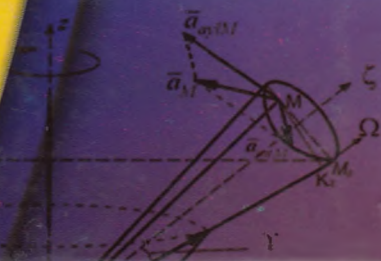
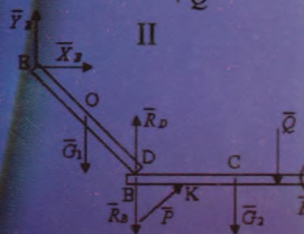
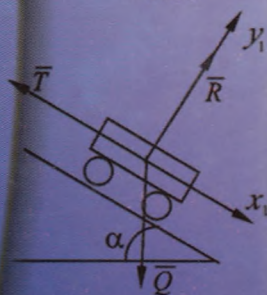
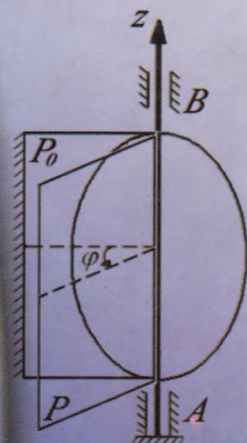
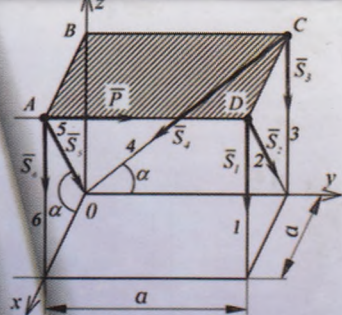


SH.A.Shoobidov, X.N.Habibullayeva,  
F.D.Fayzullayeva

# NAZARIY MEXANIKA



53.  
Sh-74

BUKAMA TROAV YLIO HAKIMUNEN HOTELUNEN  
KULLACAY MIFAT

O'quv qo'llanma "Nazariy mexanika" fanining "Statika" va "Kinematika" bo'limlariga bag'ishlangan bo'lib, statikaning qonun-qoidolari to'liq, batafsil bayon etilgan. Ularga doir masalalar yechilgan. Kinematika bo'limida nuqta kinematikasi va qattiq jism kinematikasiga doir asosiy mavzular yoritilgan. Barcha mavzular bo'yicha masalalar yechilib ko'rsatilgan. Har bir bobdan so'ng takrorlash uchun savollar keltirilgan. Mazkur o'quv qo'llanma "Muhandislik va muhandislik ishi" yo'nalishlarida ta'lim olayotgan bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan, bo'lib, undan shu fanga qiziquvchi kitobxonlar ham foydalanishlari mumkin.

*Taqrizchilar:*

A.A.HAMIDOV,

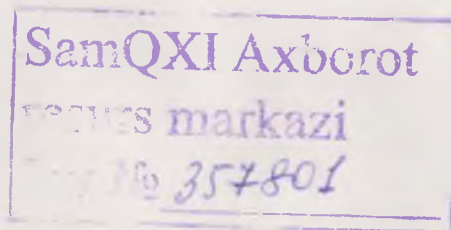
fizika-matematika fanlari doktori, professor.

O.I.UMAROV,

fizika-matematika fanlari doktori, professor.

U.D.NURMATOV,

texnika fanlari nomzodi, dotsent.



ISBN 978-9943-08-343-1

©Sh. Shoobidov, X.Habibullayeva, F.Fayzullayeva. «Nazariy mexanika»,  
«Yangi asr avlodi». 2008-yil.

## MUQADDIMA

Nazariy mexanika qadimgi Yunonistonda paydo bo'lgan deb hisoblanadi. "Mexanik muammolar" asari mexanika bo'yicha yozilgan eng qadimgi asardir. Uning muallifi Aristotel deb faraz qilinadi. Asarning markaziy mavzusi – *richag*. Iltis statikaning kinematik yo'nalishiga tegishli. Statikaning geometrik yo'nalishi Arximed nomi bilan bog'liqdir. Bu davrdagi kuchli mexaniklardan yana biri Iskandariyalik Geron hisoblanadi. Mexanika fanining rivojida Sharqning yetuk olimlari bo'lgan Sobit ibn Qurra, Abu Rayhon Beruniy, Abu Abdulloh Yusuf al-Xorazmiy va Abu Ali ibn Sinolar salmoqli hissa qo'shganlar. Nazariy mexanikada moddiy obyektlar sifatida moddiy nuqta va mexanik sistemalar olinadi.

Absolut fazo, zamon va vaqt, kuch va massa, inersial sanoq sistemasi, o'zgaruvchan tutash muhitlar haqidagi tushinchalar nazariy mexanikaning asosiy tushunchalaridir. Galiley – Nyuton inersion qonuni, inersial sanoq sistemasiga nisbatan harakat tenglamasi, ta'sir va aks ta'sirning tengligi haqidagi qonun nazariy mexanikaning asosiy qonunlari hisoblanadi. Bu qonunlardan mexanik sistema harakatini tekshirishda Lagranjning birinchi va ikkinchi tur tenglamalari, Gamil'tonning kanonik tenglamalari, dinamikaning umumiy tenglamalari chiqariladi. Harakat ustivorligi (turg'unligi) nazariyasi, osmon ballistikasi va osmon mexanikasi–nazariy mexanikaning tatbiqiy ahamiyatga ega bo'lgan sohalaridir.

Tabiatda ro'y beradigan barcha o'zgarishlar va hodisalar *harakat* deb ataladi. Materiya harakatining eng sodda turi, jism holatining o'zgarishidir, ya'ni moddiy jismlarning vaqt o'tishi bilan fazoda bir-birlariga nisbatan qo'zg'alishlaridir. Harakatning bu turi mexanik harakat deb ataladi. Nazariy mexanika moddiy jismlar harakatining umumiy qonunlari haqidagi fandir. Xususan, agar jismning fazodagi holati vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, bu holda jism muvozanat holatida turadi. Muvozanat mexanik harakatning xususiy holidir. Binobarin, nazariy mexanika muvozanat qonuniyatlarini ham o'rganuvchi fandir. Harakat va muvozanat tushunchalaridan ularning nisbiy-  
li haqida xulosa chiqarish mumkin.

Mexanika fani matematika fani singari qadimiy fan hisoblanadi. Nazariy mexanikada izlanishning matematik usullari keng tatbiq qilinadi. Jismning holati boshqa qo'zg'almas deb olingan jismga birlashtirilgan koordinata o'qlariga

nisbatan kuzatiladi. Harakat davomida jismning holati kuzatilayotgan sanoq sistemasiga nisbatan vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Tabiatda harakatsiz jism mavjud emas, binobarin qo'zg'almas sanoq sistemasi ham mavjud emas.

Odatda, ko'pgina muhandislik masalalarini hal qilishda (kosmik uchishlar masalasi bundan mustasnodir), yerni qo'zg'almas deb qaraladi. Shuning uchun, keyinchalik, agar alohida ta'kidlanmasa, yerga bog'langan sanoq sistemasi qo'zg'almas deb qabul qilinadi. Hozirgi zamon "Nazariy mexanika" fanining asosiy qonunlarini 1687-yilda mashhur donishmand olim Isaak Nyuton o'zining «Tabiiy fanlar falsafasining matematik asoslari» nomli asarida bayon qilib bergan. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, qonunlari Arximed va Galiley singari hamda boshqa buyuk olimlarning kundalik kuzatishlari va izlanishlarining natijasidir.

Nazariy mexanika fanining rivojlanishi davomida, undan ko'pgina muhandislik fanlari mustaqil fan bo'lib ajralib chiqdi. Masalan: materiallar qarshiligi, inshootlar nazariyasi, suyuq va gazsimon jismlar mexanikasi, mashina va mexanizmlar nazariyasi va boshqalar. Bu fanlar nazariy mexanika qonunlariga tayangani holda mustaqil fanlar tarzida shakllandi.

Hozirgi zamon mexanikasining tez sur'atlar bilan taraqqiy etishi, texnikani rivojlantirishda ijodiy ishlashga qodir bo'lgan yuqori malakali muhandis xodimlarga muhtojlikni oshiradi. Hozirgi zamon muhandislari o'ta murakkab hisob ishlarini bajarishlari darkor, masalan: inshoot muvozanatlariga oid (imorat, ko'priklar va boshqalar), mashina va mexanizmlar harakatiga oid hisob-kitob ishlari. Bunday masalalarni yechishga faqat "Nazariy mexanika" fani qonun-qoidalarini chuqur o'rgangan muhandislargina qodirdirlar.

"Nazariy mexanika" fani uch qismdan iborat: *statika*, *kinematika* va *dinamika*.

Statika moddiy jismlar muvozanatiga oid qonunlarni o'rganadi.

Kinematika jism harakati qonunlarini bu harakatni vujudga keltiruvchi yoki o'zgartiruvchi sababga bog'lamay tekshiradi. Bundan ko'rinadiki, kinematika jism harakatini faqat geometrik nuqtayi nazardan tekshiradi, ya'ni bu harakatni vujudga keltiruvchi sababga e'tibor bermaydi. Shuning uchun kinematikani to'rt o'lchovli geometriya deb atash mumkin. Bunda uchta fazoviy o'zgaruvchilarga to'rtinchi o'zgaruvchi *vaqt* ham qo'shiladi.

Dinamika jismlar harakatini bu harakatni vujudga keltiruvchi, o'zgartiruvchi sababga bog'lab tekshiradi.

## QATTIQ JISM STATIKASI

## THEOR. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

## 1-§. Asosiy tushunchalar va ta'riflar

Jamga ta'sir etuvchi kuchlar turlari, ular ustida amallar, kuchlarning muvozanat shartlarini o'rganuvchi nazariy mexanikaning bo'limi *statika* deb ataladi. Statikani o'rganish uchun zarur bo'lgan asosiy tushuncha va ta'riflarni keltiramiz.

1. **Moddiy nuqta.** Ko'rilayotgan masalada geometrik o'lchamlarining ahamiyati bo'lmagan jism moddiy nuqta deb ataladi.

2. **Mexanik sistema.** Har birining holati va harakati boshqalarining holati hamda harakatiga bog'liq bo'lgan *moddiy nuqtalar* to'plami *mexanik sistema* deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, mexanik sistema moddiy nuqtalar orasida o'zaro ta'sir mavjud bo'lishini taqozo qiladi.

3. **Absolut (mutlaq) qattiq va deformatsiyalanuvchi jism.** Qattiq jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa har qanday holatda ham o'zgarimasdan qolsa, bunday jism *absolut (mutlaq) qattiq jism* deb ataladi. Tabiatda mutlaq qattiq jism mavjud emas. Har qanday qattiq jism bo'lmasin, shunday sharoit mavjud qilish mumkinki, uning ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarishiga olib kelish mumkin. Bu jism shaklining o'zgarishiga olib keladi. Ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgaruvchi bo'lgan qattiq jism deformatsiyalanuvchi jism deb ataladi. Binobarin tabiatda faqat deformatsiyalanuvchi jism mavjuddir.

4. **Erkin va erkin bo'lmagan jism.** Fazoda ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin bo'lgan jism *erkin jism* deb ataladi. Quyosh sistemasining sayyorolari bunga misol bo'la oladi. Agar jismning fazodagi vaziyati yoki harakatiga qandaydir chek qo'yilsa, bunday *jism erkin bo'lmagan*, ya'ni *bog'lanishdagi jism* deb ataladi.

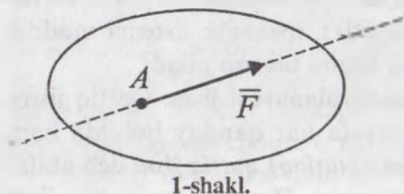
5. **Kuch.** Moddiy jismlarning harakati yoki ichki holatining o'zgarishiga sabab bo'luvchi, o'zaro bir-birlariga ko'rsatgan ta'sirlarning miqdor o'lchovi **kuch** deb ataladi. Jismlarning o'zaro mexanik ta'siri ularni bir-biriga tegib yoki ma'lum masofada turganida ham mavjud bo'lishi mumkin.

Birinchi toifaga jismlarning o'zaro bir-birlariga bosimi, ikkinchi toifaga har xil tortishish kuchlari : sayyoralar orasidagi o'zaro tortishish, elektr, magnit va boshqalar kiradi. Jismga qo'yilgan kuch: miqdor, yo'nalish va qo'yilish nuqtasi bilan xarakterlanadi, ya'ni **kuch vektor kattalikdir**. SI xalqaro birliklar sistemasida kuch birligi – **Nyuton**.

**Kuch yo'nalishi** deb, tinch holatda turgan erkin moddiy nuqtaning qo'yilgan kuch ta'siridan olgan harakatining yo'nalishiga aytiladi. Kuch yo'nalgan to'g'ri chiziq kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi (1-shakl).

Jismning bevosita kuch qo'yilgan nuqtasi **kuch qo'yilgan nuqta** deb ataladi. Kuch yo'naltirilgan kesma orqali grafik tasvirlanadi. Tanlab olingan masshtabda kesma uzunligi kuch miqdorini ifodalaydi, kesmaning yo'nalishi kuch yo'nalishiga monand, uning boshlanishi yoki oxiri kuch qo'yilgan nuqtaga monand. 1-shaklda kuch A nuqtaga qo'yilgan.

6. **Kuchlar sistemasi.** Jismga qo'yilgan bir necha kuchlardan iborat



1-shakl.

bo'lgan  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  to'plam **kuchlar sistemasi** deb ataladi.

7. **Ekvivalent kuchlar sistemasi.**

Agar jismga qo'yilgan  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  kuchlar sistemasi ta'sirini, uning tinch yoki harakat holatini

o'zgartirmay, boshqa kuchlar sistemasi, ya'ni  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$ , bera olsa, unday ikki kuch sistemasi **ekvivalent kuchlar sistemasi** deyiladi  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$ .

8. **Teng ta'sir etuvchi kuch.** Berilgan kuchlar sistemasi biror kuchga ekvivalent bo'lsa, bunday kuch **teng ta'sir etuvchi kuch** deb ataladi. Shuni nazarda tutish kerakki, kuchlar sistemasining jismga bergan ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuch mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisidir  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n) \Leftrightarrow \vec{R}$ .

9. **Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi.** Erkin jism unga qo'yilgan kuchlar sistemasi ta'sirida tinch holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi **mu-**

muvozanatlashgan kuchlar sistemasi yoki nolga ekvivalent sistema deyiladi.  
 $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \Leftrightarrow 0$ .

## 2-§. Statikaning asosiy aksiomalari

Statikaning asosida isbot talab etilmaydigan, aksioma deb ataluvchi boshlang'ich haqiqatlar to'plami yotadi. Bu aksiomalarga asoslanib, statikaning mazmunini tashkil etuvchi teoremlar isbot qilinadi.

**1-aksioma.** Erkin qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng

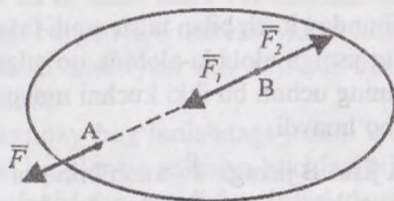
$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$  va bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lsa, kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Bu aksioma oddiy muvozanatlashgan kuchlar sistemasini aniqlaydi (2-shakl).



2-shakl.

**2-aksioma.** Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga, muvozanatlashgan kuchlar sistemasini qo'shsak yoki undan ayirsak, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Yuqoridagi ikki aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi:



3-shakl.

Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uning qo'yilish nuqtasini ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirishimiz mumkin. Kuchning ta'sir chizig'i bo'lab ixtiyoriy B nuqtasiga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini, ya'ni tashkil etuvchilari miqdor jihatidan  $F$  ga teng bo'lgan  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow 0$  qo'shamiz.

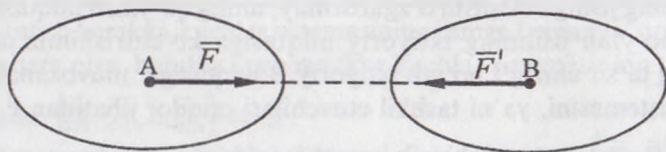
Ikkinchi aksiomaga, asosan, bu kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi. Osonlik bilan ko'rish mumkinki,  $\vec{F}$  va  $\vec{F}_2$  kuchlar sistemi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi. Bu muvozanatlashgan kuchlar sistemasini jismdan olib tashlaymiz. U holda jismning B nuqtasiga qo'yilgan  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  kuchigina qoladi. Demak, kuch o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin ekan. O'zining ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lgan vektor *sirpanuvchi vektor* deb ataladi.

**3-aksioma.** Jismning biror nuqtasiga turli yo'nalishda qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi shu nuqtaga qo'yilgan bo'lib, ularning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Bu aksioma bir nuqtaga qo'yilgan ikki kuchning yig'indisi, shu nuqtaga qo'yilgan ikki vektorni qo'shish qonuniyatiga asoslanadi (4-shakl).  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlarning teng ta'sir etuvchisini R bilan belgilab, 3-aksiomaga asosan quyidagini yozish mumkin:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

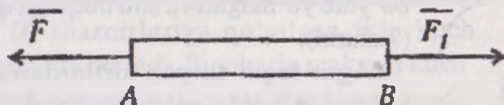
**4-aksioma.** Ikki jismning bir-biriga ko'rsatgan ta'sir kuchlari o'zaro teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Bu aksioma ta'sir, aks ta'sir tenglik aksiomasi deyiladi. Aksioma tabiatda bir tomonlama ta'sir mavjud emasligini ko'rsatadi. Birinchi jism ikkinchi jismga qanday kuch bilan ta'sir etsa (ta'sir), ikkinchi jism birinchi jismga shunday kuch bilan ta'sir etadi (aks ta'sir). Ta'sir va aks ta'sir kuchlarini ikkita jismga alohida-alohida qo'yilganligini osonlik bilan ko'rish mumkin. Shuning uchun bu ikki kuchni muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deb qarab bo'lmaydi.

Masalan. Agar A jism B jismga  $\vec{F}$  kuch bilan ta'sir qilsa, u holda bir vaqtning o'zida B jism ham A jismga shunday kuch bilan ta'sir qiladi:  $\vec{F}' = -\vec{F}$  (5-shakl).



5-shakl.

**5-aksioma.** Berilgan kuchlar ta'sirida deformatsiyalangan jism muvozanat holatida absolut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi. Bu aksiomaga *qotish prinsipi* deyiladi. Aksiomadan ko'rinadiki, absolut qattiq jismning muvozanat sharti zaruriydir, ammo ko'p hollarda deformatsiyalanuvchi jismning muvozanati uchun yetarli emas, haqiqatan ham, masalan AB sterjenning ikki  $\vec{F}$  va  $\vec{F}_1$  kuchlar ta'sirida muvozanatini ko'raylik (6-shakl). Bu kuchlar miqdor jihatidan AB to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan.



6-shakl.

Agar sterjen absolut qattiq bo'lsa, u holda  $\vec{F}$  va  $\vec{F}_1$  kuchlarning har qanday miqdorlarida sterjen muvozanatda bo'ladi. Agar sterjen absolut qattiq bo'lmasa, kuchlarning miqdori ixtiyoriy bo'lmaydi, chunki sterjenni uzishi mumkin bo'lgan kuchlarning chegaraviy qiymatlari mavjuddir.

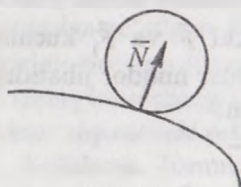
### 3-§. Bog'lanish va bog'lanish reaksiya kuchlari

Jismning holati va harakatini cheklovchi sabab *bog'lanish* deb ataladi. Mexanikada bog'lanishlar qattiq yoki elastik jismlar vositasida bajariladi.

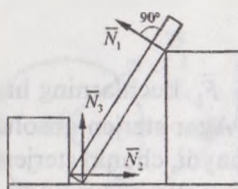
Bog'lanishni jismga bergan ta'sirini ekvivalent kuch bilan almashtirish mumkin, uni bog'lanish reaksiyasi deb aytiladi. Jismning bog'lanishga ta'siri *bosim* deb aytiladi.

**6-aksioma.** Har qanday bog'lanishdagi jismni *erkin jism* deb qarash uchun bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirish kerak. Bu aksioma *bog'lanishdan qutulish* prinsipi deyiladi. Bu aksiomaga asosan, jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga bog'lanish reaksiya kuchlarini ham qo'shish kerak. Odatda, ular noma'lum bo'lib, berilgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan topiladi. Bog'lanishdan qutulish uchun bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini aniqlash ahamiyatlidir. Bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini aniqlashda quyidagidan foydalanish lozim. Bog'lanishdagi jismlarning harakati qaysi tomonga cheklangan bo'lsa, reaksiya kuchi shu yo'nalishga teskari yo'nalgan

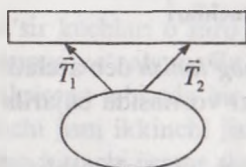
bo'ladi. Bog'lanishning turlari va bog'lanish reaksiyalari ishqalanish mavjud bo'lmagan bir necha bog'lanishlarda reaksiyalarning yo'nalishlari qanday bo'lishini ko'ramiz.



7-shakl.



8-shakl.



9-shakl.

**1. Silliqliq sirt.** Bunday sirt jismga silliq sirt bilan tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal yo'nalishi bo'ylab harakatiga halaqit beradi. Bino-barin, reaksiya kuchi silliq sirt bilan jismning tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan va shu nuqtaga qo'yilgan bo'ladi (7-shakl).

Agar tegib turgan sirtlardan birortasi nuqta bo'lsa, u holda reaksiya kuchi ikkinchi sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (8-shakl).

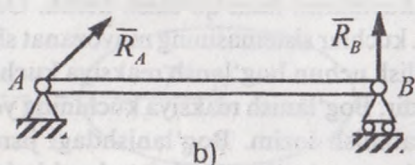
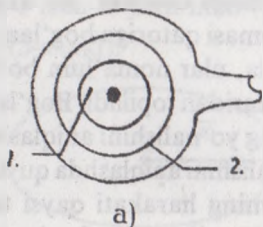
**2. Ip (qayish, zanjir, arqon, sim arqon).** Agar bog'lanish cho'zilmaydigan ipdan iborat bo'lsa, ip jismning osilish nuqtasidan ip bo'ylab harakatlantirishiga chek qo'yadi. Ipning taranglik kuchi ip bo'ylab osilish nuqtasiga tomon yo'naladi (9-shakl).

**3. Silindrik sharnir (zoldirli g'ildirak-podshipnik).**

Bolt 1 va kiygizilgan vtulka 2 dan iborat qo'zg'almas silindrik sharnir jism bilan mahkam biriktirilgan vtulkaning ichki diametri bilan barobar (10-a shakl). Jism shakl tekisligiga perpendikular bo'lgan sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin.

Ammo sharnir o'qiga perpendikular yo'nalish

bo'yicha harakatlana olmaydi. Shuning uchun silindrik sharnirda reaksiya kuchi, sharnir o'qiga perpendikular bo'lgan tekislikda yotib, sharnir o'qini kesib o'tadi.

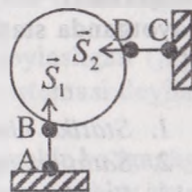


10-shakl.

Ko'pincha texnikada mustahkam va qo'zg'aluvchan sharnirli tayanchlar uchraydi. 10-b shaklda  $A$  mustahkam sharnirli tayanchdir. Bu tayanchda  $R_A$  reaksiya kuchi sharnir o'qidan o'tib va unga perpendikular tekislikda yotib, ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi.  $B$  tayanch sharnirli qo'zg'aluvchan tayanchdir. Bunda  $R_B$  reaksiya kuchi qo'zg'aluvchan tayanch tiralib turgan tekislikning normalini bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

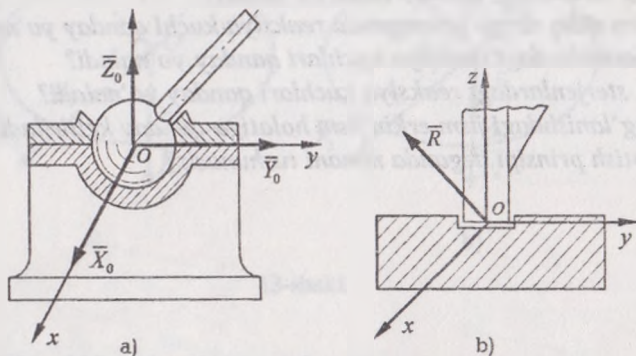
**4. Sterjen.** Bog'lanish uchlari sharnirlar bilan biriktirilgan  $AB$  va  $CD$  sterjenlar vositasida bajariladi.

Sterjen og'irliklarini e'tiborga olmay, u sterjenning  $A$  va  $B$  ( $C$  va  $D$ ) sharnirlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Binobarin reaksiya kuchlari sterjenlarning uchlardagi, sharnirlardan o'tuvchi o'qlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (11-shakl).



11-shakl.

**5. Zoldirli sharnir va tagtovo (podpyatnik).** Bu holda jism har qanday harakat qilishi mumkin, faqat sferik sharnirning markazi qo'zg'almas bo'lib qoladi (12- a shakl).



12-shakl.

Xuddi shunday bog'lanishni siqib tiralib turgan podshipnik (zoldirli g'ildirak) vositasida bajarilganligini ko'rish mumkin, odatda bu *tagtovo* deyiladi (12-b shakl). Fotoapparatlarning shtativdagi zoldirli tutqich, inson va hayvonlarning ko'pgina suyaklarining birlashgan joylari zoldirli sharnirga misol bo'la oladi. Zoldirli (sferik) sharnir va tagtovoalarda bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishi fazoda ixtiyoriy yo'nalishni olishi mumkin.

Statika qismida quyidagi ikki masala hal qilinadi:

1. Jismga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi unga ekvivalent bo'lgan soddaroq kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi.

2. Kuchlar sistemasi ta'siridagi absolut qattiq jismning muvozanat shartlarining zarur va yetarliligi tekshiriladi. Bog'lanishdagi jism bog'lanishdan xalos qilinganda erkin jism deb qaraladi. Jism unga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi va reaksiya kuchlari ta'siridan muvozanatda bo'ladi. Muvozanat tenglamalaridan noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Keyinchalik jismga har xil kuchlar sistemasi ta'sir etayotganda statikaning ikki asosiy masalasi yechiladi.

#### **TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR**

1. *Statika nimani o'rgatadi?*
2. *Satatikaning asosiy tushunchalari nimalardan iborat?*
3. *Statikaning asosiy aksiyomalari qanday?*
4. *Bog'lanishlar deb nimaga aytiladi?*
5. *Bog'lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?*
6. *Bog'lanishdan bo'shatish aksiyomasida nima deyiladi?*
7. *Bog'lanishning qanday turlarini bilasiz?*
8. *Jism silliq sirtga tayanganda reaksiya kuchi qanday yo'naladi?*
9. *Sharnirlardagi reaksiya kuchlari qanday yo'naladi?*
10. *Ip, sterjenlardagi reaksiya kuchlari qanday yo'naladi?*
11. *Bog'lanishdagi jism erkin jism holatiga qanday keltiriladi?*
12. *Qotish prinsipi deganda nimani tushunasiz?*

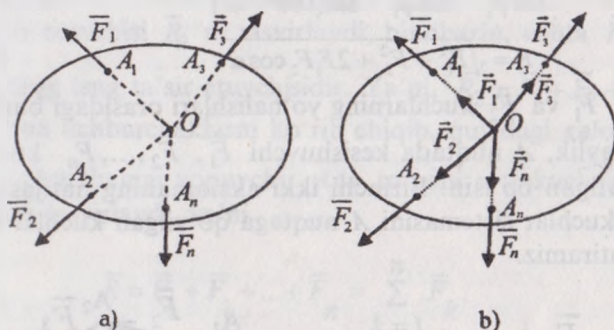
## II BOB. KESISHUVCHI KUHLAR SISTEMASI

Jismining  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nuqtalariga  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  kuchlar ta'sir etsin va ularning ta'sir chiziqlari O nuqtada kesishsin.

Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi **kesishuvchi kuchlar sistemasi** deb aytiladi (13-a shakl).

Agarda kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda joylashgan (joylashmagan) bo'lsa, tekislikdagi (fazodagi) kuchlar sistemasi deyiladi.

Ularni ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lganligi tufayli, kesishuvchi kuchlar sistemasi bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi (13- b shakl).

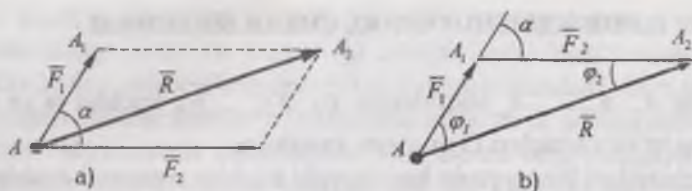


13-shakl.

### 4-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash

Avvalambor shuni ta'kidlash kerakki, parallelogramm aksiomasiga asosan, biror A nuqtaga qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi ularga qurilgan parallelogramm diagonaliga yoki parallelogrammning yarmini tashkil etuvchi kuch uchburchagining  $AA_2$  tomoniga teng (14-b shakl).

Bu holda  $\vec{R}$  vektor ikki  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  vektorlarning geometrik yig'indisiga teng, ya'ni  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .



14-shakl.

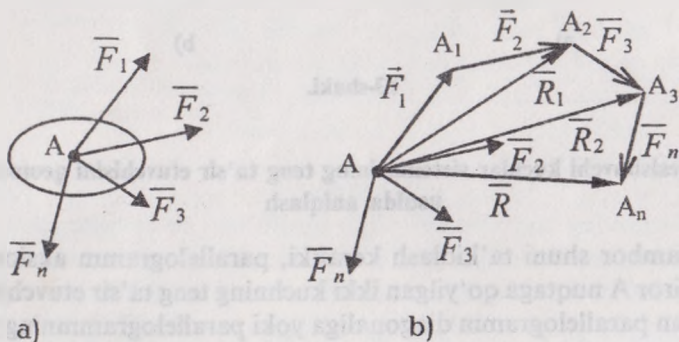
Teng ta'sir etuvchi  $\vec{R}$  ni  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlarning yo'nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari  $\varphi_1$  va  $\varphi_2$  larni hamda uning miqdorini sinuslar va kosinuslar teoremlaridan foydalanib  $\triangle AA_1A_2$  dan aniqlanadi:

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)}, \quad (2.1)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.2)$$

bunda,  $\alpha$  -  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlarning yo'nalishlari orasidagi burchak.

Faraz qilaylik,  $A$  nuqtada kesishuvchi  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  kuchlarning sistemasi berilgan bo'lsin. Birinchi ikki aksiomaning natijasidan foydalanib, bu kuchlar sistemasini  $A$  nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz.



15-shakl.

Endi quyidagini qurishni bajaramiz  $\vec{F}_1$  kuchining oxiri  $A_1$  dan  $\vec{F}_2$  kuch vektoriga teng bo'lgan  $\vec{A_1A_2}$  vektorni o'tkazamiz, uning oxiridan

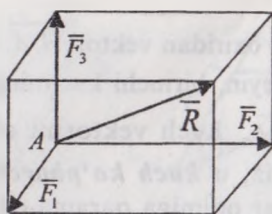
vektor  $\overline{A_1 A_1} = \overline{F_1}$ , uning oxiridan vektor  $\overline{A_1 A_2} = \overline{F_2}$  va hokazo. Hamma kuchlarni qo'ygandan keyin, birinchi kuchning boshi  $A$  dan oxirigichining oxiri  $A_n$  ga  $\overline{AA_n}$  kuch vektorini o'tkazamiz.  $A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$  kuch ko'pburchakni quramiz, u *kuch ko'pburchagi* deb ataladi. Kuch ko'pburchagida vektorlar oqimiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lgan  $\overline{AA_n}$  vektorga *kuch ko'pburchagini yopuvchi tomon* deyiladi. Kuch ko'pburchagida shtrixlangan vektor yordamida bo'lingan uchburchaklarni qaraymiz (15-b shakl). Kuch uchburchagini qurish usuliga, asosida  $\overline{F_1}$  va  $\overline{F_2}$  kuchlarning teng ta'sir etuvchisi  $\overline{R_1}$ ,  $\overline{AA_2}$  vektor vosita tasvirlanadi, ya'ni  $\overline{R_1} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ .  $\overline{AA_3}$  vektor,  $\overline{AA_2}$  va  $\overline{F_3}$  kuchlari teng ta'sir etuvchisi  $\overline{R_2}$  ni tasvirlaydi, binobarin, uchta  $\overline{F_1}, \overline{F_2}$  va  $\overline{F_3}$  kuchlarining teng ta'sir etuvchisidir. Ya'ni,  $\overline{R_2} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$  va hokazo. Hamma uchburchaklarni ko'rib chiqib, quyidagi xulosaga kelamiz. Kuch ko'pburchagini yopuvchi  $\overline{AA_n}$  tomoni  $n$  ta kuchning teng ta'sir etuvchisini tasvirlaydi, ya'ni

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \dots + \overline{F_n} = \sum_{k=1}^n \overline{F_k}. \quad (2.3)$$

Shunday qilib, kesishuvchi kuchlar  $R=1$  sistemasining teng ta'sir etuvchisi, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni sifatida geometrik aniqlanar ekan.

Demak, teng ta'sir etuvchi bu kuchlarning geometrik yig'indisiga bo'lar ekan. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i kesishuvchi kuchlar temasi ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasidan o'tadi.

Xususiyl holda bir tekislikda yotmagan uchta kesishuvchi kuchlar masini ko'raylik (16-shakl). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, kuch ustiga qurilgan parallelepipedning diagonalini orqali tasvirlanadi (parallelepiped). Da'voimizning haqligiga kuch ko'pburchagini qurish o'rinli ishonch hosil qilamiz.



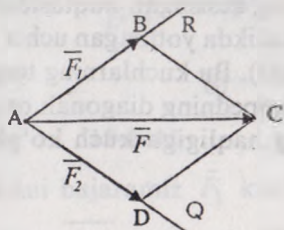
16-shakl.

### 5-§. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish

Kuchni kesishuvchi tashkil etuvchi kuchlar sistemasiga ajratish deb, shunday kesishuvchi kuchlar sistemasini topishga aytiladiki, uning teng ta'sir etuvchisi berilgan kuchga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, shunday kuchlar sistemasini topish kerakki, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni berilgan kuchga teng bo'ladi. Bir xil yopuvchi tomonga ega bo'lgan har xil kuch ko'pburchaklarini qurish mumkin. Shuning uchun kuchni ta'sir etuvchilarga ajratish masalasini bir qiymatli hal qilish uchun, mumkin bo'lgan tashkil etuvchilar sonini cheklovchi qo'shimcha shartlar berilishi kerak. Tez-tez uchrab turadigan quyidagi ikki holni ko'ramiz:

#### 1. Berilgan $\vec{F}$ kuchni ikkita tashkil etuvchilarga ajratish

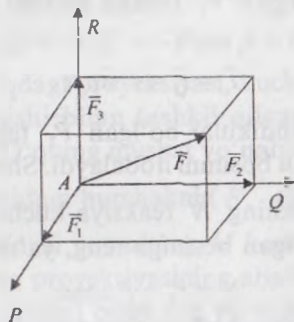
Ularning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari berilgan,  $AR$  va  $AQ$  kuchi  $\vec{F}$  bilan bir tekislikda yotadi (17-shakl). Buning uchun kuchning oxiridan izlanuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Diagonali berilgan  $\vec{F}$  kuchi bo'lgan  $ABCD$  parallelogramm hosil qilamiz. Uning  $AB$  va  $AD$  tomonlari izlanuvchi tashkil etuvchi  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlaridir.



17-shakl.

## 2. Berilgan $\vec{F}$ kuchni uchta kesishuvchi tashkil etuvchi

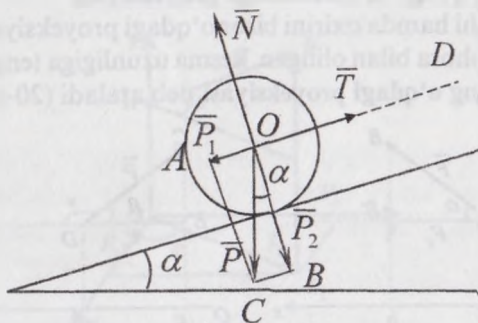
Kuchlarning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari fazo bo'lgan va  $\vec{F}$  kuchi bilan bir tekislikda yotmaydi (18-shakl) uchun shunday parallelepiped qurish yetarliki, uning yo'nalishlari berilgan izlanuvchi kuchlardir. Diagonali esa  $\vec{F}$  bo'ldir, u holda parallelepiped qonuniga, asosan,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  parallelepiped qirralariga monand bo'lib, kuchning berilgan bo'yicha tashkil etuvchilaridir.



18-shakl.

## 1\*-masala. Gorizont bilan $\alpha$ burchak tashkil qilgan

tekislikda og'irligi  $\vec{P}$  bo'lgan jism qiya tekislikka parallel bo'lgan holatda muvozanatda tortib turibdi (19-shakl). Ipning ta'siri bilan jismning qiya tekislikka bo'lgan bosimini aniqlang.



19-shakl.

SamQXI Axborot

markazi

2024.01.01

**Yechish.** Berilgan  $\vec{P}$  kuchni qiya tekislikka parallel va unga perpendikular bo'lgan yo'nalishlar bo'yicha  $\vec{P}_1$  va  $\vec{P}_2$  tashkil etuvchilarga ajratamiz. Buning uchun diagonali  $\vec{P}$  kuchiga teng bo'lgan,  $OA$  va  $OB$  tomonlari tanlab olingan yo'nalishlarga parallel bo'lgan  $OABC$  parallelogramni quramiz. To'g'ri burchakli  $OBC$  uchburchakdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$P_1 = P \sin \alpha, \quad P_2 = P \cos \alpha. \quad (1^*.1)$$

$OD$  ip bo'ylab yo'nalgan  $\vec{P}_1$  tashkil etuvchi ip reaksiya kuchi bilan muvozanatlashadi, ya'ni

$$T = P_1 = P \sin \alpha. \quad (1^*.2)$$

Qiya tekislikka perpendikular bo'lgan  $\vec{P}_2$  tashkil etuvchi, izlanayotgan shu tekislikka bo'lgan bosimni ifodalaydi. Shuni ta'kidlaymizki, jismga qo'yilgan qiya tekislikning  $\vec{N}$  reaksiya kuchi miqdor jihatidan jismning qiya tekisligiga bo'lgan bosimga teng, ya'ni

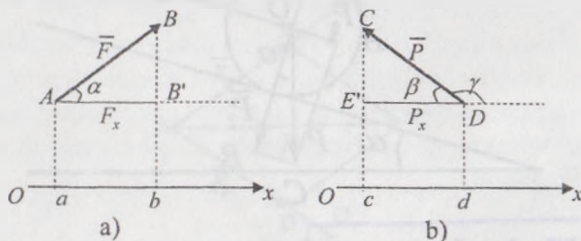
$$N = P_2 = P \cos \alpha. \quad (1^*.3)$$

Shuning uchun, tayanchga bo'lgan bosimni aniqlasak, unga teng bo'lgan tayanch reaksiya kuchini aniqlagan bo'lamiz.

## 6-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash

### 1. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Kuchning boshi hamda oxirini biror o'qdagi proyeksiyalari orasiga joylashgan, tegishli ishora bilan olingan, kesma uzunligiga teng bo'lgan skalyar miqdorga kuchning o'qdagi proyeksiyasi deb ataladi (20-shakl).



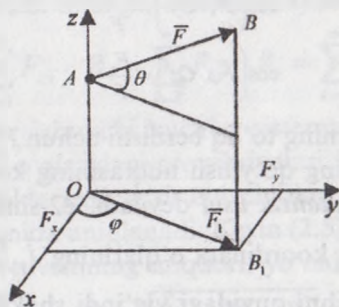
20-shakl.

Kuchning o'qdagi proyeksiyasi musbat deb qabul qilinadi, agar proyeksiya boshlanish nuqtasidan oxiriga qarab ko'chishi o'qning musbat yo'nalishi bilan hamohang bo'lsa (20-a shakl) va manfiy, agar qarama-qarshi bo'lsa (20-b shakl). Berilgan  $\vec{F}$  kuchini  $OX$  o'qidagi proyeksiyasini  $F_x$  simbol bilan belgilab olamiz. Vektorning yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki parallel o'qlardagi proyeksiyalari o'zaro teng bo'ladi. Agar vektor bilan o'q bir tekislikda yotmasa, undan foydalanish qulaylik tug'diradi (20-b shakl) 20-shakldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$F_x = ab = AB' = F \cos \alpha,$$

$$P = -dc = -DE' = -P \cos \beta = P \cos \gamma.$$

Demak, kuchning o'qdagi proyeksiyasi, kuch miqdori bilan kuchning o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusining ko'paytmasiga tengdir. O'qning musbat yo'nalishi bilan (masalan  $Ox$ ) va  $\vec{F}$  kuchi yo'nalishi orasidagi burchakni  $(\vec{F}, Ox)$  deb belgilaymiz. Burchak  $(\vec{F}, Ox)$ ning kosinusi *yo'naltiruvchi kosinus* deb ataladi. Masalalarni yechishda kuchning proyeksiyasining absolut qiymatini, kuch miqdorini kuchning ta'sir chizig'i bilan o'q yo'nalishi orasidagi o'tkir burchak kosinusiga ko'paytma shaklida olish tavsiya etiladi. Proyeksiyaning ishorasi to'g'ridan-to'g'ri shakldan olinadi. Berilgan  $\vec{F}$  kuchning tekislikdagi proyeksiyasi deb (21-shaklda  $OXY$  tekisligi),  $\vec{F}$  kuchning boshi va oxirini shu tekislikdagi proyeksiyalari orasidagi  $\vec{F}_1 = \overline{OB_1}$  vektorga aytildi.



21-shakl.

Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi kuchning o'qdagi proyeksiyasidan farq qiladi, chunki u tekislikda miqdor va yo'nalishga ega bo'lgan vektorli miqdordir. Uning miqdori quyidagiga teng:  $F_1 = F \cos \theta$ .

Bunda:  $\theta$  esa  $\vec{F}$  vektor yo'nalishi bilan uning  $\vec{F}_1$  proyeksiyasining yo'nalishi orasidagi burchak. Ko'pgina hollarda kuch bilan bir tekislikda yotmagan o'qdagi proyeksiyasini aniqlash uchun avvalo kuchni o'q yotgan tekislikka proyeksiyalab, proyeksiyani shu o'qqa proyeksiyalash kerak (ikki qaytalab proyeksiyalash usuli) masalan, shaklda ko'rsatilgan hol uchun quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1 \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi, \\ F_2 &= F_1 \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2. Kuchning miqdor va yo'nalishini koordinata o'qlardagi proyeksiyalari orqali aniqlash

Agar  $\vec{F}$  kuchning to'g'ri burchakli koordinata o'qlardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, u holda kuchning miqdori, qirralari kuch proyeksiyalarning absolut miqdorlariga teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonal uzunligini hisoblash tariqasida bo'ladi, ya'ni

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.5)$$

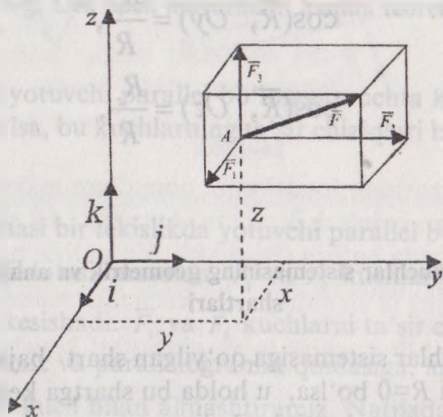
Kuchning yo'nalishi yo'naltiruvchi kosinuslar orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{F}, \hat{Ox}) &= \frac{F_x}{F} \\ \cos(\vec{F}, \hat{Oy}) &= \frac{F_y}{F} \\ \cos(\vec{F}, \hat{Oz}) &= \frac{F_z}{F} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ma'lumki,  $F$  kuchning to'liq berilishi uchun  $F_x, F_y, F_z$  ning proyeksiyalaridan tashqari uning qo'yilish nuqtasining koordinatalarini bilish kerak. Bunday usulga *analitik usul* deyiladi. 22-shakldan parallelepiped qoidasini e'tiborga olib, koordinata o'qlarining  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  birlik vektorlaridan foydalanib,  $\vec{F}$  kuchni quyidagi yig'indi shaklida tasvirlash mumkin:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{F}_1 = F_x \cdot \vec{i}, \quad \vec{F}_2 = F_y \cdot \vec{j}, \quad \vec{F}_3 = F_z \cdot \vec{k}; \quad (2.7)$$



22-shakl.

bunda:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  – kuchning koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilaridir. Yuqoridagi tenglama kuchning koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilarni tasvirlovchi formuladir.

### 3. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda aniqlash

Geometriyadan ma'lumki, vektorlar yig'indisining biror o'qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi. Shunga, asosan, (2.3)dan quyidagini topamiz:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (2.8)$$

Shunday qilib, kesishuvchi kuchlar sistemasining to'g'ri burchakli koordinata sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari  $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) berilgan bo'lsa, u holda teng ta'sir etuvchining proyeksiyalari  $R_x, R_y, R_z$  (2.8) formula yordamida aniqlanadi. Keyin (2.5) va (2.6) formulalar yordamida teng ta'sir etuvchining miqdori, yo'nalishlari aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\begin{aligned}\cos(\bar{R}, \hat{Ox}) &= \frac{R_x}{R}, \\ \cos(\bar{R}, \hat{Oy}) &= \frac{R_y}{R}, \\ \cos(\bar{R}, \hat{Oz}) &= \frac{R_z}{R},\end{aligned}\tag{2.9}$$

### 7-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik va analitik muvozanat shartlari

Kesishuvchi kuchlar sistemasiga qo'yilgan shart bajarilsa va ularning teng ta'sir etuvchisi  $R=0$  bo'lsa, u holda bu shartga kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat sharti deyiladi.

**1. Muvozanatning geometrik sharti.** Ma'lumki, kesishuvchi kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lganda, faqat shu holdagina  $\bar{R}=0$  bo'ladi. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, kuch ko'pburchagining yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

**2. Muvozanatning analitik sharti.** Agar  $R=0$  bo'lsa, u holda  $R_x=0$ ,  $R_y=0$ ,  $R_z=0$  u holda (2.8)ga asosan quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.\tag{2.10}$$

Teskarisi, agar (2.10) shart bajarilsa, u holda  $R=0$  bo'ladi. Binobarin kesishuvchi kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun ularning uchta koordinata o'qlardagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda  $Ox$  va  $Oy$  o'qlarini shu tekislikda olib, quyidagi muvozanat shartini yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.\tag{2.11}$$

Agar (2.10) va (2.11) shartlarda noma'lum reaksiya kuchlari qatnashsa va ularni aniqlashni taqozo qilsa, u holda bu shartlar *muvozanat tenglamalari* deb ataladi.

### 8-§. Uch kuch muvozanati haqida teorema

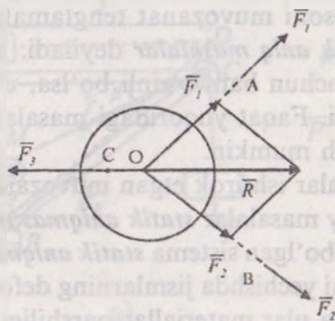
#### Teorema.

Bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan uchta kuch ta'siridan jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi (23-shakl).

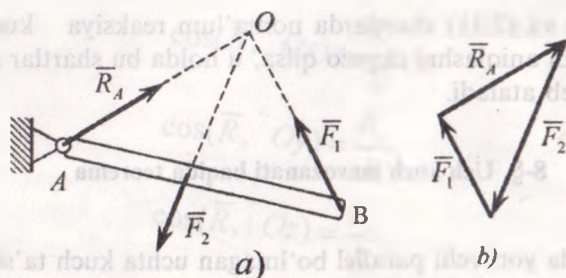
#### Isbot.

Kuchlar sistemasi bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmaganligi uchun ulardan ixtiyoriy ikkitasi, masalan,  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlarning ta'sir chiziqlari biror  $O$  nuqtada kesishadi.  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab  $O$  nuqtaga ko'chiramiz va parallelogramm qoidasiga, asosan, bitta  $O$  nuqtaga qo'yilgan  $\vec{R}$  kuch bilan almashtiramiz. Natijada ikkita o'zaro muvozanatlashuvchi  $\vec{F}_1$  va  $\vec{R}$  kuchlarni olamiz. Statikaning birinchi aksiomasiga asosan  $\vec{F}_1$  va  $\vec{R}$  kuchlari bitta umumiy ta'sir chiziqqa ega. Demak, kuchlar bitta nuqtada kesishadi. Teorema isbotlandi.

Odatda, isbot qilingan uchta bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan kuchlarning muvozanat shartlarining zaruriyligidir, ammo bu shartlar yetarli emas, chunki uchta qandaydir kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan bo'lsa, ularni muvozanatlashuvchi deb xulosa chiqarib bo'lmaydi.



23-shakl.



24-shakl.

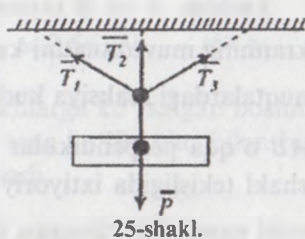
Uch kuch teoremasidan foydalanib, noma'lum reaksiya kuchlarining yo'nalishini avvaldan aniqlash mumkin. Aytaylik,  $AB$  sterjen uchta kuch ta'siridan muvozanatda bo'lsin (24-shakl). Yo'nalishi noma'lum bo'lgan  $\bar{R}_A$  reaksiya kuchining ta'sir chizig'i uch kuch muvozanati haqidagi teorema asosan  $\bar{F}_1$  va  $\bar{F}_2$  kuchlar ta'sir chiziqlari kesishgan  $O$  nuqtadan o'tadi.  $\bar{R}_A$  reaksiya kuchining yo'nalishi esa yopiq kuch uchburchagini qurish natijasida aniqlanadi, ya'ni kuch uchburchagida vektorlar oqimi bir xil yo'nalishda bo'ladi.

### 9-§. Statik aniq va statik aniqmas masalalar

Bog'lanishdagi qattiq jismlarning muvozanatiga oid ko'pgina masalalar berilgan aktiv kuchlar ta'siridan hosil bo'ladigan bog'lanish reaksiya kuchlarini miqdor va yo'nalishlarini aniqlashdan iborat. Shuni ta'kidlaymizki, noma'lumlar soni bog'lanishlarning turi va soniga bog'liq bo'ladi. Noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan oshmaydigan masalalarga **statik aniq masalalar** deyiladi. Yuqoridagi mulohazamiz jismlar sistemasi uchun ham o'rinli bo'lsa, u holda sistema **statik aniq sistema** deb ataladi. Faqat yuqoridagi masalalarni statikaning metodlari asosida hal qilish mumkin.

Noma'lumlar soni ular ishtirok etgan muvozanat tenglamalari sonidan ko'p bo'lsa, bunday masalalar **statik aniqmas masalalar** deb ataladi. Shu mulohazalar o'rinli bo'lgan sistema **statik aniqmas sistemalar** deb ataladi. Bunday masalalarni yechishda jismlarning deformatsiyalarini hisobga olish kerak bo'ladi va ular materiallar qarshiligi fanida yoritiladi.

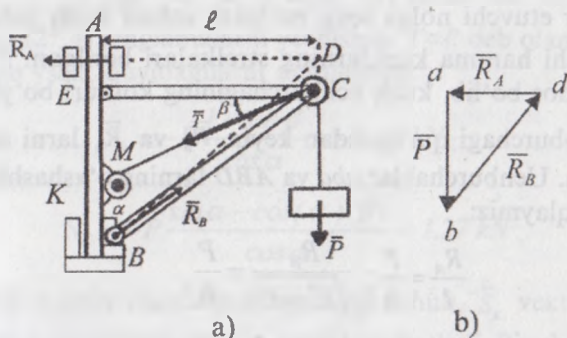
Og'irligi  $P$  bo'lgan yuk ta'siridan bir tekislikda yotuvchi uchta ipda hosil bo'lgan  $T_1$ ,  $T_2$  va  $T_3$  taranglik kuchlarini aniqlash masalasi statik aniqmas masalalarga misol bo'la oladi (25-shakl). Bu masalada uchta noma'lumni aniqlash uchun tekislikda kesishuvchi kuchlar uchun ikkita muvozanat tengmalarini tuzish mumkin (2.11).



#### 10-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

##### 2\*-masala.

Ko'taruvchi kran (26-a shakl)  $A$  nuqtaga silindrik sharnir,  $B$  nuqtaga taglovon vositasida biriktirilgan. Kran qulochi  $l=4m$ , masofa  $AB=h=5m$ . Og'irligi  $P=2\text{ kN}$  bo'lgan yuk sim arqon yordamida  $C$  blok orqali kran o'qiga biriktirilgan  $M$  lebyodkaga tutashtirilgan.  $C$  blok og'irligi e'tiborga olinmaydigan  $EC$  va  $KC$  sterjenlar yordamida  $AB$  o'qqa biriktirilgan.  $E$ ,  $K$  va  $C$  nuqtalarda sharnirli bog'lanishlar. Kran og'irligini e'tiborga olmay, muvozanat holatida kraning  $A$  va  $B$  tayanchlarga bo'lgan bosimlari va  $\alpha=45^\circ$ ,  $\beta=30^\circ$  bo'lganda  $EC$  va  $KC$  sterjenlarda hosil bo'ladigan zo'riqishlar aniqlansin (sterjenlarning o'qi bo'ylab ta'sir qiluvchi siquvchi va cho'zuvchi kuchlarning algebraik qiymatlari zo'riqishlar deb ataladi. Agar sterjen cho'zilsa, zo'riqish musbat ishora bilan olinadi, aks holda sterjen siqilsa, zo'riqish manfiy).



26-shakl.

**Yechish.**  $A$  va  $B$  tayanchlarga bo'ladigan bosimlarni aniqlash uchun kranning muvozanatini ko'ramiz. Unga berilgan  $\bar{P}$  kuchi va  $A$  hamda  $B$  nuqtalardagi reaksiya kuchlari ta'sir qiladi  $A$  podshipnikdagi  $\bar{R}_A$  reaksiya  $AB$  o'qqa perpendikular tagtovondagi (podpyatnik)  $\bar{R}_B$  reaksiya kuchi shakl tekisligida ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi. Kran bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan uchta  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  va  $\bar{P}$  kuchlari ta'siridan muvozanatda bo'lganligi uchun ularning ta'sir chiziqlari biror nuqtada kesishi kerak.

$\bar{R}_A$  va  $\bar{P}$  kuchlarning ta'sir chiziqlari ma'lum va ular  $D$  nuqtada kesishadi. Bu yerdan  $\bar{R}_B$  reaksiya kuchi  $BD$  bo'ylab yo'nalganligini ko'rishimiz mumkin. Geometrik yechish usulini tatbiq qilamiz.

Muvozanatda  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  kuchlardan qurilgan kuch uchburchagi yopiq bo'ladi. Kuch uchburchagi qurishni ma'lum bo'lgan  $\bar{P}$  kuchidan boshlaymiz. Ixtiyoriy «a» nuqtadan tanlab olingan masshtabda  $ab = \bar{P}$  vektorini olamiz (26-b shakl). Vektorning boshi hamda oxiridan  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishgan  $d$  nuqtasi  $abd$  kuch uchburchagining uchinchi uchi hisoblanadi unda  $bd$  va  $ad$  tomonlari tanlab olingan masshtabda  $\bar{R}_B$  va  $\bar{R}_A$  reaksiya kuchlarining miqdorini tasvirlaydi. Bu reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari bo'ylab yo'nalishlari kuch uchburchagidagi strelkalar oqimiga qarab olinadi.

Teng ta'sir etuvchi nolda teng bo'lgani uchun kuch uchburchagini tashkil qiluvchi hamma kuchlarning strelkalari berilgan  $\bar{P}$  kuchning yo'nalishiga mos bo'lib, kuch uchburchagining konturi bo'ylab aylanadi. Kuch ko'pburchagi qurilgandan keyin  $\bar{R}_B$  va  $\bar{R}_A$  larni analitik aniqlash mumkin. Uchburchaklar  $abd$  va  $ABD$  larning o'xshashligidan quyidagilarni aniqlaymiz:

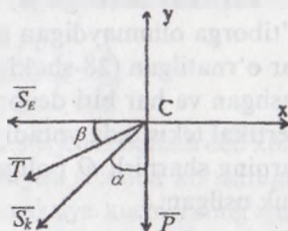
$$\frac{R_A}{l} = \frac{P}{h}, \quad \frac{R_B}{\sqrt{h^2 + l^2}} = \frac{P}{h}, \quad (2^*.1)$$

bundan

$$R_A = P \frac{l}{h} = 1,6 \text{ kN}; R_B = P \sqrt{1 + \frac{l^2}{h^2}} = 2,56 \text{ kN}. \quad (2^*.2)$$

Muvozanat holatda kraning A va B tayanchlarga ko'rsatgan bosimi miqdor jihatidan topilgan reaksiya kuchlariga teng bo'lib, ular bilan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'naladi.

2. *EC* va *KC* sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlash uchun *C* blokning muvozanatini tekshiramiz. *C* blokni bog'lanishdan ozod qilamiz, unga ta'sir qilayotgan kuch vektorlarini ko'rsatamiz (27-shakl). Yukning  $\bar{P}$  og'irligiga teng bo'lgan, sim arqonning o'ng qismidagi *T* taranglik, miqdor jihatidan *P* ga teng (Agar blokda ishqalanish e'tiborga olinmasa, u holda sim arqonning hamma nuqtalaridagi taranglik bir xil bo'ladi) va sterjen o'qi bo'ylab



27-shakl.

yo'nalgan  $\bar{S}_E$  va  $\bar{S}_K$  reaksiyalari. Sterjenlar cho'ziladi deb ta'kidlab,  $\bar{S}_E$  va  $\bar{S}_K$  lar *C* nuqtadan sterjenlarning o'rtalariga qarab yo'naltiramiz. Blokning o'lchovlarini e'tiborga olmay, kuchlarni *C* nuqtada kesishadi deb hisoblaymiz. Kuchlar soni uchtdan ortiq bo'lganligi uchun analitik aniqlash usulini tatbiq qilamiz. Koordinata o'qlarini 27-shaklda ko'rsatilganidek tanlab, (2.11) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = 0, -S_E - T \cos \beta - S_K \sin \alpha = 0; \quad (2^*.3)$$

$$\sum F_{ky} = 0, -P - T \sin \beta - S_K \cos \alpha = 0. \quad (2^*.4)$$

(2\*.3) va (2\*.4) tenglamalarni yechishda  $T=P$  deb olamiz va son qiymatlarini qo'ysak, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$S_K = -P \frac{1 + \sin \beta}{\cos \alpha} \approx -4,26 \text{ kN}; \quad (2^*.5)$$

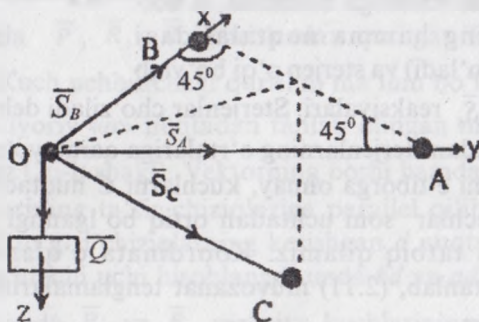
$$S_E = -P \frac{\sin \alpha - \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \approx 1,27 \text{ kN}. \quad (2^*.6)$$

(2\*.5) *SK* manfiy ishorada chiqqanligi uchun,  $\bar{S}_K$  vektori 27-shaklda tanlab olingan yo'nalishga teskari yo'nalgan bo'ladi. Binobarin *KC* sterjen

siqiladi  $S_E$  reaksiya kuchining musbat aniqlanishi 27-shaklda  $S_E$  vektorining yo'nalishi to'g'ri boshlab olinganligini ko'rsatadi, binobarin  $EC$  sterjen cho'ziladi. Modomiki shunday ekan, aniqlangan  $S_K$  va  $S_E$  reaksiyalarning miqdorlari aniqlanishi lozim bo'lgan  $EC$  va  $KC$  sterjenlardagi zo'riqishlarni ifodalaydi.

