}{64}}==\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{64}}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

Следовательно, верно и такое равенство $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, которое дает правило деления квадратных корней (см. упражнение 199 (б)). Например, $\sqrt{80} : \sqrt{5} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$.

Квадратный корень из степени с четным показателем равен степени с тем же основанием и в 2 раза меньшим показателем: $\sqrt{a^m} = a^{m:2}$, где m — четное число и $a \geqslant 0$ (если $a < 0$ и $\frac{m}{2}$ нечетно, то $\sqrt{a^m} = |a|^{m:2}$; см. п. 2).

Доказательство. $(a^{m:2})^2 = a^{\frac{m}{2} \cdot 2} = a^m$ (см. п. 8 § 13).

Примеры. $\sqrt{5^4} = 5^{4:2} = 5^2 = 25$; $\sqrt{17^2} = 17^{2:2} = 17^1 = 17$.

5. Простейшие преобразования корней.

1) Вынесение множителя из-под знака квадратного корня:

$$\sqrt{25 \cdot 14 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot \sqrt{14} \cdot 3 = 5 \cdot 3\sqrt{14};$$

$$\sqrt{7^2 \cdot 6 \cdot 2^8 \cdot 3^4} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{3^4} = 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \sqrt{6};$$

$$\sqrt{2^7 \cdot 3^3 \cdot 11} = \sqrt{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 11} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 11} = 2^3 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 11};$$

$$\sqrt{8a^4b^9c^{15}} = \sqrt{4 \cdot 2a^4b^8bc^{14}c} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{b^8} \cdot \sqrt{c^{14}} \cdot \sqrt{2bc} = 2a^2b^4c^7\sqrt{2bc}$$

или короче: $\sqrt{8a^4b^9c^{15}} = 2a^2b^4c^7\sqrt{2bc}$

(считаем, что буквы в этом примере и во всех других случаях, когда мы будем иметь дело с корнями, принимают только такие значения, при которых корни существуют и получают арифметические значения).

В каждом из этих примеров выполнено преобразование квадратного корня на основании правил извлечения корня из произведения и из степени (см. п. 4). Такое преобразование называется вынесением множителей из-под знака корня. ***Если подкоренное выражение разлагается на множители, среди которых будут такие, что из них можно извлечь корень, то эти множители после извлечения из них корня выходят из-под знака корня.***

2) Внесение множителя под знак квадрат-

ного корня есть преобразование, обратное вынесению множителей из-под знака корня. Используем второй и четвертый примеры.

Так как $\sqrt{7^2 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 6} = 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \sqrt{6}$, то $7 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \sqrt{6} = \sqrt{7^2 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 6}$.

Так как $\sqrt{8a^4b^9c^{15}} = 2a^2b^4c^7 \sqrt{2bc}$, то $2a^2b^4c^7 \sqrt{2bc} = \sqrt{8a^4b^9c^{15}}$.

При внесении множителей под знак квадратного корня они возводятся в квадрат и умножаются на подкоренное выражение. Например,

$$3x^3y\sqrt{2xz} = \sqrt{3^2x^6y^2 \cdot 2xz} = \sqrt{18x^7y^2z}.$$

Упражнения 195—204

195. **а)** Вспомните, что называется квадратным корнем, и по аналогии сформулируйте определение кубического корня и корня n-й степени. Объясните смысл равенств: $(\sqrt[3]{a})^3 = a$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

б) Вспомните определение действия извлечения квадратного корня (см. п. 1) и по аналогии дайте общее определение действия извлечения корня любой степени.

в) Извлечение корня — шестое действие, изучаемое в алгебре. С каким из пяти предыдущих действий оно взаимно обратное? Почему?

196. **а)** Указать, какие из следующих корней не существуют (не имеют смысла): $\sqrt{-16}$; $\sqrt{-9 \cdot 0}$; $\sqrt{-49 \cdot 100}$; $\sqrt{-4(-25)}$; $\sqrt{(-7)^2}$; $\sqrt{(-5)^3}$; $\sqrt{(-2)^6}$.

б) Для следующих корней указать допустимые значения входящих в них букв: $\sqrt{8a}$; $\sqrt{-9a}$; $\sqrt{-36a^2}$; $\sqrt{6a^2}$; $\sqrt{-50a^3}$; $\sqrt{(x-1)^2}$; $\sqrt{5-x}$; $\sqrt{x-12}$; $\sqrt{18a^2b}$; $\sqrt{27+x}$; $\sqrt{x^2+y^3}$; $\sqrt{(30-x)^3}$.

197. **а)** Найти точные значения арифметического квадратного корня: $\sqrt{81}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{2500}$; $\sqrt{10\,000}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{4}{121}}$; $\sqrt{\frac{144}{49}}$; $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

б) Найти арифметические корни: $\sqrt{36x^2}$; $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{a^6}$; $\sqrt{(1-a)^2}$; $\sqrt{(x-3)^4}$; $\sqrt{(2+y)^{10}}$.

в) $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} - 4\right)^2$, так как $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Извлечем из обеих частей первого равенства квадратный корень: $\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-4\right)^2}$, $4-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}-4$, $-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ — получили неверное равенство. В чем здесь допущена ошибка?

198. а) Извлечь арифметические квадратные корни из произведений: $\sqrt{0,64\cdot 49}$; $\sqrt{0,01\cdot 144\cdot 1,21}$; $\sqrt{625\cdot 0,0001\cdot 169}$; $\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 196\cdot\frac{25}{81}\cdot 0,16}$.

б) Перемножить корни: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; $\sqrt{75}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{32}$; $\sqrt{2,25}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{0,0225}$ (см. п. 4 § 20).

199. а) Извлечь арифметические квадратные корни, используя правила извлечения корня из дроби и произведения: $\sqrt{\frac{100}{81}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{49\cdot 16}{25}}$; $\sqrt{\frac{4\cdot 121\cdot 900}{64\cdot 169}}$; $\sqrt{\frac{16\cdot 0,36\cdot 10\,000}{0,0004\cdot 81\cdot 196}}$;

б) Сформулировать правило деления квадратных корней (см. п. 4) и выполнить деление корней: $\sqrt{72}:\sqrt{2}$; $\sqrt{245}:\sqrt{5}$; $\sqrt{2,43}:\sqrt{3}$; $\sqrt{0,18}:\sqrt{0,5}$; $\sqrt{0,07}:\sqrt{\frac{1}{7}}$.

в) Извлечь квадратные корни из степеней (см. п. 4), используя, где это нужно, и другие правила: $\sqrt{5^4}$; $\sqrt{2^6a^2}$; $\sqrt{4\cdot 3^2a^8b^4}$; $\sqrt{\frac{5^2x^{10}}{225y^{16}}}$; $\sqrt{a^{12}\cdot\frac{m^6}{n^{20}}}$ (считать, что буквы здесь принимают только положительные значения).

200. а) Вынести множители из-под знака корня: $\sqrt{25\cdot 7\cdot 9}$; $\sqrt{0,09\cdot 64\cdot 49}$; $\sqrt{18\cdot 25}$; $\sqrt{100\cdot 27\cdot 125}$; $\sqrt{16a^2b^4}$; $\sqrt{48a^5b^{12}c^3}$; $\sqrt{63ab^{21}c^{2n}}$; $\sqrt{(a+b)^3}$; $\sqrt{8a^7(a+b)^{4n}}$ (считать, что буквы здесь принимают только неотрицательные значения).

б) Внести множители под знак корня: $5\sqrt{7}$; $0,5\sqrt{10}$; $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; $7\sqrt{\frac{5}{14}}$; $x\sqrt{\frac{1}{x}}$; $2a\sqrt{\frac{x}{4a}}$; $b^3\sqrt{b^1}$; $xy^2\sqrt{\frac{x}{y^3}}$; $(x-1)\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$; $\frac{x+y}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{xy+y^2}}$.

201. а) Доказать тождества: $\sqrt{80}-2-4\sqrt{5}=-2$; $\sqrt{63}+12-3\sqrt{7}-\sqrt{16}=8$.

б) Выполнить действия и упростить результат: $(0{,}5\sqrt{98}+4\sqrt{18})-(0{,}2\sqrt{50}+\frac{1}{3}\sqrt{72}-\sqrt{200})$; $\left(\frac{1}{6}\sqrt{60}-\sqrt{54}\right)-(2{,}5\sqrt{600}-0{,}2\sqrt{15})$.

в) Какое из чисел больше: $3\sqrt{5}$ или $5\sqrt{3}$; $0{,}5\sqrt{2}$ или $0{,}3\sqrt{3}$; $7\sqrt{0{,}2}$ или $3{,}5\sqrt{0{,}4}$?

202. **а)** Возвести в квадрат следующие числа с помощью таблицы квадратов: $7{,}52^2$; 264^2; $39{,}2^2$; $16{,}78^2$; $0{,}5724^2$.

б) Извлечь арифметические корни с помощью таблицы квадратных корней: $\sqrt{47}$; $\sqrt{7{,}3}$; $\sqrt{1{,}92}$; $\sqrt{8{,}09}$; $\sqrt{0{,}38}$; $\sqrt{0{,}7}$; $\sqrt{31{,}22}$; $\sqrt{6017}$; $\sqrt{0{,}5708}$; $\sqrt{767{,}6}$; $\sqrt{18{,}153}$; $\sqrt{10\,356}$; $\sqrt{8\frac{4}{13}}$.

203. **а)** Найти приближенные значения $\sqrt{1478}$, пользуясь только определением понятия квадратного корня (см. п. 1).

б) Найти приближенное значение $\sqrt{7{,}5}$ графически (если использовать параболу $y=x^2$ на рис. 11, то с точностью до $\frac{1}{4}$; если эту параболу построить на миллиметровой бумаге и взять достаточно крупную единицу масштаба, то корень можно получить с точностью до 0,1 и более высокой).

204. Вычислить:

а) приближенно с помощью графика сторону квадрата, если его площадь равна 3 квадратным единицам;

б) площадь прямоугольника, если его стороны равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{8{,}1}$ линейным единицам;

в) длину прямоугольника, если его площадь равна $\sqrt{35}$ квадратным единицам, а высота равна $\sqrt{5}$ линейным единицам. Найти отношение длин основания и высоты.

§ 21. Квадратное уравнение

1. Полные и неполные квадратные уравнения. *Уравнение, левая часть которого есть квадратная функция от неизвестного, а правая часть есть нуль, называется квадратным уравнением.*

Любое квадратное уравнение можно преобразовать в равносильное ему уравнение следующего нормального вида: $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$, b и c — любые числа, x — неизвестное.

Если ни один из коэффициентов b и c не равен нулю, то квадратное уравнение называется **полным** (например, $3x^2-5x+7=0$) и записывается в общем виде так: $ax^2+bx+c=0$. Если в полном квадратном уравнении $a=1$, то такое полное квадратное уравнение называется **приведенным** (например, $x^2+4x-3=0$) и записывается в общем виде так: $x^2+px+q=0$.

Квадратное уравнение называется **неполным**, если один из коэффициентов b и c или оба равны нулю. Возможны следующие три типа неполных квадратных уравнений:

1) $ax^2+bx=0$ при $c=0$ и $b \neq 0$;
2) $ax^2+c=0$ при $b=0$ и $c \neq 0$;
3) $ax^2=0$ при $b=0$ и $c=0$.

2. Решение неполных квадратных уравнений. Уравнение типа $ax^2+bx=0$ решается так: $x(ax+b)=0$; $x_1=0$; $ax+b=0$; $ax=-b$; $x_2=-\frac{b}{a}$. Два его корня: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$.

Пример. $2x^2-9x=0$; $x(2x-9)=0$; $x_1=0$; $2x-9=0$; $2x=9$; $x_2=4,5$.

Ответ: $x_1=0$; $x_2=4,5$.

Уравнение типа $ax^2+c=0$ решается в общем виде так: $ax^2=-c$; $x^2=-\frac{c}{a}$; извлечем квадратный корень из обеих частей уравнения: $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. При решении квадратных уравнений обязательно нужно брать как положительное, так и отрицательное значение квадратного корня, чтобы не потерять ни одного из двух корней (решений) квадратного уравнения. Корни уравнения: $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Примечание. Если $-\frac{c}{a}<0$, то эти квадратные корни не существуют (см. п. 1 § 20) и данное неполное квадратное уравнение не имеет корней.

Примеры. 1) $3x^2-108=0$; $3x^2=108$; $x^2=36$; $x=\pm\sqrt{36}$; $x=\pm 6$.

Ответ: $x_1=6$; $x_2=-6$.

2) $5x^2+45=0$; $5x^2=-45$; $x^2=-9$; $x=\pm\sqrt{-9}$; Данное уравнение не имеет корней.

Уравнение типа $ax^2=0$ удовлетворяется только при $x=0$ (по определению $a\neq 0$, поэтому произведение ax^2 будет равно нулю только при x равном нулю). Поскольку каждое квадратное уравнение имеет два корня (они могут быть разные или равные), то $x_1=0$ и $x_2=0$.

Так как корни квадратного уравнения — это значения x, при которых квадратная функция, стоящая в левой части, равна нулю, то на графике эти корни есть абсциссы общих точек параболы и оси OX. Если таких точек две (парабола пересекает OX), то уравнение имеет два различных корня. Если только одна общая точка (парабола касается OX), то уравнение имеет два равных корня. Если парабола не имеет общих точек с осью OX, то уравнение не имеет корней (см. рис. 17). Все это относится к графическому изображению корней неполных и полных квадратных уравнений и на этом основан один из способов графического решения квадратных уравнений (см. упражнения 205—207). Другой способ дан в упражнении 208.

3. Решение уравнения $x^2+px+q=0$. Выведем формулу решения приведенных полных квадратных уравнений, т. е. найдем, при помощи каких действий неизвестное x получается из известных чисел p и q. Выделим полный квадрат в левой части (см. п. 5 § 19):

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=$$
$$=\left[x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q.$$

Уравнение $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$ равносильно данному уравнению $x^2+px+q=0$, так как их левые части тождественно равны. Два известных члена перенесем в правую часть: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$. Из обеих частей извлечем алгебраический квадратный корень, имеющий два значения: $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, и после перенесения известного члена в правую часть получаем формулу:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то уравнение не имеет корней.

Найдем по этой формуле корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$. Здесь $p = -5$; $q = 4$. $x = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$; $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$; $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$.

Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = 1$.

4. Решение уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Чтобы вывести формулу решения этого уравнения, заменим его равносильным ему приведенным уравнением $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (разделили обе части на a) и решим последнее по его формуле. Здесь $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$. Подставим эти значения и тождественно преобразуем выражение:

$$x = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b_2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Выражение, стоящее под знаком корня в этой формуле, называется дискриминантом. От него зависят корни квадратного уравнения следующим образом:

1) если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет корней;

2) если $b^2 - 4ac = 0$, то корни равные: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

3) если $b^2 - 4ac > 0$, то корни разные: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Решим по формуле следующее уравнение: $3x^2 + x - 4 = 0$. Здесь $a = 3$, $b = 1$, $c = -4$. Подставим в формулу:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 7}{6}; \ x_1 = \frac{-1 + 7}{6} = 1; \ x_2 = \frac{-1 - 7}{6} = -1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -1\frac{1}{3}$.

Здесь дискриминант равен $49 > 0$, поэтому корни разные.

Квадратное уравнение не всегда дается в нормальном виде и мы приводим его к такому виду в результате раскрытия скобок, освобождения от дробей, перенесения всех членов в левую часть и приведения подобных. Только после этого подставляют значения коэффициентов в формулу.

Полученные корни проверяют подстановкой в данное уравнение. Если корень обращает уравнение в верное равенство, то корень правильный; если же получим неверное равенство, то и корень неверный (см. упражнения 216 (г), (л); 217 (б), (г)).

5. Теорема Виета. ***Сумма корней x_1 и x_2 приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равна $-p$, а произведение корней равно q.***

В правильности этой теоремы убедимся нахождением суммы и разности корней:

$$x_1+x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=$$

$$=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=$$

$$-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-\frac{2p}{2}=-p;$$

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=$$

$$=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Итак, $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$, что и требовалось доказать.

Верна и обратная теорема: ***если сумму любых двух чисел m и n обозначить через $-p$, а их произведение через q, то числа m и n являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.*** (См. упражнения 219 (а), (б), (в) и 220.)

6. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. *Квадратным трехчленом относительно некоторой буквы, например x, называется квадратная функция от этой буквы: $y=ax^2+bx+c$, где ни один из коэффициентов a, b и c не равен нулю.* Квадратный трехчлен имеет бесконечное множество значений, зависящих от значений его аргумента. В квадратном же уравнении квадратный трехчлен имеет только одно значение (нуль), которое он получает лишь при каждом из двух значений неизвестного, являющихся корнями уравнения. **Корнями квадратного трехчлена** называются корни квадратного уравнения, которое получим, приравняв трехчлен нулю.

Разложить квадратный трехчлен на линейные множители — значит представить его в виде произведения двучленов первой степени: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ и $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, *где* x_1 и x_2 *— корни трехчленов.* Докажем эти равенства.

Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ являются также корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, поэтому, согласно теореме Виета, $q = x_1 \cdot x_2$ и $-p = x_1 + x_2$, или $p = -(x_1 + x_2)$. Подставим эти значения в трехчлен и преобразуем его: $x_2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = (x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2) = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)$.

Трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ не равны, но корни x_1 и x_2 у них одинаковые (так как уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ равносильны). По доказанному $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$, какие бы ни были коэффициенты: p или $\frac{b}{a}$, q или $\frac{c}{a}$. Вместо этого трехчлена подставим произведение: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Такое разложение возможно, если корни квадратного трехчлена существуют (см. о дискриминанте, п. 4).

7. **Составление квадратного уравнения по условию задачи.** При решении текстовой задачи с помощью квадратного уравнения пользуемся той схемой, по которой составляли уравнение 1-й степени с одним неизвестным (см. п. 7 § 17). В том и другом случае мы просто составляем уравнение с одним неизвестным и лишь потом увидим, какой степени полученное уравнение — 1-й или 2-й. Проверка решения задачи в случае составления квадратного уравнения должна включать проверку обоих корней по условию задачи (см. упражнение 227 и др.).

Упражнения 205—245

205. Объяснить графический смысл корней неполных квадратных уравнений, решенных в общем виде в п. 2 § 21. Используйте графики квадратных функций, описанные в п. 3 и 6 § 19.

206. Измерить циркулем единичный отрезок оси OX (на рис. 17) и, откладывая его, измерить абсциссы точек пересечения (или касания) параболы с осью OX. Получим приближенные значения корней некоторых квадратных уравнений. Записать эти уравнения, используя уравнения парабол, решить их по формулам корней квадратных уравнений и сравнить приближенные корни, полученные графически, с корнями тех же уравнений, вычисленными по формулам (с точностью до 0,1).

207. Корни квадратного уравнения называются также корнями квадратной функции, стоящей в левой части нормального вида уравнения. Охарактеризовать корни квадратных функций (существуют корни или нет, разные они или равные, положительные, отрицательные или нули) по параболам, изображенным на рис. 9, 10 и 11.

208. В п. 2 (§ 21) указан один из способов графического решения квадратного уравнения: берут его нормальный вид (правая часть есть 0) и строят параболу квадратной функции, стоящей в левой части уравнения; абсциссы общих точек этой параболы и оси OX являются корнями данного уравнения. Этим способом мы пользовались в упражнениях 205—207. Но есть еще другой способ решения квадратного уравнения с помощью графиков. Любое квадратное уравнение можно преобразовать таким образом:

$$5x^2-6x-11=0;\ 5x^2=6x+11;\ x^2=\frac{6}{5}x+\frac{11}{5}.$$

В левой части квадратная функция $y=x^2$, в правой части линейная функция $y=\frac{6}{5}x+\frac{11}{5}$. Построим их графики: параболу и прямую (см. рис. 12). Для решения квадратного уравнения требуется найти те значения x, при которых эти две функции равны, поэтому корнями квадратного уравнения будут абсциссы общих точек параболы и прямой. Если таких точек нет, то уравнение не имеет корней. Если прямая касается параболы, то оба корня равны. Если прямая пересекает параболу, то корни разные. Этот способ удобен тем, что достаточно одной такой параболы для графического решения таким способом любого квадратного уравнения и, кроме этого, каждый раз придется строить еще только прямую (см. п. 5 § 16), что легче, чем строить для каждого квадратного уравнения свою параболу.

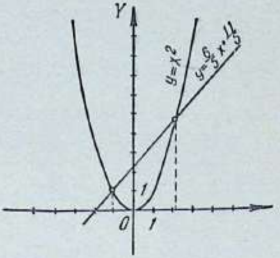


Рис. 12

Найдите приближенно (с точностью до 0,2) корни квадратного уравнения по графикам (рис. 12).

209. а) Решить графически уравнение $12x^2+13x-55=0$.

б) Найти графически равные корни уравнения $x^2+3x+2,25=0$.

в) Убедиться на графике, что уравнение $x^2-x+1=0$ не имеет корней.

Примечание. Взять за единицу масштаба, например, 1 *см*. Желательно построить графики на миллиметровой бумаге. Корни найти приближенно с точностью до 0,1. Для каждого из указанных уравнений вычислить дискриминант и объяснить, как зависит от дискриминанта число корней.

210. Равносильны ли уравнения (почему):

а) $x^2=4$ и $x-2=0$;

б) $x^2+2x+1=0$ и $x+1=0$;

в) $x^2=0$ и $2x=0$;

г) $x^2-25=0$ и $(x-5)(x+5)=0$;

д) $100x^2-9=0$ и $(10x-3)^2=0$?

211. а) Отличается ли от теоремы Виета (см. п. 5 § 21) следующее предложение?

В приведенном квадратном уравнении коэффициент при неизвестном в первой степени равен сумме корней, взятой с противоположным знаком, а свободный член равен произведению корней (свободным членом уравнения называется член, не содержащий неизвестного).

б) Если корни уравнения $x^2+px+q=0$ равны между собой, то каждый из них равен $-\frac{p}{2}$ (подкоренное выражение в формуле равно нулю). Сумма корней тогда: $x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\left(-\frac{p}{2}\right)=-p$, а произведение корней: $x_1\cdot x_2=-\frac{p}{2}\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)=\frac{p^2}{4}$. Верна ли теорема Виета в этом случае?

212. Иногда проще по теореме Виета подобрать два числа, являющихся корнями приведенного квадратного уравнения, чем вычислять их по формуле $x=-\frac{p}{2}\pm\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Так, для уравнения $x^2-5x+6=0$ легко подобрать два таких числа, что произведение их равно 6, а сумма равна 5. Это будут числа 2 и 3, являющиеся корнями данного уравнения. В уравнении $x^2+5x-6=0$ произведение корней -6, т. е. корни с разными знаками, а сумма их равна -5. Числа 2 и -3 дают произведение -6, но их сумма -1, а не -5. Числа -2 и 3 также не дают нужной суммы. А числа -6 и 1 дают произведение -6, сумму -5 и являются корнями.

213. Для следующих уравнений найти корни подбором, используя свойства корней приведенного квадратного уравнения, сформулированные в теореме Виета (см. упражнение 212):

а) $x^2-7x+10=0$;	е) $x^2+2x-3=0$;
б) $x^2+3x-10=0$;	ж) $x^2-x-2=0$;
в) $x^2-3x-10=0$;	з) $x^2+2x+1=0$;
г) $x^2+7x+10=0$;	и) $x^2-7x+12=0$;
д) $x^2-4x+3=0$;	к) $x^2+x-12=0$.

214. В результате решения упражнений 212 и 213 замечаем следующее правило, по которому можно определить знаки корней приведенного квадратного уравнения, не находя самих корней.

1) Если свободный член положительный, то оба корня положительные или оба отрицательные. При этом если коэффициент при неизвестном в первой степени положительный, то сумма корней отрицательна и поэтому оба корня отрицательны. Если же этот коэффициент отрицательный, то сумма корней положительна и оба корня положительные (см. упражнения 213 (г) и (д)).

2) Если свободный член отрицательный, то корни имеют разные знаки. При этом если коэффициент p положительный, то сумма корней отрицательна и отрицательный

корень имеет большую абсолютную величину. Если же значение p отрицательно, то сумма корней положительна и положительный корень имеет большую абсолютную величину (см. упражнения 213 (б) и (в)).

Это получено из теоремы Виета — следствие из нее.

215. Не находя корней, определить их знаки:

а) $x^2-6x+5=0$; в) $x^2-5x-6=0$;
б) $x^2+10x+9=0$; г) $x^2+8x-9=0$.

216. Найти корни следующих уравнений по формулам, выведенным в п. 2—4 § 21 (в случае приведенного уравнения попытаться сначала определить корни подбором, как в упражнениях 212 и 213, а затем проверить подобранные корни вычислением их по формулам):

а) $x^2-6x+5=0$; ж) $9x^2=0$;
б) $x^2+10x+9=0$; з) $4x^2+x=0$;
в) $x^2-5x-6=0$; и) $10x^2-3x-1=0$;
г) $x^2+8x-9=0$; к) $4x^2+x-3=0$;
д) $x^2-13x+36=0$; л) $2x^2-7x+3=0$;
е) $3x^2-24=0$; м) $5x^2+12x+4=0$.

217. Решить уравнения (сначала привести их к нормальному виду, см. п. 4 § 21):

а) $5x^2-3x=2x^2+9x$;
б) $(3x-2)^2=8(x+1)^2-100$;
в) $(3-x)(4-x)=2x^2-20x+48$;
г) $x^2-a^2+2x+1=0$;
д) $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+7\frac{3}{8}=8$;
е) $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$.

218. а) Уравнение $x^2+9x+14=0$ решить путем выделения в левой части полного квадрата (т. е. не по готовой формуле, а так, как она выводилась; см. п. 3 § 21).

б) Дать словесные формулировки формулам корней полных квадратных уравнений.

в) Можно ли решить любое (в том числе и неполное) квадратное уравнение по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}?$$

А по формуле

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}?$$

219. а) Вывести следствие из теоремы Виета для полного неприведенного квадратного уравнения.

б) Верна ли теорема Виета для неполных квадратных уравнений?

в) Доказать теорему, обратную теореме Виета (см. п. 5 § 21).

220. Составить квадратное уравнение по данным его корням (на основании теоремы, доказанной в упражнении 219 (в)):

а) -1 и 15;
б) $-\frac{2}{3}$ и $-3\frac{1}{2}$;
в) $-0{,}35$ и 0;
г) $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$;
д) $\sqrt{2}+5$ и $\sqrt{2}-5$;
е) $0{,}5\sqrt{7}$ и $-0{,}5\sqrt{7}$.

221. а) Чему равно значение квадратного трехчлена, если в него подставлен его корень?

б) Дать словесные формулировки равенств, выражающих разложение на линейные множители квадратных трехчленов x^2+px+q и ax^2+bx+c.

222. Разложить на множители следующие трехчлены:

а) $5x^2+17x-126$;
б) $z^2-29z+198$;
в) $3m^2-7m-40$;
г) $a^2+25a+114$;
д) $0{,}9n^2-n+0{,}1$;
е) $-y^2+14y+45$.

223. а) Сократить дробь: $\frac{c^2-c-6}{c^2+c-2}$.

б) Пользуясь тождеством $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+px+q$, составить уравнение, имеющее корни: $x_1=a+b$ и $x_2=a-b$; $x_1=a$ и $x_2=\frac{1}{a}$.

в) Найти p в уравнении $x^2+px-5=0$, если один из его корней равен -5.

224. Решить уравнения так, чтобы не потерять корней (см. следствие 4 и примечание к нему в п. 4 § 17; упражнение 149 (а) и ответ на упражнение 149 (б) с примечанием):

а) $2x(x-3)=7(x-3)$;
б) $\frac{x^2-3x+2}{x-3}=x^2-3x+2$;

в) $(x-4)^2 = 25$; это уравнение решите тремя способами (раскрыть скобки и подобрать корни по теореме Виета; раскрыть скобки и вычислить корни по формуле; не раскрывая скобок, извлечь из обеих частей квадратный корень) и сравните полученные корни.

225. Решить уравнения так, чтобы не получить посторонних корней (см. упражнение 150 и ответы к нему с примечанием):

а) $\frac{x^2}{x-1} + 1 = \frac{x}{x-1}$;

б) $\frac{1}{y-2} = \frac{1}{(y-2)^2}$;

в) $\frac{1}{z+2} + \frac{4z}{z^2-4} = 1 - \frac{2}{2-z}$.

226. Решить уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе (см. упражнения 224 и 225, их решения и примечания к ответам):

а) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$;

б) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{2x+13}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = 0$;

в) $\frac{18y+7}{y^3-1} = \frac{30}{y^2-1} - \frac{13}{y^2+y+1}$;

г) $\frac{1}{u^3-u^2+u-1} - \frac{4}{u+1} = \frac{u^2+10u}{u^4-1} - \frac{4u^2+21}{u^3+u^2+u+1}$;

д) $\frac{1}{2n+nx} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2(n+3)}{x^3-4x}$;

е) $\frac{a-x^2}{(a-x)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$.

227. Два туриста идут друг другу навстречу: один из пункта *A*, другой из *B*. Первый выходит из *A* на 6 часов позже, чем второй из *B*, и при встрече оказывается, что он прошел на 12 *км* меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в *B* через 8 часов, а второй в *A* через 9 часов после встречи. Определить расстояние от *A* до *B* и скорость каждого пешехода.

Примечание. Эту и последующие задачи в упражнениях 228—245 решить с помощью уравнения с одним неизвестным.

Решение. Пусть точка C (рис. 13) — место встречи. Одну из трех искомых величин обозначим через x, например скорость (*км/ч*) первого туриста, вышедшего из A. Тогда $BC = 8x$ *км* и $AC = (8x - 12)$ *км*. Так как второй турист расстояние AC прошел за 9 часов, то его скорость равна $\frac{8x - 12}{9}$ *км/ч*. Выразим время движения каждого до момента встречи. Первый AC прошел за $\frac{8x - 12}{x}$ часов, а второй BC за $8x$: $\frac{8x - 12}{9} = \frac{9 \cdot 8x}{8x - 12} = \frac{72x}{4(2x - 3)} = \frac{18x}{2x - 3}$ (часов). Первый вышел на 6 часов позже и его время движения до момента встречи на 6 часов меньше. Прибавив к этому времени 6 часов, получим время движения второго до момента встречи:

$$\frac{8x - 12}{x} + 6 = \frac{18x}{2x - 3}.$$

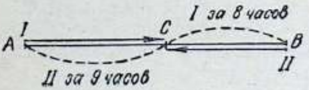


Рис. 13.

Решаем это уравнение:

$$\frac{8x - 12}{x} + 6 - \frac{18x}{2x - 3} = 0;$$

$$\frac{(8x - 12)(2x - 3) + 6x(2x - 3) - 18x^2}{x(2x - 3)} = 0;$$

$$\frac{16x^2 - 24x - 24x + 36 + 12x^2 - 18x - 18x^2}{x(2x - 3)} = 0;$$

$$\frac{10x^2 - 66x + 36}{x(2x - 3)} = 0.$$

Подобрать корни квадратного трехчлена, чтобы разложить его на линейные множители и попытаться сократить дробь, трудно. Для этого пришлось бы решать квадратное уравнение по формуле. Найденные при этом корни трехчлена и являются корнями того квадратного уравнения, которое нам все равно нужно будет решать. Но при этом мы получили бы в левой части уравнения несократимую дробь, и это освободило бы нас от необходимости проверки решения уравнения. Мы так решали предыдущие примеры и могли бы так же решать и здесь. Но мы здесь поступим несколько иначе: не пытаясь получить несократимую дробь, умножим обе части уравнения на знаменатель, содержащий неизвестное. В этом случае могут появиться посторонние корни и проверка корней обязательна. Проверяя полученные решения по условию задачи, мы проверяем этим и решение уравнения.

$$10x^2 - 66x + 36 = 0;\ 5x^2 - 33x + 18 = 0;$$

$$x = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 5 \cdot 18}}{2 \cdot 5} = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 360}}{10} = \frac{33 \pm \sqrt{729}}{10} =$$

$$= \frac{33 \pm 27}{10};\ x_1 = 6;\ x_2 = 0{,}6.$$

Второй корень можно не считать, так как скорость 0,6 *км/ч* для туриста нереальная. (Даже положительный корень не всегда удовлетворяет условию, но особенно часто это будет иметь место с отрицательными корнями, поэтому в таких случаях обязательно нужно объяснить, почему отбрасываем корень.)

Итак, первый турист проходил 6 *км/ч*. Найдем остальные искомые величины: $BC = 6 \cdot 8 = 48$ (*км*); $AC = 48 - 12 = 36$ (*км*). $36 : 9 = 4$ (*км/ч*) — скорость второго туриста. $48 + 36 = 84$ (*км*) — расстояние AB.

Проверка. $84 - 12 = 72$; $72 : 2 = 36$ (*км*) $= AC$; $84 - 36 = 48$ (*км*) $= BC$; $48 : 4 = 12$ (часов) — шел второй до встречи; $36 : 6 = 6$ (часов) — шел первый до встречи; $12 - 6 = 6$ (часов) — на столько первый вышел позже второго, что соответствует условию задачи.

Ответ: расстояние от A до B равно 84 *км*, скорость первого туриста 6 *км/ч*, скорость второго 4 *км/ч*.

228. Сумма квадратов трех последовательных целых чисел равна 365. Найти эти числа.

229. Определить целое положительное число по следующим данным: если приписать к нему справа цифру 5, то получим число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 3, и в частном получается число на 16 меньшее делителя.

230. На расстоянии 40 *м* переднее колесо повозки сделало на 4 оборота больше заднего. Определить длину окружности каждого колеса, если известно, что окружность переднего колеса меньше окружности заднего на 0,5 *м*.

231. Окружность заднего колеса экипажа в 2 раза больше окружности переднего. Если бы окружность заднего колеса уменьшить на 2 *дм*, а переднего увеличить на 4 *дм*, то на расстоянии 120 *м* заднее колесо сделало бы на 20 оборотов меньше переднего. Найти окружности обоих колес.

232. Расстояние в 210 *км* пароход проплывает по течению на 4 часа скорее, чем против течения. Определить собственную скорость парохода, если скорость течения 3 *км/ч*.

233. Расстояние между двумя городами по реке 80 *км*. Пароход совершает этот путь в обе стороны за 8 *час* 20 *мин*. Определить скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки 4 *км/ч*.

234. Моторная лодка, обладающая скоростью 20 *км/ч*, прошла расстояние между двумя пунктами туда и обратно, не останавливаясь, за 6 часов 15 минут. Расстояние между пунктами 60 *км*. Какова скорость течения?

235. Школьник прочел книгу в 480 страниц, читая каждый день поровну. Если бы он прочитывал каждый день на 16 страниц больше, то он прочел бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней читал он книгу?

236. В зрительном зале клуба было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

237. Куплено товара двух сортов: первого сорта на 32 руб., второго сорта на 24 руб. Второго сорта куплено на 4 *кг* больше, чем первого сорта, но стоит он на 80 коп. за килограмм дешевле. Сколько куплено килограммов каждого товара?

238. Поезд задержался у семафора на 16 минут и наверстал это время на перегоне в 80 *км*, идя со скоростью на 10 *км/ч* большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

239. Поезд должен был пройти 840 *км* в определенное время. На половине пути поезд был задержан у семафора на 0,5 часа и, для того чтобы прибыть к месту назначения в срок, увеличил скорость на 2 *км/ч*. Сколько времени поезд находился в пути?

240. Два пешехода выходят одновременно навстречу друг другу из двух мест — A и B. При встрече оказывается, что первый прошел на 4 *км* меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый приходит в B через 4 часа 48 минут, а второй в A через 3 часа 20 минут после встречи. Найти расстояние от A до B.

241. Из двух бригад меньшая может выполнить некоторую работу в срок, на 10 часов больший, чем другая.

Работая вместе, они выполнили работу за 12 часов. За сколько часов могла бы выполнить работу каждая бригада в отдельности?

242. В бассейн проведены две трубы, причем одной первой трубой он наполняется на 15 часов скорее, чем одной второй. После того, как первая труба действовала 10 часов, ее закрыли и открыли вторую, которая наполнила остальную часть бассейна за 30 часов. За сколько часов каждая труба, действуя отдельно, может наполнить пустой бассейн?

243. При постройке здания требовалось вынуть 8000 $м^3$ земли в определенный срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней вследствие того, что бригада ежедневно перевыполняла план на 50 $м^3$. Определить, в какой срок должна быть окончена работа и найти ежедневный процент перевыполнения.

244. Две бригады, работая вместе, произвели ремонт участка пути за 6 дней. Одной первой бригаде для выполнения 40% всей работы потребовалось бы времени на 2 дня больше, чем одной второй бригаде для выполнения $13\frac{1}{3}\%$ всей работы. Определить, за сколько дней каждая бригада отдельно могла бы отремонтировать весь участок.

245. Ремонт пути производили две бригады. Каждая из них отремонтировала по 10 *км*, несмотря на то, что вторая бригада работала на 1 день меньше первой. Сколько километров пути ремонтировала каждая бригада в день, если обе вместе ремонтировали в день 4,5 *км*?

§ 22. Простейшие системы уравнений второй степени

1. Система уравнений второй степени с двумя неизвестными. В § 18 рассматривалась система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Там же говорилось об уравнении с двумя неизвестными $ax + by = c$. Это уравнение первой степени, так как каждый член его, кроме свободного члена, содержит только одно неизвестное и только в первой степени. Теперь возьмем уравнение с двумя неизвестными, содержащее по крайней мере один из членов с неизвестным в квадрате или с произведением двух неизвестных, где каждое в первой степени. Такие члены имеют вторую степень, ибо степень одночлена равна сумме показателей его букв.

то на расстоянии 120 *м* заднее колесо сделало бы на 20 оборотов меньше переднего. Найти окружности обоих колес.

232. Расстояние в 210 *км* пароход проплывает по течению на 4 часа скорее, чем против течения. Определить собственную скорость парохода, если скорость течения 3 *км/ч*.

233. Расстояние между двумя городами по реке 80 *км*. Пароход совершает этот путь в обе стороны за 8 *час* 20 *мин*. Определить скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки 4 *км/ч*.

234. Моторная лодка, обладающая скоростью 20 *км/ч*, прошла расстояние между двумя пунктами туда и обратно, не останавливаясь, за 6 часов 15 минут. Расстояние между пунктами 60 *км*. Какова скорость течения?

235. Школьник прочел книгу в 480 страниц, читая каждый день поровну. Если бы он прочитывал каждый день на 16 страниц больше, то он прочел бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней читал он книгу?

236. В зрительном зале клуба было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

237. Куплено товара двух сортов: первого сорта на 32 руб., второго сорта на 24 руб. Второго сорта куплено на 4 *кг* больше, чем первого сорта, но стоит он на 80 коп. за килограмм дешевле. Сколько куплено килограммов каждого товара?

238. Поезд задержался у семафора на 16 минут и наверстал это время на перегоне в 80 *км*, идя со скоростью на 10 *км/ч* большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

239. Поезд должен был пройти 840 *км* в определенное время. На половине пути поезд был задержан у семафора на 0,5 часа и, для того чтобы прибыть к месту назначения в срок, увеличил скорость на 2 *км/ч*. Сколько времени поезд находился в пути?

240. Два пешехода выходят одновременно навстречу друг другу из двух мест — *A* и *B*. При встрече оказывается, что первый прошел на 4 *км* меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый приходит в *B* через 4 часа 48 минут, а второй в *A* через 3 часа 20 минут после встречи. Найти расстояние от *A* до *B*.

241. Из двух бригад меньшая может выполнить некоторую работу в срок, на 10 часов больший, чем другая.

Работая вместе, они выполнили работу за 12 часов. За сколько часов могла бы выполнить работу каждая бригада в отдельности?

242. В бассейн проведены две трубы, причем одной первой трубой он наполняется на 15 часов скорее, чем одной второй. После того, как первая труба действовала 10 часов, ее закрыли и открыли вторую, которая наполнила остальную часть бассейна за 30 часов. За сколько часов каждая труба, действуя отдельно, может наполнить пустой бассейн?

243. При постройке здания требовалось вынуть 8000 $м^3$ земли в определенный срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней вследствие того, что бригада ежедневно перевыполняла план на 50 $м^3$. Определить, в какой срок должна быть окончена работа и найти ежедневный процент перевыполнения.

244. Две бригады, работая вместе, произвели ремонт участка пути за 6 дней. Одной первой бригаде для выполнения 40% всей работы потребовалось бы времени на 2 дня больше, чем одной второй бригаде для выполнения $13\frac{1}{3}\%$ всей работы. Определить, за сколько дней каждая бригада отдельно могла бы отремонтировать весь участок.

245. Ремонт пути производили две бригады. Каждая из них отремонтировала по 10 *км*, несмотря на то, что вторая бригада работала на 1 день меньше первой. Сколько километров пути ремонтировала каждая бригада в день, если обе вместе ремонтировали в день 4,5 *км*?

§ 22. Простейшие системы уравнений второй степени

1. Система уравнений второй степени с двумя неизвестными. В § 18 рассматривалась система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Там же говорилось об уравнении с двумя неизвестными $ax + by = c$. Это уравнение первой степени, так как каждый член его, кроме свободного члена, содержит только одно неизвестное и только в первой степени. Теперь возьмем уравнение с двумя неизвестными, содержащее по крайней мере один из членов с неизвестным в квадрате или с произведением двух неизвестных, где каждое в первой степени. Такие члены имеют вторую степень, ибо степень одночлена равна сумме показателей его букв.

Если в уравнении с двумя неизвестными есть хотя бы один член второй степени относительно неизвестных и нет члена более высокой степени, то такое уравнение называется уравнением второй степени с двумя неизвестными. Такое уравнение может содержать также члены первой степени и свободный член. Например: $x^2-2x+5y=7$; $2y^2-xy+4x=10$; $xy-y=-1$ и т. д.

Система двух уравнений с двумя неизвестными, в которой оба уравнения второй степени или одно уравнение второй, а другое первой степени, называется системой уравнений второй степени с двумя неизвестными. В частном случае в такой системе одно из уравнений может быть с одним неизвестным (коэффициенты членов с другим неизвестным равны нулю).

Примеры. $\begin{cases}3x^2+y^2=12,\\ 7xy=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=9,\\ xy-5x=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x=8,\\ x-y^2=1.\end{cases}$

Разумеется, что в обоих уравнениях одной и той же системы одноименные неизвестные обозначают одну и ту же величину.

2. Решение системы, содержащей уравнение второй степени и уравнение первой степени. Такую систему двух уравнений всегда можно решить способом подстановки (см. п. 3 § 18). Для этого выражаем одно неизвестное через другое из уравнения первой степени и подставляем полученное выражение в уравнение второй степени. Полученное при этом квадратное уравнение, если оно имеет решения, дает два значения одного неизвестного — разные или равные. Подставив каждое из этих значений в выражение, в котором одно из неизвестных выражено через другое, получаем два соответствующих значения другого неизвестного. Получаем два решения такой системы — две пары значений неизвестных. Каждое из решений проверяется подстановкой в каждое из уравнений данной системы.

Пример. $\begin{cases}x^2+y=10,\\ x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}y=4-x,\\ x^2+4-x=10;\end{cases}$

$$x^2-x-6=0;\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2};$$

$$x_1=3;\ x_2=-2;\ y=4-x;\ y_1=4-3=1;$$

$$y_2=4-(-2)=6.$$

Ответ: 1) $x_1=3$, $y_1=1$; 2) $x_2=-2$, $y_2=6$.

Если дискриминант квадратного уравнения отрицательный, то и система не имеет решения. Если дискриминант больше нуля, то система имеет два различных решения, а если равен нулю, то два одинаковых решения.

Иногда выгодно применять способ алгебраического сложения (см. п. 4 § 18). Так, если в рассмотренном примере вычесть из первого уравнения второе, то получим то же самое квадратное уравнение.

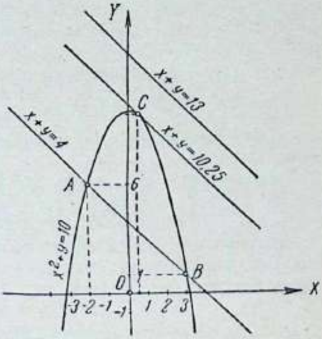


Рис. 14.

3. Графические и искусственные приемы решения систем 2-й степени. В основе графического решения системы двух уравнений с двумя неизвестными второй степени лежит тот же прием, которым мы уже пользовались при графическом решении системы уравнений первой степени (см. п. 2 § 18). Надо построить график каждого уравнения системы и по чертежу найти (приближенно) координаты общих точек обоих графиков — это и будут решения системы уравнений. Сколько общих точек у графиков — столько и решений у системы. Графиком уравнения второй степени с двумя неизвестными обычно будет кривая линия, например парабола (см. § 19), гипербола (см. п. 4 § 16), окружность, эллипс (сжатая окружность, похожая на овал, применяющийся в черчении при наглядном изображении цилиндра). Графиком уравнения первой степени с двумя неизвестными является прямая (см. п. 1 § 18).

Построим графики уравнений следующих систем:

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y=10, \\ x+y=4; \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x^2+y=10, \\ x+y=10{,}25; \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} x^2+y=10, \\ x+y=13. \end{cases}$$

Первому уравнению равносильно уравнение $y=-x^2+10$, и его график — парабола (рис. 14). График уравнения $x+y=4$ есть прямая ($y=-x+4$). Парабола у нас общая для всех трех систем, а прямые различные, но мы взяли параллельные (левые части их уравнений одинаковые, а правые — разные; см. п. 5 § 16).

По графикам (рис. 14) видно, что система (1) имеет два решения (две общие точки A и B) и полученные на графике решения соответствуют решениям (см. п. 2), полученным алгебраическим способом. Система (2) имеет два одинаковых решения — координаты точки касания C (точки A и B прямой AB при параллельном перенесении ее к прямой $x + y = 10{,}25$ сближались и, наконец, слились в одну точку касания C). По графику находим решения системы (2): 1) $x_1 \approx \frac{1}{2}$, $y_1 \approx 9\frac{3}{4}$; 2) $x_2 \approx \frac{1}{2}$, $y_2 \approx 9\frac{3}{4}$. Система (3) не имеет ни одного решения — у графиков ее уравнений нет общих точек.

Укажем некоторые искусственные приемы решения систем второй степени. Так, если надо решить систему $x + y = -50$ и $xy = 96$, то можно составить вспомогательное квадратное уравнение, имеющее корни x и y (см. упражнение 220): $z^2 + 50z + 96 = 0$. Решив это уравнение, найдем решение и данной системы.

$$z = -25 \pm \sqrt{625 - 96} = -25 \pm \sqrt{529} = -25 \pm 23;$$
$$z_1 = -2,\ z_2 = -48.$$

Ответ: 1) $x_1 = -2$, $y_1 = -48$; 2) $x_2 = -48$, $y_2 = -2$ (см. упражнение 248).

Иногда с помощью искусственного приема легко решается простейшая система, у которой оба уравнения второй степени. Так, для решения системы $x^2 + y^2 = 82$ и $xy = -9$ второе уравнение умножим на 2 и полученное уравнение $2xy = -18$ прибавим к первому и вычтем из него. Получим: $x^2 + 2xy + y^2 = 64$ и $x^2 - 2xy + y^2 = 100$ или $(x + y)^2 = 64$ и $(x - y)^2 = 100$. После извлечения алгебраического квадратного корня получим систему: $x + y = \pm 8$ и $x - y = \pm 10$, которая содержит в себе 4 системы первой степени:

$$(1)\ \begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 10; \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = -10; \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} x + y = -8, \\ x - y = 10; \end{cases}$$
$$(4)\ \begin{cases} x + y = -8, \\ x - y = -10. \end{cases}$$

Решение каждой из этих систем является решением данной системы второй степени (см. упражнение 253(а)).

Систему, у которой оба уравнения второй степени, также можно решать графически (см. упражнение 253(б)).

4. Составление системы уравнений 2-й степени по условию задачи. Составляют систему двух уравнений с двумя неизвестными при решении текстовой задачи обычно тогда, когда в задаче требуется найти два или больше неизвестных чисел. Делается это по той же схеме, что и составление системы двух уравнений первой степени (см. п. 5 § 18). Составление выражений, содержащих неизвестные, и самих уравнений надо хорошо объяснять и делать очень внимательно (см. упражнение 254). Следует получить все решения составленной системы уравнений второй степени, проверить их по условию, дать краткое объяснение — какие решения системы и почему не подходят к задаче, сформулировать ответ. Таковы обязательные требования к решению задачи при помощи уравнений.

Упражнения 246—265

246. Что можно сказать о дискриминантах трех квадратных уравнений, которые получатся при решении систем (1), (2) и (3) (см. п. 3 и рис. 14 § 22)? Ответ дать, не получая упомянутых квадратных уравнений и не вычисляя их дискриминантов.

247. **а)** Решить систему (2) в п. 3 § 22 способом алгебраического сложения (см. п. 2) и сравнить результат решения с результатом, полученным с помощью графиков уравнений данной системы (рис. 14).

б) То же самое проделать с системой (3), но решить ее способом подстановки.

248. Систему уравнений $x+y=-50$ и $xy=96$, которая была решена искусственным приемом в п. 3, решить другим искусственным приемом, а именно: возвести первое уравнение в квадрат, а второе уравнение умножить на -4 и полученные уравнения сложить, затем извлечь алгебраический квадратный корень из обеих частей и составить две системы первой степени. Сравнить ответы, полученные при одном и другом приеме решения.

249. Решить графически системы уравнений с возможно большей степенью точности:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x - y = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2x + y = -1, \\ x + y = -5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - x^2 = 2, \\ xy = -3. \end{cases}$

250. Решить системы при помощи составления вспомогательного квадратного уравнения (см. п. 3 § 22):

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = -36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$

251. Решить системы уравнений при помощи искусственного приема, примененного в упражнении 248:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 2a, \\ xy = -3a^2. \end{cases}$

252. Решить системы уравнений способом подстановки, способом алгебраического сложения и др.:

а) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 6x = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-3)(y-2) = 1, \\ \dfrac{y-2}{x-3} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 + xy = 2, \\ x - 3y = 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 7y^2 - 3x^2 + 5xy - 2y = 27, \\ x + y - 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-6} = \dfrac{4}{y-2}, \\ \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{y+5} = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0, \\ (x-2)(y-1) = 0. \end{cases}$

253. а) Довести до конца решение системы, у которой оба уравнения второй степени:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = -9; \end{cases}$$

(начало решения — в п. 3 § 22). Проверить все решения.

б) Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}5x^2 - y = 5, \\ xy = 12. \end{cases}$$

в) Решить систему одним из алгебраических способов:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$$

254. Решить задачу из упражнения 227 с помощью системы двух уравнений с двумя неизвестными, сравнить результаты и способы решения. Какой способ вам представляется более простым?

255. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 28 *км*. Через час езды они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый прибыл в пункт B на 35 минут раньше, чем второй в пункт A. Какова скорость каждого велосипедиста?

Примечание. Эту и последующие задачи рекомендуется решать с помощью системы двух уравнений с двумя неизвестными, хотя можно ограничиться одним неизвестным и составлять одно уравнение.

256. В двух мешках находится 140 *кг* муки. Если 12,5% муки первого мешка переложить во второй, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

257. Кусок сплава меди с оловом весом 12 *кг* содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав имел 40% меди?

258. Некто проехал в лодке по реке из города A в город B и обратно за 10 часов. Расстояние между городами 20 *км*. Найти скорость течения реки, зная, что он проплывал 2 *км* против течения за такое же время, как 3 *км* по течению реки.

259. Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной для нее нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 3 дня; если же будет печатать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

260. Куплено 2 сорта товара, причем второго сорта на 15 *кг* больше первого. За первый сорт заплачено 225 руб., а за второй 320 руб. Сколько куплено килограммов того и другого сорта, если килограмм второго сорта стоил на рубль дешевле килограмма первого?

261. Себестоимость единицы продукции, которая сначала равнялась 25 руб., после двух последовательных снижений на одно и то же число процентов снизилась до 20 руб. 25 коп. На сколько процентов снижалась себестоимость каждый раз?

262. Задачу из упражнения 244 решить при помощи системы уравнений с двумя неизвестными.

263. Решить задачу из упражнения 241 с помощью x и y.

264. Задачу из упражнения 242 решить с помощью системы уравнений.

265. Сосуд емкостью в 8 *л* наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось кислорода 9%. Определить, сколько литров выпускалось каждый раз из сосуда.

Глава VIII ● Решения, указания и ответы к упражнениям по арифметике и алгебре

1. а) Класс единиц, класс тысяч, класс миллионов, класс миллиардов (биллионов), класс триллионов.

б) Разряды: единицы (простые), единицы тысяч, единицы миллионов, единицы миллиардов, единицы триллионов.

в) Разряды: десятки, десятки тысяч, десятки миллионов, десятки миллиардов, десятки триллионов.

г) Разряды: сотни, сотни тысяч, сотни миллионов и т. д.

2. а) Десять знаков; арабские цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0.

б) Одна и та же цифра означает разные числа, если она занимает разные места (позиции) в записи чисел (цифра 4 в первом числе означает 40, во втором — 4000, в третьем — 4 простых единицы), поэтому письменная нумерация нашей десятичной системы счисления называется позиционной (поместной).

в) В римской нумерации не изменяется значение цифры от перемены ее места в записи числа, поэтому римская нумерация не является позиционной. Например, в числе III каждая цифра I означает одну простую единицу, хотя стоят эти три одинаковые цифры на разных местах.

г) Смотри (б) и (в).

3. а) *Первый способ:* каждое яблоко разделить на 4 равные доли и полученные 12 четвертей разделить на 4, получится по $\frac{3}{4}$ яблока каждому. *Второй способ:* 2 яблока разделим на 4 равные части и каждому попадет по $\frac{1}{2}$ яблока, затем последнее яблоко разделим на 4 равные части и каж-

дому дадим еще по $\frac{1}{4}$ яблока. *Третий способ:* трем мальчикам дадим по целому яблоку, и каждый из них даст четвертому по $\frac{1}{4}$ своего яблока.

б) Действием деления числа 3 на число 4; $3:4=\frac{3}{4}$.

4. а) Тысяча больше десятка в 100 раз, миллион сотни — в 10 000 раз, единица сотой доли — в 100 раз, десятая десятитысячной — в 1000 раз.

б) Миллиметр меньше дециметра в 100 раз, ар гектара — в 100 раз, кубический сантиметр литра — в 1000 раз, миллиграмм грамма — в 1000 раз, центнер тонны — в 10 раз.

5. а) 1,5 меньше 150 в 100 раз; 0,0007 меньше 0,7 в 1000 раз; 0,02 меньше 200 в 10 000 раз; 360 меньше 36 000 в 100 раз; 0,0297 меньше 29 700 в 1 000 000 раз.

б) 3500; 1 740 000; 1; 50 000,09.

в) 0,935; 0,08005; 0,0001; 0,07; 15,2.

6. а) $20{,}58>17{,}59$; $439{,}75>439{,}68$; $0{,}01>0{,}0096$; $0{,}30632>0{,}30617$.

б) $\frac{1}{2}<\frac{2}{2}$; $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$; $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}<\frac{4}{5}$; $\frac{1}{15}<0{,}1$; $0{,}07<\frac{7}{90}$; $\frac{13}{105}<1{,}013$.

7. а) 40; 44; 51; 459; 0,001; 0,8.

б) 910; 250; 500; 300 000.

8. 124,6 *ц*; 48,06 *ц*; 5,34 *ц*.

9. 110 *т*.

10. 60,431; 3,5325; 0,02142; 17,5.

11. а) 17; **б)** 13,25; **в)** 52,2; 10,4; 0,00024; 0; 0; **г)** 2,1; 0,3; 0,2; 70; 1,3; 0; 100; 3,006.

13. а) 8,73; **б)** 3,864; **в)** 227.

14. а) 3,25; **б)** 0.

15. а) $\approx 0{,}455$; **б)** $\approx 333{,}0$.

16. а) 305 800; 59 200; 2 780 300; **б)** 833 *га*; 1301 *га*; 247 *л*; 5 *л*; **в)** 3,1; 0,8; 0,1; 0,003102; 0,000100.

17. 1) Какую часть от всей ткани составляли первый и второй сорта вместе?

$$0{,}3+0{,}25=0{,}55.$$

2) Какую часть от всей ткани составлял третий сорт?

$$1-0{,}55=0{,}45.$$

3) Сколько было продано всей ткани?

$$13{,}5 : 45 = 0{,}3;\ 0{,}3 \cdot 100 = 30\ (м).$$

4) Сколько продано ткани первого сорта?

$$30 : 10 = 3;\ 3 \cdot 3 = 9\ (м).$$

5) Сколько продано ткани второго сорта? (Дробь 0,25 от числа 30 можно найти и одним действием; см. п. 2 § 2.)

$$30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5\ (м).$$

6) Сколько выручили за каждый сорт ткани в отдельности?

$$1{,}41 \cdot 9 = 10{,}26\ (руб.);\ 0{,}98 \cdot 7{,}5 = 7{,}35\ (руб.);$$
$$1{,}42 \cdot 13{,}5 = 19{,}17\ (руб.).$$

7) Сколько получено за всю проданную ткань?

$$10{,}26 + 7{,}35 + 19{,}17 = 36{,}78\ (руб.).$$

18. Если в задаче 17 дроби 0,3 и 0,25 брались от одного и того же числа (от всей ткани) и эти дроби можно было сложить, то в данной задаче этого сделать нельзя, ибо дроби 0,4 и 0,75 берутся от разных чисел. Надо и вторую выдачу, которая составляла 0,75 от первого остатка, выразить дробью от количества всей проволоки.

1) Какая часть от всей проволоки осталась на складе после первой выдачи?

$$1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

2) Какую часть от всей проволоки составляла проволока, выданная по второму ордеру?

$$0{,}6 \cdot 0{,}75 = 0{,}45.$$

3) Какая часть всей проволоки выдана за два раза?

$$0{,}4 + 0{,}45 = 0{,}85.$$

4) Какую часть всей проволоки составляла проволока, оставшаяся после второй выдачи?

$$1 - 0{,}85 = 0{,}15.$$

5) Сколько проволоки было до первой выдачи?

$$28{,}5 : 15 = 1{,}9;\ 1{,}9 \cdot 100 = 190\ (кг).$$

Другой способ решения задачи: если за 1 принять количество проволоки, оставшееся после первой выдачи, то 28,5 *кг* составляют 1 — 0,75 = 0,25 первого остатка, который и находим: $28{,}5 : 25 = 1{,}14$; $1{,}14 \cdot 100 = 114$ (*кг*). Если за 1 принять количество всей проволоки, то 114 *кг* составляют от него $1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Всего проволоки было: $114 : 6 = 19$; $19 \cdot 10 = 190$ (*кг*).

19. Решим эту задачу способом, несколько подобным на второй способ решения задачи 18.

1) Чему равно произведение искомого числа на 0,25?

$$1 + 0{,}5 = 1{,}5.$$

2) Чему равно искомое число?

$$1{,}5 : 0{,}25 = 6.$$

20. а) Применить законы сложения. Например, $243 + 3{,}19 + 127 + 6{,}31 = (243 + 127) + (3{,}19 + 6{,}31) = 370 + 9{,}5 = 379{,}5$.

б) Применить законы умножения. Например, $5 \cdot 47 = 5 \cdot (40 + 7) = 5 \cdot 40 + 5 \cdot 7 = 200 + 35 = 235$; $16 \cdot 1{,}36 \cdot 0{,}125 = 2 \cdot (8 \cdot 0{,}125) \cdot 1{,}36 = 2 \cdot 1 \cdot 1{,}36 = 2{,}72$.

в) Примеры удобных вычислений: $4 \cdot (35{,}8 - 0{,}25) = 4 \cdot 35{,}8 - 4 \cdot 0{,}25 = 143{,}2 - 1 = 142{,}2$; $0{,}25 \cdot (64{,}7 - 60{,}3) = 0{,}25 \cdot 4{,}4 = 0{,}25 \cdot (4 + 0{,}4) = 0{,}25 \cdot 4 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$.

г) Применить свойства арифметических действий (см. п. 6 § 3): $0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}78 = 2 + 2{,}78 = 4{,}78$; $2 \cdot 1{,}75 \times 0{,}4 \cdot 0{,}01 = 3{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}01 = 1{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}014$; $6{,}35 \cdot (0{,}25 \cdot 4) \times 3 = 6{,}35 \cdot 1 \cdot 3 = 19{,}05$; $30 : 15 + 0{,}45 : 15 + 150 : 15 = 2 + 0{,}03 + 10 = 12{,}03$; $(0{,}175 : 25) \cdot 7 = 0{,}007 \cdot 7 = 0{,}049$; $[(240 : 12) : 0{,}4] : 12{,}5 = (20 : 0{,}4) : 12{,}5 = 50 : 12{,}5 = 4$.

21. а) 1,3; **б)** 80.

23. а) Удвоенное меньшее число равно: $167{,}28 - 87{,}72 = 79{,}56$. Меньшее искомое число равно: $79{,}56 : 2 = 39{,}78$. Большее искомое число равно: $39{,}78 + 87{,}72 = 127{,}5$. Проверка решения: $39{,}78 + 127{,}5 = 167{,}28$.

б) Меньшее число $\frac{s - r}{2}$, большее число $\frac{s + r}{2}$.

24. Каждый поезд был в пути с момента отправления и до момента встречи по 3,2 часа, а сумма пройденных ими расстояний равна 566,4 *км*. Найдем сумму их скоростей: $566{,}4 : 3{,}2 = 177$ (*км/ч*). Так как разность их скоростей 63 *км/ч*, то скорость одного из поездов равна 57 *км/ч* и второго — 120 *км/ч* (см. задачу 23).

25. Под собственной скоростью понимают скорость движения в стоячей воде. Скорость движения байдарки против течения равна $13{,}2 : 1{,}5 = 8{,}8$ (*км/ч*). Скорость движения по течению отличается от скорости движения против течения на удвоенную скорость течения. $13{,}2 - 8{,}8 = 4{,}4$; $4{,}4 : 2 = 2{,}2$ (*км/ч*) — скорость течения реки. Собственная скорость движения байдарки равна $13{,}2 - 2{,}2 = 11$ (*км/ч*).

26. а) Уменьшая первое слагаемое (17) на 0,5, уменьшаем на 0,5 и сумму, а увеличивая другое слагаемое на 0,5, увеличиваем на 0,5 и сумму, поэтому сумма (22) осталась неизменной. Правило: если одно из двух слагаемых увеличить на какое-нибудь число, а другое слагаемое уменьшить на то же число, то сумма не изменится.

б) От деления сомножителя 12 на 4 произведение уменьшается в 4 раза, а от умножения сомножителя 2,5 на 4 произведение увеличивается в 4 раза. Правило: если один из двух сомножителей увеличим в несколько раз, а другой сомножитель уменьшим во столько же раз, то произведение не изменится.

27. а) Сумма уменьшится на 4,9.

б) Произведение увеличится в 3,5 раза.

28. а) Разность уменьшится на 19.

б) Разность увеличится на 34,8.

в) На числовых примерах легко убедиться, что разность не изменится, если уменьшаемое и вычитаемое увеличить на одно и то же число или если оба компонента уменьшить на одно и то же число.

29. а) Частное увеличится в 15 раз.

б) Частное уменьшится в 2 раза.

в) Частное не изменится, если делимое и делитель увеличить в одно и то же число раз или если оба компонента уменьшить в одно и то же число раз (см. п. 2 § 4).

30. а) 10; б) 2,35.

31. а) Большее искомое число принимаем за 1 (за одну часть), тогда меньшее искомое число составит 0,6 единицы. Сумма частей: $1 + 0{,}6 = 1{,}6$. На 1 часть приходится $80 : 1{,}6 = 50$ — таково большее искомое число, а меньшее равно 30.

б) Частное показывает, что одно из искомых чисел больше другого в 8,5 раза. Сумма частей: $1 + 8{,}5 = 9{,}5$. Меньшее искомое число равно $228 : 9{,}5 = 24$, большее — 204.

в) Меньшее искомое число принимаем за 1, тогда большее содержит n таких единиц (частей). Сумма частей: $n + 1$. Меньшее искомое число равно $s : (n + 1)$, а большее $[s : (n + 1)] \cdot n$.

32. Площадь огорода: $32 \cdot 10 = 320$ (*кв. м*). Морковь занимает: $320 \cdot 0{,}05 = 16$ (*кв. м*). Картофелем и луком занято: $320-16=304$ (*кв. м*). Площадь под луком принимаем за 1. Сумма частей: $1+7=8$. Луком занято: $304:8=38$ (*кв. м*), картофелем занято: $38\cdot 7=266$ (*кв. м*).

33. Вторая бригада, работая отдельно, может выполнить всю работу за $5:1{,}25=4$ (дня), а третья бригада за $4:1{,}25=3{,}2$ (дня). Всю работу принимаем за 1. Тогда за 1 день первая бригада выполнит $1:5=0{,}2$ всей работы, вторая бригада — $1:4=0{,}25$ всей работы и третья бригада — $1:3{,}2=0{,}3125$ всей работы. Если они будут работать вместе, то за 1 день выполнят: $0{,}2+0{,}25+0{,}3125=0{,}7625$ всей работы. Поэтому для выполнения всей работы им потребуется при совместной работе $1:0{,}7625\approx 1{,}31$ (дня).

35. а) Неизвестное уменьшаемое $7x$ равно $40+37=77$, $7x=77$; неизвестный сомножитель x равен $77:7=11$.

Ответ: $x=11$.

б) Неизвестное делимое $(15+2x)$ равно $8{,}4\cdot 5=42$, $15+2x=42$; неизвестное слагаемое $2x$ равно $42-15=27$, $2x=27$; неизвестный сомножитель x равен $27:2=13{,}5$.

Ответ: $x=13{,}5$.

в) Неизвестное уменьшаемое $(0{,}12+34x)\cdot 56$ равно $189{,}23+7{,}89=197{,}12$. Получаем уравнение: $(0{,}12+34x)\cdot 56=197{,}12$; неизвестный множитель $(0{,}12+34x)$ равен $197{,}12:56=3{,}52$. Получаем уравнение: $0{,}12+34x=3{,}52$; неизвестное слагаемое $34x$ равно $3{,}52-0{,}12=3{,}4$. Из уравнения $34x=3{,}4$ получаем: $x=3{,}4:34=0{,}1$.

Ответ: $x=0{,}1$.

36. а) $(20+27):2=23{,}5$;

б) $(130{,}6+142{,}9+149{,}5):3=141$;

в) $(a+b+c+d):4$.

37. а) $(115{,}6\cdot 3+98{,}2\cdot 5+88{,}3\cdot 4):12=99{,}25$ (руб.).

б) 0,01 всего маршрутного расстояния составляет: $690:23=30$ (*км*), а все это расстояние равно $30\cdot 100=3000$ (*км*). Средняя скорость составит: $3000:4=750$ (*км/ч*).

38. а) Меньшее искомое число принимаем за 1 (одну часть), тогда большее искомое число составит 3, а разность — 2 (части). На одну часть приходится: $36{,}2:2=18{,}1$ — это меньшее искомое число, а большее: $18{,}1\cdot 3=54{,}3$.

б) Меньшее искомое число $\frac{r}{m-1}$, а большее $\frac{rm}{m-1}$.

в) Большее искомое число принимаем за 1, тогда меньшее число составляет 0,7, а разность их — 0,3 от большего числа. Найдем большее искомое число по данной величине 52,5 его дроби 0,3. 0,1 от большего числа составляет $52{,}5 : 3 = 17{,}5$ и большее искомое число равно $17{,}5 \cdot 10 = 175$. Меньшее искомое число: $175 - 52{,}5 = 122{,}5$.

39. К моменту отправления второго поезда первый поезд прошел уже $60 \cdot 1{,}5 = 90$ (*км*). Разность скоростей: $100 - 60 = 40$ (*км/ч*). Второй поезд догонит первый через $90 : 40 = 2{,}25$ (часа) и на расстоянии $100 \cdot 2{,}25 = 225$ (*км*) от станции их отправления.

40. Объем цистерны принимаем за 1 (см. задачу 33). Две трубы, действуя вместе, за 1 час наполняют: $1 : 1{,}6 = 0{,}625$ цистерны. Одна труба отдельно за 1 час наполняет: $1 : 2{,}5 = 0{,}4$ цистерны. Вторая труба отдельно наполняет за 1 час: $0{,}625 - 0{,}4 = 0{,}225$ цистерны, а всю цистерну наполнила бы за $1 : 0{,}225 \approx 4{,}4$ (часа).

41. Дневная норма составляла: $63 : 15 = 4{,}2$ (*га*). Фактически тракторист вспахивал ежедневно в среднем по $4{,}2 + 1{,}6 = 5{,}8$ (*га*). 116 *га* он вспахал за $116 : 5{,}8 = 20$ (дней).

42. а) 12; 12; 24; 65; 32. **б)** 75; 240; 1200. **в)** НОД (24 и 36) = 12; НОК (24 и 36) = 72; НОД (60, 90 и 120) = 30; НОК (60, 90 и 120) = 360.

43. **а)** 24; 125; **б)** 384; 1860.

44. **а)** 9; **б)** 8.

45. $(6{,}5 \cdot 6{,}2 + 4{,}5 \cdot 18{,}6) : (6{,}2 + 18{,}6) = 5$ (руб.).

46. Так как припек составляет 0,4 веса муки, то вес муки принимается за 1, и вес хлеба тогда составит $1 + 0{,}4 = 1{,}4$ веса муки. 0,1 веса муки равна $181 : 14 \approx 12{,}93$ (*кг*), а весь вес муки $\approx 12{,}93 \cdot 10 \approx 129{,}3$ (*кг*). Так как при размоле теряется 0,1 веса зерна, то вес полученной муки (129,3 *кг*) составляет $1 - 0{,}1 = 0{,}9$ веса зерна. 0,1 веса зерна составляет $129{,}3 : 9 \approx 14{,}4$ (*кг*), а весь вес зерна $\approx 14{,}4 \cdot 10 \approx 144$ (*кг*).

47. Если бы все 250 бревен были сосновые, то их вес был бы $0{,}28 \cdot 250 = 70$ (*т*), т. е. общий вес уменьшился бы на $74{,}9 - 70 = 4{,}9$ (*т*). Причина такого уменьшения общего веса бревен в том, что еловые бревна заменили сосновыми, потеряв при этом в весе по $0{,}35 - 0{,}28 = 0{,}07$ (*т*) на каждом замененном еловом бревне. Поэтому еловых бревен было $4{,}9 : 0{,}07 = 70$ (штук), а сосновых 180 штук.

48. а) $3\frac{2}{5}$; $8\frac{5}{10}$; $1\frac{1}{36}$; 1; $11\frac{1}{9}$; $1\frac{91}{100}$; 3; 8; $6\frac{19}{63}$.

б) $\frac{7}{4}$; $\frac{232}{9}$; $\frac{1553}{10}$; $\frac{1201}{6}$; $\frac{813}{179}$; $\frac{3633}{3109}$.

в) $\frac{12}{4}$, $\frac{30}{10}$, $\frac{75}{25}$, $\frac{3000}{1000}$; $\frac{32}{4}$, $\frac{80}{10}$, $\frac{200}{25}$, $\frac{8000}{1000}$; $\frac{140}{4}$, $\frac{350}{10}$, $\frac{875}{25}$, $\frac{35\,000}{1000}$.

49. а) Увеличением числителя в 3 раза: $\frac{3}{6}$, $\frac{15}{27}$, $\frac{57}{51}$, $\frac{93}{42}$, $\frac{300}{153}$, $\frac{705}{309}$; уменьшением знаменателя в 3 раза: $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{19}{17}$, $\frac{31}{14}$, $\frac{100}{51}$, $\frac{235}{103}$.

б) Уменьшением числителя в 5 раз: $\frac{3}{22}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{15}{99}$, $\frac{32}{203}$, $\frac{160}{111}$, $\frac{125}{626}$; увеличением знаменателя в 5 раз: $\frac{15}{110}$, $\frac{40}{35}$, $\frac{75}{495}$, $\frac{160}{1015}$, $\frac{800}{555}$, $\frac{625}{3130}$.

50. а) $\frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$; $\frac{40}{110} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$; $\frac{70}{98} = \frac{35}{49} = \frac{5}{7}$; $\frac{210}{252} = \frac{105}{126} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$; $\frac{180}{630} = \frac{18}{63} = \frac{2}{7}$; $\frac{42}{378} = \frac{21}{189} = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}$; $\frac{165}{495} = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$; $\frac{825}{165} = \frac{165}{33} = \frac{5}{1} = 5$.

б) НОД $(255$ и $85) = 85$; $\frac{255}{85} = \frac{85 \cdot 3}{85} = 3$; НОД $(182$ и $273) = 91$; $\frac{182}{273} = \frac{91 \cdot 2}{91 \cdot 3} = \frac{2}{3}$; $\frac{279}{1395} = \frac{279}{279 \cdot 5} = \frac{1}{5}$; $\frac{420}{84} = 5$; $322 = 2 \cdot 7 \cdot 23$; $1771 = 7 \cdot 11 \cdot 23$; НОД $(322$ и $1771) = 7 \cdot 23 = 161$; $\frac{322}{1771} = \frac{161 \cdot 2}{161 \cdot 11} = \frac{2}{11}$.

51. а) $\frac{27}{144}$ и $\frac{112}{144}$; $\frac{54}{78}$, $\frac{15}{78}$ и $\frac{1}{78}$; $\frac{4}{180}$ и $\frac{33}{180}$.

б) НОК $(86$ и $60) = 60 \cdot 43 = 2580$; $\frac{150}{2580}$ и $\frac{301}{2580}$; $50 = 2 \cdot 5^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$; НОК $(50;\ 80;\ 360$ и $144) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 9 \cdot 25 = 3600$; $\frac{648}{3600}$, $\frac{1395}{3600}$, $\frac{130}{3600}$ и $\frac{575}{3600}$.

52. а) $\frac{11}{15} > \frac{8}{15}$; $\frac{5}{6} < \frac{17}{18}$; $\frac{10}{13} < \frac{10}{11}$; $\frac{29}{5} > \frac{29}{10}$; $\frac{37}{38} < \frac{91}{92}$; в последнем примере можно не приводить дроби к общему знаменателю, а судить по тому, что у дроби $\frac{37}{38}$ не хватает $\frac{1}{38}$ до 1, а у $\frac{91}{92}$ не хватает $\frac{1}{92}$, но $\frac{1}{38} > \frac{1}{92}$, поэтому $\frac{37}{38} < \frac{91}{92}$.

б) $\frac{1}{130}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{7}{65}$; $\frac{11}{26}$; $\frac{7}{13}$; $\frac{3}{5}$.

в) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{36}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{72}$.

53. а) Среднее арифметическое двух чисел равно половине их суммы (см. задачу 36), поэтому сумма двух чисел равна $95{,}4 \cdot 2 = 190{,}8$. Искомое число: $190{,}8 - 100{,}8 = 90$.

б) Сумма трех искомых чисел равна $9{,}98 \cdot 3 = 29{,}94$. Второе число принимаем за 1, тогда первое составляет $\frac{1}{3}$ (от второго, т. е. от 1), а сумма первого и второго равна $\frac{1}{3} + 1 = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Уменьшив $\frac{4}{3}$ в 2 раза, получим, что третье число составляет $\frac{2}{3}$ от второго числа, принятого за 1. Три искомых числа вместе составляют $\frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3} = 2$ от второго (в 2 раза больше него). Второе число равно $29{,}94 : 2 = 14{,}97$. Первое число: $14{,}97 : 3 = 4{,}99$; третье число: $4{,}99 \cdot 2 = 9{,}98$.

Проверка. $(14{,}97 + 4{,}99 + 9{,}98) : 3 = 29{,}94 : 3 = 9{,}98$.

54. Ответ: за 10 часов. (См. задачи 33 и 40.)

55. а) $21\frac{1}{40}$; б) $\frac{3}{20}$; $8\frac{287}{437}$; $16\frac{38}{43}$; в) 1750; г) $1\frac{1}{9}$; $\frac{2}{5}$; $10\frac{1}{2}$.

57. а) $2\frac{1}{2}$; б) 5; в) 14; г) 5.

59. а) 0,3; б) 1.

60. Панель имеет форму прямоугольного параллелепипеда и ее объем равен произведению длины на ширину и на высоту (обращаем все измерения в метры): $4 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}16 = 0{,}96$ (*куб. м*). Вес ее равен $2{,}4 \cdot 0{,}96 = 2{,}304$ (*т*).

61. $21:2{,}5=8{,}4$ (*куб. м*); $252:8{,}4=30$ (дней); $252:21=12$ (дней); $30-12=18$ (дней).

62. Емкость резервуара принимаем за 1. Вторая труба наполняет резервуар за $3\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{10\cdot 3}{3\cdot 4}=2\frac{1}{2}$ (часа). За 1 час первая труба наполняет $1:3\frac{1}{3}=1:\frac{10}{3}=\frac{1\cdot 3}{10}=\frac{3}{10}$, а вторая — $1:2\frac{1}{2}=1:\frac{5}{2}=\frac{2}{5}$ (части резервуара); вместе они за час наполнят $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$ (части резервуара). Третья труба за 1 час опорожнит $1:2=\frac{1}{2}$ (часть резервуара). При одновременном действии трех труб наполнится: $\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ (часть резервуара). Весь резервуар наполнится за $1:\frac{1}{5}=5$ (часов).

63. **а)** $\frac{2}{5}$; $1\frac{19}{36}$; 8; $\frac{15}{16}$; 0,35; 3,8.

б) $x=634{,}4$; $x=1\frac{1}{3}$; $x=0{,}4$; $x=1\frac{1}{2}$.

в) $80:1$; $75:9=25:3$; $1502:250=751:125$; $189:180=21:20$; $12:10:3$; $50:175:250=2:7:10$.

64. **а)** Масштаб есть отношение размера на карте или плане к соответствующему размеру в действительности. 90 *км* = 90 000 *м* = 9 000 000 *см*; $2:9\,000\,000=1:4\,500\,000$.

б) Искомое расстояние есть последующий член отношения, равного данному масштабу $\left(\frac{1}{21\,000}\right)$, и оно равно: $10:\frac{1}{21\,000}=\frac{10\cdot 21\,000}{1}=210\,000$ (*см*) = 2,1 (*км*).

65. Объем блока: 1,89 *куб. м*. Так как пустотность составляет 30% от объема блока, то объем блока принимается за 100%. Объем бетона составляет 70% от объема блока. По смыслу задачи ясно, что нужно найти 70% от 1,89 *куб. м*. По формуле нахождения процентов от числа имеем $\frac{1{,}89}{100}\cdot 70=1{,}323$ (*куб. м* бетона в одном блоке). На 1000 таких блоков потребуется 1323 *куб. м* бетона.

66. Чтобы правильно решать задачи с процентами, надо научиться узнавать по условию задачи, к какому из трех типов задач на проценты она относится (см. пп. 2 — 4 § 9).

Легче всего отличить от других задачу на нахождение процентного отношения двух чисел: там даны два числа, а проценты требуется найти. Так будет и в данной задаче.

Два других типа задач на проценты внешне похожи друг на друга тем, что в каждом из них даны одно число и проценты, а нужно найти другое число. Надо здесь разобраться, чем является данное число: если по смыслу задачи нужно от данного числа находить указанные проценты, то это — первый тип задачи (см. п. 2 § 9), где данное число принимается за 100%; если же указанные в задаче проценты берутся (по смыслу задачи) от искомого числа, то оно принимается за 100%, а данное число содержит указанные в задаче проценты — тогда это второй тип задачи (см. п. 3). Общим в решении этих двух типов задач является то, что сначала находим 1%, а затем и нужное число процентов.

Машинист перевыполнил норму на $1820 - 1050 = 770$ (*т*) или на $\frac{770}{1050} \cdot 100\% \approx 73{,}3\%$, а обязательство он перевыполнил на $1820 - 1500 = 320$ (*т*) или на $\frac{320}{1500} \cdot 100\% \approx 21{,}3\%$.

67. Указанные в задаче 29,6% берутся от всей площади, занятой зерновыми, т. е. от искомого числа, которое принимается за 100%. Следовательно, это задача второго типа: нахождение числа по данной величине 1320 *га* его процентов $100\% - 29{,}6\% = 70{,}4\%$ (здесь проценты даны не те, величина которых 1320 *га*, но их легко мы нашли: 70,4%). $\frac{1320}{70{,}4} \cdot 100 = 1875$ (*га*).

68. Данная величина 1,6 *т* содержит 8% от плана, принимаемого за 100%. План составлял: $\frac{1{,}6}{8} \cdot 100 = 20$ (*т*). 97,7% и 96% берутся от этого плана, поэтому можно было бы найти 97,7% от 20 *т* и 96% от 20 *т* и разность полученных результатов дала бы ответ на вопрос задачи. Но можно сделать проще: $97{,}7\% - 96\% = 1{,}7\%$; $\frac{20}{100} \cdot 1{,}7 = 0{,}34$ (*т*).

69. Данное число 26,25 *т* составляет 175% от нормы, принимаемой за 100%. Эту норму можно найти и затем вычислить 182% от нее. Но проще найти 1% и сразу 182%; $\frac{26{,}25}{175} \cdot 182 = 27{,}3$ (*т*).

70. Первое число составляет 14,3% от второго, принимаемого за 100%; тогда данная величина $285\frac{3}{4}$ составляет 114,3% от второго числа, которое равно $\frac{285{,}75}{114{,}3}\cdot 100 = 250$; первое число: 35,75.

71. Данная величина 27 составляет $100\% - 20\% = 80\%$ второго остатка, составляющего 100%. Второй остаток равен $\frac{27}{80}\cdot 100 = 33{,}75$. Но он составляет 75% первого остатка, который принимается за 100% и равен $\frac{33{,}75}{75}\cdot 100 = 45$. Полученное число составляет 90% от искомого, принимаемого за 100% и равного $\frac{45}{90}\cdot 100 = 50$.

72. Все число принимаем за 1; после вычитания из него $\frac{5}{8}$ его частей в нем будет содержаться еще $\frac{3}{8}$ его части. Из этого остатка затем вычитают $\frac{2}{3}$ его части, после чего в нем останется $\frac{1}{3}$ его часть. Найдем дробь $\frac{1}{3}$ от числа $\frac{3}{8}$: $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{8}$ (см. п. 5 § 8). Второй остаток $\left(\frac{1}{8}\right)$ от всего числа (1) составляет $\left(\frac{1}{8}:1\right)\cdot 100\% = 12{,}5\%$.

73. Ответ: 1.

74. а) $21:7 = 15:5$; $16:24 = 5:7{,}5$; $3:7{,}5 = 4:10$.

б) $49:7 = 42:6$; $12:6 = 8:4$; невозможно.

в) $x = \frac{2}{75}$; $x = 0{,}75$; $x = 1\frac{1}{9}$; $x = 3$.

75. а) $x = \frac{1}{7}$; $x = 2{,}625$; $x = 1\frac{7}{9}$; $x = 1\frac{13}{32}$.

б) Проверка подтверждает правильность всех этих пропорций, полученных перестановкой крайних членов, средних членов (по отдельности или одновременно) или крайних со средними членами.

76. Прямо пропорциональными являются величины, указанные в пунктах (а), (г), (е); обратно пропорциональными — указанные в пунктах (б), (в), (д), (ж). Хотя с увеличением стороны квадрата площадь также увеличивается, однако не во столько же раз (например, с увеличением стороны в 2 раза площадь квадрата увеличивается в 4 раза),

поэтому сторона и площадь квадрата величины ни прямо пропорциональные, ни обратно пропорциональные.

77. *Первый способ* решения (приведением к единице). Для получения 1 *кг* масла нужно $8:3{,}2=2{,}5$ (ведра) молока, а для получения 16 *кг* масла нужно молока в 16 раз больше: $2{,}5\cdot 16=40$ (ведер).

Второй способ решения (с помощью пропорции). Количество молока одинаковой жирности и количество получаемого из него масла — величины прямо пропорциональные (см. п. 3 § 10). Составим таблицу, которая облегчит составление пропорции:

$$\text{масло } (кг)\left\{\begin{matrix} 3{,}2-8 \\ 16\ -x \end{matrix}\right\}\text{ молоко (ведра)}$$

Отсюда пропорция: $\frac{3{,}2}{16}=\frac{8}{x}$; $x=\frac{16\cdot 8}{3{,}2}=40$ (ведер).

78. *Способ приведения к единице.* Один комбайнер убирал бы всю площадь в 40 раз дольше, чем 40 комбайнеров, и ему потребовалось бы $12\cdot 40=480$ (дней). 48 комбайнерам потребуется на это $480:48=10$ (дней).

Способ пропорций. Количество рабочих и время выполнения данной работы — величины обратно пропорциональные (см. п. 3 § 9). Таблицу составляем так же, как и в случае прямо пропорциональных величин:

$$\text{комбайнеры}\left\{\begin{matrix} 40-12 \\ 48-\ x \end{matrix}\right\}\text{ дни работы,}$$

однако пропорцию для обратно пропорциональных величин составляем иначе: $\frac{40}{48}=\frac{x}{12}$ (так как $40<48$ и $x<12$).

$$x=\frac{40\cdot 12}{48}=10\text{ (дней).}$$

79. $7\frac{1}{5}:2\frac{1}{3}:\frac{5}{6}=216:70:25$ (см. п. 1 § 9). Кур было $\frac{2799}{216+70+25}\cdot 216=1944$; уток $\frac{2799}{311}\cdot 70=630$ и гусей $\frac{2799}{311}\cdot 25=225$ (см. п. 4 § 10).