### 3\*-masala.

Vertikal devorga  $A$ ,  $B$  va  $C$  sharnirlar yordamida uchta og'irligi e'tiborga olinmaydigan sterjenlar o'zaro  $O$  nuqtada biriktirilgan sterjenlar o'rnatilgan (28-shakl).  $AO$  va  $BO$  sterjenlar gorizontal tekislikda joylashgan va har biri devor bilan  $45^\circ$  burchaklar tashkil qiladi.  $CO$  sterjen vertikal tekislikda yotadi va devor bilan  $30^\circ$  burchak hosil qiladi. Sterjenlarning sharnirli  $O$  boltga bo'lgan reaksiyasi aniqlang. Unga og'irligi  $Q$  yuk osilgan.



28-shakl.

**Yechish.** O sharnirning muvozanatini tekshiramiz. Unga og'irligi  $Q$  yuk qo'yilgan hamda cho'zilgan deb qabul qilingan sterjenlardagi  $S_C$ ,  $S_A$  va  $S_B$  reaksiyalari. Burchak  $\angle AOB$  ni to'g'ri deb, koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganday olamiz.

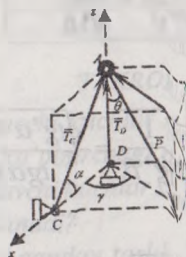
Fazodagi kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini (2.10) tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; S_B + S_C \sin 30^\circ \cos 45^\circ = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; S_A + S_C \sin 30^\circ \cos 45^\circ = 0; \\ \sum F_{kz} &= 0; Q + S_C \cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \quad (3*.1)$$

$S_C$  kuchni  $Ox$  va  $Oy$  koordinata o'qlariga proyeksiyalashda, ikki qaytalab proyeksiyalash usuli tatbiq qilindi. Kuchni  $Ox$  o'qidagi proyeksiyasi

$$S_c = -\frac{20}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Berilgan:



**Yechish.** 1. *AC* va *AD* sin muvozanatini tekshiramiz.  $\gamma$  ib, erkin deb bog'lanishlard hosil bo'ladigan zo'riqishlar yo'naltiramiz. 3. Kesishuv buning uchun kuchlarnin yig'indisini tuzamiz.  $\gamma$  va

$$\sum F_{ix} = -T_c \cos \alpha + P \sin \theta \cos \gamma = 0; \quad (4^*.1)$$

$$\sum F_{iy} = -T_b \cos \beta + P \sin \theta \sin \gamma = 0; \quad (4^*.2)$$

$$\sum F_{iz} = T_c \sin \alpha + T_b \sin \beta + T_D - P \cos \theta = 0. \quad (4^*.3)$$

Masalani yechish uchun avvalo  $\sin \gamma$ ,  $\cos \gamma$  va  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  larning qiymatlarini hisoblab chiqamiz.

a)  $\triangle CDA$  dan  $CD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;  $\triangle BDA$  dan  $BD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \beta}$ .

Bundan:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{BD}{CD} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ}, \quad \operatorname{tg} \gamma = 3.$$

Trigonometrik formulalarni tatbiq etib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\sin \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{3}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

b) Shakldan ko'rinadiki

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{(CD)^2 + (BD)^2}}{AD}; \quad \operatorname{tg} \theta = AD \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Trigonometrik formulalarga asosan:

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{10}{13}},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Hisoblangan qiymatlarni (4\*.1), (4\*.2), (4\*.3) muvozanat tenglamalariga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$-T_C \cos 60^\circ + P \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{1}{\sqrt{10}} = 0, \quad (4^*.4)$$

$$-T_B \cos 30^\circ + P \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{3}{\sqrt{10}} = 0; \quad (4^*.5)$$

$$T_C \sin 60^\circ + T_B \cos 30^\circ + T_D - P \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 0. \quad (4^*.6)$$

(4\*.4), (4\*.5), (4\*.6) tenglamalardan quyidagilarni olamiz:

$$T_C = \frac{2P}{\sqrt{10}}; \quad T_B = \frac{6P}{\sqrt{39}}; \quad T_D = -\frac{3P}{\sqrt{39}}.$$

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, berilgan  $P$  kuch ta'siridan  $AC$  va  $AB$  sterjenlar siqilar ekan,  $AD$  sterjen esa cho'ziladi. Natijalarni 2.1-jadvalda berish mumkin.

2.1-jadval

| Sterjenlar | Zo'riqishlar | Sterjenlar teng holati |
|------------|--------------|------------------------|
| AB         | 7,7 kN       | Siqiladi               |
| AC         | 4,4 kN       | Siqiladi               |
| AD         | 3,8 kN       | cho'ziladi             |

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi qanday kuchlardan tashkil topgan?
2. Kuch ko'pburchagi deb qanday ko'pburchakka aytiladi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi geometrik usulda qanday aniqlanadi?
4. Kuchni qanday tashkil etuvchilarga ajratish mumkin?
5. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
6. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday hisoblanadi va u qanday kattalik?
7. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda qanday aniqlanadi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasi geometrik muvozanat sharti qanday?
9. Kesishuvchi kuchlar sistemasi analitik muvozanat sharti qanday?
10. Uch kuch muvozanati haqidagi teoremani isbotlang.

$$\sum F_{ix} = -T_c \cos \alpha + P \sin \theta \cos \gamma = 0; \quad (4^*.1)$$

$$\sum F_{iy} = -T_b \cos \beta + P \sin \theta \sin \gamma = 0; \quad (4^*.2)$$

$$\sum F_{iz} = T_c \sin \alpha + T_b \sin \beta + T_D - P \cos \theta = 0. \quad (4^*.3)$$

Masalani yechish uchun avvalo  $\sin \gamma$ ,  $\cos \gamma$  va  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  larning qiy-matlarini hisoblab chiqamiz.

a)  $\triangle CDA$  dan  $CD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;  $\triangle BDA$  dan  $BD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \beta}$ .

Bundan:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{BD}{CD} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ}, \quad \operatorname{tg} \gamma = 3.$$

Trigonometrik formulalarni tatbiq etib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\sin \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{3}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

b) Shakldan ko'rinadiki

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{(CD)^2 + (BD)^2}}{AD}; \quad \operatorname{tg} \theta = AD \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Trigonometrik formulalarga asosan:

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{10}{13}},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Hisoblangan qiymatlarni (4\*.1), (4\*.2), (4\*.3) muvozanat tenglamalari-ga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$-T_C \cos 60^\circ + P \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{1}{\sqrt{10}} = 0, \quad (4^*.4)$$

$$-T_H \cos 30^\circ + P \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{3}{\sqrt{10}} = 0; \quad (4^*.5)$$

$$T_C \sin 60^\circ + T_B \cos 30^\circ + T_D - P \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 0. \quad (4^*.6)$$

(4\*.4), (4\*.5), (4\*.6) tenglamalardan quyidagilarni olamiz:

$$T_C = \frac{2P}{\sqrt{10}}; \quad T_H = \frac{6P}{\sqrt{39}}; \quad T_D = -\frac{3P}{\sqrt{39}}.$$

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, berilgan  $P$  kuch ta'siridan  $AC$  va  $AB$  sterjenlar siqilar ekan,  $AD$  sterjen esa cho'ziladi. Natijalarni 2.1-jadvalda berish mumkin.

2.1-jadval

| Sterjenlar | Zo'riqishlar | Sterjenlar teng holati |
|------------|--------------|------------------------|
| AB         | 7,7 kN       | Siqiladi               |
| AC         | 4,4 kN       | Siqiladi               |
| AD         | 3,8 kN       | cho'ziladi             |

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi qanday kuchlardan tashkil topgan?
2. Kuch ko'pburchagi deb qanday ko'pburchakka aytiladi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi geometrik usulda qanday aniqlanadi?
4. Kuchni qanday tashkil etuvchilarga ajratish mumkin?
5. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
6. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday hisoblanadi va u qanday kattalik?
7. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda qanday aniqlanadi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasi geometrik muvozanat sharti qanday?
9. Kesishuvchi kuchlar sistemasi analitik muvozanat sharti qanday?
10. Uch kuch muvozanati haqidagi teoremani isbotlang.

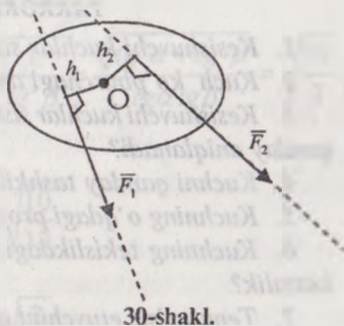
### III BOB. TEKISLIKDA IXTIYORIY JOYLASHGAN KUCHLAR SISTEMASI

#### 11-§. Nuqtaga nisbatan kuch momenti

Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga tekislikdagi kuchlar sistemasi deb aytiladi.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ko'rilayotganda, kuchni jismga beradigan burish qobiliyatini xarakterlovchi, ya'ni nuqtaga nisbatan kuch momenti tushunchasini kiritish zarurdir. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan ikki kuch  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  jismga qo'yilgan (30-shakl). Jismning biror  $O$  nuqtasi mahkamlangan deb tasavvur qilamiz, u holda,  $\vec{F}_1$  kuch jismni  $O$  nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intiladi,  $\vec{F}_2$  kuch esa soat mili yo'nalishi bo'yicha, u holda buralish hodisasi kuch miqdoriga va  $O$  nuqtadan kuchning ta'sir chizig'igacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'ladi.

**Ta'rif.** Berilgan  $\vec{F}$  kuchdan  $O$  nuqtaga nisbatan olingan kuch momenti deb, kuch miqdorini  $O$  nuqtadan kuchning ta'sir chizig'igacha tushirilgan perpendikular masofaga ko'paytmaning tegishli ishora bilan olingan miqdoriga aytiladi. Agar kuch jismni  $O$  nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda burishga intilsa, u holda moment musbat deb qabul qilinadi (31-a shakl). Agar kuch jismni  $O$  nuqta atrofida soat mili yo'nalishi bo'yicha burishga intilsa, u holda moment manfiy deb qabul qilinadi (31-b shakl).



30-shakl.

Berilgan  $\vec{F}$  kuchdan  $O$  nuqtaga nisbatan olingan kuch momentini quyidagi ifoda bilan belgilaymiz  $m_0(\vec{F})$ . U holda

$$m_0(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (3.1)$$

$h$  ga  $\vec{F}$  kuchning  $O$  nuqtasiga nisbatan yelkasi deb aytiladi.  $O$  nuqta moment markazi deb ataladi.

Kuch momentining xususiyatlari:

1. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirish bilan nuqtaga nisbatan kuch momenti o'zgarmaydi.

2. Agar kuchning ta'sir chizig'i  $O$  nuqtadan o'tsa, berilgan  $\vec{F}$  kuchining  $O$  nuqtaga nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi (31-d shakl).

3. Berilgan  $\vec{F}$  kuchidan  $O$  nuqtaga nisbatan kuch momenti  $\Delta OAB$  yuzining ikkilanganiga teng bo'ladi (31-e shakl). Ya'ni,

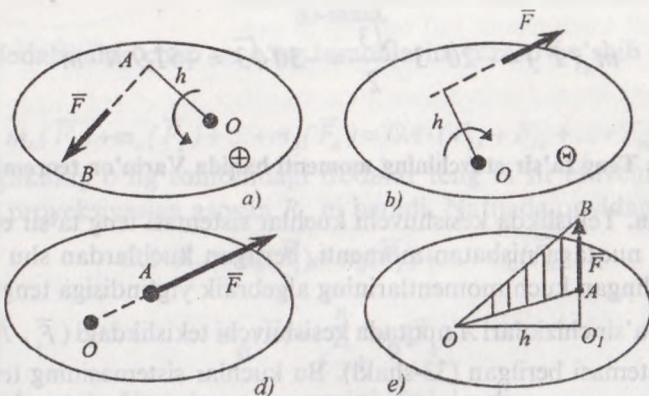
$$m_O(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}. \quad (3.2)$$

Haqiqatan ham,

$$m_O(\vec{F}) = Fh.$$

Ikkinchi tomondan,

$$Fh = 2S_{\Delta OAB}.$$



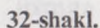
31-shakl.

Texnik birlik sistemasida kuch momenti birligi uchun  $1 \text{ N} \cdot \text{m}$  qabul qilingan.

**5-masala.** Berilgan  $F (F=20 \text{ N})$  kuchdan  $A$  va  $B$  nuqtalarga nisbatan kuch momenti hisoblansin (32-shakl).  $AB=5\text{m}$ .

$$m_A(\vec{F}) = -Fh_1 = -F \cdot AC \sin 60^\circ, \quad (5^*.1)$$

$$m_B(\vec{F}) = Fh_2 = F \cdot BC \sin 60^\circ, \quad (5^*.2)$$


$$m_R(\bar{F}) = 20 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \approx 34,6 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$m_A(\bar{F}) = -20 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -30\sqrt{3} \approx -51,9 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

**Teorema.** Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining biror nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi.

**Isbot.** Ta'sir chiziqlari  $A$  nuqtada kesishuvchi tekislikdagi ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ) kuchlar sistemasi berilgan (33-shakl). Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi  $\vec{R}$ . Ixtiyoriy  $O$  nuqtadan  $OA$  ga perpendikular qilib  $Ox$  o'qini o'tkazamiz. Hamma kuchlardan  $O$  nuqtaga nisbatan kuch momentlarining ifodalarini (3.2) formuladan foydalanib tuzamiz:

$$m_0(\bar{F}) = OA \cdot OB_1,$$

yoki

$$m_0(\bar{F}_1) = OA \cdot F_{1x},$$

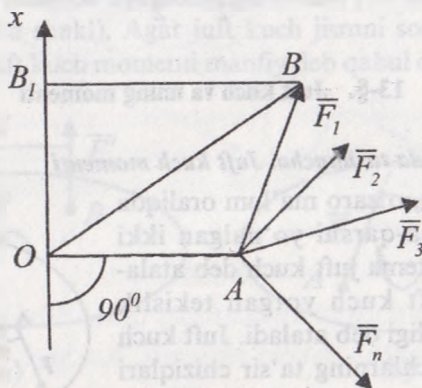
binobarin

$$m_0(\bar{F}_l) = OA \cdot F_{lx},$$

$$m_0(\vec{F}_2) = OA \cdot F_{2x},$$

$$m_0(\vec{F}_3) = OA \cdot F_{3x},$$

$$m_0(\vec{F}_n) = OA \cdot F_{nx}.$$



33-shakl.

Bu ifodalarning chap va o'ng tomonlarini o'zaro qo'shib quyidagini olamiz:

$$m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) + \dots + m_0(\vec{F}_n) = OA \cdot (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}).$$

Tenglikning o'ng tomonidagi ifodalar teng ta'sir etuvchining biror o'qdagi proyeksiyasiga asosan  $R_x$  ni beradi. Natijada quyidagini olamiz:

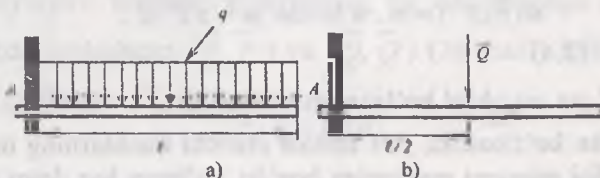
$$OA \cdot R_x = m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) + \dots + m_0(\vec{F}_n)$$

yoki

$$m_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_0(\vec{F}_k). \quad (3.3)$$

(3.3) formula Varin'on teoremasini ifodalaydi.

**6\*-masala.** Intensivligi  $q$  N/m bo'lib, tekis yoyilgan yukning  $A$  nuqtaga nisbatan momentini hisoblang.



34-shakl.

Yoyilgan kuchni to'plangan  $Q$  kuchi (34-shakl) bilan, modulini esa  $Q=q \cdot l$  bilan almashtiramiz. U holda Varin'on teoremasiga asosan quyidagini olamiz:

$$M_A = -Q \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{2}ql^2 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (6^*.1)$$

### 13-§. Juft kuch va uning momenti

#### 1. Juft kuch haqida tushuncha. Juft kuch momenti

Miqdorlari teng, o'zaro ma'lum oraliqda parallel va qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuchdan iborat sistema juft kuch deb ataladi (35-shakl). Juft kuch yotgan tekislik juftning ta'sir tekisligi deb ataladi. Juft kuch tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa  $d$  juft yelkasi deb ataladi. Juft kuch jismni juft tekisligiga perpendikular o'q atrofida burishga intiladi. Juft kuchni biror kuch bilan almashtirib bo'lmaydi, binobarin, juft kuch teng ta'sir etuvchiga ega bo'lmaydi. Juft kuch muvozanatlashishi uchun kuchning qarama-qarshi yo'nalishda buradigan juft qo'yish kerak. Juft kuch jismni juft tekisligida aylantirishga intiladi. Juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanadi. Juft kuch tashkil etuvchi kuchlardan juft kuch tekisligida yotuvchi biror  $O$  markazga nisbatan olingan momentlarining yig'indisini hisoblaymiz (36-shakl):

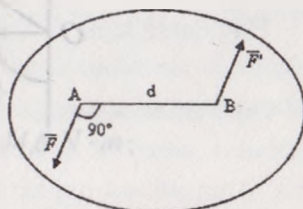
$$m_0(\vec{F}) + m_0(\vec{F}') = F \cdot oa - F' \cdot ob;$$

$$m(\vec{F}, \vec{F}') = m, \text{ u holda } m = \pm F \cdot d.$$

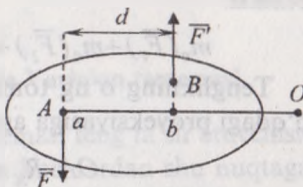
(3.4)

$$F = F' \text{ va } oa - ob = d \text{ bo'lganligi uchun } \vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = F \cdot d.$$

Bu yerdan ko'rinadiki, juft tashkil etuvchi kuchlarning momentlarining yig'indisi moment markaziga bog'liq bo'lmay har doim juft tashkil

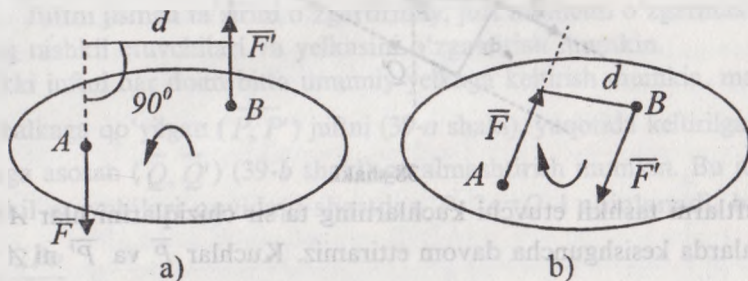


35-shakl.



36-shakl.

etuvchi kuchlarning birining miqdori bilan yelkasining ko'paytmasiga teng. Bu miqdor juft momenti deb qabul qilinadi. Demak, juft momenti skalyar miqdor bo'lib, tashkil etuvchi kuchlar birining miqdori bilan juft yelkasi-ga ko'paytmasiga aytiladi. Agar juft kuch jismni soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa, juft momenti musbat deb qabul qilinadi (37-a shakl). Agar juft kuch jismni soat mili yo'nalishida burashga intilsa, juft kuch momenti manfiy deb qabul qilinadi (37-b shakl).



37-shakl.

Juft kuch momentini qisqa  $m$  deb belgilaymiz, ya'ni  $m(F = F') = m$ , u holda  $m = \pm Fd$  (3.4) Juft kuch momenti, juft tashkil etuvchi kuchlardan birining ikkinchi kuchning qo'yilish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga tengligi 37-shakldan ko'rinadi ya'ni

$$m = m_B(\vec{F}) = m_A(\vec{F}'). \quad (3.5)$$

## 2. Juftning ekvivalentligi

**Ta'rif.** Juftning jismga beradigan ta'sirini o'zgartirmay boshqa juft bilan almashtirish mumkin bo'lsa, bunday ikki juft **o'zaro ekvivalent juftlar** deb ataladi. Quyidagi teorema juftlar ekvivalentligining sharti bo'la oladi.

**Teorema.** Bir tekislikda joylashgan momentlari o'zaro teng va burilish yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'ladi.

**Isbot:** Aytaylik, momenti o'zaro teng, bir xil burilishga ega bo'lgan bir tekislikda joylashgan  $(\vec{P}, \vec{P}')$  va  $(\vec{Q}, \vec{Q}')$  (38-shakl) juftlar berilgan bo'lsin ya'ni

$$P \cdot d_1 = Q \cdot d_2$$



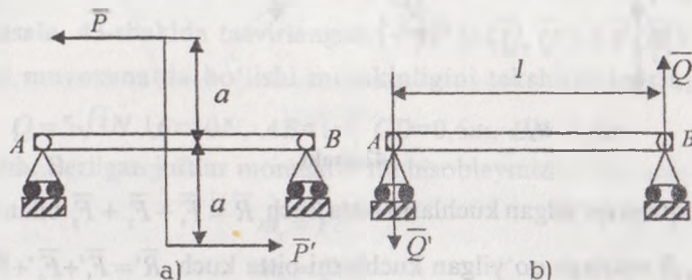
Ikkinchi tomondan teorema shartiga asosan  $P \cdot d_1 = Q \cdot d_2$ , binobarin, bundan quyidagi kelib chiqadi  $P_1 = Q$  va  $P'_1 = Q'$ . Modomiki, juft  $(\bar{Q}, \bar{Q}')$  juft  $(\bar{P}, \bar{P}')$  ga ekvivalent ekan, u holda juft  $(\bar{P}_1, \bar{P}'_1)$  ga ham ekvivalent bo'ladi. Shuni isbot qilish talab etilgan edi.

### Natijalar:

1. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.
2. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, juft momenti o'zgarmas qolib, uning tashkil etuvchilari va yelkasini o'zgartirish mumkin.

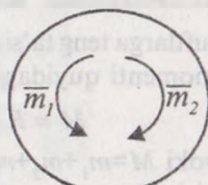
Ikki juftni har doim bitta umumiy yelkaga keltirish mumkin, masalan,  $AB$  balkaga qo'yilgan  $(\bar{P}, \bar{P}')$  juftni (39-a shakl), yuqorida keltirilgan natijalarga asosan  $(\bar{Q}, \bar{Q}')$  (39-b shakl) ga almashtirish mumkin. Bu juftning tashkil etuvchilari quyidagi shartdan  $P \cdot 2a = Q \cdot l$  aniqlanadi, bundan

$$Q = \frac{2Pa}{l}.$$



39-shakl.

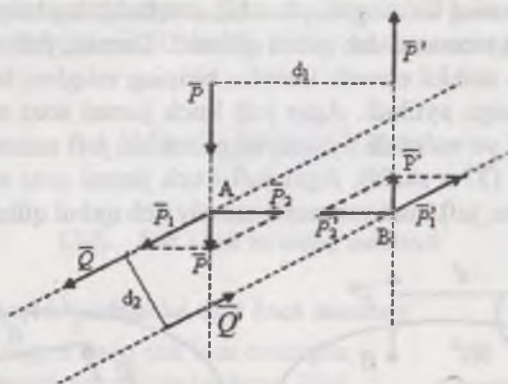
Isbot qilingan teorema va keltirilgan natijalardan, tekislikda juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanar ekan. Shuning uchun odatda juftni uning momenti va aylanish yo'nalishini ko'rsatuvchi buralma strelkalar yordamida tasvirlanadi (40-shakl).



40-shakl.

### 3. Tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shish

**Teorema.** Tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlarni, momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin.



38-shakl.

Juftlarni tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlarini ular  $A$  va  $B$  nuqtalarda kesishguncha davom ettiramiz. Kuchlar  $\bar{P}$  va  $\bar{P}'$  ni  $A$  va  $B$  nuqtalarga keltirib mos ravishda  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$  va  $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2$  tashkil etuvchilarga

ajratamiz. Osonlikcha  $\bar{P}_2, \bar{P}'_2$  lar miqdor jihatidan tengligini, yo'nalish jihatidan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalib, o'zaro muvozanatlashganligini ko'rish mumkin. Ikkinchi aksiomaga, asosan, bu kuchlar sistemasini e'tiborga olmasak ham bo'ladi. Miqdorlari o'zaro teng bo'lib, juft tashkil etuvchi  $\bar{P}_1$  va  $\bar{P}'_1$  kuchlar qoldi. Bu  $(\bar{P}, \bar{P}')$  juftga ekviva-

lentdir. Bu yerda  $(\bar{P}, \bar{P}')$  juftning jismga ta'sirini o'zgartirmay, ularning tashkil etuvchi kuchlari ustida amal bajariladi. Bu ikki  $(\bar{P}, \bar{P}')$  va  $(\bar{P}_1, \bar{P}'_1)$  juftlarning momentlari o'zaro tengligini osonlikcha ko'rsatish mumkin. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasi va (3.5) formuladan quyidagini olamiz:

$$m(\bar{P}, \bar{P}') = m_B(\bar{P}_1) + m_B(\bar{P}_2) \quad (3.6)$$

$$m_B(\bar{P}_2) = 0, \text{ hamda } m_B(\bar{P}_1) = m_B(\bar{P}_1, \bar{P}'_1)$$

$$m_B(\bar{P}, \bar{P}') = m(\bar{P}_1, \bar{P}'_1), \text{ ya'ni } P \cdot d_1 = P_1 \cdot d,$$

Ikkinchi tomondan teorema shartiga asosan  $P \cdot d_1 = Q \cdot d_2$ , binobarin, bundan quyidagi kelib chiqadi  $P_1 = Q$  va  $P'_1 = Q'_1$ . Modomiki, juft  $(\bar{Q}, \bar{Q}')$  juft  $(\bar{P}, \bar{P}')$  ga ekvivalent ekan, u holda juft  $(\bar{P}_1, \bar{P}'_1)$  ga ham ekvivalent bo'ladi. Shuni isbot qilish talab etilgan edi.

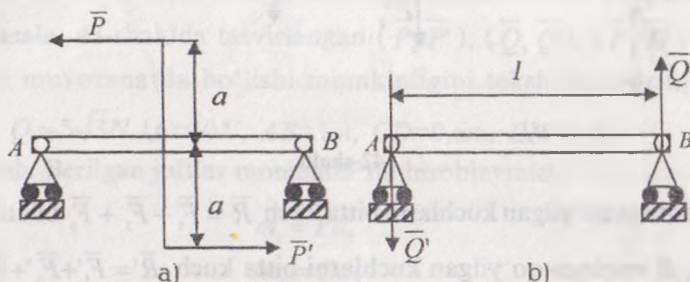
### Natijalar:

1. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.

2. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, juft momenti o'zgarmas qolib, uning tashkil etuvchilari va yelkasini o'zgartirish mumkin.

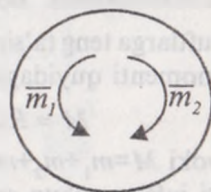
Ikki juftni har doim bitta umumiy yelkaga keltirish mumkin, masalan,  $AB$  balkaga qo'yilgan  $(\bar{P}, \bar{P}')$  juftni (39-a shakl), yuqorida keltirilgan natijalarga asosan  $(\bar{Q}, \bar{Q}')$  (39-b shakl) ga almashtirish mumkin. Bu juftning tashkil etuvchilari quyidagi shartdan  $P \cdot 2a = Q \cdot l$  aniqlanadi, bundan

$$Q = \frac{2Pa}{l}.$$



39-shakl.

Isbot qilingan teorema va keltirilgan natijalardan, tekislikda juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanar ekan. Shuning uchun odatda juftni uning momenti va aylanish yo'nalishini ko'rsatuvchi buralma strelkalar yordamida tasvirlanadi (40-shakl).



40-shakl.

### 3. Tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shish

**Teorema.** Tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlarni, momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin.

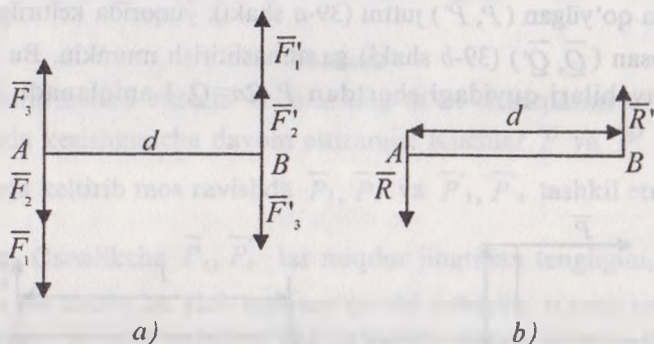


41-shakl.

**Isbot.** Tekislikda momentlari  $m_1, m_2, m_3$  bo'lgan 3 ta juft joylashgan (41-shakl).

Juftlarning ta'sir tekisligida ixtiyoriy  $AB$  kesmani, berilgan juftlar uchun umumiy yelka uchun tanlab olamiz (42-a shakl) momentlari  $m_1, m_2, m_3$  bo'lgan juftlarni, momentlari berilgan juftlarni momentlariga teng bo'lgan  $(\bar{F}, \bar{F}')$ ,  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2')$ ,  $(\bar{F}_1, \bar{F}_3')$  juftlar bilan almashtiramiz, ya'ni

$$m_1 = F_1 \cdot d; m_2 = F_2 \cdot d; m_3 = F_3 \cdot d.$$



42-shakl.

$A$  nuqtaga qo'yilgan kuchlarni bitta kuch  $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$  bilan almashtiramiz.  $B$  nuqtaga qo'yilgan kuchlarni bitta kuch  $\bar{R}' = \bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \bar{F}_3'$  bilan almashtiramiz. Boshqacha aytganda  $(\bar{R}, \bar{R}')$  kuchlar sistemasi berilgan juftlarga teng ta'sir etuvchi juftidir (42-b shakl). Teng ta'sir etuvchi juftning momenti quyidagiga teng bo'ladi:

$$M = R_1 d = (F_1 + F_2 - F_3) d = F_1 \cdot d + F_2 \cdot d + (-F_3 \cdot d),$$

yoki  $M = m_1 + m_2 + m_3$ , teorema isbotlandi. Xuddi shunday ixtiyoriy sonda juftlar uchun quyidagini yozish mumkin:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (3.7)$$

#### 4. Juftlarning muvozanat sharti

Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar muvozanatda bo'lsin. Hamma juftlarni bitta juft bilan almashtirib, muvozanat mavjud bo'lishi uchun yoki  $R=0$  yoki  $d=0$  bo'lishi kerak degan xulosaga kelamiz. U holda  $R \cdot d=0$ , ya'ni juft momenti  $M=0$ . Bu yerdan ko'rinadiki, (3.7) formula-ga asosan

$$\sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (3.8)$$

Demak, bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi muvozanatda bo'lsa, ular momentlarining algebraik yig'indisi 0 ga teng bo'ladi. Bu xulosaning teskarisi ham o'rinlidir. Ya'ni, bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar momentlarning algebraik yig'indisi nolga teng bo'lsa, bu juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Haqiqatan ham, agar  $\sum m_k = 0$  bo'lsa, u holda  $M=R \cdot d=0$ . Bundan  $R=0$  yoki  $d=0$  bo'lishi mumkin. Har ikkala holda ham sistema muvozanatda bo'ladi. Demak (3.8) tenglik juftlar sistemasi muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalaydi.

**7\*-masala.** 43-shaklda tasvirlangan  $(\bar{P}, \bar{P}')$ ,  $(\bar{Q}, \bar{Q}')$ ,  $(\bar{F}, \bar{F}')$  juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi mumkinligini tekshirib ko'ring, agar  $P=10N$ ,  $Q=5\sqrt{3}N$ ,  $F=10N$ ,  $AB=1m$ ,  $CD=0,6m$ ,  $EH=1,6m$ .

**Yechish.** Berilgan juftlar momentlarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} m_1 &= Pd_1 \\ m_2 &= Qd_2 \\ m_3 &= -Fd_3 \end{aligned} \quad (7*.1)$$

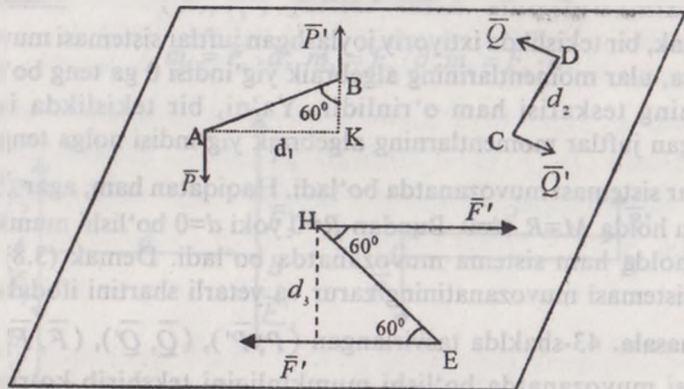
Juft yelkalari:

$$\begin{aligned} d_1 &= AB \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} m \\ d_2 &= CD = 0,6m \\ d_3 &= EH \sin 60^\circ = 1,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8\sqrt{3}m \end{aligned} \quad (7*.2)$$

(7\*.2) ni (7\*.1) ga qo'ysak:

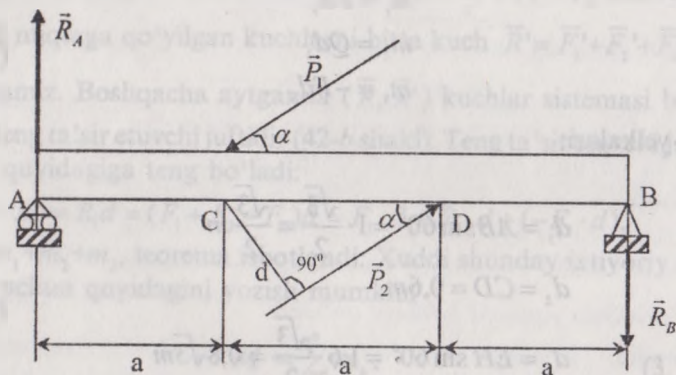
$$\begin{aligned} m_1 &= 5\sqrt{3} \text{ N} \cdot m \\ m_2 &= 3\sqrt{3} \text{ N} \cdot m \\ m_3 &= -8\sqrt{3} \text{ N} \cdot m \end{aligned} \quad (7*.3)$$

juftlar sistemasi muvozanatda ekan.



43-shakl.

**8\*-masala.** Juft ( $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ) ta'siri ostidagi to'sinning tayanch reaksiyalari aniqlang, agar  $AC=CD=BD=a$  (44-shakl).



44-shakl.

**Yechish.** Juft kuchi ( $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ )ni qarama-qarshi yo'nalishdagi ( $\overline{R}_1, \overline{R}_2$ ) juft kuch bilan muvozanatlashtirish mumkin.

To'sinning  $A$  sharnirli tayanchi qo'zg'aluvchan g'ildiraklar ustiga tayangan, shuning uchun  $\overline{R}_A$  reaksiya vertikal yuqoriga yo'nalgan bo'ladi.

U holda  $\overline{R}_B$  reaksiya vertikal pastga yo'nalgan. Quyidagi belgilashni olamiz

$$\begin{aligned}\overline{m}_1 &= \overline{m}(\overline{P}_1, \overline{P}_2), \\ \overline{m}_1 &= \overline{m}(\overline{R}_A, \overline{R}_B).\end{aligned}\quad (8^*.1)$$

U holda ikki juftning muvozanat sharti

$$m_1 + m_2 = 0 \quad (8^*.2)$$

quyidagi ko'rinishni oladi:

$$P_1 \sin \alpha - R_1 \cdot 3a = 0 \quad (8^*.3)$$

(8^\*.3) tenglamadan

$$R_A = R_B = \frac{P \sin \alpha}{3}. \quad (8^*.4)$$

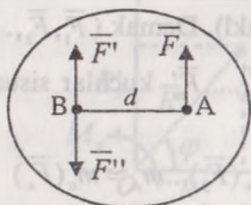
kelib chiqadi.

#### 14-§. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

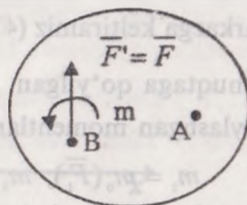
##### 1. Kuchni o'ziga parallel ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishga oid teorema

**Teorema.** Absolut qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay o'ziga parallel ravishda boshqa ixtiyoriy nuqtaga keltirish, momenti berilgan kuchdan keltirish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan juft qo'shishni taqozo qiladi.

**Isbot.** Jismning biror  $A$  nuqtasiga  $F$  kuch qo'yilgan bo'lsin.



45-shakl.



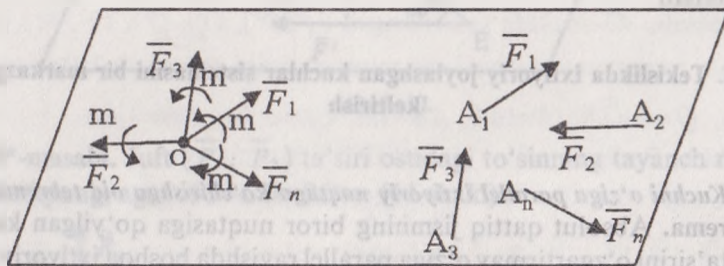
46-shakl.

Jismning ixtiyoriy  $B$  nuqtasiga tashkil etuvchilari  $\vec{F}'$  va  $\vec{F}''$  miqdor jihatidan  $F$  kuchga teng bo'lgan ya'ni  $F' = F'' = F$  nolli sistemani kuchga parallel ravishda qo'yamiz (45-shakl). Hosil bo'lgan uchta kuchdan  $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$  iborat bo'lgan sistema berilgan  $F$  kuchga ekvivalentdir. Bu sistemani  $\vec{F}'$  kuch va  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  juftdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Binobarin  $A$  nuqtaga qo'yilgan  $\vec{F}$  kuchi,  $B$  nuqtaga qo'yilgan shunday  $\vec{F}'$  kuchiga va  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  juftga ekvivalentdir. Juft  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  ni qo'shilgan juft deb ataladi. Uning momentini aniqlaymiz  $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{F} \cdot d = \vec{m}_B(\vec{F})$ .

Binobarin qo'yilgan juftning momenti  $A$  nuqtaga qo'yilgan  $F$  kuchdan, ko'chirish zarur bo'lgan  $B$  nuqtaga nisbatan momentga teng bo'ladi. Bu teoremaning tafsiloti 45- va 46-shakllarda tasvirlangan.

## 2. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

**Bosh vektor va bosh moment.** Qattiq jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  kuchlar sistemasi ta'sir qilsin.



47-shakl.

Tekislikda keltirish markazi deb ataluvchi ixtiyoriy  $O$  nuqtani olib, momentlari  $m_1, m_2, m_n$  bo'lgan qo'shilgan juftlarni qo'shib, hamma kuchlarni shu markazga keltiramiz (47-shakl). Demak  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ . Kuchlar sistemasi  $O$  nuqtaga qo'yilgan  $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n'$  kuchlar sistemasiga va bir tekislikda joylashgan momentlari

$$m_1 = m_O(\vec{F}_1), m_2 = m_O(\vec{F}_2) \dots m_n = m_O(\vec{F}_n) \quad (3.9)$$

bo'lgan juftlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

$O$  nuqtaga qo'yilgan kuchlarni qo'shib, ularni bitta kuch bilan almashtiramiz:

$$\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.10)$$

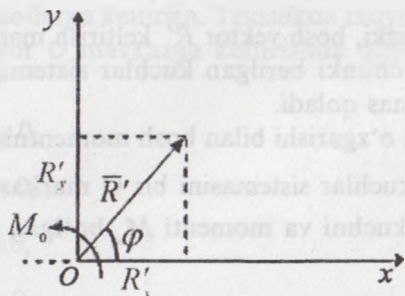
Modomiki  $\sum_{k=1}^n \bar{F}'_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ , u holda  $\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  kattalik berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladi. Binobarin tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng ekan. Tekislikda joylashgan qo'shilgan juftlarni jamlab, momenti  $M_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  bo'lgan bitta juft bilan almashtiramiz. Formula (3.9)ni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M_0 = m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n)$$

yoki

$$M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k). \quad (3.11)$$

Moment  $M_0$  berilgan kuchlar sistemasining  $O$  keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deb ataladi. Demak, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror markazga nisbatan bosh momenti berilgan sistemasining kuchlaridan keltirish markaziga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng. Olingan natijani quyidagi teorema shaklida keltirish mumkin. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini umumiy holda, sistemaning bosh vektoriga teng bo'lgan va qandaydir  $O$  nuqtaga qo'yilgan bitta kuch va shu tekislikda yotuvchi momenti berilgan kuchlar sistemasining shu nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin (48-shakl).



48-shakl.

Bosh vektor  $R'$  ni miqdor va yo'nalishini analitik aniqlash. Koordinata sistemasi boshini keltirish markazi  $O$  nuqtada olib (48-shakl)  $OX$  va  $OY$  o'qlarini o'tkazib,  $R'$  ning miqdorini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2}. \quad (3.12)$$

Bunda  $R'_x$  va  $R'_y$  bosh vektor  $R'$  ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir (3.10). Tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagini olamiz:

$$R'_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R'_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \quad (3.13)$$

Ya'ni, kuchlar sistemasi bosh vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, kuchlarning shu o'qlardagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga tengdir. Formula (3.12)ga  $R'_x$ ,  $R'_y$  larning qiymatlarini (3.13) formuladan keltirib qo'yib, quyidagini olamiz:

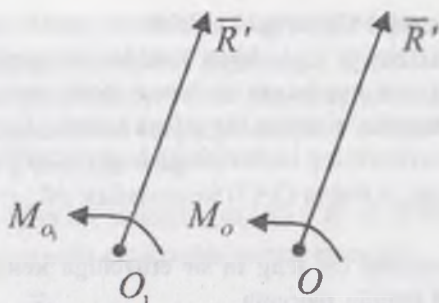
$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}. \quad (3.14)$$

Bosh vektorning yo'nalishi, uni  $OX$  o'qi bilan tashkil qilgan  $j$  burchagi orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R'_y}{R'_x}. \quad (3.15)$$

Shuni ta'kidlaymizki, bosh vektor  $R'$  keltirish markazini o'zgartirish bilan o'zgarmaydi, chunki berilgan kuchlar sistemasining miqdor va yo'nalishlari o'zgarmas qoladi.

Keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi. Berilgan  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  kuchlar sistemasini bir  $O$  markazga keltirib,  $O$  nuqtaga qo'yilgan  $R'$  kuchni va momenti  $M_o$  bo'lgan juftni olamiz (49-shakl).



49-shakl.

Keltirish markazi uchun boshqa  $O_1$  nuqtani olamiz va bu nuqtaga nisbatan bosh momentni  $M_{o_1}$  deb belgilaymiz,  $R'$  kuchni  $O$  nuqtadan  $O_1$  nuqtaga ko'chirish uchun momenti  $O_1$  nuqtaga qo'yilgan  $R'$  kuchdan  $O_1$  nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan, ya'ni  $M_{o_1}$  ( $R'$ ) juftni qo'shish kerak. Bu juftni kuchlar sistemasining  $O$  ga keltirish natijasida hosil bo'lgan juft bilan qo'shib, momenti quyidagiga teng bo'lgan bitta juft hosil qilamiz

$$M_{o_1} = M_o + m_{o_1}(\bar{R}') \quad (3.16)$$

bundan

$$M_{o_1} - M_o = m_{o_1}(\bar{R}') \quad (3.17)$$

Demak, keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi oldingi markazga qo'yilgan bosh vektordan, keyingi markazga nisbatan olingan momentga teng bo'lar ekan.

**3. Keltirishning xususiy hollari.** Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda hollarga keltirish. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror  $O$  markazga keltirishda quyidagi xususiy hollar mavjud

- 1)  $\bar{R}' = 0$ ,  $M_o \neq 0$ ,
- 2)  $\bar{R}' \neq 0$ ,  $M_o = 0$ ,
- 3)  $\bar{R}' \neq 0$ ,  $M_o \neq 0$ ,
- 4)  $\bar{R}' = 0$ ,  $M_o = 0$ .

### 1) Kuchlar sistemasini bir juftga keltirish

Agar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori nolga teng bo'lib, biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bir juftga keladi. Bunday holda bosh momenti keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham, agar  $R=0$  bo'lsa, u holda (3.17) formuladan  $M_a = M_o$  ekanligi kelib chiqadi.

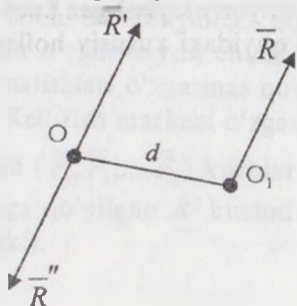
### 2) Kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirish. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida teorema

Faraz qilaylik kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi (2 va 3 xususiy hollar).

Agar  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  kuchlar sistemasini biror  $O$  markazga keltirish natijasida bitta kuch  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  va momenti  $M_o = \sum_{i=1}^n m_o(\vec{F}_i)$  bo'lgan bitta juft hosil bo'lsin. Juft tashkil etuvchi kuchlar miqdorini bosh vektorga teng qilib olib, ya'ni,  $\vec{R}' = \vec{R}'' = \vec{R}$  va juft tashkil etuvchi kuchlardan birini  $O$  nuqtaga  $R'$  bilan qarama-qarshi yo'nalishda joylashtiramiz (50-shakl) juft  $(\vec{R}, \vec{R}'')$  ning yelkasi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$d = \frac{M_o}{R} \quad (3.18)$$

Hosil bo'lgan  $(\vec{R}, \vec{R}', \vec{R}'')$  kuchlar 50-shakl sistemasi bitta  $R$  kuchga ekvivalent bo'ladi. Darhaqiqat,  $\vec{R}$  berilgan  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'ladi.



50-shakl.

### *Teng ta'sir etuvchining momentiga oid Varin'on teoremasi*

**Teorema.** Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

**Isbot.** 50-shakldan ko'rinadiki,  $m_0(\bar{R}) = R \cdot d$ .  $R=R'$  ekanligi va (3.18) formulani e'tiborga olib quyidagini yozish mumkin:

$$m_0(\bar{R}) = M_0 \text{ yoki } m_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) \quad (3.19)$$

Teorema isbotlandi.

### **15-§. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari**

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$\bar{R}' = 0 \text{ va } \bar{M}_0 = 0 \quad (3.20)$$

Agar biror shart bajarilmasa, u holda kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga yoki juftga keltiriladi, ya'ni muvozanatda bo'lmaydi. Agar

$\bar{R}' = 0$  bo'lsa, u holda sistema momenti  $M_0$  bo'lgan juftga keltiriladi, modomiki  $M_0 \neq 0$ , u holda sistema muvozanatda bo'ladi. (3.20) shartdan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatining quyidagi analitik shartlari kelib chiqadi.

#### **1. Muvozanat shartining asosiy ko'rinishi**

Bosh vektor  $\bar{R}'$  va bosh moment  $M_0$  quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}, \quad M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k).$$

Agar  $R' = 0$  va  $M_0 = 0$  bo'lsa, u holda

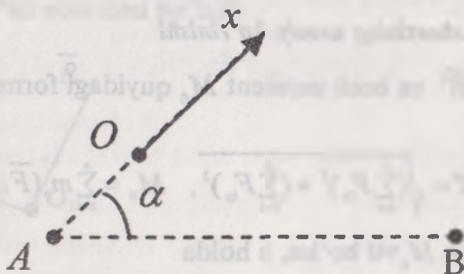
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (3.21)$$

Ya'ni, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi, kuchlarning ta'sir tekisligidagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Bog'lanishdagi jismlarning muvozanatiga oid masalalar yechishda (3.21) shartda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etadi va muvozanat tenglamari deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni ular qatnashgan tenglamalar soniga teng bo'lsa, u holda hamma noma'lumlar shu tenglamalardan aniqlanadi. Bunday masalar *statik aniq masalalar* deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni, ular qatnashgan tenglamalar sonidan ko'p bo'lsa, u holda bunday masalalar *statik aniqmas masalalar* deb ataladi.

## 2. Muvozanat shartining ikkinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning ikkita  $A$  va  $B$  nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi, hamda  $AB$  kesmaga perpendikular bo'lmagan  $OX$  o'qiga proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (51-shakl):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n m_A(F_k) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) &= 0 \\ \alpha &\neq 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$



51-shakl.

### 3. Muvozanat shartining uchinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning bir to'g'ri chiziq ustida yotmagan uchta  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalar-ga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (3.23)$$

Holatma: (3.22) va (3.23) shartlar isbotsiz taklif etildi.

### 4. Tekislikda parallel joylashgan kuchlarning muvozanat shartlari

Agar hamma kuchlar  $OY$  o'qiga parallel bo'lsa (52-shakl), u holda

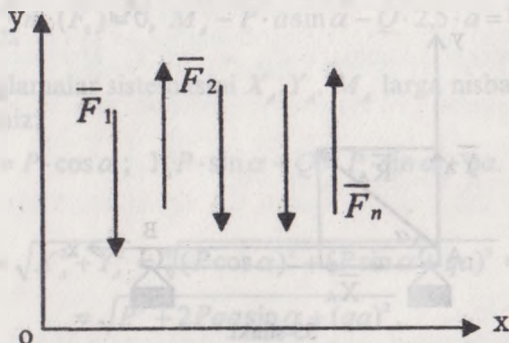
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

modomiki

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = \sum_{k=0}^n F_k$$

va muvozanat sharti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^n F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0 \quad (3.24)$$



52-shakl.

Demak, tekislikdagi parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

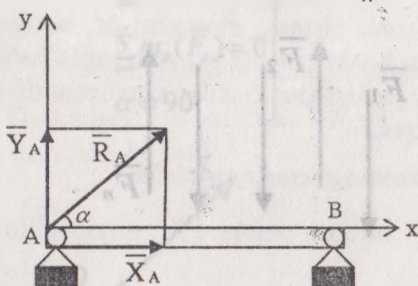
Tekislikda parallel kuchlar muvozanat shartining ikkinchi shakli.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, bu kuchlarga parallel bo'lgan chiziq ustida yotmaydigan ikki  $A$  va  $B$  nuqtalarga nisbatan olingan kuchlar momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0 \quad (3.25)$$

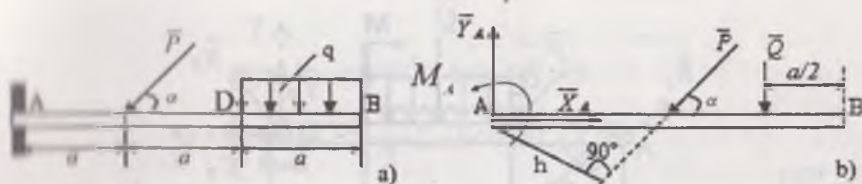
### Reaksiya kuchlarini aniqlashga doir qo'shimchalar

Bog'lanishlarning bir necha xil turlari va ularning reaksiyalari 1-bobning 3-§da berilgan. Xususan bog'lanish ishqalanishsiz silindrik sharnir vositasida bajarilgan bo'lsa, sharnir bog'lanish reaksiya kuchi silindrik o'qiga perpendikular bo'lgan tekislikda yotishi ko'rsatilgan edi. Reaksiya kuchining yo'nalishi noma'lum bo'lib, jismga ta'sir etuvchi boshqa kuchlarga bog'liq bo'ladi. Jism tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sirida muvozanatlashishiga oid masala yechiladigan bo'lsa, qo'zg'almas sharnirning reaksiya kuchi  $R_A$  ning miqdor va yo'nalishi noma'lum (53-shakl). Shuning uchun uni  $OX$  va  $OY$  koordinata o'qlari bo'ylab  $X_A$  va  $Y_A$  tashkil etuvchilar orqali tasvirlab,  $R_A$  ning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_A}{X_A}$$


53-shakl.

Qistirib mahkamlangan bog'lanish (54-a shakl). Agar jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sir qilsa, bu kuchlar sistemasini markazga keltirish natijasida,  $A$  nuqtaga qo'yilgan  $R_A$  kuchi va momenti  $M_A$  bo'lgan juft hosil bo'ladi. Noma'lum  $R_A$  reaksiya kuchini koordinata o'qlari bo'ylab  $X_A$  va  $Y_A$  tashkil etuvchilari orqali tasvirlaymiz.



54-shakl.

Binobarin jismning qistirib mahkamlangan kesmasida reaksiyaning belgisi  $X_A$  va  $Y_A$  tashkil etuvchilari hamda, momenti  $M_A$  bo'lgan reaktiv juft ta'sir qiladi.

**9\*-masala.** (54-a shakl)da ko'rsatilgan to'sinning tayanch reaksiyalarini aniqlang.

**Yechish.**  $AB$  to'sin tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'sir qiladi. Intensivligi  $q$  bo'lgan tekis taqsimlangan kuchni to'plangan  $Q$  kuchi bilan almashtiramiz. Bu kuch  $DB$  kesmaning o'rtasiga qo'yilgan va miqdori  $Q=q \cdot a$  ga teng. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad X_A - P \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad X_A - P \cdot \sin \alpha - Q = 0, \quad (9^* . 1)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i(\bar{F}_i) = 0, \quad M_A - P \cdot a \sin \alpha - Q \cdot 2,5 \cdot a = 0.$$

(9\* . 1) tenglamalar sistemasini  $X_A, Y_A, M_A$  larga nisbatan yechib quyidagilarni olamiz:

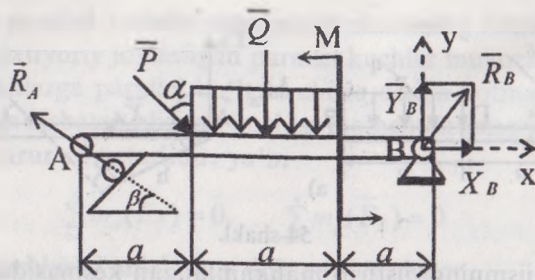
$$X_A = P \cdot \cos \alpha; \quad Y_A P \cdot \sin \alpha + Q = P \cdot \sin \alpha + qa. \quad (9^* . 2)$$

U holda:

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(P \cos \alpha)^2 + (P \sin \alpha + qa)^2} = \\ &= \sqrt{P^2 + 2Pqa \sin \alpha + (qa)^2}. \end{aligned} \quad (9^* . 3)$$

$$M_A = P a \sin \alpha + Q \cdot 2,5a = P a \sin \alpha + 2,5qa^2. \quad (9^* . 4)$$

**10\*-masala.** 55-shaklda ko'rsatilgan to'singa ta'sir qiluvchi kuchlar ta'siridan uning  $A$  va  $B$  nuqtalaridagi tayanch reaksiyalarini analitik usulda aniqlang. Berilgan:



55-shakl.

| A[m] | $\alpha$ | $\beta$ | P[N] | q[N/m] | M[Nm] |
|------|----------|---------|------|--------|-------|
| 2    | 30°      | 60°     | 6    | 3      | 12    |

**Yechish.** AB to'sinni erkin jism deb qarab muvozanatini tekshiramiz. Unga quyidagi kuchlar ta'sir qiladi:

1. Vertikal bilan  $\alpha$  burchak tashkil qilgan  $P$  kuchi.
2. Momenti  $M$  ga teng bo'lgan juft kuch.
3.  $a$  uzunlik bo'ylab tekis tarqalgan yoyilgan kuch, uning teng ta'sir etuvchi miqdori:

$$Q = q \cdot a, \text{ ya'ni } Q = 3 \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot 2[m] = 6N. \quad (10^*.1)$$

4. Bog'lanish reaksiya kuchlari:  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{X}_B$ , va  $\bar{Y}_B$ . Muvozanat tenglamalarini yozamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= X_B - R_A \cos \beta + P \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) &= Y_B \cdot 3a + M - Q \cdot \frac{3}{2}a - P \cos \alpha \cdot a = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) &= -R_A \sin \beta \cdot 3a + P \cos \alpha \cdot 2a + Q \cdot \frac{3}{2}a + M = 0. \end{aligned} \quad (10^*.2)$$

Berilgan son qiymatlarini (10\*.2) tenglamalar sistemasiga qo'ysak, quyidagilarni olamiz:

$$X_B - R_A \cdot \cos 60^\circ + 6 \sin 30^\circ = 0,$$

$$Y_B \cdot 3 \cdot 2 + 12 - 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 - 6 \cos 30^\circ \cdot 2 = 0,$$

(10\* .3)

$$- R_A \sin 60^\circ \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cos 30^\circ \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 + 12 = 0.$$

(10\* .3) tenglamalardan

$$X_B - 0,5R_A + 3 = 0, \quad X_B = 1,92N,$$

$$Y_B - 2,73 = 0, \quad Y_B = 2,73N,$$

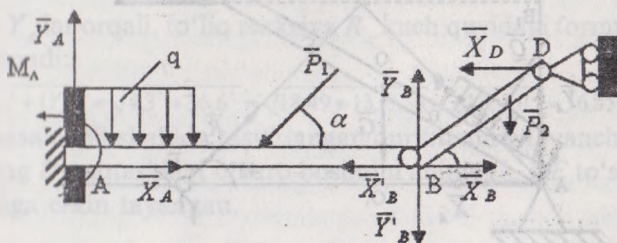
$$-0,86R_A + 8,46 = 0, \quad R_A = 9,84N.$$

### 16-§. Jismlar sistemasining muvozanati

Odatda, o'zaro bog'langan (sharnir, arqon, sterjen vositasida), bir nechta jismlardan tashkil topgan qurilmalar ko'proq uchraydi. 56-shaklda ikkita  $AB$  va  $BD$  jismlar o'zaro  $B$  sharnir yordamida biriktirilgan sistema tasvirlangan.  $A$  va  $D$  nuqtalardagi tayanch reaksiya kuchlari va  $B$  sharnirdagi o'zaro bosim aniqlanishi talab qilindi.  $B$  sharnirdagi o'zaro bosim kuchi miqdor va yo'nalish jihatidan noma'lum. Shuning uchun uni koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilar orqali tasvirlaymiz va ta'sir hamda aks ta'sir aksiomasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\bar{X}_B = -\bar{X}_B, \quad \bar{Y}_B = -\bar{Y}_B.$$

$\bar{X}_B, \bar{Y}_B$  tashkil etuvchilar  $BD$  jismga ta'sir qiladi va  $\bar{X}'_B, \bar{Y}'_B$  lar  $AB$  jismga.



56-shakl.

Tashqi bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirib, muvozanat holatdagi o'zgaruvchan mexanik sistemani hosil qilamiz, har ikkala jism ham  $B$  sharnir atrofida aylanishi mumkin. Qotish prinsipiga asosan, bu sistema uchun xuddi absolut qattiq jismga o'xshash, uchta muvozanat tenglamasini tuzamiz. Bu tenglamalar sistemasi noma'lumlarni aniqlashda o'zizlik qiladi. Bundan tashqari masalani yechish uchun jismlardan birortasini, masalan  $BD$  jismning muvozanatini ko'rish va u uchun uchta muvozanat tenglamasini tuzish kerak. Bu masalani boshqacha tartibda ham hal qilsa bo'ladi. Ya'ni, har ikkala jism uchun alohida-alohida muvozanat tenglamasini tuzish mumkin.

### 17-§. Masalalar yechish

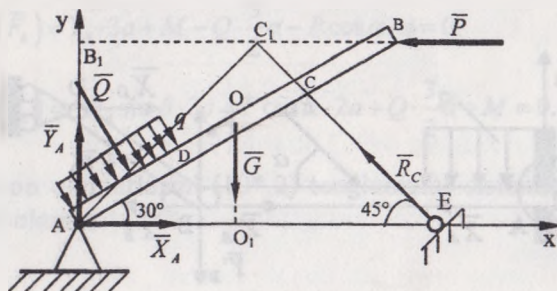
**11\*-masala.** 57-shaklda tasvirlangan qurilmaning  $A$  tayanch reaksiyasi  $CE$  sterjendagi zo'riqishini aniqlang. Qurilmaga intensivligi  $q$  bo'lgan  $AB$  to'sin o'qiga perpendikular tekis taqsimlangan va gorizontal  $P$  kuch ta'sir etadi. Bir jinsli  $AB$  to'sinning og'irligi  $G=20\text{ N}$ ,  $P=10\text{ N}$ ,  $q=30\text{ N/m}$ .  $AD=DC=CB=1\text{ m}$  bo'lsin.  $CE$  sterjenning og'irligini e'tiborga olmag.

**Yechish.** Muvozanatdagi  $AB$  to'sinni tekshiramiz. Tekis taqsimlangan yukning ta'sirini to'plangan  $Q$  kuch bilan almashtiramiz. Bu kuch  $AD$  bo'lakning o'rtasiga qo'yilgan bo'lib, miqdori

$$Q = q \cdot AD \quad (11*.1)$$

ga teng.  $AB$  jismni bog'lanishlardan xoli qilib, bog'lanish reaksiyalari bilan almashtiramiz.  $A$  sharnirdagi noma'lum reaksiyani koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilari orqali tasvirlaymiz.  $C$  sharnirdagi

$\bar{R}_C$  reaksiya kuchi sharnir o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.



57-shakl.

Muvozanal tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad X_A + Q \cdot \cos 60^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ - P = 0. \quad (11^*.2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad Y_A - Q \cdot \cos 30^\circ - G + R_C \cdot \cos 45^\circ = 0. \quad (11^*.3)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i(\bar{F}) = 0 \quad -Q \cdot \frac{AD}{2} - G \cdot AO_1 + R_C \cdot AC_1 + P \cdot AB_1 = 0. \quad (11^*.4)$$

Shakldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$AO_1 = AO \cdot \cos 30^\circ = \frac{AB}{2} \cos 30^\circ,$$

$$AC_1 = AC \cdot \sin 75^\circ, \quad AB_1 = AB \cdot \sin 30^\circ.$$

Bularni (11\*.4) tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$-Q \cdot \frac{AD}{2} - G \cdot \frac{AB}{2} \cos 30^\circ + R_C \cdot AC \cdot \sin 75^\circ + P \cdot AB \cdot \sin 30^\circ. \quad (11^*.5)$$

(11\*.5) dan (11\*.6) tenglamaga RC modulini aniqlaymiz:

$$R_C = \frac{Q \cdot AD + G \cdot AB \cdot \cos 30^\circ - 2P \cdot AB \cdot \sin 30^\circ}{2 \cdot AC \cdot \sin 75^\circ}. \quad (11^*.6)$$

Kattaliklarni o'rniga son qiymatlarini qo'yib quyidagini olamiz:

$$R_C = \frac{30 \cdot 1 + 20 \cdot 3 \cdot 0,86 - 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0,5}{2 \cdot 2 \cdot 0,97} = 13,3 \text{ N}. \quad (11^*.7)$$

(11\*.2) va (11\*.3) tenglamalar sistemasidan  $X_A$  va  $Y_A$  lar aniqlanadi:

$$X_A = P + R_C \cdot \cos 45^\circ - Q \cdot \cos 60^\circ = 10 + 13,4 \cdot 0,7 - 30 \cdot 0,5 = 4,3 \text{ N}. \quad (11^*.8)$$

$$Y_A = Q \cos 30^\circ + G - R_C \cdot \cos 45^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 - 13,3 \cdot 0,7 = 36,65 \text{ N}. \quad (11^*.9)$$

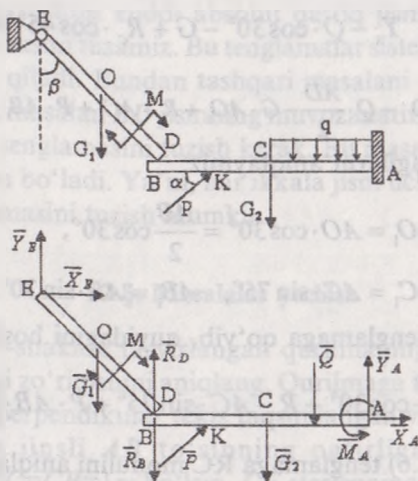
$X_A$  va  $Y_A$  lar orqali, to'liq reaksiya  $R_A$  kuch quyidagi formula yordami-  
da aniqlanadi:

$$R_A = \sqrt{(X_A)^2 + (Y_A)^2} = \sqrt{4,3^2 + 36,6^2} = \sqrt{18,49 + 1339,56} = \sqrt{1358,05} = 36,85 \text{ N}. \quad (11^*.10)$$

**12\*-masala.** 58-shaklda tasvirlangan qurilmaning tayanch reaksiyalari va jisning  $D$  nuqtasidagi o'zaro bosimini aniqlang.  $DE$  to'sin  $D$  nuqtasi  $AB$  to'singa erkin tayangan.

**Berilgan.**

$$P = 30\sqrt{3}N, G_1 = 40N, G_2 = 30N, M = 150\sqrt{3}N \cdot m, \\ \alpha = 60^\circ, q = 100N/m, AC = CB = 2KB = 2m, EO = OD = 1,5m, \beta = 60^\circ.$$



58-shakl.

**Yechish.** Sistema ikkita jismdan tashkil topgan  $AB$  va  $DE$  to'sinlardir. Har bir jismlarning muvozanatini alohida-alohida ko'ramiz (58-shakl).  $DE$  to'singa berilgan  $\bar{G}_1$  kuch va momenti  $M$  bo'lgan juft kuch ta'sir qiladi.  $AB$  to'sinning  $DE$  to'singa ta'sirini,  $AB$  to'sin o'qiga tik yo'nalgan reaksiya kuchi bilan almashtiramiz.  $E$  sharnirning reaksiyasini  $\bar{X}_E, \bar{Y}_E$  koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilar orqali tasvirlaymiz.  $AB$  to'singa quyidagi berilgan kuchlar:  $P, G_2, Q$  lar ta'sir qiladi, chunonchi  $Q$  kuch  $AB$  to'sinning  $AC$  qismining o'rtasiga ta'sir qilib, miqdori quyidagiga teng:  $Q=q \cdot AC$ ;  $DE$  to'sinning  $AB$  to'singa ta'sirini  $\bar{R}_b = -\bar{R}_d$  reaksiya kuchi bilan almashtiramiz (ta'sir aks ta'sir aksiomasiga asosan) mustahkam mahkamlangan bog'lanishning  $A$  qirgimida hosil bo'lgan reaksiyani koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  tashkil etuvchilar va momenti  $M_A$  bo'lgan juft kuch bilan almashtiramiz.  $DE$  jisimga ta'sir etuvchi kuchlar uchun muvozanat tenglamasini (3.22) ko'rinishda tuzamiz. Bunda moment markazlari uchun  $E$  va  $D$  nuqtalarni olamiz.

$$\sum m_i(\vec{F}_i) = 0; \quad -M - G_1 \cdot OE \cdot \sin \beta + R_D \cdot DE \cdot \sin \beta = 0. \quad (12^*.1)$$

$$\sum m_i(\vec{F}_i) = 0; \quad -M - Y_E \cdot DE \cdot \sin \beta + G_1 \cdot OD \cdot \sin \beta - X_E \cdot DE \cos \beta = 0. \quad (12^*.2)$$

$$\sum F_x = 0; \quad X_E = 0. \quad (12^*.3)$$

Al jumga ta'sir qiluvchi kuchlar uchun muvozanat tenglamasini (3.21) ko'rinishda tuzamiz va bunda moment markazi uchun A nuqtani olamiz:

$$\sum F_x = 0 \quad P \cdot \cos \alpha + X_A = 0. \quad (12^*.4)$$

$$\sum F_y = 0 \quad -R_D + P \cdot \sin \alpha - G_2 - Q + Y_A = 0. \quad (12^*.5)$$

$$\sum m_i(\vec{F}_i) = 0 \quad -P \cdot AK \cdot \sin \alpha + G_2 \cdot AC + Q \cdot \frac{1}{2} \cdot AC + M_A = 0. \quad (12^*.6)$$

Tenglamalar sistemasini yechib, ketma-ket quyidagilarni olamiz: (12^\*.1) tenglamadan:

$$R_D = \frac{M + G_1 \cdot OE \cdot \sin \beta}{DE \cdot \sin \beta} = \frac{150\sqrt{3} + 40 \cdot 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{360}{3} = 120 \text{ N.}$$

(12^\*.2) tenglamadan:

$$Y_E = \frac{M + G_1 \cdot OD \cdot \sin \beta}{DE \cdot \sin \beta} = \frac{150\sqrt{3} - 40 \cdot 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{240}{3} = 80 \text{ N.}$$

(12^\*.4) tenglamadan:

$$X_A = -P \cos \alpha = -15\sqrt{3} \approx -26 \text{ N.}$$

(12^\*.5) tenglamadan:

$$Y_A = R_D - P \sin \alpha + G_2 + Q = 120 - 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 30 + 100 \cdot 2 \approx 305 \text{ N.}$$

(12^\*.6) tenglamadan

$$M_A = P \cdot AK \cdot \sin \alpha + G_2 \cdot AC - Q \cdot \frac{AC}{2} = 30\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 30 \cdot 2 - 100 \cdot 2 \cdot 1 = -125 \text{ N.}$$

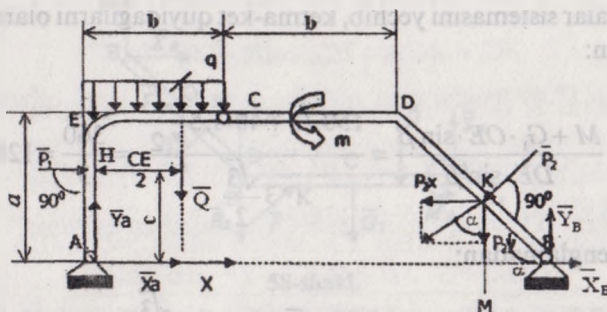
$X_A$  va  $M_A$  miqdorlarning manfiy ishorali bo'lishi, ularning yo'nalishlari shaklda ko'rsatilgan yo'nalishlarga qarama-qarshi yo'nalishlarda bo'lishidan dalolat beradi.  $X_E = 0$  bo'lgani uchun E sharnirning reaksiyasi

$R_E = Y_E$  bo'ladi.  $A$  sharnirning to'liq reaksiyasining miqdori

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{93701} \approx 306,1 \text{ N bo'ladi.}$$

**13\*-masala.**  $C$  sharnir yordamida tutashtirilgan qo'shma ramaning  $A$  va  $B$  tayanch sharnirlaridagi reaksiyalarini aniqlang. Ramaga  $P_1$  va  $P_2$  kuchlar,  $CE$  bo'limga intensivligi  $q$  bo'lgan tekis taqsimlangan yuk ta'sir qiladi. Hamda ramaning  $CDB$  o'ng qismiga momenti  $M$  bo'lgan juft kuch ta'sir qiladi (59-shakl).

**Berilgan.**  $P_1 = 6 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 22 \text{ kN}$ ,  $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $q = 2 \text{ kN/m}$ ,  $AE = a = 3 \text{ m}$ ,  $EC = CD = b = 2 \text{ m}$ ,  $AH = C = 2 \text{ m}$ ,  $BK = DK$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .



59-shakl.

**Yechish.** Masalani hal qilishda avval butun sistema, ya'ni ramaning muvozanatini, keyin uning biror bo'lagining muvozanatini ko'rish maqsadga muvofiqdir. Butun ramaning muvozanat tenglamalarida  $C$  bir-lashtiruvchi sharnirning reaksiya kuchlari ishtirok etmaydi, chunki bu kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi.  $P_2$  kuchidan  $A$  nuqtaga nisbatan moment olish uchun uni tashkil etuvchilarga ya'ni  $P_{2x}$  va  $P_{2y}$  larga ajratib, teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasidan foydalana-miz (59-shakl).

Bunda:

$$P_{2y} = P_2 \cdot \cos \alpha, \quad P_{2x} = P_2 \cdot \sin \alpha.$$

Butun rama uchun muvozanat tenglamasi quyidagicha bo'ladi.

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -P_1 \cdot C - Q \cdot \frac{b}{2} + M + P_{2x} \cdot \frac{a}{2} - P_{2y} \cdot AM + Y_B \cdot AB = 0. \quad (13^*.1)$$

$$\sum m_n(\bar{F}_i) = 0, \quad -Y_1 \cdot AB - P_1 \cdot C + Q \cdot LB + M + P_2 \cdot BK = 0. \quad (13^*.2)$$

$$\sum F_{ix} = 0, \quad P_1 + X_A - P_2 \cdot \sin \alpha + X_B = 0. \quad (13^*.3)$$

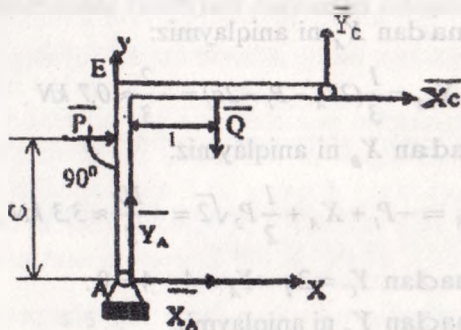
Bo'laklar va  $\alpha$  burchak qiymatlarini tenglamalarga qo'ysak, quyidagi ko'rinishni oladi

$$-2P_1 - 2q + M + \frac{3}{4}P_2 \cdot \sqrt{2} - \frac{11}{4}P_2 \cdot \sqrt{2} + 7 - Y_B = 0. \quad (13^*.4)$$

$$-7Y_A - 2P_1 + 12q + m + \frac{3}{2}P_2 \cdot \sqrt{2} = 0. \quad (13^*.5)$$

$$P_1 + X_A - \frac{1}{2}P_2 \cdot \sqrt{2} + X_B = 0. \quad (13^*.6)$$

Butun ramaning AEC chap qismini ajratib olamiz (60-shakl). Ramaning tashlab yuborilgan CDB qismining AEC qismiga ta'sirini  $\bar{X}_C$  va  $\bar{Y}_C$  kuchlari bilan almashtiramiz. Bular  $\bar{R}_C$  reaksiya kuchini koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilaridir.



60-shakl.

Ramaning AEC chap qismiga ta'sir etuvchi kuchlar uchun muvozanat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = 0, \quad -P_1 \cdot C - Q \cdot \frac{b}{2} + Y_C \cdot b - X_C \cdot a = 0. \quad (13^*.7)$$

$$\sum m_c(\bar{F}_k) = 0, \quad -Y_A \cdot b + X_A \cdot a + P_1 \cdot (a - c) + Q \cdot \frac{b}{2} = 0. \quad (13^*.8)$$

$$\sum F_b = 0, \quad Y_A + q \cdot b + Y_C = 0. \quad (13^*.9)$$

Masofalarning qiymatlari qo'yilgach, (13\*.7); (13\*.8); (13\*.9) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-P_1 - 2q + 2Y_C - 3X_C = 0. \quad (13^*.10)$$

$$-2Y_A + 3X_A + P_1 + 2q = 0. \quad (13^*.11)$$

$$Y_A - 2q + Y_C = 0. \quad (13^*.12)$$

Tuzilgan 6 muvozanat tenglamalar sistemasini birgalikda yechib, noma'lum reaksiya kuchlarni aniqlaymiz (13\*.4) tenglamadan  $Y_B$  ni aniqlaymiz:

$$Y_B = \frac{1}{7} \left( 2P_1 + 2q - m + \frac{3}{4}P_2\sqrt{2} + \frac{11}{4}P_2\sqrt{2} \right) = 2 \text{ kN}.$$

(13\*.5) tenglamadan  $Y_A$  ni aniqlaymiz:

$$Y_A = \frac{1}{7} (-2P_1 + 12q + m + \frac{3}{4}P_2\sqrt{2}) = 4 \text{ kN}.$$

(13\*.11) tenglamadan  $X_A$  ni aniqlaymiz:

$$X_A = \frac{1}{3} (2Y_A - P_1 - 2q) = -\frac{2}{3} \approx 0,7 \text{ kN}.$$

(13\*.6) tenglamadan  $X_B$  ni aniqlaymiz:

$$X_B = -P_1 + X_A + \frac{1}{2}P_2\sqrt{2} = -\frac{10}{3} \approx 3,3 \text{ kN}.$$

(13\*.12) tenglamadan  $Y_C = 2q - Y_A = 4 - 4 = 0$ .

(13\*.10) tenglamadan  $Y_C$  ni aniqlaymiz:

$$X_C = \frac{1}{3} (-2P_1 + 2q) = -\frac{16}{3} \approx -5,3 \text{ kN}.$$

$X_A$ ,  $X_B$  va  $X_C$  larning manfiy ishorali bo'lishi, ularning shaklda ko'rsatilgan yo'nalishlarga qarama-qarshi yo'nalgan ekanliklarini ko'rsatadi.

## TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Kuchninig nuqtaga nisbatan momenti deb nimaaga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti qachon nolga teng bo'ladi?
3. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirilsa, kuch momenti o'zgaradimi?
4. Kuchning nuqtaga nisbatan momentining geometrik ma'nosi qanday?
5. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti tashkil etuvchi kuchlar momenti orqali qanday hisoblanadi?
6. Juft kuch deb nimaaga aytiladi?
7. Juft kuch momenti qanday hisoblanadi?
8. Qanday juft kuchlar ekvivalent bo'ladi?
9. Tekislikdagi juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?
10. Tekislikdagi juft kuchlarning muvozanat shartlari qanday?
11. Kuchni o'ziga parallel qanday ko'chirish mumkin?
12. Tekislikdagi kuchlarni bir markazga keltirish natijasida nima hosil bo'ladi?
13. Kuchlar sistemasi bir markazga keltirilsa qanday hollar bo'lishi mumkin?
14. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
15. Tekislikda parallel joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
16. Jismlar sistemasida reaksiyasi kuchlarini aniqlash masalasi qanday yechiladi?

#### IV BOB. FERMALARDAGI ZO'RIQISHLARNI ANIQLASH

##### 18-§. Fermada hosil bo'ladigan zo'riqish kuchlarini hisoblash usullari

Sterjenlarning uchlarini sharnirli tutashtiruvchi nuqta *tugun* deb ataladi. Agar ferma sterjenlari bir tekislikda yotsa, *tekis fermalar* deb ataladi. Fermalar ortiqcha sterjenga ega bo'lgan va ega bo'lmagan fermalarga bo'linadi. Agar fermaning bikirligi o'zgarmasligi uchun undan bir qancha sterjenni olib tashlash mumkin bo'lmasa, bunday ferma *ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan ferma* deb ataladi.

Agar ferma sterjenlardan birorta yoki bir nechta olib tashlaganda, uning bikirligi saqlanib qolsa, bunday ferma *ortiqcha sterjenga ega bo'lgan ferma* deb ataladi. Ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan fermaning sterjenlar soni  $m$  bilan tugunlar soni  $n$  orasidagi munosabatni topamiz.

Ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan fermaga oddiy uchburchak misol bo'la oladi, ya'ni uchta tugunni tutashtirish uchun uchta sterjen zarurdir. Undan keyin qolgan har  $n-5$  ta tugunlarni tutashtirish uchun ikkitadan sterjenlarni birlashtirishni taqozo qiladi. Demak  $n$  ta tugunli fermani hosil qilish uchun  $m=3+2(n-3)$  ta sterjenlar zarurdir. Shunday qilib quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$m=2n-3. \quad (4.1)$$

Ortiqcha sterjenga ega bo'lgan ferma uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$m>2n-3.$$

Keyinchalik ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan tekis fermalarni ko'ramiz.

Bundan tashqari quyidagi shartlarning bajarilishini talab qilamiz.

1. Ferma sterjenlari to'g'ri chiziqlidir.
2. Sharnirlar ishqalanishdan xolidirlar.
3. Fermaga qo'yiladigan kuchlar faqat tugunlarga qo'yilgan bo'lib ferma tekisligida yotadi.
4. Ferma sterjenlarining o'z og'irliklari e'tiborga olinmaydi. Shu shartlar bajarilganda ferma sterjenlari har qaysisi ularning uchlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Muvozanat shartlaridan bu kuchlar miqdor jihatdan teng bo'lib, sterjen o'qi bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Fermaning sterjenlari faqat cho'zilish yoki

siqilishga qarshilik ko'rsatadi.

Fermalarni hisoblash masalalari: ularni tayanch reaksiyalari va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan iborat. Agar tayanch reaksiyalarni va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarini, qattiq jism statikasining metodlari yordamida aniqlash mumkin bo'lsa, bunday fermalar *statik aniq fermalar* deb ataladi. Aks holda *statik aniqmas fermalar* deb ataladi.

Fermani hisoblash usullarini ko'rayotgan paytimizda, ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan fermalarni statik aniq ekanligiga qanoat hosil qilamiz. Fermalarni hisoblashning bir nechta usullarini ko'ramiz. Hamma usullarda hisoblash: tayanch reaksiya kuchlarini aniqlashdan boshlanadi. Tayanch reaksiyalar butun fermani qattiq deb qarab muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi.

### 1. Tugunni kesish usuli

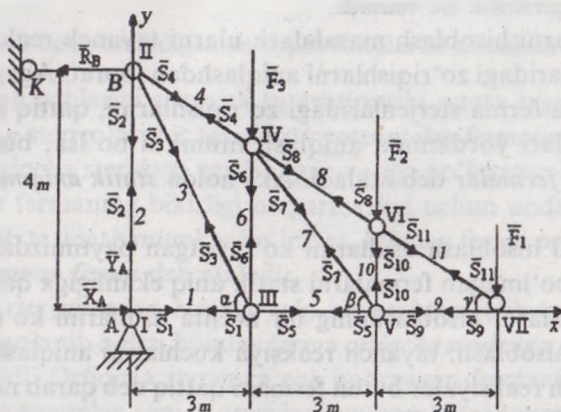
Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni topishning eng oddiy usuli tugunni kesish usulidir. Bu usulda fermaning tugunlari ketma-ket kesilib, ularning muvozanati: berilgan kuchlar, tayanch reaksiyalari va qirqilgan sterjenlarning reaksiyalari ta'siridan ko'riladi.

Shunday qilib,  $n$ ( $n$ -tugunlar soni) ta kesishuvchi kuchlar sistemasini olib, har biri ikkitadan muvozanat tenglamalarini tuzishimiz mumkin. Bu yerdan fermani hisoblash ikkita sterjen tutashgan tugunni kesishdan boshlash zarurligi ko'rinadi.

Keyinchalik noma'lumlar soni ikkidan oshmagan tugunlarni kesishga o'tiladi. Butun ferma uchun  $2n$  ta tenglamalar tuzish mumkin. Bu tenglamalar sistemasidan 3 ta tayanch reaksiya kuchlarni tashkil etuvchilari va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlanadi. Agar ferma  $m$  ta sterjenlardan tashkil topgan bo'lsa, statik aniqlash uchun quyidagini olamiz:

$$m=2n-3. \quad (4.2)$$

Ya'ni, ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan statik aniq. Agar fermani to'liq hisoblashni, ya'ni hamma sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, bu usulni tatbiq qilish maqsadga muvofiqdir.



61-shakl.

**14\*-masala.** 61-shaklda tasvirlangan fermaning tayanch reaksiyalari va sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlansin. Fermaga parallel kuchlar ta'sir qiladi:  $F_1=1\text{kN}$ ,  $F_2=2\text{kN}$ ,  $F_3=3\text{kN}$ . Koordinata sistemasi  $Axy$  ni olamiz, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashamiz. Bu fermaning statik aniq ekanligini oydinlashtiramiz. Fermada  $n=7$  tugun va  $m=11$  sterjenlar mavjud. Bu holda (4.2) tenglama o'rinli ekanligini osonlikcha ko'rish mumkin.  $B$  nuqtadagi reaksiya kuchi  $\bar{R}_B$  ni  $BK$  sterjen bo'ylab yo'naltiramiz. Tayanch  $A$  dagi reaksiya kuchi miqdor va yo'nalish jihatidan noma'lum bo'lganligi uchun, uni koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan  $X_A$ ,  $Y_A$  tashkil etuvchilari orqali tasvirlash qulaydir. Reaksiya kuchlarini aniqlash uchun uchta muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_x = 0; X_A - R_B = 0; \quad (14^*.1)$$

$$\sum F_y = 0; Y_A - F_1 - F_2 - F_3 = 0; \quad (14^*.2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = 0; 4R_B - 9F_1 - 6F_2 - 3F_3 = 0. \quad (14^*.3)$$

(14\*.1); (14\*.2) va (14\*.3); tenglamadan:  $X_A=R_B=6,75\text{ kN}$ ;  $Y_A=5\text{ kN}$ ;  $R_B=6,75\text{ kN}$ .

Ferma tugunlarini rim raqamlari bilan, sterjenlarni esa arab raqamlari bilan belgilaymiz. Noma'lum zo'riqishlarni, sterjen bo'ylab tugundan ketgan deb qaraladi, ya'ni cho'zuvchi zo'riqishdir. Agar zo'riqishlar manfiy bo'lib qolsa, mos sterjenlar siqiladi. Fermani hisoblashni, ikkita noma'lum  $\bar{S}_1$  va  $\bar{S}_2$  ishtirok etgan  $I$  tugundan boshlanadi.

Muvozanat tenglamasini tuzamiz:

$$\sum F_x = 0 \quad X_A + S_1 = 0 \quad \text{bundan} \quad S_1 = -X_A = -6,75 \text{ kN}. \quad (14^*.4)$$

$$\sum F_y = 0 \quad Y_A + S_2 = 0 \quad \text{bundan} \quad S_2 = -Y_A = -5 \text{ kN}. \quad (14^*.5)$$

$S_2$  zo'riqishni bilib, II tugunga o'tamiz, bunda noma'lumlar  $S_3$  va  $S_4$  lardir. II tugun uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_x = 0 \quad -R_B + S_3 \cdot \cos \alpha + S_4 \cdot \cos \gamma = 0, \quad (14^*.6)$$

$$\sum F_y = 0 \quad -S_2 - S_3 \cdot \sin \alpha - S_4 \cdot \sin \gamma = 0. \quad (14^*.7)$$

Berilgan o'lchovlardan sterjenlar uzunliklarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} l_1 &= 5 \text{ m}, \quad l_4 = l_8 = l_{11} = 3,3 \text{ m}, \\ l_2 &= \frac{8}{3} \text{ m}, \quad l_7 = 4 \text{ m}, \quad l_{10} = \frac{4}{3} \text{ m}. \end{aligned} \quad (14^*.8)$$

U holda:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0,6; & \sin \alpha &= 0,8. \\ \cos \beta &= 0,75; & \sin \beta &= 0,6675. \\ \cos \gamma &= 0,909; & \sin \gamma &= 0,404. \end{aligned} \quad (14^*.9)$$

(14\*.6), (14\*.7) muvozanat tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} -6,75 + 0,6S_3 + 0,909S_4 &= 0, \\ 5 - 0,8S_3 - 0,404S_4 &= 0. \end{aligned}$$

Bu tenglamalardan  $S_3 = 3,75 \text{ kN}$ ;  $S_4 = 4,95 \text{ kN}$  kelib chiqadi.

III tugun uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_x = 0; \quad S_5 - S_1 - S_3 \cos \alpha = 0, \quad (14^*.10)$$

$$\sum F_y = 0; \quad S_6 + S_3 \sin \alpha = 0. \quad (14^*.11)$$

(14\*.10) va (14\*.11) tenglamalardan quyidagilarni topamiz:

$$S_5 = -4,505 \text{ kN},$$

$$S_6 = -2,993 \text{ kN}.$$

Keyin, ketma-ket IV, V va VII tugunlarning muvozanatini tekshirib, qolgan sterjenlardagi quyidagi zo'riqishlarni aniqlaymiz:

$$S_7 = 2,197 \text{ kN}, \quad S_8 = 6,598 \text{ kN}, \quad S_9 = -6,153 \text{ kN},$$

$$S_{10} = 1,465 \text{ kN}, \quad S_{11} = 2,475 \text{ kN}.$$

Olingan natijalardan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: 3, 4, 8, 10, 11 sterjenlar cho'ziladi, 1, 2, 5, 6, 7, 9 sterjenlar siqiladi.

## 2. Sterjenlarni qirqish usuli (Ritter usuli).

Ferma sterjenlaridan ba'zi birida hosil bo'ladigan zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, Ritter usuli masalaning javobini tezroq beradi. Bu usul quyidagidan iborat.

Ferma zo'riqishi aniqlanadigan sterjenlardan o'tuvchi biror kontur bilan fikran ikki qismga ajratilib, uning bir qismi muvozanati tekshiriladi. Tashlangan qismning ta'siri, kesilgan sterjenlar cho'ziladi deb qarab, sterjen o'qlari bo'ylab tashlangan qismi tomon yo'nalgan zo'riqishlar bilan almashtiriladi.

Ko'rilayotgan qism uchun muvozanat sharti tuziladi. Ferma kontur bilan fikran ikki qismga ajratilganda, kesilgan sterjenlarning soni uchtdan oshmasligi shart, chunki uchtdan oshsa, tegishli zo'riqishlarning soni ko'payib, masala statik aniqmas bo'lib qoladi. Ritter masalalarni osonroq hal qilish uchun shunday tenglamalarni tuzishni taklif qildiki, bularda bittadan noma'lum zo'riqishlar qatnashadi.

Agar kesilgan sterjenlar parallel bo'lmasa, u holda bunday tenglamalar noma'lum zo'riqishlar kesishuvchi nuqtalarga nisbatan uchta moment tenglamalari bo'ladi. Bu nuqtalar Ritter nuqtalari deb ataladi. Agar ikkita sterjenlar parallel bo'lib qolsa, bitta Ritter nuqtasi mavjud bo'lmaydi. U holda uchinchi muvozanat tenglamasi uchun kuchlar proyeksiyalari yig'indisining nolga tengligini olamiz.

**15\*-masala.** 62-shaklda tasvirlangan fermaning tayanch reaksiyalari va 3, 5, 6, 8, 9, 10 sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlang.

**Yechish.** Tayanch reaksiyalarni aniqlaymiz. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlar va  $\bar{R}_B$  reaksiya kuchlari, parallel kuchlar sistemasi hosil qilgani uchun  $\bar{R}_A$  reaksiya kuchi ham ularga parallel bo'lishi aniq.

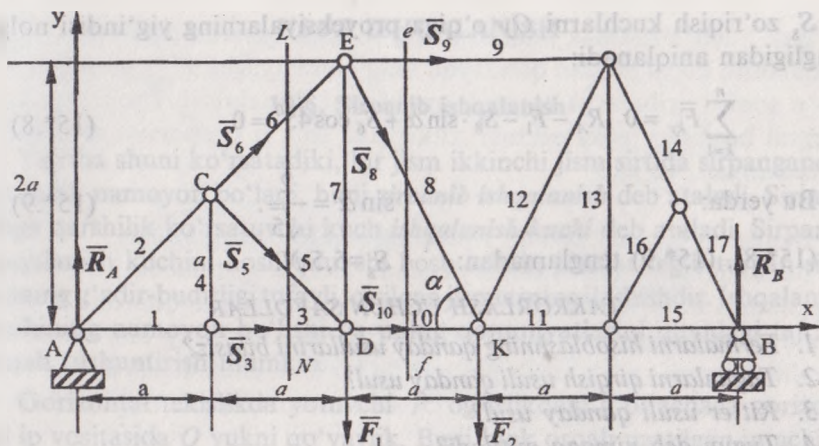
$F_1=5\text{ N}$ ;  $F_2=5\text{ N}$  kuchlar berilgan.

Parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan  $R_A$ ,  $R_B$  topamiz:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 3a + R_B \cdot 5a = 0. \quad (15^*.1)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad F_2 \cdot 2a + F_1 \cdot 3a - R_A \cdot 5a = 0. \quad (15^*.2)$$

bu tenglamalardan  $R_A=5\text{ N}$ ,  $R_B=5\text{ N}$  aniqlandi.



62-shakl.

3, 5, 6 sterjenlarni kesib o'tuvchi «LN» qirg'imni o'tkazib, fermaning chap qismini muvozanatini tekshiramiz. A, C va D nuqtalar Ritter nuqtalari ekanliklarini osonlikcha ko'rish mumkin. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad S_5 \cdot a\sqrt{2} = 0. \quad (15^*.3)$$

$$\sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0 \quad S_3 \cdot a - R_A \cdot a = 0. \quad (15^*.4)$$

$$\sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) = 0 \quad -R_A \cdot 2a - S_6 \cdot a\sqrt{2} = 0. \quad (15^*.5)$$

(15\*.3); (15\*.4) va (15\*.5) tenglamalardan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$S_5 = 0, S_3 = 5 N, S_6 = -7,14 N.$$

8, 9, 10 sterjenardagi zo'riqlashlarni aniqlash uchun «ef» qirg'imni o'tkazib, fermaning chap qismining muvozanatini tekshiramiz. Bu qism uchun E va K nuqtalari Ritter nuqtalaridir.

$$\sum_{k=1}^n m_E(\bar{F}_k) = 0 \quad S_{10} \cdot 2a - R_A \cdot 2a = 0. \quad (15^*.6)$$

$$\sum_{k=1}^n m_K(\bar{F}_k) = 0 \quad -R_A \cdot 3a + F_1 \cdot a - S_9 \cdot 2a = 0. \quad (15^*.7)$$

(15\*.6) va (15\*.7) tenglamalardan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$S_9 = -5 N, S_{10} = 5 N.$$

$S_8$  zo'riqish kuchlarni  $Oy$  o'qiga proyeksiyalarning yig'indisi nolga tengligidan aniqlanadi:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_{ky} = 0 \quad R_A - F_1 - S_8 \cdot \sin \alpha + S_6 \cos 45^\circ = 0. \quad (15^*.8)$$

Bu yerda:  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad (15^*.9)$

(15\*.8), (15\*.9) tenglamadan:  $S_8 = 5,5 \text{ N}.$

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Fermalarni hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
2. Tugunlarni qirqish usuli qanday usul?
3. Ritter usuli qanday usul?
4. Tugun deb nimaga aytiladi?
5. Fermalarga qanday shartlar qo'yiladi?
6. Ritter usulidan qachon foydalanish qulay?

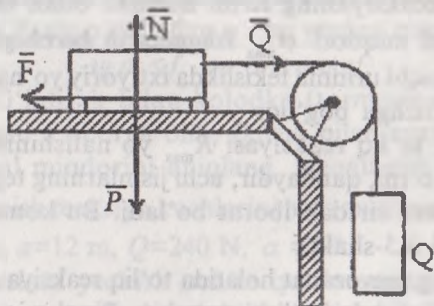
## V BOB. ISHQALANISH

### 19-§. Sirpanib ishqalanish

Tajriba shuni ko'rsatadiki, bir jism ikkinchi jism sirtida sirpanganda, qarshilik namoyon bo'ladi, buni *sirpanib ishqalanish* deb ataladi. Sirpanishga qarshilik ko'rsatuvchi kuch *ishqalanish kuchi* deb ataladi. Sirpanib ishqalanish kuchini hosil qiluvchi bosh sabab, jismlar tegib turgan sirtlarining g'adir-budirligi tufayli, qisilgan jismlarning ilashishdir. Ishqalanish kuchining namoyon bo'lishi va uning qonuniyatlarini quyidagi tajriba orqali tushuntirish mumkin.

Gorizontal tekislikda yotuvchi  $\vec{P}$  og'irlikdagi g'o'lachaga gorizonttal ip vositasida  $Q$  yukni qo'yaylik. Buni blok orqali uzatilgan ip uchiga tosh qo'yilgan pallachani osish orqali bajarish mumkin (63-shakl).

G'o'lachani og'irligi  $\vec{P}$  bilan tekislikning  $N$  reaksiya kuchi o'zaro muvozanatlashishini osonlikcha ko'rish mumkin. Gorizonttal  $Q$  kuchi muvozanatlashmagan, shuning uchun uning miqdori qanchalik kichik bo'lmasin, g'o'lacha sudralishi lozim. Biroq harakat  $Q$  kuch qandaydir miqdorga yetgandan keyingina boshlanadi. Bundan ko'rinadiki, jismlarning tegishib turgan sirtlarida  $N$  normal reaksiyadan tashqari,  $Q$  kuch bilan muvozanatlashuvchi qandaydir  $F$  kuch paydo bo'lgan. Shu kuchni ishqalanish kuchi deb ataladi.



63-shakl.

Jismning qo'zg'alish oldidan hosil bo'lgan qarshilik kuchi maksimum ishqalanish kuchidir. Ishqalanish kuchi faqat jismga sirpantiruvchi kuch ta'sir qilgandagina hosil bo'ladi. Bu kuch jismni qo'zg'atish uchun zarur

bo'lgan kuchga kattalik jihatidan teng va unga qarama-qarshi yo'nalgan ishqalanish kuchi noldan qandaydir aniq qiymatgacha  $F_{\max}$  ga o'zgaradi. Ko'p sonli tajribalarga tayanib, maksimal ishqalanish kuchi jismning normal bosimiga yoki normal reaksiyaga to'g'ri proporsional ekanligi ta'kidlangan, ya'ni

$$F_{\max} = fN. \quad (5.1)$$

Bunda:  $N$ -normal bosim,  $f$ -proporsionallik koeffitsienti.

Bu ishqalanish koeffitsienti deyiladi. (5.1) tenglamadan ko'rinadiki, ishqalanish koeffitsienti  $f$  o'lchovga ega bo'lmagan miqdordir. U jismlarning moddiylikiga, ular sirtlarining fizik holatlariga (g'adir-budurligi, namlik, harorat va boshqalarga) bog'liq bo'ladi. Ishqalanish koeffitsienti tajribalar yordamida aniqlanadi. Odatda tavsif qilingan tajribadan foydalanish qulayroq.

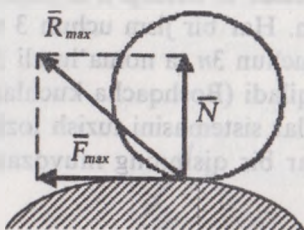
Ishqalanishda (5.1) tenglama o'rinalidir, faqat harakatdagi ishqalanish koeffitsienti statik ishqalanish koeffitsientidan birmuncha kamroqdir.

Shunday qilib, bog'lanishning to'liq reaksiyasi  $\bar{R}_{\max}$  normal reaksiya  $\bar{N}$  va unga perpendikular bo'lgan ishqalanish kuchi  $\bar{F}$  larning yig'indisidan iborat bo'lib, normal bilan qandaydir  $\varphi$  burchak tashkil qiladi.

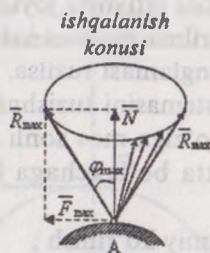
Ishqalanish kuchi  $\bar{F}$  noldan  $\bar{F}_{\max}$  gacha o'zgarganda, to'liq reaksiya  $\bar{N}$  dan  $\bar{R}_{\max}$  gacha, uning normaldan og'ish burchagi noldan  $\varphi_{\max}$  gacha o'zgaradi. To'liq reaksiyaning sirtini normali bilan tashkil qilgan burchakning maksimal miqdori  $\varphi_{\max}$  *ishqalanish burchagi* deb ataladi. 64-shakl ishqalanish kuchi urinma tekislikda ixtiyoriy yo'nalishni oladi, chunki sirpantiruvchi kuchga bog'liq.

Bog'lanishning to'liq reaksiyasi  $R_{\max}$  yo'nalishining olishi mumkin bo'lgan geometrik o'rni, qandaydir, uchi jismlarning tegishib turgan nuqtasida bo'lgan konus sirtidan iborat bo'ladi. Bu konus sirt ishqalanish konusi deb ataladi (65-shakl).

U holda jismning muvozanat holatida to'liq reaksiya ishqalanish konusi ichida ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin. Binobarin, g'adir-budur sirtga tayangan jism muvozanatida unga ta'sir qiluvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, jismlarning tegishib turgan nuqtasidan o'tib, konus ichida yotadi. Faqat shunday kuchgina tayanch nuqtaning reaksiyasi bilan muvozanatlashadi. Agar teng ta'sir etuvchi ishqalanish konusining tashqarisidan o'tsa, u holda reaksiya u bilan muvozanatlashmaydi va jism sirpana boshlaydi.



64-shakl.



65-shakl.

**16\*-masala.** Gorizont bilan  $\alpha$  burchak tashkil qiluvchi qiya tekislikda og'ir jism yotibdi. Agar ishqalanish koeffitsienti  $f$  ga teng bo'lsa,  $\alpha$  burchagining qanday qiymatida jism muvozanatda bo'ladi (66-shakl).

**Yechish.** Muvozanat sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad P \cdot \sin \alpha - F_{ish} = 0, \quad (16^*.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad N - P \cdot \cos \alpha = 0, \quad (16^*.2)$$

bunda.  $F_{ish}$  - ishqalanish kuchi. (16\*.1) va (16\*.2) tenglamadan quyidagilarni aniqlaymiz:

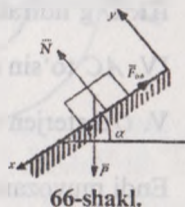
$$F_{ish} = P \cdot \sin \alpha, \quad N = P \cdot \cos \alpha. \quad (16^*.3)$$

Jism muvozanatda bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi lozim:

$F_{ish} \leq f \cdot N$  yoki  $P \cdot \sin \alpha \leq P \cdot f \cos \alpha$ , bu yerdan quyidagini aniqlaymiz:  
 $\text{tg } \alpha \leq f$  va  $\alpha \leq \arctg f$ .

**17\*-masala.** G'ildirak bilan kolodka (tormozlovchi) o'q orasidagi ishqalanish kuchini e'tiborga olib,  $Q$  yuk bilan muvozanatlashuvchi  $P$  kuchning minimal miqdorini aniqlang. Ishqalanish koeffitsienti  $f=0,2$  bo'lganda bog'lanish reaksiya kuchlarini ham aniqlang,  $b = 4a$ ,  $\ell = 0,2a$ ;  $OB=3R$ ,  $R=10$  m,  $a=12$  m,  $Q=240$  N,  $\alpha = 30^\circ$ .

**Yechish.** Masalani yechish uchun qurilmaning bir yoki bir necha bo'laklarining muvozanatlarini alohida ko'rish kerak. Sistemani tashkil qilgan jismlarning har birini erkin jism deb qarab, uning muvozanat shartlarini tuzamiz. Bog'lanishdagi ichki reaksiya kuchlari bir-biriga miqdor jihatidan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.



66-shakl.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'siridagi  $n$  ta jismdan tashkil topgan qurilma muvozanatda bo'lsin. Har bir jism uchun 3 tadan muvozanat tenglamasi tuzilsa, qurilma uchun  $3n$  ta noma'lumli  $3n$  ta tenglamalar sistemasini tuzishni taqozo qiladi (Boshqacha kuchlar sistemasini ta'siridan o'ziga mos sonli tenglamalar sistemasini tuzish lozim). Qurilmani to'rtta bo'lakchaga bo'lib, har bir qismning muvozanatini tekshiramiz:

I. Umumiy ko'rinish ;

II.  $Q$  yuk uchun ( $\bar{Q}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{T}$ ) ;

III.  $O$  g'ildirak uchun ( $\bar{T}$ ,  $\bar{X}_0$ ,  $\bar{Y}_0$ ,  $\bar{N}$ ,  $f\bar{N}$ ) ;

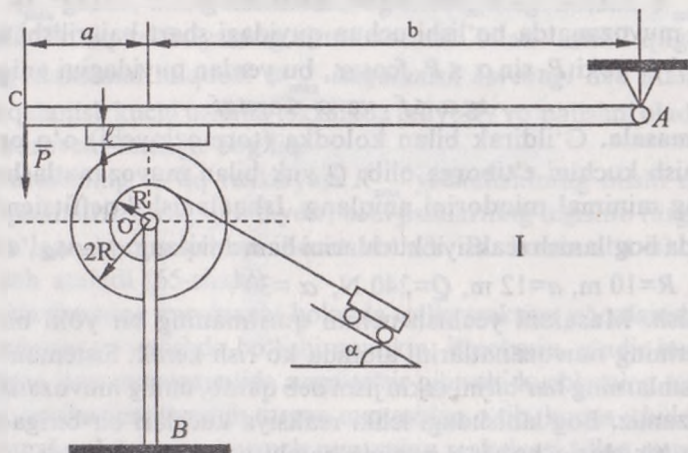
IV.  $AC$  to'sin uchun ( $\bar{N}$ ,  $f\bar{N}$ ,  $\bar{X}_a$ ,  $\bar{Y}_a$ ,  $\bar{P}$ ) ;

V.  $OB$  sterjen uchun ( $\bar{T}$ ,  $\bar{X}_0$ ,  $\bar{Y}_0$ ,  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$ ,  $\bar{M}_B$ ).

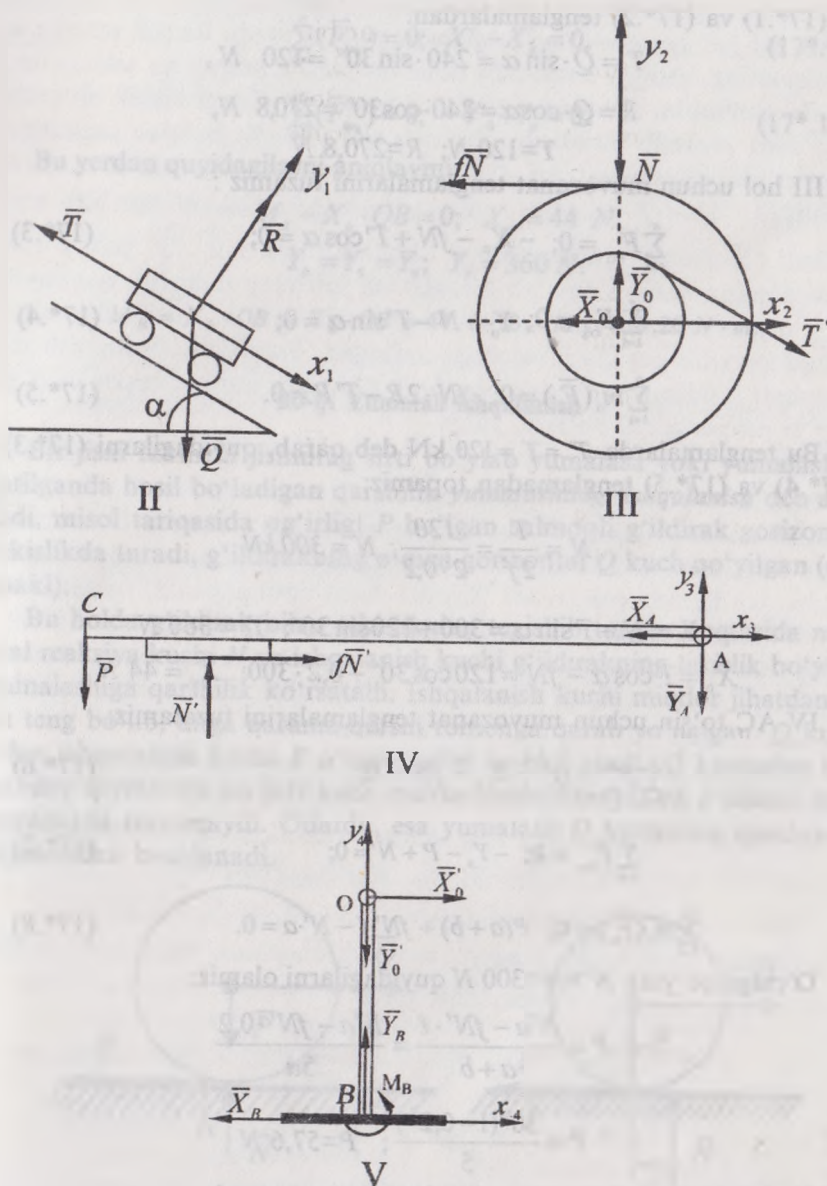
Endi muvozanat tenglamalarini tuzamiz. II  $\bar{Q}$  yuk uchun (kesishuvchi kuchlar sistemasini uchun)

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad -T + Q \cdot \sin \alpha = 0, \quad (17^*.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R - Q \cdot \cos \alpha = 0; \quad (17^*.2)$$



67-shakl.



68-shakl.

(17\*.1) va (17\*.2) tenglamalardan:

$$T = Q \cdot \sin \alpha = 240 \cdot \sin 30^\circ = 120 \text{ N},$$

$$R = Q \cdot \cos \alpha = 240 \cdot \cos 30^\circ = 270,8 \text{ N},$$

$$T = 120 \text{ N}; R = 270,8 \text{ N}$$

III hol uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; -X_0 - fN + T' \cos \alpha = 0; \quad (17*.3)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_0 - N - T' \sin \alpha = 0; \quad (17*.4)$$

$$\sum_{i=1}^n m_0(\bar{F}_i) = 0; fN \cdot 2R - T'R = 0. \quad (17*.5)$$

Bu tenglamalarda  $T' = T = 120 \text{ kN}$  deb qarab, quyidagilarni (17\*.3) ; (17\*.4) va (17\*.5) tenglamadan topamiz:

$$N = \frac{T}{2f} = \frac{120}{2 \cdot 0,2}; N = 300 \text{ kN}$$

$$Y_0 = N + T \sin \alpha = 300 + 120 \sin 30^\circ; Y_0 = 360 \text{ N}$$

$$X_0 = T \cos \alpha - fN = 120 \cos 30^\circ - 0,2 \cdot 300; X_0 = 44 \text{ N}$$

IV-AC to'sin uchun muvozanat tenglamalarini tuzatamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; -X_A - fN' = 0; \quad (17*.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -Y_A - P + N' = 0; \quad (17*.7)$$

$$\sum_{i=1}^n m(\bar{F}_i) = 0; P(a+b) + fN' \cdot \ell - N'a = 0. \quad (17*.8)$$

O'rniga qo'ysak  $N' = N = 300 \text{ N}$  quyidagilarni olamiz:

$$P = \frac{N'a - fN' \cdot \ell}{a+b} = \frac{N'a - fN' \cdot 0,2}{5a}$$

$$P = \frac{300(1 - 0,2^2)}{5}; P = 57,6 \text{ N}$$

V-OB sterjen uchun muvozanat tenglama tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_{ix}) = 0; \quad X'_0 - X_B = 0, \quad (17^*.9)$$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_{iy}) = 0; \quad -Y'_0 + Y_B = 0. \quad (17^*.10)$$

Bu yerdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$M_B - X'_0 \cdot OB = 0; \quad X_B = 44 \text{ N}.$$

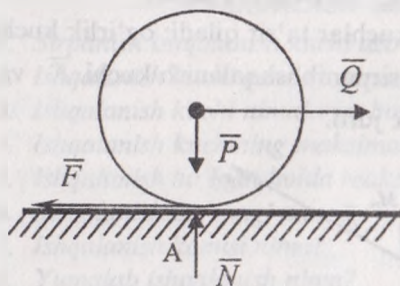
$$Y_B = Y'_0 = Y_0; \quad Y_B = 360 \text{ N}.$$

$$M_B = X'_0 \cdot OB = X_0 \cdot OB = 44 \cdot 3 \cdot 10; \quad M_B = 13.20 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

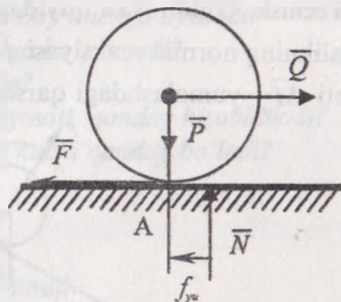
## 20-§. Yumalab ishqalanish

Bir jism ikkinchi jismning sirti bo'ylab yumalasa yoki yumalashga intilganda hosil bo'ladigan qarshilik *yumalashdagi ishqalanish* deb ataladi, misol tariqasida og'irligi  $P$  bo'lgan salmoqli g'ildirak gorizontall tekislikda turadi, g'ildirakning o'qiga gorizontall  $Q$  kuch qo'yilgan (69-shakl).

Bu holda g'ildirak bilan tekislikning tegishib turgan nuqtasida normal reaksiya kuchi  $N$  va ishqalanish kuchi g'ildirakning tekislik bo'ylab yumalashiga qarshilik ko'rsatadi. Ishqalanish kuchi miqdor jihatdan  $Q$  ga teng bo'lib, unga qarama-qarshi tomonga qarab yo'nalgan.  $Q$  kuch bilan ishqalanish kuchi  $F$  o'zaro juftni tashkil etadi.  $Q$  kuchning har qanday qiymatida bu juft kuch muvozanatlashmaydi va g'ildirak muvozanatda turolmaydi. Odatda, esa yumalash  $Q$  kuchining qandaydir qiymatidan boshlanadi.



69-shakl.



70-shakl.

Binobarin g'ildirakning yumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi juft hosil qiladi. Bu juft *yumalashdagi ishqalanish jufti* deyiladi. Bu juft tekislik va g'ildirakning, ezilishi natijasida hosil bo'ladi, g'ildirak va tekislikning ezilishi natijasida, ularning sirtlarini  $A$  nuqta atrofidagi kichik bir yuzada o'zaro yopishib turadi. Bu reaksiya shu yuzacha bo'ylab taqsimlangan bo'ladi. Reaksiyalarni  $A$  nuqtaga keltirish natijasida  $A$  nuqtaga qo'yilgan  $\vec{N}$  va  $\vec{F}$  kuchlari hamda yumalashdagi ishqalanish jufti hosil bo'ladi (70-shakl). Yumalashdagi ishqalanish jufti  $\vec{Q}$ ,  $\vec{F}$  jufti o'zaro muvozanatlashadi. Yumalab ishqalanish juftining momenti qandaydir  $M_{\max}$  qiymatgacha o'zgarishi tajribada tasdiqlangan. Ko'pincha tajribalarga suyanib quyidagi xulosaga kelingan. Yumalab ishqalanish juft momenti g'ildirak radiusiga bog'liq bo'lmagan normal reaksiya  $N$  ga to'g'ri proporsional bo'ladi, ya'ni

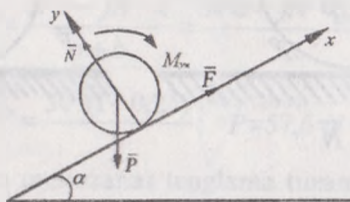
$$M_{\max} = f_{\text{yu}} \cdot N. \quad (5.2)$$

Bunda:  $f_{\text{yu}}$ -yumalab ishqalanish koeffitsienti deyiladi. Yumalab ishqalanish koeffitsienti  $f_{\text{yu}}$  uzunlik birligi bilan o'lchanadi. U bir-biriga tegib turgan materiallarning fizik xossalariga va ishqalanishlariga bog'liq tajriba yordamida aniqlanadi. Tajriba shuni tasdiqlaganki, yumalashdagi qarshilik sirpanishdagi qarshilikdan birmuncha oz bo'ladi. Shuning uchun texnikada, ishqalanish zararli bo'lgan hollarda, sirpanishni yumalashga almashtirishga jazm qilinadi. Masalan, sirpanuvchi podshipniklar o'rniga sharikli podshipniklar ishlatiladi.

**18\*-masala.** Gorizont bilan  $\alpha$  burchak tashkil qiluvchi qiya tekislikda radiusi  $R$  ga teng bo'lgan g'ildirak (silindr) turipdi.

$\alpha$  burchagining qanday qiymatida g'ildirak muvozanatda bo'ladi? Yumalab ishqalanish koeffitsienti  $f_{\text{yu}}$  ga teng (71-shakl).

**Yechish.** G'ildirakka quyidagi kuchlar ta'sir qiladi: og'irlik kuchi  $\vec{P}$ , tekislikning normal reaksiyasi  $\vec{N}$ , sirpanib ishqalanish kuchi  $\vec{F}$  va momenti  $\vec{M}$  yumalashdagi qarshilik jufti.



71-shakl.

Agar sirpanish va yumalash sodir bo'lmasa, quyidagi shart bajarilishi lozim:

$$F \leq f \cdot N. \quad (18^*.1)$$

$$M_{\Sigma} \leq f_{\Sigma} \cdot N. \quad (18^*.2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F - P \cdot \sin \alpha = 0. \quad (18^*.3)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad N - P \cdot \cos \alpha = 0. \quad (18^*.4)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\bar{F}_i) = 0; \quad PR \sin \alpha - M_{\Sigma} = 0. \quad (18^*.5)$$

Bu tenglamalarni (18\*.1) va (18\*.2) larni e'tiborga olib yechsak, quyidagilarni olamiz (18\*.4) dan  $N = P \cos \alpha$ , (18\*.3) dan (18\*.1)ni e'tiborga olib

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f. \quad (18^*.6)$$

(18\*.5)dan (18\*.2)ni e'tiborga olib

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{f_{\Sigma}}{R} \quad (18^*.7)$$

hosil qilamiz. Bu yerdan (18\*.6) shart g'ildirakning sirpanmasligini va (18\*.7) shart esa g'ildirakning yumalamasligini ta'minlaydi.

Ko'pgina jismlar uchun  $\frac{f_{\Sigma}}{R} < f$  bo'lganligi sababli, g'ildirak muvozanatda bo'lishi uchun  $\alpha$  burchak (18\*.7) shartni qanoatlantirishi kerak.

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Sirpanish ishqalanish kuchi deb qanday kuchga aytiladi?
2. Ishqalanish kuchi qanday qonunlarga bo'ysunadi?
3. Ishqalanish kuchi nimalarga bog'liq?
4. Ishqalanish kuchining maksimal qiymati qanday hisoblanadi?
5. Ishqalanish bo'lgan holda reaksiya kuchi qanday bo'ladi?
6. Ishqalanish burchagi nima?
7. Ishqalanish konusi nima?
8. Yumalab ishqalanish nima?
9. Yumalab ishqalanish koeffitsienti nima?
10. Yumalab ishqalanish jufti momenti qanday hisoblanadi?

## VI BOB. FAZODA IXTIYORIY JOYLASHGAN KUCHLAR SISTEMASI

Ta'sir chiziqlari fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema *fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi* deyiladi.

### Kuchning nuqtaga nisbatan moment vektori

Agar jismga fazoviy kuchlar ta'sir etsa, u holda jismning mazkur kuchlar ta'sirida aylanish yo'nalishini aniqlash uchun kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor tarzida qaraladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori moment markaziga qo'yilgan bo'lib, bu markaz va kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikular yo'naladi hamda uning uchidan qaraganimizda kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi (72-shakl).

$\vec{F}$  kuchning  $O$  nuqtaga nisbatan momenti vektorini aniqlash uchun kuch qo'yilgan  $A$  nuqtaning  $O$  markazga nisbatan radius-vektori  $\vec{r}$  ning shu kuch vektoriga vektorli ko'paytmasini aniqlaymiz. Vektorlar algebrasidan ma'lumki,  $\vec{r} \times \vec{F}$  vektor ustiga tushirish uchun soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Bu vektorning moduli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = r F \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}). \quad (6.1)$$

$O$  nuqtadan  $\vec{F}$  kuchning ta'sir chizig'iga tik  $h$  kesmani o'tkazamiz, u holda

$$h = r \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) \quad (6.2)$$

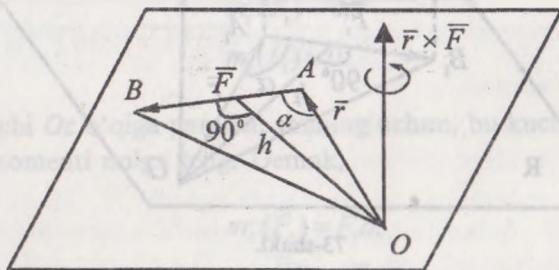
bo'lgani uchun

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})| \quad (6.3)$$

$\vec{r} \times \vec{F}$  vektorning yo'nalishi kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori bilan ustma-ust tushadi.  $\vec{r} \times \vec{F}$  va  $\vec{M}_O(\vec{F})$  vektorlarning miqdorlari teng, yo'nalishlari ustma-ust tushgani uchun

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (6.4)$$

Ya'ni,  $\vec{F}$  kuchning  $O$  nuqtaga nisbatan moment vektori, moment markazidan kuch qo'yilgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektori bilan kuch vektorining vektorli ko'paytmasiga teng ekan.



72-shakl.

## 21-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti

### *O'qqa nisbatan kuch momentining ta'rifi*

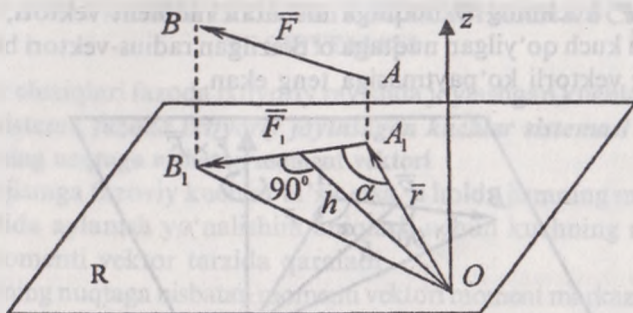
Qattiq jismning biror  $A$  nuqtasiga  $\vec{F}$  kuchi qo'yilgan. Biror  $Oz$  o'qini o'tkazib, unga perpendikular bo'lgan  $R$  tekislikni olamiz. O'q bilan tekislikning kesishgan nuqtasini  $O$  bilan belgilaymiz.  $\vec{F}$  kuchini  $R$  tekislikka proyeksiyalaymiz va uni  $\vec{F}_1$  deb belgilaymiz, ya'ni  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  (73-shakl).