80. $2\frac{1}{3}:1\frac{5}{6}=14:11$. Груш было больше, чем слив, на 3 части, или на 162 дерева. Груш и слив вместе было 25 частей, или $\frac{162}{3}\cdot 25=1350$ (деревьев), и они составляли $100\%-32{,}5\%=67{,}5\%$ от всех посаженных деревьев. Осталось найти число по данной величине (1350) его процентов (67,5%; см. п. 3 § 9). Но можно сделать иначе: заме-

нить проценты дробью ($67{,}5\% = 0{,}675$; см. п. 4 § 9) и найти число по данной величине (1350) его дроби (0,675; см. п. 5 § 8). $1350 : 0{,}675 = 2000$ (деревьев).

Подобным способом можно находить проценты от числа, как дробь от числа.

81. Ответ: 1716 *га*.

82. Ответ: 2,5 часа.

83. Составим таблицу (в задаче три величины):

5 насосов — 3 часа — 1800 ведер,
4 насоса — 7 часов — x ведер.

Сначала допустим, что число насосов (5) не изменилось, а время работы увеличилось (вместо 3 стало 7 часов). Тогда количество выкачанной воды будет прямо пропорционально времени работы и мы получаем пропорцию:

$$\frac{3}{7} = \frac{1800}{x};\ x = \frac{7 \cdot 1800}{3} = 4200 \text{ (ведер)}.$$

Заменим 1800 на 4200 и составим пропорцию из значений двух величин: количества ведер воды и количества насосов, которые также прямо пропорциональны:

$$\frac{5}{4} = \frac{4200}{x};\ x = \frac{4 \cdot 4200}{5} = 3360 \text{ (ведер)}.$$

84. **а)** 0,05; **б)** 1,76.

85. Данное выражение называют суммой, разностью, произведением, частным или степенью в зависимости от того, какое действие является в этом выражении последним (см. порядок действий в § 11).

а) Произведение разности $a - b$ на число c;

б) сумма разности $a - b$ и числа c;

в) разность между утроенной суммой $a + b$ и удвоенным произведением ab;

г) частное от деления суммы $a + b$ на разность тех же чисел;

д) куб произведения $\frac{2}{3}$ на число c;

е) произведение $\frac{2}{3}$ на куб числа c;

ж) утроенное произведение квадрата числа a на число b;

з) разность квадратов чисел a и b;

и) квадрат разности чисел a и b;

к) сумма квадратов чисел a и b;

л) сумма кубов чисел a и b;

м) куб разности чисел a и b;

н) квадрат суммы чисел $5x$ и y;

о) квадрат произведения 5 на сумму $x+y$;

п) частное от деления разности кубов чисел x и y на разность тех же чисел.

86. **а)** $(x+y)^2$; **б)** $(a+b)(a-b)$; **в)** $(x+y)^3$; **г)** a^2-ab+b^2; **д)** $(a^2+ab+b^2)(x-y)$; **е)** $(a^3+b^3):(x^2-xy+y^2)$; **ж)** $3(p-q)^n$; **з)** $(2m+n)^2$; **и)** $(m-n)^2+(p-q)^2$; **к)** $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.

87. а) В выражении $\frac{A}{100}\cdot p$ числа A и p — любые положительные (целые и дробные) или нули; в выражении $\frac{a}{p}\cdot 100$ число a — любое положительное или нуль, p — любое положительное, но не может быть нулем; в выражении $\frac{a}{A}\cdot 100$ число a — любое положительное или нуль, A — любое положительное, но не может быть равным нулю.

б) Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — любые целые или дробные, число n — натуральное число, большее 1.

в) В частном (или отношении) $a:b$ число a — любое, а b может быть любым числом, кроме нуля.

г) Во множестве неотрицательных чисел (положительные числа и нуль) a, b и c могут принимать любые значения, лишь бы значения a были не меньше значений b; во множестве рациональных чисел (см. § 12) условие $a \geqslant b$ снимается.

д) Во множестве рациональных чисел a, b и c — любые числа, лишь бы было $b-c \neq 0$, т. е. должно быть $b \neq c$.

88. а) $2xyz$; $3m+2n$; $2mx+4ny+mnxy$; $3\cdot\frac{c}{5}$; $\frac{4a}{3b}$; $3a^2+2b^3$; $2a^3b+5ab^2$.

б) $ab+ab+ab+ab$; $b+b+b+c+c$; $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$; $\frac{xyz+xyz+xyz+xyz}{mn+mn+mn}$; $x^2y^3z+x^2y^3z$; $m^2n+m^2n+m^2n+mn^2+mn^2+mn^2+mn^2$.

89. **а)** x^3y^2; 3^4; 5^2m^3n; $3^2a^4b^2-2^3ab^3$.

б) $2\cdot 2\cdot 2aabbbbb$; $aa-bb$; $xxx+yyy$; $2aaaaa-3bb$; $3\cdot 3(m-n)(m-n)(m-n)$.

в) 900; 125; 1; 1; $\frac{1}{8}$; $11\frac{1}{9}$; 0,0001; 0,00001; 6,25; 0,000042875.

90 а) $3m+m^2$; $2ab^2-a^3b$; $\frac{3x^2y}{2z^3}$.

б) $nn + nn + nn$; $bbbcc + bbbcc$; $pqq + pqq + pqq + pqq + ppq + ppq + ppq + ppq + ppq$.

91. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{3} + 10 = \frac{1}{27} + 3\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot\frac{1}{3} + 10 = \frac{1}{27} + \frac{3}{9} + \frac{4}{3} + 10 = \frac{1+9+36}{27} + 10 = \frac{46}{27} + 10 = 1\frac{19}{27} + 10 = 11\frac{19}{27}$;

б) $\frac{1+1-1^2}{1-1+1^2} + \frac{6\cdot 1^3+4}{1-1+1^2} = \frac{1+1-1}{1-1+1} + \frac{6\cdot 1+4}{1-1+1} = \frac{1}{1} + \frac{6+4}{1} = 1 + 10 = 11$;

в) $\{[(5-4)5-3]\,5+5\}\,5-75 = \{[1\cdot 5-3]\,5+5\}\times 5-75 = \{[5-3]\,5+5\}\,5-75 = \{2\cdot 5+5\}\,5-75 = \{10+5\}\,5-75 = 15\cdot 5-75 = 75-75 = 0$;

г) $$\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1+\frac{1}{4}}{\left(1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1\frac{1}{4}}{\left(1\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{49}{36}+\frac{25}{36}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{74}{36}} = \frac{5\cdot 36}{4\cdot 74} = \frac{45}{74}.$$

Примечание. В примерах по алгебре каждое действие можно выполнять отдельно, как это обычно делается в арифметике.

92. а) $9{,}5 > 0$; $-0{,}37 < 0$; $0{,}05 > -5$; $-107\frac{1}{3} < -\frac{1}{3}$.

б) -100; $-22{,}05$; -17; $-1{,}205$; $-1{,}2$; 0; $0{,}125$; $0{,}75$; 101.

в) $|-3| = 3$; $|5{,}7| < |10|$; $|-50{,}7| > |-40{,}7|$; $|0| < |-100|$.

г) $|-300|$; $|-299{,}9|$; $|150{,}3|$; $\left|10\frac{5}{7}\right|$; $|-3{,}65|$; $\left|-\frac{2}{3}\right|$; $|0|$.

93. а) $-3{,}05$; $0{,}15$; $-140\frac{1}{6}$;

б) $98{,}2$; $0{,}68$; $-19{,}25$; $-7\frac{3}{14}$;

в) $\frac{2}{3}$; -10; 0; $-0{,}3$;

г) $-1\frac{1}{3}$; 14; 0; -1; $-1\frac{2}{7}$;

д) 1000; $2{,}25$; $-3{,}375$; $-0{,}000027$; -1; 1; $1{,}4641$.

94. а) Формулы: $12{,}5+9{,}5-5+8{,}5-10{,}5-9$;

$$\frac{12{,}5+9{,}5-5+8{,}5-10{,}5-9}{6}.$$

Ответы: 6 *см* и 1 *см*.

б) Формула: $70+(30-12{,}5)\cdot 15$.

Ответ: 332,5 *т*.

95. В левой и правой частях равенства должны получиться одинаковые числа. Формулировки законов смотрите в § 3.

96. а) $-4{,}894$; $\frac{12}{35}$; б) $16{,}75$; $194{,}96$; в) $115{,}8$; $-3{,}3$.

98. а) $-3\frac{9}{16}$; б) -1; в) $-1\frac{14}{15}$; г) $1{,}09$; д) $-2{,}575$; е) $\frac{2}{5}$; ж) $136\frac{16}{27}$.

99. а) $\frac{1}{3}$; б) 20; в) $3\frac{11}{13}$.

100. Выражения (б) и (е) дробные; все остальные выражения целые. Целые выражения (а) и (ж) — одночлены; целые выражения (в) и (д) — многочлены; целые выражения (г), (з) и (и) могут быть представлены в виде многочленов после выполнения возведений в степень и умножений (см. п. 1 § 13).

101. а) 1) $15-5=10$, $10=10$; $-15-5\neq 10$, $-20\neq 10$; 2) $27:(-3)=-9$, $-9=-9$; $27:\frac{1}{3}\neq -9$; $81\neq -9$; 3) $\frac{15}{10}=\frac{6}{4}$; $\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$; при $m=3$ $\frac{15}{10}\neq\frac{3}{4}$; при $m=1$ $\frac{15}{10}\neq\frac{1}{4}$.

б) Пусть, например, буквы принимают значения: -1; 0; 2; $-\frac{1}{2}$. 1) $[(-1)^3]^2=(-1)^6$, $1=1$; $(0^3)^2=0^6$, $0=0$; $(2^3)^2=2^6$, $64=64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$, $\frac{1}{64}=\frac{1}{64}$; 2) $(-1)^3\cdot(-1)^2=(-1)^5$, $-1=-1$; $0^3\cdot 0^2=0^5$, $0=0$;

$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$, $32 = 32$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$, $-\frac{1}{32} = -\frac{1}{32}$; 3) $(-1)^3 : (-1)^2 = -1$, $-1 = -1$; при $a = 0$ левая часть равенства теряет смысл, т. е. число 0 не принадлежит множеству допустимых значений a в равенстве $a^3 : a^2 = a$; $2^3 : 2^2 = 2$, $2 = 2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$; 4) $[1-(-1)]^2 = 1-2(-1)+(-1)^2$, $4 = 4$; $(1-0)^2 = 1-2\cdot 0+0^2$, $1 = 1$; $(1-2)^2 = 1-2\cdot 2+2^2$, $1 = 1$; $\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1-2\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $2{,}25 = 2{,}25$.

Все эти четыре равенства являются тождествами, так как они верны при любых допустимых значениях входящих в них букв (см. п. 2 § 13).

в) 1) $a+2 < a+3$; правую часть неравенства можно представить так: $(a+2)+1$, откуда видно, что левая часть меньше правой (на 1); 2) $x+1 > x-1$, так как $x-1 = x+1-1-1 = (x+1)-2$; 3) $m-5 < m-4$.

102. а) $8xy - 8x^2y^2 - 9xy^2$; б) $-1\frac{5}{6}a^2bc - \frac{1}{4}abc^2$; в) $-1{,}192mx^2 - 5ny^3$.

103. а) $-3a^2 + 0{,}75ab + \frac{2}{3}a^2 - 1{,}6ab + 3{,}125 = -2\frac{1}{3}a^2 - 0{,}85ab + 3{,}125$;

б) $-3{,}9x - \frac{3}{4}x = -4{,}65x$; $-m^2n - (-39{,}4m^2n) = -m^2n + 39{,}4m^2n = 38{,}4m^2n$;

в) $2\frac{1}{2}a^2b^3c^4(-7ac^3) = -17{,}5a^3b^3c^7$; $-5x^2y \times \left(-\frac{1}{5}x\right) = x^3y$;

г) $mn^3 : (-8mn) = -0{,}125n^2$; $(-2{,}25p^5q^2) : (-3p^2) = 0{,}75p^3q^2$;

д) $-\frac{1}{125}k^6l^{12}$; $0{,}0001a^2b^{14}c^6$.

104. а) 3^6; x^{20}; $\left(\frac{m}{2}\right)^9$; $(-ab)^9$; m^{a+b};

б) 5; a^4; 1; $\left(\frac{n}{3}\right)^6$; $(-ac)^3$; b^{c-a} (где $c > a$);

в) 2^8; m^{69}; $(a^4)^5 = a^{20}$; $-a^{20}$; $\left(\frac{a}{5}\right)^6$; $(pq)^{mn}$.

г) Действия над данными степенями выполнить невозможно, так как основания степеней различны или показатель делимого меньше показателя делителя (см. пп. 6 — 8 § 13); но примеры типа $7^3 \cdot 4^5$ можно вычислить, возведя каждое число в указанную степень и затем перемножив полученные результаты.

105. а) 1) $m + n + m - n = 2m$; 2) $2a^2 + 2b^2$; 3) $4ab$; 4) x^2.

б) 1) $m + n - m + n = 2n$; 2) $4ab$; 3) $2a^2 + 2b^2$; 4) $9x^2 - 10x + 8$.

106. а) 1) $8m - \{5m + [7m - (10m - 2m)]\} = 8m - \{5m + [7m - 10m + 2m]\} = 8m - \{5m + 7m - 10m + 2m\} = 8m - 5m - 7m + 10m - 2m = 4m$; так же следует решать второй и третий примеры; 2) $6x^2 + 8xy$; 3) $7a^m + 3a^n$.

б) $(a^2 - c^2) - (b^2 - 2bc)$; **в)** $a - (b - c + d)$.

107. а) 1) $-\frac{6}{7}m - \frac{6}{7}n + \frac{6}{7}p + 12$; 2) $8a^5x^4 - 10a^6x^6 + 6a^4x^5$; 3) $\frac{5}{2}m^3n^2 - m^3n^3 + \frac{9}{8}m^2n^4$; 4) $-2{,}8a^{n+n+1} + 1{,}2a^{n-1+n+1} - 0{,}8a^{n-2+n+1} = -2{,}8a^{2n+1} + 1{,}2a^{2n} - 0{,}8a^{2n-1}$.

б) 1) $(3x + 7y)(2x - 5y) = 6x^2 - 15xy + 14xy - 35y^2 = 6x^2 - xy - 35y^2$; 2) $a^3 + 1$; 3) $x^4 + x^2y^2 + y^4$; 4) $c^6 + 7c^5 + 15c^4 + 10c^3 - c^2 - c + 1$; **5)** $a^{3m} + b^{3n}$.

108. а) $-0{,}3a + 4{,}2b - 0{,}25c$; **б)** $a + b - c$; **в)** $7x - 3 + 0{,}2y$; **г)** $-\frac{3}{4}x^3 + \frac{12}{25}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{6}{5}y$; **д)** $2 - m^{3m-3m+1} + \frac{1}{23}m^{3m+1-3m+1} = 2 - m + \frac{1}{23}m^2$.

109. **а)** Сначала надо перемножить два каких-нибудь многочлена, оставляя третий, а затем полученное произведение, которое также будет являться многочленом, умножить на третий многочлен.

Ответ: $a^6 - 5a^4 + 8a^3 - 8a + 4$.

б) Согласно порядку действий, начинать нужно с выполнения действий в круглых скобках, но там нет действий, которые можно было бы выполнить. За скобками имеется деление, вычитание и умножение. Сначала выполним деление многочлена на одночлен, потом умножение многочлена на одночлен и, наконец, вычитание. $(9x^2y^3 - 12x^4y^4) : 3x^2y - (2 + 3x^2y) \cdot y^2 = 3y^2 - 4x^2y^3 - (2y^2 + 3x^2y^3) = 3y^2 - 4x^2y^3 - 2y^2 - 3x^2y^3 = y^2 - 7x^2y^3$;

в) $-6 + 2m + 2m^2 + 5 + 5m + 5m^2 - (-3m^2 + 4m + 1) = -1 + 7m + 7m^2 + 3m^2 - 4m - 1 = -2 + 3m + 10m^2$;

г) $\left[5(a^2 - 4b^4) - \frac{2}{5}(5a^2 + 62{,}5ab^2 - 4ab^2 - 50b^4) + \frac{3}{10}a^2 - \frac{18}{25}ab^2\right] : (-0{,}3a) = \left[5a^2 - 20b^4 - 2a^2 - 23{,}4ab^2 + 20b^4 + \frac{3}{10}a^2 - \frac{18}{25}ab^2\right] : (-0{,}3a) = (3{,}3a^2 - 24{,}12ab^2) : (-0{,}3a) = -11a + 80{,}4b^2 = 80{,}4b^2 - 11a$.

110. а) $1 + 4x^2 + 4x^4$;
б) $81m^6 - 90m^3p^2n + 25p^4n^2$;
в) $9a^2b^2 - 1$;
г) $49n^8 - 36m^2$;
д) $y^3 + 6y^2z + 12yz^2 + 8z^3$;
е) $y^9 - 3y^6x^2 + 3y^3x^4 - x^6$;
ж) $a^3 + 8$;
з) $1 - a^3$;
и) $(4 - m^2)(4 + m^2) = 16 - m^4$;
к) $2\frac{7}{9}x^{6m} - 2x^{3m}y^{n-1} + 0{,}36y^{2n-2}$.

111. а) $72 \cdot 68 = (70 + 2)(70 - 2) = 70^2 - 2^2 = 4900 - 4 = 4896$; $(200 - 1)(200 + 1) = 40\,000 - 1 = 39\,999$; $55^2 - 45^2 = (55 + 45) \cdot (55 - 45) = 1000$; $\left(7\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(7\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot 8\frac{2}{3} = 52$; $(0{,}7 - 0{,}3)(0{,}7 + 0{,}3) = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4$.

б) $41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$; $(70 - 1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 + 1 = 4900 - 140 + 1 = 4761$; $(100 + 5)^2 = 10\,000 + 1000 + 25 = 11\,025$; $(100 - 2)^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9604$; $7{,}1^2 = (7 + 0{,}1)^2 = 49 + 2 \cdot 7 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 = 50{,}41$.

в) $(57 + 43)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$; $(11 - 1)^3 = 10^3 = 1000$.

112. а) $a^2 + 6a + 9 - (a^2 + 4a + 4) = a^2 + 6a + 9 - a^2 - 4a - 4 = 2a + 5$;

б) $x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 -$

$-1^3) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 9x^2 + 9x + 9;$

в) $a^2 - 9^2 - (a^2 - 10^2) = a^2 - 81 - a^2 + 100 = 19;$

г) $x^3 - 2^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^3 - 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 3x^2 - 3x - 7.$

113. а) $6y - (2 - 3y) + 15 = 14;$ $6y - 2 + 3y + 15 = 14;$ $9y + 13 = 14;$ $9y = 14 - 13;$ $9y = 1;$ $y = \frac{1}{9}.$

б) $x^2 + 10x + 25 - (x^2 - 2x + 1) = 48;$ $x^2 + 10x + 25 - x^2 + 2x - 1 = 48;$ $12x + 24 = 48;$ $12x = 48 - 24;$ $12x = 24;$ $x = 24 : 12;$ $x = 2.$

в) $4z^2 - 4z + 1 - 7(z^2 - 9) + 3(z^2 + 4z + 4) = 28;$ $4z^2 - 4z + 1 - 7z^2 + 63 + 3z^2 + 12z + 12 = 28;$ $8z + 76 = 28;$ $8z = 28 - 76;$ $8z = -48;$ $z = -48 : 8;$ $z = -6.$

114. а) $4x(y - 2z);$

б) $3a^3b^2(4a^3b^2 - 1);$

в) $6m^4n^3(9m^4n^2 - 7m - 4n^4);$

г) $-5x^3y^5(3x^2y^2 - y + 2x^6);$

д) $m(q - p) - (p - q) = m(q - p) + (q - p) = (q - p)(m + 1);$

е) $p(1 - a + a^2) - (1 - a + a^2) = (1 - a + a^2)(p - 1).$

115. а) $a^2 + 2a \cdot 2b + (2b)^2 = (a + 2b)^2;$

б) $(ax - b)^2;$

в) $[3(3x + y)]^2 - 2 \cdot [3(3x + y)] \cdot 1 + 1^2 = [3(3x + y) - 1]^2 = (9x + 3y - 1)^2;$

г) $-x^2 + 2xy - y^2 = -(x^2 - 2xy + y^2) = -(x - y)^2;$

д) $1 - m^2n^2 = 1^2 - (mn)^2 = (1 - mn)(1 + mn);$

е) $(6a^2b)^2 - (7x^2)^2 = (6a^2b - 7x^2)(6a^2b + 7x^2);$

ж) $[(p + q) - (k + l)]\,[(p + q) + (k + l)] = (p + q - k - l)(p + q + k + l);$

з) $x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1);$

и) $n^3 - 2^3 = (n - 2)(n^2 + 2n + 4);$

к) $-a^3 - b^3 = -(a^3 + b^3) = -(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(ab - a^2 - b^2);$

л) $(p+q)^3 - 1^3 = [(p + q) - 1]\,[(p+q)^2 + (p+q) \cdot 1 + 1^2] = (p + q - 1) \cdot (p^2 + 2pq + q^2 + p + q + 1);$

м) $(3p)^3 - 3 \cdot (3p)^2 y + 3 \cdot 3py^2 - y^3 = (3p - y)^3;$

н) $y^3 + 3y^2 \cdot 1 + 3y \cdot 1^2 + 1^3 = (y + 1)^3.$

116. а) $(xy + yz) + (x + z) = y(x + z) + (x + z) = (x + z) \times (y + 1);$

б) $m(p - q) + nq - np = m(p - q) - (np - nq) = m(p - q) - n(p - q) = (p - q)(m - n);$

в) $ab + 1 + a + b = (ab + a) + (1 + b) = a(b + 1) + (1 + b) = (b + 1)(a + 1)$;

г) $a(x - y) - b(y - x) = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$;

д) $(56a^2 - 40ab) + (63ac - 45bc) = 8a(7a - 5b) + 9c(7a - 5b) = (7a - 5b)(8a + 9c)$;

е) $(ax^2 - bx^2) - (ax - bx) + (a - b) = x^2(a - b) - x(a - b) + (a - b) = (a - b)(x^2 - x + 1)$.

117. а) $y(1 - y^2) = y(1 - y)(1 + y)$;

б) $4 - m^2 - 2mn - n^2 = 4 - (m^2 + 2mn + n^2) = 2^2 - (m + n)^2 = [2 - (m + n)][2 + (m + n)] = (2 - m - n)(2 + m + n)$;

в) $1 - (p^2 - 2pq + q^2) = 1^2 - (p - q)^2 = (1 - p + q)(1 + p - q)$;

г) $(k^2)^2 - (l^2)^2 = (k^2 - l^2)(k^2 + l^2) = (k - l)(k + l)(k^2 + l^2)$;

д) $(mp - np) - (m^2 - 2mn + n^2) = p(m - n) - (m - n)^2 = (m - n)[p - (m - n)] = (m - n)(p - m + n)$;

е) $(a^5 - a^3) + (a^2 - 1) = a^3(a^2 - 1) + (a^2 - 1) = (a^2 - 1) \times (a^3 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1) = (a - 1)(a + 1)^2(a^2 - a + 1)$;

ж) $(x + a)^3 - (a - x)^3 = [(x + a) - (a - x)] \cdot [(x + a)^2 + (x + a)(a - x) + (a - x)^2] = (x + a - a + x)(x^2 + 2ax + a^2 + a^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2) = 2x(x^2 + 3a^2)$;

з) $(2a^3b^2)^2 - (a^6 + b^4)^2 = [2a^3b^2 - (a^6 + b^4)][2a^3b^2 + (a^6 + b^4)] = (2a^3b^2 - a^6 - b^4)(2a^3b^2 + a^6 + b^4) = -(a^6 - 2a^3b^2 + b^4)[(a^3)^2 + 2a^3b^2 + (b^2)^2] = -(a^3 - b^2)^2(a^3 + b^2)^2$;

и) $(c^2 - a^2 - b^2)^2 - (2ab)^2 = [(c^2 - a^2 - b^2) - 2ab] \cdot [(c^2 - a^2 - b^2) + 2ab] = (c^2 - a^2 - 2ab - b^2)(c^2 - a^2 + 2ab - b^2) = [c^2 - (a^2 + 2ab + b^2)] \cdot [c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)] = [c^2 - (a + b)^2][c^2 - (a - b)^2] = [c - (a + b)][c + (a + b)] \cdot [c - (a - b)][c + (a - b)] = (c - a - b)(c + a + b)(c - a + b)(c + a - b)$;

к) $(x^3 + y^3) + (x^2 + 2xy + y^2) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x + y)^2 = (x + y)[(x^2 - xy + y^2) + (x + y)] = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2 + x + y)$;

л) $(m^3 - m^2n) - (mn^2 - n^3) = m^2(m - n) - n^2(m - n) = (m - n)(m^2 - n^2) = (m - n)(m - n)(m + n) = (m - n)^2(m + n)$;

м) $5x(p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3) = 5x(p - q)^3$.

118. а) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = (x^2 - 3x) - (2x - 6) = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$;

б) $a^2 + a - 12 = a^2 + 4a - 3a - 12 = (a^2 + 4a) - (3a + 12) = a(a + 4) - 3(a + 4) = (a + 4)(a - 3)$;

в) $m^2 + 2mn - 15n^2 = m^2 + 2mn + n^2 - n^2 - 15n^2 = (m^2 + 2mn + n^2) - 16n^2 = (m + n)^2 - (4n)^2 = [(m + n) - 4n] \times [(m + n) + 4n] = (m + n - 4n)(m + n + 4n) = (m - 3n) \times (m + 5n)$;

г) $3p^2 + 27p + 54 = 3(p^2 + 9p + 18) = 3(p^2 + 3p + 6p + 18) = 3[(p^2 + 3p) + (6p + 18)] = 3[p(p + 3) + 6(p + 3)] = 3[(p + 3)(p + 6)] = 3(p + 3)(p + 6)$.

Примечание. Эти четыре примера даны только для ознакомления; применяемые в них приемы разложения на множители трудны, поэтому уметь решать примеры такого типа здесь необязательно; в дальнейшем (см. п. 6 § 21) эти приемы станут более понятными.

119. а) $(a^2 - b^2):(a - b)$. Представим делимое в виде произведения двух многочленных множителей: $(a + b)(a - b)$. Чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один сомножитель, оставив другой сомножитель без изменения (см. п. 6 § 3). Разделив по этому правилу множитель $a - b$ на делитель $a - b$, получим в итоге $a + b$. Получили: $(a^2 - b^2):(a - b) = a + b$. Аналогично можно получить и остальные формулы деления.

б) Но можно каждую из формул сокращенного деления получить из соответствующей формулы сокращенного умножения. Поскольку $a^2 - b^2$ есть произведение сомножителей $a - b$ и $a + b$, то при делении произведения $a^2 - b$ на один из сомножителей получим другой сомножитель: $(a^2 - b^2):(a + b) = a - b$.

в) $(a^3 + b^3):(a + b) = a^2 - ab + b^2$.

г) $(a^3 - b^3):(a - b) = a^2 + ab + b^2$.

д) $(a^3 + b^3):(a^2 - ab + b^2) = a + b$.

е) $(a^3 - b^3):(a^2 + ab + b^2) = a - b$.

120. По формулам деления (см. упражнение 119) получаем:

а) $[1^2 - (2x)^2]:(1 - 2x) = 1 + 2x$;

б) $[5^2 - (mn)^2]:(5 + mn) = 5 - mn$;

в) $[(2a)^3 + 3^3]:(2a + 3) = 4a^2 - 6a + 9$;

г) $[(p^3)^3 - (q^2)^3]:(p^3 - q^2) = (p^3)^2 + p^3q^2 + (q^2)^2 = p^6 + p^3q^2 + q^4$;

д) $[(3y)^3 + 2^3]:[(3y)^2 - 3y \cdot 2 + 2^2] = 3y + 2$;

е) $\left[\left(\frac{1}{2}b\right)^3 - 1^3\right]:\left[\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{2}b \cdot 1 + 1^2\right] = \frac{1}{2}b - 1$.

В остальных примерах разложим делимое на множители по формулам умножения и разделим степени с одинаковыми основаниями:

ж) $[(3c)^2 + 2\cdot 3c\cdot 5 + 5^2] : (3c + 5) = (3c + 5)^2 : (3c + 5) = 3c + 5$;

з) $(z - 6)^2 : (z - 6) = z - 6$;

и) $(a + 1)^3 : (a + 1) = (a + 1)^2$;

к) $(x - 1)^3 : (x - 1) = (x - 1)^2$;

л) $(d + 2)^3 : (d + 2)^2 = d + 2$;

м) $(1 - x)^3 : (1 - x)^2 = 1 - x$.

121. **а)** $(10x^2 - 10y^2) : (5x - 5y) = [10(x - y)(x + y)] : [5(x - y)] = 2(x + y)$;

б) $[12m(a^3 - b^3)] : [3(a^2 + ab + b^2)] = [12m(a - b)(a^2 + ab + b^2)] : [3(a^2 + ab + b^2)] = 4m(a - b)$;

в) $[y(m^2 + 2mn + n^2)] : [7(m^2 - n^2)] = [y(m+n)^2] : [7(m - n)(m + n)] = [y(m + n)] : [7(m - n)] = \frac{y(m + n)}{7(m - n)}$;

г) $[3(p^2 - 2pq + q^2)] : (p - q)^3 = [3(p - q)^2] : [(p - q)^2(p - q)] = 3 : (p - q) = \frac{3}{p - q}$. (В этих примерах делимое и делитель разделили на их общие множители; см. основное свойство частного в п. 2 §4.)

122. **а)** Возьмем произвольное натуральное число и обозначим его через n; тогда последующее за ним в натуральном ряду (см. п. 1 § 1) число будет $n + 1$. Произведение их $n(n + 1)$ сложим с большим из них $(n + 1)$ и получим сумму: $n(n + 1) + (n + 1)$, которую разложим на множители вынесением за скобки общего двучленного множителя: $(n + 1)(n + 1) = (n + 1)^2$, что и требовалось доказать. Самостоятельно повторите доказательство для случая такого обозначения двух последовательных натуральных чисел: $(n - 1)$ и n.

б) Четное число в общем виде обозначается через $2n$, где n — любое натуральное число; последующее за ним четное число будет $2n + 2$. Их произведение равно $2n(2n + 2) = 2n\cdot 2(n + 1) = 4n(n + 1)$. Это произведение содержит множитель 4, поэтому оно делится на 4; кроме того, одно из двух последовательных натуральных чисел n и $n + 1$ обязательно будет четным и поэтому делится на 2, поэтому все произведение разделится на 8.

123.
$$\frac{5na^3 - 5nb^3}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} = \frac{5n(a^3 - b^3)}{(a - b)^3} =$$
$$= \frac{5n(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)(a - b)^2} = \frac{5n(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)^2};$$

$$\frac{5\cdot(-0{,}35)\cdot\left[\left(1\frac{2}{3}\right)^2+1\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)+\left(-\frac{6}{7}\right)^2\right]}{\left[1\frac{2}{3}-\left(-\frac{6}{7}\right)\right]^2};$$

1) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{9}=2\frac{7}{9};$

2) $\left(-\frac{6}{7}\right)^2=-\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{36}{49};$

3) $1\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=-\frac{5\cdot 6}{3\cdot 7}=-\frac{10}{7}=-1\frac{3}{7};$

4) $2\frac{7}{9}-1\frac{3}{7}+\frac{36}{49}=2\frac{343}{441}-1\frac{189}{441}+\frac{324}{441}=$
$=1\frac{343-189+324}{441}=1\frac{478}{441}=2\frac{37}{441};$

5) $-0{,}35=-\frac{35}{100}=-\frac{7}{20};\ 5\cdot\left(-\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{37}{441}=$
$=-\frac{5\cdot 7\cdot 919}{20\cdot 441}=-\frac{919}{4\cdot 63};$

6) $1\frac{2}{3}-\left(-\frac{6}{7}\right)=1\frac{2}{3}+\left(+\frac{6}{7}\right)=1\frac{2}{3}+\frac{6}{7}=1\frac{14}{21}+$
$+\frac{18}{21}=1\frac{32}{21}=2\frac{11}{21};$

7) $\left(2\frac{11}{21}\right)^2=\left(\frac{53}{21}\right)^2=\frac{53}{21}\cdot\frac{53}{21}=\frac{53\cdot 53}{21\cdot 21};$

8) $-\frac{919}{4\cdot 63}:\frac{53\cdot 53}{21\cdot 21}=-\frac{919\cdot 21\cdot 21}{4\cdot 63\cdot 53\cdot 53}=-\frac{6433}{11236}.$

124. Данные дроби не имеют смысла при: **а)** $x=1$; **б)** $x=5$; **в)** $x=-1$; **г)** $x=2$ и $x=-2$; **д)** $x=3$ и $x=-3$; **е)** $x=-a$ и $x=b$. Эти значения x исключаются из множества допустимых значений x в данных дробях (см. п. 1 § 15).

125. а) $-\frac{5x}{7y};\ \frac{10a^2b}{17pq};\ -\frac{6mn^3}{11abc^2};$

б) $-\frac{x+y}{a};\ -\frac{x-a}{a+b};\ -\frac{n-m^2}{m-n}$ или $-\frac{m^2-n}{n-m}.$

126. а) $\frac{3b^2y^3}{4ax}$; б) $\frac{2x(5x-y)}{3y(5x-y)}=\frac{2x}{3y}$; **в)** $\frac{6a^2(7a-5b)}{5b^2(5b-7a)}=$
$=-\frac{6a^2(7a-5b)}{5b^2(7a-5b)}=-\frac{6a^2}{5b^2}$; **г)** $\frac{(a+1)^3}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a+1)^2}{a(a-1)};$

д) $\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{2(x+y)^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{2(x+y)}$; **е)** $\frac{(a-b)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{a-b}{(a+b)(a^2+b^2)};$$

ж) $\frac{3c^2(a+b)-3b^2(a+b)}{6c^2(a+b)-6b^2(a+b)}=\frac{(a+b)(3c^2-3b^2)}{(a+b)(6c^2-6b^2)}=$
$=\frac{3(c^2-b^2)}{6(c^2-b^2)}=\frac{1}{2}$; з) $\frac{(x^3-x^2)-(x-1)}{x(x^4-2x^2+1)}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x(x^2-1)^2}=$
$=\frac{(x-1)(x^2-1)}{x(x^2-1)^2}=\frac{x-1}{x(x^2-1)}=\frac{x-1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$.

127. а) $\frac{5a^2b+c^3+20a^4b^4}{10a^3b^2}$.

б) Общий знаменатель: $(1+a)(1-a)$.

Ответ: $\frac{4}{1+a}$.

в) В знаменателе второй дроби и перед дробью переменим знаки на противоположные (см. пример 2 в п. 6 § 15).

Ответ: $\frac{a-b}{a+b}$.

г) Знаменатель первой дроби $(a-b)(a+b)$; общий знаменатель: $(a+b)^2(a-b)^2$; дополнительные множители дробей: $(a+b)(a-b)$, $(a-b)^2$ и $(a+b)^2$.

Ответ: $\frac{a^2-4ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$ или $\frac{a^2-4ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}$.

д) Общий знаменатель дробей равен разности кубов чисел $2a$ и $3b$, а именно: $(2a-3b)\cdot(4a^2+6ab+9b^2)$; дополнительные множители дробей: $4a^2+6ab+9b^2$, $2a-$ $-3b$ и 1.

Ответ: $\frac{18b^2}{8a^3-27b^3}$.

е) Третий знаменатель после разложения на множители способом группировки принимает вид: $(a-c)(a-x)$; во втором знаменателе $2(c-a)$ надо переменить знак у двучленного множителя, отчего переменится знак и всего произведения в знаменателе второй дроби (см. п. 4 § 15), поэтому переменим знак и в числителе второй дроби, т. е. вместо $+\frac{3c-a}{2(c-a)}$ получим $+\frac{a-3c}{2(a-c)}$. Общий знаменатель дробей: $6(a-c)\cdot(a-x)$; дополнительные множители дробей: $2(a-c)$, $3(a-x)$ и 6, которые лучше сразу записать так: $2a-2c$, $3a-3x$, 6. Получим:

$$\frac{(a+2x)(2a-2c)-(3c-a)(3a-3x)+6(a^2-cx)}{6(a-c)(a-x)}.$$

Так как разложить на множители полученный числитель сразу не удается, то выполним умножения; после приведения подобных членов в полученном числителе дробь принимает вид:

$\frac{11a^2-11ac+ax-cx}{6(a-c)(a-x)}$; разложив числитель на множители способом группировки, получим:

$$\frac{(a-c)(11a+x)}{6(a-c)(a-x)}=\frac{11a+x}{6(a-x)}.$$

ж) Разложим знаменатели на множители: первый $(a+n)\cdot(a^2-an+n^2)$, второй $n(a^2-an+n^2)$, третий $n(a+n)$; общий знаменатель $n(a+n)(a^2-an+n^2)$; после умножения числителей на дополнительные множители дробь принимает вид:

$$\frac{an-2n^2-a^2+n^2-a^2+an-n^2}{n(a+n)(a^2-an+n^2)}=\frac{2an-2a^2-2n^2}{n(a+n)(a^2-an+n^2)}=$$
$$=\frac{-2(a^2-an+n^2)}{n(a+n)(a^2-an+n^2)}=-\frac{2}{n(a+n)}.$$

з) Знаменатели дробей представляют собою произведения, некоторые сомножители которых отличаются только знаками. Если сравнить знаменатели первой и второй дробей, то увидим, что два из их сомножителей $m-n$ и $n-m$ отличаются только знаками. Переменив знак множителя $n-m$ на противоположный, получим у второй дроби такой знаменатель: $(m-n)(n-p)$. От этой операции переменился и знак знаменателя (произведения; см. п. 4 § 15), поэтому переменим знак и перед дробью. Если сравнить знаменатель третьей дроби со знаменателями первых двух дробей, то увидим, что у обоих сомножителей $p-m$ и $p-n$ знаменателя третьей дроби знак надо переменить, от чего знак знаменателя (произведения) не изменится и поэтому не нужно изменять знак перед третьей дробью. Получим:

$$\frac{1}{(m-n)(m-p)}-\frac{1}{(m-n)(n-p)}+\frac{1}{(m-p)(n-p)}.$$

Общий знаменатель дробей: $(m-n)(m-p)(n-p)$; дополнительные множители дробей: $n-p$, $m-p$ и $m-n$. Окончательно получаем:

$$\frac{0}{(m-n)(m-p)(n-p)}=0.$$

128. а) Перемножая дроби, разложим их знаменатели на множители, чтобы сократить полученную дробь:

$$\frac{a(b+c)\cdot b(c-b)}{(b-c)^2\cdot(b+c)^2}=\frac{ab(c-b)}{(c-b)^2(b+c)}.$$

Здесь мы заменили $(b-c)^2$ тождественно равным ему $(c-b)^2$; хотя основания степеней $b-c$ и $c-b$ противоположных знаков, однако в квадрате они равны, например: $(-5)^2 = 25$ и $(+5)^2 = 25$.

Ответ: $\frac{ab}{c^2-b^2}$.

б) Числитель первой дроби есть неполный квадрат суммы и на множители не разлагается. Знаменатель — куб суммы двух чисел x и y. В этом убедиться проще всего раскрытием скобок: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$, но можно и так: $x^3 + 3xy(x+y) + y^3 = (x^3 + y^3) + 3xy(x + y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy(x+y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2 + 3xy) = (x+y)(x^2 + 2xy + y^2) = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)^3$; первый путь короче и выгоднее. Оба члена второй дроби разлагаются на множители по формулам умножения. Получаем:

$$\frac{(x^2+xy+y^2)(x-y)(x+y)}{(x+y)^3(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

в) Так как оба члена первой дроби в таком виде не поддаются разложению на множители, то раскроем в них скобки и применим способ группировки:

$$\frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2-ax+cx-ac}\cdot\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2} = \frac{x(x+a)+b(x+a)}{x(x-a)+c(x-a)}\cdot\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2} =$$

$$= \frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x+c)}\cdot\frac{(x-c)(x+c)}{(x-a)(x+a)} = \frac{(x+a)(x+b)(x-c)(x+c)}{(x-a)(x+c)(x-a)(x+a)} =$$

$$= \frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)(x-a)} = \frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}.$$

г) Рассмотрев числитель и знаменатель первой дроби, замечаем, что там имеются квадрат суммы и квадрат разности двух чисел x и y:

$$\frac{(x^2+2xy+y^2)-z^2}{z^2-(x^2-2xy+y^2)} : \frac{x+y+z}{y+z-x} = \frac{(x+y)^2-z^2}{z^2-(x-y)^2} : \frac{x+y+z}{y+z-x} =$$

$$= \frac{(x+y-z\ (x+y+z)}{(z-x+y)(z+x-y)} : \frac{x+y+z}{y+z-x} =$$

$$= \frac{(x+y-z)(x+y+z)(y+z-x)}{(z-x+y)(z+x-y)(x+y+z)} = \frac{x+y-z}{x+z-y}.$$

д) В числителе первой дроби член $-3x^2$ заменим равной ему суммой двух членов $-2x^2$ и $-x^2$, чтобы применить формулы квадрата разности двух чисел x^2 и 1, а потом — разности квадратов: $x^4 - 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 = [(x^2)^2 - 2x^2 + 1] - x^2 = (x^2-1)^2 - x^2 = (x^2 - 1 - x)\times$

$\times (x^2 - 1 + x)$. Второй из полученных сомножителей сократится потом с числителем второй дроби, который после выполнения деления дробей перейдет в знаменатель. Знаменатель первой дроби есть разность кубов чисел x и 3, а знаменатель второй — неполный квадрат суммы чисел x и 3 и также сократится:

$$\frac{(x^2-x-1)(x^2+x-1)}{(x-3)(x^2+3x+9)} : \frac{x^2+x-1}{x^2+3x+9} =$$
$$= \frac{(x^2-x-1)(x^2+x-1)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x^2+3x+9)(x^2+x-1)} = \frac{x^2-x-1}{x-3}.$$

130. а) Так как в круглых скобках нет действий, которые можно было бы выполнить, то выполняем действие в квадратных скобках — возведение дроби в квадрат (см. п. 8 § 15). Вне квадратных скобок имеются два действия: возведение дроби в степень и умножение; в таком порядке и следует выполнять эти действия:

$$\frac{(a+x)^2}{4x^2}\cdot\left[-\frac{(a-x)^2}{4x^2}\right] = -\frac{(a+x)^2\cdot(a-x)^2}{4x^2\cdot 4x^2} =$$
$$= -\frac{(a+x)(a+x)(a-x)(a-x)}{16x^4} = -\frac{(a^2-x^2)(a^2-x^2)}{16x^4} =$$
$$= -\frac{(a^2-x^2)^2}{16x^4}.$$

б) Данное алгебраическое выражение представляет собой сумму дроби и дробного выражения, в котором и нужно сначала выполнить действия, чтобы представить дробное выражение в виде тождественной ему дроби. Итак, возьмем отдельно второе слагаемое:

$$\frac{\frac{2}{mn}}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2}{mn}}{\left(\frac{n+m}{mn}\right)^2} = \frac{\frac{2}{mn}}{\frac{(n+m)^2}{m^2n^2}} =$$
$$= \frac{2\cdot m^2n^2}{mn\cdot(n+m)^2} = \frac{2mn}{(n+m)^2}.$$

Теперь сложим первое слагаемое с полученной дробью:

$$\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} + \frac{2mn}{(n+m)^2} = \frac{m^2+n^2+2mn}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2}{(m+n)^2} = 1.$$

в) $$\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{2}{p+q}\cdot\frac{q+p}{pq}\right] : \frac{(p+q)^2}{pq} = \left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{2}{pq}\right]:$$
$$: \frac{(p+q)^2}{pq} = \frac{q^2+p^2+2pq}{p^2q^2} : \frac{(p+q)^2}{pq} = \frac{(p+q)^2\cdot pq}{p^2q^2\cdot(p+q)^2} = \frac{1}{pq}.$$

г) $\left[\frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{x+y}{x-y}\right]:\left[\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\right]=$

$$=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{(x-y)(x+y)}:\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)-(x^3-y^3)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+x^2+2xy+y^2}{(x-y)(x+y)}:\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)-(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=$$

$$=\frac{2x^2+2xy+2y^2}{(x-y)(x+y)}:\frac{(x-y)[(x^2-xy+y^2)-(x^2+xy+y^2)]}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=$$

$$=\frac{2(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}:\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2-x^2-xy-y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=$$

$$=\frac{2(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x-y)(-2xy)}=$$

$$=\frac{2[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]}{-2xy(x-y)^2}=\frac{(x^2+y^2)^2-(xy)^2}{-xy(x-y)^2}=$$

$$=-\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2}{xy(x-y)^2}=-\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{xy(x-y)^2}.$$

д) $\left(\frac{1}{2c-d}-\frac{3d}{4c^2-d^2}-\frac{2}{2c+d}\right):\left(\frac{4c^2+d^2}{4c^2-d^2}+\frac{4c^2-d^2}{4c^2-d^2}\right)=$

$$=\left[\frac{1}{2c-d}-\frac{3d}{(2c-d)(2c+d)}-\frac{2}{2c+d}\right]:\frac{4c^2+d^2+4c^2-d^2}{4c^2-d^2}=$$

$$=\frac{2c+d-3d-2(2c-d)}{(2c-d)(2c+d)}:\frac{8c^2}{4c^2-d^2}=\frac{2c+d-3d-4c+2d}{(2c-d)(2c+d)}:$$

$$:\frac{8c^2}{(2c-d)(2c+d)}=\frac{-2c\cdot(2c-d))(2c+d)}{(2c-d)(2c+d)\cdot 8c^2}=-\frac{1}{4c}.$$

Примечание. Обратите внимание на то, что в условии примера во вторых скобках сложение дроби и 1 можно сделать без разложения знаменателя на множители.

е) $\left[\frac{1}{(m+n)^2}\cdot\frac{n^2+m^2}{m^2n^2}+\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\frac{n+m}{mn}\right]m^2n^2=$

$$=\left[\frac{m^2+n^2}{m^2n^2(m+n)^2}+\frac{2(m+n)}{mn(m+n)^3}\right]m^2n^2=\left[\frac{m^2+n^2}{m^2n^2(m+n)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{mn(m+n)^2}\right]m^2n^2=\frac{m^2+n^2+2mn}{m^2n^2(m+n)^2}\cdot m^2n^2=$$

$$=\frac{(m+n)^2}{m^2n^2(m+n)^2}\cdot m^2n^2=\frac{m^2n^2}{m^2n^2}=1.$$

ж) В этом примере удобно предварительно разложить на множители знаменатель второй дроби; применим способ группировки: $x^3-ax^2+a^2x-a^3=(x^3-ax^2)+(a^2x-a^3)=$ $=x^2(x-a)+a^2(x-a)=(x-a)(x^2+a^2)$.

$$\left[\frac{a^2 - ax}{x(a^2 + x^2)} - \frac{2a^2}{(x - a)(x^2 + a^2)}\right] \cdot \frac{a^2 - a(x - 1) - x}{a^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - ax)(x - a) - 2a^2x}{x(a^2 + x^2)(x - a)} \cdot \frac{a^2 - ax + a - x}{a^2} =$$

$$= \frac{a^2x - a^3 - ax^2 + a^2x - 2a^2x}{x(a^2 + x^2)(x - a)} \cdot \frac{(a^2 - ax) + (a - x)}{a^2} =$$

$$= \frac{-a^3 - ax^2}{x(x^2 + a^2)(x - a)} \cdot \frac{a(a - x) + (a - x)}{a^2} = \frac{-a(a^2 + x^2)}{x(a^2 + x^2)(x - a)} \times$$

$$\times \frac{(a - x)(a + 1)}{a^2} = \frac{-a(a^2 + x^2)(a - x)(a + 1)}{x(a^2 + x^2)(x - a)\,a^2} =$$

$$= \frac{-(a - x)(a + 1)}{ax(x - a)} = \frac{(a - x)(a + 1)}{ax(a - x)} = \frac{a + 1}{ax}.$$

Примечание. Чтобы сделать последнее сокращение дроби, можно переменить знак минус перед числителем на плюс и при этом переменить знак у одного из множителей в знаменателе на противоположный: вместо $x - a$ взять $a - x$, от чего переменится знак всего знаменателя, а величина дроби не изменится (см. п 4 § 15)

з) Последним действием в данном примере будет умножение двух дробей; предварительно разложим отдельно их многочленные знаменатели на множители, чтобы подготовить к последующему сокращению. Второй знаменатель: $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b) = (a - b)[(a - b)^2 + 3ab] = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, т. е. получили разность кубов. Аналогично можно разложить и первый знаменатель, но можно сделать и так: $(a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; этот же прием можно применить и к знаменателю второй дроби.

Будем решать этот пример по частям. Выполним действия в числителе первой дроби:

$$\left[\frac{(a + b)^2}{4ab} - 1\right]\left[\frac{(a - b)^2}{4ab} + 1\right] = \frac{(a + b)^2 - 4ab}{4ab} \cdot \frac{(a - b)^2 + 4ab}{4ab} =$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4ab} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}{4ab} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4ab} \times$$

$$\times \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab} = \frac{(a - b)^2}{4ab} \cdot \frac{(a + b)^2}{4ab} = \frac{(a - b)^2(a + b)^2}{16a^2b^2}.$$

Чтобы записать деление полученного выражения на знаменатель первой дроби, надо обязательно еще раз отдельно переписать это выражение:

$$\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{16a^2b^2} : [(a+b)(a^2-ab+b^2)] =$$

$$= \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{16a^2b^2(a+b)(a^2-ab+b^2)} = \frac{(a-b)^2(a+b)}{16a^2b^2(a^2-ab+b^2)}.$$

Такой вид после тождественного преобразования получает первая дробь, а теперь отдельно преобразуем вторую дробь данного примера:

$$\frac{[(a+b)^2-ab]\,[(a-b)^2+ab]}{(a-b)^3+3ab(a-b)} = \frac{(a^2+2ab+b^2-ab)(a^2-2ab+b^2+ab)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} =$$

$$= \frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}.$$

Перемножив полученные дроби, найдем выражение, тождественно равное всему данному примеру:

$$\frac{(a-b)^2(a+b)}{16a^2b^2(a^2-ab+b^2)} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} =$$

$$= \frac{(a-b)^2(a+b)(a^2-ab+b^2)}{16a^2b^2(a^2-ab+b^2)(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{16a^2b^2} = \frac{a^2-b^2}{16a^2b^2}.$$

131. а) $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right) : \left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right) =$

$$= \left[\frac{(m+n)^2}{m+n}-\frac{4mn}{m+n}\right] : \left[\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m-n}-\frac{2mn}{(m-n)(m+n)}\right] =$$

$$= \frac{(m+n)^2-4mn}{m+n} : \frac{m(m-n)+n(m+n)-2mn}{(m-n)(m+n)} =$$

$$= \frac{m^2+2mn+n^2-4mn}{m+n} : \frac{m^2-mn+mn+n^2-2mn}{(m-n)(m+n)} =$$

$$= \frac{m^2-2mn+n^2}{m+n} : \frac{m^2-2mn+n^2}{(m-n)(m+n)} =$$

$$= \frac{(m-n)^2}{m+n} : \frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{(m-n)^2\cdot(m-n)(m+n)}{(m+n)\cdot(m-n)^2} = m-n.$$

Итак, выражение, стоящее в левой части, тождественно равно $m-n$, а по условию и правая часть есть $m-n$. Получили: $m-n=m-n$; тождество верно, что и требовалось доказать.

б) Более сложное выражение находится в левой части доказываемого тождества, поэтому возьмем левую часть отдельно и тождественно преобразуем ее — выполним указанные там действия:

$$\left(\frac{3c}{9-3x-3c+cx}-\frac{1}{c^2-9}:\frac{x-c}{3c^2+9c}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3c} =$$

$$= \left[\frac{3c}{(9-3x)-(3c-cx)}-\frac{1}{(c-3)(c+3)}:\frac{x-c}{3c(c+3)}\right]\cdot\frac{x^3-27}{3c} =$$

$$= \left[\frac{3c}{3(3-x)-c(3-x)} - \frac{3c(c+3)}{(c-3)(c+3)(x-c)}\right]\cdot\frac{x^3-27}{3c} =$$

$$= \left[\frac{3c}{(3-x)(3-c)} - \frac{3c}{(c-3)(x-c)}\right]\cdot\frac{x^3-27}{3c} = \left[\frac{3c}{(3-x)(3-c)} +\right.$$

$$\left.+\frac{3c}{(3-c)(x-c)}\right]\cdot\frac{x^3-27}{3c} = \frac{3c(x-c)+3c(3-x)}{(3-x)(3-c)(x-c)}\cdot\frac{x^3-27}{3c} =$$

$$= \frac{3c[(x-c)+(3-x)]}{(3-x)(3-c)(x-c)}\cdot\frac{x^3-27}{3c} = \frac{3c(x-c+3-x)}{(3-x)(3-c)(x-c)}\times$$

$$\times\frac{x^3-27}{3c} = \frac{3c(3-c)}{(3-x)(3-c)(x-c)}\cdot\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3c} =$$

$$= \frac{3c(x-3)(x^2+3x+9)}{(3-x)(x-c)3c} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(c-x)} =$$

$$= \frac{x^2+3x+9}{c-x}.$$

Здесь переменили знаки на противоположные у двух сомножителей $(3-x)$ и $(x-c)$ произведения, стоящего в знаменателе полученной дроби, от чего знак всего знаменателя не изменился, а поэтому не нужно менять знак в числителе дроби или перед дробью. Итак, левая часть тождественно равна тому же выражению, которое стоит в правой части доказываемого тождества, поэтому верность тождества доказана.

132. **б)** (1,5; —3,6), (5; —0,9), (0; —3) и т. д.

в) (2; —3,9), (4; 0), (5,5; 2,6), (—3,75; —3,75) и т. д.

г) Если две точки координатной плоскости симметричны относительно оси абсцисс, то их абсциссы равны, а ординаты — противоположны (отличаются только знаками). Если две точки симметричны относительно оси ординат, то их ординаты равны, а абсциссы — противоположные числа.

133. Указанные точки принадлежат геометрическим местам точек, равноудаленных от: **а)** положительных координатных полуосей (лежат на биссектрисе угла, образованного этими полуосями); **б)** отрицательных координатных полуосей (на биссектрисе угла между ними).

Точки лежат на биссектрисе прямого угла; **в)** заключающего второй квадрант (четверть) координатной плоскости; **г)** заключающего четвертый квадрант.

134. **а)** (—3,5; 0), (6,1; 0), (0; 3,6), (0; —10,7), (5; 5), (3,3; —3,3), (—4,9; 4,9), (—125; —125).

б) Все четыре точки принадлежат окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, так как они удалены от начала координат на $\sqrt{2}$ (на гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными 1). Кроме того, каждая из четырех данных точек лежит еще на биссектрисе одного из четырех прямых углов, образованных координатными осями.

в) (3,5; 0), (0; 3,5), (— 3,5; 0), (0; — 3,5).

г) Один случай: (6; 2,8), (— 6; 2,8), (— 6; — 2,8), (6; — 2,8); другой случай: (2,8; 6), (— 2,8; 6), (—2,8; —6), (2,8; — 6).

135. а) $y = 4x$, зависимость между переменными величинами x и y прямо пропорциональная (см. п. 3 § 16).

б) $y=\frac{x}{3}$ или $y=\frac{1}{3}x$, зависимость прямо пропорциональная.

в) Скорость равна пройденному пути, деленному на время, за которое путь пройден при равномерном движении: $y=\frac{s}{x}$; зависимость между x и y здесь обратно пропорциональная (см. п. 4 § 16).

г) Равномерно двигаясь со скоростью v *км/ч*, поезд за x часов пройдет vx *км* и окажется на расстоянии от города *A*, равном $y = vx + s$; зависимость y от x выражается линейной функцией (см. п. 5 § 16).

136. Формулой прямо пропорциональной зависимости является равенство $y = kx$. Графиком этой функции будет множество всех точек, координаты которых удовлетворяют данному равенству. Например, если имеем формулу $y = 5x$, то пара чисел $x = 2$ и $y = 10$ удовлетворяет равенству (при подстановке в формулу значений x и y получается верное равенство $10 = 5\cdot 2$), и поэтому точка с координатами (2; 10) принадлежит графику функции $y = 5x$. Но точка, например, (4; 18) графику функции $y = 5x$ не принадлежит, так как координаты этой точки не удовлетворяют равенству $y = 5x$, а именно: $18 = 5\cdot 4$, что неверно $(18 \neq 20)$.

Доказательство удобно провести в общем (буквенном) виде, так как при этом охватываются все возможные случаи (для любых значений k и для любого положения рассматриваемых точек на графике).

Очевидно, что точка с координатами (0; 0) принадлежит графику функции $y = kx$, так как $0 = k\cdot 0$, т. е. $0 = 0$

Принадлежит этому графику и точка $(1;\ k)$, потому что при подстановке координат точки в формулу получаем верное равенство: $k = k \cdot 1$.

Через две точки $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ k)$, принадлежащие графику, проведем прямую. Требуется доказать, что: 1) все точки этой прямой OA принадлежат графику функции $y = kx$; 2) никакая другая точка не принадлежит графику этой функции.

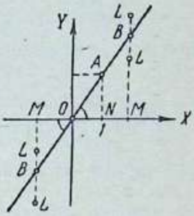


Рис. 15.

1) Пусть абсцисса точки A (ON) равна единице, тогда ордината точки $A(AN)$ равна k (рис. 15). На прямой OA возьмем любую точку и из нее опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Обозначим абсциссу этой точки через a, а ординату через b. Прямоугольный треугольник с катетами a и b подобен прямоугольному треугольнику ANO (имеют по равному острому углу; см. § 38 в части второй). Поэтому их катеты пропорциональны: $\frac{b}{a} = \frac{k}{1}$, откуда $b = ka$ (умножили обе части равенства на a). Полученное верное равенство говорит о том, что ордината b и абсцисса a удовлетворяют формуле $y = kx$. Этим и доказано, что любая точка прямой OA принадлежит графику функции $y = kx$.

2) Пусть точка L не лежит на графике. Ее абсцисса OM и ордината ML. Но ту же абсциссу OM имеет также точка B, лежащая на графике, которая по только что доказанному имеет координаты OM и MB, удовлетворяющие функции $y = kx$. Это значит, что равенство $MB = k \cdot OM$ верно. Но тогда равенство $ML = k \cdot OM$ неверно (правые части равенств одинаковые, а левые неравные: $ML \neq MB$). Следовательно, координаты точки L не удовлетворяют функции и точка L, не лежащая на прямой OA, не принадлежит графику функции $y = kx$. Ясно, что все это доказательство справедливо и для случая, когда прямая OA проходит во II и IV квадрантах.

137. а) Согласно определению, коэффициент k в формуле прямо пропорциональной зависимости может быть любым положительным или отрицательным числом, но не может быть нулем (см. п. 3 § 16). Такие же значения k и в формуле обратно пропорциональной зависимости, что кратко можно записать так: $k \neq 0$. В формуле же линейной функции k и b — любые числа (положительные, отрицательные и нуль).

б) Областью определения функции $y = kx$ является множество всех чисел. Такая же область определения и функции $y = kx + b$. Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ состоит из всех чисел, кроме нуля (x не может принимать значение нуль, так как деление на нуль невозможно и не существует соответствующего нулю значения $\frac{k}{0}$ этой функции).

в) Функция $y = \frac{k}{x}$ не может быть равной нулю, так как частное равно нулю лишь тогда, когда делимое равно нулю, а числитель k не равен нулю. При неограниченно возрастающих (по абсолютной величине) значениях x функция $y = \frac{k}{x}$ сколь угодно близко приближается к нулю. Когда же аргумент x приближается к нулю сколь угодно близко, то значения этой функции неограниченно возрастают (по абсолютной величине). Эти выводы можно получить, например, на основе зависимости величины дроби от величины ее знаменателя. Это хорошо видно также на графике (см. рис. 4).

138. а) График функции $y = \frac{-2}{x}$ — гипербола, ветви которой находятся во II и IV квадрантах (см. п. 4 § 16).

б) Абсцисса точки пересечения с осью OX первой прямой равна — 1,5; вторая прямая пересекает OX в точке с абсциссой 5.

в) $x = -3{,}5$; $x = 3$.

г) Графики функций (частные случаи линейной функции) $y=4$ и $y=-3$ — прямые, параллельные оси абсцисс и пересекающие ось ординат в точках: 4 (первая) и -3 (вторая прямая). Прямая $y = 0$ совпадает с осью абсцисс.

139. а) $x \approx 1{,}5$; $y \approx 4{,}4$.

б) Таких точек будет две: 1) $x \approx 2{,}2$; $y \approx 1{,}3$; 2) $x \approx -2{,}2$; $y \approx -1{,}3$.

140. а) Формулы $x = 5$, $x = -2$ и $x = 0$ аналогичны формулам $y = 4$, $y = -3$ и $y = 0$ (см. упражнение 138 (г)). Графиком $x = 5$ является прямая, параллельная оси ординат и пересекающая ось абсцисс в точке 5. В самом деле, формуле $x = 5$ удовлетворяют все те точки координатной плоскости, которые имеют абсциссу 5 (в эту формулу y не входит, поэтому ординаты точек графика могут быть любые). Рассуждая подобным образом, установим, что график $x = -2$ есть прямая, параллельная оси OY и пересекающая ось OX в точке -2. Графиком $x = 0$ является прямая, совпадающая с осью ординат.

б) Каждая точка прямой $y = 0$ имеет ординату нуль, а каждая точка прямой $x = 2{,}5$ имеет абсциссу 2,5, поэтому точка пересечения этих прямых имеет абсциссу 2,5 и ординату 0. Аналогично устанавливаем, что точка пересечения прямых $y = -7{,}2$ и $x = 0$ имеет абсциссу 0 и ординату $-7{,}2$, а точка пересечения прямых $y = 17{,}5$ и $x = -312{,}7$ имеет координаты $(-312{,}7;\ 17{,}5)$.

141. а) Общее в определениях уравнения и тождества то, что как уравнение, так и тождество являются равенствами. Однако между ними есть существенные различия: 1) уравнение обязательно содержит неизвестное или неизвестные, которые требуется найти путем решения уравнения, в то время как входящие в тождество буквы считаются известными и их не нужно находить (тождество решать не нужно, но его можно доказать); 2) тождество справедливо всегда (точнее — при всех допустимых значениях входящих в него букв), а уравнение справедливо только при тех значениях неизвестного, которые являются его корнями.

б) Есть такие уравнения, которые одновременно являются тождествами, т. е. удовлетворяются любыми допустимыми значениями буквы, которая считается неизвестной. Такое уравнение имеет бесконечное множество решений. Например, $1{,}5x + 5 = 2x + 5 - 0{,}5x$ (см. уравнение (в) в п. 2 § 17).

в) Тождество можно считать уравнением при условии, что хотя бы одну из его букв будем считать неизвестной. Решать такое уравнение не нужно, так как наперед известно, что оно имеет бесконечное множество корней и ими являются все допустимые значения неизвестной буквы.

г) Существуют и такие уравнения, у которых равенства всегда неверные. Например, $2 + x = 3 + x$. Такое уравнение не имеет корней.

142. а) Искомые значения функции: -16; 20; -25; $-11{,}5$; $-23{,}5$. Искомые значения аргумента: $1\frac{7}{9}$; 4; -1; 1,5; $2\frac{1}{7}$.

б) При нахождении указанных значений аргумента мы решили следующие уравнения: $9x - 16 = 0$; $9x - 16 = 20$; $9x - 16 = -25$; $9x - 16 = -2{,}5$; $9x - 16 = 3\frac{2}{7}$.

143. **а)** При $x = 1$. **б)** При $x = 4$ и $x = -2$. **в)** При $x \approx -1{,}79$.

144. **а)** $0{,}5x - 3x = -2 - 3$; $-2{,}5x = -5$; $x = (-5):(-2{,}5)$; $x = 2$ — такой же корень, как и полученный при графическом решении уравнения.

б) Какое бы значение вместо x в уравнение $0 \cdot x = -6$ ни подставили, левая часть уравнения всегда равна нулю, а правая (-6) не равна нулю, т. е. получили уравнение, которое всегда является неправильным равенством. Уравнение $0 \cdot x = -6$ не имеет корней, а поэтому не имеет корней и данное уравнение $2x + 1 = 2x - 5$, которое равносильно полученному уравнению. Такой же результат был получен и графически (графики — параллельные прямые).

в) Уравнению $0 \cdot x = 0$ удовлетворяет любое число, так как левая и правая части всегда равны нулю. Уравнение имеет бесконечное множество решений (графики — совпадающие прямые).

145. **а)** $x \approx 0{,}4$; **б)** $x \approx -1{,}7$; **в)** $x \approx -0{,}5$.

146. **а)** Не решая уравнений, видно, что левая часть уравнения $(x - 4)(x + 1) = 0$ равна нулю при значениях неизвестного 4 и -1. Это и есть его корни. У другого уравнения $(x - 4)(x - 1) = 0$ корни 4 и 1. Уравнения не равносильны, так как у них имеются и разные корни (у первого корень -1, а у другого корень 1).

б) Уравнения равносильными быть не могут, так как у первого уравнения только один корень, а у второго уравнения — два корня.

в) Уравнения равносильны, так как каждое из них удовлетворяется любым числом (у каждого уравнения имеется бесчисленное множество одинаковых корней).

г) Уравнения равносильны, так как каждое из них не имеет корней.

д) Уравнения равносильны, потому что второе получается из первого перенесением членов (см. следствие 2 п. 4 § 17).

е) Уравнения равносильны, ибо второе получается из первого умножением обеих частей на 2 (см. следствие 3 п. 4 § 17).

ж) Уравнения равносильны, так как второе получается из первого делением обеих частей на 4 (см. следствие 4 п. 4 § 17).

з) Уравнения равносильны, потому что второе получается из первого опусканием в обеих частях одинакового члена $3x$ (см. следствие 1 п. 4 § 17).

148. а) $\frac{6(3x-1)}{30}-\frac{15(13-x)}{30}=\frac{10\cdot 7x}{30}-\frac{5\cdot 11(x+3)}{30}$; $6(3x-1)-15(13-x)=10\cdot 7x-5\cdot 11(x+3)$; $18x-6-195+15x=70x-55x-165$; $18x+15x-70x+55x=-165+6+195$; $18x=36$; $x=36:18$; $x=2$.

Ответ: $x=2$.

б) $\frac{7+9z}{4}-1+\frac{2-z}{9}=7z$; $\frac{9(7+9z)}{36}-\frac{36}{36}+\frac{4(2-z)}{36}=\frac{36\cdot 7z}{36}$; $9(7+9z)-36+4(2-z)=36\cdot 7z$; $63+81z-36+8-4z=252z$; $81z-4z-252z=-63+36-8$; $-175z=-35$; $z=(-35):(-175)$; $z=0{,}2$.

Проверка. $\frac{7+9\cdot 0{,}2}{4}-\left(1-\frac{2-0{,}2}{9}\right)=\frac{7+1{,}8}{4}-\left(1-\frac{1{,}8}{9}\right)=\frac{8{,}8}{4}-(1-0{,}2)=2{,}2-0{,}8=1{,}4$; $7z=7\cdot 0{,}2=1{,}4$; $1{,}4=1{,}4$.

Ответ: $z=0{,}2$.

в) $y^2+5y+2y+10-12y+9=y^2-10y+25$; опускаем в обеих частях y^2 и переносим члены; $5y+2y-12y+10y=25-10-9$; $5y=6$; $y=6:5$; $y=1{,}2$.

Ответ: $y=1{,}2$.

г) $4u-8-(2u^2-6u-5u+15)=12-2(u^2-2u+1)$; $4u-8-2u^2+6u+5u-15=12-2u^2+4u-2$; $6u+5u=12-2+8+15$; $11u=33$; $u=33:11$; $u=3$.

Ответ: $u=3$.

д) $6t^2+6t+6=t^3+3t^2+3t+1-(t^3-3t^2+3t-1)$; $6t^2+6t+6=t^3+3t^2+3t+1-t^3+3t^2-3t+1$; $6t^2+6t-3t^2-3t^2=1+1-6$; $6t=-4$; $t=-4:6$; $t=-\frac{2}{3}$.

Проверка. $6\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right]=6\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{3}+1\right)=6\cdot\frac{4-6+9}{9}=6\cdot\frac{7}{9}=\frac{6\cdot 7}{9}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$; $\left(-\frac{2}{3}+1\right)^3-\left(-\frac{2}{3}-1\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{5}{3}\right)^3=\frac{1}{27}-\left(-\frac{125}{27}\right)=\frac{1}{27}+\frac{125}{27}=\frac{126}{27}=4\frac{18}{27}=4\frac{2}{3}$; $4\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$. Ответ: $t=-\frac{2}{3}$.

149. б) $5(x+2)=3(x+2)$; $5(x+2)-3(x+2)=0$; $(x+2)(5-3)=0$; $x+2=0$; $x=-2$; получили единственный корень, так как второй сомножитель $(5-3)$ левой части равным нулю быть не может.

Решим другим способом — по общей схеме: $5(x+2)=3(x+2)$; $5x+10=3x+6$; $5x-3x=6-10$; $2x=-4$; $x=-4:2$; $x=-2$, получили тот же корень.

Ответ: $x=-2$.

Примечание. Решение данного уравнения третьим способом — делением обеих частей на их общий множитель $x+2$, содержащий неизвестное, приводит к потере единственного корня (см. следствие 4 и примечание к нему в п. 4 § 17). Убедимся в этом: $5(x+2)=3(x+2)$; $5=3$; получили неверное равенство, из которого следует, что уравнение не имеет корней. Однако это уравнение имеет корень -2, который здесь был потерян. Следовательно, мы убедились еще раз, что делить обе части уравнения на общий множитель, содержащий неизвестное, нельзя (теряем корни).

151. а) $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x(1+2x+x^2)}-\frac{5}{2x(1+x)}=0$;

$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x(1+x)^2}-\frac{5}{2x(1+x)}=0$; $\frac{2x+8-5(1+x)}{2x(1+x)^2}=0$;

$\frac{2x+8-5-5x}{2x(1+x)^2}=0$; $\frac{3-3x}{2x(1+x)^2}=0$; $\frac{3(1-x)}{2x(1+x)^2}=0$.

Дробь в левой части уравнения несократимая, поэтому, приравнивая числитель нулю (или умножая обе части на знаменатель с неизвестным), мы постороннего корня все же не получим: $3(1-x)=0$; $1-x=0$; $-x=-1$; $x=1$. Проверка здесь не нужна.

Ответ: $x=1$.

б) $\frac{1}{(3-2y)^2}-\frac{3}{(3-2y)(3+2y)}-\frac{4}{(3+2y)^2}=0$;

$$\frac{(3+2y)^2-3(3-2y)(3+2y)-4(3-2y)^2}{(3-2y)^2(3+2y)^2}=0;$$

$$\frac{9+12y+4y^2-3(9-4y^2)-4(9-12y+4y^2)}{(3-2y)^2(3+2y)^2}=0;$$

$$\frac{9+12y+4y^2-27+12y^2-36+48y-16y^2}{(3-2y)^2(3+2y)^2}=0;$$

$$\frac{60y-54}{(3-2y)^2(3+2y)^2}=0;\quad \frac{6(10y-9)}{(3-2y)^2(3+2y)^2}=0.$$

Дробь несократимая, посторонних корней не будет, проверка не нужна: $6(10y-9)=0$; $10y-9=0$; $10y=9$; $y=0{,}9$.

Ответ: 0,9.

в) $\dfrac{7}{(z-1)(z+1)}+\dfrac{8}{(z-1)^2}-\dfrac{37-9z}{z^2(z-1)-(z-1)}=0.$

Знаменатель третьей дроби: $z^2(z-1)-(z-1)=(z-1)\times$ $\times(z^2-1)=(z-1)(z-1)(z+1)=(z-1)^2(z+1)$. Общий (простейший) знаменатель трех дробей: $(z-1)^2(z+1)$. Числители умножаем на дополнительные множители: $z-1$, $z+1$ и 1.

$\dfrac{7(z-1)+8(z+1)-(37-9z)}{(z-1)^2(z+1)}=0$; $\dfrac{7z-7+8z+8-37+9z}{(z-1)^2(z+1)}=0$;

$\dfrac{24z-36}{(z-1)^2(z+1)}=0$; $\dfrac{12(2z-3)}{(z-1)^2(z+1)}=0$; дробь несократимая: $12(2z-3)=0$; $2z-3=0$; $2z=3$; $z=1{,}5$.

Ответ: $z=1{,}5$.

г) $\dfrac{6u+5}{4u+3}+\dfrac{7-3u}{4u-3}-\dfrac{12u^2+30u-21}{(4u-3)(4u+3)}=0$;

$$\frac{(6u+5)(4u-3)+(7-3u)(4u+3)-(12u^2+30u-21)}{(4u-3)(4u+3)}=0;$$

$$\frac{24u^2-18u+20u-15+28u+21-12u^2-9u-12u^2-30u+21}{(4u-3)(4u+3)}=0;$$

$\dfrac{-9u+27}{(4u-3)(4u+3)}=0$; $\dfrac{9(3-u)}{(4u-3)(4u+3)}=0$; дробь несократимая: $9(3-u)=0$; $3-u=0$; $-u=-3$; $u=3$.

Ответ: $u=3$.

д) $1+\dfrac{5}{(v-3)(v+2)}+\dfrac{1}{v+2}=0$; $\dfrac{(v-3)(v+2)+5+(v-3)}{(v-3)(v+2)}=0$;

$\dfrac{v^2+2v-3v-6+5+v-3}{(v-3)(v+2)}=0$; $\dfrac{v^2-4}{(v-3)(v+2)}=0$;

$\dfrac{(v-2)(v+2)}{(v-3)(v+2)}=0$. Сокращаем дробь на $(v+2)$, в результате чего устраняется посторонний корень $v=-2$, который получился бы из уравнения $v+2=0$ (корень -2 обращает знаменатели данного уравнения в нули). $\dfrac{v-2}{v-3}=0$; $v-2=0$; $v=2$. Подстановкой в данное уравнение можно убедиться, что корень 2 не посторонний.

Ответ: $v=2$.

е) $2+\frac{1}{t-3}-\frac{4-t}{t-3}=0$; $\frac{2(t-3)+1-(4-t)}{t-3}=0$; $\frac{2t-6+1-4+t}{t-3}=0$; $\frac{3t-9}{t-3}=0$; $\frac{3(t-3)}{t-3}=0$; сокращение дроби на $t-3$ устраняет посторонний корень 3; $3=0$; полученное неверное равенство говорит о том, что уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Примечание. Не следует путать два совершенно различных вида сокращения на множитель, содержащий неизвестное. Сокращение на такой множитель дроби (левой части уравнения, правая часть которого есть нуль) надо делать для устранения посторонних корней. Сокращение же (деление) на такой множитель обеих частей уравнения делать нельзя, ибо это ведет к потере корней.

153. а) $3m^2-3mn-my+ny+2my=4mn+4ny$; $-my+ny+2my-4ny=4mn+3mn-3m^2$; $my-3ny=7mn-3m^2$; $y(m-3n)=m(7n-3m)$; если $m-3n\neq0$, то $y=\frac{m(7n-3m)}{m-3n}$.

Ответ: $y=\frac{m(7n-3m)}{m-3n}$ при $m-3n\neq0$ или $m\neq3n$ (случай $m=3n$ мы не рассматриваем, так как он сложнее аналогичного случая в уравнении предыдущего упражнения).

б) $a^2-ab-ax+ax-bx-x^2-ab+b^2+bx=a^2b^2+a^2x-b^2x-x^2-a^2b^2$; $b^2x-a^2x=ab+ab-a^2-b^2$; $x(b^2-a^2)=-a^2+2ab-b^2$; $x(b^2-a^2)=-(b^2-2ab+a^2)$; $x(b^2-a^2)=-(b-a)^2$; рассматриваем случай, когда $b^2-a^2\neq0$; $x=-\frac{(b-a)^2}{b^2-a^2}$; $x=-\frac{(b-a)^2}{(b-a)(b+a)}$; $x=-\frac{b-a}{b+a}$; $x=\frac{a-b}{a+b}$.

Ответ: $x=\frac{a-b}{a+b}$ при $b^2-a^2\neq0$, или $b^2\neq a^2$, или $|a|\neq|b|$ (абсолютные величины чисел a и b не равны).

в) Если $x\geqslant0$, то $|x|=x$; если же $x<0$, то $|x|=-x$ (здесь x отрицательно, поэтому $-x$ положительно). Данное уравнение нужно решить отдельно для этих двух случаев. Пусть $x\geqslant0$; тогда данное уравнение будет иметь такой вид: $5x-a=-3x+b$; решаем его: $5x+3x=a+b$; $8x=a+b$; $x=\frac{a+b}{8}$. Пусть теперь $x<0$; $5\cdot(-x)-a=-3\cdot(-x)+b$; $-5x-a=3x+b$; $-5x-3x=a+b$; $-8x=a+b$; $x=\frac{a+b}{-8}$, $x=-\frac{a+b}{8}$.

Ответ: $x = \frac{a+b}{8} \geqslant 0$ и $x = -\frac{a+b}{8} < 0$.

г) Из условия видно, что $b \neq 0$ и $c \neq 0$ (знаменатель дроби не может быть равным нулю):

$$\frac{2b^2 \cdot bc^3}{bc^3} - \frac{(3c^2 - 5b^2)\,ax}{bc^3} = \frac{2ax \cdot bc^2}{bc^3} - \frac{3b \cdot bc^3}{bc^3} + \frac{5abx \cdot b}{bc^3};$$

$$2b^3c^3 - (3c^2 - 5b^2)\,ax = 2abc^2x - 3b^2c^3 + 5ab^2x;$$

$$2b^3c^3 - 3ac^2x + 5ab^2x = 2abc^2x - 3b^2c^3 + 5ab^2x;$$

$$-3ac^2x - 2abc^2x = -3b^2c^3 - 2b^3c^3;\ 3ac^2x + 2abc^2x =$$

$$= 3b^2c^3 + 2b^3c^3;\ ac^2x\,(3 + 2b) = b^2c^3\,(3 + 2b).$$

Пусть $ac^2(3 + 2b) \neq 0$; разделим на этот буквенный коэффициент при неизвестном:

$$x = \frac{b^2c^3\,(3 + 2b)}{ac^2\,(3 + 2b)};\ x = \frac{b^2c}{a}.$$

Ответ: $x = \frac{b^2c}{a}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $3 + 2b \neq 0$.

д) $\frac{2x - 3b}{3a + b} - \frac{4a - 3x}{3a - b} = \frac{3ax + 12ab + 5b^2}{(3a - b)(3a + b)}$; $9a^2 - b^2 \neq 0$;

$$\frac{(2x - 3b)(3a - b)}{(3a + b)(3a - b)} - \frac{(4a - 3x)(3a + b)}{(3a - b)(3a + b)} = \frac{3ax + 12ab + 5b^2}{(3a - b)(3a + b)};$$

$$(2x - 3b)(3a - b) - (4a - 3x)(3a + b) = 3ax + 12ab + 5b^2;$$

$$6ax - 2bx - 9ab + 3b^2 - 12a^2 - 4ab + 9ax + 3bx = 3ax +$$

$$+ 12ab + 5b^2;\ 6ax - 2bx + 9ax + 3bx - 3ax = 12ab +$$

$$+ 5b^2 + 9ab - 3b^2 + 12a^2 + 4ab;$$

$$12ax + bx = 25ab + 2b^2 + 12a^2;\ x\,(12a + b) = 25ab + 2b^2 +$$

$$+ 12a^2;\ 12a + b \neq 0;\ x = \frac{12a^2 + 25ab + 2b^2}{12a + b}.$$

Ответ: $x = \frac{12a^2 + 25ab + 2b^2}{12a + b}$ при $12a + b \neq 0$, $3a + b \neq 0$ и $3a - b \neq 0$.

е) В этом уравнении в отличие от предыдущих уравнений этого упражнения знаменатели содержат неизвестное, поэтому решаем так, как в упражнениях 150 и 151. Сначала отдельно разложим на множители знаменатели:

$$a^3 + a^2x + ax^2 + x^3 = a^2(a + x) + x^2(a + x) = (a + x)(a^2 + x^2);$$

$$a^4 + 2a^2x^2 + x^4 = (a^2 + x^2)^2;\ a + x \neq 0,\ a^2 + x^2 \neq 0.$$

$$\frac{a^2 + ax + x^2}{(a + x)(a^2 + x^2)} - \frac{a^3 - a^2x + ax^2}{(a^2 + x^2)^2} - \frac{1}{a + x} = 0;$$

$$\frac{(a^2 + ax + x^2)(a^2 + x^2)}{(a + x)(a^2 + x^2)^2} - \frac{(a^3 - a^2x + ax^2)(a + x)}{(a^2 + x^2)^2\,(a + x)} -$$

$$- \frac{(a^2 + x^2)^2}{(a + x)(a^2 + x^2)^2} = 0;$$

$$\frac{(a^2+ax+x^2)(a^2+x^2)-(a^3-a^2x+ax^2)(a+x)-(a^2+x^2)^2}{(a+x)(a^2+x^2)^2}=0.$$

$$\frac{a^4+a^2x^2+a^3x+ax^3+a^2x^2+x^4-a^4-a^3x}{(a+x)(a^2+x^2)^2}+$$

$$+\frac{a^3x+a^2x^2-a^2x^2-ax^3-a^4-2a^2x^2-x^4}{(a+x)(a^2+x^2)^2}=0;$$

$$\frac{a^3x-a^4}{(a+x)(a^2+x^2)^2}=0;\quad \frac{a^3(x-a)}{(a+x)(a^2+x^2)^2}=0;$$

дробь несократимая, посторонних корней не появится, проверка не обязательна; $a^3(x-a)=0$; $x-a=0$; $x=a$; a должно быть отлично от нуля, ибо при $a=0$ и $x=0$, $(x=a)$, тогда $x+a=0$ и знаменатели обращаются в нули.

Ответ: $x=a\neq 0$.

154. а) Простейший общий знаменатель дробей $(b-c)\times$ $\times(c-a)(a-b)$. Дополнительные множители: $a-b$, $b-c$ и $c-a$. Данное дробное выражение тождественно равно следующему (здесь $a\neq b$, $c\neq a$, $b\neq c$):

$$\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-a^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}=$$

$$=\frac{0}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0.$$

Данная сумма трех алгебраических дробей при всех допустимых значениях входящих в нее букв a, b и c тождественно равна нулю.

Ответ: 0.

б) Выполняем сложения в круглых скобках, умножения и затем сложение в квадратных скобках и, наконец, умножение за квадратными скобками (см. п. 5 § 2 и п. 4 § 11).

Ответ: 1; $p\neq 0$; $k\neq 0$; $p+k\neq 0$.

156. Если через x обозначить цену блокнота, то получим уравнение: $x+(x-4)+\frac{x-4}{4}=22$. Если через x обозначить цену тетради, то получим уравнение: $x+x+4+$ $+x:4=22$. Если через x обозначим цену карандаша, то получим уравнение: $x+4x+4x+4=22$. В любом случае ответ получим такой: цена карандаша 2 коп., тетради 8 коп., блокнота 12 коп.

157. См. решение задачи в упражнении 155. В решении этой и последующих задач ни один этап схемы решения задач на составление уравнения (см. п. 7 § 17) не должен быть пропущен. Если задача сравнительно проста, то второй этап будет короче, однако совсем пропустить его нельзя, так как не будет объяснено составление уравнения. В более простых задачах дается здесь сокращенное решение, с тем чтобы подробное решение получил сам читатель. Только в таком случае он научится решать задачи с помощью уравнений.

Если x — большее искомое число, то $0{,}5x + 3 = x - 6$, $x = 18$, а меньшее число 12.

158. Если x — первое число (делимое), то $(47 - x)$ — второе число (делитель). В случае деления с остатком делимое на остаток больше произведения делителя на частное, т. е. x на 5 больше $(47 - x)\cdot 2$. Уравнение можно получить здесь двумя способами: $x - 5 = (47 - x)\cdot 2$ или $x = (47 - x)\cdot 2 + 5$ (эти уравнения равносильны). $x = 33$, а делитель $47 - 33 = 14$.

Проверка.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 14 \\ \underline{28} & 2 \\ 5 & \end{array}$$

В остатке действительно получается 5, а частное 2. Решение правильное.

Ответ: 33 и 14.

159. Пусть товара по 1,5 руб. за 1 *кг* было x *кг*, тогда другого сорта было $(32 - x)$ *кг*. Выразим стоимость каждого сорта товара. Сложив их, получим стоимость всей смеси. $1{,}5x + 2{,}1(32 - x) = 1{,}65\cdot 32$. $x = 24$, а другого сорта $32 - 24 = 8$.

Ответ: 24 *кг* по 1,5 руб. и 8 *кг* по 2,1 руб. за 1 *кг*.

160. Пусть вначале в первой бригаде было x чел., тогда во второй бригаде было $(45 - x)$ чел. После перевода двух человек из первой бригады во вторую в первой стало $(x - 2)$ чел., а во второй $(45 - x + 2)$ чел., или $47 - x$. Следовательно, по условию задачи $x - 2$ составляло 80% от $47 - x$, поэтому $47 - x$ принимается за 100% (см. § 9). Найдем 80% от $47 - x$. Получим $\frac{(47 - x)\,80}{100}$ или $\frac{4(47 - x)}{5}$. Но по условию это и есть число рабочих первой бригады, когда из нее взяли двух рабочих: $\frac{4(47 - x)}{5} = x - 2$, $x = 22$; а во второй бригаде вначале было $45 - x = 45 - 22 = 23$ (человека).