**Ta'rif.**  $\vec{F}$  kuchining  $Oz$  o'qiga nisbatan kuch momenti deb,  $\vec{F}$  kuchining o'qqa perpendikular bo'lgan tekislikdagi  $\vec{F}_1$  proyeksiyasining o'q bilan tekislikning kesishgan  $O$  nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga aytiladi ya'ni

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_1) = \pm F_1 \cdot h. \quad (6.5)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti musbat deb qabul qilinadi, agar  $Oz$  o'qining oxiridan qaralganda  $\vec{F}_1$  proyeksiya tekislikni  $Oz$  o'qi atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa. O'qqa nisbatan kuch momentining sonli qiymati  $OA_1B_1$  uchburchak yuzasining ikkilanganligiga teng, ya'ni

$$m_z(\vec{F}) = 2S_{\gamma A_1 B_1}. \quad (6.6)$$



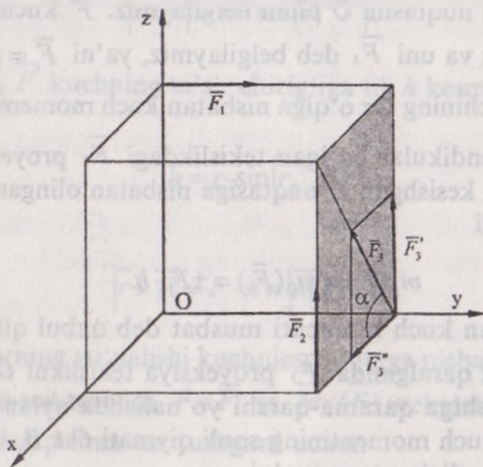
73-shakl.

O'qqa nisbatan kuch momenti quyidagi ikki holda nolga teng bo'ladi:

1. Agar  $F_1=0$ , ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qqa parallel bo'lsa.
2. Agar  $h=0$ , ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa.

Demak, agar kuch bilan o'q bir tekislikda yotsa, bu o'qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo'lar ekan.

**19\*-masala.** Tomonlari  $a$  ga teng bo'lgan kubga qo'yilgan  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (74-shakl) kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan kuch momentlarini hisoblang.



74-shakl.

$\bar{F}_1$  kuchi  $Oyz$  tekisligida yotadi, shuning uchun

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}_1) &= -F_1 a; \\ m_y(\bar{F}_1) &= 0; \\ m_z(\bar{F}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (19*1)$$

$\bar{F}_2$  kuchi  $Oz$  o'qiga parallel, shuning uchun, bu kuchning  $Oz$  o'qiga nisbatan momenti nolga teng. Demak,

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}_2) &= F_2 a; \\ m_y(\bar{F}_2) &= -F_2 a; \\ m_z(\bar{F}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (19*2)$$

$\bar{F}_3$  kuchi  $Oy$  o'qini kesib o'tadi, shuning uchun bu o'qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi.  $\bar{F}_3$  kuchini  $yOz$  tekisligidagi  $\bar{F}_3$  proyeksiyasining miqdori quyidagiga teng:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 \sin \alpha = F_3 \cdot \sin 45^\circ = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ F_1' &= F_3 \cos \alpha = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \quad (19*3)$$

u holda

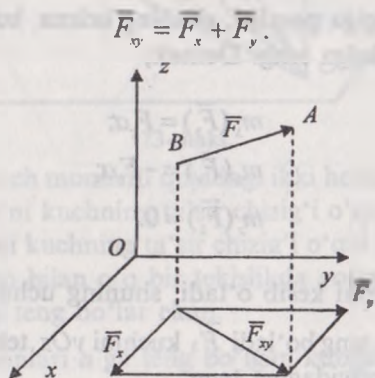
$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}_3) &= F_1' a = F_3 \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ m_z(\bar{F}_3) &= -F_1'' a = -F_3 \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (19*4)$$

Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodolari.  $\bar{F}$  berilgan kuch,  $\bar{F}_x$ ,  $\bar{F}_y$ ,  $\bar{F}_z$  uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  uning qo'yilgan nuqtasi koordinatalari.  $\bar{F}$  kuchini koordinata o'qlariga nisbatan olingan momentlarining ifodalarini tuzamiz.

Kuchini  $XOY$  tekisligiga proyeksiyalab, uni  $\vec{F}_v$  deb belgilaymiz (75-shakl). Ta'rifga asosan:

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_{xy}). \quad (6.7)$$

$\vec{F}_{xy}$  kuchini  $OX$  va  $OY$  koordinata o'qlari bo'ylab  $\vec{F}_x$  va  $\vec{F}_y$  tashkil etuvchilarga ajratamiz:



75-shakl.

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasiga asosan:

$$m_0(\vec{F}_v) = m_0(\vec{F}_x) + m_0(\vec{F}_y)$$

yoki

$$m_0(\vec{F}_{xy}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

u holda (6.7) ga asosan quyidagini olamiz:

$$m_z(\vec{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x.$$

Xuddi shunday asnoda kuchni  $Ox$  va  $Oy$  o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasini olishimiz mumkin, natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ m_y(\vec{F}) &= z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ m_z(\vec{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

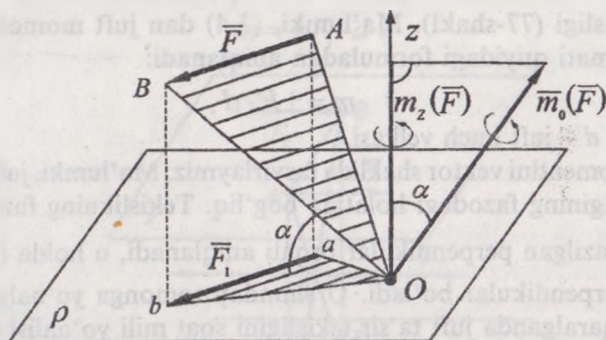
(6.8) tenglik  $\bar{F}$  kuchining koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari deyiladi.

## 22-§. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasidagi munosabat

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan shu nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan momentlari orasidagi munosabatlarini o'rnatamiz.

$\bar{F}$  berilgan kuch,  $\bar{F}_1$  kuchni  $Oz$  o'qqa perpendikular bo'lgan tekislikdagi proyeksiyasi. kuchini  $O$  nuqtaga nisbatan kuch momenti  $OAB$  uchburchak yuzining ikkilanganiga teng, bu kuchning  $Oz$  o'qiga nisbatan momenti esa  $OAB$  uchburchak yuzining ikkilanganiga teng ya'ni

$$m_o(\bar{F}) = 2S_{\Delta OAB}, \quad m_z(\bar{F}) = 2S_{\Delta Oab}.$$



76-shakl.

Uchburchak  $Oab$ ,  $OAB$  uchburchakning  $Oz$  o'qiga perpendikular bo'lgan  $P$  tekislikdagi proyeksiyasidir. Shuning uchun

$$S_{\Delta Oab} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos \alpha,$$

bunda  $\alpha$  -  $OAB$  va  $oab$  uchburchaklar orasidagi burchakdir. Bu holda

$$m_z(\bar{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OAB} \cdot \cos \alpha \quad \text{yoki} \quad m_z(\bar{F}) = m_o(\bar{F}) \cdot \cos \alpha. \quad (6.9)$$

$\bar{m}_o(\bar{F})$  - vektor uchburchak yuzi  $S_{\Delta OAB}$  ga perpendikular yo'nalgan bo'ladi (76-shakl). Ma'lumki, tekisliklar orasidagi burchak ularga

$\overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6$  kuchlarni  $\overline{F}_1$  va  $\overline{F}_2$  kuchlarga teng va parallel qilib olamiz. Bu 4 ta kuchlar sistemasi bilan juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi, shuning uchun quyidagini yozishimiz mumkin:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6).$$

$AB$  va  $CD$  yelka ustiga parallelogramm quramiz va uning  $AD$  va  $BC$  diagonallarini o'tkazamiz  $\overline{F}_1$  va  $\overline{F}_2, \overline{F}_4$  va  $\overline{F}_5$  kuchlarni o'zaro qo'shib, ikkita  $\overline{R}_1$  va  $\overline{R}_2$  kuchlarni olamiz:

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_2 + \overline{F}_4, \overline{R}_2 = \overline{F}_1 + \overline{F}_5.$$

$\overline{R}_1$  va  $\overline{R}_2$  kuchlar  $AD$  va  $BC$  diagonallarining kesishgan  $O$  nuqtasiga qo'yilgan. Bu kuchlar o'zaro teng va bir to'g'ri chiziqli bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Shuning uchun  $(\overline{R}_1, \overline{R}_2) \Leftrightarrow 0$  yoki  $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_4, \overline{F}_5) \Leftrightarrow 0$  u holda quyidagini yozishimiz mumkin  $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow (\overline{F}_3, \overline{F}_6)$ .  $(\overline{F}_3, \overline{F}_6)$  kuchlar sistemasi  $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$  juft kuchga ekvivalent bo'lgan juft kuchdir.

Talab qilingan teorema isbotlandi. III bobda juft kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uni juft tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkinligi ta'kidlangan edi. Shunday qilib isbot qilingan teoremlardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

Juft kuchlar ekvivalent bo'ladi, agar:

1. Ular bir yoki parallel tekisliklarda yotsa.
2. Momentlari miqdor jihatidan teng va bir xil burilishga ega bo'lsa.

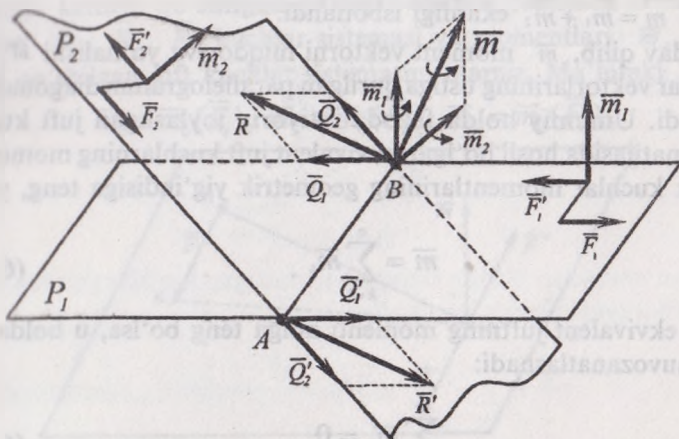
Demak, juft kuchlar o'zaro ekvivalent bo'ladi, agar ularning moment vektorlari o'zaro geometrik teng bo'lsa. Juftni ta'sir tekisligida va unga parallel bo'lgan tekisliklarga uning ta'sirini o'zgartirmay ko'chirish mumkin. Shuning uchun juft kuch moment vektori erkin vektordir.

### 3. Kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlarni qo'shish

**Teorema.** Ikkita kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar yolg'iz juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

**Isbot.** Momentlari tegishli  $\overline{m}_1$  va  $\overline{m}$ , bo'lgan kesishuvchi tekisliklarda joylashgan 2 ta  $\overline{F}_1, \overline{F}'_1$  va  $\overline{F}_2, \overline{F}'_2$  juftlarni olamiz (79-shakl). Tekislik-

lar kesilish chizig'i  $AB$  kesmani umumiy yelka qilib tanlab olamiz. Berilgan juftlar momentlarini o'zgartirmay umumiy  $AB$  yelkaga keltiramiz.



79-shakl.

Moment vektorlari berilgan juftlarning moment vektorlariga teng bo'lgan yangi ikkita  $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1')$  va  $(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2')$  juftlarni hosil qilamiz, ya'ni

$$\bar{m}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1') = \bar{m}_1; \quad \bar{m}(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2') = \bar{m}_2.$$

$\bar{m}_1$  va  $\bar{m}_2$  vektorlarni B nuqtaga qo'yamiz. A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni parallelogramm qoidasiga asosan qo'shamiz. Ikkita  $\bar{R}$  va  $\bar{R}'$  kuchlarni hosil qilamiz, ya'ni

$$\bar{R} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, \quad \bar{R}' = \bar{Q}_1' + \bar{Q}_2'.$$

Agar  $\bar{R} = \bar{R}'$  bo'lsa u holda  $(\bar{R}, \bar{R}')$  sistema juft kuchni hosil qilib ekvivalent deb ataladi. Ikkita kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar sistemasi yolg'iz juftga ekvivalent bo'lar ekan shu juftning moment vektorini aniqlaymiz, (6.10) formulasiga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\bar{m}(\bar{R}, \bar{R}') = \overline{AB} \times \bar{R}.$$

$$\bar{R} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, \quad \bar{m} = \overline{AB} \times (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) = \overline{AB} \times \bar{Q}_1 + \overline{AB} \times \bar{Q}_2.$$

$$\text{yoki } \bar{m} = \bar{m}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1') + \bar{m}(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2').$$

Natijada  $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$  ekanligi isbotlandi.

Shunday qilib,  $\bar{m}$  moment vektorni miqdor va yo'nalishi  $\bar{m}_1$  va  $\bar{m}_2$  momentlar vektorlarining ustiga qurilgan parallelogramm diagonali orqali aniqlanadi. Umumiy holda fazoda ixtiyoriy joylashgan juft kuchlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan ekvivalent juft kuchlarning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \quad (6.11)$$

Agar ekvivalent juftning momenti nolga teng bo'lsa, u holda juftlar o'zaro muvozanatlashadi:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_k = 0. \quad (6.12)$$

Shunday qilib, fazoda ixtiyoriy joylashgan juft kuchlar muvozanatlarini quyidagicha ifodalash mumkin: **fazoda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi o'zaro muvozanatda bo'lishi uchun ular momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.**

## 24-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan bir markazga keltirish

### *Bosh vektor va bosh moment*

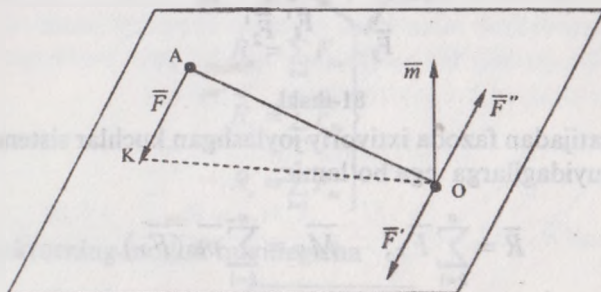
Qattiq jismning biror  $A$  nuqtasiga  $\bar{F}$  kuchi qo'yilgan (80-shakl) kuchni o'ziga parallel ko'chirish haqidagi teorema asosan  $A$  nuqtaga qo'yilgan  $\bar{F}$  kuchni  $O$  nuqtaga qo'yilgan shunday  $\bar{F}'$  kuch va momenti  $\bar{m}$  berilgan  $\bar{F}$  kuchidan  $O$  nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan  $(\bar{F}, \bar{F}')$  juft kuch bilan almashtirish mumkin.

Juftning  $\bar{m}$  moment vektori  $OAK$  tekislikka perpendikular bo'ladi.

Shuning uchun quyidagicha yozish mumkin.  $\bar{F} = \bar{F}'$  va juft  $(\bar{F}, \bar{F}')$  kuchni berilgan markazga keltirish chog'ida hosil bo'lib qo'shilgan  $(\bar{F}, \bar{F}')$  juftni shaklda ko'rsatmay uning  $m$  momenti vektorini tasvirlash kifoya. Bu natijadan foydalanib, ixtiyoriy joylashgan va qattiq jism-

nuqtalariga  $A_1, A_2, A_3$  nuqtalariga qo'yilgan uchta  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  kuchlarni berilgan markazga keltiramiz (81-shakl). Buning uchun hamma kuchlarni  $O$  nuqtaga keltirib qo'shilgan juftlarni olamiz. Natijada  $O$  markazga qo'yilgan  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  kuchlar sistemasi va momentlari  $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$  bo'lgan qo'shilgan juft kuchlar sistemasini olamiz. Ma'lumki

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2), \vec{m}_3 = \vec{m}_0(\vec{F}_3).$$



80-shakl.

$O$  nuqta qo'yilgan  $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{F}_3'$  kuchlarni qo'shib, ularning geometrik yig'indisiga teng bo'lganini olamiz, ya'ni

$$\vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \vec{F}_3'$$

agar  $\vec{F}_1' = \vec{F}_1, \vec{F}_2' = \vec{F}_2, \vec{F}_3' = \vec{F}_3$  bo'lsa, u holda  $\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  kuchlarning geometrik yig'indisi **bosh vektor** deyiladi. Qo'shilgan juftlarni yig'ib teng ta'sir etuvchi juftni hosil qilamiz uning momenti qo'shilgan juft momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Ya'ni,

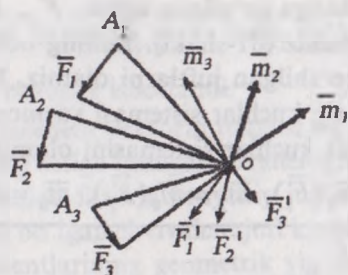
$$\vec{M}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3,$$

agar  $\vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2), \vec{m}_3 = \vec{m}_0(\vec{F}_3)$  bo'lsa,

u holda

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \vec{m}_0(\vec{F}_3).$$

Bunda:  $\vec{M}_0$  - vektor berilgan kuchlardan  $O$  keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan olingan **bosh momenti** deyiladi.

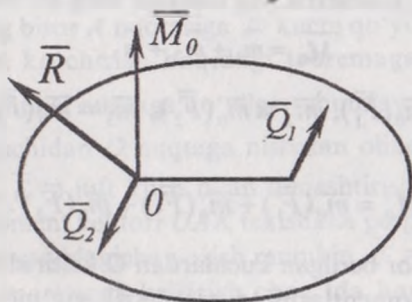


81-shakl.

Olingan natijadan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun tatbiq qilib quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k; \quad \bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k). \quad (6.13)$$

Shunday qilib, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan va keltirish markaziga qo'yilgan yolg'iz kuch va momenti berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan qandaydir  $(Q_1, Q_2)$  juft bilan almashtirish mumkin (82-shakl) shuni ta'kidlab o'tamizki, bosh vektor keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi, lekin bosh moment esa keltirish markazining tanlab olinishiga bog'liq bo'lib, keltirish markazining o'zgarishi bilan bosh moment ham o'zgarishi mumkin.



82-shakl.

## Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentini analitik aniqlash

To'g'ri burchakli koordinata sistemasining boshini keltirish markazi  $O$  da olamiz, u holda bosh  $\vec{R}$  vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Bosh vektorning moduli quyidagicha

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (6.15)$$

Bosh vektor  $\vec{R}$  ning yo'nalishi, yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlanadi, ya'ni:

$$\cos(\vec{R}, \hat{Ox}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{Oy}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{Oz}) = \frac{R_z}{R}. \quad (6.16)$$

Bosh moment  $M_o$  ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{k=1}^n m_k (\vec{F}_k)_y \\ M_{oy} &= \sum_{k=1}^n m_k (\vec{F}_k)_z \\ M_{oz} &= \sum_{k=1}^n m_k (\vec{F}_k)_x \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

formula yordamida aniqlanuvchi  $M_{ox}$ ,  $M_{oy}$ ,  $M_{oz}$  miqdorlar koordinata o'qlariga nisbatan bosh momentlar deyiladi. Qandaydir koordinata o'qiga nisbatan sistema kuchlarining bosh momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan momentlar algebraik yig'indisiga teng ekanligi (6.17) formuladan yaqqol ko'rinadi. Bosh momentning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{M_{ax}^2 + M_{ay}^2 + M_{az}^2}. \quad (6.18)$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{Ox}) = \frac{M_x}{M_0}; \cos(\vec{M}_0, \hat{Oy}) = \frac{M_y}{M_0}; \cos(\vec{M}_0, \hat{Oz}) = \frac{M_z}{M_0}. \quad (6.19)$$

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirilganda, bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchak ta'sir qilyotgan kuchlarga bog'liq bo'lib, ixtiyoriy bo'lishi, bu burchakni aniqlash vektorlar skalyar ko'paytmasining ifodasidan

$$(\vec{R} \cdot \vec{M}_0) = RM_0 \cos(\vec{R}, \vec{M}_0)$$

$$\text{Bundan } \cos(\vec{R}, \vec{M}_0) = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{RM_0} = \frac{R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z}}{RM_0}. \quad (6.20)$$

Agar  $\vec{R} \perp \vec{M}_0$  bo'lsa, u holda

$$\cos(\vec{R}, \vec{M}_0) = 0$$

va

$$R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z} = 0 \quad (6.21)$$

munosabat (6.21) bosh vektor bilan bosh moment o'zaro perpendikularlik alomatidir.

## 25-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishning turli hollari

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirilganda quyidagi hollar sodir bo'lishi mumkin.

1.  $R = 0, M_0 \neq 0$ .

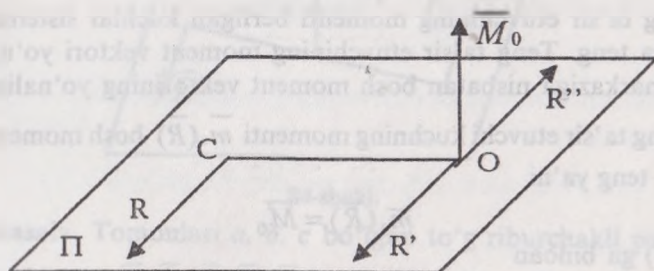
Bu holda kuchlar sistemasi momenti keltirish markaziga nisbatan bosh momentga teng bo'lgan juftga keltiriladi. Juft momenti moment markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaganligi uchun bosh moment ham keltirish markazining olinishiga bog'liq bo'lmaydi.

2.  $R \neq 0, M_0 = 0$ .

Bu holda kuchlar sistemasi, ta'sir chizg'i keltirish markazidan o'tuvchi bir teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.

1.  $R \neq 0$ ,  $M_0 \neq 0$  va  $\vec{M}_0 \perp \vec{R}$ .

Bu holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi, ta'sir chizig'i keltirib markazidan o'tmaydigan bir teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Haqiqatan  $R$  va  $M_0$  fazoda ixtiyoriy joylashgan  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_n)$  kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momenti bo'lsin va  $\vec{M}_0 \perp \vec{R}'$  (83-shakl). Bosh moment  $M_0$  ni  $R = R'' = R'$  bo'lgan  $(R, R'')$  juft bilan almashtiramiz. Bu juftning biror kuchini  $O$  nuqtaga qo'yib,  $R'$  kuchga qarama-qarshi qilib olamiz, juftning yelkasi



83-shakl.

quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$OC = \frac{M_0}{R'} \quad (6.22)$$

demak, kuchlar sistemasi,  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{R}', \vec{R}'', \dots, \vec{R})$ , biroq sistema bo'lgani uchun  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}$  va berilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'lib,  $C$  nuqtaga qo'yiladi,  $O$  nuqtadan  $C$  nuqtagacha bo'lgan masofa (6.22) formula yordamida topiladi.

### Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi

Biror nuqtaga nisbatan teng ta'sir etuvchining momenti bilan kuchlar sistemasini tashkil etuvchilari momentlari orasidagi munosabatini o'rnatamiz.

Fazodagi  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  kuchlar sistemasi ta'sir chizig'i  $C$  dan o'tuvchi  $R$  kuchga keltiriladi deb qaraylik. Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy  $O$  nuq-

tasiga nisbatan momenti  $\bar{m}_0(\bar{R})$  ni aniqlaymiz (83-shakl). Ixtiyoriy  $O$  markazga nisbatan

$$m_0(\bar{R}) = R \cdot OC$$

modomiki

$$R = R' \text{ va } OC = \frac{M_0}{R'},$$

u holda

$$m_0(\bar{R}) = M_0$$

ya'ni, teng ta'sir etuvchining momenti berilgan kuchlar sistemasi bosh momentiga teng. Teng ta'sir etuvchining moment vektori yo'nalishi  $O$  keltirish markaziga nisbatan bosh moment vektorining yo'nalishi bilan bir xil. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti  $\bar{m}_0(\bar{R})$  bosh moment  $\bar{M}_0$  ga geometrik teng ya'ni

$$\bar{m}_0(\bar{R}) = \bar{M}_0$$

yoki (6.13) ga binoan

$$\bar{m}_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k) \quad (6.23)$$

(6.23) ifoda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun Varin'on teoremasini ifodalaydi: *fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini  $O$  markazga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu markazga nisbatan olingan momentlarning geometrik yig'indisiga teng.*

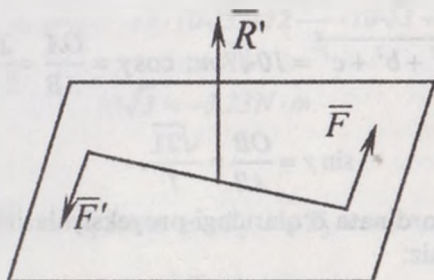
Ixtiyoriy keltirish markazi  $O$  dan qandaydir  $Oz$  o'qini o'tkazamiz nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan undan o'tuvchi o'qqa nisbatan kuch momentlari orasidagi munosabatdan foydalanib va (6.23) vektorli tenglikni  $Oz$  o'qiga proyeksiyalab quyidagini olamiz:

$$\bar{m}_z(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\bar{F}_k) \quad (6.24)$$

Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy  $Oz$  o'qiga nisbatan momenti haqidagi Varin'on teoremasini (6.24) tenglik ifodalaydi. *Kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisini biror  $OZ$  o'qiga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.*

Umumiy holda  $R' \neq 0$ ,  $M_0 \neq 0$  va bosh vektor bilan bosh momenti o'zaro

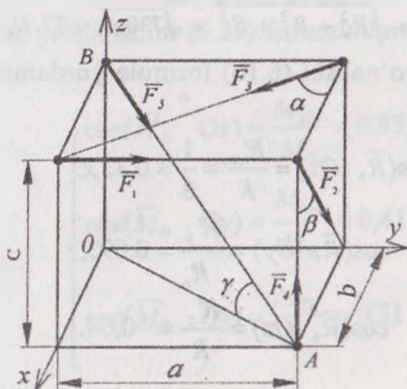
perpendikular bo'lmasa, u holda kuchlar sistemasi bosh vektorga teng bo'lgan kuchga va bosh vektor perpendikular bo'lgan tekislikda yotuvchi qandaydir juftga keltiriladi. Juft va juftning ta'sir tekisligiga perpendikular bo'lgan kuchdan tashkil topgan sistema dinamada deyiladi (84-shakl).



84-shakl.

**20\*-masala.** Tomonlari  $a, b, c$  bo'lgan to'g'riburchakli parallelepipedning uchlariga  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$  kuchlar qo'yilgan. Bosh vektor va bosh momentlar miqdor va yo'nalishlarini aniqlang. Berilgan kuchlar sistemasi bir teng ta'sir etuvchiga, yoki bir juft kuchga keltirish mumkinligi tekshirilsin (85-shakl).

**Berilgan.**  $a=10\sqrt{3} \text{ m}, F_1=10 \text{ N}, F_2=12 \text{ N}, F_3=10 \text{ N}, F_4=6\sqrt{3} \text{ N}, F_5=10\sqrt{7} \text{ N}, \alpha=60^\circ, \beta=30^\circ$ .



85-shakl.

**Yechish.** Koordinata sistemasini 85-shaklda ko'rsatilgandek aniqlaymiz. Dastavval quyidagilarni aniqlaymiz:

$$b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10 \text{ m}; \quad c = b \cdot \operatorname{ctg} \beta = 10\sqrt{3} \text{ m};$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 10\sqrt{7} \text{ m}; \quad \cos \gamma = \frac{OA}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{7};$$

$$\sin \gamma = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Bosh vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini (6.14) formula yordamida aniqlaymiz:

$$R_x = -F_2 \sin \beta + F_3 \cos \alpha + F_5 \cos \alpha \cos \gamma = -12 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5 + 10\sqrt{7} \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot 0,5 = 9 \text{ N}. \quad (20^*.1)$$

$$R_y = F_1 - F_3 \sin \alpha + F_5 \cos \gamma \sin \alpha = 10 - 10 \frac{\sqrt{3}}{2} + 10\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18,7 \text{ N} \quad (20^*.2)$$

$$R_z = -F_2 \cos \beta + F_4 - F_5 \sin \gamma = -12 \frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3} - 10\sqrt{7} \cdot \frac{21}{7} = -17,3 \text{ N}. \quad (20^*.3)$$

Bosh vektorning miqdori (6.15) formula yordamida aniqlanadi:

$$R = 27 \text{ N}; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{730,7} = 27 \text{ N}. \quad (20^*.4)$$

Bosh vektorning yo'nalishi (6.16) formula yordamida aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{R}, \hat{Ox}) &= \frac{R'_x}{R} = \frac{1}{3} = 0,333; \\ \cos(\bar{R}, \hat{Oy}) &= \frac{R'_y}{R} = 0,693; \\ \cos(\bar{R}, \hat{Oz}) &= \frac{R'_z}{R} = -0,64. \end{aligned} \right\} \quad (20^*.5)$$

Hosh momentning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini (6.17) formula yordamida aniqlaymiz:

$$M_{0x} = \sum_{k=1}^n m_x(F_k) = -F_1 \cdot c - F_2 \cdot \cos \beta \cdot a + F_3 \cdot \sin \alpha \cdot c + F_4 \cdot c - F_1 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot c = -10 \cdot 10\sqrt{3} - 12 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} - 10\sqrt{7} \cdot 2 \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = -3,23 N \cdot m. \quad (20^*6)$$

$$M_{0y} = \sum_{k=1}^n m_y(F_k) = F_3 \cos \alpha \cdot c - F_1 \cdot b + F_3 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot c = 10 \cdot 0,5 \times 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \cdot 10 + 10\sqrt{7} \cdot 2 \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot 0,5 \cdot 10\sqrt{3} = 90\sqrt{3} = 155,7 N \cdot m. \quad (20^*7)$$

$$M_{0z} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k) = F_1 \cdot b + F_2 \cdot \sin \beta \cdot a - F_3 \cdot \cos \alpha \cdot a = 10 \cdot 10 + 12 \cdot 0,5 \times 10\sqrt{3} - 10 \cdot 0,5 \cdot 10\sqrt{3} = 100 + 10\sqrt{3} = 117,3 N \cdot m. \quad (20^*8)$$

Hosh moment miqdorini (6.18) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \sqrt{142330,78} = 377 N \cdot m.$$

$$M_0 \approx 377 N \cdot m$$

Hosh moment yo'nalishini (6.21) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{M}_0 \wedge O_x) &= \frac{M_{0x}}{M_0} = 0,857, \\ \cos(\vec{M}_0 \wedge O_y) &= \frac{M_{0y}}{M_0} = 0,413, \\ \cos(\vec{M}_0 \wedge O_z) &= \frac{M_{0z}}{M_0} = 0,311. \end{aligned} \quad (20^*9)$$

Bosh vektor bilan bosh moment o'zaro perpendikularlik alomatlarini tekshiramiz:

$$R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz} = -2024,4 \neq 0$$

ya'ni  $\bar{R}$  va  $\bar{M}_O$  vektorlar o'zaro perpendikular emaslar, demak bu kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirib bo'lmaydi.

## 26-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Agar fazodagi kuchlar sistemasining bosh vektori  $\bar{R}$  va bosh momenti  $\bar{M}_O$  lar nolga teng bo'lsa, u holda kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Shuning uchun fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{R} = 0; \bar{M}_O = 0$$

yoki

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0; \sum_{k=1}^n m_k(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.25)$$

Fazodagi kuchlar sistemasi uchun (6.25) muvozanatning zarur va yetarli shartlaridir. Agar (6.25) tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodasini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad (6.26)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.27)$$

Agar (6.26) va (6.27) tengliklarda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etsa u holda bu tengliklar **muvozanat tenglamalari** deyiladi va ulardan noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlari aniqlanadi. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda ixtiyoriy joylashgan bo'lib, bu kuchlar muvozanatiga oid masalalarda noma'lumlar soni oltitadan ortmasa, **statik aniq masala** deyiladi. Boshqa xususiy hollardagi kuchlar sistemasi uchun muvozanat sistemalari (6.26) va (6.27) lardan kelib chiqadi.

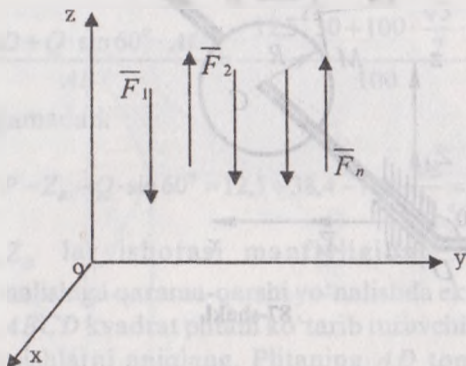
### 17-§. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Berilgan kuchlar sistemasi  $Oz$  o'qiga parallel (86-shakl).

U holda bu kuchlar sistemasining har bir  $F_i$  kuchi  $Ox$  va  $Oy$  o'qlaridagi proyeksiyalari va  $Oz$  o'qiga nisbatan momentlari  $O$  ga teng, shuning uchun (6.26) va (6.27) tenglamalar sistemasidan faqat quyidagi tenglamalar qoladi:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_i(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_i(\bar{F}_i) = 0. \quad (6.28)$$

Tenglamalar (6.28) fazoda parallel kuchlar *sistemasining muvozanat shartlari* deyiladi.



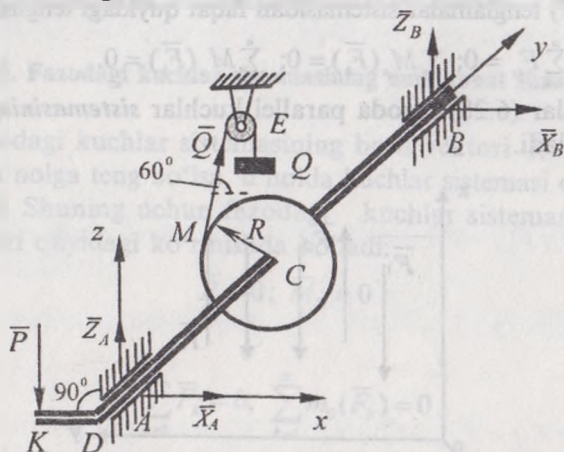
86-shakl.

### 20-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanat shartlariga doir masalalar

**21\*-masala.** 87-shakl sxematik tasvirlangan chig'iriq yordamida og'irligi  $Q=100\text{kg}$  bo'lgan yuk tekis ko'tariladi. Baraban radiusi  $R=5\text{ sm}$  dastaning uzunligi  $KD=40\text{ sm}$ ,  $AD=30\text{ sm}$ ,  $AC=40\text{ sm}$ ,  $CB=60\text{ sm}$ . Arqon barabandan urinma bo'ylab gorizontga  $60^\circ$  burchak ostida tushadi.  $KD$  dastaning gorizont holatida dastaga tushadigan  $\bar{P}$  bosim hamda  $A$  va  $B$  tayanchlar reaksiyalarini aniqlang.

**Yechish.** Koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganidek o'tkazamiz va val, barabandan iborat sistemaga ta'sir qilayotgan kuchlarni tasvirlaymiz. Arqon  $ME$  ning taranglik kuchi miqdor jihatidan  $Q$  yuk og'irligiga teng bo'lib,  $ME$  bo'ylab yo'nalgan. Tayanchlar  $A$  va  $B$  lar silindrik sharnirlar.

Shuning uchun bu tayanchlardagi reaksiya kuchlarini  $X$  va  $Z$  koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilarga ajratamiz va  $X_A$ ,  $Z_A$  lar bo'lgan belgilaymiz. Val, barabanlarga ta'sir etayotgan ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi, fazoda ixtiyoriy kuchlar sistemasi-ning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



87-shakl.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A + X_B + Q \cdot \cos 60 = 0. \quad (21^*.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; 0 = 0. \quad (21^*.2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; Z_A + Z_B - P + Q \cdot \sin 60 = 0. \quad (21^*.3)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; P \cdot AD + Q \cdot \sin 60 \cdot AC + Z_B \cdot AB = 0. \quad (21^*.4)$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0; -P \cdot KD + Q \cdot R = 0. \quad (21^*.5)$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0; -Q \cos 60 \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (21^*.6)$$

Tuzilgan tenglamalar sistemasini ketma-ket yechib, quyidagilarni olamiz:

$$(21^{\circ}.5) \text{ tenglamadan: } P = \frac{Q \cdot R}{KP} = \frac{100 \cdot 5}{40} = 12,5 \text{ N};$$

$$(21^{\circ}.6) \text{ tenglamadan: } X_B = -\frac{Q \cdot \cos 60^{\circ} \cdot AC}{AB} = -\frac{100 \cdot 0,5 \cdot 40}{100} = -20 \text{ N};$$

$$(21^{\circ}.1) \text{ tenglamadan: } X_A = -X_B - Q \cdot \cos 60^{\circ} = 20 - 100 \cdot 0,5 = -30 \text{ N};$$

$$(21^{\circ}.4) \text{ tenglamadan:}$$

$$Z_B = -\frac{P \cdot AD + Q \cdot \sin 60^{\circ} \cdot AC}{AB} = -\frac{12,5 \cdot 30 + 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 40}{100} = -38,4 \text{ N};$$

$$(21^{\circ}.3) \text{ tenglamadan:}$$

$$Z_A = P - Z_B - Q \cdot \sin 60^{\circ} = 12,5 + 38,4 - 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -35,7 \text{ N}.$$

$X_A, X_B, Z_A, Z_B$  lar ishorasi manfiyligidan ularning shaklda ko'rsatilgan yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda ekanligini ko'rsatadi.

**22\*-masala.**  $ABCD$  kvadrat plitani ko'tarib turuvchi oltita tayanch sterjenlardagi zo'riqlishlarni aniqlang. Plitaning  $AD$  tomoni bo'ylab gorizontal  $\vec{P}$  kuch ta'sir qiladi, o'lchovlar 88-shaklda ko'rsatilgan.

**Yechish.** Oltita tayanch sterjenlar ta'sirlarini ularning reaksiyalari bilan almashtiramiz. Sterjenlar o'zaro sharnirli bog'langani uchun ularning reaksiyalarini, sterjenlarni cho'ziladi deb qaralib tugunlardan sterjen bo'ylab qarishi tomonga yo'naltiramiz. Hamma kuchlar fazoda ixtiyoriy joylashgan. Koordinata boshini ikki noma'lum  $S_1$  va  $S_5$  reaksiyalarni kesishgan nuqtasida tanlab olib, oltita muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum_{k=1}^5 F_{kx} = 0; -S_2 \cdot \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0. \quad (22^*.1)$$

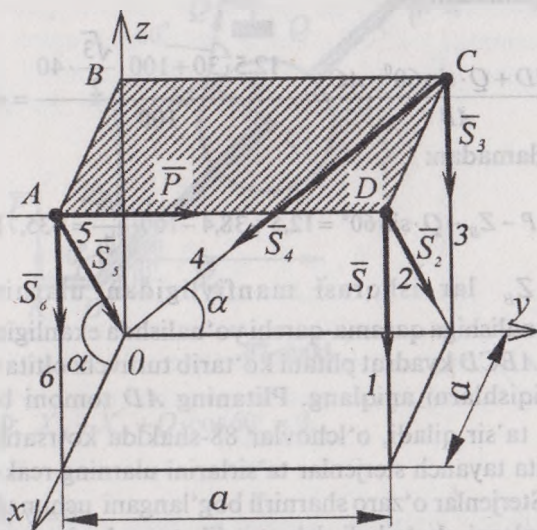
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; P - S_4 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (22^*.2)$$

$$\sum_{k=1}^6 F_{kz} = 0; -S_1 - S_2 \cdot \sin \alpha - S_3 - S_4 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - S_6 = 0. \quad (22^*.3)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; S_1 \cdot a - S_2 \cdot \sin \alpha \cdot a - S_3 \cdot a - P \cdot a = 0. \quad (22^*.4)$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0; S_1 \cdot a - S_6 \cdot a = 0. \quad (22^*.5)$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0; P \cdot a + S_2 \cdot \cos \alpha \cdot a = 0 \quad (22^*.6)$$



88-shakl.

Shakldan ko'rinadiki  $\alpha = 45^\circ$  bo'lganda tenglamalar sistemasini ketma-ket yechib quyidagilarni topamiz:

$$(22^*.2) \text{ dan } S_4 = \frac{P}{\cos \alpha} = P\sqrt{2} \text{ N};$$

$$(22^*.6) \text{ dan } S_2 = -\frac{P}{\cos \alpha} = -P\sqrt{2};$$

$$(22^*.1) \text{ dan } S_5 = -S_2 = P\sqrt{2};$$

(22\* 3) dan  $S_1 + S_6 = 0$ ;

U holda (22\* 3) tenglamadan:

$$S_1 = -S_2 \sin \alpha - S_3 \cdot \sin \alpha - S_5 \sin \alpha = (P\sqrt{2} - P\sqrt{2} - P\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = -P.$$

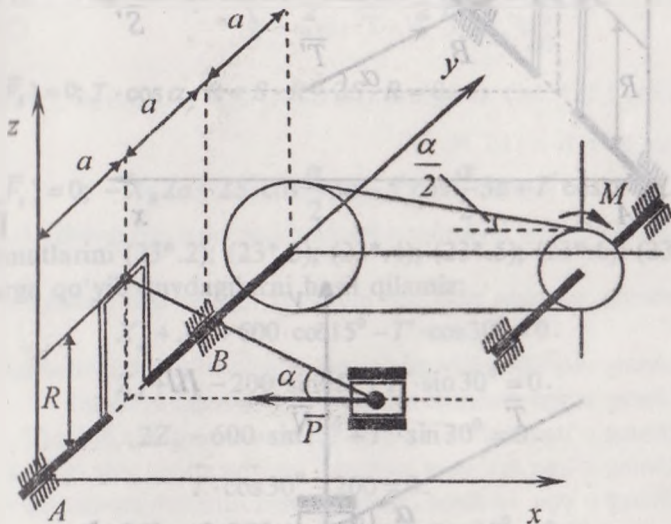
$$(22* 4) \text{ dan } S_1 = -P - S_3 - S_2 \sin \alpha = -P + P + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = P.$$

$$(22* 5) \text{ dan } S_6 = -S_1 = -P.$$

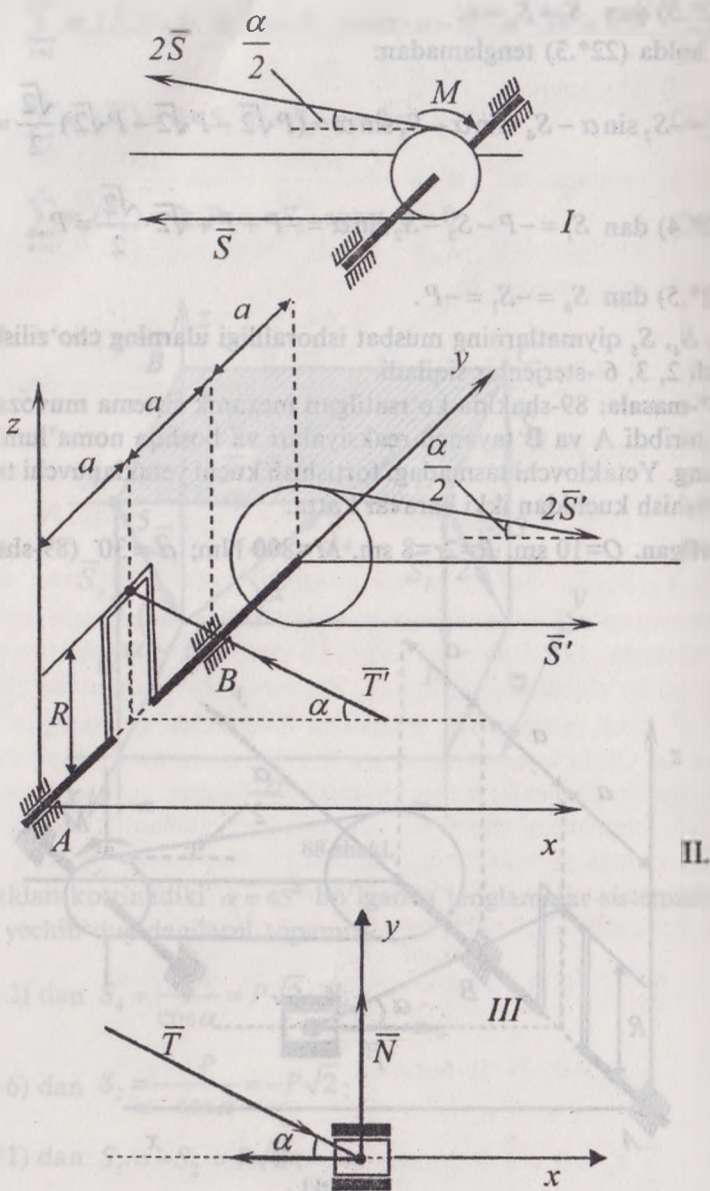
$S_1, S_2, S_3$  qiymatlarning musbat ishoraliigi ularning cho'zilishini ifodalaydi 2, 3, 6 -sterjenlar siqiladi.

**21\*-musala:** 89-shaklda ko'rsatilgan mexanik sistema muvozanat holatida turibdi A va B tayanch reaksiyalari va boshqa noma'lum kuch P aniqlang. Yetaklovchi tasmadagi tortishish kuchi yetaklanuvchi tasmadagi tortishish kuchidan ikki baravar katta.

Berilgan.  $Q=10$  sm,  $R=2r=8$  sm,  $M=800$  Nm;  $\alpha=30^\circ$  (89-shakl).



89-shakl.



90-shakl.

**Yechish.** Masalani hal qilish uchun mexanik sistemani 3 qismga bo'lib har birini muvozanatini alohida tekshiramiz. Dastavval radiusi  $r$  bo'lgan kichik g'ildirakning bo'lagi muvozanatini tekshiramiz (I bo'lak):

$$\sum_{i=1}^n m_i(\bar{F}_i) = 0; \quad -M + 2 \cdot S \cdot r - S \cdot r = 0. \quad (23^*.1)$$

$$r = \frac{R}{2} = 4 \text{ m} \quad \text{bundan} \quad S = \frac{M}{r} = \frac{800}{4} = 200 \text{ N}.$$

Endi radiusi  $R$  bo'lgan g'ildirak bilan mahkamlangan valning muvozanatini tekshiramiz (II bo'lak).

$$\sum F_x = 0; \quad X_A + X_B + S \cos \frac{\alpha}{2} + T \cos \alpha = 0. \quad (23^*.2)$$

$$\sum F_y = 0; \quad 0 = 0. \quad (23^*.3)$$

$$\sum F_z = 0; \quad Z_A + Z_B - 2S \cos \frac{\alpha}{2} + S \sin \frac{\alpha}{2} + T \cos \alpha = 0. \quad (23^*.4)$$

$$\sum m_i(\bar{F}_i) = 0; \quad Z_B \cdot 2a - S \cdot 3a \left( \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) + T \cdot \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (23^*.5)$$

$$\sum m_i(\bar{F}_k) = 0; \quad T \cdot \cos \alpha \cdot R + S \cdot R - 2S \cdot R = 0. \quad (23^*.6)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i(\bar{F}_i) = 0; \quad -X_B 2a - 2S \cos \frac{\alpha}{2} 3a - S \cos \frac{\alpha}{2} 3a + T \cos \alpha = 0. \quad (23^*.7)$$

Qiyomatlarini (23\*.2); (23\*.3); (23\*.4); (23\*.5); (23\*.6); (23\*.7) tenglamalarga qo'yib quydagilarni hosil qilamiz:

$$X_A + X_B + 600 \cdot \cos 15^\circ - T' \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (23^*.8)$$

$$Z_A + Z_B - 200 \cdot \sin 15^\circ + T' \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (23^*.9)$$

$$2Z_B - 600 \cdot \sin 15^\circ + T' \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (23^*.10)$$

$$T \cdot \cos 30^\circ - 200 = 0. \quad (23^*.11)$$

$$-2X_B - 9 \cdot 200 \cdot \cos 15^\circ + T' \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (23^*.12)$$

Ushbu (23\*.8) – (23\*.12) tengliklardan noma'lum kuchlarni aniqlaymiz:

$$T' = T = \frac{200}{\cos 30^0}; T' = T = 230 \text{ N.}$$

$$Z_B = \frac{1}{2}(600 \cdot \sin 15^0 - 200 \cdot \sin 30^0); Z_B = 20,5 \text{ N.}$$

$$X_B = \frac{1}{2}(230 \cdot \cos 30^0 - 1800 \cdot \cos 15^0); X_B = -765 \text{ N.}$$

$$Z_A = 200 \cdot \sin 15^0 - 230 \cdot \sin 30^0 - 20,5; Z_A = 83 \text{ N.}$$

$$X_A = 230 \cdot \cos 30^0 - \cos 15^0 + 765; X_A = 389 \text{ N.}$$

$X_B$  va  $Z_B$  larning qiymatlari manfiy bo'ladi. Shuning uchun  $X_B$  va  $Z_B$  larning yo'nalishi shaklda ko'rsatilgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

3. Porshenning (III bo'lak) muvozanat tenglamalarini yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; T \cdot \cos \alpha - P = 0; \quad (23*.13)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; N - T \cdot \sin \alpha = 0; \quad (23*.14)$$

(23\*.13); (23\*.14) tenglamalardan:  $P = 230 \cdot \cos 30^0$ ;  $P = 200 \text{ N}$ ;  
 $N = 230 \cdot \sin 30^0$ ;  $N = 115 \text{ N}$ .

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deb qanday kuchlarga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori deb qanday vektorga aytiladi?
3. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori qanday hisoblanadi?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Kuchning o'qqa nisbatan momenti ishorasi qanday bo'ladi?
6. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qachon nolga teng bo'ladi?
7. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasida qanday bog'lanishlar bor?
8. Fazodagi juft kuch momenti vektori nima?

9. *Juft kuchni o'z tekisligiga parallel tekislikka ko'chirilsa uning jismga ta'siri qanday bo'ladi?*

10. *Kesishuvchi tekislikda joylashgan juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?*

11. *Bosh vektor va bosh moment deb qanday vektorlarga aytiladi?*

12. *Bosh vektor va bosh momentning analitik ifodalari qanday?*

13. *Bosh vektor va bosh moment bir markazga keltirilsa, qanday hollar bo'ladi?*

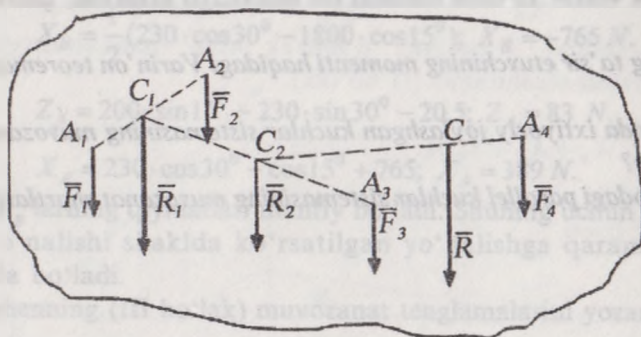
14. *Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasini aytib bering.*

15. *Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?*

16. *Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?*

## 29-§. Parallel kuchlarni qo'shish, parallel kuchlar markazi

Bir tekislikda yotmaydigan ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ ) parallel kuchlar sistemasi ko'ramiz (91-shakl).



91-shakl.

Kuchlarni ketma-ket qo'shamiz  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlarni qo'shib, ularga parallel bo'lgan  $\vec{R}_1$  teng ta'sir etuvchisini topamiz. Uning miqdori  $R_1 = F_1 + F_2$  ga teng bo'lib, qo'yilish nuqtasi quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_1 C_1}{A_2 C_1} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Endi  $\vec{R}_1$  va  $\vec{F}_3$  kuchlarni qo'shamiz ularning teng ta'sir etuvchisi  $\vec{R}_2$  ning miqdori quyidagiga teng:

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3.$$

Qo'yilish nuqtasi esa quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{C_1 C_2}{A_3 C_2} = \frac{F_3}{R_2}.$$

Endi  $\vec{R}_2$  va  $\vec{F}_4$  kuchlarning teng ta'sir etuvchisining miqdori

$$R = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

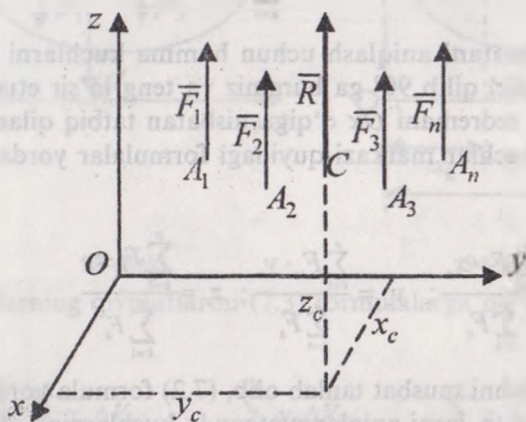
bu hisob, qo'yilish nuqtasi  $C$  nuqta quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{C_2 C}{A_4 C} = \frac{F_4}{R}.$$

Yuqoridagi tavsifdan ko'rinadiki,  $n$  ta parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ularning yig'indisiga teng:

$$R = \sum_{k=1}^n F_k.$$

Qo'yilish nuqtasi esa kuchlarning fazodagi yo'nalishlariga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham agar kuchlarning hammasini ularning qo'yilish nuqtalari atrofida teng burchakka bir tomonga bursak, ularning teng ta'sir etuvchisi ham shu burchakka  $C$  nuqta atrofida buriladi. Teng ta'sir etuvchi ta'sir chizig'i har doim parallel kuchlarning fazoda har qanday yo'nalishida ham  $C$  nuqtadan o'tadi.  $C$  nuqta parallel kuchlar markazi deyiladi.



92-shakl.

Parallel kuchlar sistemasi markazining koordinatalarini aniqlash uchun koordinata sistemasi  $Oz$  o'qini berilgan kuchlar sistemasiga parallel qilib olamiz (92-shakl). Kuchlar qo'yilgan  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ . Parallel kuchlar markazi  $C$  nuqtaning koordinatalarini  $x_c, y_c, z_c$  deb belgilaymiz.

Teng ta'sir etuvchining  $Ox$  o'qiga nisbatan momenti haqidagi teoremani tatbiq qilamiz:

$$m_x(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) \text{ yoki } R \cdot y_c = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n$$

$$\text{bundan } y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n}{R} \text{ yoki } y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}.$$

Shu teoremani Oy o'qiga nisbatan tatbiq qilib,  $x_c$  koordinatani aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}.$$

Endi koordinatani aniqlash uchun hamma kuchlarni bir tomonga Oy o'qiga parallel qilib  $90^\circ$  ga buramiz va teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teoremani Ox o'qiga nisbatan tatbiq qilamiz. Shunday qilib, parallel kuchlar markazi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \quad (7.2)$$

Biror yo'nalishni musbat tanlab olib, (7.2) formula yordamida nuqta koordinata  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  larni aniqlanayotganda kuchlarning qiymatlari mos ishoralar bilan olinishi zarur.

### 30-§. Jism og'irlik markazining koordinatalari uchun umumiy formulalar

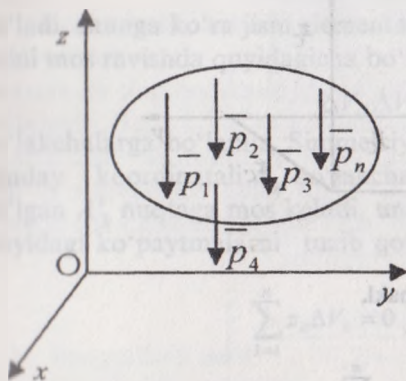
Jismni elementar bo'lakchalarga bo'lib, har bir bo'lakka ularning og'irlik kuchlarini qo'yamiz. U holda parallel kuchlar sistemasini hosil qilamiz (93-shakl). Parallel og'irlik kuchlar sistemasining markazi, jismning og'irlik markazi bo'ladi. Jismning og'irlik markazining koordinatalari (7.2) formulaga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n P}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n P}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n P} \quad (7.3)$$

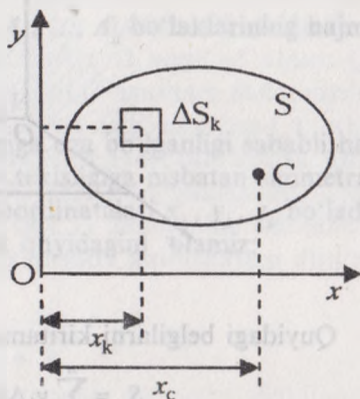
bunda  $P$  -jism og'irligi. Bir jinsli jism uchun

$$P_k = \gamma \Delta V_k; \quad P = \gamma V,$$

bunda  $\Delta V_k$  -elementar bo'lakchanning hajmi,  $V$  -jism hajmi,  $\gamma$  -birlik hajmning og'irligi.



93-shakl.



94-shakl.

$P_k$  va  $P$  larning qiymatlarini (7.3) formulalarga qo'yib quyidagilarni olamiz:

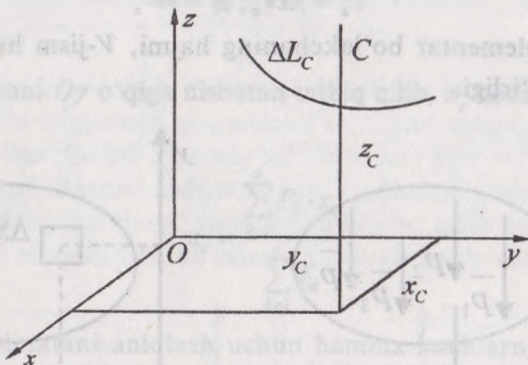
$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta V_k}{V}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta V_k}{V}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k}{V} \quad (7.4)$$

Agar jism yupqa bir jinsli plastinka bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi (94-shakl):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta P_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta P_k}{P} \quad (7.5)$$

bunda  $\Delta S_k$  -elementar bo'lakchanning yuzasi  $S$ -butun plastinka yuzasi. Agar jism bir jinsli chiziqdan (95-shakl) iborat bo'lsa, uning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k \Delta L_k; \quad y_c = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n y_k \Delta L_k; \quad z_c = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n z_k \Delta L_k. \quad (7.6)$$



95-shakl.

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

$$S_x = \sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k; \quad S_y = \sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k. \quad (7.7)$$

U holda (7.5) formulalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$x_c = \frac{S_y}{S}; \quad y_c = \frac{S_x}{S}. \quad (7.8)$$

Bu yerda  $S_x$  yuzaning  $Ox$  o'qiga nisbatan statik momenti deb ataladi,  $S_y$  esa  $Oy$  o'qiga nisbatan yuzaning statik momenti deb ataladi. Agar yuza og'irlik markazining koordinatalari aniq bo'lsa, uning statik momenti quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$S_x = S \cdot y_c; \quad S_y = S \cdot x_c. \quad (7.9)$$

### 31-§. Og'irlik markazini aniqlash usullari. Simmetrik jismlarning og'irlik markazi

**1.Teorema.** Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligi o'qi yoki markaziga ega bo'lsa, u holda uning og'irlik markazi mos ravishda shu tekislikda, o'q yoki markazda yotadi.

**Isbot.** Jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsin (96-shakl). U holda teorema asosan

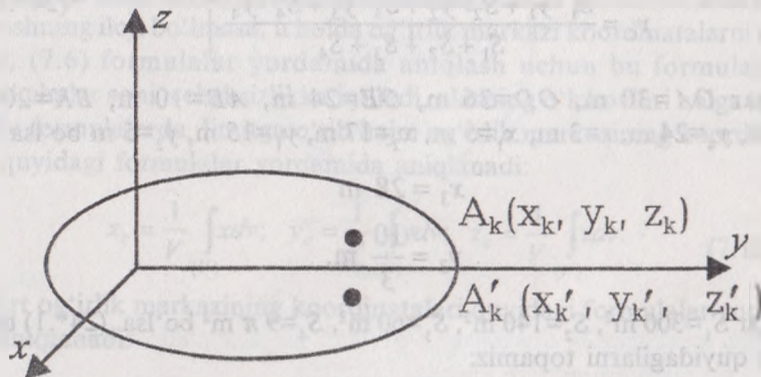
$$z_c = 0 \text{ yoki } \sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k = 0$$

bo'ladi, shunga ko'ra jism elementar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  bo'laklarining hajmlarini mos ravishda quyidagicha bo'lgan

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$$

bo'lakchalarga bo'lamiz. Simmetriya o'qiga ega bo'lganligi sababli har qanday koordinatali  $A_k$  bo'lakcha  $Oxy$  tekisligiga nisbatan simmetrik bo'lgan  $A'_k$  nuqtaga mos keladi, uning koordinatalari  $x_k, y_k, z_k$  bo'ladi. Quyidagi ko'paytmalarni tuzib qo'shsak quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k = 0,$$



96-shakl.

u holda  $Z_c = 0$  bo'ladi. Xuddi shunday qolgan hollar ya'ni jism simmetrik o'q yoki markazga ega bo'lgan hollar isbot qilinadi.