Проверка. Найдем отношение числа рабочих первой бригады к числу рабочих второй после перевода двух рабочих: $(22 - 2) : (23 + 2) = 20 : 25 = 4 : 5 = 0{,}8$. Выразим это отношение в процентах (найдем процентное отношение тех же чисел): $0{,}8 \cdot 100\% = 80\%$.

Ответ: 22 и 23 (рабочих).

161. Обозначим искомую площадь сева через x *га*. Тогда по плану сев надо было завершить за $\frac{x}{25}$ дней. Найдем 120% от 25 *га*: $\frac{25 \cdot 120}{100} = 30$ (*га*) — фактически засевали в день. Сев фактически продолжался $\frac{x}{30}$ дней. Согласно условию задачи, $\frac{x}{30}$ на 3 (дня) меньше числа $\frac{x}{25}$. Уравнять эти числа и получить уравнение можно одним из следующих трех способов: $\frac{x}{30} + 3 = \frac{x}{25}$, $\frac{x}{25} - 3 = \frac{x}{30}$ или $\frac{x}{25} - \frac{x}{30} = 3$. Решая любое из этих уравнений, получим: $x = 450$.

Проверка. Так как площадь сева 450 *га*, то по плану на сев отводилось $450 : 25 = 18$ (дней). Фактически сев выполнен за $18 - 3 = 15$ (дней). Ежедневно засевали по $450 : 15 = 30$ (*га*). Вычислим, на сколько процентов ежедневно выполняли план: $30 : 25 = 6 : 5 = 1{,}2$; $1{,}2 \cdot 100\% = 120\%$, что и соответствует условию задачи.

Ответ: 450 *га*.

162. Пусть лесоруб заготовил x *куб. м* древесины. Тогда по плану он должен был заготовить $(x - 113{,}4)$ *куб. м* и затратить на это $\frac{x - 11{,}34}{3}$ дней. Так как он перевыполнял дневной план на 60%, то, следовательно, выполнял ежедневно этот план на 160%. Найдем 160% от 3 *куб. м*: $\frac{3 \cdot 160}{100} = 4{,}8$ (*куб. м*). Лесоруб проработал всего $\frac{x}{4{,}8}$ дней, что на 12 дней меньше планового срока $\frac{x - 113{,}4}{3}$ дней.

Уравнение: $\frac{x}{4{,}8} + 12 = \frac{x - 113{,}4}{3}$. Умножим обе части уравнения на 4,8; дополнительные множители в левой части 1 и 4,8, а в правой части 1,6. Получаем равносильное уравнение: $x + 12 \cdot 4{,}8 = 1{,}6x - 113{,}4 \cdot 1{,}6$, $x = 398{,}4$.

Проверка. $100\% + 60\% = 160\%$ или 1,6 дневного плана; $3 \cdot 1{,}6 = 4{,}8$ (*куб. м*); $398{,}4 : 4{,}8 = 83$ (дня); $398{,}4 - 113{,}4 = 285$ (*куб. м*). $285 : 3 = 95$ (дней); $95 - 83 = 12$ (дней), т. е. действительно лесоруб закончил работу на 12 дней раньше срока.

Ответ: 398,4 *куб. м*.

163. Производительность труда — это количество продукции, производимой в единицу времени. В нашей задаче это часть работы, выполняемая за 1 месяц. Всю работу, необходимую для окончания плотины, обозначим через 1 (объем этой работы нам не дан). Тогда производительность труда рабочих в месяц до применения рационализации составляла $\frac{1}{6}$ всей работы. Пусть производительность труда повысилась на $x\%$. Найдем $x\%$ от $\frac{1}{6}$. Получим $\frac{\frac{1}{6}\cdot x}{100}=\frac{\frac{x}{6}}{100}=\frac{x}{600}$ — увеличение производительности труда. После этого производительность труда в месяц составит $\left(\frac{1}{6}+\frac{x}{600}\right)$ часть всей работы. Но по условию задачи работа была выполнена за 5 месяцев, поэтому новая производительность труда в месяц составляет $\frac{1}{5}$ всей работы. Уравнение: $\frac{1}{6}+\frac{x}{600}=\frac{1}{5}$, $x=20$.

Ответ: на 20%.

164. Допустим, что одна первая труба без участия второй заполняет водоем за x часов. Так как емкость водоема не указана, то примем ее за 1. Тогда первая труба за 1 час наполнит $\frac{1}{x}$ часть водоема, а за 7 часов наполнит $\frac{1}{x}\cdot 7$. Две трубы, действуя вместе, за 1 час наполнят $1:9\frac{3}{8}=1:\frac{75}{8}=\frac{8}{75}$ водоема, а за 5 часов $\frac{8}{75}\cdot 5=$ $=\frac{8\cdot 5}{75}=\frac{8}{15}$ водоема. Получаем уравнение $\frac{8}{15}+\frac{7}{x}=1$, $x=15$.

Первая труба за 1 час наполняет $\frac{1}{15}$ водоема, а первая и вторая совместно наполняют за 1 час $\frac{8}{75}$ водоема. Тогда вторая труба наполняет за 1 час $\frac{8}{75}-\frac{1}{15}=\frac{8-5}{75}=$ $=\frac{3}{75}=\frac{1}{25}$ водоема, а весь водоем наполнит одна за $1:\frac{1}{25}=25$ (часов).

Проверка. Первая труба за 7 часов наполнила $\frac{1}{15}\cdot 7=\frac{7}{15}$ водоема, после чего первой и второй трубам совместно осталось наполнить $1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$ водоема. Вторая труба за 1 час наполняет $1:25=\frac{1}{25}$ водоема, а две трубы вместе за 1 час наполнят $\frac{1}{15}+\frac{1}{25}=\frac{8}{75}$ водоема. Две трубы работали вместе $\frac{8}{15}:\frac{8}{75}=5$ (часов), что соответствует условию.

Ответ: первая труба отдельно может наполнить водоем за 15 часов, а вторая — за 25 часов.

165. Пусть вода из полного бассейна вытечет при одновременном действии трех труб за x часов. Емкость бассейна принимаем за 1. Первая труба за 1 час наполняет $\frac{1}{5}$ бассейна, вторая наполняет $\frac{1}{15}$ бассейна, а через третью трубу за 1 час опорожняется $\frac{1}{3}$ бассейна. Первые две трубы за 1 час наполнят $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)$ часть бассейна. Однако через третью трубу вытекает за 1 час больше, чем через первые две за 1 час наливается, и больше на $\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)\right]$ часть бассейна. Если умножим эту часть на число часов x, то получим емкость всего бассейна, которую мы приняли за 1: $\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)\right]x=1$.

Проверку решения задачи по условию сделайте сами.

Ответ: за 15 часов.

166. Если велосипедисты встретятся через x часов после выезда, то каждый из них был в пути по x часов. Умножая скорость каждого на время движения, получим пройденные ими пути до встречи: $12x$ *км* и $13x$ *км*. Уравнение: $12x+13x=300$, $x=12$.

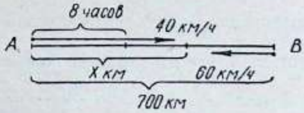


Рис. 16.

Проверку сделайте самостоятельно.

Ответ: через 12 часов после выезда.

167. Встреча произойдет в точке, отстоящей на x *км* от A (см. рис. 16). Тогда первый поезд пройдет путь x *км* со скоростью 40 *км/ч* за время $\frac{x}{40}$ часов. Второй поезд пройдет путь $(700-x)$ *км* со скоростью 60 *км/ч* за $\frac{700-x}{60}$ часов. Так как первый поезд был в пути на 8 часов больше, то получим такое уравнение:

$$\frac{x}{40}-\frac{700-x}{60}=8. \quad x=472.$$

Проверка. Первый поезд прошел 472 *км* за $472:40=11{,}8$ (часа). Второй поезд был в пути $11{,}8-8=3{,}8$ (часа) и прошел до встречи $60\cdot3{,}8=228$ (*км*). Все расстояние от A до $Б$ равно $472+228=700$ (*км*), что соответствует условию задачи.

Ответ: встреча произошла на расстоянии 472 *км* от A.

168. В этой задаче через x обозначим не то, что спрашивается в задаче (в каком часу?). Пусть скорому поезду нужно x часов, чтобы догнать пассажирский, тогда он пройдет за это время $80x$ *км*. Такое же расстояние прошел и пассажирский поезд, поэтому он был в пути $\frac{80x}{48}$ часов. Но пассажирский был в пути на $\frac{3}{4}$ часа больше. Получим уравнение: $\frac{80x}{48}=x+\frac{3}{4}$ или $\frac{5x}{3}=x+\frac{3}{4}$, $x=1\frac{1}{8}$. Скорый догонял пассажирский в течение $1\frac{1}{8}$ часа или 1 часа 7,5 минуты. Он отправился со станции в 12 часов 45 минут.

Ответ: скорый поезд догнал пассажирский в 13 часов 52,5 минуты.

169. Обозначим искомое расстояние через x *км*. Пешеход прошел бы его при скорости 3 *км/ч* за $\frac{x}{3}$ часов и опоздал бы при этом на $\frac{1}{3}$ часа, поэтому он мог затратить на этот путь $\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)$ часов, чтобы прийти точно к сроку. Со скоростью 3,5 *км/ч* ему оставалось пройти $(x-3)$ *км*, поэтому на оставшийся путь он затратил $\frac{x-3}{3{,}5}$ часов. Если к этому времени прибавить еще 1 час, который он затратил уже на прохождение трех километров, и еще $\frac{2}{3}$ часа (он придет за 40 минут до срока), то получим тот срок $\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)$, которым пешеход располагал для прохождения всего пути. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} = 1 + \frac{x-3}{3,5} + \frac{2}{3}$. Общий знаменатель $3 \cdot 3,5 = 10,5$; $x = 24$.

Проверка. Для прохождения 24 *км* при скорости 3 *км/ч* потребовалось бы $24 : 3 = 8$ (часов). Так как при этом пешеход опоздал бы на $\frac{1}{3}$ часа, то срок, которым он располагал, равен $8 - \frac{1}{3} = 7\frac{2}{3}$ (часа). Из этого срока он уже затратил 1 час на прохождение трех километров $\left(7\frac{2}{3} - 1 = 6\frac{2}{3}\right)$ и $\frac{2}{3}$ часа из этого срока остались в запасе, поэтому пешеход на $24 - 3 = 21$ (*км*) затратил $6\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 6$ (часов). Скорость его на этом участке пути была $21 : 6 = 3,5$ (*км/ч*), что соответствует условию задачи.

Ответ: 24 *км*.

170. а) График уравнения $3x - 2y = 4$ построим по двум точкам, в которых эта прямая пересекает оси координат. Для этого подставим в уравнение вместо x число 0 и найдем значение y: $3 \cdot 0 - 2y = 4$, $-2y = 4$, $y = 4 : (-2)$, $y = -2$. Получили точку $(0; -2)$, в которой график пересекает ось ординат. Аналогично найдем точку пересечения графика с осью абсцисс: $y = 0$; $3x - 2 \cdot 0 = 4$, $3x = 4$, $x = 4 : 3$, $x \approx 1,3$. Отметим на осях точки: $(1,3; 0)$ и $(0; -2)$ и проведем через них прямую — график первого уравнения данной системы. Аналогично построим график другого уравнения этой системы. Из точки пересечения двух прямых опустим перпендикуляры на оси OX и OY. Координаты точки пересечения графиков и дают решение системы.

Ответ: $x = 4$, $y = 4$.

б) Воспользуемся уже готовым графиком уравнения $5x + 4y = 36$. Для построения графика уравнения $x - 3y = 0$ преобразуем его в равносильное ему уравнение $y = \frac{1}{3}x$. График этой функции (см. п. 3 § 16) — прямая, проходящая через начало координат и точку $\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $x \approx 5,7$; $y \approx 1,9$.

в) Используем готовый график уравнения $3x - 2y = 4$. График уравнения $7y = -38,5$ легко построить, если заменить это уравнение равносильным ему $y = -5{,}5$. Это — прямая, параллельная оси OX и пересекающая ось OY в точке $-5{,}5$. Опустив перпендикуляры на координатные оси из точки пересечения графиков, получим ответ: $x \approx -2{,}3$; $y = -5{,}5$.

г) Вычислим координаты точек пересечения графика уравнения $5x - 6y = -30$ с осями координат: $(0; 5)$ и $(-6; 0)$. Проведем прямую через эти точки. Когда вычислим координаты точек пересечения графика другого уравнения $65x - 78y = -390$ с координатными осями, то получим те же точки $(0; 5)$ и $(-6; 0)$, т. е. графики совпадают.

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений и ей удовлетворяют координаты любой точки полученной прямой.

д) Приводить данную систему к нормальной форме не следует, так как легко построить графики уравнений и в заданном виде (см. п. 5 § 16). Прямая, заданная первым уравнением, параллельна прямой $y = -2{,}7x$; график второго уравнения системы параллелен той же прямой $y = -2{,}7x$, поэтому оба графика параллельны между собой. Таким образом, строить графики в данном случае не нужно. При попытке графически решить систему сразу получили ответ: система не имеет решений.

173. а) После сложения уравнений получим: $2y = 48$; $y = 24$; $x + y = 40$; $x = 40 - y$; $x = 16$.

Ответ: $x = 16$; $y = 24$.

б) В результате вычитания первого уравнения из второго получим: $2y = 4$, $y = 2$; $x - y = 8$, $x = 8 + y$, $x = 10$.

Ответ: $x = 10$; $y = 2$.

в) Решаем способом подстановки. Из второго уравнения выражаем y, $y = 7x - 55$ и подставляем его значение в первое уравнение: $5x + 7(7x - 55) = 101$.

Ответ: $x = 9$; $y = 8$.

г) Можно решать любым способом.

$$\left\{\begin{array}{l} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} -3 \\ 4 \end{array}\right| \quad \left\{\begin{array}{r} -18x + 12y = -15 \\ \underline{\quad 32x - 12y = \quad 8} \end{array}\right.$$
$$14x = -7$$

$$x = -7 : 14;\ x = -0{,}5;\ 6(-0{,}5) - 4y = 5;\ -3 - 4y = 5;$$
$$-4y = 5 + 3;\ y = 8 : (-4);\ y = -2.$$

Ответ: $x = -0{,}5$; $y = -2$.

д) $\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}04y = 2, \\ 4x + 25y = 641; \end{cases}$ $\begin{cases} 25x + 4y = 200, \\ 4x + 25y = 641; \end{cases}$

$4x = 641 - 25y;\quad x = \frac{641 - 25y}{4};\quad 25\cdot\frac{641-25y}{4} + 4y = 200;$

$\frac{25\,(641 - 25y)}{4} + \frac{4y\cdot 4}{4} = \frac{200\cdot 4}{4};\ 25\,(641 - 25y) + 16y = 800;$

$16025 - 625y + 16y = 800;\quad -625y + 16y = 800 - 16025;$

$-609y = -15225;\quad y = -15225 : (-609);\ y = 25;$

$25x + 4\cdot 25 = 200;\quad 25x = 200 - 100;\quad 25x = 100;\ x = 4.$

Ответ: $x = 4;\ y = 25.$

е) $mx = c - ny;\quad x = \frac{c - ny}{m};\quad n\cdot\frac{c - ny}{m} - my = m;$

$\frac{nc - n^2y}{m} - \frac{my\cdot m}{m} = \frac{m\cdot m}{m};\ nc - n^2y - m^2y = m^2;$

$-n^2y - m^2y = m^2 - nc;\quad n^2y + m^2y = nc - m^2;$

$y\,(n^2 + m^2) = nc - m^2;$

$$y = \frac{nc - m^2}{n^2 + m^2};\quad x = \frac{c - n\cdot\dfrac{nc - m^2}{m^2 + n^2}}{m} = \frac{c - \dfrac{n^2c - m^2n}{m^2 + n^2}}{m} =$$

$$= \frac{\dfrac{cm^2 + cn^2 - n^2c + m^2n}{m^2 + n^2}}{m} = \frac{cm^2 + m^2n}{m\,(m^2 + n^2)} = \frac{m^2\,(c + n)}{m\,(m^2 + n^2)} = \frac{m\,(c+n)}{m^2+n^2}.$$

Ответ: $x = \frac{m\,(c + n)}{m^2 + n^2};\quad y = \frac{nc - m^2}{m^2 + n^2}.$

174. а) $\begin{cases} \frac{3x}{6} - \frac{2y}{6} = \frac{6}{6}, \\ \frac{3\,(2x - 1)}{6} - \frac{2\,(3y - 1)}{6} = \frac{5}{6}; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3\,(2x - 1) - 2\,(3y - 1) = 5; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 3 - 6y + 2 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 6y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x - y = 1; \end{cases}$

$x = 1 + y$ и т. д.

Ответ: $x = 4;\quad y = 3.$

б) $\begin{cases} \frac{3x - 1}{5} + \frac{3y\cdot 5}{5} - \frac{4\cdot 5}{5} = \frac{15\cdot 5}{5}, \\ \frac{3y - 5}{6} + \frac{2x\cdot 6}{6} - \frac{8\cdot 6}{6} = \frac{23\cdot 2}{6}; \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x-1+15y-20=75, \\ 3y-5+12x-48=46; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+15y=96, \\ 12x+\ \ 3y=99; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5y=32, \\ 4x+\ \ y=33; \end{cases}$$

$x=32-5y$ и т. д.

Ответ: $x=7;\quad y=5.$

в) $$\begin{cases} \dfrac{1-y}{p}=\dfrac{x}{q}, \\ y=\dfrac{p(x+y)}{p+q}-\dfrac{p-q}{q}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-y)q}{pq}=\dfrac{px}{pq}, \\ \dfrac{yq(p+q)}{q(p+q)}=\dfrac{pq(x+y)}{q(p+q)}-\dfrac{(p-q)(p+q)}{q(p+q)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-y)q=px, \\ yq(p+q)=pq(x+y)-(p^2-q^2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} q-qy=px, \\ ypq+yq^2=pqx+qpy-p^2+q^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -px-qy=-q, \\ -pqx+ypq+yq^2-pqy=-p^2+q^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} px+qy=q, \\ pqx-q^2y=p^2-q^2; \end{cases} \left| \begin{matrix} q \\ 1 \end{matrix} \right|$$

$$\begin{cases} pqx+q^2y=q^2 \\ \underline{pqx-q^2y=p^2-q^2} \end{cases} \qquad x=\frac{p^2}{2pq}=\frac{p}{2q}.$$
$$2pqx=p^2$$

Подставив значение x в уравнение $px+qy=q$, получим:

$$p\cdot\frac{p}{2q}+qy=q;\quad qy=q-\frac{p^2}{2q}=\frac{2q^2-p^2}{2q};\quad y=\frac{2q^2-p^2}{2q^2}.$$

Ответ: $x=\dfrac{p}{2q};\quad y=\dfrac{2q^2-p^2}{2q^2}.$

г) $$\begin{cases} 0{,}2x-(0{,}64-0{,}8y)=x+0{,}16, \\ 4y-\dfrac{2{,}5x+1}{y+0{,}6}=4y-\dfrac{5}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}2x-0{,}64+0{,}8y=x+0{,}16, \\ \dfrac{2{,}5x+1}{y+0{,}6}=\dfrac{5}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - 64 + 80y = 100x + 16, \\ 3(2{,}5x + 1) = 5(y + 0{,}6); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 16 + 20y = 25x + 4, \\ 7{,}5x + 3 = 5y + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 20y - 25x = 4 + 16, \\ 15x = 10y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x + 20y = 20, \\ 3x = 2y; \end{cases} \begin{cases} y - x = 1, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases} \quad y = 1 + x \text{ и т. д.}$$

Ответ: $x = 2, \quad y = 3$.

Примечание. Освобождаясь от знаменателя $y + 0{,}6$, содержащего неизвестное, мы предположим, что он не равен нулю; получив решение, подставляем значение y в этот знаменатель и убеждаемся, что он действительно не равен нулю: $y + 0{,}6 = 3 + 0{,}6 = 3{,}6 \neq 0$.

д) Здесь можно сделать так, чтобы первые дроби были противоположными и уничтожились при сложении уравнений. Умножим первое уравнение на -3:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{3}{x+y} - \frac{3}{x-y} = -6 \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7 \end{cases}$$

$$\frac{4}{x-y} - \frac{3}{x-y} = 1$$

$\frac{4-3}{x-y} = 1$; $\frac{1}{x-y} = 1$. Считаем, что $x - y \neq 0$ и умножим обе части уравнения на $x - y$. $1 = x - y$ или $x - y = 1$. Так как $\frac{1}{x-y} = 1$, то подставим полученное значение 1 вместо дроби $\frac{1}{x-y}$ в первое уравнение данной системы $\frac{1}{x+y} + 1 = 2$, откуда $\frac{1}{x+y} = 1$. Считаем, что $x + y \neq 0$ и получаем второе уравнение: $1 = x + y$ или $x + y = 1$.

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Сложением уравнений получаем: $2x = 2$, $x = 1$. Подставляем это значение: $1 + y = 1$, откуда $y = 1 - 1 = 0$.

Ответ: $x = 1; \quad y = 0$.

Проверяем знаменатели: $x - y = 1 - 0 = 1 \neq 0$; $x + y = 1 + 0 = 1 \neq 0$. Следовательно, решение не постороннее, правильное и полученная в конце система равносильна данной.

е) По основному свойству пропорции (см. § 10) данную систему преобразуем в следующую:

$$\begin{cases}(x-a)(a+b)=(y-a)(a-b),\\ x(a^3+b^3)=y(a^3-b^3).\end{cases}$$

Она будет равносильна данной, если ни один из знаменателей не обращается в нуль. Первое уравнение: $ax+bx-a^2-ab=ay-by-a^2+ab$; $x(a+b)-ab=y(a-b)+ab$; $x(a+b)-y(a-b)=2ab$.

Из второго уравнения: $x=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot y$. Подставляем значение x в первое уравнение:

$$\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{a^3+b^3}\cdot y-y(a-b)=2ab;\ y\left[\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}-(a-b)\right]=2ab;\ y\left[\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}-(a-b)\right]=2ab;$$

$$y(a-b)\left[\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}-1\right]=2ab;\ y(a-b)\frac{a^2+ab+b^2-a^2+ab-b^2}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=2ab;\ y(a-b)\frac{2ab}{a^2-ab+b^2}=2ab;\ y\cdot\frac{2ab(a-b)}{a^2-ab+b^2}=2ab;$$

$$y=2ab:\frac{2ab(a-b)}{a^2-ab+b^2};\quad y=\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}.$$

Подставим полученное значение y в выражение для x:

$$x=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot y=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}=$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Ответ: $x=\frac{a^2+ab+b}{a+b}$, $y=\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ при условии, что $y\neq0$, $y-a\neq0$, $a+b\neq0$, $a-b\neq0$.

176. Обозначим первое число через x, а второе через y. Тогда 10% от x составляют $\frac{x\cdot10}{100}$ или $0{,}1x$, а 20% от y составляют $0{,}2y$. По условию $0{,}1x+0{,}2y=62{,}4$. Аналогично составляем второе уравнение системы: $0{,}2x+0{,}1y=69$.

Ответ: первое число 252, второе 186.

177. Запись решения задачи можно оформить в виде следующей таблицы:

Ткань	Цена 1 *м* (руб.)	Кол-во ткани (*м*)	Стоимость (руб.)	Кол-во ткани (*м*)	Стоимость (руб.)
1-й сорт	x	20	$20x$	10	$10x$
2-й сорт	y	16	$+\ 16y$	8	$-\ 8y$
			49,2		5,4

Решаем получившуюся здесь систему уравнений:

$$\begin{cases} 20x + 16y = 49{,}2, \\ 10x - \ 8y = 5{,}4. \end{cases}$$

Ответ: цена 1 *м* первого сорта 1,5 руб., второго сорта 1,2 руб.

178. Пусть было x рабочих и они работали y дней. Тогда на выполнение этой работы требуется xy человеко-дней (т. е. 1 рабочий сделал бы ее за xy дней или xy рабочих — за 1 день). Если рабочих было бы $x+5$, то дней нужно было бы $y-4$ и они затратили бы $(x+5)(y-4)$ человеко-дней. Но объем работы остался прежний, поэтому $(x+5)(y-4)=xy$. Аналогично получим второе уравнение: $(x-10)(y+20)=xy$.

$$\begin{cases} (x+\ 5)(y-\ 4)=xy, \\ (x-10)(y+20)=xy. \end{cases}$$

После приведения к нормальной форме и решения получим: $x=20,\quad y=20$.

179. Ржи было собрано после повышения урожайности x тонн, а пшеницы y тонн. Но x тонн составляли 120% от прежнего урожая ржи, который равнялся $\frac{x\cdot 100}{120}$ или $\frac{5x}{6}$ тонн. Прежний урожай пшеницы равнялся $\frac{y\cdot 100}{130}$ или $\frac{10y}{13}$ тонн. Оба прежних урожая составляли вместе 500 *т*, а оба новых урожая составили вместе 630 *т*, что и дает нам два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{5x}{6}+\frac{10y}{13}=500, \\ x+y=630. \end{cases}$$

Ответ: пшеницы собрали после повышения урожайности 390 *т*, ржи 240 *т*. Проверку решения по условию задачи сделайте самостоятельно.

180. Трехтонка могла бы перевезти весь груз за x часов, а пятитонка — за y часов. Примем весь груз за 1 и выразим производительность каждой машины. За 1 час трехтонка может перевезти $\frac{1}{x}$ часть, а пятитонка $\frac{1}{y}$ часть всего груза, тогда вместе они перевезут $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть. Из условия следует, что обе машины могут перевезти за 1 час $\frac{1}{24}$ часть груза. Получаем уравнение: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}$. Обе машины за 15 часов перевезли $\frac{15}{24}$ или $\frac{5}{8}$ всего груза, а оставшиеся $\frac{3}{8}$ груза пятитонка перевезла за 15 часов. Поэтому $\frac{15}{y}=\frac{3}{8}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}, \\ \frac{15}{y}=\frac{3}{8}. \end{cases}$$

Из второго уравнения (пропорции) найдем: $y=\frac{15\cdot 8}{3}=40$. Подставим в первое уравнение значение y и найдем, что $x=60$.

Ответ: одна трехтонка может перевезти весь груз за 60 часов, а одна пятитонка — за 40 часов.

181. Пусть цифра единиц искомого числа x, а цифра его десятков y. Тогда искомое число равно $10y+x$, а число с переставленными цифрами равно $10x+y$. Так как частное от деления первого из них на второе есть 1, а остаток 9, то это выразится следующим уравнением: $10y+x=(10x+y)1+9$. Сумма цифр искомого числа $x+y$, и аналогично, согласно условию, получаем второе уравнение: $10y+x=(x+y)5+11$. После приведения системы к нормальной форме и решения получим: $x=6$, $y=7$.

Ответ: искомое число: $7\cdot 10+6$ или 76.

182. Обозначим скорость 1-го автомобиля, выехавшего из A, через x *км/ч*, а скорость второго через y *км/ч*.

Пусть C — точка встречи (нарисуйте схему). После встречи второй автомобиль проехал путь CA за $\frac{9}{8}$ часа, поэтому расстояние $CA=\frac{9}{8}y$ (*км*). Первый проехал CB за 2 часа, поэтому $CB=2x$ (*км*). Так как $CA+CB=AB=210$ *км*, то получим уравнение: $\frac{9}{8}y+2x=210$. С момента одновременного выезда и до момента встречи каждый затратил одинаковое время. Время первого автомобиля, проехавшего путь $\frac{9}{8}y$ *км* со скоростью x *км/ч*, равно $\frac{9y}{8}:x$ или $\frac{9y}{8x}$ часа. Время второго автомобиля от выезда до встречи равно $2x:y$ или $\frac{2x}{y}$ часа. Получаем второе уравнение: $\frac{9y}{8x}=\frac{2x}{y}$ или $9y^2=16x^2$. После извлечения корня (см. § 19) из обеих частей получим: $3y=4x$.

$$\begin{cases} 2x+\frac{9}{8}y=210, \\ 3y=4x. \end{cases}$$

Ответ: $x=60$ *км/ч*, $y=80$ *км/ч*. Сделайте проверку по условию задачи.

183. Скорость первого самолета x *км/ч*, скорость второго y *км/ч*. $1\frac{1}{3}$ часа составляет 45% времени, затраченного первым самолетом на весь его путь, поэтому все его время равно $\frac{1\frac{1}{3}\cdot 100}{45}$ или $\frac{80}{27}$ часа. Время, затраченное вторым самолетом на весь его путь, равно $\frac{1\frac{4}{5}\cdot 100}{55}$ или $\frac{36}{11}$ часа. Умножив скорость на время, получим пройденный путь: первым самолетом $\frac{80}{27}x$ *км* и вторым самолетом $\frac{36}{11}y$ *км*. Получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{80x}{27}:\frac{36y}{11}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}, \\ \frac{36y}{11}-\frac{80x}{27}=120; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{80x\cdot 11}{27\cdot 36y}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}, \\ \frac{9y}{11}-\frac{20x}{27}=30; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{220x}{243y} = \dfrac{9}{10}, \\ 243y - 220x = 8910; \end{cases}$$

$$220x = \frac{9}{10} \cdot 243y = \frac{2187y}{10}, \ x = \frac{2187y}{10 \cdot 220} = \frac{2187}{2200} y.$$

Подставив это значение x во второе уравнение, найдем y, а потом и x.

Но здесь для упрощения решения удобно ввести новые вспомогательные величины: $\frac{80x}{27} = p$ и $\frac{36y}{11} = q$. Тогда уравнения системы примут более простой вид:

$$\begin{cases} p : q = \dfrac{3}{4} : \dfrac{5}{6}, \\ q - p = 120; \end{cases} \qquad p = \left(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}\right) \cdot q = \frac{9}{10} q.$$

Подставив во второе уравнение вместо p его значение, получим:

$$q - \frac{9}{10} q = 120; \ 10q - 9q = 1200; \ q = 1200; \ p = \frac{9}{10} \cdot 1200 = 1080.$$

Теперь найдем x и y.

$$\frac{80x}{27} = 1080; \ 80x = 1080 \cdot 27; \ x = \frac{1080 \cdot 27}{80} = 364,5;$$

$$\frac{36y}{11} = 1200; \ 36y = 1200 \cdot 11; \ y = \frac{1200 \cdot 11}{36} = 366\frac{2}{3}.$$

Ответ: скорость первого самолета 364,5 *км/ч*, скорость второго $366\frac{2}{3}$ *км/ч*.

184. Если ветви параболы направлены вверх (коэффициент $a > 0$; см. п. 7 § 19), то вершина параболы будет снизу и поэтому функция y имеет наименьшее значение, но не имеет наибольшего значения (ветви продолжаются неограниченно). Такими будут функции (*а*), (*в*) и (*е*) (после раскрытия скобок убедимся, что коэффициент $a > 0$). У остальных же функций коэффициент при x^2 отрицательный, ветви их парабол направлены вниз, а вершина находится сверху, поэтому они имеют наибольшее значение и не имеют наименьшего.

185. Координаты вершин парабол: **а)** (0; 0) — обеих парабол (см. п. 6); **б)** (0; 79), (0; — 6), (0; 3) — см. п. 3; **в)** (1; 0), (— 7; 0) — см. п. 4 § 19.

186. а) Наименьшее значение функции: $y = -5$ есть ордината вершины параболы, ветви которой направлены вверх; **б)** наименьшее значение 0,9; **в)** наибольшее значение (ветви направлены вниз) есть 0; **г)** наименьшее значение есть 0; **д)** то же; **е)** наибольшее значение — 3.

187. а) Парабола общих точек с осью абсцисс не имеет, так как ее вершина имеет ординату 12 и ветви направлены вверх.

б) Имеет две общие точки, так как ордината вершины — 1, а ветви направлены вверх.

в) Имеет две общие точки, потому что вершина выше оси OX, а ветви направлены вниз.

г) Не имеет общих точек.

д) Одна общая точка — вершина на оси OX.

е) Одна общая точка — вершина на оси OX.

ж) То же.

188. а) Параболы пересекаются в двух точках, так как вершина первой параболы в начале координат и ветви направлены вверх, а вершина второй параболы в точке 1 на оси ординат и ее ветви направлены вниз.

б) Пересекаются.

в) Не пересекаются, ибо, хотя обе вершины парабол находятся на оси OY, из вершины, расположенной ниже (— 0;5), ветви направлены вниз, а из вершины, расположенной выше (1; 2), ветви направлены вверх.

г) Не пересекаются.

д) Не пересекаются, потому что первая парабола получена параллельным перенесением второй параболы вдоль оси ординат на 8 единиц.

е) Пересекаются.

ж) Не пересекаются, так как вершины обеих парабол находятся на оси абсцисс, но в разных точках, и ветви первой направлены вверх, а второй вниз.

189. а) Функции $3x^2 - 12$ и $-3x^2 + 12$ отличаются только знаками (противоположны по знаку), поэтому это две одинаковые параболы, направленные в противоположные стороны. Кроме того, у них общая ось (ось OY) и вершины симметричны относительно оси OX (12 и — 12). В результате параболы пересекаются на оси абсцисс, поэтому ординаты их точек пересечения равны нулю. Если в уравнение одной из парабол подставить вместо y число 0 и решить неполное квадратное уравнение (устно), то получим абсциссы точек пересечения: $x_1 = 2$ и $y_2 = -2$.

б) Первая парабола с прямой пересекается в точках (3; 4) и (—3; 4). Вторая парабола пересекается с прямой в точке (— 2, 8) (см. п. 5 § 16 и упражнение 140 (а).)

190. а) $y = x^2 + 5$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = (x - 3)^2$; г) $y = (x + 6)^2$; д) $y = -(x + 7)^2$.

191. а) $y = x^2 + 5x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = (x + 2{,}5)^2 - 5{,}25$. Парабола $y = x^2 + 5x + 1$ получается из параболы $y = x^2$

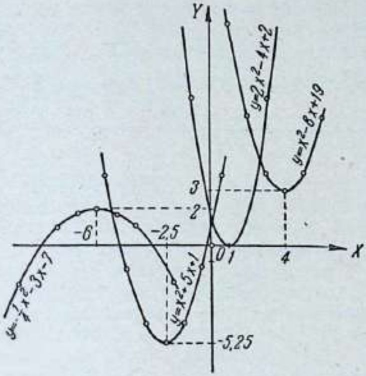


Рис. 17.

параллельным переносом вдоль оси OX влево на 2,5 единицы масштаба и затем параллельным переносом полученной параболы вдоль оси OY вниз на 5,25 единицы. График можно построить так. Произведем два указанных перемещения с вершиной (0; 0) параболы $y = x^2$ и получим вершину искомой параболы (— 2,5; — 5,25). Для построения других точек параболы $y = x^2 + 5x + 1$ достаточно через новую вершину провести новые оси координат параллельно OX и OY. Тогда относительно новых координатных осей отложим координаты точек параболы $y = x^2$ (см. таблицу в п. 2 § 19) — это и будут точки искомой параболы $y = x^2 + 5x + 1$ (рис. 17).

б) $y = x^2 - 8x + 19 = x^2 - 2.4\,x + 4^2 - 4^2 + 19 = (x^2 - 2\cdot 4x + 4^2) - 16 + 19 = (x-4)^2 + 3$. График строится аналогично (рис. 17).

192. а) Используем буквенные выражения (см. п. 5 § 19) для вычисления координат вершины параболы $y = x^2 - 3x + 4$. Здесь $p = -3$ и $q = 4$. Абсцисса вершины равна $-\frac{p}{2}$, ордината $\frac{4q-p^2}{4}$. Вычислим их: $x = -\frac{p}{2} = -\frac{-3}{2} = 1{,}5$; $y = \frac{4q-p^2}{4} = \frac{4\cdot 4-(-3)^2}{4} = \frac{16-9}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$.

Ответ: (1,5; 1,75).

б) Наименьшим значением функции $y = x^2 - 7x - 12$ будет ордината вершины ее параболы, так как ветви параболы направлены вверх ($a = 1 > 0$). Ордината вершины равна $\frac{4q-p^2}{4}$. Здесь $p = -7$, $q = -12$; $\frac{4q-p^2}{4} = \frac{4(-12)-(-7)^2}{4} = \frac{-48-49}{4} = \frac{-97}{4} = -24{,}25$.

Ответ: $-24{,}25$.

193. а) $y = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$. Парабола $y = 2x^2 - 4x + 2$ получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX вправо на 1 единицу и затем умножением ее ординат на 2 (растяжением ординат в 2 раза). Для построения графика переместим вершину (0; 0) параболы $y = x^2$ на 1 единицу вправо и через новую вершину (1; 0) проведем новую ось ординат параллельно OY. Из этой вершины ветвями вверх построим параболу $y = 2x^2$ (используем таблицу в п. 6) — это и будет искомая парабола $y = 2x^2 - 4x + 2$ (см. рис. 17).

б) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x - 7 = -\frac{1}{4}\ (x^2 + 12x + 28) =$

$$= -\frac{1}{4}(x^2 + 2\cdot 6x + 6^2 - 6^2 + 28) = -\frac{1}{4}[(x^2 + 2\cdot 6x + 6^2) - 36 + 28] = -\frac{1}{4}[(x+6)^2 - 8] = -\frac{1}{4}(x+6)^2 + 2.$$

Парабола $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x - 7$ получается из параболы $y = x^2$ перемещением влево на 6 единиц, умножением ординат полученной параболы на $\frac{1}{4}$ (т. е. делением ординат на 4 — сжатием ординат в 4 раза), умножением еще на -1 этих ординат, т. е. переменой направления ветвей (ветви пойдут уже вниз), и переносом полученной параболы на 2 единицы вверх. График строится аналогично (см. рис. 17). Можно использовать таблицу значений функции $y = \frac{1}{4}x^2$ (см. п. 6 § 19).

194. а) $y = 4x^2 + 11x - 3$; здесь $a = 4$, $b = 11$ и $c = -3$. Вершина параболы имеет абсциссу $-\frac{b}{2a}$ и ординату $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Вычислим их:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{11}{2\cdot 4} = -\frac{11}{8} = -1\frac{3}{8} = -1{,}375; \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot 4\cdot(-3) - 11^2}{4\cdot 4} = \frac{-48 - 121}{16} = \frac{-169}{16} = -10\frac{9}{16} = -10{,}5625.$$

Ответ: $(-1{,}375;\ -10{,}5625)$.

$y = -x^2 - 4x + 5$; здесь $a = -1$, $b = -4$, $c = 5$. Вычисляем точно так же.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2; \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)5 - (-4)^2}{4(-1)} = 9.$$

Ответ: $(-2;\ 9)$.

б) Квадратная функция $y = 6x^2 - x + 1$ обращена ветвями вверх ($a = 6 > 0$) и поэтому имеет наименьшее значение — это ордината вершины параболы. Вычислим ее по формуле $\frac{4ac - b^2}{4a}$, где $a = 6$, $b = -1$, $c = 1$;

$$\frac{4\cdot 6\cdot 1 - (-1)^2}{4\cdot 6} = \frac{24 - 1}{24} = \frac{23}{24}.$$

Ответ: $\frac{23}{24}$.

График функции $y = -x^2 + 9x + 10$ обращена ветвями вниз, поэтому она имеет наибольшее значение. Вычислим ординату вершины ее параболы: $a = -1$, $b = 9$, $c = 10$; $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)10 - 9^2}{4(-1)} = \frac{-40 - 81}{-4} = \frac{-121}{-4} = 30{,}25$.

Ответ: 30,25.

195. а) Кубическим корнем из числа a называется такое число ($\sqrt[3]{a}$), куб которого равен a. Корнем степени n (n — натуральное число, не меньшее двух) из числа a называется такое число ($\sqrt[n]{a}$), n-я степень которого равна a. Равенства $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ и $(\sqrt[n]{a})^n = a$ кратко выражают эти определения при помощи математических знаков.

б) Действие, посредством которого отыскивается корень любой натуральной степени, называется извлечением корня. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как

$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$; $\sqrt[n]{x^{mn}}=x^m$, так как $(x^m)^n= = x^{m\cdot n}=x^{mn}$ (см. п. 8 § 13).

в) Действие извлечения корня обратно действию возведения в степень (см. п. 3 § 11). Так, например, если возводим в квадрат $(5^2=x)$, то даны основания и показатель степени, а ищем число, которому равна степень (25). При извлечении же квадратного корня $(\sqrt{25}=z)$ дано число (25), которому равна степень и которое теперь уже называется подкоренным числом, и дан показатель (2), который теперь называется показателем корня, а требуется найти основание степени (5), которое и называется корнем квадратным из данного числа (25).

196. а) Корни $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-49\cdot 100}$, $\sqrt{(-5)^3}$ не имеют смысла, так как подкоренное число в каждом из них отрицательное (см. п. 1). Остальные корни имеют неотрицательное подкоренное число и поэтому существуют.

б) Допустимыми будут те значения букв, при которых подкоренное выражение неотрицательно. $8a \geqslant 0$, если $a \geqslant 0$; $-9a \geqslant 0$, если $a \leqslant 0$; $-36a^2=0$, если $a=0$ ($-36a^2>0$ невозможно ни при каких значениях a); $6a^2 \geqslant 0$ при любых значениях a; $-50a^3 \geqslant 0$, если $a \leqslant 0$; $(x-1)^2 \geqslant 0$ при любых значениях x; $5-x \geqslant 0$, если $x \leqslant 5$; $x-12 \geqslant 0$, если $x \geqslant 12$; $18a^2b \geqslant 0$, если $b \geqslant 0$ и a — любое число; $27+x \geqslant 0$, если $x \geqslant -27$; $x^2+y^3 \geqslant 0$, если x — любое число и $y \geqslant 0$ или в случае отрицательного значения y должно выполняться неравенство $|y^3| \leqslant x^2$; $(30-x)^3 \geqslant 0$, если $x \leqslant 30$.

197. а) 9; 13; 20; 50; 100; 0,3; 0,8; 1; 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{5}{2}$.

б) $6|x|$; a^2; $|a^3|$; $|1-a|$; $(x-3)^2$; $|2+y|^5$.

в) $\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-4\right)^2}$; получим верное равенство, если возьмем арифметическое значение каждого корня:

$$\left|4-\frac{9}{2}\right|=\left|\frac{9}{2}-4\right|;\ \left|-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|;\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Или можно записать так: $-\left(4-\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{2}-4$; $-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (см. п. 2 § 20).

198. а) $\sqrt{0{,}64\cdot49}=\sqrt{0{,}64}\cdot\sqrt{49}=0{,}8\cdot7=5{,}6;$
$0{,}1\cdot12\cdot1{,}1;\ 25\cdot0{,}01\cdot13;\ \frac{1}{3}\cdot14\cdot\frac{5}{9}\cdot0{,}4.$

б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot8}=\sqrt{16}=4;\quad\sqrt{75\cdot6\cdot32}=$
$=\sqrt{25\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot16}=\sqrt{25\cdot9\cdot4\cdot16}=5\cdot3\cdot2\cdot4=120;$
$\sqrt{2{,}25\cdot40\cdot5\cdot2}=\sqrt{900}=30;\qquad\sqrt{\frac{3}{8}\cdot18\cdot27\cdot0{,}0225}=$
$=\sqrt{\frac{81\cdot9}{4}\cdot0{,}0225}=\frac{9\cdot3}{2}\cdot0{,}15=2{,}025.$

199. а) $\sqrt{\frac{100}{81}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{81}}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9};\ \frac{3}{2};\ \frac{7\cdot4}{5}=5{,}6;$
$\frac{2\ 11\cdot30}{8\cdot13}=\frac{165}{26}=6\frac{9}{26};\ \frac{4\cdot0{,}6\cdot100}{0{,}02\cdot9\cdot14}=95\frac{5}{21}.$

б) Чтобы разделить квадратные корни, достаточно разделить подкоренное число делимого на подкоренное число делителя и из частного извлечь квадратный корень:

$\sqrt{72}:\sqrt{2}=\sqrt{72:2}=\sqrt{36}=6;\quad\sqrt{245}:\sqrt{5}=$
$=7;\quad0{,}9;\quad0{,}6;\quad0{,}7.$

в) $5^2;\ 2^3a;\ 2\cdot3a^4b^2;\ \frac{5x^5}{15y^8}=\frac{x^5}{3y^8};\ \frac{a^8m^3}{n^{10}}.$

200. а) $5\cdot3\sqrt{7}=15\sqrt{7};\ 0{,}3\cdot8\cdot7=16{,}8;\ \sqrt{9\cdot2\cdot25}=$
$=3\cdot5\sqrt{2}=15\sqrt{2};\quad\sqrt{100\cdot9\cdot3\cdot25\cdot5}=$
$=10\cdot3\cdot5\ \sqrt{3\cdot5}=150\sqrt{15};\quad4ab^2;\ \sqrt{16\cdot3a^4ab^{12}c^2c}=$
$=4a^2b^6c\sqrt{3ac};\ \sqrt{63ab^{21}c^{2n}}=\sqrt{9\cdot7ab^{20}bc^{2n}}=3b^{10}c^n\sqrt{7ab};$
$\sqrt{(a+b)^2(a+b)}=(a+b)\sqrt{a+b};\ \sqrt{4\cdot2a^6a(a+b)^{4n}}=$
$=2a^3(a+b)^{2n}\sqrt{2a}.$

б) $5\sqrt{7}=\sqrt{5^2\cdot7}=\sqrt{175};\ \sqrt{0{,}25\cdot10}=\sqrt{2{,}5};$
$\sqrt{\frac{1}{9}\cdot27}=\sqrt{3};\sqrt{\frac{49\cdot5}{14}}=\sqrt{\frac{35}{2}};\ \sqrt{\frac{x^2}{x}}=\sqrt{x};\sqrt{\frac{4a^2x}{4a}}=$
$=\sqrt{ax};\ \sqrt{b^6\cdot b^4}=\sqrt{b^{10}};\sqrt{\frac{x^2y^4x}{y^3}}=\sqrt{x^3y};\ \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}}=$
$=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\ \sqrt{\frac{(x+y)^2\,{}'a-b)^2}{(a-b)^2(x+y)x}}=\sqrt{\frac{x+y}{y}}.$

201. а) Можно внести 4 под знак второго корня: $\sqrt{80}-2-\sqrt{80}=-2$. $\sqrt{80}$ и $-\sqrt{80}$ уничтожаются, $-2=-2$, что верно; тождество доказано.

А здесь, например, вынесем множители из-под знака корня: $\sqrt{9\cdot7}+12-3\sqrt{7}-4=8;\ 3\sqrt{7}+12-3\sqrt{7}-$
$-4=8;\ 8=8.$

б) $(0{,}5\sqrt{49\cdot 2}+4\sqrt{9\cdot 2})-\Bigl(0{,}2\sqrt{25\cdot 2}+$
$+\frac{1}{3}\sqrt{36\cdot 2}-\sqrt{100\cdot 2}\Bigr)=0{,}5\cdot 7\sqrt{2}+4\cdot 3\sqrt{2}-0{,}2\cdot 5\sqrt{2}-$
$-\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}+10\sqrt{2}=(3{,}5+12-1-2+10)\sqrt{2}=$
$=22{,}5\sqrt{2};$
$\Bigl(\frac{1}{6}\sqrt{4\cdot 15}-\sqrt{9\cdot 6}\Bigr)-(2{,}5\sqrt{100\cdot 6}-0{,}2\sqrt{15})=\frac{1}{3}\sqrt{15}-$
$-3\sqrt{6}-25\sqrt{6}+0{,}2\sqrt{15}=\Bigl(\frac{1}{3}+0{,}2\Bigr)\sqrt{15}-(3+25)\sqrt{6}=$
$=\frac{8}{15}\sqrt{15}-28\sqrt{6}.$

в) $3\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$; $5\sqrt{3}=\sqrt{75}$; $\sqrt{45}<$ $<\sqrt{75}$, поэтому $3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$.

$0{,}5\sqrt{2}>0{,}3\sqrt{3}$; $7\sqrt{0{,}2}>3{,}5\sqrt{0{,}4}$.

202. а) Возведите эти же числа в квадрат умножением, округлите полученные результаты до четырех значащих цифр (см. п. 4 § 2) и сравните их с числами, полученными по таблице квадратов (см.: Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы). Это и будет проверка результатов.

б) Воспользуйтесь таблицей квадратных корней из указанной брошюры В. М. Брадиса. Найденное значение корня возведите в квадрат умножением (или по таблице квадратов), округлите результат до нужной цифры и сравните с подкоренным числом. Табличные значения являются приближенными и расхождение полученного квадрата с подкоренным числом обычно не должно превышать одну единицу крайнего справа разряда.

203. а) Нужно найти такое число, квадрат которого приближенно равен подкоренному числу 1478. Мы знаем квадраты круглых десятков: $10^2=100$; $20^2=400$; $30^2=900$; $40^2=1600$. Следовательно, $30^2<1478<40^2$, т. е. искомый корень есть число x, такое что $30<x<40$. Так как 1478 ближе к 1600, чем к 900, то и x ближе к 40, чем к 30. Испытаем число 38. Возведем его в квадрат: $38^2=1444$, т. е. меньше 1478. Испытаем число на 1 больше: $39^2=1521$ — больше 1478. Таким образом, $38<x<39$, поэтому $\sqrt{1478}\approx 38$ или $\sqrt{1478}\approx 39$ с точностью до 1 (с недостатком 38, с избытком 39). Аналогично можно искать значение этого корня и с большей степенью точности.

б) Так как подкоренное число 7,5 есть квадрат искомого числа, то значение 7,5 откладываем на оси ординат и из полученной точки на этой оси восставим к ней перпендикуляр до пересечения с параболой $y = x^2$ в первом квадранте (нам нужен только арифметический корень). Из полученной точки графика (ее ордината 7,5) опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Полученное значение абсциссы и есть искомый квадратный корень из ординаты 7,5. Полученное число проверьте возведением в квадрат.

204. а) См. упражнение 203 (б).

б) Площадь прямоугольника равна произведению корней — длин его смежных сторон: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{8,1} = \sqrt{10 \cdot 8,1} = \sqrt{81} = 9$ (квадратных единиц).

в) $\sqrt{35} : \sqrt{5} = \sqrt{35 : 5} = \sqrt{7}$ (линейных единиц). Отношение длин основания и высоты прямоугольника: $\sqrt{7} : \sqrt{5} = \sqrt{7:5} = \sqrt{1,4}$.

205. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ всегда имеет один корень, равный нулю, а второй корень, отличный от нуля $\left(-\frac{b}{a}\right)$. Следовательно, парабола, изображающая квадратную функцию $ax^2 + bx$, пересекает ось OX в точках с абсциссами 0 и $-\frac{b}{a}$. Эта парабола всегда проходит через начало координат, но вершина не находится в точке (0; 0), так как тогда оба корня уравнения были бы равны нулю.

Корни уравнения $ax^2 + c = 0$ на графике связаны с параболой, изображающей функцию $y = ax^2 + c$. Парабола $y = ax^2$ имеет вершину в начале координат (см. п. 6 § 19). Парабола $y = ax^2 + c$, подобно параболе $y = x^2 + q$ (см. п. 3 § 19), получается из параболы $y = ax^2$ перемещением вдоль оси OY на c единиц. При этом вершина параболы остается на оси OY, хотя и не будет в начале координат. Если $c > 0$, то указанное перемещение совершено вверх и вершина параболы будет выше оси OX. Если при этом еще $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и она не пересекает ось OX. Следовательно, уравнение не имеет решения. В самом деле, корни $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ при $c > 0$ и $a > 0$ не существуют $\left(-\frac{c}{a} < 0\right)$. То же самое получим и при $c<0$ и $a<0$ (вершина параболы из начала координат переместилась вниз и ветви направлены вниз). Если же $c<0$, но $a>0$, то вершина переместилась вниз, но ветви направлены вверх, поэтому ось OX пересекается параболой в двух симметричных точках относительно OY и уравнение имеет два корня, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку. Этими корнями будут абсциссы точек пересечения параболы с осью OX. Аналогично уравнение $ax^2+c=0$ имеет два таких же корня, если $c>0$, но $a<0$ (вершина выше OX, а ветви направлены вниз). В этих двух случаях $-\frac{c}{a}>0$ и корни существуют.

Вершина параболы $y=ax^2$ находится в начале координат, парабола имеет только одну общую точку с осью OX. Абсцисса этой точки — нуль, поэтому уравнение $ax^2=0$ имеет два корня: $x_1=x_2=0$.

208. -1; 2,2.

209. а) $x_1\approx-2{,}8$; $x_2\approx1{,}7$. **б)** $x_1=x_2=-1{,}5$. **в)** Нет корней.

210. а) Не равносильны, так как квадратное уравнение имеет два корня: $x=\pm\sqrt{4}$ или $x=\pm2$, а уравнение 1-й степени имеет только один корень: $x=2$.

б) Не равносильны по той же причине. Если уравнение $x+1=0$ имеет единственный корень $x=-1$, то квадратное $x^2+2x+1=0$ имеет два таких равных корня: $x_1=x_2=-1$. Их можно получить, например, таким путем. Левую часть разложим на множители по формуле квадрата суммы (см. п. 8 § 13): $(x+1)^2=0$ или $(x+1)(x+1)=0$, откуда, приравняв нулю каждый сомножитель, получим: $x+1=0$, $x_1=-1$ и $x+1=0$, $x_2=-1$.

в) Не равносильны, так как у первого уравнения два корня: $x_1=0$ и $x_2=0$, а у второго — один: $x=0$.

г) Равносильны, так как каждое имеет только такие корни: $x_1=5$ и $x_2=-5$.

д) Первое уравнение: $(10x)^2-3^2=0$; $(10x-3)\times\times(10x+3)=0$; $10x-3=0$; $10x=3$; $x_1=0{,}3$; $10x+3==0$; $10x=-3$; $x_2=-0{,}3$. Второе уравнение: $(10x-3)\times\times(10x-3)=0$, откуда $10x-3=0$, $x_1=0{,}3$ и $10x-3==0$, $x_2=0{,}3$. Уравнения не равносильны.

211. а) Не отличается. Это другая формулировка той же теоремы Виета, в которой дано уравнение

$x^2 + px + q = 0$, а этим заданы и его коэффициенты p и q и, кроме того, даны два числа x_1 и x_2, каждое из которых при подстановке в данное уравнение вместо x дает равенство $0 = 0$ (т. е. даны корни этого уравнения). Доказывается же в теореме Виета верность следующих двух равенств: $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, которые не изменяются от того, читать их слева направо или наоборот. Первое равенство не нарушится от умножения обеих частей на -1. По второй формулировке доказываются равенства: $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$, т. е. фактически то же самое, что требуется доказать по первой формулировке.

б) $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4}$. Остается доказать, что $\frac{p^2}{4} = q$, тогда теорема Виета будет верна и для приведенного квадратного уравнения с равными корнями. Но корни равны тогда, когда подкоренное выражение в формуле корней приведенного уравнения равно нулю: $\frac{p^2}{4} - q = 0$, откуда получаем $\frac{p^2}{4} = q$. Следовательно, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорема Виета верна и в этом случае.

213. Способом подбора находим корни: **а)** 2 и 5; **б)** 2 и -5; **в)** -2 и 5; **г)** -2 и -5; **д)** 1 и 3; **е)** 1 и -3; **ж)** -1 и 2; **з)** -1 и -1; **и)** 3 и 4; **к)** 3 и -4.

215. **а)** Оба корня положительны.

б) Оба корня отрицательны.

в) Положительный корень имеет большую абсолютную величину.

г) Отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

216. **а)** Подбором находим корни 1 и 5. Вычисляем по формуле:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{(-3)^2 - 5} = 3 \pm$$
$$\pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2;\ x_1 = 5;\ x_2 = 1$$

(не имеет значения, какой корень считать первым и какой вторым).

б) Подбором находим корни -1 и -9. Вычислим:

$$x = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{5^2 - 9} = -5 \pm \sqrt{25 - 9} = -5 \pm \sqrt{16} =$$
$$= -5 \pm 4;\ x_1 = -1;\ x_2 = -9.$$

в) -1 и 6. $x = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - (-6)} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25+24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$; $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6$; $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$.

г) 1 и -9. $x = -4 \pm \sqrt{16+9} = -4 \pm \sqrt{25} = -4 \pm 5$.

Проверка. 1) $1^2 + 8 \cdot 1 - 9 = 1 + 8 - 9 = 9 - 9 = 0$. $0 = 0$; 2) $(-9)^2 + 8(-9) - 9 = 81 - 72 - 9 = 81 - 81 = 0$, $0 = 0$.

д) 4 и 9. Уравнение $x^2 - 13x + 36 = 0$ удобно решать по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, так как здесь p равно нечетному числу и не делится на 2 (в целых числах). Здесь $a = 1$, $b = -13$, $c = 36$.

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2};\quad x_1 = \frac{13+5}{2} = 9;\quad x_2 = \frac{13-5}{2} = 4.$$

Сделайте проверку.

е) Неполное квадратное уравнение типа $ax^2 + c = 0$ решается так: $3x^2 - 24 = 0$; $3x^2 = 24$; $x^2 = 24 : 3$; $x^2 = 8$; $x = \pm\sqrt{8}$; $x = \pm\sqrt{4 \cdot 2} = \pm 2\sqrt{2}$; $x_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = -2\sqrt{2}$.

ж) Неполное квадратное уравнение типа $ax^2 = 0$ всегда имеет корни $x_1 = x_2 = 0$. Здесь их можно получить так: $9x^2 = 0$; $x^2 = 0 : 9$; $x^2 = 0$; $x = \pm\sqrt{0} = 0$. $x_1 = 0$; $x_2 = 0$.

з) Неполное квадратное уравнение типа $ax^2 + bx = 0$ решается так: $4x^2 + x = 0$; $x(4x + 1) = 0$; $x_1 = 0$; $4x + 1 = 0$; $4x = -1$; $x = -1 : 4$; $x_2 = -0{,}25$.

и) Решаем по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. В данном уравнении: $a = 10$, $b = -3$, $c = -1$. Подставим в формулу:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10(-1)}}{2 \cdot 10} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{20} = \frac{3 \pm 7}{20};\quad x_1 = \frac{3+7}{20} = 0{,}5;\quad x_2 = \frac{3-7}{20} = \frac{-4}{20} = -0{,}2.$$

к) $a = 4,\ b = 1,\ c = -3.\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4(-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8};\ x_1 = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};\ x_2 = -1.$

л) $a = 2,\ b = -7,\ c = 3.\ x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4};\ x_1 = 3;\ x_2 = 0{,}5.$

Сделаем проверку корней подстановкой их в уравнение: 1) $2x^2 - 7x + 3 = 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 9 - 21 + 3 = 18 - 18 = 0$. Левая и правая части равны нулю: $0 = 0$. 2) $2 \cdot 0{,}5^2 - 7 \cdot 0{,}5 + 3 = 2 \cdot 0{,}25 - 3{,}5 + 3 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$; $0 = 0$. Корни верные.

м) $a = 5,\ b = 12,\ c = 4.\ x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{10} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{-12 \pm 8}{10};\ x_1 = \frac{-12 + 8}{10} = \frac{-4}{10} = -0{,}4;\ x_2 = \frac{-12 - 8}{10} = \frac{-20}{10} = -2.$

Корни проверьте самостоятельно.

217. а) $5x^2 - 3x - 2x^2 - 9x = 0;\ 3x^2 - 12x = 0;\ x^2 - 4x = 0;\ x(x - 4) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 4.$

б) $9x^2 - 12x + 4 = 8(x^2 + 2x + 1) - 100;\ 9x^2 - 12x + 4 = 8x^2 + 16x + 8 - 100;\ 9x^2 - 12x + 4 - 8x^2 - 16x - 8 + 100 = 0;\ x^2 - 28x + 96 = 0;\ x = 14 \pm \sqrt{14^2 - 96} = 14 \pm \sqrt{196 - 96} = 14 \pm 10;\ x_1 = 24;\ x_2 = 4.$

Проверка. Обязательно нужно подставлять корни в данное уравнение, а не в какое-нибудь полученное из него: 1) $(3 \cdot 24 - 2)^2 = 8(24 + 1)^2 - 100;\ (72 - 2)^2 = 8 \cdot 25^2 - 100;$ $70^2 = 8 \cdot 625 - 100;\ 4\,900 = 5\,000 - 100;\ 4\,900 = 4\,900;$ 2) $(3 \cdot 4 - 2)^2 = 8(4 + 1)^2 - 100;\ (12 - 2)^2 = 8 \cdot 5^2 - 100;$ $10^2 = 8 \cdot 25 - 100;\ 100 = 200 - 100;\ 100 = 100.$

в) Ответ: 9 и 4.

г) Число, обозначенное буквой a, здесь считается известным, поэтому оно войдет в состав свободного члена. $x^2 + 2x + 1 - a^2 = 0;\quad p = 2,\quad q = 1 - a^2;\quad x = -1 \pm \sqrt{1^2 - (1 - a^2)} = -1 \pm \sqrt{1 - 1 + a^2} = -1 \pm \sqrt{a^2} = -1 \pm a;\ x_1 = -1 + a = a - 1;\ x_2 = -1 - a = -(1 + a).$

Проверку решения уравнения, заданного в нормальном виде, можно сделать по теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = -(1 + a) \times (a - 1) = -(a^2 - 1) = q$. $x_1 + x_2 = a - 1 - 1 - a = -2 = -p$.

д) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{59}{8} = 8$; $\frac{12x^2}{24} - \frac{8x}{24} + \frac{59 \cdot 3}{24} = \frac{8 \cdot 24}{24}$; $12x^2 - 8x + 177 = 192$; $12x^2 - 8x - 15 = 0$; $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = -\frac{5}{6}$.

е) Ответ: $x_1 = 18$; $x_2 = 15{,}8$.

218. а) $x^2 + 9x + 14 = x^2 + 2 \cdot \frac{9}{2} x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 14 = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + 14 = 0$; $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} - 14$; $x + \frac{9}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4} - 14}$; $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14}$. Выполнив действия, получим корни: $x_1 = -2$ и $x_2 = -7$.

б) Корни приведенного квадратного уравнения равны половине коэффицента при x, взятого с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Корни квадратного уравнения равны дроби, знаменатель которой равен удвоенному первому коэффициенту, а числитель второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата второго коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента и свободного члена:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

в) По формуле корней полного неприведенного уравнения можно решать любое квадратное уравнение. Так, решая полное приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$ по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, подставляем в формулу $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Если решать по этой формуле неполные квадратные уравнения, то вместо b или c подставляем нуль. Можно подставить нули вместо b и c одновременно, тогда получим корни уравнения $ax^2 = 0$. Убедитесь в этом на конкретных примерах.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить и по формуле приведенного уравнения, если данное уравнение заменить равносильным ему приведенным уравнением: $x + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Придется тогда в формулу $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ подставлять $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$, т. е. дробные значения, что усложняет вычисления и поэтому неудобно.

219. а) $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ — равносильные уравнения. Но по теореме Виета для приведенного уравнения $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ имеем: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (см. п. 5 § 21). Здесь x_1 и x_2 — корни как второго, так и первого уравнения, поэтому для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеем: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Итак, получили следствие из теоремы Виета: сумма корней полного неприведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, деленному на первый коэффициент, а произведение корней равно свободному члену, деленному на первый коэффициент.

б) Теорема Виета верна и для неполных квадратных уравнений. Убедитесь в этом самостоятельно. Возьмите в п. 2 § 21 в общем виде неполные квадратные уравнения и подставьте их корни в равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Они окажутся верными.

в) Дано: $a + b = -p$ и $ab = q$. Требуется доказать, что a и b являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Подставим вместо x число a, получим: $a^2 + pa + q = 0$. Теперь p и q заменим их значениями, выраженными через a и b: $q = ab$ и $p = -(a + b)$; $a^2 - (a + b)a + ab = 0$; $a^2 - a^2 - ab + ab = 0$; $0 = 0$. Итак, число a обращает уравнение $x^2 + px + q$ в верное равенство, поэтому является его корнем. Аналогично убедимся, что и b есть корень этого уравнения. Теорема доказана.

220. а) $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$; $p = -(-1 + 15) = -14$; $q = -1 \cdot 15 = -15$; $x^2 - 14x - 15 = 0$. Решив это уравнение по формуле, проверим правильно ли оно составлено. Сделайте это сами.

Проверку решения уравнения, заданного в нормальном виде, можно сделать по теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = -(1+a) \times (a-1) = -(a^2-1) = q$. $x_1 + x_2 = a - 1 - 1 - a = -2 = -p$.

д) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{59}{8} = 8$; $\frac{12x^2}{24} - \frac{8x}{24} + \frac{59 \cdot 3}{24} = \frac{8 \cdot 24}{24}$; $12x^2 - 8x + 177 = 192$; $12x^2 - 8x - 15 = 0$; $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = -\frac{5}{6}$.

е) Ответ: $x_1 = 18$; $x_2 = 15{,}8$.

218. **а)** $x^2 + 9x + 14 = x^2 + 2 \cdot \frac{9}{2}x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 14 = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + 14 = 0$; $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} - 14$; $x + \frac{9}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4} - 14}$; $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14}$. Выполнив действия, получим корни: $x_1 = -2$ и $x_2 = -7$.

б) Корни приведенного квадратного уравнения равны половине коэффициента при x, взятого с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Корни квадратного уравнения равны дроби, знаменатель которой равен удвоенному первому коэффициенту, а числитель второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата второго коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента и свободного члена:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

в) По формуле корней полного неприведенного уравнения можно решать любое квадратное уравнение. Так, решая полное приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$ по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, подставляем в формулу $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Если решать по этой формуле неполные квадратные уравнения, то вместо b или c подставляем нуль. Можно подставить нули вместо b и c одновременно, тогда получим корни уравнения $ax^2 = 0$. Убедитесь в этом на конкретных примерах.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить и по формуле приведенного уравнения, если данное уравнение заменить равносильным ему приведенным уравнением: $x + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Придется тогда в формулу $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ подставлять $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$, т. е. дробные значения, что усложняет вычисления и поэтому неудобно.

219. а) $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ — равносильные уравнения. Но по теореме Виета для приведенного уравнения $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ имеем: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (см. п. 5 § 21). Здесь x_1 и x_2 — корни как второго, так и первого уравнения, поэтому для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеем: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Итак, получили следствие из теоремы Виета: сумма корней полного неприведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, деленному на первый коэффициент, а произведение корней равно свободному члену, деленному на первый коэффициент.

б) Теорема Виета верна и для неполных квадратных уравнений. Убедитесь в этом самостоятельно. Возьмите в п. 2 § 21 в общем виде неполные квадратные уравнения и подставьте их корни в равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Они окажутся верными.

в) Дано: $a + b = -p$ и $ab = q$. Требуется доказать, что a и b являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Подставим вместо x число a, получим: $a^2 + pa + q = 0$. Теперь p и q заменим их значениями, выраженными через a и b: $q = ab$ и $p = -(a + b)$; $a^2 - (a + b)a + ab = 0$; $a^2 - a^2 - ab + ab = 0$; $0 = 0$. Итак, число a обращает уравнение $x^2 + px + q$ в верное равенство, поэтому является его корнем. Аналогично убедимся, что и b есть корень этого уравнения. Теорема доказана.

220. а) $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$; $p = -(-1 + 15) = -14$; $q = -1 \cdot 15 = -15$; $x^2 - 14x - 15 = 0$. Решив это уравнение по формуле, проверим правильно ли оно составлено. Сделайте это сами.

б) $p=-\left(-\frac{2}{3}-3\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{4}{6}-3\frac{3}{6}\right)=$ $=-\left(-3\frac{7}{6}\right)=4\frac{1}{6}$; $q=-\frac{2}{3}\cdot\left(-3\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}=$ $=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$; $x^2+4\frac{1}{6}x+2\frac{1}{3}=0$ или $x^2-\frac{25}{6}x+\frac{7}{3}=0$, или $6x^2-25x+14=0$.

в) $p=-(-0{,}35+0)=-(-0{,}35)=0{,}35$; $q=$ $=-0{,}35\cdot 0=0$; $x^2+0{,}35x+0=0$; $x^2+0{,}35x=0$; $100x^2+35x=0$; $20x^2+7x=0$.

г) $p=-(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})=-2$; $q=$ $=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1^2-(\sqrt{3})^2=1-3=-2$; x^2- $-2x-2=0$.

д) $p=-(\sqrt{2}+5+\sqrt{2}-5)=-2\sqrt{2}$; $q=$ $=(\sqrt{2}+5)(\sqrt{2}-5)=(\sqrt{2})^2-5^2=2-25=-23$; x^2- $-2\sqrt{2}x-23=0$.

е) $p=-(0{,}5\sqrt{7}-0{,}5\sqrt{7})=-0=0$; $q=$ $=0{,}5\sqrt{7}\,(-0{,}5\sqrt{7})=-0{,}5^2(\sqrt{7})^2=-0{,}25\cdot 7=-1{,}75$; $x^2+0\cdot x-1{,}75=0$; $x^2-1{,}75=0$; $100x^2-175=0$; $4x^2-7=0$.

221. а) Равно нулю (см. определение корней квадратного трехчлена в п. 6 § 21).

б) $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$. Квадратный трехчлен вида x^2+px+q, имеющий корни, равен произведению двух сомножителей: один является разностью между аргументом и одним корнем, а другой есть разность между аргументом и другим корнем:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Квадратный трехчлен вида ax^2+bx+c с неотрицательным дискриминантом равен произведению трех сомножителей: первого коэффициента, разности между аргументом и одним корнем и разности между аргументом и другим корнем.

222. а) Найдем корни квадратного трехчлена. Для этого приравняем его нулю и решим полученное квадратное уравнение, корни которого будут корнями данного трехчлена:

$5x^2 + 17x - 126 = 0$; $x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 5(-126)}}{2 \cdot 5} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 2520}}{10} = \frac{-17 \pm \sqrt{2809}}{10}$.

Корень из 2809 можно найти так. Предположим, что 2809 есть полный квадрат. Тогда цифра 9 говорит, что цифра единиц будет или 3 или 7 (ибо $3^2 = 9$ и $7^2 = 49$). Но $50^2 < 2809 < 60^2$, ибо $2500 < 2809 < 3600$. Искомое число 53 или 57. Проверяем $53^2 = (50 + 3)^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$.

$x = \frac{-17 \pm 53}{10}$; $x_1 = 3{,}6$ и $x_2 = -7$;

$5x^2 + 17x - 126 = 5(x - 3{,}6)[x - (-7)] = 5(x - 3{,}6)(x + 7)$.

Ответ: $5(x - 3{,}6)(x + 7)$ или $(5x - 18)(x + 7)$.

б) Ответ: $(z - 18)(z - 11)$.

в) Ответ: $3\left(m + \frac{8}{3}\right)(m - 5)$ или $(3m + 8)(m - 5)$.

г) Ответ: $(a + 6)(a + 19)$.

д) Ответ: $(0{,}9n - 0{,}1)(n - 1)$.

Примечание. $0{,}9n^2 - n + 0{,}1 = 0$; $9n^2 - 10n + 1 = 0$; $n = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$.

е) Ответ: $(9 - y)(y + 5)$.

Примечание. $-y^2 + 4y + 45 = 0$; $y^2 - 4y - 45 = 0$; $y = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm 7$. $y_1 = 9$; $y_2 = -5$; $-y^2 + 4y + 45 = -1(y - 9)(y + 5) = (9 - y)(y + 5)$.

223. а) Найдем корни обоих трехчленов и разложим их на линейные множители: $\frac{(c - 3)(c + 2)}{(c - 1)(c + 2)}$.

Ответ: $\frac{c - 3}{c - 1}$.

б) $(x - a)\left(x - \frac{1}{a}\right) = x^2 - ax - \frac{1}{a}x + 1 = 0$; $x^2 - ax - \frac{1}{a}x + 1 = 0$; $ax^2 - a^2x - x + a = 0$.

Ответ: $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$. (Решите еще другим способом; см. упражнение 220.)

в) Пусть $x_1 = -5$. Тогда $x_1 \cdot x_2 = q$; $-5x_2 = -5$; $x_2 = -5 : (-5)$; $x_2 = 1$; $p = -(x_1 + x_2) = -(-5 + 1) = -(-4) = 4$.

224. а) Делить обе части уравнения на $(x - 3)$ нельзя — потеряем корень $x = 3$.

Решение. $2x(x - 3) - 7(x - 3) = 0$; $(x - 3)(2x - 7) = 0$;

$x-3=0$; $2x-7=0$; $x_1=3$; $x_2=3{,}5$. Проверьте подстановкой корня 3 в данное уравнение и убедитесь, что он не посторонний.

б) Делить обе части уравнения на x^2-3x+2 нельзя, так как от этого потеряем два корня этого квадратного трехчлена.

Решение. $\frac{x^2-3x+2}{x-3}-(x^2-3x+2)=0$; выносим квадратный трехчлен за скобки и получим два уравнения, корни которых являются корнями данного уравнения: $(x^2-3x+2)\left(\frac{1}{x-3}-1\right)=0$; $x^2-3x+2=0$; $\frac{1}{x-3}-1=0$.

Решив квадратное уравнение, получим: $x_1=1$; $x_2=2$. $\frac{1-x+3}{x-3}=0$; $\frac{4-x}{x-3}=0$; $4-x=0$, $-x=-4$; $x=4$.

Ответ: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=4$.

Сделайте проверку всех корней.

в) $x^2-8x+16=25$; $x^2-8x-9=0$. Первым и вторым способом получаем оба корня: $x_1=-1$ и $x_2=9$. Третий способ. Если возьмем только арифметический корень: $x-4=5$, $x=5+4$, $x=9$, то потеряем корень $x=-1$, который удовлетворяет данному уравнению. Чтобы не потерять корня, надо при решении квадратного уравнения брать оба значения квадратного корня (алгебраический корень). Тогда получаем:
$(x-4)^2=25$; $x-4=\pm 5$; $x-4=5$; $x_1=9$; $x-4=-5$; $x_2=-1$.

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=9$.

225. а) $\frac{x^2}{x-1}+1-\frac{x}{x-1}=0$; $\frac{x^2+x-1-x}{x-1}=0$; $\frac{x^2-1}{x-1}=0$; дробь обязательно надо сократить, если она сократимая, чтобы исключить посторонний корень;
$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=0$; $x+1=0$; $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

Примечание. Если бы дробь не сократили, то получили бы уравнение: $(x-1)(x+1)=0$; $x-1=0$; $x_1=1$; $x+1=0$; $x_2=-1$. Но корень 1 не удовлетворяет данному уравнению так как обращает знаменатели $x-1$ в нули и уравнение теряет смысл ($x-1=1-1=0$).

б) $\frac{1}{y-2}-\frac{1}{(y-2)^2}=0$; $\frac{y-2-1}{(y-2)^2}=0$; $\frac{y-3}{(y-2)^2}=0$.

Так как дробь, представляющая левую часть уравнения, несократимая, а правая часть есть нуль, то при умножении обеих частей уравнения на знаменатель, содержащий неизвестное, посторонние корни не появятся: $y-3=0$; $y=3$.

Ответ: $y=3$. Сделайте проверку.

в) $$\frac{1}{z+2}-\frac{4z}{z^2-4}-1+\frac{2}{2-z}=0;\quad \frac{1}{z+2}-$$
$$-\frac{4z}{(z-2)(z+2)}-1-\frac{2}{z-2}=0;\quad \frac{-z^2+3z-2}{(z-2)(z+2)}=0.$$

Умножим обе части уравнения на -1. По правилу умножения дроби на целое число умножим на это число только числитель: $\frac{z^2-3z+2}{(z-2)(z+2)}=0$. Подберем корни квадратного трехчлена (числителя) и разложим его на множители: $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-2)(z+2)}=0$; после сокращения дроби: $\frac{z-1}{z+2}=0$, откуда $z-1=0$, $z=1$.

Ответ: $z=1$.

Примечание. Сокращением на $z-2$ был удален из уравнения посторонний корень 2, который обращает знаменатели данного уравнения в нуль. В результате получилась явно несократимая дробь, что гарантирует, что посторонних корней уже не будет. В таком случае проверка полученных корней не требуется, она не нужна. Но если при решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе, члены дроби, представляющей левую часть уравнения (правая часть нуль), не удается разложить на такие множители, чтобы можно было сократить, и мы не уверены, что эта дробь несократимая, то появление посторонних корней не исключается, и тогда проверка полученных корней подстановкой в данное уравнение обязательна.

226. а) $$\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x+3}{3-x}+\frac{4+x}{3+x}=0;$$
$$\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{(x+3)(x-3)}+\frac{x+3}{x-3}+\frac{4+x}{x+3}=0;$$
$$\frac{(2x+1)(x-3)-(x-1)+(x+3)^2+(4+x)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=0;$$

Ответ: 1; $-1{,}25$.

б) $$\frac{(x+2)(x^2-1)-(2x+13)(x-2)(x-1)+(x+1)^2(x-2)}{(x-2)(x+1)(x-1)}=0;$$
$$\frac{x^3-x+2x^2-2-(2x+13)(x^2-x-2x+2)+(x^2+2x+1)(x-2)}{(x-2)(x+1)(x-1)}=0.$$

Ответ: 5; 1,2.

в) $$\frac{18y+7}{(y-1)(y^2+y+1)}-\frac{30}{(y-1)(y+1)}+\frac{13}{y^2+y+1}=0;$$

$$\frac{(18y+7)(y+1)-30(y^2+y+1)+13(y^2-1)}{(y-1)(y^2+y+1)(y+1)}=0.$$

Ответ: 9; — 4.

г) $$\frac{1}{u^2(u-1)+(u-1)}-\frac{4}{u+1}-\frac{u^2+10u}{(u^2-1)(u^2+1)}+$$
$$+\frac{4u^2+21}{u^2\ (u+1)+(u+1)}=0;$$
$$\frac{1}{(u-1)(u^2+1)}-\frac{4}{u+1}-\frac{u^2+10u}{(u-1)(u+1)(u^2+1)}+$$
$$+\frac{4u^2+21}{(u+1)(u^2+1)}=0;$$
$$\frac{u+1-4(u-1)(u^2+1)-(u^2+10u)+(4u^2+21)(u-1)}{(u-1)(u+1)(u^2+1)}=0;$$

Ответ: 4; 4.

д) $$\frac{1}{n(2+x)}+\frac{1}{x^2-2x}-\frac{2(n+3)}{x(x^2-4)}=0;$$
$$\frac{1}{n(2+x)}+\frac{1}{x(x-2)}-\frac{2n+6}{x(x-2)(x+2)}=0;$$
$$\frac{x(x-2)+n(x+2)-(2n+6)n}{nx(x-2)(x+2)}=0.$$

Нормальный вид данного уравнения: $x^2-(2-n)x-(2n^2+4n)=0$.

Ответ: $x_1=n+2$; $x_2=-2n$, где $n\neq 0$, $n\neq 1$, $n\neq -2$ (чтобы знаменатели не обращались в нуль).

е) $a^3-ax(2a-x)=a^3-2a^2x+ax^2=a(a^2-2ax+x^2)=a(a-x)^2$. Теперь легко найти общий знаменатель и, решая аналогично предыдущим примерам, получим следующий нормальный вид уравнения: $(a+1)x^2-2ax+(a-1)=0$.

Ответ: $x_1=1$; $x_2=\frac{a-1}{a+1}$, где $a\neq -1$ и $a\neq 0$.

Из ответов видно, что $a\neq x$ (без этих ограничений данное уравнение и его второй корень могут потерять смысл).

228. $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=365$.

Ответ: 10, 11 и 12; — 10, — 11 и — 12.

229. x — искомое число. После приписывания цифры 5 справа получим число, равное $10x+5$, это — делимое. Делитель $x+3$ и частное $x+3-16$. Уравнение: $10x+5=(x+3)\cdot(x-13)$.

Ответ: $x=22$.

230. x *м* — длина окружности переднего колеса, $(x+0{,}5)$ *м* — длина окружности заднего колеса, $\frac{40}{x}$ — число оборотов переднего колеса и $\frac{40}{x+0,5}$ — число оборотов заднего колеса на расстоянии 40 *м*. Если уменьшим $\frac{40}{x}$ на 4 (оборота), то получим число оборотов заднего колеса. Уравнение:

$$\frac{40}{x} - 4 = \frac{40}{x+0,5}.$$

Ответ: 2 *м* и 2,5 *м*.

231. Ответ: 1,6 *м* и 3,2 *м* или 1,1 *м* и 2,2 *м*.

232. x *км/ч* — скорость парохода в стоячей воде; $(x+3)$ *км/ч* — скорость парохода по течению; $(x-3)$ *км/ч* — скорость парохода против течения. Уравнение:

$$\frac{210}{x-3} - \frac{210}{x+3} = 4.$$

Ответ: 18 *км/ч*.

233. x *км/ч* — собственная скорость парохода. Уравнение:

$$\frac{80}{x+4} + \frac{80}{x-4} = 8\frac{1}{3}.$$

Ответ: 20 *км/ч*.

234. Ответ: 4 *км/ч*.

235. Ответ: 15 дней.

236. Ответ: 21 ряд.

237. Ответ: 16 *кг* и 20 *кг*.

238. x *км/ч* — скорость поезда по расписанию. Уравнение:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+10} = \frac{16}{60}.$$

Ответ: 50 *км/ч*.

239. Пусть первую половину пути поезд прошел за x часов. Уравнение:

$$\frac{420}{x-0,5} - \frac{420}{x} = 2.$$

Ответ: 21 час.

240. См. упражнение 227. Ответ: 44 *км*.

241. x часов требуется первой (меньшей) бригаде, чтобы выполнить всю работу самостоятельно. Всю работу принимаем за 1. Уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: 30 часов и 20 часов.

242. См. задачу 241. Ответ: 30 часов и 45 часов.

243. Если по плану срок выполнения работы x дней, то ежедневный план $\frac{8\,000}{x}$ *куб. м.* Фактически бригада работала $(x-8)$ дней, поэтому ежедневно вынимала $\frac{8\,000}{x-8}$ *куб. м* грунта. Уравнение: $\frac{8\,000}{x-8}-\frac{8\,000}{x}=50$; $x=40$.

Ежедневный план составлял $\frac{8\,000}{40}=200$ (*куб. м*). Перевыполнение ежедневного плана, равное 50 *куб. м*, составляло от этого плана $\frac{50}{200}\cdot 100\% = 25\%$ (см. п. 4 § 9).

Ответ: 40 дней, 25%.

244. Пусть первой бригаде требуется x дней, чтобы отдельно выполнить всю работу. Тогда за 1 день она выполнит $\frac{1}{x}$ часть всей работы. 40% всего ее рабочего времени составляют $\frac{x\cdot 40}{100}$ или $0,4x$ дней (см. п. 2 и 3 § 9). $13\frac{1}{3}\%$ всего рабочего времени второй бригады равны $(0,4x-2)$ дней, а все ее рабочее время составляет

$$\frac{(0,4x-2)\,100}{13\frac{1}{3}}=\frac{(0,4x-2)\,100}{\frac{40}{3}}=\frac{3\,(0,4x-2)\,100}{40}=$$

$=\frac{15\,(0,4x-2)}{2}$ дней. Тогда вторая бригада в 1 день выполняет $1:\frac{15\,(0,4x-2)}{2}=\frac{2}{15\,(0,4x-2)}$ часть всей работы. Две бригады вместе выполняют $\frac{1}{6}$ часть всей работы, поэтому $\frac{1}{x}+\frac{2}{15\,(0,4x-2)}=\frac{1}{6}$.

Решим уравнение. Раскроем скобки в знаменателе, так как от этого он упростится: $15(0,4x-2)=6x-30$. Вынесем в нем 2 за скобки и сократим дробь: $2\,(3x-15)$; $\frac{1}{3x-15}$. Получили: $\frac{1}{x}+\frac{1}{3x-15}=\frac{1}{6}$; $x^2-13x+30=0$; $x_1=10$; $x_2=3$. Если первой бригаде потребуется на всю работу 10 дней, то второй $\frac{15\,(0,4x-2)}{2}=\frac{15\,(0,4\cdot 10-2)}{2}=$ $=15$ (дней). Если подставим вместо x число 3, то получим отрицательное число дней, затраченных второй бригадой, что невозможно.

Ответ: первой бригаде нужно 10 дней, второй — 15 дней.

245. Ответ: первая бригада ремонтировала в день 2 *км* пути, а вторая 2,5 *км*.

246. Дискриминанты трех квадратных уравнений будут различны, причем дискриминант системы (1) положительный, так как по графику видно, что система (а поэтому и квадратное уравнение) имеет два различных решения. Дискриминант квадратного уравнения, которое получится при решении системы (2), равен нулю, так как у графиков одна общая точка, а у системы (и квадратного уравнения) два одинаковых решения. Дискриминант квадратного уравнения, получающегося в процессе решения системы (3), отрицательный, поэтому квадратное уравнение и система не имеют решения (графики не имеют общих точек). Итак, хотя все три квадратных уравнения получаются из одного и того же уравнения $x^2 + y = 10$, однако все они различны (разные дискриминанты, а поэтому и корни неодинаковы). Происходит это от того, что каждый раз подставляем в уравнение $x^2 + y = 10$ иное значение y, выраженное через x, ибо в трех данных системах вторые уравнения разные.