## 2. Bo'laklarga ajratish (to'ldirish) usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni og'irlik markazlari ma'lum bo'lgan chekli sonli geometrik shakllarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda uning og'irlik markazining koordinatalari (7.4), (7.5), (7.6) formulalar yordamida aniqlanadi. Agar qattiq jismda teshiklar mavjud bo'lsa, uning og'irlik markazini aniqlashda jismni to'liq deb qaraladi, teshiklar va yetishmovchi yuza yoki hajmga tegishli hadlar manfiy ishoralar bilan olinadi. Bu usulni manfiy yuzalar (hajmlar) usuli deb ataladi.

**24\*-masala.** 97-shaklda tasvirlangan bir jinsli yupqa plastinka og'irlik markazining koordinatalarini aniqlang.

**Yechish.** Plastinkani to'rtta bo'laklarga ajratamiz. Markazga  $C_1(x_1, y_1)$  nuqta bo'lgan to'rtburchak markazi  $C_2(x_2, y_2)$  nuqta bo'lgan to'rtburchak markazi  $C_3(x_3, y_3)$  nuqta bo'lgan uchburchak va markazi  $C_4(x_4, y_4)$  nuqta bo'lgan doira (teshik) shakldan  $C_1, C_2, C_3, C_4$  nuqtalarining koordinatalari ma'lum o'lchovlari yordamida aniqlanadi. Bo'lakchalarning yuzalarini  $S_1, S_2, S_3, S_4$  lar bilan belgilaymiz va ular osonlikcha aniqlanadi, (7.5)ga asosan quyidagi formuladan foydalanib, og'irlik markazining koordinatalarini topamiz.

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 + S_4 \cdot x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \\ y_c &= \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 + S_4 \cdot y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \end{aligned} \right\} \quad (24^*.1)$$

Agar  $OA=30$  m,  $OD=36$  m,  $OE=24$  m,  $AB=10$  m,  $BK=20$  m,  $x_4=5$  m,  $y_4=24$  m,  $r=3$  m,  $x_1=5$  m,  $x_2=17$  m,  $y_1=15$  m,  $y_2=5$  m bo'lsa

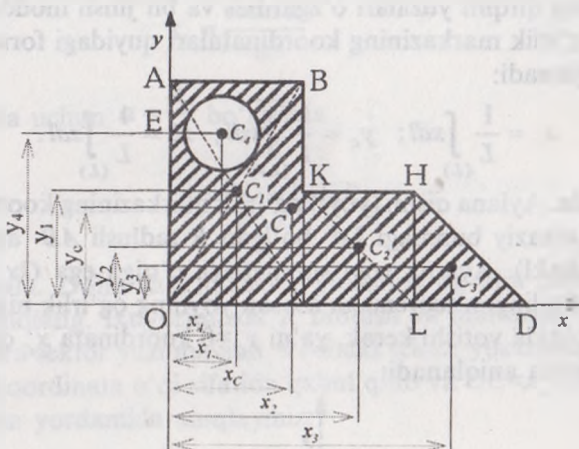
$$x_3 = 28 \text{ m}$$

$$y_3 = \frac{10}{3} \text{ m.}$$

Agar  $S_1=300$  m<sup>2</sup>,  $S_2=140$  m<sup>2</sup>,  $S_3=60$  m<sup>2</sup>,  $S_4=9\pi$  m<sup>2</sup> bo'lsa, (24\*.1) tenglikdan quyidagilarni topamiz:

$$x_c = \frac{300 \cdot 5 + 140 \cdot 17 + 60 \cdot 28 - 9\pi \cdot 5}{300 + 140 + 60 - 9\pi} = \frac{5418,7}{471,7} \approx 11,5 \text{ m.} \quad (24^*.2)$$

$$y_c = \frac{300 \cdot 15 + 140 \cdot 5 + 60 \cdot \frac{10}{3} - 9\pi \cdot 24}{300 + 140 + 60 - 9\pi} = \frac{4721}{471,7} \approx 10 \text{ m. (24*3)}$$



97-shakl.

### 3. Integrallash usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni chekli sondagi sodda geometrik shakllarga ajratishning iloji bo'lmasa, u holda og'irlik markazi koordinatalarni (7.4), (7.5), (7.6) formulalar yordamida aniqlash uchun bu formulalarda bo'lakchalar soni  $n$  cheksizlikka intiladi, ularning o'lchovlari nolga intiladi. Bu formulalarda limitga o'tib hajm og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_V x dv; \quad y_c = \frac{1}{V} \int_V y dv; \quad z_c = \frac{1}{V} \int_V z dv. \quad (7.10)$$

Sirt og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_S x ds; \quad y_c = \frac{1}{S} \int_S y ds; \quad z_c = \frac{1}{S} \int_S z ds, \quad (7.11)$$

bunda  $S$  – sirt yuzasi.

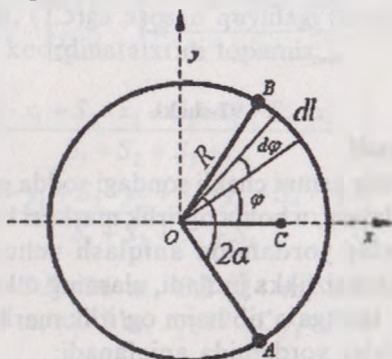
Agar sirt tekis shakl bo'lsa va  $xOy$  tekislik shu shakl tekisligida olin-  
sa, yuqoridagi formulalar quyidagicha yoziladi:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} x ds, \quad y_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} y ds. \quad (7.12)$$

Ko'ndalang qirqim yuzalari o'zgarmas va bir jinsli moddadan iborat  
chiziqlarning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yor-  
damida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl; \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl; \quad z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (7.13)$$

**25\*-masala.** Aylana qismi (yoyi) og'irlik markazining koordinatalarini  
aniqlang. Markaziy burchagi  $2\alpha$  bo'lgan  $R$  radiusli  $AB$  aylana yoyini  
olamiz (98-shakl). Aylana yoyi simmetriya o'qiga ega  $Ox$  koordinata  
o'qidir. Isbot qilingan teorema asosan yoyning og'irlik markazi uning  
simmetriya o'qida yotishi kerak, ya'ni  $y_c=0$  koordinata  $x_c$  quyidagi for-  
mula yordamida aniqlanadi:



98-shakl.

$$x_c = \frac{1}{L_1(l_1)} \int x dl, \quad (25^*.1)$$

og'irlik markazining abssissasi  $x$  bo'lgan yoydan cheksiz kichik elemen-  
tar  $dl$  bo'lakchani ajratib olamiz. U holda

$$dl = R \cdot d\varphi, \quad x = R \cdot \cos \varphi, \quad L_1 = R \cdot \alpha \quad (25^*.2)$$

(25\*.2) ifodalarni (25\*.1) formulaga qo'yib,  $\varphi$  bo'yicha integrallab,  
quyidagini olamiz:

$$x_c = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \alpha \, d\varphi = \left( \frac{1}{2\alpha} \cdot \sin \varphi \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Demak,

$$x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (25^*.3)$$

yarim aylana uchun  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  bo'lganda

$$x_c = \frac{2R}{\pi} \approx 0,63R \quad (25^*.4)$$

bo'ladi.

**26\*-masala.** Doira shaklli sektor yuzaning og'irlik markazi koordinatlarini aniqlang. Ixtiyorimizda  $R$  radiusli va markaziy burchagi  $2\alpha$  bo'lgan doira sektor yuzi mavjud. 99-shakl sektor yuzasining simmetriya o'qini  $Ox$  koordinata o'qi sifatida qabul qilib va  $OC=x_c$  masofani quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_S x \, ds \quad (26^*.1)$$

markaziy burchagi  $d\varphi$  bo'lgan cheksiz kichik  $Oab$  sektor yuzachani ajratamiz. Xuddi teng yonli uchburchak deb qaralgan bu elementar bo'lakchanning og'irlik markazi  $C'$  nuqtada bo'lib, bu masofa quyidagiga

teng  $OC' = \frac{2}{3}R$ , bu  $C'$  markaz nuqtaning koordinatasi quyidagiga teng

$$x = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos \varphi \quad (26^*.2)$$

yuzacha

$$ds = \frac{1}{2} \cdot R^2 d\varphi \quad (26^*.3)$$

sektor yuzasi

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 2\alpha = R^2 \alpha \quad (26^*.4)$$

(26\*.2); (26\*.3) va (26\*.4) ifodalarni (26\*.1) formulaga qo'yib va  $\varphi$  bo'yicha integrallab, quyidagini olamiz:

$$x_c = \frac{1}{R^2 \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{3} R^3 \cos \varphi d\varphi = \left( \frac{R}{3\alpha} \cdot \sin \varphi \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$$

demak,

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (26*.5)$$

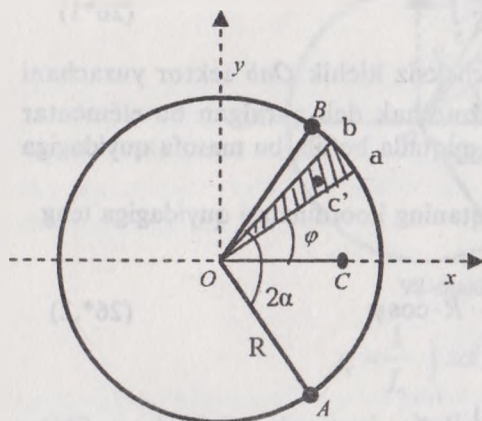
sektor o'rnida yarim doira bo'lsa, ya'ni:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (26*.6)$$

(26\*.6) ni (26\*.5) ga qo'ysak:

$$x_c = \frac{4R}{3\pi} = 0,42 R \quad (26*.7)$$

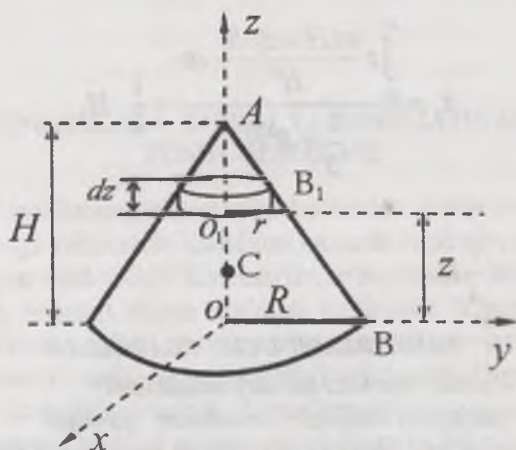
kelib chiqadi.



99-shakl.

**27-masala.** Balandligi  $H$  va asosining radiusi  $R$  bo'lgan to'g'ri doiraviy konus og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin, konusning simmetriya o'qini  $Oz$  koordinata o'qi sifatida olamiz. U holda  $x_c = y_c = 0$ ,  $z_c$  koordinata quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$z_c = \frac{1}{V} \int_V z dv. \quad (27^*.1).$$



100-shakl.

Konus asosidan  $z$  masofa balandlik  $dz$  va radiusi  $r$  bo'lgan silindr ko'rinishdagi cheksiz kichik bir element hajmini ajratamiz (100-shakl). Bu element hajmi quyidagiga teng:

$$dV = \pi \cdot r^2 dz \quad (27^*.2)$$

radius  $r$  ni  $AOB$  va  $O_1AB_1$  uchburchaklarning o'xshashligidan aniqlanadi:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H} \quad (27^*.3)$$

bundan

$$r = \frac{R}{H} (H - z) \quad (27^*.4)$$

(27^\*.4) ni (27^\*.2) ga qo'ysak:

$$dV = \frac{\pi R^2}{H^2} (H - z)^2 dz \quad (27^*.5)$$

kelib chiqadi.

Konusning hajmi quyidagiga teng:  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot H$  bo'lgani uchun (27\*.1) ga qo'ysak:

$$z_c = \frac{\int_0^H z \frac{\pi(H-z)^2 R^2}{H^2} dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{1}{4} H \quad (7.21)$$

hosil qilamiz.

Demak:  $z_c = \frac{1}{4} H$ .

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Parallel kuchlar markazi qanday aniqlanadi?
2. Og'irlik markazini aniqlash formulalari qanday?
3. Hajmning og'irlik markazini aniqlash formulasini keltiring.
4. Yuzaning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
5. Chiziqlarning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
6. Og'irlik markazini aniqlashning qanday usullarini bilasiz?

## II QISM

### KINEMATIKA

#### VIII BOB. KINEMATIKAGA KIRISH VA KINEMATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI

Nazariy mexanikaning kinematika bo'limida jismlarning harakati bu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarni nazarda tutilmay, faqat geometrik nuqtayi nazardan tekshiriladi. Kinematika so'zi grekcha «kinema» so'zidan olingan bo'lib, harakat degan ma'noni anglatadi. Kinematikada harakatning aniqlanish usullari, harakatni kinematik xarakterlaydigan kattaliklar (trayektoriya, tezlik va tezlanishlar) aniqlanadi. Jismning harakatini kinematik usulda aniqlash texnikada turli mashina va mexanizmlar qismlarining harakatini o'rganish uchun nazariy baza bo'lib xizmat qiladi. XIX asrning boshlarida texnikaning tez taraqqiy etishi va shu jumladan, mashinazorlikning rivojlanishi, jism harakatini geometrik tekshirish masalasini ilgari surdi. Shu davrdan boshlab kinematika nazariy mexanikaning mustaqil qismi bo'lib ajraldi.

Materiya doimo harakatda bo'lganidan, uni vaqt va fazodan ajratib tasvirlab bo'lmaydi. Olamda harakat qiluvchi materiyadan boshqa hech narsa yo'qdir, harakat qiluvchi materiya esa fazo va vaqtda harakat qiladi. Ta'rifga ko'ra harakat materiyaning ajralmas asosiy xossasidir.

Tabiat to'g'risidagi fanlardan biri bo'lgan nazariy mexanikani o'rganish dunyoga mantiqiy nuqtayi nazardan qarash va to'g'ri usullar asosida fikr yurgizishga yordam beradi. Nazariy mexanikada jismlar harakatining eng sodd shakli - *mexanik harakat* tekshiriladi. Vaqtning o'tishi bilan moddiy jismlarning fazoda bir-biriga nisbatan ko'chishiga *mexanik harakat* deyiladi. Kinematikada jismlarning harakati boshqa biror jism bilan bog'langan, koordinata sistemasiga nisbatan tekshiriladi.

Tabiatda mutlaq harakatsiz jism bo'lmagani tufayli mutlaq qo'zg'almas sanoq sistemasi ham mavjud bo'lmaydi. Shu sababli «Harakat» va «Muvozanat» tushunchalari nisbiy tushunchalardir. Agar jismni biror sanoq

sistemasiga nisbatan vaziyati vaqtning o'tishi bilan o'zgarmasa, jism mazkur sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda (muvozanatda) bo'ladi. Yerdagi jismlarning harakatini tekshirilganda asosiy yoki «qo'zg'almas» sanoq sistemasi uchun odatda, yerga nisbatan qo'zg'almas bo'lgan sanoq sistemasi olinadi. Tanlab olingan sanoq sistemasiga nisbatan har onda jismning vaziyatini aniqlash mumkin bo'lsa, jismning harakati kinematik aniqlangan deb hisoblanadi. Klassik mexanikada moddiy jismning kuzatilayotgan harakati uch o'lchovli Yevklid fazosiga nisbatan tekshiriladi va kattaliklarni aniqlashda Yevklid geometriyasidan foydalaniladi. Klassik mexanikada vaqtni universal deb hisoblanadi, ya'ni vaqtni barcha sanoq sistemalari uchun, ularni nisbiy harakatidan qat'iy nazar bir xilda deb qaraladi.

Kinematikada matematik nuqtayi nazardan qaraganda, vaqtni erkin o'zgaruvchi (argument) sifatida qaraladi va  $t$  bilan belgilanadi. Texnika masalalarini yechishda vaqtning o'lchov birligi 1 sekund deb qabul qilingan. Kinematikada uchraydigan chiziqli o'lchovlarni (harakatdagi nuqtaning koordinatalari, o'tgan yo'lning uzunligi va hokazo) xuddi texnik va xalqaro SI birliklar sistemasida, metrda o'lchanadi. Qattiq jism harakatini kuzatar ekanmiz, ko'pincha uning turli nuqtalari turlicha harakatlanishini ko'ramiz.

Masalan, to'g'ri rels bo'yicha harakatlanayotgan vagon g'ildiragining harakatini olsak, g'ildirakning markazi to'g'ri chiziqli harakatda bo'ladi. G'ildirak to'g'ridagi nuqta esa egri chiziq (sikloida) bo'yicha harakatlanadi. Jism nuqtalarining bir xil vaqtda o'tgan yo'li turli xil bo'ladi. Shu sababli jismning harakatini tekshirishni ayrim nuqtaning harakatini tekshirishdan, ya'ni nuqta kinematikasidan boshlash kerak.

Vaqtning o'tishi bilan nuqtaning fazoda qoldirgan iziga *trayektoriya* deyiladi. Nuqta trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda nuqtaning bunday harakatiga *to'g'ri chiziqli harakat*, aks holda *egri chiziqli harakat* deyiladi.

### 32-§. Nuqta kinematikasi. Nuqta harakatini aniqlash usullari

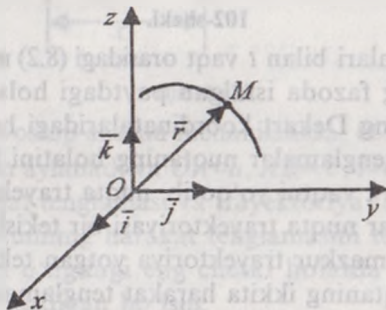
Agar istalgan  $t$  vaqt uchun nuqtaning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan holati (vaziyati) ma'lum bo'lsa, mazkur sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakat qonuni ma'lum bo'ladi. Kinematikada nuqtaning harakat qonuni uchta usulda aniqlanadi:

1. Vektor usuli.
2. Koordinata usuli.
3. Tabiiy usul.

1. **Vektor usuli:** Bu usulda  $M$  nuqtaning holati biror qo'zg'almas mar-kazdan  $\vec{r}(t)$  radius vektori bilan aniqlanadi (101-shakl). Vaqtning o'tishi bilan  $M$  nuqta harakatlanganda uning  $\vec{r}$ -radius vektori ma'lum qonun asosida o'zgaradi. Ya'ni, skalyar argument  $t$  ning vektorli funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (8.1)$$

Agar  $\vec{r}(t)$  funksiya ma'lum bo'lsa,  $t$  vaqtning har bir payti uchun  $M$  nuqtaning holati ma'lum bo'ladi.

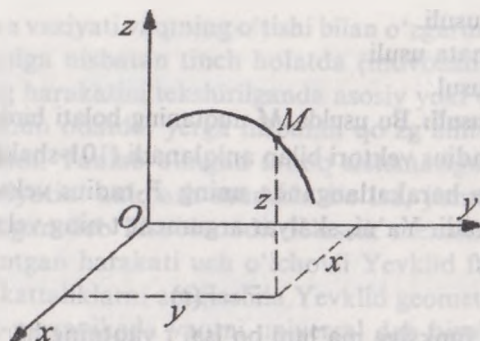


101-shakl.

Shu sababli, (8.1) tenglamani nuqtaning harakat tenglamasi, yoki harakat qonuni deyiladi.  $\vec{r} = \text{const}$  bo'lsa, nuqta tinch holatda bo'ladi. Nuqta harakatini vektor usulida aniqlash harakatni o'rganishni sod-dulashtiradi, shuning uchun bu usuldan kinematika va dinamikada keng foydalaniladi.

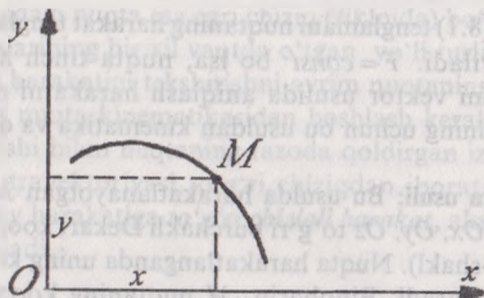
2. **Koordinata usuli:** Bu usulda harakatlanayotgan  $M$  nuqtaning ho-lati uning uchta  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari orqali aniqlanadi (102-shakl). Nuqta harakatlanganda uning koordinatlari vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Binobarin,  $M$  nuqtaning koordinatlari  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vaqtning bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanadigan funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$



102-shakl.

Nuqta koordinatalari bilan  $t$  vaqt orasidagi (8.2) munosabatlar berilgan bo'lsa,  $M$  nuqtaning fazoda istalgan paytdagi holati ma'lum bo'ladi. Shu sababli nuqtaning Dekart koordinatalaridagi harakat tenglamalari deb ataluvchi (8.2) tenglamalar nuqtaning holatini butunlay aniqlaydi, (8.2) tenglamalardan  $t$  vaqtini yo'qotib, nuqta trayektoriyasining tenglamasi aniqlanadi. Agar nuqta trayektoriyasi bir tekislikda yotsa, u holda  $Oxy$  tekisligi uchun mazkur trayektoriya yotgan tekislikni olamiz (103-shakl). Natijada nuqtaning ikkita harakat tenglamalariga ega bo'lamiz.



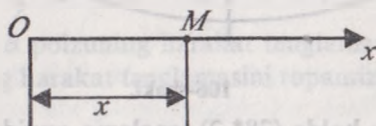
103-shakl.

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

(8.3) tenglamalarga *nuqtaning tekislikdagi harakat tenglamalari* deyiladi. Moddiy nuqta o'zining fazodagi harakati natijasida to'g'ri chiziqli yo'lni o'tsa, bunday harakat *to'g'ri chiziqli harakat* deyiladi.  $O$  nuqtani koordinatalar boshi desak, biror  $M$  nuqta harakatlanmasdan oldin  $O$  da yoki  $O$  dan ma'lum uzoqlikda bo'ladi (104-shakl). Nuqtaning to'g'ri chiziqli harakati bitta

$$x=x(t) \quad (8.4)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

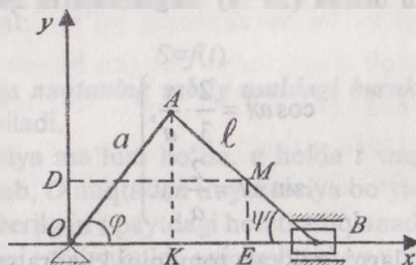


104-shakl.

**28\*-masala.** Krivoship-shatun mehanizmda,  $OA$  krivoship doimiy  $\omega$  burchak tezligi bilan aylanadi va  $OA=a$ ,  $AB=\ell$ ,  $\ell=a$ . Shatun o'rtasidagi  $M$  nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriya tenglamasini aniqlang. Shuningdek,  $B$  polzunning harakat tenglamasini toping. Harakat boshlanishida  $B$  polzun o'ngdagi eng chetki holatda bo'lsin. Koordinata o'qlari shaklda ko'rsatilgan bo'lsin.

**Yechish.**  $M$  nuqtadan koordinata o'qlariga  $MD$  va  $ME$  perpendikularlar tushiramiz. 105-shakldan (28\*.1)

$$x=OE=OK+KE=OA \cos \varphi + AM \cdot \cos \psi \quad (28*.1)$$

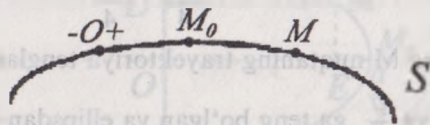


105-shakl.

$\ell=a$  bo'lgani uchun  $\varphi=\psi$  bo'ladi, u holda

$$x=a \cos \varphi + \frac{a}{2} \cos \varphi = \frac{3a}{2} \cos \varphi; \quad y = \frac{a}{2} \sin \varphi \quad (28*.2)$$

Agar  $M$  nuqtaning harakati  $O$  qo'zg'almas nuqtadan boshlanib  $\Delta t = t - t_0$  vaqt oralig'ida doimo musbat yo'nalishi bo'yicha bo'lsa,  $t$  vaqtda nuqtaning yoy koordinatasi bilan  $\Delta t$  vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l o'zaro teng.



107-shakl.

Agar  $t_0$  boshlang'ich vaqtda nuqta  $M_0$  holatda bo'lib,  $\Delta t$  vaqtdan keyin  $M$  holatni egallasa, u holda  $\Delta t$  oralig'ida nuqtaning bir tomonga harakatlanishi natijasida o'tilgan yo'l

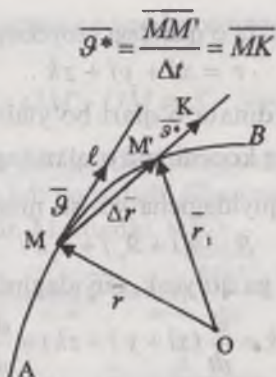
$$S = \int_{t_0}^t f'(t) dt$$

formula bilan aniqlanadi.

### 33-§. Nuqtaning tezligi

#### 1. Harakat qonuni vektor usulda berilganda nuqtaning tezligi

Nuqta tezligi vektor miqdor bo'lib, nuqta harakatining berilgan momentdagi tezligi va bu harakatning yo'nalishini harakterlaydi. Nuqta  $AB$  egri chiziqli trayektoriya chizgan bo'lsin,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  harakat tenglamasi. Harakatlanayotgan bu nuqta holatini ixtiyoriy olingan qo'zg'almas  $O$  nuqtadan o'tkazilgan, uning  $\vec{r}(t)$  radius vektori bilan aniqlanadi (108-shakl). Kichik vaqt  $\Delta t$  oralig'ida esa, ya'ni  $t + \Delta t$  momentda  $M'$  holatni olsin.  $M'$  nuqtaning radius vektorini  $\vec{r}_1$  bilan belgilaymiz.  $\overline{MM'}$  vektor nuqtaning  $\Delta t$  vaqtdagi ko'chishi deb ataladi.  $\overline{MM'}$  ko'chishni vaqt oralig'i  $\Delta t$  ga nisbatini ifodalovchi  $\overline{MK}$  vektorini o'rtacha tezlik deyiladi. Agar nuqtaning o'rtacha tezligini  $\vec{v}^*$  bilan belgilasak, u quyidagiga teng.



108-shakl.

Endi  $\Delta t$  ni nolga intiltirib boramiz, bunda  $M'$  nuqta  $M$  nuqtaga intiladi.  $\bar{g}^*$  vektor yo'nalishining limiti trayektoriyaning  $M$  nuqtasidagi urinma yo'nalishiga mos keladi, uning moduli esa,

$$\bar{g} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{g}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{MK} = \overline{Ml}.$$

Ammo  $\Delta OMM'$  uchburchakdan  $\bar{r}_1 = \bar{r} + \overline{MM'}$ ,  $\overline{MM'} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta \bar{r}$  olamiz. Bu yerda  $\Delta \bar{r}$  harakatlanayotgan nuqta radius vektorining  $\Delta t$

vaqtdagi o'zgarishidir. Shuning uchun  $\bar{g}^* = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$  va  $\bar{g} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ .

Demak,

$$\bar{g} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (8.6)$$

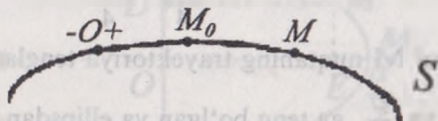
ya'ni, harakatlanayotgan nuqta tezligi bu nuqtaning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga teng.

## 2. Harakat qonuni koordinata va tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi

Nuqta harakati koordinat usulda berilgan bo'lsin:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Agar  $M$  nuqtaning harakati  $O$  qo'zg'almas nuqtadan boshlanib  $\Delta t = t - t_0$  vaqt oralig'ida doimo musbat yo'nalishi bo'yicha bo'lsa,  $t$  vaqtda nuqtaning yoy koordinatasi bilan  $\Delta t$  vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l o'zaro teng.



107-shakl.

Agar  $t_0$  boshlang'ich vaqtda nuqta  $M_0$  holatda bo'lib,  $\Delta t$  vaqtdan keyin  $M$  holatni egallasa, u holda  $\Delta t$  oralig'ida nuqtaning bir tomonga harakatlanishi natijasida o'tilgan yo'l

$$S = \int_{t_0}^t f'(t) dt$$

formula bilan aniqlanadi.

### 33-§. Nuqtaning tezligi

#### 1. Harakat qonuni vektor usulda berilganda nuqtaning tezligi

Nuqta tezligi vektor miqdor bo'lib, nuqta harakatining berilgan momentdagi tezligi va bu harakatning yo'nalishini harakterlaydi. Nuqta  $AB$  egri chiziqli trayektoriya chizgan bo'lsin,  $\vec{M} = \vec{r}(t)$  harakat tenglamasi. Harakatlanayotgan bu nuqta holatini ixtiyoriy olingan qo'zg'almas  $O$  nuqtadan o'tkazilgan, uning  $\vec{r}(t)$  radius vektori bilan aniqlanadi (108-shakl). Kichik vaqt  $\Delta t$  oralig'ida esa, ya'ni  $t + \Delta t$  momentda  $M'$  holatni olsin.  $M'$  nuqtaning radius vektorini  $\vec{r}'$  bilan belgilaymiz.  $\overline{MM'}$  vektor nuqtaning  $\Delta t$  vaqtdagi ko'chishi deb ataladi.  $\overline{MM'}$  ko'chishni vaqt oralig'i  $\Delta t$  ga nisbatini ifodalovchi  $\overline{MK}$  vektorini o'rtacha tezlik deyiladi. Agar nuqtaning o'rtacha tezligini  $\vec{g}^*$  bilan belgilasak, u quyidagiga teng.

Endi  $\Delta t$  ni nolga intiltirib boramiz, bunda  $M'$  nuqta  $M$  nuqtaga intiladi.  $\bar{g}^*$  vektor yo'nalishining limiti trayektoriyaning  $M$  nuqtasidagi urinma yo'nalishiga mos keladi, uning moduli esa,

Ammo  $\Delta OMM'$  uchburchakdan  $\vec{r}_1 = \vec{r} + \overline{MM'}$ ,  $\overline{MM'} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$  olinadi. Bu yerda  $\Delta r$  harakatlanayotgan nuqta radius vektorining  $\Delta t$

Demak.

ya'ni, harakatlanayotgan nuqta tezligi bu nuqtaning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga teng.

Nuqta harakati koordinat usulda berilgan bo'lsin:

131

$\vec{r}$  radius vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yozish mumkin:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8.8)$$

Bunda  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlardir. Tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari  $\mathcal{G}_x$ ,  $\mathcal{G}_y$ ,  $\mathcal{G}_z$  bo'lsin, u holda  $\vec{\mathcal{G}}$  ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_x\vec{i} + \mathcal{G}_y\vec{j} + \mathcal{G}_z\vec{k} \quad (8.9)$$

(8.8) va (8.9) ni (8.6) ga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathcal{G}_x\vec{i} + \mathcal{G}_y\vec{j} + \mathcal{G}_z\vec{k} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Ifoda ayniyat bo'lgani uchun birlik vektorlar oldidagi koeffitsientlar tenglik bo'lishi kerak:

$$\mathcal{G}_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \mathcal{G}_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \mathcal{G}_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Demak, tezlik vektorining koordinata o'qidagi proyeksiyasi harakatdagi nuqta koordinatasidan vaqtga nisbatan olingan hosilaga teng bo'lar ekan.

Vektorning proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishini topish mumkin. U proyeksiyalarga qurilgan parallelopiped diagonaliga teng, shunga ko'ra:

$$\mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2 + \mathcal{G}_z^2}.$$

Tezlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari uchun quyidagi formulalarni yozamiz:

$$\cos(\vec{\mathcal{G}}, \vec{i}) = \frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\vec{\mathcal{G}}, \vec{j}) = \frac{\mathcal{G}_y}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\vec{\mathcal{G}}, \vec{k}) = \frac{\mathcal{G}_z}{\mathcal{G}}.$$

Harakat tekislikda bo'lsa,  $Ox$ ,  $Oy$  o'qlarni harakat tekisligida olamiz:

$$\mathcal{G}_x = \frac{dx}{dt}; \quad \mathcal{G}_y = \frac{dy}{dt}; \quad \mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2},$$

$$\cos(\vec{\mathcal{G}}, \vec{i}) = \frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\vec{\mathcal{G}}, \vec{j}) = \frac{\mathcal{G}_y}{\mathcal{G}}.$$

### 3. Harakat qonuni tabiiy usulda berilganda nuqta tezligi

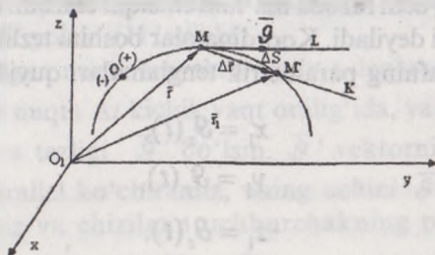
Nuqta berilgan trayektoriya bo'ylab  $S=f(t)$  qonuniga muvofiq harakatlanayotgan bo'lsin. Nuqta  $t$  vaqtida  $M$  vaziyatda va  $t+\Delta t$  vaqtida esa

ho' ladi,

$$MM' = OM' - OM = S' - S = \Delta S$$

Trayektoriyasi ma'lum bo'lgandagi nuqtaning istalgan momentdagi tezlik vektori urinma bo'ylab yo'naladi. Shuning uchun bizga tezlikning modulini topishgina qoladi. Ma'lumki, tezlik

$$\overline{\mathcal{G}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \overline{\mathcal{G}^*} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta}.$$



109-shakl.

### Shakl almashtirish kiritamiz

$$\bar{g} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau} \text{ bo'lgani uchun tezlik moduli quyidagicha bo'ladi:}$$

$$\mathcal{G} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta S}{N} = \frac{ds}{dt} = f^*(t). \quad (8.11)$$

Demak:  $\vec{g} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$  bo'lad. Harakat qonuni tabiiy usulda berilganda tezlik miqdori (8.11) formulada aniqlanadi, yo'nalishi trayektoriyaga urunma bo'yicha, ya'ni  $\vec{\tau}$  bo'ylab yo'naladi.

Agarda  $\frac{ds}{dt} > 0$  bo'lsa,  $S$  o'sib boradi.

$\frac{ds}{dt} < 0$  bo'lsa harakat teskari sodir bo'ladi, keyingi holda tezlik moduli

uchun  $\frac{ds}{dt}$  ning absolut qiymati olinadi, ya'ni  $g = \left| \frac{ds}{dt} \right|$ . Agar

$\frac{ds}{dt} = g = \text{const}$  bo'lsa, harakat tekis bo'ladi ya'ni  $S = S_0 + gt$ , agar  $t=0$  da  $S_0=0$  bo'lsa,  $S = gt$  bo'ladi.

### 34-§. Tezlik godografi

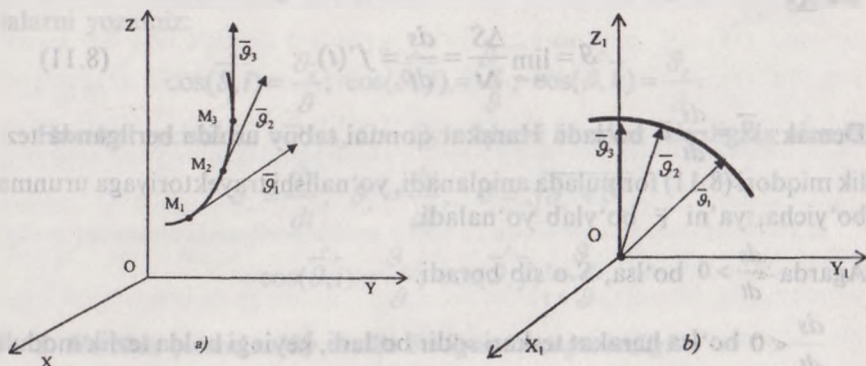
Umumiy holda  $\vec{g}$  tezlik vektori skalyar argument bo'lgan  $t$  vaqtning funksiyasidir, ya'ni  $\vec{g} = \vec{g}(t)$ . Vektorning boshi uchun  $O$  nuqta olsak, vaqt o'tishi bilan uning uchi fazoda ma'lum chiziqni chizadi. Bu chiziq tezlik vektorining godografi deyiladi. Koordinatalar boshini tezlik vektorining boshida olsak, godografning parametrik tenglamalari quyidagiga teng bo'ladi:

$$x_1 = g_x(t),$$

$$y_1 = g_y(t),$$

$$z_1 = g_z(t).$$

Koordinatalar o'qlari uchun  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  lar qabul qilinadi. Tezlik godografini grafik usulda ham qurish mumkin. Buning uchun nuqtaning bir qancha bir-biriga yaqin holatlaridagi tezliklarini aniqlab (110-a shakl), bir nuqtaga (qutbga) o'z yo'nalishi bilan ko'chiriladi, bu tezliklar uchlarini tutashtirish bilan godograf grafigini chizamiz (110-b shakl).



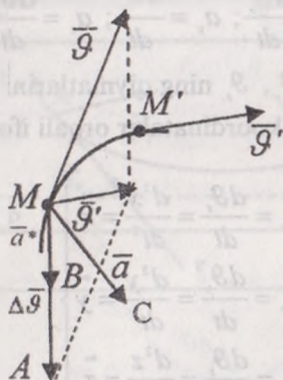
110-shakl.

2. Moddiy nuqtaning o'zgarmas tezlik vektori doimo biror tekislikka parallel bo'lsa, godograf aylana bo'ladi.

### 1. Harakat gonuni vektor usulda berilganda nuqta tezlanishi

Harakatlanayotgan nuqta trayektoriyada  $t$  daqiqada  $M$  holatda, tezligi  $\vec{g}$  bo'lsin, bu nuqta  $\Delta t$  kichik vaqt oralig'ida, ya'ni  $t + \Delta t$  daqiqada  $M'$  holatni olsin va tezligi  $\vec{g}'$  bo'lsin,  $\vec{g}'$  vektorni  $M'$  nuqtadan  $M$  nuqtaga o'ziga parallel ko'chiramiz, uning uchini  $\vec{g}'$  vektorning uchi bilan tutashtiramiz va chizilgan uchburchakning parallelogrammga aylindiramiz. U holda  $\overline{MA} = \vec{g}' - \vec{g} = \Delta \vec{g}$  bo'lgani uchun  $\overline{MA}$  vektor  $\Delta t$  vaqtda tezlik o'zgarishini ifodalaydi. Endi  $\Delta t$  vaqtga mos keluvchi  $\Delta \vec{g}$  vektorni  $\Delta t$  ga nisbatiga teng bo'lgan  $\overline{MB}$  vektorni yasaymiz. Bu vektor nuqtaning  $\Delta t$  vaqtdagi o'rtacha tezlanishi deyiladi.

$$\text{Ya'ni: } \overline{a^*} = \frac{\Delta \bar{g}}{\Delta t}.$$



111-shakl.

Uning  $\Delta t$  nolga intilgandagi daqiqada  $M$  nuqtaning haqiqiy tezlanishi vektorini ifodalaydi:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{MB} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{g}}{\Delta t} = \frac{d\bar{g}}{dt}, \\ \bar{a} &= \frac{d\bar{g}}{dt}.\end{aligned}\quad (8.12)$$

Bu vektorni chizmada  $\overline{MC}$  vektor bilan ifodalaymiz.  $\overline{MC}$  trayektoriya tekisligida yotadi.

## 2. Harakat qonuni koordinata usulda berilgandagi nuqta tezlanishi

Tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari  $a_x, a_y, a_z$  bo'lsin.  $\bar{a}$  tezlanishni proyeksiyalari orqali ifodalaymiz:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad (8.13)$$

(8.9) va (8.13) formulalarni (8.12) ga qo'ysak, quyidagi ifodalar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} &= \frac{d}{dt} (g_x \bar{i} + g_y \bar{j} + g_z \bar{k}) = \frac{dg_x}{dt} \bar{i} + \frac{dg_y}{dt} \bar{j} + \frac{dg_z}{dt} \bar{k}, \\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} &= \text{const}.\end{aligned}\quad (8.14)$$

Yuqoridagi ifoda ayniyat bo'lgani uchun  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  birlik vektorning oldidagi koeffitsientlar tegishli bir-biriga teng bo'lishi kerak:

$$a_x = \frac{dg_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dg_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dg_z}{dt}.\quad (8.15)$$

Bu formulalarga  $g_x, g_y, g_z$  ning qiymatlarini (8.10) keltirib qo'ysak, tezlanish proyeksiyalarini koordinatalar orqali ifodalagan bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned}a_x &= \frac{dg_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dg_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{dg_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}\end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Demak, tezlanish vektorining koordinata o'qidagi proyeksiyalari, tezlik vektorining tegishli koordinata o'qidagi proyeksiyasining vaqtga nisbatan birinchi tartibli hosilasiga yoki harakatlanayotgan nuqta koordinatasining ikkinchi tartibli hosilasiga teng bo'lar ekan. Tezlanishning moduli va uning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha yoziladi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos(\vec{a}, i) = \frac{a_x}{a}$$

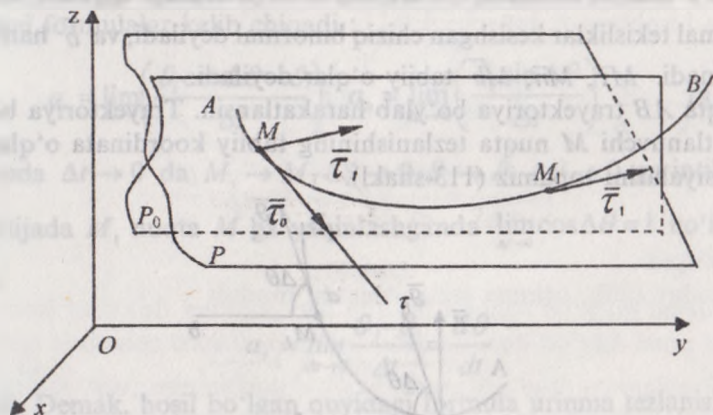
$$\cos(\vec{a}, j) = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos(\vec{a}, k) = \frac{a_z}{a}$$

### 3. Harakat qonuni tabiiy usulda berilgandagi nuqta tezlanishi

Nuqtaning harakat tenglamasi tabiiy usulda berilgan bo'lsa, (8.5) nuqta tezlanish vektorini uning tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlash ancha qulay bo'ladi.

$M$  nuqta bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlansin (112-shakl).



112-shakl.

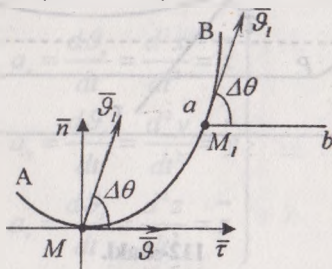
Egri chiziqda bir-biriga yaqin ikkita  $M$  va  $M_1$  nuqtalarni olib, har biri orqali nuqtaning harakati yo'nalishida  $\vec{M\tau}$  va  $\vec{M_1\tau_1}$  urinmalarini o'tkazamiz. Egri chiziq bir tekislikda yotmagani uchun ikki  $\vec{M\tau}$  va  $\vec{M_1\tau_1}$  urinmalar orqali bitta tekislik o'tkazib bo'lmaydi.

$M$  nuqtadan  $\vec{M_1\tau_1}$  ga parallel  $\vec{M\tau_1}$  chiziqni o'tkazamiz  $\vec{M\tau_1}$  yotgan tekislikni  $P_0$  bilan belgilaymiz.  $M_1$  nuqta  $M$  ga intilganda  $P_0$  tekislikning atrofida aylanib, holati o'zgarib boradi.  $M_1$  nuqta  $M$  ga intilganda  $P_0$  ning egallagan limiti holatini  $P$  bilan belgilaymiz.

$P$  tekislikda  $\vec{M\tau}$  bilan egri chiziqning juda kichik elementi ham joylashadi. Shunday tekislik egri chiziqning egrilik yoki yopishma tekisligini ifodalaydi. Agar egri chiziq bir tekislikda yotsa, shu tekislik egrilik tekisligi bo'ladi. Egri chiziq (trayektoriya)ning qaralayotgan nuqtasidan o'tgan urinma va shu nuqtaga juda yaqin bo'lgan nuqtalar orqali o'tgan tekislik yopishma tekislik deyiladi. Tezlanish vektorining yopishma tekislikda yotishi uning ta'rifidan ko'rinib turibdi.  $\Delta\vartheta$  tezlik orttirmasi trayektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'nalgani uchun, tezlanish vektori ham shu tomonga qarab yo'naladi.

$M$  nuqtaga  $\vec{\tau}$  urinmaga perpendikular ravishda o'tkazilgan tekislik normal tekislik deyiladi. Yopishma va normal tekisliklarning  $Mn$  kesishish chizig'i  $M$  nuqtadagi bosh normalni ifodalaydi. Yopishma va normal tekisliklar o'zaro perpendikular bo'lib, ularga perpendikular yana bir tekislik o'tkazish mumkin, bu tekislik urinma tekislik deyiladi. Urinma va normal tekisliklar kesishgan chiziq binormal deyiladi, va  $\vec{b}$  harfi bilan ifodalanadi.  $\vec{M\tau}$ ,  $\vec{Mn}$ ,  $\vec{Mb}$  tabiiy o'qlar deyiladi.

Nuqta  $AB$  trayektoriya bo'ylab harakatlansin. Trayektoriya bo'ylab harakatlanuvchi  $M$  nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topamiz (113-shakl).



113-shakl.

Buning uchun  $M$  nuqtadan trayektoriyaning musbat yo'nalishi bo'ylab  $M\tau$  urinma va trayektoriyani botiq tomoniga qarab  $\overline{Mn}$  bosh normal o'tkazamiz. Bu ikki urinma va bosh normal trayektoriyaning  $M$  nuqtasidan o'tgan yopishma tekislikda yotadi. Egri chiziqli harakatda nuqta tezlanishi yopishma tekislikda yotishi bizga ma'lum. Endi biz  $\bar{a}$  tezlanish vektorining urinma va bosh normaldagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Aytaylik  $t$  vaqtda nuqta  $M$  holatda bo'lib, uning tezlik vektori  $\bar{g}$  tezlik  $t + \Delta t$  vaqt o'tgandan keyin  $M_1$  holatga ko'chib, tezligi  $\bar{g}_1$  bo'lsin.

Nuqtaning tezlanish vektorini aniqlaymiz:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}}{\Delta t}. \quad (8.17)$$

(8.17) ni  $\overline{M\tau}$ , va  $\overline{Mn}$  va  $\overline{Mb}$  tabiiy o'qlarga proyeksiyalaymiz.

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g_{1\tau} - g_\tau}{\Delta t}; \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g_{1n} - g_n}{\Delta t}; \quad a_b = 0. \quad (8.18)$$

$M_1$  nuqtadan  $M\tau$  ga parallel  $ab$  chiziq o'tkazamiz  $\bar{g}_1$  tezlik vektori bilan  $ab$  orasidagi burchakni  $\Delta\theta$  bilan belgilaymiz.

$$g_{1\tau} = g_1 \cdot \cos \Delta\theta; \quad g_{1n} = g_1 \cdot \sin \Delta\theta; \quad g_\tau = g; \quad g_n = 0 \text{ ga teng.}$$

Bu yerda  $\bar{g}$  va  $\bar{g}_1$   $M$  nuqtaning  $t$  va  $t + \Delta t$  paytdagi tezliklarining miqdorlaridir. Olingan proyeksiyalarni yuqoridagi tengliklarga keltirib qo'ysak quyidagi formulalar kelib chiqadi :

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{g_1 \cos \Delta\theta - g}{\Delta t} \right); \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{g_1 \sin \Delta\theta}{\Delta t} \right). \quad (8.19)$$

Bunda  $\Delta t \rightarrow 0$  da  $M_1 \rightarrow M$ ,  $\Delta S \rightarrow 0$ ,  $g_1 \rightarrow g$ ,  $\Delta\theta \rightarrow 0$  ga intiladi.

Natijada  $M_1$  nuqta  $M$  ga yaqinlashganda  $\lim \cos \Delta\theta = 1$  bo'ladi, bu holda

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g - g}{\Delta t} = \frac{dg}{dt}$$

bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan quyidagi formula urinma tezlanishi deyiladi.

$$a_r = \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (8.20)$$

Urinmalarining orasidagi burchakni  $\Delta\theta$  bilan va  $MM_1 = \Delta S$  bilan belgilaymiz,  $\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$  nisbatga *egri chiziqli (trayektoriya)ning o'rtacha egriligi* deyiladi. Buning  $\Delta S \rightarrow 0$  dagi limiti

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} \quad (8.21)$$

ga egri chiziqli  $M$  nuqtasidagi egriligi deyiladi. Egrilikning teskari qiymatiga egri chiziqli (trayektoriya)ning kuzatilgan  $\bar{M}$  nuqtasidagi egrilik radiusi deyiladi va uni

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\theta}$$

deb belgilaymiz. Endi  $a_n$  ni topamiz. Buning uchun (8.19) ni o'ng tomondagi ifoda kelib chiqadi: surat va maxrajini  $\Delta\theta \cdot \Delta S$  ga ko'paytirsak quyidagi

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\vartheta_1 \cdot \sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right) \quad (8.22)$$

$\Delta t$  nolga intilganda qavs ichidagi har bir ko'paytmaning limiti quyidagicha hisoblanadi  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$ .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \vartheta; \quad \bar{\vartheta}_1 \text{ esa } \bar{\vartheta} \text{ ga intiladi.}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} = k = \frac{1}{\rho} \text{ va } a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, urinma tezlanishining moduli

$$a_r = \frac{d\vartheta}{dt} \text{ yoki } a_r = \frac{d^2 S}{dt^2}, \quad (8.23)$$

normal tezlanishining moduli esa quyidagi formuladan topiladi.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (8.24)$$

Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning urinma tezlanishining moduli tezlik modulidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki nuqtaning yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo'ladi. Hosilaning ishorasi urinma tezlanishining trayektoriyaning

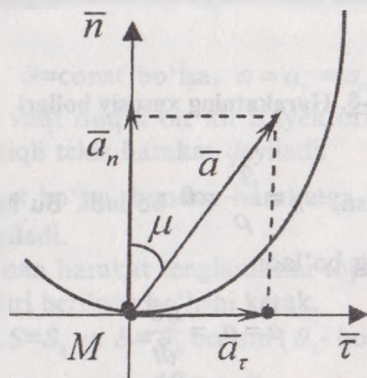
quysi tomoniga yo'nalishini ko'rsatadi. Masalan: agar  $\frac{dv}{dt} > 0$  bo'lsa,

$a_n$  nuqtaning tezligi bilan bir yo'nalishda bo'ladi. Bu holda harakat

tezlanuvchan egri chiziqli harakat bo'ladi. Agar  $\frac{dv}{dt} < 0$  bo'lsa,  $a_n$  nuqta tezligiga teskari yo'naladi. Harakat sekinlanuvchan egri chiziqli harakat bo'ladi.

Normal tezlanishning moduli harakati tekshirilayotgan nuqta tezligi kvadrati, egri chiziqning shu nuqtadagi  $\rho$  egrilik radiusiga nisbati-

ga teng  $\frac{v^2}{\rho}$ .



114-shakl.

Normal tezlanish hamma vaqt musbat miqdor bo'lgani uchun kuza-tilayotgan nuqtadan trayektoriyaning bosh normali bo'ylab botiq tomoni-ga yo'naladi. Agar urinmaning birlik vektorini  $\vec{\tau}$ , bosh normalini  $\vec{n}_0$  bilan belgilasak, urinma va normal tezlanishlarning vektorli ifodasi

$$\bar{a}_r = \frac{d\vartheta}{dt} \bar{\tau} \quad \bar{a}_n = \frac{\vartheta^2}{\rho} \bar{n}$$

ko'rinishda yoziladi. To'la tezlanishning vektor ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_n = \frac{d\vartheta}{dt} \bar{\tau} + \frac{\vartheta^2}{\rho} \bar{n}$$

Bu ikki  $\bar{a}_r$  bilan  $\bar{a}_n$  o'zaro tik yo'nalganidan to'la tezlanishning moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta^2}{\rho}\right)^2}$$

Yo'nalishi  $\text{tg} \mu = \frac{|a_r|}{a_n}$  formuladan topiladi (114-shakl).

Nuqtaning harakat tenglamasi tabiiy usulda berilsa, uning tezlanishi vektori urinma va normal tezlanish vektorlarining geometrik yig'indisiga teng.

### 36-§. Harakatning xususiy hollari

1. Agar  $\rho = \infty$  bo'lsa,  $a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho} = 0$  bo'ladi. Bu holda to'la tezlanish urinma tezlanishga teng bo'ladi:

$$a = a_r = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Demak, nuqtaning urinma tezlanishi uning tezlik modulining vaqtga qarab o'zgarishini ko'rsatadi. Harakat to'g'ri chiziqli bo'lib, harakat tezligi faqat miqdor jihatdan o'zgaradi.

2. Agar  $\vartheta = \text{const}$  bo'lsa,  $a_r = \frac{d\vartheta}{dt} = 0$  bo'lib, tezlanish faqat normal tezlanishga teng bo'ladi.

$a = a_n = \frac{g^2}{\rho}$ , bunda harakat egri chiziqli bo'lib, tezlanish vektori

egri chiziqning botiq tomoniga qarab bosh normal bo'ylab yo'naladi. Bu tezlanish vaqt o'tishi bilan nuqta tezligining yo'nalishi o'zgarishidan hosil bo'ladi. Agar  $g = \text{const}$  bo'lsa, bunday harakat teng o'lchovli **egri chiziqli harakat** deyiladi. Bu harakatning tenglamasini topamiz:

$$g = \frac{ds}{dt} \text{ yoki } ds = g dt.$$

Aytaylik  $t=0$  da nuqta koordinata boshidan  $S_0$  masofada joylashgan bo'lsin.

Yuqoridagi tenglikning ikki tomonidan berilgan boshlang'ich shartlarga ko'ra aniq integral olamiz:

$$\int_{S_0}^s ds = \int_0^t g dt \text{ yoki } g = \text{const bo'lganidan } S = S_0 + g_0 t \text{ kelib chiqadi.}$$

Bu tenglama **teng o'lchovli tekis egri chiziqli harakat tenglamasi** deyiladi.

3. Agar  $\rho = \infty$ ,  $g = \text{const}$  bo'lsa,  $a = a_r = a_n = 0$  bo'ladi. Harakat davomida hamma vaqt nuqta bir xil trayektoriya chizadi va bunday harakat to'g'ri chiziqli tekis harakat deyiladi.

4. Agar  $a_r = \text{const}$  bo'lsa, bunday harakatga **tekis o'zgaruvchan egri chiziqli harakat** deyiladi.

Tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini topish uchun harakatining boshlang'ich shartlari berilgan bo'lishi kerak.

Aytaylik  $t=0$  da  $S=S_0$  va  $g=g_0$  bo'lsin ( $g_0$  - boshlang'ich tezlik)

$$dg = a_r dt.$$

Berilgan misolda  $a_r = \text{const}$  bo'lganidan yuqoridagi tenglikning ikki tomonini integrallasak quyidagi ifodalar kelib chiqadi.

$$\int_{g_0}^g dg = \int_0^t a_r dt \text{ yoki } g = g_0 + a_r t \quad (8.25)$$

Bu yerdagi  $\mathcal{S}$  ning o'rniga  $\frac{ds}{dt}$  ni qo'yib, quyidagilarni olamiz:

$$\frac{ds}{dt} = \mathcal{S}_0 + a_t t \quad \text{yoki} \quad ds = \mathcal{S}_0 dt + a_t dt.$$

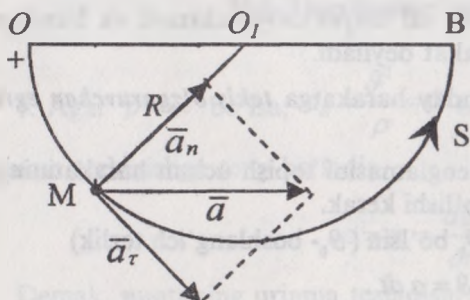
Bu tenglamaning ikkala tomonini yana integrallab, tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini topamiz:

$$S = S_0 + \mathcal{S}_0 t + a_t \frac{t^2}{2}. \quad (8.26)$$

Tekis o'zgaruvchan egri chiziqli harakatning istalgan paytdagi tezligi (8.25) formuladan aniqlanadi. Tekis o'zgaruvchan to'g'ri chiziqli harakat tenglamasi ham xuddi (8.26) formula kabi topiladi. Faqat yoy koordinatasi  $S$  o'rnida nuqtaning to'g'ri chiziqli koordinatasi  $Ox$  qatnashadi.

### 37-§. Nuqta kinematikasiga oid masalalar

**29\*-masala.** Poyezdning boshlang'ich tezligi 15 m/s bo'lib, birinchi 30 s da u 600 m yo'l bosadi. Poyezd radiusi  $R=1$  km bo'lgan aylanma yo'lda tekis o'zgaruvchan harakat qiladi deb hisoblab, uning 30 s oxiridagi tezligi va tezlanishini aniqlang (115-shakl).



115-shakl.

**Yechish.** Tekis o'zgaruvchan harakat tenglamalarini (8\*.25) va (8\*.26) larni yozamiz:

$$S = S_0 + \mathcal{S}_0 t + \frac{a_t t^2}{2},$$

$$g = g_0 + a_r t.$$

Masala shartiga asosan  $t=0$  da  $S_0=0$ . (8.26) tenglamadan

$$S = S_0 t + \frac{a_r t^2}{2}, \quad (29^*.1)$$

(29\*.1) tenglamadan  $a_r$  - urinma tezlanishni hisoblaymiz:

$$600 = 450 + 450 a_r,$$

$$a_r = 1/3 \text{ m/s}^2. \quad (29^*.2)$$

(8.25) tenglamadan:

$$g = 15 + \frac{30}{3} = 25 \text{ m/s}.$$

Normal tezlanish esa quyidagicha aniqlanadi:

$$a_n = \frac{g^2}{\rho}; \quad \rho = R.$$

$$a_n = \frac{g^2}{R} = \frac{625}{1000} = 0,625 \text{ m/s}^2. \quad (29^*.3)$$

(29\*.2) va (29\*.3) tenglamalarni hisobga olgan holda to'la tezlanishni aniqlaymiz:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2} = 0,708 \text{ m/s}^2.$$

**30\*-masala.**  $M$  nuqtaning harakatlanish qonuni, trayektoriya tenglamasini toping, hamda  $t=1$  sekundda nuqta holati va berilgan paytga mos keladigan nuqta tezlik va tezlanishini toping.

$$x = 6 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) - 2;$$

$$y = 6 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 3; \quad t = 1 \text{ sek.}$$

**Yechish.** Harakat trayektoriyasi tenglamasini topamiz. Buning uchun berilgan harakat tenglamalaridan vaqt  $t$  ni yo'qotamiz. Harakat tenglamalaridan quyidagilarni olamiz:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = \frac{x+2}{6}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = \frac{y-3}{6}. \quad (30^*.1)$$

(30\*.1) tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = \frac{(x+2)^2}{6^2}; \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = \frac{(y-3)^2}{6^2}$$

qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{(x+2)^2}{6^2} + \frac{(y-3)^2}{6^2} = 1 \text{ yoki } (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36. \quad (30^*.2)$$

(30\*.2) tenglamadan ko'rinadiki, trayektoriya tenglamasi radiusi  $R=6$  sm bo'lgan va markazi  $O_1(-2, 3)$  bo'lgan aylanadan iborat.