248. $$\left\{\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 = 2500 \\ \quad -4xy \qquad = -384 \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = 2116 \end{array}\right.$$

$$(x - y)^2 = 2116; \quad x - y = \pm\sqrt{2116};$$

$$\begin{cases} x - y = \pm 46; \\ x + y = -50. \end{cases}$$

Получаем две системы первой степени и решение каждой является решением данной.

$$\begin{cases} x - y = 46, \\ x + y = -50 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -46, \\ x + y = -50. \end{cases}$$

Решаются они просто, например сложением.

249. а) Построить параболу $y = x^2 - 4$ (см. п. 3 § 19) и прямую $y = x + 2$ (см. п. 5 § 16 и п. 1 § 18) и найти приближенно, желательно с точностью до 0,1, координаты общих точек этих графиков.

б) Построить параболу $y = -x^2 - 2x - 1$ (см. п. 7 § 19) и прямую $y = -x - 5$ и т. д.

в) Построить прямую $y = x - 2$ и гиперболу $y = \frac{6}{x}$ (см. п. 4 § 16) и т. д.

г) Построить параболу $y = x^2 + 2$ и гиперболу $y = \frac{-3}{x}$.

250. а) $z^2 - 5z + 4 = 0$.

Ответ: 1) $x_1 = 4$, $y_1 = 1$; 2) $x_2 = 1$, $y_2 = 4$.

б) Ответ: 1) $x_1 = 5$, $y_1 = -3$; 2) $x_2 = -3$, $y_2 = 5$.

в) Ответ: 1) $x_1 = -9$, $y_1 = 4$; 2) $x_2 = 4$, $y_2 = -9$.

г) $$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -18; \end{cases}$$

$z^2 - 7z - 18 = 0$; $z_1 = 9$, $z_2 = -2$; $x_1 = 9$, $-y_1 = -2$, $y_1 = 2$ и наоборот: $x_2 = -2$, $-y_2 = 9$, $y_2 = -9$.

Ответ: 1) $x_1 = 9$, $y_1 = 2$; 2) $x_2 = -2$, $y_2 = -9$.

251. а) $(x - y)^2 = 4$;

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 = 4 \\ \qquad 4xy \qquad = 60 \end{array}\right.$$
$$\overline{x^2 + 2xy + y^2 = 64} \text{ и т. д.}$$

Ответ: 1) $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; 2) $x_2 = -3$; $y_2 = -5$.

б) Ответ: 1) $x_1 = 3a$, $y_1 = -a$; 2) $x_2 = -a$, $y_2 = 3a$.

252. а) Решать подстановкой: $x = -2y$.

Ответ: 1) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; 2) $x_2 = 4{,}8$; $y_2 = -2{,}4$.

б) Удобна подстановка: $x = 3y + 7$.

Ответ: 1) $x_1 = 7{,}75$, $y_1 = 0{,}25$; 2) $x_2 = 1$, $y_2 = -2$.

в) Из первого уравнения по основному свойству пропорции (см. п. 1 § 10) получаем: $y - 2 = 4x - 24$. Все члены второго уравнения системы умножаем на их общий знаменатель: $(x - 3)(y + 5)$, в результате чего в уравнении останутся только числители, умноженные на дополнительные множители: $2(y + 5) - 3(x - 3) = 2(y + 5)(x - 3)$. Раскрываем скобки и решаем подстановкой.

Ответ: 1) $x_1 = 5$, $y_1 = -2$; 2) $x_2 = 3\frac{5}{8}$, $y_2 = -7\frac{1}{2}$.

г) Раскроем скобки в первом уравнении и освободимся от дроби во втором и т. д.

Ответ: 1) $x_1 = 4$, $y_1 = 3$; 2) $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

д) Подстановка: $x = 5 - y$.

Ответ: 1) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; 2) $x_2 = -46$, $y_2 = 51$.

е) Оба уравнения второй степени (в этом убедимся, когда раскроем скобки). После раскрытия скобок такую систему будет трудно решить. Применим здесь такой прием. Левая часть второго уравнения есть произведение, а правая — нуль. Произведение равно нулю только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, т. е. возможны два случая: $x - 2 = 0$ и $y - 1 = 0$. Возьмем $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. При таком значении x значения y во втором уравнении могут быть любые. Но значения того же y, соответствующие значению $x = 2$, должны удовлетворять еще и первому уравнению, куда мы и подставим вместо x число 2, чтобы вычислить значение y. Получится уравнение 1-й степени с одним неизвестным, имеющее единственный корень $y = 3$. Итак, получили первое решение данной системы: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

Когда возьмем второй из двух возможных во втором уравнении случаев, а именно $y - 1 = 0$, откуда $y = 1$, то, подставив его в первое уравнение, получим квадратное уравнение относительно x, которое имеет два корня: $x_2 = 0$ и $x_3 = 1{,}5$. Получаем еще два решения системы: $x_2 = 0$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1{,}5$, $y_3 = 1$.

Ответ: 1) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; 2) $x_2 = 0$, $y_2 = 1$; 3) $x_3 = 1{,}5$; $y_3 = 1$.

253. **а)** Получим четыре решения (четыре пары чисел). Первую пару значений x и y подставьте в оба уравнения системы и, выполнив указанные там действия, убедитесь, что оба уравнения обращаются в верные равенства. Затем точно так же проверьте три остальных решения.

б) Построить параболу $y = 0{,}5x^2 - 5$ и гиперболу $y = \frac{12}{x}$ и т. д. Желательная степень точности корней 0,1.

в) Оба уравнения второй степени. Сложим уравнения и из полученного квадратного уравнения найдем два значения x, а именно: $x = 3$ и $x = -4$. Затем подставим вместо x число 3 в одно из уравнений системы, получим квадратное уравнение относительно y и найдем два его корня: $y = 2$ и $y = -3$. Так как значению $x = 3$ соответствуют два значения y, то имеем уже два решения системы: 1) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; 2) $x_2 = 3$, $y_2 = -3$. Затем в одно из уравнений подставим второе значение x, а именпо $x = -4$, и найдем еще два значения y. Итак, система, у которой оба уравнения второй степени, имеет в данном случае уже не три (см. упражнение 252 (е)), а четыре решения.

Ответ: 1) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; 2) $x_2 = 3$, $y_2 = -3$; 3) $x_3 = -4$, $y_3 = 2$; 4) $x_4 = -4$, $y_4 = -3$.

254. Пусть x *км/ч* — скорость первого туриста, а y *км/ч* — скорость второго. Одно уравнение с x и y можно составить, например, так, чтобы разность двух выражений (левая часть уравнения) была равна данному числу 12 (*км*).

Нужно при этом хорошо разобраться, какое из двух выражений больше другого, чтобы из большего вычесть меньшее, так как только в этом случае получим выражение, равное 12. Именно эту грубую ошибку чаще всего допускают школьники: им покажется, что больше то из выражений, которое на самом деле меньше другого. Чтобы избежать этой ошибки, нужно хорошо вдуматься в смысл выражений и еще раз внимательно посмотреть в условие задачи. Иногда здесь удобно воспользоваться правилом сравнения дробей с одинаковыми числителями (см. п. 6 § 7).

Для составления другого уравнения используйте то, что разность двух других выражений равна 6 (нужно посмотреть, какое из выражений больше).

Второй грубой ошибкой при составлении уравнения является приравнивание неоднородных величин, например в левой части получилось время, а в правой — расстояние. Получается бессмыслица. Приравнивать можно только однородные величины, причем выраженные в одних и тех же единицах, например время с временем, если оба они выражены в часах, оба в минутах, оба в днях и т. д.

Аналогичная ошибка часто встречается и при подготовке к составлению уравнения, когда при составлении выражений, содержащих неизвестное, складывают или вычитают разнородные величины или однородные величины, выраженные в разных единицах, или, наконец, умножают или делят такие величины, для которых это действие не имеет смысла (например, умножают весь пройденный путь на скорость движения).

Все последующие задачи постарайтесь решить совершенно самостоятельно (пусть даже это получится у вас со второй или третьей попытки). В ответы старайтесь не смотреть, а сами проверьте свои решения по условию задачи. Тем более не старайтесь взять готовые уравнения, где они даны. Только таким путем вы сможете проверить себя и узнать, готовы ли вы к успешному выполнению одной из важнейших частей письменного задания на вступительных экзаменах по математике. Если это у вас так не получается, то нужно внимательнее перерешать все предыдущие задачи.

255. x *км/ч* — скорость первого и y *км/ч* — скорость второго велосипедиста. Расстояние $AB = x + y$.

Ответ: 16 *км/ч* и 12 *км/ч*.

256. Если ввести два неизвестных, то получим систему двух уравнений 1-й степени.

Ответ: 80 *кг* и 60 *кг*.

257. Здесь нет надобности вводить два неизвестных. Пусть x *кг* чистого олова добавили к 12 *кг* сплава. Получим уравнение первой степени.

Ответ: 1,5 *кг*.

258. x *км/ч* — скорость течения, y *км/ч* — скорость лодки в стоячей воде. Находить значение y из системы не нужно, поэтому подстановку при решении системы нужно сделать так, чтобы исключалось y, а не x.

Ответ: $\frac{5}{6}$ *км/ч*.

259. Ответ: 120 листов в 15 дней.

260. Ответ: 25 *кг* и 40 *кг*.

261. Пусть себестоимость снижалась каждый раз на $x\%$. Сначала выразим это снижение в рублях ($x\%$ от 25 руб.) в первый раз, затем выразим новую стоимость, от которой опять найдем $x\%$ и, наконец, получим окончательную стоимость. Получим квадратное уравнение. $x = 190$ не подходит, так как невозможно снизить на 190% стоимость, принимаемую за 100%.

Ответ: 10%.

262. Одно из решений системы, согласно которому первая бригада, работая отдельно, выполнит всю работу в 3 дня, невозможно, ибо обе бригады, работая вместе, затратили бы на всю эту работу 6 дней.

265. Пусть выпускали каждый раз по x *л* воздуха. Кислород распределен в сосуде равномерно, поэтому и после первого выпускания x *л* воздуха в оставшихся в сосуде $(8 - x)$ *л* воздуха кислород составляет также 16% (от оставшегося количества воздуха). 16% это то же самое, что дробь 0,16 (см. упражнение 80). Итак, в оставшихся $(8-x)$ *л* воздуха содержится $(8-x)0{,}16$ *л* кислорода. Столько же останется кислорода в сосуде и тогда, когда дополнят сосуд азотом. Так как емкость сосуда прежняя (8 *л*), то в каждом литре смеси окажется $\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}$ *л* кислорода. После вторичного выпускания x *л* в сосуде останется $(8-x)$ *л* смеси, а в каждом литре содержится прежнее количество кислорода: $\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}$, поэтому всего в сосуде останется $\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}\,(8-x)$ или $(8-x)^2\,0{,}02$ *л* кислорода. Но это количество кислорода составляет от общего обмена смеси (опять стало 8 *л* после повторного введения x *л* азота) $\frac{0{,}02\,(8-x)^2}{8}\cdot 100\,\%$ или $0{,}25\,(8-x)^2\,\%$. По условию это есть 9%. Уравнение: $0{,}25\,(8-x)^2=9$. Корни: $x_1=2$, $x_2=14$. Второй корень в задаче не подходит (невозможно выпустить 14 *л* из сосуда в 8 *л*). Первый корень проверьте по условию задачи.

Ответ: 2 *л*.

Примечание. Эта задача сложна по своему характеру и вряд ли кто-нибудь даст подобную задачу на письменном вступительном экзамене по математике в техникум. Но считаем, что читателю будет полезно вдуматься в ее решение.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Геометрия

Глава I ● Основные понятия

§ 1. Предмет геометрии

При изучении геометрии интересуются только формой и размерами предмета, иначе говоря, изучают не сам предмет, а лишь форму и размеры части пространства, которую он занимает. Так, деревянный и картонный кубы с ребрами в 1 *дм* для геометрии совершенно одинаковые тела, так как они занимают одинаковую по форме и размерам часть пространства, а вот, например, куб и шар — всегда тела различные (по форме).

Геометрическим телом называют часть пространства, ограниченную со всех сторон.

Граница тела есть поверхность. Поверхности бывают плоские (их называют плоскостями) и кривые. Так, куб ограничен плоскими поверхностями шести одинаковых квадратов, а шар — кривой поверхностью. Поверхность не имеет толщины.

Часть поверхности отделяется от смежной части линией. Линии бывают прямые, ломаные, кривые. Представление о прямой линии дает натянутая нить. Линия имеет только длину и не имеет толщины.

Общая часть двух встречающихся прямых линий есть точка. Она не имеет измерений.

Любую совокупность точек, линий, поверхностей и тел называют фигурой. В геометрии изучают свойства фигур.

Эта наука зародилась в глубокой древности из потребностей землемерной практики, а поэтому название ее «геометрия» означает «землемерие». В наше время это обширная и очень важная наука, имеющая разнообразное применение.

§ 2. Понятие об аксиоме и теореме

Результаты изучения свойств фигур выражаются в форме математических предложений.

Математическое предложение, правильность которого доказывается, называют теоремой.

Математическое предложение, принимаемое без доказательства, называют аксиомой.

Аксиомы, выражающие свойства прямой, плоскости и отрезка:

1. ***Через две точки можно провести прямую линию и притом только одну.***
2. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.***
3. ***Отрезок прямой короче всякой другой линии (ломаной или кривой), соединяющей его концы.***

Расстояние между двумя точками измеряется по прямой линии.

В геометрии используются еще и такие аксиомы, которые уже применялись в арифметике и алгебре (сформулируйте их для произвольных величин A, B и C):

4. ***Если*** $A=B$ ***и*** $B=C$, ***то*** $A=C$.
5. ***Если*** $A=B$, ***то*** $A+C=B+C$ ***и*** $A-C=B-C$.
6. ***Если*** $A>B$, ***то*** $A+C>B+C$ ***и*** $A-C>B-C$.

Теорема состоит из условия (того, что дано) и заключения (утверждения, которое требуется доказать). Условие может начинаться словом «если», а заключение — словом «то». Теоремы, например: «Вертикальные углы равны», «Углы при основании равнобедренного треугольника равны» можно сформулировать так: «Если углы вертикальные, то они равны», «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны».

Если условие данной теоремы сделать заключением, а заключение — условием, то первая теорема будет прямой, а полученная — обратной теоремой.

Теоремы, обратные приведенным выше: «Если углы равны, то они вертикальные», «Если углы при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный». Первая из этих теорем неправильна, хотя ее прямая теорема верна. Каждая обратная теорема требует своего доказательства.

Предложение, непосредственно вытекающее из теоремы, называют следствием.

Вспомогательную теорему, которая вводится для облегчения доказательства основной теоремы, называют леммой (см. § 37).

§ 3. Прямая линия. Луч. Отрезок. Ломаная. Равенство отрезков. Действия над отрезками

Прямая линия бесконечна в двух противоположных направлениях. Любая точка на прямой делит ее на две полупрямые — лучи. Луч бесконечен только в одном направлении.

Часть прямой, ограниченную точками с обеих сторон, называют отрезком.

Сплошную линию, состоящую из нескольких отрезков, не лежащих на одной прямой, называют ломаной. Ломаная называется замкнутой, если концы ее совпадают.

Отрезки, которые могут быть наложены один на другой так, что концы их совпадут, называются равными отрезками. Отрезок, равный данному, удобно откладывать при помощи циркуля.

Чтобы сложить два отрезка, достаточно отложить их на прямой так, чтобы один из них был продолжением другого ($AB + BC = AC$, рис. 1).

Рис. 1.

Если на одном отрезке от одного из его концов отложить другой отрезок, то расстояние между несовпавшими концами является разностью данных отрезков ($AC - CB = AB$). Отрезок (CB), который при этом составит часть другого отрезка (AC), будет меньшим ($CB < AC$ или $AC > CB$).

Умножить отрезок на целое число — значит повторить его слагаемым столько раз, сколько единиц в множителе ($AB \cdot 3 = AB + AB + AB$).

Разделить отрезок на целое число — значит найти такой меньший отрезок, который при умножении на данное целое число (делитель) даст исходный отрезок — делимое ($AB:5=AC$, где $AC\cdot 5=AB$; общий способ деления отрезка на равные части путем построения указан в § 26).

Задачи 1—11

1. а) Назовите 6 отрезков, изображенных на рис. 1.

б) Какие из этих отрезков представляют собой сумму нескольких других отрезков? Какие из них можно рассматривать как разность двух других отрезков?

в) Записать (двумя способами) отрезок BC в виде разности, в которой уменьшаемым является отрезок AD.

Рис. 2.

2. Дана прямая MN и точки A, B и C на ней (рис. 2).

а) Назовите четыре части, из которых состоит прямая MN, и укажите, какие из них являются отрезками и какие — лучами.

б) Назовите все лучи на этой прямой, имеющие концы в точках A, B и C.

в) Образуют ли прямую лучи AM и CN? Если нет, то почему? Что нужно сделать с этими двумя лучами, чтобы они образовали прямую?

г) Какая может быть общая часть у двух лучей, лежащих на одной прямой?

3. Предложение «Точка на прямой разделяет ее на два луча» перестроить так, чтобы условие начиналось словом «если», а заключение — словом «то». Построить обратное ему предложение. Верно ли оно?

4. Один из отрезков в три раза длиннее другого, а разность их равна 16 *см*. Найти длины отрезков.

5. Сумма двух отрезков равна a, а разность их равна b. Через a и b выразить длины этих отрезков.

6. а) Пусть $AB=CD$ (рис. 1). Что можно сказать о величине отрезков AC и BD?

б) Почему такие отрезки, как AC и BD, называют равносоставленными?

7. Найти расстояние между серединами отрезков AB и BC (рис. 2), если $AC=18$ *дм*.

8. Два равных отрезка AB и CD покрывают друг друга на одну треть своей длины. Найти длину каждого отрезка, если расстояние между серединами этих отрезков равно 20 *см*.

9. Доказать, что ломаная $AMNLDE$ короче ломаной $ABCDE$ (рис. 3).

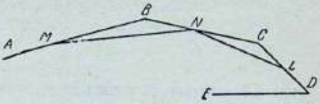


Рис. 3.

10. Найти такую точку C на прямой MN (рис. 4), чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B, лежащих по разные стороны от MN, была наименьшей.

Рис. 4.

11. Сколько различных прямых можно провести, соединяя попарно пять различных точек на плоскости, если никакие три из этих точек не лежат на одной прямой?

§ 4. Углы. Биссектриса. Перпендикуляр

Углом называют фигуру, образованную двумя лучами, выходящими из одной точки. Эта точка называется вершиной угла, а лучи — его сторонами.

Величина угла не зависит от длины его сторон.

Углы, которые могут быть наложены один на другой так, что они совпадут, называются равными углами.

Если при совмещении вершин двух углов один из них можно поместить внутри другого, то первый угол меньше второго.

При вращении одной из сторон угла вокруг вершины величина угла изменяется. Если обе стороны угла располагаются на одной прямой по разные стороны от вершины, угол называется развернутым. Если увеличивать угол путем вращения одной стороны до совпадения ее с другой стороной этого угла, то получим полный угол.

Луч, делящий угол пополам, называется биссектрисой угла.

Угол, равный половине развернутого, называется прямым углом. Он обозначается буквой d. Развернутый угол равен $2d$, полный угол равен $4d$.

Каждая из сторон прямого угла называется перпендикуляром к другой стороне этого угла. Стороны прямого угла взаимно перпендикулярны.

Угол, меньший прямого, называется острым углом.

Угол, больший d, но меньший $2d$, называется тупым углом.

§ 5. Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие образуют одну прямую, называются смежными углами.

OB — общая сторона, OA и OC составляют одну прямую, $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные (рис. 5).

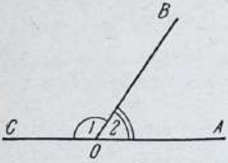


Рис. 5.

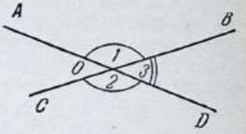


Рис. 6.

Из определения следует, что сумма смежных углов есть развернутый угол, т. е. ***сумма смежных углов равна*** $2d$.

Два угла, у которых стороны одного являются продолжениями сторон другого, называются вертикальными.

Два вертикальных угла равны между собой. $\angle 1 = \angle 2$ (для доказательства использовать $\angle 3$, смежный с каждым из вертикальных углов, рис. 6).

§ 6. Окружность

Кривая замкнутая линия на плоскости, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной точки, называется окружностью (рис. 7).

Точку, от которой одинаково удалены все точки окружности, называют ее центром (O).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом.

Отрезок, соединяющий точку окружности с центром, называют радиусом (OA).

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой (DE).

Хорду, проходящую через центр, называют диаметром (BC). Диаметр равен двум радиусам.

Если соединим концы любой хорды (DE), не проходящей через центр, с центром, то DE меньше двух радиусов (см. аксиому 3 § 2). Следовательно, мы доказали теорему: ***любая хорда, не проходящая через центр, меньше диаметра.***

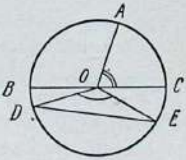


Рис. 7.

Часть окружности называется дугой ($\smile AC$). Дугу DE стягивает хорда DE.

Два круга (две окружности или две дуги) называются равными, если их можно наложить так, чтобы они совместились.

Угол, образованный двумя радиусами, называется центральным углом ($\angle AOC$).

Теоремы. ***В одном круге или в равных кругах:***

1) равным центральным углам соответствуют равные дуги;

2) равным дугам соответствуют равные центральные углы.

Для доказательства первой теоремы совместим равные центральные углы, повернув один из них вокруг центра. При наложении углов совместятся концы дуг и сами дуги. Во второй теореме совмещаем равные дуги.

Задачи 12—25

12. На сколько частей разделяют плоскость: а) две пересекающиеся прямые, б) три пересекающиеся в одной точке прямые, в) n пересекающихся в одной точке различных прямых, г) три попарно пересекающиеся в различных точках прямые?

13. а) На сколько частей разделяют плоскость стороны острого угла? Какую из этих частей можно назвать внутренней областью угла, а какую — внешней? Какая из них большая? Почему?

б) У какого угла обе области равны (при наложении совместятся)?

в) У какого угла внешняя область в три раза больше внутренней?

г) У какого угла внешняя область меньше внутренней?

д) У какого угла нет внешней области?

14. Найти каждый из смежных углов, если один из них: **а)** в полтора раза больше другого, **б)** составляет 30% другого, **в)** на $\frac{2}{5}$ d меньше другого.

15. Два угла наложены друг на друга так, что одна сторона у них общая. Найти угол, образованный их несовпадающими сторонами, если один из углов на $\frac{2}{5}$ d больше прямого, а второй — на $\frac{1}{3}$ d меньше прямого угла.

16. Два угла приложены друг к другу так, что две их стороны полностью совпадают. Являются ли эти углы смежными, если один из них равен $1\frac{2}{7}\, d$, а другой составляет 70% прямого угла?

17. Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 8). Что можно сказать о величине углов AOB и COD и как можно назвать такие углы (см. задачу 6)?

Верно ли обратное утверждение: если $\angle AOB = \angle COD$, то $\angle 1 = \angle 2$?

18. Найти угол между биссектрисами углов, заданных в задаче 16. Сформулируйте правило о нахождении угла между биссектрисами любых приложенных указанным способом (прилежащих) углов. Докажите это в общем виде для углов α (альфа) и β (бета).

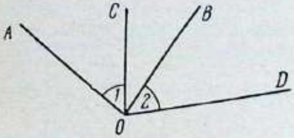


Рис. 8.

19. Вывести следствие из утверждения, доказанного в задаче 18, для угла между биссектрисами смежных углов.

20. Доказать, что биссектрисы любых вертикальных углов образуют одну прямую.

21. В каком угле биссектриса всегда: **а)** перпендикулярна его сторонам, **б)** является продолжением его сторон?

22. Может ли разность двух углов быть равной прямому углу, если: **а)** оба угла острые, **б)** один угол острый, другой — тупой, **в)** углы смежные, **г)** оба угла тупые.

Сколько таких пар углов будет в задаче (б) и в задаче (в)?

23. Даны два отрезка: *AB* и *BC* (рис. 9). Какую одну окружность (указать ее центр и радиус) надо провести, чтобы получить сумму и разность данных отрезков?

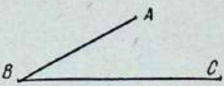


Рис. 9.

24. Может ли хорда стягивать равные дуги? Какие центральные углы соответствуют этим дугам?

25. Какую часть окружности составляет дуга, если ее центральный угол: **а)** равен прямому углу, **б)** равен углу, смежному с углом в $\frac{4}{3}d$, **в)** заключен между стороной и биссектрисой прямого угла?

Глава II ● Треугольники

§ 7. Многоугольник. Треугольник. Виды треугольников

Часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, называется многоугольником.

Отрезки ломаной называются сторонами многоугольника.

Сумму всех сторон многоугольника называют его периметром.

Углы, образованные соседними сторонами, называются внутренними углами, а вершины этих углов — вершинами многоугольника (см. § 21).

Треугольником называется многоугольник, у которого имеется только три стороны.

Аналогично дается определение четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника и т. д.

По сторонам треугольники подразделяются на разносторонние (все три стороны различны по длине) и равнобедренные (две стороны равны).

Равные стороны равнобедренного треугольника называются боковыми сторонами, угол между ними — углом при его вершине, а третья сторона — основанием.

Если основание равнобедренного треугольника равно боковой стороне, то такой треугольник называется равносторонним (все стороны равны).

По углам треугольники подразделяются на остроугольные (все углы острые), прямоугольные (имеется прямой угол) и тупоугольные (с тупым углом).

В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а стороны, заключающие этот угол, называются **катетами**.

Кроме шести основных элементов (сторон и углов) треугольник имеет еще и другие элементы.

Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону (или на ее продолжение), называется **высотой** треугольника.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника.

Отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника от вершины до противоположной стороны, называется **биссектрисой** треугольника.

В каждом треугольнике имеется три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Задачи 26—30

26. Установить, какие из утверждений верны и какие неверны:

а) всякий треугольник является многоугольником,

б) всякий многоугольник является треугольником,

в) всякий равносторонний треугольник является равнобедренным,

г) всякий равнобедренный треугольник является равносторонним.

27. Построить сумму сторон треугольника, не перемещая одну из его сторон.

28. При помощи чертежного треугольника построить какой-нибудь прямоугольный треугольник и провести в нем высоту на гипотенузу. Где находится точка пересечения всех трех высот прямоугольного треугольника?

29. Начертить остроугольный и тупоугольный треугольники и построить в каждом из них три высоты. Сравнить расположение точек пересечения высот (или их продолжений) относительно треугольников.

30. Где располагаются точки пересечения (внутри или вне треугольника):

а) медиан остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников;

б) биссектрис тех же треугольников?

§ 8. Свойства равнобедренного треугольника

Теоремы. 1. ***Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его медианой и высотой.***

2. ***Углы при основании равнобедренного треугольника равны.***

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$.

Требуется доказать: 1) $AD = DC$, $BD \perp AC$; 2) $\angle A = \angle C$.

Доказываются теоремы вращением $\triangle ABD$ вокруг BD до совмещения равных углов (1 и 2) и равных сторон (AB и BC). При этом совместятся AD и DC, $\angle BDA$ и $\angle BDC$, $\angle A$ и $\angle C$ (рис. 10).

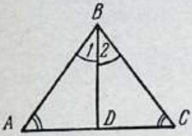


Рис. 10.

Следствия. 1. *Так как из вершины равнобедренного треугольника можно провести только одну медиану и только одну высоту, то медиана всегда является биссектрисой и высотой, а высота — биссектрисой и медианой.*

2. *В равностороннем треугольнике все биссектрисы, медианы и высоты обладают этим свойством.*

3. *В равностороннем треугольнике все внутренние углы равны.*

Определение. *Две фигуры (в частности, две точки) называются симметричными относительно прямой (оси симметрии), если при перегибании плоскости чертежа по этой прямой они совмещаются.*

Симметричные фигуры равны.

4. *В равнобедренном треугольнике осью симметрии является биссектриса (медиана, высота) угла при его вершине.*

Задачи 31—38

31. Доказать теорему, обратную теореме 1 (§ 8): если в треугольнике биссектриса является высотой, то треугольник равнобедренный.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle 1 = \angle 2$, $BD \perp AC$.

Требуется доказать: $AB = BC$.

Доказательство. По определению (§ 7) треугольник будет равнобедренным, если две его стороны равны между собой. Теорема будет доказана, если докажем, что $AB = BC$

(рис. 11). В равенстве отрезков можно убедиться путем их наложения, что здесь легко сделать. Перегнем плоскость треугольника ABC по данной биссектрисе BD. При наложении равных углов 1 и 2 сторона BA пойдет по BC. При наложении прямых углов 3 и 4 DA пойдет по DC. Так как две прямые могут пересечься только в одной точке, то точка A совместится с точкой C, а поэтому $AB = BC$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный, что и требовалось доказать.

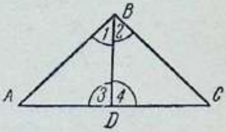


Рис. 11.

32. Если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный. Доказать.

33. Если два угла в треугольнике равны, то он равнобедренный. Доказать.

34. Какой вид имеет треугольник, образованный основанием равнобедренного треугольника и биссектрисами его углов при основании?

35. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает равнобедренный треугольник. Доказать.

36. Сколько осей симметрии может быть в треугольнике? Существует ли треугольник: а) с двумя осями симметрии, б) только с двумя осями симметрии?

37. Доказать, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет еще и третью ось симметрии.

38. Стороны треугольника относятся как $5:5:4$, а разность полупериметра и основания равна 0,6 *м*. Определить стороны треугольника.

§ 9. Равенство треугольников. Признаки равенства

Определение. *Два треугольника, которые можно совместить наложением, называются равными.*

Из определения непосредственно следует: в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и обратно — против равных углов лежат равные стороны.

Теорема 1 (первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними). ***Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам***

и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. $\angle A = \angle A_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

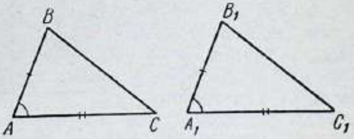


Рис. 12.

Доказывается наложением одного из треугольников на другой (рис. 12). Если мы убедимся, что треугольники полностью совместятся, то по определению они равны.

Теорема 2 (второй признак равенства треугольников — по стороне и двум прилежащим углам). ***Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.***

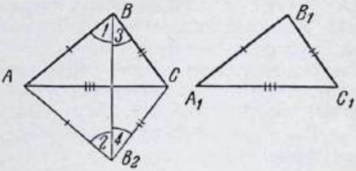


Рис. 13.

Сделайте чертеж, запишите, что дано и что требуется доказать, и докажите наложением треугольников.

Теорема 3 (третий признак равенства треугольников — по трем сторонам). ***Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны.***

Запишите сокращенно условие и заключение теоремы.

Доказывается приложением треугольников. $\triangle A_1B_1C_1$ займет положение AB_2C (рис. 13). $\triangle BAB_2$ и $\triangle BCB_2$ — равнобедренные. Из равенства углов при основании получаем, что $\angle B = \angle B_2$. Используем первый признак равенства треугольников.

Задачи 39—48

39. Доказать, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Требуется доказать: $CE = AD$.

Доказательство. Рассмотрим те треугольники (рис. 14), в которых интересующие нас биссектрисы являются сторонами: $\triangle ADC$ и $\triangle CEA$. У них сторона AC — общая и имеются равные углы: $\angle EAC = \angle DCA$ (см. теорему 2 § 8). Половины равных углов равны: $\angle 1 = \angle 3$. Итак, сторона AC и два прилежащих угла ($\angle EAC$ и $\angle 3$) треугольника EAC соответственно равны стороне AC и двум прилежащим углам ($\angle DCA$ и $\angle 1$) треугольника DCA. Условие теоремы 2 (§ 9) выполнено полностью, поэтому согласно заключению этой теоремы $\triangle EAC = \triangle DCA$. В равных треугольниках против равных углов $\angle EAC = \angle DCA$ лежат равные стороны (см. § 9): $CE = AD$, что и требовалось доказать.

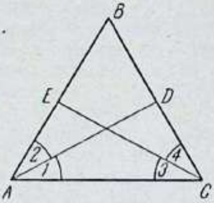


Рис. 14.

Примечание. Когда нужно доказать равенство отрезков или углов, то мы обычно поступаем так: 1) рассматриваем треугольники, в которые входят эти отрезки или углы; 2) пытаемся доказать равенство этих треугольников на основании одного из признаков; 3) используем то, что в равных треугольниках соответствующие элементы равны. Приведенное в задаче 39 доказательство дает образец применения этого метода, который в дальнейшем будет основным при доказательстве равенства фигур и их элементов.

Метод наложения, который применялся в предыдущих задачах и теоремах, будет применяться реже. Признаки равенства треугольников, доказанные методом наложения или приложения, дают новый, более удобный метод доказательства равенства треугольников и фигур, содержащих треугольники, а также их элементов.

40. Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

41. Если в треугольнике две медианы равны и образуют равные углы с одной и той же стороной треугольника, то треугольник равнобедренный. Доказать.

42. Дано: $\triangle ABC$, AN и CM — биссектрисы, $AN = CM$, $AM = CN$ (рис. 15).

Требуется доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный.

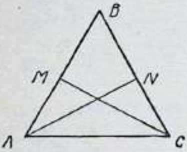


Рис. 15.

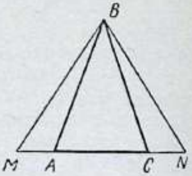


Рис. 16.

43. В равнобедренном треугольнике ABC (рис. 16) на продолжениях основания отложены равные отрезки ($AM = CN$) и концы их соединены с вершиной равнобедренного треугольника. Доказать (двумя способами), что полученный $\triangle MBN$ — равнобедренный.

44. Доказать следующие свойства двух точек, симметричных относительно оси: они лежат: **а)** на одном перпендикуляре к оси симметрии, **б)** по разные стороны от оси, **в)** на равных расстояниях от любой точки оси.

45. Если попарно соединить середины сторон равностороннего треугольника отрезками прямой, то какой получим при этом треугольник?

46. В равных треугольниках: а) медианы, проведенные к равным сторонам, равны; б) биссектрисы равных углов равны. Доказать каждое утверждение двумя способами.

47. Сформулировать признаки равенства равнобедренных треугольников, внеся в формулировки теорем (§ 9) упрощения с учетом свойств сторон и углов равнобедренного треугольника.

48. Если две стороны и медиана, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к соответствующей стороне другого треугольника, то такие треугольники равны. Доказать.

§ 10. Внешний угол треугольника и его свойства

Определение. *Угол, смежный с внутренним углом многоугольника (треугольника), называется его внешним углом.*

Теорема. ***Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.***

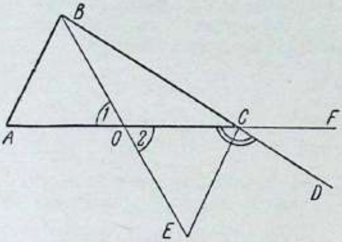


Рис. 17.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACD$ — внешний (рис. 17).

Требуется доказать: $\angle ACD > \angle A$, $\angle ACD > \angle ABC$.

Проведем медиану BO и на ее продолжении отложим отрезок $OE = OB$.

$\triangle AOB = \triangle COE$ (по какому признаку?). В этих треугольниках против BO и OE лежат равные углы: $\angle A$ и $\angle OCE$ (см. § 9). Но $\angle OCE$ лишь часть угла ACD, а поэтому $\angle ACD > \angle A$.

Для доказательства того, что $\angle ACD > \angle ABC$, нужно было бы провести медиану к стороне BC и взять внешний угол BCF, равный углу ACD.

Примечание Другое свойство внешнего угла треугольника дано в § 20.

Следствия. 1. *Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр.*

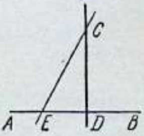


Рис. 18.

Пусть из точки C на прямую AB опущен перпендикуляр CD (рис. 18). Тогда $\angle CDA = \angle CDB = d$.

Допустим, что из C можно провести к AB еще один перпендикуляр CE. Тогда $\angle CED = d$ и будет равен внешнему углу CDB треугольника ECD, не смежному с углом CED, что по теореме невозможно. Следовательно, допущение о том, что можно опустить второй перпендикуляр из точки (C) на прямую (AB) неправильно. Следствие доказано.

2. *В прямоугольном треугольнике только один внутренний угол прямой, а два других острые.*

3. *В тупоугольном треугольнике только один внутренний угол тупой, а два других острые.*

Задачи 49—53

49. Верны ли следующие утверждения:

а) в остроугольном треугольнике все внешние углы тупые;

б) в тупоугольном треугольнике все внешние углы острые;

в) в прямоугольном треугольнике только один внешний угол прямой, а два другие тупые.

50. Во всяком треугольнике сумма трех внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, и трех внутренних углов составляет $6d$. Доказать.

51. Какой угол составляет:

а) биссектриса внешнего угла треугольника с биссектрисой прилежащего внутреннего угла;

б) биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника с медианой, проведенной к основанию;

в) биссектриса внешнего угла равностороннего треугольника с высотой, опущенной на противоположную сторону?

52. В треугольнике два внутренних угла равны соответственно d и $\frac{d}{2}$, а внешний угол при третьей вершине равен $\frac{3}{2}\,d$. Какого вида этот треугольник?

53. Доказать, что в равных треугольниках высоты, опущенные на равные стороны, равны.

§ 11. Соотношение между сторонами и углами треугольника

Теорема 1. ***Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол*** (против меньшей стороны — меньший угол).

Дано: $\triangle ABC$, $AC > BC$.

Требуется доказать: $\angle ABC > \angle A$.

Для доказательства отложим отрезок CD, равный CB (рис. 19); $\angle 1 = \angle 2$. Сравним величины углов 2 и A ($\angle 2$ — внешний угол треугольника ABD): $\angle 2 > \angle A$, поэтому $\angle 1 > \angle A$. Но $\angle ABC > \angle 1$, поэтому $\angle ABC > > \angle A$.

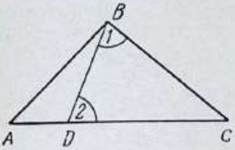


Рис. 19.

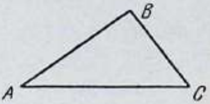


Рис. 20.

Теорема 2. ***Против равных углов в треугольнике лежат равные стороны*** (т. е. треугольник с двумя равными углами — равнобедренный).

Докажем методом от противного. Допустим, что против равных углов лежат неравные стороны. Тогда против большей из этих неравных сторон лежал бы больший угол (по теореме 1), однако это противоречит условию доказываемой теоремы (углы равны). Следовательно, допущение неверно и теорема доказана.

Теорему 2 можно доказать и по-другому (см. задачу 33).

Теорема 3 (обратная). ***Против большего угла в треугольнике лежит большая сторона.***

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B > \angle A$.

Требуется доказать: $AC > BC$.

Здесь может быть правильным лишь одно из трех соотношений (рис. 20): 1) $AC = BC$; 2) $AC < BC$; 3) $AC > BC$.

Но случаи 1-й и 2-й приводят (см. теорему 2 § 8 и теорему 1 § 11) к противоречию с условием доказываемой теоремы ($\angle B > \angle A$) и поэтому невозможны. Остается верным случай 3-й.

Следствие. *Гипотенуза больше каждого катета.*

Задачи 54—57

54. Доказать, что медиана треугольника, проведенная к одной из двух сторон, заключающих тупой угол, больше другой из этих сторон, но меньше третьей стороны.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB > d$, AD — медиана (рис. 21).

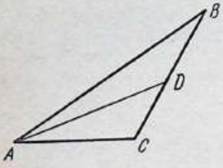


Рис. 21.

Требуется доказать: $AD > AC$, $AD < AB$.

Доказательство. В треугольнике ADC $\angle ACD > \angle ADC$ (см. следствие 3 § 10), поэтому $AD > AC$ (см. теорему 3 § 11). Так как $\angle ADC < d$, то смежный с ним угол $\angle ADB > d$. Но $\angle B < d$. В треугольнике ABD из неравенства $\angle ADB > < B$ следует: $AB > AD$.

55. Сформулировать и доказать аналогичное (см. задачу 54) свойство биссектрисы в прямоугольном треугольнике.

56. В треугольнике против наименьшей стороны всегда лежит острый угол. Сформулируйте обратную теорему. Верна ли она?

57. Периметр треугольника равен P. Найти стороны, если:

а) каждый из внутренних углов треугольника равен $\frac{2}{3}d$;

б) одна сторона равна l, и прилежащие к ней углы равны;

в) сторона, лежащая против одного из равных углов, равна m;

г) гипотенуза больше катета на n, а острые углы равны;

д) гипотенуза в два раза больше меньшего из катетов, а больший катет равен c.

§ 12. Сумма и разность сторон треугольника

Теорема. ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.***

Доказывается на основании аксиомы о сравнительной длине отрезка и ломаной, имеющих общие концы (см. § 2).

$$AB + BC > AC,$$

где AB, BC и AC — стороны треугольника.

Следствие. *Сторона треугольника больше разности двух других его сторон.*

Так как $AB + BC > AC$, то по аксиоме 6 (§ 2) имеем $(AB + BC) - BC > AC - BC$ или $AB > AC - BC$.

Задачи 58—62

58. Возможен ли такой треугольник, в котором:

а) стороны равны 23 *см*, 18 *см* и 45 *см*;

б) стороны равны 1 *м*, 2 *м* и 11 *дм*;

в) одна из двух равных сторон равна половине третьей стороны;

г) одна сторона вдвое меньше другой и втрое меньше третьей;

д) стороны относятся, как $2:3:4$?

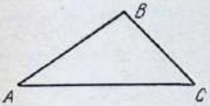


Рис. 22.

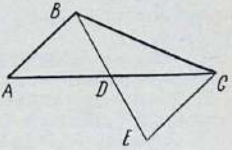


Рис. 23.

59. Периметр равнобедренного треугольника равен 44 *см*. Определить стороны, если одна из них: **а)** равна 14 *см*, **б)** равна 2 *см*, **в)** равна 22 *см*, **г)** равна 30 *см*, **д)** в пять раз меньше другой.

60. Каждая сторона всякого треугольника меньше половины его периметра. Доказать.

Дан $\triangle ABC$ (рис. 22) и AC — самая большая его сторона. Достаточно доказать это утверждение для стороны AC.

61. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.

Дано: $\triangle ABC$, BD — медиана (рис. 23).

Требуется доказать: $BD < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

Для доказательства на продолжении медианы отложим отрезок DE, равный BD. Докажем, что CE равно AB.

62. а) Периметр равнобедренного треугольника равен 50 *см*, а периметр треугольника, отделяемого от данного высотой, опущенной на основание, равен 40 *см*. Определить высоту.

б) Найти периметр равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при вершине равна 12 *см* и составляет 60% от боковой стороны и $\frac{3}{4}$ от половины основания.

§ 13. Перпендикуляр, наклонные и их проекции

Определение перпендикуляра дано в § 4. Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр (следствие 1 § 10). Через эту же точку можно провести еще бесчисленное множество других прямых, пересекающих данную прямую и образующих с ней непрямые углы.

Определения. 1. *Точка пересечения перпендикуляра к прямой с этой прямой называется основанием перпендикуляра.*

2. *Прямая, пересекающая другую прямую и не перпендикулярная к ней, называется наклонной.*

3. *Точка пересечения наклонной к прямой с этой прямой называется основанием наклонной.*

4. *Отрезок, соединяющий основания наклонной и перпендикуляра, проведенных из одной точки к прямой, называется проекцией наклонной.*

5. *Расстоянием точки от прямой называется длина перпендикуляра от данной точки до его основания.*

Примечание. Когда речь будет идти о длине, то под перпендикуляром и наклонной будем понимать их отрезки между основанием и точкой, из которой проведены перпендикуляр и наклонная.

Теоремы. ***Если из одной точки к данной прямой проведены перпендикуляр и наклонные, то:***

1) перпендикуляр меньше любой наклонной;

2) равные наклонные имеют равные проекции;

3) (обратная теореме 2) ***равным проекциям соответствуют равные наклонные;***

4) большей проекции соответствует большая наклонная;

5) (обратная теореме 4) ***большая наклонная имеет большую проекцию.***

Доказательства теорем.

1) В прямоугольном треугольнике AOB (рис. 24) AB — гипотенуза, AO — катет (см. следствие § 11).

2) Так как $AB = AC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный, перпендикуляр AO — высота, которая является и медианой (см. следствие 1 § 8). $BO = OC$.

3) Дано: $AO \perp BC$ и $BO = OC$.

Требуется доказать: $AB = AC$.

Для доказательства перегнем чертеж по AO. Тогда OB пойдет по OC, так как прямые углы при наложении совпадут. Точка B попадет в точку $C (BO = OC)$. AB совпадет с AC.

4) Дано: $DO > CO$, $AO \perp OD$.

Требуется доказать: $AD > AC$. $\angle ACD$ больше прямого угла AOC (по свойству внешнего угла, § 10). В треугольнике ACD AD лежит против тупого угла, а AC — против острого. $AD > AC$.

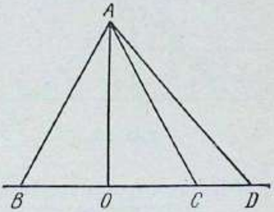


Рис. 24.

Пусть наклонные AB и AD с неравными проекциями расположены по разные стороны от AO. Повернем $\triangle AOB$ вокруг AO, он займет положение AOC. Но мы уже доказали, что $AD > AC$, а AB равно AC, то $AD > AB$.

5) Дано: $AD > AB$.

Требуется доказать: $OD > OB$.

Между OD и OB может быть только одно из трех соотношений: $OD = OB$, или $OD < OB$, или $OD > OB$. Применив теоремы 3 и 4, убедимся, что первые два соотношения приводят к противоречию с условием теоремы ($AD > AB$), а поэтому невозможны. Верно только соотношение $OD > OB$.

Задачи 63—66

63. Из точки A проведены две равные наклонные к прямой BC (рис. 25). $\angle BAC$ в два раза больше $\angle ABC$. Найти расстояние от A до BC, если расстояние между основаниями наклонных равно 18 *см*.

Примечание. Определение расстояния от точки до прямой дано в § 13

Дано: $AB = AC$, $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle BAC$, $BC = 18$ *см*, $AD \perp BC$.

Определить AD.

Решение. $\triangle BAC$ — равнобедренный, поэтому высота AD является медианой и биссектрисой угла при вершине (см. следствие 1 § 8): $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC$. Но по условию задачи и $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle BAC$, поэтому $\angle BAD = \angle ABC$. В треугольнике ABD стороны, лежащие против равных углов, равны: $AD = BD$.

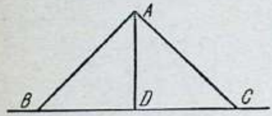


Рис. 25.

Но $BD = CD$, так как AD—медиана треугольника BAC. $BD = \frac{1}{2} BC = 9$ *см*.

Ответ: расстояние AD от точки A до прямой BC равно 9 *см*.

64. Какого вида треугольник, если:

а) сумма отрезков, являющихся проекциями двух его сторон на прямую, на которой находится его третья сторона, равна этой третьей стороне;

б) одна из сторон является проекцией другой стороны, а проекция третьей стороны на ту же прямую есть точка;

в) проекция одной из сторон на прямую, на которой лежит другая сторона, больше этой другой стороны;

г) биссектриса является проекцией стороны треугольника на прямую, на которой находится эта биссектриса;

д) проекция каждой медианы на ту сторону треугольника, к которой она проведена, есть точка?

65. Почему в прямоугольном треугольнике:

а) высота, опущенная на гипотенузу, меньше каждого из катетов;

б) каждый из катетов меньше гипотенузы;

в) две высоты совпадают с двумя сторонами;

г) три высоты пересекаются в одной точке?

66. Два треугольника равны, если основание, высота и большая боковая сторона одного треугольника соответственно равны основанию, высоте и большей боковой стороне другого треугольника. Доказать.

§ 14. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Первые два признака равенства прямоугольных треугольников являются следствиями из первого и второго признаков равенства любых треугольников.

Теорема 1 (первый признак равенства — по двум катетам). ***Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.***

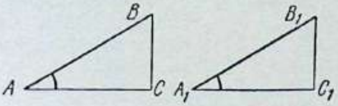


Рис. 26.

Теорема 2 (второй признак равенства — по катету и прилежащему острому углу). ***Если катет и прилежащий острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.***

Теорема 3 (третий признак равенства — по гипотенузе и острому углу). ***Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.***

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = d$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 26).

Доказываем наложением $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$. Гипотенузы при этом совместятся. AC пойдет по A_1C_1, так как $\angle A = \angle A_1$. Но $BC \perp AC$ и $B_1C_1 \perp A_1C_1$. BC совпадет с B_1C_1 (см. следствие 1 § 10).

Теорема 4 (четвертый признак равенства — по гипотенузе и катету). ***Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе***

и катету другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 27, *а*). $\angle C = \angle C_1 = d$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Для доказательства применим способ приложения, которым был доказан третий признак равенства всяких треугольников. Приложим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$ равными катетами. Тогда сумма двух прямых углов есть развернутый угол (см. § 4), стороны которого CA и CA_1 образуют одну прямую (рис. 27, *б*). $BC \perp AA_1$.

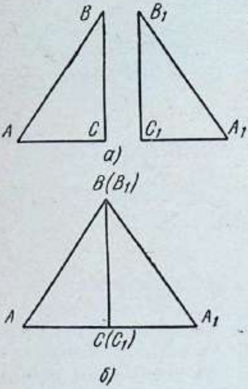


Рис. 27.

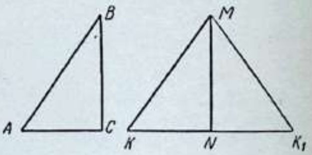


Рис. 28.

Из равенства наклонных BA и BA_1 следует: $AC = CA_1$ (см. теорему 2 § 13). По трем сторонам (см. § 9) или по двум катетам треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Примечание. Любые два заданных треугольника можно приложить указанным способом, хотя для этого иногда потребуется повернуть один из треугольников вокруг одной из его сторон (на рис. 28 $\triangle KMN$ повернут вокруг MN и занял положение MNK_1; $\triangle MNK_1$ и $\triangle ABC$ можно приложить равными катетами).

Задачи 67—74

67. Решить задачу 66 другим способом — по признакам равенства прямоугольных треугольников.

68. Два треугольника равны, если основание, высота и медиана к основанию одного треугольника соответственно равны основанию, высоте и медиане к основанию другого треугольника. Доказать.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 29), $BD \perp AC$ и $B_1D_1 \perp A_1C_1$, $BD = B_1D_1$, $AC = A_1C_1$, медианы $BE = B_1E_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Треугольники BDE и $B_1D_1E_1$ — прямоугольные (BD и B_1D_1 — высоты) и равны по катету ($BD = B_1D_1$) и гипотенузе ($BE = B_1E_1$; см. теорему 4 § 14). В них против равных сторон (BD и B_1D_1) лежат равные углы: $\angle BEC = \angle B_1E_1C_1$.

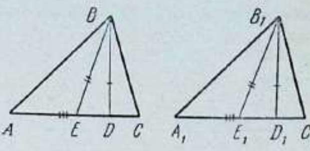


Рис. 29.

В треугольниках BEC и $B_1E_1C_1$, кроме этих углов и сторон BE и B_1E_1, равны еще EC и E_1C_1 (половины равных оснований). $\triangle BEC = \triangle B_1E_1C_1$ (по теореме 1 § 9). В этих треугольниках против равных углов лежат равные стороны (см. § 9): $BC = B_1C_1$, а против равных сторон ($BE = B_1E_1$) лежат равные углы: $\angle C = \angle C_1$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ($AC = A_1C_1$ по условию, $BC = B_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$ по доказанному; см. § 9).

69. Два остроугольных треугольника равны, если две стороны и высота к третьей стороне одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте к третьей стороне другого треугольника. Доказать.

Рис. 30.

70. Доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на боковые стороны, равны.

71. Сформулировать теорему, обратную доказанной в задаче 70, и доказать ее.

72. Перпендикуляры, опущенные из концов какой-либо стороны треугольника на медиану, проведенную к этой стороне, и на продолжение медианы, равны. Доказать.

73. Три селения A, B и C (рис. 30) не лежат на одной прямой. Как провести из A прямую дорогу, чтобы расстояния от этой дороги до B и C были одинаковые?

74. Два прямоугольных треугольника равны, если катет и медиана к нему одного треугольника соответственно равны катету и медиане к нему другого треугольника. Доказать.

§ 15. Основные задачи на построение

В геометрии построения обычно выполняются с помощью циркуля и линейки.

1. Построить угол, равный данному.

Пусть дан угол ABC (рис. 31). Проведем произвольную прямую MN, на которой поместим сторону искомого угла. Возьмем на ней какую-то точку K в качестве вершины угла. Одним и тем же радиусом опишем дуги из двух центров: B и K. Измерим циркулем хорду EF и отложим такую же хорду из точки D: $DL = EF$. Проведем луч KL.

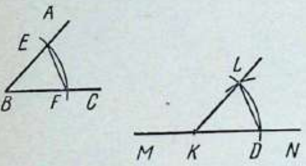


Рис. 31.

Докажем, что $\angle LKD = \angle ABC$.

$\triangle LKD = \triangle EBF$ (по трем сторонам; см. теорему 3 § 9). В равных треугольниках против равных сторон ($LD = EF$) лежат равные углы (см. § 9): $\angle LKD = \angle ABC$.

2. Разделить угол пополам (т. е. построить биссектрису угла или провести ось симметрии угла).

Пусть дан $\angle ABC$ (рис. 32).

Из вершины B, как из центра, опишем дугу DE произвольного радиуса. Из точек D и E опишем дуги одинакового радиуса так, чтобы они пересеклись. Точку их пересечения F соединим с вершиной B.

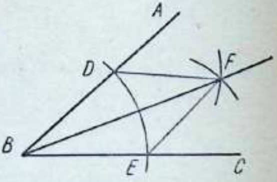


Рис. 32.

Докажем, что BF — биссектриса угла ABC.

$\triangle BDF = \triangle BEF$ (по трем сторонам: $BD = BE$ и $DF = EF$ по построению, BF — общая). Против равных сторон DF и EF в равных треугольниках лежат равные углы: $\angle ABF = \angle FBC$. BF — ось симметрии угла (см. § 8).

3. Разделить отрезок пополам (иначе: провести перпендикуляр к отрезку через его середину или построить ось симметрии отрезка).

Пусть дан отрезок AD (рис. 33).

Из концов отрезка, как из центров, проведем две пересекающиеся между собою дуги одинакового радиуса и соединим прямой точки их пересечения C и D.

Докажем, что точка O пересечения CD и AB и есть середина данного отрезка, а $CD \perp AB$.

$\triangle CAD = \triangle CBD$ (по трем сторонам). Так как $AD = BD$, то лежащие против них углы равны: $\angle ACD = \angle BCD$. CO — биссектриса равнобедренного треугольника ACB ($CA = CB$), поэтому CO — медиана и высота (см. § 8). $AO = OB$, $CD \perp AB$. CD — ось симметрии отрезка AB (см. § 8).

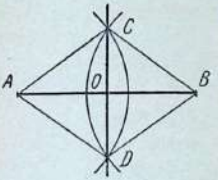


Рис. 33.

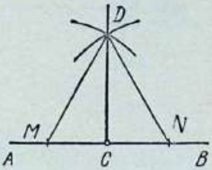


Рис. 34.

4. Из точки на прямой восставить к ней перпендикуляр (или построить прямой угол).

Пусть даны прямая AB и точка C на ней (рис. 34).

Откладываем на прямой от точки C произвольные, но равные отрезки: $CM = CN$. Из точек M и N проводим пересекающиеся дуги одинакового радиуса. Проводим прямую через точку C и точку пересечения дуг D.

Докажем, что $DC \perp AB$.

Соединив D с M и N, получим равнобедренный треугольник MDN (MD, ND — равные радиусы). DC — медиана равнобедренного треугольника (отложено $CM = CN$), которая является и высотой. $DC \perp AB$.

Примечание. Здесь фактически мы построили биссектрису развернутого угла ACB (см. задачу 2 § 15).

5. Из точки, лежащей вне прямой, опустить на эту прямую перпендикуляр.

Пусть даны прямая AD и точка C вне ее (рис. 35).

Из точки C произвольным радиусом проведем дугу, которая пересекла бы AD. Из точек пересечения M и N одинаковым радиусом проведем пересекающиеся дуги и соединим точку их пересечения K с C. Докажем, что $CK \perp AD$.

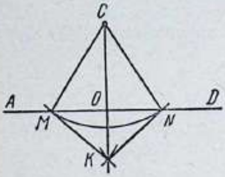


Рис. 35.

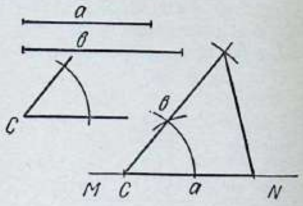


Рис. 36.

$\triangle CMK = \triangle CNK$ (по трем сторонам). $MK = NK$, $\angle MCK = \angle NCK$ (см. § 9). $\triangle MCN$ — равнобедренный и его биссектриса CO является и высотой (см. § 8). $CO \perp OD$.

6. Построить треугольник:

а) по двум сторонам (a и b) и углу (C) между ними (рис. 36).

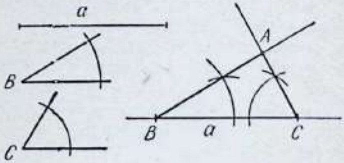


Рис. 37.

б) по стороне (a) и двум углам (B и C), прилежащим к ней (рис. 37).

в) по трем сторонам (a, b и c; рис. 38).

а) На прямой (MN) от какой-то точки отложим отрезок, равный отрезку a. При одном из его концов построим угол, равный данному углу C (см. задачу 1 § 15).

На стороне угла, не лежащей на прямой MN, отложим отрезок, равный b, и его конец соединим с концом стороны a (рис. 36).

Очевидно, что полученный треугольник — искомый. Согласно первому признаку равенства треугольников все треугольники, удовлетворяющие условию данной задачи, равны между собой (см. теорему 1 § 9).

б) Отложим отрезок a и при его концах построим углы B и C. Если стороны этих углов пересекутся, то полученный при этом $\triangle ABC$ — искомый (рис. 37).

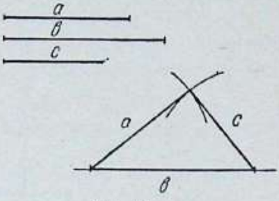


Рис. 38.

Сколько бы ни построили таких треугольников с заданными элементами a, B и C, все они равны между собой (см. теорему 2 § 9).

в) На произвольной прямой от некоторой точки отложим сторону b и из ее концов опишем дуги: одну — радиусом a, другую — радиусом c. Если эти дуги могут пересечься, то одну из точек их пересечения соединим с концами стороны b (рис. 38).

Получим искомый треугольник, который по своим размерам будет единственным (см. теорему 3 § 9), однако может занимать различные положения на плоскости.

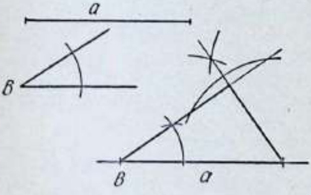


Рис. 39.

7. Построить прямоугольный треугольник:
   а) по двум катетам;
   б) по катету и прилежащему острому углу;
   в) по гипотенузе (a) и острому углу (B, рис. 39);
   г) по гипотенузе (a) и катету (b, рис. 40).

а) Строится, как и в задаче 6 (а), только угол C должен быть прямой (см. задачу 4 § 15).

б) Строится, как и в задаче 6 (б), только один из двух данных углов — прямой.

в) На прямой отложим гипотенузу a, при одном из ее концов построим данный угол B, а из другого ее конца опустим перпендикуляр на другую сторону угла B (см. задачу 5 § 15).

г) На прямой отложим катет b и в одном из его концов восставим перпендикуляр к катету (см. задачу 4 § 15). Из другого конца данного катета проведем дугу радиусом, равным гипотенузе a, до пересечения с перпендикуляром.

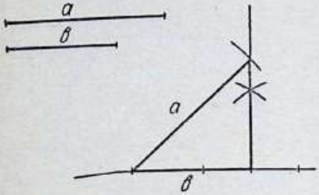


Рис. 40.

8. Геометрическое место точек.

Определение. *Фигура, все точки которой обладают одним и тем же свойством, и ни одна из других точек плоскости этим свойством не обладает, называется геометрическим местом точек* (г. м. т.) *данного свойства.*

Примеры. 1) Окружность есть г. м. т. на плоскости, удаленных от центра на расстояние, равное радиусу;

2) биссектриса угла есть г. м. т., каждая из которых одинаково удалена от обеих сторон угла (см. задачу 75);

3) перпендикуляр через середину отрезка есть г. м. т., каждая из которых одинаково удалена от концов отрезка (см. задачу 76).

9. Как решать задачу на построение.

При решении задач на построение на плоскости обычно строят два г. м. т. и ищут их общую точку (их точку пересечения). Так, например, в задаче 6 (в) вершину треугольника нашли как общую точку двух окружностей. В таких случаях говорят, что задача на построение решена методом геометрических мест. В дальнейшем будут применяться и другие методы решения задач на построение (см. задачи 173, 244).

Чтобы решить задачу на построение, надо свести ее к указанным в этом параграфе основным построениям. Для этого делают анализ задачи. Допускают, что искомая фигура уже построена, и чертят ее от руки приблизительно такую, какой она должна быть. Рассматривая свойства искомой фигуры и данных ее элементов, находят связи между ними. Этот анализ и покажет, какие основные построения нужно выполнить, чтобы построить искомую фигуру (см. задачу 77 и др.). После этого выполняем построение с помощью циркуля и линейки. Затем докажем, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи. Наконец, выясним, сколько решений может иметь задача.

Задачи 75—86

75. Доказать теоремы:

а) каждая точка биссектрисы угла одинаково удалена от его сторон;

б) (обратная) если точка одинаково удалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе.

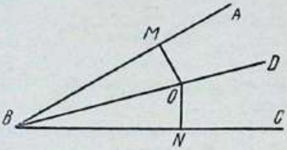


Рис. 41.

а) Дано: $\angle ABC$, BD — его биссектриса, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$ (рис. 41).

Требуется доказать: $OM = ON$.

Доказательство. У прямоугольных треугольников гипотенуза BO общая и $\angle MBO = \angle NBO$ (BD — биссектриса). $\triangle MBO = \triangle NBO$ (см. теорему 3 § 14). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны: $MO = ON$.

б) Дано: $\angle ABC$, $OM \perp BA$, $ON \perp BC$, $OM = ON$ (рис. 41).

Требуется доказать: BO — биссектриса угла ABC.

Доказательство. $\triangle MBO = \triangle NBO$ по гипотенузе (OB) и катету ($OM = ON$ — дано). В равных треугольниках против равных катетов лежат равные углы: $\angle MBO = \angle NBO$ и, согласно определению (см. § 4), BO — биссектриса $\angle ABC$.

Примечание. Доказанные прямая и обратная теоремы позволяют утверждать, что биссектриса угла есть г. м. т., каждая из которых одинаково удалена от сторон этого угла (см. п. 8 § 15)

76. Доказать теоремы:

а) каждая точка перпендикуляра, проведенного через середину отрезка, одинаково удалена от концов этого отрезка;

б) (обратная) точка, одинаково удаленная от концов отрезка, лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка.

Примечание. Эти теоремы говорят о том, что перпендикуляр через середину отрезка есть г. м. т. (см. п. 8. § 15).

77. На данной прямой MN найти точку C, равноудаленную от двух данных точек A и B.

Анализ (см. п. 9 § 15). Зададим себе прямую MN и точки A и B (рис. 42). На глаз найдем примерно точку C. Пусть $CA = CB$. Но каждая точка плоскости, равноудаленная от двух точек, принадлежит г. м. т. — серединному перпендикуляру отрезка AB. Следовательно, и точка C лежит на этом перпендикуляре. Но C лежит еще на прямой MN, поэтому искомая точка C есть точка пересечения прямой MN с серединным перпендикуляром отрезка AB.

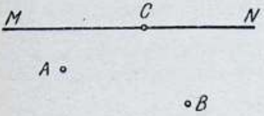


Рис. 42.

Путь решения задачи с помощью анализа найден.

Построение выполняем уже на другом чертеже, где также зададим себе какую-то прямую MN и какие-то точки A и B, а точку C получим построением перпендикуляра через середину AB (см. задачу 3 § 15).

Доказательство здесь простое. Точка C удовлетворяет обоим требованиям задачи: 1) $CA = CB$, так как по построению C лежит на перпендикуляре, проходящем через середину AB; 2) C по построению лежит на данной прямой MN.

В этой задаче в зависимости от расположения точек A и B относительно прямой MN возможны три случая решения: серединный перпендикуляр: 1) пересекает MN (только одна точка C — одно решение в задаче); 2) не пересекает MN (нет решения) и 3) совпадает с MN (бесконечное множество решений).

78. На стороне треугольника найти точку, одинаково удаленную от двух других его сторон.

79. Дан отрезок AB и угол CDE. Найти точку, равноудаленную от концов данного отрезка и сторон данного угла.

80. Построить треугольник по стороне a, прилежащему углу B и биссектрисе l этого угла.

81. Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle C_1$, AD и C_1D_1 — биссектрисы, $AD = C_1D_1$ (рис. 43).

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

82. Построить треугольник по двум сторонам a и b $(a > b)$ и углу A, лежащему против большей из них.

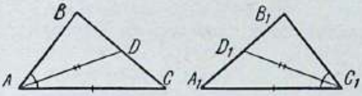


Рис. 43.

83. Доказать теорему: если две стороны и угол против большей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против большей из них другого треугольника, то такие треугольники равны.

84. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне b и: **а)** углу A при вершине, **б)** углу, равному $\frac{3}{4}d$, при основании.

85. Построить равнобедренный треугольник по высоте h и: **а)** боковой стороне b, **б)** углу A при вершине.

86. Построить прямоугольный треугольник по катету a и: **а)** его медиане m_a, **б)** медиане другого катета m_b.

Глава III ● Параллельные прямые

§ 16. Определение и аксиома параллельных прямых, следствия

Две различные прямые на плоскости могут иметь либо одну общую точку (пересекающиеся прямые, рис. 44, *а*, *б*), либо ни одной.

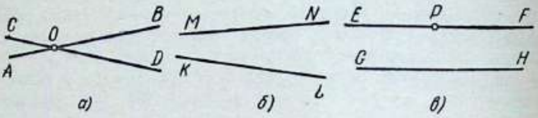
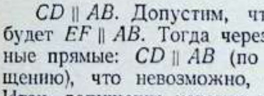


Рис. 44.

Определение. *Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются параллельными прямыми* (рис. 44, *в*).

Аксиома параллельных прямых. ***Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной*** (рис. 44, *в*; через P проведена EF параллельно GH).



Следствия. 1. *Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую* (рис. 45).

$CD \parallel AB$. Допустим, что EF не пересечет AB, т. е. будет $EF \parallel AB$. Тогда через точку O проходят две различные прямые: $CD \parallel AB$ (по условию) и $EF \parallel AB$ (по допущению), что невозможно, так как противоречит аксиоме. Итак, допущение неверно и EF пересечет AB.

2. *Если каждая из двух прямых параллельна одной и той же третьей прямой, то они параллельны и между собой.*

Пусть $AB \parallel MN$ и $CD \parallel MN$. Если бы AB и CD были не параллельны, то они пересекались бы в некоторой точке O, через которую были бы проведены две прямые (AB и CD), параллельные MN, что противоречит аксиоме. AB и CD не могут иметь общей точки, $AB \parallel CD$.

Теорема. ***Два перпендикуляра к одной прямой параллельны.***

Допустим, что эти перпендикуляры пересекутся, и получим, что из их общей точки опущены на данную прямую два перпендикуляра, что невозможно (см. следствие 1 § 10).

Задачи 87—89

87. Найти ошибки в формулировках:

а) прямые, которые не имеют общей точки, называются параллельными;

б) два отрезка, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются параллельными;

в) прямая и отрезок, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, параллельны;

г) если прямые не параллельны, то они пересекаются.

88. Верны ли утверждения:

а) если прямая пересекает один из двух параллельных отрезков, то она пересечет и другой;

б) если отрезок имеет общую точку с одной из двух параллельных прямых, то он имеет общую точку и с другой прямой;

в) если каждый из двух отрезков параллелен третьему отрезку, то они параллельны и между собой;

г) два перпендикуляра всегда параллельны;

д) перпендикуляр и наклонная могут быть параллельны.

89. Через точку вне прямой построить прямую, параллельную данной.

§ 17. Признаки параллельности

Если какие-нибудь две прямые пересечены третьей, то образованные при этом углы (рис. 46) имеют следующие названия:

1) соответственные углы: 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8;

2) внутренние накрест лежащие: 3 и 6, 4 и 5; внешние накрест лежащие: 1 и 8, 2 и 7;

3) внутренние односторонние: 3 и 5, 4 и 6; внешние односторонние: 1 и 7, 2 и 8.

Теорема 1 (первый признак параллельности). ***Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие (внутренние или внешние) углы равны, то такие прямые параллельны.***

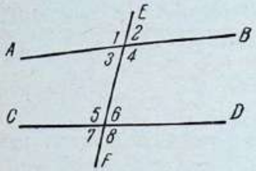


Рис. 46.

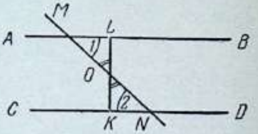


Рис. 47.

Дано: прямые AB, CD и MN; $\angle 1 = \angle 2$ (рис.47).

Требуется доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. Возьмем точку O — середину MN и проведем $OK \perp CD$. Докажем, что $OK \perp AB$. $\triangle OKN = \triangle OLM$ (по стороне и двум прилежащим углам; см. § 9). В них $\angle OLM = \angle OKN$. Но $\angle OKN = d$. Следовательно, $KL \perp AB$. $AB \parallel CD$ (см. теорему § 16).

Если будет дано, что равны внешние накрест лежащие углы, то обязательно будут равны и внутренние накрест лежащие углы. И для этого случая теорема доказана.

Теорема 2 (второй признак параллельности). ***Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то прямые параллельны.***

Сделайте чертеж и убедитесь, что из равенства соответственных углов следует равенство внутренних накрест лежащих углов (использовать свойство вертикальных углов) и по первому признаку параллельности прямые параллельны.

Теорема 3 (третий признак параллельности). ***Если при пересечении двух прямых третьей сумма***

односторонних (внутренних или внешних) углов равна 2d, то прямые параллельны.

Доказывается аналогично второму признаку параллельности (использовать свойство смежных углов).

Задачи 90—93

90. Через точку вне прямой построить прямую, параллельную данной.

Указание. Использовать один из признаков параллельности прямых. Другой способ решения указан в задаче 89. Третий способ решения этой задачи основан на использовании первого признака параллелограмма (см. § 23), причем смежные стороны параллелограмма можно взять произвольной длины.

91. Две прямые пересечены третьей. Соответственные углы равны.

а) Доказать, что биссектрисы этих углов параллельны.

б) Как можно упростить условие задачи, используя признаки параллельности?

92. Внутренние накрест лежащие углы при двух прямых, пересеченных третьей, равны.

а) Доказать, что биссектрисы этих углов параллельны.

б) Как можно упростить условие задачи, используя признаки параллельности?

93. Внешние односторонние углы при двух прямых, пересеченных третьей, в сумме составляют $2d$.

а) Доказать, что биссектрисы внешних накрест лежащих углов параллельны.

б) Как можно упростить условие задачи, используя признаки параллельности?

§ 18. Свойства углов при параллельных прямых и секущей

Теоремы (обратные признакам параллельности). ***Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то:***

1) накрест лежащие углы (внутренние или внешние) равны,

2) соответственные углы равны,

3) односторонние углы (внутренние или внешние) в сумме составляют 2d.

Доказательства.

1) Дано: $AB \parallel CD$ (рис. 48).

Требуется доказать: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Тогда построим угол NEF, равный $\angle 2$. $\angle NEF$ и $\angle 2$ — внутренние накрест лежащие углы при прямых EF и CD и секущей MN. По первому признаку параллельности FE и CD параллельны. Но по условию $AB \parallel CD$, и через точку E проходят две прямые (AB и FE), параллельные CD, что невозможно (противоречит аксиоме параллельных; см. § 16).

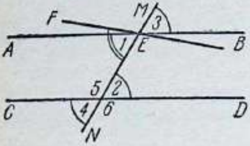


Рис. 48.

Следовательно, допущение, что $\angle 1 \neq \angle 2$ неверно. Тогда $\angle 1 = \angle 2$, т. е. внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых равны. Отсюда следует, что и внешние накрест лежащие углы 3 и 4 также равны ($\angle 3 = \angle 1$ и $\angle 4 = \angle 2$ как вертикальные углы; см. § 5 и аксиому 4 § 2).

2) Дано: $AB \parallel CD$ (рис. 48).

Требуется доказать: $\angle 3 = \angle 2$.

По доказанной первой теореме $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 3 = \angle 1$, поэтому $\angle 3 = \angle 2$.

3) Дано: $AB \parallel CD$ (рис. 48).

Требуется доказать: $\angle 1 + \angle 5 = 2d$ и $\angle 3 + \angle 6 = 2d$.

$\angle 5 + \angle 2 = 2d$ (как смежные углы, см. § 5). Но $\angle 2 = \angle 1$ (по первой теореме), поэтому $\angle 5 + \angle 1 = 2d$.

$\angle 5 = \angle 6$ и $\angle 1 = \angle 3$ (как вертикальные), поэтому из равенства $\angle 5 + \angle 1 = 2d$ следует равенство $\angle 6 + \angle 3 = 2d$.

Следствие. *Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть перпендикуляр и к другой.*

Например, по второй теореме соответственные углы при параллельных прямых равны, а так как по условию один из них прямой, то и второй прямой.

Задачи 94—100

94. Один из восьми углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равен

$\frac{3}{5}d$. Найти остальные семь углов, не пользуясь свойствами смежных и вертикальных углов

95. Две прямые AB и CD пересечены третьей. Параллельны ли AB и CD, если:

а) каждый из внешних односторонних углов равен d;

б) внутренние односторонние углы равные, но не прямые;

в) один из внутренних углов при AB равен $1,2d$, а один из внутренних углов при CD составляет $\frac{2}{3}$ от него?

96. Параллельны ли две прямые, пересеченные третьей прямой, если:

а) больший из углов при одной прямой равен 135° *, а больший из углов при другой прямой равен $\frac{3d}{2}$;

б) меньший из углов при одной прямой составляет 30% от d, а меньший из углов при другой прямой на $\frac{7}{10}d$ меньше прямого угла;

в) меньший из углов при одной прямой равен 50°, а больший из углов при другой прямой на 160% больше его?

97. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K, из которой проведены прямые $KE \parallel CA$ и $KH \parallel BA$ (точки E и H лежат на сторонах треугольника). Доказать, что $AE = EK = KH = HA$.

98. а) Найти геометрическое место точек, удаленных от данной прямой AB на данное расстояние a.

б) Что можно принять за расстояние между двумя параллельными прямыми?

в) Можно ли говорить о расстоянии между двумя пересекающимися прямыми?

99. Найти геометрическое место:

а) точек, равноотстоящих от двух данных параллельных прямых;

б) вершин B треугольников, имеющих данное общее основание AC и данную высоту h.

100. Построить треугольник:

а) по данному основанию a, медиане m, проведенной к основанию, и высоте h, опущенной на основание;

---

* О градусном измерении углов см. § 33

б) по сумме сторон a и b, разности тех же сторон и высоте h, опущенной на третью сторону.

§ 19. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами

Теорема 1. ***Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 2d.***

Дано: $AB \parallel CF$, $BC \parallel DE$ (рис. 49).

Требуется доказать: $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 3 = \angle 1$; $\angle 4 + \angle 1 = 2d$. $\angle 5 + \angle 1 = 2d$.

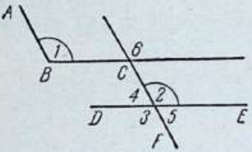


Рис. 49.

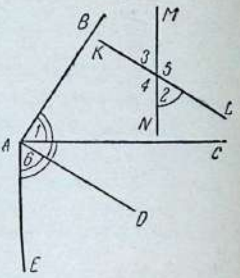


Рис. 50.

Доказательство. $\angle 2 = \angle 6$ (соответственные при параллельных BC и DE и секущей CF). $\angle 1 = \angle 6$ (соответственные при параллельных AB и CF и секущей BC). $\angle 2 = \angle 1$ (см. аксиому 4 § 2). $\angle 3 = \angle 2$ (вертикальные), поэтому $\angle 3 = \angle 1$. $\angle 4 + \angle 2 = 2d$ и $\angle 5 + \angle 2 = 2d$ (по свойству смежных углов; см. § 5). Эти два равенства останутся верными, если $\angle 2$ заменим равным углом 1. $\angle 4 + \angle 1 = 2d$ и $\angle 5 + \angle 1 = 2d$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. ***Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы равны или в сумме составляют 2d.***

Дано: $KL \perp AB$, $MN \perp AC$, $AE \perp AC$ и $AD \perp AB$ (рис. 50).

Требуется доказать: $\angle 6 = \angle 1$, $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 3 = \angle 1$; $\angle 4 + \angle 1 = 2d$, $\angle 5 + \angle 1 = 2d$.

Доказательство. $\angle 6 = d - \angle CAD$ и $\angle 1 = d - \angle CAD$, поэтому $\angle 6 = \angle 1$. $AD \parallel KL$ и $AE \parallel MN$ (см. теорему § 16). $\angle 6 = \angle 2$ (по теореме 1). Отсюда $\angle 2 = \angle 1$. Тогда $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 + \angle 1 = 2d$, $\angle 5 + \angle 1 = 2d$ (как и в теореме 1).

Примечания. 1. Углы с соответственно параллельными сторонами равны, если оба они острые или оба тупые, и в сумме составляют $2d$, если один из них острый, а другой тупой.

2. Аналогично и для углов с соответственно перпендикулярными сторонами.

Задачи 101—105

101. Верны ли теоремы, обратные доказанным (§ 19):

а) если острые углы равны, то их стороны соответственно параллельны;

б) если тупые углы равны, то их стороны соответственно перпендикулярны;

в) если острый и тупой угол составляют в сумме $2d$, то их стороны соответственно параллельны или перпендикулярны?

102. а) Начертить два таких угла, чтобы стороны их были соответственно параллельны и одновременно соответственно перпендикулярны.

б) Могут ли два угла с соответственно перпендикулярными сторонами быть одновременно равными и в сумме составлять 180°?

в) Можно ли углы с соответственно параллельными сторонами привести в такое положение, чтобы они стали смежными?

103. а) Угол между высотой, опущенной на гипотенузу, и меньшим катетом прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{7}d$. Найти острые углы данного прямоугольного треугольника, пользуясь только теоремами § 19.

б) Доказать, пользуясь теоремами § 19, что сумма острых углов всякого прямоугольного треугольника равна d.

104. а) Угол между боковыми сторонами треугольника равен 42°. С концов основания проведены высоты треугольника. Найти угол между высотами, обращенный к основанию.

б) Через некоторую точку O внутри произвольного треугольника ABC проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Используя только свойство углов с соответственно параллельными сторонами, доказать, что сумма внутренних углов треугольника составляет половину полного угла при вершине O.

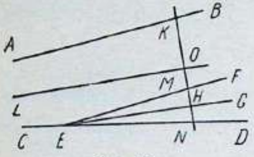


Рис. 51.

105. При проведении биссектрисы угла со сторонами AB и CD, вершина которого не помещается на чертеже, были выполнены следующие построения (рис. 51). Из некоторой точки E на стороне CD провели прямую $EF \parallel AB$. Построили биссектрису EG угла FED. В какой-то точке H биссектрисы восставили к ней перпендикуляр HK. Провели серединный перпендикуляр OL к отрезку KN.

Доказать, что LO — искомая биссектриса.

§ 20. Сумма углов треугольника

Теорема. ***Сумма внутренних углов треугольника равна 2d.***

Одно доказательство этой теоремы уже было дано в задаче 104 (б).

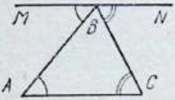


Рис. 52.

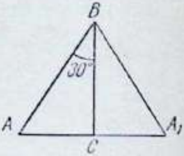


Рис. 53.

Другое доказательство ее легко усмотреть на рис. 52, где $MN \parallel AC$ (см. § 18). Итак, $\angle A + \angle B + \angle C = 2d = 180°$.

Следствия. 1. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

Внешний угол дополняет смежный внутренний (см. § 5 и § 10) до $2d$, и два других внутренних угла этого треугольника, вместе взятые, так же дополняют тот же внутренний угол до $2d$.

2. *Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.*

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$.

Требуется доказать: $AC = \frac{1}{2} AB$ (рис. 53).

Доказательство. Повернем $\triangle ABC$ вокруг BC так, чтобы он занял положение BCA_1. Тогда $\angle ABA_1 = 60^\circ$, $AB = A_1B$ и углы при основании $\angle A = \angle A_1 = 60^\circ$. $\triangle ABA_1$ равноугольный, а поэтому и равносторонний. $AC = CA_1 = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} AB$.

Другие следствия из теоремы — в задаче 106.

Задачи 106—119

106. Доказать, что:

а) если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то и третьи углы таких треугольников равны;

б) сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°;

в) в равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен 45°;

г) в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

107. В треугольнике ABC вычислить острый угол:

а) между биссектрисами углов A и B, если $\angle A = 84^\circ$, а $\angle C = 43^\circ$;

б) между биссектрисами углов A и B, если $\angle C = 40^\circ$;

в) между биссектрисой угла A, равного 64°, и высотой, опущенной на одну из сторон угла A;

г) между медианой равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, и биссектрисой угла при основании, если угол при вершине равен 70°.

108. Чему равен тупой угол между:

а) биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника;

б) двумя медианами равностороннего треугольника;

в) биссектрисой угла при основании и высотой к основанию равнобедренного прямоугольного треугольника.

109. а) Доказать предложение, обратное следствию 2 § 20: если катет вдвое меньше гипотенузы, то противолежащий ему угол равен 30°.

б) При каком условии проекция наклонной вдвое меньше наклонной? (См. примечание § 13.)

110. Доказать теоремы:

а) если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный;

б) (обратная) в прямоугольном треугольнике медиана к гипотенузе равна половине гипотенузы.

111. Определить углы треугольника, если два его угла относятся:

а) как $2:3$, а третий угол на 25° меньше суммы первых двух углов;

б) как $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}$, а третий угол на $\frac{4}{19}\,d$ больше первого.

112. Чему равны углы треугольника, если один из них на 25% меньше другого и на 20% больше третьего?

Решение. Обозначим углы треугольника через A, B и C. Пусть $\angle A$ на 25% меньше угла B. Тогда угол B принимаем за 100%, а угол A составит 75% (от угла B). Но по условию $\angle A$ на 20% больше угла C. Если $\angle C$ принять за 100%, то $\angle A$ составит 120%. Заметим, что один и тот же $\angle A$ выражается разным числом процентов: 75% от угла B и 120% от угла C (процент от B и процент от C — разные, потому что $\angle B$ не равен $\angle C$). Задачу легко будет решить, если все три угла будут выражены в процентах от одного и того же числа, например от $\angle B$.

Для этого нужно еще выразить $\angle C$ в процентах от $\angle B$. Используем то, что $\angle A$ выражается в процентах и от $\angle B$ (75%), и от $\angle C$ (120%). Если 75% от $\angle B$ составляют 120% от $\angle C$, то мы можем найти, сколько первых процентов в угле C, принятом за 100 других процентов. $\frac{75\% \cdot 100}{120} = 62{,}5\%$.

Итак, сумма внутренних углов данного треугольника, выраженная в процентах от его угла B, составляет: $\angle A + \angle B + \angle C = 75\% + 100\% + 62{,}5\% = 237{,}5\%$. На 1%

приходится: $\frac{2d}{237\frac{1}{2}} = \frac{4d}{475}$. $\angle A = \frac{4d}{475} \cdot 75 = \frac{12}{19}d$; $\angle B = \frac{4d}{475} \cdot 100 = \frac{16}{19}d$ и $\angle C = \frac{4d}{475} \cdot 62{,}5 = \frac{10}{19}d$.

113. Определить углы треугольника, зная, что один из них составляет $\frac{2}{3}$ другого и $\frac{4}{5}$ третьего.

114. Дан треугольник, в котором сумма двух углов равна третьему его углу и средний по величине угол составляет $\frac{2}{3}$ наибольшего. Сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 57 *см*. Чему равны эти стороны?

115. Доказать:

а) если углы с соответственно параллельными сторонами оба острые или оба тупые, то их биссектрисы параллельны (рис. 54, *а*);

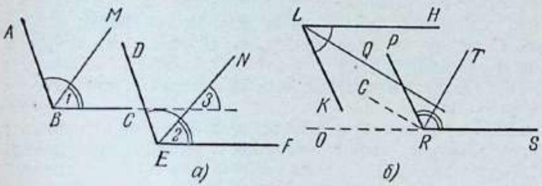


Рис. 54.

б) если стороны острого угла соответственно параллельны сторонам тупого угла, то биссектрисы их взаимно перпендикулярны (рис. 54, *б*).

116. Из точек данной прямой *MN* исходят отрезки, проходящие через данную точку *O* и делящиеся в ней пополам. Найти г.м.т. концов этих отрезков.

117. Построить треугольник, если известны его угол *A* и высоты h_b и h_c, проведенные из двух других вершин.