Traektoriyani shaklda ko'rsatamiz. Nuqtaning boshlang'ich va  $t=t_1=1$  sek bo'lgan paytdagi holatini aniqlaymiz:

$t=0$  sek da:

$$x_0 = -2 \text{ m}, \quad y_0 = 9 \text{ m}.$$

$t_1=1$  sek da:

$$x_1 = 6 \sin \frac{\pi}{6} - 2 = 3 - 2 = 1 \text{ m}; \quad y_1 = 6 \cos \frac{\pi}{3} + 3 = 8,16 \text{ m}$$

Tezlik vektori koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 6 \sin \frac{\pi}{6} t^2 - 2 \right) = 2\pi t \cdot \cos \frac{\pi}{6} t^2, \\ g_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 6 \cos \frac{\pi}{6} t^2 + 3 \right) = -2\pi t \cdot \sin \frac{\pi}{6} t^2 \end{aligned} \quad (30^*.3)$$

tezlik vektorining miqdori quyidagicha hisoblanadi:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{\left( 2\pi t \cdot \cos \frac{\pi}{6} t^2 \right)^2 + \left( -2\pi t \cdot \sin \frac{\pi}{6} t^2 \right)^2} = 2\pi t \text{ m/sek}; \quad (30^*.4)$$

$g = 2\pi t \text{ m/sek}; \quad t = 1 \text{ sek. da: } (30^*.3) \text{ va } (30^*.4) \text{ tenglamadan:}$

$$g_x = 2\pi \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3} \approx 5,44 \text{ m/sek};$$

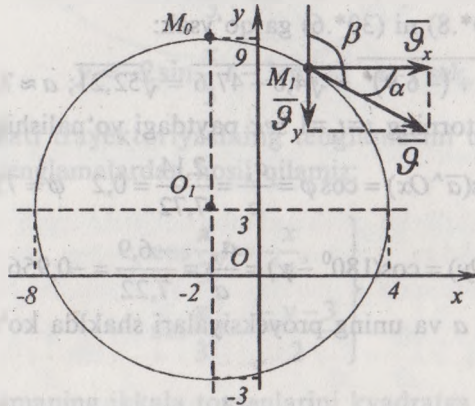
$$g_y = -2\pi \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -2\pi \frac{1}{2} = -\pi = -3,14 \text{ m/sek};$$

$$g = 6,28 \text{ m/sek.}$$

Tezlik vektorining  $t=1$  sek dagi yo'nalishini aniqlaymiz:

$$\cos(\vec{g} \wedge Ox) = \cos \alpha = \frac{g_x}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86; \alpha = 30^\circ,$$

$$\cos(\vec{g} \wedge Oy) = \cos \beta = \frac{g_y}{g} = -\frac{1}{2} = -0,5; \beta = 120^\circ.$$



116-shakl.

Tezlik vektori va uning proyeksiyalarini shaklda ko'rsatamiz (116-shakl). Tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dg_x}{dt} = 2\pi \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} t^2 - t \cdot \frac{2\pi t}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} t^2 \right) = 2\pi \left( \cos \frac{\pi}{6} t^2 - t \cdot \frac{\pi t}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} t^2 \right), \\ a_y &= \frac{dg_y}{dt} = -2\pi \cdot \left( \sin \frac{\pi}{6} t^2 - t \cdot \frac{\pi t}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} t^2 \right). \end{aligned} \right\} (30^* .5)$$

Tezlanish vektorining miqdori

$$a_r = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad (30^* .6)$$

$$\begin{aligned} t=1 \text{ sek da } a_r &= 2\pi \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2\pi \cdot 0,34 = 2,14 \text{ m/sek}^2. \end{aligned}$$

$$a_x = 2,14 \text{ m/sek}^2; \quad (30^*.7)$$

$$a_y = -2\pi \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}\right) = -2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= -2\pi \cdot 1,1 = -6,9 \text{ m/sek}^2;$$

$$a_y = -6,9 \text{ m/sek}^2; \quad (30^*.8)$$

(30^\*.7) va (30^\*.8) ni (30^\*.6) ga qo'ysak:

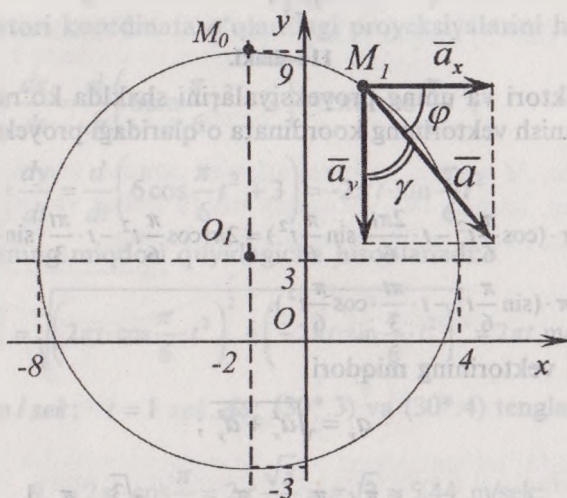
$$a = \sqrt{(2,14)^2 + (-6,9)^2} = \sqrt{4,6 + 47,6} = \sqrt{52,21}; \quad a \approx 7,22 \text{ m/sek}^2.$$

Tezlanish vektorining  $t=t_1=1 \text{ sek}$  paytdagi yo'nalishini aniqlaymiz:

$$\cos(\bar{a} \wedge Ox) = \cos \varphi = \frac{a_x}{a} = \frac{2,14}{7,72} = 0,2 \quad \varphi = 73^0;$$

$$\cos(\bar{a} \wedge Oy) = \cos(180^0 - \gamma) = \frac{a_y}{a} = \frac{-6,9}{7,22} = -0,956 \quad \gamma = 17^0$$

tezlanish vektori  $a$  va uning proyeksiyalari shaklda ko'rsatilgan (117-shakl).



117-shakl.

11\*-masala. Agar nuqtaning harakat tenglamalari Dekart koordinatalarida berilgan bo'lsa, nuqta trayektoriyasining tenglamasi, tezlik va tezlanishini toping. Bundan tashqari, bu nuqtaning vaziyatini aniqlab,  $t_1$  vaqt uchun tezlik  $\mathcal{Q}$  va tezlanish  $a$  hisoblansin. Bu yerda  $x, y$  m hisobida,  $t$  sek hisobida berilgan:

$$x = -4 \cos \frac{\pi}{3} t \text{ m,}$$

$$y = -2 \sin \frac{\pi}{3} t - 3 \text{ m,} \quad t = 1 \text{ sek.}$$

Nuqta harakati trayektoriyasining tenglamasini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamalardan hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} t &= -\frac{x}{4}, \\ \sin \frac{\pi}{3} t &= \frac{-y-3}{2} \end{aligned} \right\} \quad (31*.1)$$

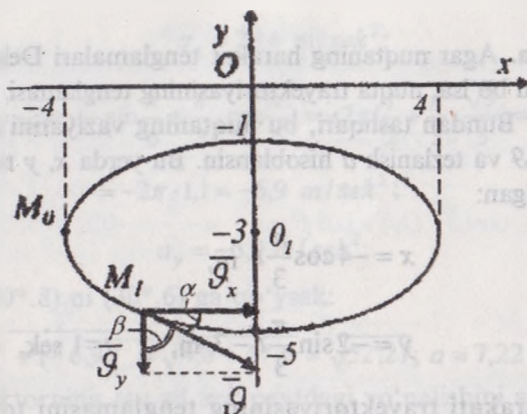
(31\*.1) tenglamaning ikkala tomonlarini kvadratga ko'taramiz.

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{3} t &= \frac{x^2}{4^2}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{3} t &= \frac{(y+3)^2}{2^2} \end{aligned} \right\} \quad (31*.2)$$

(31\*.2) tenglamani qo'shib, quyidagini olamiz:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1. \quad (31*.3)$$

Bu (31\*.3) yarim o'qlari 4 va 2 sm hamda markazi (0,-3) nuqtada bo'lgan ellips tenglamasidir (118-shakl). Trayektoriyani chizamiz, avval koordinata o'qlarini o'tkazamiz.



118-shakl.

Nuqtaning holatlarini quyidagi momentlarda topib olamiz:

$t=0$  da  $x_0=-4$  m,  $y_0=-3$  m;  $t_1=1$  s da,  $x_1=-2$  m,  $y_1=-4,72$  m.

Tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini hisoblaymiz:

$$g_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \cos \frac{\pi}{3} t) = \frac{4\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} t,$$

$$g_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-2 \sin \frac{\pi}{3} t - 2) = -\frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} t.$$

Tezlikning miqdorini quyidagi formuladan topamiz:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} t\right)^2 + \left(-\frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} t\right)^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{4 \sin^2 \frac{\pi}{3} t + \cos^2 \frac{\pi}{3} t} = \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}, \quad (31^{*}.4)$$

$t=1$  sek da

$$g_x = \frac{4\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad g_x = 3,6 \text{ m/sek};$$

$$g_y = -\frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}; \quad g_y = -1,05 \text{ m/sek};$$

(31\*.4) dan:

$$g = \frac{2\pi}{3} \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\pi}{3} \sqrt{13}; \quad g = 3,77 \text{ m/sek.}$$

Tezliklarning yo'nalishini aniqlaymiz: (118-shakl)

$$\cos(\vec{g} \wedge Ox) = \cos \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \approx 0,961; \quad \alpha = 16^\circ,$$

$$\cos(\vec{g} \wedge Oy) = \cos(180 - \beta) = -\frac{1}{\sqrt{13}} \approx -0,28; \quad \beta = 74$$

Tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dg_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{4\pi}{3} \sin \left( \frac{\pi}{3} t \right) \right) = \frac{4\pi^2}{9} \cos \left( \frac{\pi}{3} t \right); \\ a_y &= \frac{dg_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{2\pi}{3} \cos \left( \frac{\pi}{3} t \right) \right) = \frac{2\pi^2}{9} \sin \left( \frac{\pi}{3} t \right). \end{aligned} \quad (31*.5)$$

Tezlanish vektorining miqdori:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{9} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{3} t + \left( \frac{2\pi^2}{9} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{3} t} = \frac{2\pi^2}{9} \cdot \\ &\cdot \sqrt{4 \cos^2 \frac{2\pi}{3} t + \sin^2 \frac{2\pi}{3} t} = \frac{2\pi^2}{9} \sqrt{1 + 9 \cos^2 \frac{2\pi}{3} t} \end{aligned}$$

$t=1$  sek da:

$$a_x = \frac{4\pi^2}{9} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi^2}{9} \approx 2,18 \text{ m/sek}^2; \quad (31*.6)$$

$$a_y = \frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{9} \approx 1,87 \text{ m/sek}^2; \quad (31*.7)$$

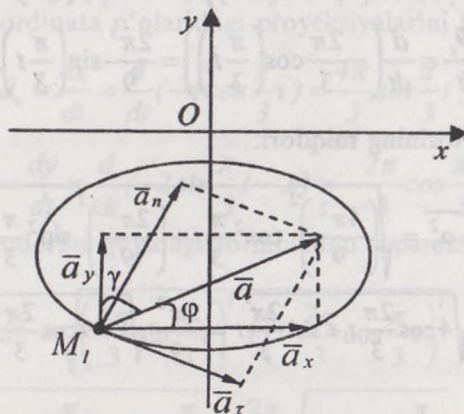
(31\*.6) va (31\*.7) dan:

$$a = \frac{2\pi^2}{9} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi^2}{9} \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\pi^2 \sqrt{7}}{4} \approx 2,9 \text{ m/sek}^2.$$

Tezlanish vektorining yo'nalishini quyidagi formuladan aniqlaymiz (119-shakl):

$$\cos(a, \hat{Ox}) = \cos \varphi = \frac{a_x}{a} = \frac{\frac{2\pi^2}{9}}{\frac{\pi^2 \sqrt{7}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} = 0,756; \quad \varphi = 41^\circ;$$

$$\cos(a, \hat{Oy}) = \cos \gamma = \frac{a_y}{a} = \frac{\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{9}}{\frac{\pi^2 \sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 0,654; \quad \gamma = 49^\circ.$$



119-shakl.

Urinma tezlanishining  $t=1$  sek dagi qiymatini topamiz:

$$a_r = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{6\pi \frac{\pi}{3} t \cdot \cos \frac{\pi}{3} t \cdot \frac{\pi}{3}}{2 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{2\pi}{3} t}}; \quad t=1 \text{ sek, da}$$

$$a_r = \frac{\frac{2\pi^2 \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{13}} = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}; a_r = \frac{9,86 \cdot 1,73}{3 \cdot 3,6} \approx 1,58 \text{ m/sek}^2;$$

$$a_n = \sqrt{a - a_r^2} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{8}{13}; a_n = 2,43 \text{ m/sek}^2.$$

Trayektoriyaning egrilik radiusini topamiz:  $t=1$  sek da

$$\rho = \frac{g^2}{a_n} = \frac{\frac{13\pi^2}{9}}{\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{8}{\sqrt{13}}} = \frac{13\sqrt{13}}{8} \approx 5,8 \text{ m}.$$

Biz quyidagilarni aniqladik:

$$g_x = 3,6 \text{ m/sek}; g_y = -1,05 \text{ m/sek}; g = 3,77 \text{ m/sek};$$

$$\alpha = 16^\circ; \beta = 74^\circ.$$

$$a_x = 0,456 \text{ m/sek}^2; a_y = 1,87 \text{ m/sek}^2; \varphi = 41^\circ;$$

$$a = 0,654 \text{ m/sek}^2; a_r = \frac{dg}{dt} \approx 1,58 \text{ m/sek}^2; \gamma = 49^\circ;$$

$$a_n = 2,43 \text{ m/sek}^2; \rho \approx 5,8 \text{ m}.$$

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Kinematika nimani o'rgatadi?
2. Nuqta trayektoriyasi deb nimaga aytiladi?
3. Nuqta harakati berilishining qanday usullarini bilasiz va ular qanday bo'ladi?
4. Nuqta harakati qonuni koordinata usulida berilganda uning trayektoriyasi qanday aniqlanadi?

5. Nuqta tezligi qanday aniqlanadi va qanday yo'nalishga ega?
6. Nuqta tezligining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday? Nuqta tezligi moduli va yo'nalishi tezlik proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
7. Nuqta harakati qonuni tabiiy usulda berilganda uning tezligi qanday aniqlanadi?
8. Nuqta tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
9. Nuqta tezlanishi Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi? Nuqta tezlanish moduli va yo'nalishi Dekart o'qlardagi proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
10. Nuqta tezlanishining trayektoriya bosh normal va urinmasidagi proyeksiyalari nimaga teng?
11. Urinma tezlanishi qachon nolga teng bo'ladi? Normal tezlanishchi?
12. Urinma va normal tezlanishlar orqali nuqtaning to'liq tezlanishi nimaga teng?
13. Tekis harakat nima? Tekis o'zgaruvchan harakatchi?
14.  $M$  nuqta ellips bo'yicha tekis harakat qiladi. Nuqtaning tezlanishi ellipsning qaysi nuqtalarida eng katta va eng kichik bo'ladi?

## IX BOB. QATTIQ JISMNING SODDA HARAKATLARI

Kinematikada statikadagidek, qattiq jismni mutlaq qattiq jism deb qaraladi. Jismning istalgan ikki nuqtasining oralig'i hamma vaqt o'zgarmasdan qolsa, bunday qattiq jismga *mutlaq qattiq jism* deyiladi. Bundan buyon jism yoki qattiq jism deganda mutlaq qattiq jism tushuniladi. Qattiq jism harakatini kinematik o'rganish bu harakatlanayotgan jismni harakat tenglamalarini tuzish va harakatni xarakterlaydigan kinematik xarakteristikalarini o'rganishdan iborat bo'ladi. Butun jismning harakatlanishi kinematik elementlari: harakat qonuni, tezlik va tezlanishlari ma'lum bo'lgandan keyin jism bo'laklarining harakati o'rganiladi. Jismni tashkil etuvchi bo'laklarning xarakterlariga xos bo'lgan qonuniyatlari aniqlanadi.

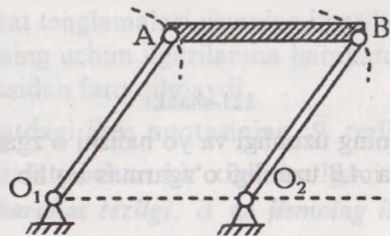
Odatda, qattiq jism harakatini o'rganish uning sodda harakatlarini o'rganishdan boshlanadi. Jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatlariga *jismning sodda* yoki *asosiy harakatlari* deyiladi. Jismning har qanday murakkab harakatlarini shu ikki harakattan tashkil topgan deb qaraladi.

### 38-§. Qattiq jismning ilgarilanma harakati

Jismda olingan har qanday kesma harakat davomida hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qolsa, jismning bunday harakatiga *ilgarilanma harakat* deyiladi. Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtalarining trayektoriyalari istalgan egri chiziq bo'lishi mumkin.

Masalan, to'g'ri chiziqli relsda harakatlanayotgan vagon kuzovining harakati ilgarilanma harakat bo'lib, kuzov nuqtalarining trayektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Ikkinchi misol tariqasida 120-shaklda ko'rsatilgan



120-shakl.

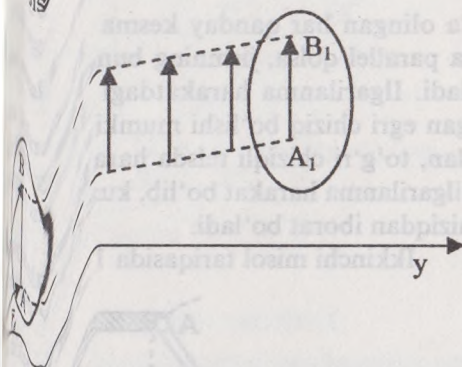
miz.  $O_1A$  va  $O_2B$  krivoshiplar  $O_1$ ,  $O_2$  sparnik\* hamma vaqt o'z-o'ziga parakat qiladi. Sparnik nuqtalari markalar chizadi. Demak, bu holda ilgari-larining trayektoriyalari egri chiziqdan atning kinematik xususiyatlarini aniqlaymiz.

dagi qattiq jismning hamma nuqtalari nda jism nuqtalarining tezlik va tezlan-

rilgan  $Oxyz$  qo'zg'almas hisoblash sis-rakatni tekshiramiz. Jismning ixtiyoriy radius vektorlarini o'tkazamiz.

$$= \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (9.1)$$

harakatlanganda  $\vec{r}_B$  va  $\vec{r}_A$  lar o'zgaradi.



1-shakl.

va yo'nalishi o'zgarmaydi, chunki qat-ti o'zgarmas bo'lib, ilgari-lanma harakat

ta'rifiga ko'ra doimo o'z-o'ziga parallel qoladi, ya'ni  $\overline{AB} = \text{const}$ . Shuning uchun tenglamadagi  $\vec{r}_B$  va  $\vec{r}_A$  vektorlarni o'zgarganda ularning uchlardagi  $A$  va  $B$  nuqtalarining chizgan  $AA_1$  va  $BB_1$  trayektoriyalari o'zaro teng  $AA_1 = BB_1$  va  $AA_1 \parallel BB_1$  bo'ladi. (9.1) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{a\overline{AB}}{dt} \text{ bunda } \frac{a\overline{AB}}{dt} = 0$$

bo'lgani uchun

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad (9.2)$$

$A$  va  $B$  nuqtalar ixtiyoriy nuqta bo'lgani uchun ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezliklari bir xilda bo'ladi degan natijaga kelamiz. (9.2) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{g}_B}{dt} = \frac{d\vec{g}_A}{dt} \text{ bundan } \vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (9.3)$$

(9.3) tenglikdan ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezlanishlari bir xilda bo'ladi, degan natijaga kelamiz. Shunday qilib, teorema isbotlandi. Ilgarilanma harakat ta'rifidan va isbotlangan teoremadan jismning ilgarilanma harakati uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlanishini ko'ramiz. Bunday nuqta uchun ko'pincha jism og'irlik markazi olinadi:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= f_1(t) \\ y_c &= f_2(t) \\ z_c &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

$C$  nuqtaning harakat tenglamalari jismning ilgarilanma harakat tenglamalari bo'ladi. Shuning uchun ilgarilanma harakatdagi jism kinematikasi nuqta kinematikasidan farq qilmaydi.

Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtasining  $\vec{g}$  tezligi va  $\vec{a}$  tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xilda bo'lgani uchun  $\vec{g}$  tezlikka **jismning ilgarilanma harakat tezligi**,  $\vec{a}$  ga **jismning ilgarilanma harakat tezlanishi** deyiladi.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (9.7)$$

Demak, haqiqiy burchak tezligi aylanish burchagidan vaqtga nisbatan olingan birinchi hosilasiga teng, hosilaning ishorasi harakat o'suvchi

yoki kamayuvchi ekanini ko'rsatadi. Masalan, agar  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$  bo'lsa, har-

akat o'suvchi bo'lib,  $\varphi$  burchagi orta boradi,  $\frac{d\varphi}{dt} < 0$  bo'lsa, burchagi kamayadi va harakat kamayuvchi bo'ladi.

Shunday qilib hosilaning ishorasi harakat yo'nalishini aniqlaydi. Burchak tezligi rad/s bilan yoki 1/s bilan o'lchanadi. Aylanma harakatda burchak tezligi  $\bar{\omega}$  - aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan vektor kattalik bilan ifodalanadi. U aylanish o'qining istalgan nuqtasiga qo'yiladi va uning uchidan qaraganimizda jism soat milining yo'nalishiga teskari aylanishini ko'rish kerak.

Agar harakat davomida hamma vaqt  $\omega$  o'zgarmas bo'lsa, harakat tekis aylanma harakat bo'ladi. Bu o'zgarmasni  $\omega_0$  bilan belgilab, (9.7) tenglikka qo'yamiz:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

bundan

$$d\varphi = \omega_0 dt.$$

Hosil bo'lgan tenglikda boshlang'ich shartlarni hisobga olib, yani  $t=0$  da  $\varphi = \varphi_0$ , tenglamani integrallaymiz:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt.$$

$\omega_0$  o'zgarmas bo'lgani uchun quyidagi tenglik tekis aylanma harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t. \quad (9.8)$$

Agar boshlang'ich  $t=0$  paytda  $\varphi_0 = 0$  bo'lsa, yuqoridagi tenglik quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\varphi = \omega_0 t \text{ bundan } \omega_0 = \frac{\varphi}{t}. \quad (9.9)$$

Kinematika masalalarida ko'pincha tekis aylanma harakat burchak tezligini jismning  $t=1$  minut ichidagi aylanish soni  $n$  ifodasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Jism bir aylanganda burchakka aylanadi. Agar  $t=1$  minut 60 s jism  $n$  marta aylansa,  $\varphi = 2n\pi$  bo'ladi (9.9) tenglikdan foydalanib,  $\omega$  bilan  $n$  orasidagi munosabatni topamiz:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Bunda  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  deb hisoblanadi.

#### 41-§. Aylanma harakat burchak tezlanishi

Burchak tezlanishi aylanma harakat burchak tezligining vaqt birligi ichida o'zgarishini xarakterlaydi. Burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqtga nisbatan birinchi hosila yoki aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng bo'ladi. Burchak tezlanishini  $\varepsilon$  bilan belgilaymiz:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (9.10)$$

Burchak tezlanishi  $\text{rad/s}^2$  yoki  $1/\text{s}^2$  bilan o'lchanadi. Agar  $\omega$  bilan  $\varepsilon$  bir xil ishorali bo'lsa, harakat tezlanuvchan, har xil ishorali bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi. Harakat davomida  $\varepsilon = \text{const}$  bo'lsa, bunday harakatga *tekis o'zgaruvchan aylanma harakat* deyiladi. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ dan } \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

tenglikni olamiz. Bunda  $\varepsilon = \text{const}$ . Hosil bo'lgan tenglikni hisobga olgan holda (9.7) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt.$$

Buni yana  $t=0$  da  $\varphi = \varphi_0$  boshlang'ich shartlarda integrallab, tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$\varepsilon$  ning ishorasi harakatni tezlanuvchan yoki sekinlanuvchan ekanini ko'rsatadi. Agar  $t=0$  da  $\varphi = 0$  bo'lsa,  $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$  tenglik hosil bo'ladi.

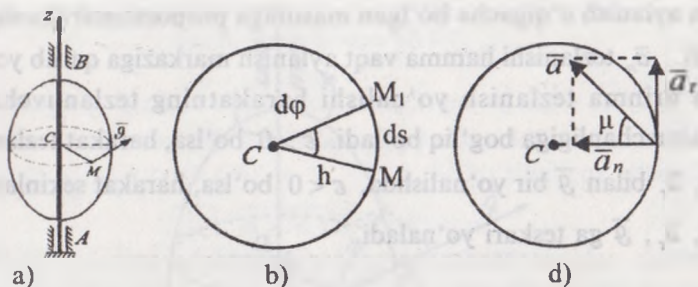
Aylanish o'qining birlik yo'naltiruvchi vektorini  $\bar{k}$  bilan belgilasak, aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan burchak tezlik  $\bar{\omega}$  vektorining vaqtga nisbatan hosilasi burchak tezlanish vektorini ifodalaydi:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \bar{k} \text{ yoki } \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}.$$

Aylanish o'qi qo'zg'almas bo'lgani uchun  $\bar{k} = \text{const}$  bo'ladi. Demak, burchak tezlanishi  $\bar{\varepsilon}$  vektori aylanish  $\bar{\omega}$  o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, va bir tomonga yo'nalsa, tezlanuvchan, qarama-qarshi tomonga yo'nalsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi.

#### 42-§. Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi

Qattiq jismning nuqtalari harakatlarini xarakterlovchi kinematik elementlari – trayektoriya, tezlik va tezlanishlarini topamiz. Buning uchun jismni aylanish  $Az$  o'qidan ixtiyoriy masofada joylashgan  $M$  nuqtasining tezlik va tezlanishini aniqlaymiz. Faraz qilaylik  $M$  nuqta aylanish o'qidan  $h$  masofada joylashgan bo'lsin, jism harakatlanganda  $M$  nuqta radiusi  $h$  bo'lgan markazi aylanish o'qining  $C$  nuqtasida joylashgan aylana chizadi. Agar jism  $dt$  vaqt ichida aylanish o'qi atrofida  $d\varphi$  burchakka burilsa,  $M$  nuqta trayektoriya bo'ylab  $MM_1 = dS = h d\varphi$  yoyini o'tadi.



123-shakl.

Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun  $M$  nuqtaning  $\omega$  tezligi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$g = \frac{dS}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega. \quad (9.11)$$

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezligi nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional o'zgarar ekan. Tezlik harakat yo'nalishida trayektoriyaga urinma bo'ylab yo'naladi. Endi  $M$  nuqtaning tezlanishini topamiz. Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun  $M$  nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlardan tashkil topadi:

$$a_n = \frac{g^2}{\rho}; \quad a_r = \frac{dg}{dt}.$$

Bu tengliklarga (9.11) dan  $g$  ning qiymatini qo'yamiz:

$$a_n = \frac{d}{dt}(\omega \cdot h) = h \cdot \varepsilon; \quad a_r = \frac{(\omega \cdot h)^2}{h} = \omega^2 \cdot h. \quad (9.12)$$

$M$  nuqtaning to'liq tezlanishining miqdori:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} \quad (9.13)$$

va yo'nalishi

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (9.14)$$

(9.14) formulalardan aniqlanadi. (9.11), (9.12) hamda (9.13) formulalar aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari nu-

qtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional ekanligini ifodalaydi.  $\bar{a}_n$  tezlanishi hamma vaqt aylanish markaziga qarab yo'naladi, ammo urinma tezlanish yo'nalishi harakatning tezlanuvchan yoki sekinlanuvchanligiga bog'liq bo'ladi.  $\varepsilon > 0$  bo'lsa, harakat tezlanuvchan bo'lib,  $\bar{a}_r$  bilan  $\bar{g}$  bir yo'nalishda,  $\varepsilon < 0$  bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'lib,  $\bar{a}_r$ ,  $\bar{g}$  ga teskari yo'naladi.

#### 43-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasining tezligi va tezlanishining vektor ifodalari

Qattiq jism ixtiyoriy  $M$  nuqtasining holati  $O$  nuqtaga nisbatan radius vektor bilan aniqlanadi (124-shakl).  $M$  nuqtaning tezligini (9.11) formulaga muvofiq

$$\bar{g} = O_1 M \cdot \omega$$

ga teng, 124-shakldan

$$O_1 M = r \cdot \sin(\bar{\omega} \wedge \bar{r}),$$

buni e'tiborga olsak,

$$\bar{g} = \omega r \sin(\bar{\omega} \wedge \bar{r})$$

bo'ladi.  $\bar{g}$  tezlik vektori  $\bar{r}$  radius vektor bilan  $\bar{\omega}$  burchak tezlik vektorlar yotgan tekislikka tik yo'naladi (124-shakl).

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi moduli

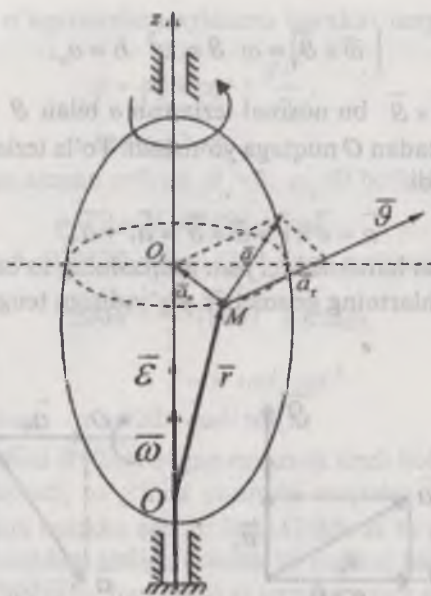
$$\bar{g} = \omega \cdot r \sin(\bar{\omega} \wedge \bar{r})$$

bo'lgani uchun

$$\bar{g} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (9.15)$$

bo'ladi.

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik vektori  $\bar{g}$  burchak tezlik vektori  $\bar{\omega}$  bilan nuqta radius vektori  $\bar{r}$  ning vektorli ko'paytmasiga teng, yo'nalishi aylanma harakat yo'nalishida  $\bar{\omega}$  bilan  $\bar{r}$  yotgan tekislikka tik yo'naladi. (9.15) tenglikka Eyler formulasi deyiladi.  $M$  nuqtaning tezlanishini topishimiz uchun (9.15) tenglikdan vaqt bo'yicha hosila olamiz.



124-shakl.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{g}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

bunda

$$\bar{g} = \frac{d\bar{r}}{dt} \text{ va } \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$$

bo'lgani uchun

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{g}. \quad (9.16)$$

(9.15) tenglikdan  $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$  vektor  $\bar{\varepsilon}$  bilan  $\bar{r}$  vektorlar yotgan tekislikka tik, nuqta trayektoriyasiga urinma bo'ylab yo'naladi. Tezlanishning bu qismi urinma tezlanish vektori bo'ladi:

$$\bar{a}_r = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}.$$

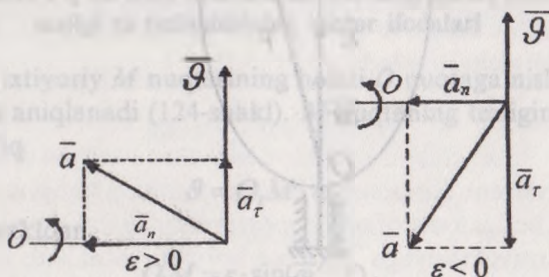
Bu vektor  $\varepsilon$  ning ishorasiga qarab  $\bar{g}$  bilan bir yoki  $\bar{g}$  ga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi. (9.16) tezlanishning ikkinchi qismi  $\bar{\omega} \times \bar{g}$  ni tekshiramiz,  $\bar{\omega} \perp \bar{g}$  bo'lgani uchun

$$|\vec{\omega} \times \vec{g}| = \omega \cdot g = \omega^2 \cdot h = a_n.$$

Demak,  $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{g}$  bu normal tezlanish  $a$  bilan  $g$  yotgan tekislikka tik ravishda  $M$  nuqtadan  $O$  nuqtaga yo‘naladi. To‘la tezlanish vektori (9.15) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{g} = \vec{a}_r + \vec{a}_n.$$

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining to‘la tezlanishi urinma va normal tezlanishlarining geometrik yig‘indisiga teng (125-shakl).



125-shakl.

#### 44-§. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatiga doir masalalar

**32\*-masala.** Bug‘ turbinasi diskini ishga tushirish davridagi aylanish tenglamasini yozing; aylanish burchagi vaqt kubiga proporsional va  $t=3$  s bo‘lganda, diskning burchak tezligi  $\omega = 27\pi$  rad/s ga to‘g‘ri keladi.

**Yechish:** Masala shartiga, asosan  $\varphi = kt^3$ ;  $\omega = \dot{\varphi} = 3kt^2$  bo‘lib, masala shartiga asosan  $t=3$  s da  $\omega = 27\pi$  va  $t=3$  s da  $\omega = 3kt^2 = 27k$  bo‘lgani uchun  $27k = 27\pi$  yoki  $k = \pi$  bo‘ladi.

Demak, bug‘ turbinasining aylanma harakat tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\varphi = \pi^3 \text{ rad.}$$

**33\*-masala.** Tinch holatda bo‘lgan jism tekis tezlanish bilan aylana boshlab, birinchi 2 minutda 3600 marta aylanadi. Burchak tezlanish va burchak tezligini aniqlang.

**Yechish.** Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasini yozamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (33^*.1)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (33^*.2)$$

Masala shartiga asosan  $t=0$  da  $\varphi_0=0$ ;  $\omega_0=0$  bo'ladi.

$$\varphi = 2\pi N = 7200\pi \text{ rad} \quad (33^*.3)$$

(33^\*.3) ni va  $t=2 \cdot 60=120$  sek.ni (33^\*.1) ga qo'ysak:

$$7200\pi = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (120)^2 \text{ bo'ladi.} \quad (33^*.4)$$

Bundan:  $\varepsilon = \pi \text{ rad / sek}^2 \quad (33^*.5)$

(33^\*.2) dan  $\omega = \varepsilon t$ ;  $\omega = 120\pi \text{ rad / sek.}$

**34\*-masala.** Radiusi  $R=2\text{m}$  bo'lgan maxovik tinch holatdan boshlab tekis tezlanish bilan aylanadi; to'g'inda yotuvchi nuqtalar  $t=10$  sek dan keyin  $v=100 \text{ m/sek}$  chiziqli tezlikka ega bo'ladi. G'ildirak to'g'inidagi nuqtaning  $t=15$  sek bo'lgan vaqtdagi tezligi, urinma va normal tezlanishini toping.

**Yechish.** Tekis tezlanuvchan harakat tenglamasiga asosan (33^\*.2) tenglamada:

$$\omega_0=0 \text{ bo'lgani uchun} \quad \omega = \varepsilon t \quad (34^*.1),$$

$$v_{10} = \omega R = \varepsilon t_{10} R \quad (34^*.2).$$

Bundan  $\varepsilon = \frac{v_{10}}{R t_{10}} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \text{ rad / sek}^2 \quad (34^*.3)$

$t=15$  sek da (34^\*.1) dan  $\omega_{15} = \varepsilon \cdot t_{15} = 5 \cdot 15 = 75 \text{ rad / sek}$

$$v_{15} = \omega_{15} \cdot R = 75 \cdot 2 = 150 \text{ m / sek},$$

$$a_{\tau} = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10 \text{ m / sek}^2,$$

$$a_{15n} = \omega_{15}^2 R = 75^2 \cdot 2 = 11250 \text{ m / sek}^2.$$

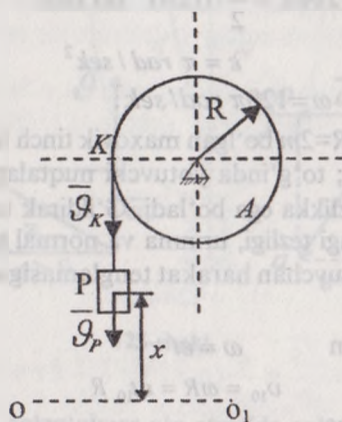
**35\*-masala.** Radiusi  $R=10 \text{ m}$  bo'lgan  $A$  val unga ipda osilgan  $P$  tosh bilan aylantiriladi. Toshning harakati  $x=100 t^2$  tenglama bilan ifodalangani. Bunda  $x$  toshdan qo'zg'almas  $OO_1$  gorizontalgacha bo'lgan, metr-lar hisobida ifodalangan masofa,  $t$ -vaqt (sekund hisobida).  $t$  paytda val-niing burchak tezligi  $\omega$  va burchak tezlanishi  $\varepsilon$ , shuningdek val sirtidagi nuqtaning to'la tezlanishi  $a$  ni aniqlang.

**Yechish.**  $P$  tosh ilgari lanma harakat qilgani uchun uning tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$g_p = x = 200t \text{ sm / sek} . \quad (35^*.1)$$

Val to'g'inidagi nuqtalar ham shu tezlikka ega bo'ladi, chunki tosh bilan val cho'zilmaydigan arqon bilan bog'langan, ya'ni:

$$g_p = g_k . \quad (35^*.2)$$



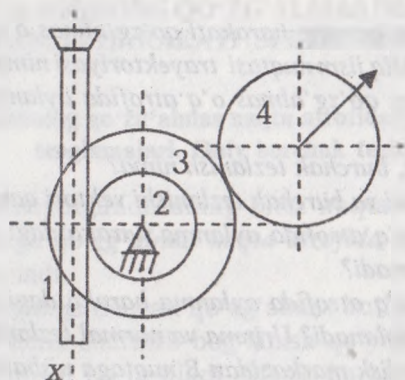
(35\*-masala uchun shakl)

$g_k = \omega R$  va (35\*.1), (35\*.2) larni hisobga olganda:

$$\omega = \frac{g_k}{R} = \frac{g_p}{R} = \frac{200t}{10} = 20t \text{ rad / sek}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 20 \text{ rad / sek}^2.$$

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 10\sqrt{400 + 160000t^4} = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ m / sek}^2.$$

**36\*-masala.** Strelkali indikator mexanizmida harakat o'lchov shtiftining 1 reykasidan 2 shesternyaga uzatiladi; 2 shesternyaning o'qiga 3 tishli g'ildirak o'rnatilgan, 3 g'ildirak esa strelka biriktirilgan 4 shesternya bilan tishlashadi. Agar shtiftning harakati  $x = asinkt$  tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari tegishli  $r_2$ ,  $r_3$  va  $r_4$  bo'lsa, strelkaning burchak tezligini aniqlang.



(36\*-masala uchun shakl)

**Yechish.** 1 shkiv ilgarilanma harakatda bo'lgani uchun, uning tezligi quyidagicha:

$$v_1 = \dot{x} = ak \cos kt. \quad (36^*.1)$$

1 shkiv bilan 2 g'ildirak o'zaro bog'langani uchun:

$$v_1 = \omega_2 r_2 \quad (36^*.2)$$

(36\*.2) dan

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{ak}{r_2} \cos kt \quad (36^*.3)$$

2 va 3 g'ildiraklar bitta valda o'rnatilganidan, ya'ni:

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{ak}{r_2} \cos kt. \quad (36^*.4)$$

3 va 4 g'ildiraklar esa umumiy nuqtaga ega bo'lib, bu nuqtada:

$$\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4 \quad (36^*.5)$$

Bu yerda  $\omega_4$  strelkaning burchak tezligidir:

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4} \omega_3 = \frac{r_3}{r_2 r_4} ak \cos kt. \quad (36^*.6)$$

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Qattiq jismning qanday harakati ilgarilanma harakat deyiladi?
2. Jismning ilgarilanma harakatida uning nuqtalari trayektoriyasi aylanadan iborat bo'lishi mumkinmi?
3. Qattiq jimsning ilgarilanma harakati qanday xossalarga ega?

4. Qattiq jismning qanday harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanna harakat deyiladi? Qattiq jism nuqtasi trayektoriyasi nimadan iborat bo'ladi?

5. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat tenglamasi qanday?

6. Burchak tezlik, burchak tezlanish nima?

7. Burchak vektori va burchak tezlanishi vektori qanday bo'ladi?

8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasi tezligi qanday aniqlanadi?

9. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasi tezlanishi qanday aniqlanadi? Urinma va normal tezlanishlarchi?

10. Agar  $A$  nuqta disk markazidan  $B$  nuqtaga nisbatan ikki marta uzoqroq joylashgan bo'lsa, diskning  $A$  nuqtasi tezlanishi  $B$  nuqtasi tezlanishidan necha marta katta bo'ladi?

## 1. BOB. QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS NUQTA ATROFIDA AYLANMA HARAKATI (SFERIK HARAKAT)

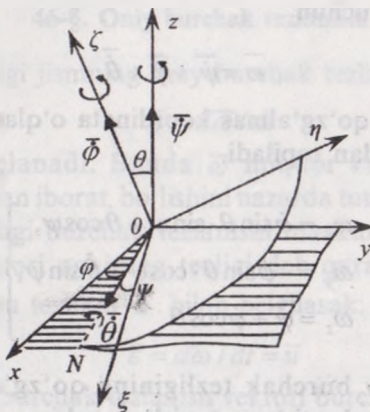
### 1.5-§. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamlari. Oniy burchak tezlik

Jism harakatlanayotganda uning bitta nuqtasi doimo qo'zg'almas qoladigan harakatga *qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat* yoki *sferik harakat* deyiladi.

Tayanch tekisligidagi nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan pildiroqning harakati yoki birgina sferik sharnirli bog'lanish qo'yilgan jismning harakati sferik harakatga misol bo'la oladi. Sferik harakatni o'rganish uchun  $O\xi\eta\zeta$  koordinata sistemasi jism bilan birga harakatlanadi.  $O\xi\eta\zeta$  qo'zg'aluvchi koordinata sistemasi va  $Oxyz$  qo'zg'almas koordinata sistemasini o'tkazamiz (126-shakl).

Jism bilan birga harakatlanuvchi  $O\xi\eta\zeta$  tekislikning qo'zg'almas  $Oxy$  tekislik bilan kesishish chizig'idan iborat  $ON$  *tugunlar chizigi* deyiladi.

$O\xi$  va  $ON$  orasidagi burchak  $\Psi$ -pretsessiya burchagi,  $Ox$  va  $ON$  orasidagi burchak  $\varphi$ -sof aylanish burchagi,  $Oz$  va  $O\xi$  orasidagi burchak  $\theta$ -nutatsiya burchagi deyiladi.  $\Psi$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  burchaklarning musbat yo'nalishlari mos ravishda  $Oz$ ,  $O\xi$  va  $ON$  o'qlar uchlaridan qaraganda bu burchaklarning o'zgarishi soat mili aylanishiga teskari ko'rinadigan qilib olinadi.  $\Psi$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  – Eyler burchaklari deyiladi.



126-shakl.

**Eyler teoremasi.** Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi ixtoriy ko'chishini mazkur qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi uchta o'q atrofida ketma-ket uchta aylantirish bilan bajarish mumkin.

Jismning istalgan paytdagi holatini bir-biriga bog'liq bo'lmagan uchta Eyler burchaklari vositasida aniqlash mumkin. Jismning harakati davomida bu burchaklar vaqtning uzluksiz funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (10.1)$$

Bu tenglamalar qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jismning kinematik tenglamalari yoki sferik harakat tenglamalari deyiladi.

**Eyler-Dalamber teoremasi.** Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning bir holatdan ikkinchi holatga o'tishini shu qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi o'q atrofida bir aylanish bilan bajarish mumkin.

Bu teoreмага ko'ra jismning sferik harakati har onda o'z holatini o'zgartiruvchi va qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi oniy o'qlar atrofida oniy aylanishlar majmuasi deb qaralishi mumkin; bunda har bir oniy aylanish o'qi atrofidagi oniy aylanishning burchak tezligi sferik harakatdagi jismning burchak tezligi deb qaraladi va  $\bar{\omega}$  bilan belgilanadi;  $\bar{\omega}$  - vektor oniy aylanish o'qi bo'ylab yo'naltiriladi.

Harakat Eyler burchaklari orqali tekshiriladigan bo'lsa, sferik harakatni har onda uchta kesishuvchi o'qlar ( $Oz$ ,  $O\xi$ ,  $ON$ ) atrofidagi oniy aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu holda oniy burchak tezligi uchun

$$\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\varphi} + \bar{\theta}$$

o'rinli bo'lib, uning qo'zg'almas koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalardan topiladi.

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Shuningdek oniy burchak tezligining qo'zg'aluvchi koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarni ham topish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

(10.2) va (10.3) formulalar Eylerning kinematik tenglamalari deyiladi.

(10.2) va (10.3) ga ko'ra, oniy burchak tezlikning miqdori quyidagicha topiladi:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\eta^2 + \omega_\xi^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta}. \quad (10.4)$$

Burchak tezlikning yo'nalishi bu holda vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari orqali ifodalanadi:

$$\cos(\bar{\omega}, \hat{Ox}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{Oy}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{Oz}) = \frac{\omega_z}{\omega}, \quad (10.5)$$

yoki

$$\cos(\bar{\omega}, \hat{O\xi}) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{O\eta}) = \frac{\omega_\eta}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{O\zeta}) = \frac{\omega_\zeta}{\omega}. \quad (10.6)$$

#### 46-§. Oniy burchak tezlanishi

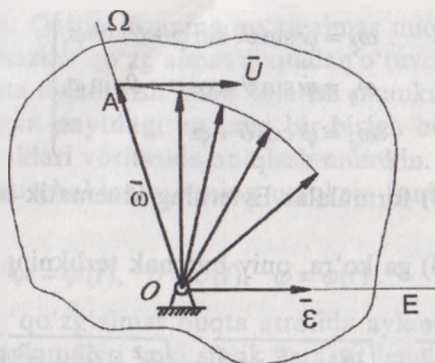
Sferik harakatdagi jismning oniy burchak tezlanishini

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega} / dt \quad (10.7)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda  $\bar{\omega}$  miqdor va yo'nalishi bo'yicha o'zgaruvchi vektordan iborat bo'lishini nazarda tutsak, sferik harakatdagi jismning biror ondagi burchak tezlanishi mazkur jismning shu ondagi burchak tezlik vektori uchining tezligi deb qaralishi mumkin, degan xulosaga kelamiz; bu tezlikni  $\bar{u}$  bilan belgilasak:

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega} / dt = \bar{u} \quad (10.8)$$

Binobarin, oniy burchak tezlanish vektori burchak tezlik godografiga o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi (127-shakl).



127-shakl.

Agar  $\vec{\omega}$  vektorining qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyalari  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  qo'zgaluvchan o'qlardagi proyeksiyalari  $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$  ma'lum bo'lsa, oniy burchak tezlanishining shu o'qlardagi proyeksiyalari mos ravishda quyidagi formulalardan topiladi:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \quad (10.9)$$

yoki

$$\varepsilon_{\xi} = \dot{\omega}_{\xi}; \quad \varepsilon_{\eta} = \dot{\omega}_{\eta}; \quad \varepsilon_{\zeta} = \dot{\omega}_{\zeta} \quad (10.10)$$

u holda burchak tezlanish vektorining moduli:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{\xi}^2 + \varepsilon_{\eta}^2 + \varepsilon_{\zeta}^2}. \quad (10.11)$$

Formuladan yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlanadi:

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \hat{Ox}) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \hat{Oy}) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \hat{Oz}) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}, \quad (10.12)$$

yoki

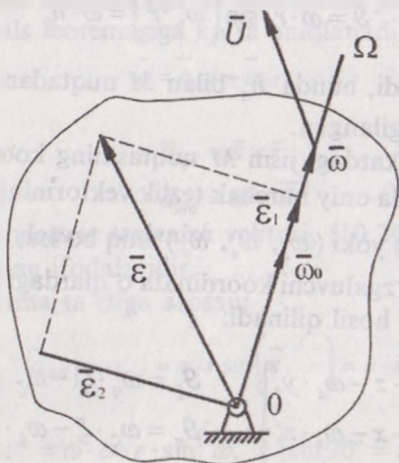
$$\cos(\vec{\varepsilon}, \hat{O\xi}) = \frac{\varepsilon_{\xi}}{\varepsilon}; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \hat{O\eta}) = \frac{\varepsilon_{\eta}}{\varepsilon}; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \hat{O\zeta}) = \frac{\varepsilon_{\zeta}}{\varepsilon}. \quad (10.13)$$

Jismning oniy burchak tezlanishini topishda quyidagi uchinchi usulni qo'llash ham mumkin. Bu usulga ko'ra aylanish oniy o'qi bo'yicha yo'nalgan  $\vec{\omega}_0$  birlik vektor kiritiladi va  $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}_0$  deb olinib, (10.8) formula

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \bar{\omega}_0 + \bar{\omega} \frac{d\bar{\omega}_0}{dt} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2, \quad (10.14)$$

ko'rinishga keltiriladi. (10.14) da  $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \bar{\omega}_0$  jism oniy burchak tezligi miqdorining o'zgarishini ifodalab,  $\bar{\omega}_0$  ya'ni  $\bar{\omega}$  bo'yicha yo'naladi:

$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{\omega}_0}{dt}$  esa oniy burchak tezligi yo'nalishining o'zgarishini ifodalaydi va birlik vektorning hosilasi xossasiga ko'ra  $\bar{\omega}_0$  vektorga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi (128-shakl).



128-shakl.

Binobarin  $\bar{\varepsilon}_1$  va  $\bar{\varepsilon}_2$  orasidagi burchak to'g'ri burchakdan iborat. Shunga ko'ra oniy burchak tezlanishi miqdorini

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad (10.15)$$

formulasidan, yo'nalishini esa uning  $\bar{\omega}$  bilan tashkil qilgan burchak kosinusi orqali topish mumkin:

$$\cos(\bar{\varepsilon}, \bar{\omega}) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (10.16)$$

#### 47-§. Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezligi

Jismning sferik harakatini har onda oniy burchak tezlik vektori bo'yicha yo'nalgan  $O\Omega$  aylanish oniy o'qi atrofida oniy aylanma harakat qiladi deb qarash mumkin. Shunga asosan sferik harakatdagi jism  $M$  nuqtasining  $O$  qo'zgalmas markazga nisbatan radiusning vektori  $\vec{r}$ , oniy burchak tezlik vektorini  $\vec{\omega}$  bilan belgilansa, mazkur nuqta tezligi, quyidagi Eyler formulasiga ko'ra aniqlanadi (129-shakl).

$$\vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (10.17)$$

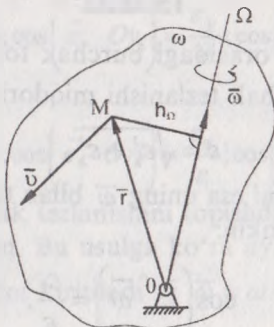
(10.17) ga asosan tezlik miqdorini aniqlash uchun

$$g = \omega \cdot r \cdot \sin(\angle \vec{\omega}, \vec{r}) = \omega \cdot h_n \quad (10.18)$$

formula hosil qilinadi, bunda  $h_n$  bilan  $M$  nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa belgilangan.

Agar sferik harakatdagi jism  $M$  nuqtasining koordinatalari  $(x, y, z)$  yoki  $(\xi, \eta, \zeta)$  hamda oniy burchak tezlik vektorining o'qlardagi proyeksiyalari  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  yoki  $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$  aniq bo'lsa, (3.17) dan tezlikning qo'zgalmas yoki qo'zgaluvchi koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlovchi formulalar hosil qilinadi:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \\ g_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \\ g_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} g_\xi &= \omega_\eta \cdot \zeta - \omega_\zeta \cdot \eta, \\ g_\eta &= \omega_\zeta \cdot \xi - \omega_\xi \cdot \zeta, \\ g_\zeta &= \omega_\xi \cdot \eta - \omega_\eta \cdot \xi. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$



129-shakl.

Ilmobarin tezlik modulini aniqlashda quyidagi formulalardan foydalanib aniqlanadi:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{g_\xi^2 + g_\eta^2 + g_\zeta^2}. \quad (10.20)$$

Tezlik yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslardan topiladi:

$$\cos(\vec{g}, \hat{Ox}) = \frac{g_x}{g}; \quad \cos(\vec{g}, \hat{Oy}) = \frac{g_y}{g}; \quad \cos(\vec{g}, \hat{Oz}) = \frac{g_z}{g}. \quad (10.21)$$

#### 48-§. Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezlanishi

Bitta qo'zgalmas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jism nuqtasining tezlanishi quyidagi Rivals teoremasiga ko'ra aniqlanadi (130-shakl):

$$\vec{a} = \vec{a}_{ayl} + \vec{a}_{uml}. \quad (10.22)$$

Bunda:

$$\vec{a}_{ayl} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (10.23)$$

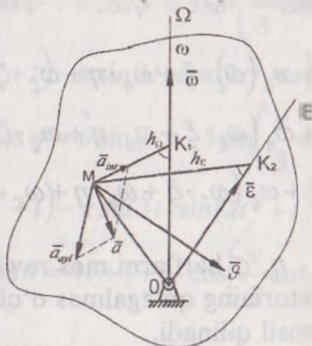
$$\vec{a}_{uml} = \vec{\omega} \times \vec{g}. \quad (10.24)$$

(10.23) ifoda *aylanma tezlanish* vektori, (10.24) ifoda o'qqa *intilma tezlanish* vektorining ifodalidir.

Vektor ko'paytma ta'rifga asosan:

$$|\vec{a}_{ayl}| = a_{ayl} = \varepsilon \cdot r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon \cdot h_\varepsilon,$$

$$a^{um} = \omega \cdot \omega \cdot r \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) \sin 90^\circ = \omega^2 h_\omega.$$



130-shakl.

Bu formulalarda  $h_c$  - bilan tezlanishi aniqlanayotgan nuqtadan oniy burchak tezlanish vektori o'qi  $OE$  gacha bo'lgan masofa,  $h_\Omega$  - bilan esa nuqtadan oniy aylanish o'qi  $O\Omega$  gacha bo'lgan masofa belgilangan.  $\bar{a}_{ayl}$  vektor  $\bar{\varepsilon}$  va  $\bar{r}$  vektorlari yotgan tekislikka perpendikular ravishda shunday yo'nalganki, uning musbat uchidan qaraganda  $\bar{\varepsilon}$  vektorning  $\bar{r}$  vektoriga ustiga tushurish uchun eng kichik burchakka burish soat mili aylanishi yo'liga teskari ko'rinishi kerak.  $\bar{a}_{int}$  vektor  $M$  nuqtadan aylanish oniy o'qiga tushirilgan perpendikular bo'ylab shu o'q tomon yo'nalgan.

Shuni ta'kidlash zarurki,  $\bar{a}_{ayl}$  bilan  $\bar{a}_{int}$  vektorlar orasidagi burchak umumiy holda  $90^\circ$  ga teng emas (xususiyl holda - qo'zgalmas o'q atrofiga aylanma harakatda, bu burchak  $90^\circ$  bo'ladi).

$\left( \bar{a}_{ayl}, \hat{\bar{a}_{int}} \right) = \alpha$  deb belgilansa,  $M$  nuqta tezlanishining moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$a = \sqrt{a_{ayl}^2 + a_{int}^2 + 2a_{ayl} \cdot a_{int} \cdot \cos \alpha}. \quad (10.25)$$

Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezlanishini aniqlashda analitik usuldan ham foydalanish mumkin. Buning uchun nuqtaning koordinatalari  $(x, y, z)$  yoki  $(\xi, \eta, \zeta)$  hamda burchak tezlik va burchak tezlanish vektorining qo'zgalmas yoki qo'zgaluvchi koordinata o'qlardagi proyeksiyalari berilgan bo'lishi, yoxud Eyler burchaklari berilganda (10.2), (10.3), (10.9), (10.10) formulalar bo'yicha topish mumkin bo'lishi kerak.

Masalan, tezlanishning qo'zgaluvchi o'qlardagi proyeksiyalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \cdot \eta + \omega_\xi (\omega_\zeta \cdot \xi + \omega_\eta \cdot \eta + \omega_\zeta \cdot \zeta) - \omega^2 \xi, \\ a_\eta &= \varepsilon_\eta \xi - \varepsilon_\xi \cdot \zeta + \omega_\eta (\omega_\xi \cdot \xi + \omega_\eta \cdot \eta + \omega_\zeta \cdot \zeta) - \omega^2 \eta, \\ a_\zeta &= \varepsilon_\xi \cdot \eta - \varepsilon_\eta \cdot \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \cdot \xi + \omega_\eta \cdot \eta + \omega_\zeta \cdot \zeta) - \omega^2 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

(10.26) formulada  $\xi, \eta, \zeta$  harflarni mos ravishda  $x, y, z$  ga almashirish bilan tezlanish vektorining qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlovchi formulalar hosil qilinadi.

Bu holda tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (10.27)$$

formuladan, yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali topiladi.

#### 49-§. Sferik harakatga oid masalalar

**17\*-masala.** Qattiq jismning sferik harakati quyidagi tenglamalar bilan berilgan:

$$\Psi = 2t^2 + t, \quad \theta = \pi/3 \cos t, \quad \varphi = 3t$$

$t=1$  sek paytda qo'zgaluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari  $\xi=2$  m,  $\eta=3$  m,  $\zeta=4$  m bo'lgan  $M$  nuqtaning shu paytdagi tezligi, tezlanishi shuningdek, jismning burchak tezligi va burchak tezlanishini toping.

**Yechish:** Bu masala qo'yilishi bo'yicha yuqorida ko'rsatilgan hollar-ning birinchisiga mos keladi. Binobarin, 1-holda ko'rsatilgan tartib asosida masalani yechamiz.

$\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  ning o'zgarish qonunidan vaqt bo'yicha hosila hisoblaymiz:

$$\dot{\psi} = 4t + 1, \quad \dot{\theta} = -\pi \sin 3t, \quad \dot{\varphi} = 3.$$

(10.2) formula yordamida oniy burchak tezlik vektorining qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyalarini hisoblaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = 3 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \times \\ &\quad \times \sin(2t^2 + t) - \pi \sin 3t \cdot \cos(2t^2 + t) \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi = -3 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \times \\ &\quad \times \cos(2t^2 + t) - \pi \sin 3t \cdot \sin(2t^2 + t) \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = 4t + 1 + 3 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \end{aligned} \right\} \quad (37^*.1)$$

$t=1$  s payt uchun (37\*.1) ifodadan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\omega_x = \left( 3 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) - 3,14 \cdot \cos 3 \right) \cdot \sin 3 = 0,075 \text{ sek}^{-1},$$

$$\omega_y = -3 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) - 3,14 \cdot \sin 3 \cdot \sin 3 = -2,616 \text{ sek}^{-1},$$

$$\omega_z = 5 + 3 \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) = 6,527 \text{ sek}^{-1}.$$

(10.4) formuladan foydalanib, burchak tezlik berilgan vaqt uchun ni hisoblaymiz:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 7,03 \text{ sek}^{-1}. \quad (37^*.2)$$

Burchak tezlikning yo'nalishini aniqlash uchun (10.5) formuladan foydalanamiz:

$$\cos \left( \vec{\omega}, \vec{Ox} \right) = \frac{\omega_x}{\omega} = 0,0107,$$

$$\cos \left( \vec{\omega}, \vec{Oy} \right) = \frac{\omega_y}{\omega} = -0,3721,$$

$$\cos \left( \vec{\omega}, \vec{Oz} \right) = \frac{\omega_z}{\omega} = 0,9284.$$

Topilgan burchak tezlikning to'g'riligini tekshirish uchun uni qo'zgaluvchi o'qlardagi proyeksiyalari orqali hisoblab ko'ramiz. (10.3) formulaga binoan:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cdot \cos \varphi = (4t+1) \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \times \\ &\times \sin 3t - \pi \sin 3t \cdot \cos 3t = \\ &= \left[ (4t+1) \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) - \pi \cos 3t \right] \cdot \sin 3t, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi = (4t+1) \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \times \\ &\times \cos 3t + \pi (\sin 3t)^2, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = (4t+1) \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) + 3. \end{aligned} \right\} \quad (37^*.3)$$

$t = 1$  sek payt uchun (37\*.3) dan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\omega_x = \left( 5 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) - \pi \cos 3 \right) \cdot \sin 3 = -0,1678 \text{ sek}^{-1},$$

$$\omega_y = 5 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) \cos 3 + \pi \cdot \sin^2 3 = 4,3194 \text{ sek}^{-1},$$

$$\omega_z = 5 \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) + 3 = 5,5452 \text{ sek}^{-1}.$$

U holda (10.4) formulaga binoan

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 7,03 \text{ sek}^{-1}.$$

Shuni qayd qilamizki, burchak tezlik vektorining qo'zgaluvchi sistemaga nisbatan yo'nalishi (10.6) formula vositasida topilishi mumkin.

Jismning burchak tezlanishini aniqlash uchun (10.9) yoki (10.10) hamda (10.11) formulalardan foydalanamiz, (37.1) ni e'tiborga olib, burchak tezlanish vektorining qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyasini topaylik:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = -3 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \cdot \pi \cdot \sin 3t \cdot \sin(2t^2 + t) +$$

$$+ 3 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \cdot \cos(2t^2 + t) \cdot (4t + 1) - \pi \cdot 3 \cdot \cos 3t \times \\ \times \cos(2t^2 + t) + \pi \sin 3t \cdot \sin(2t^2 + t) \cdot (4t^2 + 1),$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = 3 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \cdot \pi \cdot \sin 3t \cdot \cos(2t^2 + t) +$$

$$+ 3 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \cdot \sin(2t^2 + t) \cdot (4t + 1) - \pi \cdot 3 \times \\ \times \cos 3t \cdot \sin(2t^2 + t) - \pi \cdot 3 \cdot \cos 3t \cdot \sin(2t^2 + t) - \\ - \pi \sin 3t \cdot \cos(2t^2 + t) \cdot (4t + 1),$$

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 4 + 3 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \cdot \pi \cdot \sin 3t.$$

$t=1$  sek payt uchun bu ifodalar quyidagicha bo'ladi:

$$\varepsilon_x = \pi \sin^2 3 \left( 5 - 3 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) \right) + 3 \cdot \cos 3 \times$$

$$\times \left( 5 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) - \pi \cos 3 \right) = 3,7507 \text{ sek}^{-2},$$

$$\varepsilon_y = \pi \sin 3 \cdot \cos 3 \left( 3 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) - 8 \right) + 15 \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) \times$$

$$\times \sin 3 = 1,0197 \text{ sek}^{-2},$$

$$\varepsilon_z = 4 + 3 \pi \sin 3 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3 \right) = 2,8572 \text{ sek}^{-2}.$$

Bularni (10.11) ga qo'yamiz:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = 4,83 \text{ sek}^{-2}.$$

Berilgan paytda burchak tezlanish vektori yo'nalishini (10.12) formula orqali aniqlaymiz:

$$\cos \left( \vec{\varepsilon}, \hat{Ox} \right) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} = 0,7758, \quad \cos \left( \vec{\varepsilon}, \hat{Oy} \right) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} = 0,2111,$$

$$\cos \left( \vec{\varepsilon}, \hat{Oz} \right) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} = 0,5916.$$

Topilgan burchak tezlanishining to'g'riligini tekshirish uchun uni qo'zg'aluvchi o'qlardagi proyeksiyalari orqali hisoblab ko'ramiz. (37\*.3) ni e'tiborga olsak, (10.10) dan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = \dot{\omega}_z = & \left[ 4 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) - (4t+1) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) \right] \times \\ & \times \pi \cdot \sin 3t + 3\pi \cdot \sin 3t \cdot \sin 3t + [(4t+1) \times \\ & \times \sin \left( \frac{\pi}{3} \cos 3t \right) - \pi \cos 3t] \cdot 3 \cdot \cos 3t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\eta} = \dot{\omega}_{\eta} = & \left[ 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cos 3t\right) - (4t+1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos 3t\right) \times \right. \\ & \times -\pi \sin 3t \cdot \cos 3t - \left. \left[ (4t+1) \cdot \sin \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos 3t\right) \cdot 3 \sin 3t + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\pi \sin 3t \cdot 3 \cos 3t, \right. \right. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\zeta} = \dot{\omega}_{\zeta} = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos 3t\right) + (4t+1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cos 3t\right) \cdot \pi \cdot \sin 3t.$$

Bu ifodalardan  $t=1$  sek payt uchun quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\varepsilon_x = 3,0771 \text{ sek}^{-2}, \quad \varepsilon_{\eta} = 3,7092 \text{ sek}^{-2}, \quad \varepsilon_{\zeta} = 0,1313 \text{ sek}^{-2}.$$

Shunga ko'ra (10.11) dan  $\varepsilon = 4,82 \text{ sek}^{-2}$  kelib chiqadi.

Demak, jismning burchak tezlanishi  $0,01$  aniqlikda  $\varepsilon = 4,83 \text{ sek}^{-2}$  ekan.

**$M$  nuqtaning tezligini aniqlash.** Masalaning shartiga ko'ra,  $M$  nuqtaning qo'zg'aluvchi sistemadagi koordinatalari  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  berilgan. Bino-barin, uning  $t=1$ s paytdagi qo'zg'aluvchan o'qlardagi proyeksiyalari orqali aniqlaymiz; (10.19) formuladan foydalanamiz:

$$\vartheta_x = \omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta = 4,3194 \cdot 4 - 5,5452 \cdot 3 = 0,642 \text{ m/sek},$$

$$\vartheta_{\eta} = \omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta = 5,5452 \cdot 2 + 0,1678 \cdot 4 = 11,762 \text{ m/sek},$$

$$\vartheta_{\zeta} = \omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi = -0,1678 \cdot 3 - 4,3194 \cdot 2 = -9,142 \text{ m/sek}.$$

(10.20), (10.21) formulalar vositasida  $M$  nuqta tezligining moduli va yo'nalishini topamiz:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_{\eta}^2 + \vartheta_{\zeta}^2} = 14,91 \text{ m/sek};$$

$$\cos\left(\overline{\vartheta}, \wedge O\xi\right) = \frac{\vartheta_x}{\vartheta} = 0,0431, \quad \cos\left(\overline{\vartheta}, \wedge O\eta\right) = \frac{\vartheta_{\eta}}{\vartheta} = 0,7889,$$

$$\cos\left(\overline{\vartheta}, \wedge O\zeta\right) = \frac{\vartheta_{\zeta}}{\vartheta} = 0,6131.$$

**$M$  nuqtaning tezlanishini aniqlash.** Buning uchun (10.26) formuladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} a_{\xi} &= \varepsilon_{\eta} \zeta - \varepsilon_{\zeta} \cdot \eta + \omega_{\xi} (\omega_{\xi} \cdot \xi + \omega_{\eta} \cdot \eta + \omega_{\zeta} \cdot \zeta) - \omega^2 \xi = \\ &= 3,7092 \cdot 4 - 0,1313 \cdot 3 + (-0,1678) \cdot (-0,1678 \cdot 2 + \\ &+ 4,3194 \cdot 3 + 5,5452 \cdot 4) - (7,03)^2 \cdot 2 = -89,32 \text{ m/sek}^2, \\ a_{\eta} &= \varepsilon_{\eta} \xi - \varepsilon_{\xi} \cdot \zeta + \omega_{\eta} (\omega_{\xi} \cdot \xi + \omega_{\eta} \cdot \eta + \omega_{\zeta} \cdot \zeta) - \omega^2 \eta = \\ &= 0,1313 \cdot 2 - 3,0771 \cdot 4 + 4,3194 \cdot (31,683) - (7,03)^2 \cdot 3 = 103,72 \text{ m/sek}^2, \\ a_{\zeta} &= \varepsilon_{\xi} \cdot \eta - \varepsilon_{\eta} \cdot \xi + \omega_{\zeta} (\omega_{\xi} \cdot \xi + \omega_{\eta} \cdot \eta + \omega_{\zeta} \cdot \zeta) - \omega^2 \zeta = \\ &= 3,0771 \cdot 3 - 3,7092 \cdot 2 + 5,5452 \cdot 31,683 - (7,03)^2 \cdot 4 = -20,1821 \text{ m/sek}^2. \end{aligned}$$

Tezlanish moduli (10.27) formuladan topiladi:

$$a = \sqrt{a_{\xi}^2 + a_{\eta}^2 + a_{\zeta}^2} = 138,36 \text{ m/sek}^2.$$

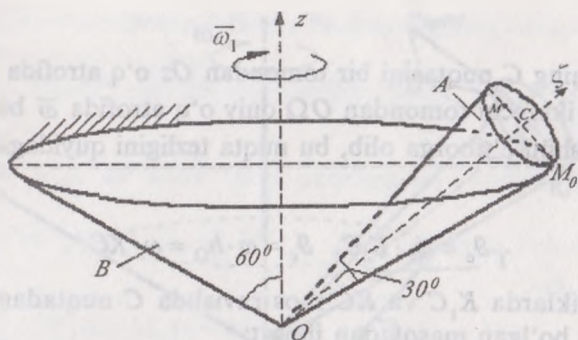
Tezlanishning yo'nalishini yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlaymiz:

$$\cos \left( \vec{a}, O\xi \right) = \frac{a_{\xi}}{a} = -0,6456,$$

$$\cos \left( \vec{a}, O\eta \right) = \frac{a_{\eta}}{a} = 0,7496,$$

$$\cos \left( \vec{a}, O\zeta \right) = \frac{a_{\zeta}}{a} = -0,1459.$$

**38\*-masala.**  $A$  konus qo'zg'almas  $B$  konusning ichida sirg'anmay g'ildiraydi; bunda  $A$  konusning  $O\xi$  simmetrik o'qi qo'zg'almas  $Oz$  o'q atrofida o'zgarmas  $\omega_1 = 2 \text{ sek}^{-1}$  burchak tezlik bilan aylanib,  $O$  nuqta qo'zg'almay qoladi. Konuslarning o'q kesimlari shakl tekisligida joylashgan hamda  $OM_0 = l = 50 \text{ m}$ ,  $M_0 M = 20 \text{ m}$  deb olib,  $A$  konusning burchak tezligi, burchak tezlanishi,  $M$  nuqtasining tezlik va tezlanishi topilsin. Kerakli burchaklar shaklda ko'rsatilgan (131-shakl).

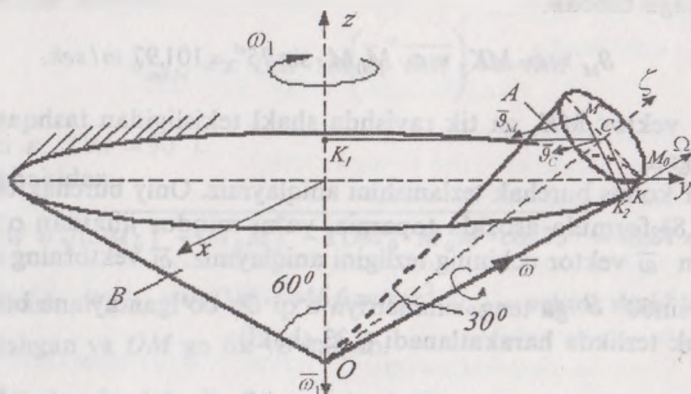


131-shakl.

**Yechish.** Bu masala qo'yilishi bo'yicha yuqorida ko'rsatilgan hollarning ikkinchisiga mos keladi; shuningdek burchak tezlikning miqdori o'zgarmay qoladi. Shuni e'tiborga olib, ko'rsatilgan ketma- ketlik asosida masalani hal qilamiz.

1.  $Oxyz$  qo'zg'almas koordinata sistemasini qo'zg'almas konusga bog'lab, qo'zg'aluvchi sistemaning  $Oz$  o'qini esa  $A$  konus simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz.

2.  $A$  konusning oniy burchak tezligini aniqlaymiz.  $A$  konus qo'zg'almas  $B$  konus ichki sirtida sirg'anmasdan dumalagani uchun aylanish oniy o'qi  $O\Omega$  bu konuslar yasovchilarining urinish chizig'i  $OM_0$  bo'ylab yo'naladi (132-shakl).



132-shakl.

$A$  konusning  $C$  nuqtasini bir tomondan  $Oz$  o'q atrofida  $\overline{\omega}_1$  burchak tezlik bilan, ikkinchi tomondan  $O\Omega$  oniy o'q atrofida  $\overline{\omega}$  burchak tezlik bilan aylanishini e'tiborga olib, bu nuqta tezligini quyidagicha ifodalay olamiz:

$$\mathcal{G}_c = \omega_1 \cdot K_1C, \quad \mathcal{G}_c = \omega \cdot h_\Omega = \omega \cdot KC.$$

Bu tengliklarda  $K_1C$  va  $KC$  mos ravishda  $C$  nuqtadan  $Oz$  va  $O\Omega$  o'qlargacha bo'lgan masofadan iborat:

$$K_1C = OC \sin 45^\circ = l \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 45^\circ = 34,15 \text{ m},$$

$$KC = l \cdot \sin 15^\circ = 12,94 \text{ m}$$

u holda,

$$\mathcal{G}_c = 68,3 \text{ m/sek}, \quad \omega = \mathcal{G}_c / KC = 5,28 \text{ sek}^{-1}.$$

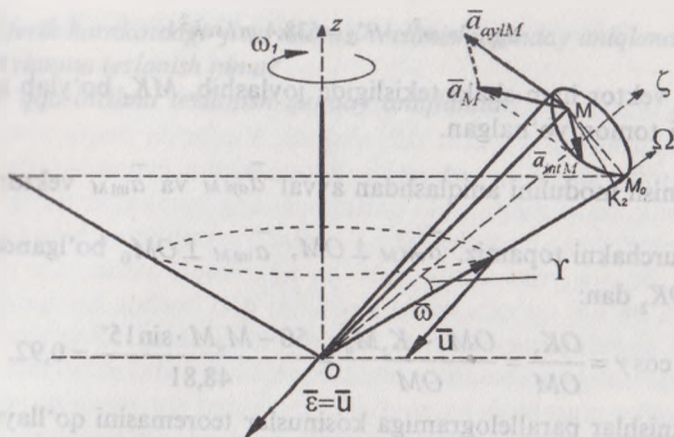
$C$  nuqta tezligi yo'nalishiga ko'ra  $\overline{\omega}$  vektori  $\overline{OM}_0$  bo'yicha yo'nalgan.  $\omega_1 = \text{const}$  bo'lganidan  $\mathcal{G}_c = \text{const}$ , binobarin  $\omega = \text{const}$ .

3.  $A$  konus  $M$  nuqtasining tezligini topamiz. Konusning harakatini  $O\Omega$  aylanish oniy o'qi atrofida oniy aylanma harakat deb qarasak, (10.18) formulaga binoan:

$$\mathcal{G}_M = \omega \cdot MK_2 = \omega \cdot M_0M \cdot \sin 75^\circ = 101,97 \text{ m/sek}.$$

$\overline{\mathcal{G}}_M$  vektor  $MK_2$  ga tik ravishda shakl tekisligidan tashqari tomon yo'nalgan.

4.  $A$  konus burchak tezlanishini aniqlaymiz. Oniy burchak tezlanishini (10.8) formula asosida topamiz, ya'ni miqdor jihatdan o'zgarmas bo'lgan  $\overline{\omega}$  vektor uchining tezligini aniqlaymiz.  $\overline{\omega}$  vektorning uchi «radiusi»  $\sin 60^\circ \mathcal{G}$  ga teng, simmetriya o'qi  $Oz$  bo'lgan aylana bo'ylab  $\omega_1$  burchak tezlikda harakatlanadi (133-shakl).



133-shakl.

Shunga ko'ra

$$\varepsilon = u = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin 60^\circ = 9,15 \text{ sek}^{-2}$$

$\bar{\varepsilon}$  vektori  $\bar{u}$  vektorga parallel ravishda shakl tekisligiga tik yo'nalgan va  $O$  nuqtaga qo'yilgan.

5.  $A$  konus  $M$  nuqtasining tezlanishini topamiz. Bunda Rivals teoremasini ifodalovchi (10.22) formuladan foydalanamiz:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{ayl M} + \bar{a}_{int M}$$

(10.23) ga binoan

$$a_{ayl M} = \varepsilon \cdot OM \cdot \sin \left( \overline{\varepsilon, OM} \right) = \varepsilon \cdot OM$$

(chunki  $\overline{\varepsilon, OM} = 90^\circ$ ).

133-shakldan:

$$OM = \sqrt{(OM_0)^2 + (M_0 M)^2 - 2 OM_0 \cdot M_0 M \cdot \cos 75^\circ} = 48,81 \text{ m.}$$

Binobarin,  $a_{ayl M} = \varepsilon \cdot OM = 446,6 \text{ m/sek}^2$   $\bar{a}_{ayl M}$  vektor shakl tekisligiga joylashgan va  $OM$  ga tik yo'nalgan.

(10.24) dan foydalanib  $a_{int M}$  ni topamiz:

$$a_{\text{int}M} = \omega^2 \cdot MK_2 = 538.4 \text{ m/sec}^2.$$

$\vec{a}_{\text{int}M}$  vektor ham shakl tekisligida joylashib,  $MK_2$  bo'ylab aylanish oniy o'qi tomon yo'nalgan.

Tezlanish modulini aniqlashdan avval  $\vec{a}_{\text{ayl}M}$  va  $\vec{a}_{\text{int}M}$  vektor tashkil qilgan burchakni topamiz.  $\vec{a}_{\text{ayl}M} \perp OM$ ,  $\vec{a}_{\text{int}M} \perp OM_0$  bo'lgandan  $\Delta MOK_2$  dan:

$$\cos \gamma = \frac{OK_2}{OM} = \frac{OM_2 - K_2M_0}{OM} = \frac{50 - M_0M \cdot \sin 15^\circ}{48,81} = 0,92.$$

Tezlanishlar parallelogramiga kosinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{(a_{\text{ayl}M})^2 + (a_{\text{int}M})^2 - 2a_{\text{ayl}M} \cdot a_{\text{int}M} \cdot \cos \gamma} = \\ &= \sqrt{46899,16} = 216,57 \text{ m/sec}^2. \end{aligned}$$

$\vec{a}_M$  vektor yo'nalishini aniqlash uchun bu vektorning  $MK_2$  bilan tashkil qilgan  $\alpha$  burchakni topamiz. Sinuslar teoremasiga binoan:

$$\frac{a_M}{\sin \gamma} = \frac{a_{\text{ayl}M}}{\sin \alpha}; \quad \sin \alpha = \frac{a_{\text{ayl}M} \cdot \sin \gamma}{a_M} = 0,808; \quad \alpha \approx 54^\circ.$$

Shunday qilib, berilgan paytda  $M$  nuqta tezlanishi miqdori  $216,57 \text{ m/sec}^2$  ga teng, shakl tekisligida yotadi va  $MM_0$  kesma bilan  $54^\circ + 15^\circ = 69^\circ$  burchak tashkil etadi.

#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Sferik harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Eyler burchaklari deb nimaga aytiladi?
3. Oniy burchak tezligi nima?
4. Oniy burchk tezlanishi nima?
5. Oniy burchak tezlanishi qanday tashkil etuvchilarga ajraladi?
6. Sferik harakatdagi jism nuqtasi tezligi qo'zg'aluvchi koordinata sistemasida qanday aniqlanadi?
7. Sferik harakatdagi jism nuqtasi tezlanishi qo'zg'almas koordinata sistemasida qanday aniqlanadi?

8. Sferik harakatdagi jism nuqtasi tezlanishi qanday aniqlanadi?

9. Aylanma tezlanish nima?

10. O'qqa intilma tezlanish qanday aniqlanadi?

## XI BOB. NUQTANING MURAKKAB HARAKATI

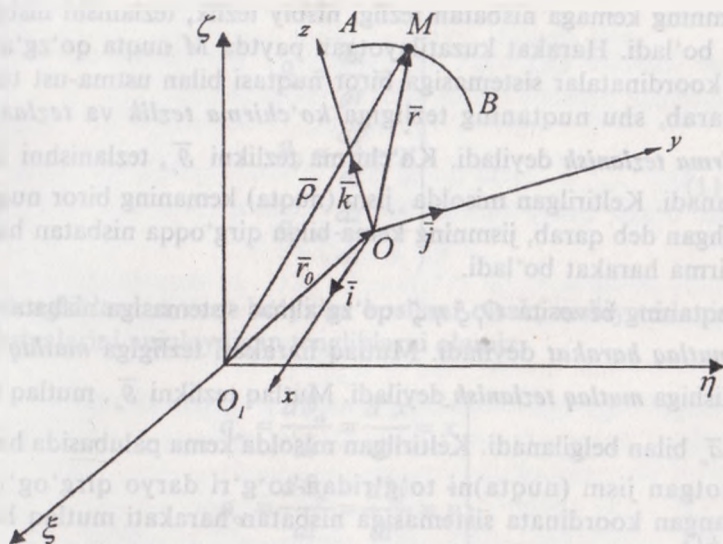
Nuqta ikki va undan ortiq harakatda ishtirok etsa, uning bunday harakati murakkab harakat deb ataladi. Yuqorida nuqta yoki qattiq jismning qo'zg'almas, koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini tekshirgan edik, lekin nuqta yoki qattiq jismning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan ham tekshirish mumkin. Nuqta yoki qattiq jism qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatda bo'lib, qo'zg'aluvchi sistemani o'zi boshqa bir qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatlansa, nuqta yoki jismning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakati murakkab harakat bo'ladi.

Nuqtaning murakkab harakatini qo'zg'almas sistemaga nisbatan tekshirish masalasi ancha murakkab masaladir. Amaliy masalalarni yechishda nuqtaning murakkab harakatini sodda harakatlarga ajratib yozish ancha qulay bo'ladi. Buning uchun nuqtaning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiriladi.

**Masalan:** Kema palubasida harakatlanuvchi jismning daryo qirg'og'iga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat. Palubadagi jismning harakatini bevosita daryo qirg'og'iga nisbatan tekshirib bo'lmaydi. Bu harakatni kema bilan bog'langan qo'zg'aluvchi hamda qirg'oq bilan biriktirilgan qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan tekshirish, harakatlanuvchi jismning murakkab harakatini ikki oddiy harakatlarga keltirib tekshirgan bo'lamiz. Ko'pincha murakkab harakatga oid masalalarda qo'zg'aluvchi koordinata sistemasining qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatini aniqlash yengil bo'ladi yoki shu harakat oldindan berilgan bo'ladi. Masalan, keltirilgan misolda kemaning qirg'oqqa nisbatan harakati berilgan bo'lishi mumkin.

### 50-§. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va mutlaq harakatlari

Nuqtaning qo'zg'almas  $O, \xi, \eta, \zeta$  sistemasiga nisbatan murakkab harakatini tekshiramiz. Buning uchun  $O, \xi, \eta, \zeta$  ga nisbatan harakatlanuvchi  $Oxyz$  koordinatalar sistemasini olamiz (134-shakl).



134-shakl.

$M$  nuqtaning shu ikki sistemaga nisbatan harakatini tekshiramiz. Shu ikki sistemaga nisbatan  $M$  nuqtaning harakati ikki xil bo'ladi. Bu ikki harakatni bir-biridan farq qilish uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi. Harakatlanuvchi  $M$  nuqtaning qo'zg'aluvchi  $Oxyz$  sistemasiga nisbatan harakatiga **nisbiy harakat** deyiladi.  $M$  nuqtani qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatsiz deb qarab, shu sistema bilan birgalikda qo'zg'almas  $O_1\xi\eta\zeta$  sistemaga nisbatan harakatiga **ko'chirma harakat** deyiladi. Harakatlanuvchi  $M$  nuqtani bevosita qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatiga **murakkab** yoki **mutlaq harakat** deyiladi. Nuqtaning nisbiy harakatini tekshirilganda, qo'zg'aluvchi koordinata sistema harakatda ekanligini nazarda tutib, harakatini faqat shu sistemaga nisbatan kuzatiladi. Bu kuzatilgan harakat trayektoriyasiga **nisbiy harakat trayektoriyasi** deyiladi. Nisbiy trayektoriya bo'ylab nuqtaning tezligiga nisbiy tezlik, nisbiy tezlikning o'zgarishini ifodalovchi tezlanishga **nisbiy tezlanish** deyiladi. Nisbiy tezlikni  $\vec{v}$  va nisbiy tezlanishni  $\vec{a}$  bilan belgilanadi. Keltirilgan misol kema palubasida harakatlanayotgan jism (nuqta)ning nisbiy harakatiga faqat kemaga (kema bilan bog'langan sistemaga) nisbatan kuzatiladi.

Jismning kemaga nisbatan tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi nisbiy tezlanish bo'ladi. Harakat kuzatilayotgan paytda  $M$  nuqta qo'zg'aluvchi  $Oxyz$  koordinatalar sistemasiga biror nuqtasi bilan ustma-ust tushgan deb qarab, shu nuqtaning tezligiga *ko'chirma tezlik* va *tezlanishiga ko'chirma tezlanish* deyiladi. Ko'chirma tezlikni  $\vec{v}$ , tezlanishni  $\vec{a}$  deb belgilanadi. Keltirilgan misolda jism (nuqta) kemandagi biror nuqtasida joylashgan deb qarab, jismning kema bilan qirg'oqqa nisbatan harakati ko'chirma harakat bo'ladi.

Nuqtaning bevosita  $O, \xi, \eta, \zeta$  qo'zg'almas sistemasiga nisbatan harakati *mutlaq harakat* deyiladi. Mutlaq harakati tezligiga *mutlaq tezlik*, tezlanishiga *mutlaq tezlanish* deyiladi. Mutlaq tezlikni  $\vec{V}$ , mutlaq tezlanishni  $\vec{A}$  bilan belgilanadi. Keltirilgan misolda kema palubasida harakatlanayotgan jism (nuqta)ni to'g'ridan-to'g'ri daryo qirg'og'i bilan bog'langan koordinata sistemasiga nisbatan harakati mutlaq harakat bo'ladi.

### 51-§. Nisbiy harakat tenglamalari

Qo'zg'aluvchi  $Oxyz$  koordinatalar sistemasiga nuqtaning holatini aniqlovchi  $x, y, z$  koordinatalari vaqtning funksiyalari

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

shaklda berilgan bo'lsa, nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinata sistemasiga nisbatan istalgan paytdagi holatini harakatini aniqlash mumkin (134-shaklga qarang). Shu sababli (11.1) tenglamalarga nuqtaning *nisbiy harakat tenglamalari* deyiladi. (11.1) dan vaqt  $t$  ni chiqarib tashlasak, nuqtaning nisbiy harakat trayektoriyasi tenglamasini olamiz. Bu trayektoriya vaqt o'tishi bilan qo'zg'aluvchi sistema bilan birgalikda qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatlanadi. Odatdagi harakat sifatida (11.1) dan vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, nisbiy tezlikning tegishli koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaydigan tengliklarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ g_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ g_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

(11.2) tengliklardan vaqt bo'yicha hosilani olsak, nisbiy tezlanishning proyeksiyalarini aniqlaydigan tengliklarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dg_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dg_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{dg_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Qo'zg'aluvchi  $Oxyz$  koordinata sistemasining koordinata o'qlarining birlik vektorlarini  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  deb belgilab,  $g_r$  ni (11.2) ga  $a_r$  ni (11.3) ga muvofiq quyidagi ko'rinishlarda yozamiz:

$$g_r = g_{rx}\bar{i} + g_{ry}\bar{j} + g_{rz}\bar{k}, \quad (11.4)$$

$$a_r = a_{rx}\bar{i} + a_{ry}\bar{j} + a_{rz}\bar{k}. \quad (11.5)$$

Ko'chirma va mutlaq harakatlarning tezlik hamda tezlanishlari harakatlanuvchi  $Oxyz$  sistemaning harakatiga bog'liq bo'ladi.

## 52-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligi

Qo'zg'aluvchi  $Oxyz$  koordinata sistemasi qo'zg'almas  $O, \xi \eta \zeta$  sistemaga nisbatan  $\bar{g}_0$  tezlik bilan ilgarilanma harakat qilsin deylik, harakatlanuvchi  $M$  nuqtaning  $Oxyz$  ga nisbatan nisbiy harakat tenglamalari (11.1) da berilgan bo'lib, harakat tekshirilayotgan onda uning nisbiy harakat trayektoriyasi  $AB$  egri chiziqdan iborat bo'ladi.  $O, \xi \eta \zeta$  qo'zg'almas

sistemaga nisbatan  $\overline{OO_1} = \overline{r_0}$ , hamda  $\overline{OM} = \overline{\rho}$  deb belgilasak,  $M$  nuqta-ning murakkab harakat radius vektori 134-shakldagi

$$\overline{\rho} = \overline{r_0} + \overline{r} \quad (11.6)$$

ga teng. Agar  $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$  larni qo'zg'aluvchi koordinata o'qlarining birlik vektorlari desak, nisbiy harakat radius vektorini

$$\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} \quad (11.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (11.7) ga ko'ra (11.6) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\overline{\rho} = \overline{r_0} + x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}. \quad (11.8)$$

Bu tenglikdagi  $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$  larning yo'nalish o'zgaruvchi vektorlar ekanligini e'tiborga olib, (11.8) dan  $t$  vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d\overline{r_0}}{dt} + \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} + \left( x \frac{d\overline{i}}{dt} + y \frac{d\overline{j}}{dt} + z \frac{d\overline{k}}{dt} \right) \quad (11.9)$$

bundan

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \overline{\mathcal{G}}; \quad \frac{d\overline{r_0}}{dt} = \overline{\mathcal{G}_0}. \quad (11.10)$$

Eyler formulalariga asosan

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{i}}{dt} &= \overline{\omega_e} \times \overline{i}, \\ \frac{d\overline{j}}{dt} &= \overline{\omega_e} \times \overline{j}, \\ \frac{d\overline{k}}{dt} &= \overline{\omega_e} \times \overline{k} \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

(11.2), (11.4), (11.10), (11.11) larni hisobga olsak, (11.9) quyidagicha yoziladi:

$$\overline{\mathcal{G}}_a = \overline{\mathcal{G}}_r + \overline{\mathcal{G}}_o + \overline{\omega_e} \times (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}). \quad (11.12)$$

$$\overline{\mathcal{G}}_a = \overline{\mathcal{G}}_r + \overline{\mathcal{G}}_o + \overline{\omega_e} \times \overline{r}. \quad (11.13)$$

Bunda  $\bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{\omega}_e \times (\bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k})$ :

M nuqtaning ko'chirma tezligi quyidagi ifodaga teng.

$$\bar{g}_e = \bar{g}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r}. \quad (11.14)$$

Agar ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa,

$$\bar{g}_e = \bar{g}_o,$$

qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdan iborat bo'lsa,

$$\bar{g}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{r}$$

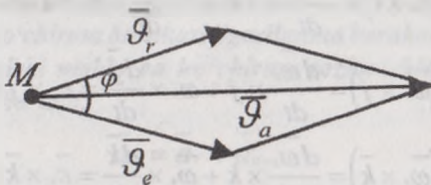
bo'ladi.

Shunday qilib

$$\bar{g}_a = \bar{g}_r + \bar{g}_e. \quad (11.15)$$

Bunda (11.15) tenglik tezliklarni qo'shish teoremasini ifodalaydi.

**Teorema.** Nuqtaning murakkab harakatida uning mutlaq tezligi ko'chirma va nisbiy tezliklarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi (135-shakl). Boshqacha aytganda mutlaq tezligi ko'chirma va nisbiy tezlik vektorlariga qurilgan parallelogramm diagonaliga teng bo'ladi.



135-shakl.

Agar  $\bar{g}_e$ ,  $\bar{g}_r$  tezliklar qiymati va ular orasidagi burchak berilgan bo'lsa, mutlaq tezlik moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$g_a = \sqrt{g_e^2 + g_r^2 + 2g_e g_r \cos \varphi}.$$

Agar:

a)  $\varphi = 0^\circ$  bo'lsa,  $g_a = g_e + g_r$ ,

b)  $\varphi = 90^\circ$  bo'lsa,  $g_a = \sqrt{g_e^2 + g_r^2}$ ,

d)  $\varphi = 180^\circ$  bo'lsa,  $g_a = |g_e - g_r|$ .

### 53-§. Tezlanishlarni qo'shish teoremasi (Koriolis teoremasi)

$M$  nuqtaning mutlaq tezlanishini aniqlash uchun (11.9) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{g}_a}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} + \left( \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\bar{k} \right) + \\ + 2 \left( \frac{d\bar{x}}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{d\bar{y}}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{d\bar{z}}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \\ + \bar{x}\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + \bar{y}\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + \bar{z}\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Bunda  $\frac{d\bar{g}_a}{dt} = \bar{a}_a$  -  $M$  nuqtaning mutlaq tezlanishi.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) \\ \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) \\ \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \end{aligned}$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \bar{x}\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + \bar{y}\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + \bar{z}\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= \bar{\varepsilon}_e \times (\bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k}) + \bar{\omega}_e \times \\ &\times (\bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k}) = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}) = \bar{a}_e^r + \bar{a}_e^n \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} = \bar{a}_0 - O \text{ qutbning tezlanishi.}$$

$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^r$  -  $M$  nuqtaning ko'chirma tezlanishi bo'lib,  $O$  nuqtaning tezlanishi hamda aylanma va o'qqa intilma tezlanishlarning geo-

metrik yig'indisiga teng:

$$\bar{a}_r = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k} \quad (11.17)$$

nisbiy tezlanish.

$$\bar{a}_k = 2 \left( \frac{dx}{dt} \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{k}}{dt} \right) = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) \quad (11.18)$$

Koriolis tezlanishi.

Demak,  $M$  nuqtaning mutlaq tezlanishi quyidagicha hisoblanadi:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (11.19)$$

(11.19) *Koriolis teoremasini* ifodalaydi: *ko'chirma harakati ilgari lanma bo'lmagan murakkab harakatdagi nuqtaning mutlaq tezlanishi uning nisbiy ko'chirma va Koriolis tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.*

Agar ko'chirma harakat ilgari lanma harakatdan iborat bo'lsa ( $\omega_e = 0$ ), (11.18) ga asosan Koriolis tezlanishi ( $\bar{a}_k = 0$ ) nolga teng bo'ladi. Bu holda *Koriolis teoremasi* quyidagicha bo'ladi.

*Agar nuqtaning ko'chirma harakati ilgari lanma harakatdan iborat bo'lsa, uning mutlaq tezlanishi nisbiy va ko'chirma tezlanishlarining geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi.*

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e. \quad (11.20)$$

#### 54-§. Koriolis tezlanishi

Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat burchak tezlik vektorining nisbiy harakat tezlik vektoriga vektorli ko'paytmaning ikkilanganligiga teng:

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r). \quad (11.21)$$

Ko'chirma nisbiy tezlanishlar vaqt birligi ichida tegishli nisbiy, ko'chirma tezliklarning o'zgarishini xarakterlaydi. Koriolis tezlanishi esa nisbiy tezlikni ko'chirma harakat ta'siridan, aksincha ko'chirma harakat burchak tezligini nisbiy harakat ta'sirida o'zgarishini xarakterlaydi. Agar ko'chirma harakat ilgari lanma bo'lsa,  $\omega_e = 0$ , bu holda  $a_k = 0$ .

Koriolis tezlanishi hosil bo'lmaydi. Ko'chirma harakati aylanma bo'lgan nuqta murakkab harakatiga tegishli masalani yechishda,

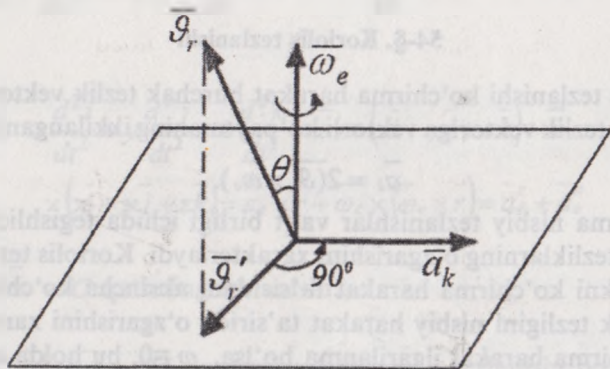
ko'chirma, nisbiy tezlanishlardan tashqari Koriolis tezlanishini ham hisoblash talab etiladi. (11.21) formuladan Koriolis tezlanishining miqdor va yo'nalishini aniqlaymiz.

Agar  $\bar{\omega}$  bilan  $\bar{\mathcal{G}}$  orasidagi  $\theta$  burchak berilgan bo'lsa, Koriolis tezlanish  $a_k$  ning miqdori, quyidagi tenglikdan topiladi.

$$a_k = 2\omega_e \mathcal{G}_r \sin \theta. \quad (11.22)$$

Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat  $\omega_e$ -burchak tezlik vektori bilan  $\mathcal{G}_r$  nisbiy harakat tezlik vektorining vektor ko'paytmasi yo'nalishida yo'nalgan  $\bar{a}_k$  vektor bo'lib,  $\bar{\omega}$  bilan  $\bar{\mathcal{G}}$  yotgan tekislikka tik yo'naladi.  $\bar{a}_k$  ning yo'nalishini aniqlash uchun  $\bar{\omega}$  vektorni tezlanishi izlanayotgan M nuqtaga ko'chiramiz.

Koriolis tezlanishi vektori uchidan qaraganda, vektor soat milining aylanishiga teskari aylanishda  $\theta$  burchakka burib  $\bar{\mathcal{G}}$  vektor bilan bir yo'nalishda ko'rinishi kerak. Koriolis tezlanish yo'nalishini quyidagi **Jukovskiyo'qoidasi** asosida aniqlanadi. Nisbiy tezlik vektorini ko'chirma harakat burchak tezligi yo'nalishiga perpendikular tekislikka proyeksiyalaymiz. Bu proyeksiya  $\bar{\mathcal{G}}'$  ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat aylanish yo'nalishida  $90^\circ$  ga buramiz (136-shakl). Bu yo'nalish Koriolis tezlanishining yo'nalishidir.



136-shakl.

Quyidagi hollarni tekshiramiz:

1. Agar  $\vec{g}$  nisbiy tezlik, ko'chirma harakat  $\omega_e$  - burchak tezligiga tik yo'nalgan bo'lsa, Koriolis tezlanishining qiymati  $a_k = 2\omega_e \vec{g}$  ga teng bo'ladi.

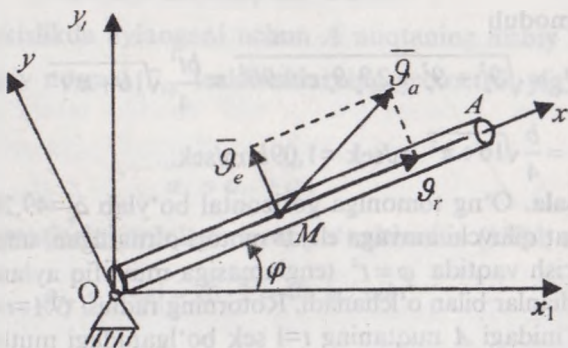
$\vec{g}$  ni  $\omega_e$  ga tik tekislikda aylanma harakat yo'nalishida  $90^\circ$  ga aylantirsak, Koriolis tezlanishining yo'nalishini olamiz.

2. Agar  $\vec{g}$ ,  $\omega_e$  ga parallel bo'lsa, u holda  $(\omega_e, \vec{g}) = 0$ , yoki  $(\omega_e, \vec{g}) = 180^\circ$  bo'lib,  $a_k = 0$  bo'ladi.

3. Ko'chirma harakat ilgariylanma harakatdan iborat bo'lsa,  $\omega_e = 0$  bo'lib,  $a_k = 0$  bo'ladi.

#### 55-§. Mutlaq harakat tezlik va tezlanishlarini aniqlashga doir masalalar

**39\*-masala.** To'g'ri chiziqli  $OA$  quvur qo'zg'almas nuqtadagi (shakl tekisligiga tik) o'tgan o'q atrofida  $\varphi = \frac{\pi}{4} t^2$  qonuniga muvofiq aylanadi. Bu yerda  $\varphi$  -quvurni qo'zg'almas gorizontal  $Ox$  o'qi bilan tashkil etgan burchagi. Quvur bo'ylab  $M$  shar  $OM = \frac{bt^2}{2}$  m qonuni bo'yicha harakatlanadi (137-shakl).  $M$  sharchaning  $t=1$  sek dagi mutlaq tezligini toping.



137-shakl.

Oxy-qo'zg'aluvchi sistemaning  $Ox$  o'qini quvur bo'ylab  $Oy$  o'qining unga tik yo'naltiramiz. U holda nuqtaning nisbiy harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left. \begin{aligned} x = OM = \frac{bt^2}{2}; \quad b = \text{const}; \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39^*.1)$$

Nisbiy tezlikni aniqlash uchun (39\*.1) tenglamadan hosila olamiz:

$$\mathcal{G}_{x'} = \frac{dx}{dt} = bt; \quad \mathcal{G}_y = \frac{dy}{dt} = 0.$$

$$\mathcal{G}_r = \sqrt{\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2} = bt \text{ m/sek.} \quad (39^*.2)$$

$\mathcal{G}_r$  tezlik vektori  $O$  dan quvur bo'ylab yo'naladi. Quvurning  $O$  nuqta atrofidagi  $M$  shar bilan birgalikda harakati ko'chirma harakatni ifodalaydi va tezligi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\mathcal{G}_e = \omega \cdot OM \quad (39^*.3)$$

Ko'chirma harakat tenglamasidan burchak tezligini topamiz. Ya'ni:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{2} t \text{ 1/sek} \quad (39^*.4)$$

(39\*.4) ni va  $OM$  ning qiymatini (39\*.3)ga qo'ysak ko'chirma tezlik kelib chiqadi:

$$\mathcal{G}_e = \omega \cdot OM = \frac{\pi}{2} t \cdot \frac{bt^2}{4} = \frac{\pi b}{4} t^3 \text{ m/sek.} \quad (39^*.5)$$

Ko'chirma tezlik vektori  $M$  nuqtada  $OM$ ga tik  $\mathcal{G}_e \perp OM$  yo'naladi. (11.17) tenglamadan:

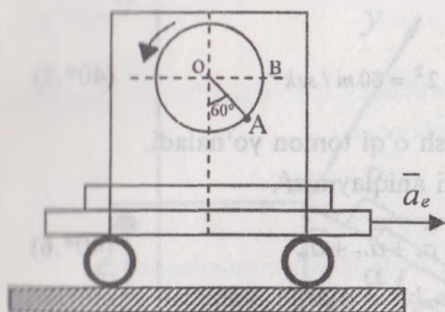
$$\mathcal{G}_o = \omega \times \overline{OM} + \mathcal{G}_r. \quad (39^*.6)$$

Uning moduli

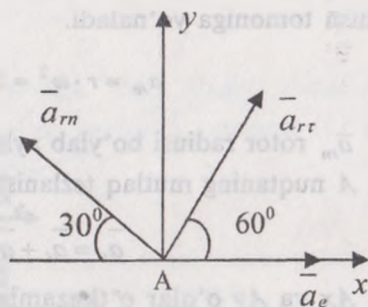
$$\mathcal{G}_o = \sqrt{\mathcal{G}_e^2 + \mathcal{G}_r^2 + 2\mathcal{G}_e \mathcal{G}_r \cos 90^\circ} = \frac{bt^2}{4} \sqrt{16 + \pi^2 t^4} \text{ m/sek.}$$

$$t=1 \text{ sek. } \mathcal{G}_o = \frac{b}{4} \sqrt{16 + \pi^2} \text{ m/sek} = 1,09b \text{ m/sek.}$$

**40\*-masala.** O'ng tomoniga gorizontal bo'ylab  $a_r=49,28$  m/sek tezligi bilan harakat qiluvchi aravaga elektr motori o'rnatilgan, uning rotor harakatga keltirish vaqtida  $\varphi=t^2$  tenglamasiga muvofiq aylanadi, bunda  $\varphi$  burchak radianlar bilan o'lchanadi. Rotorning radiusi  $OA=r=20$  m ga teng. Rotor to'g'inidagi  $A$  nuqtaning  $t=1$  sek bo'lganidagi mutlaq tezlanishini aniqlang. Shu paytda  $A$  nuqta 138-a shaklda ko'rsatilgan vaziyatda turadi.



a)



b)

138-shakl.

**Yechish.**  $A$  nuqta murakkab harakatda, ya'ni rotorni  $O$  o'qi atrofida nisbiy aylanma harakatda va arava bilan birga ilgariylanma ko'chirma harakatda ishtirok qiladi. Ko'chirma harakat ilgariylanma harakat bo'lgani uchun  $A$  nuqtaning mutlaq tezlanishi nisbiy va ko'chirma tezlanishlarining geometrik yig'indisiga tengdir. Rotor nisbiy aylanma harakatining burchak tezligi va burchak tezlanishini  $t=1$  sek uchun topamiz:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (40^*.1)$$

$$\omega = 2t = 2 \text{ 1/sek}; \quad \varepsilon = 2 \text{ 1/sek}^2 \quad (40^*.2)$$

Rotor bir tekislikda aylangani uchun  $A$  nuqtaning nisbiy tezlanishi urinma  $\vec{a}_{rr}$  nisbiy normal  $\vec{a}_{rn}$  tezlanishlarning geometrik yig'indisidan iborat. Ya'ni:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{rr} + \vec{a}_{rn} \quad (40^*.3)$$

Ularning qiymatlarini aniqlaymiz va yo'naltiramiz (138-b shakl):

$$a_{rr} = r \cdot |\varepsilon| = 20 \cdot 2 = 40 \text{ m/sek}^2 \quad (40^*.4)$$

$$x = x_0 + g_{r0} \cdot t + \frac{a_r t^2}{2} \quad (41^*.3)$$

Bunda  $t=0$  da  $x_0=0$ ,  $g_{r0}=0$  boshlang'ich shartlardan foydalansak (41\*.3) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = a_r \frac{t^2}{2}. \quad (41^*.4)$$

Shunday usul bilan ko'chirma harakat tenglamasi aniqlanadi:

$$S_r = a_r \frac{t^2}{2}. \quad (41^*.5)$$

Nuqtaning  $O\xi\eta$  qo'zg'almas sistemaga nisbatan  $\xi\eta$  koordinatalarini topamiz:

$$\xi = x \cdot \cos \alpha + a_r \cdot \frac{t^2}{2} = a_r \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} + a_r \cdot \frac{t^2}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{t^2}{2} = t^2, \quad (41^*.6)$$

$$\eta = h - x \sin 45^\circ = h - a_r \cdot \frac{t^2}{2} \sin 45^\circ = h - \frac{t^2}{2}. \quad (41^*.7)$$

(41\*.6) va (41\*.7) tenglamalar  $P$  jismning mutlaq harakat tenglamasini ifodalaydi. Bu tenglamalardan jismning traektoriya tenglamasini aniqlaymiz:

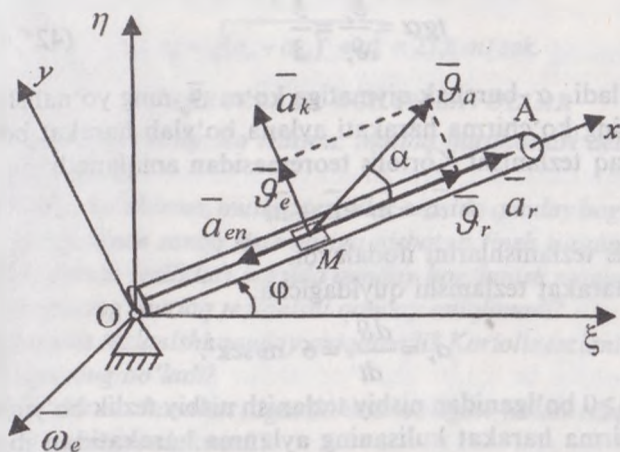
$$\eta = h - \frac{\xi}{2}. \quad (41^*.8)$$

Demak, trayektoriya tenglamasi to'g'ri chiziqdan iborat.

Mutlaq tezlanish miqdori:

$$a_o = \sqrt{a_r^2 + a_r^2 + 2a_r a_r \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{5} \text{ m/sek}^2.$$

**42\*-masala.**  $OA$  kulisa o'zining  $O$  uchi atrofida o'zgarmas  $\omega = 2 \text{ sek}^{-1}$  burchak tezligi bilan aylanadi.  $M$  polzun  $OA$  kulisa bo'ylab  $O$  dan  $A$  ga qarab  $S=OM=(2+3t^2) \text{ m}$  qonun asosida harakat qiladi. Polzunning  $t=1 \text{ sek}$  dagi mutlaq tezligi va tezlanishi topilsin (140-shakl).



140-shakl.

**Yechish.**  $O$  nuqta orqali  $O\xi\eta$  qo'zg'almas koordinatalar sistemasini hamda  $OA$  kulisa orqali  $Ox$  qo'zg'aluvchi o'qni o'tkazamiz.  $M$  nuqtaning tezligini tezliklarni qo'shish teoremasiga muvofiq aniqlaymiz:

$$\bar{g}_e = \bar{g}_r + \bar{g}_{..} \quad (42^*.1)$$

$M$  nuqtaning nisbiy tezligini  $Ox$  bo'ylab nisbiy harakat tenglamasi  $S=(2+3t^2)$  dan aniqlaymiz.

$$g_r = \frac{ds}{dt} = 6t \text{ m/sek.} \quad (42^*.2)$$

$\bar{g}_r$  tezlik  $M$  dan  $A$  ga qarab yo'naladi.  $M$  polzunni  $OA$  kulisaga nisbatan harakatsiz deb qarasak,  $M$  ning kulisa bilan birgalikda qo'zg'almas  $O$  nuqta atrofidagi harakati ko'chirma harakat bo'ladi va uning tezligi

$$g_e = \omega|OM| = 2(2+3t^2) \text{ m/sek} \quad (42^*.3)$$

ga teng.  $\bar{g}_r$  aylanish yo'nalishida, ya'ni  $\bar{g}_e \perp \bar{g}_r$ ,  $\bar{g}_a$  - moduli

$$g_a = \sqrt{g_r^2 + g_e^2} = \sqrt{(4+6t^2)^2 + (6t)^2} \quad (42^*.4)$$

tenglikdan topiladi  $t=1$  sek da (42^\*.2), (42^\*.3) va (42^\*.4) formulalardan:

$$\begin{aligned} g_r &= 6 \text{ m/sek} \\ g_e &= 10 \text{ m/sek} \\ g_a &= 11,64 \text{ m/sek} \end{aligned} \quad (42^*.5)$$

$\alpha$  - burchak tangensi esa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{g}_e}{\bar{g}_r} = \frac{5}{3} \quad (42^*.6)$$

ga teng bo'ladi.  $\alpha$  - burchak qiymatiga ko'ra  $\bar{g}_a$  ning yo'nalishi topiladi.  $M$  polzunning ko'chirma harakati aylana bo'ylab harakat bo'lganidan uning mutlaq tezlanishi Koriolis teoremasidan aniqlanadi

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k \quad (42^*.7)$$

$\bar{a}_k$  - Koriolis tezlanishlarini ifodalaydi.

Nisbiy harakat tezlanishi quyidagicha:

$$a_r = \frac{d\bar{g}_r}{dt} = 6 \text{ m/sek}^2. \quad (42^*.8)$$

Bunda  $a_r > 0$  bo'lganidan nisbiy tezlanish nisbiy tezlik bo'yicha yo'nalgan. Ko'chirma harakat kulisaning aylanma harakatidan iborat bo'lgani uchun,  $M$  polzunning ko'chirma tezlanishi normal va urunma tashkil etuvchilardan iboratdir:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_{en} + \bar{a}_{er} \quad (42^*.9)$$

Masala shartiga asosan  $\omega_e = \text{const.}$  Shuning uchun  $\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0$  bo'ladi. Bu holda

$$a_{er} = \varepsilon_e |OM| = 0; \quad a_e = a_{en} = \omega_e^2 |OM| = 4(2 + 3t)^2 \text{ m/sek}^2. \quad (42^*.10)$$

Bu tezlanish  $OA$  bo'ylab  $M$  dan  $O$  aylanish markaziga qarab yo'naladi. Ko'chirma harakat burchak tezlik vektori  $O$  nuqtadan shakl tekisligiga perpendikular o'tgan o'q bo'ylab kuzatuvchi tomonga yo'nalgandir, ya'ni  $\bar{\omega}_e \perp \bar{g}_r$ , bu holda Koriolis tezlanishning miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$a_k = 2\omega_e \bar{g}_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{g}_r) = 2\omega_e \bar{g}_r \sin 90^\circ = 24t \text{ m/sek}^2 \quad (42^*.11)$$

$\bar{a}_k$  yo'nalishi  $\bar{g}_r$  ni  $M$  nuqta atrofida ko'chirma harakat yo'nalishida  $90^\circ$  ga aylantirishdan hosil bo'ladi. Mutlaq tezlanish modulini

$$a_a = \sqrt{a_r^2 + a_{en}^2} \quad (42^*.12)$$

formuladan aniqlanadi. 140-shakldan

$$a_{ax} = a_r - a_{en}, \quad a_{ay} = a_k. \quad (42^*.13)$$

shunga ko'ra  $t=1$  sek mutlaq tezlanishning moduli

$$a_a = \sqrt{(a_r - a_{en})^2 + a_k^2} = 27,8 \text{ m/sek.} \quad (42^*.14)$$

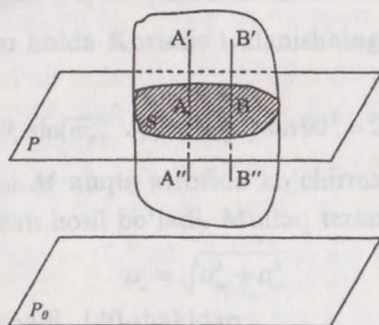
#### TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma, mutlaq harakatlari deb qanday harakatlarga aytiladi?
2. Nisbiy, ko'chirma, mutlaq tezliklar orasida qanday bog'lanish mavjud?
3. Qo'zg'almas sanoq sistemasiga nisbatan tinch turgan nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezliklari orasida qanday bog'lanish mavjud?
4. Nuqtaning mutlaq tezlanishi qanday aniqlanadi?
5. Koriolis tezlanishi qanday aniqlanadi? Koriolis tezlanishi qanday hol-larda nolga teng bo'ladi?
6. Ko'chirma harakat ilgari lanma bo'lgan holda nuqtaning mutlaq tezlanishi qanday aniqlanadi?
7. Nuqtaning mutlaq tezligi moduli qanday aniqlanadi?
8. Nuqta doira gardishi bo'ylab, doiraga nisbatan, doira aylanishiga teskari tomonga harakatlanadi. Bu nuqtaning mutlaq tezligi qanday yo'naladi?
9. Harakatdagi doira gardishi bo'ylab, doira harakati yo'nalishi bo'yicha harakatlanuvchi nuqtaning Koriolis tezlanishi qanday yo'naladi?
10. O'z o'qi atrofida tekis aylanuvchi silindrning yo'naltiruvchisi bo'ylab nuqta tekis harakat qiladi. Nuqtaning Koriolis tezlanishi nimaga teng?

56-§. Qattiq jismning tekis-parallel harakati. Qattiq jismning tekis-parallel harakatini aniqlash

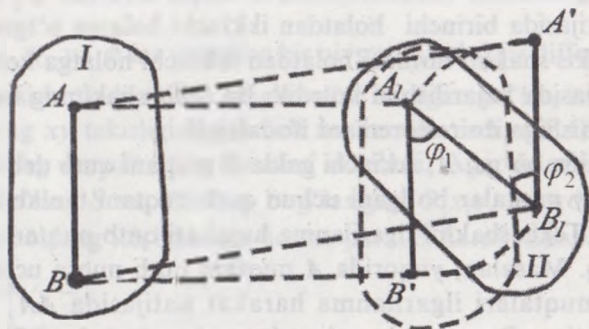
Qattiq jism harakatlanganda uning hamma nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlanga qattiq jismning bunday harakatiga **tekis-parallel harakat** deyiladi (141-shakl). Jismni  $P_0$  tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy  $P$  tekislik bilan qirqamiz. Natijada  $P$  tekislikda  $S$  qirqim yuza hosil bo'ladi. Bu yuzani tekis shakl deb ataladi. Tekis shakl hamma vaqt  $P$  tekislikda harakatlanadi. Jismda  $P$  tekislikka tik qilib  $A'A''$  olingan kesma jism harakatlanganda o'ziga o'zi parallel qoladi. Uning hamma nuqtalarining tezlik va tezlanishlari bir xil bo'lib,  $P$  tekislikka parallel bo'ladi. Bunday holda  $A'A''$  kesma ustida yotuvchi jismning hamma nuqtalarining harakatini o'rganish o'rniga, shu nuqtalardan birining harakatini o'rganish kifoya. Shunday nuqta uchun  $S$  tekis shaklning  $A$  nuqtasini olsak bo'ladi.

Demak, qattiq jism tekis parallel harakatini o'rganish uchun, jismda  $P_0$  qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan  $S$  yuza (tekis shakl)ning  $P$  tekislikdagi harakatini bilsak kifoya. Kinematikada qattiq jismning tekis parallel harakati sohasida yuritiladigan mulohazalar mashina va mexanizmlarning va ularning ayrim qismlarining harakatini o'rganishda nazariy baza sifatida qo'llaniladi. Shuning uchun qattiq jismning tekis parallel harakati kinematikaning asosiy qismi bo'lib, bu qismni ayrim o'rganiladi. Tekis shakl harakatlanadigan tekislikka **tekis shaklning harakat tekisligi** deyiladi. Tekis shaklning harakat tekisligida joylashgan qo'zg'almas  $Oxy$  koordinata sistemasiga nisbatan harakatini o'rganamiz.



141-shakl.

**Teorema.** Tekis shaklning harakat tekisligidagi har qanday harakatini ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma harakatlardan va shu qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin (142-shakl).



142-shakl.

Tekis shakl  $S$  ning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan vaziyati unda olingan ixtiyoriy ikkita nuqtasini tutashtiruvchi  $AB$  kesmaning vaziyati bilan aniqlanadi. Biroq  $AB$  kesmaning qo'zg'almas sistemaga nisbatan vaziyati uning biror nuqtasining koordinatalari va bu kesmaning  $Ox$  o'qi bilan tashkil etgan burchagi bilan aniqlanadi. Bunday nuqtaga qutb nuqta deyiladi. Faraz qilaylik,  $S$  tekis shakl  $t$  vaqtda I-holatda bo'lib uning holati  $AB$  kesma bilan aniqlansin,  $t + \Delta t$  vaqtda  $S$ , II holatga ko'chib,  $AB$  kesma  $A_1B_1$  holatni oladi.  $A$  nuqtani qutb deb olamiz.

$AB$  ning  $A$  nuqtasi  $A_1$  ga o'tguncha  $S$  tekis shaklga ilgarilanma harakat beramiz, shunda  $AB$  kesma  $A_1B'$  holatga keladi. Bu holda  $S$  ning hamma nuqtalari geometrik  $AA_1$  ga teng masofaga ko'chadi.  $A_1B'$  ni  $A_1$  nuqta atrofida  $\angle B_1A_1B' = \varphi_1$  ga aylantirsak,  $A_1B'$  kesma  $A_1B_1$  holatga ko'chadi. Tekis shakl  $S$  birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi. Endi  $B$  nuqtani qutb deb olamiz.  $B$  nuqta  $B_1$  holatga kelguncha  $S$  tekis shaklga ilgarilanma harakat beramiz. Bu holda  $AB$  kesma  $A'B_1$  holatga o'tadi.

Tekis shaklning hamma nuqtalari bir xilda  $BB'$  masofaga ko'chadi.  $B$  nuqta atrofida  $\angle A'B_1A_1 = \varphi_2$  burchakka aylantirsak,  $AB$  kesma  $A_1B_1$

holatga keladi. Bu holda  $S$  tekis shakl  $B$  nuqta harakati bilan ilgarilanma ko'chib,  $B$  nuqta atrofida  $\varphi_2$  burchakka aylanishi natijasida  $S$  birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi. Birinchi holda  $S$  tekis shakl  $A$  nuqtaning ilgarilanma harakati bilan  $A$  nuqta atrofida  $\varphi_1$  burchakka aylanishi natijasida birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tgan edi. Har ikki holda tekis shaklni birinchi holatdan ikkinchi holatga ko'chishi ikki harakat natijasida bajarilishini ko'rdik. Bu tekis shaklning harakat tekisligida ko'chishiga doir teoremani ifodalaydi.

Biz yuqorida bir gal  $A$ , ikkinchi galda  $B$  nuqtani qutb deb oldik  $A$  va  $B$  lar ixtiyoriy nuqtalar bo'lgani uchun qutb nuqtani tanlab olish ixtiyoriy bo'ladi. Tekis shaklni ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq. Masalan, yuqorida  $A$  nuqtani qutb nuqta uchun olganimizda  $S$  ni nuqtalari ilgarilanma harakat natijasida  $AA_1$  masofaga ko'chgan bo'lsa,  $B$  nuqtani qutb uchun olganimizda  $BB_1$  masofaga ko'chadi.

Biroq  $AA_1 \neq BB_1$ , aks holda ( $AA_1 = BB_1$ ) tekis shakl faqat ilgarilanma harakat qiladi. Har ikki holda  $\angle B'A_1B_1 = \angle A'B_1A_1$ : ya'ni  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Bundan tekis shaklni har ikki qutb nuqta atrofida aylanish yo'nalishi va aylanish burchagi bir xilda ekanligini ko'ramiz. Demak tekis shaklning ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq, ammo aylanma harakati qutb nuqtani tanlashga bog'liq bo'lmaydi.