Анализ. Начертим произвольный треугольник *ABC* и будем считать, что он является искомым (рис. 55). Проведем высоты h_b и h_c, которые вместе с углом *A* считаем известными. Из основных задач на построение (6, 7 § 15) мы знаем, как построить треугольник по его основным элементам — сторонам и углам. Однако здесь вместо сторон треугольника ABC даны две высоты, поэтому рассмотрим треугольники, сторонами которых являются данные высоты. Каждая из высот разбивает $\triangle ABC$ на два прямоугольных треугольника. Из четырех таких треугольников в двух известно только по одному катету и их построить невозможно, но в двух других ($\triangle ABD$ и $\triangle ACE$) известно по катету и противолежащему острому углу A. Зная противолежащий острый угол, можно построить и прилежащий ($d - \angle A$) угол к известному катету $BD = h_b$ и тогда $\triangle ABD$ будет построен (задача 7 (в) § 15).

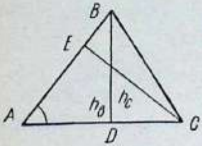


Рис. 55.

Чтобы перейти от $\triangle ABD$ к $\triangle ABC$, надо построить еще вершину C, используя другую высоту h_c. Эта вершина удалена от стороны AB уже построенного треугольника ABD на расстояние h_c, а поэтому C принадлежит г.м.т., удаленных от AB на h_c (см. задачу 98 (а)). Кроме того, C лежит на луче AD, т. е. C общая точка этого луча и указанного г.м.т.

118. Построить треугольник по высоте h_c, биссектрисе l_c и углу A.

119. Построить треугольник по стороне a, медиане m_a и углу α между данной медианой и высотой, опущенной на данную сторону.

§ 21. Сумма углов многоугольника

Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называется диагональю многоугольника.*

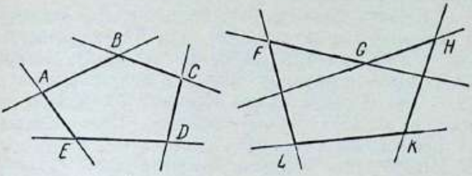
Многоугольник называется выпуклым, если ни одна из прямых, полученных неограниченным продолжением каждой его стороны, не рассекает его на части (рис. 56, *а*). Многоугольник на рис. 56, *б* не является выпуклым: каждая из прямых FG и HG рассекает многоугольник $FGHKL$ на две части. В школе изучаются свойства только выпуклых многоугольников.

Теорема 1. ***Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна 2d (n — 2).***

---

* Многоугольник и его основные элементы определены в § 7.

Если какую-то точку (O) внутри выпуклого многоугольника соединим со всеми вершинами (рис. 57), то получим столько же треугольников, сколько сторон у многоугольника (n). Сумма внутренних углов всех n треугольников равна $2dn$, а сумма углов данного многоугольника меньше на $4d$ (полный угол при вершине O) и равна $2dn - 4d = 2d(n-2)$.



а) б)

Рис. 56.

Теорема 2. ***Сумма внешних углов многоугольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна 4d.***

Каждый внешний угол многоугольника вместе со смежным внутренним дают $2d$ (например, углы при вершине E на рис. 57). Таких пар углов будет n, поэтому сумма всех внутренних углов и внешних (взятых по одному при каждой вершине) составляет $2dn$. Вычтя из нее сумму внутренних углов, получим искомую сумму внешних углов: $2dn - 2d(n-2) = 2dn - 2dn + 4d = 4d$ (она не зависит от числа сторон n).

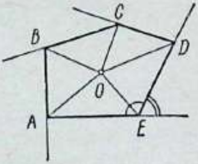


Рис. 57.

Задачи 120—126

120. Сколько сторон в выпуклом многоугольнике, если сумма его внутренних углов составляет: **а)** $14d$, **б)** $30d$, **в)** 1620°?

121. а) Вычислить сумму внутренних углов выпуклого 8-угольника.

б) Определить внутренний угол равноугольного выпуклого 5-угольника.

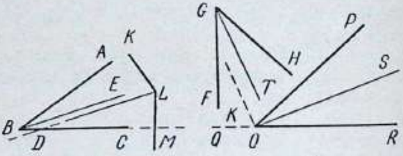
в) Определить внутренний угол равноугольного выпуклого 10-угольника.

г) Найти разность внутренних углов многоугольников, указанных в задачах (б) и (в). Какая разность их внешних углов? Сравнить разности и объяснить результат.

122. В каких выпуклых многоугольниках сумма внутренних углов: **а)** равна сумме внешних; **б)** меньше суммы внешних; **в)** больше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине?

123. Найти углы четырехугольника, если из них первые два относятся, как $5:7$, третий равен их разности, а четвертый меньше третьего на $\frac{4}{11}d$.

124. Доказать, что биссектрисы углов с соответственно перпендикулярными сторонами:



а) б)

Рис. 53.

а) параллельны, если один из углов острый, а другой тупой (рис. 58, *а*);

б) перпендикулярны, если оба угла острые или оба тупые (рис. 58, *б*).

125. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе. Доказать.

126. Построить треугольник по стороне a, высоте h_b, опущенной на другую сторону, и углу A, противолежащему данной стороне.

Глава IV ● Четырехугольники

§ 22. Параллелограмм

Определение. *Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.*

Теорема 1. ***В параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны и сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 2d.***

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 59).

Требуется доказать: $AB = CD$; $AD = BC$, $\angle C = \angle A$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle ADC + \angle A = 2d$, $\angle ABC + \angle C = 2d$, $\angle ADC + \angle C = 2d$, $\angle ABC + \angle A = 2d$.

Доказательство. Диагональ (BD) параллелограмма делит его на два равных треугольника: $\triangle ABD = \triangle CBD$ (по общей стороне BD и двум прилежащим к ней углам: $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 4 = \angle 2$ как накрест лежащие внутренние при параллельных прямых — $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$). В равных треугольниках: $AD = BC$ ($\angle 1 = \angle 3$), $AB = CD$ ($\angle 4 = \angle 2$), $\angle A = \angle C$ (лежат против BD). $\angle ABC = \angle ADC$ ($\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$). Углы параллелограмма (например, $\angle A$ и $\angle ADC$), прилежащие к одной и той же стороне, являются внутренними односторонними при параллельных прямых ($AB \parallel DC$ по определению параллелограмма, секущая — AD) и в сумме составляют $2d$.

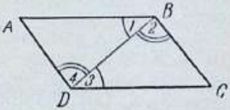


Рис. 59.

Следствие. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны* (см. задачу 137).

Теорема 2. ***Диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам.***

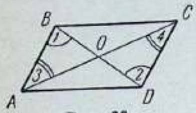


Рис. 60.

Дано: $ABCD$, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ (рис. 60).

Требуется доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

Доказательство. $\triangle AOB = \triangle COD$ ($AB = CD$ — по теореме 1, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$; см. § 18 и § 9). $AO = OC$ ($\angle 1 = \angle 2$), $BO = OD$ ($\angle 3 = \angle 4$).

Задачи 127—133

127. Могут ли:

а) три угла параллелограмма быть острыми (прямыми, тупыми);

б) углы треугольника быть равными трем углам параллелограмма;

в) два неравных параллелограмма иметь по равной стороне и по равной диагонали?

128. Стороны параллелограмма равны 4 *см* и 7 *см*. Могут ли его диагонали равняться: **а)** 12 *см* и 5 *см*; **б)** 10 *см* и 3 *см*?

129. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 *дм*. Из произвольной точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Вычислить периметр получившегося параллелограмма.

130. Параллелограмм, периметр которого равен 60 *см*, разделен диагоналями на четыре треугольника. Разность между периметрами двух смежных из этих треугольников равна 8 *см*. Определить стороны параллелограмма.

131. Одна из сторон параллелограмма образует с биссектрисами прилежащих углов треугольник. Наименьшая сторона этого треугольника равна половине общей стороны треугольника и параллелограмма. Определить углы параллелограмма.

132. Доказать, что отрезки прямой, параллельной диагонали параллелограмма, заключенные между продолжениями параллельных его сторон, равны.

133. Построить параллелограмм по стороне a, острому углу α и диагонали b, соединяющей вершины острых углов параллелограмма.

§ 23. Признаки параллелограмма

Теоремы (обратные, см. § 22). ***Если в выпуклом четырехугольнике:***

1) противоположные стороны попарно равны или

2) две противоположные стороны равны и параллельны или

3) диагонали в точке их пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник есть параллелограмм.

Доказательства теорем.

1) Дано: $AD = BC$, $AB = CD$ (рис. 61).

Требуется доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

$\triangle ABD = \triangle CBD$ (см. теорему 3 § 9) и $AB = CD$, поэтому $\angle ADB = \angle CBD$. А это внутренние накрест лежащие углы при прямых AD и BC и секущей BD, поэтому $AD \parallel BC$ (см. теорему 1 § 17). Аналогично доказываем, что $AB \parallel CD$. Согласно определению, $ABCD$ — параллелограмм (см. § 22).

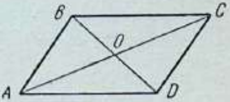


Рис. 61.

2) Дано: $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ (рис. 61).

Требуется доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

$\triangle ABD = \triangle CBD$ (см. теорему 1 § 9) и $AD = BC$, поэтому $\angle ABD = \angle BDC$. Отсюда $AB \parallel CD$ (см. теорему 1 § 17). $ABCD$ — параллелограмм (см. определение § 22).

3) Дано: $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 61).

Требуется доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

$\triangle AOD = \triangle BOC$ (см. теорему 1 § 9) и в них $AD = BC$, а $\angle ADB = \angle CBD$, поэтому $AD \parallel BC$ (см. теорему 1 § 17). Согласно второй теореме (признаку параллелограмма), $ABCD$ — параллелограмм.

Задачи 134—138

134. На сторонах параллелограмма $ABCD$ от вершины B отложены два равных отрезка и такие же отрезки отложены на сторонах от вершины D. Доказать, что полученные 4 точки на сторонах данного параллелограмма являются вершинами другого параллелограмма.

135. В параллелограмме $ABCD$ вершина A соединена с серединой стороны BC, вершина B — с серединой стороны CD, вершина C — с серединой стороны DA и вершина D — с серединой стороны AB. Доказать, что образовавшийся при пересечении проведенных прямых четырехугольник — параллелограмм.

136. Если в параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отложить равные отрезки $AE = CK$ и точки E и K соединить с вершинами B и D, то четырехугольник $BEDK$ — параллелограмм. Доказать.

137. Верны ли теоремы:

а) отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны;

б) (обратная) равные отрезки, заключенные между параллельными прямыми, параллельны?

138. Указать, к каким основным задачам на построение (см. § 15) сводится решение задач на построение параллелограмма:

а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне, диагонали и углу между ними;
в) по двум диагоналям и углу между ними;
г) по двум сторонам и диагонали;
д) по стороне и двум диагоналям;
е) по диагонали и двум углам, образуемым ею с непараллельными сторонами параллелограмма.

§ 24. Прямоугольник, ромб, квадрат

Определения. 1. *Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником.*

2. *Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом.*

3. *Параллелограмм, у которого все углы прямые и все стороны равны, называется квадратом.*

Прямоугольник, ромб и квадрат — частные случаи параллелограмма и обладают всеми его свойствами.

Теорема 1. ***Диагонали прямоугольника равны.***

Дано: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 62).

Требуется доказать: $AC = BD$.

Доказательство. $\triangle ABC = \triangle DCB$ ($\angle ABC = \angle DCB = d$ — по определению прямоугольника, $AB = DC$ — как противоположные стороны параллелограмма и BC — общий катет, см. § 14). $AC = BD$ (см. § 9).

Теорема 2. ***Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.***

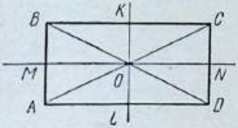


Рис. 62.

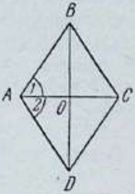


Рис. 63.

Дано: $ABCD$ — ромб (рис. 63).

Требуется доказать: $BD \perp AC$, $\angle 1 = \angle 2$ и т. д.

Доказательство. $\triangle BAD$ — равнобедренный ($AB = AD$ — по определению ромба) и AO — его медиана, проведенная к основанию BD ($BO = OD$ — свойство диагоналей параллелограмма, см. теорему 2 § 22). Следовательно, AO — высота и биссектриса (см. следствие 1 § 8). $AC \perp BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично доказывается и для остальных углов ромба.

Следствие. *Диагонали квадрата* (рис. 64) *обладают свойствами диагоналей параллелограмма, прямоугольника и ромба* (см. теорему 2 § 22, теоремы 1 и 2 § 24, задачу 140).

Задачи 139—152

139. Верны ли утверждения:
- **а)** прямоугольник есть параллелограмм;
- **б)** (обратное) параллелограмм есть прямоугольник;
- **в)** ромб есть параллелограмм;
- **г)** (обратное) параллелограмм есть ромб?

140. Верны ли следующие утверждения и обратные им:
- **а)** квадрат есть параллелограмм;
- **б)** квадрат есть прямоугольник;
- **в)** квадрат есть ромб. Что следует из верных утверждений?

141. Перечислить все свойства: а) прямоугольника; б) ромба; в) квадрата.

142. а) Если диагонали параллелограмма равны, то такой параллелограмм является прямоугольником. Доказать. Как можно назвать эту теорему?

б) Привести пример, опровергающий утверждение: если диагонали четырехугольника равны, то такой четырехугольник есть прямоугольник.

143. а) Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то такой параллелограмм есть ромб. Доказать этот признак ромба.

б) Опровергнуть с помощью примера следующее утверждение: если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник есть ромб.

144. Всякий выпуклый четырехугольник, у которого диагонали являются биссектрисами его углов, есть ромб. Доказать этот признак ромба.

145. Доказать, что в параллелограмме, который не является ромбом, диагонали не являются биссектрисами углов.

146. В прямоугольнике $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении 3 : 1. Найти угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

147. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 *см* дальше, чем от большей стороны. Периметр этого прямоугольника равен 56 *см*. Определить его стороны.

148. Сторона ромба образует с продолжениями диагоналей углы, относящиеся, как 9 : 7. Найти углы ромба.

149. Диагональ ромба составляет 25% от его периметра, равного $2p$. Найти диагональ, сторону и углы ромба.

150. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Определить стороны этого прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 *см*.

151. Построить прямоугольник по стороне и сумме диагоналей.

152. Построить ромб по высоте и углу.

Примечание. Отрезок перпендикуляра, заключенный между параллельными сторонами параллелограмма (в том числе и ромба), называется его высотой.

§ 25. Симметрия параллелограммов

Прямоугольник имеет только две оси симметрии — прямые, проходящие через середины противоположных сторон (KL и MN, рис. 62). В этом можно убедиться перегибанием чертежа по оси симметрии. В ромбе также только две оси симметрии — диагонали ромба (рис. 63). Квадрат является одновременно прямоугольником и ромбом, поэтому его осями симметрии являются четыре прямые: KL и MN, AC и BD (рис. 64).

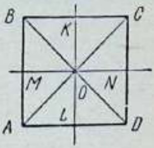


Рис. 64.

Остальные параллелограммы (неравносторонние, с острыми и тупыми углами) не имеют осей симметрии.

Определения. 1. *Две точки A и C* (рис. 64) *называются центрально-симметричными относительно точки O (центра симметрии), если O — середина отрезка AC.*

2. *Фигура называется центрально-симметричной относительно точки O, если каждой ее точке соответствует симметричная точка этой же фигуры относительно O. Точка O называется центром симметрии.*

Всякий параллелограмм есть фигура центрально-симметричная с центром симметрии в точке пересечения диагоналей (см. рис. 61 и задачу 153).

Задачи 153—156

153. Доказать, что во всяком параллелограмме точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

154. Доказать, что являются осями симметрии:

а) в прямоугольнике — прямые, проходящие через середины противоположных сторон;

б) в ромбе — его диагонали.

155. Существует ли центр симметрии: **а)** в треугольнике; **б)** в круге; **в)** у двух параллельных прямых? Если существует, то указать его и обосновать утверждение.

156. Указать, к каким основным задачам на построение (см. § 15) сводится решение задач на построение прямоугольника:

а) по двум его смежным сторонам;

б) по диагонали и углу, образованному диагональю со стороной;

в) по стороне и диагонали;

г) по диагонали и углу между диагоналями.

§ 26. Деление отрезка на равные части

Пусть дан отрезок AB (рис. 65) и требуется разделить его с помощью циркуля и линейки на данное число равных частей (например, на 3).

Для решения задачи выполним следующие построения. Из одного конца (A) данного отрезка проведем произвольный луч AM и отложим на нем, начиная от вершины A, три каких-нибудь равных между собой отрезка: $AK = KL = LN$. Конец последнего из этих отрезков (N) соединим прямой с другим концом (B) данного отрезка. Через точки K и L проведем прямые KC и LD, параллельные NB.

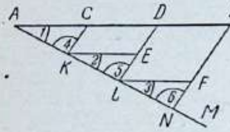


Рис. 65.

Докажем равенство полученных отрезков AC, CD и DB. Проведем KE и LF параллельно AB. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (как соответственные при трех параллельных прямых AB, KE и LF и секущей AM). $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ (как соответственные при параллельных KC, LD и NB и секущей AM). $AK = KL = LM$ (по построению). $\triangle ACK = \triangle KEL = \triangle LFN$ (см. теорему 2 § 9). В них $AC = KE = LF$. Но $KCDE$ и $LDBF$ — параллелограммы (по определению § 22) и в них $KE = CD$ и $LF = DB$. Поэтому $AC = CD = DB = \frac{1}{3} AB$, что и требовалось доказать.

Попутно мы доказали здесь следующее.

Теорема. ***Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы про-***

вести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то и на этой стороне угла отложатся равные между собой отрезки.

§ 27. Средняя линия треугольника

Определение. *Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника* (DF, рис. 66).

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине ее.***

Дано: $\triangle ABC$, $BD = DA$ и $BF = FC$, DF.

Требуется доказать: $DF \parallel AC$ и $DF = \frac{1}{2} AC$ (рис. 66).

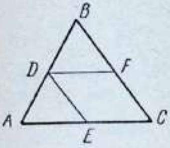


Рис. 66.

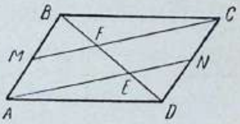


Рис. 67.

Доказательство. Допустим, что DF не параллельна AC. Тогда из середины D стороны AB проведем прямую, параллельную AC, которая пересечет сторону BC не в точке F. Но эта точка по теореме (§ 26) будет также серединой стороны BC. Получилось, что у BC две середины, что невозможно, а поэтому допущение неверно. Следовательно, $DF \parallel AC$, т. е. средняя линия параллельна третьей стороне.

Возьмем $AE = EC$, тогда DE — средняя линия и $DE \parallel BC$ (по доказанному). $DFCE$ — параллелограмм, поэтому $DF = EC = \frac{1}{2} AC$ (так как $AE = EC$ по построению).

Задачи 157—161

157. Середины (M и N) противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 67) соединены с вершинами C и A. Отрезок FE равен 7 *см*. Определить диагональ BD.

Указание. Решить задачу, используя теорему § 26.

158. Определить вид четырехугольника, который получится при последовательном соединении середин сторон: **а)** параллелограмма; **б)** прямоугольника; **в)** ромба; **г)** квадрата.

159. Доказать, что:

а) отрезки, соединяющие последовательно середины сторон четырехугольника, образуют параллелограмм;

б) отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, в точке пересечения делятся пополам.

160. В треугольнике средняя линия между двумя какими-нибудь сторонами и медиана к третьей стороне делятся пополам в точке пересечения. Доказать.

161. Опираясь на свойство средней линии треугольника, провести через данную точку прямую, параллельную данной прямой.

§ 28. Трапеция. Средняя линия трапеции

Определения. 1. *Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется трапецией.*

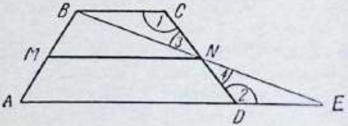


Рис. 68.

2. *Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями* (*AD* и *BC*, рис. 68), *а две другие — боковыми сторонами* (*AB* и *CD*).

3. *Трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (равнобочной). Трапеция, одна из боковых сторон которой перпендикулярна к основаниям, называется прямоугольной.*

4. *Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется средней линией трапеции.*

Теорема. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

Дано: $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AM = MB$, $CN = ND$.

Требуется доказать: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$ (рис. 68).

Доказательство. $\triangle BCN = \triangle NDE$ ($CN = ND$, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AE$ и секущей CD, $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные; см. § 9). Отсюда $DE = BC$ и $BN = NE$. MN — средняя линия треугольника ABE (по определению § 27). $MN = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC)$ и $MN \parallel AD$ (см. теорему § 27), а поэтому $MN \parallel BC$ (см. следствие 2 § 16).

Задачи 162—175

162. Доказать следующие свойства углов трапеции:

а) углы, прилежащие к одной боковой стороне всякой трапеции, в сумме составляют $2d$;

б) углы, прилежащие к одному основанию равнобедренной трапеции, равны между собой;

в) в прямоугольной трапеции имеется два и только два прямых угла и лежат они при одной боковой стороне.

163. В трапеции средняя линия делит каждую диагональ и высоту пополам. Доказать.

164. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен их полуразности. Доказать.

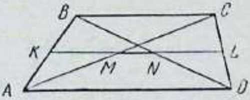


Рис. 69.

Дано: $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AM = MC$, $BN = ND$ (рис. 69).

Требуется доказать: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD - BC}{2}$.

Доказательство. Во всякой трапеции средняя линия делит каждую диагональ пополам (см. задачу 163). Но так как у каждой диагонали середина есть единственная точка, а через две точки (середины двух диагоналей трапеции) можно провести только одну прямую, то эта прямая и будет проходить через середины боковых сторон трапеции, $AK = KB$ и $CL = LD$. Следовательно, MN параллельна

AD и BC. В треугольнике ABC средняя линия $KM = \frac{BC}{2}$, в $\triangle DCB$ средняя линия $LN = \frac{BC}{2}$ (см. теорему § 27). $KL = \frac{AD + BC}{2}$ (см. теорему § 28). $MN = KL - KM - NL = \frac{AD + BC}{2} - \frac{BC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC - BC - BC}{2} = \frac{AD - BC}{2}$.

165. Доказать, что если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором основании, то это второе основание равно сумме боковых сторон трапеции.

166. Если в трапеции сумма противоположных углов равна $2d$, то такая трапеция равнобедренная. Доказать.

167. Биссектрисы углов, прилежащих к одной из боковых сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции. Доказать.

168. а) Какая прямая является осью симметрии в равнобедренной трапеции? Обосновать.

б) Имеется ли ось симметрии в неравнобедренной трапеции?

в) Имеется ли центр симметрии в трапеции?

169. Средняя линия равнобочной трапеции делится диагональю на части в 4 *см* и 10 *см*. Боковая сторона 12 *см*. Найти углы трапеции.

170. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний со стороной a и прямоугольный. Определить среднюю линию трапеции.

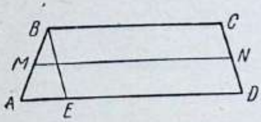


Рис. 70.

171. В трапеции $ABCD$ средняя линия MN равна 18 *дм*. Из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD, до встречи в точке E с бо́льшим основанием AD. Определить основания, если $AE = 1$ *дм*.

Дано: $ABCD$, $BC \parallel AD$, $BE \parallel CD$, $AE = 1$ *дм*, $AM = MB$, $CN = ND$, $MN = 18$ *дм*.

Определить AD и BC (рис. 70).

Решение. $BCDE$ — параллелограмм (см. определение § 22). $ED = BC$. Отрезок $AE = AD - ED = AD - BC$ есть разность оснований трапеции. Обозначим $AD = x$ и $BC = y$ и составим систему двух уравнений с двумя неизвестными. По условию разность оснований $x - y = 1$.

Используем еще известную длину средней линии. По теореме (§ 28) средняя линия равна $\frac{x+y}{2}$. Получаем второе уравнение: $\frac{x+y}{2}=18$ или равносильное ему уравнение: $x+y=36$. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=36, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Сложением уравнений получаем: $2x=37$, откуда $x=18{,}5$. Вычитая из первого второе уравнение, получим: $2y=35$, $y=17{,}5$.

Ответ: $AD=18{,}5$ *дм*, $BC=17{,}5$ *дм*.

172. Определить меньшее основание равнобедренной трапеции, если оно равно боковой стороне, периметр трапеции равен 28 *см* и средняя линия равна 9 *см*.

173. Построить трапецию по большему основанию a, прилежащему острому углу α и двум боковым сторонам b и c.

Анализ. Пусть $ABCD$ (рис. 71) — искомая трапеция. Отметим на ней известные элементы. Постараемся выделить в трапеции какой-то треугольник, который можно построить по данным задачи. Каждая трапеция может быть разделена на треугольник (ABF) и параллелограмм ($BCDF$) прямой, например BF, проведенной из какого-нибудь конца меньшего основания параллельно боковой стороне (CD). Тогда $BF=CD=c$. В треугольнике ABF известны две стороны и угол, лежащий против одной из них.

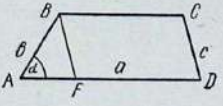


Рис. 71.

Если данная сторона b, при которой лежит данный угол α, меньше (или равна) другой боковой стороны c, то $\triangle ABF$ всегда можно построить по b, c и α, причем единственный (см. задачу 82).

Построив $\triangle ABF$, легко построить и трапецию $ABCD$. Для этого придется к треугольнику пристроить параллелограмм, у которого уже известны три вершины: B, F и D. Достаточно из центра B описать дугу радиуса BC, равного FD, а из D описать дугу радиуса DC, равного FB. Пересечение дуг даст четвертую вершину трапеции. В этом случае искомая трапеция будет единственной.

Описанный здесь прием перехода от треугольника к трапеции достраиванием параллелограмма называется методом параллельного перенесения (сторона FB параллельно перенесена до положения DC).

Если же сторона c меньше стороны b, но больше расстояния (перпендикуляра) от вершины B до луча AF, то получим два треугольника: ABF_1 и ABF_2 (рис. 72). В этом случае путем параллельного перенесения BF_1 получим одну трапецию, а параллельным перенесением BF_2 получим другую трапецию. Они не равны, но каждая удовлетворяет всем требованиям задачи. Два решения.

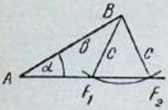


Рис. 72.

Если сторона c меньше расстояния от B до AD, то треугольник построить невозможно и задача не имеет решения, а если c равно этому расстоянию, то получим единственное решение (прямоугольная трапеция).

Для построения необходимо задать отрезки a, b, c и угол α. Построение и доказательство не могут теперь вызвать затруднений.

174. Построить трапецию по двум основаниям a и b и двум диагоналям d и l.

175. Построить трапецию, если даны ее диагонали l и d, угол α между ними и боковая сторона c.

Глава V ● Окружность

§ 29. Построение окружности по точкам

Часть круга, заключенная между двумя радиусами, называется **сектором**. Часть круга, заключенная между дугой и стягивающей ее хордой, называется **сегментом**.*

Задача. Провести окружность через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

Решение. Пусть A, B и C — данные точки (рис. 73). Центр искомой окружности должен быть одинаково удален от точек A и B, поэтому он лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка AB (см. п. 8 § 15). Центр искомой окружности должен лежать и на перпендикуляре, проведенном через середину BC, поэтому таковым центром будет точка пересечения указанных перпендикуляров (они обязательно пересекутся, причем в единственной точке, так как данные точки A, B и C не лежат на одной прямой).

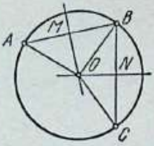


Рис. 73.

$AM = MB$, $BN = NC$, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OA = OB$ и $OB = OC$, следовательно, $OA = OB = OC$ — радиусы искомой окружности, O — ее центр. Решение единственное.

Задачи 176—179

176. Сколько окружностей можно провести: а) через одну точку; б) через две точки?

Указать геометрическое место центров окружностей.

---

* Определения окружности, круга и других их элементов даны в § 6.

177. Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке. Доказать.

178. Можно ли провести окружность через все четыре вершины: **а)** любого прямоугольника; **б)** параллелограмма; **в)** ромба и квадрата; **г)** трапеции, прямоугольной трапеции, равнобедренной трапеции?

179. Найти центр данной окружности (или данной дуги).

§ 30. Диаметр, перпендикулярный к хорде. Дуги между параллельными хордами

Теорема 1. ***Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам.***

Дано: $CD \perp AB$ (рис. 74).

Требуется доказать: $AF = FB$, $\smile AD = \smile DB$, $\smile AC = \smile CB$.

Доказательство. $\triangle AOB$ — равнобедренный ($AO = OB$). Высота OF является медианой и биссектрисой: $AF = FB$, $\angle 1 = \angle 2$ (см. § 8). $\smile AD = \smile DB$ (см. теорему 1 § 6). $\angle AOC = \angle BOC$, $\smile AC = \smile BC$.

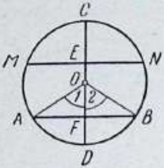


Рис. 74.

Верны и обратные теоремы (см. задачи 180 (а), (б)).

Теорема 2. ***Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.***

Дано: $MN \parallel AB$ (рис. 74).

Требуется доказать: $\smile AM = \smile BN$.

Доказательство. Проведем диаметр CD, перпендикулярный хорде AB. Тогда $CD \perp MN$ (см. следствие § 18). $AF = FB$ и $ME = EN$ (по теореме 1). При перегибании чертежа по CD полуокружности совместятся. Совпадут точки M с N и A с B, поэтому совместятся и дуги: $\smile AM = \smile BN$ (см. определение равных дуг § 6).

Задачи 180—185

180. Доказать теоремы, обратные теореме 1 § 30:

а) диаметр, проведенный через середину хорды, не проходящей через центр, перпендикулярен к ней и делит дуги, стягиваемые хордой, пополам;

б) диаметр, проведенный через середину дуги, делит пополам хорду, стягивающую эту дугу, и перпендикулярен к этой хорде.

181. а) Хорда, стягивающая дугу в 120°, удалена от центра на 5 *см*. Определить радиус окружности.

б) Хорда, стягивающая дугу в 90°, удалена от центра на m. Определить длину хорды.

182. Доказать теоремы: в одном круге или в равных кругах:

а) равные хорды одинаково удалены от центра;

б) (обратная) хорды, одинаково удаленные от центра, равны.

183. а) В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой на два отрезка в 3 *см* и 7 *см*. Найти расстояние каждой хорды от центра.

б) Из одной точки окружности проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 *см* и на 10 *см*. Определить их длину.

184. На какие четыре части разделена окружность двумя параллельными хордами, если меньшая из этих хорд равна радиусу, а большая удалена от центра на половину радиуса?

185. Найти геометрическое место:

а) середин хорд данной окружности, параллельных данной хорде MN;

б) середин хорд данной длины n в данной окружности радиуса R.

§ 31. Зависимость между дугами и хордами

Теоремы. ***В одном круге или в равных кругах:***

1) равные дуги стягиваются равными хордами;

2) (обратная) ***равные хорды стягивают равные дуги,***

3) из двух неравных дуг, меньших полуокружности, большая дуга стягивается большей хордой;

4) (обратная) ***большая хорда стягивает большую дугу.***

Доказательства теорем.

1) Дано: $\smile AB = \smile CD$.

Требуется доказать: $AB = CD$ (рис. 75).

Из равенства дуг следует: $\angle AOB = \angle COD$ (см. § 33).

$\triangle AOB = \triangle COD$ (по двум сторонам и углу между ними, см. § 9), а в них $AB = CD$ (так как $\angle AOB = \angle COD$).

2) Дано: $AB = CD$ (рис. 75).

Требуется доказать: $\smile AB = \smile CD$.

$\triangle AOB = \triangle COD$ (по трем сторонам, см. § 9), а в них $\angle AOB = \angle COD$ (так как $AB = CD$ по условию). Следовательно, $\smile AB = \smile CD$ (см. § 33).

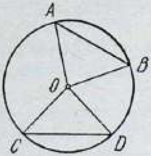


Рис. 75.

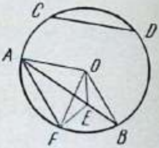


Рис. 76.

3) Дано: $\smile AB > \smile CD$ (рис. 76).

Требуется доказать: хорда AB больше хорды CD.

Отложим хорду AF, равную CD. Тогда $\smile AF = \smile CD$ (см. теорему 2) и $\smile AB > \smile AF$. Проведем биссектрису OE угла FOB и соединим F с E. $\triangle FOE = \triangle BOE$ (по двум сторонам и углу между ними) и в них $FE = BE$. $AE + EF > AF$ (см. § 12). Заменим EF равным отрезком BE. $AE + BE > AF$. Заменим $AE + BE$ отрезком AB: $AB > AF$. Так как $AF = CD$, то $AB > CD$.

4) Дано: $AB > CD$ (рис. 76).

Требуется доказать: $\smile AB > \smile CD$.

Между двумя дугами обязательно будет верно только одно из трех соотношений: а) $\smile AB < \smile CD$, что невозможно, так как тогда по теореме 3 $AB < CD$, а это противоречит условию ($AB > CD$); б) $\smile AB = \smile CD$, что также невозможно, ибо тогда $AB = CD$, а это противоречит условию; в) $\smile AB > \smile CD$ верно, так как первые два соотношения неверны.

Все четыре теоремы будут верны и для равных кругов, так как такие круги отличаются друг от друга только положением на плоскости.

Задачи 186—190

186. Доказать, что:

а) любая трапеция, все вершины которой находятся на одной окружности, равнобедренная;

б) любой параллелограмм, все вершины которого находятся на одной окружности, — прямоугольник.

187. Доказать теоремы:

а) если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а углы между ними не равны, то против большего из этих углов лежит большая сторона;

б) если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, а третьи стороны не равны, то против большей из неравных сторон лежит больший угол.

188. На хорде AB взяты две точки D и E на равном расстоянии от середины этой хорды и через эти точки восставлены к AB перпендикуляры DF и EQ до пересечения с окружностью. Доказать, что эти перпендикуляры равны.

189. Из точки A на окружности проведены две хорды $AB = AC = 3$ *дм* и их концы соединены; найти расстояние от центра до хорды BC, если диаметр круга равен 0,6 *м*.

190. Найти геометрическое место вершин C треугольников с общим основанием AB, если медиана, проведенная к основанию, имеет данную длину m.

§ 32. Касательная к окружности

Прямая (рис. 77) может быть удалена от центра окружности на расстояние, меньшее радиуса ($OE < OF$), равное радиусу (OF) или большее радиуса ($OG > OK$). $OE \perp CD$, $OF \perp AB$ и $OG \perp MN$ (см. определение 5 § 13).

Определения. 1. *Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется секущей* (секущая CD имеет общие с окружностью точки H и L).

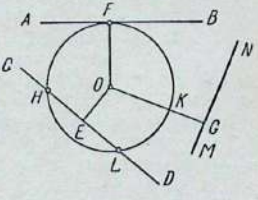


Рис. 77.

2. *Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной, а их общая точка — точкой касания* (касательная AB и окружность имеют только одну общую точку F).

Теорема 1. ***Перпендикуляр к радиусу в его конце, лежащем на окружности, является касательной к этой окружности.***

Дано: $AB \perp OF$ (рис. 77).

Требуется доказать: AB — касательная.

F — общая точка прямой и окружности, основание перпендикуляра OF к прямой AB. Отрезок, соединяющий всякую другую, кроме F, точку прямой AB с центром O будет наклонной к AB (см. следствие 1 § 10). Следовательно, все другие, кроме F, точки прямой AB удалены от O на расстояние, большее OF (см. теорему 1 § 13) и поэтому не лежат на данной окружности. Итак, F — единственная общая точка прямой AB и окружности и, согласно определению 2, AB — касательная к окружности.

Теорема 2 (обратная). ***Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.***

Дано: AB — касательная, F — точка касания.

Требуется доказать: $AB \perp OF$.

Все другие, кроме F, точки касательной не лежат на окружности (по определению 2) и поэтому удалены от O больше, чем на радиус OF. Следовательно, OF — кратчайшее расстояние от O до AB, поэтому $OF \perp AB$ (см. следствие 1 § 10 и теорему 1 § 13).

О взаимном положении двух окружностей см. задачу 199.

Задачи 191—202

191. Построить касательную к данной окружности O, если задана:

а) точка касания C;

б) прямая AB, параллельная искомой касательной.

192. Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам. Доказать.

193. Две касательные, проведенные к одной окружности из одной точки вне ее, равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла между этими касательными. Доказать.

194. Доказать равенство:

а) общих внутренних касательных к двум окружностям ($AB = CD$, рис. 78, *а*);

б) общих внешних касательных к двум окружностям ($KL = MN$, рис. 78, *б*).

Примечание. Точки A, B, C, D, K, L, M и N — точки касания.

195. Доказать, что:

а) точка пересечения общих внутренних касательных к двум данным окружностям лежит на линии их центров (прямой, проходящей через их центры);

б) линия центров является осью симметрии для общих внутренних касательных;

в) линия центров является осью симметрии для общих внешних касательных двух данных окружностей.

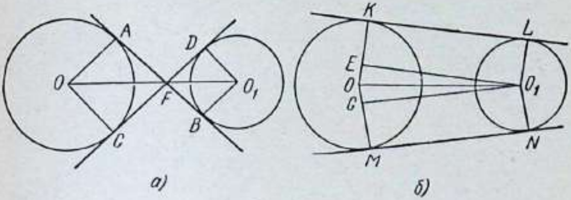


Рис. 78.

196. Дан круг, радиус которого равен 1 *дм*. Из внешней точки M к нему проведены две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Между точками A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C и через нее проведена третья касательная, образующая с первыми двумя касательными треугольник MKL. Найти периметр этого треугольника.

197. Даны два круга; их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны; хорды, соединяющие точки касания, равны 3 *см* и 5 *см*. Определить расстояние между центрами.

198. Внешние общие касательные к двум данным окружностям радиусов R и r взаимно перпендикулярны. Найти длины отрезков этих общих касательных (между точками касания).

199. На рис. 79 показаны различные случаи взаимного положения двух окружностей, радиусы которых R и r:

а) окружности не имеют общей точки;

б) окружности касаются (имеют только одну общую точку);

в) окружности пересекаются (имеют две общие точки).

жит столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд содержит половина указанной дуги).

Дан вписанный угол ABC, опирающийся на дугу AC (рис. 80).

Стороны вписанного угла могут быть расположены относительно центра окружности лишь следующим образом (три случая).

1) Одна из сторон (AB) вписанного угла является диаметром (рис. 80, *а*). Соединим O с C. $\angle AOC = \angle B + \angle C$ (см. следствие 1 § 20). Но $\angle B = \angle C$ ($OC = OB$; см. § 8), поэтому $\angle AOC = 2\angle B$ или $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. Так как $\angle AOC$ измеряется дугой AC (см. § 33), то $\angle ABC$ измеряется половиной дуги AC.

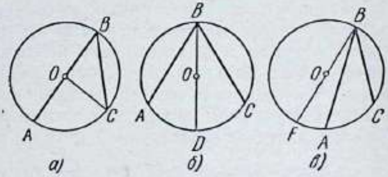


Рис. 80.

2) Центр окружности находится внутри угла (рис. 80, *б*). Через вершину B проведем диаметр BD. По доказанному случаю 1 имеем: $\angle ABD$ измеряется $\frac{1}{2}\smile AD$ и $\angle DBC$ измеряется $\frac{1}{2}\smile DC$. Так как $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$ и $\frac{1}{2}\smile AD + \frac{1}{2}\smile DC = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile DC) = \frac{1}{2}\smile AC$, то $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}\smile AC$.

3) Центр O — вне угла ABC (рис. 80, *в*). Проведем диаметр BF. $\angle FBC$ измеряется $\frac{1}{2}\smile FC$, $\angle FBA$ измеряется $\frac{1}{2}\smile FA$. $\angle ABC = \angle FBC - \angle FBA$, поэтому $\angle ABC$ равен $\frac{1}{2}\smile FC - \frac{1}{2}\smile FA = \frac{1}{2}(\smile FC - \smile FA) = \frac{1}{2}\smile AC$.

Теорема полностью доказана.

Следствия. 1. *Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

2. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.*

Задачи 203—210

203. Вычислить угол:

а) вписанный, если он опирается на дугу, которой соответствует центральный угол в 180936″;

б) центральный, если на соответствующую ему дугу опирается вписанный угол в 17,3°.

204. Верны ли следующие утверждения, обратные следствиям (см. § 34):

а) все равные вписанные в данную окружность углы опираются на одну и ту же дугу;

б) если вписанный угол прямой, то он опирается на диаметр.

Как исправить формулировку, чтобы неверное предложение стало верным?

205. Найти ошибки в рассуждениях:

а) общая хорда двух окружностей радиусов R и r ($R > r$) стягивает в этих окружностях равные дуги, а поэтому и центральные углы, соответствующие этим дугам, равны;

б) в тех же окружностях взяли по центральному углу в 90°; из равенства этих углов следует равенство соответствующих им дуг, а из последнего — равенство стягивающих их хорд.

206. Угол, составленный касательной с продолжением диаметра, равен 46°30′. Определить величину дуг между концами диаметра и точкой касания.

207. Одна из двух хорд, составляющих вписанный угол, разделяет окружность в отношении 3 : 13, а другая в отношении 4 : 21. Определить этот угол.

208. В треугольнике ABC угол A содержит 37°30′. Медиана BD равна половине стороны AC. Найти углы треугольника ABC.

209. Найти геометрическое место:

а) вершин прямого угла прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу;

б) оснований перпендикуляров, проведенных из данной точки на прямые, проходящие через другую данную точку.

210. Построить:

а) прямоугольный треугольник по гипотенузе a и катету b (использовать свойство вписанного прямого угла);

б) касательную к данной окружности, проходящую через данную точку C вне круга.

§ 35. Другие углы, связанные с окружностью

Теорема 1. ***Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него.***

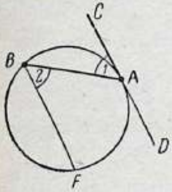


Рис. 81.

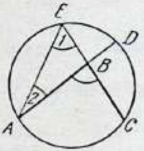


Рис. 82.

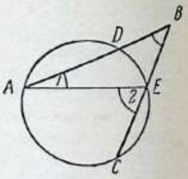


Рис. 83.

Дано: CD — касательная к окружности, A — точка касания, AB — хорда.

Требуется доказать: $\angle CAB$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AB$ (рис. 81).

Для доказательства проведем хорду $BF \parallel CD$, тогда $\smile AB = \smile AF$ (см. задачу 192). $\angle 2 = \angle 1$ (см. теорему 1 § 18). $\angle 2$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AF$ (см. § 34) или $\frac{1}{2} \smile AB$, поэтому и $\angle 1$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AB$.

Теорема 2. ***Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.***

Дан $\angle ABC$ (рис. 82).

Требуется доказать: $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile AC + \smile ED)$.

$\angle 1$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AC$, а $\angle 2$ измеряется $\frac{1}{2} \smile ED$

(см. § 34). Но $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$ (см. следствие 1 § 20), поэтому $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AC + \frac{1}{2} \smile ED = \frac{1}{2}(\smile AC + {} + \smile ED)$.

Теорема 3. ***Угол с вершиной вне круга измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами.***

Дан $\angle ABC$ (рис. 83).

Требуется доказать: $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$.

$\angle 2 = \angle B + \angle 1$ (см. следствие 1 § 20), отсюда $\angle B = {} = \angle 2 - \angle 1$. Но $\angle 2$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AC$, а $\angle 1$ измеряется $\frac{1}{2} \smile DE$ (см. § 34), поэтому $\angle B$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AC - {} - \frac{1}{2} \smile DE = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$.

Задачи 211—218

211. Доказать, что угол между секущей и касательной равен полуразности дуг, заключенных между его сторонами.

212. Доказать, что угол, образованный двумя касательными, проведенными из одной точки к одной окружности:

а) равен полуразности двух дуг, заключенных между точками касания;

б) дополняет центральный угол, соответствующий меньшей из этих дуг, до $2d$.

213. Отрезок произвольной касательной к окружности, заключенный между двумя параллельными касательными к той же окружности, виден из центра под прямым углом. Доказать.

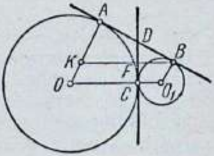


Рис. 84.

214. Две окружности внешне касаются. Их общая внешняя касательная образует с общей внутренней касательной угол в 60°. Определить отношение радиусов окружностей.

Дано: окружности O и O_1, AB — общая внешняя касательная, CD — общая внутренняя касательная, A, B и C — точки касания, $\angle BDC = 60^\circ$ (рис. 84).

Определить отношение $O_1B : OA$.

Решение. Соединим центры O и O_1 и проведем радиусы OA и O_1B. $DC \perp OC$ (касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания; § 32). Проведем BK параллельно O_1O, тогда $DC \perp BK$ (прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой прямой; § 18). В прямоугольном треугольнике DFB один острый угол равен 60° (по условию задачи), тогда второй острый угол $DBF = 30°$ (сумма углов треугольника равна 180°; § 20). В прямоугольном треугольнике BAK ($OA \perp AB$; см. § 32) против угла $ABK = 30°$ лежит катет $KA = \frac{1}{2} KB$ (§ 20).

$OKBO_1$ — параллелограмм ($BK \parallel O_1O$ по построению и $O_1B \parallel OA$ как два перпендикуляра к одной прямой AB; § 16 и 22), поэтому $KB = OO_1$ и $OK = O_1B$.

Обозначим (для удобства) радиус большей окружности через R, а радиус меньшей окружности через r. Тогда $OO_1 = R + r$, $KB = OO_1 = R + r$, $KA = \frac{1}{2} KB = \frac{1}{2}(R + r)$, $OK = r$.

$OA = OK + KA = r + \frac{R+r}{2}$. Но $OA = R$, поэтому $r + \frac{R+r}{2} = R$. Решим это равенство относительно R.

$2r + R + r = 2R$, $3r = R$ или $R = 3r$.

Вычислим отношение $r : R$, подставив вместо R равное ему $3r$; $r : R = r : 3r = 1 : 3$ (оба члена отношения разделили на r, отчего величина отношения не изменится).

Ответ: радиусы данных окружностей относятся, как 1 : 3.

215. Хорда AB, отсекающая четверть окружности, пересечена перпендикулярным к ней диаметром CD. Найти углы между секущими AC и BD, AD и BC.

216. Определить величины внутренних углов и углов между диагоналями вписанной в окружность трапеции, у которой большее основание равно диаметру, а меньшее стягивает дугу в $\frac{1}{40}$ часть окружности.

217. Через конец хорды проведена касательная. Тупой угол между ними больше центрального, соответствующего той же хорде, на $\alpha°$. Определить величину меньшей дуги.

218. Построить к двум данным окружностям общие касательные: а) внешнюю, б) внутреннюю.

Глава VI ● Подобие фигур

§ 36. Пропорциональные отрезки

Определение 1. *Отношением двух отрезков называется отношение тех чисел, которые выражают длины этих отрезков при условии, что отрезки измерены одним и тем же отрезком, принятым за единицу.*

Отношение отрезков не зависит от того, какой одной и той же единицей длины измерены отрезки. Например, если $AB = 3$ *см* и $CD = 5$ *см*, то $AB : CD = 3 : 5 = \frac{3}{5} = 0{,}6$; если те же отрезки измерить в миллиметрах, то получим: $AB : CD = 30 : 50 = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Определение 2. *Если отношение двух отрезков* ($AB : CD$) *равно отношению двух других отрезков* ($A_1B_1 : C_1D_1$), *то четыре таких отрезка называются пропорциональными.*

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1 \text{ или } \frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$

Если три из этих отрезков известны, то четвертый пропорциональный к ним отрезок можно вычислить по правилам решения числовых пропорций.

Теорема. ***Если две прямые пересечь тремя параллельными прямыми, то отношение двух отрезков, получившихся на одной прямой, равно отношению двух соответствующих отрезков другой прямой.***

Дано: прямые AB и CD пересечены прямыми $FE \parallel KL \parallel MN$ (рис. 85).

Требуется доказать: $\frac{EL}{LN} = \frac{FK}{KM}$.

Пусть длина отрезка FK равна m, длина отрезка KM равна n (на рис. 85 $m = 4$, $n = 5$ единицам длины, которыми измерены отрезки). Из точек деления отрезков FK и KM на равные части проведем прямые, параллельные прямым FE, KL и MN. Отрезок EN также разделится на равные части (см. теорему § 26), причем в отрезке EL будет m, а в отрезке LN будет n равных отрезков. Если один такой отрезок принять за единицу измерения отрезков EL и LN, то длина EL будет равна числу m, а длина $LN = n$. Тогда отношение отрезков будет равно: $\frac{EL}{LN} = \frac{m}{n}$ (см. определение 1). Но отношение FK и KM такое же: $\frac{FK}{KM} = \frac{m}{n}$. Итак, эти отношения равны: $\frac{EL}{LN} = \frac{FK}{KM}$, т. е. отрезки EL, LN, FK и KM пропорциональны (см. определение 2).

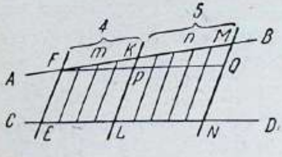


Рис. 85.

Пропорциональными будут еще и такие отрезки:

1) FK, FM, EL и EN, так как $\frac{FK}{FM} = \frac{4}{9}$ и $\frac{EL}{EN} = \frac{4}{9}$, поэтому $\frac{FK}{FM} = \frac{EL}{EN}$;

2) FM, KM, EN и LN, так как $\frac{FM}{KM} = \frac{EN}{LN} = \frac{9}{5}$.

Следствие. *Пропорциональные отрезки на сторонах угла, пересеченных параллельными прямыми, можно брать от вершины.*

Проведем $FQ \parallel EN$ (рис. 85). Тогда $FP = EL$ и $PQ = LN$. По теореме $\frac{FK}{KM} = \frac{EL}{LN}$; заменим EL и LN и получим: $\frac{FK}{KM} = \frac{FP}{PQ}$.

Аналогично получим пропорцию $\frac{FK}{FM} = \frac{FP}{FQ}$ и др.

Задачи 219—227

219. Разделить данный отрезок AB в данном отношении $p : q$, если:

а) p и q — данные отрезки;

б) p и q — данные числа: $p = 2$, $q = 3$.

в) Как разделить данный отрезок MN на части пропорционально трем, четырем и т. д. данным отрезкам (или числам)?

220. Найти отношение:

а) диагоналей ромба с прямыми углами;

б) смежных сторон параллелограмма со взаимно перпендикулярными диагоналями;

в) гипотенузы любого прямоугольного треугольника и медианы, проведенной к гипотенузе;

г) меньшего катета прямоугольного треугольника, содержащего угол в 60°, к гипотенузе;

д) средней линии трапеции к сумме ее оснований;

е) разности оснований равнобедренной трапеции с углом в 45° к ее высоте;

ж) хорды, стягивающей дугу в 60°, к хорде, стягивающей дугу в 180°, в одной окружности;

з) отношение отрезков диаметра, проходящего через середину хорды, стягивающей дугу в 120°.

221. Вычислить отношение отрезков, если:

а) один из них равен 18 *дм*, а второй на 40% больше первого;

б) один из них имеет длину l, а второй на 37% короче первого;

в) один из них составляет 65% второго.

222. Найти пропорциональные отрезки (и составить из них пропорцию) в:

а) равнобедренном треугольнике, проведя высоту;

б) разностороннем треугольнике, проведя одну среднюю линию;

в) разностороннем треугольнике, проведя две средние линии;

г) прямоугольном треугольнике, в котором один из катетов в 2 раза больше другого, проведя медиану;

д) параллелограмме, используя только стороны;

е) прямоугольнике, используя отрезки на осях симметрии;

ж) двух прямоугольных треугольниках, имеющих по углу в 30°.

223. В треугольнике проекции боковых сторон на основание равны 5 *м* и 9 *м*, а бóльшая боковая сторона равна 15 *м*. На какие части делится эта боковая сторона перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину?

224. В треугольнике ABC проведен отрезок $DE \parallel AC$, причем $BD : AD = 3 : 2$. Точки A и E соединены отрезком прямой, а затем проведен отрезок $DF \parallel AE$. Найти FE и EC, если $BF = 6$ *см*.

225. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Доказать эту теорему.

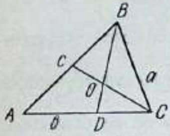


Рис. 86.

226. В треугольнике ABC даны стороны a, b, c. BD — биссектриса угла B. O — точка пересечения BD и биссектрисы угла C. Требуется определить отношение $OD : OB$.

Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, BD и CO — биссектрисы углов B и C (рис. 86). Найти отношение отрезков OD и OB.

Решение. OD и OB являются отрезками стороны BD в треугольнике BDC, причем они образовались в результате пересечения стороны BD биссектрисой CO. Отношение этих отрезков $\frac{OD}{OB}$ равно отношению сторон $\frac{CD}{CB}$ (см. задачу 225), поэтому достаточно найти это последнее отношение. В нем $CB = a$ (по условию). Остается определить CD через a, b, c. Но CD — один из двух отрезков стороны CA треугольника ABC, полученный в результате пересечения этой стороны биссектрисой BD. Отрезки CD и DA относятся между собой как стороны CB и BA, т. е. как a и c. Путем деления стороны $AC = b$ в отношении $a : c$, найдем $CD = \frac{b}{a+c} \cdot a = \frac{ab}{a+c}$ (если сторона b содержит $a + c$ некоторых частей, то ее отрезок содержит a таких частей). Теперь можем найти искомое отношение. $CD : CB = \frac{ab}{a+c} : a = \frac{b}{a+c}$. Этому же равно и искомое отношение: $OD : OB = \frac{b}{a+c}$.

Примечание. Если в отыскании пути решения задачи возникают затруднения, то часто лучше решать так, как мы решали эту задачу. А именно — начинать с вопроса (требования), поставленного в задаче. Рассуждения проводят примерно так: что нужно знать, чтобы найти то, что требуется в задаче; какие свойства интересующих нас фигур можно здесь использовать и т. д.

227. Стороны треугольника равны 51 *см*, 85 *см* и 104 *см*. Проведена окружность, которая касается обеих меньших сторон, а центр имеет на большей стороне. На какие части большая сторона делится центром?

§ 37. Подобные треугольники

Определение 1. *Два треугольника называются подобными, если: 1) углы одного соответственно равны углам другого и 2) стороны одного пропорциональны соответствующим (сходственным) сторонам другого треугольника.*

Соответствующие, или сходственные, стороны в подобных треугольниках лежат против равных углов (рис. 87).

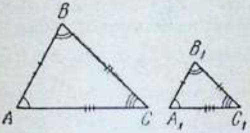


Рис. 87.

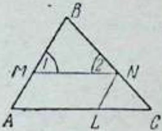


Рис. 88.

Если известно, что: 1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = C_1$ и 2) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (отношения сходственных сторон равны, т. е. стороны пропорциональны), то $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (по определению).

Лемма*. ***Всякая прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с двумя другими его сторонами треугольник, подобный первому.***

Дано: $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$ (рис. 88).

Требуется доказать: $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$.

Доказательство. $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle C$ (см. теорему 2 § 18), $\angle B$ — общий, т. е. углы треугольников ABC и MBN соответственно равны.

Параллельные MN и AC отсекают на сторонах угла ABC пропорциональные отрезки: $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$ (см. следствие § 36). Надо еще доказать, что этим отношениям равно и отно-

---

* Смотрите определение этого понятия в § 2.

шение третьей пары сходственных сторон: $\frac{AC}{MN}$. $NL \parallel BA$ и на сторонах угла BCA получим пропо ные отрезки: $\frac{BN}{BC}=\frac{AL}{AC}$. AL заменим противополо роной MN параллелограмма: $\frac{BN}{BC}=\frac{MN}{AC}$. Эта про другая полученная пропорция $\left(\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}\right)$ имеют му равному отношению $\left(\frac{BN}{BC}\right)$, поэтому равны и отношения: $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}=\frac{MN}{AC}$.

Оба условия, содержащиеся в определении, выпо следовательно, $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$.

Определение 2. *Отношение сходственных подобных фигур называется коэффициентом подоби*

Если взять $\frac{AB}{A_1B_1}$, то $k=2$ (рис. 87), если же $\frac{B_1C_1}{BC}$, то $k=\frac{1}{2}$. Однако если дан только $\triangle ABC$, а п ный ему $\triangle A_1B_1C_1$ нужно построить (см. задачу 230 $k=\frac{1}{2}$ (но не 2), потому что каждую сторону данного угольника ABC нужно умножить на $\frac{1}{2}$, чтобы полу стороны искомого $\triangle A_1B_1C_1$. Если же дан $\triangle A_1B_1C_1$ и бу строить подобный $\triangle ABC$, то $k=2$.

Определение 3. *Построение фигуры, подобной д ной, при заданном коэффициенте подобия называется добным преобразованием данной фигуры.*

Задачи 228—233

228. Обосновать или опровергнуть следующие утвер ения:

а) если треугольники равны, то они и подобны

б) (обратное) подобные треугольники равны;

в) два треугольника, подобные одному и тому же тьему треугольнику, подобны между собой;

г) если два треугольника подобны, то любой треольник, равный первому, подобен второму.

229. Подобны ли между собою два треугольника, если отсекаются от данного треугольника ABC двумя ымн:

а) параллельными одной и той же стороне дан треугольника;

б) параллельными двум разным сторонам треуг ника ABC?

230. Построить треугольник, подобный данному т угольнику ABC, если заданы:

а) сторона b искомого треугольника, сходствен стороне AC данного треугольника ($b < AC$);

б) коэффициент подобия $k = 1,5$;

в) коэффициент подобия $k = \frac{2}{3}$.

Искомый треугольник расположить относительно данно так, чтобы оба треугольника а) имели один общий угол, б не имели общих элементов, в) имели только одну общу вершину.

231. В равнобедренном треугольнике каждая из боковых сторон равна 12 *см*. Через середину высоты треугольника проведена прямая, параллельная одной из боковых сторон, до пересечения с двумя другими сторонами. Определить ее длину.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 12$ *см*, $BD \perp AC$, $BG = GD$, $FE \parallel BA$ (рис. 89).

Определить FE.

Решение. Искомый отрезок EF является стороной треугольника EFC, который подобен треугольнику ABC (по лемме о подобных треугольниках; см. § 37). Из определения подобных треугольников (§ 37) известно, что их сходственные стороны пропорциональны. С искомой стороной EF сходственна известная сторона $AB = 12$ *см*. Надо взять еще одну из двух других пар сходственных сторон этих треугольников, чтобы составить пропорцию и решить ее относительно EF. Пропорцию можно решить, если в ней будет только один неизвестный член, поэтому надо взять еще такую пару сходственных сторон, отношение которых нам известно.

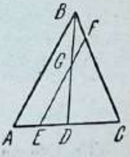


Рис. 89.

Которое из двух отношений сходственных сторон $\frac{FC}{BC}$ и $\frac{EC}{AC}$ нам легче найти? В первом $BC = 12$ *см*, но FC найти мы сможем лишь тогда, когда будет известно численное значение второго отношения $\frac{EC}{AC}$ (по следствию § 36).

Однако если найдем значение $\frac{EC}{AC}$, то нам тогда FC не нужно. Итак, присмотримся к отрезкам EC и AC. В равнобедренном треугольнике ABC $AD = DC$ (см. § 8). Поскольку на стороне DB угла ADB имеем $DG = GB$ и $GE \parallel BA$ (по условию задачи), то $DE = EA$ (см. теорему § 26). Итак, $ED = \frac{1}{4} AC$, а $EC = ED + DC = \frac{3}{4} AC$, поэтому $\frac{EC}{AC} = \frac{\frac{3}{4} AC}{AC} = \frac{3}{4}$.

Составляем пропорцию: $\frac{FE}{BA} = \frac{EC}{AC}$ и подставляем известные числа. Получаем $\frac{FE}{12} = \frac{3}{4}$, откуда $FE = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$.

Ответ: $FE = 9$ *см*.

Примечание. Иногда можно вычислить отношение отрезков (в этой задаче $EC : AC$), не зная их длин (здесь — в сантиметрах), и этого достаточно для решения задачи при помощи составления пропорции (задача не требует нахождения длин этих отрезков EC и AC, поэтому вычислять их и не нужно).

232. Высота равнобедренного треугольника равна 5 *м*. Основание треугольника разделено на 5 равных частей и из точек деления восставлены перпендикуляры до пересечения с боковыми сторонами. Найти длины этих перпендикуляров.

233. Боковые стороны данного треугольника 3 *м* и 6 *м*. Из точки пересечения биссектрисы угла, заключенного между данными сторонами, с третьей стороной проведены прямые, параллельные данным сторонам. Определить стороны образовавшегося четырехугольника.

§ 38. Признаки подобия треугольников

Теорема 1 (первый признак). ***Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого.***

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 90).

Требуется доказать: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Доказательство. Отложим $BK = B_1A_1$ и проведем $KL \parallel AC$. $\triangle KBL \sim \triangle ABC$ (по лемме § 37). По стороне и двум углам (см. § 9) $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle KBL$ ($B_1A_1 = BK$, $\angle B_1 = \angle B$; $\angle A_1 = \angle A$ по условию и $\angle K = \angle A$ как соответственные при параллельных прямых KL и AC и секущей AB, поэтому $\angle A_1 = \angle K$). Отсюда $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (см. задачу 228 (г)).

Теорема 2 (второй признак). ***Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и углы, лежащие между ними, равны.***

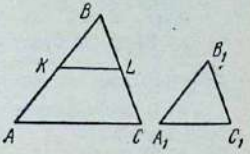


Рис. 90.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 90), $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, $\angle B = \angle B_1$.

Требуется доказать: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Доказательство. Отложим $BK = B_1A_1$ и проведем $KL \parallel AC$. $\triangle KBL \sim \triangle ABC$ (по лемме § 37), отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{KB}{BL}$. В этой и в данной пропорции левые отношения равны, поэтому равны и правые их отношения: $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{KB}{BL}$. Но $KB = A_1B_1$, поэтому $BL = B_1C_1$. $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle KBL$ (по двум сторонам: $BK = B_1A_1$ и $BL = B_1C_1$ и углу между ними: $\angle B = \angle B_1$). Следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (см. задачу 228 (г)).

Теорема 3 (третий признак). ***Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.***

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 90), $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Требуется доказать: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Доказательство. Прием доказательства такой же: $BK = B_1A_1$, $KL \parallel AC$, $\triangle KBL \sim \triangle ABC$, отсюда $\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BL} = \frac{AC}{KL}$. Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle KBL$. Из пропорций $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ и $\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BL}$ получаем: $B_1C_1 = BL$. Из пропорций $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\frac{BC}{BL} = \frac{AC}{KL}$ выводим, что $A_1C_1 = KL$. $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle KBL$ (по трем сторонам; см. § 9). Следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (см. задачу 228 (г)).

Задачи 234—245

234. Пропорциональность двух пар сходственных сторон подобных треугольников (рис. 90) выражена пропорцией: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$.

а) Верна ли будет следующая пропорция: $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$? Выражает ли она пропорциональность сторон?

б) В чем различие в способах составления первой и второй пропорции?

в) Какая из этих двух пропорций дает коэффициент подобия (см. определение 2 § 37)?

235. Установить признаки подобия для прямоугольных треугольников:

а) упростив формулировку первого признака подобия треугольников (см. § 38);

б) упростив формулировку второго признака (§ 38);

в) доказав теорему: если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники подобны.

236. Сделать возможные упрощения в формулировках признаков подобия треугольников (см. § 38) применительно к:

а) равнобедренным треугольникам;

б) равносторонним треугольникам.

237. Доказать, что сходственным сторонам подобных треугольников пропорциональны:

а) сходственные высоты;

б) сходственные биссектрисы;

в) сходственные медианы.

Примечание. Высоты, биссектрисы и медианы в подобных треугольниках называются сходственными, если они проведены к сходственным сторонам.

238. В равнобедренной трапеции основания относятся как 1 : 5, а диагональ равна 22 *см*. Через середину одной из боковых сторон и конец большего основания, не лежащий на указанной боковой стороне, проведена прямая. На какие части проведенная прямая делит диагональ трапеции?

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$, $AC = 22$ *см*, $BC : AD = 1 : 5$, $AM = MB$.

Определить AE и EC (рис. 91).

Решение. Сразу выясняем, что $AE \neq EC$. В самом деле, M — середина AB; если бы E была серединой AC, то ME была бы средней линией в $\triangle ABC$ и прямая ME была бы параллельна BC (см. § 27). Но DM не параллельна BC, ибо $DA \parallel BC$ как основания трапеции, а через одну точку (D) можно провести только одну прямую (DA), параллельную данной прямой (BC, по аксиоме параллельности § 16). $AE \neq EC$.

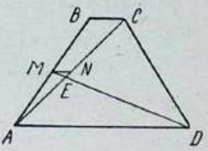


Рис. 91.

Надо иметь в виду следующее. Равенство отрезков мы доказываем обычно из равенства треугольников (см. § 9), в которых интересующие нас отрезки являются соответствующими сторонами (иногда для этой цели используется теорема о равных отрезках на сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми, § 26). Если же нужно вычислить длины неравных отрезков, то для этого обычно используется пропорциональность отрезков на сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми (см. § 36), или в подобных треугольниках (§ 37, 38).

Проведем $MN \parallel AD$. $\angle NME = \angle EDA$ как внутренние накрест лежащие. $\angle MEN = \angle AED$ как вертикальные. $\triangle MEN \sim \triangle AED$ по первому признаку (§ 38). Искомый отрезок AE является стороной одного из этих треугольников, для которой сходственной стороной в другом треугольнике будет EN. EN также неизвестна, но сумму $AE + EN = AN$ можно найти. Так как $AM = MB$ (по условию задачи) и MN по построению параллельна AD, а значит, $MN \parallel BC$ (см. следствие 2 из аксиомы параллельности § 16), то $AN = NC$ (см. теорему § 26). Но $AC = 22$ *см*, поэтому $AN = NC = 11$ *см*.

Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональны: $\frac{AE}{EN} = \frac{AD}{MN}$. Обозначим AE через x и заменим EN через $AN - AE = 11 - x$; $\frac{x}{11 - x} = \frac{AD}{MN}$. Из данного в задаче отношения оснований трапеции $1:5$ видим, что если BC принять за одну часть, то в AD — пять таких частей: $AD = 5BC$. $MN = \frac{1}{2} BC$ как средняя линия треугольника

ABC. Вычислим отношение $\frac{AD}{MN} = \frac{5BC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{5}{\frac{1}{2}}$

вим его значение в пропорцию: $\frac{x}{11-x} = 10$

$x = 10\ (11 - x),\ x = 110 - 10x,\ 11x = 110,$
10 *см* и $EC = AC - AE = 12,\ EC = 12$ *см*.

Так как трапеция равнобедренная, то и дру
наль равна 22 *см* (равенство диагоналей рав
трапеции следует из раве
треугольников, взятых при
оснований; см. также задачу
этого следует, что и другая
разделится соответствующей
такие же отрезки.

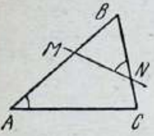


Рис. 92.

Ответ: отрезки диагонали
от большего основания, равны
12 *см*.

239. Дана трапеция *ABCD*.
снование *BC* = 12 *см*. Диагональ *AC* делится дру
ональю на отрезки *AO* = 12 *см* и *OC* = 8 *см*. На

240. Дан разносторонний треугольник *ABC* (р
котором проведена прямая *MN* так, что угол *BNM*
у *A*.

а) Подобен ли треугольник *MBN* треугольнику

б) Параллельна ли прямая *MN* стороне *AC*?
м условии они были бы параллельны?

в) Верно ли предложение, обратное лемме (§
прямая (*MN*), пересекающая две стороны (*AB* и
ольника *ABC*, отсекает треугольник (*MBN*), подоб
у, то эта прямая (*MN*) параллельна третьей стор
анного треугольника?

г) Указать пары сходственных сторон треуголь
BN и *ABC*.

Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *O*.
в разных направлениях от *O* отложены отрезк
см и *OP* = 4 *см* на *AB*; *ON* = 2 *см* и *OQ* = 6 *с*
MN = 2,5 *см*.

) Найти *QP*.

) Параллельны ли *MN* и *QP*?

одобны ли треугольники, если их стороны таковы:
2,7 *м*, 2,4 *м* и 1,8 *м*; 12 *см*, 16 *см* и 18 *см*;
4 *дм*, 3 *дм* и 2 *дм*; 16 *см*, 10 *см* и 12 *см*?

в) *Могут ли быть подобными прямоугольные ники, если в одном из них отношение гипотенузы равно 2, а в другом отношение гипотенузы к к равно 2?*

243. В круг вписан треугольник. Найти проекц роны, равной 9 *см*, на сторону, равную 12 *см*, если круга 6 *см*.

244. Построить прямоугольный треугольник по г нузе *c* и отношению его катетов, равному 3 : 4.

Анализ. Дано только отношение катетов, дли неизвестны. По этим данным нельзя найти один из кат для того чтобы воспользоваться уже известным нам сп бом построения прямоугольного треугольника по гипоте и катету (см. задачу 7(г) § 15). Здесь надо найти но способ построения, и данное отношение сторон подска вает, что надо использовать подобие треугольников.

Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 93) и в нем даны $\angle C$ прямой, отношение катетов $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$ и гипотенуза *c*. Расчл ним эту задачу на составные части. 1) Построить прям угол — это легко (см. задачу 4 § 15). 2) Построить катет на сторонах этого угла, удовлетворяющие отношению 3 : 4. Но таких пар катетов можно взять бесконечно много (например, 6 *см* и 8 *см*, 9 *м* и 12 *м*, 15 *дм* и 20 *дм* и т. д.). Какая же пара катетов должна быть в искомом треугольнике, сказать пока невозможно. На этот вопрос должна дать ответ третья задача. 3) Взять из указанного бесконечного множества треугольников такой, чтобы его гипотенуза была равна данному отрезку *c*. Но вся трудность здесь в том, как это сделать.

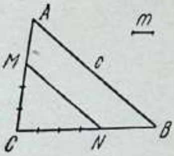


Рис. 93.

Используем то, что любой из бесконечного множества прямоугольных треугольников с отношением катетов 3 : 4 подобен искомому треугольнику *ABC* по второму признаку подобия (см. § 38). Построим один из таких треугольников. Возьмем произвольный отрезок *m* (рис. 93) и отложим его от вершины *C* прямого угла на меньшем катете 3 раза, а на большем — 4 раза. $CM = 3m$ и $CN = 4m$, $\frac{CM}{CN} = \frac{3m}{4m} = \frac{3}{4}$. $\triangle CMN \sim \triangle CAB$. Остается выполнить подобное преобразование (см. определение 3 § 37) треугольника CMN в треугольник ABC при коэффициенте подобия, который теперь уже имеется и равен $\frac{AB}{MN}$ (см. задачу 230 (а)).

Построение. Пусть отрезок c — данная гипотенуза искомого треугольника (рис. 94). На некоторой прямой MN возьмем точку и восставим перпендикуляр: $KL \perp MN$. Возьмем любой отрезок (n) и отложим на одной стороне 3 раза, а на другой 4 раза: $KL = 3n$, $KF = 4n$. Соединим точки L и F. Построим треугольник, подобный LKF, но с гипотенузой c. На гипотенузе FL отложим отрезок FG, равный c, и из G опустим перпендикуляр GE на MN.

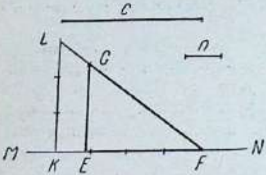


Рис. 94.

Доказательство. $\angle GEF = 90°$ (по построению), гипотенуза $FG = c$ (по построению). $GE \perp MN$ и $KL \perp MN$, поэтому $GE \parallel LK$ (см. теорему § 16). $\triangle GEF \sim \triangle LKF$ (по лемме § 37). Отсюда $\frac{GE}{EF} = \frac{LK}{KF}$. Но $\frac{LK}{KF} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$, поэтому и $\frac{GE}{EF} = \frac{3}{4}$. $\triangle GEF$ — искомый, так как удовлетворяет всем требованиям задачи.

Задача всегда имеет решение, причем единственное (это видно из построений). Любой треугольник, построенный по условиям данной задачи, будет равен треугольнику GEF (они могут отличаться друг от друга только различным расположением на плоскости).

Примечание. Описанный и использованный здесь метод решения задач на построение называется методом подобия. Сущность его в том, что сначала строим фигуру, подобную искомой, устанавливаем коэффициент подобия (он может определяться двумя отрезками) и выполняем подобное преобразование вспомогательной фигуры в искомую.

245. Построить треугольник:

а) по отношению двух его сторон, равному 5 : 3, углу B между ними и третьей стороне b;

б) по отношению его сторон, равному 2 : 3 : 4, если самая меньшая его сторона равна a.

§ 39. Подобные многоугольники

Многоугольники с одинаковым числом сторон называют одноименными многоугольниками.

Определение. *Два одноименных многоугольника называются подобными, если:* 1) *углы одного соответственно равны углам другого* и 2) *стороны одного пропорциональны соответствующим (сходственным) сторонам другого многоугольника.*

Сходственные (соответствующие) стороны подобных многоугольников соединяют вершины соответственно равных углов.

Подобные многоугольники действительно существуют (см. задачу 246). Между свойствами подобных многоугольников и подобных треугольников имеется существенное различие (см. задачу 247).

Теорема 1. ***Подобные многоугольники можно разбить на одинаковое число подобных треугольников, расположенных в одном и том же порядке*** (см. задачу 248).

Теорема 2. ***Периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны.***

Дано: $A'B'C'D' \backsim ABCD$, $A'B'$ и AB — сходственные стороны.

Требуется доказать: $\frac{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}{AB+BC+CD+DA}=\frac{A'B'}{AB}$.

Доказательство. Из подобия многоугольников следует: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}$. По свойству равных отношений (см. § 10 в части первой) имеем:

$$\frac{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}{AB+BC+CD+DA}=\frac{A'B'}{AB}.$$

Теорема 3. ***Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.***

1) Докажем теорему сначала для треугольников.

Дано: $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$, $A'B'$ и AB — сходственные стороны.

Требуется доказать: $\frac{\text{пл. } \triangle A'B'C'}{\text{пл. } \triangle ABC}=\frac{(A'B')^2}{(AB)^2}$.

Доказательство. Проведем к сходственным сторонам $A'B'$ и AB сходственные высоты $C'D'$ и CD (см. примечание в задаче 237). Тогда площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'$ и площадь $\triangle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot CD$ (см. § 46). Найдем отношение этих площадей:

$$\frac{\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'}{\frac{1}{2}AB\cdot CD} = \frac{A'B'\cdot C'D'}{AB\cdot CD} = \frac{A'B'}{AB}\cdot\frac{C'D'}{CD}.$$

Но $\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'B'}{AB}$ (см. задачу 237 (а)). Подставим вместо $\frac{C'D'}{CD}$ равное ему $\frac{A'B'}{AB}$ и получим:

$$\frac{\text{пл. } \triangle A'B'C'}{\text{пл. } \triangle ABC} = \frac{A'B'}{AB}\cdot\frac{A'B'}{AB} = \frac{(A'B')^2}{(AB)^2}.$$

2) Докажем теперь эту теорему для многоугольников. Дано: $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$ (рис. 95), стороны AE и $A'E'$ — сходственные.

Требуется доказать: $\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } A'B'C'D'E'} = \frac{(AE)^2}{(A'B')^2}$.

Доказательство. $\triangle BCD \backsim \triangle B'C'D'$, $\triangle BDE \backsim \triangle B'D'E'$, $\triangle BEA \backsim \triangle B'E'A'$ (по теореме 1). Площади этих треугольников обозначим через S и S', Q и Q', T и T'. Тогда запишем: $\frac{S}{S'} = \frac{(BC)^2}{(B'C')^2}$, $\frac{Q}{Q'} = \frac{(DE)^2}{(D'E')^2}$ и $\frac{T}{T'} = \frac{(AE)^2}{(A'E')^2}$ (по этой теореме, доказанной уже для треугольников). Но $\frac{BC}{B'C'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$ (у подобных многоугольников сходственные стороны пропорциональны; см. определение § 39). Квадраты равных отношений равны: $\frac{(BC)^2}{(B'C')^2} = \frac{(DE)^2}{(D'E')^2} = \frac{(AE)^2}{(A'E')^2}$, а из этого следует равенство отношений площадей: $\frac{S}{S'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'} = \frac{(BC)^2}{(B'C')^2}$. По свойству равных отношений имеем:

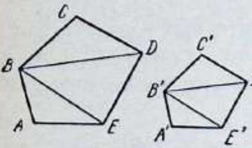


Рис. 95.

$$\frac{S+Q+T}{S'+Q'+T'} = \frac{(BC)^2}{(B'C')^2} \text{ или } \frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } A'B'C'D'E'} = \frac{(BC)^2}{(B'C')^2}.$$

Задачи 246—254

246. а) Построить многоугольник, подобный данному многоугольнику $ABCDE$, такой, чтобы сторона, сходственная AB, была равна a.

б) Подобно преобразовать данный параллелограмм $ABCD$ при коэффициенте подобия $k = 0{,}75$.

247. Можно ли опустить в определении подобных треугольников (§ 37): а) первое условие; **б)** второе условие?

Можно ли это сделать в определении подобных многоугольников (§ 39)? Подобны ли: **в)** квадрат и ромб; **г)** квадрат и прямоугольник? Почему?

248. Доказать самостоятельно теорему 1 § 39.

249. Основания трапеции 3,6 *см* и 6,4 *см*. Найти длину отрезка, параллельного основаниям, который делит данную трапецию на две подобные трапеции. На какие части делится этим отрезком одна из боковых сторон длиной 4,2 *см*?

250. Периметр одного многоугольника составляет от периметра подобного ему многоугольника 87,5%. Наибольшая сторона первого многоугольника равна 21,7 *см*. Найти наименьшую сторону второго треугольника, если она на 37,5% меньше его наибольшей стороны.

251. Площади двух подобных треугольников относятся, как $a:b$, а разность их сходственных медиан равна r. Определить каждую медиану.

Решить задачу в общем буквенном виде и затем вычислить медианы при $a = 49$, $b = 4$ и $r = 20$ *см*.

252. а) Периметры подобных многоугольников относятся, как 3:5. Как относятся их площади?

б) Сторону квадрата увеличили в 6 раз. Во сколько раз увеличится периметр и площадь?

в) Площади двух квадратов относятся, как 4:9. Как относятся их периметры?

г) Сторона треугольника равна 9 *дм*. Чему равна сходственная сторона подобного ему треугольника, площадь которого в четыре раза меньше?

253. а) Внутри прямоугольника со сторонами a и b имеется другой прямоугольник, стороны которого отстоят от сторон данного на одинаковом расстоянии, равном m. Подобны ли эти прямоугольники? Доказать.

б) Будут ли подобны построенные таким же образом два квадрата, два треугольника?

254. В параллелограмме $MNPQ$ через точку A, взятую на стороне MQ, проведена прямая $AB \parallel QN$ до пересечения с MN в точке B. Через A и B проведены прямые AC и BC, соответственно параллельные PQ и NP. Доказать, что полученный параллелограмм $AMBC$ подобен параллелограмму $MNPQ$.

§ 40. Тригонометрические функции. Решение прямоугольных треугольников

Определения. 1. *Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе.*

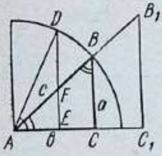


Рис. 96.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 96) углы A и B — острые, a и b — катеты, c — гипотенуза.

$$\sin A = \frac{a}{c}, \ \sin B = \frac{b}{c}.$$

2. *Косинусом острого угла называется отношение катета, прилежащего к этому острому углу, к гипотенузе.*

$$\cos A = \frac{b}{c}, \ \cos B = \frac{a}{c}.$$

3. *Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему катету.*

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Теоремы. ***Величины*** $\sin A$, $\cos A$ ***и*** $\operatorname{tg} A$:

1) не зависят от длины сторон прямоугольного треугольника, если величина острого угла A не изменяется;

2) изменяют свои значения с изменением величины угла A: с увеличением A $\sin A$ и $\operatorname{tg} A$ ***возрастают, а*** $\cos A$ ***— убывает.***

Доказательства теорем.

1) У прямоугольных треугольников ABC и AB_1C_1 острый угол A — общий (рис. 96), поэтому они подобны (см. теорему 1 § 38), а их сходственные стороны пропорциональны: $\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB}$ (т. е. синусы угла A в большем и в меньшем треугольнике одинаковые; см. определение 1); $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$

(значения косинусов одинаковые; см. определение 2); $\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{BC}{AC}$ (значения тангенсов одинаковые; см. определение 3).

2) Возьмем прямоугольный $\triangle DAE$ (рис. 96). $\angle DAE > \angle BAC$. $\sin \angle DAE = \frac{DE}{AD}$, $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB}$. Но $AB = AD$ (радиусы), а $DE > BC$, поэтому $\frac{DE}{AD} > \frac{BC}{AB}$, $\sin \angle DAE > \sin \angle BAC$. Аналогично можно установить, что $\cos \angle DAE < \cos \angle BAC$. В прямоугольных треугольниках ADE и AFE: $\operatorname{tg} \angle DAE = \frac{DE}{AE}$ и $\operatorname{tg} \angle FAE = \frac{FE}{AE}$. Но $DE > FE$, поэтому $\operatorname{tg} \angle DAE > \operatorname{tg} \angle FAE$.

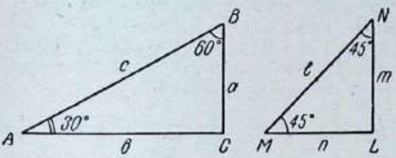


Рис. 97.

Следовательно, синус, косинус и тангенс острого угла являются функциями (тригонометрическими), зависящими от величины угла.

Вычислим значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°. $\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2}$ (см. § 20) и $\cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора (см. § 45) для прямоугольного треугольника ABC (рис. 97) имеем:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4c^2 - c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{3}}{2}c} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \ \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике MNL катеты $m = n$ и $m^2 + n^2 = l^2$, $m^2 + m^2 = l^2$, $2m^2 = l^2$, $m^2 = \frac{l^2}{2}$, $m = \sqrt{\frac{l^2}{2}} =$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}l, \quad n = \frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{m}{l} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos 45^\circ = \frac{n}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{m}{n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Шесть равенств для тригонометрических функций (см. определения 1, 2 и 3) дают возможность решать прямоугольные треугольники, т. е. по известному острому углу и одной из сторон или только по двум сторонам находить остальные элементы. Возможны такие случаи.

1) Даны гипотенуза c и острый угол A. Найти катеты a и b и острый угол B.

Решение. $B = 90^\circ - A$; $\frac{a}{c} = \sin A$, откуда $a = c \sin A$; $\frac{b}{c} = \cos A$, $b = c \cos A$.

2) Даны катет a и острый угол B. Найти гипотенузу c, катет b и угол A.

Решение. $A = 90^\circ - B$; $\frac{a}{c} = \cos B$, $c = \frac{a}{\cos B}$; $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} B$, $b = a \operatorname{tg} B$.

3) Даны катеты a и b. A, B, $c = ?$

Решение. $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ (вычислив $\operatorname{tg} A$, по таблицам находим угол A); $B = 90^\circ - A$; $\frac{a}{c} = \sin A$; $c = \frac{a}{\sin A}$.

4) Даны гипотенуза c и катет b. A, B, $a = ?$

Решение. $\sin B = \frac{b}{c}$; $A = 90^\circ - B$; $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A$, $a = b \operatorname{tg} A$.

Таким образом, на основании определений тригонометрических функций устанавливаются соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике и решаются эти треугольники (см. задачу 261).

Задачи 255—265

255. Найти значения каждой из трех тригонометрических функций острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC, если $AC = 2{,}8$ *дм*, $BC = 2{,}1$ *дм* и $AB = 3{,}5$ *дм*.

256. Построить острый угол α, если: **а)** $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}25$, **б)** $\sin\alpha = 0{,}375$; **в)** $\cos\alpha = 0{,}7$.

257. Для каких острых углов α верно, что: **а)** $\operatorname{tg}\alpha < 1$, **б)** $\operatorname{tg}\alpha > 1$, **в)** $\sin\alpha < \frac{1}{2}$, **г)** $\sin\alpha > \frac{1}{2}$, **д)** $\sin\alpha = 1$, **е)** $\sin\alpha > 1$, **ж)** $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, **з)** $\cos\alpha > \frac{1}{2}$, **и)** $\cos\alpha = 1$, **к)** $\cos\alpha > 1$?

258. Что больше: **а)** $\sin 40^\circ$ или $\sin 25^\circ$, **б)** $\cos 37^\circ$ или $\cos 60^\circ$, **в)** $\operatorname{tg} 3^\circ$ или $\operatorname{tg} 48^\circ$, **г)** синус или тангенс одного и того же угла, **д)** косинус или котангенс (ctg) одного и того же угла?

Примечание. Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к катету противолежащему.

259. Найти по таблицам* числовые значения функций для углов следующей величины:

а) $\sin 4^\circ$, $\sin 42^\circ 30'$, $\sin 78^\circ 47'$, $\sin 83^\circ 26'$;
б) $\cos 11^\circ$, $\cos 34^\circ 18'$, $\cos 63^\circ 46'$, $\cos 82^\circ 33'$;
в) $\operatorname{tg} 17^\circ$, $\operatorname{tg} 74^\circ 53'$, $\operatorname{tg} 86^\circ 37'$ и $\operatorname{ctg} 50^\circ 29'$.

260. Найти по таблицам величины острых углов по данным значениям их функций:

а) $\sin x = 0{,}3256$; $\sin x = 0{,}1124$; $\sin x = 0{,}9289$;
б) $\cos x = 0{,}7314$; $\cos x = 0{,}2000$; $\cos x = 0{,}9524$;
в) $\operatorname{tg} x = 7{,}115$; $\operatorname{tg} x = 0{,}5435$ и $\operatorname{ctg} x = 12{,}76$.

г) Найти величины углов треугольника ABC (см. задачу 255).

---

* В. М. Брадис. Четырехзначные математические таблицы для средней школы.

261. Найти остальные элементы прямоугольного треугольника, в котором даны (обозначения, как и в § 40):

а) $c = 0{,}185$; $B = 12°40'$;
б) $b = 10{,}5$; $B = 39°40'$;
в) $a = 49{,}2$; $b = 24{,}0$;
г) $a = 6{,}32$; $c = 8{,}54$.

262. В угол в 50° надо вписать окружность радиуса 2,5 *см*. На каком расстоянии от вершины угла должен находиться центр окружности?

263. В окружности радиуса 4 *см* проведена хорда длиной 7 *см*. Сколько градусов в меньшей из дуг, которые она стягивает?

264. Стороны параллелограмма 12 *см* и 7 *см*, а острый угол 58°20′. Определить высоту параллелограмма, проведенную к большей стороне, и углы, на которые острый угол делится диагональю.

265. Как с помощью решения прямоугольных треугольников и необходимых измерений на местности вычислить: **а)** высоту дерева, **б)** недоступное расстояние на поверхности земли?

Глава VII ● Вписанные и описанные многоугольники

§ 41. Вписанные и описанные треугольники

Определения. 1. *Многоугольник, все вершины которого находятся на окружности, называется вписанным в окружность, а окружность — описанной около многоугольника.*

2. *Многоугольник, все стороны которого — касательные к окружности, называется описанным около окружности, а окружность — вписанной в многоугольник.*

Теорема 1. ***Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну*** (см. задачу § 29).

Теорема 2. ***Во всякий треугольник можно вписать окружность, притом только одну.***

Пусть окружность касается сторон угла BAC в точках K и M (рис. 98). Тогда радиусы $OK \perp AB$ и $OM \perp AC$ (см. § 32). Но $OK = OM$, поэтому центр O лежит на биссектрисе AO (см. п. 8 § 15). Аналогично устанавливаем, что центр лежит на биссектрисах BO и OC двух других углов треугольника.

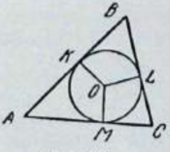


Рис. 98.

Следствия. 1. *Все три перпендикуляра к серединам сторон треугольника пересекаются в одной точке — в центре описанной окружности* (см. задачу 177).

2. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности.*

266. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2 *см*, угол при вершине равен 120°. Определить диаметр описанной окружности.

б) Когда центр описанной окружности лежит вне треугольника, на стороне его, внутри треугольника?

267. Около окружности, радиус которой равен 4 *см*, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 26 *см*. Найти периметр треугольника.

268. В прямоугольном равнобедренном треугольнике даны радиусы описанной и вписанной окружностей R и r. Найти гипотенузу и катеты.

269. Доказать, что окружности, построенные на сторонах треугольника, как на диаметрах, попарно пересекаются в точках, служащих основаниями высот треугольника.

270. Построить равнобедренный треугольник по углу α при вершине и радиусу вписанной окружности r.

§ 42. Вписанные и описанные четырехугольники

Теорема 1. ***Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.***

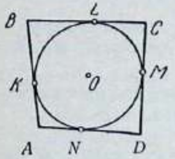


Рис. 99.

Два противоположных угла (например, A и C) вписанного четырехугольника ($ABCD$) опираются на две дуги, которые вместе составляют окружность: $\smile BCD + \smile BAD = 360°$. Но углы A и C — вписанные и измеряются половинами указанных дуг (§ 34):

$$\frac{1}{2}\smile BCD + \frac{1}{2}\smile BAD =$$
$$= \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°.$$

Теорема 2 (обратная). ***Если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то около такого четырехугольника можно описать окружность*** (см. задачу 271).

Теорема 3. ***В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.***

Дано: четырехугольник $ABCD$ описан около окружности O (рис. 99); K, L, M и N — точки касания.

Требуется доказать: $AB + CD = BC + AD$.

$AK = AN$, $BK = BL$, $CM = CL$, $DM = DN$ (задача 193). Сумма левых частей равенств равна $AB + CD$, а сумма правых частей тех же равенств равна $BC + AD$, отсюда $AB + CD = BC + AD$.

Задачи 271—275

271. Доказать теорему 2 (§ 42).

272. а) Около какого параллелограмма можно описать окружность?

б) В какой параллелограмм можно вписать окружность?

в) Можно ли около четырехугольника только с одним прямым углом описать окружность?

г) Назвать условие, при котором нельзя описать окружность около четырехугольника.

273. Средняя линия описанной трапеции равна 25 *дм*. Найти периметр трапеции.

274. а) Три угла вписанного четырехугольника, взятые по порядку, относятся, как $1:2:3$. Определить углы четырехугольника.

б) Можно ли описать окружность около четырехугольника, если его углы, взятые по порядку, относятся, как $2:4:5:3$; как $5:7:8:9$?

275. Построить ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

§ 43. Правильные многоугольники

Определение. *Многоугольник называется правильным, если:* 1) *все его стороны равны* и 2) *все углы равны.*

Правильным треугольником является только равносторонний треугольник, правильным четырехугольником — только квадрат.

Наиболее удобный способ построения правильного многоугольника — это разделить окружность на равные части и точки деления последовательно соединить. Стороны полученного многоугольника будут равны как хорды, стягивающие равные дуги. Все его углы будут вписанные, опирающиеся на равные дуги (§ 31 и 34).

Теорема. ***Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R, равна*** $2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Пусть $\smile AB$ (рис. 100) получена делением окружности на n равных частей, тогда центральный $\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}$. Проведем $OC\perp AB$, тогда $AC=CB$ и $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{180^\circ}{n}$. В прямоугольном треугольнике ACO известен острый угол $\frac{180^\circ}{n}$ и гипотенуза $AO=R$. Найдем катет AC. $\sin\angle AOC=\frac{AC}{AO}$; $\sin\frac{180^\circ}{n}=\frac{AC}{R}$; $AC=R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$; $AB=2AC$, $AB=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$. Обозначим AB через a_n. $a_n=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Следствие 1. *Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна R.*

Число сторон $n=6$.

$$a_6=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{6}=2R\cdot\sin 30^\circ=2R\cdot\frac{1}{2}=R;\ a_6=R.$$

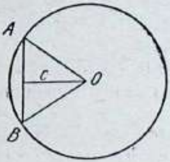


Рис. 100.

Поэтому если строить в окружности хорды, равные радиусу, последовательно одну за другой, то вместится ровно шесть таких хорд. В этом и заключается способ деления окружности на 6 равных частей и построение правильного вписанного шестиугольника.

Следствие 2. *Сторона правильного треугольника вписанного в окружность радиуса R, равна* $R\sqrt{3}$.

$$n=3;\ a_3=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{3}=2R\cdot\sin 60^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3};\ a_3=R\sqrt{3}.$$

Разделив окружность на 6 равных частей (раствором циркуля, равным радиусу), соединим точки деления через одну и построим правильный вписанный треугольник.

Следствие 3. *Сторона правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $R\sqrt{2}$.*

$$n = 4;\ a_4 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \cdot \sin 45^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= R\sqrt{2};\ a_4 = R\sqrt{2}.$$

Если провести какой-нибудь диаметр и второй диаметр, перпендикулярный первому, то окружность разделится ими на 4 равные части. Соединив последовательно концы этих диаметров, построим правильный четырехугольник.

Задачи 276—281

276. а) Чему равны внутренний, внешний и центральный углы правильного вписанного n-угольника?

б) Вычислить внутренний, внешний и центральный углы правильного 6-угольника.

277. а) Вычислить сторону правильного вписанного пятиугольника, если радиус окружности $R = 1{,}25$ *дм.* Разделить окружность на 5 равных частей (приближенно).

б) Сторона правильного вписанного n-угольника равна a. Найти радиус описанной окружности. Вычислить R для $n = 3$.

278. а) Доказать, что окружности — вписанная в равносторонний треугольник и описанная около него — концентрические (см. задачу 200).

Верно ли это утверждение для квадрата?

б) Доказать, что если правильный n-угольник вписан в окружность, то центр описанной окружности является центром и вписанной в него окружности.

279. Вокруг квадрата со стороной a описана окружность, а около окружности описан правильный треугольник. Определить сторону треугольника.

280. Найти отношение апофемы к радиусу правильного n-угольника, если: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.

Примечание. Апофемой правильного многоугольника называется радиус вписанной в него окружности, а радиус описанной окружности — радиусом правильного многоугольника.

281. а) Доказать, что правильные одноименные многоугольники подобны.

б) В окружность радиуса R вписан и описан возле нее правильный шестиугольник. Найти отношение их периметров и отношение их площадей.

Глава VIII ● Площади фигур

§ 44. Площадь прямоугольника

Если взять, например, параллелограмм и треугольник, отделяемый от параллелограмма его диагональю, то часть плоскости, занимаемая параллелограммом, больше части плоскости, занимаемой этим треугольником. В таком случае говорят, что площадь параллелограмма больше площади указанного треугольника. Следовательно, площадь фигуры — величина и ее можно измерить путем сравнения с другой площадью, принятой за единицу. Площадь квадрата со стороной в единицу длины принимается за единицу площади. Это квадратный метр, квадратный сантиметр и др.

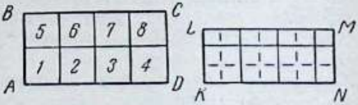


Рис. 101.

Любая из сторон прямоугольника может быть принята за основание, а другая, перпендикулярная к основанию, — за высоту. Измерим основание и высоту одной единицей длины.

Теорема. ***Площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту: $S = ah$.***

Прямоугольник $ABCD$ (рис. 101) имеет основание $AD = 4$ *см* и высоту $AB = 2$ *см*, а площадь его содержит 8 *кв. см*, т. е. (4·2) *кв. см*. Если основание содержит a линейных единиц, то вдоль основания ляжет в ряд a единичных квадратов, и если высота фигуры h, то таких рядов в фигуре вместится h, а всего единичных квадратов в фигуре будет ah. В прямоугольнике $KLMN$ $a = 3\frac{1}{2}$ и $h = 1\frac{1}{2}$ или $a = \frac{7}{2}$ и $h = \frac{3}{2}$ в сантиметрах, а в единицах, равных $\frac{1}{2}$ *см*, получим $a = 7$ и $h = 3$ и площадь $7 \cdot 3 = 21$ квадрату со стороной в $\frac{1}{2}$ *см*. 1 *кв. см* = 4 таким квадратам, поэтому площадь $KLMN$ в квадратных сантиметрах равна $21 : 4 = 5\frac{1}{4}$. Но это же число мы получим, перемножая данные дробные измерения основания и высоты: $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ (*кв. см*).

Следствие. *Площадь квадрата равна квадрату стороны:* $ah = aa = a^2$.

Задачи 282—285

282. Сторона квадрата $a = 7{,}3$ *м*. Его основание укорочено на $b = 2$ *м*, а высота на столько же удлинена, так что получился прямоугольник. Сравнить периметр и площадь прямоугольника с периметром и площадью квадрата.

283. Даны прямоугольник и квадрат. Стороны прямоугольника относятся, как $2 : 5$, а сторона квадрата равна их разности. Если сторону квадрата увеличить на 1 *см*, то площадь его окажется на 1 *см*^{2} больше площади прямоугольника. На сколько периметр прямоугольника больше периметра данного квадрата?

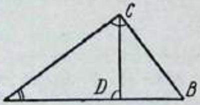


Рис. 102.

284. а) На сколько процентов увеличится площадь квадрата со стороной 40 *см*, если длину его стороны увеличить на 25%?

б) Нужно ли при решении этого вопроса знать длину стороны квадрата?

285. Квадрат длины катета равен произведению длины гипотенузы на длину ее отрезка, являющегося проекцией этого катета. Доказать эту теорему.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, AD и BD — проекции катетов AC и BC на гипотенузу (рис. 102).

Требуется доказать: $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot BD$.

§ 45. Теорема Пифагора

Теорема. ***Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный (рис. 102), a и b — длины его катетов, c — длина гипотенузы.

Требуется доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство. Обозначим длину проекции BD катета a через a', а длину проекции AD катета b через b'. Согласно теореме, доказанной в задаче 285, имеем: $a^2 = c \cdot a'$ и $b^2 = c \cdot b'$. Сложив равенства, получим: $a^2 + b^2 = ca' + cb'$, $a^2 + b^2 = c(a' + b')$. Но $a' + b' = c$. $a^2 + b^2 = c \cdot c$, $a^2 + b^2 = c^2$.

Задачи 286—292

286. Одна сторона прямоугольника больше другой на 1 *см* и меньше диагонали на 8 *см*. Найти площадь прямоугольника.

287. Боковые стороны треугольника имеют длину 2,6 *см* и 3 *см*; высота его 2,4 *см*. Определить основание.

288. **а)** Сторона квадрата равна a. Определить его диагональ.

б) Сторона правильного треугольника равна a. Найти его высоту.

289. **а)** Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна c. Определить его катеты.

б) Больший катет равен b. Найти другой катет и гипотенузу, если один из острых углов прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{3}\,d$.

290. Вычислить диагонали ромба, если они относятся, как 6 : 8, а сторона равна 13,5 *дм*.

291. Из некоторой точки A окружности проведена хорда AB длиной 7 *см* и диаметр AC, равный 16 *см*. Определить проекцию хорды на диаметр и расстояние точки B от диаметра.

292. Стороны треугольника 62 *см*, 46,5 *см* и 77,5 *см*. Определить высоту треугольника, опущенную на самую большую сторону.

§ 46. Площадь параллелограмма, треугольника, трапеции

Теорема 1. ***Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту: $S = ah$.***

Дано: параллелограмм $ABCD$ (рис. 103, *а*), $AD = a$ — основание, $BE \perp AD$, $BE = h$ — высота (см. задачу 152).

Требуется доказать: $S_{ABCD} = ah$.

Проведем $CF \perp AD$. $\triangle ABE = \triangle DCF$ (у них $AB = DC$ и $BE = CF$). Если от трапеции $ABCF$ отнять $\triangle DCF$, то получим параллелограмм $ABCD$, а если от той же трапеции отнять $\triangle ABE$, то получим прямоугольник $EBCF$. Следовательно, площадь параллелограмма с основанием a и высотой h равна площади прямоугольника с тем же основанием a и той же высотой h. Итак, площадь параллелограмма $S = ah$.

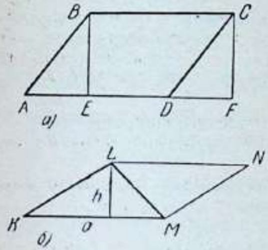


Рис. 103.

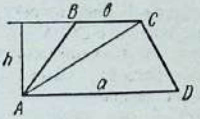


Рис. 104.

Теорема 2. ***Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту: $S_\triangle = \frac{1}{2}ah$.***

Всякий треугольник ($\triangle KLM$, рис. 103, *б*) можно достроить до параллелограмма ($KLNM$), проведя параллельные двум его сторонам из двух вершин. У данного треугольника и полученного параллелограмма общие основание a и высота h. Но $\triangle KLM = \triangle LNM$ (по трем сторонам). Следовательно, $S_\triangle$ равна половине площади параллелограмма (ah):

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ah = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2}\cdot h = a\cdot\frac{h}{2}.$$

Теорема 3. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:*** $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

Трапеция ($ABCD$) разбивается диагональю (AC) на два треугольника (ABC и ACD), имеющих одинаковую высоту (h), равную высоте трапеции. Основания трапеции (a и b) являются основаниями этих треугольников. Площадь трапеции равна сумме площадей треугольников:

$$S=\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}=\frac{ah+bh}{2}=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Задачи 293—300

293. Доказать, что:

а) площадь ромба равна половине произведения его диагоналей;

б) произведение катетов (a и b) равно произведению гипотенузы (c) на высоту (h), опущенную из вершины прямого угла на гипотенузу;

в) площади двух треугольников с равными высотами относятся, как их основания;

г) площадь трапеции и площадь треугольника равна произведению средней линии на высоту.

294. Вычислить площадь параллелограмма, стороны которого 35 *см* и 42 *см* и одна из диагоналей 35 *см*.

295. а) Высота равностороннего треугольника $h=6$ *дм*. Вычислить его сторону и площадь.

б) Высота равнобедренного прямоугольного треугольника $h=3\frac{1}{3}$ *м*. Найти его площадь.

296. Площадь треугольника равна 126 *см*^{2}, основание $b=20$ *см*, одна боковая сторона $a=13$ *см*. Определить другую боковую сторону.

297. Катет равен 24 *см*, а его проекция на гипотенузу 9,6 *см*. Определить площадь треугольника.

298. Периметр равнобедренной трапеции равен 124 *см*. Меньшее основание равно боковой стороне и меньше другого основания на 20 *см*. Определить площадь трапеции.

299. Одна из диагоналей ромба больше другой в $1\frac{1}{3}$ раза, площадь ромба равна 150 *см*^{2}. Определить высоту.

300. Меньшее основание трапеции $a=4$ *дм*, одна из боковых сторон $b = 12$ *дм* составляет с большим основанием угол в 30°. Другой угол при большем основании равен 45°. Вычислить площадь трапеции.

§ 47. Площадь многоугольника

В задаче 278 мы установили, что всякий правильный треугольник и всякий правильный четырехугольник имеют центр — общий центр описанной и вписанной окружностей. Не будем доказывать, а только скажем, что и всякий правильный многоугольник с любым числом сторон также имеет свой центр. Если соединить этот центр с каждой вершиной, то правильный n-угольник разобьется на n равных равнобедренных треугольников (в каждом из этих треугольников будет по 2 равные стороны — радиусы описанной окружности; см. § 9). Сторону правильного n-угольника (a_n) умножим на половину апофемы $\left(\frac{r}{2}\text{; см. задачу 280}\right)$ и получим площадь одного треугольника: $a_n \cdot \frac{r}{2}$. Умножим ее на n и получим площадь всего правильного n-угольника: $S = a_n \cdot \frac{r}{2} \cdot n = a_n \cdot n \cdot \frac{r}{2}$. Но $a_n \cdot n = P$ — периметру, поэтому $S = P \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2}\, Pr$.

Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на апофему.

Чтобы вычислить площадь любого многоугольника, надо разбить его на треугольники любым способом, вычислить площадь каждого треугольника и сложить полученные площади.

Задачи 301—307

301. а) Доказать, что площадь любого многоугольника, описанного около окружности радиуса r, равна половине произведения его периметра на r.

б) Вычислить площадь описанного около окружности четырехугольника $ABCD$, изображенного на рис. 99; для этого надо измерить каждую сторону и радиус (OM) с точностью до 0,1 *см*.

302. Вычислить площадь правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса $R = 20{,}0$ *см*, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

303. а) Может ли быть центральным углом правильного n-угольника угол в 7°; угол в 2°. Если может, то сколько сторон в таком правильном многоугольнике?

б) Определить радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, имеющего площадь 54 *дм*² и внутренний угол 120°.

304. Вычислить площадь многоугольника $ABCDE$ (рис. 105). В каждом треугольнике проведите высоту (при помощи чертежного треугольника). Измерение основания и высоты каждого треугольника сделайте с точностью до 0,1 *см*.

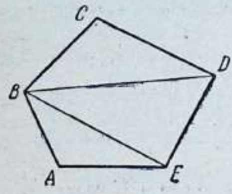


Рис. 105.

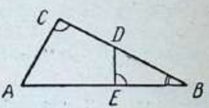


Рис. 106.

305. Дан $\triangle ABC$ (рис. 106), $\angle C = d$, $ED \perp AB$, $BD = \frac{1}{2} AB$. Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE.

306. Какие прямые являются осями симметрии (и сколько их) в правильном: **а)** шестиугольнике и многоугольнике с четным числом сторон; **б)** пятиугольнике и многоугольнике с нечетным числом сторон. **в)** Какие правильные многоугольники имеют центр симметрии?

307. Построить треугольник по основанию a и медианам m_b и m_c боковых сторон.

§ 48. Площадь круга и сектора

Если измерить ниткой длины окружностей и их диаметры на различных круглых предметах и вычислить их отношения, то окажется, что отношение длины любой окружности (C) к длине ее диаметра (D) равно одному и тому же числу, которое обозначают греческой буквой π (пи): $\frac{C}{D} = \pi$. Отсюда получаем формулу длины окружности: $C = \pi D$ или $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности.

Числовое значение π с точностью до 0,01: $\pi = 3,14$.

Длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360}$ или $\frac{\pi R}{180}$, а длина дуги (l) в $n°$ в n раз больше: $\frac{\pi R}{180} \cdot n$ или $l = \frac{\pi R n}{180}$.

Если в круг вписать правильный многоугольник, у которого, например, 100 или 1000 сторон, то его периметр можно принять приближенно за длину окружности, а его площадь — за площадь круга. В формуле площади правильного многоугольника $S = \frac{1}{2} Pr$ заменим периметр P на длину окружности C и апофему r на радиус R (r и R также почти не будут отличаться). Получим формулу площади круга: $S_{кр} = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$;

$$S_{кр} = \pi R^2 \text{ или } S_{кр} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \pi D^2.$$

Площадь сектора с центральным углом в 1° равна $\frac{\pi R^2}{360}$, а площадь сектора с центральным углом в $n°$ равна $\frac{\pi R^2}{360} \cdot n$. $S_{сект} = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

Задачи 308—317

308. Вычислить:

а) длину окружности и площадь круга, если радиус равен 4,5 *дм*;

б) диаметр круга, если длина окружности 94,2 *см*;

в) радиус круга (с точностью до 0,01 *дм*), если площадь круга равна 50 *дм*².

309. а) Во сколько раз увеличатся длина окружности и площадь круга, если радиус увеличить в 2 раза, в 5 раз, в n раз?

б) На сколько увеличатся длина окружности и площадь круга, если радиус увеличить на 1 *дм*, на m линейных единиц? Сделать сравнения.

310. а) Определить длину дуги, содержащей 22°30′, если радиус равен 1,8 *м*.

б) Определить радиус дуги, если она содержит 36° и длина ее равна 45 *см*.

в) Сколько градусов, минут и секунд содержит дуга, равная по длине радиусу?

311. а) Вычислить площадь сектора, если дуга содержит 67°15′ и радиус равен 1 *дм*.

б) Определить радиус сектора, если его площадь равна 6 $м^2$, а центральный угол 135°.

в) Найти центральный угол сектора, если его площадь равна 56,8 $см^2$, а радиус равен 6 *см*.

312. а) Определить площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, если известна хорда a внешней окружности, касающаяся внутренней.

б) Доказать, что площадь кругового кольца равна площади круга, который имеет своим диаметром хорду большей окружности, касающуюся меньшей окружности.

313. Вычислить площадь сегмента, отделяемого от круга радиуса R стороной правильного вписанного n-угольника, если: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.

314. Доказать теоремы:

а) медиана треугольника отсекает от другой медианы одну треть ее, считая от стороны;

б) все медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $1:2$, считая от стороны.

315. а) Доказать, что если площади двух равнобедренных треугольников относятся, как квадраты их оснований, то треугольники подобны.

б) Показать, что если слово «равнобедренных» в условии задачи (а) опустить, то треугольники могут быть и не подобны.

316. Найти геометрическое место середин отрезков, проведенных внутри треугольника параллельно его основанию.

317. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

Глава IX ● Решения задач по геометрии.

Указания, ответы

1. **а)** AB, BC, CD, AC, BD, AD.

б) Каждый из трех последних представляет сумму, а каждый из пяти первых отрезков можно представить в виде разности.

в) $BC = AD - (AB + CD)$, $BC = AD - AB - CD$.

2. **а)** Отрезки AB и BC и лучи AM и CN.

б) AM, AN, BM, BN, CM, CN.

в) Лучи AM и CN прямой не образуют, так как между ними имеется разрыв AC; чтобы образовать из них прямую, достаточно переместить один из лучей вдоль прямой MN так, чтобы концы A и C лучей совпали.

г) Только одна общая точка (A у лучей AM и AN), ни одной общей точки (у лучей AM и BN), общий отрезок (AB у лучей BM и AN), общий луч (BN или CN у лучей AN и BN).

3. «Если взять прямую и точку на ней, то получим два луча, лежащих на одной прямой». Обратно: «Если взять два луча, лежащих на одной прямой, то они образуют прямую». Обратное предложение неверно; опровергающим его примером служат, в частности, лучи AM и CN в предыдущей задаче.

4. 8 *см* и 24 *см*.

5. $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$.

6. **а)** $AC = BD$; $AC = AB + BC$ и $BD = CD + BC$, но по условию $AB = CD$ и, прибавив к каждому из них по BC, получим равные отрезки (см. аксиому 5 § 2).

б) Равносоставленные отрезки всегда состоят из соответственно равных частей (отрезков).

7. 9 *дм*; это расстояние состоит из суммы половин данных отрезков, как и остальная часть AC.

8. 30 *см*; сделайте чертеж и убедитесь, что расстояние между серединами отрезков в данном случае равно $\frac{2}{3}$ каждого из них.

9. Использовать аксиому 3 (§ 2) для отрезков MN и NL.

10. Точка C находится на пересечении прямой MN с отрезком AB (см. аксиому 3 § 2).

11. 10 различных прямых (пять сторон и пять диагоналей пятиугольника).

12. **а)** 4 части; **б)** 6 частей; **в)** $2n$ частей; **г)** 7 частей.

13. **а)** 2 части. Внутренняя — внутри острого угла, остальная — внешняя. Большая у острого угла внешняя часть, потому что при наложении внутренняя область угла составит только часть внешней. **б)** У развернутого. **в)** У прямого. **г)** У угла, большего чем развернутый. **д)** У полного угла.

14. **а)** $\frac{6}{5}d$ и $\frac{4}{5}d$; **б)** $\frac{6}{13}d$ и $\frac{20}{13}d$; **в)** $\frac{6}{5}d$ и $\frac{4}{5}d$.

15. $\frac{2}{5}d + \frac{1}{3}d = \frac{11}{15}d$.

16. Не являются смежными.

17. $\angle AOB = \angle COD$. $\angle COB$ — их общая часть. $\angle AOB$ и $\angle COD$ — равносоставленные. Обратная теорема верна.

18. $\frac{139}{140}d$. Угол между биссектрисами прилежащих углов равен полусумме этих углов: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

19. $\alpha + \beta = 2d$. $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2d}{2} = d$ — угол между биссектрисами смежных углов всегда прямой.

20. Угол между биссектрисами всегда состоит из двух половин вертикальных углов и угла, смежного с одним из вертикальных.

21. **а)** В развернутом угле; **б)** в полном угле.

22. **а)** Не может, так как если к разности (прямому углу) прибавим вычитаемое (острый угол), то полученное уменьшаемое будет тупым углом, а не острым;

б) может; **в)** может; **г)** не может.

б) Существует бесконечное множество пар углов, один из которых — тупой, а другой — острый и разность между которыми равна d. Так, можно взять любой острый угол, прибавить к нему прямой и получим нужный тупой угол.

в) Если смежные углы обозначить через x и y ($x > y$), то получим систему двух уравнений первой степени: $x + y = 2d$ и $x - y = d$, которая имеет единственное решение. Условию удовлетворяет только одна пара смежных углов.

23. B — центр, AB — радиус окружности. Расстояние от точки C до точек пересечения окружности с прямой BC дает искомые отрезки.

24. Да, если она является диаметром. Развернутые углы.

25. а) $\frac{1}{4}$ часть окружности; **б)** $\frac{1}{6}$; **в)** $\frac{1}{8}$.

26. а) Верно; **б)** неверно; **в)** верно; **г)** неверно.

27. Вокруг концов какой-нибудь неподвижной стороны вращать (при помощи циркуля) две другие стороны до выпрямления с первой стороной, причем так, чтобы не получилось наложения сторон.

28. Двумя другими высотами являются катеты и точка пересечения всех высот находится в вершине прямого угла треугольника.

29. В тупоугольном треугольнике две высоты расположены вне треугольника и пересекаются не сами высоты, а их продолжения, причем также вне треугольника. В остроугольном — внутри треугольника.

30. а), б) Всегда внутри треугольника.

32. Дано: $BD \perp AC$, $DA = DC$. Требуется доказать: $AB = BC$ (рис. 11). Доказывается перегибанием чертежа.

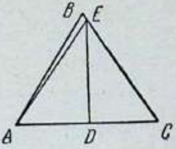


Рис. 107.

33. Дано: $\angle BAD = \angle C$.
Требуется доказать: $BA = BC$.

Возьмем середину D основания треугольника (рис. 107) и проведем $ED \perp AC$. Возможны два случая: 1) ED не пройдет через вершину B; 2) ED пройдет через B.

1) Пусть ED не пройдет через B. Перегнем чертеж по ED. DC пойдет по DA ($ED \perp AC$), вершина C попадет в вершину A. Точка E останется на месте и EC займет положение EA. $\angle EAD$, равный углу C, будет меньше угла BAD, что противоречит условию теоремы (дано, что $\angle C = \angle BAD$). Следовательно, предположение, что ED не пройдет через B, неверно.

2) Пусть ED пройдет через B. Тогда пр
чертежа BC полностью совпадет с BA (BC
$\triangle ABC$, согласно определению, является рав
что и требовалось доказать.

34. Использовать равенство половин углов
нии данного равнобедренного треугольника и
казанную в задаче 33.

35. Дано: $\angle ABK = \angle KBC$, $MN \perp BK$ (рис.
буется доказать: $MB = BN$.

Использовать теорему, доказанную в задаче

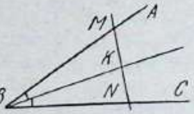


Рис. 108.

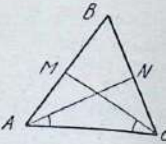


Рис. 109.

36. Только одна (в равнобедренном неравностор
и три оси симметрии (в равностороннем треуголь
а) Существует (равносторонний); **б)** не существует.

37. Путем перегибания по одной, а затем по д
си симметрии установим, что такой треугольник — р
оронний.

38. 1 *м*, 1 *м*, 0,8 *м*.

40. Доказывается (по первому признаку) равенство
льников, образованных медианами, половинами боко
рон и основанием данного равнобедренного треуго
а.

1. Дано: $AM = MB$, $CN = NB$, $AN = CM$, $\angle NAC$
MCA.

ребуется доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный (рис. 109
оказывается равенство треугольников ANC и CMA (п
у признаку?), отсюда следует, что $AM = CN$ и $AB =$
(почему?).

По данным задачи нетрудно сообразить, какие тре-
ики равны (по трем сторонам). Против равных сто-
и CN в этих треугольниках лежат равные углы.
ие на основании теоремы, доказанной в задаче 33,
аем доказательство.

перегибании
$= BA$), т. е.
обедренным,

при основа-
орему, до-

108). Тре-

1.

онном)
нике).

угой
вно-

ре-
ых
ь-

---

43. *Первый способ* — по признакам равенства.
$= \triangle NBC$ по двум сторонам и углу между ними
Второй способ — наложением. При перегиба
тежа по оси симметрии треугольника ABC точ
совмещаются, при этом совместятся точки M и N

44. Пусть MN — ось симметрии точек A и A_1.
Требуется доказать: $AA_1 \perp MN$, $AO = A_1O$ и A
(рис. 110).

По определению симметричные точки совмещают
перегибании чертежа по оси симметрии. При этом:

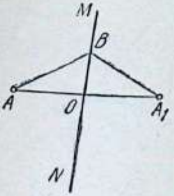


Рис. 110.

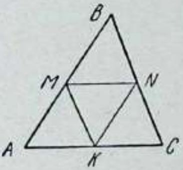


Рис. 111.

а) совмещаются $\angle AOB$ с $\angle A_1OB$, а поэтом
$\angle AOB = \angle A_1OB$; а так как они смежные, то каждый и
них прямой, следовательно, $AA_1 \perp MN$;

б) расположение точек A и A_1, совмещающихся при перегибании чертежа по MN, по разные стороны от оси MN очевидно;

в) совмещаются отрезки AO с A_1O (совместятся их соответствующие концы) и AB с A_1B, следовательно, $AO = A_1O$ и $AB = A_1B$, где B — произвольная точка оси.

45. Известно, что $AB = BC = AC$ и что M, N и K — середины сторон (рис. 111).

$\angle A = \angle B = \angle C$ (см. следствие 3 § 8) и половины равных сторон равны, поэтому $\triangle AMK = \triangle BMN = \triangle CNK$. Равны и их стороны: $MN = MK = NK$. $\triangle MNK$ — равносторонний.

46. Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 112), AD и A_1D_1 — медианы, BM и B_1M_1 — биссектрисы.

Требуется доказать: $AD = A_1D_1$, $BM = B_1M_1$.

Первый способ. а) $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ ($AC = A_1C_1$, $CD = C_1D_1$ и $\angle C = \angle C_1$ — следует из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, см. § 9). Следовательно, $AD = A_1D_1$.

б) $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ ($AB = A_1B_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ и половины равных углов равны: $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$). Следовательно, $BM = B_1M_1$. Достаточно доказать для одной медианы и для одной биссектрисы (для остальных пришлось бы повторять то же самое).

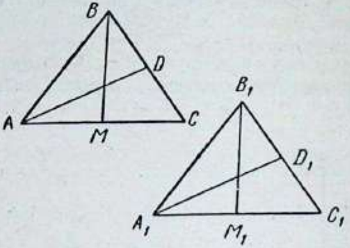


Рис. 112.

Второй способ — наложением. Равные треугольники совместятся всеми своими сторонами и углами. Совместятся и соответствующие медианы, так как совпадут и середины совместившихся сторон. Совпадут и биссектрисы равных углов, так как половины равных углов при наложении также совместятся, а две прямые — биссектриса и противоположная сторона могут пересечься только в одной точке.

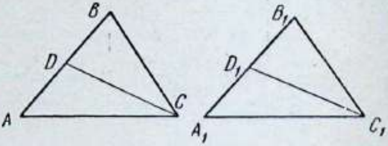


Рис. 113.

47. Если боковая сторона и угол при вершине равнобедренного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу при вершине другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны. Второй и третий признаки формулируются аналогично.

48. Дано: $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, CD и C_1D_1 — равные медианы. (рис. 113).

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Треугольники BDC и $B_1D_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($\angle BDC = \angle B_1D_1C_1$).

49. **а)** Верно, потому что в остроугольном треугольнике все внутренние углы острые, а каждый внешний угол — это смежный с внутренним, а значит тупой. **б)** Неверно. **в)** Верно.

50. Каждый внутренний угол треугольника со смежным внешним составляет в сумме $2d$ (см. § 5), а таких пар углов будет три.

51. **а)** См. задачу 19; **б)** d; **в)** d (см. § 8).

52. Третий внутренний угол равен $2d - \frac{3}{2}d = \frac{d}{2}$. Треугольник прямоугольный равнобедренный.

53. Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $BD \perp AC$, $B_1D_1 \perp A_1C_1$.

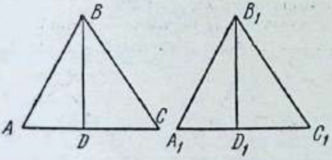


Рис. 114.

Требуется доказать: $BD = B_1D_1$ (рис. 114).

При наложении треугольники совместятся. B_1 совпадет с B и A_1C_1 с AC. Из точки (B) можно опустить на прямую только один перпендикуляр, поэтому B_1D_1 и BD совпадут, т. е. $B_1D_1 = BD$.

55. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника больше катета, прилежащего к этому углу, но меньше гипотенузы. Доказывается аналогично задаче 54.

56. В треугольнике против острого угла лежит наименьшая сторона. Это утверждение неверно, так как, например, в разностороннем остроугольном треугольнике против острых углов лежат все стороны, в том числе и самая большая.

57. **а)** Каждая сторона равна $\frac{P}{3}$; **б)** каждая из двух сторон равна $\frac{P-l}{2}$; **в)** m, $P-2m$; **г)** катеты по $\frac{P-n}{3}$ и гипотенуза $\frac{P+2n}{3}$; **д)** катет $\frac{P-c}{3}$, гипотенуза $\frac{2}{3}(P-c)$.

58. **а)** Треугольник с такими сторонами невозможен, потому что $23+18<45$ (нужно, чтобы было больше; см. § 12).

б) Возможен, так как даже самая большая сторона (2 *м*) меньше суммы двух других сторон (2,1 *м*).

в) Боковая сторона равнобедренного треугольника не может быть равной половине его основания, так как сторона (основание) треугольника будет равна сумме двух других его сторон (боковых), что невозможно.

г) Пусть самая меньшая сторона будет a, тогда две другие равны $2a$ и $3a$. Получим $3a=a+2a$, что противоречит теореме.

д) Возможен; если меньшую сторону принять за 2 части, то другие стороны будут содержать 3 и 4 такие части; тогда $4<2+3$.

59. а) Возможны два таких равнобедренных треугольника со сторонами: 14 *см*, 15 *см* и 15 *см*; 14 *см*, 14 *см* и 16 *см*.

б) Возможен только один такой треугольник со сторонами 2 *см*, 21 *см* и 21 *см*; треугольник со сторонами 2 *см*, 2 *см* и 40 *см* невозможен (см. § 12).

в) Невозможен, так как сумма двух других сторон будет также 22 *см*.

г) Невозможен, так как данная сторона будет больше суммы двух других сторон (14 *см*).

д) Треугольник с отношением сторон $1:1:5$ невозможен. При отношении сторон $1:5:5$ имеем: $1+5+5=$ $=11$, 44 *см* $:11=4$ *см*, стороны равны 4 *см*, 20 *см* и 20 *см*.

60. Возможны лишь следующие три соотношения. Так как AC вместе с суммой двух других сторон $(AB+BC)$ составляет периметр или два полупериметра, то:

а) если AC равна полупериметру, то $AB+BC$ также равно полупериметру;

б) если AC больше полупериметра, то $AB+BC$ меньше полупериметра;

в) если AC меньше полупериметра, то $AB+BC$ больше полупериметра.

Первый случай невозможен, так как было бы $AC = AB + BC$, что в треугольнике невозможно (см. § 12).

Невозможен и второй случай, так как получилось бы $AC > AB + BC$.

В третьем случае $AC < AB + BC$, что для треугольника верно. Утверждение доказано.

61. $\triangle DCE = \triangle ADB$ (по двум сторонам и углу между ними; см. § 9). $CE = AB$ ($\angle CDE = \angle ADB$). $BE = 2BD$. $BE < BC + CE$; $2BD < BC + AB$, откуда половина левой части меньше половины правой части неравенства: $BD < \frac{1}{2}(BC + AB)$.

62. **а)** 15 *см*; **б)** 72 *см*.

64. **а)** В остроугольном треугольнике.

б) В прямоугольном треугольнике катет является проекцией гипотенузы, а проекцией другого катета на первый является точка (вершина прямого угла).

в) В тупоугольном треугольнике проекция самой большой стороны на прямую, на которой лежит одна из сторон тупого угла, больше этой стороны треугольника.

г) В равнобедренном треугольнике боковая сторона проектируется на биссектрису.

д) В равностороннем треугольнике, где каждая медиана перпендикулярна к соответствующей стороне.

65. **а)** Потому что высота есть перпендикуляр, а каждый катет является наклонной, проведенной из той же точки (вершины прямого угла) к той же прямой (гипотенузе; см. теорему 1 § 13).

б) Потому что каждый катет есть перпендикуляр к другому катету, а гипотенуза — наклонная, проведенная из той же точки (вершины острого угла) к той же прямой (к другому катету).

в) Потому что каждый катет является перпендикуляром к другому катету, опущенным из противоположной вершины.

г) Потому что две высоты (катеты) пересекаются в вершине прямого угла, из которой опускается на гипотенузу третья высота.

66. Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $BD \perp AC$, $B_1D_1 \perp A_1C_1$,

$BD = B_1D_1$, $AC = A_1C_1$, большие боковые стороны $AB = A_1B_1$ (рис. 115).

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

При наложении треугольников BD совместится с B_1D_1 и DA пойдет по D_1A_1 (совместятся прямые углы BDA и $B_1D_1A_1$). Тогда из одной точки B_1 будут проведены к прямой A_1C_1 две равные наклонные (по условию $AB = A_1B_1$), проекции которых также будут равны: $AD = A_1D_1$. Совпадут и точки A и A_1. Но тогда $DC = D_1C_1$ ($AC = A_1C_1$ — по условию, $AD = A_1D_1$ — по доказанному; см. аксиому 5 § 2). Совпадут и третьи вершины C и C_1. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

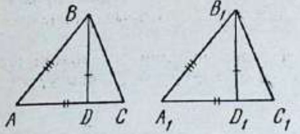


Рис. 115.

67. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ (рис. 115) равны по катету и гипотенузе (см. теорему 4 § 14). В них $\angle A = \angle A_1$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по теореме 1 § 9).

69. Пусть даны $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Отмеченные на рис. 116 элементы треугольников соответственно равны. $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ (по катету и гипотенузе, см. § 14). По той же причине $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$. $AD = A_1D_1$ и $DC = D_1C_1$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. § 9).

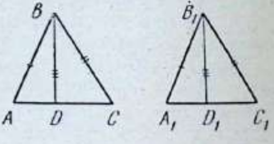


Рис. 116.

70. Рассмотрим прямоугольные треугольники, у которых катетами являются интересующие нас высоты данного равнобедренного треугольника и гипотенуза общая (основание равнобедренного треугольника). У этих прямоугольных треугольников имеется по равному острому углу (углы при основании равнобедренного треугольника, см. теорему 3 § 14).

71. Если в треугольнике две высоты равны, то треугольник равнобедренный.

Дано: $AD \perp BC$ и $CE \perp AB$, $AD = CE$.

Требуется доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный (рис. 117).

Треугольники ADC и CEA — прямоугольные с общей гипотенузой AC и равными катетами ($AD = CE$). По четвертому признаку равенства прямоугольных треугольников они равны (см. § 14), поэтому $\angle EAC = \angle DCA$ (см. § 9). Следовательно, $BC = BA$ (см. теорему 2 § 11) и $\triangle ABC$ — равнобедренный (см. определение § 7).

72. Дано: $\triangle ABC$, CM — медиана, $BE \perp CM$, $AD \perp CD$.

Требуется доказать: $BE = AD$ (рис. 118).

Перпендикуляры BE и AD являются катетами прямоугольных треугольников ADM и MBE, которые равны (по третьему признаку, § 14).

73. Расстояние от точки до прямой (или от прямой до точки) измеряется по перпендикуляру, опущенному из точки на прямую. Опустим перпендикуляры из B и C на AM. По условию они равны. Возьмем $\triangle ABC$ (рис. 30) и выясним, как проходит в нем AM (см. задачу 72).

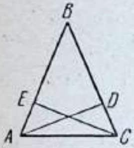


Рис. 117.

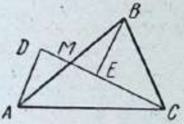


Рис. 118.

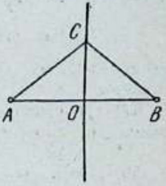


Рис. 119.

74. Рассмотрим два полученных прямоугольных треугольника, у которых гипотенузами являются данные медианы. Они равны (по первому признаку, § 14). По двум катетам будут равны и данные треугольники.

76. а) Дано: $CO \perp AB$, $AO = OB$ (рис. 119).

Требуется доказать: $AC = BC$.

Доказательство. $\triangle AOC = \triangle BOC$ (по двум катетам) и их гипотенузы равны: $AC = CB$.

б) Дано: $CA = CB$ (рис. 119).

Требуется доказать: $AO = OB$ и $CO \perp AB$.

Доказательство. Если из C опустим перпендикуляр CO на AB, то он будет являться как высотой равнобедренного треугольника ACB, так и его медианой: $CO \perp AB$ и $AO = OB$, что и требовалось доказать.

78. Искомая точка принадлежит геометрическому месту точек — биссектрисе того угла, от сторон которого она одинаково удалена. Кроме того, искомая точка лежит на третьей стороне треугольника, а поэтому она является точкой пересечения этой стороны с биссектрисой противолежащего угла. Решение единственное.

79. Искомая точка принадлежит двум геометрическим местам: биссектрисе данного угла и серединному перпендикуляру данного отрезка (точка их пересечения). Возможны три случая: 1) единственное решение, 2) нет решения, 3) бесконечно много решений (см. задачу 77).

80. Анализ. Начертим какой-нибудь треугольник (ABC, рис. 120). Пусть нам известны сторона BC, угол B и биссектриса BD угла B. Вспомним основные задачи (6 и 7 § 15) на построение треугольников. В треугольнике ABC известны только одна сторона и один прилежащий угол, поэтому построить его только по этим данным невозможно. Если возьмем еще биссектрису, то сможем построить вспомогательный $\triangle BDC$ (см. задачу 6 (а) § 15). Для этого придется взять половину данного угла B. Затем, продолжив сторону CD до пересечения со стороной BA данного угла B, получим искомый треугольник (если они не пересекутся, то задача не имеет решения).

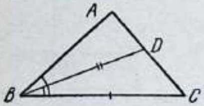


Рис. 120.

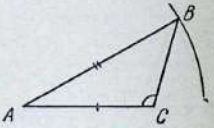


Рис. 121.

Построение и доказательство теперь не вызовут затруднений. Зададим себе отрезки a и l и угол B. На некоторой прямой отложим сторону a, построим прилежащий угол B, проведем биссектрису, отложим на ней отрезок l и т. д.

81. *Первый способ.* $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ ($AC = A_1C_1$, $AD = C_1D_1$, $\angle DAC = \angle D_1C_1A_1$ как половины равных углов; см. теорему 1 § 9). $\triangle ADB = \triangle C_1D_1B_1$ ($AD = C_1D_1$, $\angle DAB = \angle D_1C_1B_1$, $\angle ADB = \angle C_1D_1B_1$ как смежные с равными углами ADC и $C_1D_1A_1$; см. теорему 2 § 9). $AB = B_1C_1$. $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ (по теореме 1 § 9).

82. Анализ. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 121) — искомый, в котором даны стороны AB и AC ($AB > AC$) и угол C. Выясняем, что угол C — прилежащий к стороне AC, поэтому другая его сторона (CB) дает направление на третью вершину (B) искомого треугольника. Эта вершина принадлежит также геометрическому месту точек — окружности с центром A и радиусом AB. Так как AB больше AC, то точка пересечения указанной окружности с лучом CB всегда существует, причем единственная.

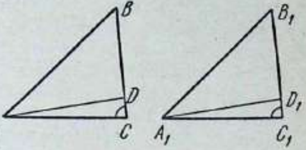


Рис. 122.

Для построения зададим два отрезка — стороны a и b ($a > b$) и $\angle A$, лежащий против a. На произвольной прямой отложим меньшую сторону b, угол при ней A и опишем дугу радиуса a, пересекающую другую сторону угла A.

Нетрудно доказать, что построенный треугольник удовлетворяет всем требованиям задачи.

Решение всегда существует и единственное.

83. Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AB > AC$, $\angle C = \angle C_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 122).

Для доказательства проведем высоты: $AD \perp BC$ и $A_1D_1 \perp B_1C_1$. Прямоугольные треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны (по гипотенузе и острому углу, см. теорему 3 § 14), отсюда $AD = A_1D_1$ (см § 9). $\triangle ADB = \triangle A_1D_1B_1$ (по гипотенузе и катету; см. теорему 4 § 14). $BC = B_1C_1$ (состоят из соответственно равных частей: $DC = D_1C_1$ и $BD = B_1D_1$). $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по теореме 3 § 9).

Если $\angle C = \angle C_1 > d$, то доказательство аналогичное (докажите самостоятельно). Если $\angle C = \angle C_1 = d$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по катету и гипотенузе; см. § 14).

84. а) См. задачу 6 (а) § 15.

б) Решается аналогично задаче 82. Построение угла $\frac{3}{4}d$ осуществляется путем проведения биссектрис прямого угла и его половины.

85. Высота разделяет равнобедренный треугольник на два прямоугольных треугольника. Построив один из них, мы построим затем и равнобедренный треугольник. **а)** См. задачу 7 (г) § 15. **б)** См. задачу 7 (б) § 15.

диана является гипотенузой другого пря-
тольника, который имеет с искомым пря-
угольником общий прямой угол и общий
х же катетов один составляет половин
а делит катет пополам). В каждой из з
строить вспомогательный прямоугольн
о гипотенузе (данная медиана) и кате
ловине данного катета a и **б)** равному вс
ету a искомого треугольника. Затем л
комый прямоугольный треугольник.
ледует указать еще, что прямые лежат
сти, так как для прямых, не лежащих в
это неверно: в пространстве существую
ые не имеют общей точки и не парал
ющиеся прямые, их можно найти и сред

) Эта формулировка верна для прямых (н
ченно продолжать) и неверна для отрезко
ассмотреть отрезки на каждой из сторон,
угла. Если концы этих отрезков не
ине угла, то они не имеют общей точ
й плоскости и не параллельны (лежат на
прямых). Только отрезки параллельных
ся параллельными.

в) Ошибка та же, что и в задаче (б). Ве
если прямая, на которой лежит данный
лельна данной прямой, то данные отре
таются параллельными.

г) Следует указать еще, что прямы
й плоскости, тогда формулировка будет
у (а)).

88. **а)** Для отрезков, даже для парал
верно. Прямая, пересекающая один из пар
ков, обязательно пересечет прямую, на ко
рой отрезок, но самого отрезка может н

б) Неверно; отрезок может не дойти
Для прямых это утверждение верно (см.

в) Это верно как для прямых (с
так и для отрезков.

г) В таком виде утверждение
если взять две пересекающиеся пря
них провести по одному перпендику
пересекутся (убедитесь на чертеже).

д) Верно; это будет иметь место тогда, когда перпендикуляр и наклонная проведены из двух разных точек и к разным пересекающимся прямым (сделайте чертеж).

89. Эту задачу предлагается решить на основании теоремы (§ 16). Зададим себе прямую *AB* и точку *C* вне ее. Из *C* опустим перпендикуляр на *AB*, а затем к полученному перпендикуляру восставим другой перпендикуляр в точке *C* (см. задачи 4 и 5 § 15).

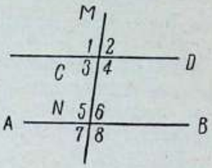


Рис. 123.

90. Для решения задачи используем теорему 2 (§ 17). Построим равные соответственные углы при данной прямой (*AB*, рис. 123), искомой прямой (*CD*) и некоторой секущей (*CN*). Для этого проведем произвольную секущую *CN* и построим угол *MCD*, равный углу *CNB* (см. задачу 1 § 1

91. а) Если провести биссектрисы равных соответ
венных углов *MCD* и *CNB* (рис. 123), то они образу
с секущей *MN* равные углы (половины равных у
равны). И эти половины данных углов также будут с
ветственными углами при биссектрисах и секущей
Следовательно, по второму признаку параллельности
мых биссектрисы равных соответственных углов
лельны.

б) По указанному признаку параллельности прямые (*CD* и *AB*) параллельны, поэтому условие можно сформулировать так: биссектрисы соответс
углов при параллельных прямых параллельны.

92. а) Если провести биссектрисы равных в
накрест лежащих углов *ANC* и *NCD* (рис. 123),
образуют равные внутренние накрест лежащие
же секущей *MN* и поэтому параллельны (см.
§ 17).

б) Аналогично, как и в задаче 91 (б).

93. Угол, смежный с одним из двух дань
односторонних углов, по отношению к друг
внешним накрест лежащим. Из условия за
что внешние накрест лежащие углы равны.
логично, как в задачах 91 и 92.

94. Используем только теоремы о свойс
параллельных прямых и секущей (см.

$\angle 2 = \frac{3}{5} d$ (рис. 123). Тогда $\angle 6 = \frac{3}{5} d$ (соответственный с $\angle 2$), $\angle 7 = \frac{3}{5} d$ (внешний накрест лежащий с $\angle 2$), $\angle 8 = 2d - \frac{3}{5} d = 1\frac{2}{5} d$ (внешний односторонний с $\angle 2$). $\angle 1 = \angle 8 = 1\frac{2}{5} d$, $\angle 3 = \angle 6 = \frac{3}{5} d$, $\angle 4 = 2d - \angle 6 = 2d - \frac{3}{5} d = 1\frac{2}{5} d$, $\angle 5 = \angle 1 = 1\frac{2}{5} d$.

95. а) Параллельны, так как сумма внешних односторонних углов равна $2d$.

б) Не параллельны, так как сумма двух острых или двух тупых углов не равна $2d$ (сделайте чертеж).

в) $1{,}2d \cdot \frac{2}{3} = 0{,}8d$; внутренние углы $1{,}2d$ и $0{,}8d$ в сумме составляют $2d$. Возможны 2 случая: если эти углы односторонние, то прямые параллельны; если углы накрест лежащие, то прямые не параллельны.

96. а) Оба данных угла равные тупые. Если они накрест лежащие (внешние или внутренние) или соответственные, то прямые параллельны. В противном случае, как легко убедиться на чертеже, прямые не параллельны.

б) Один из углов $\frac{d \cdot 30}{100} = 0{,}3d$, другой $d - 0{,}7d = 0{,}3d$. Аналогично, как в задаче (а).

в) $50^\circ + \frac{50^\circ \cdot 160}{100} = 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$. Данные углы 50° и 130° в сумме дают 180°. Если они односторонние (внутренние или внешние), то прямые параллельны. В противном случае прямые не параллельны.

97. Сделайте чертеж, соответствующий условию задачи. Рассмотрим треугольники AKE и AKH с общей стороной AK. $\angle EAK = \angle KAH$ (AK — биссектриса). $\angle EKA = \angle KAH$ (внутренние накрест лежащие при параллельных прямых EK и AC и секущей AK). $\angle HKA = \angle KAE$ (внутренние накрест лежащие при $KH \parallel EA$ и секущей AK). Так как углы EKA и HKA равны равным углам, образованным биссектрисой AK, то они равны и между собой. $\triangle AEK = \triangle AHK$ (по второму признаку равенства треугольников, см. § 9). Но в каждом из этих треугольников углы при основании AK равны, следовательно, эти равные треугольники равнобедренные (см. теорему 2 § 11), в которых боковые стороны равны: $AE = EK = KH = HA$.

98. а) Расстояние от прямой до точки измеряется по перпендикуляру, опущенному из точки на прямую (см. определение 5 § 13). Пусть дана прямая AB и отрезок a (рис. 124). Построим одну из искомых точек C: в любой точке прямой AB восставим перпендикуляр к ней и отложим на нем отрезок, равный a. Если перемещать отрезок CE параллельно его начальному положению так, чтобы точка E оставалась на AB, то он будет оставаться перпендикуляром к AB (см. следствие § 18). Ясно, что при этом точка C опишет прямую, все точки которой удалены от AB на расстояние a. Для построения этой прямой достаточно построить еще одну ее точку F (так же, как и C).

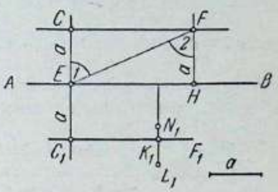


Рис. 124.

Докажем, что прямая CF параллельна AB. Соединим E и F. $CE \perp AB$ и $FH \perp AB$ (по построению), $CE \parallel FH$ (см. теорему § 16). $\angle 1 = \angle 2$ (внутренние накрест лежащие при параллельных). $CE = FH = a$, EF — общая сторона. $\triangle CEF = \triangle FHE$ (по первому признаку равенства треугольников, см. § 9). Следовательно, $\angle FCE = \angle FHE = d$ и $FC \perp CE$. Но и $BA \perp CE$, поэтому $FC \parallel BA$.

Теперь отложим на перпендикуляре отрезок EC_1, равный a, и через точку C_1 проведем прямую C_1F_1, параллельную AB. Нетрудно доказать, что любая точка (K_1) этой прямой удалена от AB на a, а затем и то, что если точка (L_1 или N_1) не лежит на этой прямой, то она удалена от AB не на a. Это позволяет утверждать, что геометрическое место точек, удаленных от данной прямой AB на данное расстояние a, есть две прямые, параллельные AB, расположенные по разные стороны от AB и удаленные от нее на a.

б) За расстояние между двумя параллельными прямыми принимают длину отрезка перпендикулярной прямой, заключенного между параллельными. Из задачи видно, что длина этого отрезка постоянная для данных параллельных.

в) Нельзя говорить о расстоянии между пересекающимися прямыми, так как у них нет общего перпендикуляра и расстояние между их точками переменное.

99. а) Искомое г. м. т. есть прямая AB, параллельная данным параллельным прямым CF и C_1F_1 и одинаково удаленная от них (рис. 124). Для ее построения нужно провести какой-нибудь перпендикуляр к данным прямым и через середину его отрезка, заключенного между данными прямыми, построить прямую, параллельную данным прямым (см. задачу 90). Искомая прямая AB есть ось симметрии данных прямых CF и C_1F_1 (см. определение § 8).

б) Искомое г. м. т. есть две прямые, параллельные основанию треугольника и проходящие от него на расстоянии, равном данной высоте треугольника (см. задачу 98(а)).

100. а) Построения выполняются в соответствии с решением задачи 99(б). Затем строим общую точку полученного г. м. т. и другого г. м. т. — окружности с центром в середине основания и радиусом m. Задача не имеет решения, если $m < h$. Если $m \geqslant h$, то получаются два симметричных (и равных) треугольника относительно прямой, на которой находится основание (ось симметрии).

б) Дано: $a + b$, $a - b$, h_c. Известно, как по сумме и разности двух чисел найти эти числа. Аналогично поступаем и с отрезками и найдем боковые стороны a и b. Зная боковую сторону a и высоту h_c (рис. 125), можно построить прямоугольный треугольник BCD, а по b и h_c — $\triangle ACD$ (см. задачу 7(г) § 15). Получим искомый треугольник. Построение начинаем с нахождения отрезков a и b и с восставления перпендикуляра к прямой в некоторой точке. Задача имеет решение, если одна из боковых сторон не меньше (больше или равна) h_c, а другая — больше h_c.

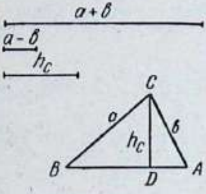


Рис. 125.

101. а) Неверна; если начертить угол, например, симметричный (см. § 8) некоторому острому углу относительно какой-нибудь оси, то острые углы будут равны, но стороны их, очевидно, не будут соответственно параллельны.

б) Неверна; легко начертить два равных тупых угла, произвольно расположенных на плоскости, и этот пример опровергает теорему.

в) Неверна; достаточно указать в качестве опровергающего примера два смежных угла, для которых всегда выполняется условие теоремы, но не выполняется ее заключение.

102. **а)** Так как две прямые не могут быть одновременно параллельными и перпендикулярными, то если сторона AB одного угла параллельна стороне A_1B_1 другого угла, то AB должна быть перпендикулярна другой стороне другого угла B_1C_1. Аналогично: если $BC \parallel B_1C_1$, то $BC \perp A_1B_1$. Если такие два угла существуют, то задача имеет решение. Такими являются два прямых угла с соответственно параллельными сторонами.

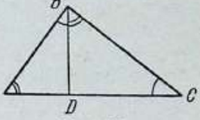


Рис. 126.

б) Могут, если они оба прямые.

в) Можно, если один из них острый, а другой тупой. Для некоторого данного, например, тупого угла будет два таких острых, которые отличаются только направлением сторон. Убедитесь в этом на чертеже.

103. **а)** В треугольнике ABC (рис. 126) $\angle ABC = \angle BDC = d$, $\angle ABD = \frac{2}{7} d$, $\angle BCA = \angle ABD$ $(BC \perp AB,\ CA \perp BD)$; $\angle BCA = \frac{2}{7} d$.

$\angle BAC = \angle DBC$ $(BA \perp BC,\ \ AC \perp BD)$. $\angle DBC = d - \frac{2}{7} d = \frac{5}{7} d$; $\angle BAC = \frac{5}{7} d$.

б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = d$, $BD \perp AC$ (рис. 126).

Требуется доказать: $\angle A + \angle C = d$.

Доказательство: $\angle A = \angle DBC$, $\angle C = \angle ABD$ (см. теорему 2 § 19). Но $\angle DBC + \angle ABD = d$, поэтому $\angle A + \angle C = d$.

104. **а)** Искомый угол с данным углом в сумме составляют 180° (см. теорему 2 § 19), поэтому он равен $180° - 42° = 138°$.

б) Среди шести углов, образующих полный угол при вершине O, есть: 1) два угла, каждый из которых равен углу A данного треугольника; 2) два угла, каждый из которых равен углу B; 3) два угла, каждый из которых равен углу C (см. § 19). $360° = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$, откуда сумма внутренних углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = \frac{360°}{2} = 180°$.

105. Доказательство (рис. 51). $\angle FED$ равен данному углу со сторонами AB и CD (см. теорему 2 § 18). Биссектрисы соответственных углов при параллельных прямых параллельны (см. задачу 91(а)). Перпендикуляр MN к биссектрисе EH отсекает равнобедренный треугольник EMN (биссектриса является и высотой, см. задачу 31). $MH = HN$ (EH — медиана). Теми же свойствами будет обладать и биссектриса любого угла.

Перпендикуляр KN к биссектрисе EH будет перпендикуляром и к биссектрисе угла между AB и CD (биссектрисы параллельны, см. следствие § 18), поэтому KN — основание равнобедренного треугольника, вершина которого S не поместилась на чертеже. $\angle AKN = \angle CNK$. $ON = OK$ и $OL \perp KN$ (по построению). Треугольники с катетами $OK = ON$ и равными прилежащими острыми углами AKO и CNO равны, поэтому их другие катеты так же равны: OLS — их общий катет. OS — высота и медиана равнобедренного треугольника SKN, а поэтому OS — биссектриса угла между лучами SAB и SCD (см. следствие 1 § 8).

106. а) Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Требуется доказать: $\angle C = \angle C_1$.

Доказательство. По теореме (§ 20) $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ и $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180°$. $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Вычтем из обеих частей равенства по равному углу ($\angle A = \angle A_1$) и получим $\angle B + \angle C = \angle B_1 + \angle C_1$. Затем аналогично (см. аксиому 5 § 2) поступим с равными углами B и B_1 и получим: $\angle C = \angle C_1$.

б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$.

Требуется доказать: $\angle B + \angle C = 90°$.

Доказательство. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$; $\angle B + \angle C = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$.

в) Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $AB = AC$.

Требуется доказать: $\angle B = \angle C = 45°$.

Доказательство. $\angle B + \angle C = 90°$ (см. задачу (б)). $\angle B = \angle C$ (см. теорему 2 § 8). $\angle B + \angle C = \angle B + \angle B = 2\angle B = 90°$; $\angle B = 45°$; $\angle C = 45°$.

г) Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = AC$.

Требуется доказать: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Доказательство. По следствию 3 (§ 8): $\angle A = \angle B = \angle C$. По теореме (§ 20): $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle A + \angle A + \angle A = 180°$, $3\angle A = 180°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 60°$.

107. а) $\angle B = 180° - (84° + 43°) = 180° - 127° = 53°$ (рис. 127); $\frac{1}{2}\angle A = 42°$; $\frac{1}{2}\angle B = 26°30'$; $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 68°30'$ (внешний угол треугольника AOB, см. следствие 1 § 20).

б) $\angle A + \angle B = 180° - 40° = 140°$ (рис. 127); $\angle DOB = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 70°$.

в) $CE \perp AB$ (рис. 127); $\angle KAE = \frac{1}{2}\angle A = 32°$; $\angle AKE = 90° - 32° = 58°$ (см. задачу 106 (б)).

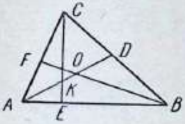


Рис. 127.

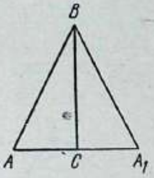


Рис. 128.

г) Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и биссектрисой. Угол при основании: $\frac{180° - 70°}{2} = \frac{110°}{2} = 55°$; $70° \cdot \frac{1}{2} = 35°$; $55° \cdot \frac{1}{2} = 27°30'$; $35° + 27°30'' = 62°30'$ (см. задачу 107 (а)).

108. а) Сделайте чертеж и рассмотрите треугольник, углами которого являются искомый тупой угол и половины острых углов B и C прямоугольного треугольника. $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$; $180° - 45° = 135°$.

б) Медианы равностороннего треугольника являются и биссектрисами углов в 60°. Как и в задаче (а), имеем: $180° - (30° + 30°) = 120°$.

в) Высота, проведенная к основанию данного равнобедренного треугольника, является и биссектрисой угла в 90°. Углы при основании по 45°. $45° : 2 = 22°30'$; $90° : 2 = 45°$; $180° - (45° + 22°30') = 180° - 67°30' = 112°30'$.

109. а) Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = d$, $AC = \frac{1}{2} AB$.

Требуется доказать: $\angle ABC = 30°$ (рис. 128).

Для доказательства можно повернуть $\triangle ABC$ вокруг BC, и он займет положение BCA_1. AC и CA_1 образуют одну прямую, так как сумма двух прямых углов есть угол развернутый (см. § 4). $AC = CA_1$; $AA_1 = 2AC = AB$; $A_1B = AB$; $\triangle ABA_1$ — равносторонний. $\angle ABA_1 = 60°$, $\angle ABC = 30°$ (медиана BC является и биссектрисой, см. § 8).

б) Пусть из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная. Если наклонная образует с перпендикуляром угол в 30°, то проекция наклонной будет противолежащим этому углу катетом (см. следствие 2 § 20). То же самое будет, если наклонная образует с данной прямой (или со своей проекцией) угол в 60°.

110. а) Дано: $\triangle ABC$, $AD = DC = BD$.

Требуется доказать: $\angle ABC = d$ (рис. 129).

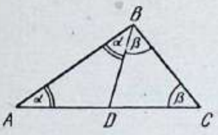


Рис. 129.

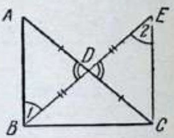


Рис. 130.

Доказательство. $\triangle ABD$ — равнобедренный ($AD = BD$ по условию), углы α при его основании равны. То же и в треугольнике BDC. Сумма углов треугольника ABC: $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 90°$, $\angle ABC = 90°$.

б) Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = d$, $AD = DC$ (рис. 130).

Требуется доказать: $BD = AD$.

Доказательство. На продолжении медианы отложим $DE = BD$ и соединим E с C. $\triangle ADB = \triangle EDC$ (по двум сторонам и углу между ними, см. § 9). В них $AB = EC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства накрест лежащих углов 1 и 2 следует, что $EC \parallel AB$ (см. теорему 1 § 17). Но $AB \perp BC$ (по условию), поэтому $EC \perp BC$ (см. следствие § 18). Прямоугольные треугольники ABC и ECB равны (по первому признаку, см. § 14), а поэтому равны и их гипотенузы: $BE = AC$. $BD = \frac{1}{2} BE$; $AD = \frac{1}{2} AC$; $BD = AD$.

111. а) Дано: $\angle A : \angle B = 2:3$; $\angle C = (\angle A + \angle B) - 25^\circ$.

Определить: $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$; $\angle A + \angle B + [(\angle A + \angle B) - 25^\circ] = 180^\circ$; $2\angle A + 2\angle B - 25^\circ = 180^\circ$; $2(\angle A + \angle B) = 205^\circ$; $\angle A + \angle B = 102^\circ 30'$. Разделим полученное число прямо пропорционально числам 2 и 3. $\angle A = \frac{102^\circ 30'}{2+3} \cdot 2 = 20^\circ 30' \cdot 2 = 41^\circ$; $\angle B = 20^\circ 30' \cdot 3 = 61^\circ 30'$.

б) Заменим отношение дробных чисел отношением целых: $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = \frac{5}{2} : \frac{7}{2} = 5:7$. Сумма трех углов в том случае, если третий угол сделать равным первому, будет равна $2d - \frac{4}{19} d = 1\frac{15}{19} d$. Отношение трех углов станет $5:7:5$. $\angle 1 = \frac{1\frac{15}{19} d}{5+7+5} \cdot 5 = \frac{\frac{34}{19} d}{17} \cdot 5 = \frac{34d}{19 \cdot 17} \cdot 5 = \frac{10}{19} d$; $\angle 2 = \frac{2d}{19} \cdot 7 = \frac{14}{19} d$; $\angle 3 = \angle 1 + \frac{4}{19} d = \frac{10}{19} d + \frac{4}{19} d = \frac{14}{19} d$.

113. Дано: $\angle A = \frac{2}{3} \angle B$, $\angle A = \frac{4}{5} \angle C$.

Определить $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Выразим $\angle B$ и $\angle C$ через $\angle A$. Разделив обе части равенства $\angle A = \frac{2}{3} \angle B$ на $\frac{2}{3}$, получим: $\angle = B = \frac{3}{2} \angle A$. Аналогично $\angle C = \frac{5}{4} \angle A$. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Заменим $\angle B$ и $\angle C$ их значениями, выраженными через угол A: $\angle A + \frac{3}{2} \angle A + \frac{5}{4} \angle A = 180^\circ$; $\frac{15}{4} \angle A = 180^\circ$; $\angle A = 180^\circ : \frac{15}{4} = \frac{180^\circ \cdot 4}{15} = 48^\circ$. $\angle B = \frac{3}{2} \angle A = 72^\circ$; $\angle C = \frac{5}{4} \angle A = 60^\circ$.

114. Третий (наибольший) угол данного треугольника равен $180^\circ : 2 = 90^\circ$ (столько же составляет и сумма двух других углов). Средний по величине угол равен $90^\circ \cdot \frac{2}{3} = 60^\circ$, наименьший угол равен 30°. Сумма гипотенузы и меньшего катета, равного половине гипотенузы, состав-

57 *см*. Меньший катет $57:3=19$ (*см*), гипотенуза *см*.

115. а) Дано: $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $\angle ABC$ и $\angle DEF$ — ые (рис. 54, *а*), BM и EN — биссектрисы.

Требуется доказать: $BM \parallel EN$.

Доказательство. $\angle ABC = \angle DEF$ (см. примечание 1 § 19). $1 = \angle 2$ (половины равных углов). Продолжим BC до ресечения с биссектрисой другого угла. $\angle 3 = \angle 2$ (как ответственные при $BC \parallel EF$ и секущей EN, см. § 18). з равенства $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 2$ следует: $\angle 1 = \angle 3$ см. аксиому 4 § 2). Так как соответственные углы 1 и 3 авны, то прямые BM и EN параллельны (см. теорему 2 § 17).

Аналогично, если оба данных угла острые.

б) Дано: $LH \parallel RS$, $LK \parallel PR$, $\angle HLK$ — острый, $\angle PRS$ — тупой, LQ и RT — биссектрисы (рис. 54, *б*).

Требуется доказать: $LQ \perp RT$.

Доказательство. $\angle HLK + \angle PRS = 2d$ (см. примечание 1 § 19). $\angle PRO = \angle HLK$ (острые углы с соответственно параллельными сторонами). По доказанному (задача 115 (а)) их биссектрисы $RG \parallel LQ$. Но $RG \perp RT$ (см. задачу 19). Следовательно, и $LQ \perp RT$ (см. следствие § 18).

116. Проведем через O любые две прямые, пересекающие MN, и отложим на них отрезки $OC = OA$ и $OD = OB$ (рис. 131). Проведем прямую DC. $\triangle OAB = \triangle OCD$ (по двум сторонам и углу между ними, см. § 9). $\angle 1 = \angle 2$ (лежат против сторон $OB = OD$ в равных треугольниках). Из равенства накрест лежащих углов 1 и 2 следует, что $DC \parallel MN$. Так как через точку O были проведены произвольные прямые AC и BD, то и концы любых исходящих из AB отрезков с серединами в точке O будет лежать на прямой CD, параллельной AB и отстоящей от O на такое же расстояние, как и AB. Нетрудно убедиться в том, что если точка не будет лежать на DC, то она не будет обладать указанным свойством (точка O не будет серединой соответствующего отрезка).

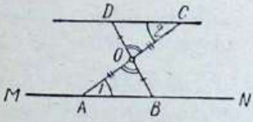


Рис. 131.

117. В соответствии с анализом легко построить искомый треугольник и доказать, что он удовлетворяет всем

требован
единств
деленны

118.
известн
тиволе
треуго
цирку

$\angle AC$

в кот
лежа

З
из д

ниям задачи. Задача всегда имеет решение, причем нное (только один искомый треугольник при опрех заданных величинах).

Анализ. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, $\angle A$, h_c и l_c — ые элементы его (рис. 132). По катету h_c и прокащему углу A можно построить вспомогательный ьник ACD (см. задачу 117). В нем из C раствором ия, равным l_c, сделаем засечку на AB и получим $E = \frac{1}{2} \angle ACB$. Теперь можно построить $\triangle BEC$, ором известны сторона $CE = l_c$, $\angle CED$ и другой прищий угол BCE, равный углу ACE.

адача не будет иметь решения, если окажется, что вух заданных отрезков $l_c < h_c$.

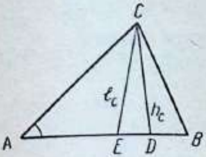


Рис. 132.

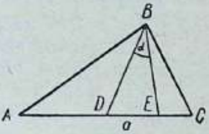


Рис. 133.

119. Анализ. Медиана и высота, проведенные к одной тороне (рис. 133), образуют вспомогательный прямоугольный треугольник, в котором известна гипотенуза (m_a и прилежащий угол α (см. задачу 7 (в) § 15). Затем легк построить треугольники ABD и DBC (см. задачу 6 (а § 15). Углы ADB и BDC уже будут известны. $AD = DC =$ $= \frac{a}{2}$ (см. задачу 3 § 15).

120. а) $2d(n-2) = 14d$, $n-2 = \frac{14d}{2d} = 7$, $n = 7 + 2 = 9$.

б) $2d(n-2) = 30d$, $n-2 = 15$, $n = 17$.

в) $180°(n-2) = 1620°$, $n-2 = \frac{1620°}{180°} = 9$, $n = 11$.

121. а) $n = 8$, $2d(n-2) = 2d \cdot 6 = 12d$.

б) $n = 5$, $2d(n-2) = 2d \cdot 3 = 6d$; все внутре углы равны, а поэтому каждый из них равен $6d:5 = 1\frac{1}{5}d$.

в) $n = 10$; $2d(n-2) = 16d$, $16d:10 = 1{,}6d$.

г) $1{,}6d - 1{,}2d = 0{,}4d$ — разность внутренних углов выпуклых равноугольных десятиугольника и пятиугольника. Внешние углы этих многоугольников: $4d:10 = 0{,}4d$ и $4d:5 = 0{,}8d$. Разность между внешними углами равноугольных пятиугольника и десятиугольника $0{,}8d - 0{,}4d = 0{,}4d$. Разности одинаковые: насколько увеличился внутренний угол при переходе от $n = 5$ к $n = 10$, настолько уменьшился внешний, так как сумма внутреннего угла и смежного с ним внешнего всегда постоянна (равна $2d$).

122. а) Сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна $4d$. В каком многоугольнике такая же сумма внутренних углов? $2d(n-2) = 4d$, $n - 2 = \frac{4d}{2d} = 2$, $n = 2 + 2 = 4$. В выпуклом четырехугольнике.

б) В треугольнике сумма внутренних углов меньше суммы внешних ($2d < 4d$).

в) В выпуклом пятиугольнике, шестиугольнике и т. д. ($n > 4$) сумма внутренних углов больше суммы внешних углов.

123. Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника $4d$. Если первый из них состоит из 5 частей, а второй — из 7 частей, то третий содержит $7 - 5 = 2$ такие части. Четвертый угол меньше третьего на $\frac{4}{11}d$, поэтому если заменить четвертый угол третьим, сумма внутренних углов составит $4d + \frac{4}{11}d = 4\frac{4}{11}d$. Это число надо разделить пропорционально числам $5:7:2:2$. $\angle 1 = \frac{4\frac{4}{11}d}{5+7+2+2} \cdot 5 = \frac{48d}{16 \cdot 11} \cdot 5 = \frac{3d}{11} \cdot 5 = \frac{15}{11}d = 1\frac{4}{11}d$, $\angle 2 = \frac{3d}{11} \cdot 7 = \frac{21}{11}d = 1\frac{10}{11}d$, $\angle 3 = \frac{3d}{11} \cdot 2 = \frac{6}{11}d$, $\angle 4 = \frac{6}{11}d - \frac{4}{11}d = \frac{2}{11}d$.

124. а) Дано: $KL \perp AB$, $LM \perp BC$, BE и LD — биссектрисы.

Требуется доказать: $BE \parallel LD$ (рис. 58, *a*).

Доказательство. $\angle ABC + \angle KLM = 2d$. Разделив обе части равенства на 2, получим $\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle KLM = d$, т. е. $\angle EBC + \angle DLM = d$. Но из прямоугольного треугольника находим, что $\angle LDC + \angle DLM = d$, поэтому $\angle LDC = \angle EBC$. $BE \parallel LD$ (см. теорему 2 § 17).

б) Дано: $GF \perp OR$, $GH \perp OP$, GT и OS — биссектрисы (рис. 58, *б*).

Требуется доказать: $GT \perp OS$.

Доказательство. $\angle FGH = \angle POR$ (см. примечания 1 и 2 § 19). Но $\angle POR + \angle POQ = 2d$ (как смежные углы), поэтому $\angle FGH + \angle POQ = 2d$. По доказанному в задаче 124(а) биссектрисы $OK \parallel GT$. Но $OK \perp OS$ (см. задачу 19), поэтому $GT \perp OS$ (см. следствие § 18).

125. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = d$, $BD \perp AC$, $AF = FC$, $\angle ABE = \angle CBE$ (рис. 134).

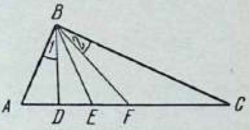


Рис. 134.

Требуется доказать: $\angle DBE = \angle FBE$.

Доказательство. $\angle C + \angle A = d$, $\angle 1 + \angle A = d$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника равна d). Из этих двух равенств следует, что $\angle C = \angle 1$. Но $BF = FC$ (см. задачу 110 (б)) и в равнобедренном треугольнике BFC углы при основании равны: $\angle C = \angle 2$. Из $\angle C = \angle 1$ и $\angle C = \angle 2$ следует: $\angle 1 = \angle 2$. Если из равных углов ABE и CBE вычесть по равному углу 1 и 2, то и получим равные углы: $\angle DBE = \angle FBE$.

126. Задача сводится к построению двух прямоугольных треугольников с общим катетом h_b. Кроме этого катета, в одном из треугольников будет известна еще гипотенуза a, а в другом — противолежащий угол A (если $\angle A > 90^\circ$, то противолежащий угол будет $180^\circ - \angle A$). Зная противолежащий катету угол, можно построить и прилежащий угол $(90^\circ - \angle A)$.

127. а) В параллелограмме могут быть острыми только два угла (противолежащие), а третий угол обязательно будет тупой (с любым из этих острых углов он составляет $2d$, см. теорему 1 § 22). Не может быть в параллелограмме и трех тупых углов, но три прямых угла могут быть.

б) Если бы три угла треугольника были равны трем углам параллелограмма, то сумма внутренних углов треугольника была бы больше $2d$ (среди трех внутренних углов параллелограмма всегда будут два угла, прилежащие к одной стороне и составляющие в сумме $2d$, поэтому сумма трех углов параллелограмма всегда больше $2d$, а в треугольнике — равна $2d$.

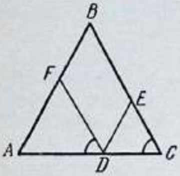


Рис. 135.

в) Могут; такие параллелограммы будут различаться, в частности, углами между соответственно равными сторонами и диагоналями (начертите их).

128. а) Стороны (соседние) параллелограмма образуют с каждой диагональю его треугольники, а каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон (см. § 12). Но треугольник со сторонами 12 *см*, 4 *см* и 7 *см* невозможен, поэтому невозможен и параллелограмм.

б) Параллелограмм с такими сторонами и диагоналями невозможен, так как невозможен треугольник со сторонами 4 *см*, 7 *см* и 3 *см* $(3+4=7)$.

129. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 8$ *дм*, $DE \parallel AB$, $DF \parallel BC$. Определить P_{DFBE} (рис. 135).

Решение. В параллелограмме $DF = BE$, $DE = FB$. $P_{DFBE} = 2DF + 2FB = 2(DF + FB)$. $\angle A = \angle C$ (см. теорему 2 § 8). $\angle ADF = \angle C$ (см. теорему 2 § 18). Из двух последних равенств следует: $\angle ADF = \angle A$. $AF = FD$ (см. теорему 2 § 11). В равенстве $P_{DFBE} = 2(DF + FB)$ заменим DF на AF и получим $P_{DFBE} = 2(AF + FB) = 2AB = 2 \cdot 8 = 16$ (*дм*).

130. Два (из четырех) смежных треугольника в параллелограмме имеют общую сторону и еще по одной равной стороне (половины одной из диагоналей), поэтому разность периметров этих треугольников есть разность их третьих сторон. А этими третьими сторонами являются соседние стороны параллелограмма, поэтому одна из них больше другой на 8 *см*. Сумма этих же сторон параллелограмма есть половина его периметра и равна 30 *см*. По сумме (30 *см*) и разности (8 *см*) легко найти стороны параллелограмма (19 *см* и 11 *см*).

131. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна $2d$, поэтому сумма половин этих углов равна d и угол между биссектрисами также прямой. Сторона параллелограмма является гипотенузой этого прямоугольного треугольника. Меньший катет его равен половине гипотенузы, поэтому меньший острый угол равен 30° (см. задачу 109 (а)). Острые углы параллелограмма имеют по 60°, тупые — по 120°.

132. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $EN \parallel BD$ (рис. 136).

Требуется доказать: $EF = MN$.

Для доказательства рассмотреть четырехугольники $BEFD$ и $BMND$ с общей стороной BD (использовать определение параллелограмма и свойство его сторон, см. § 22).

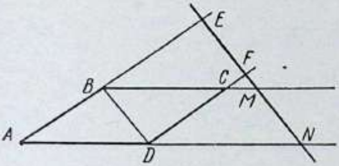


Рис. 136.

133. Диагональ параллелограмма, соединяющая вершины острых углов, лежит в каждом из двух треугольников против тупого угла, поэтому она больше каждой из сторон параллелограмма, лежащих в этих треугольниках против острых углов. Задача решается путем построения треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них (см. задачу 82). Продолжив одну из сторон данного острого угла α за вершину, получим угол $180° - \alpha$, лежащий против данной диагонали b $(b > a)$. Затем из обоих концов диагонали проведем прямые, параллельные противолежащим сторонам вспомогательного треугольника, до взаимного пересечения и получим четвертую вершину искомого параллелограмма. Если b меньше или равна a, то задача не имеет решения. Если $b > a$, то решение единственное.

134. Дано: $ABCD$ — параллелограмм. $BK = BN = DL = DM$.

Требуется доказать: $NKLM$—параллелограмм (рис. 137).

Доказательство. Последовательно соединим точки N, K, L и M. $\triangle NBK = \triangle LDM$ (по двум сторонам и углу между ними — $\angle B = \angle D$; см. § 22 и 9). Отсюда $NK = LM$. $\triangle KCL = \triangle NAM$ ($KC = AM$ — от равных сторон параллелограмма $ABCD$ отняли по равному отрезку BK и DM; аналогично получим, что $CL = AN$; $\angle C = \angle A$). Отсюда $KL = NM$. По признаку параллелограмма (см. теорему 1 § 23) $NKLM$ — параллелограмм.

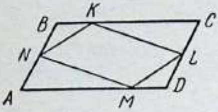


Рис. 137.

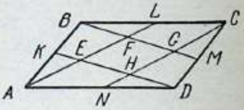


Рис. 138.

135. Дано $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$; K, L, M и N — середины сторон данного параллелограмма (рис. 138).

Требуется доказать: $EFGH$ — параллелограмм.

Доказательство. В четырехугольнике $ALCN$ $LC \parallel AN$ и $LC = AN$ (половины противоположных сторон параллелограмма $ABCD$), поэтому $ALCN$ — параллелограмм (см. теорему 2 § 23) и $AL \parallel CN$. Аналогично доказывается, что $BM \parallel DK$. По определению (§ 22) $EFGH$ — параллелограмм.

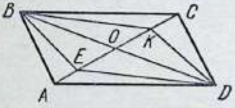


Рис. 139.

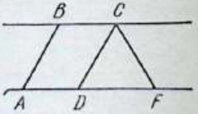


Рис. 140.

136. Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 139), $AE = CK$.

Требуется доказать: $BEDK$ — параллелограмм.

Доказательство: $BO = OD$ (см. теорему 3 § 22) и $AO = OC$. Но $EO = AO - AE$ и $KO = CO - CK$, поэтому $EO = KO$. По признаку параллелограмма (см. теорему 3 § 23) $BEDK$ — параллелограмм.

137. а) Прямая теорема верна, так как такие отрезки являются противоположными сторонами параллелограмма (см. определение и теорему 1 § 22).

б) Обратная теорема неверна. Достаточно привести опровергающий ее пример. Так, на рис. 140 $AB = CF$ ($BC \parallel AF$), но AB не параллелен CF ($AB \parallel CD$).