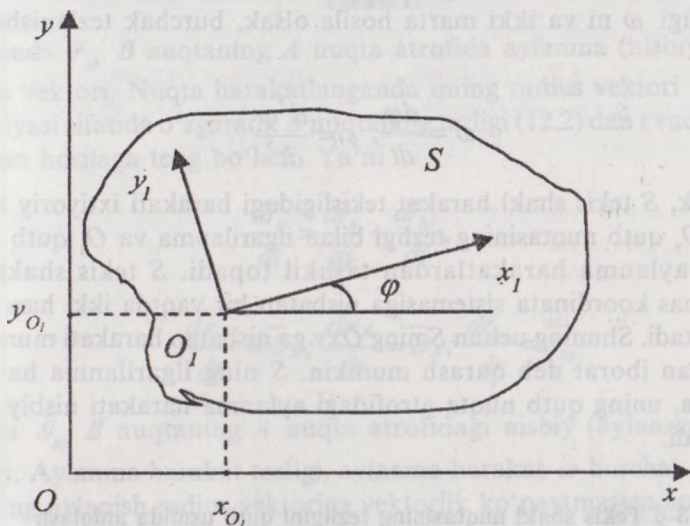
### 57-§. Tekis shaklning harakat tenglamalari

Tekis shakl  $S$  ni harakat tekisligida joylashgan  $Oxy$  qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatini tekshiramiz. Qutb nuqta uchun  $S$  ning biror  $O_1$  nuqtasini ixtiyoriy tanlab olamiz. Shu  $O_1$  nuqtada  $S$  bilan mahkam bog'langan, u bilan birga harakatlanuvchi  $O_1x_1y_1$  koordinata sistemasini o'tkazamiz.  $O_1x_1y_1$  koordinata sistemasini  $Oxy$  koordinata sistemasiga nisbatan harakati  $S$  ni  $Oxy$  ga nisbatan harakatini ifodalaydi.  $O_1x_1y_1$  ning  $Oxy$  ga nisbatan holati  $O_1$  ni koordinatalari hamda  $Ox$  ning  $O_1x_1$  bilan tashkil etgan  $\varphi$  burchagi bilan aniqlanadi. Vaqt o'tishi bilan  $S$  harakatlanganda  $x_{O_1}, y_{O_1}, x$  va  $\varphi$  lar  $t$  vaqtning funksiyasi shaklida o'zgaradi (143-shakl).

Yu'ni,

$$\left. \begin{aligned} x_{O_1} &= f_1(t) \\ y_{O_1} &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

bo'ladi.  $x_{O_1}$ ,  $y_{O_1}$  va  $\varphi$  lar vaqtning bir qiymatli, uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'ladi. (12.1) tenglamalar berilgan bo'lsa, istalgan  $t$  vaqt uchun  $S$  ning  $xy$  tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi. (12.1) tenglamalar **tekis shaklning harakat tenglamalari** deyiladi. Agar harakat davomida  $\varphi = \text{const}$  bo'lsa,  $S$  va  $Y$  bilan bog'langan  $O_1x_1y_1$  koordinata o'qlari o'zlarining boslang'ich holatiga doimo parallel harakatlanadi.



143-shakl.

$S$  ilgari lanma harakatda bo'ladi. Agar  $x_{O_1}, y_{O_1} = \text{const}$  bo'lsa,  $S$  va  $y$  bilan bog'langan  $O_1x_1y_1$  koordinata o'qlari  $O_1$  nuqta atrofida aylanma harakat qiladi.  $\varphi$  aylanish burchagini  $Ox$  dan boshlab soat milining aylanish tomoniga teskari aylanishda hisoblanadi. Shunday qilib  $S$  ning qo'zg'almas  $xy$  tekisligidagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi.

(12.1) tenglamalarning birinchi ikkitasi  $S$  tekis shaklning ilgarilanma harakatini, uchinchi  $S$  ning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi. Agar (12.1) berilgan bo'lsa, ularni birinchi ikkitasidan  $t$  bo'yicha bir marta hosila olib,  $S$  ning ilgarilanma harakat  $\mathcal{G}$  tezligini topamiz:

$$\mathcal{G}_{0,x} = f'_1(t); \quad \mathcal{G}_{0,y} = f'_2(t)$$

bunda

$$\mathcal{G}_{O_1} = \sqrt{\dot{x}_{O_1}^2 + \dot{y}_{O_1}^2} = \sqrt{\mathcal{G}_{0,x}^2 + \mathcal{G}_{0,y}^2}$$

Agar (12.1) ning uchinchi tenglamasidan  $t$  vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak,  $S$  tekis shaklning  $O_1$  nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi  $\omega$  ni va ikki marta hosila olsak, burchak tezlanishi  $\varepsilon$  ni topamiz:

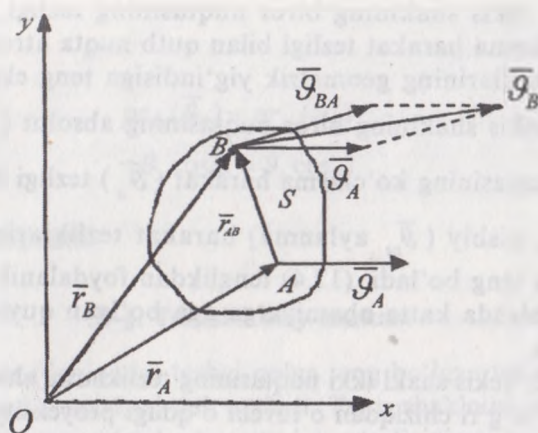
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Demak,  $S$  tekis shakl harakat tekisligidagi harakati ixtiyoriy tanlab olingan  $O_1$  qutb nuqtasining tezligi bilan ilgarilanma va  $O_1$  qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topadi.  $S$  tekis shakl  $Oxy$  qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan bir vaqtda ikki harakatda ishtirok etadi. Shuning uchun  $S$  ning  $Oxy$  ga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat deb qarash mumkin.  $S$  ning ilgarilanma harakati ko'chirma, uning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakati nisbiy harakat bo'ladi.

## 58-§ Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb usulida aniqlash

Tekis shaklning  $Oxy$  tekisligidagi harakatini tekshiramiz (144-shakl).  $S$  ning biror  $A$  nuqtasini qutb uchun tanlab, uning radius vektorini  $\vec{r}_A$  bilan belgilaymiz,  $S$  ning ixtiyoriy  $B$  nuqtasining radius vektori  $\vec{r}_B$ . Yuqorida isbotlangan teorema ga asosan quyidagicha bo'ladi.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \quad (12.2)$$



144-shakl.

Bunda  $\vec{r}_{AB}$  B nuqtaning A nuqta atrofida aylanma (nisbiy) harakat radius vektori. Nuqta harakatlanganda uning radius vektori  $t$  vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi. B nuqtaning tezligi (12.2) dan  $t$  vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}, \quad (12.3)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{g}_B; \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{g}_A; \quad \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{g}_{BA}$$

bunda  $\vec{g}_{BA}$  B nuqtaning A nuqta atrofidagi nisbiy (aylanma) harakat tezligi. Aylanma harakat tezligi, aylanma harakat  $\omega$  burchak tezlik vektorining aylanish radius vektoriga vektorlik ko'paytmasiga teng ekanligi bizga ma'lum

$$\vec{g}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}.$$

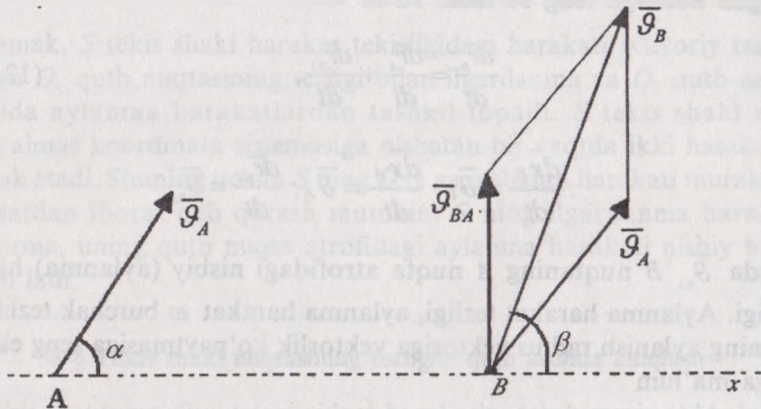
Bunda  $\vec{\omega} \perp \vec{AB}$  bo'lgani uchun  $\vec{g}_{BA}$  ning miqdori  $g_{BA} = \omega AB$  bo'ladi. Bularning qiymatlarini (12.3) ga qo'y sak quyidagi tenglikni olamiz:

$$\vec{g}_B = \vec{g}_A + \vec{g}_{BA}. \quad (12.4)$$

Demak, tekis shaklning biror nuqtasining tezligi, qutb nuqtasi-ning ilgarilanma harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng ekan. Boshqacha aytganda, tekis shaklning biror nuqtasining absolut ( $\overline{g}_B$ ) tezligi uning qutb nuqtasining ko'chirma harakat ( $\overline{g}_A$ ) tezligi bilan qutb nuqta atrofida nisbiy ( $\overline{g}_{B,A}$  aylanma) harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. (12.4) tenglikdan foydalanib, amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega bo'lgan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

**Teorema.** Tekis shakl ikki nuqtasining tezliklarini shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqdan o'tuvchi o'qdagi proyeksiyalar o'zaro teng bo'ladi.

Tekis shaklning  $\overline{g}_A$  va  $\overline{g}_B$  tezliklari berilgan bo'lsin (145-shakl). Shu tezliklarning  $A$  va  $B$  nuqtalarini tutashtiruvchi  $Ax$  yo'nalishiga proyeksiyasining tengligini ko'rsatsak, teoremani isbotlagan bo'lamiz. Buning uchun (12.4) ni  $Ax$  yo'nalishiga proyeksiyalaymiz:



145-shakl.

$$pr_{Ax}(\overline{g}_B) = pr_{Ax}(\overline{g}_A) + pr_{Ax}(\overline{g}_{B,A})$$

Bunda  $\overline{g}_{B,A} \perp AB$  bo'lgani uchun  $pr_{Ax}(\overline{g}_{B,A}) = 0$ .

Demak,

$$pr_{A^x}(\bar{g}_B) = pr_{A^x}(\bar{g}_A) \quad (12.5)$$

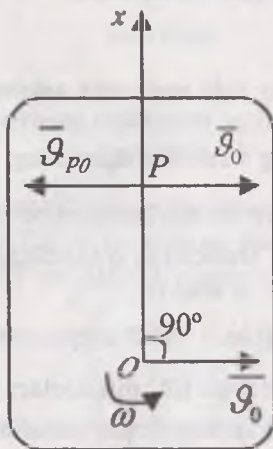
$$g_s \cos \alpha = g_B \cos \beta$$

bo'radi.

**Teorema isbotlandi.**

### 59-§. Tezliklar oniy markazi

Berilgan onda (daqiqada) tezligi nolga teng bo'lgan tekis shakl nuqtasiga tezliklar oniy markazi deb ataladi. Tekis shaklning bunday nuqtasini topish uchun uning istalgan nuqtasining tezligini aniqlaydigan (12.4) formuladan foydalanamiz. Aytaylik tekis shaklning biror  $O$  nuqtasining  $\mathcal{J}_O$  ilgarilanma (ko'chirma) harakat tezligi va shu  $O$  nuqta atrofidagi (nisbiy) aylanma harakat  $\omega$  burchak tezligi berilgan bo'lsin. Shu  $O$  nuqtani qutb nuqta deb olamiz. Bu holda tekis shaklning ixtiyoriy nuqtasining (absolut) tezligi, qutb nuqta  $\mathcal{J}_O$  ilgarilanma (ko'chirma) harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofida  $\mathcal{J}_{PO}$  (nisbiy) aylanma harakat tezligining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.  $O$  nuqtadan  $\mathcal{J}_O$  ga aylanma harakat yo'nalishiga tik chiziq o'tkazamiz (146-shakl).



146-shakl.

Bu chiziq ustida yotgan hamma nuqtalarning  $O$  nuqta atrofida aylanma tezligi o'tkazilgan chiziqqa tik, qutb nuqta  $O$  tezligiga teskari yo'naladi. Aylanma harakat tezliklari nuqtalardan aylanish markazi  $O$  gacha bo'lgan oraliqqa proporsional ekani bizga formuladan ma'lum. O'tkazilgan to'g'ri chiziq ustida shunday  $P$  nuqta topamizki, uning aylanish tezligi  $\bar{g}_{PO}$  miqdor jihatidan qutb nuqta tezligiga teng bo'lsin, ya'ni  $\bar{g}_0 = \bar{g}_{PO}$  yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'lsin  $\bar{g}_0 = -\bar{g}_{PO}$ . Bu holda  $P$  nuqtaning (absolut) tezligi (12.4) formulaga muvofiq

$$\bar{g}_P = \bar{g}_O + \bar{g}_{PO}$$

bo'ladi. Shunday qilib shu onda  $P$  nuqta tekis shaklning tezliklar oniy markazi bo'ladi. Endi  $P$  nuqtaning to'g'ri chiziq ustidagi holatini aniqlaydigan formulaga muvofiq  $\bar{g}_{PO} = \omega OP$ , ikkinchi tomondan  $\bar{g}_{PO} = \bar{g}_0$ , bu holda  $\omega OP = \bar{g}_0$  bo'ladi. Bundan,

$$OP = \frac{\bar{g}_0}{\omega}. \quad (12.6)$$

Demak, tekis shaklning tezliklar oniy markazi, qutb nuqtadan uning tezligiga aylanish yo'nalishda tik o'tgan to'g'ri chiziqda qutb nuqtasidan  $\frac{\bar{g}_0}{\omega}$  masofada joylashgan bo'lar ekan.

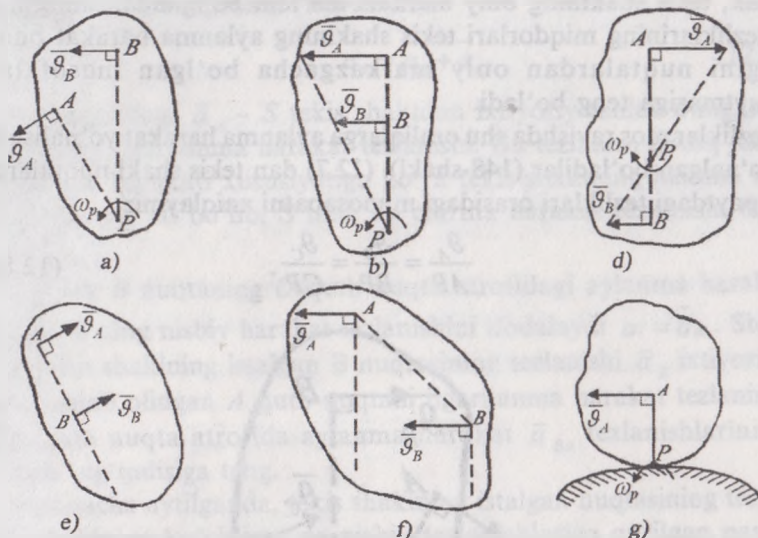
## 60-§. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari

1) Agar tekis shaklning biror  $A$  nuqtasining  $\bar{g}_A$  tezligi va ikkinchi  $B$  nuqtasining  $\bar{g}_B$  tezligining yo'nalishi berilgan bo'lsa, tezliklar oniy markazi shu  $A$  va  $B$  nuqtalardan tezliklarga o'tkazilgan tik chiziqlarni kesishgan nuqtasida bo'ladi (147- a shakl);

2) Agar tekis shaklni ikki  $A$  va  $B$  nuqtalarini  $\bar{g}_A$ ,  $\bar{g}_B$  tezliklari shu nuqtalarni tutashtiruvchi  $AB$  ga tik, miqdorlari farqli bo'lsa ( $\bar{g}_A \neq \bar{g}_B$ ), tezliklar oniy markazi tezliklarning uchini tutashtiruvchi chiziq bilan  $AB$  chiziqni davomining kesishgan nuqtasida bo'ladi (147- b, d, shakl);

3) Agar tekis shaklning  $A$  va  $B$  nuqtalarining tezliklari teng va parallel bo'lsa, tezliklar oniy markazi ( $AP = \infty$ ) cheksizlikda bo'ladi. Shu onda tekis shakl oniy ilgarilanma harakat qiladi (147- e, f shakl).

4) Amaliyotda ko'pincha tekis shakl  $S$  qo'zg'almas egri chizig'i ustida sirpanmasdan dumalaydi. Bu holda  $S$  ning egri chiziqqa tegib turgan nuqtasining tezligi nolga teng bo'ladi. Shu nuqta mazkur on uchun oniy markaz bo'ladi (147- g shakl).



147- shakl.

#### 61-§. Tekis shakl nuqtalarining tezliklarini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash

Berilgan onda tekis shaklning oniy markazi  $P$  ma'lum bo'lsin.  $P$  ni qutb nuqta uchun olib, (12.4) formulaga muvofiq tekis shaklning (148-shakl)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nuqtalari tezliklarini topamiz:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_P + \vec{g}_{AP}$$

$$\vec{g}_B = \vec{g}_P + \vec{g}_{BP}$$

$$\vec{g}_C = \vec{g}_P + \vec{g}_{CP}$$

Bu yerda  $\mathcal{G}_P = 0$  bo'lgani uchun

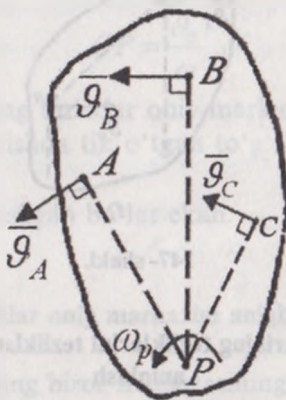
$$\mathcal{G}_A = \omega_r AP, \mathcal{G}_B = \omega_r BP, \mathcal{G}_C = \omega_r CP \quad (12.7)$$

yo'nalishlari  $\vec{\mathcal{G}}_A \perp AP$ ,  $\vec{\mathcal{G}}_B \perp BP$ ,  $\vec{\mathcal{G}}_C \perp CP$ .

Agar tekis shaklning olingan onda oniy markazi ma'lum bo'lsa, tekis shakl nuqtalarining shu ondagi tezliklari, oniy markazi atrofida xuddi oniy aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari kabi topiladi. Demak, tekis shaklning oniy markazi ma'lum bo'lganda, uning nuqtalari tezliklarining miqdorlari tekis shaklning aylanma harakat burchak tezligini nuqtalardan oniy markazgacha bo'lgan masofalariga ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Tezliklar mos ravishda shu oraliqlarga aylanma harakat yo'nalishlarda tik yo'nalgan bo'ladilar (148-shakl). (12.7) dan tekis shakl nuqtalarining oniy paytdagi tezliklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz:

$$\frac{\mathcal{G}_A}{AP} = \frac{\mathcal{G}_B}{BP} = \frac{\mathcal{G}_C}{CP}. \quad (12.8)$$



148-shakl.

## 62-§. Tekis shakl nuqtasining tezlanishi

$O_1\xi\eta$  qo'zg'almas tekislikda harakatlanayotgan  $S$  tekis shaklning bi-ror ixtiyoriy  $B$  nuqtasining tezlanishini aniqlaymiz. Bizga ma'lumki,  $S$  ning qo'zg'almas  $O_1\xi\eta$  tekislikdagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi:

1) ixtiyoriy ravishda tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma;

2) qutb nuqta atrofida nisbiy aylanma harakatlardan iborat.

Shu sababli  $S$  tekis shakl har bir nuqtasining harakati ko'chirma va nisbiy harakatlardan tashkil topgan murakkab harakatdan iborat bo'lib, tezlanishi murakkab harakat tezlanishi kabi tezlanishlarni qo'shish teoremasiga muvofiq aniqlanadi (149-shakl).

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \quad (12.9)$$

Bu tenglikdagi  $\bar{a}_A$  -  $S$  tekis shakldan ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezlanishi. Bu tezlanish qattiq jismning ilgarilanma harakati xususiyatiga ko'ra tekis shaklning hamma nuqtalari uchun bir xil bo'lib,  $S$  ning ko'chirma harakat tezlanishi bo'ladi, ya'ni  $\bar{a}_r = \bar{a}_A$ .

$\bar{a}_{BA}$  esa  $B$  nuqtaning  $O$  qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezlanishi,  $S$  ning nisbiy harakat tezlanishini ifodalaydi  $\bar{a}_r = \bar{a}_{BA}$ . Shunday qilib, tekis shaklning istalgan  $B$  nuqtasining tezlanishi  $\bar{a}_B$  ixtiyoriy ravishda tanlab olingan  $A$  qutb nuqtani ilgarilanma harakat tezlanishi  $\bar{a}_A$  bilan qutb nuqta atrofida aylanma harakat  $\bar{a}_{BA}$  tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

Boshqacha aytilganda, tekis shaklning istalgan nuqtasining tezlanishi tekis shaklning ko'chirma va nisbiy tezlanishlariga qurilgan parallelogramm diagonal bo'ylab yo'nalgan bo'lib, miqdori shu diagonal uzunligiga teng.  $\bar{a}_{BA}$  aylanma harakat tezlanishi bo'lgani uchun uni ikki tezlanishga ajratiladi:

1)  $B$  nuqtadan aylanish markazi  $A$  qutbga qarab  $BA$  bo'ylab yo'nalgan  $\bar{a}_{BA}^n$  - markazga intilma tezlanish;

2) Aylanish radiusi  $BA$  ga tik yo'nalgan  $\bar{a}_{BA}^r$  - aylanma tezlanishga ajraladi. Ya'ni

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^r. \quad (12.10)$$

Markazga intilma tezlanishning moduli

$$a_{BA}^n = \omega^2 BA. \quad (12.11)$$

Hamma vaqt musbat son bo'lgani uchun  $a''_{BA}$  hamma vaqt kuzatilayotgan nuqtadan aylanish radiusi bo'ylab aylanish markaziga yo'nalgan bo'ladi. Aylanma tezlanishning moduli

$$a'_{BA} = |\varepsilon| BA \quad (12.12)$$

ga teng yo'nalishi aylanma harakat burchak tezlanishining ishorasiga bog'liq.

Agar  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} > 0$  bo'lsa,  $\bar{a}_{BA}'$  BA ga tik qutb nuqta atrofida aylanma

harakat tezligi  $\bar{g}_{BA}$  bilan bir yo'nalishda bo'lib, aylanma harakat tezlanuvchan bo'ladi (149-a shakl). Agar  $\varepsilon < 0$  bo'lsa,  $\bar{a}_{BA}'$  BA ga tik, aylanma harakat tezligi  $\bar{g}_{BA}$  ga teskari tomonga yo'nalgan bo'ladi. Bu holda aylanma harakat sekinlanuvchan bo'ladi (149-b shakl).  $\bar{a}_{BA}''$  bilan  $\bar{a}_{BA}'$  orasidagi burchak  $90^\circ$  bo'lgani uchun  $a''_{BA}$  ning moduli

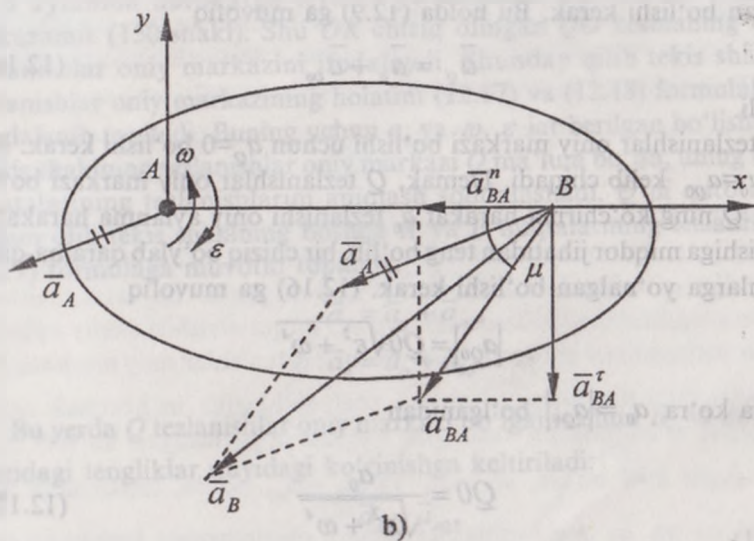
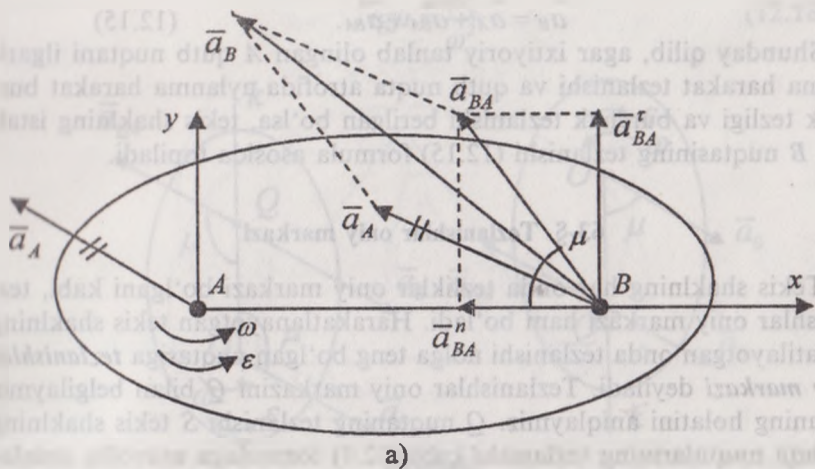
$$a_{BA} = \sqrt{(a''_{BA})^2 + (a'_{BA})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} \quad (12.13)$$

tenglikdan topiladi.

Agar aylanish radiusi AB bilan  $a_{BA}$  ni tashkil etgan burchagini m bilan belgilasak, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\lg \mu = \frac{|a'_{BA}|}{a''_{BA}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (12.14)$$

Bundan  $\omega$  va  $\varepsilon$  aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishi tekis shaklining hamma nuqtalari uchun bir xilda bo'lganligi sababli m burchak har onda tekis shaklning hamma nuqtalari tezlanishlari uchun bir xilda bo'ladi. Agar  $\varepsilon = 0$  bo'lsa,  $\bar{a}_{BA}' = 0$  bo'lib,  $\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}''$ . Bu holda aylanma harakatdagi tezlanish markazga intilma tezlanishdan iborat bo'lib, aylanma harakat tekis o'zgaruvchan aylanma harakat bo'ladi. (12.10) ga ko'ra (12.9) ni quyidagicha yozish mumkin:



149 - shakl.



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{BA}. \quad (12.15)$$

Shunday qilib, agar ixtiyoriy tanlab olingan  $A$  qutb nuqtani ilgari-  
lanma harakat tezlanishi va qutb nuqta atrofida aylanma harakat bur-  
chak tezligi va burchak tezlanishi berilgan bo'lsa, tekis shaklning istal-  
gan  $B$  nuqtasining tezlanishi (12.15) formula asosida topiladi.

### 63-§. Tezlanishlar oniy markazi

Tekis shaklning har onda tezliklar oniy markazi bo'lgani kabi, tez-  
lanishlar oniy markazi ham bo'ladi. Harakatlanayotgan tekis shaklning  
kuzatilayotgan onda tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasiga *tezlanishlar*  
*oniy markazi* deyiladi. Tezlanishlar oniy markazini  $Q$  bilan belgilaymiz  
va uning holatini aniqlaymiz.  $Q$  nuqtaning tezlanishi  $S$  tekis shaklning  
boshqa nuqtalarining tezlanishi kabi (12.9) formulaga muvofiq aniqla-  
nadi. Buning uchun  $S$  ning biror  $O$  nuqtasining  $a_0$  ilgarilanma ko'chirma  
harakat tezlanishi bilan  $S$  ning burchak tezligi  $\omega$  va burchak tezlanishi  $\varepsilon$   
berilgan bo'lishi kerak. Bu holda (12.9) ga muvofiq

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_o + \vec{a}_{Qo} \quad (12.16)$$

bo'ladi.

$Q$  tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun  $a_Q=0$  bo'lishi kerak. Bun-  
dan  $a_0=a_{Qo}$  kelib chiqadi. Demak,  $Q$  tezlanishlar oniy markazi bo'lishi  
uchun  $Q$  ning ko'chirma harakat  $a_0$  tezlanishi oniy aylanma harakat  $a_{Qo}$   
tezlanishiga miqdor jihatidan teng bo'lib, bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi  
tomonlarga yo'nalgan bo'lishi kerak. (12.16) ga muvofiq

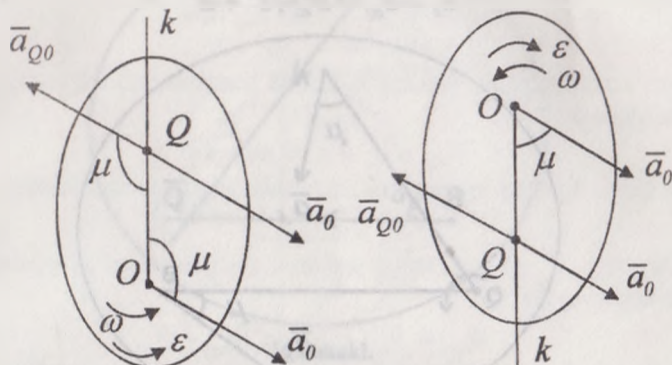
$$|a_{Qo}| = QO\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

shartga ko'ra  $a_0 = |a_{Qo}|$  bo'lganidan

$$QO = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} \quad (12.17)$$

ni topamiz. Bu tenglik tezlanishlar oniy markazi  $Q$  ning  $O$  nuqtagacha  
bo'lgan masofasini aniqlaydi. Oniy aylanish radiusi  $QO$  ning  $a_{Qo}$  bilan  
tashkil etgan burchagi (12.14) formulaga muvofiq

$$tg \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (12.18)$$



150-shakl.

$a_0$  ga  $\mu$  burchak ostida ( $\varepsilon > 0$ ) aylanma harakat yo'nalishida (agar  $\varepsilon < 0$  aylanma harakatga teskari yo'nalishda bo'lsa)  $OK$  chizig'ini o'tkazamiz (150-shakl). Shu  $OK$  chiziq olingan  $QO$  kesmaning  $Q$  uchi tezlanishlar oniy markazini ifodalaydi. Shunday qilib tekis shaklning tezlanishlar oniy markazining holatini (12.17) va (12.18) formulalaridan foydalanib topiladi. Buning uchun  $a_0$  va  $\omega$ ,  $\varepsilon$  lar berilgan bo'lishi shart. Tekis shaklning tezlanishlar oniy markazi  $Q$  ma'lum bo'lsa, uning boshqa nuqtalarining tezlanishlarini aniqlash soddalashadi.  $Q$  ni qutb nuqtasi uchun olib tekis shaklning boshqa  $A$  va  $B$  nuqtalarining tezlanishlarini (12.1) formulaga muvofiq topamiz:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ},$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ}.$$

Bu yerda  $Q$  tezlanishlar oniy markazi bo'lgani uchun  $\bar{a}_Q = 0$  bo'lib, yuqoridagi tengliklar quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

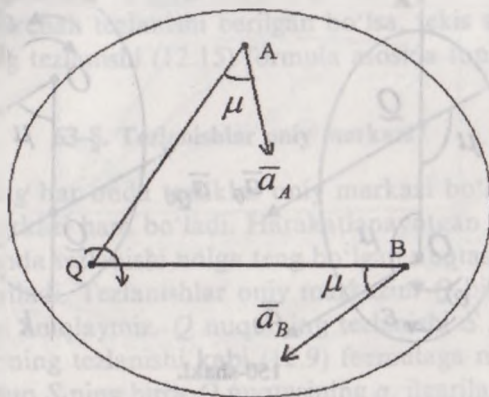
$$\bar{a}_A = \bar{a}_{AQ},$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BQ}$$

(12.19)

bu tezlanishlarning moduli

$$\begin{aligned} a_A &= a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ a_B &= a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{aligned} \quad (12.20)$$



151-shakl.

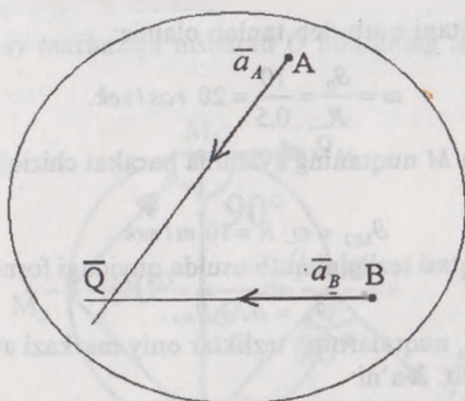
tengliklaridan aniqlanadi. (12.11) formulalardan  $S$  tekis shaklning tengishli nuqtalarining tezlanishlari nuqtalardan tezlanishlar oniy markazi bo'lgan oraliqlarga proporsional ekani kelib chiqadi:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ} \quad (12.21)$$

olingan (12.11) va (12.12) ga asosan quyidagi natijaga kelish mumkin.

Agar tekis shaklning tezlanishlar oniy markazi, aylanma harakat burchak tezligi  $\omega$  va burchak tezlanishi  $\varepsilon$  lar berilgan bo'lsa, tekis shaklning istalgan nuqtalarining tezlanishlarini qutb nuqta atrofida oddiy aylanma harakat tezlanishlari kabi aniqlanar ekan. Tezlanishlar oniy markazi  $A$  va  $B$  nuqtalardan ularning  $\bar{a}_A$  va  $\bar{a}_B$  tezlanishlariga  $m$  burchak ostida o'tkazilgan chiziqlarning kesishgan nuqtasida joylashgan bo'ladi (151-shakl). Agar  $\varepsilon=0$  bo'lsa,  $a_A = a''_{AQ}$  va  $a_B = a''_{BQ}$  bo'lib, tezlanishlar oniy markazi  $\bar{a}_A$  va  $\bar{a}_B$  tezlanishlar yo'nalgan chiziqlarning kesishgan nuqtasida joylashgan bo'ladi (152-shakl).

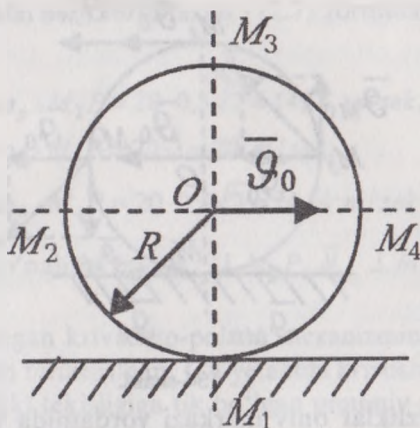
Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi bir nuqtada bo'lmaydi.



152-shakl.

#### 64-§. Tekis shakl nuqtasi tezligi va tezlanishini aniqlashga doir masalalar

**43\*-masala.**  $R=0,5$  m radiusli g'ildirak to'g'ri chiziqli yo'l uchastka-sida sirg'anmay g'ildiraydi; g'ildirak markazining tezligi o'zgarmas bo'lib,  $v = 10$  m/s ga teng. G'ildirakning vertikal va gorizontallarning uchlari bo'lmish  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  va  $M_4$  nuqtalarning tezliklari va g'ildirakning burchak tezligini aniqlang (153-shakl).



153-shakl.

**Yechish.**  $O$  nuqtani qutb deb tanlab olamiz:

$$\omega = \frac{g_0}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ ras/sek.}$$

$O$  qutb atrofida  $M$  nuqtaning aylanma harakat chiziqli tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$g_{MO} = \omega \cdot R = 10 \text{ m/sek.}$$

Tekis shakl nuqtasi tezligini qutb usulda quyidagi formulasiga asosan:

$$\bar{g}_M = \bar{g}_0 + \bar{g}_{M0}. \quad (43^*.1)$$

$M_1, M_2, M_3, M_4$  nuqtalarning tezliklar oniy markazi atrofidagi aylanish tezliklari tengdir. Ya'ni:

$$g_{M1O} = g_{M2O} = g_{M3O} = g_{M4O} = g_{MO}. \quad (43^*.2)$$

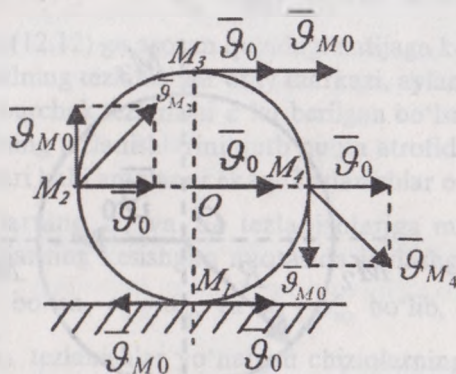
(154-shakl) dan va (43\*.1) formuladan foydalangan holda hamma nuqtalarning tezliklarini aniqlaymiz

$$g_{M1} = g_0 - g_{M0} = 0,$$

$$g_{M2} = \sqrt{g_0^2 + g_{M0}^2} = 10\sqrt{2} \text{ m/sek} = 14,14 \text{ m/sek},$$

$$g_{M3} = g_0 + g_{M0} = 20 \text{ m/sek},$$

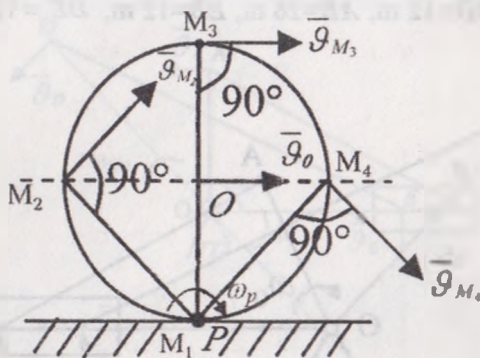
$$g_{M4} = \sqrt{g_0^2 + g_{M0}^2} = 10\sqrt{2} \text{ m/sek} = 14,14 \text{ m/sek}.$$



154-shakl.

Masalani tezliklar oniy markazi yordamida yechamiz (155-shakl). Ma'lumki, g'ildirakning qo'zg'almas sirtga tegib turgan nuqtasi  $P$  tezliklar oniy markazi bo'ladi.

Tezliklar oniy markaziga nisbatan  $O$  nuqtaning tezligini yozamiz:


$$g_0 = \omega_p R \quad (43^{*}.3)$$
$$\omega_p = \frac{g_0}{R} = \frac{10}{0.5} = 20 \text{ rad/sec}$$

$M_2, M_3, M_4$  nuqtalarning tezliklarini (12.7) formuladan foydalanib aniqlaymiz

$$g_{M_2} = \omega_p \cdot M_2 P = 20 \cdot 0,5\sqrt{2} = 14,14 \text{ m/sek},$$

$$g_{M_3} = \omega_p \cdot M_3 P = 20 \cdot 1 = 20 \text{ m/sec},$$

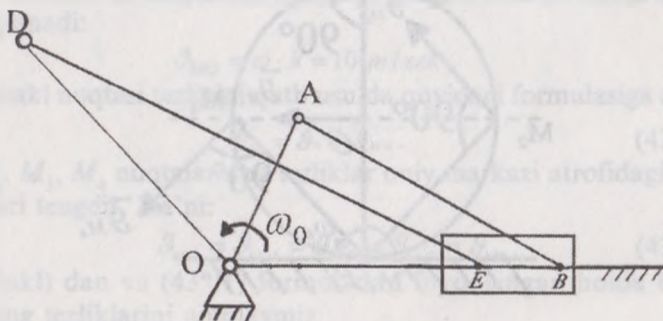
$$g_{M_1} = \omega_p \cdot M_4 P = 20 \cdot 0,5 \sqrt{2} = 14,14 \text{ m/sec}$$

tezlik vektorlarning yo'nalishi esa  $\bar{g}_{M_2} \perp M_2P$ ,  $\bar{g}_{M_1} \perp M_3P$ ,  $\bar{g}_{M_4} \perp M_4P$  bo'ladi.

**44\*-masala.** Juftlangan krivoship-polzun mexanizmining  $B$  va  $E$  polzunlari  $BE$  sterjen bilan biriktirilgan.  $OA$  yetakchi krivoship va  $OD$  yetaklanuvchi krivoship shakl tekisligiga tik bo'lgan umumiy qo'zg'almas o'q atrofida aylanadi. Oniy burchak tezligi  $\omega_0 = 12 \text{ rad/sek}$  bo'lgan  $OA$

yetakchi krivoship polzunlar yo'naltiruvchisiga perpendikular bo'lgan paytga  $OD$  yetaklanuvchi krivoship va  $DE$  shatun oniy burchak tezliklari qancha bo'lishi aniqlansin (156-shakl).

$$OA=10 \text{ m}, OD=12 \text{ m}, AB=26 \text{ m}, EB=12 \text{ m}, DE = 12\sqrt{3} \text{ m}.$$



156-shakl.

**Yechish.**  $A$  nuqta  $O$  atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun, uning chiziqli tezligi

$$\mathcal{V}_A = \omega_O \cdot OA = 12 \cdot 10 = 120 \text{ m/sek}$$

ga teng.

$B$  va  $E$  nuqtalar tezliklari o'zaro teng bo'lib, ularning yo'nalishlari gorizontallik bo'ylab yo'naladi.  $\mathcal{V}_B$  va  $\mathcal{V}_E$  lar o'zaro parallel bo'lgani uchun, ularning qiymatlari teng (157-shakl). Demak,

$$\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_B = \mathcal{V}_A = 120 \text{ m/sek}$$

bo'ladi.

$DE$  zvenoni ko'ramiz.

$D$  nuqta  $O$  atrofida aylangani uchun  $\mathcal{V}_D \perp OD$  bo'ladi.  $\mathcal{V}_D$  ga  $D$  nuqta orqali  $DP$  perpendikular,  $\mathcal{V}_E$  ga  $E$  nuqta orqali  $EP$  perpendikular o'tkazamiz, bu perpendikularlar kesishgan nuqta  $P$ ,  $DE$  zveno uchun tezliklar oniy markazi bo'ladi:

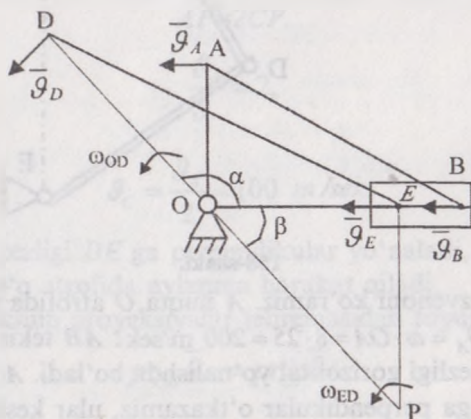
$$\Delta OAB \text{ dan } OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{26^2 - 12^2} = 24 \text{ m},$$

$$OE = OB - EB = 24 - 12 = 12 \text{ m}.$$

Kosinuslar teoremasiga asosan

$$\cos \alpha = \frac{OD^2 + OE^2 - DE^2}{2OD \cdot OE} = \frac{12^2 + 12^2 - 12^2 \cdot 3}{2 \cdot 12 \cdot 12} = -\frac{1}{2}.$$

$\alpha = 120^\circ$  bo'ladi,  $\beta = 180 - \alpha = 60^\circ$  bo'lgani uchun  $OP = 24$  m;



157-shakl.

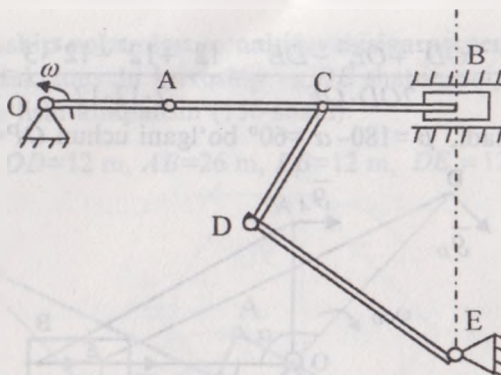
$$EP = OP \cos 30^\circ = 24 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} 12\sqrt{2} \text{ m},$$

$$\omega_{ED} = \frac{g_E}{EP} = \frac{120}{12\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5,77 \text{ rad / sek.}$$

$$g_D = \omega_{ED} \cdot DP = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 36 = 120\sqrt{3} = 207,6 \text{ m / sek.}$$

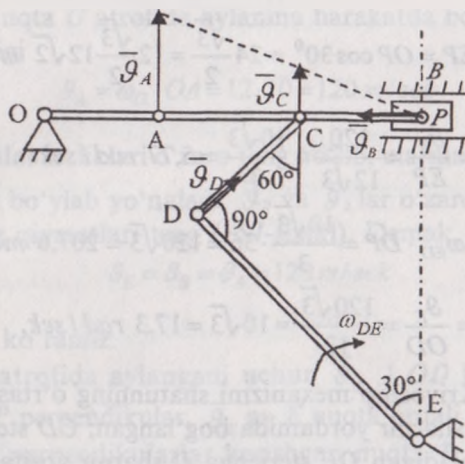
$$\omega_{OD} = \frac{g_D}{OD} = \frac{120\sqrt{3}}{12} = 10\sqrt{3} = 17,3 \text{ rad / sek.}$$

**45\*-masala.** Krivoship mexanizmi shatunning o'rtasidagi  $C$  nuqtada  $CD$  sterjen bilan sharnir yordamida bog'langan;  $CD$  sterjen esa  $E$  nuqta atrofida aylana oladigan  $DE$  sterjenga  $D$  sharnir vositasida bog'langan. Agar  $B$  va  $E$  nuqtalar bir vertikalda joylashgan bo'lsa, krivoship mexanizmining shaklda ko'rsatilgan holatida  $DE$  sterjen burchak tezligi aniqlansin;  $OA$  krivoshipning burchak tezligi  $\omega = 8$  rad/sek,  $OA = 25$  m,  $DE = 100$  m,  $\angle CDE = 90^\circ$  va  $\angle BED = 30^\circ$  (158-shakl).



158-shakl.

**Yechish.**  $OB$  zvenoni ko'ramiz.  $A$  nuqta  $O$  atrofida aylanma harakat chiziqli tezligi  $\mathcal{G}_A = \omega \cdot OA = 8 \cdot 25 = 200$  m/sek.  $AB$  tekis parallel harakat qiladi.  $B$  nuqta tezligi gorizontall yo'nalishda bo'ladi.  $A$  nuqtadan  $\mathcal{G}_A$  ga  $B$  nuqtadan  $\mathcal{G}_B$  ga perpendikular o'tkazamiz, ular kesishgan nuqta tezliklar oniy markazi bo'ladi (159-shakl).



159-shakl.

Bu nuqta  $B$  bilan ustma-ust tushadi. Demak,  $\mathcal{G}_B = 0$  va  $\mathcal{G}_A / AP = \mathcal{G}_C / CP$  o'rinli bo'ladi:

$t=0,5$  s da  $\omega_p = 10 \text{ rad/sek}$ .

$O$  nuqtaning tezligini aniqlaymiz

$$\mathcal{G}_0 = \omega_p \cdot OC = 20t \cdot 0,1 = 2t \text{ m/sek}$$

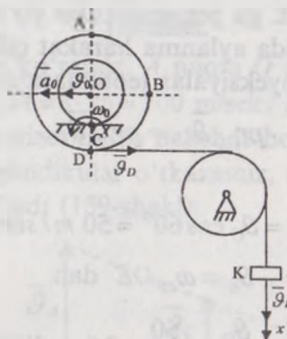
$$\varepsilon_p = \dot{\omega}_p = 20 \text{ rad/sek}^2.$$

$O$  nuqtani qutb deb olamiz.

$$a_0 = \mathcal{G}_0 = 2 \text{ m/sek}^2$$

Tezlanishni qutb usulida aniqlaymiz

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^r. \quad (46^*.1)$$

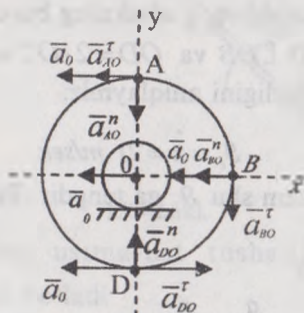


160-shakl.

$A$  nuqta  $O$  atrofida aylanma harakat tezlanishini aniqlaymiz:

$$a_{AO}^n = \omega_p^2 \cdot OA = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ m/sek}^2$$

$$a_{AO}^r = \varepsilon_p \cdot OA = 20 \cdot 0,2 = 4 \text{ m/sek}^2.$$



161-shakl.

(161-shakl)dan foydalangan holda (46\*.1) ni  $x$  va  $y$  o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_{Ox} = -a_0 - a_{AO}^r = -2 - 4 = -6 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{Oy} = -a_{AO}^n = -20 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ox}^2 + a_{Oy}^2} = \sqrt{36 + 400} = \sqrt{436} = 20,88 \text{ m/sek}^2.$$

Huddi shunday usulda  $D$  va  $B$  nuqtalarning tezlanishlarini aniqlaymiz:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_0 + \bar{a}_{DO}^n + \bar{a}_{DO}^r,$$

$$a_{DO}^n = \omega_p^2 \cdot OD = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{DO}^r = \varepsilon_p \cdot OD = 20 \cdot 0,2 = 4 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{Ox} = -a_0 + a_{DO}^r = 2 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{Oy} = a_{DO}^n = 20 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_D = \sqrt{a_{Ox}^2 + a_{Oy}^2} = \sqrt{404} = 20,1 \text{ m/sek}^2,$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{a}_{BO}^n + \bar{a}_{BO}^r,$$

$$a_{BO}^n = \omega_p^2 \cdot OB = 20 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{BO}^r = \varepsilon_p \cdot BD = 4 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{Ox} = -a_0 - a_{BO}^n = -22 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_{Oy} = a_{BO}^r = -4 \text{ m/sek}^2,$$

$$a_B = \sqrt{a_{Ox}^2 + a_{Oy}^2} = 22,36 \text{ m/sek}^2.$$

Demak,  $a_A = 20,88 \text{ m/sek}^2$ ;  $a_B = 22,36 \text{ m/sek}^2$ ;  $a_D = 20,1 \text{ m/sek}^2$  ekan.

## TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

ismning qanday harakati tekis parallel harakat deyiladi?

parallel harakat tenglamalari qanday?

1. *Qutbning ilgarilanma hamda aylanma harakatlari qutb nuqtaning*

2. Tug'liqmi?

2. Tekl. harakat tenglamalariga asosan qutb nuqtaning tezligi va

5. Tekl. / *ishi qanday aniqlanadi?*

aklning ixtiyoriy nuqtasi tezligi va qutb nuqtasi tezligi orasi-

4. Lek... 'lanish mavjud?

$AB$  to'g'ri chiziqli bilan  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  esa  $15^\circ$  hosil qilsa, tekis

3. Teki, B nuqtalaridan qaysisini kattaroq tezlikka ega bo'ladi?

**Taklning tezliklar oniy markazi nima? Tezliklar oniy markazi**

Qanday aniqlanadi?

7. Tekislik shakl oniy ilgariylanma harakat qilsa, uning tezliklar oniy

da joylashadi?

8. 4. 1. *...ki nuqtalari tezligi, qutb nuqtasiga nisbatan qanday qonun*

8. Agul'ni planadi?

markazi qo'ltig'ida mas sirt ustida dumalovchi g'ildirakning qaysi nuqtasi eng

9. Tekst *...ega?*

10. a) *Ushbu akl nuqtasi tezlanishi qanday aniqlanadi?*

10. Qo'zg'atish tezliklari  $\nu_1$  va  $\nu_2$  bo'lgan ikki taqviyada qanday tezlanishlar qanday aniqlanadi?

11. Teki<sup>2</sup> *bu* shakl oniy ilgariqlanma harakat bo'lib 4 nuqta tezlanish

13 -n *endikular* vo 'nalgan bo'lsa tekis shakl. B nuqtasi te'zlanishi

12.  $d_{84}$   $\frac{1}{2}$  shga ega?

13. Agar  $\vec{A}$  nuqata tezlanishi nolga teng bo'lib  $B$  nuqata tezlanishi  $AB$

AB ga peylo bo'yicha vo'nalgan bo'lsa, tekis shaklning burchak tezlanishi

qanday yo'l?

14. Agar

to 'g'ri chiz'at

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

### Asosiy adabiyotlar

1. P.Shoxaydarova va boshqalar. Nazariy mexanika. -T.: "O'qituvchi", 1992.
2. T.R. Rashidov va boshqalar. Nazariy mexanika asoslari. -T.: "O'qituvchi", 1991.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. -М.: "Высшая школа", 2002.
4. I.V. Meshcherskiy. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. -T.: "O'qituvchi", , 1990.
5. T. Anorqulov, Q. Xusanov, A. Komiljonov. Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to'plami. -T.: "Ziyo-nashr", 2002.
6. М.М.Муродов, Х.М.Иноятова, К.У.Уснатдинов. Nazariy mexanika. -T.: "Istiqlof", 2004.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е изд., Физматлит, 2001. Russian djvu. 2901 KB 0,9 KB/p. 600dpi OCR lib.homelinux.org /файл/.

### Qo'shimcha adabiyotlar

1. Sh.A.Shoobidov, X.N. Habibullayeva, F.D. Fayzullayeva. Statika. -Toshkent: ToshDTU, 2004.
2. М.И. Бать, Г.Ю. Джаналидзе, А.С. Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. -М.: "Наука", 1992.

## MUNDARIJA

|                                                                                                |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Muqaddima .....                                                                                | 3         |
| <b>I QISM. QATTIQ JISM STATIKASI</b>                                                           |           |
| <b>I BOB. Statikaning asosiy tushunchalari va aksiomalari .....</b>                            | <b>5</b>  |
| 1-§. Asosiy tushunchalar va ta'riflar .....                                                    | 5         |
| 2-§. Statikaning asosiy aksiomalari .....                                                      | 7         |
| 3-§. Bog'lanish va bog'lanish reaksiya kuchlari .....                                          | 9         |
| <b>II BOB. Kesishuvchi kuchlar sistemasi .....</b>                                             | <b>13</b> |
| 4-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash ..... | 13        |
| 5-§. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish .....                                                | 16        |
| 6-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash .....      | 18        |
| 7-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik va analitik muvozanat shartlari .....         | 22        |
| 8-§. Uch kuch muvozanati haqida teorema .....                                                  | 23        |
| 9-§. Statik aniq va statik aniqmas masalalar .....                                             | 24        |
| 10-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar .....                       | 25        |
| <b>III BOB. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi .....</b>                        | <b>32</b> |
| 11-§. Nuqtaga nisbatan kuch momenti .....                                                      | 32        |
| 12-§. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi .....                          | 34        |
| 13-§. Juft kuch va uning momenti .....                                                         | 36        |
| 14-§. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish .....         | 43        |
| 15-§. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari .....          | 49        |
| 16-§. Jismlar sistemasining muvozanati .....                                                   | 55        |
| 17-§. Masalalar yechish .....                                                                  | 56        |
| <b>IV BOB. Fermalardagi zo'riqlashlarni aniqlash .....</b>                                     | <b>64</b> |
| 18-§. Fermada hosil bo'ladigan zo'riqlash kuchlarini hisoblash usullari .....                  | 64        |
| <b>V BOB. Ishqalanish .....</b>                                                                | <b>71</b> |
| 19-§. Sirpanib ishqalanish .....                                                               | 71        |
| 20-§. Yumalab ishqalanish .....                                                                | 77        |

|                                                                                                      |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>VI BOB. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi .....</b>                                   | <b>80</b>  |
| 21-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti .....                                                          | 81         |
| 22-§. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasidagi munosabat .....            | 85         |
| 23-§. Fazodagi juft kuchlar .....                                                                    | 86         |
| 24-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan bir markazga keltirish .....          | 90         |
| 25-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishning turli hollari ..... | 94         |
| Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi .....                                      | 95         |
| 26-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari .....                                       | 100        |
| 27-§. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari .....                              | 101        |
| 28-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanat shartlariga doir masalalar .....       | 101        |
| <b>VII BOB. Og'irlik markazi .....</b>                                                               | <b>110</b> |
| 29-§. Parallel kuchlarni qo'shish, parallel kuchlar markazi .....                                    | 110        |
| 30-§. Jism og'irlik markazining koordinatalari uchun umumiy formulalar .....                         | 112        |
| 31-§. Og'irlik markazini aniqlash usullari. Simmetrik jismlarning og'irlik markazi .....             | 115        |

## II QISM. KINEMATIKA

|                                                                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>VIII BOB. Kinematikaga kirish va kinematikaning asosiy tushunchalari ..</b>                                              | <b>123</b> |
| 32-§. Nuqta kinematikasi. Nuqta harakatini aniqlash usullari .....                                                          | 124        |
| 33-§. Nuqtaning tezligi .....                                                                                               | 130        |
| 34-§. Tezlik godografi .....                                                                                                | 134        |
| 35-§. Nuqtaning tezlanishi .....                                                                                            | 135        |
| 36-§. Harakatning xususiy hollari .....                                                                                     | 142        |
| 37-§. Nuqta kinematikasiga oid masalalar .....                                                                              | 144        |
| <b>IX BOB. Qattiq jismning sodda harakatlari .....</b>                                                                      | <b>155</b> |
| 38-§. Qattiq jismning ilgarilanma harakati .....                                                                            | 155        |
| 39-§. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati .....                                                     | 158        |
| 40-§. Aylanma harakat burchak tezligi .....                                                                                 | 159        |
| 41-§. Aylanma harakat burchak tezlanishi .....                                                                              | 161        |
| 42-§. Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi .....                                                       | 162        |
| 43-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasining tezligi va tezlanishining vektor ifodalari ..... | 164        |
| 44-§. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatiga doir masalalar .....                                      | 166        |

|                                                                                                            |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>X BOB. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakati (sferik harakat) .....</b>           | <b>171</b> |
| 45-§. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamalari. Oniy burchak tezlik ..... | 171        |
| 46-§. Oniy burchak tezlanishi .....                                                                        | 173        |
| 47-§. Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezligi .....                                                    | 176        |
| 48-§. Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezlanishi .....                                                 | 177        |
| 49-§. Sferik harakatga oid masalalar .....                                                                 | 179        |
| <b>XI BOB. Nuqtaning murakkab harakati .....</b>                                                           | <b>190</b> |
| 50-§. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va mutlaq harakatlari .....                                              | 190        |
| 51-§. Nisbiy harakat tenglamalari .....                                                                    | 192        |
| 52-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligi .....                                                         | 193        |
| 53-§. Tezlanishlarni qo'shish teoremasi (Koriolis teoremasi) .....                                         | 196        |
| 54-§. Koriolis tezlanishi .....                                                                            | 197        |
| 55-§. Mutlaq harakat tezlik va tezlanishlarini aniqlashga doir masalalar ..                                | 199        |
| <b>XII BOB. Qattiq jismning tekis-parallel harakati .....</b>                                              | <b>208</b> |
| 56-§. Qattiq jismning tekis-parallel harakati. Qattiq jismning tekis-parallel harakatini aniqlash .....    | 208        |
| 57-§. Tekis shaklning harakat tenglamalari .....                                                           | 210        |
| 58-§. Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb usulida aniqlash .....                                        | 212        |
| 59-§. Tezliklar oniy markazi .....                                                                         | 215        |
| 60-§. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari .....                                                     | 216        |
| 61-§. Tekis shakl nuqtalarining tezliklarini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash .....               | 217        |
| 62-§. Tekis shakl nuqtasining tezlanishi .....                                                             | 218        |
| 63-§. Tezlanishlar oniy markazi .....                                                                      | 222        |
| 64-§. Tekis shakl nuqtasi tezligi va tezlanishini aniqlashga doir masalalar ..                             | 225        |
| Foydalanilgan adabiyotlar.....                                                                             | 235        |

**O'quv-uslubiy nashr**

**Sh.A.Shoobidov, X.N.Habibullayeva, F.D.Fayzullayeva**

**NAZARIY MEXANIKA**

*(statika, kinematika)*

**Muharrir**

**X.PO'LATXO'JAYEV**

**Musahhih**

**B.TUYOQOV**

**Tex.muhammad**

**Ye. DEMCHENKO**

**Kompyuterda sahlifalovchi**

**D. ABDULLAYEV**

**Muqova «ARTLOL» dizayn markazida tayyorlandi**

*Original maket «El-Press» MChJda tayyorlandi*

Bosishga 20.08.2008-y.da ruxsat etildi.

Garnitura LexTimes Cyr+Uz. Bichimi 60x84 1/16.

Bosma tobog'i 15,0.

Shartli bosma tobog'i 13,95.

Adadi 1000 nusxa. Buyurtma №182.

Bahosi kelishilgan narxda.

«Yangi asr avlodi» nashriyot-matbaa markazida tayyorlandi.

«Yoshlar matbuoti» bosmaxonasida bosildi.

100113. Toshkent, Chilonzor-8, Qatortol ko'chasi, 60.

Murojaat uchun telefonlar

Nashr bo'limi 278-36-89, marketing bo'limi 128-78-43

Faks 273-00-14, e-mail: [yangiasravlodi@mail.ru](mailto:yangiasravlodi@mail.ru)



ISBN 978-9943-08-343-1



9 789943 083431