138. Каждая диагональ разделяет параллелограмм на два треугольника, а две диагонали — на четыре треугольника. Если по данным задачи можно построить один из этих треугольников, то тогда легко достроить его до искомого параллелограмма. В задачах (а), (б) и (в) используется построение треугольника по двум сторонам и углу между ними (см. задачу 6 (а) § 15). В задачах (в) и (д) предварительно нужно разделить данные диагонали пополам (см. задачу 3 § 15). Приходится строить угол, равный данному углу (см. задачу 1 § 15). При построении параллелограмма по условиям задач (г) и (д) используем основную задачу 6 (в) § 15, а в задаче (е) вспомогательный треугольник строится по стороне и двум прилежащим углам (стороной треугольника является данная диагональ параллелограмма, а два угла, образуемые ею с непараллельными сторонами параллелограмма, дают нам два прилежащих к диагонали угла (см. задачу 6 (б) § 15).

139. а) Верно: всякий прямоугольник является одновременно параллелограммом (см. определение 1 § 24).

б) Неверно: параллелограмм с острыми и тупыми углами не является прямоугольником.

в) Верно: каждый ромб является в то же время параллелограммом (см. § 24).

г) Неверно: параллелограмм с неравными смежными сторонами не является ромбом.

140. а) Верно: любой квадрат является одновременно параллелограммом (см. определение 3 § 24).

б) Верно: всякий квадрат есть в то же время прямоугольник (сравните определения 3 и 1).

в) Верно: квадрат всегда является ромбом (сравните их определения).

Обратные утверждения неверны: параллелограмм, прямоугольник или ромб могут и не быть квадратами.

Из верности прямых утверждений следует, что каждый квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба одновременно.

141. а) У прямоугольника противоположные стороны попарно параллельны и равны; противоположные углы равны; углы, прилежащие к одной стороне, в сумме составляют $2d$; диагонали в точке пересечения делятся пополам; все углы прямые и диагонали равны.

б) У ромба все те же, кроме двух последних; все стороны ромба равны, диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

в) У квадрата все те же, что у прямоугольника и у ромба.

142. а) Эту теорему можно назвать признаком прямоугольника.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$ (сделайте чертеж).

Требуется доказать: $ABCD$ — прямоугольник.

Для доказательства рассмотрим треугольники ADB и ACB. У них AB — общая и $AD = BC$ (как противоположные стороны данного параллелограмма), а по условию еще $AC = BD$, поэтому $\triangle ADB = \triangle ACB$ (см. теорему 3 § 9). В равных треугольниках против равных сторон ($BD = AC$) лежат равные углы: $\angle BAD = \angle ABC$. Но эти углы — прилежащие к одной стороне параллелограмма и составляющие в сумме $2d$, а поэтому каждый из них прямой. Противолежащие им углы данного параллелограмма будут также прямые (см. теорему 1 § 22), следовательно, $ABCD$ — прямоугольник (по определению 1 § 24).

б) Таких примеров можно привести много, в частности, равнобочная трапеция (см. § 28) имеет равные диагонали, однако она не является прямоугольником.

143. а) Дано: $ABCD$ — параллелограмм и $AC \perp BD$ (сделайте чертеж).

Требуется доказать: $ABCD$ — ромб.

Пусть O — точка пересечения диагоналей. $AO = OC$ и $BO = OD$ (см. теорему 2 § 22). Четыре прямоугольных треугольника равны: $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$ (см. теорему 1 § 14), а поэтому равны их гипотенузы: $AB = BC = CD = DA$. $ABCD$ — ромб (по определению 2 § 24).

б) Если взять два взаимно перпендикулярных отрезка, которые в точке их пересечения не делятся пополам, и соединить последовательно концы этих отрезков, то полученный четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями не будет ромбом (проекции смежных сторон этого четырехугольника на диагональ не равны, поэтому не равны и сами эти стороны, которые являются наклонными, проведенными из одной и той же точки; см. теорему 4 § 13).

144. Дано: $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$ (рис. 141).

Требуется доказать: $ABCD$ — ромб.

При перегибании чертежа по BD луч BA пойдет по лучу BC, DA — по DC (так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$). Поскольку два луча могут пересечься только в одной точке, то точка A совпадет с точкой C. Следовательно, $BA = BC$ и $DA = DC$. Перегибая чертеж по AC, аналогично докажем, что $AB = AD$ и $BC = DC$. Отсюда $AB = BC = CD = AD$. По первому признаку параллелограмма $ABCD$ — параллелограмм (см. § 23), причем равносторонний, т. е. ромб (по определению).

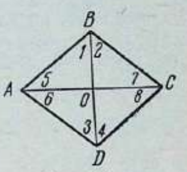


Рис. 141.

145. Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 142), $AB < AD$.

Требуется доказать: $\angle 1 \neq \angle 2$.

В треугольнике ABD против большей стороны ($AD > AB$) лежит больший угол: $\angle 1 > \angle 3$ (см. § 11). Но $\angle 2 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD; см. § 18 и 22). Отсюда $\angle 1 > \angle 2$, $\angle 1 \neq \angle 2$, BD — не биссектриса.

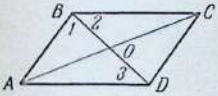


Рис. 142.

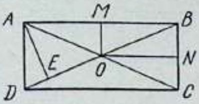


Рис. 143.

146. Дано: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 143), $AE \perp BD$, $\angle BAE : \angle EAD = 3 : 1$.

Определить $\angle EAC$.

$\angle EAD$ составляет 1 часть, $\angle BAE$ — 3 таких части, прямой угол BAD — 4 части. $\angle EAD = \frac{1}{4} d$. Но $\angle EAD + \angle ADE = d$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника AED), откуда $\angle ADE = d - \frac{1}{4} d = \frac{3}{4} d$. Из равенства диагоналей прямоугольника получаем: $AO = DO$. В треугольнике AOD $\angle OAD = \angle ODA = \frac{3}{4} d$. Тогда

$$\angle EAC = \angle OAD - \angle EAD = \frac{3}{4} d - \frac{1}{4} d = \frac{1}{2} d = 45^\circ.$$

147. Дано: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 143), $OM \perp AB$ и $ON \perp BC$, $ON - OM = 4$ *см*, $2AB + 2BC = 56$ *см*.

Определить AB и BC.

$AC = BD$, $BO = CO$. В равнобедренном треугольнике BOC высота ON является и медианой (см. следствие 1 § 8), поэтому $BN = \frac{1}{2} BC$. Аналогично $BM = \frac{1}{2} BA$. $ON \perp BC$ и $MB \perp BC$, поэтому $ON \parallel MB$ (см. теорему § 16). Аналогично $OM \parallel BN$. $OMBN$ — параллелограмм (по определению § 22), а так как углы в нем прямые, то $OMBN$ — прямоугольник (по определению § 24). $OM = BN = \frac{1}{2} BC$ и $ON = MB = \frac{1}{2} AB$. Обозначим $OM = x$. Тогда $ON = x + 4$. $AB = 2MB = 2NO = 2(x + 4)$. $BC = 2BN = 2MO = 2x$. Периметр прямоугольника $2AB + 2BC = 2 \cdot 2(x + 4) + 2 \cdot 2x = 4(x + 4) + 4x = 8x + 16 = 56$; откуда $8x = 56 - 16$; $x = 5$ *см*. $AB = 2(x + 4) = 2(5+4) = 18$ (*см*), $BC = 10$ *см*, $CD = AB = 18$ *см*, $AD = BC = 10$ *см*.

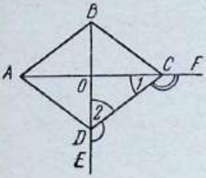


Рис. 144.

148. Дано: $ABCD$ — ромб, $\angle FCD : \angle EDC = 9 : 7$ (рис. 144).

Определить $\angle BCD$ и $\angle ADC$.

$\angle 1 + \angle FCD = 2d$ и $\angle 2 + \angle EDC = 2d$ (смежные углы, § 5). Сложим равенства: $\angle 1 + \angle 2 + \angle FCD + \angle EDC = 4d$. Но $\angle 1 + \angle 2 = d$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника COD). Получаем: $d + \angle FCD + \angle EDC = 4d$ или $\angle FCD + \angle EDC = 3d$. Разделив $3d$ пропорционально числам 9 и 7, получаем: $\angle FCD = \frac{3d}{9+7} \cdot 9 = \frac{27}{16} d = 1\frac{11}{16} d$, $\angle EDC = \frac{3d}{16} \cdot 7 = \frac{21}{16} d = 1\frac{5}{16} d$. Вычислим смежные с ними углы: $\angle 1 = 2d - 1\frac{11}{16} d = \frac{5}{16} d$ и $\angle 2 = 2d - 1\frac{5}{16} d = \frac{11}{16} d$. Так как диагонали делят углы ромба пополам, то $\angle BCD = \frac{5}{16} d \cdot 2 = \frac{5}{8} d$, $\angle ADC = \frac{11}{16} d \cdot 2 = 1\frac{3}{8} d$. $\angle BAD = \frac{5}{8} d$, $\angle ABC = 1\frac{3}{8} d$. (Углы EDC и 2 можно было и не вычислять).

149. Диагональ ромба составляет 25% или $\frac{1}{4}$ от его периметра, равного $2p$. Находим эту диагональ $2p \cdot \frac{1}{4} = \frac{p}{2}$. Но стороны ромба равны и каждая из них составляет также $\frac{1}{4}$ периметра, поэтому сторона ромба равна $\frac{p}{2}$. Половина ромба является равносторонним треугольником, каждый угол которого равен 60°, поэтому острые углы ромба по 60°, и тупые — по 120°.

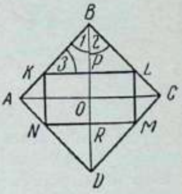


Рис. 145.

150. Дано: $ABCD$ — квадрат (рис. 145), $KLMN$ — прямоугольник, $KL \parallel AC$, $NM \parallel AC$, $KN \parallel BD$, $LM \parallel BD$, $KL = 2KN$, $AC = BD = 12$ *см.*

Определить KL и KN.

$KN = PR$ (как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми KL и NM, см. § 22). $\triangle BPK = \triangle BPL$ (диагонали квадрата $AC \perp BD$, поэтому и $KL \perp BD$; BP — общий катет, $\angle 1 = \angle 2$ — свойство диагонали ромба и квадрата; см. признак 2 § 14). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны: $KP = PL$. Аналогично доказывается, что $NR = RM$. Отсюда получаем $KP = PL = NR = RM$.

$\angle ABC = 90°$, $\angle 1 = 45°$, $\angle 3 = 45°$ (сумма острых углов 1 и 3 прямоугольного треугольника BPK равна 90°). $BP = KP$. Аналогично доказывается, что $DR = NR$.

Сумма двух смежных сторон прямоугольника равна диагонали квадрата: $KN + KL = KN + KP + PL = KN + KP + NR = PR + BP + DR = BD = 12$ *см.* Но $KL = 2KN$, поэтому $KN + 2KN = 12$ *см*, $3KN = 12$ *см*, $KN = 4$ *см*, $KL = 8$ *см*, $NM = 8$ *см*, $LM = 4$ *см.*

151. Больший из двух данных отрезков (сумму диагоналей прямоугольника) разделим пополам и получим диагональ. Разделим эту диагональ пополам. Построим треугольник по трем сторонам: по данной стороне прямоугольника и по двум другим сторонам, каждая из которых равна половине диагонали. Легко достроить этот равнобедренный треугольник до искомого прямоугольника. Задача имеет единственное решение, если меньший из двух данных отрезков (сторона прямоугольника) меньше половины большего из данных отрезков (суммы диагоналей). В противном случае задача решения не имеет (почему?).

152. Пусть даны угол A и высота h (рис. 146). Возьмем какую-нибудь точку некоторой прямой MN и построим угол, равный данному углу A (см. задачу 1 § 15). Из произвольной точки (B) прямой MN восставим перпендикуляр (см. задачу 4 § 15) и отложим на нем данную высоту ромба h. Через вершину перпендикуляра (K) проведем прямую, параллельную MN. Точка L — вторая вершина ромба, отрезок AL — сторона искомого ромба. Теперь легко получить две другие вершины и весь ромб, а затем доказать, что он удовлетворяет всем требованиям задачи. Задача всегда имеет единственное решение, если данный угол меньше развернутого угла.

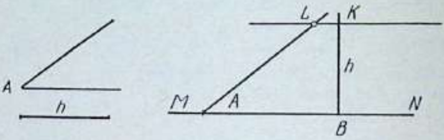


Рис. 146.

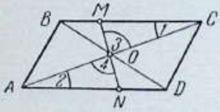


Рис. 147.

153. Возьмем вершины параллелограмма. Относительно точки O (рис. 147) симметричными будут точки A и C, B и D (см. определение 1 § 25 и теорему 2 § 22). Возьмем какую-нибудь точку (M) на стороне параллелограмма, соединим ее с точкой O и продолжим MO до пересечения с противоположной стороной в точке N. Докажем, что $MO = ON$, т. е. что на сторонах параллелограмма для любой точки найдется симметричная ей точка относительно точки пересечения диагоналей. $\triangle AON = \triangle COM$ ($AO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$, $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные; см. теорему 2 § 9). Итак, параллелограмм — центрально симметричная фигура (см. определение 2 § 25), а точка пересечения диагоналей — его центр симметрии.

154. а) Точки M и N — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ (рис. 148). Докажем, что MN перпендикулярна BC и AD. $MC = ND$ (как половины равных сторон BC и AD) и $MC \parallel ND$, поэтому $MCDN$ — параллелограмм (см. теорему 2 § 23). Но $\angle C = \angle D = 90°$, поэтому и противоположные им углы CMN и MND также прямые (см. § 22), т. е. $MCDN$ — прямоугольник. Перегнем чертеж по MN. BM пойдет по MC (так как углы CMN и BMN — прямые и совместятся) и точка B совпадет с точкой C (так как $BM = MC$). Аналогично убеждаемся в том, что и точка A совпадет с точкой D. BA совместится с CD. $MBAN$ и $MCDN$ — симметричные фигуры относительно прямой MN (см. определение § 8), и MN — ось симметрии прямоугольника $ABCD$. Аналогично доказывается, что прямая, проходящая через середины двух других сторон прямоугольника, также является его осью симметрии.

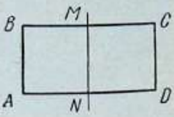


Рис. 148.

б) Так как диагональ ромба делит его противоположные углы пополам, то при перегибании чертежа по диагонали равные половины углов ромба совместятся и совместятся также два треугольника, на которые разбивается ромб диагональю.

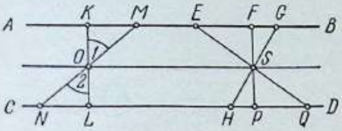


Рис. 149.

155. а) В треугольнике нет центра симметрии — в этом нетрудно убедиться на чертеже.

б) В круге имеется центр симметрии, причем единственный — центр круга. Всякий диаметр делится центром пополам.

в) Даны параллельные прямые AB и CD (рис. 149), которые имеют ось симметрии OS (см. задачу 99 (а)). Возьмем на OS какую-нибудь точку, например O, и проведем через нее перпендикуляр KL к данным параллельным прямым. Точки K и L симметричны относительно точки O. Для каждой точки на одной из данных прямых (например, M на AB) найдется на другой прямой (CD) симметричная точка (N) относительно центра симметрии O. Через точки M и O проведем прямую, которая пересечет CD в точке N. Докажем, что $OM = ON$. Прямоугольные треугольники OKM и OLN равны по катету ($OK = OL$) и прилежащему острому углу ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные), а поэтому равны и их гипотенузы: $OM = ON$. Итак, точка O — центр симметрии параллельных прямых AB и CD. Но таким же свойством обладает и любая другая точка оси симметрии OS. Так, если за центр симметрии принять S, то симметричными точками будут F и P, E и Q, G и H и т. д. Следовательно, две параллельные прямые имеют бесконечно много центров симметрии, расположенных на оси симметрии.

156. Каждая из задач начинается с построения треугольника:

а) по двум катетам (задача 7 (а) § 15);

б) по гипотенузе и острому углу (7 (в));

в) по катету и гипотенузе (7 (г));

г) по двум сторонам (половинам диагоналей) и углу между ними (6 (а)).

Достраивать полученный треугольник до искомого прямоугольника можно различными способами (так, в задачах (а), (б) и (в) можно использовать построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку). Однако проще это сделать построением треугольника, равного первому.

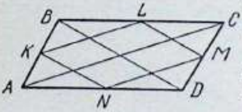


Рис. 150.

157. $AM = CN$ (как половины равных сторон параллелограмма $ABCD$) и $AM \parallel CN$, поэтому $AMCN$ — параллелограмм (см. § 23) и $MC \parallel AN$. Так как на стороне BA угла ABD отложены равные отрезки BM и MA и через их концы проведены $MF \parallel AE$, то и на другой стороне $BF = FE$. Аналогично на сторонах угла CDB: $DN = NC$, $NE \parallel CF$ и $DE = EF$. Отсюда $BF = FE = ED = 7$ *см*, $BD = 21$ *см*.

158. а) $ABCD$ — параллелограмм (рис. 150). K, L, M и N — середины его сторон. LM — средняя линия треугольника BCD, поэтому $LM \parallel BD$ и $LM = \frac{1}{2} BD$. В тре-

угольнике ABD имеем: $KN \parallel BD$ и $KN = \frac{1}{2} BD$. Отсюда $LM \parallel KN$ и $LM = KN$, поэтому $KLMN$ — параллелограмм (см. § 23).

Для решения остальных задач отметим, что $KL \parallel NM$ и $KL = NM = \frac{1}{2} AC$.

б) Так как прямоугольник является параллелограммом, то по задаче (а) имеем, что интересующий нас четырехугольник также параллелограмм. Поскольку диагонали прямоугольника равны, то вписанный в прямоугольник параллелограмм равносторонний, т. е. ромб. (Чертежи к задачам (б), (в) и (г) сделайте самостоятельно.)

в) Поскольку диагонали ромба взаимно перпендикулярны, а стороны вписанного в ромб параллелограмма параллельны диагоналям ромба, то интересующий нас четырехугольник — прямоугольник.

г) Так как квадрат является одновременно параллелограммом, прямоугольником и ромбом, то интересующий нас четырехугольник является одновременно параллелограммом (см. задачу (а)), ромбом (см. задачу (б)) и прямоугольником (см. задачу (г)), т. е. является квадратом.

159. а) Надо взять произвольный четырехугольник (не параллелограмм). Доказывается аналогично задаче 158 (а).

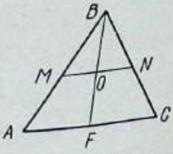


Рис. 151.

б) Используйте доказанное в задаче 159 (а) и свойство диагоналей параллелограмма (см. § 22).

Убедитесь в том, что оба утверждения верны и для любого невыпуклого (вогнутого) четырехугольника (см. § 21).

160. Дано: $\triangle ABC$, $AM = MB$, $CN = NB$, $AF = FC$. Требуется доказать: $MO = ON$, $BO = OF$ (рис. 151). $MN \parallel AC$ (см. теорему § 27). На стороне BA угла ABF отложены $BM = MA$ и через их концы проведены $MO \parallel AF$, то на другой стороне угла $BO = OF$ (см. теорему § 26). Следовательно, MO — средняя линия треугольника ABF (см. определение § 27). $MO = \frac{1}{2} AF$. Аналогично доказываем: $NO = \frac{1}{2} CF$. Но $AF = CF$, поэтому $MO = NO$.

161. Пусть дана прямая MN и точка A вне ее (рис. 152). Построим такой треугольник, чтобы одна его сторона находилась на прямой MN, а из точки A исходила средняя линия этого треугольника, соединяющая середины двух других его сторон. Вершины K и L этого треугольника на прямой MN возьмем произвольно. Так как точка A должна быть серединой одной из сторон, то проведем луч KA и отложим отрезок AC, равный AK. Соединим C с L и разделим отрезок CL пополам (см. задачу 3 § 15): $CB = BL$. Прямая AB параллельна данной прямой MN.

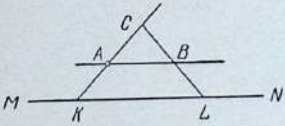


Рис. 152.

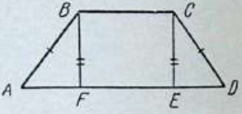


Рис. 153.

162. **а)** Два угла любой трапеции, прилежащие к одной и той же боковой стороне, являются внутренними односторонними углами при параллельных прямых (основаниях трапеции) и секущей (боковой стороне), поэтому их сумма всегда равна 180° (см. теорему 3 § 18).

б) Если опустить перпендикуляры с концов меньшего основания на большее основание трапеции, то они будут равны: $BF = CE$ (рис. 153). Кроме того, $AB = CD$ (по определению 3 § 28). $\triangle ABF = \triangle CED$ (по катету и гипотенузе, см. § 14), а в них $\angle A = \angle D$ и $\angle C = \angle B$. Если к $\angle C$ и $\angle B$ этих треугольников прибавить по прямому углу, то получим равные углы равнобедренной трапеции при меньшем основании.

в) Так как во всякой трапеции углы, прилежащие к одной боковой стороне, в сумме составляют $2d$, то если один угол прямой — другой угол при той же боковой стороне также прямой. Но при другой боковой стороне той же прямоугольной трапеции прямых углов не будет, так как только одна боковая сторона перпендикулярна к основаниям (см. определение 3 § 28).

163. Дано: $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BF \perp AD$, $AM = MB$, $CN = ND$ (рис. 154).

Требуется доказать: $AL = LC$, $BP = PD$, $BK = KF$.

Доказательство. Так как $MN \parallel AD$ (см. теорему § 28), $CN = ND$, то и на другой стороне угла DCA получаем: $CL = LA$. Аналогично на сторонах угла ABD имеем: $BP = PD$, а на сторонах угла ABF также $BK = KF$.

165. Дано: $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, точка F пересечения биссектрис находится на BC.

Требуется доказать: $BC = BA + CD$ (рис. 155).

Доказательство. $\angle 5 = \angle 2$ и $\angle 6 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$. Так как $\angle 1 = \angle 2$ (по условию) и $\angle 5 = \angle 2$, то $\angle 1 = \angle 5$ и $BF = BA$. Из равенств $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 6 = \angle 4$ следует: $\angle 3 = \angle 6$ и $CF = CD$. $BC = BF + FC = AB + CD$.

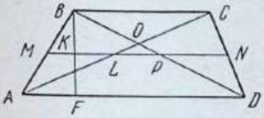


Рис. 154.

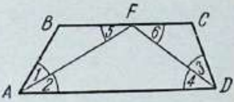


Рис. 155.

166. Дано: $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle A + \angle BCD = 2d$ (рис. 153).

Требуется доказать: $AB = CD$.

Доказательство. $\angle BCD + \angle D = 2d$ (см. задачу 162 (а)), отсюда $\angle D = 2d - \angle BCD$. Из условия $\angle A = 2d - \angle BCD$. Получаем: $\angle D = \angle A$. Если проведем $BF \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BF = CE$ (расстояние между параллельными прямыми постоянное; см. задачу 98 (б)). Из равенства противолежащих катетам BF и CE углов A и D следует, что равны и прилежащие острые углы этих прямоугольных треугольников: $\angle ABF = \angle DCE$. $\triangle ABF = \triangle DCE$ (по катету и прилежащему острому углу; см. § 14), а поэтому равны и их гипотенузы: $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная (по определению 3 § 28).

167. Дано: $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, MN — средняя линия трапеции (рис. 156).

Требуется доказать: $BF \perp AF$, точка F лежит на MN.

Доказательство. $\angle A + \angle B = 2\angle 1 + 2\angle 4 = 2(\angle 1 + \angle 4) = 2d$ (см. задачу 162 (а)). $\angle 1 + \angle 4 = \frac{2d}{2} = d$.

Но $\angle 1 + \angle 4 + \angle AFB = 2d$ (см. теорему § 20). Заменим сумму углов 1 и 4 через d; $d + \angle AFB = 2d$, откуда $\angle AFB = d$, т. е. $BF \perp AF$. Середину M стороны AB соединим с F. Медиана FM к гипотенузе AB равна половине гипотенузы: $FM = AM = MB$ (см. задачу 110 (б)). В равнобедренном треугольнике AMF $\angle 5 = \angle 1$. Но $\angle 2 = \angle 1$, поэтому $\angle 5 = \angle 2$, откуда $FM \parallel AD$ (см. теорему 1 § 17). Итак, MF исходит из середины стороны AB параллельно AD. Но средняя линия проходит через ту же точку M и параллельна той же прямой AD. Так как через точку M можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой AD, то MF лежит на средней линии трапеции (см. теорему § 28 и аксиому § 16).

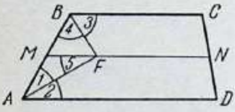


Рис. 156.

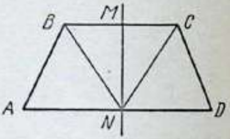


Рис. 157.

168. а) Осью симметрии в равнобедренной трапеции является прямая MN, проходящая через середины оснований (рис. 157).

Докажем, что MN перпендикулярна к основаниям трапеции. $AN = ND$ (по условию), $AB = DC$ (по определению 3 § 28), $\angle A = \angle D$ (см. задачу 162 (б)). $\triangle ABN = \triangle DCN$ (см. теорему 1 § 9). Но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны: $BN = CN$. $\triangle BMN = \triangle CMN$ (по трем сторонам, см. § 9), а в них против равных сторон лежат равные углы: $\angle BMN = \angle CMN$. Так как эти два равных угла смежные (см. § 5), то каждый из них прямой, т. е. $MN \perp BC$. Но $AD \parallel BC$, поэтому $MN \perp AD$ (см. следствие § 18).

При перегибании чертежа по MN MB пойдет по MC и NA по ND (прямые углы при MN совместятся), совпадут точки B с C и A с D и стороны AB с DC. Так как равнобедренная трапеция состоит из двух симметричных относительно MN частей (см. определение § 8), то MN — ее ось симметрии.

б) Неравнобедренная трапеция оси симметрии не имеет, так как перегибанием по какой-нибудь прямой, очевидно, нельзя совместить ее части между собой.

в) В трапеции нет центра симметрии, так как нельзя найти точку внутри ее, которая являлась бы общей серединой всех проходящих через нее отрезков, соединяющих точки на сторонах трапеции (см. определения § 25).

169. Средняя линия трапеции делит диагональ пополам (см. задачу 163), поэтому каждый из отрезков средней линии (длиною в 4 *см* и в 10 *см* является средней линией одного из двух треугольников, на которые трапеция разделена диагональю. Следовательно, основания трапеции будут 8 *см* и 20 *см* (см. теорему § 27): $EN = 4$ *см*, $EN = \frac{1}{2} BC$, $BC = 2EN = 8$ *см*, $EM = 10$ *см*, $AD = 2EM = 20$ *см* (рис. 158).

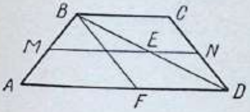


Рис. 158.

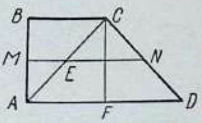


Рис. 159.

Проведем $BF \parallel CD$; $BF = CD = 12$ *см* (как противоположные стороны параллелограмма $BCDF$). $FD = BC = 8$ *см*, $AF = AD - FD = 20 - 8 = 12$ (*см*). $AB = 12$ *см*. $\triangle ABF$ — равносторонний. $\angle A = 60°$ (см. задачу 106 (г)). $\angle ADC = 60°$, $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$, $\angle BCD = 120°$.

170. Если проведем диагональ, которая соединяет вершины прямого и острого углов, то трапеция разделится на два треугольника (прямоугольный и тупоугольный), ни один из которых не может быть равносторонним. Поэтому нужно провести другую диагональ, соединяющую вершины прямого и тупого углов. Остроугольный $\triangle ACD$ — равносторонний (рис. 159): $AC = CD = AD = a$. $BC \parallel AD$, $AB \perp BC$. $AM = MB$, $CN = ND$. Требуется определить MN.

$AE = EC$ (см. задачу 163). EN — средняя линия треугольника ACD (см. определение § 27). $EN = \frac{1}{2} AD =$

$= \frac{a}{2}$ (см. теорему § 27). $ME = \frac{1}{2} BC$ (как средняя линия треугольника ABC). Проведем высоту CF, которая будет являться и медианой равностороннего треугольника ACD (см. § 8). $AF = FD = \frac{a}{2}$. $ABCF$ — прямоугольник, $BC = AF = \frac{a}{2}$. Тогда $ME = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{4}$. $MN = ME + EN = \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{3}{4} a$.

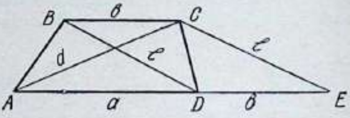


Рис. 160.

172. Обозначим большее основание равнобедренной трапеции через x, меньшее — через y. Тогда каждая боковая сторона равна y. Периметр трапеции выразится так: $x + 3y$, а по условию $x + 3y = 28$. Средняя линия трапеции равна $\frac{x + y}{2} = 9$.

$$\begin{cases} x + 3y = 28, \\ x + \ \ y = 18. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $2y = 10$, откуда $y = 5$.

Ответ: меньшее основание трапеции равно 5 *см*.

174. Анализ проведите самостоятельно (см. задачу 173). Пусть $ABCD$ — искомая трапеция. Параллельным перенесением диагонали BD в положение CE получаем $\triangle ACE$, у которого известны стороны d и l, а третья сторона AE равна сумме отрезков $a = AD$ и $b = DE = BC$ (рис. 160).

Построение. На некоторой прямой MN от точки A отложим последовательно отрезки a и b: $AD = a$, $DE = b$ (рис. 161). Описываем дуги радиусами $AC = d$ и $EC = l$. Чтобы сделать параллельное перенесение отрезка EC в положение DB, опишем дуги радиусами $CB = b$ и $DB = l$. Полученную при этом точку B соединяем с A и C.

Легко доказать, что построенная трапеция *ABCD* удовлетворяет всем требованиям задачи.

Треугольник *ACE* можно построить, если заданные отрезки удовлетворяют условию: $a + b < d + l$. В этом случае задача имеет единственное решение. Если указанное условие не выполняется, то задача не имеет решения.

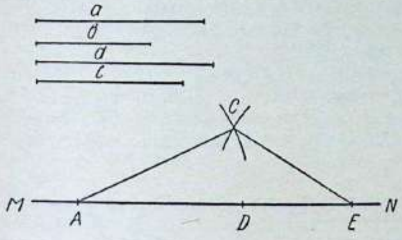


Рис. 161.

175. Анализ. Пусть трапеция *ABCD* (рис. 162) — искомая. В трапеции нет треугольника, который можно было бы построить (ни в одном из них не хватает данных). То же самое будет, если разделить трапецию на треугольник и параллелограмм. Сделаем параллельное перенесение диагонали *BD* в положение *CE*. Тогда две известные диагонали будут являться сторонами треугольника *ACE*, для построения которого нужен еще один элемент. Данный угол α не является углом этого треугольника, однако его внешний угол при вершине *C* равен α (см. теорему 2 § 18). Следовательно, внутренний угол *ACE* между известными сторонами равен 180° — α, поэтому и весь △ *ACE* можно построить.

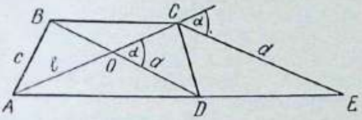


Рис. 162.

Чтобы от треугольника ACE перейти к трапеции $ABCD$, из точки C проведем прямую, параллельную AE, затем из вершины A радиусом $AB = c$ опишем дугу, пересекающую CB в точке B. Для получения четвертой вершины (D) трапеции достаточно сделать обратное параллельное перенесение диагонали d: из положения CE в положение BD (измерим циркулем CB и отложим от точки E отрезок ED, равный отрезку CB).

Построение. На прямой MN (рис. 163) от точки K отложим отрезок $KH = l$, а при его продолжении и вершине H построим угол, равный α (см. задачу 1 § 15). Отложим $HL = d$ (вторая диагональ после параллельного перенесения, см. анализ). Соединим точки K и L и проведем прямую через H, параллельную KL (см. задачу 90); $HG \parallel KL$. Из точки K радиусом $KF = c$ сделаем засечку и получим третью вершину F трапеции (две другие вершины трапеции — K и H). Сделаем параллельное перенесение диагонали HL в положение FE (от L отложим на LK отрезок LE, равный HF). Теперь соединим E с H и получим искомую трапецию $KEHF$.

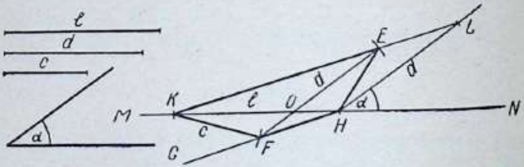


Рис. 163.

Доказательство. $HF \parallel KE$ (по построению), KF не параллельна EH, поэтому $KEHF$ — трапеция (см. определение 1 § 28). $KH = l$ и $KF = c$ (по построению). $FELH$ — параллелограмм ($LE \parallel HF$ и $LE = HF$ — по построению; см. признак 2 § 23), поэтому $FE = HL = d$ и $FE \parallel HL$. $\angle EON = \angle LHN = \alpha$ (см. теорему 2 § 18). Следовательно, построенная трапеция действительно искомая, так как она удовлетворяет всем требованиям задачи.

176. а) Через одну данную точку можно провести бесконечно много окружностей. Центром окружности, проходящей через данную точку, может быть любая точка плоскости, кроме данной точки.

б) Через две данные точки плоскости можно провести в этой плоскости также бесконечно много окружностей; центры их располагаются на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка с концами в данных точках (см. п. 8 § 15).

177. Если даны три точки, не лежащие на одной прямой, то отрезки, соединяющие данные точки, образуют треугольник. В § 29 мы доказали, что через три вершины треугольника всегда можно провести окружность, притом только одну, и центр ее будет находиться на пересечении двух перпендикуляров, проведенных через середины двух сторон треугольника. Докажем, что и третий перпендикуляр, проходящий через середину третьей стороны, пройдет через центр окружности, проведенной через вершины данного треугольника. Центр окружности одинаково удален от концов каждой стороны треугольника, а такая точка всегда принадлежит серединному перпендикуляру каждой стороны треугольника (см. задачу 76(б)).

178. а) Можно провести окружность через четыре вершины любого прямоугольника, притом только одну, потому что существует единственная точка, одинаково удаленная от всех вершин прямоугольника. Это — центр симметрии прямоугольника, точка пересечения его диагоналей. Действительно, диагонали прямоугольника равны и делятся в точке пересечения пополам. Так как половины равных отрезков равны, то все вершины прямоугольника удалены от его центра симметрии одинаково (на полудиагональ).

б) Так как речь идет о параллелограмме, то мы должны взять наиболее общий тип его (не имеем права взять какой-нибудь частный вид его, например, прямоугольник или квадрат). Рассматриваем параллелограмм с двумя острыми и двумя тупыми углами. Он имеет центр симметрии (точка пересечения диагоналей), однако от него одинаково удалены только противоположные вершины, а не все четыре вершины параллелограмма.

Эти наши рассуждения еще не являются строгим доказательством того, что через все вершины параллелограмма нельзя провести окружность. Строже доказать это можно так. Центр окружности, проходящей через все вершины параллелограмма (если она существует), одинаково удален от всех этих вершин, а поэтому лежит на серединном перпендикуляре любой его стороны. Следовательно, серединные перпендикуляры всех сторон обязательно должны пересекаться, причем в одной точке. Но в параллелограмме серединные перпендикуляры противоположных сторон вообще не пересекаются (параллельны; см. следствие § 18 и теорему § 16).

Итак, через все вершины параллелограмма с непрямыми углами нельзя провести окружность.

в) Через все вершины ромба провести окружность невозможно (имеется в виду наиболее общий вид ромба — с непрямыми углами). Доказательство такое же, как и для параллелограмма (см. задачу (б)).

Через четыре вершины любого квадрата можно провести окружность, причем только одну (квадрат всегда является прямоугольником; см. задачу (а)).

г) Через все вершины трапеции (имеется в виду непрямоугольная и неравнобедренная трапеция) провести окружность невозможно (как и в параллелограмме; см. задачу (б)).

То же и для прямоугольной трапеции.

Через четыре вершины любой равнобедренной трапеции можно провести окружность, причем только одну. Серединные перпендикуляры оснований ее совпадают и являются осью симметрии, поэтому серединные перпендикуляры боковых сторон пересекутся на оси симметрии (можно убедиться перегибанием чертежа по оси симметрии).

179. Чтобы найти центр данной окружности, надо взять на ней три произвольные точки, соединить их двумя хордами и построить серединные перпендикуляры этих хорд (см. задачу 3 § 15). Перпендикуляры обязательно пересекутся (так как точки не лежат на одной прямой) в точке, которая является центром окружности, проходящей через три взятые точки (см. задачу § 29). Но через три точки можно провести только одну окружность, поэтому окружность, центр которой мы построили, совпадает с данной окружностью. Центры совместившихся окружностей совпадают, поэтому точка пересечения перпендикуляров является искомым центром данной окружности.

Аналогично находится и центр данной дуги.

180. а) Дано: $AF = FB$ (рис. 164).

Требуется доказать: $CD \perp AB$, $\smile AD = \smile DB$, $\smile AC = \smile CB$.

Доказательство. $OA = OB$ (радиусы). $\triangle AOB$ — равнобедренный. Медиана OF является и высотой: $OF \perp AB$ (см. § 8). $\smile AD = \smile DB$ и $\smile AC = \smile CB$ (по теореме 1 § 30).

б) Дано: $\smile AD = \smile DB$ (рис. 164).

Требуется доказать: $AF = FB$, $CD \perp AB$.

Доказательство. $\triangle AOB$ — равнобедренный ($AO = OB$). Из равенства $\smile AD = \smile DB$ следует: $\angle 1 = \angle 2$ (см. теорему § 6). Биссектриса OF является высотой и медианой: $OF \perp AB$ и $AF = FB$ (см. § 8).

181. а) Пусть $\smile AB = 120^\circ$ (рис. 164). Расстояние от точки до прямой измеряется по перпендикуляру (см. определение 5 § 13). Пусть $OF \perp AB$. $OF = 5$ *см*.

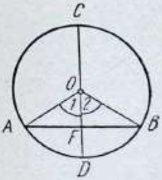


Рис. 164.

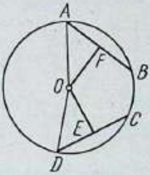


Рис. 165.

Продолжив OF, получим диаметр CD, перпендикулярный к хорде AB. $\smile AD = \smile DB$ (см. теорему 1 § 30). $\smile AD = \frac{1}{2} \smile AB = 60^\circ$. $\angle 1 = 60^\circ$ (см. § 33). В прямоугольном треугольнике AOF $\angle A = 30^\circ$ (см. задачу 106 (б)). Катет $FO = \frac{1}{2}OA$ или $OA = 2FO$. $OA = 10$ *см*.

б) Решается аналогично задаче (а).

Ответ: $2m$.

182. а) Дано: $AB = CD$, $OF \perp AB$, $OE \perp CD$ (рис. 165).

Требуется доказать: $OF = OE$.

Доказательство. $AF = \frac{1}{2}AB$ и $DE = \frac{1}{2}DC$ (см. теорему 1 § 30). $AF = DE$ (как половины равных хорд). Прямоугольные треугольники OFA и OED равны (по гипотенузе и катету, см. § 14). $OF = OE$.

б) Дано: $OF \perp AB$ и $OE \perp CD$, $OF = OE$ (рис. 165).

Требуется доказать: $AB = CD$.

Доказательство. Прямоугольные треугольники OFA и OED равны ($OA = OD$ как радиусы, $OF = OE$ по условию, см. теорему 4 § 14). Равны и другие их катеты: $AF = DE$. Но $AB = 2AF$ и $DC = 2DE$, поэтому $AB = DC$.

183. а) Дано: $AB \perp CD$. $AF = CF = 3$ *см*, $BF = DF = 7$ *см*, $OE \perp CD$, $OG \perp AB$ (рис. 166).

Определить OE и OG.

$AB = AF + FB = 10$ *см*. $AG = GB$ (см. теорему 1 § 30). $AG = 5$ *см*, $FG = AG - AF = 2$ *см*. $EF \parallel OG$ (см. теорему § 16). $GF \parallel OE$. $OE = FG = 2$ *см* (отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными прямыми, равны; см. § 22). $OG = OE$ (см. задачу 182 (а)), $OG = 2$ *см*.

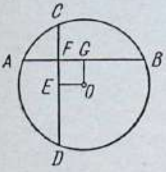


Рис. 166.

б) Расстояния от центра до хорд измеряются по перпендикулярам, которые делят хорды пополам. Половины хорд равны данным расстояниям (6 *см* и 10 *см*), поэтому длины хорд 12 *см* и 20 *см*.

Ответ: хорда, удаленная от центра на 6 *см*, равна 20 *см*; хорда, удаленная на 10 *см*, равна 12 *см*.

184. Хорда, равная радиусу, если ее концы соединить с центром, является стороной равностороннего треугольника. Центральный угол против нее равен 60°, а поэтому отсекаемая хордой дуга содержит 60° (см. § 33).

Если провести радиус в конец другой хорды, то он образует с этой хордой угол в 30° (см. задачу 109 (а)). Большая из данных хорд стягивает дугу в 120°. Из всей окружности вычтем две найденные дуги: $360° - 60° - 120° = 180°$. Но две оставшиеся дуги равны (см. теорему 2 § 30), и каждая из них составляет: $180° : 2 = 90°$ (чертеж сделайте самостоятельно).

185. а) Проведем диаметр AB, перпендикулярный хорде MN. AB разделит MN пополам (см. теорему 1 § 30). Но AB будет перпендикуляром и ко всем другим хордам, параллельным MN (см. следствие § 18), поэтому AB пройдет также через середины всех данных хорд. Диаметр AB и будет искомым геометрическим местом точек.

б) Если хорда $n < 2R$, то все эти равные хорды будут одинаково удалены от центра (см. задачу 182 (а)). Основания перпендикуляров, опущенных из центра на хорды, будут находиться на серединах хорд (см. теорему 1 § 30). Следовательно, середины этих хорд будут находиться на одинаковом расстоянии от центра данной окружности. Они образуют свою окружность с тем же центром и радиусом, равным расстоянию хорды n от центра. Таких хорд с данной длиной n в данной окружности будет бесконечно много.

Если $n = 2R$, то все данные хорды будут диаметрами данной окружности и геометрическое место середин будет состоять из одной только точки — центра данной окружности.

Если $n > 2R$, то задача не имеет смысла (диаметр — самая большая хорда, см. § 6).

186. а) Основания трапеции — параллельные хорды окружности, и дуги, заключенные между ними, равны (см. теорему 2 § 30). Хорды, стягивающие эти равные дуги, также равны (см. теорему 1 § 31) и являются боковыми сторонами трапеции, поэтому трапеция равнобедренная (см. определение 3 § 28).

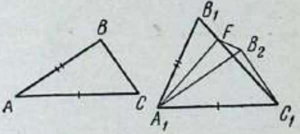


Рис. 167.

б) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны (см. теорему 1 § 22), поэтому стягиваемые ими дуги также попарно равны (см. теорему 2 § 31). Пусть дуга, стягиваемая большей стороной, равна x, а дуга, стягиваемая меньшей стороной, равна y. Получим полную окружность: $2x + 2y = 2(x + y) = 360^\circ$ (см. § 33). Отсюда $x + y = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$, т. е. дуги, стягиваемые смежными сторонами, составляют в сумме полуокружность. А концы полуокружности соединяет всегда диаметр, поэтому диагонали данного параллелограмма — диаметры данной окружности — равны между собой. Следовательно, данный параллелограмм есть прямоугольник (см. признак прямоугольника, задача 142(а)).

187. а) Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 167), $AC = A_1C_1$ и $AB = A_1B_1$, $\angle B_1A_1C_1 > \angle BAC$.

Требуется доказать: $B_1C_1 > BC$.

Доказательство. Построим угол $C_1A_1B_2$, равный углу CAB, отложим A_1B_2, равный AB, и соединим B_2 с C_1. $\triangle A_1B_2C_1 = \triangle ABC$ (по двум сторонам и углу между ними, см. § 9). Проведем биссектрису A_1F угла $B_1A_1B_2$ и т. д. (см. доказательство теоремы 3 § 31).

б) Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB = A_1B_1$, $B_1C_1 > BC$ (рис. 167).

Требуется доказать: $\angle B_1A_1C_1 > \angle BAC$.

Доказательство (от противного). Допустим, что $\angle B_1A_1C_1$ не больше $\angle BAC$. Тогда могут быть только два случая: или $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ или $\angle B_1A_1C_1 < \angle BAC$. Однако если бы эти углы были равны, то были бы равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (см. § 9), а в них и стороны BC и B_1C_1, что противоречит условию доказываемой теоремы. Невозможен и второй случай ($\angle B_1A_1C_1 < \angle BAC$), ибо тогда по прямой теореме (задача 182 (а)) сторона B_1C_1 была бы меньше BC, что также противоречит условию. Следовательно, допущение ($\angle B_1A_1C_1$ не больше $\angle BAC$) неверно. Остается верным лишь то, что $\angle B_1A_1C_1$ больше угла BAC, что и требовалось доказать.

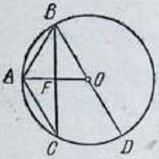


Рис. 168.

188. Через середину данной хорды проведем диаметр, который будет перпендикулярен к AB (см. задачу 180 (а)). Каждая из двух хорд, проведенных через точки D и E перпендикулярно AB, будет параллельна диаметру (см. теорему § 16). Равные отрезки, отложенные от середины хорды, будут являться расстояниями от центра до двух хорд, перпендикулярных AB. Из равенства этих расстояний следует равенство хорд (чертеж сделайте самостоятельно). Можно доказать это иначе — перегибанием чертежа по диаметру.

189. Дано: $AB = AC = 3$ *дм*, $BD = 0{,}6$ *м*, $OF \perp BC$.

Определить OF (рис. 168).

$AB = AC$, поэтому $\smile AB = \smile AC$ (см. теорему 2 § 31). Так как $OF \perp BC$, то продолжение OF разделит дугу BC пополам, т. е. пройдет через середину A дуги BC (см. теорему 1 § 30). Радиус $OB = 0{,}3$ *м* $= 3$ *дм*. $AB = BO = OA = 3$ *дм*. $\angle ABO = 60^\circ$ (см. задачу 106 (г)). $BF \perp OA$, а высота BF равностороннего треугольника является и медианой (см. § 8), поэтому $FO = \frac{1}{2} AO = 1{,}5$ *дм*.

190. Пусть дано общее основание треугольников — отрезок a и отрезок m, равный медиане всех треугольников, проведенной к общему основанию (рис. 169). $AB = a$ — общее основание треугольников ABC, ABC_1, ABC_2 и т. д., вершины которых находятся на окружности с центром в середине основания и радиусом, равным данной медиане $m = OC = OC_1 = OC_2$ и т. д. Вершина треугольника, противоположная основанию AB, может быть в любой точке этой окружности, кроме двух точек M и N, так как в этих двух случаях все три вершины треугольника оказываются на одной прямой (A, B и M или A, B и N) и треугольника не существует.

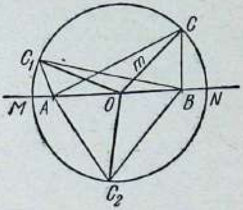


Рис. 169.

191. а) Проведем радиус OC и восставим к нему перпендикуляр CD (см. задачу 4 § 15). По теореме 1 (§ 32) получаем, что CD — касательная к окружности (рис. 170).

б) Из центра O опустим перпендикуляр на данную прямую AB (см. задачу 5 § 15): $ON \perp AB$ (рис. 170). Через точку M проведем прямую, параллельную AB (см. задачу 90): $MF \parallel AB$. Тогда $MF \perp OM$ (см. следствие § 18). MF — касательная (см. теорему 1 § 32).

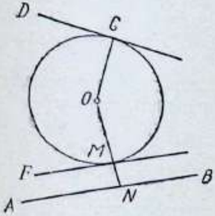


Рис. 170.

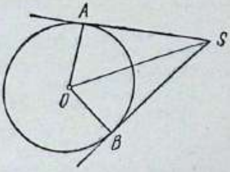


Рис. 171.

192. Диаметр, проведенный через точку касания, будет перпендикулярен к касательной (см. теорему 2 § 32), а поэтому он будет перпендикулярен к хорде (см. следствие § 18). А такой диаметр делит дугу, стягиваемую хордой, пополам (см. теорему 1 § 30).

193. Дано: окружность O, SA и SB — касательные, A и B — точки касания.

Требуется доказать: $SA = SB$ и $\angle ASO = \angle OSB$ (рис. 171).

$OA \perp AS$ и $OB \perp BS$ (см. теорему 2 § 32). Прямоугольные треугольники OAS и OBS равны ($OA = OB$, OS — общая; см. теорему 4 § 14), а в них $SA = SB$ и $\angle ASO = \angle OSB$.

194. а) $FA = FC$ (см. задачу 193) и $FB = FD$ (рис. 78, *а*), поэтому $AB = CD$ (как суммы соответственно равных отрезков).

б) Проведем $O_1E \parallel LK$ и $O_1G \parallel NM$ (рис. 78, *б*) $OK \perp KL$ и $O_1L \perp KL$, поэтому $OK \parallel O_1L$ (см. теорему § 16). Отсюда $O_1E = KL$ (см. § 22). Аналогично доказывается, что $O_1G = MN$. $\angle O_1EO = \angle OKL$ (см. теорему 2 § 18), поэтому $\angle O_1EO = 90°$. Аналогично получим, что $\angle O_1GO = 90°$. В прямоугольных треугольниках O_1EO и O_1GO общая гипотенуза O_1O и равные катеты EO и GO ($EK = O_1L$ и $GM = O_1N$, отсюда $EK = GM$ и $EO = OK - EK$, $GO = OM - GM$). В равных треугольниках $O_1E = O_1G$ (см. § 9), поэтому $KL = MN$.

195. а) FO является биссектрисой угла AFC (рис. 78, *а*), FO_1 — биссектриса угла BFD (см. задачу 193). $\angle AFC$ и $\angle BFD$ — вертикальные (см. § 5), а биссектрисы двух вертикальных углов образуют одну прямую (см. задачу 20). Так как прямая, образованная биссектрисами данных вертикальных углов, проходит через центры окружностей, то общая вершина вертикальных углов F лежит на линии центров OO_1.

б) Поскольку линия центров делит пополам два вертикальных угла между внутренними касательными, то при перегибании чертежа по линии центров стороны этих углов совместятся: FA с FC и FB с FD (рис. 78, *а*). Следовательно, OO_1 — ось симметрии для AB и CD (см. определение § 8).

в) Центр O (рис. 78, *б*) одинаково удален от общих внешних касательных KL и MN ($OK \perp KL$ и $OM \perp MN$, $OK = OM$ как радиусы одной окружности). Если KL и MN непараллельны (где-то пересекутся и образуют угол), то точка O лежит на биссектрисе этого угла (см. задачу 75 (б)). Аналогично с центром O_1 другой данной окружности. Так как линия центров и биссектриса имеют две общие точки, то они совпадают. Следовательно, OO_1 — биссектриса угла между общими внешними касательными KL и MN, т. е. OO_1 — ось симметрии этих касательных (см. определение § 8).

Если же общие внешние касательные параллельны (обе данные окружности равны), то OO_1 также их ось симметрии (см. задачу 99 (а)).

196. Дано: окружность O, касательные MA и MB, A и B — точки касания, $MA \perp MB$, KL — касательная в точке C, $OB = 1$ *дм* (рис. 172).

Определить $KL + LM + MK$.

$LB = LC$ и $KA = KC$ (см. задачу 193), поэтому $KL = KC + CL = KA + LB$. Подставим эту сумму в искомый периметр вместо KL и получим: $KL + LM + MK = KA + LB + LM + MK = (KA + MK) + (LB + LM) = MA + MB$.

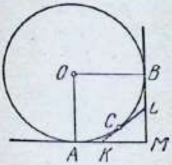


Рис. 172.

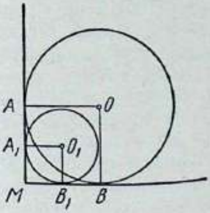


Рис. 173.

$OB \perp BM$ и $OA \perp AM$ (см. теорему 2 § 32). Из $OB \perp BM$ и $AM \perp BM$ следует, что $OB \parallel AM$. Аналогично $OA \parallel BM$. Отсюда $BM = OA$ и $AM = OB$ (см. § 22), но $OA = OB = 1$ *дм*, поэтому $BM = AM = OA = 1$ *дм*. Отсюда получаем, что искомый периметр треугольника MKL равен $MA + MB = 2$ *дм*.

197. Пусть $AB \perp CD$ (рис. 78, *а*) A, B, C и D — точки касания. $OA \perp AB$ и $O_1B \perp AB$, $OC \perp CD$ и $O_1D \perp CD$ (см. теорему 2 § 32). $OAFC$ — параллелограмм ($OA \parallel CF$) и ($OC \parallel AF$) с прямыми углами и равными сторонами (см. задачу 196), т. е. квадрат. Диагонали его равны. По условию $AC = 5$ *см*, поэтому $OF = 5$ *см*. Аналогично с O_1BFD $BD = 3$ *см*, поэтому и $O_1F = 3$ *см*. Но из суммы отрезков OF и FO_1 и состоит искомое расстояние между центрами окружностей (см. задачу 195 (а)). $OO_1 = 8$ *см*.

198. Дано: MA и MB — общие внешние касательные к окружностям O и O_1, A, B, A_1 и B_1 — точки касания, $OA = R$, $O_1A_1 = r$, $AM \perp MB$ (рис. 173).

Определить AA_1 и BB_1.

$OAMB$ и $O_1A_1MB_1$ — квадраты (см. задачу 197), стороны которых R и r. AA_1 — разность сторон этих квадратов: $AA_1 = R - r$. Также и $BB_1 = R - r$.

199. а) Если окружности не имеют общей точки и находятся одна вне другой, то расстояние между их центрами $OO_1 > R + r$; если же одна внутри другой, то $OO_1 < R - r$ (разность состоит из двух отрезков: OO_1 и AB; см. рис. 79, *а*).

б) Если касание окружностей внешнее, то $OO_1 = R + r$; если же внутреннее, то $OO_1 = R - r$ (рис. 79, *б*).

в) Если окружности пересекаются (рис. 79, *в*), то центр меньшей из них может находиться либо вне большей из окружностей, либо внутри нее, либо на ней. Во всех этих случаях отрезок OO_1 и радиусы R и r, проведенные в общую точку окружностей, образуют треугольник, поэтому $OO_1 < R + r$, но $OO_1 > R - r$ (см. § 12). Это можно записать двойным неравенством: $R - r < OO_1 < R + r$.

200. а) Одна прямая может иметь с тремя концентрическими окружностями общих точек: 6 (пересекает все окружности), 5 (две пересекает и самой меньшей касается), 4 (две пересекает), 3 (самую большую пересекает и второй касается), 2 (пересекает самую большую окружность), 1 (касается ее) и ни одной.

б) Осью симметрии окружности является любой ее диаметр (см. определение § 8). Так как у концентрических окружностей (сколько бы их ни было) центр общий, то любая прямая, проходящая через него, содержит диаметр каждой окружности и поэтому является их осью симметрии. Следовательно, осей симметрии будет бесконечно много.

в) Концентрические окружности всегда имеют центр симметрии (см. § 25) — общий центр их. Если провести через него любую прямую, то точки пересечения ее с концентрическими окружностями всегда попарно симметричны относительно общего центра.

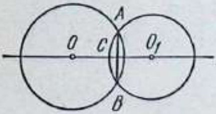


Рис. 174.

201. а) Дано: окружности O и O_1 пересекаются в точках A и B.

Требуется доказать: $AB \perp OO_1$, $AC = CB$ (рис. 174).

Перегнем чертеж по прямой OO_1. На OO_1 лежат диаметры обеих окружностей, поэтому OO_1 — их общая ось симметрии. Верхние полуокружности совместятся с нижними полуокружностями, поэтому совместятся и их общие точки A и B. При этом совместятся отрезки AC и CB, поэтому $AC = CB$. Совместились и углы ACO и BCO, которые являются смежными (см. § 5) и равными, а поэтому каждый из них прямой (см. § 4), отсюда $AB \perp OO_1$.

б) Для любых двух окружностей линия их центров является общей осью симметрии (см. определение § 8), поэтому если бы две окружности имели общую точку, не лежащую на линии центров, то путем перегибания чертежа по линии центров мы убедились бы, что у этих же окружностей есть еще одна общая точка, симметричная первой общей точке относительно линии центров. Однако двух общих точек у касающихся окружностей быть не может. Следовательно, точка касания двух окружностей не может лежать вне линии центров, поэтому она лежит на линии центров.

202. а) Пусть меньшая окружность радиуса r катится по большей данной окружности радиуса R один раз снаружи, а другой раз изнутри (внутреннее касание, см. задачу 199, рис. 79, *б*). Искомое геометрическое место — две окружности, имеющие общий центр с большей данной окружностью, а радиусами их будут $R + r$ и $R - r$.

б) Пусть дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 175). Внутри прямоугольника будут лишь те касающиеся его противоположных сторон окружности, которые касаются больших сторон. Их центры будут одинаково удалены от параллельных отрезков BC и AD и будут находиться на оси симметрии прямоугольника, проходящей через середины меньших сторон (см. § 25). Но так как все эти круги должны вмещаться внутри прямоугольника, то искомый отрезок их линии центров будет иметь концы в точках O и O_1, удаленных от середин меньших сторон на радиус OM круга. Но этот радиус равен половине меньшей стороны: $MO = NO_1 = AM$.

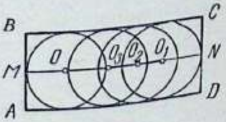


Рис. 175.

Ответ: искомым г. м. т. (см. п. 8 § 15) является отрезок OO_1.

203. а) Центральный угол равен 180936″, поэтому соответствующая ему дуга также содержит 180936″ (см. § 33). На эту дугу опирается вписанный угол, который равен

$180936'' : 2 = 90468''$; $1^\circ = 3600''$. Разделим 90468 на 3600 и получим в частном целые градусы. Остаток разделим на 60 и получим целые минуты, а в остатке — секунды.

Ответ: $25^\circ 7' 48''$.

б) Вписанный угол равен $17{,}3^\circ$ или $17^\circ 18'$ (в 1° имеется $60'$; 0,1 градуса содержит $6'$, а 0,3 градуса $= 18'$). Дуга, на которую он опирается, содержит $17^\circ 18' \cdot 2 = 34^\circ 36'$ (см. § 34). Столько же содержит и соответствующий этой дуге центральный угол (см. § 33). Ответ: $34^\circ 36'$.

204. а) Утверждение неверно: равные вписанные в данную окружность углы могут опираться и не на одну и ту же дугу. Утверждение будет верно, если слова «на одну и ту же дугу» заменить словами «на равные дуги».

б) Утверждение верно, что легко доказать методом от противного. Пусть вписанный прямой угол не опирается на диаметр. Тогда он опирается на дугу, большую или меньшую полуокружности, т. е. не равную 180°. Тогда по теореме (§ 34) вписанный угол не равен 90°, что противоречит условию (дан прямой вписанный угол). Следовательно, наше допущение о том, что вписанный прямой угол не опирается на диаметр, неверно; тогда он опирается на диаметр.

205. а) Равные хорды стягивают равные дуги только в равных кругах или в одном кругу (см. § 31), а здесь круги неравные и эта теорема неприменима. Общая хорда стягивает неравные дуги в неравных кругах. Вторая ошибка в том, что к неравным кругам не применима и теорема о том, что равным дугам соответствуют равные центральные углы (см. теорему 2 § 6).

б) Теорема 1 § 6 к неравным кругам неприменима. Нельзя применять к таким кругам и теорему 1 § 31.

206 Дано: AD — касательная, A — точка касания, BC — диаметр, $\angle ADO = 46^\circ 30'$.

Определить $\smile AC$ и $\smile AB$ (рис. 176).

Соединим O с A; $OA \perp AD$; $\angle AOC = 90^\circ - \angle ADO = 90^\circ - 46^\circ 30' = 43^\circ 30'$ (см. задачу (106 (б)). $\smile AC = 43^\circ 30'$ (см. § 33). $\smile AB = 180^\circ - 43^\circ 30' = 136^\circ 30'$.

207. Дано: $\smile AB : \smile ACB = 3 : 13$; $\smile CB : \smile CAB = 4 : 21$ (рис. 177).

Определить $\angle ABC$.

Если всю окружность принять за $3 + 13 = 16$ частей, то $\smile ACB = \frac{360^\circ \cdot 13}{16} = 292{,}5^\circ$. Аналогично найдем, что

$\smile BC = \frac{360^\circ \cdot 4}{4+21} = 57{,}6^\circ$. $\smile AC = \smile ACB - \smile BC = 234{,}9^\circ =$ $= 234^\circ 54'$. $\angle ABC = 234^\circ 54' : 2 = 117^\circ 27'$.

Примечание. Если дугу BA откладывать от точки B в том же направлении, что и дугу BC, то при тех же данных задачи получится другой искомый угол. Тогда придется вычислить дугу AB и найти разность $\smile BA - \smile BC$, а затем искомый угол. Второй ответ: 4°57′.

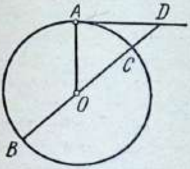


Рис. 176.

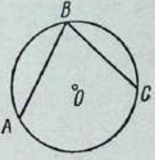


Рис. 177.

208. Так как медиана BD равна половине стороны AC, к которой она проведена, то $\triangle ABC$ — прямоугольный (см. задачу 110 (а)) с гипотенузой AC и прямым углом при вершине B. $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ - 37^\circ 30' = 52^\circ 30'$.

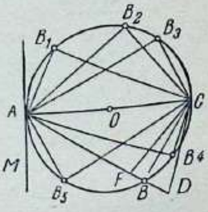


Рис. 178.

209. а) Пусть AC — общая гипотенуза прямоугольных треугольников AB_1C, AB_2C, AB_3C, AB_4C, AB_5C и т. д. (рис. 178). Если из середины AC описать окружность радиусом $OA = OC$, то все вписанные углы, которые будут опираться на диаметр AC, будут прямые (см. следствие 2 § 34). Таких вписанных углов будет бесконечно много, и вершины их будут заполнять всю построенную окружность, кроме концов диаметра — точек A и C (в этих двух случаях треугольника не будет).

Докажем, что если вершина, противолежащая AC, не находится на этой окружности, то треугольник не прямоугольный. Пусть вершина D находится вне круга. Соединим ее с A и C. Точку B пересечения AD с окружностью соединим с C. Вписанный угол $ABC = 90^\circ$ (см. § 34), тогда $CB \perp AD$, поэтому ни CD, ни CF не перпендикулярны AD (см. следствие 1 § 10). Следовательно, вершина прямого угла прямоугольного треугольника с гипотенузой AC не может лежать не на окружности.

Ответ: искомым г. м. т. является окружность, диаметром которой служит общая гипотенуза, за исключением концов этого диаметра.

б) Пусть двумя данными точками будут A и C (рис. 178). Через точку A проводим произвольную прямую AB_1 и на нее опускаем перпендикуляр CB_1. На прямую AB_2 опускаем перпендикуляр CB_2 и т. д. Основания этих перпендикуляров B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 и т. д. являются вершинами прямых углов прямоугольных треугольников с общей гипотенузой AC. Из задачи 209 (а) известно, что геометрическим местом этих вершин является окружность, построенная на диаметре AC, за исключением точек A и C. Но в данной задаче точка A не будет исключением, ибо если провести через A прямую AM, перпендикулярную AC, то основание перпендикуляра, опущенного из C на AM, попадет в точку A ($CA \perp AM$). Точка C основанием перпендикуляра также может быть, если через нее провести (уже восставить, а не опустить) перпендикуляр к прямой AC. Итак, искомым г. м. т. является вся окружность, диаметром которой является отрезок AC.

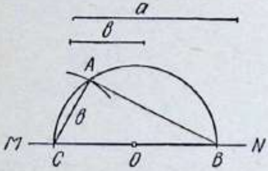


Рис. 179.

210. а) Один из способов решения этой задачи дан в § 15 (7г). Решим ее другим способом.

Около треугольника всегда можно описать окружность, причем только одну (см. задачу § 29). Так как треугольник прямоугольный и его прямой угол будет вписанным, то он опирается на диаметр (см. задачу 204 (б)). Следовательно, гипотенуза вписанного прямоугольного треугольника является диаметром описанной окружности (см. § 36). Данный катет будет хордой, исходящей из конца гипотенузы.

Пусть даны гипотенуза a и катет b (рис. 179). На некоторой прямой MN отложим отрезок $CB = a$ и опишем на нем полуокружность как на диаметре. Разделим CB пополам (см. задачу 3 § 15) и из середины O проведем полуокружность радиуса OB. Чтобы найти вершину прямого угла на полуокружности, возьмем раствор циркуля, равный b, и сделаем из точки C (или B) засечку на полуокружности. Полученную вершину A прямого угла соединим с другим концом гипотенузы.

Если бы катет b откладывали от точки B или все то же самое проделали на нижней полуокружности, то полученные три других треугольника были бы равны треугольнику ABC.

б) Пусть дана окружность O и точка C вне круга (случай, когда C находится на окружности, рассмотрен в задаче 191 (а)). Поскольку касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания (A, рис. 180), то отрезок касательной CA, радиус OA и отрезок OC образуют прямоугольный $\triangle OAC$. В нем известна гипотенуза OC и катет OA (см. задачу 210 (а)). Построив точку касания (их будет две: A и A_1), проведем касательные CA и CA_1.

Доказательство простое. Задача имеет два решения.

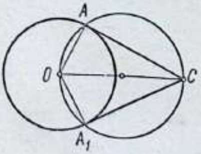


Рис. 180.

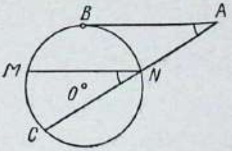


Рис. 181.

211. Дано: AB — касательная к окружности, B — точка касания, AC — секущая.

Требуется доказать: $\angle BAC$ измеряется $\frac{1}{2}$ ($\smile BC - \smile BN$) (рис. 181).

Проведем $NM \parallel AB$. Тогда $\smile BM = \smile BN$ (см. задачу 192). $\angle A = \angle MNC$ (см. теорему 2 § 18). $\angle MNC$ измеряется $\frac{1}{2} \smile MC$ (см. § 34). Но $\smile MC = \smile BC - \smile BM = \smile BC - \smile BN$, поэтому $\angle MNC$, а также и $\angle BAC$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile BC - \smile BN)$.

212. а) Если из общей точки двух касательных проведем к той же окружности какую-нибудь секущую, то угол между касательными будет представлять сумму двух углов, каждый из которых составлен секущей и касательной (чертеж сделайте самостоятельно). Пусть $\angle 1 + \angle 2$ дают угол между касательными. Пусть дуги, заключенные между сторонами угла 1, будут k и l $(k > l)$, а дуги между сторонами угла 2 будут m и n $(m > n)$. Согласно задаче 211, имеем: $\angle 1$ измеряется $\frac{1}{2}(k-l)$ и $\angle 2$ измеряется $\frac{1}{2}(m-n)$. Тогда угол между касательными $\angle 1 + \angle 2$ измеряется $\frac{1}{2}(k-l)+\frac{1}{2}(m-n)=\frac{1}{2}(k-l+m-n)=$

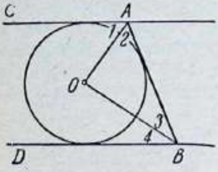


Рис. 182.

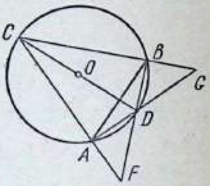


Рис. 183.

$=\frac{1}{2}[(k+m)-(l+n)]$, что и требовалось доказать, так как $(k+m)$ — это большая из дуг, а $(l+n)$ — меньшая из дуг, заключенных между точками касания.

б) Рассмотрим четырехугольник, образованный касательными, исходящими из одной точки, и радиусами, проведенными в их точки касания. Сумма четырех его внутренних углов равна $2d(4-2)=4d$ (см. теорему 1 § 21; $n=4$). Но в этом четырехугольнике два прямых угла (см. теорему 2 § 32). Следовательно, сумма центрального угла, соответствующего меньшей из дуг, заключенных между точками касания, и угла между касательными равна $2d$.

213. Дано: касательные $AC \parallel BD$, AB — отрезок произвольной касательной между AC и BD (рис. 182).

Требуется доказать: $\angle O = d$.

Из центра O отрезок AB виден под углом AOB. $\angle 1 = \angle 2$ (см. задачу 193), $\angle 3 = \angle 4$. Но $\angle CAB + \angle ABD = 2d$ (см. теорему 3 § 18), $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2d$. Заменив углы 1 и 4 им равными 2 и 3, получим: $\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 2d$, $2\angle 2 + 2\angle 3 = 2d$, $2(\angle 2 + \angle 3) = 2d$, $\angle 2 + \angle 3 = d$. Тогда $\angle O = 2d - d = d$ (см. § 20).

215. Дано: $\smile ADB = 90°$, $CD \perp AB$, CD — диаметр (рис. 183).

Определить углы F и G.

$\angle CFB$ измеряется $\frac{1}{2}$ $(\smile CB - \smile AD)$ (см. теорему 3 § 35). $\smile AD = \smile DB = 45°$ (см. теорему 1 § 30). $\smile ACB = 360° - 90° = 270°$. $\smile BC = \smile CA = 135°$ (см. § 30).

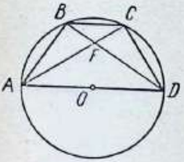


Рис. 184.

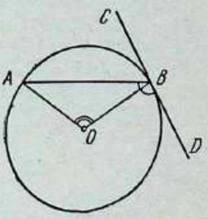


Рис. 185.

$\angle F$ измеряется $\frac{1}{2}$ $(135° - 45°) = 90°$. $\angle G$ измеряется $\frac{1}{2}$ $(\smile AC - \smile BD) = 45°$.

216. Пусть $\smile BC$ равна $\frac{1}{40}$ окружности, AD — диаметр, $BC \parallel AD$.

Определить углы BAD, CDA, ABC, BCD, AFD, AFB (рис. 184).

$\smile AB = \smile CD$ (см. теорему 2 § 30). Отсюда $AB = CD$ (см. теорему 1 § 31) и трапеция $ABCD$ — равнобедренная (см. определение 3 § 28), поэтому ее углы, прилежащие к одному основанию, равны (см. задачу (162 (б)).

$\angle BAD$ — вписанный и опирается на дугу $BCD = \smile BC + \smile CD$. $\smile BC = 360° \cdot \frac{1}{40} = 9°$. $\smile ABCD = 180°$. $\smile AB + \smile CD = 180° - 9° = 171°$. $\smile AB = \smile CD = 85°30'$. $\angle BAD$ измеряется $\frac{1}{2} \smile BCD = \frac{1}{2}$ $(9° + 85°30') = 47°15'$ (см. § 34). $\angle BAD = \angle ADC = 47°15'$.

$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 132^\circ 45'$ (см. задачу 162 (а)), $\angle BCD = 132^\circ 45'$.

$\angle AFD$ опирается на диаметр, однако он не прямой, так как он не вписанный (вершина не на окружности). $\angle AFD$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile AD + \smile BC)$ как угол, вершина которого находится внутри круга (см. теорему 2 § 35). $\frac{1}{2}(\smile AD + \smile BC) = \frac{1}{2}(180^\circ + 9^\circ) = 94^\circ 30'$. $\angle AFD = \angle BFC = 94^\circ 30'$. $\angle AFB = 180^\circ - \angle AFD = 85^\circ 30'$, $\angle CFD = 85^\circ 30'$ (см. § 5).

217. Дано: AB — хорда, CD — касательная, B — точка касания. $\angle ABD$ больше угла AOB на α° (рис. 185).

Определить дугу AB.

Искомую дугу AB обозначим через x° и составим уравнение. $\angle AOB$ также будет содержать x° (см. § 33). Но по условию задачи $\angle AOB + \alpha^\circ = \angle ABD$. Заменим $\angle AOB$ через x°. $x^\circ + \alpha^\circ = \angle ABD$. $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AB$ (см. теорему 1 § 35). $\angle ABD$ — смежный с углом ABC (см. § 5), поэтому $\angle ABD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \frac{x^\circ}{2}$. Подставим в уравнение значение угла ABD и получим:

$$x^\circ + \alpha^\circ = 180^\circ - \frac{x^\circ}{2}.$$

Переносим $\frac{x^\circ}{2}$ в левую, а α° — в правую часть. $x^\circ + \frac{x^\circ}{2} = 180^\circ - \alpha^\circ$; $\frac{3}{2} x^\circ = 180^\circ - \alpha^\circ$, откуда

$$x^\circ = \frac{2(180^\circ - \alpha^\circ)}{3} = \frac{2}{3}(180^\circ - \alpha^\circ) = 120^\circ - \frac{2}{3}\alpha^\circ.$$

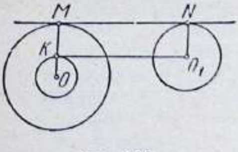


Рис. 186.

218. а) Пусть даны окружности O и O_1 с радиусами OM и O_1N (рис. 186).

Анализ. Допустим, что общая внешняя касательная MN уже построена, M и N — точки касания и радиусы $OM \perp MN$ и $O_1N \perp MN$. Отрезок MN параллельно перенесем до положения O_1K (см. задачу 173, где применен и объясняется метод параллельного перенесения). Тогда $O_1K \parallel NM$, $MK = NO_1$, $OK \perp KO_1$ (так как $OM \perp MN$, см. следствие в § 18). Если провести окружность из центра

O радиусом OK, то KO_1 будет касательной к ней (см. теорему 1 § 32). Но такую окружность всегда можно провести — ее радиус равен разности радиусов данных окружностей ($OK = OM - MK = OM - O_1N$), а проведение касательной (O_1K) из данной точки (O_1) к данной окружности рассмотрено в задаче 210 (б).

Построение. Вычитая отрезки, получим разность радиусов OK; проведем этим радиусом окружность, построим касательную O_1K к ней из центра меньшей из данных окружностей. При этом получим точку касания K.

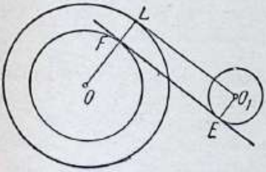


Рис. 187.

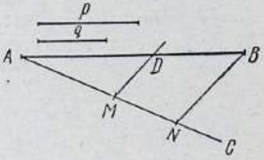


Рис. 188.

Продолжив OK, получим точку M на данной окружности. Через M проведем прямую (MN) перпендикулярно OM (или параллельно KO_1), которая будет касательной и к другой данной окружности.

Легко доказать, что построенная прямая MN и будет искомой общей внешней касательной. Аналогично можно построить и вторую общую внешнюю касательную к данным двум окружностям.

б) Пусть даны две окружности O и O_1 с радиусами OF и O_1E (рис. 187).

Анализ сделайте самостоятельно. Параллельным перенесением общей внутренней касательной FE установите, что вспомогательная окружность должна иметь радиус, равный сумме радиусов данных окружностей ($OL = OF + FL = OF + EO_1$, $FL = EO_1$).

После того, как будет построена касательная O_1L к окружности с радиусом OL, сделаем обратный параллельный перенос отрезка LO_1 в положение FE (проведем $FE \parallel LO_1$).

Можно построить и вторую общую внутреннюю касательную.

219. а) Пусть AB, p и q — данные отрезки (рис. 188).

Ясно, что задачу надо решать на основании следствия (см. § 36). Проведем произвольный луч AC (под любым углом к AB) и отложим на нем от вершины A отрезки $AM = p$ и $MN = q$. Соединим точки N и B прямой и через точку M проведем прямую, параллельную NB (см. задачу 90): $MD \parallel NB$. По указанному следствию $\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MN}$. Но $\frac{AM}{MN} = \frac{p}{q}$ (по построению), поэтому $AD : DB = p : q$.

Если принимать в расчет только длины отрезков AD и DB, то задача имеет единственное решение (всегда получим пару отрезков только такой длины при этих данных AB, p и q). Если же принимать в расчет и положение точки D на AB, то таких точек может быть две (когда меньший из отрезков будет слева, а больший — справа на данном отрезке AB).

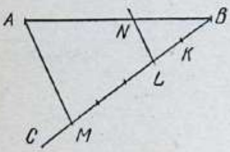


Рис. 189.

б) Пусть AB — данный отрезок, который надо разделить на два отрезка, относящиеся между собою, как $2:3$ (рис. 189). Проведем некоторый луч BC и отложим на нем от B любой отрезок (BK) сначала 2 раза, а затем еще 3 раза. Тогда $BL = 2BK$ и $LM = 3BK$, $\frac{BL}{LM} = \frac{2BK}{3BK} = \frac{2}{3}$. Соединим прямой M и A и проведем $LN \parallel MA$. Получаем пропорциональные отрезки на сторонах угла ABC:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{ML}{LB} \text{ или } \frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}.$$

Если данный отрезок нужно разделить в отношении $0{,}9:1{,}3$ или $1\frac{2}{3}:1\frac{1}{6}$, то удобно сначала заменить отношение дробных чисел равным ему отношением целых чисел. $0{,}9:1{,}3 = 9:13$; $1\frac{2}{3}:1\frac{1}{6} = \frac{5}{3}:\frac{7}{6} = \frac{10}{6}:\frac{7}{6} =$ $= 10:7$ (каждый член первого отношения умножили на 10, а второго — на 6). И дальше, как в задаче (б).

в) Из одного из концов M или N отрезка проводим произвольный луч и на нем откладываем последовательно (как в задаче (а)) все (три, четыре и т. д.) данные отрезки. Конец последнего из них соединяем с другим концом отрезка MN и через концы всех других отрезков проведем параллельные прямые до пересечения с MN. Если вместо отрезков даны числа, то поступаем, как в задаче (б).

220. а) Ромб с прямыми углами есть квадрат (см. § 24). Диагонали квадрата равны, и их отношение равно 1.

б) Параллелограмм со взаимно перпендикулярными диагоналями есть ромб (см. задачу 143 (а)). Отношение его смежных сторон (да и любых двух его сторон) равно 1.

в) Отношение равно 2 (см. задачу 110 (б)).

г) $1:2=\frac{1}{2}$ (см. следствие 2 § 20).

д) $\frac{1}{2}$ (см. теорему § 28).

е) $2:1=2$ (сделайте чертеж и проведите две высоты с концов меньшего основания).

ж) 0,5 $(=1:2)$. Хорда, стягивающая дугу в 60°, равна радиусу окружности (соедините концы хорды с центром окружности и рассмотрите углы треугольника). Большая хорда — диаметр.

з) Отношение большего отрезка диаметра к меньшему равно 3, а меньшего к большему равно $\frac{1}{3}$. Соедините концы хорды с центром. Диаметр будет перпендикулярен к хорде (см. задачу 180 (а)). Отрезок этого диаметра, заключенный внутри треугольника, равен половине диаметра (см. § 20).

221. а) Второй отрезок равен $\frac{18\cdot 140}{100}=25{,}2$ (*см*). Отношение отрезков равно $18:25{,}2=\frac{5}{7}$.

б) Второй отрезок равен $\frac{l(100-37)}{100}=0{,}63l$. Отношение равно $l:0{,}63l=\frac{l}{0{,}63l}=\frac{1}{0{,}63}=\frac{100}{63}=1\frac{37}{63}$.

в) Если второй отрезок примем за 100 частей, то в первом будет 65 таких частей. Так как оба отрезка будут измерены одной и той же единицей (одной сотой частью второго отрезка), то можно взять отношение их полученных длин: $65:100=\frac{65}{100}=\frac{13}{20}$.

222. а) Пусть в $\triangle ABC$ $AB=BC$. Только высота BD к основанию разделит его пополам: $AD=DC$. Составим два отношения отрезков: $\frac{AD}{AB}$ и $\frac{CD}{CB}$, которые будут равны: $\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{CB}$, а эти 4 отрезка — пропорциональны (см. определение 2 § 36).

б) KL — средняя линия треугольника ABC (рис. 190). Имеем равные отношения: $AC:KL=2$, $AB:BK=2$, $CB:BL=2$ и т. д. Из каждых двух равных отношений можно составить пропорцию: $\frac{AC}{KL}=\frac{AB}{BK}$, $\frac{AC}{KL}=\frac{CB}{BL}$, $\frac{AB}{BK}=\frac{CB}{BL}$. Каждая пропорция дает четыре пропорциональных отрезка.

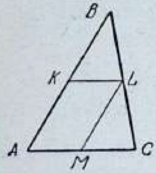


Рис. 190.

в) KL и LM — средние линии треугольника ABC (рис. 190). Здесь можно составить еще, в частности, такую пропорцию: $\frac{KL}{AC}=\frac{LM}{AB}$.

г) Пусть CA и CB — катеты $(CA<CB)$, AB — гипотенуза, CD — медиана к гипотенузе (см. задачу 110(б)). $\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$, $\frac{CA}{CB}=\frac{1}{2}$ (по условию), откуда $\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{AB}$.

д) Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Отношения смежных сторон $\frac{AB}{BC}$ и $\frac{CD}{AD}$ равны ($AB=CD$ и $BC=AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, см. § 22). $\frac{AB}{BC}=\frac{CD}{AD}$.

е) Отрезки осей симметрии прямоугольника, заключенные внутри него, равны соответственно сторонам, параллельным этим осям. Отрезок, соединяющий середины больших сторон прямоугольника, относится к отрезку, соединяющему середины меньших сторон, как меньшая сторона относится к большей стороне прямоугольника.

ж) Отношение гипотенузы к меньшему катету в одном и в другом из данных прямоугольных треугольников равно 2. Два этих равных отношения составят пропорцию. Следовательно, гипотенуза и меньший катет одного прямоугольного треугольника, имеющего угол в 30°, пропорциональны гипотенузе и меньшему катету другого прямоугольного треугольника, имеющего угол в 30°.

223. Дано: $\triangle ABC$, $BC=15$ *м*, $BD\perp AC$, $AD=5$ *м*, $DC=9$ *м*, $AF=FC$, $FE\perp AC$ (рис. 191).

Определить отрезки BE и EC.

$FE \parallel DB$ (см. теорему § 16) и эти параллельные пересекают стороны угла ACB, отсекая пропорциональные отрезки (см. следствие § 36): $\frac{BE}{EC}=\frac{DF}{FC}$. Обозначим BE через x, тогда $EC = BC - BE = 15 - x$. Два других отрезка, входящих в эту пропорцию, можно вычислить: $AC = AD + DC = 5 + 9 = 14$ (*м*), $FC = \frac{1}{2} AC = 7$ *м*, $DF = DC - FC = 9 - 7 = 2$ (*м*). Подставляем в пропорцию и получаем уравнение с одним неизвестным, которое можно решить: $\frac{x}{15-x}=\frac{2}{7}$, $7x = 2(15-x)$, $7x = 30 - 2x$, $9x = 30$, $x = 30:9 = 3\frac{1}{3}$. $BE = 3\frac{1}{3}$ *м*; $EC = 15 - 3\frac{1}{3}$; $EC = 11\frac{2}{3}$ *м*.

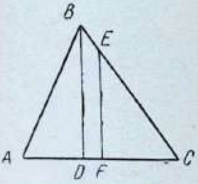


Рис. 191.

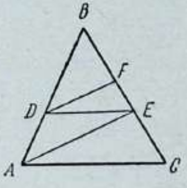


Рис. 192.

224. Дано: $\triangle ABC$, $BD:DA = 3:2$, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AE$, $BF = 6$ *см* (рис. 192).

Определить отрезки FE и EC.

Параллельные прямые DF и AE отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки (см. следствие § 36): $\frac{BF}{FE}=\frac{BD}{DA}$. Отношение $\frac{BD}{DA}$ заменим его числовым значением $\frac{3}{2}$ и вместо BF подставим его длину: $\frac{6}{FE}=\frac{3}{2}$, откуда неизвестный средний член пропорции $FE=\frac{6\cdot 2}{3}=4$, $FE = 4$ *см*. Теперь нам нужен будет отрезок $BE = BF + FE = 6 + 4 = 10$ (*см*). Другой искомый отрезок EC заключен между другими параллельными прямыми (DE и AC), пересекающими стороны того же угла. Составим пропорцию: $\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{DA}$. Подставим значения: $\frac{10}{EC}=\frac{3}{2}$. $EC = \frac{10\cdot 2}{3}=6\frac{2}{3}$.

Ответ: $FE = 4$ *см*, $EC = 6\frac{2}{3}$ *см*.

225. Дано: $\triangle ABC$, BD—биссектриса угла ABC (рис. 193). Требуется доказать: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

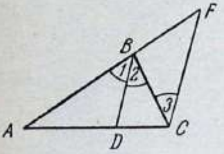


Рис. 193.

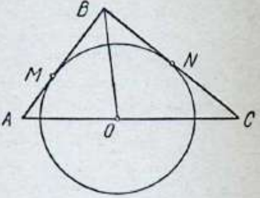


Рис. 194.

Доказательство. Проведем $CF \parallel BD$ до пересечения с продолжением стороны AB. Стороны угла FAC пересечены параллельными прямыми. Составим пропорцию (см. следствие § 36): $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BF}$. Сравнивая эту пропорцию с той, которую нужно доказать, замечаем, что они отличаются только отрезками BF и BC. Рассмотрим их. Они входят в $\triangle FBC$, в котором $\angle F = \angle 1$ (как соответственные при $FC \parallel BD$ и секущей AF) и $\angle 3 = \angle 2$ (см. § 18). Но $\angle 1 = \angle 2$ (BD — биссектриса), отсюда $\angle F = \angle 3$ (см. аксиому 4 § 2). Следовательно, $BF = BC$ (см. теорему 2 § 11). Заменим в полученной пропорции BF на BC: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

227. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 51$ *см*, $BC = 85$ *см*, $AC = 104$ *см*, окружность O, точки касания M и N (рис. 194). Найти OA и OC.

BA и BC — касательные, проведенные из одной точки, BO — биссектриса угла между этими касательными (см. задачу 193). Согласно теореме, доказанной в задаче 225, имеем: $\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{BC}$. Подставив числовые данные и OC заменив через $(104 - AO)$, получим уравнение с одним неизвестным: $\frac{AO}{104-AO}=\frac{51}{85}$. Отсюда $85AO=51(104-AO)$ и т. д.

Ответ: $AO=39$ *см*, $OC=65$ *см*.

228. а) Это утверждение верно. В равных треугольниках соответствующие углы равны и соответствующие стороны равны. Из равенства соответствующих сторон следует, что каждое из трех отношений соответствующих (сходственных) сторон равно 1, поэтому сходственные стороны в равных треугольниках пропорциональны. Итак, любые равные треугольники всегда подобны (по определению 1 § 37).

б) Утверждение неверно, так как сходственные стороны подобных треугольников только пропорциональны (см. определение 2 § 36), но не обязательно равны (см. определение § 9).

в) Утверждение верное. Если углы одного треугольника соответственно равны углам второго треугольника и углы третьего треугольника также соответственно равны углам второго треугольника, то и углы первого и третьего треугольников соответственно равны (см. аксиому 4 § 2). Точно так же устанавливаем, что стороны первого треугольника пропорциональны сходственным сторонам третьего треугольника. Следовательно, первый и третий треугольники, каждый из которых подобен второму треугольнику, подобны и между собой.

г) Верно: если первый треугольник подобен второму, а третий треугольник равен первому, то третий треугольник подобен второму. И в равных (первый и третий), и в подобных (первый и второй) треугольниках соответствующие углы равны, поэтому углы третьего и второго треугольников соответственно равны. В равных треугольниках (первый и третий) соответствующие стороны равны, поэтому из пропорциональности сторон первого и второго следует пропорциональность сторон третьего и второго треугольников. По определению 1 (§ 37) третий треугольник подобен второму.

229. а) Пусть в треугольнике ABC проведены $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_2B_2 \parallel AB$.

Требуется доказать: $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle A_2CB_2$.

Доказательство: $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle ABC$ (по лемме § 37) и $\triangle A_2CB_2 \sim \triangle ABC$ (по лемме), поэтому $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle A_2CB_2$ (см. задачу 228 (в)).

б) Треугольники, отсекаемые от данного треугольника ABC двумя прямыми, параллельными разным сторонам треугольника ABC, подобны между собой, так как каждый из них по лемме подобен треугольнику ABC (см. задачу 228 (в)).

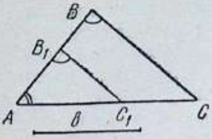


Рис. 195.

230. а) Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 195) и отрезок b — сторона искомого треугольника, сходственная стороне AC данного ($b < AC$).

Согласно дополнительному требованию задачи, искомый треугольник должен быть расположен на плоскости так, чтобы он имел общий угол с данным треугольником ABC. Удобнее взять в качестве общего угла один из двух углов, прилежащих к стороне AC, для которой известна сходственная сторона (b). Пусть $\angle A$ — общий. Отложим от его вершины на AC отрезок $AC_1 = b$ и проведем прямую $C_1B_1 \parallel CB$. Полученный при этом $\triangle AC_1B_1 \backsim \triangle ACB$ (по лемме § 37). $\triangle AC_1B_1$ удовлетворяет всем требованиям задачи. Сторона $b = AC_1$ сходственна стороне AC, так как они лежат против равных углов B и B_1 в подобных треугольниках. $\triangle AC_1B_1$ — искомый.

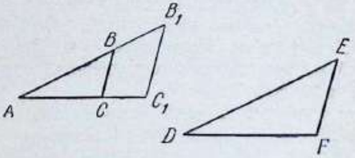


Рис. 196.

б) Нет надобности проводить подробный анализ и в этой задаче, поскольку рассмотренная нами выше теория и задача (а) дают наиболее простой способ построения — на основании леммы (§ 37). Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 196) и по требованию задачи его нужно подобно преобразовать (см. определение 3 § 37) в другой треугольник (искомый) при коэффициенте подобия $k = 1{,}5$.

Одну из сторон, например AC, умножим на k и получим сходственную сторону искомого треугольника: $AC_1 = 1{,}5\,AC = \frac{3}{2}AC$. Для этого AC разделим пополам (см. задачу 3 § 15) и сложим отрезки AC и $\frac{1}{2}AC$ (см. § 3). На луче AC от точки A отложим полученный отрезок AC_1. Из его конца C_1 проведем прямую C_1B_1 до пересечения с продолжением стороны AB. По лемме (§ 37) $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, поэтому и $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ при заданном значении k. Остается передвинуть $\triangle AB_1C_1$, например, в положение DEF, т. е. где-то в стороне от треугольника ABC построить $\triangle DEF$, равный треугольнику AB_1C_1 (способом, указанным в одной из задач 6 § 15). Из условий $\triangle DEF = \triangle AB_1C_1$ и $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ следует, что $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, причем $k = 1{,}5$. $\triangle DEF$ — искомый.

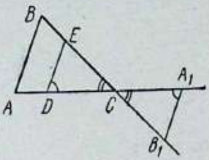


Рис. 197.

в) Так как искомый треугольник и данный $\triangle ABC$ (рис. 197) должны иметь только одну общую вершину (пусть вершину C), а углы с общей вершиной могут располагаться друг относительно друга произвольно, то мы можем выбрать такое их расположение, которое нам удобнее. А удобнее нам продолжить стороны AC и BC за вершину C, чтобы получить угол A_1CB_1, равный углу ACB. Отложим $CA_1 = \frac{2}{3}AC$ (см. § 26). Если через A_1 проведем прямую $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$ и $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (см. теорему 1 § 18).

Для доказательства того, что $\triangle CA_1B_1 \sim \triangle CAB$, отложим $CD = CA_1$ и проведем $DE \parallel AB$. $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ (по лемме). Но $\triangle CA_1B_1 = \triangle CDE$ (по стороне и двум прилежащим углам, см. § 9), поэтому $\triangle CA_1B_1 \sim \triangle CAB$ (см. задачу 228 (г)). $\triangle CA_1B_1$ — искомый.

Примечание. Доказательство с помощью треугольника CDE здесь было бы не нужно, если бы мы воспользовались одним из признаков подобия треугольников (см. § 38).

232. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $BD \perp AC$, $BD = 5$ *м*, $AE = EF = FG = GH = HC = \frac{1}{5}AC$; KE, LF, MG и NH перпендикулярны к AC.

Определить KE, LF, MG и NH (рис. 198).

$\triangle AKE \backsim \triangle ABD$ (по лемме § 37; $KE \parallel BD$ по теореме § 16). Их сходственные стороны пропорциональны: $\frac{KE}{BD} = \frac{AE}{AD}$. Подставим значения: $BD = 5$ (метров, поэтому и KE получим в метрах), $AE = \frac{1}{5}AC$, $AD = \frac{1}{2}AC$, поэтому $\frac{AE}{AD} = \frac{\frac{1}{5}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$. Получаем: $\frac{KE}{5} = \frac{2}{5}$, откуда $KE = 2$ *м*.

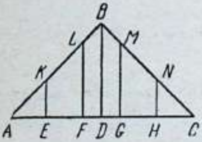


Рис. 198.

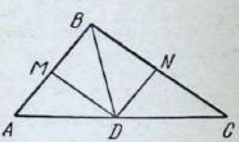


Рис. 199.

$\triangle ALF \backsim \triangle ABD$ (по лемме). $AF : AD = \frac{2}{5}AC : \frac{1}{2}AC = \frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$. $LF : BD = AF : AD$; $LF : 5 = 4 : 5$; $LF = 4$ *м*.

$LF = MG$ и $KE = NH$ как симметричные отрезки относительно оси BD (см. § 8).

Ответ: $KE = NH = 2$ *м* и $LF = MG = 4$ *м*.

233. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 3$ *м*, $BC = 6$ *м*, BD — биссектриса угла ABC, $DN \parallel BA$, $DM \parallel BC$ (рис. 199).

Определить DM, MB, BN и DN.

Четырехугольник $DMBN$ — параллелограмм (см. определение § 22), поэтому $DM = BN$ и $DN = BM$. $DN = ?$ $DM = ?$

DN — сторона треугольника DNC, подобного треугольнику ABC. $\frac{DN}{AB} = \frac{DC}{AC}$; $AB = 3$ *м*, $\frac{DC}{AC} = ?$ Сначала найдем отношение $\frac{DC}{AD}$, используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника (см. задачу 225): $\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{BA}$. $\frac{DC}{AD}=\frac{6}{3}=2$. Отсюда $DC=2AD$, тогда $AC=AD+DC=AD+2AD=3AD$, а нужное нам отношение $\frac{DC}{AC}=\frac{2AD}{3AD}=\frac{2}{3}$. Решим составленную пропорцию относительно DN. $\frac{DN}{3}=\frac{2}{3}$, $DN=2$ *м*.

$\triangle ADM \backsim \triangle ACB$ (по лемме § 37). $\frac{DM}{CB}=\frac{AD}{AC}$. Но $CB=6$ *м*, а $AD:AC=AD:3AD=1:3=\frac{1}{3}$. $\frac{DM}{6}=\frac{1}{3}$, $DM=\frac{6}{3}=2$. $DM=2$ *м*.

Ответ: каждая сторона четырехугольника $DMBN$ равна 2 *м*.

Примечание. Четырехугольник $DMBN$ оказался параллелограммом, а затем — и ромбом, но в ответ это мы не включаем, так как в задаче не требуется определить вид этого четырехугольника.

234. а) Верна, так как она получена из верной данной пропорции перестановкой средних членов. Полученная пропорция также выражает пропорциональность тех же сторон треугольников.

б) Если в первой пропорции каждое отношение составлено из сходственных сторон разных треугольников, то во второй пропорции каждое отношение составлено из сторон одного и того же треугольника. Первый способ составления пропорции: в одном из треугольников берем любую сторону и делим ее длину на длину сходственной ей стороны другого треугольника; так же составляется и второе отношение. Второй способ составления пропорции: первое отношение составляем из любых двух сторон одного из треугольников, а второе отношение — из тех сторон другого треугольника, которые сходственны взятым сторонам первого, причем предыдущий член отношения сходствен предыдущему, а последующий — последующему. При решении задач пользуемся тем способом, который удобнее.

в) Каждое из двух отношений пропорции, составленной первым способом, равно коэффициенту подобия. Ни одно из отношений второй пропорции не равно этому коэффициенту.

235. Два прямоугольных треугольника подобны, если:

а) они имеют по равному острому углу (у них всегда еще по равному прямому углу);

б) два катета одного треугольника пропорциональны двум катетам другого (углы между катетами прямые и равные).

в) Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис 200), $\angle B = \angle B_1 = 90°$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

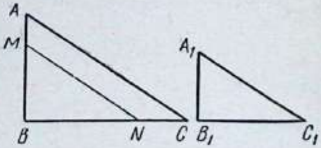


Рис. 200.

Требуется доказать: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Доказывается аналогично теоремам § 38: $BN = B_1C_1$, $NM \parallel CA$, $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$. Из этой и данной пропорций получаем: $A_1C_1 = MN$. $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle MBN$, поэтому $\triangle A_1B_1C_1 \triangle \sim ABC$.

236. а) Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют: по равному углу при вершине, или по равному углу при основании, или прямой угол.

б) Равносторонние треугольники подобны.

Легко убедиться, что эти предложения являются следствиями признаков подобия треугольников (§ 38).

237. а) Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 201), $BD \perp AC$, $B_1D_1 \perp A_1C_1$.

Требуется доказать: $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Доказательство. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ и $\angle A_1 = \angle A$. $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ (по первому признаку, см. § 38), отсюда $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Сравнивая две полученные пропорции, видим, что правые их отношения равны, а потому равны и левые отношения: $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

б) Доказывается так же, как и для сходственных высот (см. задачу (а)). Сделайте чертеж и докажите самостоятельно.

в) Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 201), BM и B_1M_1 — сходственные медианы.

Требуется доказать: $\frac{BM}{B_1M_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Доказательство. В подобных треугольниках

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

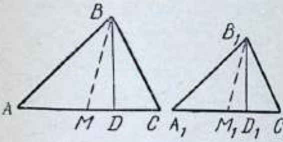


Рис. 201.

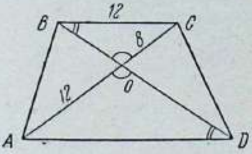


Рис. 202.

Но отношение $\frac{AM}{A_1M_1}$ равно отношению $\frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ $\left(\text{сократили на } \frac{1}{2}\right)$. В пропорции (1) заменим $\frac{AC}{A_1C_1}$ на равное отношение $\frac{AM}{A_1M_1}$ и получим $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M_1}$, т. е. в треугольниках ABM и $A_1B_1M_1$ две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого. И углы между ними равны: $\angle A = \angle A_1$, отсюда $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$ (по второму признаку, см. § 38). Из подобия следует: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$. Первые отношения в этой пропорции и в пропорции (1) одинаковые, поэтому равны и вторые их отношения: $\frac{BM}{B_1M_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

239. Дано: $ABCD$, $BC \parallel AD$, $BC = 12$ *см*, $AO = 12$ *см*, $OC = 8$ *см*.

Определить AD (рис. 202).

$\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (по первому признаку, § 38). $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC}$, $\frac{AD}{12} = \frac{12}{8}$; $AD = \frac{12 \cdot 12}{8} = 18$. $AD = 18$ *см*.

240. а) Да, $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ (по первому признаку подобия, так как дано, что в них $\angle BNM = \angle A$ и $\angle B$ — общий; см. рис. 92).

б) MN не параллельна AC, ибо если бы они были параллельны, то соответственные углы BNM и $\angle C$ были бы равны (см. теорему 2 § 18). Но тогда из двух равенств $\angle BNM = \angle C$ и $\angle BNM = \angle A$ следовало бы: $\angle A = \angle C$. Но тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный (см. теорему 2 § 11), что противоречит условию задачи. Из этого рассуждения видно, что прямые MN и AC были бы параллельны, если бы $\angle A$ был бы равен углу C, т. е. если бы $\triangle ABC$ был равнобедренный.

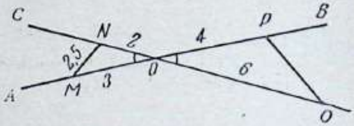


Рис. 203.

в) Предложение, обратное лемме о подобных треугольниках, неверно. Это видно из задач (а) и (б): $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, но MN не параллельно AC (см. рис. 92).

г) Пары сходственных сторон подобных треугольников MBN и ABC: MN и AC (лежат против общего угла B), BM и BC (лежат против равных углов BNM и A), BN и BA (см. рис. 92).

241. а) Длины отрезков указаны на рис. 203. Найти PQ. В треугольниках OMN и OPQ по равному углу. Пропорциональны ли стороны, заключающие эти углы? Сходственной может быть меньшая сторона с меньшей, а большая — с большей. $\frac{OP}{ON} = \frac{4}{2} = 2$; $\frac{OQ}{OM} = \frac{6}{3} = 2$. Следовательно, $\frac{OP}{ON} = \frac{OQ}{OM}$ — стороны пропорциональны и $\triangle OPQ \sim \triangle OMN$ (по теореме 2 § 38). $\frac{PQ}{MN} = \frac{OP}{ON}$ или $\frac{PQ}{MN} = 2$, $\frac{PQ}{2{,}5} = 2$, $PQ = 5$ *см.*

б) MN и PQ не параллельны, так как внутренние накрест лежащие углы не равны: $\angle OMN \neq \angle OPQ$

($\angle MNO = \angle QPO$, как соответствующие углы в подобных треугольниках; но $\angle ONM > \angle OMN$, так как $OM > ON$; поэтому $\angle OMN < \angle OPQ$).

242. а) Сходственными могут быть только самая большая с самой большей стороной, самая меньшая с самой меньшей, средняя со средней. Вычислим эти три отношения: 270 *см* : 18 *см* $= \frac{270}{18} = 15$; 180 *см* : 12 *см* $= 15$; 240 *см* : 16 *см* $= 15$. Три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого. Треугольники с данными длинами сторон подобны (по третьему признаку подобия, § 38).

б) 40 *см* : 16 *см* $= \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$; 30 *см* : 12 *см* $= \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$; 20 *см* : 10 *см* $= 2$. Треугольники с данными сторонами не подобны, так как не выполняется второе условие, содержащееся в определении подобных треугольников (см. § 37).

в) Если в обоих треугольниках при составлении указанных в задаче отношений гипотенузы к катету были взяты оба меньших катета или оба больших катета (только такие могут быть сходственны), то неравенство отношений говорит о том, что треугольники не подобны (см. определение 1 § 37). Если же в этих отношениях катет в одном треугольнике взят меньший, а из катетов второго треугольника взят больший, то неравенство отношений еще не говорит о неподобии этих треугольников (отношения составлены не из сходственных сторон). Если бы взяли соответствующие катеты, то возможно, что отношения оказались бы равными и тогда треугольники были бы подобны (см. задачу 235 (в)).

243. По условию задачи радиус круга равен 6 *см*, а одна из сторон вписанного треугольника равна 12 *см*, т. е. равна диаметру этого круга. Отсюда следует, что противолежащий угол треугольника является вписанным углом, опирающимся на диаметр, и поэтому он прямой (см. следствие 2 § 34). Итак, гипотенуза $AC = 12$ *см*, катет $AB = 9$ *см*, $\angle ABC = d$, $OA = 6$ *см*, $BD \perp AC$. Определить AD (рис. 204).

$\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (прямоугольные с общим углом A; см. теорему 1 § 38). Искомый катет AD треугольника ABD и катет AB треугольника ABC сходственны ($\angle ABD = \angle C$

по теореме 2 § 19). Их отношение: $\frac{AD}{AB}$. В тех же треугольниках сходственны гипотенузы и они нам известны. Отношение гипотенуз: $\frac{AB}{AC}$. Так как сходственные стороны подобных треугольников пропорциональны (см. определение § 37), то составленные отношения равны: $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$. Подставим значения: $\frac{AD}{9}=\frac{9}{12}$, $AD=\frac{9\cdot 9}{12}=6\frac{3}{4}$.

Ответ: 6,75 *см*.

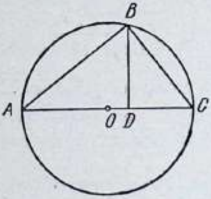


Рис. 204.

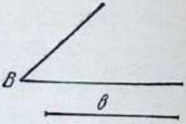


Рис. 205.

245. а) Пусть даны $\angle B$; сторона, лежащая против этого угла в искомом треугольнике, b (рис. 205) и отношение сторон треугольника, заключающих данный угол B, равное $\frac{5}{3}$. Задача решается методом подобия, аналогично задаче 244 (§ 38).

б) Задача решается также методом подобия (см. примечание к решению задачи 244 § 38). Построим какой-нибудь треугольник с данным отношением сторон: $2:3:4$. Возьмем произвольный отрезок l и отложим на некоторой прямой, например, 4 раза (рис. 206): $AB=4l$. Раствором циркуля, равным $3l$, проведем дугу из точки A, а из точки B — раствором $2l$: $AC=3l$ и $BC=2l$. $\triangle ABC$ подобен искомому треугольнику (отношение сторон треугольника ABC: $BC:AC:AB=2l:3l:4l=2:3:4$, т. е. такое же, как и отношение сторон искомого треугольника; см. теорему 3 § 38).

Остается сделать подобное преобразование (см. определение 3 § 37) треугольника ABC в искомый треугольник при коэффициенте подобия, который определяется отношением самых меньших сторон этих треугольников (они сходственны). Пусть самая меньшая сторона искомого треугольника задана и равна отрезку a (рис. 206).

Отложим $BE = a$ и проведем $EF \parallel CA$. $\triangle BEF$ — искомый. $\triangle BEF \sim \triangle ABC$ (по лемме § 37), поэтому отношение сторон у треугольника BEE такое же, как и у треугольника ABC, т. е. $2:3:4$. Сторона BE искомого треугольника, равная данному отрезку a, действительно является самой меньшей в этом треугольнике, так как она сходственна с самой меньшей стороной BC подобного треугольника. $\triangle BEF$ удовлетворяет всем требованиям задачи.

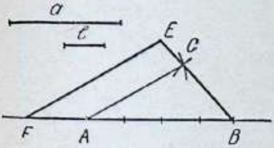


Рис. 206.

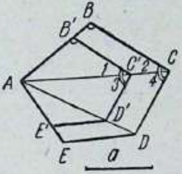


Рис. 207.

Искомые треугольники в этой задаче могут отличаться друг от друга только положением на плоскости.

Другой способ решения: построить отрезки $\frac{3}{2}\ a$ и $2a$ и треугольник по трем сторонам $a, \frac{3}{2}a$ и $2a$.

246. а) Решается аналогично задаче 230 (а). Отложим на AB сходственную ей сторону искомого многоугольника $AB' = a$ и через B' проведем $B'C' \parallel BC$ до пересечения с диагональю AC. Из C' проведем $C'D' \parallel CD$ и т. д. (рис. 207).

Докажем, что $AB'C'D'E' \sim ABCDE$. Для этого требуется доказать, что выполняются оба условия, содержащиеся в определении (§ 39). $\angle BAE$ — общий, $\angle AB'C' = \angle B$ и $\angle AE'D' = \angle E$ (см. теорему 2 § 18); $\angle B'C'D' = \angle BCD$ (как состоящие из соответственно равных частей: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$), $\angle C'D'E' = \angle CDE$. Следовательно, соответствующие углы многоугольников равны.

Треугольники попарно подобны (по лемме § 37): $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$, $\triangle AC'D' \sim \triangle ACD$ и т. д. $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} =$

$= \frac{AC'}{AC}$; $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{AD'}{AD}$; $\frac{AD'}{AD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{AE'}{AE}$. Среди девяти этих отношений, которые все равны между собой, выберем нужные нам: $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{AE'}{AE}$, т. е. сходственные стороны данного и построенного многоугольников пропорциональны. Итак, согласно определению, $AB'C'D'E' \backsim ABCDE$.

б) Решается аналогично задачам 246 (а) и 230 (в).

247. **а)** Можно; тогда определение подобных треугольников будет такое: два треугольника называются подобными, если стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого. И это определение также будет правильное, так как при доказательстве третьего признака подобия треугольников (см. § 38) было показано, что из пропорциональности сходственных сторон подобных треугольников следует равенство соответствующих углов.

б) Можно; тогда определение подобных треугольников примет вид: два треугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого. Такое определение также верно, что видно из первого признака подобия (см. § 38): из равенства двух углов одного треугольника соответствующим углам другого обязательно следует пропорциональность сходственных сторон этих треугольников. Однако определение подобных треугольников, содержащее оба условия (см. § 37), более удобное.

в) В определении подобных многоугольников ни одного из этих условий опустить нельзя, так как тогда многоугольники не будут подобными. Это видно из двух следующих примеров. В квадрате все стороны равны, в ромбе — также, поэтому стороны квадрата пропорциональны сторонам ромба. Но при этом углы квадрата (прямые) не равны соответствующим углам ромба (два острых и два тупых). Следовательно, квадрат и ромб (с острыми и тупыми углами) подобными быть не могут, так как не выполняется первое условие определения (см. § 39).

г) Квадрат и прямоугольник (не являющийся квадратом) не могут быть подобны. Хотя их углы соответственно равны, однако стороны не пропорциональны (отношение стороны квадрата к меньшей стороне прямоугольника одно число, а к большей стороне — совсем другое).

Таким образом, из какого-нибудь одного условия, содержащегося в определении подобных многоугольников (см. § 39), не вытекает другое условие, поэтому ни одно из условий опустить нельзя. В этом состоит существенное различие определений подобных треугольников и многоугольников, хотя внешне эти определения совершенно одинаковые.

248. Один из способов такого разбиения показан на рис. 95 (диагоналями, проведенными из двух соответствующих вершин). Дано: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$ (по определению § 39).

Требуется доказать: $\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$, $\triangle BED \backsim \triangle B'E'D'$, $\triangle BDC \backsim \triangle B'D'C'$.

По условию теоремы $\frac{AB}{A'B'} = \frac{EA}{E'A'}$ и $\angle A = \angle A'$, поэтому $\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$ (см. теорему 2 § 38). Аналогично $\triangle BCD \backsim \triangle B'C'D'$. Из подобия треугольников: $\frac{BD}{B'D'} = \frac{CD}{C'D'}$, а из подобия многоугольников (дано): $\frac{ED}{E'D'} = \frac{CD}{C'D'}$. Из двух последних пропорций имеем: $\frac{BD}{B'D'} = \frac{ED}{E'D'}$. $\angle CDE = \angle C'D'E'$ (дано) и $\angle CDB = \angle C'D'B'$ (следует из подобия треугольников BCD и $B'C'D'$), отсюда $\angle BDE = \angle B'D'E'$. Получаем: $\triangle BDE \backsim \triangle B'D'E'$ (по второму признаку). Расположенность в одном и том же порядке этих треугольников очевидна из чертежа.

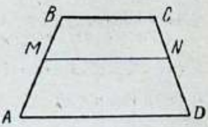


Рис. 208.

249. Дано: $ABCD$ — трапеция, $BC = 3{,}6$ *см*, $AD = 6{,}4$ *см*, $MN \parallel AD$, $AB = 4{,}2$ *см*, $MBCN \backsim AMND$ (рис. 208).

Определить MN, AM, MB.

В подобных трапециях $MBCN$ и $AMND$ сходственны меньшие основания BC и MN между собой и большие основания MN и AD между собой. Составим пропорцию: $\frac{BC}{MN} = \frac{MN}{AD}$, $\frac{3{,}6}{MN} = \frac{MN}{6{,}4}$. Произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов: $MN^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4$; $MN = \sqrt{3{,}6 \cdot 6{,}4} = \sqrt{\frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 64}{100}} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$. BM и MA — сходственные стороны тех же подобных трапеций, поэтому $\frac{BM}{MA}=\frac{BC}{MN}$, $\frac{BM}{4{,}2-BM}=\frac{3{,}6}{4{,}8}$; $4{,}8BM = 4{,}2\cdot 3{,}6-3{,}6BM$; $8{,}4BM = 15{,}12$. $BM=\frac{15{,}12}{8{,}4}=1{,}8$; $MA=4{,}2-1{,}8=2{,}4$.

Ответ: $MN = 4{,}8$ *см*, $BM = 1{,}8$ *см*, $MA = 2{,}4$ *см*.

250. Периметры подобных многоугольников обозначим через P_1 и P_2. Так как P_1 составляет от P_2 87,5%, то P_2 принимаем за 100% и получаем отношение периметров: $\frac{P_1}{P_2}=\frac{87{,}5}{100}=\frac{7}{8}$ (сократили на 12,5). Наибольшую сторону второго многоугольника обозначим через x и составим пропорцию (см. теорему 2 § 39): $\frac{P_1}{P_2}=\frac{21{,}7}{x}$, $\frac{7}{8}=\frac{21{,}7}{x}$, $x=\frac{21{,}7\cdot 8}{7}=24{,}8$. Наименьшая сторона составляет: $100\% - 37{,}5\% = 62{,}5\%$ от 24,8 *см* и равна $\frac{24{,}8\cdot 62{,}5}{100}=\frac{24{,}8\cdot 5}{8}=3{,}1\cdot 5=15{,}5$.

Ответ: 15,5 *см*.

251. Площади подобных многоугольников (в том числе и треугольников) относятся, как квадраты сходственных сторон (см. теорему 3 § 39). Но в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным медианам (см. задачу 237 (в)), поэтому квадраты сходственных сторон относятся, как квадраты сходственных медиан. Следовательно, площади подобных треугольников пропорциональны квадратам сходственных медиан: $\frac{a}{b}=\frac{m_1^2}{m_2^2}$, где через m_1 и m_2 обозначены медианы. Пусть $a>b$, тогда $m_1>m_2$ и по условию: $m_1-m_2=r$, откуда $m_1=r+m_2$.

Из обеих частей пропорции извлечем квадратный корень: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{m_1}{m_2}$ и подставим вместо m_1 полученное его значение: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{m_2+r}{m_2}$. По основному свойству пропорции $m_2\sqrt{a}=m_2\sqrt{b}+r\sqrt{b}$; $m_2\sqrt{a}-m_2\sqrt{b}=r\sqrt{b}$, $m_2(\sqrt{a}-\sqrt{b})=r\sqrt{b}$, $m_2=\frac{r\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $m_1=r+m_2=r+\frac{r\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{r\sqrt{a}-r\sqrt{b}+r\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{r\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Вычислим медианы:

$$m_1=\frac{20\sqrt{49}}{\sqrt{49}-\sqrt{4}}=\frac{20\cdot 7}{7-2}=28,\quad m_2=\frac{20\sqrt{4}}{\sqrt{49}-\sqrt{4}}=\frac{20\cdot 2}{7-2}=8.$$

Ответ: $\frac{r\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\frac{r\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 28 *см*, 8 *см*.

252. а) Сходственные стороны подобных многоугольников относятся, как 3 : 5 (как их периметры; см. теорему 2 § 39). Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон (см. теорему 3 § 39): $\frac{3^2}{5^2}$ или $\frac{9}{25}$.

б) Периметр увеличится в 6 раз, а площадь — в 36 раз. Оба квадрата (первоначальный и увеличенный) подобны (см. определение § 39), поэтому к ним применимы теоремы 2 и 3 (§ 39).

в) Квадраты подобны, поэтому их площади относятся, как квадраты сходственных сторон, например $\frac{(AB)^2}{(A'B')^2}=\frac{4}{9}$. Извлечем арифметический квадратный корень из обеих частей равенства: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$. Такое же и отношение их периметров (см. теорему 2 § 39).

г) Пусть $AB = 9$ *дм* и площадь этого треугольника обозначим через S, а площадь подобного — через S'. Тогда $\frac{S}{S'}=\frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$, где $A'B'$ — сходственная AB сторона второго треугольника. По условию $\frac{S}{S'}=\frac{4}{1}=4$, тогда $\frac{(AB)^2}{(A'B')^2}=4$. Извлечем корень: $\frac{AB}{A'B'}=2$, откуда $A'B' = \frac{AB}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5$ (*дм*).

253. а) Стороны внутреннего прямоугольника равны: $a-2m$ и $b-2m$. Допустим, что эти прямоугольники подобны. Тогда их сходственные стороны пропорциональны: $\frac{a}{a-2m}=\frac{b}{b-2m}$ (если, например, $a > b$, то и $a-2m > b-2m$, т. е. сходственными будут a и $a-2m$, b и $b-2m$). Из пропорции следует: $a(b-2m)=b(a-2m)$, $ab-2am = ab-2bm$, $-2am=-2bm$. Разделив на $-2m$, получим: $a=b$. Но это противоречит условию, так как нам дан только прямоугольник, а не квадрат ($a \neq b$). Полученное противоречие опровергает наше допущение о том, что данные прямоугольники подобны. Они не подобны.

б) Любые два квадрата подобны — удовлетворяют определению подобных многоугольников (§ 39), поэтому и данные квадраты подобны. Об этом же говорит и условие $a=b$, полученное в задаче (а).

Подобны будут и построенные таким образом два треугольника, потому что их соответствующие стороны будут попарно параллельны, а поэтому их соответствующие углы равны (см. первый признак подобия треугольников; § 38).

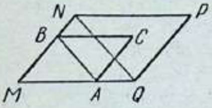


Рис. 209.

254. Дано: $MNPQ$ — параллелограмм (рис. 209), $AB \parallel QN$, $AC \parallel QP$, $BC \parallel NP$.

Требуется доказать: $MBCA \backsim MNPQ$.

Докажем, что углы параллелограммов $MBCA$ и $MNPQ$ соответственно равны. $\angle M$ — общий, $\angle C = \angle P$ (острые углы с соответственно параллельными сторонами; см. теорему 1 и примечание к § 19). $\angle MBC = \angle MNP$ и $\angle MAC = \angle MQP$ (см. теорему 2 § 18).

Докажем пропорциональность сторон. $\triangle MBA \backsim \triangle MNQ$ (по лемме § 37), поэтому $\frac{MA}{MQ} = \frac{MB}{MN}$. Но $MBCA$ — параллелограмм (по условию $AC \parallel QP$, поэтому $AC \parallel MB$; $BC \parallel NP$, поэтому $BC \parallel MA$; см. следствие 2 § 16 и определение § 22). Поскольку $BC = MA$, $CA = MB$ и $NP = MQ$, $PQ = MN$, то и отношения двух других пар сходственных сторон равны двум полученным отношениям: $\frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PQ} = \frac{MA}{MQ} = \frac{MB}{MN}$.

Согласно определению (§ 39), $MBCA \backsim MNPQ$.

255. $\sin A = \frac{2,1}{3,5} = 0,6$; $\cos A = \frac{2,8}{3,5} = 0,8$; $\operatorname{tg} A = \frac{2,1}{2,8} = 0,75$; $\sin B = \frac{2,8}{3,5} = 0,8$; $\cos B = \frac{2,1}{3,5} = 0,6$; $\operatorname{tg} B = \frac{2,8}{2,1} = 1\frac{1}{3} \approx 1,3333$.

256. а) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, т. е. отношение противолежащего углу α катета к прилежащему катету равно $\frac{9}{4}$ (см. определение 3 § 40). Так как длины этих катетов не имеют значения для величины искомого угла α (см. теорему 1 § 40), то один из катетов (например, меньший, прилежащий) возьмем произвольной длины. При этом длина большего (противолежащего) катета должна быть такой, чтобы он относился к меньшему катету, как 9 : 4. На какой-нибудь прямой (AB) отложим произвольный отрезок (m) 4 раза (рис. 210), восставим к нему перпендикуляр BC (см. задачу 3 § 15) и отложим на нем тот же отрезок 9 раз. Соединив точки C и A, получим угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$. $\angle CAB = \alpha$ — искомый. Если вместо m взять другой отрезок, то прямоугольный треугольник получим больший или меньший, чем $\triangle ABC$, но он будет подобен треугольнику ABC (по второму признаку, см. § 38) и угол против большего катета будет равен α (в подобных треугольниках соответствующие углы равны) Решение единственное.

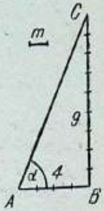


Рис. 210.

б) $\sin\alpha = 0{,}375 = \frac{3}{8}$. Надо построить прямоугольный треугольник произвольных размеров, но с отношением противолежащего искомому углу α катета к гипотенузе, равным $\frac{3}{8}$. Возьмем какой-нибудь отрезок, отложим его на прямой 8 раз, примем полученный отрезок за гипотенузу, опишем на ней как на диаметре полуокружность и т. д. (см. задачи 210 (а) и 256 (а)).

в) $\cos\alpha = 0{,}7 = \frac{7}{10}$. Построение совершенно аналогичное предыдущему, но α здесь угол, прилежащий к катету в 7 частей (гипотенуза содержит 10 таких частей).

257. Острый угол α: **а)** меньше 45°; **б)** больше 45°; **в)** меньше 30°; **г)** больше 30°; **д)** не существует; **е)** не существует; **ж)** меньше 60°; **з)** больше 60°; **и)** не существует; **к)** не существует (см. теорему 2 и значения функций углов 30°, 45° и 60° в § 40).

258. **а)** $\sin 40° > \sin 25°$; **б)** $\cos 37° > \cos 60°$; **в)** $\operatorname{tg} 3° < \operatorname{tg} 48°$; **г)** $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$, потому что для получения тангенса делим противолежащий катет на другой катет, а для получения синуса того же угла делим тот же противолежащий катет на гипотенузу, т. е. на большее число, поэтому получаем меньшее частное; **д)** рассуждая аналогично, получаем: $\operatorname{ctg}\alpha > \cos\alpha$.

259. **а)** 0,0698; 0,6756; 0,9809; 0,9935; **б)** 0,9816; 0,8261; 0,4420; 0,1124; **в)** 0,3057; 3,702; 16,92; 0,8248.

260. **а)** $x = 19°$; 6°27′; 68°16′; **б)** 43°; 78°28′; 17°45′; **в)** 82°; 28°31′; 4°29′; **г)** $\angle C = 90°$; $\angle A = 36°52'$ (так как $\sin A = 0{,}6$); $\angle B = 90° - 36°52' = 53°8'$.

261. а) $a = 0{,}180$; $b = 0{,}041$; $A = 77^\circ 20'$; б) $a = 12{,}7$; $c = 16{,}4$; $A = 50^\circ 20'$; в) $A = 64^\circ$; $B = 26^\circ$; $c = 54{,}7$; г) $b = 5{,}75$; $A = 47^\circ 40'$; $B = 42^\circ 20'$.

262. Пусть в угол ABC, равный 50°, вписана окружность с центром O. Каждая из сторон угла касается окружности. Пусть M — точка касания стороны BA. Радиус $OM \perp BA$ (см. теорему 2 § 32). OB — биссектриса угла ABC, $\angle OBA = 25^\circ$ (см. задачу 193). В прямоугольном треугольнике OBM известен катет $OM = 2{,}5$ *см* и противолежащий острый угол $\angle OBM = 25^\circ$. Искомое расстояние — гипотенуза этого треугольника (см. второй случай решения прямоугольных треугольников § 40).

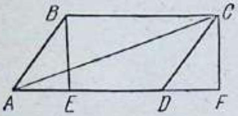


Рис. 211.

Ответ: $\approx 5{,}9$ *см.*

263. Пусть хорда $AB = 7$ *см*; проведем радиусы $OA = OB = 4$ *см.* Проведем радиус $OC \perp AB$, пересекающий сторону AB в точке D. Тогда $AD = DB = 3{,}5$ *см* и $\smile AC = \smile CB$ (см. теорему 1 § 30). Вычислим $\angle AOC$ из прямоугольного треугольника AOD, в котором гипотенуза $AO = 4$ *см* и противолежащий искомому углу катет $AD = 3{,}5$ *см* (см. четвертый случай решения прямоугольных треугольников в § 40). $\smile AB = 2 \smile AC = 122^\circ 6'$.

264. Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 211), $\angle BAD = 58^\circ 20'$, $BE \perp AD$, $AD = 12$ *см*, $AB = 7$ *см.*

Определить BE, $\angle BAC$, $\angle CAD$.

Из прямоугольного треугольника ABE по гипотенузе ($AB = 7$ *см*) и углу ($\angle BAE = 58^\circ 20'$) находим катет BE (см. первый случай решения прямоугольных треугольников § 40). $\triangle ABE = \triangle DCF$ по гипотенузе ($AB = DC$) и острому углу ($\angle BAE = \angle CDF$ как соответственные, см. § 18 и 14). $CF = BE$, $DF = AE$. AE найдем из треугольника ABE. Тогда $AF = AD + DF$. Из прямоугольного треугольника ACF по двум катетам AF и CF находим угол CAF (см. третий случай в § 40). $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$.

Ответ: $BE = 5{,}958 \approx 6$ (*см*), $\angle CAD = 20^\circ 49'$, $\angle BAC = 37^\circ 31'$.

265. а) Пусть SO — дерево, в точке A на высоте AB находится прибор для измерения угла A. Измеряем $AB = OD$ и $BO = AD$. По известному катету AD и прилежащему острому углу A вычисляем SD; $SO = SD + DO$ (рис. 212, *а*).

б) Пусть между точками M и N на поверхности земли нельзя пройти по прямой линии и измерить расстояние MN (рис. 212, *б*). Провешим прямую $MK \perp MN$. Измерим отрезок MK и угол MKN и по катету MK и прилежащему углу вычислим другой катет MN (см. § 40).

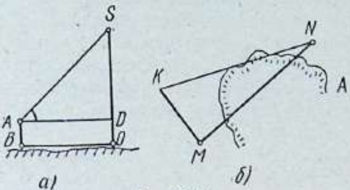


Рис. 212.

266. а) Дано: $\triangle ABC$ вписан в окружность O (рис. 213), $AB = BC = 2$ *см*, $\angle ABC = 120°$.

Определить BD.

$\smile AB = \smile BC$ (см. § 31). Диаметр $BD \perp AC$ (см. § 30). $\angle CBD = 60°$ (см. § 8). $\angle BCD = d$ (см. § 34). $\angle CDB = 30°$ (см. § 20), катет $BC = \frac{1}{2} BD$, $BD = 2BC = 4$, $BD = 4$ *см*.

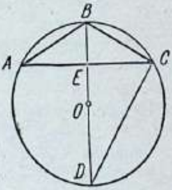


Рис. 213.

Можно было бы решать несколько иначе: $\angle BCE = 30°$, $\angle CDB = \angle BCE = 30°$ (см. § 19).

б) В задаче (а) центр описанной окружности около тупоугольного треугольника ABC лежит вне треугольника. Так будет всегда для тупоугольного треугольника, потому что вписанный тупой угол опирается на дугу, большую полуокружности. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. В остроугольном треугольнике такой центр лежит внутри треугольника.

267. Дано: $\triangle ABC$ описан около окружности O (рис. 214); D, E и F — точки касания; $\angle ACB = d$; $OF = 4$ *см*, $AB = 26$ *см*. Найти $AB + AC + BC$.

$$AB + AC + BC = 26 + (AF + FC) + (BE + EC) = 26 + AF + FC + BE + EC = 26 + (AF + BE) + FC + EC = 26 + (AD + BD) + 4 + 4 = 34 + AB = 34 + 26 = 60 \text{ (см)}.$$

Использовали равенство касательных, проведенных из общей точки к одной окружности: $AF = AD$ и $BE = BD$ (задача 193). $FOEC$ — квадрат (противоположные стороны попарно параллельны; см. § 16, а углы прямые и смежные стороны равны: $OF = OE$).

268. Диаметр окружности, описанной около данного равнобедренного прямоугольного треугольника, равен $2R$, а гипотенуза равна диаметру. Один из равных катетов обозначим через x. Тогда сумма катетов ($2x$) равна сумме гипотенузы ($2R$) и двух радиусов ($2r$) вписанной окружности (см. задачу 267): $2x = 2R + 2r$, откуда $x = R + r$.

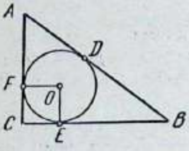


Рис. 214.

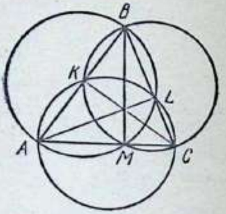


Рис. 215.

269. Стороны данного треугольника ABC являются диаметрами окружностей (рис. 215). $AL \perp BC$, $BM \perp AC$, $CK \perp AB$.

Требуется доказать, что через каждую из точек K, L, M проходят две окружности.

Вершины K и L прямых углов AKC и ALC прямоугольных треугольников AKC и ALC с общей гипотенузой AC лежат на окружности с диаметром AC (см. задачу 209 (а)). Вершины M и L прямых углов, опирающихся на общую гипотенузу AB, лежат на окружности с диаметром AB. Вершины K и M прямых углов, опирающихся на общую гипотенузу BC, лежат на окружности с диаметром BC. Итак, в каждой из точек K, L и M пересекаются две из трех окружностей, построенных на сторонах треугольника ABC как на диаметрах.

270. Анализ. Пусть равнобедренный $\triangle DEF$ — искомый (рис. 216, *а*), $DE = EF$. В нем известны: $\angle DEF = \alpha$ и радиус вписанной окружности $OM = r$. $OM \perp DE$ и

$ON \perp EF$, $OM = ON$ (как радиусы) и точка O принадлежит геометрическому месту точек — биссектрисе EO угла DEF (см. п. 8 § 15). Кроме того, точка O, удаленная от любой стороны угла DEF на r, принадлежит другому геометрическому месту точек, удаленных, например, от ED на r. Общая точка двух геометрических мест и будет искомым центром (см. метод геометрических мест в п. 9 § 15). Дальнейшее ясно.

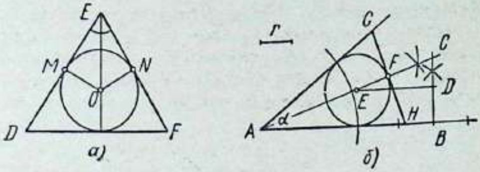


Рис. 216.

Построение. Дано: $\angle\alpha$ и радиус r (рис. 216, *б*). Построим AC — биссектрису α (см. § 15). В некоторой точке B восставим перпендикуляр к AB: $BC \perp AB$ (см. § 15). Отложим отрезок BD, равный r, и проведем DE параллельно BA (см. задачу 90). Из E опишем окружность радиусом r. В точке F пересечения окружности с биссектрисой восставим перпендикуляр FG к биссектрисе. Точки G и H его пересечения со сторонами угла α дают две другие вершины искомого треугольника AGH.

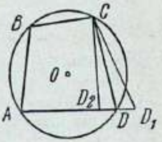


Рис. 217.

Доказательство проведите самостоятельно.

Очевидно, что задача всегда имеет решение при $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ и любом r, причем единственное.

271. Дано: четырехугольник $ABCD$ (рис. 217) и $\angle A + \angle C = 2d$, $\angle B + \angle D = 2d$.

Требуется доказать: вершины A, B, C и D лежат на одной окружности.

Доказательство. Через три вершины A, B и C можно провести окружность и притом только одну (см. § 41). Допустим, что четвертая вершина не лежит на этой окружности и занимает положение D_1. Тогда $\angle B + \angle D_1 = 2d$ (по условию теоремы). Но во вписанном четырехугольнике $ABCD$ имеем $\angle B + \angle D = 2d$ (см. теорему 1 § 42), отсюда $\angle D_1 = \angle D$, что невозможно, так как $\angle D_1$ — внутренний, а $\angle D$ — внешний относительно треугольника CDD_1, причем не смежный с углом D_1 (см. § 10). Аналогично можно доказать, что четвертая вершина не может занимать положение (D_2) внутри круга. Следовательно, четвертая вершина (D) может лежать только на окружности, проведенной через A, B и C.

272. а) Окружность можно описать только около параллелограмма с прямыми углами, т. е. около прямоугольника, в том числе и квадрата. Прямоугольник и квадрат удовлетворяют теореме 2 (§ 42), а параллелограммы с острыми и тупыми углами ей не удовлетворяют.

б) Вписать окружность можно в квадрат и в ромб, так как биссектрисы всех их углов пересекаются в одной точке, одинаково удаленной от всех сторон. В неравносторонних параллелограммах биссектрисы противолежащих углов параллельны. Докажите это, продолжив одну из таких биссектрис до пересечения со стороной параллелограмма и рассмотрев накрест лежащие и соответственные углы (§ 17 и § 18).

в) Нельзя, ибо это противоречило бы теореме 1 (§ 42).

г) Если сумма двух противоположных углов четырехугольника не равна $2d$, то около него невозможно описать окружность.

273. Пусть $ABCD$ — данная описанная трапеция, $AD \parallel BC$, MN — средняя линия, $MN = 25$ *см*. Найдем периметр P.

$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, (см. § 28). $\frac{1}{2}(AD + BC) = 25$, откуда $AD + BC = 50$ *см*. Но $AB + CD = AD + BC$ (см. теорему 3 § 42). $P = 100$ *см* $= 1$ *м*.

274. а) Дано: $ABCD$ — вписанный четырехугольник, $A:B:C = 1:1:3$. A, B, C, $D = ?$

Из условия видно, что если угол A принять за одну часть, то B будет содержать 2, а C — 3 таких части. Теорема 1 (§ 42) верна и тогда, когда углы выражены в одинаковых частях. Поэтому $A + C = B + D$ или в частях $1 + 3 = 2 + D$, откуда $D = 2$, т. е. двум частям. Сумма всех внутренних углов четырехугольника равна $2d(n-2)$, где $n = 4$ (см. § 21). $180° \cdot 2 = 360°$. Сумма частей: $1 + 2 +$

$+3+2=8$. $A=360°:8=45°$, $B=D=45°\cdot 2=90°$, $C=$ $=45°\cdot 3=135°$.

б) Дано: $A:B:C:D=2:4:5:3$. Суммы противолежащих углов четырехугольника равны $2+5=4+3$. Следовательно, сумма любых двух противолежащих углов равна $2d$ (так как сумма всех четырех углов равна $4d$). По теореме 2 (§ 42) около такого четырехугольника можно описать окружность.

Если же $A:B:C:D=5:7:8:9$, то $5+8 \neq 7+9$ и описать окружность невозможно.

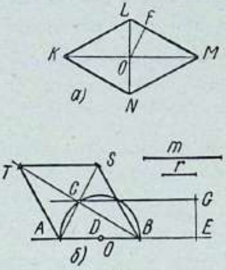


Рис. 218.

275. Анализ. Пусть $KLMN$ — искомый ромб (рис. 218, a). Поскольку вписанная окружность должна касаться всех четырех сторон ромба, то ее центр будет одинаково удален от всех четырех сторон данного ромба. Такой точкой является центр симметрии O ромба, так как он лежит на пересечении биссектрис всех четырех углов ромба (§ 24 и п. 8 § 15). Опустив $OF \perp LM$, получаем радиус окружности, вписанной в $KLMN$. Тогда OF — высота прямоугольного треугольника OLM, в котором, кроме OF, известна еще гипотенуза — сторона LM ромба. Такой треугольник можно построить, а потом легко построить и весь ромб $KLMN$.

Построение. На произвольной прямой отложим данную сторону m искомого ромба (рис. 218, $б$): $AB=m$. Разделим AB пополам (см. § 15), и из середины D опишем полуокружность радиусом DA. Восставим $EG \perp AB$ (см. § 15). Отложим на нем $EG=r$ (данный радиус). Через G проведем прямую, параллельную AB. Если эта прямая пересечет окружность, то возьмем любую из этих двух точек (C) в качестве третьей вершины искомого прямоугольного треугольника. C — центр симметрии искомого ромба. Отложим $CS=CA$ и $CT=CB$. $ABST$ — искомый ромб.

Доказательство не вызывает трудностей. Установите самостоятельно, общие точки каких г. м. т. мы находили при построении и почему задача имеет единственное решение только при условии $r \leqslant \frac{m}{2}$.

276. а) Все n внутренних углов правильного многоугольника равны (§ 43) и их сумма (§ 21) составляет $2d(n-2)$, поэтому каждый из них равен $\frac{2d(n-2)}{n}$. Все внешние углы также равны (как смежные с равными внутренними), а их сумма (§ 21) равна $4d$, поэтому каждый внешний угол правильного многоугольника равен $\frac{4d}{n}$. Если в окружность вписан правильный n-угольник, то центральные углы, опирающиеся на каждую из сторон, равны (ибо дуги равны), поэтому каждый из них равен $\frac{4d}{n}$. Заметим, что центральный и внешний углы правильного многоугольника равны.

б) $n = 6$; внутренний угол равен $\frac{180°(6-2)}{6} = 120°$; внешний и центральный содержат по $\frac{360°}{6} = 60°$.

277. а) По теореме (§ 40) $a_5 = 2R\cdot\sin\frac{180°}{5}$. Сначала выразим a_5 через R: $a_5 = 2R\cdot\sin 36° = 2R\cdot 0{,}5878 = 1{,}176R \approx$ $\approx 1{,}18R$, $a_5 \approx 1{,}18R$ или $a_5 \approx 1{,}2R$. Зная R, можно приближенно разделить окружность (раствором циркуля в $1{,}2R$) на 5 равных частей и построить правильный пятиугольник или пятиконечную звезду. $a_5 = 1{,}469 \approx 1{,}47$ (*дм*).

б) Дано: $a_n = a$. По теореме (§ 40) $a = 2R\cdot\sin\frac{180°}{n}$. Решим это равенство как уравнение относительно неизвестного R. $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$. При $n = 3$ $R = \frac{a}{2\cdot\sin 60°} = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$$= \frac{a}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

278. а) Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну (см. § 41). Так как все стороны треугольника равны, то они одинаково удалены от центра описанной окружности (см. задачу 182 (а)). Поэтому перпендикуляры, опущенные из центра описанной окружности на стороны правильного треугольника, равны между собой и будут радиусами вписанной окружности, которая будет касаться сторон данного треугольника. Следовательно, центры вписанной и описанной окружности совпали, окружности концентрические.

Это верно и для квадрата.

б) Доказывается аналогично.

Примечание. Общий центр окружностей — описанной около правильного многоугольника и вписанной в него — называют центром правильного многоугольника.

279. Дано: $KLMN$ — квадрат, вписанный в окружность O, $KL = a$, ABC — правильный треугольник, описанный около окружности O.

Определить AC (рис. 219).

Сторона квадрата $a = ON\sqrt{2}$ (см. следствие 3 § 43). Отсюда $ON = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Но для треугольника ABC ON является радиусом вписанной, а не описанной окружности, поэтому следствием 2 (§ 43) здесь воспользоваться нельзя. Соединим центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности с вершиной C. OC — биссектриса угла ACB (см. следствие 2 § 41). $\angle ACB = 60°$, $\angle OCN = 30°$. N — точка касания, $ON \perp NC$ (см. § 32). $ON = \frac{1}{2}OC$ (см. § 20), $OC = 2NO = 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}}$ — радиус окружности, которую можно описать около ABC. $AC = OC\sqrt{3}$ (см. следствие 2 § 43), $AC = \frac{2a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. (Полученный ответ можно упростить: $AC = \frac{2a\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2a\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{2} = a\sqrt{6}$.)

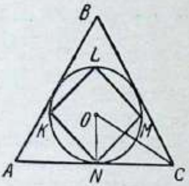


Рис. 219.

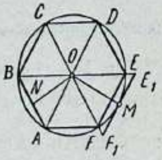


Рис. 220.

280. а) $n = 3$; ON — апофема, OC — радиус правильного треугольника ABC (рис. 219). $ON : OC = 1 : 2$ (см. задачу 279).

б) $n = 4$; $a_4 = R\sqrt{2}$ (§ 43), откуда $R = \frac{a_4}{\sqrt{2}}$; апофема $k = \frac{a_4}{2}$. $k : R = \frac{a_4}{2} : \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $n = 6$. Правильный шестиугольник состоит из шести равных правильных треугольников, каждая сторона которых равна радиусу R (рис. 220). $ON \perp AB$, ON — апофема, $BN = NA = \frac{R}{2}$, $OB = R$, $\angle AOB = 60°$, $\angle BON = 30°$. $\frac{ON}{OB} = \cos BON$, $\frac{ON}{R} = \cos 30°$, $ON = R \cdot \cos 30° = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Искомое отношение $ON : OB = \left(R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) : R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (оба члена отношения разделили на R).

281. а) Углы двух правильных n-угольников соответственно равны, так как каждый из них равен $\frac{2d\,(n-2)}{n}$. Отношения их сторон равны: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} =$ и т. д. ($AB = BC = CD = DE =$ и т. д. и $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 =$ и т. д.). Следовательно, правильные одноименные многоугольники подобны (см. § 39).

б) Правильные шестиугольники (вписанный и описанный) подобны (см. задачу 281 (а)). Выразим их стороны через радиус R. $EF = R$ (см. § 43), а сторону $E_1F_1 = OE_1$ описанного шестиугольника (рис. 220) найдем из прямоугольного треугольника OME_1 (M — точка касания прямой E_1F_1, которая проведена параллельно EF; $OM \perp E_1F_1$). $\angle E_1OM = 30°$. $\frac{OM}{OE_1} = \cos 30°$; $\frac{R}{OE_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $OE_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}} = E_1F_1$. Периметры ($P$ и P_1) правильных шестиугольников относятся, как их стороны (см. § 39): $\frac{P}{P_1} = \frac{EF}{E_1F_1}$; $\frac{P}{P_1} = \frac{R}{\frac{2R}{\sqrt{3}}} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площади их относятся, как квадраты сторон: $\frac{S}{S_1} = \frac{(EF)^2}{(E_1F_1)^2} = \frac{R^2}{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{R^2}{\frac{4R^2}{3}} = \frac{3R^2}{4R^2} = \frac{3}{4}$. (Мы не доказывали здесь, что $\triangle OE_1F_1$ подобен треугольнику OEF и поэтому правильный; что шестиугольник, составленный из шести таких правильных треугольников, как OE_1F_1, есть правильный шестиугольник, причем описанный около данной окружности. Это читатель докажет самостоятельно.)

282. Периметр квадрата равен $7{,}3\cdot 4 = 29{,}2$ (*м*), а площадь равна $(7{,}3)^2 = 53{,}29$ (*кв. м*). Стороны прямоугольника будут: основание $7{,}3 - 2 = 5{,}3$ (*м*), высота $7{,}3 + 2 = 9{,}3$ (*м*). Периметр прямоугольника равен $5{,}3\cdot 2 + 9{,}3\cdot 2 = 29{,}2$ (*м*), а площадь равна $5{,}3\cdot 9{,}3 = 49{,}29$ (*кв. м*).

Решим задачу в общем виде: $P_{\text{кв}} = 4a$, $S_{\text{кв}} = a^2$, $P_{\text{пр}} = 2(a-b) + 2(a+b) = 4a$, $S_{\text{пр}} = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Итак, периметры прямоугольника и квадрата одинаковые, а площадь прямоугольника меньше площади квадрата на b^2 или $53{,}29 - 49{,}29 = 4$ (*кв. м*).

283. Если основание прямоугольника принять за 2 какие-то части, то высота содержит 5 таких частей. Длину одной части (в сантиметрах) обозначим через x. Тогда длины сторон прямоугольника будут $2x$ и $5x$, а сторона квадрата $5x - 2x = 3x$. Площадь прямоугольника $2x\cdot 5x = 10x^2$. После увеличения стороны квадрата на 1 *см* его площадь равна $(3x+1)^2$. Составляем уравнение: $(3x+1)^2 - 1 = 10x^2$ и решаем его: $x = 6$ (*см*). Стороны прямоугольника 12 *см* и 30 *см*, а периметр 84 *см*. Сторона данного квадрата 18 *см*, а периметр 72 *см*.

Ответ: на 12 *см*.

284. а) Сторона квадрата после увеличения на 25% составит 125% от 40 *см* и будет равна $\frac{40\cdot 125}{100} = 50$ (*см*). Площади квадратов равны $40^2 = 1600$ и $50^2 = 2500$ (*кв. см*). Площадь увеличится на 900 *кв. см* или в процентах: $\frac{900\cdot 100\%}{1600\%} = 56{,}25\%$.

Ответ: на 56,25%.

б) Длину стороны квадрата для нахождения искомого процентного отношения в рассмотренной задаче знать не нужно. В самом деле, примем за 1 сторону данного квадрата, тогда после увеличения на 25% сторона составит $1\frac{1}{4}$. Площадь данного квадрата выразится также 1 (квадратной), а площадь увеличенного $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$ (таких же квадратных единиц). Увеличение площади: $1\frac{9}{16} - 1 = \frac{9}{16}$, а в процентах: $\frac{\frac{9}{16}\cdot 100\%}{1} = 56{,}25\%$. Следовательно, какая бы ни была длина стороны квадрата, увеличение его стороны на 25% повлечет увеличение его площади всегда только на 56,25%.

285. $\triangle ACB \sim \triangle ACD$ (см. рис. 102), так как $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$ и $\angle A$ — общий (см. § 38). Гипотенузе AB сходственна гипотенуза AC, катету AC сходствен катет AD (прилежащие к общему углу катеты также сходственны, ибо они лежат против соответственно равных других острых углов). Из пропорции $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ получаем $AC^2 = AB \cdot AD$.

Аналогично из подобных треугольников ACB и BCD получим: $BC^2 = AB \cdot BD$.

286. Большую сторону прямоугольника обозначим через x, тогда меньшая сторона равна $x - 1$, а диагональ $x + 8$. Две смежные стороны и диагональ прямоугольника образуют прямоугольный треугольник; к нему и применим теорему Пифагора (§ 45): $x^2 + (x-1)^2 = (x+8)^2$. Отсюда получим квадратное уравнение: $x^2 - 18x - 63 = 0$, имеющее корни $x_1 = 21$ и $x_2 = -3$. Но длина стороны отрицательной быть не может, поэтому $x = 21$ *см*. Меньшая сторона прямоугольника 20 *см*, а площадь его $21 \cdot 20 = 420$ (*кв. см*).

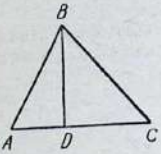


Рис. 221.

287. Дано: $AB = 2{,}6$ *см*, $BC = 3$ *см*, $BD \perp AC$, $BD = 2{,}4$ *см*.

Определить AC (рис. 221).

Высота разбивает $\triangle ABC$ на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых известна гипотенуза (AB и BC) и катет (BD). По теореме Пифагора: $AD^2 + BD^2 = AB^2$, $AD^2 + 2{,}4^2 = 2{,}6^2$, $AD^2 = 2{,}6^2 - 2{,}4^2 = (2{,}6 + 2{,}4)(2{,}6 - 2{,}4) = 5 \cdot 0{,}2 = 1$; $AD = \sqrt{1} = 1$ (берем только арифметическое значение корня, ибо длина отрицательной быть не может). Из прямоугольного треугольника BDC находим DC: $DC^2 = BC^2 - BD^2 = 3^2 - 2{,}4^2 = 5{,}4 \cdot 0{,}6 = 3{,}24$; $DC = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$. $AC = AD + DC = 1 + 1{,}8 = 2{,}8$ (*см*).

288. а) Диагональ квадрата является гипотенузой прямоугольного треугольника, в котором две стороны квадрата являются равными катетами. Обозначим искомую диагональ через x; $x^2 = a^2 + a^2$; $x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

б) Высота правильного треугольника разделяет его на два равных прямоугольных треугольника, в каждом из которых гипотенуза равна стороне a и известный катет равен $\frac{a}{2}$. Искомый катет — высота h; $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

289. а) Обозначим искомую длину катета через x. Катеты равны. $x^2 + x^2 = c^2$, $2x^2 = c^2$, $x^2 = \frac{c^2}{2}$, $x = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

б) Другой острый угол равен 30° и меньший катет равен половине гипотенузы. Обозначим меньший катет через x, тогда гипотенуза $2x$. $(2x)^2 - x^2 = b^2$, $4x^2 - x^2 = b^2$, $3x^2 = b^2$, $x^2 = \frac{b^2}{3}$, $x = \sqrt{\frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$.

290. Если диагонали содержат 6 и 8 некоторых равных частей, то половины диагоналей ромба, являющиеся катетами прямоугольного треугольника, содержат 3 и 4 таких части. Вычислим по теореме Пифагора, сколько (x) таких частей содержит гипотенуза (сторона ромба). $x^2 = 3^2 + 4^2$; $x^2 = 25$, $x = 5$ (частей). Но сторона ромба имеет длину 13,5 *дм*. На одну часть приходится: $13{,}5 : 5 = 2{,}7$ (*дм*). Диагонали ромба 16,2 *дм* и 21,6 *дм*.

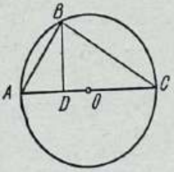


Рис. 222.

291. $AB = 7{,}0$ *см*, диаметр $AC = 16{,}0$ *см*. $BD \perp AC$ (рис. 222). $AD = ?$ $BD = ?$

Соединив точки B и C, получим прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle ABC = d$). $AB^2 = AC\cdot AD$ (см. задачу 285). $7^2 = 16\,AD$, $AD = \frac{49}{16} = 3\frac{1}{16} = 3{,}0625 \approx 3{,}06$ (*см*). По теореме Пифагора теперь уже можем вычислить расстояние точки B от AC. $BD^2 = AB^2 - AD^2$; $BD^2 = 7^2 - \left(\frac{49}{16}\right)^2 = \left(7 + \frac{49}{16}\right)\left(7 - \frac{49}{16}\right) = \frac{161}{16}\cdot\frac{63}{16} = \frac{161\cdot 63}{16^2}$; $BD = \sqrt{\frac{23\cdot 7\cdot 7\cdot 9}{16^2}} = \frac{7\cdot 3\sqrt{23}}{16} = \frac{21}{16}\sqrt{23} = 1\frac{5}{16}\cdot\sqrt{23} = 1{,}3125\cdot\sqrt{23} \approx 6{,}3$ (*см*).

292. $AB = 46{,}5$ *см*; $BC = 62$ *см*; $AC = 77{,}5$ *см* (рис. 221). $BD \perp AC$. $BD = ?$

BD — общий катет прямоугольных треугольников ABD и CBD. Выразим его по теореме Пифагора из одного и другого треугольника, обозначив AD через x. $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 46{,}5^2 - x^2$; $BD^2 = BC^2 - CD^2 = 62^2 - (77{,}5 - x)^2$. Из этих двух равенств получаем: $46{,}5^2 - x^2 = 62^2 - (77{,}5 - x)^2$. Решив это уравнение, получим $x = 27{,}9$, откуда $BD^2 = 46{,}5^2 - 27{,}9^2$, $BD = 37{,}2$ *см*.

293. а) $ABCD$ — ромб, O — точка пересечения диагоналей. Диагональ AC принимаем за общее основание треугольников ABC и ADC, высотами которых будут половины другой диагонали BD. Площадь $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC (BO + DO) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

б) Если один катет принять за основание, то другой катет будет высотой, поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов: $S = \frac{1}{2} ab$, откуда $ab = 2S$; $S = \frac{1}{2} ch$, откуда $ch = 2S$, поэтому $ab = ch$.

в) $S_\triangle = \frac{1}{2} ah$ и $S'_\triangle = \frac{1}{2} bh$; $\frac{S_\triangle}{S'_\triangle} = \frac{\frac{1}{2} ah}{\frac{1}{2} bh} = \frac{a}{b}$.

г) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, но $\frac{a+b}{2} = m$ — средней линии трапеции, поэтому $S = mh$; $S_\triangle = \frac{a}{2} \cdot h$, но $\frac{a}{2} = m$ — средней линии треугольника, поэтому $S_\triangle = mh$.

294. Две стороны и диагональ параллелограмма образуют равнобедренный треугольник, основание которого (42 *см*) и высота являются основанием и высотой параллелограмма. Высота разделит этот треугольник на два равных прямоугольных треугольника. Найдем высоту: $h = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28$ (*см*). $S = 42 \cdot 28 = 1176$ (*см*^{2}).

295. а) Высота отделяет от равностороннего треугольника прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза (x) вдвое больше катета $\left(\frac{x}{2}\right)$. Из теоремы Пифагора: $x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = h^2$; $\frac{4x^2 - x^2}{4} = h^2$; $\frac{3x^2}{4} = h^2$; $x^2 = \frac{4h^2}{3}$; $x = \sqrt{\frac{4h^2}{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$. Сторона $a_3 = \frac{2h\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ (*дм*).

Площадь $S = \frac{1}{2} a_3 h = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot h = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{6^2\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$ $(\textit{дм}^2)$.

б) Высота равнобедренного прямоугольного треугольника разбивает его на два равнобедренных прямоугольных треугольника, поэтому гипотенуза в 2 раза больше высоты. $S = \frac{1}{2}\left(2 \cdot 3\frac{1}{3}\right) 3\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{3} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ $(\textit{м}^2)$.

296. $S_\Delta = \frac{1}{2} bh$; $126 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot h$; $h = 12{,}6$ (*см*). По гипотенузе (боковая сторона $a = 13$ *см*) и катету h найдем другой катет: $x = \sqrt{13^2 - 12{,}6^2} = \sqrt{(13 + 12{,}6)(13 - 12{,}6)} = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2$ (*см*). Остальная часть основания $20 - 3{,}2 = 16{,}8$ (*см*) является катетом другого прямоугольного треугольника, в котором другой катет h. Найдем гипотенузу (другую боковую сторону): $c = \sqrt{16{,}8^2 + 12{,}6^2} = 21$ (*см*).

297. Квадрат катета равен его проекции, умноженной на гипотенузу (см. задачу 285): $24^2 = 9{,}6c$; $c = \frac{24^2}{9{,}6} = 60$. Высоту вычислим по теореме Пифагора (рассмотрим такой прямоугольный треугольник, в котором катет в 24 *см* будет служить уже гипотенузой, а его проекция в 9,6 *см* — катетом и искомая высота h — другим катетом): $h = \sqrt{24^2 - 9{,}6^2} = \sqrt{33{,}6 \cdot 14{,}4} = \sqrt{483{,}84} \approx 22$ (*см*). $S = \frac{1}{2} ch \approx 660$ $(\textit{см}^2)$.

298. Если меньшее основание обозначить через x, то каждая боковая сторона равна x, большее основание равно $x + 20$ и периметр трапеции равен $x + x + x + x + 20 = 4x + 20$. По условию $4x + 20 = 124$; $x = 26$ (*см*). Вычислим высоту, как катет, если другой катет равен $20 : 2 = 10$ (*см*), а гипотенуза 26 *см*. $h = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{36 \cdot 16} = 6 \cdot 4 = 24$ (*см*). Площадь $S = \frac{46 + 26}{2} \cdot 24 = 864$ $(\textit{см}^2)$.

299. Диагонали ромба относятся, как $1 : 1\frac{1}{3}$ или как $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{3} : \frac{4}{3} = 3 : 4$; если в меньшей диагонали содержится 3 какие-то части, то в большей — 4 такие же части. Длину одной части примем за x *см*, тогда длины диагоналей $3x$ *см* и $4x$ *см*. Площадь ромба (задача 293 (а)) равна $\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 4x = 6x^2$ (*см*²). По условию $6x^2 = 150$, откуда $x^2 = 25$, $x = 5$ (*см*). Диагонали 15 *см* и 20 *см*. Половины их будут катетами; вычислим гипотенузу — сторону ромба: $\sqrt{7{,}5^2 + 10^2} = 12{,}5$ (*см*). Площадь ромба, как параллелограмма, равна $12{,}5h = 150$, откуда $h = 12$ (*см*).

300. Ответ: 73 *см*².

301. а) Площадь описанного многоугольника (см. рис. 99): $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \frac{1}{2}AB\cdot OK + \frac{1}{2}BC \times OL + \frac{1}{2}CD\cdot OM + \frac{1}{2}DA\cdot ON = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)\,OK = \frac{1}{2}Pr.$

б) Приближенную (грубую) проверку полученного ответа сделайте вычислением площади описанного квадрата.

302. а) Для правильного треугольника: сторона $a_3 = R\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$, периметр $P_3 = 60\sqrt{3}$ и апофема $r = \frac{R}{2} = 10$ (см. задачу 280). Площадь $S = \frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2}\times 60\sqrt{3}\cdot 10 = 300\sqrt{3} \approx 519{,}6 \approx 520$ (*см*²).

б) Для квадрата $S = 800$ *см*².

в) Для правильного шестиугольника $a_6 = R = 20$; $P_6 = 120$; $r = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$; $S = 600\sqrt{3} \approx 1039$ (*см*²).

303. а) Центральный угол правильного n-угольника равен $\frac{360°}{n}$. Решим уравнение $\frac{360°}{n} = 7°$; $n = \frac{360°}{7°} = 51\frac{3}{7}$, что невозможно (число сторон дробным быть не может). $\frac{360}{n} = 2°$; $n = \frac{360°}{2°} = 180$. Центральный угол в 2° — в правильном многоугольнике, имеющем 180 сторон.

б) Внутренний угол правильного n-угольника равен $\frac{180°(n-2)}{n}$. Из уравнения $\frac{180°(n-2)}{n} = 120°$ находим $n = 6$. Площадь правильного вписанного шестиугольника равна $\frac{1}{2}P_6 r = 54$. Но $P_6 = 6a_6 = 6R$ и $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}\cdot 6R\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = 54$. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = 54$. $R^2 = \frac{54\cdot 2}{3\sqrt{3}} = \frac{18\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3} \approx 12\cdot 1{,}73 \approx 20{,}76$. $R \approx \sqrt{20{,}76} \approx 4{,}6$ (*дм*).

304. Приближенную проверку полученного ответа сделать вычислением площади какого-нибудь прямоугольника, примерно равного данному пятиугольнику.

305. $\triangle DBE \backsim \triangle ACB$ (по двум углам, § 38). Гипотенузы — сходственные стороны и из равенства $BD = \frac{1}{2} AB$ получаем их отношение $\frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$ или $\frac{AB}{BD} = 2$. Найдем отношение площадей $\frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = \frac{AB^2}{BD^2} = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = 2^2 = 4$ (теорема 3 § 39).

306. а) Осями симметрии правильного шестиугольника и любого правильного многоугольника с четным числом сторон являются такие прямые, проходящие через центр: 1) которые соединяют пары противоположных вершин и 2) которые соединяют середины пар противоположных сторон (см. § 8); в шестиугольнике их 6, в n-угольнике их n.

б) Каждая ось симметрии правильного пятиугольника и любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон проходит через вершину и середину противоположной стороны (она проходит и через центр); в пятиугольнике их 5, в n-угольнике — n.

в) Центр правильного n-угольника является и его центром симметрии (см. § 25), только если n четное.

307. Анализ. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, сторона $BC = a$ и медианы $BD = m_b$ и $CE = m_c$ — известны (рис. 223). Три данных отрезка a, m_b и m_c не образуют треугольника. Естественно, возникает вопрос: а нельзя ли как-то переместить некоторые из этих отрезков, с тем чтобы они образовали треугольник, который мы могли бы построить. Возможно, что из построенного вспомогательного треугольника получим искомый треугольник. При перемещении отрезков удобен метод параллельного переноса (см. задачу 173). EC параллельно переместим в положение DF, чтобы концы E и D медиан совпали: $DF \parallel EC$, $DF = EC$. Все три стороны треугольника BDF были бы известны, если бы был известен отрезок CF. Но $CF = ED$ ($EDFC$ — параллелограмм), а $ED = \frac{1}{2} BC$ (см. § 27), поэтому $CF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$. Итак, $\triangle BDF$ известен. Отложим $BC = a$

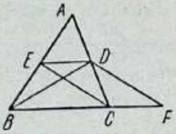


Рис. 223.

на BF и сделаем обратное параллельное перенесение FD в положение CE: проведем $CE \parallel FD$ и $DE \parallel FB$. Проводим прямые CD и BE до пересечения. $\triangle BAC$ — искомый.

Построение и доказательство теперь легко сделать самостоятельно. Задача имеет, очевидно, единственное решение.

308. а) $C \approx 28{,}3 \approx 28$ (*дм*); $S \approx 63{,}8 \approx 64$ (*дм*^{2});

б) $2\pi R = 94{,}2$; $2R \approx \frac{94{,}2}{3{,}14} = 30$ (*см*);

в) $\pi R^2 = 50$, $R \approx \sqrt{\frac{50}{3{,}14}} \approx 3{,}99$ (*дм*).

309. а) Длина окружности увеличится в 2 раза, в 5 раз, в n раз, а площадь круга — в 4 раза, в 25 раз, в n^2 раз, так как $\frac{C}{C'} = \frac{2\pi R}{2\pi R'} = \frac{R}{R'}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, т. е. длины окружностей пропорциональны их радиусам (или диаметрам), а площади кругов пропорциональны квадратам их радиусов (или диаметров).

б) $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi(R+1) = 2\pi R + 2\pi$, $C' - C = 2\pi$ (*дм*); $C'' = 2\pi(R+m) = 2\pi R + 2\pi m$, $C'' - C = 2\pi m$ (лин. ед.).

$S = \pi R^2$, $S_1 = \pi(R+1)^2 = \pi(R^2 + 2R + 1) = \pi R^2 + 2\pi R + \pi$, $S_1 - S = 2\pi R + \pi$ (*дм*); $S_2 = \pi(R+m)^2 = \pi R^2 + 2\pi Rm + \pi m^2$, $S_2 - S = 2\pi Rm + \pi m^2$ (кв. ед.).

Сравнивая результаты, видим, что увеличение длины окружности ($2\pi m$) зависит только от m (увеличение радиуса) и не зависит от длины R самого радиуса. Увеличение же площади круга ($2\pi Rm + \pi m^2$) зависит и от m, и от R.

310. а) $\frac{1}{8}\ \pi R \approx 0{,}707 \approx 0{,}7$ (*м*); б) 71,6 *см*; в) $\frac{\pi Rn}{180} = R$, $n = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57{,}295^\circ \approx 3438' \approx 206265'' \approx 57^\circ 17' 45''$.

311. а) В формуле площади сектора градусы в числах 360 и n раздробим в минуты: $\frac{\pi R^2 \cdot 4035'}{360 \cdot 60'} \approx \frac{3{,}14 \cdot 4035}{21600} \approx 0{,}586$ (*дм*^{2}).

б) $\frac{\pi R^2 \cdot 135^\circ}{360^\circ} = 6$, $\frac{3{,}14 R^2 \cdot 3}{8} = 6$, $R^2 \approx \frac{6 \cdot 8}{3 \cdot 3{,}14} = \frac{16}{3{,}14}$, $R \approx 2{,}3$ *м*.

в) $\frac{\pi R^2 n}{360} = 56{,}8$; $\frac{3{,}14 \cdot 36n}{360} = 56{,}8$; $n \approx \frac{56{,}8 \cdot 10}{3{,}14} \approx 180^\circ 54'$.

312. а) C — точка касания, $AB = a$ (рис. 224).

Площадь кольца $S = \pi\cdot AO^2 - \pi\cdot OC^2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi\cdot AC^2$ (заменили на основании теоремы Пифагора). $OC \perp AB$ как радиус, проведенный в точку касания C. Но в большем круге OC, как перпендикуляр к хорде AB, делит ее пополам: $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$. $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

б) В предыдущей задаче получили: $S = \pi\cdot AC^2$ (рис. 224), т. е. площадь кольца равна площади $\pi\cdot AC^2$ круга с радиусом AC. Но тогда диаметр этого круга $2AC = AB$, что и требовалось доказать.

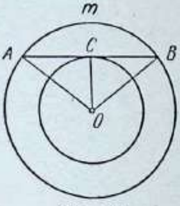


Рис. 224.

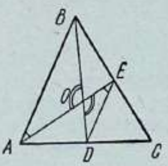


Рис. 225.

313. а) Площадь сегмента AmB есть разность площадей сектора $OAmB$ и треугольника (рис. 224). Пусть $AB = a_3 = R\sqrt{3}$; апофема $OC = \frac{R}{2}$ (см. задачу 280), площадь $S_\triangle = \frac{1}{2}AB\cdot OC = \frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Сектор $OAmB$ составляет $\frac{1}{3}$ круга, и его площадь $\frac{\pi R^2}{3}$. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

б) Пусть $AB = a_4 = R\sqrt{2}$ (рис. 224). Тогда апофема $OC = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и $S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot R\sqrt{2}\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$. $S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{4}$. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2(\pi - 2)}{4}$.

в) Пусть $AB = a_6 = R\cdot OC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. $S_\triangle = \frac{1}{2}R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. $S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{6}$. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

314. а) Дано: $\triangle ABC$, BD и AE — медианы (рис. 225). Требуется доказать: $OE = \frac{1}{3} AE$.

Соединим E и D. $\triangle OED \backsim \triangle OAB$ (средняя линия $DE \parallel AB$, $\angle BAO = \angle OED$ и вертикальные углы равны). $ED = \frac{1}{2} AB$, отсюда отношение этих сходственных сторон $\frac{ED}{AB} = \frac{1}{2}$. Этому же числу равно и отношение двух других сходственных сторон: $\frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}$, т. е. AO в 2 раза больше OE или $OE = \frac{1}{3} AE$. Аналогично $OD = \frac{1}{3} BD$.

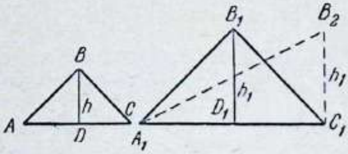


Рис. 226.

б) По только что доказанному и медиана из третьей вершины C должна отсечь $\frac{1}{3}$ медианы BD, т. е. пройдет через ту же точку O, и отрезки каждой медианы (например, OE и OA) относятся, как $1:2$.

315. а) Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = BC$, $A_1B_1 = B_1C_1$, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{(AC)^2}{(A_1C_1)^2}$.

Требуется доказать: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 226).

Площади: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h$ и $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot h_1$. Подставим в данную пропорцию: $\frac{\frac{1}{2} AC \cdot h}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot h_1} = \frac{(AC)^2}{(A_1C_1)^2}$; $\frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}$. Разделим обе части равенства на дробь $\frac{AC}{A_1C_1}$

и получим: $\frac{h}{h_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, т. е. высоты, проведенные к основаниям пропорциональны основаниям. Так как данные треугольники равнобедренные, то основания делятся высотами пополам и $\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{A_1C_1}{2}} = \frac{2AC}{2A_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Получаем пропорцию: $\frac{h}{h_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, т. е. прямоугольные треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ подобны. Отсюда $\angle A = \angle A_1$. Тогда и $\angle C = \angle C_1$ и $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

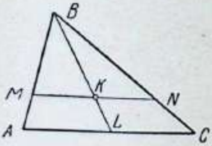


Рис. 227.

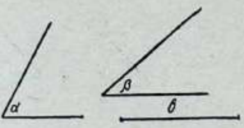


Рис. 228.

б) Если бы треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не были равнобедренными, то для них верна была бы только пропорция: $\frac{h}{h_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, которая может быть верной и для неподобных треугольников. Примерами таковых являются $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_2C_1$ (рис. 226), которые не подобны (соответствующие углы не равны). Этим доказано, что теорема, обратная теореме 3 § 39, не верна.

316. Проведем $MN \parallel AC$ (рис. 227). Соединим середину K отрезка MN с вершиной B. BK — медиана треугольника MBN. Можно предположить, что искомое г. м. т. (см. § 15) есть медиана данного треугольника ABC. Для этого нужно доказать: 1) что если $AL = LC$ и $MN \parallel AC$, то $MK = KN$; 2) что если точка не лежит на медиане, то она не является серединой отрезка, лежащего внутри треугольника и параллельного той стороне, к которой проведена медиана. Искомое г. м. т. действительно есть медиана.

317. Пусть заданы углы α и β и биссектриса b (рис. 228). Построим какой-нибудь вспомогательный треугольник с данными углами α и β и проведем в нем биссектрису третьего угла. Искомый треугольник будет подобен вспомогательному и коэффициент подобия определяется сходственными биссектрисами (см. задачу 237). Задача решается методом подобия (см. примечание к решению задачи 244). Выполните построения с помощью циркуля и линейки и докажите, что построенный треугольник удовлетворяет всем требованиям задачи. Убедитесь, что задача имеет единственное решение.

Литература

Арифметика

Андронов И. К., Брадис В. М. Арифметика. М., 1962.
Березанская Е. С. Сборник задач и упражнений по арифметике. М., 1953.
Богданов И. М., Крылова З. Е., Россихин П. В. Сборник задач по арифметике. М., 1962.
Нешков К. И. Система изложения курса арифметики в V классе. М., 1963.
Пономарев С. А., Сырнев Н. И. Сборник задач и упражнений по арифметике. М., 1964.
Принцев Н. А. Арифметика. М., 1962.
Шевченко И. Н. Арифметика. М., 1963.

Алгебра

Александров П. С., Колмогоров А. Н. Алгебра, ч. I. М., 1940.
Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. Сборник задач по элементарной математике. М., 1959.
Барсуков А. Н. Алгебра. М., 1964.
Киселев А. П. Алгебра, ч. I. М., 1964.
Ларичев П. А. Сборник задач по алгебре, ч. I. М., 1964.
Подтягин М. Е. Элементарная математика. Краснодар, 1963.
Туманов С. И. Элементарная алгебра. М., 1962.
Шапошников Н. А., Вальцов Н. К. Сборник алгебраических задач, ч. I. М., 1947.

Геометрия

Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. I. М., 1957.
Гурвич Т. Л., Тутаев Л. К. Устные вопросы по геометрии. Минск, 1957.
Карнацевич Л. С., Карнацевич В. С. Сборник вопросов и задач по планиметрии. М., 1960.
Киселев А. П. Геометрия, ч. I. М., 1961.
Назарьев С. В., Никитин И. И., Игнатенков И. Р., Безызвестнов И. В. Сборник задач по геометрии. М., 1948.
Немытов П. А. Сборник задач на доказательство по геометрии. М., 1956.
Никитин Н. Н. Геометрия. М., 1964.
Никитин Н. Н., Маслова Г. Г. Сборник задач по геометрии, ч I. М., 1964.
Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии, ч. I. М., 1962.

Оглавление

Часть вторая

ГЕОМЕТРИЯ

Глава I. Основные понятия

Глава II. Треугольники

Глава III. Параллельные прямые

Метельский Николай Владимирович

Пособие по математике для поступающих в техникумы и училища. Изд. 3-е, стереотипное. Под ред. *Л. К. Тугаева.* Минск, «Вышэйшая школа», 1967.
472 стр. с илл.

Редактор *Т. К. Майборода*
Обложка *Л. П. Дубовицкой*
Худож. редактор *И. М. Андрианов*
Техн. редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Г. В. Вагабова*

Подп. к печати с матриц 12/III 1968 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$ типогр. № 3. Печ. л. 14,75. Усл. печ. л. 24,78. Уч.-изд. л. 26,65. Изд. № 65—107. Зак. 987. Тираж 150 000 экз. (1-й завод 50 000 экз.). Цена 87 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Редакция литературы для техникумов и профтехучилищ. Тем. план 1968 г. № 46. Минск, ул. Кирова, 24.

Отпечатано с матриц издательства «Звязда» полиграфкомбинатом им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Минск, ул. Красная, 23.

87 к.